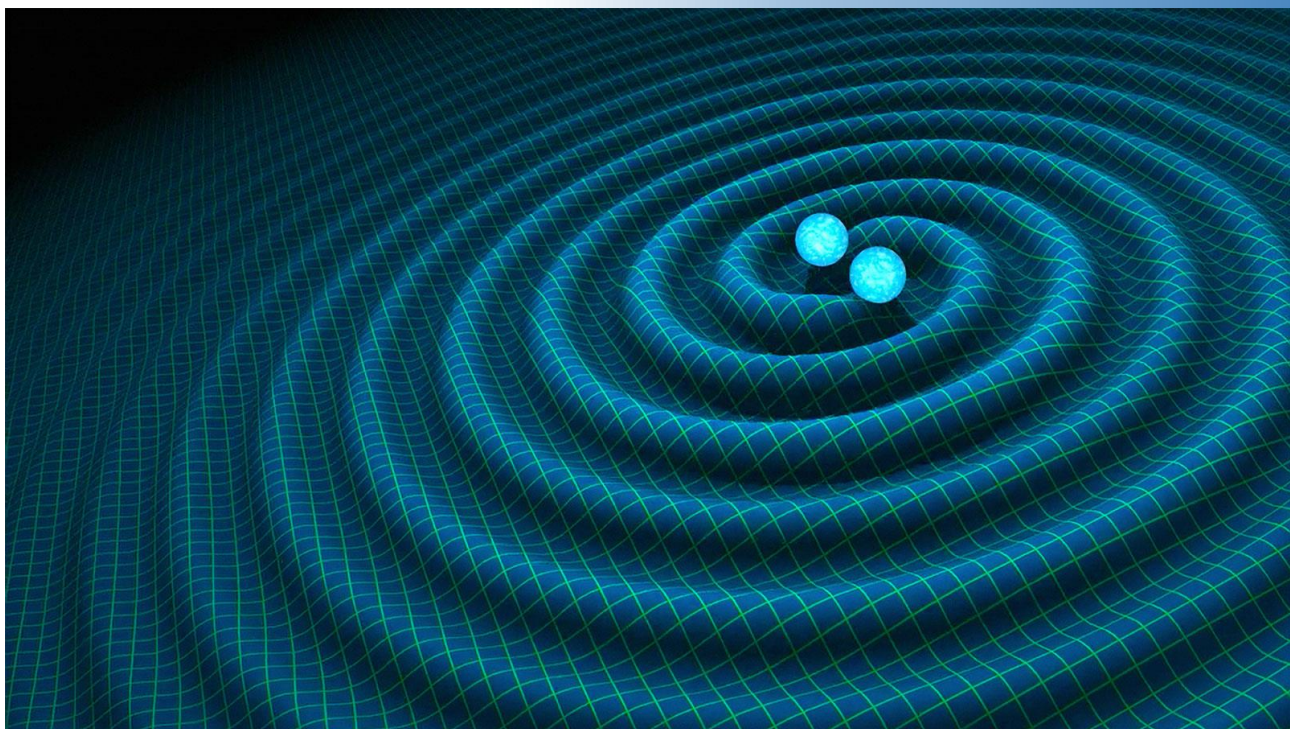


Algemene relativiteit - werkboek



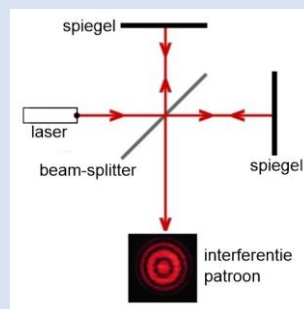
Stanley Delhaye
Jan van Brabant College
December 2018

1. Gedetecteerd: gravitatiegolven

Opgave 1: Laser-Interferometer Gravitational-wave Observatory

In figuur 8 zie je de interferometer zoals deze gebruikt wordt in de LIGO-observatoria. Een laserbundel met een golflengte van 1064 nm wordt door een zogenaamde 'beam-splitter' opgesplitst. De helft van de bundel gaat door de ene arm op-en-neer en de andere helft gaat door de andere arm op-en-neer.

De opstelling van de LIGO-observatoria zijn zo gemaakt dat zolang er geen gravitatiegolf passeert, er volledige destructieve interferentie optreedt. Als gevolg van een passerende gravitatiegolf zullen de beide armen afwisselend langer en korter worden. Dit zorgt ervoor dat de beide laserbundels een andere afstand afleggen ten opzichte van elkaar. Als gevolg hiervan zullen de laserbundels constructief gaan interfereren met elkaar.



Figuur 8

2p1. Wanneer het weglengteverschil gelijk is aan 532 nm, dan treedt er volledige *destructieve* interferentie op. Leg uit waarom dat zo is.

Voorbeeld van een antwoord:

Destructieve interferentie treedt op wanneer twee golven in tegenfase zijn. Het (gereduceerde) faseverschil is dan gelijk aan 0.5 en het weglengteverschil is dan gelijk aan $\lambda/2$. Aangezien de golflengte gelijk is aan 1064 nm zal er dus destructieve interferentie optreden wanneer het weglengteverschil de helft hiervan is, 532 nm.

- inzicht dat 532 nm de helft is van 1064 nm;
- inzicht dat volledige destructieve interferentie optreedt wanneer het weglengteverschil gelijk is aan $\lambda/2$.

De typische golflengte van gravitatiegolven is in de orde van een kilometer. Om een gravitatiegolf zo goed mogelijk te detecteren mag de effectieve lengte van de armen van de LIGO-observatoria niet groter zijn dan de golflengte van de gravitatiegolf. Er treedt in dat geval volledige *constructieve* interferentie op.

3p2. Laat met behulp van een berekening zien dat de relatieve lengteverandering die een LIGO-observatorium in dat geval nog net kan waarnemen in de orde is van $h \approx 10^{-10}$.

Voorbeeld van een antwoord:

Er geldt dat $L_0 \approx \lambda_{\text{grav}}$ met $\lambda_{\text{grav}} = O(10^3)$ en $\Delta L = 532 \text{ nm} = O(10^{-7})$

Invullen in formule 1 geeft $h = O(10^{-10})$

- inzicht dat $L_0 = O(10^3)$
- inzicht dat $\Delta L = O(10^{-7})$
- completeren van het antwoord

In werkelijkheid zijn de armen van een LIGO-observatorium ‘slechts’ 3,99 km lang. Toch is men in staat om veel kleinere waarden van de relatieve lengteverandering waar te nemen. De LIGO-observatoria zijn in staat om een relatieve lengteverandering van 10^{-22} waar te nemen. Dit komt doordat men met behulp van verschillende optische elementen het vermogen van de uitgezonden laserbundel vele malen wordt versterkt. Voor de minimale relatieve lengteverandering die nog net door de detector onderscheiden kan worden, geldt de volgende benadering:

$$h_{\min} \sim \frac{1}{\sqrt{N_f}} \cdot \frac{\lambda_{\text{laser}}}{\lambda_{\text{grav}}}.$$

In deze formule is λ_{laser} de golflengte van de laser (in m), λ_{grav} is de golflengte van de gravitatiegolf (in m) en N_f is het aantal fotonen dat op de detector valt gedurende 1 trilling van de gravitatiegolf (geen eenheid). Voor het aantal fotonen dat op de detector valt geldt de volgende formule:

$$N_f = \frac{P_{\text{laser}} \cdot \lambda_{\text{laser}} \cdot \lambda_{\text{grav}}}{h \cdot c^2}.$$

In deze formule is P_{laser} het vermogen van de laser (in W), λ_{laser} de golflengte van de laser (in m), λ_{gw} de golflengte van de gravitatiegolf, h is de constante van Planck (J·s) en c is de lichtsnelheid (in m s⁻¹).

4p3. Leid de formule voor N_f af met behulp van de formules in Binas.

Voorbeeld van een antwoord:

Voor de energie van de laser geldt $E_{\text{laser}} = N_f \cdot E_f$, maar ook $E_{\text{laser}} = P_{\text{laser}} \cdot \Delta t$. Substitueren en herschrijven geeft:

$$N_f = \frac{P_{\text{laser}} \cdot \Delta t}{E_f}.$$

Verder is N_f het aantal fotonen dat op de detector valt in de tijdsduur Δt waarin precies één gravitatiegolf passeert. Dat betekent dat Δt gelijk is aan de trillingstijd T van de gravitatiegolf. De golfsnelheid van de gravitatiegolf kan berekend worden met $v_{\text{golf}} = \lambda_{\text{grav}}/T = \lambda_{\text{grav}}/\Delta t$, waarbij geldt dat $v_{\text{golf}} = c$. Dat betekent het volgende:

$$N_f = \frac{P_{\text{laser}} \cdot \lambda_{\text{grav}}}{c \cdot E_f}.$$

Voor de energie van de individuele fotonen geldt dat $E_f = h \cdot c / \lambda_{\text{laser}}$. Het aantal fotonen dat op de detector valt gedurende één trilling van een gravitatiegolf is dan gelijk aan:

$$N_f = \frac{P_{\text{laser}} \cdot \lambda_{\text{laser}} \cdot \lambda_{\text{grav}}}{h \cdot c^2}.$$

- inzicht dat $E_{\text{laser}} = N_f \cdot E_f$ en $E_{\text{laser}} = P_{\text{laser}} \cdot \Delta t$;

- inzicht dat $c = \lambda_{\text{grav}}/T$ en dat Δt gelijk is aan T ;

- inzicht dat $E_f = h \cdot c / \lambda_{\text{laser}}$;

- completeren van de afleiding.

Het vermogen van de laser is 0,70 kW en de golflengte van de gravitatiegolf is $1,5 \cdot 10^3$ km.

3p4. Bereken de minimale relatieve lengteverandering $h_{\min}$ die nog net door de LIGO-observatoria te meten zou moeten zijn.

Voorbeeld van een antwoord:

Om de relatieve rek te berekenen moet eerst het aantal fotonen worden berekend dat op de detector valt:

$$N_f = \frac{0,70 \cdot 10^3 \cdot 1064 \cdot 10^{-9} \cdot 1,5 \cdot 10^6}{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot (2,9979 \cdot 10^8)^2} = 1,87 \cdot 10^{19}.$$

Dit invullen geeft:

$$h_{\min} \sim \frac{1}{\sqrt{1,87 \cdot 10^{19}}} \cdot \frac{1064 \cdot 10^{-9}}{1,5 \cdot 10^6} \sim 1,64 \cdot 10^{-22}.$$

- Gebruik van de formule voor N_f en omrekenen van km naar m;
- Gebruik van de formule voor $h_{\min}$;
- Completeren.

De daadwerkelijk gemeten relatieve lengteverandering was in de orde van 10^{-21} .

2p5. Bereken het lengteverschil ΔL .

Voorbeeld van een antwoord:

Voor de relatieve rek geldt het volgende:

$$h = \frac{\Delta L}{L_0}.$$

Invullen geeft:

$$10^{-21} = \frac{\Delta L}{3,99 \cdot 10^6} \rightarrow \Delta L = 3,99 \cdot 10^6 \cdot 10^{-21} = 3,99 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

- Gebruik van de formule voor h ;
- Completeren.

2p6. Druk je antwoord van vraag 5 uit in termen van de bohrstraal.

Voorbeeld van een antwoord:

Volgens het bohrmodel is de straal van een waterstofatoom gelijk aan $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11}$ m.

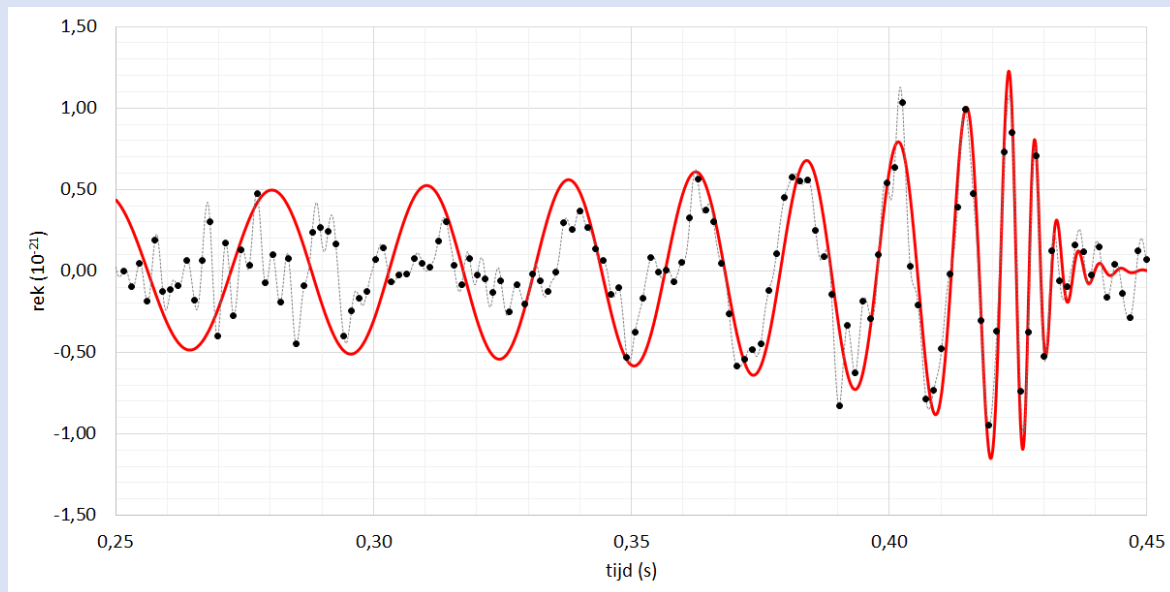
Dat komt overeen met:

$$a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11} = \frac{5,29 \cdot 10^{-11}}{3,99 \cdot 10^{-15}} = 1,33 \cdot 10^4 \cdot \Delta L.$$

- Opzoeken van de bohrstraal;
- Completeren.

Opgave 2: GW150914

In figuur 9 zijn de resultaten van de eerste gravitatiegolf detectie te zien. De doorgetrokken, rode lijn stelt een model voor dat het beste bij de onbewerkte data past (hier weergegeven als een stippellijn met bolletjes). Duidelijk te zien is dat zowel de frequentie van de gravitatiegolf als de amplitude toenemen tot aan het moment dat de samensmelting van de zwarte gaten plaats vond. Dit laatste gebeurde op $t = 0,42$ s.



Figuur 9

Op basis van de omlooptijd (of frequentie) en de onderlinge afstand van de zwarte gaten is het mogelijk om de gezamenlijke massa van de zwarte gaten te bepalen. Het hier gaat om twee zwarte gaten die om elkaar heen bewegen. Er geldt dat de frequentie waarmee de gravitatiegolven worden waargenomen twee keer zo groot is als de omloopfrequentie (zie voorbeeld 4):

$$f_{\text{waarneming}} = 2 \cdot f_{\text{omloop}}.$$

In deze formule is f_{omloop} de frequentie waarmee de zwarte gaten om elkaar draaien (in Hz) en $f_{\text{waarneming}}$ is de waargenomen frequentie vanaf de aarde (in Hz). Uit de publicatie van het LIGO-team bleek dat $f_{\text{waarneming}}$ tussen $t = 0,25$ s en $t = 0,35$ s gelijk was aan 35 Hz.

3p1. Toon dit aan met behulp van figuur 9.

Voorbeeld van een antwoord:

Tussen 0,255 s en 0,342 s zitten drie trillingen. Dat betekent dat de trillingstijd gelijk is aan:

$$T = \frac{0,342 - 0,255}{3} = 0,0293 \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{0,0293} = 34 \text{ Hz}.$$

Dit komt goed overeen met de gemeten frequentie van 35 Hz.

- Aflezen van de trillingstijd (met een marge van 0,003 s);

- Gebruik van $f = \frac{1}{T}$;

- Completeren.

De initiële afstand tussen de zwarte gaten was (op $t = 0,25$ s) gelijk was aan 880 kilometer. Volgens de LIGO-wetenschappers was de gezamenlijke massa van de zwarte gaten gelijk aan 62 keer de massa van de zon.

4p2. Toon dit aan met behulp van de derde wet van Kepler.

Voorbeeld van een antwoord:

De derde wet van Kepler luidt als volgt: $\frac{T_{\text{omloop}}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$ met $M = 62M_{\text{zon}}$

Hieruit volgt dat $T_{\text{omloop}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (800 \cdot 10^3)^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 62 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}} = 0,057 \text{ s}$

Met behulp van de grafiek (figuur 9) is de waargenomen trillingstijd te bepalen: $3T_{\text{waarneming}} = 0,342 - 0,255$, dat betekent dat $T_{\text{waarneming}} = 0,0293 \text{ s}$

De waargenomen trillingstijd is ongeveer de helft van de omlooptijd. Omdat geldt er dat:

$T_{\text{waarneming}} = \frac{1}{2} \cdot T_{\text{omloop}}$ (zie voorbeeld 4 op pagina 15), komen de antwoorden met elkaar overeen.

- gebruik van de derde wet van Kepler met $M = 62 \cdot M_{\text{zon}}$

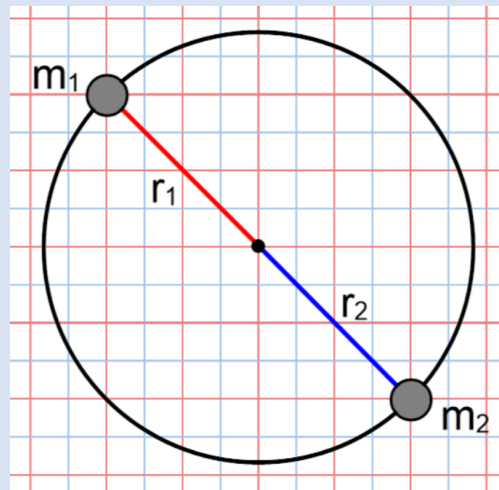
- opzoeken G en M

- bepalen van $T_{\text{waarneming}}$ met een marge van 0,003 s

- inzicht dat $T_{\text{waarneming}} = \frac{1}{2} \cdot T_{\text{omloop}}$

- completeren van het antwoord

In figuur 10 is te zien hoe twee zwarte gaten om elkaar heen bewegen. De afstand van beide zwarte gaten tot het massamiddelpunt is voor beide zwarte gaten hetzelfde, $r_1 = r_2$.



Figuur 10

3p3. Bereken vervolgens de baansnelheid op $t = 0,25$ s waarmee de zwarte gaten om elkaar heen bewegen.

Voorbeeld van een antwoord:

De baansnelheid is als volgt te berekenen: $v_{\text{baan}} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$.

De baanstraal van beide zwarte gaten is gelijk aan $r_1 = r_2 = \frac{1}{2} \cdot 880 \cdot 10^3 = 440 \cdot 10^3 \text{ m}$.

Invullen geeft $v_{\text{baan}} = \frac{2\pi \cdot 440 \cdot 10^3}{0,057} = 9,7 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$.

- gebruik van $v_{\text{baan}} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

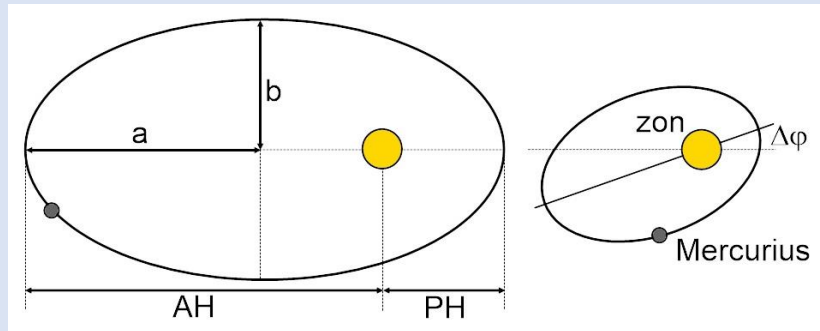
- inzicht dat $r_1 = r_2 = 440 \text{ km}$

- completeren van het antwoord

2. De basis: het equivalentieprincipe

Opgave 1: Perihelium verschuiving Mercurius

Een belangrijke test voor de algemene relativiteitstheorie was de voorspelling die Einstein deed wat betreft de verschuiving van de perihelium van Mercurius, ook wel perihelium precessie genoemd. In figuur 22 zie je de baan van Mercurius om de zon. Zoals je kunt zien gaat het hier om een ellipsbaan.



Figuur 22

In figuur 22 wordt afstand a de halve lange as genoemd en b is de halve korte as. Ook zijn het perihelium (PH) en aphelium (AH) aangegeven.

1p1. Druk de halve lange as a uit in termen van PH en AH.

Voorbeeld van een antwoord:

Uit figuur 22 volgt dat $2a = AH + PH$, ofwel:

$$a = \frac{AH + PH}{2}$$

Verder geldt voor de halve korte as b het volgende:

$$b^2 = PH \cdot AH.$$

De excentriciteit e van een ellips(baan) is gedefinieerd als:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

Voor Mercurius geldt dat $PH = 46,00 \cdot 10^6$ km en $AH = 69,82 \cdot 10^6$ km.

3p2. Toon met behulp van een berekening aan dat de excentriciteit van Mercurius gelijk is aan $e = 0,2057$.

Voorbeeld van een antwoord:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{46,00 \cdot 10^9 \cdot 69,82 \cdot 10^9}{\left(\frac{46,00 \cdot 10^9 + 69,82 \cdot 10^9}{2}\right)^2} = 0,0422977$$

$$e = \sqrt{0,0422977} = 0,2057$$

Dit komt overeen met de gegeven waarde voor de excentriciteit van mercurius.

- gebruik van de formule voor e^2
- invullen van de juiste waarden voor a^2 en b^2
- consequente conclusie

4p3. Bereken de perihelium precessie voor Mercurius per omwenteling. Geef je antwoord in booggraden.

Voorbeeld van een antwoord:

Voor de halflange as geldt $a = \frac{AH+PH}{2} = \frac{46,00 \cdot 10^9 + 69,82 \cdot 10^9}{2} = 57,91 \cdot 10^9$ m. De perihelium precessie per omwenteling is in dat geval gelijk aan $\Delta\varphi = \frac{6\pi \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{57,91 \cdot 10^9 (1 - 0,2057^2) \cdot (2,998 \cdot 10^8)^2} = 5,020 \cdot 10^{-7}$ rad. Dat komt overeen met $\Delta\varphi = 360 \cdot \frac{5,020 \cdot 10^{-7}}{2\pi} = 2,876 \cdot 10^{-5}$ booggraden.

- opzoeken G, M en c
- gebruik van $a = \frac{AH+PH}{2}$
- omrekenen van rad naar booggraden
- completeren

Einstein had berekend op basis van de algemene relativiteitstheorie dat de perihelium precessie van Mercurius overeen moest komen met 43 boogseconden per eeuw.

4p4. Toon met behulp van een berekening aan of Einstein gelijk had.

Voorbeeld van een antwoord:

De omlooptijd van mercurius is 88 dagen. Dat betekent dat het totaal aantal omwentelingen per eeuw gelijk is aan $100 \cdot \frac{365,25}{88} = 415$. De perihelium precessie per eeuw is in dat geval gelijk aan $415 \cdot 2,876 \cdot 10^{-5} = 0,01194^\circ$. Dit komt overeen met $0,01194 \cdot 60 \cdot 60 = 42,97 = 43$ boogseconden. De voorspelling van Einstein klopte.

- opzoeken van de omlooptijd van mercurius
- inzicht dat het aantal omwentelingen per eeuw gelijk is aan $100 \cdot \frac{365,25}{88}$
- omrekenen van booggraden naar boogseconden en conclusie

Opgave 2: De zonsverduistering van 1919

4p1. Toon met behulp van een berekening aan dat de buigingshoek voor een lichtstraal die net langs de zon afscheert gelijk is aan $1,75''$ (1,75 boogseconden).

Voorbeeld van een antwoord:

Voor een lichtstraal die net langs de zon afscheert, geldt dat $d = R_{\text{zon}}$.

De buigingshoek is dan $\Delta\alpha = \frac{4 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{6,96 \cdot 10^8 \cdot (2,998 \cdot 10^8)^2} = 8,47 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$.

Dat komt overeen met $8,47 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{360}{2\pi} \cdot 60 \cdot 60 = 1,75 \text{ boogseconden}$.

- opzoeken c, G, M
- inzicht dat $d = R_{\text{zon}}$ en opzoeken R_{zon}
- omrekenen van rad naar boogseconden
- completeren

Een alternatieve notatie voor formule (1) is de volgende:

$$\Delta\alpha = 1,75'' \frac{R_{\text{zon}}}{d}.$$

In deze formule is $\Delta\alpha$ wederom de buigingshoek, maar nu uitgedrukt in boogseconden. Verder is R_{ster} de straal van de ster (in m) en d is de loodrechte afstand tussen de lichtstraal en het massamiddelpunt van de ster (in m).

2p2. Leid bovenstaande formule af op basis van formule (1). Je kunt bij deze opgave gebruik maken van het feit dat $\Delta\alpha$ en d omgekeerd evenredig zijn.

Voorbeeld van een antwoord:

Wanneer $d = R_{\text{zon}}$ dan is $\Delta\alpha = 1,75''$. Omdat $\Delta\alpha$ en d omgekeerd evenredig zijn geldt het volgende:

$$\Delta\alpha(d = 2R_{\text{zon}}) = \frac{1}{2} \cdot 1,75'' \text{ en } \Delta\alpha(d = 3R_{\text{zon}}) = \frac{1}{3} \cdot 1,75''. \text{ Dit komt overeen met } \Delta\alpha = 1,75'' \frac{R_{\text{zon}}}{d}.$$

- inzicht dat $\Delta\alpha(d = R_{\text{zon}}) = 1,75''$ en dat geldt dat $\Delta\alpha(d = 2R_{\text{zon}}) = \frac{1}{2} \cdot 1,75''$
- conclusie

2p3. Leg aan de hand van figuur 15 uit dat sterren die zich ten opzichte van de aarde achter de zon bevinden, toch te zien kunnen zijn tijdens een volledige zonsverduistering.

Voorbeeld van een antwoord:

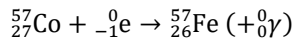
Doordat licht wordt afgebogen door de massa van de zon, kan het mogelijk zijn dat licht afkomstig van een ster die zich achter de zon bevindt, zodanig afgebogen wordt, dat het toch zichtbaar is vanaf de aarde. Voor een waarnemer op aarde lijkt het dat de ster zich op een andere plek bevindt dan eigenlijk het geval.

- inzicht dat onder invloed van de zon, lichtstralen worden afgebogen
- inzicht dat dit betekent dat een ster die zich 'achter' de zon bevindt, toch zichtbaar kan zijn voor een waarnemer op aarde.

Opgave 3: Het Pound-Rebka experiment

3p1. Geef de vervalvergelijking van het vervalproces van cobalt-57.

Voorbeeld van een antwoord:



- het aantal nucleonen links en rechts gelijk
- de lading links en rechts gelijk
- één elektron links van de pijl

Het ontstane ijzer-57 isotoop zendt na gemiddeld 141 nanoseconden een foton uit.

3p2. Leg uit hoe het komt dat het ijzer-57 isotoop na verloop van tijd een foton uitzendt.

Voorbeeld van een antwoord:

Tijdens K-vangst wordt een elektron uit de K-schil ingevangen door de kern. Hierdoor ontstaat er een leegte in de K-schil. Een elektron uit een hogere schil zal naar een lager energieniveau vallen. Omdat de energie in de K-schil het laagst is, zal de overtollige energie worden uitgezonden als foton.

- inzicht dat door K-vangst een elektron uit de K-schil verdwijnt
- inzicht dat een elektron uit een hogere schil naar het lagere energieniveau valt
- inzicht dat hierdoor een foton wordt uitgezonden

De energie van het uitgezonden foton is gelijk aan 122 keV.

4p3. Bereken de golflengte van het foton. Leg daarna duidelijk uit of het hier gaat om een gammafoton.

Voorbeeld van een antwoord:

De energie van het foton is gelijk aan $E_f = 122 \cdot 10^3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 1,954 \cdot 10^{-14}$ J. De golflengte van het foton kan als volgt worden berekend: $\lambda = \frac{h \cdot c}{E_f} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 2,998 \cdot 10^8}{1,954 \cdot 10^{-14}} = 1,02 \cdot 10^{-11}$ m. Volgens tabel 19 uit Binas komt dit overeen met (zachte) gammastraling.

- omrekenen van eV naar J
- gebruik van $E_f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$ en opzoeken van c en h
- gebruik van tabel 19 uit Binas
- completeren

NB Wanneer een leerling tabel 19 gebruikt om de energie van het foton te vergelijken met de waarden in de tabel en geen berekening gebruikt, 0 punten toekennen. Er staat in de vraag immers duidelijk dat het aan de hand van een berekening moet.

3p4. Leid bovenstaande formule af op basis van formule (3) en formules uit je Binas.

Voorbeeld van een antwoord:

Formule 3 kan worden herleidt tot $v = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda} c \rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda}$. Verder geldt ook dat $\lambda = \frac{c}{f}$. Dit invullen levert:

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{c}{f} - \frac{c}{f'}}{\frac{c}{f}} = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{f'}}{\frac{1}{f}} = \frac{f' - f}{f} = f \cdot \left(\frac{f'}{ff'} - \frac{f}{ff'} \right) = \frac{f'}{f'} - \frac{f}{f'}. \text{ Dit geeft uiteindelijk } \frac{v}{c} = \frac{f' - f}{f'}.$$

- gebruik van $c = f \cdot \lambda$

- correct optellen van de breuken $\frac{1}{f} - \frac{1}{f'}$

- completeren

Wanneer de waargenomen frequentie f_{y_2} gelijk is aan de uitgezonden frequentie f_{y_1} , dan zullen de gammafotonen boven in het Jefferson laboratorium deels worden geabsorbeerd door de ijzer-57 isotopen. Als gevolg hiervan zullen er minder gammafotonen worden gedetecteerd door de fotondetector.

3p5. Leg uit waarom de gammafotonen alleen worden geabsorbeerd door een ijzer-57 isotoop wanneer geldt dat $f_{y_1} = f_{y_2}$.

Voorbeeld van een antwoord:

Volgens de quantummechanica, zal de energie van het uitgezonden foton (op $y = y_1$) exact overeenkomen met het energieverval tussen de aangeslagen toestand van het atoom en de grondtoestand. Wanneer een elektron vanuit een hoger energieniveau terugvalt naar een lager energieniveau, dan zal de overtollige energie worden uitgezonden in de vorm van een foton. Hierbij geldt dat: $E_{f_1} = E_2 - E_1$. Wanneer het foton de zolder bereikt, dan zal het alleen worden geabsorbeerd wanneer de energie van het foton exact overeenkomt met het energieverval tussen de aangeslagen toestand van het atoom en de grondtoestand. Dit betekent dat voor het geabsorbeerde foton (op $y = y_2$) ook moet gelden dat: $E_{f_2} = E_2 - E_1 = E_{f_1}$. Omdat geldt dat $E_f = h \cdot f$, betekent dit dat $f_{y_1} = f_{y_2}$.

- inzicht dat $E_{f_2} = E_2 - E_1 = E_{f_1}$

- gebruik van $E_f = h \cdot f$

- conclusie

Tussen de waargenomen frequentie f_{y_2} en de uitgezonden frequentie f_{y_1} geldt het volgende verband:

$$f_{y_2} = f_{y_1} + \Delta f_g + \Delta f_D. \quad (5)$$

2p6. Toon aan met behulp van formule (2), (4) en (5) dat het volgende verband geldt:

$$\frac{g \cdot h}{c^2} = \frac{v}{c}.$$

Voorbeeld van een antwoord:

Formule 2 kan worden herschreven tot $\Delta f_g = -f \cdot \frac{g \cdot h}{c^2}$ en formule 4 als volgt $\Delta f_D = f' \cdot \frac{v}{c}$. Invullen in formule 4 levert:

$$f_{y_2} = f_{y_1} + \Delta f_g + \Delta f_D = f_{y_1} - f \cdot \frac{g \cdot h}{c^2} + f' \cdot \frac{v}{c}.$$

Omdat geldt dat $f_{y_1} = f_{y_2}$ (waarbij $f_{y_1} = f$ en $f_{y_2} = f'$), volgt:

$$f = f - f \cdot \frac{g \cdot h}{c^2} + f \cdot \frac{v}{c}, \text{ en uiteindelijk:}$$

$$\frac{g \cdot h}{c^2} = \frac{v}{c}.$$

- inzicht dat $f_{y_1} = f$ en $f_{y_2} = f'$

- completeren

Bij een bepaalde snelheid, bleek dat het effect van de gravitationele roodverschuiving werd opgeheven door het dopplereffect. Het aantal fotonen dat werd gedetecteerd door de fotodetector, was namelijk sterk afgenomen. De snelheid waarbij dit gebeurde was $0,70 \mu\text{m/s}$.

De golflengteverandering (en dus ook frequentieverandering) van de waargenomen fotonen bleek overeen te komen met de golflengteverandering veroorzaakt door gravitationele roodverschuiving.

ap7. Laat met behulp van een berekening zien dat de gravitationele roodverschuiving wordt opgeheven door het dopplereffect.

Voorbeeld van een antwoord:

De snelheid van de conus is $0,70 \mu\text{m/s}$, wat overeenkomt met $7,0 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$. Het hoogteverschil tussen de twee Fe-57 isotopen is 22,6 meter. Dit invullen geeft:

$$\frac{g \cdot h}{c^2} = \frac{9,8 \cdot 22,6}{(2,998 \cdot 10^8)^2} = 2,5 \cdot 10^{-15}.$$

$$\frac{v}{c} = \frac{7,0 \cdot 10^{-7}}{2,998 \cdot 10^8} = 2,3 \cdot 10^{-15}$$

Dit komt goed met elkaar overeen, wat betekent dat de gravitationele roodverschuiving wordt opgeheven door de extra bijdrage van het dopplereffect.

- omrekenen van $0,70 \cdot \mu\text{m s}^{-1}$

- gebruik van de formule $\frac{g \cdot h}{c^2} = \frac{v}{c}$

- completeren