

# Een hoogtemeting uit je duim zuigen

Zeker over onzekere resultaten

Karel Kok

Humboldt-Universität zu Berlin

WND – 17 December 2022



Erasmus+



# Introductie – Over mij

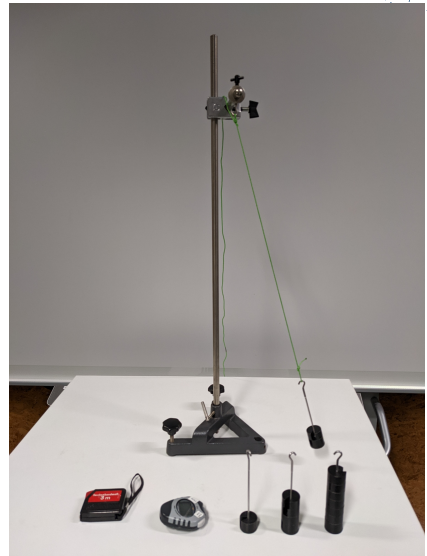


Image source: <https://www.photowall.de/berlin-skyline-panorama-tapete>

Onderzoeksvraag:  
Hangt de periode van de massa af?

Meetmethode:

- Meet de lengte van de slinger  $l = 59 \text{ cm}$
- $m = 60 \text{ g}$  (overige massa's, 160 g, 260 g, 360 g)
- Stopwatch
- Meet 10 periodes
- Herhaal de meting 5 keer per massa



| massa / g | gem. periode / s |
|-----------|------------------|
| 60        | 1,54             |
| 160       | 1,52             |
| 260       | 1,51             |
| 360       | 1,49             |

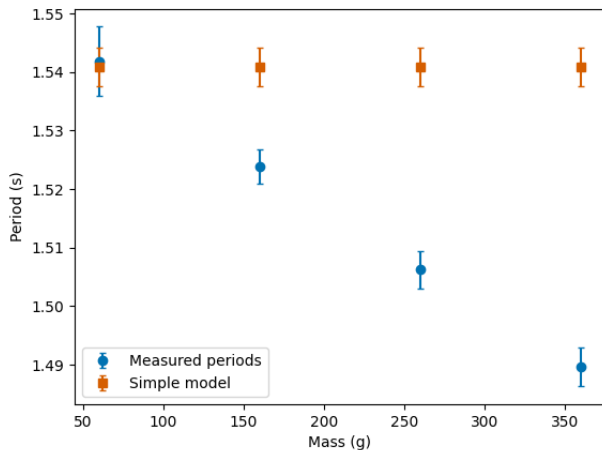
- Hangt de periode van de massa af?
- Welk bewijs heb je hiervoor?
- Het bewijs ligt in de meetonzekerheid!

| massa / g | periode / s       |
|-----------|-------------------|
| 60        | $1,542 \pm 0,006$ |
| 160       | $1,524 \pm 0,003$ |
| 260       | $1,506 \pm 0,003$ |
| 360       | $1,490 \pm 0,003$ |

Lengte gemeten met onzekerheid:

$(59,00 \pm 0,25)$  cm:

$T_{\text{ref}} = (1,541 \pm 0,003)$  s



(foutenbalken:  $SD$ )

# Practicum – Verschuiving van Zwaartepunt

- Massa lijkt de periode daadwerkelijk te beïnvloeden.
- Maar we weten, uit de formule, dat dit niet kan!  
Wat nu?
- De gestapelde 50 g massa's hebben een hoogte van  $h = 1,4 \text{ cm}$ .
- In de formule  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  is  $l$  de lengte van draaipunt tot zwaartepunt.
- Dit zwaartepunt verschuift met 0,7 cm omhoog met iedere extra 50 g.

Hypothese:

Ik heb de verschuiving van het zwaartepunt gemeten in mijn periodes.

Ik kan hiervoor de lengtes corrigeren.

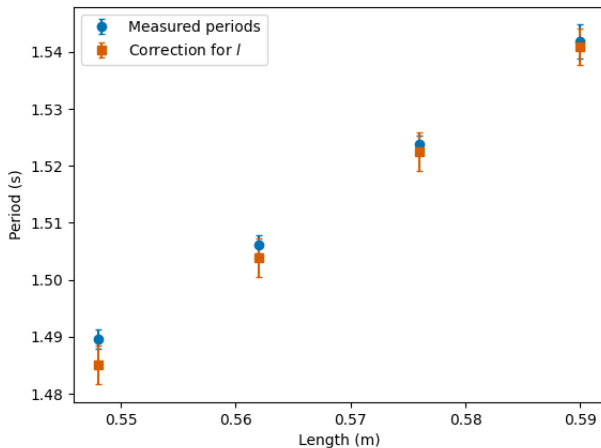


Metingen:

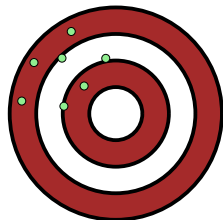
| massa / g | periode / s       |
|-----------|-------------------|
| 60        | $1,542 \pm 0,006$ |
| 160       | $1,524 \pm 0,003$ |
| 260       | $1,506 \pm 0,003$ |
| 360       | $1,490 \pm 0,003$ |

Berekend met formule:

| lengte / cm      | periode / s         |
|------------------|---------------------|
| $59,00 \pm 0,25$ | $1,5409 \pm 0,0033$ |
| $57,60 \pm 0,25$ | $1,5225 \pm 0,0033$ |
| $56,20 \pm 0,25$ | $1,5039 \pm 0,0033$ |
| $54,80 \pm 0,25$ | $1,4850 \pm 0,0034$ |

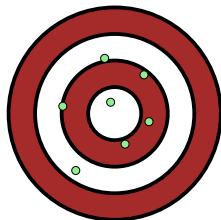


(foutenbalken:  $SE$ )



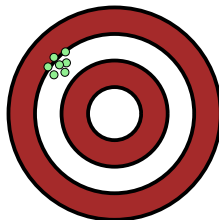
Lage precisie

Lage nauwkeurigheid



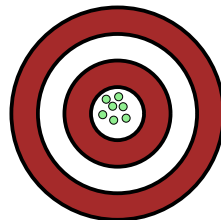
Lage precisie

Hoge nauwkeurigheid



Hoge precisie

Lage nauwkeurigheid

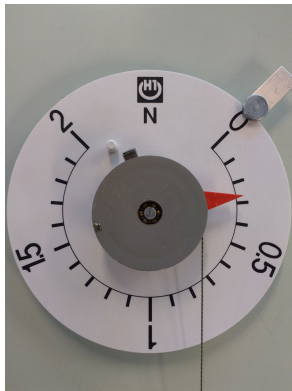
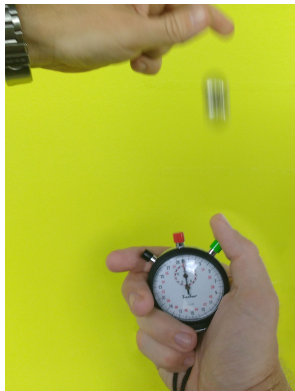


Hoge precisie

Hoge nauwkeurigheid

- Precisie zegt iets over de spreiding van de metingen: de meetonzekerheid.
- Nauwkeurigheid zegt iets over het raken van het doel: het gemiddelde.
- Vaak is dit doel echter onbekend!
- Meetresultaat: gemiddelde  $\pm$  onzekerheid.
  - ▶ Gemiddelde: de beste schatting van je gemeten grootte.
  - ▶ Onzekerheid: gebied rond gemiddelde waarin de gemeten grootte te verwachten is.

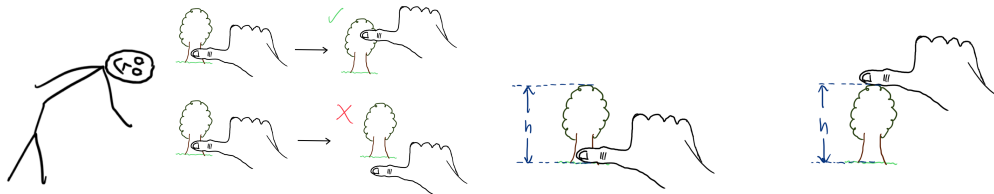
Bestaat er een experiment zonder meetonzekerheid? (think pair share)



# Experiment – Duimsprong

Parallaxmeting door middel van een “duimsprong”:

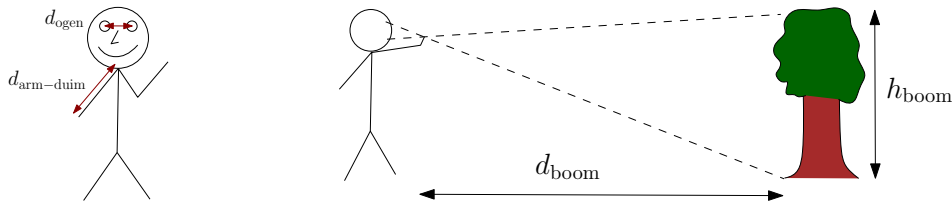
- Houd je hoofd 90° schuin.
- Strek je arm uit en houd je duim ook 90° gedraaid.
- Door met je linker of rechter oog te kijken, “springt” je duim op en neer.
- Ga op zo'n afstand staan, dat je duim precies de hele hoogte  $h$  van het object “springt”.



# Experiment – Hoogtebepaling

Parallaxmeting door middel van een “duimsprong”:

- De verhouding van oogafstand tot armlengte is ongeveer vast:  $\frac{d_{\text{arm-duim}}}{d_{\text{ogen}}} \approx 10$ .
- Bij een duimsprong zoals hiervoor geldt dus:  $\frac{d_{\text{arm-duim}}}{d_{\text{ogen}}} = \frac{d_{\text{boom}}}{h_{\text{boom}}}$ .
- Ofwel:  $\frac{d_{\text{boom}}}{h_{\text{boom}}} \approx 10$ .
- Wanneer je de afstand meet, kun je de hoogte bepalen:  $h_{\text{boom}} = \frac{d_{\text{boom}}}{10}$ .



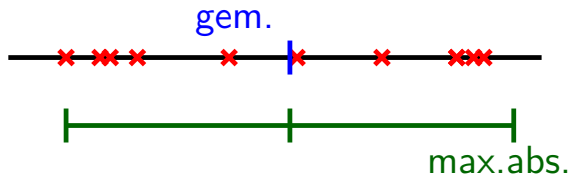
- Ga met behulp van een duimsprong na hoe groot ik ben.
- Let op, ga niet allemaal bij elkaar staan meten (confirmation bias).
- Resultaten bespreken.
- Hoe kunnen we onzekerheid kwantificeren?

# Experiment – Onzekerheid kwantificeren

Maximaalafstand:

de grootste afstand van een van de metingen tot het gemiddelde

$$u_{\min-\max} = \max(\bar{x} - x_1, x_N - \bar{x})$$



Hoogte  $h = (21,3 \pm 6,6) \text{ m}$

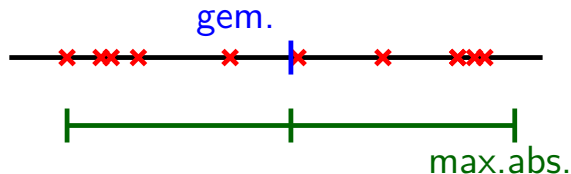
| Hoogte (m) |
|------------|
| 26.7       |
| 26.2       |
| 26.2       |
| 24.0       |
| 27.0       |
| 14.7       |
| 16.0       |
| 15.7       |
| 16.8       |
| 19.5       |
| 21.5       |

# Experiment – Onzekerheid kwantificeren

Maximaalafstand:

de grootste afstand van een van de metingen tot het gemiddelde

$$u_{\min-\max} = \max(\bar{x} - x_1, x_N - \bar{x})$$



Hoogte  $h = (21,3 \pm 6,6) \text{ m}$

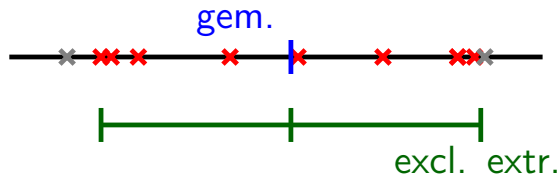
| Hoogte (m) |
|------------|
| 14.7       |
| 15.7       |
| 16.0       |
| 16.8       |
| 19.5       |
| 21.5       |
| 24.0       |
| 26.2       |
| 26.2       |
| 26.7       |
| 27.0       |

# Experiment – Onzekerheid kwantificeren

Zonder uitschieters:

zoals maximaalafstand, maar nu zonder de grootste en kleinste waarde uit de meetrij.

$$u_{\text{excl. extr.}} = \max(\bar{x} - x_2, x_{N-1} - \bar{x})$$



Hoogte  $h = (21,3 \pm 5,6) \text{ m}$

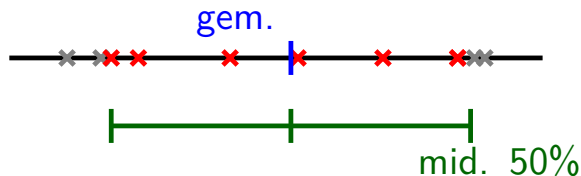
| Hoogte (m) |
|------------|
| 14.7       |
| 15.7       |
| 16.0       |
| 16.8       |
| 19.5       |
| 21.5       |
| 24.0       |
| 26.2       |
| 26.2       |
| 26.7       |
| 27.0       |

# Experiment – Onzekerheid kwantificeren

Middelste 50 %:

zoals maximaalafstand, maar nu met de middelste helft van de metingen.

$$u_{\text{mid.50\%}} = \max(\bar{x} - x_{N/4+1}, x_{N-N/4} - \bar{x})$$



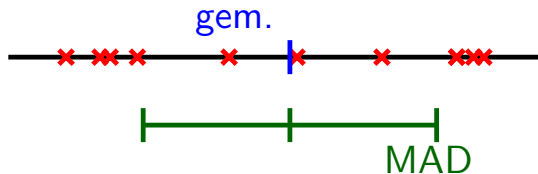
Hoogte  $h = (21,3 \pm 5,3) \text{ m}$

| Hoogte (m) |
|------------|
| 14.7       |
| 15.7       |
| 16.0       |
| 16.8       |
| 19.5       |
| 21.5       |
| 24.0       |
| 26.2       |
| 26.2       |
| 26.7       |
| 27.0       |

# Experiment – Onzekerheid kwantificeren

Mean Absolute Deviation (MAD):

$$u_{\text{MAD}} = \frac{1}{N} \sum_i |x_i - \bar{x}|$$



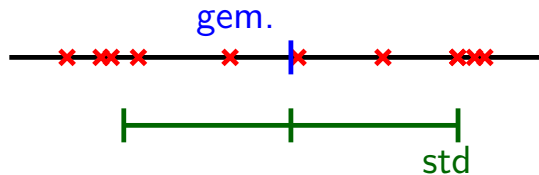
Hoogte  $h = (21,3 \pm 4,3) \text{ m}$

| Hoogte (m) |
|------------|
| 14.7       |
| 15.7       |
| 16.0       |
| 16.8       |
| 19.5       |
| 21.5       |
| 24.0       |
| 26.2       |
| 26.2       |
| 26.7       |
| 27.0       |

# Experiment – Onzekerheid kwantificeren

Standaarddeviatie:

$$u_{SD} = \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$



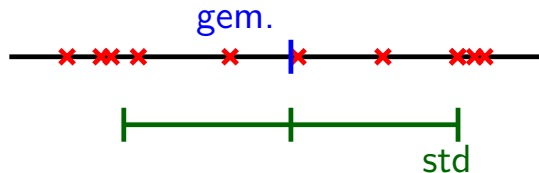
Hoogte  $h = (21,3 \pm 4,9) \text{ m}$

| Hoogte (m) |
|------------|
| 14.7       |
| 15.7       |
| 16.0       |
| 16.8       |
| 19.5       |
| 21.5       |
| 24.0       |
| 26.2       |
| 26.2       |
| 26.7       |
| 27.0       |

# Experiment – Onzekerheid kwantificeren

Standaarddeviatie:

$$u_{SD} = \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$



Hoogte  $h = (21,3 \pm 4,9) \text{ m}$

Kwantificeringen gedefinieerd en vergeleken in:

Kok, K., & Priemer, B. (2022). Comparing Different Uncertainty Measures to Quantify Measurement Uncertainties in High School Science Experiments.

*International Journal of Physics and Chemistry Education*, 14(1), 1–9.

<https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.04102>

| Hoogte (m) |
|------------|
| 14.7       |
| 15.7       |
| 16.0       |
| 16.8       |
| 19.5       |
| 21.5       |
| 24.0       |
| 26.2       |
| 26.2       |
| 26.7       |
| 27.0       |

# Experiment – Resultaat van het Experiment



- Resultaten bespreken.
- Resultaat is dus altijd: gemiddelde  $\pm$  onzekerheid.
- Hoe kunnen we dit experiment verbeteren?
- Hoe zouden we dit merken aan het resultaat?

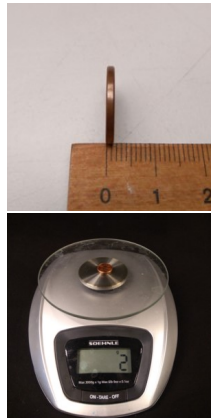


- Bepaal van welk materiaal een 1 cent muntje gemaakt is.
- Meten met keukenweegschaal en lineaal.
- Twee groepen, twee resultaten:
  - 1)  $r_1 = 0,8 \text{ cm}$ ,  $h_1 = 0,2 \text{ cm}$ ,  $m_1 = 2 \text{ g}$ ,  $\rightarrow \rho_1 = 4,97 \text{ g cm}^{-3}$ .
  - 2)  $r_2 = 0,7 \text{ cm}$ ,  $h_2 = 0,15 \text{ cm}$ ,  $m_2 = 2 \text{ g}$ ,  $\rightarrow \rho_2 = 8,66 \text{ g cm}^{-3}$ .
- Groep 1 gaat richting titaan, terwijl groep twee richting koper gaat.
- Geen bevredigend resultaat.

| Materiaal | $\rho \text{ (g cm}^{-3}\text{)}$ |
|-----------|-----------------------------------|
| Magnesium | 1,7                               |
| Aluminium | 2,7                               |
| Titaan    | 4,5                               |
| Staal     | 7,8–8,1                           |
| IJzer     | 7,9                               |
| Koper     | 8,9                               |
| Zilver    | 10,5                              |
| Goud      | 19,3                              |

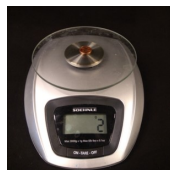
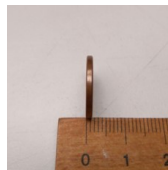
# Materiaalbepaling – Onzekerheden

- We nemen van alle metingen het gemiddelde:
- $r_{\text{gem}} = 0,75 \text{ cm}$ ,  $h_{\text{gem}} = 0,17 \text{ cm}$ ,  $m_{\text{gem}} = 2 \text{ g}$ ,  $\rightarrow \rho_{\text{gem}} = 6,66 \text{ g cm}^{-3}$ .
- Dan nu de onzekerheden, twee vuistregels.
  - ▶ Analooq meetinstrument:  $u$  is een half schaaldeel.
  - ▶ Digitaal meetinstrument:  $u$  is een heel schaaldeel.
- $r_{\text{gem}} = (0,75 \pm 0,05) \text{ cm}$
- $h_{\text{gem}} = (0,17 \pm 0,05) \text{ cm}$
- $m_{\text{gem}} = (2 \pm 1) \text{ g}$
- Propagatie van onzekerheden doen we met behulp van relatieve onzekerheden.



# Materiaalbepaling – Relatieve Propagatie

- Is niet de “officiële” manier van onzekerheden propagatie, maar een eenvoudiger alternatief:  $u_{\%} = \frac{u_x}{x}$ .
- Je berekent de procentuele onzekerheid van iedere meting die in je berekening gaat en telt die op.
- Dit is de procentuele onzekerheid van je eindresultaat.
  - ▶  $r_{\text{gem}} = (0,75 \pm 0,05) \text{ cm}$ :  $u_{\%} = \frac{0,05}{0,75} = 7\%$
  - ▶  $h_{\text{gem}} = (0,17 \pm 0,05) \text{ cm}$ :  $u_{\%} = \frac{0,05}{0,17} = 29\%$
  - ▶  $m_{\text{gem}} = (2 \pm 1) \text{ g}$ :  $u_{\%} = \frac{1}{2} = 50\%$
- $\rho_{\text{gem}} = 6,66 \text{ g cm}^{-3}$ :  $u_{\rho} = 6,66 \times (0,07 + 0,29 + 0,50) = 6$ .
- Ofwel:  $\rho_{\text{gem}} = (7 \pm 6) \text{ g cm}^{-3}$ .
- Een érg teleurstellend resultaat.
- De percentages geven aan waar de grootste verbeteringen te behalen zijn: vooral de massa en hoogte!



| Materiaal | $\rho \text{ (g cm}^{-3}\text{)}$ |
|-----------|-----------------------------------|
| Magnesium | 1,7                               |
| Aluminium | 2,7                               |
| Titaan    | 4,5                               |
| Staal     | 7,8–8,1                           |
| IJzer     | 7,9                               |
| Koper     | 8,9                               |
| Zilver    | 10,5                              |
| Goud      | 19,3                              |

# Materiaalbepaling – Stacking

- Naukeuriger maken van metingen door middel van stacking.
- Tien munten meten, hierdoor wordt de onzekerheid “verdeeld” over de munten.
  - ▶  $r = (0,75 \pm 0,05) \text{ cm}$ :  $u_r = \frac{0,05}{0,75} = 7\%$
  - ▶  $h_{10} = (1,70 \pm 0,05) \text{ cm}$   
 $h = (0,170 \pm 0,005) \text{ cm}$ :  $u_h = \frac{0,005}{0,17} = 3\%$
  - ▶  $m_{10} = (23 \pm 1) \text{ g}$   
 $m = (2,3 \pm 0,1) \text{ g}$ :  $u_m = \frac{0,1}{2,3} = 4\%$
- $\rho_{\text{gem}} = 7,66 \text{ g cm}^{-3}$ :  $u_\rho = 7,66 \times (0,07 + 0,03 + 0,04) = 1.$
- Ofwel:  $\rho_{\text{gem}} = (8 \pm 1) \text{ g cm}^{-3}$ .
- Er blijven nog staal, ijzer en koper over.
- In werkelijkheid zijn de muntjes van staal met een koperen laag erover.



| Materiaal | $\rho \text{ (g cm}^{-3}\text{)}$ |
|-----------|-----------------------------------|
| Magnesium | 1,7                               |
| Aluminium | 2,7                               |
| Titaan    | 4,5                               |
| Staal     | 7,8–8,1                           |
| IJzer     | 7,9                               |
| Koper     | 8,9                               |
| Zilver    | 10,5                              |
| Goud      | 19,3                              |

- ▶ Meetonzekerheden komen in elk experiment voor.
  - ▶ Ze zijn een essentieel onderdeel van een meetresultaat.
  - ▶ Ze vormen de sleutel tot het “bewijzen” van overeenstemming (of niet).
- 
- Hebben jullie experimenten waarbij leerlingen steeds de verkeerde conclusie trekken op basis van meetgegevens?
  - Wat voor rol spelen meetonzekerheden bij jullie experimenten?
  - Vragen?



Website & Slides

