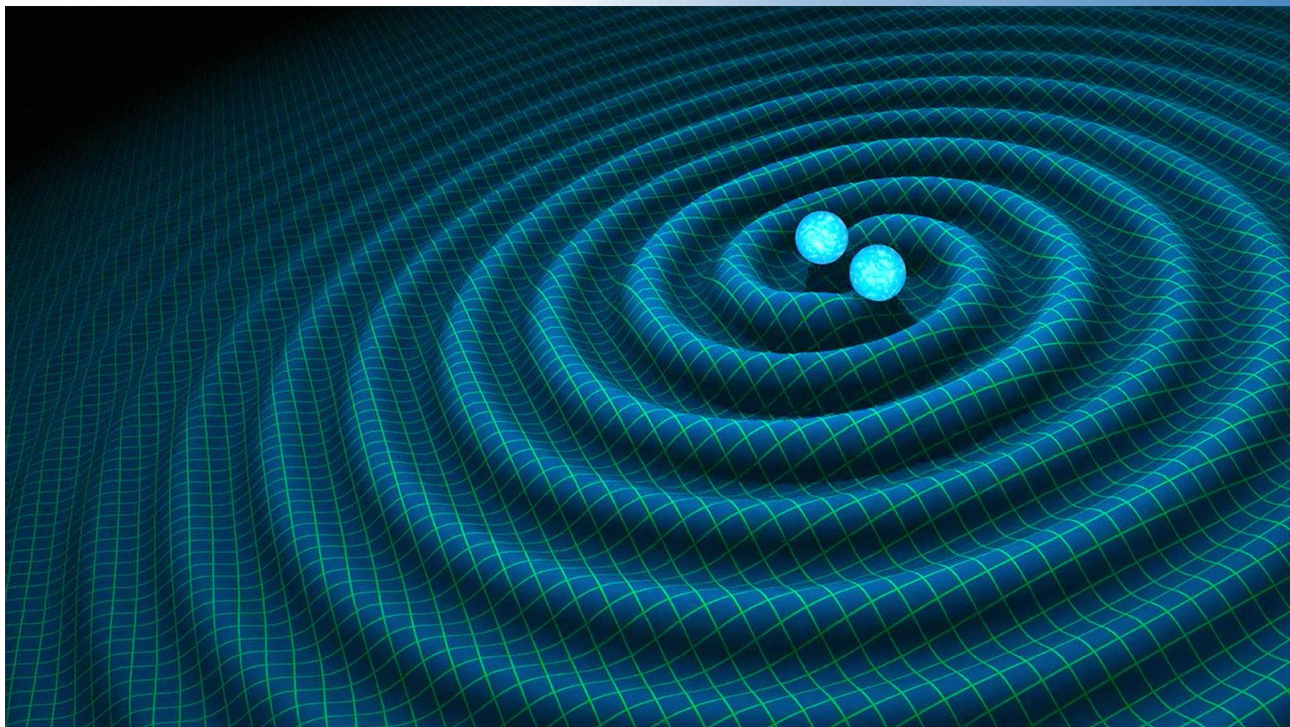


Naam:

Klas:

Algemene relativiteit - werkboek



Stanley Delhayé

Jan van Brabant College

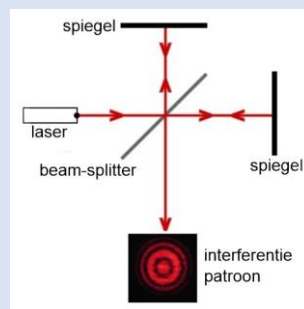
December 2018

1. Gedetecteerd: gravitatiegolven

Opgave 1: Laser-Interferometer Gravitational-wave Observatory

In figuur 8 zie je de interferometer zoals deze gebruikt wordt in de LIGO-observatoria. Een laserbundel met een golflengte van 1064 nm wordt door een zogenaamde 'beam-splitter' opgesplitst. De helft van de bundel gaat door de ene arm op-en-neer en de andere helft gaat door de andere arm op-en-neer.

De opstelling van de LIGO-observatoria zijn zo gemaakt dat zolang er geen gravitatiegolf passeert, er volledige destructieve interferentie optreedt. Als gevolg van een passerende gravitatiegolf zullen de beide armen afwisselend langer en korter worden. Dit zorgt ervoor dat de beide laserbundels een andere afstand afleggen ten opzichte van elkaar. Als gevolg hiervan zullen de laserbundels constructief gaan interfereren met elkaar.



Figuur 8

3p1. Wanneer het weglengteverschil een geheel veelvoud is van de helft van de golflengte van de laser, dan treedt er volledige destructieve interferentie op. Leg uit waarom dat zo is.

Ruimte voor een antwoord:

De typische golflengte van gravitatiegolven is in de orde van een kilometer. Om een gravitatiegolf zo goed mogelijk te detecteren mag de effectieve lengte van de armen van de LIGO-observatoria niet groter zijn dan de golflengte van de gravitatiegolf. Er treedt in dat geval volledige *constructieve* interferentie op.

3p2. Laat met behulp van een berekening zien dat de relatieve lengteverandering die een LIGO-observatorium in dat geval nog net kan waarnemen in de orde is van $h \approx 10^{-10}$.

Ruimte voor een antwoord:

In werkelijkheid zijn de armen van een LIGO-observatorium ‘slechts’ 3,99 km lang. Toch is men in staat om veel kleinere waarden van de relatieve lengteverandering waar te nemen. De LIGO-observatoria zijn in staat om een relatieve lengteverandering van 10^{-22} waar te nemen. Dit komt doordat men met behulp van verschillende optische elementen het vermogen van de uitgezonden laserbundel vele malen wordt versterkt. Voor de minimale relatieve lengteverandering die nog net door de detector onderscheiden kan worden, geldt de volgende benadering:

$$h_{\min} \sim \frac{1}{\sqrt{N_f}} \cdot \frac{\lambda_{\text{laser}}}{\lambda_{\text{grav}}}.$$

In deze formule is λ_{laser} de golflengte van de laser (in m), λ_{grav} is de golflengte van de gravitatiegolf (in m) en N_f is het aantal fotonen dat op de detector valt gedurende 1 trilling van de gravitatiegolf (geen eenheid). Voor het aantal fotonen dat op de detector valt geldt de volgende formule:

$$N_f = \frac{P_{\text{laser}} \cdot \lambda_{\text{laser}} \cdot \lambda_{\text{grav}}}{h \cdot c^2}.$$

In deze formule is P_{laser} het vermogen van de laser (in W), λ_{laser} de golflengte van de laser (in m), λ_{gw} de golflengte van de gravitatiegolf, h is de constante van Planck (J·s) en c is de lichtsnelheid (in m s⁻¹).

4p3. Leid de formule voor N_f af met behulp van de formules in Binas.

Ruimte voor een antwoord:

Het vermogen van de laser is 0,70 kW en de golflengte van de gravitatiegolf is $1,5 \cdot 10^3$ km.

3p4. Bereken de minimale relatieve lengteverandering $h_{\min}$ die nog net door de LIGO-observatoria te meten zou moeten zijn.

Ruimte voor een antwoord:

De daadwerkelijk gemeten relatieve lengteverandering was in de orde van 10^{-21} .

2p5. Bereken het lengteverschil ΔL .

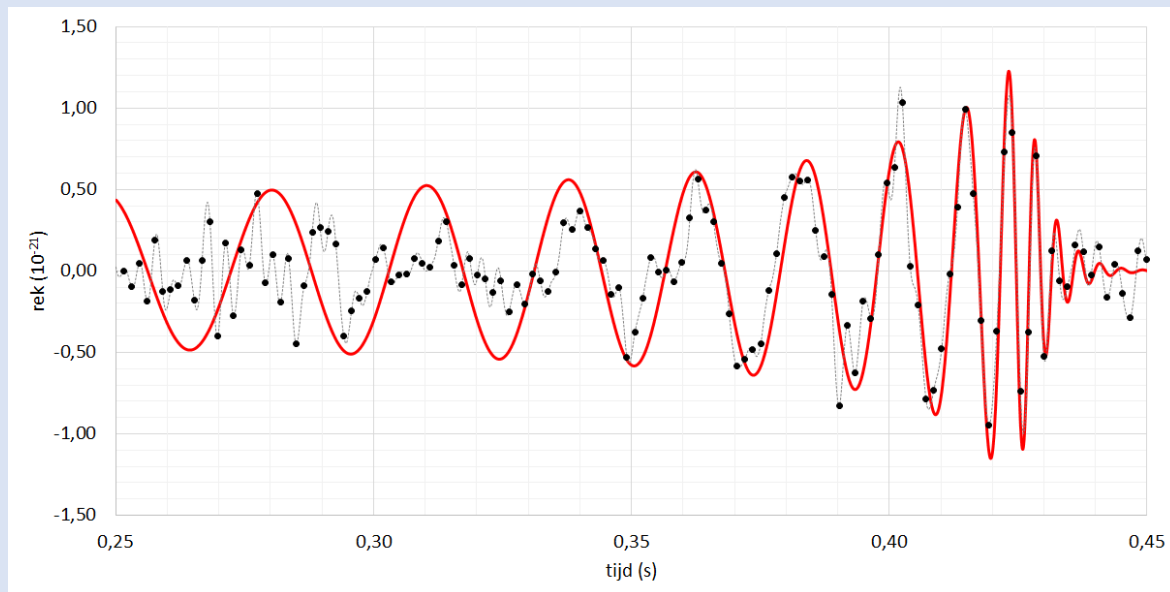
Ruimte voor een antwoord:

2p6. Druk je antwoord van vraag 5 uit in termen van de bohrstraal.

Ruimte voor een antwoord:

Opgave 2: GW150914

In figuur 9 zijn de resultaten van de eerste gravitatiegolf detectie te zien. De doorgetrokken, rode lijn stelt een model voor dat het beste bij de onbewerkte data past (hier weergegeven als een stippellijn met bolletjes). Duidelijk te zien is dat zowel de frequentie van de gravitatiegolf als de amplitude toenemen tot aan het moment dat de samensmelting van de zwarte gaten plaats vond. Dit laatste gebeurde op $t = 0,42$ s.



Figuur 9

Op basis van de omlooptijd (of frequentie) en de onderlinge afstand van de zwarte gaten is het mogelijk om de gezamenlijke massa van de zwarte gaten te bepalen. Het hier gaat om twee zwarte gaten die om elkaar heen bewegen. Er geldt dat de frequentie waarmee de gravitatiegolven worden waargenomen twee keer zo groot is als de omloopfrequentie (zie voorbeeld 4):

$$f_{\text{waarneming}} = 2 \cdot f_{\text{omloop}}$$

In deze formule is f_{omloop} de frequentie waarmee de zwarte gaten om elkaar draaien (in Hz) en $f_{\text{waarneming}}$ is de waargenomen frequentie vanaf de aarde (in Hz). Uit de publicatie van het LIGO-team bleek dat $f_{\text{waarneming}}$ tussen $t = 0,25$ s en $t = 0,35$ s gelijk was aan 35 Hz.

3p1. Toon dit aan met behulp van figuur 9.

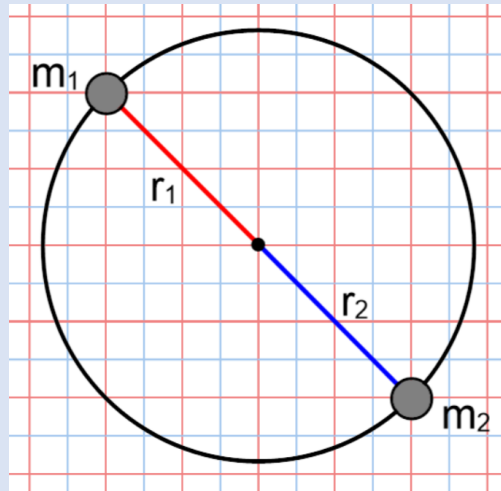
Ruimte voor een antwoord:

De initiële afstand tussen de zwarte gaten was (op $t = 0,25$ s) gelijk was aan 880 kilometer. Volgens de LIGO-wetenschappers was de gezamenlijke massa van de zwarte gaten gelijk aan 62 keer de massa van de zon.

4p2. Toon dit aan met behulp van de derde wet van Kepler.

Ruimte voor een antwoord:

In figuur 10 is te zien hoe twee zwarte gaten om elkaar heen bewegen. De afstand van beide zwarte gaten tot het massamiddelpunt is voor beide zwarte gaten hetzelfde, $r_1 = r_2$.



Figuur 10

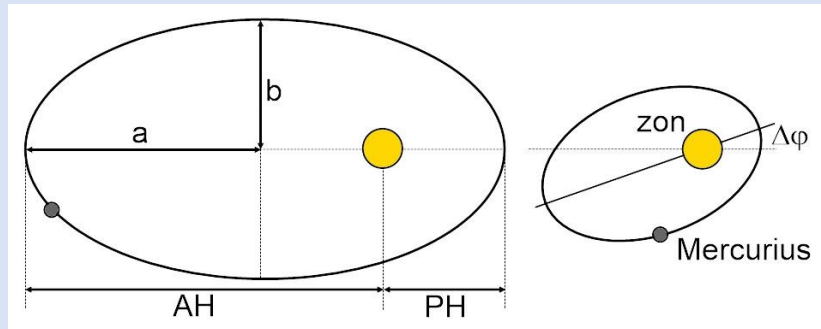
3p3. Bereken vervolgens de baansnelheid op $t = 0,25$ s waarmee de zwarte gaten om elkaar heen bewegen.

Ruimte voor een antwoord:

2. De basis: het equivalentieprincipe

Opgave 1: Perihelium verschuiving Mercurius

Een belangrijke test voor de algemene relativiteitstheorie was de voorspelling die Einstein deed wat betreft de verschuiving van de perihelium van Mercurius, ook wel perihelium precessie genoemd. In figuur 22 zie je de baan van Mercurius om de zon. Zoals je kunt zien gaat het hier om een ellipsbaan.



Figuur 22

In figuur 22 wordt afstand a de halve lange as genoemd en b is de halve korte as. Ook zijn het perihelium (PH) en aphelium (AH) aangegeven.

1p1. Druk de halve lange as a uit in termen van PH en AH .

Ruimte voor een antwoord:

Verder geldt voor de halve korte as b het volgende:

$$b^2 = PH \cdot AH.$$

De excentriciteit e van een ellips(baan) is gedefinieerd als:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

Voor Mercurius geldt dat $PH = 46,00 \cdot 10^6$ km en $AH = 69,82 \cdot 10^6$ km.

3p2. Toon met behulp van een berekening aan dat de excentriciteit van Mercurius gelijk is aan $e = 0,2057$.

Ruimte voor een antwoord:

De perihelium precessie van Mercurius is volgens de algemene relativiteitstheorie met behulp van de volgende formule te berekenen:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi \cdot G \cdot M}{a(1-e^2) \cdot c^2}.$$

In deze formule is $\Delta\varphi$ de buigingshoek (in rad), G is de gravitatieconstante ($6,67384 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$), M massa van het hemellichaam (in kg), d is de loodrechte afstand tussen de lichtstraal en het massamiddelpunt van het hemellichaam (in m) en is c de lichtsnelheid (in m s^{-1}).

4p3. Bereken de perihelium precessie voor Mercurius per omwenteling. Geef je antwoord in booggraden.

Ruimte voor een antwoord:

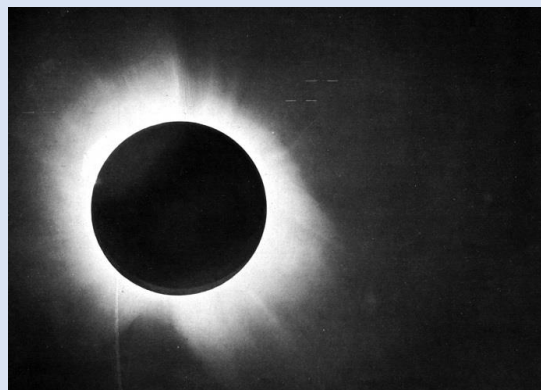
Einstein had berekend op basis van de algemene relativiteitstheorie dat de perihelium precessie van Mercurius overeen moest komen met 43 boogseconden per eeuw.

4p4. Toon met behulp van een berekening aan of Einstein gelijk had.

Ruimte voor een antwoord:

Opgave 2: De zonsverduistering van 1919

Tijdens de totale zonsverduistering van 1919, maakte Sir Arthur Eddington een foto van de zon (zie figuur 23). Op de foto was de verduisterde zon te zien, maar ook de sterren die zich deels achter de zon bevonden.



Figuur 23

Na analyse bleek dat de sterren zich op een andere positie bevonden dan verwacht. Volgens de algemene relativiteitstheorie werd het licht van de sterren afgebogen doordat de ruimtetijd rondom de zon gekromd was. De buigingshoek $\Delta\alpha$ kan worden berekend met behulp van formule (1).

4p1. Toon met behulp van een berekening aan dat de buigingshoek voor een lichtstraal die net langs de zon afscheert gelijk is aan $1,75''$ (1,75 boogseconden).

Ruimte voor een antwoord:

Een alternatieve notatie voor formule (1) is de volgende:

$$\Delta\alpha = 1,75'' \frac{R_{\text{ster}}}{d}.$$

In deze formule is $\Delta\alpha$ wederom de buigingshoek, maar nu uitgedrukt in boogseconden. Verder is R_{ster} de straal van de ster (in m) en d is de loodrechte afstand tussen de lichtstraal en het massamiddelpunt van de ster (in m).

2p2. Leid bovenstaande formule af op basis van formule (1). Je kunt bij deze opgave gebruik maken van het feit dat $\Delta\alpha$ en d omgekeerd evenredig zijn.

Ruimte voor een antwoord:

2p3. Leg aan de hand van figuur 15 uit dat sterren die zich ten opzichte van de aarde achter de zon bevinden, toch te zien kunnen zijn tijdens een volledige zonsverduistering.

Ruimte voor een antwoord:

Opgave 3: Het Pound-Rebka experiment

In figuur 24 is het Jefferson laboratorium van het Harvard gebouw te zien. In dit gebouw voerden Robert Pound en zijn student Glen Rebka Jr. een experiment uit waarmee ze gravitationele roodverschuiving experimenteel wilden bevestigen.



Figuur 24

Tijdens het experiment maakten Pound en Rebka gebruik van het instabiele cobalt-57 isotoop. Een cobalt-57 isotoop vervalt tot een ijzer-57 isotoop. Tijdens dit proces vindt er zogenaamde K-vangst plaats. Een elektron uit de K-schil, wordt door de kern ingevangen. Hierdoor verandert een proton in de kern in een neutron.

3p1. Geef de vervalvergelijking van het vervalproces van cobalt-57.

Ruimte voor een antwoord:

Het ontstane ijzer-57 isotoop zendt na gemiddeld 141 nanoseconden een foton uit.

3p2. Leg uit hoe het komt dat het ijzer-57 isotoop na verloop van tijd een foton uitzendt.

Ruimte voor een antwoord:

De energie van het uitgezonden foton is gelijk aan 122 keV.

4p3. Bereken de golflengte van het foton. Leg daarna duidelijk uit of het hier gaat om een gammafoton.

Ruimte voor een antwoord:

Met behulp van de opstelling die te zien is in figuur 20 werd het effect van gravitationele roodverschuiving aangetoond. Door het eerste monster met ijzer-57 isotopen op een luidspreker te plaatsen waren Pound en Rebka in staat om de twee monsters ten opzichte van elkaar te laten bewegen. Hierdoor zal er een dopplereffect optreden.

De formule voor het dopplereffect kan worden herschreven tot:

$$\frac{f' - f}{f'} = \frac{\Delta f_D}{f'} = \frac{v}{c}. \quad (4)$$

In deze formule is f de frequentie van de *uitgezonden* fotonen (in Hz), f' is de frequentie van de *waargenomen* fotonen (in Hz), Δf_D de verandering van de waargenomen frequentie (in Hz) ten gevolge van het dopplereffect, v is de snelheid van de lichtbron (in m s^{-1}) en c is de lichtsnelheid (in m s^{-1}).

3p4. Leid bovenstaande formule af op basis van formule (3) en formules uit je Binas.

Ruimte voor een antwoord:

Wanneer de waargenomen frequentie f_{y_2} gelijk is aan de uitgezonden frequentie f_{y_1} , dan zullen de gammafotonen boven in het Jefferson laboratorium deels worden geabsorbeerd door de ijzer-57 isotopen. Als gevolg hiervan zullen er minder gammafotonen worden gedetecteerd door de fotondetector.

3p5. Leg uit waarom de gammafotonen alleen worden geabsorbeerd door een ijzer-57 isotoop wanneer geldt dat $f_{y_1} = f_{y_2}$.

Ruimte voor een antwoord:

Tussen de waargenomen frequentie f_{y_2} en de uitgezonden frequentie f_{y_1} geldt het volgende verband:

$$f_{y_2} = f_{y_1} + \Delta f_g + \Delta f_D. \quad (5)$$

2p6. Toon aan met behulp van formule (2), (4) en (5) dat het volgende verband geldt:

$$\frac{g \cdot h}{c^2} = \frac{v}{c}.$$

Ruimte voor een antwoord:

Bij een bepaalde snelheid, bleek dat het effect van de gravitationele roodverschuiving werd opgeheven door het dopplereffect. Het aantal fotonen dat werd gedetecteerd door de fotondetector, was namelijk sterk afgenomen. De snelheid waarbij dit gebeurde was $0,70 \mu\text{m/s}$.

De golflengteverandering (en dus ook frequentieverandering) van de waargenomen fotonen bleek overeen te komen met de golflengteverandering veroorzaakt door gravitationele roodverschuiving.

3p7. Laat met behulp van een berekening zien dat de gravitationele roodverschuiving wordt opgeheven door het dopplereffect.

Ruimte voor een antwoord:

Opgave 4: Gravitationele tijddilatatie

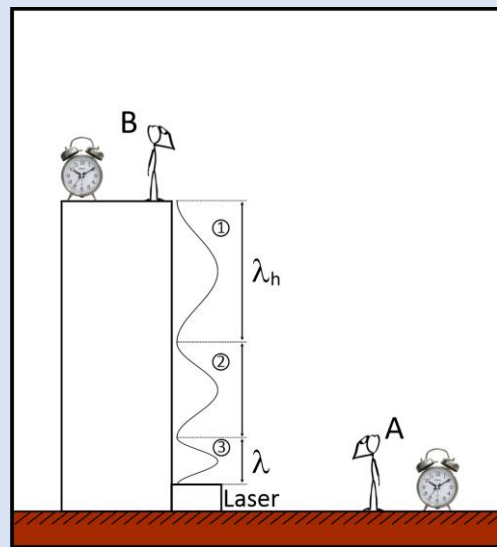
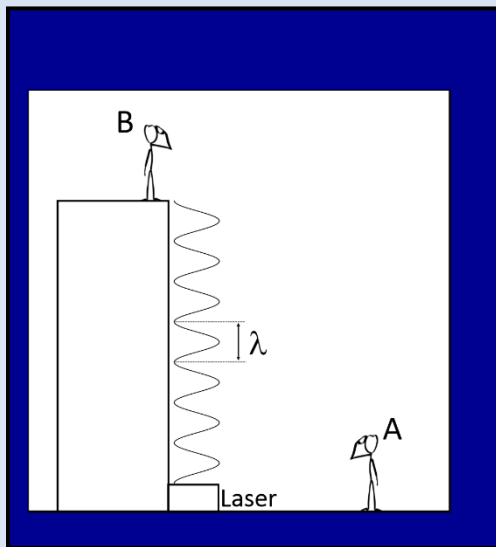
Alex (A) en Britt (B) voeren twee gedachtenexperimenten uit (zie figuur 1). Bij beide gedachtenexperimenten zendt Alex een continue EM-golf naar Britt. Wanneer Alex en Britt gedachtenexperiment 1 uitvoeren (in de ruimte, ver weg van alle materie), dan zal de golflengte van de EM-golf constant zijn. Bij gedachtenexperiment 2 (uitgevoerd op aarde) zal de golflengte van de EM-golf steeds groter worden¹, naarmate de golf een grotere hoogte bereikt. Dit verschijnsel is bekend als gravitationele roodverschuiving. Je kunt het effect van gravitationele roodverschuiving als volgt berekenen:

$$\frac{\Delta f_g}{f} = \frac{f_h - f}{f} = -\frac{g \cdot h}{c^2}. \quad (1)$$

In deze formule is Δf_g de verandering van de waargenomen frequentie (in Hz) als gevolg van gravitatie, f de frequentie van de EM-golf op de grond (in Hz), f_h de frequentie van de EM-golf op hoogte h (in Hz), g is de valversnelling (in m s^{-2}), h is de hoogte vanaf de grond (in m) en is c de lichtsnelheid (in m s^{-1}).

Bij deze opgave ga je onderzoeken welke gevolgen gravitationele roodverschuiving heeft op het verloop van tijd! Dit ga je doen door de voortplanting van de EM-golf te analyseren vanuit het perspectief van zowel Alex als Britt.

¹Het effect van de gravitationele roodverschuiving is sterk overdreven om het beter te kunnen visualiseren.



Figuur 1: Gedachtenexperiment 1, uitgevoerd in de ruimte (links) en gedachtenexperiment 2, uitgevoerd op aarde (rechts).

Alex en Britt voeren (gedachten)experiment 2 uit (zie figuur 1). De frequentie van de laser is ingesteld op $f = 1,0$ GHz. Dit betekent dat na elke nanoseconde een volgende golf wordt gegenereerd.

2p1. Bereken de golflengte van de golf die de laser verlaat.

Ruimte voor een antwoord:

Na $1,0$ ns wordt EM-golf 2 gegenereerd en bevindt EM-golf 1 zich op een grotere hoogte. Als gevolg van de aanwezige gravitatie zal de golflengte van EM-golf 1 groter worden naarmate de EM-golf hoger komt (zie de rechteraafbeelding van figuur 1).

2p2. Toon met behulp van formule 1 aan dat de **golflengte** toeneemt naarmate de EM-golf hoger komt.

Ruimte voor een antwoord:

Tijdsduur volgens Britt

Eerst ga je de voortplanting van EM-golf 1 analyseren vanuit het perspectief van Britt.

Na 3,0 ns heeft EM-golf 1 de top van de verhoging waar Britt op staat bereikt. Dit komt overeen met de situatie zoals die te zien is in figuur 1 (rechts). De golflengte van EM-golf 1 is dan $\lambda_1 = 0,90$ m. De golflengte van EM-golf 2 is $\lambda_2 = 0,60$ m en voor EM-golf 3 is dat uiteraard $\lambda_3 = 0,30$ m.

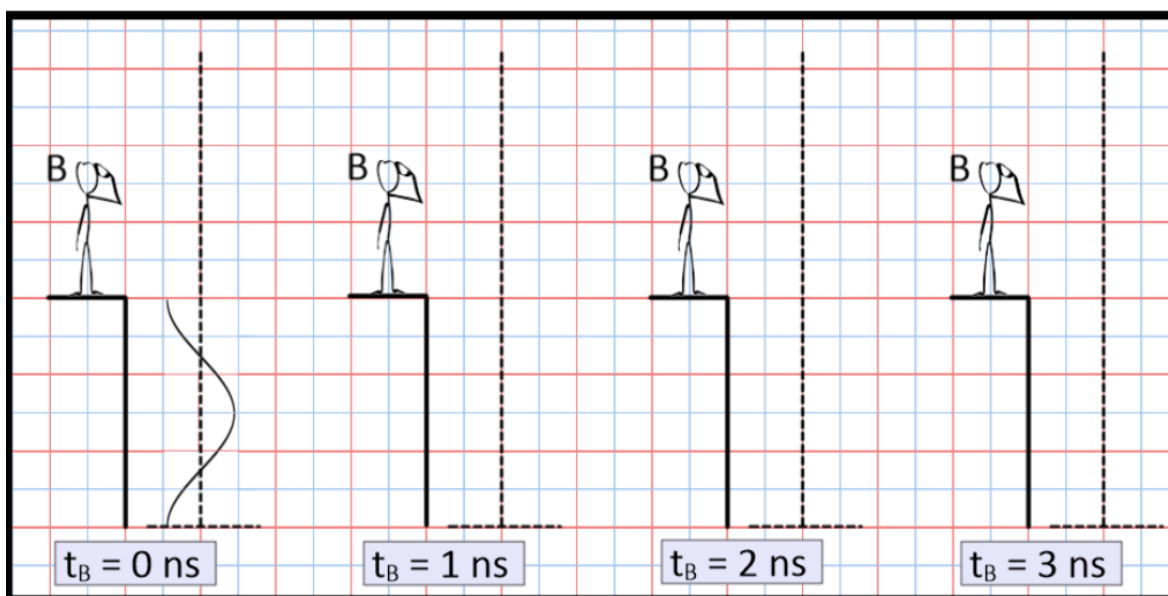
2p3. Leg duidelijk uit welke afstand EM-golf 1 aflegt gedurende 1,0 ns.

Ruimte voor een antwoord:

In figuur 2 is EM-golf 1 te zien vanuit het perspectief van Britt. Op $t_B = 0$ ns heeft EM-golf 1 net de voet van de verhoging waar Britt op staat bereikt.

2p4. Geef in figuur 2 aan waar EM-golf 1 zich op elk tijdstip bevindt. Bepaal hiertoe eerst de schaal van de figuur.

Ruimte voor een antwoord:



Figuur 2: De voortplanting van EM-golf 1 vanuit het perspectief van Britt.

1p5. Wat is het tijdsinterval Δt_B volgens Britt, waarin EM-golf 1 haar passeert?

Ruimte voor een antwoord:

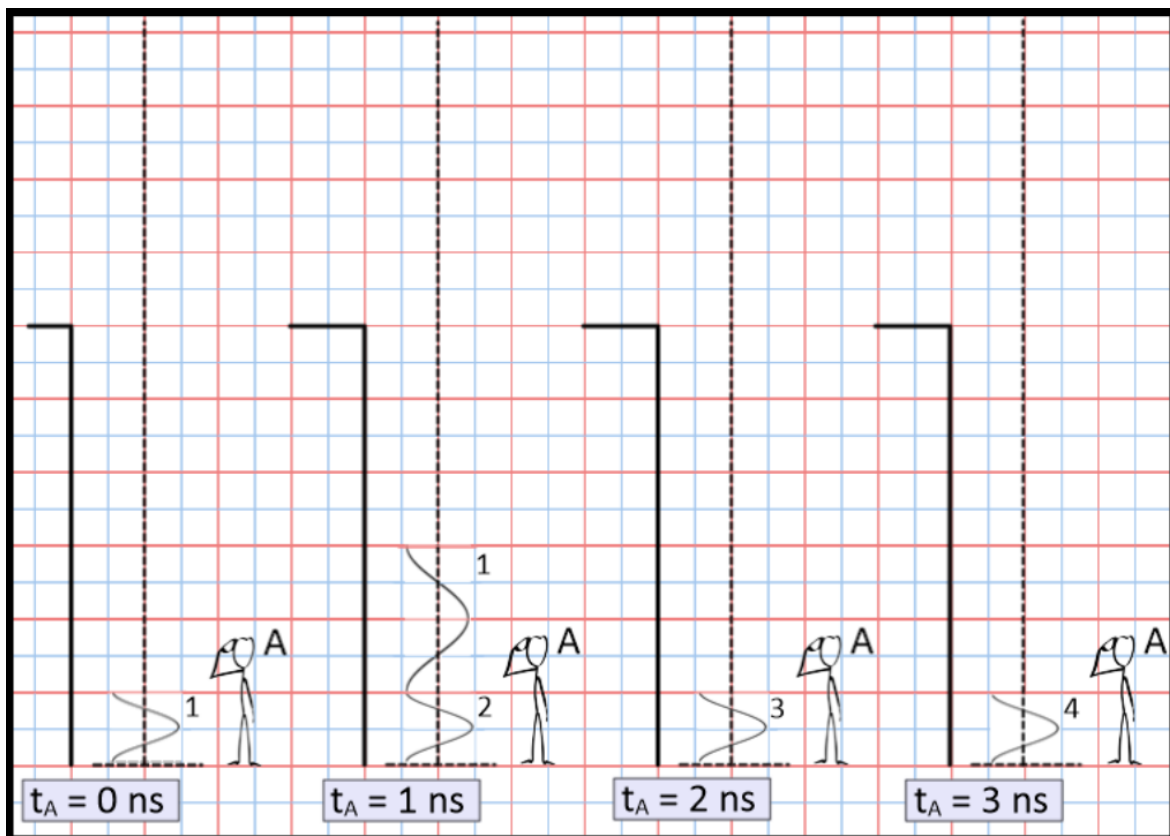
Tijdsduur volgens Alex

Vervolgens ga je de voortplanting van EM-golf 1 analyseren vanuit het perspectief van Alex.

In figuur 3 is EM-golf 1 te zien vanuit het perspectief van Alex.

2p6. Teken de totale EM-golf in figuur 3 vanuit het perspectief van Alex voor de tijdstippen $t_A = 2 \text{ ns}$ en $t_A = 3 \text{ ns}$. Denk eraan dat de golflengte steeds met dezelfde waarde toeneemt. Voor het tijdstip $t_A = 1 \text{ ns}$ is dit al gedaan.

Ruimte voor een antwoord:



Figuur 3: De voortplanting van EM-golf 1 vanuit het perspectief van Alex.

_{1p}8. Wat is het tijdsinterval Δt_A volgens Alex, waarin EM-golf 1 Britt passeert?

Ruimte voor een antwoord:

De tijdsintervallen Δt_A en Δt_B komen niet met elkaar overeen. Dat betekent dat tijd anders verloopt afhankelijk van waar een klok zich bevindt. Dit verschijnsel noemt men gravitationele tijddilatatie.

_{2p}9. Leg duidelijk uit waar de tijd trager verloopt; dicht bij een grote massa of juist heel ver van een massa verwijderd.

Ruimte voor een antwoord:

3. Overige opgaven

Opgave 1: Het Hulse-Taylor dubbelster systeem

Het Hulse-Taylor dubbelster systeem bestaat uit twee hemellichamen die om elkaar heen bewegen. Voor het gemak mag je aannemen dat beide hemellichamen dezelfde massa hebben:

$$m_1 = m_2 = 1,4 \cdot M_{\text{zon}}.$$

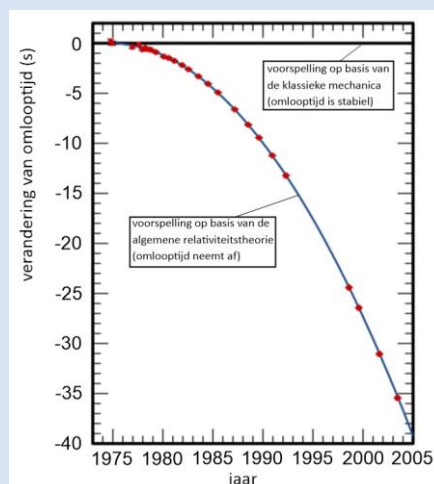
Dit laatste betekent dat je ook mag aannemen dat de afstand tot het massamiddelpunt voor beide hetzelfde is:

$$r = 1,95 \cdot 10^6 \text{ km}$$

4p1. Bereken de omlooptijd van beide hemellichamen. Druk je antwoord uit in uren.

Ruimte voor een antwoord:

3p2. Bepaal met behulp van de onderstaande grafiek met hoeveel seconden de omlooptijd van het dubbelster systeem afneemt per omwenteling.



Ruimte voor een antwoord:

Wanneer de baanstraal kleiner wordt, dan heeft dat gevolgen voor de gravitatie-energie van het hemellichaam. Er wordt in dat geval gravitatie-energie omgezet in een andere vorm van energie.

_{1p}3. Welke vorm van energie is dat?

Ruimte voor een antwoord:

Volgens de klassieke wetten van de mechanica moet de totale hoeveelheid energie van het systeem behouden zijn. Met andere woorden, gravitatie-energie wordt omgezet in kinetische energie en andersom. Dat betekent dat de omlooptijd constant moet zijn. Toch is in de grafiek te zien dat dit niet het geval is. Er wordt blijkbaar energie onttrokken aan het dubbelster systeem. Dit is het gevolg van het feit dat er gravitatiegolven worden opgewekt.

_{3p}4. Bereken de totale hoeveelheid aan energie die in de jaren 1975-2005 zijn omgezet in de vorm van gravitatiegolven.

Ruimte voor een antwoord: