

Lesbrief:

De Wet van Bernoulli

Introductie

Wat hebben neutronensterren, wc-buizen, blikjes cola, en je strottenhoofd met elkaar gemeen? Bij alledrie stroomt er vloeistof van A naar B. Niks zo interessant als vloeistoffen en gassen! Geen examenstof in het Nederlands curriculum, hoor ik? Toch wel! De wetten van vloeistoffen en gassen blijken namelijk niks anders te zijn dan de wetten van Newton in een nieuw jasje gepresenteerd. Een prachtige toepassing van de wetten van mechanica dus, én een mooie demonstratie hoe je bekende regels kan ombuigen naar nieuwe natuurwetten. Bovendien kun je er leuke experimenten mee doen in de les en er veel dagelijkse ervaringen mee verklaren.

In deze Lesbrief is dat precies wat ik ga laten zien¹, aan de hand van één van de belangrijkste regels waar vloeistoffen en gassen aan voldoen: de Wet van Bernoulli! Dit doe ik op twee manieren: eerst een keer door brutaal een allegaartje te maken van twee al bekende natuurwetten. Daarna doe ik de afleiding nog een keer, en deze keer door helemaal aan de basis te beginnen: met enkel en alleen de wetten van Newton. Op die manier zullen we heel precies zien waarom Bernoulli werkt, welke aannames ervoor nodig zijn om hem zo precies mogelijk te laten opgaan, en waar Bernoulli niét meer (helemaal) opgaat. Als bonus vinden we dan ook nog eens gratis en voor niks de beroemde ideale gaswet.

¹ Deze Lesbrief is de geschreven versie van een deel van de lezing *Fysica van de Stem*, gegeven op de WND-conferentie van 13&14 dec. 2024. Deze lezing was samen met Rein Kolpa, zanger en auteur van de Vocal Core zangmethode, en dr. Peter van Rijn, KNO-arts en chirurg.

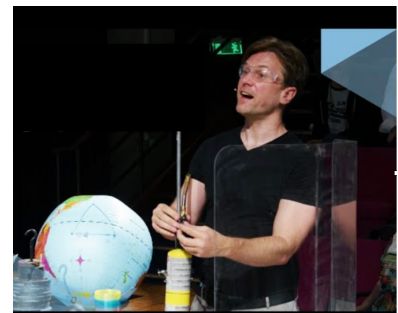


Figure 1: Gideon Koekoek is associate professor aan de Universiteit Maastricht. Hij behaalde zijn BSc, MSc (Cum Laude) en PhD (Jan Kluyver Prijs) in de theoretische natuurkunde aan de Vrije Universiteit Amsterdam en Nikhef, en behaalde daarnaast een tweede MSc-graad in Onderwijs. Gideon verdeelt zijn tijd gelijkmatig tussen onderwijs, onderzoek naar zwaartekrachtsgolven en de algemene relativiteitstheorie, en coördineert regionale, nationale en internationale projecten voor publieke, educatieve en politieke outreach van natuurkunde, in het bijzonder over zwaartekracht, relativiteitstheorie, en de Einstein Telescoop.

Wat zegt de Wet van Bernoulli?

De Wet van Bernoulli is een regel die eigenschappen van een stromende vloeistof aan elkaar knoopt. Zo'n vloeistof heeft een stroomsnelheid, en die hangt af van allerlei factoren. Zo maakt het uit wat de dichtheid is (kwik stroomt anders dan water, bijvoorbeeld), maar ook wat de vorm is van de buis waar de vloeistof doorheen stroomt, en hoeveel druk er op de vloeistof gezet wordt. Als die buis ook nog eens door allerlei hoogteverschillen gaat, moet de vloeistof vechten tegen de zwaartekracht en ook dat beïnvloedt de stroomsnelheid. Bernoulli² vond de formule die deze grootheden met elkaar verbindt:

Wet van Bernoulli



$$\frac{1}{2} v^2 + gh + P/\rho = \text{constant}$$

v = stroomsnelheid van de vloeistof

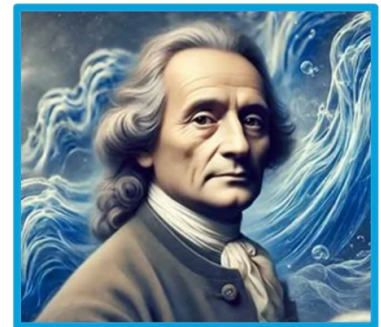
P = druk van de vloeistof

ρ = dichtheid van de vloeistof

Hierin is v de stroomsnelheid van de vloeistof, ρ zijn dichtheid, P de druk, en h de hoogte waar de vloeistof zich in de buis bevindt. Even opletten hier, want druk kan meerdere kanten op werken: in de *stroomrichting*, of er *loodrecht* op. In het eerste geval bedoelen we hoe hard de vloeistofdeeltjes tegen je aan botsen als je in de stroming gaat staan (zoals rivierwater op een brugpijler klotst); in het tweede geval bedoelen we hoe hard de deeltjes tegen de wanden van de buis botsen (zoals rivierwater tegen de oever klotst). In de wet van Bernoulli bedoelen het laatste: de vloeistofdruk *op* de buis.

De wet van Bernoulli zien we overal terug waar water, lucht, of andere stoffen langs, door, of over objecten stroomt. De wc-pijp, bijvoorbeeld. Of in muziekinstrumenten. Of je eigen strottenhoofd. Of het nucleaire materiaal dat over het oppervlak van een neutronenster golft. Bij constante hoogte komt Bernoulli op het volgende neer: *wanneer de stroomsnelheid toeneemt, neemt de druk van vloeistof op zijn omgeving af*³. Dat zie je natuurlijk makkelijk aan de formule boven: als v omhoog gaat, moet de druk P naar beneden om hun optelsom dezelfde constante te laten blijven. En als er wél hoogteverschil is, leidt dit tot een veranderende stroomsnelheid v , en/of een andere druk.

² Er bestaat een hele roedel aan wis- en natuurkundigen die Bernoulli heten, allemaal uit dezelfde familie. In dit geval gaat het om Daniel Bernoulli, 1700-1782.



Daniel Bernoulli

³ Dat klinkt in eerste instantie misschien tegenstrijdig, want als de vloeistof of gas sneller stroomt dan botsen de deeltjes ook harder, en gaat de druk omhoog? Nee, nee; het is hier belangrijk om nog eens te herhalen dat de druk P in Bernoulli loodrecht op de stroomrichting staat. En dan is dit effect opeens niet zo gek meer. Beneden leid ik de wet van Bernoulli af door naar de gemiddelde botsingen van de deeltjes te kijken, en dan zien we dit effect heel precies.

Laten we een paar voorbeeldjes geven.

Weggeblazen dak!

Als er een flinke tornado over de prairie blaast, kun je maar beter de bouten van het dak van je woning extra stevig vastdraaien, anders blaast die eraf! Gek genoeg is dat niet vanwege de windkracht zélf, maar vanwege de luchtdruk in het huis. Het gevaar komt van binnen! Kijk, het huis is gebouwd tijdens wildstilte, en de druk van de buitenlucht op het dak is precies even groot als die van de binnenlucht op het plafond. De eerste wet van Newton zegt dan dat het dak netjes op zijn plek blijft. Alles veilig! Maar dan begint het te stormen.. de lucht buiten blaast over het dak heen, en heeft opeens een flinke stroomsnelheid v gekregen. Bernoulli zegt dan dat de druk van de buitenlucht op het dak omlaag gaat om hun som constant te houden. De druk van de buitenlucht op het dak is kleiner dan die van de binnenlucht op het plafond. Het dak blaast van de muren af⁴!

⁴ De tekening komt van www.freepik.com



Vliegende vliegtuigen

Een wegvliegend dak is niet zo wenselijk, maar het effect zelf kun je wel tot voordeel gebruiken. Om zelf te vliegen! Bouw een vliegtuig, zet er vleugels aan, en zorg dat de luchtstroom aan de onderkant van de vleugel langzamer is dan die langs de bovenkant van de vleugel. Bernoulli zegt dan dat de druk van de lucht op de onderkant van de vleugel groter is dan die op de bovenkant van de vleugel, en de nettokracht op de vleugels is dan ook richting de hemel. Het vliegtuig stijgt op! Je moet natuurlijk wel zorgen dat er een stroomsnelheid v is, maar in plaats van op een flinke tornado te wachten maak je

de luchtstroom gewoon zelf door het vliegtuig een flinke snelheid te geven. Daarom trekken vliegtuigen altijd flink op voordat zij aan de stijging beginnen: dit is om de stroomsnelheid v tussen vleugels en lucht op te bouwen, en zo Bernoulli af te dwingen. In de foto beneden zie je een leuke demonstratie daarvan die je kan doen in het wetenschapsmuseum Discovery⁵ in Kerkrade, waar de bezoeker (hier een zekere natuurkundige..) een flinke bries over een speelgoedvliegtuigje blaast door met de hand een windmachine aan te draaien. Inderdaad, als je hard genoeg de lucht laat stromen, zie je het vliegtuigje netjes opstijgen!

⁵ www.discoverymuseum.nl



Andere effecten

Er zijn nog veel andere leuke effecten uit Bernoulli te voorspellen, door de constante van de rechterzijde aan te passen. We zullen beneden, wanneer we Bernoulli afleiden, zien dat die constante niks anders is dan de energie van de vloeistof per liter (de *energiedichtheid* dus). En die kunnen we groter maken door de vloeistof meer energie te geven. Blikje cola, flink schudden, en de kinetische energie van dat schudden gaat in de constante van Bernoulli zitten. Omdat die toegenomen is (en de druk verder hetzelfde is gebleven) zal de stroomsnelheid flink omhoog moeten gaan. Iedereen die wel eens een blikje cola op zijn bagagedrager heeft gehad weet wat er gebeurt na een onstuimige fietsrit: de frisdrank spuit eruit!

Een eerste afleiding: Via Boyle en energiebehoud

Een heel snelle manier om de wet van Bernoulli te vinden, is door gewoon de wet van behoud van energie op te tellen bij de wet van Boyle. De laatste is een formule die zegt dat voor gassen en vloeistoffen, druk P en volume V omgekeerd evenredig zijn: als de een omhoog gaat, gaat de ander omlaag.

$$P = \frac{\text{constante}}{V}. \quad (1)$$

Hij is trouwens makkelijk voor te stellen: knijp in een ballon (zodat het volume kleiner wordt), en je voelt dat het gas aan de binnenkant harder terug begint te duwen (druk gaat omhoog).

Deze regel geldt niet voor alle gassen en vloeistoffen: alleen als die ijl genoeg zijn dat de losse deeltjes niet te veel tegen elkaar botsen, en daarnaast mag de temperatuur niet veranderen. Ik zal dadelijk deze wet bewijzen, maar voor nu leden we de wet van Bernoulli op een snelle manier af door de wet van Boyle gewoon even als gegeven aan te nemen.

Vermenigvuldig de twee kanten van Boyle met het volume en de link-erzijde wordt PV . Wat eenheid betreft, is dit precies die van een energie, want druk wordt gemeten in Newton per vierkante meter, N/m^2 , en vermenigvuldigd met een volume m^3 geeft dit een eenheid van Nm , en dat is per definitie een Joule. Eigenlijk zegt de Wet van Boyle dus $PV = \text{constante energie}$. Als dat bekend klinkt, dat klopt! Zo'n regel bestaat ook voor losse massa's m : de wet van behoud van energie $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{constante energie}$. Laten we die even afleiden.

Begin met een massa met hoogte-energie mgh . Trek daar een beetje hoogte Δh van af, zodat de nieuwe hoogte gegeven is door $h' = h - \Delta h$:

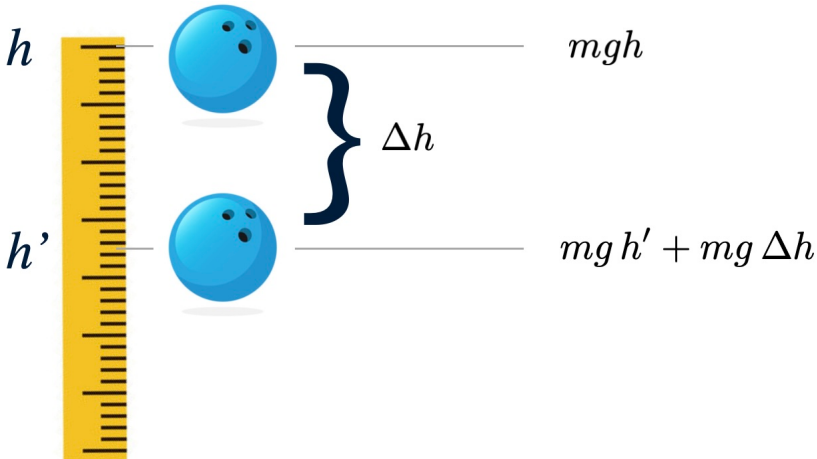
$$mgh = mgh' + mg\Delta h. \quad (2)$$

(met een accentje bedoel ik hier dat h' een ander getalletje is dan h .)

Dit verschil in hoogte Δh is afgelegd tijdens een constante versnelling van g , en voor constante versnelling geldt dat de afgelegde afstand gegeven wordt door $\Delta h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$, én dat de snelheid gegeven wordt door $v = g\Delta t$. Dit alles ingevuld in de vorige vergelijking zegt:

$$mgh = mgh' + \frac{1}{2}mv^2. \quad (3)$$

Oftewel: het verschil in hoogte-energie wordt omgezet in kinetische energie! Een andere manier om dit resultaat te zeggen is dat de som van $\frac{1}{2}mv^2$ en mgh constant is. Tada, de wet van behoud van energie,



afgeleid uit Newton.

We hebben nu twee losse behoudswetten: PV is een constante energie, en $mgh + \frac{1}{2}mv^2$ is een constante energie. Zouden we die twee gewoon bij elkaar op mogen tellen? Terechte vraag! Als ik aan de ene kant $x = 3$ heb, en aan andere kant $y = 7$, dan geldt natuurlijk prima dat $x + y = 10$. Maar, mag je de waarden 3 en 7 ook *onderling* uitwisselen? Bijvoorbeeld er $x = 8$ en $y = 2$ van maken, of welke andere combinatie dan ook zolang die maar bijven optellen tot 10? Ja, dat mag⁶! Doen dus, en als we het volume aan beide zijden wegdelen vinden we de Wet van Bernoulli:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh + P = \text{constant.} \quad (4)$$

Bij dat wegdelen moet het volume wel constant zijn, want anders is de rechterkant van onze uitkomst niet constant meer. De *vorm* van het volume mag trouwens wél veranderen, als de *inhoud* dat maar niet doet.

Er valt wel wat af te dingen op deze afleiding van Bernoulli. Zo hebben we aangenomen dat de wet van behoud van energie geldt, en hebben we de wet van Boyle er met de haren bijgesleept. Dat betekent dat we aangenomen hebben dat de vloeistof geen energie verliest aan de omgeving, en dat de vloeistof ijl genoeg is om de wet van Boyle ervoor te laten gelden. En dan is er nog dat subtiele punt dat we aannemen dat twee energiën opgeteld en onderling verwisseld mogen worden.

Het is daarom leuk om de afleiding beneden nóg eens te doen, en dan zonder zulke aannames, maar rechtstreeks uit de wetten van Newton (en niks anders). We zullen dan zien dat we op precies hetzelfde resultaat uitkomen!

⁶ Eén van de eigenschappen van energie is dat de verschillende vormen vrijelijk in elkaar kunnen worden omgezet. Voor de natuur is het allemaal hetzelfde 'spul'. Vergelijk het met een emmer water: je kan aan de hoeveelheid niet zien hoeveel van het water uit de tuinslang kwam, of hoeveel uit de regenbui, of hoeveel uit een waterfles. Wanneer het allemaal in de emmer verzameld is, is alle verschil verdwenen en is het vrijelijk te herverdelen.

Een tweede afleiding: rechtstreeks uit de wetten van Newton

De vorige afleiding van de Wet van Bernoulli noem ik maar even de 'quick & dirty' methode. Niet omdat zij niet correct zou zijn (dat is ze wél!, er is niks 'dirty' aan), maar omdat we een aantal aannames moesten doen die weliswaar prima zijn, maar vaak niet van tevoren afgeleid worden. Dat maakt de afleiding ook zo 'quick': gewoon twee al bekende regels optellen. Maar het lijkt daardoor ook een beetje een allegaartje van eerdere regels, in plaats van uit één enkel basisprincipe opgebouwd te zijn. En dat laatste vinden we in de natuurkunde eigenlijk toch het mooist.

Daarom doe ik de afleiding nog eens voor, maar deze keer uit één startprincipe: de wetten van Newton. Die zijn genoeg om de gehele Wet van Bernoulli af te leiden, zonder leentjebuur te hoeven spelen bij andere stukjes natuurkunde.

Even de kennis ophalen. De tweede wet van Newton geven we vaak als 'kracht = massa keer versnelling', maar preciezer zegt die dat kracht op een massa gelijk is aan hoeveel zijn impuls $p = mv$ verandert: $F = \frac{dp}{dt}$. En wat is de derde Wet van Newton ook alweer? Vaak zeggen we iets als 'Actie is min Reactie', waarmee we dan bedoelen dat voor elke uitgeoefende kracht, er een tegenwerkende kracht is die precies gelijk is in grootte maar tegengesteld is in richting. Preciezer zegt de derde wet dat impuls p behouden is: als twee massa's 1 en 2, met impulsjes p_1 en p_2 op elkaar botsen, blijft de totale impuls $p = p_1 + p_2$ hetzelfde⁷. We hebben nu genoeg Newton in huis om de Wet van Bernoulli af te leiden!

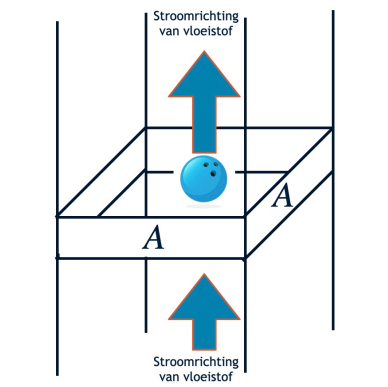
Botsen in een buis

De strategie is als volgt. We beginnen met een open buis met daarin een stroom van deeltjes, elk met hun eigen impuls p . We bekijken wat er gebeurt als één van die deeltjes botst met de wand van de buis en gebruiken dan impulsbehoud om de druk van dat ene deeltjes op de wand te berekenen. Tenslotte nemen we het gemiddelde van de druk van *alle* deeltjes op de wand, en vinden dan opnieuw precies de Wet van Bernoulli. Geen ideale gaswet of leentjebuur bij andere natuurkunde nodig! En een mooie manier om goed te kunnen zien waar Bernoulli zijn geldigheid verliest.

Laten we beginnen! Stel een stukje buis voor met twee open uiteinden (anders kan er niks stromen!); voor het gemak neem ik hier een buis waarvan de doorsnede precies vierkant is.

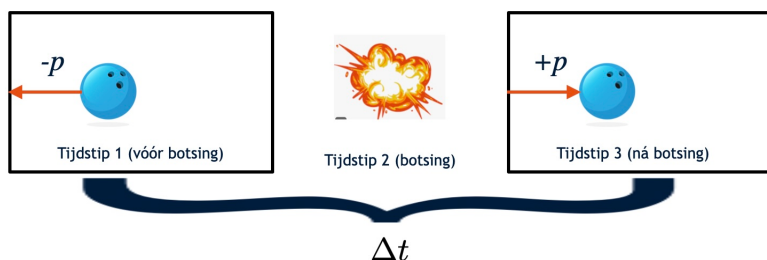
⁷ Kijk maar: als we willen weten hoe erg de totale impuls p verandert, moeten we de tijdsafgeleide nemen: $\frac{dp}{dt} = \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt}$. De tijdsafgeleide van een impuls van een massa is per definitie de kracht op dat deeltje (hier gebruik ik de tweede wet van Newton!), zodat er gevonden is $\frac{dp}{dt} = F_1 + F_2$. Nu gebruiken we de derde Wet van Newton, die zegt dat bij twee botsende deeltjes de kracht op het ene deeltjes precies tegengesteld is aan die op het andere: $F_1 = -F_2$. Hieruit volgt dan meteen dat $\frac{dp}{dt} = 0$. Oftewel: tijdens de botsing van de twee massa's is de totale impuls niet veranderd: wat de ene massa aan impuls kwijtraakt krijgt de ander terug. De wet van behoud van impuls is dus niks anders dan de derde wet van Newton.

Dat hoeft overigens niet (ons resultaat zal niet van de vorm afhangen; daar kom ik straks nog even op terug) maar rekent wel zo makkelijk. We nemen een schijfje van de doorsnede van de buis, en we gaan nu één van de deeltjes volgen die door dit schijfje stroomt. Doordat dit deeltje alle kanten opgebotst wordt, zal het zo af en toe eens tegen een van de vier wanden van het buisschijfje stuiten. Tijdens die botsing krijgt dat stukje wand een duw, en dat is wat we van buiten voelen als de druk P op die wand⁸. Onze regel van impulsbehoud zegt dat wat het deeltje aan impuls p is kwijtgeraakt, de wand als impuls gekregen heeft: druk!



Laten we dat nu precies maken! De impuls van dat botsende deeltje gaat van $-p$ (wanneer het, vóór de botsing, richting wand beweegt) naar $+p$ (wanneer het, na de botsing, weer van de wand wegbeweegt), en dus is de impulsverandering van het deeltje gelijk aan $2p$:

$$\Delta p = 2p. \quad (5)$$



In een paar simpele stappen verander ik de linkerzijde van deze uitdrukking in de druk P ten gevolge van deze botsing. Ten eerste delen we links en rechts door de tijdsduur Δt die de botsing geduurd heeft; dat doe ik omdat er dan aan linkerkant de tijdsafgeleide⁹ van de impuls staat, beter bekend als de *kracht* F op het deeltje. Via de derde wet van Newton is dit gelijk (maar met een minteken) aan de kracht op de wand. Als we links en rechts dan ook even delen door het oppervlak A van de wand, staat er links een formule voor de druk P op de wand ten gevolge van de botsing met ons deeltje:

$$P = -\frac{2p}{A \Delta t}. \quad (6)$$

Prima en correcte formule, uitgedrukt in de grootheden van de *botsing*, maar we willen die het liefst uitdrukken in die van de *stroming*. Bovendien geldt deze formule voor één enkel deeltje, terwijl de wand natuurlijk geraakt wordt door vele deeltjes tegelijk.

⁸ Goed om even aan te stippen dat ik voor de druk de *hoofdletter* P gebruik. Voor de impuls gebruik ik de kleine letter p .

⁹ Een oplettende leerling kan hier opmerken dat een afgeleide eigenlijk een *oneindig* klein tijdsduurtje had moeten zijn. Klopt! Gelukkig gaat dat heel goed op voor een daadwerkelijke botsing: die duurt inderdaad maar heel erg kort, en de stap die we hier maken is daardoor prima geldig.

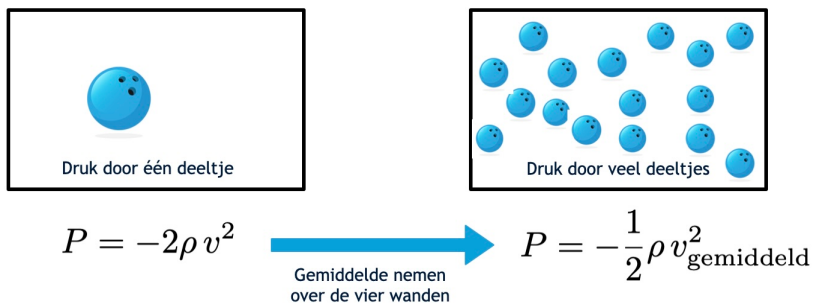
Gelukkig is dit makkelijk om te schrijven. De tijdsduur kan makkelijk worden omgezet in de afgelegde afstand Δx loodrecht op de buiswand: voor en na de botsing gaat het deeltje met constante snelheid v , zodat er geldt $\Delta x = v \Delta t$. Verder is de impuls p gelijk aan $m v$. Dit ingevuld in onze druk-formule geeft:

$$P = -\frac{2m v^2}{A \Delta x}, \quad (7)$$

en hop, in de noemer staat nu het volume V waar het deeltje zich gedurende de botsing in bewogen heeft. Let op, dat is (nog) niet het totale volume van de vloeistof of de buis; dat kan ook niet, want we hebben nog maar slechts één van de deeltjes uit de vloeistof bekeken en voor het totale volume hebben we *alle* deeltjes nodig. Die stap komt dadelijk. Voor dat ene deeltje geldt nu, uitgedrukt in de dichtheid $\rho = m/V$ van dat deeltje,

$$P = -2\rho v^2, \quad (\text{druk t.g.v. één enkel deeltje.}) \quad (8)$$

Nu gaan we de druk ten gevolge van *alle* deeltjes op de wand berekenen. Eigenlijk heel simpel: we moeten gewoon de druk ten gevolge van alle deeltjes optellen! Maar wel even opletten, want niet alle deeltjes gaan even snel, niet alle deeltjes bewegen in dezelfde richting, en niet alle deeltjes botsen op die ene zelfde wand! Met de miljarden-miljarden(-miljarden....) deeltjes die voorbij stromen, is het geen doen om voor elk afzonderlijk zijn snelheid en zijn richting te weten, en te bepalen tegen welke wand de botsing plaatsvindt.



Daarom nemen we een *gemiddelde*: elk deeltje gaat gemiddeld met snelheid v , en elk van de vier wanden van de buis wordt gemiddeld even vaak geraakt. Dat levert een factor $1/4$ op. Verder gaan we ervan uit dat de dichtheid van de vloeistof voor elk deeltje even groot is: evenveel massa per volume voor elk afzonderlijk deeltje. Daarom mogen we de dichtheid ρ als constant nemen, zodat die niet alleen geldt voor elk afzonderlijk deeltje, maar ook voor het geheel van de vloeistof.

Onder die aannames hebben we nu gevonden dat bovenstaande formule niet alleen voor een enkel deeltje geldt, maar, met die factor 1/4 meegenomen, ook voor de vloeistof als *geheel*.

$$P = -\frac{1}{2}\rho v^2, \quad (\text{druk t.g.v. de gehele vloeistof.}) \quad (9)$$

De snelheid in deze formule is de gemiddelde snelheid van de deeltjes, $v_{\text{gemiddeld}}$, maar omdat het zo veel schrijven is laat ik 'gemiddeld' weg. In het nemen van dat gemiddelde nam ik aan dat alle deeltjes, ongeacht hun richting, diezelfde waarde v hebben. Daarom is v óók de stroomsnelheid van de vloeistof.

Mooi, we zijn in onze opzet geslaagd: de druk op de wand is nu uitgedrukt in grootheden van de stroming: de dichtheid $\rho = m/V$ en de stroomsnelheid v .

Dit is al een mooie eerste versie van Bernoulli's formule: de som van de druk P en kinetische energie $\frac{1}{2}\rho v^2$ is gelijk aan een constante (namelijk: nul). Er mist nog een eigenschap, namelijk dat de vloeistof door een hoogteverschil heen kan stromen. Vóór we die inbouwen is het goed om even te checken dat we nu al een echte, kloppende natuurwet te pakken hebben. Kijk maar: als ik de dichtheid ρ weer terugschrijf als de massa m gedeeld voor volume V en dan beide kanten vermenigvuldig met dat volume, dan vind ik $PV = \frac{1}{2}mv^2$ (ik interesseer me hier even niet voor de *richting* van de druk, alleen in zijn *grootte*; ik laat daarom het minteken even zitten) en hiervan is de rechterzijde een constante omdat het om een *gemiddelde* snelheid gaat. Zo hebben we mooi de wet van Boyle $PV = \text{constante}$ gevonden¹⁰. Deze keer niet, zoals eerder, door een aanname, maar gewoon als gevolg van botsende deeltjes op de wand. Check is gedaan: ons resultaat is op de goede weg!

Tenslotte gaan we hoogteverschillen inbouwen. Gelukkig is dit makkelijk. In formule (3) hadden we al afgeleid dat kinetische energie omgezet kan worden in hoogte-energie. Dat geldt hier nog steeds even goed, en zo vinden we netjes de volledige Wet van Bernoulli terug:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + P = \text{constant.} \quad (10)$$

En zoals beloofd hebben we alleen bij deze afleiding alleen de Wetten van Newton gebruikt: de Derde Wet vanwege impulsbehoud, en de Tweede Wet zit stopten we er in toen we de impulsverandering tijdens een botsing omschreven naar een druk. Energiebehoud gebruikte alleen de regels van constante versnelling. Onderweg vonden we ook meteen de wet van Boyle, dus die hoefden we niet er niet met de haren bij te slepen. Meer dan twee wetten van Newton waren niet nodig.

¹⁰ Ik kan zelfs nóg een leuke eigenschap laten zien. De rechterzijde van $PV = \frac{1}{2}mv^2$ is de gemiddelde kinetische energie van de deeltjes in de vloeistof, en de thermodynamica zegt ons dat de gemiddelde kinetische energie van een gas met deeltjes, niks anders is dan de temperatuur T van het gas. Voor ons gas geldt dus dat zijn druk P , volume V , en temperatuur T aan elkaar verbonden zijn via de formule $PV = \text{constante} \times T$. Dit resultaat heet de *ideale gaswet*, en die hadden wetenschappers al lang en breed gemeten voordat ze ooit wisten dat gassen en vloeistoffen uit botsende deeltjes bestaan. Ons resultaat (9) is dus op de goede weg: hij geeft ons de Wet van Boyle terug, én de ideale gaswet.

Trouwens, voor de die-hards heb ik in de Appendix een andere afleiding opgeschreven waarom Bernoulli leidt tot de ideale gaswet, deze keer uit de wetten van de warmteleer. Het mooie van deze afleiding is, dat die óók gelden als de vloeistof *niet* bestaat uit botsende deeltjes, en dus een heel stuk algemener is. Deze afleiding vraagt wat wiskundig gegoochel dat voor een leerling misschien te abstract is. Sla de Appendix daarom gerust over.

Maakt de vorm van de buis uit?

Bovenstaande afleiding is geheel correct, maar een heel oplettende leerling zou zich twee vragen erbij kunnen stellen. Ten eerste, waarom geldt ons resultaat ook voor buizen waarvan de doorsnede *niet vierkant* is? Ten tweede, in onze afleiding hebben we elk afzonderlijk deeltje *loodrecht* op een wand laten stuiten, terwijl ze in werkelijkheid met verschillende invalshoeken op de wand kunnen stuiten. Goede opmerkingen! Ze tappen trouwens uit hetzelfde vaatje, omdat het in beide gevallen gaat over de relatieve hoek tussen de wand en bewegingsrichting van het deeltje, en het maakt voor de waarde van die hoek niet uit of die komt omdat de buis in een niet-vierkante vorm gevouwen is of omdat een deeltje schuin invalt.



Geen zorgen, onze afleiding klopt prima. We moeten ons alleen even herinneren dat we met het woordje 'druk' de botsingen bedoelen van deeltjes die *loodrecht* bewegen ten opzichte van de stroming. Er zijn maar vier onafhankelijke richtingen waarop deeltjes loodrecht kunnen bewegen ten opzichte van de stroomrichting, onafhankelijk van de vorm van de buis. Daarom mochten we door 4 delen toen we het gemiddelde namen.

Appendix voor de die-hards: Afleiding van de ideale gaswet uit warmteleer

In deze Appendix leid ik de ideale gaswet af. Die is niet nodig om de rest van de Lesbrief te begrijpen en is technischer dan alles wat we al gezien hebben, dus je kan deze Appendix gerust overslaan als je het bij Bernoulli wil houden. Maar, we kwamen al zó dichtbij de ideale gaswet, dat het een leuk extraatje is om die ook nog even af te leiden. Daar zijn geen metingen voor nodig, slechts een goed begrip van de warmteleer. Die zal ik daarom eerst even herhalen.

De Eerste Hoofdwet van de warmteleer

Ik begin met wat de *Eerste Hoofdwet* van de warmteleer heet. Laten we die eerst even goed inleiden, zodat onderstaande niet alleen puur wiskundige tovenarij is, maar ook met wat begrip komt.

Goed, wat zegt die Hoofdwet? Die gaat over een systeem¹¹ met energie U , en zegt dat die veranderd kan worden door arbeid W te verrichten op dat systeem, en/of er warmte Q in te laten stromen. Een verandering van een grootheid geven we aan met een klein d'tje (dx betekent een verandering van positie, dt betekent een verandering van tijdstip, dU betekent een verandering van energie, enzovoorts), dus in deze notatie schrijven we de Eerste Hoofdwet als:

$$dU = dW + dQ. \quad (11)$$

Arbeid W verrichten is niks anders dan trekken en duwen aan het systeem: $dW = -F \cdot dx$ (hierin is F de kracht waarmee getrokken wordt, en dx de afstand waarmee het systeem wordt ingedrukt of uitgetrokken; het minteken is afspraak, ik kom daar zometeen even op terug). Hier willen we graag een volumeverandering dV in herkennen omdat die grootheid beter bij de beschrijving van een systeem zoals of een gas of een vloeistof past, en gelukkig is dat makkelijk via $dV = A \cdot dx$ (waarin A het oppervlak is waarop geduwd wordt). Met andere woorden: de arbeid verricht op het systeem is $dW = -F \cdot dx = -P \cdot dV$. Daarin is $P = F/A$ de druk op het systeem.

¹¹ Zoals een vloeistof, of een gas, of een vaste stof, of auto's of bloemen en planten en de kat van de buren, maar zelfs zwarte gaten, het universum als geheel, of andere exotische dingen. Daarom heten de regels van de warmteleer *Hoofdwetten*: ze gelden voor *alles*, ongeacht waar dingen van gemaakt zijn en welke natuurwetten daar intern verder nog voor op gaan. De Hoofdwetten zijn de wetten waar zelfs de andere natuurwetten zich naar moeten voegen!

Wat betreft de warmte Q , moeten we even herinneren dat warmte per definitie niks anders is dan de energie die gestroomd heeft door een temperatuurverschil. Het warmteverschil dQ kan daarom worden geschreven als $dQ = T \cdot dS$, waarin T de temperatuur is waarbij de warmte gestroomd heeft, en S zegt hoe makkelijk dit gegaan is¹²: hoe groter dS , hoe meer warmte Q er stroomde bij deze temperatuur T . Dit alles ingevuld verandert (11) in

$$dU = -P \cdot dV + T \cdot dS. \quad (12)$$

Hier zie je ook waarom dat minteken afgesproken is: we willen onze formule zodanig hebben dat als we van buiten op het systeem drukken en daardoor het volume verkleinen (dV een negatief getal is), de energie van het systeem omhoog gaat (dU een positief getal is).

Ok, tot zover de introductie van de Eerste Hoofdwet. Al met al zegt die niks meer of minder dan dat energieverandering van een systeem óf het gevolg is van trekken en duwen (hier uitgedrukt in druk P uitoefenen op het systeem zodat het volume V verandert), en/óf het gevolg van warmtestroom (hier uitgedrukt in de temperatuur T waarbij dat gebeurt, en de gemakelijkheid S van die stroming).

Mooi, met alle begrippen nu op een rijtje, kunnen we verder met onze afleiding van de ideale gaswet.

De ideale gaswet

De Eerste Hoofdwet is niet compleet. Er staan namelijk te veel grootheden (T, P, V, S, U) tegelijk in. Dat is *expres* zo: elk afzonderlijk systeem kent namelijk andere manieren waarop die grootheden aan elkaar geknoopt zijn, en om elk systeem te beschrijven moet de formule ruimte overlaten om dat knopen aan te passen naar de situatie. Het is precies deze eigenschap die de warmteleer zo algemeen geldig maakt, dat die werkt van gassen tot mensen tot planeten tot zwarte gaten! Om verder te rekenen zullen we daarom wat extra voorwaarden moeten stellen.

De aanname die we gaan doen is dat de energiedichtheid van ons systeem erg, erg laag is: weinig deeltjes per liter, die ook nog eens weinig bewegingsenergie hebben.

Deze aanname vertaalt zich in wiskunde. Ik neem de Eerste Hoofdwet en deel beide kanten door dV , zodat er aan de linkerkant $\partial U / \partial V$ komt te staan¹³. Dit is de energiedichtheid ρ_U van het gas, en onze eerste aanname zegt dat die heel, heel erg laag is. Bij zeer goede benadering kunnen we die gelijk maken aan nul. Wat er dan overblijft van de Eerste Hoofdwet is

$$P = T \cdot \frac{\partial S}{\partial V} \quad (13)$$

¹² De officiële naam van deze functie S is de *entropie* van het systeem. Dit is een zeer genuanceerde grootheid met grote gevolgen voor ons begrip van het universum en alle processen die erin plaatsvinden.

Entropie komt met haar eigen regel: de *Tweede Hoofdwet* van de warmteleer. Deze zegt dat als een systeem met rust wordt gelaten, de interne processen altijd zodanig zijn dat de entropie toeneemt. Dat heeft als (groot!) gevolg dat energieveranderingen $dU = dW + dQ$ metertijd volkomen gedomineerd zullen worden door warmtestromen, en het verrichten van arbeid dW volkomen verwaarloosbaar wordt. Toegepast op het gehele heelal, heet dit de *heat death of the Universe*: alle energie is er weliswaar nog (dit is de eerste Hoofdwet), maar niks trekt, duwt, of heeft interactie met elkaar!

Maar goed, voor onze afleiding van de ideale gaswet hebben we al die entropiebagage niet nodig, enkel en alleen dat warmteverandering evenredig is met dS , wat de functie S verder ook moge betekenen.

¹³ Merk op dat ik een 'rechte d' vervangen heb door een 'kromme d', ∂ . Dat is notatie die we gebruiken als we een afgeleide nemen van een functie die van meer dan één argument afhangt. Bijvoorbeeld: $\partial f(x, y) / \partial x$ betekent dat we kijken hoe erg functie f stijgt of daalt als x een beetje groter wordt, maar y ondertussen hetzelfde wordt gehouden.

Met wat spelen met afgeleides kun je aantonen¹⁴ dat $\partial S/\partial V$ gelijk is aan $\partial P/\partial T$, dus eigenlijk staat er

$$P = T \cdot \frac{\partial P}{\partial T}. \quad (14)$$

Wat staat hier nu eigenlijk? Wel, dat de druk van dit ijle gas een functie is van temperatuur. Preciezer: deze functie is zodanig dat als je er de afgeleide van neemt naar de temperatuur, er hetzelfde uitkomt als de functie zelf gedeeld door de temperatuur. De functie $P(T)$ die hier precies aan voldoet, is

$$P(T) = \text{constante} \times T. \quad (15)$$

(Dit kun je makkelijk checken door dit in te vullen in (14) en te zien dat er links en rechts van het gelijkteken precies hetzelfde staat.)

Daarmee hebben we onze aanname in wiskunde omgezet! We weten nu hoe druk en temperatuur van elkaar afhangen.

Maar druk hangt ook van het volume af. Eerder in de Lesbrief hadden we al gevonden dat het product PV van volume en druk een constante is door naar botsende deeltjes te kijken en de Wetten van Newton te gebruiken. Maar dat PV constant is kan ook rechtstreeks uit de Eerste Hoofdwet getrokken worden zonder ooit een botsend deeltje tegen te komen. Neem aan dat de energie niet van het volume afhangt, zodat $\partial U/\partial P = 0$ (fysisch zegt dit dat het 'spul' in het gas geen onderlinge interactie heeft, omdat de energie van de deeltjes niet afhangt hoe veel druk ze op elkaar uitoefenen). Dan volgt uit de Eerste Hoofdwet dat $P/T \times \partial V/\partial P = \partial S/\partial P$. Door weer te spelen met afgeleides (zie kader voor hoe dat trucje werkt) is $\partial S/\partial P$ gelijk aan $-\partial V/\partial T$. Dat geeft de formule

$$\frac{P}{T} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{\partial V}{\partial T}. \quad (16)$$

Hierin is P/T een constante (dat hadden we al gevonden in 15), en de formule die overblijft wordt opgelost door

$$V = \text{constante} \times \frac{T}{P}, \quad (17)$$

(dit kun je makkelijk checken door dit resultaat in 16 in te vullen en te zien dat er dan links en rechts hetzelfde staat.) Omgeschreven in de meest bekende vorm vinden we zo de ideale gaswet:

$$P \cdot V = \text{constante} \times T. \quad (18)$$

En daarmee zijn we klaar! De Eerste Hoofdwet van de warmteleer uit deze Appendix heeft netjes geleid tot de ideale gaswet; de Wetten van Newton waren niet nodig.

¹⁴ Deze regel is een gevolg van wiskunde, niet van natuurkunde. We gaan namelijk gebruiken dat het niet uitmaakt in welke volgorde je twee afgeleides van een functie neemt: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$.

Laten dit wiskundige feit op de Eerste Hoofdwet toepassen! Eerst schrijven we, via de produktregel van differentiëren, $T \cdot dS$ als $d(TS) - S \cdot dT$. De Eerste Hoofdwet wordt dan

$$d(U - TS) = -P \cdot dV - S \cdot dT.$$

We gaan deze formule op twee afzonderlijke manieren herschrijven.

Voor de eerste herschrijving: hou de temperatuur constant ($dT = 0$) en deel door dV , en neem van de uitkomst de afgeleide naar de temperatuur. Je vindt dan (voor het gemak noemen we $U - TS$ even f , dat schrijft wel zo beknopt): $\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right) = -\frac{\partial P}{\partial T}$.

Voor de tweede herschrijving: hou het volume constant ($dV = 0$) en deel door dT , en neem van de uitkomst de afgeleide naar het volume. Je vindt dan: $\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right) = -\frac{\partial S}{\partial V}$.

We hebben nu de dubbele afgeleide van de functie $f = U - TS$ op twee manieren genomen, met als enige verschil de volgorde van de afgeleides. Maar aangezien de volgorde niet uitmaakt, moeten onze twee resultaten aan elkaar gelijk zijn. Zo vinden we dat $\partial S/\partial V$ gelijk is aan $\partial P/\partial T$.

Deze truc met afgeleides heet een *Maxwell relatie*, en komt veel voor in de warmteleer. Maxwell relaties (niet te verwarren met de Maxwell vergelijkingen; die gaan over electromagnetisme. Zelfde wetenschapper, andere natuurkunde) helpen om moeilijk te meten grootheden, zoals entropie, om te zetten in makkelijk te meten grootheden, zoals druk.

Blijft alleen de vraag nog over wat de *waarde* is van de constante in de ideale gaswet . Wel, die is niet door deze afleiding bepaald. Dat kan ook niet: de waarde van de constante is afhankelijk van de keuze van de eenheden waarin we besluiten temperatuur uit te drukken (de constante heeft een andere waarde in Celsius dan in Fahrenheit, of in Kelvin, etc.), en de Hoofdwetten van de warmteleer weten niet welke eenheid wij gebruiken. Verder hangt de waarde ook nog af van het aantal deeltjes (meer deeltjes betekent dat er meer botsingen zullen plaatsvinden en de druk dus groter is dan wanneer er weinig deeltjes waren geweest.), en ook dat weten de Hoofdwetten niet. Maar vooruit, uit volledigheid is hier de waarde van de constante wanneer we als temperatuureenheid de Kelvin nemen. In dat geval is de ideale gaswet $PV = n R T$, waarin $R = 8.31 \text{ Joule/mol/K}$ de *ideale gasconstante* heet, en we met n het aantal mol aan deeltjes in het gas bedoelen.