Speciale Relativiteitstheorie

Hoe vertel ik het mijn leerlingen?

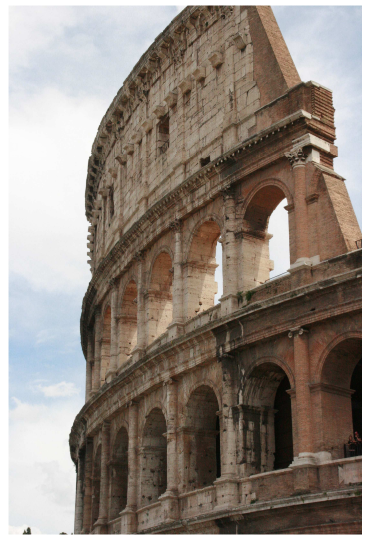
Noordhoff Uitgevers

Drs. H.Jordens
E: h.jordens@rug.nl

Vele wegen leiden naar Rome ...

algebraïsch

$$\begin{pmatrix} x \\ pt \end{pmatrix} = A(v)\begin{pmatrix} x' \\ p't' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(v) & a_2(v) \\ a_3(v) & a_4(v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ p't' \end{pmatrix}$$



1911, 1947, 1975, ..

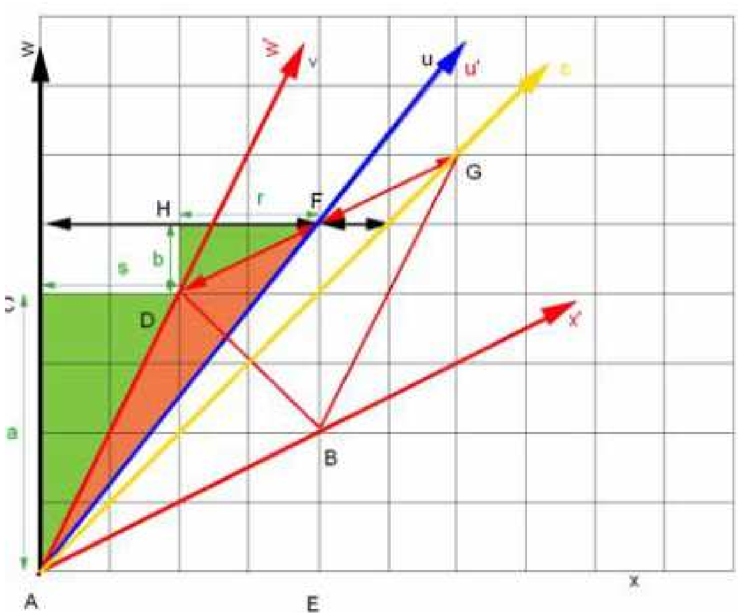
3 aannamen:

$$A(-v)A(v) = 1$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ pt \end{pmatrix} = A(v)\begin{pmatrix} -x' \\ p't' \end{pmatrix}$$

$$A(v'') = A(v)A(v')$$

$$\boxed{A(v) = \gamma\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta\delta & 1 \end{pmatrix}}$$



meetkundig

$\delta = 0$ klassieke mechanica

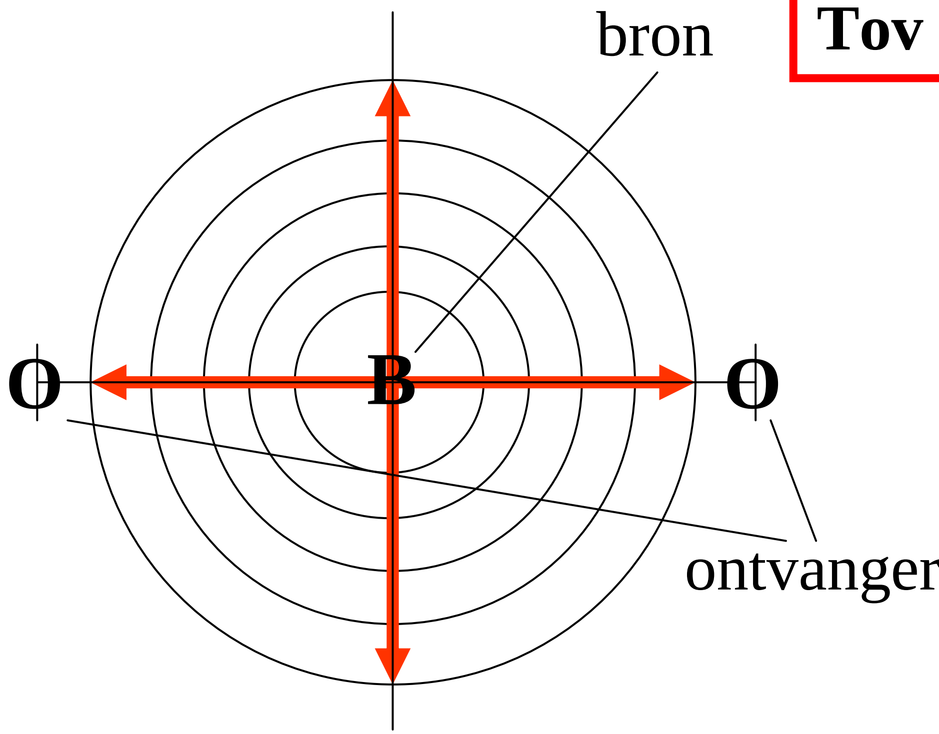
$\delta = 1$ relativistische mechanica

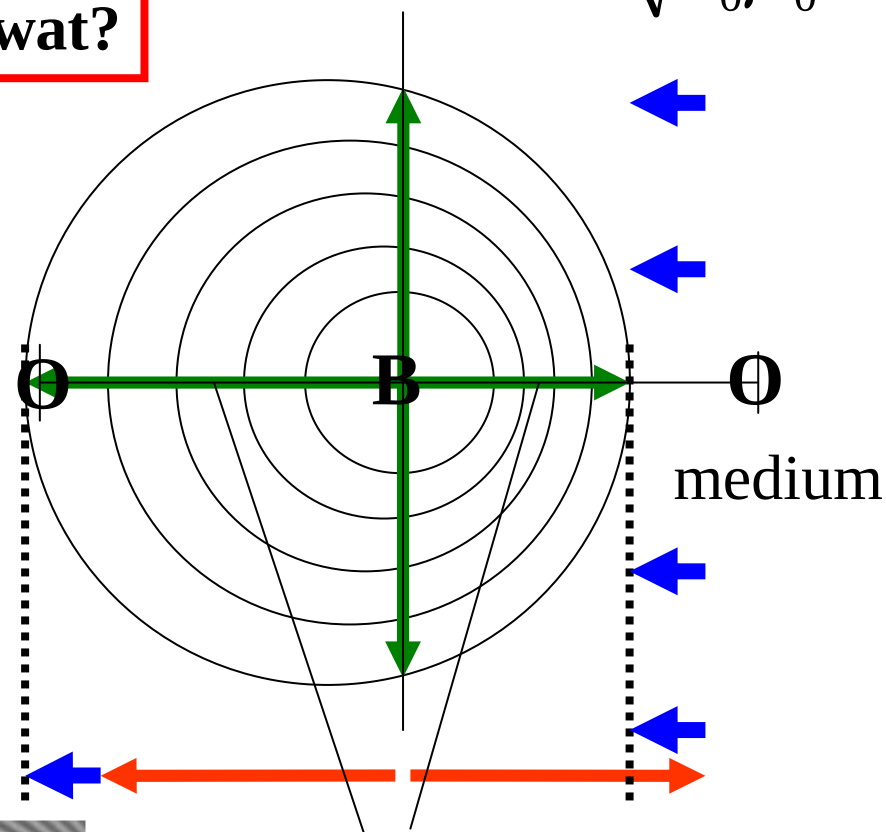
Relativiteit: waar?

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

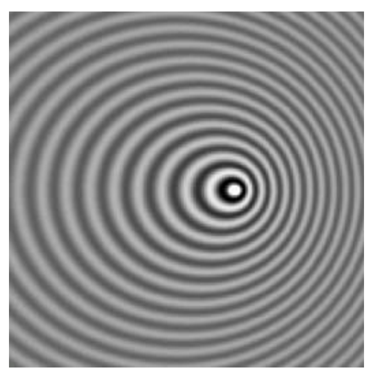
Elektromagnetische wetten → golfsnelheid is vacuüm $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Tov wat?



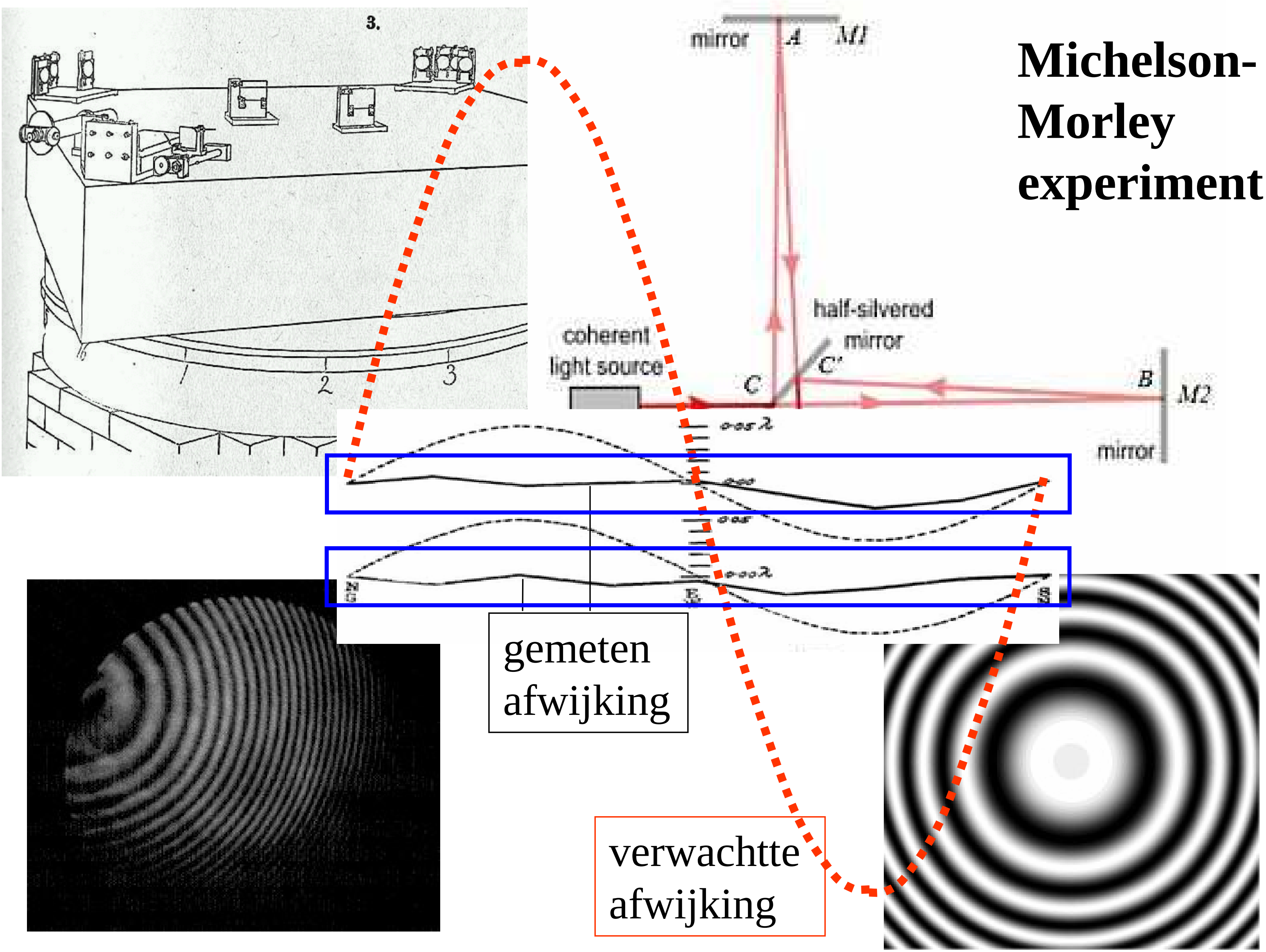


De golfsnelheid is in alle richtingen hetzelfde: bij de ontvangers zijn de golven in fase.



de golfsnelheid is afhankelijk van de positie van O tov B en de snelheid tov het medium: bij de ontvangers ontstaat er een faseverschil.

Michelson-Morley experiment



“In vacuüm heeft de lichtsnelheid voor iedereen dezelfde waarde.”

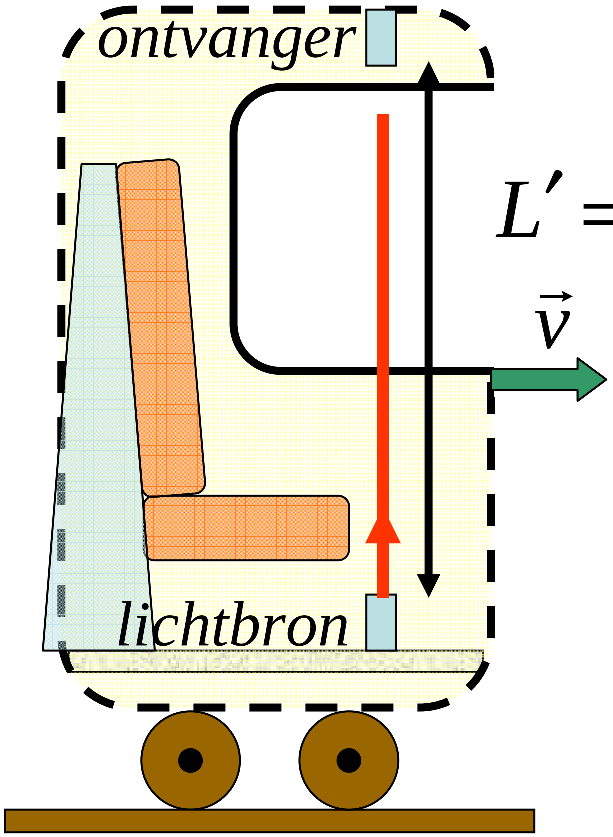
$$c = 299\,972\,458\ \mathrm{ms}^{-1}$$

Tijdrek
&
Lengtekrimp

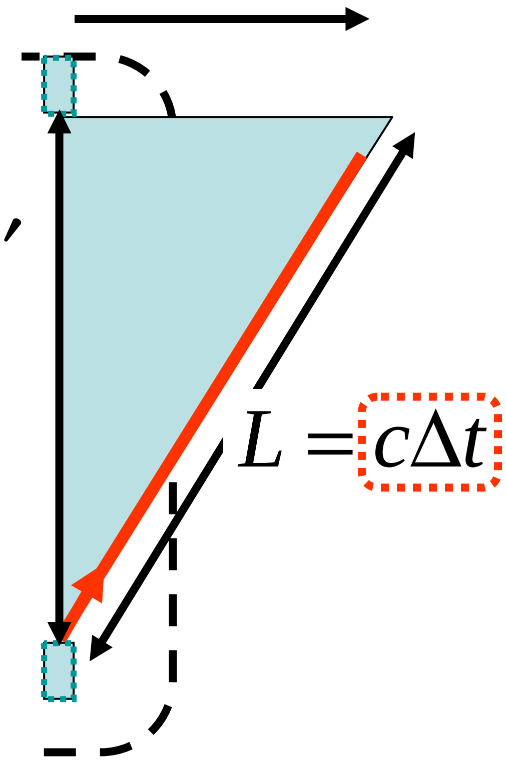
Tijdrek

In de trein		Op het perron
lengte	L'	L
tijd	$\Delta t'$	Δt

$$\left(\frac{v}{c}\right) \equiv \beta$$



$$L' = c\Delta t'$$



$$L = \boxed{c\Delta t}$$

$$\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)$$

$$(1)$$

$$\rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{1-\beta^2} \rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \Delta t'}$$

Verval van muonen - tijdrek

creatie $t'_1 = 0$

μ

v

$\Delta t' = levensduur = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,(\mathrm{s})$

$x = v\Delta t' < c\Delta t' =$

$3 \cdot 10^5 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} = 0{,}66\ \mathrm{km}$

10 km

$t'_2 = \Delta t'$

maar ….. er is tijdrek ~~**het muon haalt het niet !!!**~~

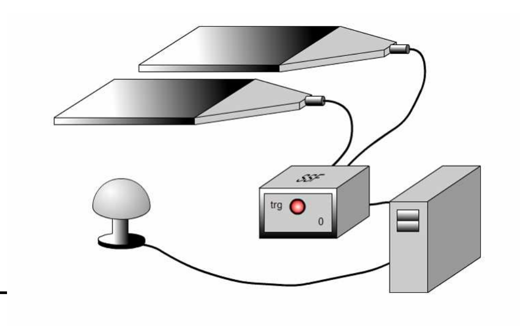
$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'}$

stel $\gamma = 20$

$\beta = 0{,}99875$

$v\Delta t \approx c\Delta t = c\gamma\Delta t' = 20 \cdot 0{,}66 = 13{,}2\ \mathrm{km}$

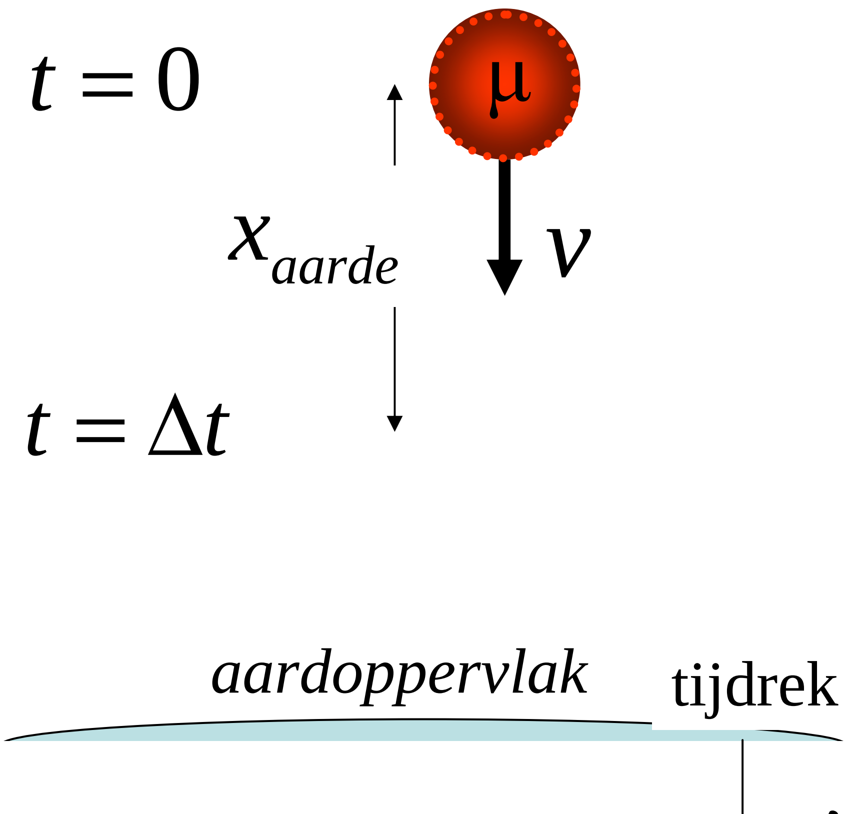
het muon haalt het dus wel !!!

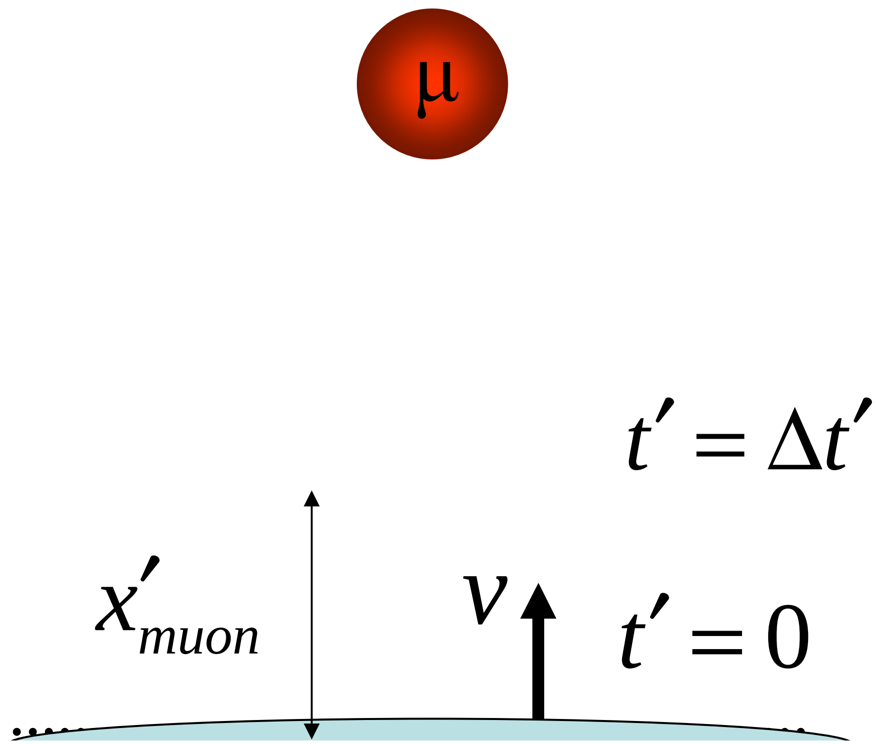


aardoppervlak

Lengtekrimp

Aardse-systeem | Muon-systeem





$$x_{aarde} = v \cdot \Delta t = v \cdot \gamma \Delta t'$$

$$x'_{muon} = v \cdot \Delta t'$$

$$\boxed{x'_{muon} = \frac{x_{aarde}}{\gamma}}$$

lengtekrimp !

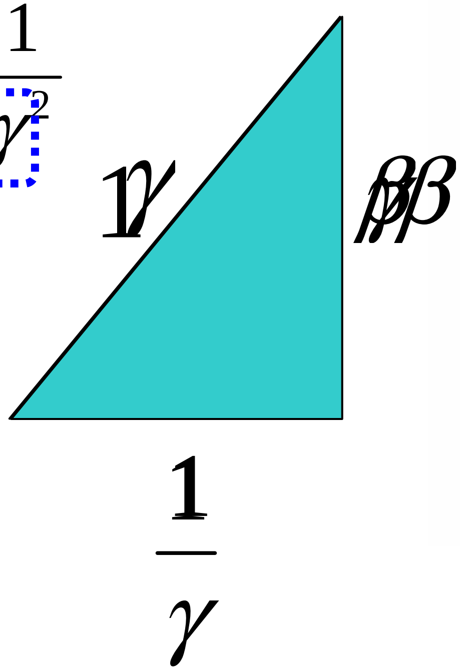
γ en β

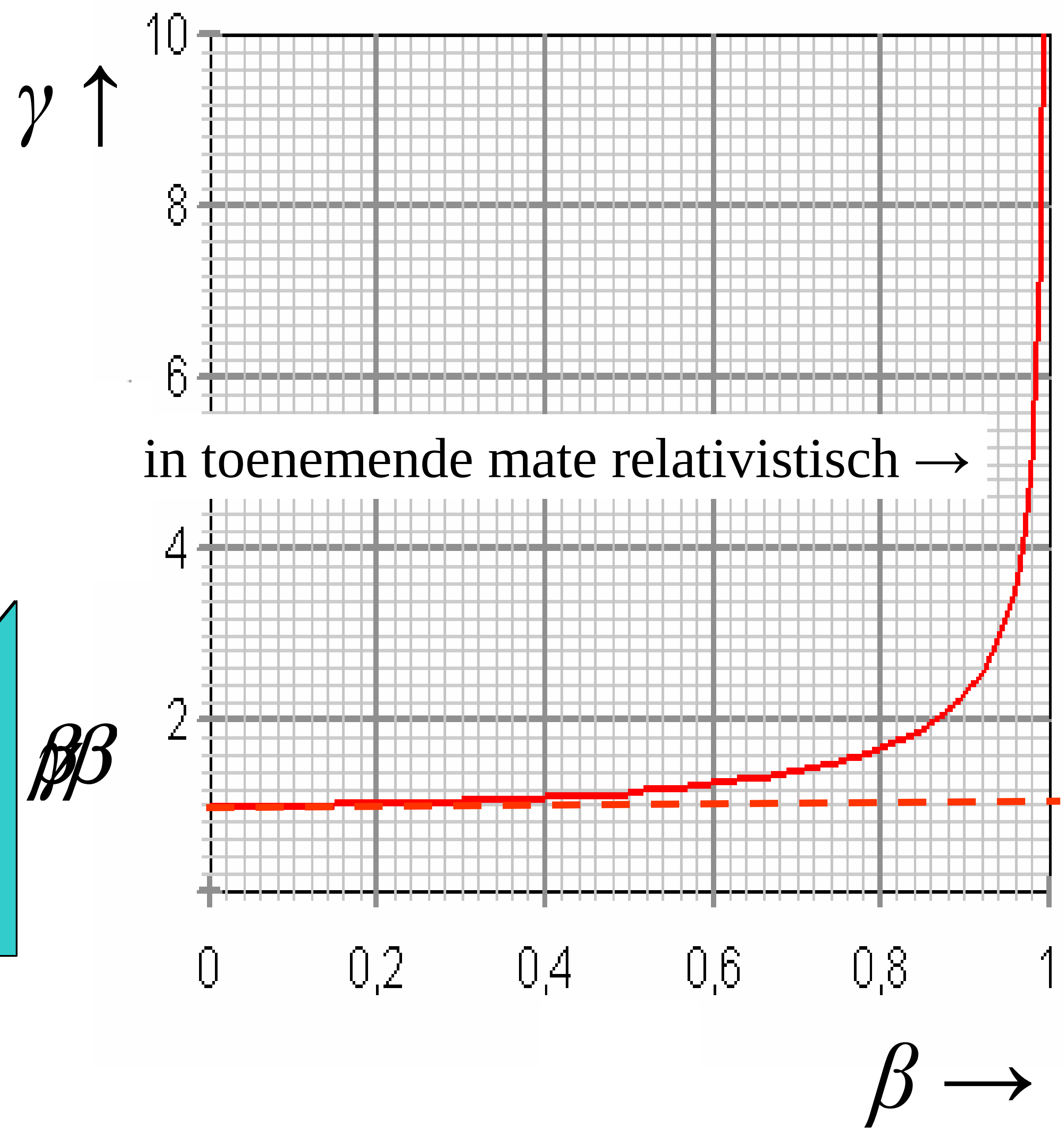
$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\boxed{\beta}^2}}$$

$$\gamma^2(1-\beta^2)=1$$

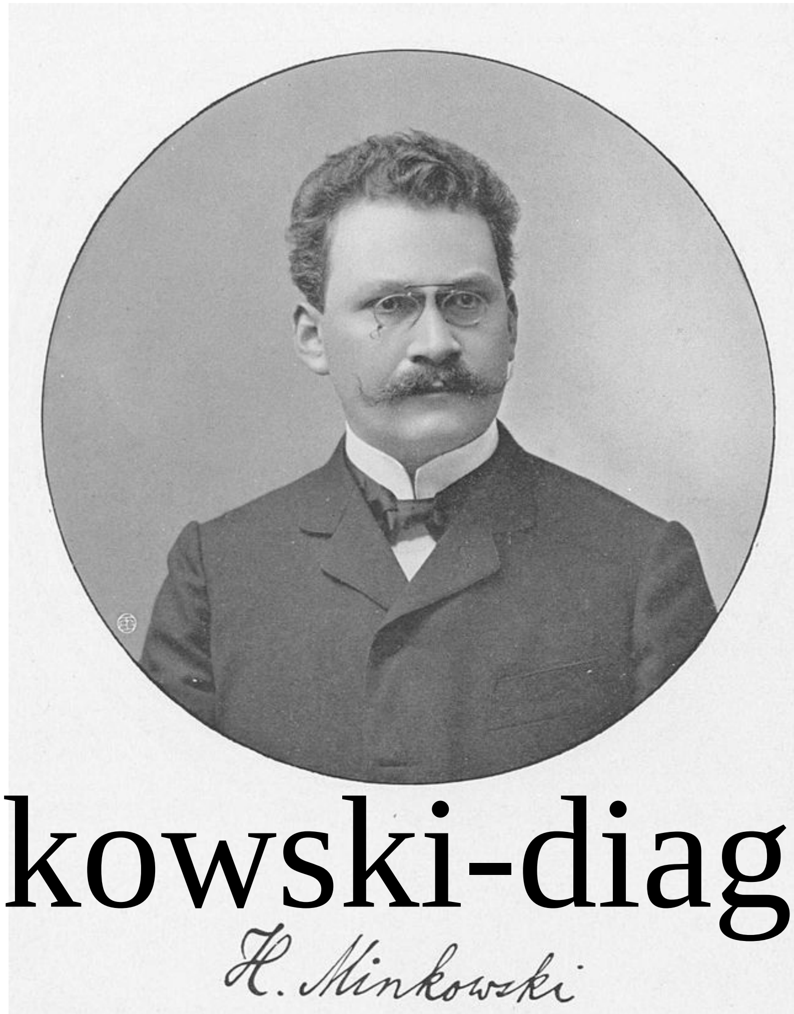
$$\gamma^2 = 1 + \left(\boxed{\gamma\beta}\right)^2$$

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\boxed{\gamma}^2}}$$





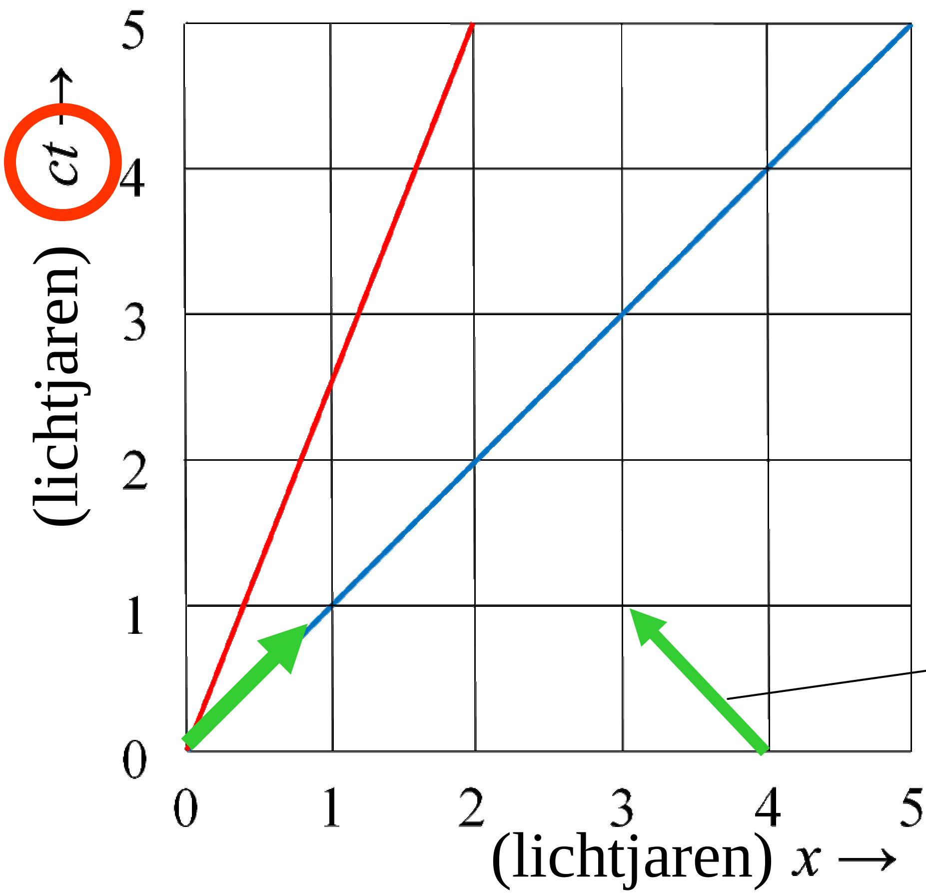
Minkowski-diagram



22 juni 1864 – 12 januari 1909

Minkowski-diagram

1 lichtjaar = afstand afgelegd met snelheid c gedurende 1 jaar



Wat zijn de snelheden van blauw en rood?

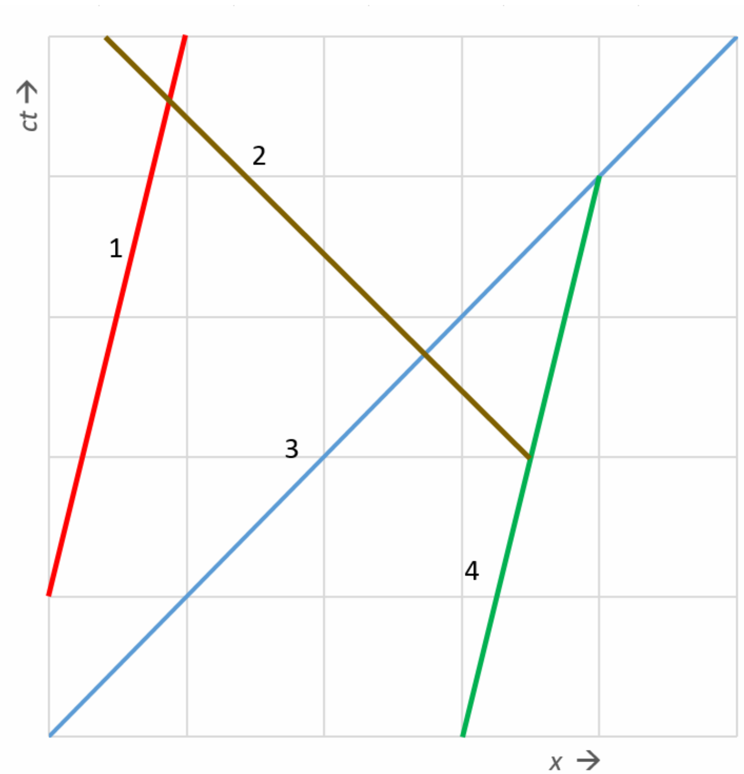
$$v_{blauw} = \frac{x}{t} = \frac{5 \cdot \text{c jaar}}{5 \text{ jaar}} = c$$

een foton dat zich van ons verwijdert.

een foton dat naar ons toekomt

$$v_{rood} = \frac{x}{t} = \frac{2 \cdot \text{c jaar}}{5 \text{ jaar}} = 0{,}4c$$

9a. In de figuur staan vier genummerde grafieken van vier deeltjes. Welke grafiek hoort bij welk deeltje?



A Een foton dat op t = 0 vertrekt vanuit x = 0. 3

B Een foton dat vanaf een bepaalde plaats naar x = 0 toe beweegt. 2

C Een deeltje dat op t = 0 vanaf een bepaalde plaats vertrekt met een snelheid kleiner dan de lichtsnelheid. 4

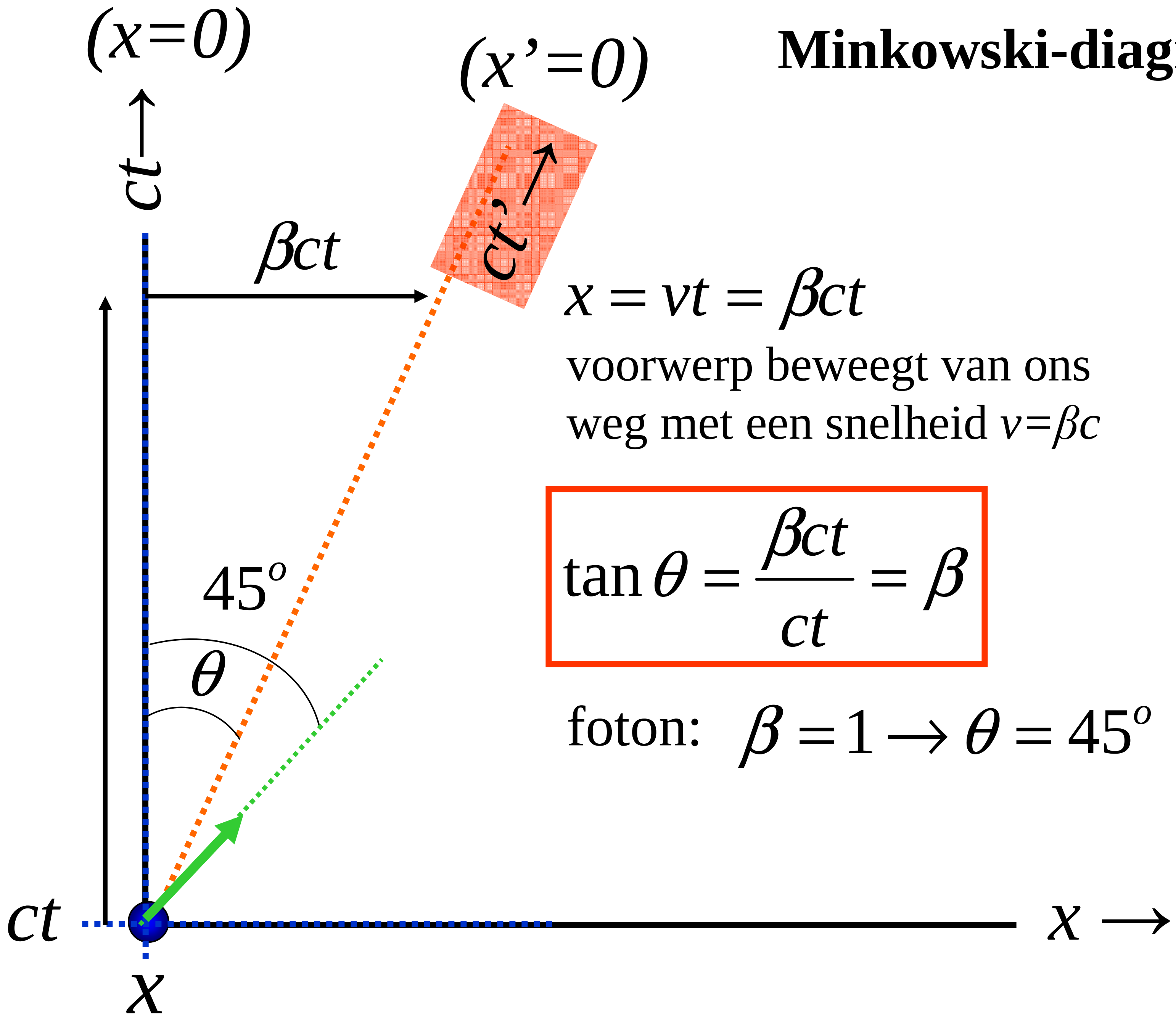
D Een deeltje dat vanuit x = 0 even later vertrokken is dan foton A. 1

b. Waaraan zie je dat deeltje 1 en 4 dezelfde snelheid hebben? //

c. Ondanks dat er geen eenheden bij de assen staan, kun je toch de snelheid van deze deeltjes berekenen. Waarom kan dat?

d. Bereken de waarde van β van deeltje 1. $\beta = 0{,}25$

Minkowski-diagram

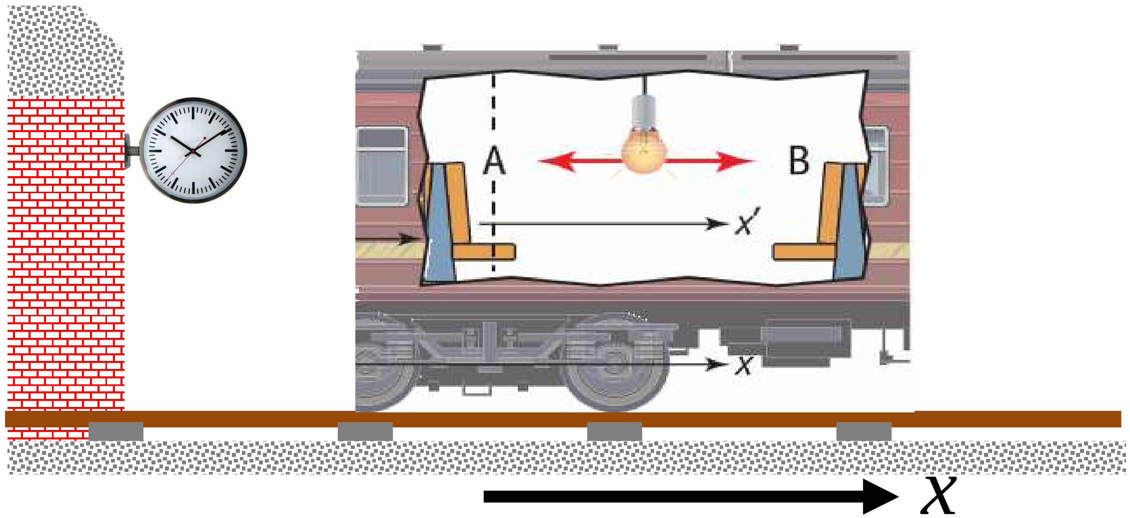


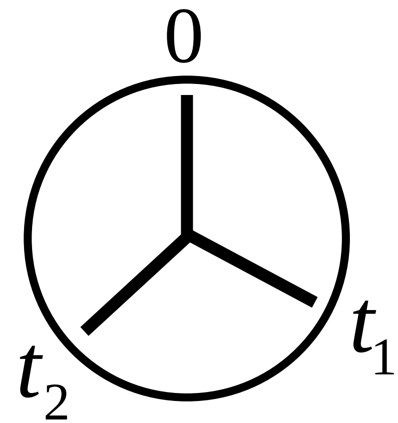
$$x = vt = \beta ct$$

voorwerp beweegt van ons weg met een snelheid $v=\beta c$

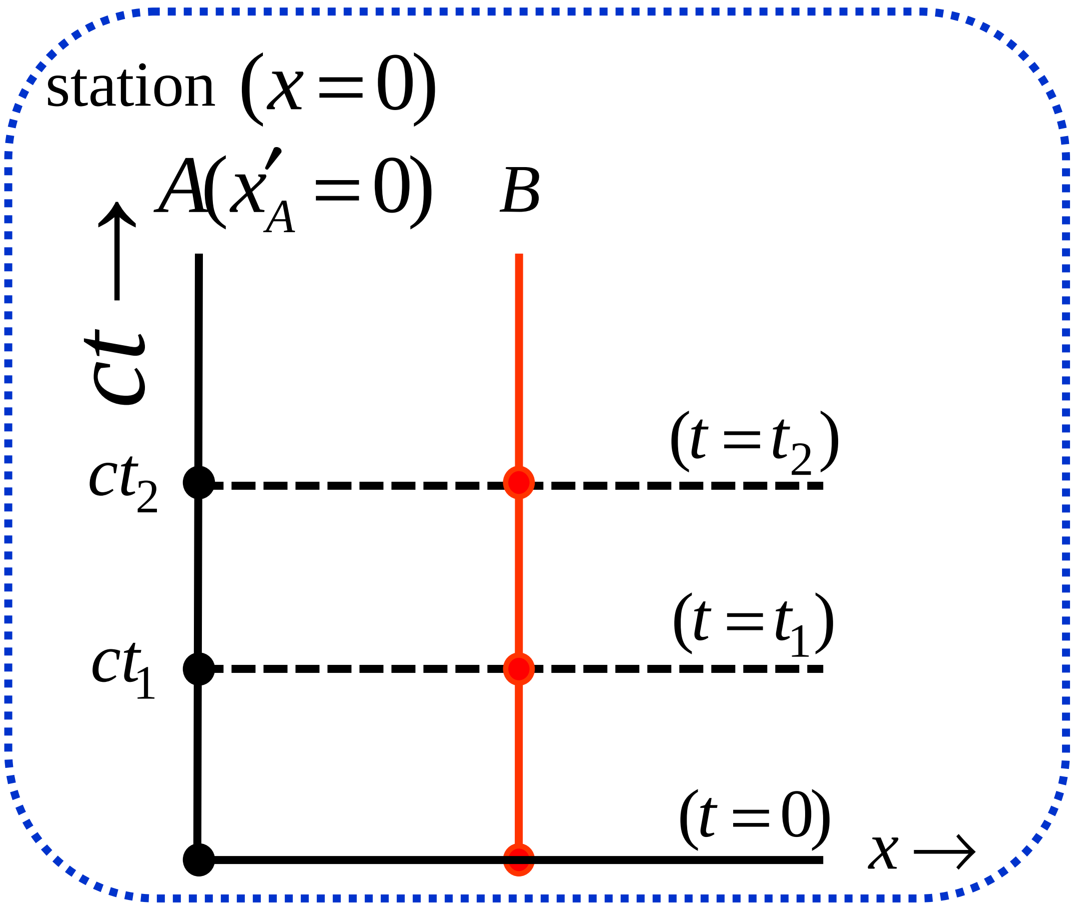
$$\boxed{\tan\theta = \frac{\beta ct}{ct} = \beta}$$

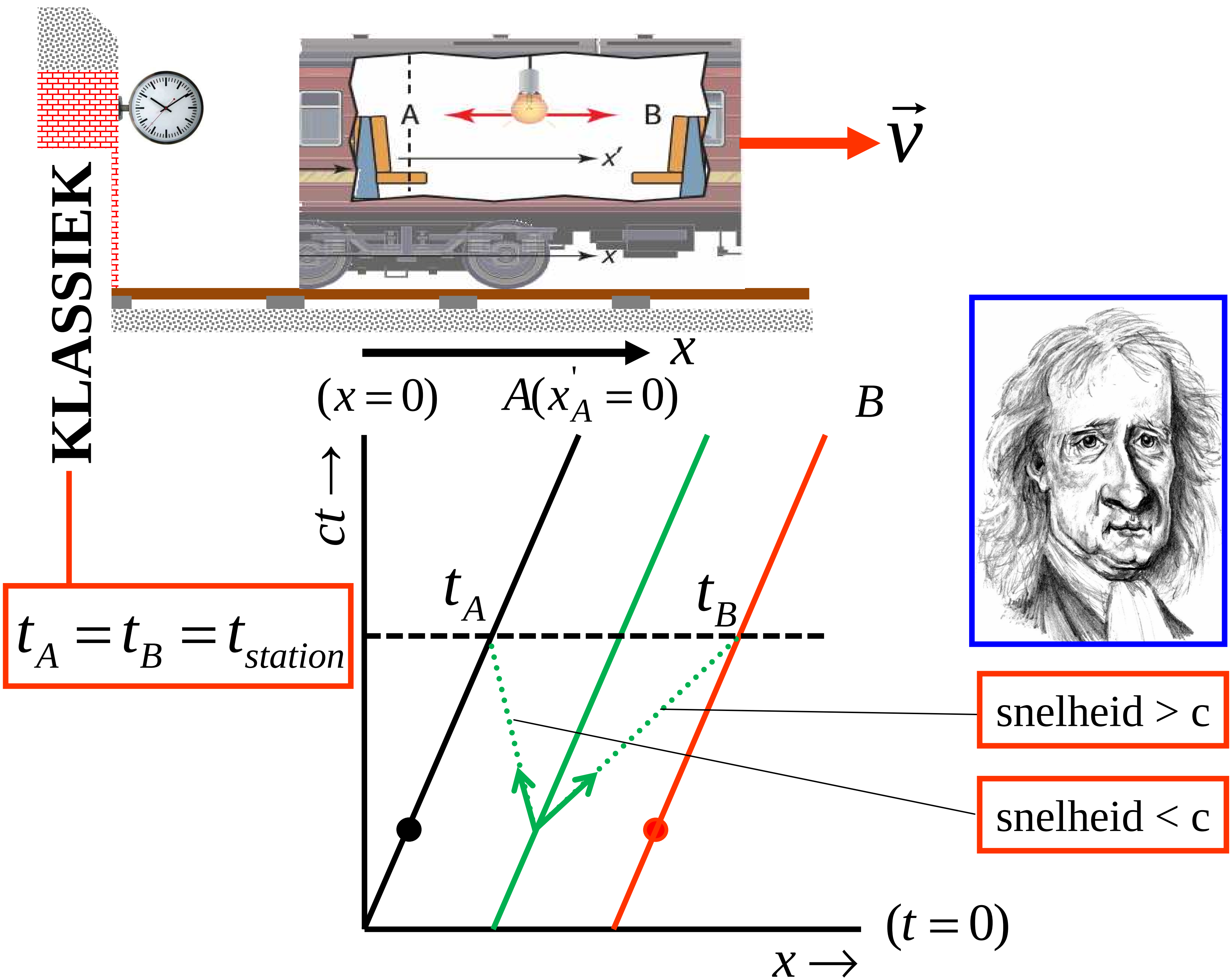
foton: $\beta = 1 \rightarrow \theta = 45^o$



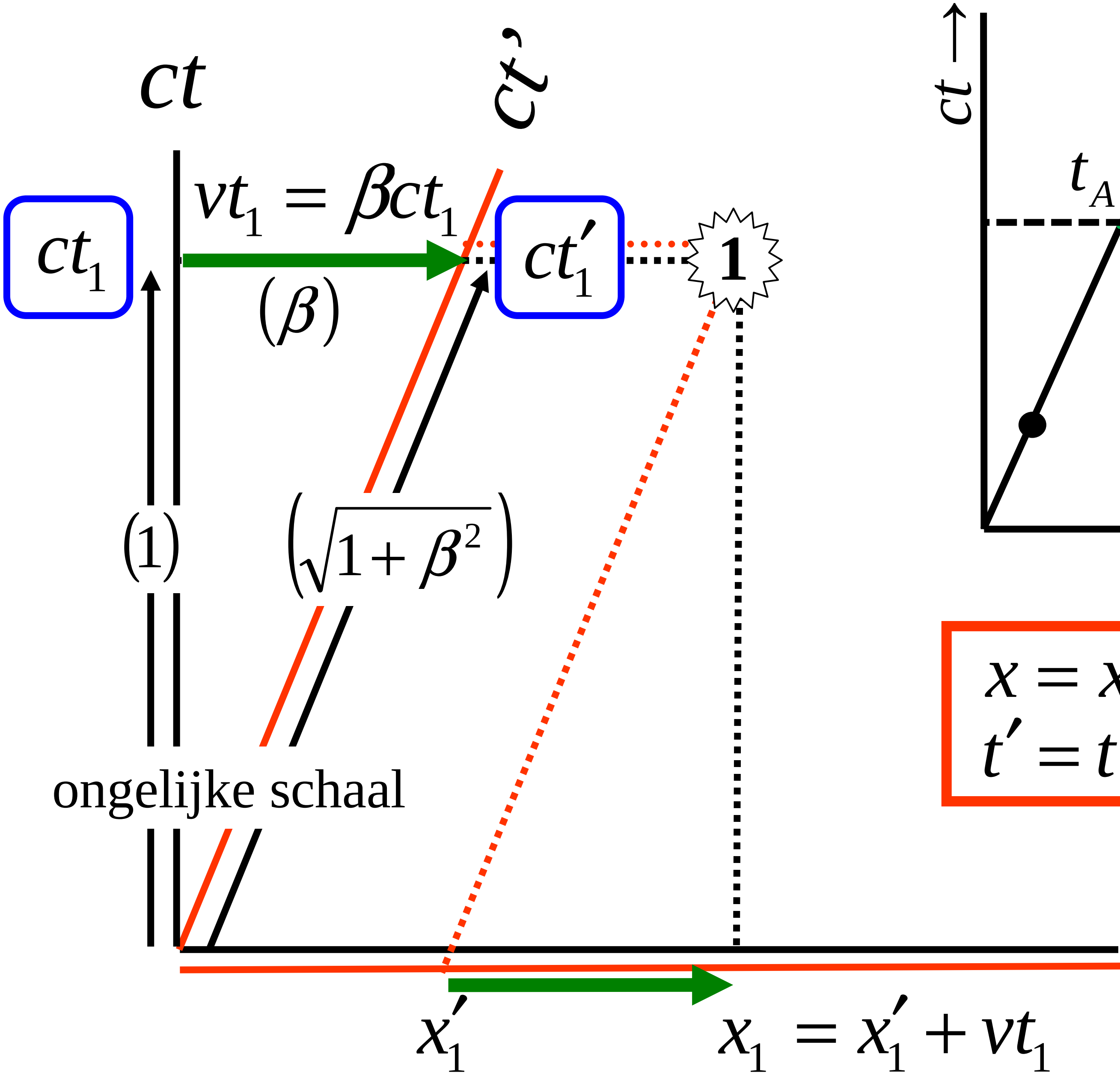


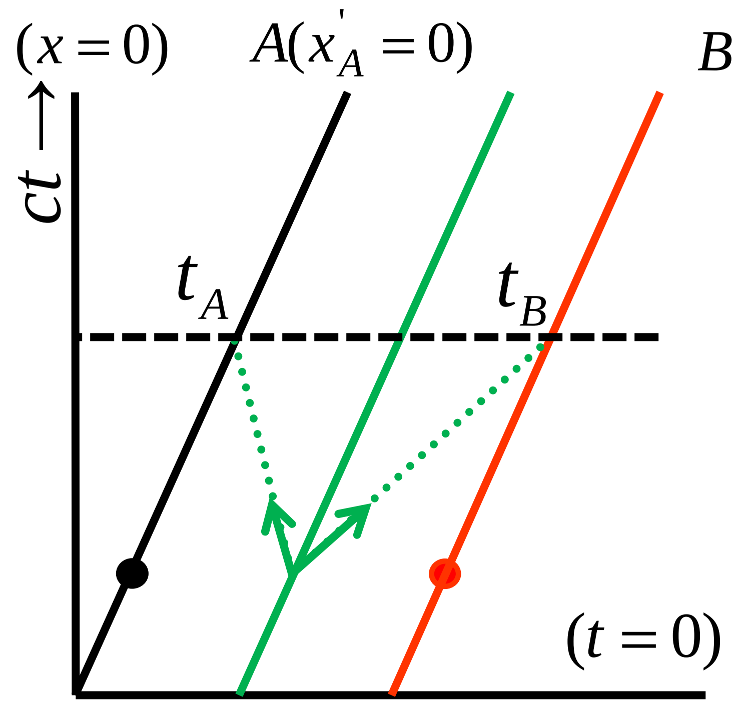
Minkowski-
diagram




KLASSIEK
A
B
x'
x
$\vec{v}$
x
$(x=0)$
$A(x'_A=0)$
B
$ct \rightarrow$
t_A
t_B
$t_A = t_B = t_{station}$
snelheid > c
snelheid < c
$(t=0)$
$x \rightarrow$

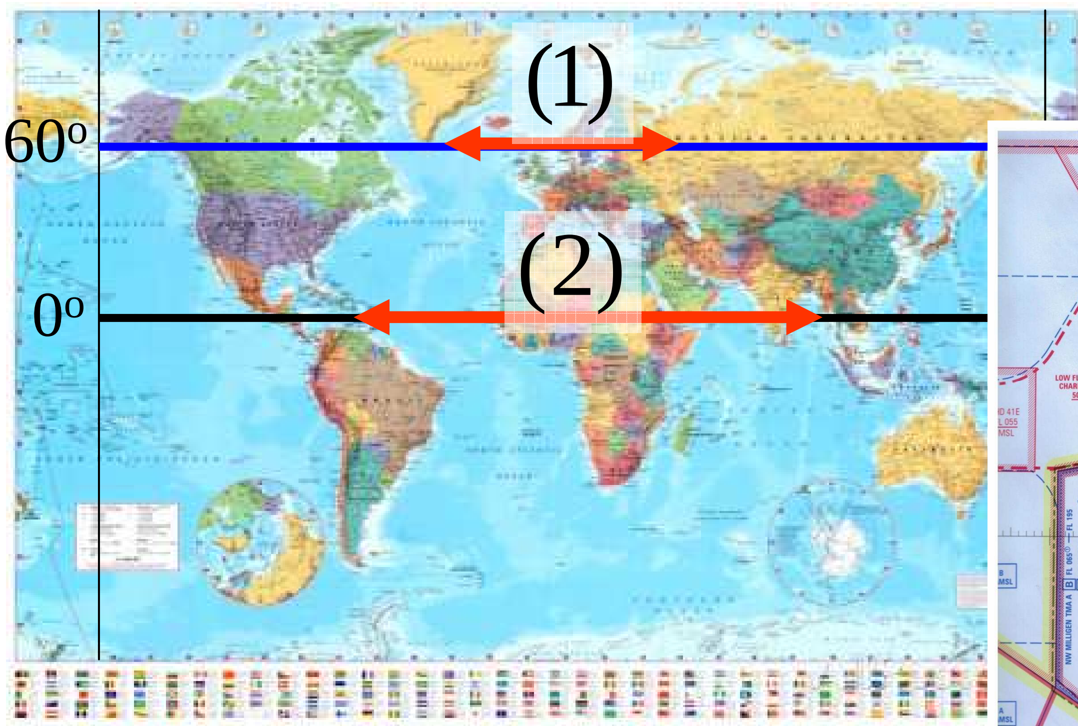
Galileï-transformatie

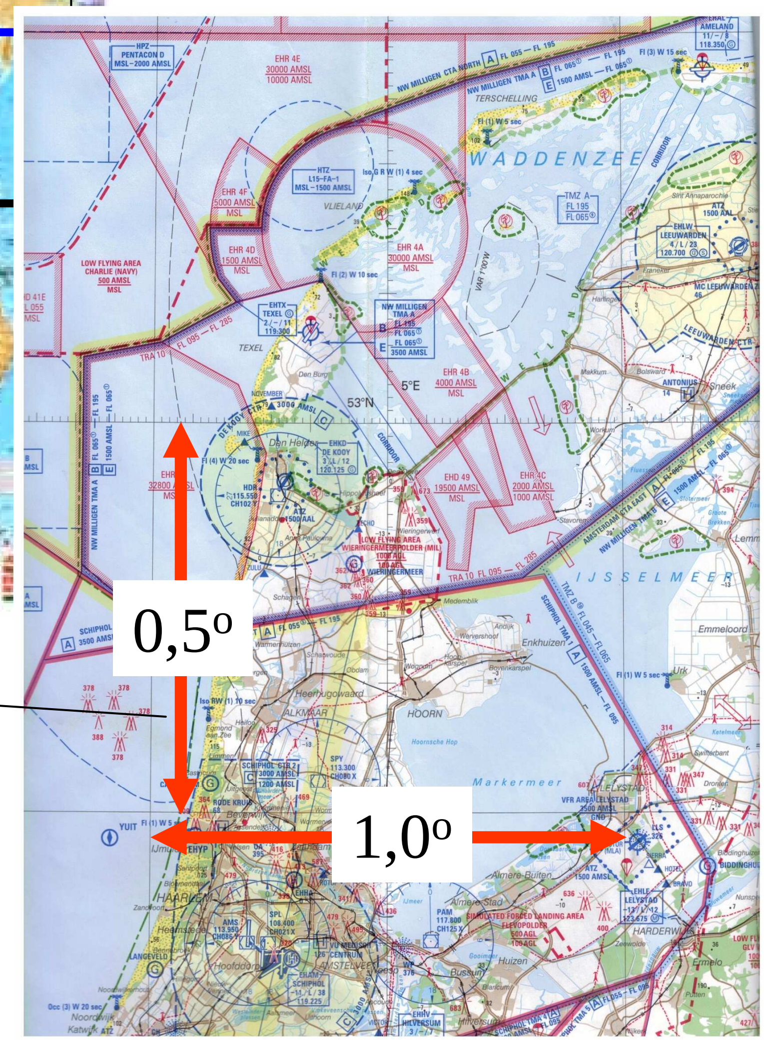




$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + vt \\ t' &= t \end{aligned}}$$

Verschillende schalen





0,5 x 60 NM

Het aantal km per breedtegraad is constant (111,12 km).

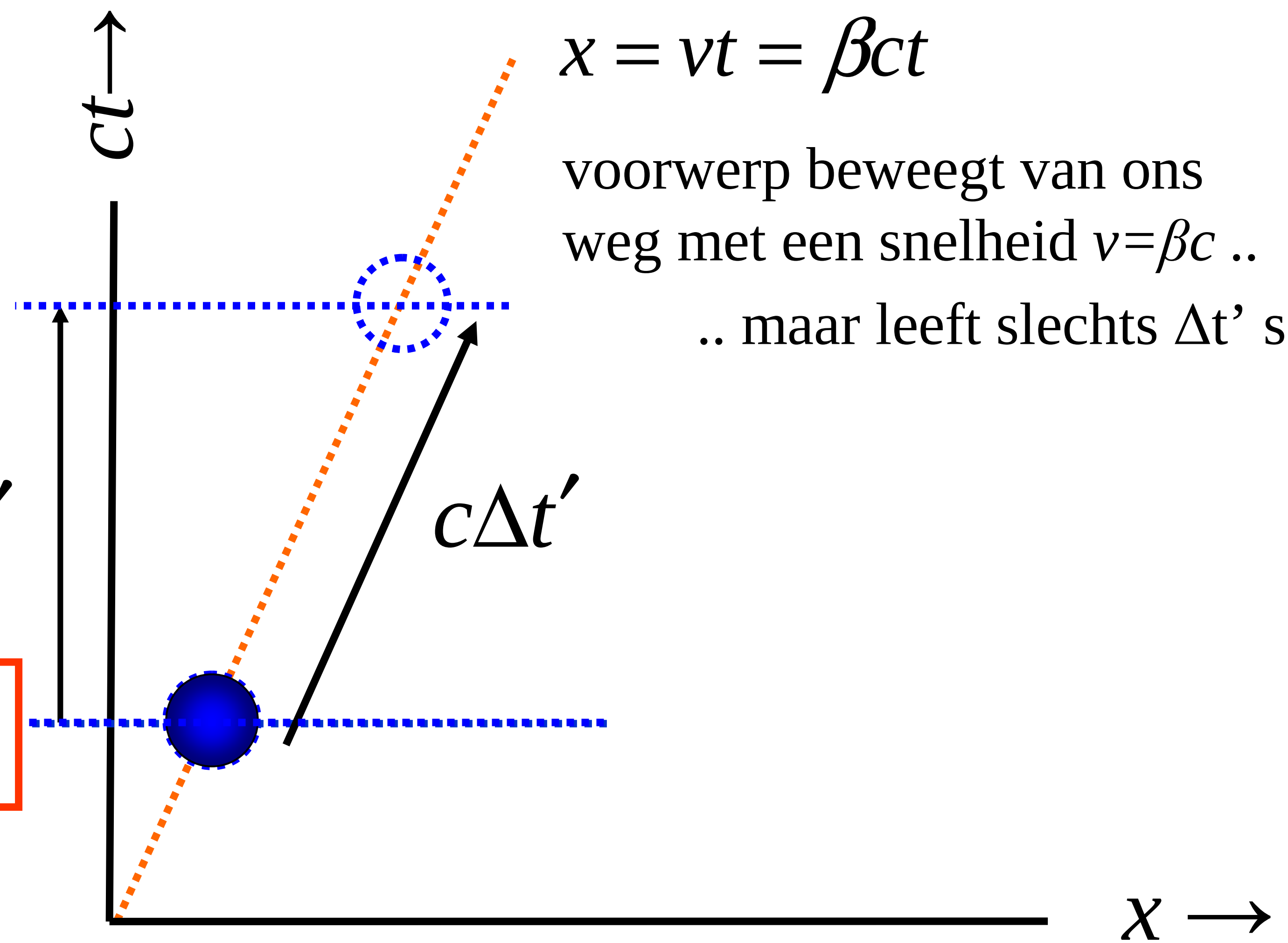
Het aantal km per lengtegraad is afhankelijk van de breedtegraad.

Minkowski-diagram - tijdrek

$x = vt = \beta ct$

voorwerp beweegt van ons weg met een snelheid $v=\beta c$ ..

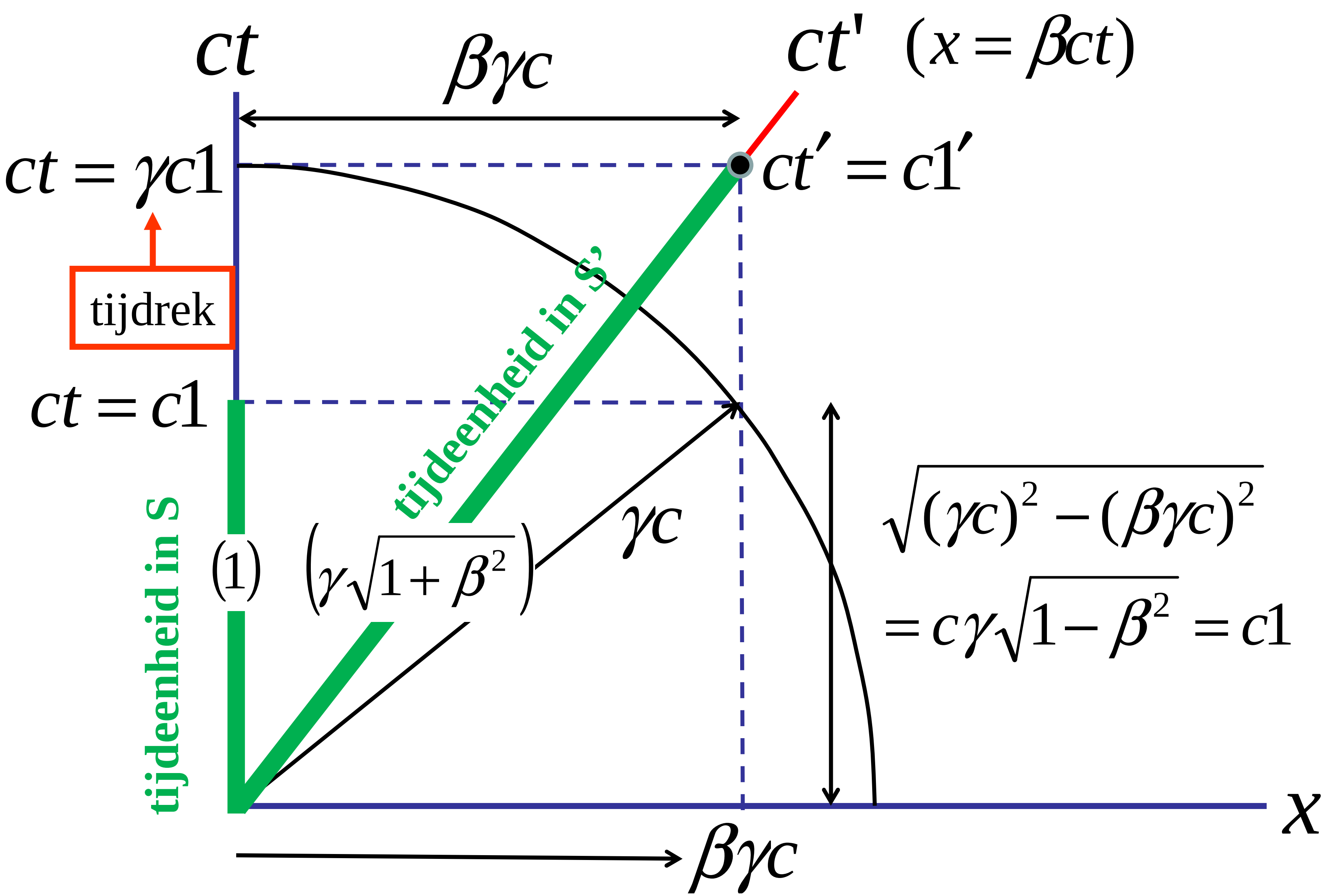
.. maar leeft slechts Δt’ s.



$$c\Delta t = \gamma c\Delta t'$$

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'}$$

Verschillende schalen



Hoe oud is UDFj-39546284 op de foto?

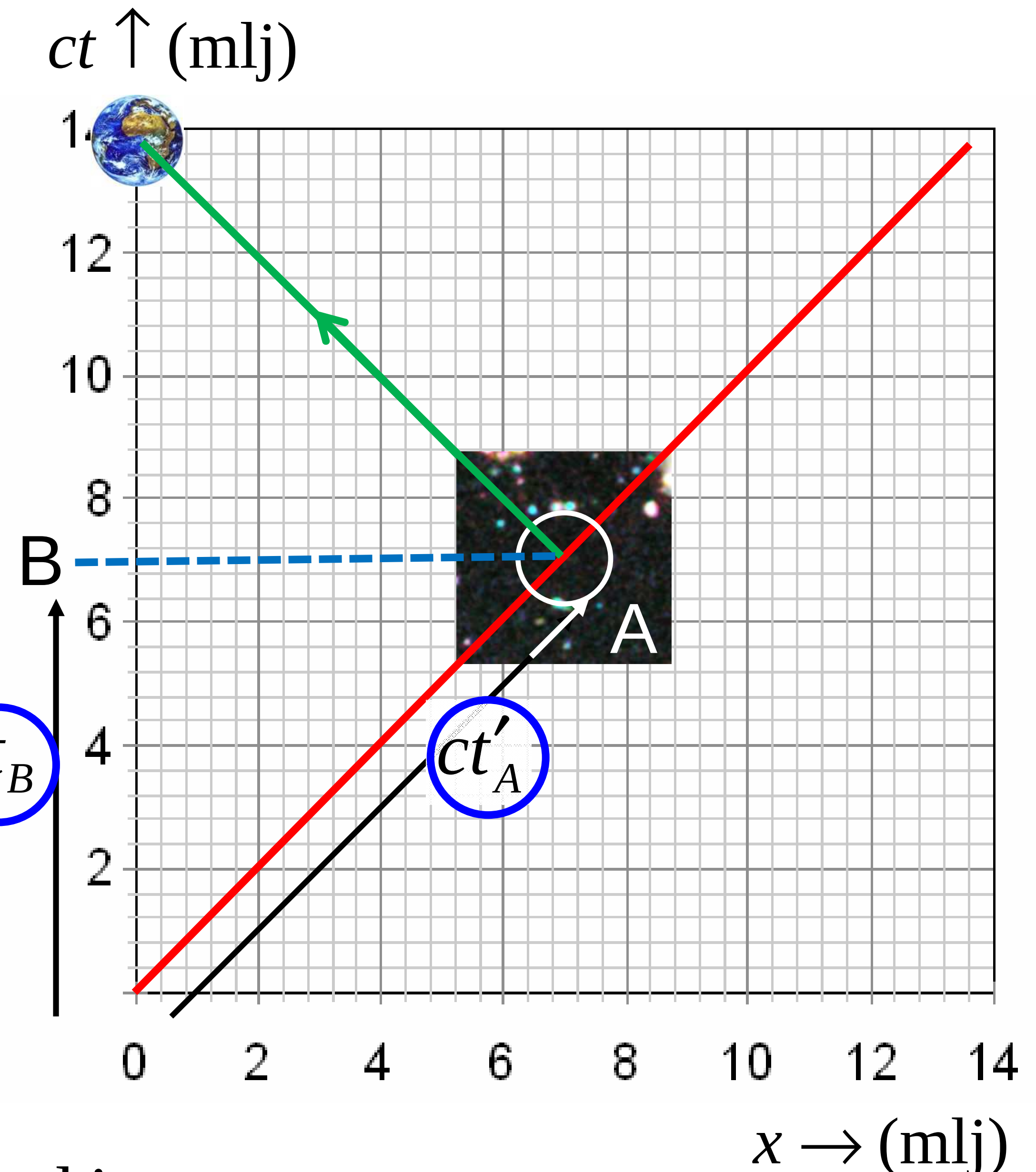
gegeven: $\beta = 0{,}976$

$t_B \approx 7$ miljard jaar

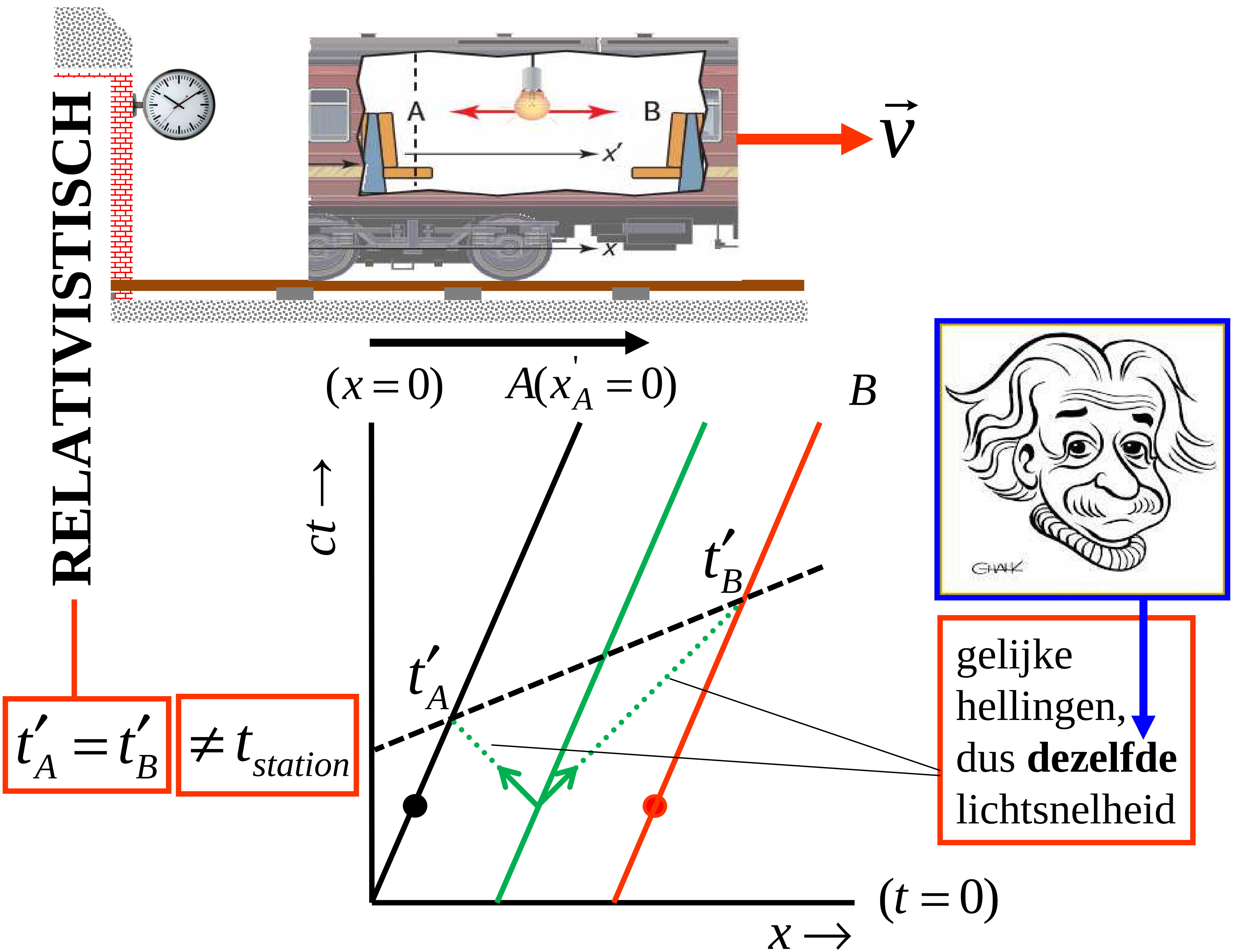
tijdrek $\gamma c t'_A = c t_B$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}976^2}} = 4{,}59$$

$$t'_A = \frac{t_B}{\gamma} = \frac{7}{4{,}59} = 1{,}5 \text{ miljard jaar}$$

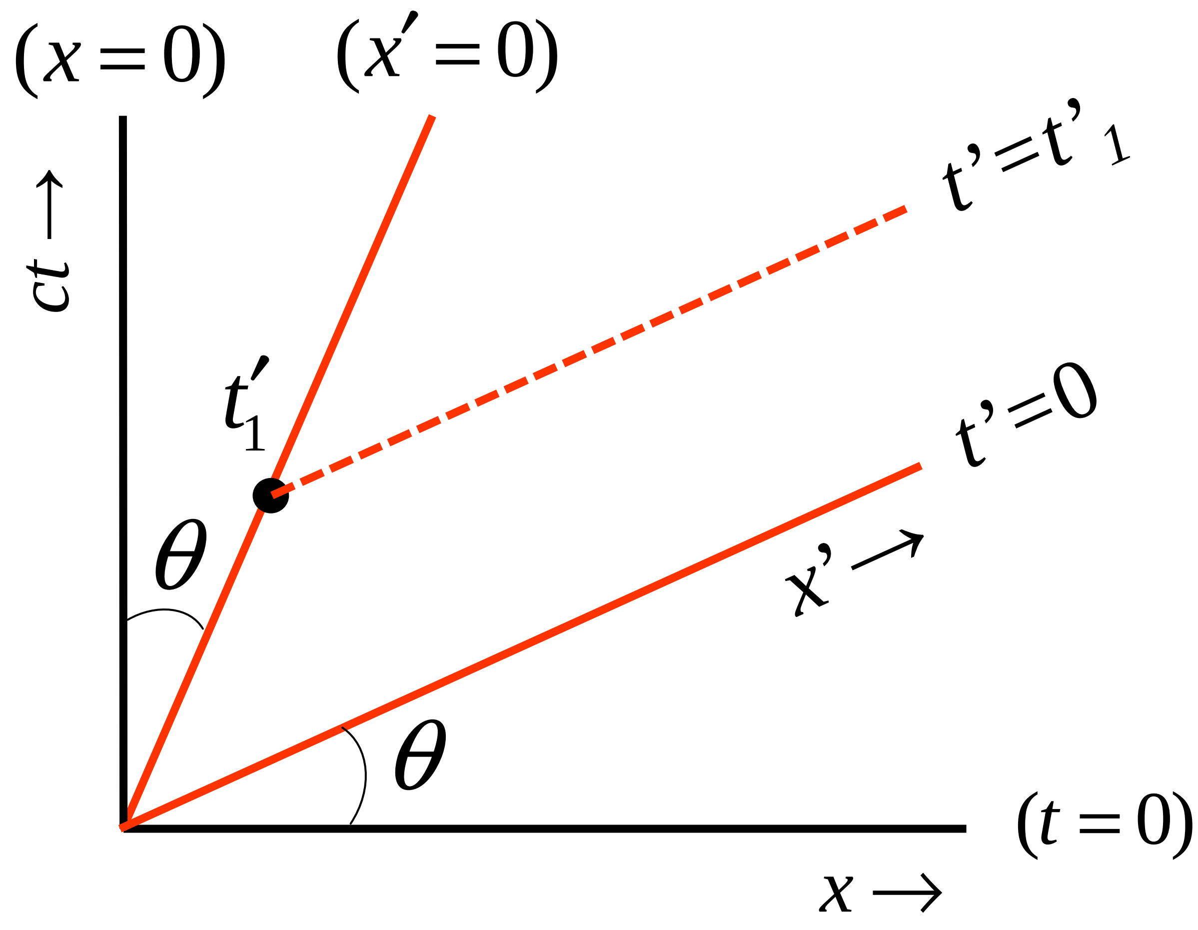


1 mlj = 1 miljard lichtjaar

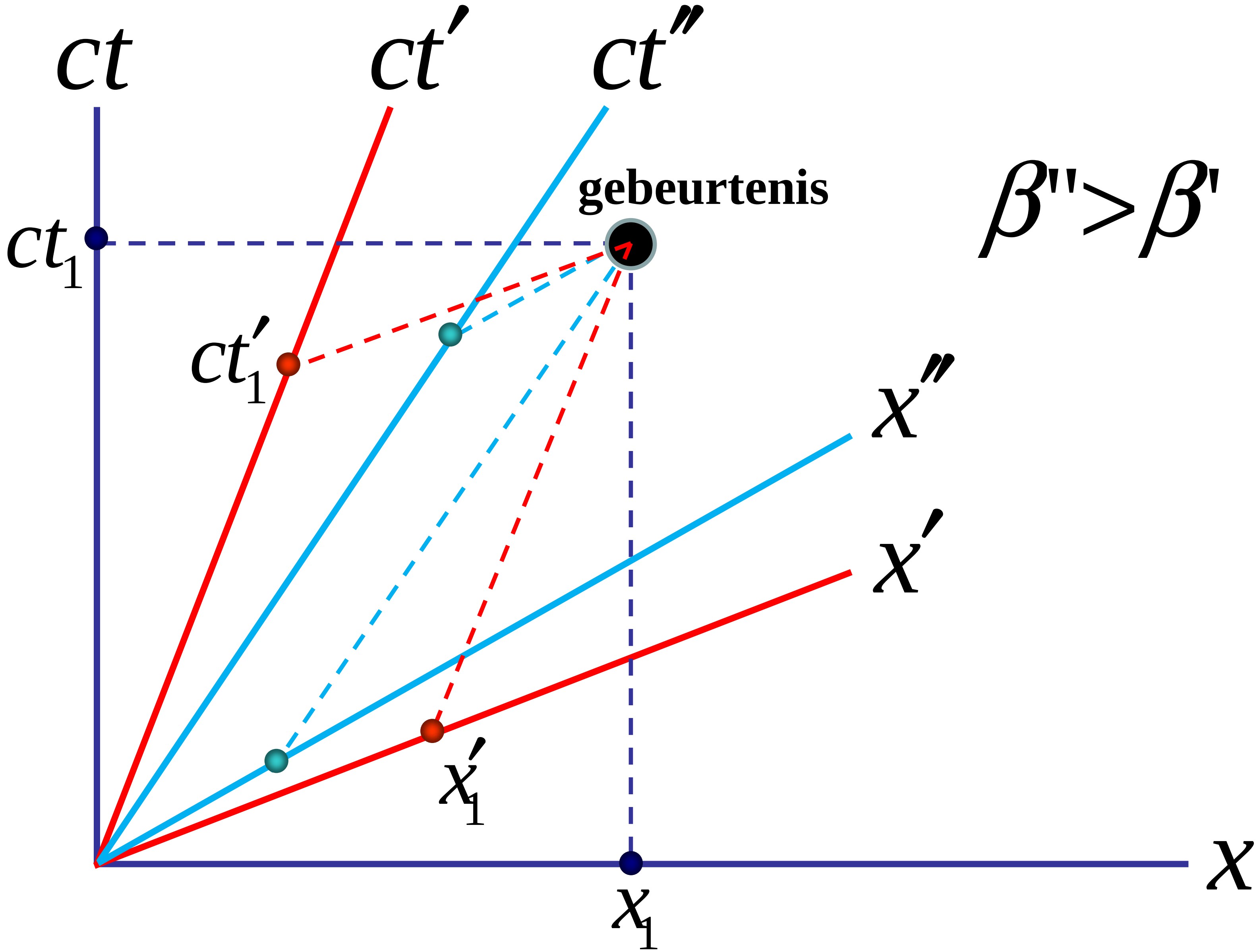


RELATIVISTISCH
A
B
x'
x
$\vec{v}$
$(x=0)$
$A(x'_A=0)$
B
$ct \rightarrow$
t'_A
t'_B
$t'_A = t'_B$
$\neq t_{station}$
gelijke hellingen, dus **dezelfde** lichtsnelheid
$(t=0)$
$x \rightarrow$

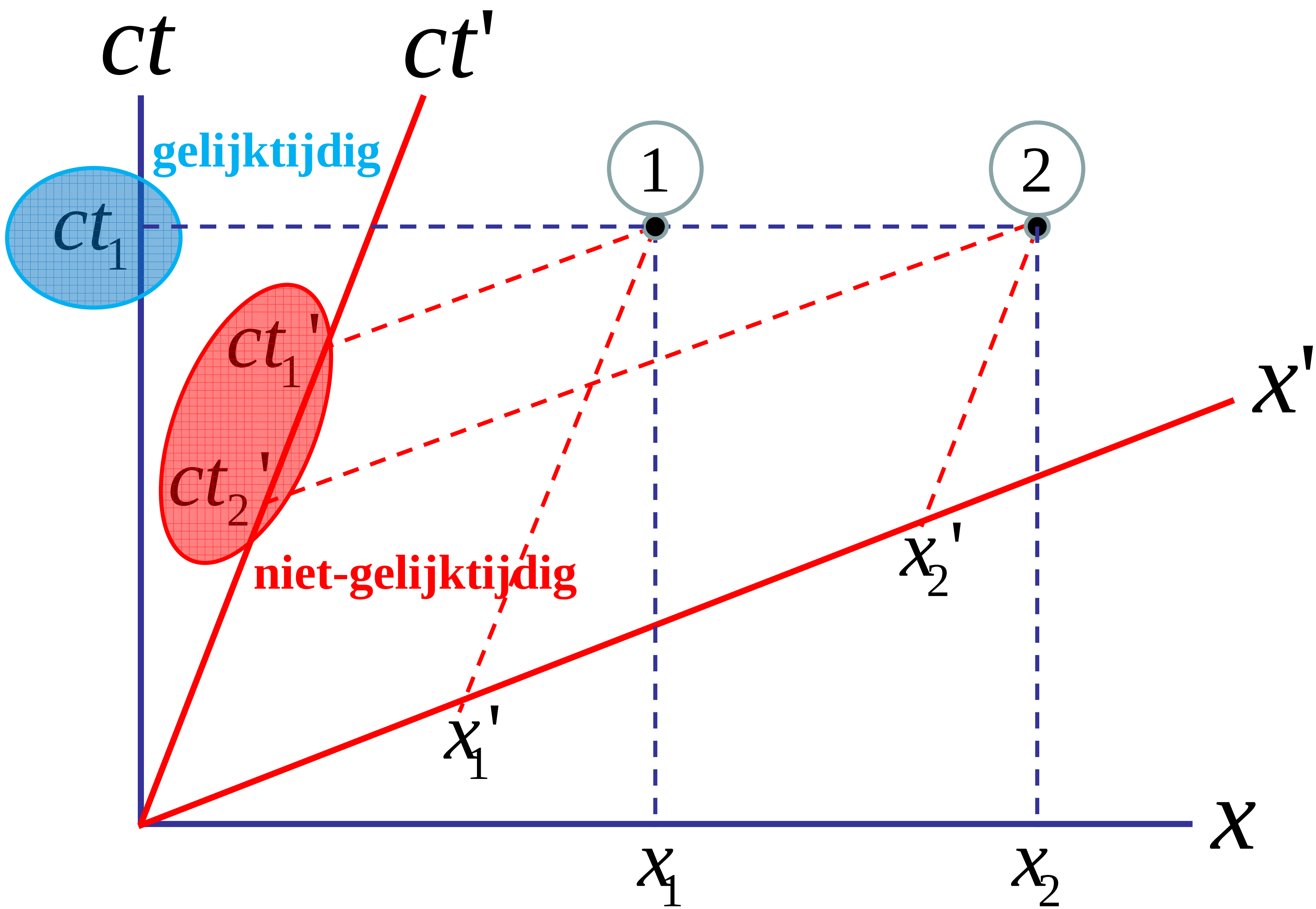
RELATIVISTISCH



coördinaten

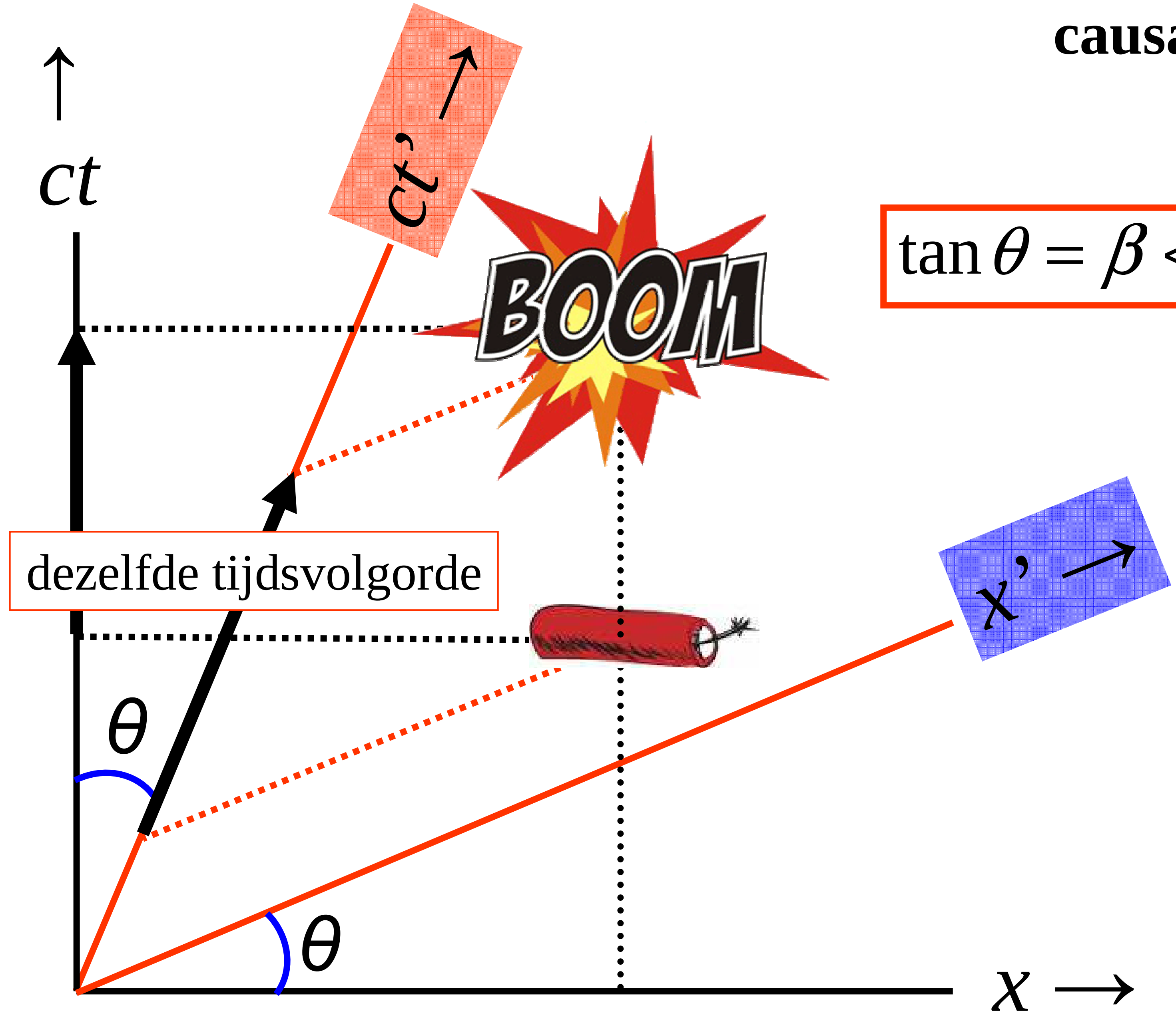


(on)gelijktijdigheid

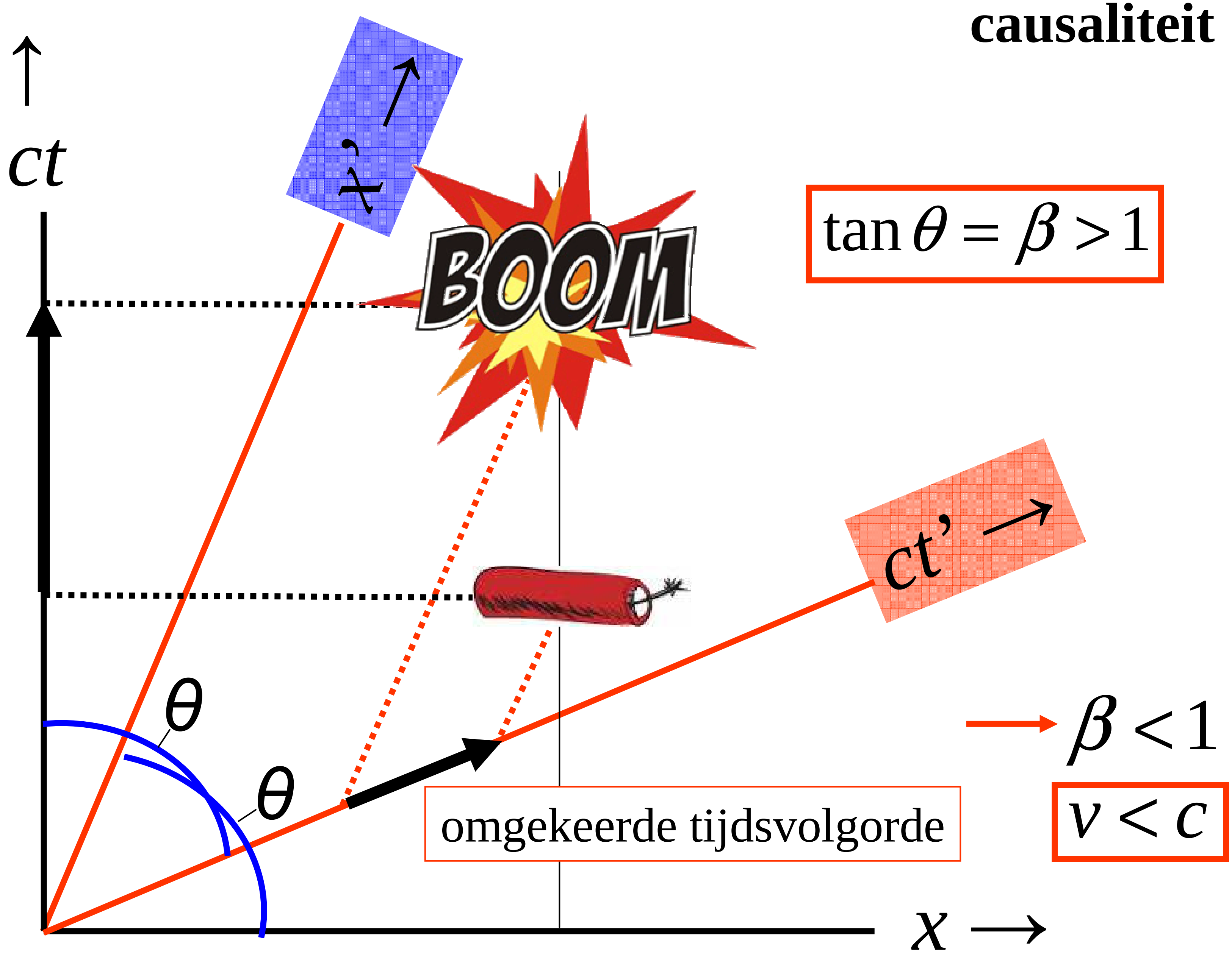


causaliteit

$$\boxed{\tan\theta = \beta < 1}$$



causaliteit

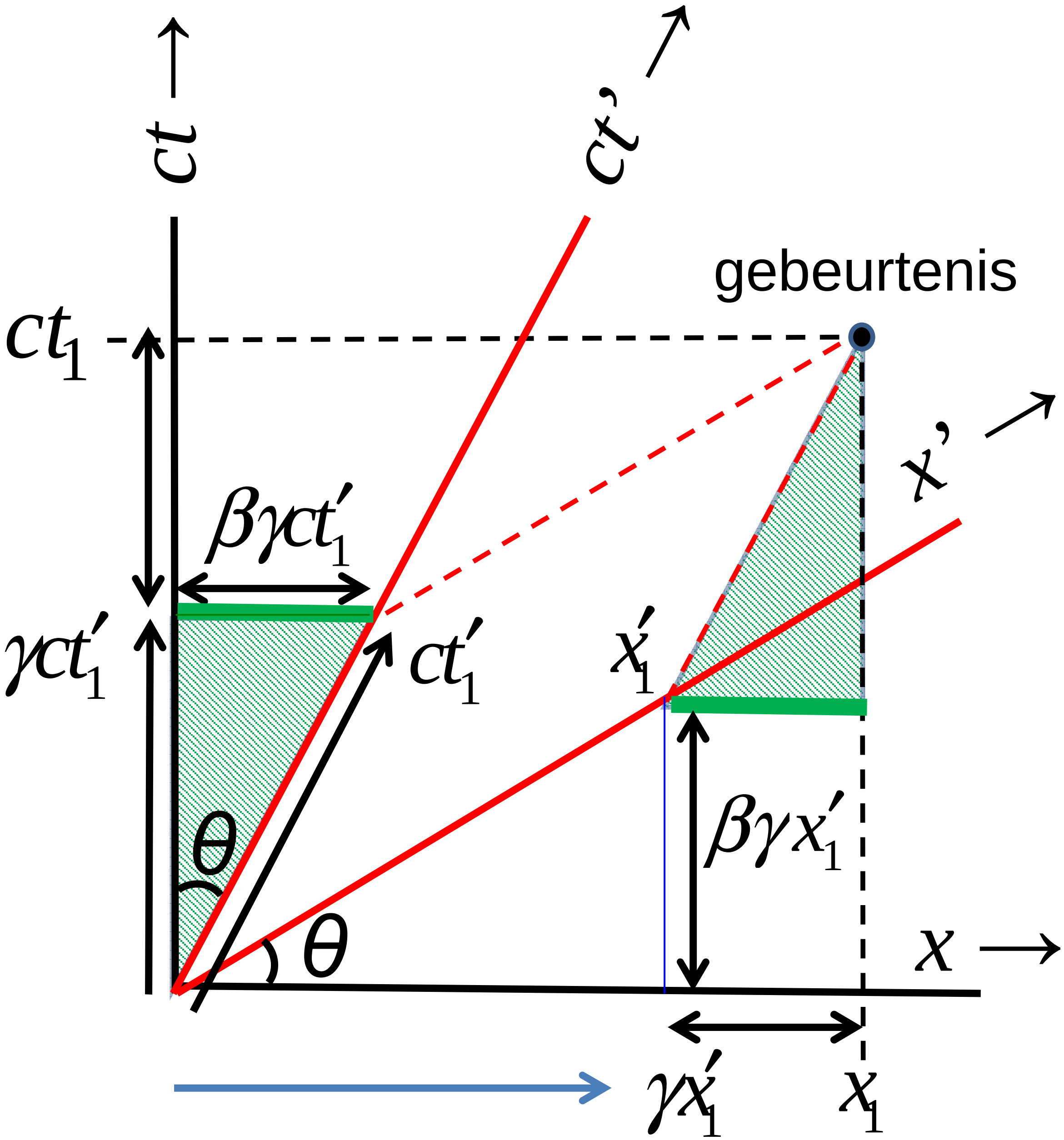


De man die sneller schiet dan zijn schaduw ….

maar…. het gat zat er al voordat de kogel er door heen ging !!

Lorentz-transformatie

lorentztransformatie



$$x_1 - \gamma x_1' = \beta\gamma ct_1'$$

$$x_1 = \gamma\left(x_1' + \beta ct_1'\right)$$

$$ct_1 - \gamma ct_1' = \beta\gamma x_1'$$

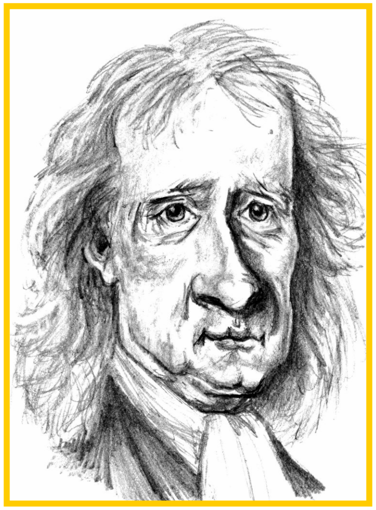
$$ct_1 = \gamma\left(ct_1' + \beta x_1'\right)$$

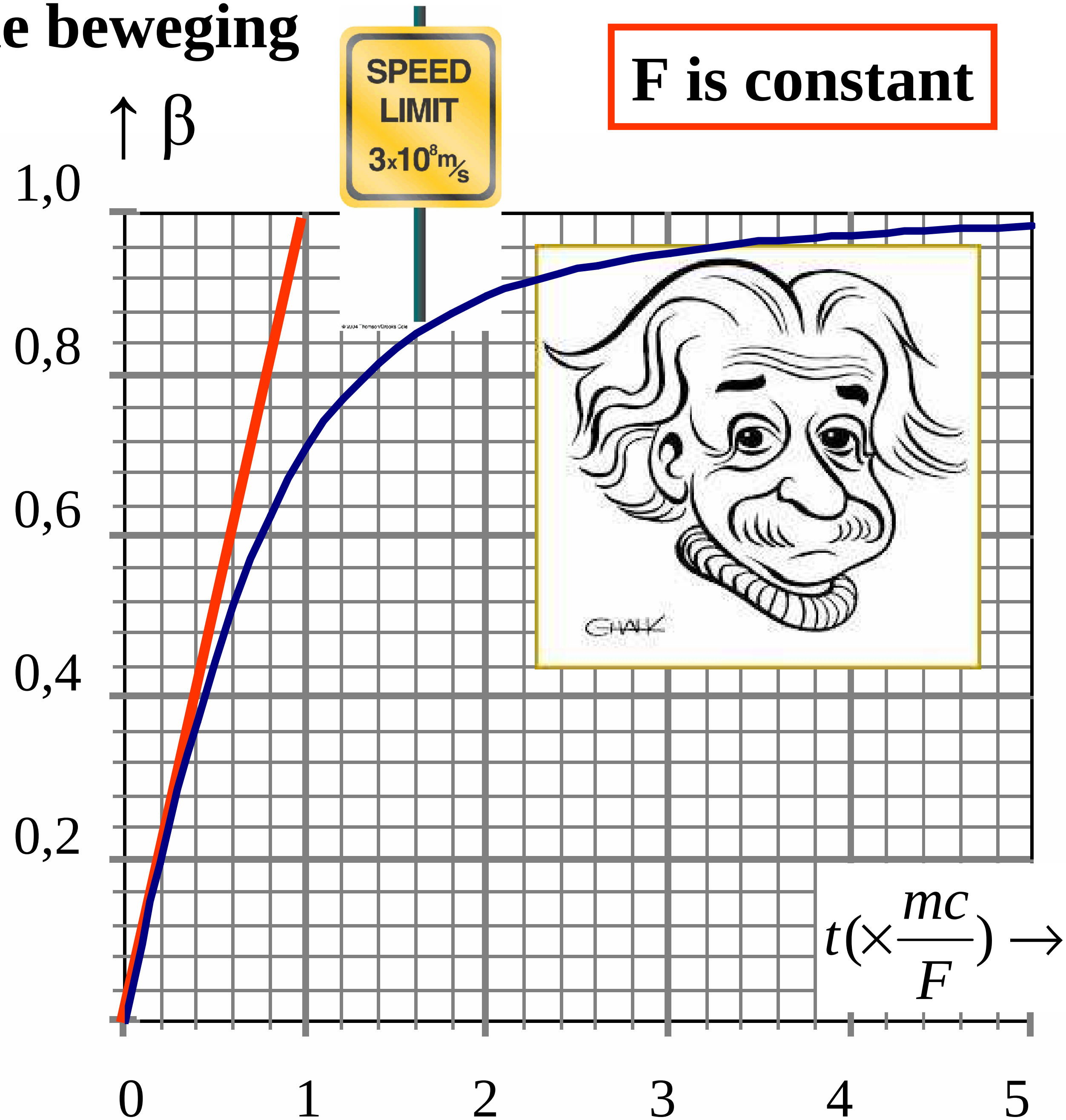
$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ ct &= \gamma(ct' + \beta x') \end{aligned}}$$

Relativistische mechanica

Eenparig versnelde beweging

F is constant

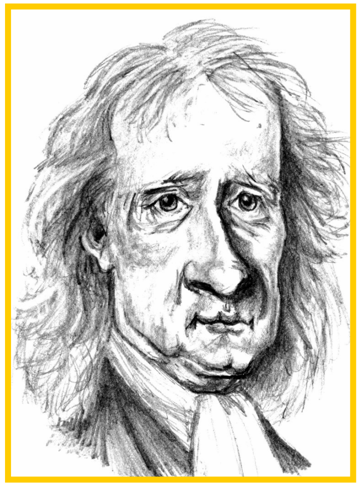


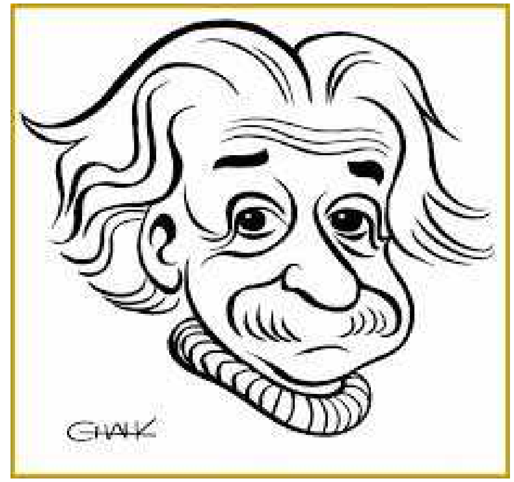


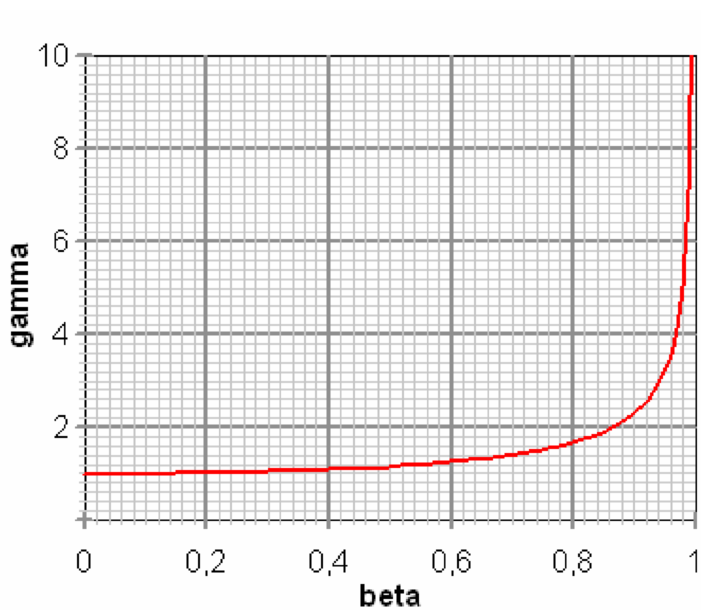
$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{at}{c} = \frac{F}{mc}t$$

De versnelling moet afnemen naar mate de snelheid (β) toeneemt.

De versnelling moet afnemen naar mate de snelheid (β) toeneemt.







$$a = \frac{F}{m} \longrightarrow \boxed{a = \frac{1}{\gamma^3} \cdot \frac{F}{m}}$$

arbeid $\longrightarrow$ $K = \int_0^t F ds = \int_0^t F v dt = \int_0^t F \beta c dt$

$$= \int_0^t m c \gamma^3 \frac{d(\beta c)}{dt} \beta dt = mc^2 \int_0^t \left(1 - \beta^2\right)^{-3/2} \beta d\beta$$

$$= mc^2 [\gamma]_0^\gamma = mc^2(\gamma - 1) \qquad \boxed{K = mc^2(\gamma - 1)}$$

Kracht $\boxed{F = \gamma^3 ma}$

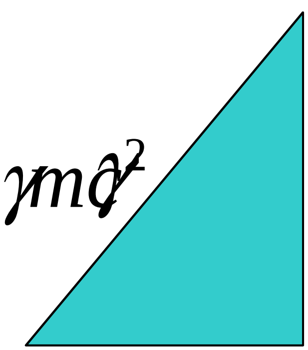
Arbeid $K = F \cdot x \ = mc^2(\gamma - 1) \ = \boxed{\gamma mc^2} - mc^2$

Energie $\boxed{E = \gamma mc^2}$ $\qquad E = K + mc^2$

Impuls $F \equiv \frac{d\boxed{p}}{dt}$ → $F = \gamma^3 ma = \gamma^3 m \frac{d(\beta c)}{dt} = \frac{d\left(\boxed{\gamma\beta mc}\right)}{dt}$

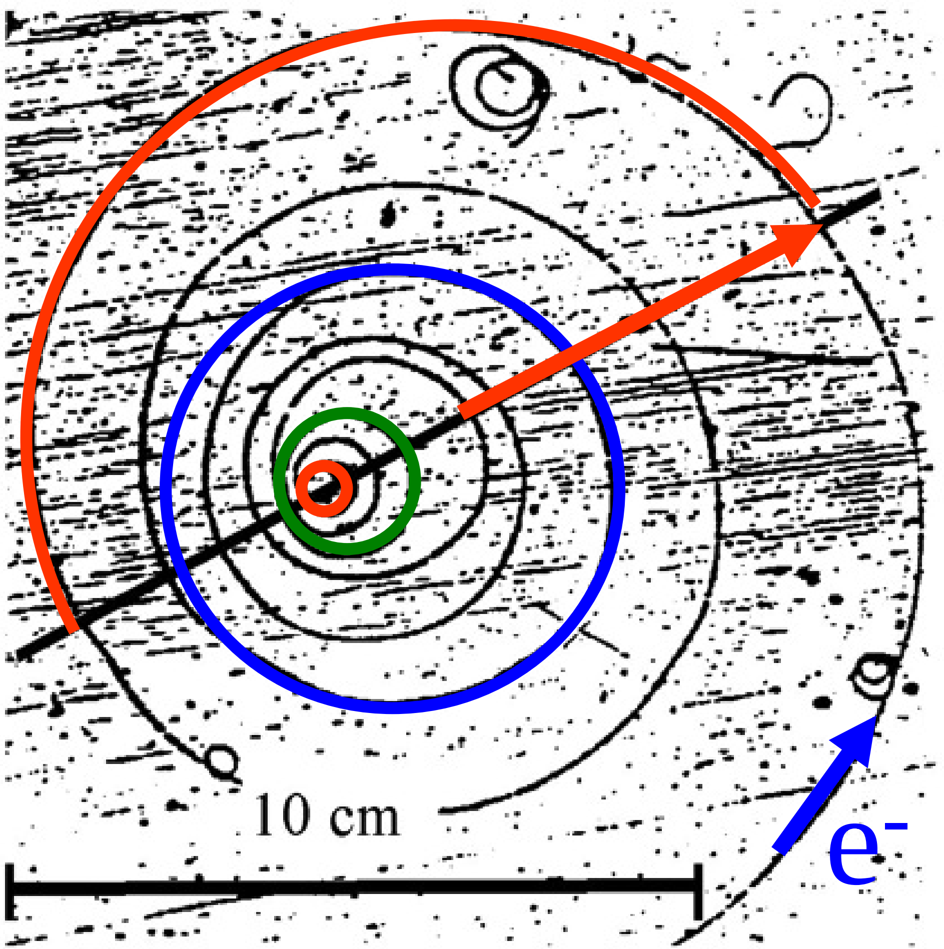
→ $\boxed{p = \gamma\beta mc}$ $\boxed{= \beta \frac{E}{c}}$

$\boxed{E^2 = (pc)^2 + m^2c^4}$



als $m = 0$ → $p = \frac{E}{c}$ → $\beta = 1$

een massaloos deeltje gaat
met de lichtsnelheid !



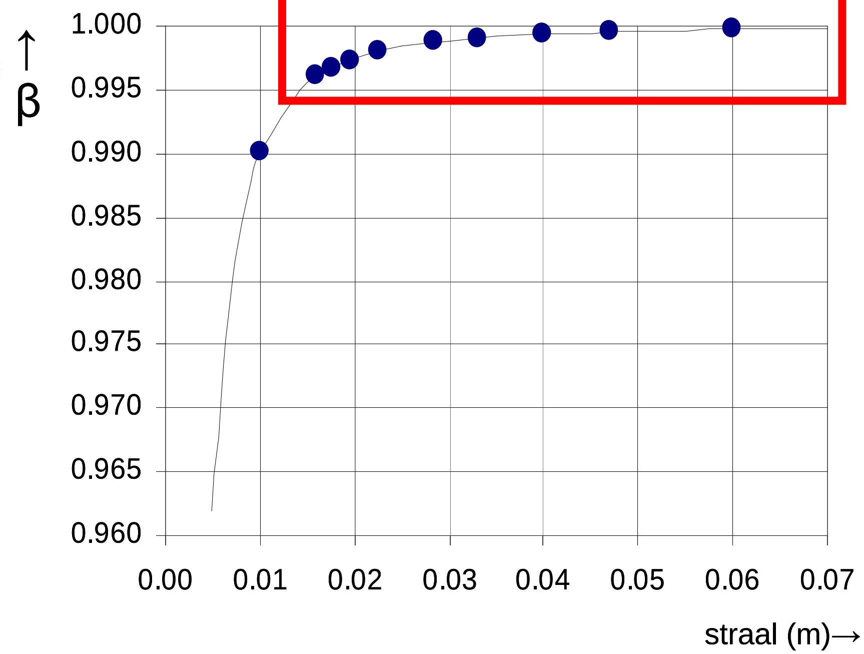
$$B = 1{,}2\,\mathrm{T}$$

$$p = BqR \rightarrow \gamma\beta = \frac{Bq}{mc}R$$

$$= 7{,}04 \cdot 10^2 R$$

$$\rightarrow \beta = \frac{7{,}04 \cdot 10^2 R}{\sqrt{1 + 4{,}96 \cdot 10^5 R^2}}$$

binnen 5‰ van c



$\beta = 0{,}999 \rightarrow R = 0{,}032\mathrm{m}$

$\beta = 0{,}99 \rightarrow R = 0{,}010\mathrm{m}$

$\beta = 0{,}9 \rightarrow R = 0{,}003\mathrm{m}$

Transformaties van energie en impuls

invariant

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \longrightarrow E'^2 - p'^2c^2 = m^2c^4$$

$$x^2 - (ct)^2 = 0 \longrightarrow x'^2 - (ct')^2 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ ct &= \gamma(ct' + \beta x') \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} E &= \gamma(E' + \beta p'c) \\ pc &= \gamma(p'c + \beta E') \end{aligned}}$$

NB. Het teken van β en p wordt bepaald door hun richting: positief naar rechts; negatief naar links


Prettige feestdagen

Appendix

Toetsvragen

1. Noem twee factoren die de ouderdom van een sterrenstelsel op een foto bepalen.

2. Als een klok in een van ons af bewegend vliegtuig langzamer loopt, hoe loopt die dan als het vliegtuig naar ons toebeweegt?

5. Bereken de waarde van γ als β =0,1 ; 0,2 en 0,9.

6. Bereken de waarde van β als γ = 1,1 ; 2 en 3.

7. Bereken de waarde van γ en β als $\gamma\beta$ = 3.

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

8. Bereken hoe lang een proces voor ons duurt als het in een raket, die met 25% van de lichtsnelheid ten opzichte van ons beweegt, 5 minuten duurt?

9a. Bereken de snelheid van een deeltje dat gedurende z’n levensduur van $1{,}3.10^{-5}$ s een afstand van 3,2 km aflegt.

9b. Hoe lang duurt het vervalproces voor de experimentator?

9c. Bereken de afstand die het deeltje in zijn eigen stelsel aflegt.

1. sterrenkunde, gps, deeltjes versnellers, magnetisme

2. In een stelsel dat tov ons beweegt loopt de klok altijd langzamer ongeacht of deze naar ons toe beweegt of van ons af

5. $\beta = 0{,}1 \;;\; 0{,}2 \;;\; 0{,}9$ Ber γ.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = 0{,}1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}1)^2}} = 1{,}01$$

$$\beta = 0{,}2 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}2)^2}} = 1{,}02$$

$$\beta = 0{,}9 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}9)^2}} = 2{,}29$$

6. $\gamma = 1{,}1 \;;\; 2,\ 3$ Ber β.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma}.$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\gamma = 1{,}1 \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{(1{,}1)^2}} = 0{,}42.$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = 0{,}87.$$

$$\gamma = 3 \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{3^2}} = 0{,}94.$$

7. Ber γ en β als $\gamma\beta = 3$.

$$\gamma\beta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \gamma = \frac{3}{\beta} = \frac{3}{0,95} = 3,16.$$

$$\frac{3\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \left(3\sqrt{1-\beta^2}\right)^2 = \beta^2.$$

$$9 - 9\beta^2 = \beta^2.$$

$$10\beta^2 = 9$$

$$\beta = \sqrt{\frac{9}{10}} = 0,95.$$

8. Duur proces voor ons. Raket met 25 % vd lichtsnelh. $\beta = 0,25$
$\Delta t' = 5 min.$

Raket stelsel $\rightarrow \Delta t' = 5 min = 300 s.$

Δt (duur proces voor ons) $= \gamma . \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} . \Delta t'$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(0,25)^2}} . 300 s = 309,8 s.$$

9a. Bereken de snelheid van een deeltje dat gedurende z'n levensduur van 1,3.10-5 s een afstand van 3,2 km aflegt.

9b. Hoe lang duurt het vervalproces voor de experimentator?

9c. Bereken de afstand die het deeltje in zijn eigen stelsel aflegt.

9a. de afgelegde weg is $3200 = vt = \beta c \Delta t = \beta c \gamma \Delta t' = \gamma \beta c \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-5}$

$$\rightarrow \gamma\beta = \frac{3200}{299792458 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-5}} = 0{,}82 \rightarrow \gamma = 1{,}29 \rightarrow \beta = \frac{0{,}82}{1{,}29} = 0{,}63$$

9b. tijdrek $\Delta t = \gamma \Delta t' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 0{,}63^2}} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-5} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$

9c. lengtekrimp $\Delta x' = \dfrac{\Delta x}{\gamma} = \dfrac{3200}{1{,}29} = 2{,}46 \cdot 10^{3}\,\mathrm{m} \approx 2{,}5\,\mathrm{km}$

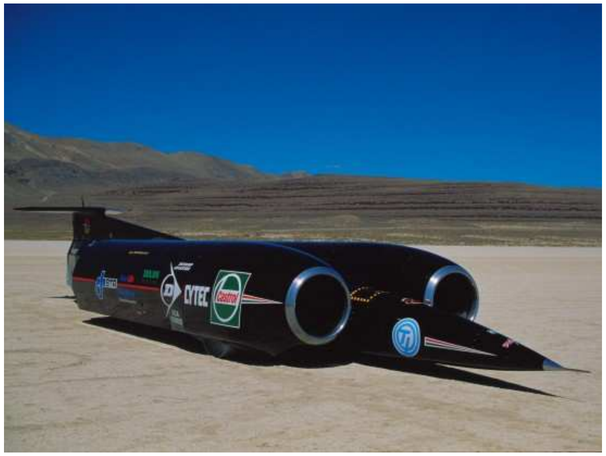
1. Een radioactief atoom heeft een bepaalde halveringstijd. In een versneller wordt zo'n atoom gemaakt en krijgt het een grote snelheid. Wat kun je zeggen over de halveringstijd die de experimentator meet?

A De halveringstijd is een materiaal-eigenschap en daarom meet de experimentator dezelfde waarde.

B De gemeten halveringstijd is groter vanwege de tijdrek.

C De gemeten halveringstijd is kleiner vanwege de tijdrek.

2. Vanwege de lengtekrimp is de af te leggen afstand korter naarmate je harder beweegt. Op 15 oktober 1997 haalde Andy Green met de Thrust SSC, een door twee straalmotoren aangedreven auto, in de Black Rock Desert het snelheidsrecord van 1223,657 km/h over 1000m met vliegende start.



a Bereken hoeveel meter voor Green de door hem afgelegde 1000 m korter was. $6{,}4 \cdot 10^{-10}$ m

b Vergelijk je resultaat met de orde van grootte van een atoom. atoom $\approx 10^{-10}$ m

Doppler-effect

Doppler-effect

S

S’

foton

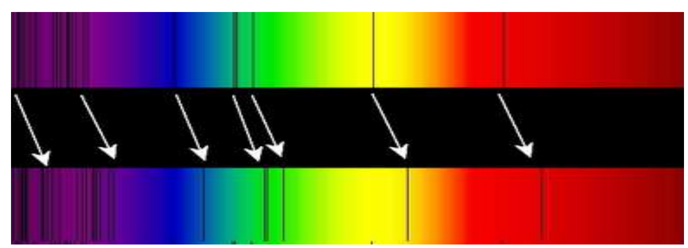
$$p' = -\frac{E'}{c}$$

$$v = \beta c$$

$$E = \gamma(E' + \beta p' c) = \gamma(E' - \beta E') = \gamma(1-\beta)E' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}E'$$

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda'}$$

roodverschuiving

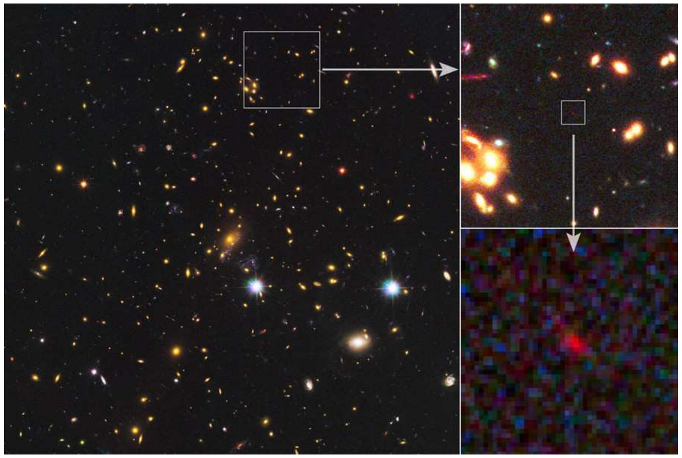


Roodverschuiving

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda'$$

$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1$$

$\beta = 0$ geen roodverschuiving: z = 0

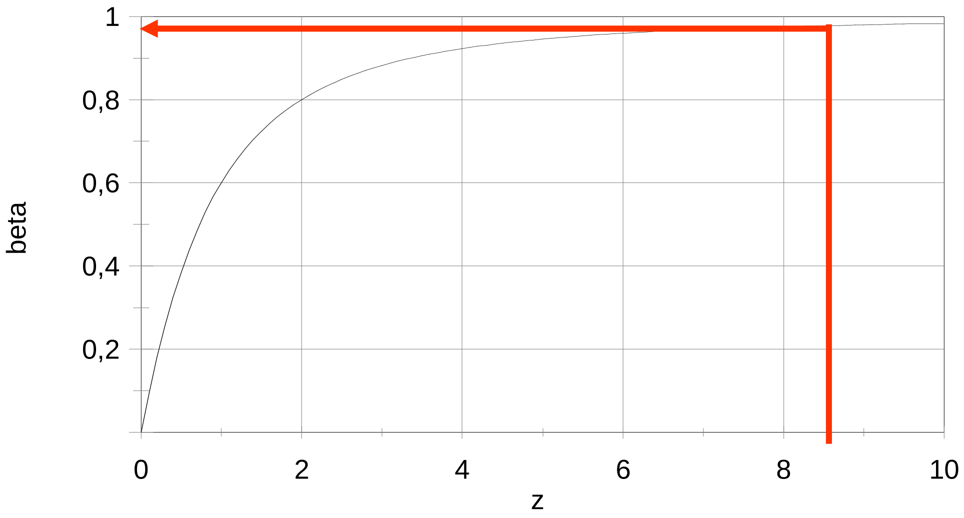


Grootste waargenomen roodverschuiving melkwegstelsel UDFy-38135539
z = 8,6

Wat is de snelheid?

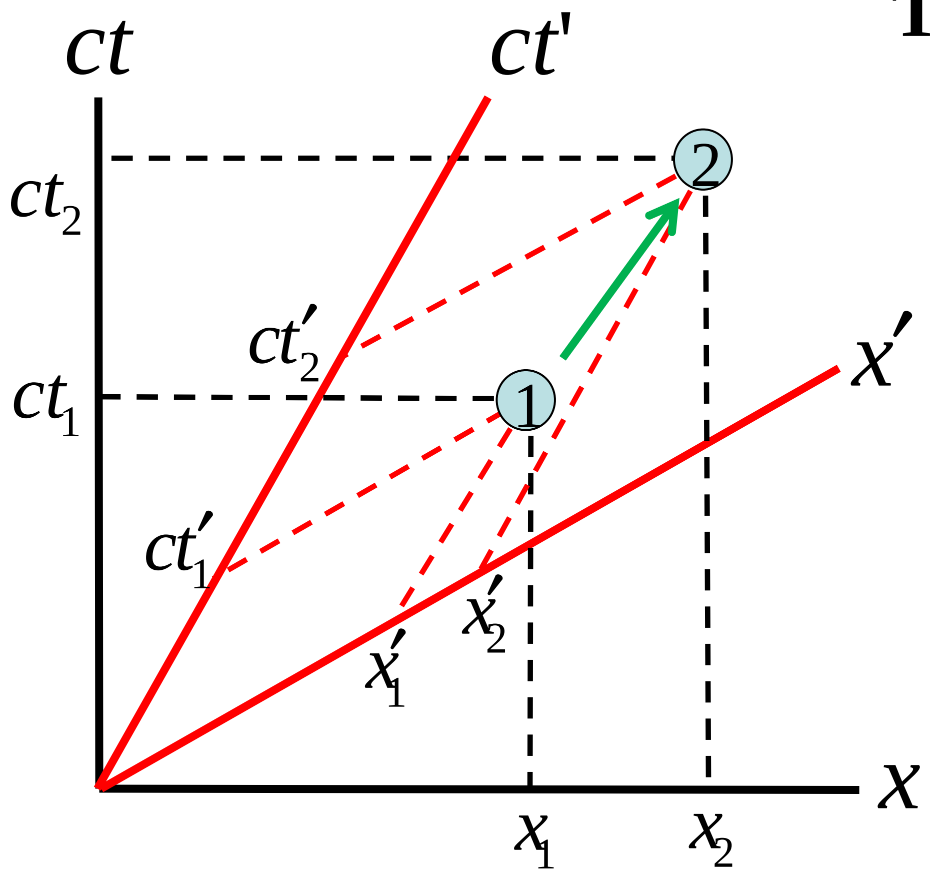
$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 = 8,6$$

$$\beta = 0,9785 \quad \rightarrow \quad v = 0,9785c$$



Snelheden optellen

Transformatie van snelheden

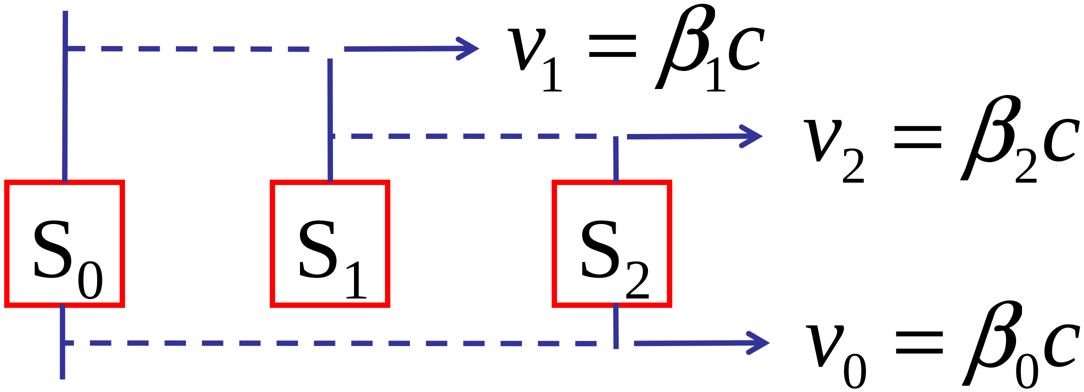


$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ ct &= \gamma(ct' + \beta x') \end{aligned}}$$

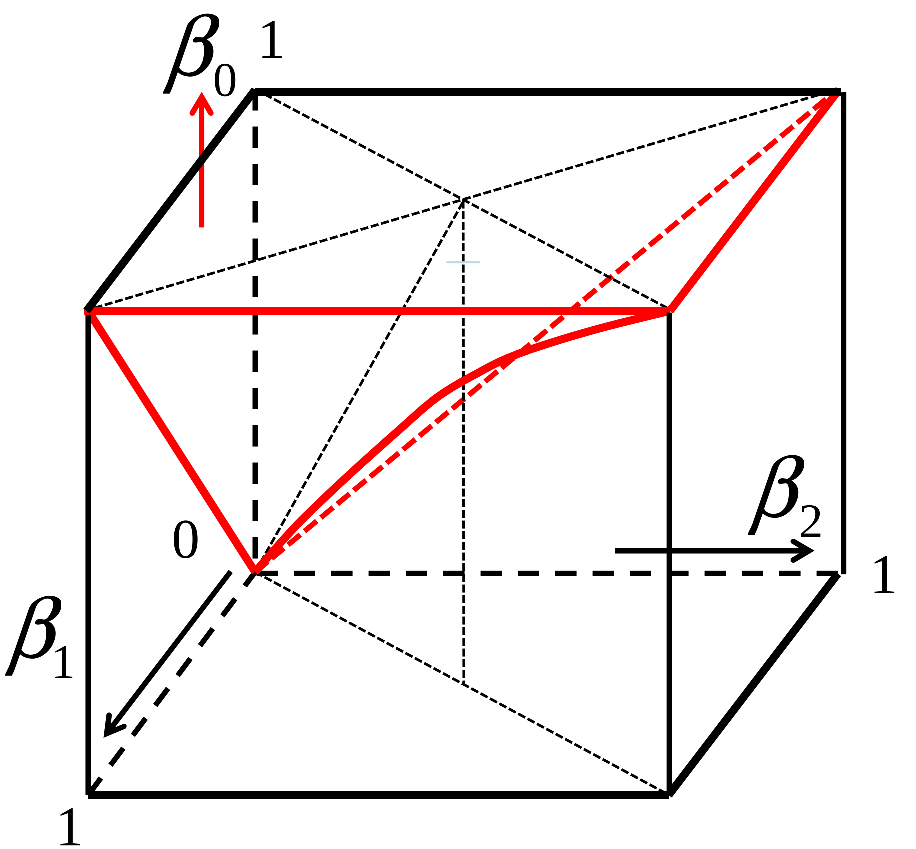
$$v_S = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad v_{S'} = \frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'}$$

delen door $t_2' - t_1'$

$$v_S = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\gamma\left[\left(x_2' - x_1'\right) + \beta c\left(t_2' - t_1'\right)\right]}{\gamma\left[\left(t_2' - t_1'\right) + \frac{\beta}{c}\left(x_2' - x_1'\right)\right]} = \frac{v_{S'} + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c} v_{S'}} \rightarrow \boxed{\beta_S = \frac{\beta_{S'} + \beta}{1 + \beta\beta_{S'}}}$$



$$\boxed{\beta_0 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}}$$



als $\beta_2 = 1$ (S_2 = foton)

en $|\beta_1| < 1$

$$\rightarrow \beta_0 = \frac{\beta_1 + 1}{1 + \beta_1} = 1$$

Het foton heeft dezelfde snelheid tov de systemen S_0 en S_1; dat is precies de veronderstelling op grond waarvan de lorentz-transformaties zijn afgeleid!

Afleiding

$$\frac{d}{dt}\gamma\beta = \gamma^3 \frac{d\beta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\gamma\beta = \frac{d\gamma}{dt}\beta + \gamma\frac{d\beta}{dt}$$

$$\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{2}\cdot(1-\beta^2)^{3/2}\cdot 2\beta\cdot\frac{d\beta}{dt} = \beta\gamma^3\cdot\frac{d\beta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\gamma\beta = \beta\gamma^3\frac{d\beta}{dt}\beta + \gamma\frac{d\beta}{dt} = (\gamma^2\beta^2+1)\gamma\frac{d\beta}{dt} = \gamma^3\frac{d\beta}{dt}$$