Sinds jaar en dag is het algebraonderwijs een zorgenkindje. Ook nu is dit thema weer actueel, vooral in het licht van de aansluiting Basisvorming op de Tweede Fase. **Monica Wijers** geeft een overzicht van de stand van zaken.

# Algebra, een praktijkprobleem?

## Inleiding

Sinds de invoering van de Basisvorming is er uit diverse hoeken kritiek te horen op de algebralijn in het 'nieuwe' leerplan wiskunde. Enkele regelmatig gehoorde uitspraken hierover zijn:

- Voor VBO/MAVO-leerlingen is het 'veel lagere abstractieniveau' acceptabel en kan de vernieuwde algebra zelfs gezien worden als een verbetering.
- HAVO- en VWO-leerlingen worden echter 'ernstig tekort gedaan' en missen in de bovenbouw de noodzakelijke algebraïsche vaardigheden.
- Internationaal vergelijkend onderzoek (TIMMS) laat zien dat Nederlandse leerlingen uit klas 1 en 2 weliswaar goed zijn in wiskunde, maar matig presteren op het gebied van algebra.
- De afname van het aantal studenten dat wiskunde gaat studeren, is een direct gevolg van het te lage abstractieniveau van de schoolwiskunde, met name de algebra.

Hoewel er voor een aantal van deze uitspraken een duidelijk gevoelde gemeenschappelijke basis is, is er tot op heden weinig onderzoek uitgevoerd waaruit blijkt wat precies de problemen zijn en nog minder is onderzocht hoe deze zijn op te lossen. In een serie van drie artikelen proberen we een helder beeld te schetsen van de stand van zaken met betrekking tot het algebraonderwijs in Nederland, we vatten de gesignaleerde problemen samen en doen voorstellen voor een aanpak ter verbetering. In dit eerste artikel schetsen we de kaders voor deze serie en kijken we mee in de praktijk in 3 VWO.

## Ontwikkelingen Bavo en W12-16

Het vormgeven van een goede op 'realistische' leest geschoeide algebraleerlijn is niet een probleem van de laatste tijd. Al in het Wiskivon-tijdperk schreef Martin Kindt in 1980 in de *Wiskrant* (voorloper van de *Nieuwe Wiskrant*) een artikel getiteld 'als een kat om de hete algebrij'. Daarin geeft hij de stand van zaken van het 'denken' van Wiskivon over de algebra en boort hij zoals hij zelf schrijft, een paar ideeënbronnen aan. Hij vervolgt met:

> 'Hoe het verder moet met de exploitatie weten we nog op geen stukken na. Een klus voor vele jaren ontwikkeling en onderzoek, jawel. Want dat we nooit om de algebra heen kunnen is wel duidelijk. De hamvraag is en blijft natuurlijk of algebra voor iedere Nederlander moét. Voor hen die niet met wiskunde doorgaan lijkt dat zinloos. Als je tenminste aan al die rijtjes sommen met haakjes en merkwaardige produkten denkt. Zinvól is het aspect van generaliseren, maar daar heeft de algebra niet alleen het patent op. En elke leerling die je met algebra opscheept, zal toch op zijn minst het gevoel moeten krijgen: daar heb ik wat aan, daar kan ik wat mee.'

Tot zover Martin Kindt in 1980. Sinds die tijd is er veel gebeurd, maar het probleem is nog niet opgelost.
In 1992 werd met de komst van de Basisvorming in de kerndoelen een soort minimumpakket aan kennis en vaardigheden vastgelegd, dat aan iedere Nederlander onderwezen moest worden. Voor wiskunde werd dat uitge-

***Onbegrepen algoritmen toepassen***

$$5(3+3x) = -4x + 91$$
$$15 + 15x = -4x + 91$$
$$-15 \qquad\qquad -15$$
$$15x = -4x + 76$$
$$+15x \qquad +15x$$
$$30x = 11x + 76$$
$$x = 7$$

De leerling die de vergelijking $5(3 + 3x) = -4x + 91$ oplost, heeft begrepen dat er aan beide zijden van het =-teken dezelfde bewerking moet worden uitgevoerd. Echter welke bewerking kan leiden tot een oplossing, lijkt niet duidelijk te zijn, gezien het optellen van $15x$ en de laatste stap waarin 76 door 11 is gedeeld om tot een oplossing te komen. De deelvaardigheden als het wegwerken van haakjes en het samennemen van gelijksoortige termen worden door deze leerling wel beheerst. Het doel van de opgave lijkt echter niet begrepen te worden.

werkt in het nieuwe leerplan W12-16. Daarin werd geheel in de lijn van bovenstaande overweging voor de algebra een invulling bedacht die ook zinvol en te doen was voor leerlingen die niet met wiskunde zouden doorgaan. De nadruk kwam meer te liggen op verbanden, waarbij naast formules ook tabellen en grafieken belangrijke representatievormen waren. Formules kwamen veelal voort uit situaties en werden met woorden of betekenisvolle letters genoteerd. Deze leerlijn wordt ook wel de 'functielijn' of TGF-lijn (Tabellen, Grafieken, Formules) genoemd. Deze lijn, aangezet in de Basisvorming, werd verder doorgetrokken naar en uitgewerkt in het nieuwe examenprogramma MAVO/VBO. De zogenaamde 'parabolica' verdween en werd vervangen door onderzoek van meerdere typen verbanden, zoals exponentiële, periodieke en derdemachtsverbanden. Oplossen van vergelijkingen, traditioneel een onderdeel dat veel aandacht kreeg en waarbij algebraïsche vaardigheden centraal stonden, werd ingebed in de Functielijn. In plaats van algebraïsche oplossingsmethoden werden meer algemene methoden als het grafisch oplossen, het terugrekenen met behulp van pijlentaal en het inklemmen in een tabel onderwezen. (Meer achtergronden over de algebralijn zijn te vinden in de publicatie *Achtergronden van het nieuwe leerplan W12-16*.)

Met name in VBO/MAVO haalde men opgelucht adem: eindelijk een zinvollere invulling van de wiskunde, in het bijzonder van de algebra.

In het project W12-16 werd er voor HAVO klas 3 en VWO klas 3 en 4, de jaren tussen Basisvorming en bovenbouw, weinig voorbeeldmateriaal ontwikkeld. Wel is de leerstof voor die leerjaren omschreven in termen van 'kennen en kunnen lijstjes'. Over algebra in het HV-traject is in het achtergrondenboek een korte paragraaf te vinden, daarin staat onder andere:

> 'In het HV-traject leren de leerlingen niet alleen de diverse wiskundige gereedschappen te gebruiken, reflectie op dit gebruik leidt tot redeneren over de achterliggende structuur. [..]. Het HV-traject moet er ook toe leiden dat redeneringen over formules los van de achterliggende situatie gemaakt worden. Een argument om redeneren over structuur meer aan de orde te laten komen is, dat de leerlingen aan het eind van het HV-traject een beeld moeten hebben van wiskunde B, dit ter onderbouwing van een verantwoorde keuze.'

Het in het project W12-16 ontwikkelde leerplan kreeg zijn beslag in de nieuwe schoolboeken voor de Basisvorming. Auteurs moesten in het vormgeven en uitwerken van de leerlijnen vaak hun eigen weg zoeken en hun eigen didactiek ontwikkelen. W12-16 bood slechts op beperkte schaal voorbeeldmateriaal en een uitgewerkte in de praktijk beproefde didactiek kwam niet altijd op tijd voor de onder grote tijdsdruk werkende uitgevers.

Vooruitlopend op de rest van dit artikel kunnen we al concluderen dat een belangrijk probleem is dat het redeneren over de structuur van formules en met name het omgaan met formules als zelfstandig object, niet voldoende uit de verf is gekomen.

## Ontwikkelingen sinds invoering Bavo

Sinds de invoering van de Basisvorming in 1992 hebben de ontwikkelingen in het (wiskunde)onderwijs niet stilgestaan. De invoering van de Tweede Fase in HAVO/VWO werd voorbereid; profielen werden ontwikkeld en voor

***Complexere vergelijking oplossen: een voorbeeld van complete verwarring***

$$3\cdot\sqrt{(2q+23)}=33$$
$$3\cdot(2q+23)=1089$$
$$87q+69=1089$$
$$87q=1020$$
$$q=11{,}7$$

leerling 1

weggelaat

$$3\sqrt{(2a+23)}=33$$
$$2a+23=5{,}7$$
$$2a=-17{,}3$$
$$a=-8{,}6$$

leerling 2

$$3\cdot\sqrt{(2q+23)}=33$$
$$3\cdot\underset{-23}{2q}+\underset{-23}{23}=1089$$
$$\underset{-3}{3}\cdot\underset{-3}{6}=1089$$
$$3=1089$$

leerling 3

Bij het oplossen van de vergelijking $3\sqrt{(2q+23)}=33$ raken alledrie de leerlingen in de problemen.
Wanhopig lijken alledrie de leerlingen hierboven te proberen 'aan beide kanten hetzelfde te doen', ze hebben echter geen idee wat er gedaan kan en mag worden en hoe dat dan moet. Eerst moet blijkbaar het wortelteken weg, dat doe je door aan beide zijden te kwadrateren (leerling 1 en 3) of wortel te trekken (leerling 2). De factor 3 voor het wortelteken blijkt onbegrepen en wordt genegeerd (de tweede leerling) of wordt maar gewoon meegenomen. De $q$ wordt door de eerste en de derde leerling al na een stap gelezen als een 9, dat wordt dus 3 keer 29 is 87. De eerste leerling zet er weer een $q$ bij. De derde leerling lijkt het meest in de war te zijn. Elke operatie wordt wel twee keer uitgevoerd, maar steeds aan dezelfde kant van het =-teken.
Duidelijk is dat de leerlingen ten onrechte de methode voor het oplossen van een eerstegraadsvergelijking hier proberen toe te passen.

wiskunde werd eindelijk de oude wiskunde B vernieuwd in het Profi-project. Hoe de aansluiting van de wiskunde uit de Basisvorming en klas 3/4 op de Tweede Fase-wiskunde zal verlopen, weten we nog niet precies. Al blijkt uit de eerste ervaringen dat die aansluiting zeker niet probleemloos is te noemen.
Inmiddels wordt de rol van de technologie in het (wiskunde)onderwijs steeds groter, de grafische rekenmachine is verplicht gesteld bij wiskunde in de Tweede Fase en de computeralgebra rukt ook op. Het zal duidelijk zijn dat deze ontwikkelingen hun invloed zullen hebben op het algebraonderwijs, zowel in de Tweede Fase zelf als in de leerjaren daar direct aan voorafgaand.
De nota van Veen vormde de aanzet voor herstructurering van VBO en MAVO tot het VMBO waarin leerwegen en sectoren de structuur vormen. Hoe het in het VMBO met de wiskunde verdergaat, is nog niet helemaal duidelijk. Wel wordt nu al duidelijk dat de wiskunde, om zinvol te zijn binnen de meer praktische leerwegen, veel meer verbonden zal moeten worden met de inhoud van de praktijkvakken.
De leerboeken voor de Basisvorming zijn alweer herzien. Auteurs proberen gesignaleerde problemen, met name op het gebied van algebra, op te lossen. Later in deze serie gaan we in op de manier waarop dit gebeurd is en proberen we – voor zover mogelijk – na te gaan of de problemen daarmee opgelost zijn/worden.

Ook internationaal wordt wiskundeonderwijs ontwikkeld: door het Freudenthal Instituut is, volgens de principes van realistisch reken-wiskundeonderwijs, een vernieuwend curriculum ontwikkeld voor de Amerikaanse Middle Schools (tien tot veertienjarigen). Daarin is het denken over zinvolle algebra verdergegaan en is een bij de Amerikaanse kerndoelen passende algebraleerlijn ontwikkeld. Ervaringen hiermee kunnen weer gebruikt worden in Nederland.
In 1996 heeft Nederland samen met veertig andere landen meegedaan aan de Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). Daaruit kwam bij globale beschouwing een tweeledig beeld naar voren: Nederlandse leerlingen scoren voor zowel wiskunde als science voor de eerste twee leerjaren van het voortgezet onderwijs in de top 10. Maar de tweedeklassers scoren het slechtst op het onderdeel algebra, in vergelijking met de andere leerstofonderdelen.

## Onderzoeksresultaten

Henk Sissing laat in een heldere analyse van de TIMSS resultaten in *Euclides* (1997) zien hoe het nu precies met die algebrascore van onze eerste en tweede klassers zit. Hij is daar niet pessimistisch over. Hij laat zien dat in vergelijking met het internationale en het Europees gemiddelde de Nederlandse leerlingen niet slecht scoren. En verder toont hij aan dat de keuze van de vraagstukken in hoge mate de scores verklaart. Onze leerlingen blijken relatief goed te scoren op algebravraagstukken die meer probleemoplossende vaardigheden vragen en relatief slecht op de problemen die kale formele algebraïsche vaardigheden vragen. Deze opgaven sluiten, zoals ook Sissing opmerkt, veel minder goed aan bij het Nederlandse onderbouwprogramma. De vraag is natuurlijk hoe we deze feiten moeten waarderen en welke consequenties we eraan verbinden.

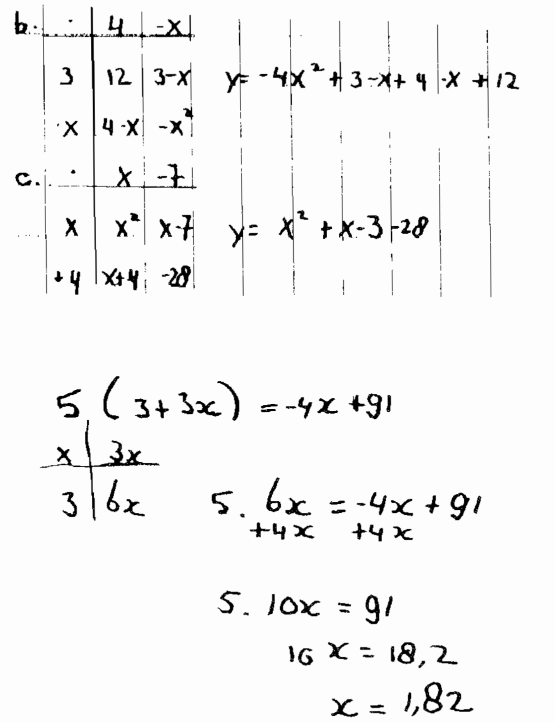
Jansie Niehaus heeft in opdracht van het Freudenthal Instituut in de winter '98/99 een aantal deskundigen geïnterviewd over de problemen met het algebraonderwijs. Daaruit komt het volgende beeld naar voren.
Alle geïnterviewden zijn het over het volgende eens:
- er bestaat een ernstig probleem
- de veranderingen die met het nieuwe leerplan W12-16 zijn gekomen, moeten niet worden teruggedraaid
- de nadruk op begrip en betekenis is belangrijk
- er moet rekening worden gehouden met de rol van de grafische rekenmachine.

Vaak gehoord:
- in de brugklas zit te weinig algebra
- de formele algebra start te laat
- er is gebrek aan algebraïsch gereedschap in klas 3/4 HAVO/VWO.
- er is gebrek aan inoefening
- voor de meeste leerlingen (VBO/MAVO) is de wiskunde in de Basisvorming wel een succes.

Samenvattend wordt er spanning geconstateerd tussen:
- inoefenen versus begrip
- gereedschap gebruiken ('hulpmiddel') versus structuren/bewijzen ('wetenschap')
- algebra apart ('algebraïsch denken') versus algebra als onderdeel van de wiskunde ('wiskundig denken').

Bovenstaande conclusies sluiten aan bij wat eerder al uit de praktijk naar voren was gekomen. In 1996 zijn op initiatief van het APS circa zeventig docenten bijeengekomen om te praten over de knelpunten met betrekking tot de aansluiting van de Basisvorming op klas 4 HAVO/VWO. Deze docenten hebben hierover een enquête ingevuld, waaruit grotendeels hetzelfde beeld naar voren kwam. Daarnaast werd door de ondervraagde docenten nog opgemerkt dat in het nieuwe Tweede Fase-programma meer rekening moest worden gehouden met het onderbouwprogramma.
Ook in 1998 heeft het APS een conferentie voor docenten georganiseerd. Het thema was nu: op weg in de Tweede Fase. Hier kwam een ander beeld uit. De voornamelijk Tweede Fase-docenten huldigen de opvatting dat manipuleren met algebraïsche expressies het hart vormt van de wiskunde, dat algebra als gereedschap vlot en paraat gebruikt moet kunnen worden en dat zonder algebraïsch denken er geen verder wiskundig denken mogelijk is. De in een aantal methoden gekozen oplossing om meer algebraïsche vaardigheden in het programma te stoppen, wordt afgedaan als te simpel. Een betere analyse van wat

***Verwarring tussen optellen/aftrekken en de impliciete vermenigvuldiging***




Beide leerlingen zijn in verwarring geraakt bij het interpreteren van bewerkingen waarbij de vermenigvuldigpunt mogelijk is weggelaten.
De leerling die de producten $(4-x)(3+x)$ en $(x-7)(x+4)$ uitwerkt, schrijft in de tabel $3-x$ als resultaat van $3 \times -x$. Of dit een gevolg is van het negeren van het vermenigvuldigteken of van het weglaten ervan, is niet helemaal duidelijk. Bij onderdeel *c* verkort de leerling $x-7$ en $x+4$ tot $x-3$. Het inzicht in wat moet worden uitgewerkt en hoe de uitdrukkingen in elkaar zitten, lijkt echter te ontbreken.
De leerling die de vergelijking oplost, vat $3+3x$ op als een (impliciete) vermenigvuldiging. 'De vermenigvuldigpunt is weggelaten'. Uit de stap waarin $4x$ aan beide kanten van de vergelijking wordt opgeteld, blijkt dat ook hier de structuur in dit geval van $5 \times 10x$, niet goed wordt geïnterpreteerd.

echt nodig is aan algebra en hoe dat bereikt kan worden, met welke aanpak en didactiek, is nodig om dit probleem op te lossen.

## De praktijk

Hoewel bij bovenstaande onderzoeksresultaten ook de mening van docenten vertegenwoordigd is, kan het toch zeer verhelderend zijn een kijkje in de praktijk van alledag te nemen. Twee docenten, Mieke Abels en Corine van den Boer, beschrijven hun ervaringen met de formelere algebra in 3 VWO. De gebruikte methode is in beide gevallen *Moderne Wiskunde* 6e editie. Hieronder wordt ingezoomd op de hoofdstukken met betrekking tot het oplossen van vergelijkingen.

***Mieke Abels, sg Broklede, Breukelen***

Hoofdstuk 4 in 3 VWO heet *Rekenen met formules*. Al vanaf het begin vinden de leerlingen dit een vreemd hoofdstuk en voelen ze zich onzeker. In een klassengesprek plaatst Mieke dit hoofdstuk in de leerlijn, haalt de voorkennis op en licht de bedoeling toe. Ter illustratie gebruikt ze het probleem van een vierkant van $x$ bij $x$ waar een strook met een breedte 3 cm aangelegd of afgehaald wordt.

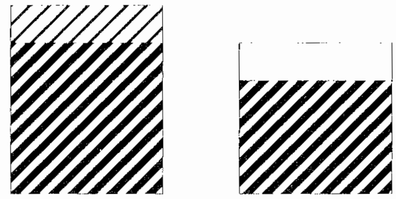



*fig. 1*

Leerlingen maken verschillende formules voor de oppervlakte van de rechthoeken die zo ontstaan. Mieke gebruikt dit om aannemelijk te maken dat het heel praktisch is als je formules op verschillende manieren kan schrijven. Verder wordt de afspraak gemaakt dat leerlingen moeten proberen zoveel mogelijk vragen te stellen en het te vertellen als ze iets 'lastig' of 'raar' vinden. Hierdoor ontstaat een goede sfeer in de klas waarin leerlingen zonder schroom met allerlei vragen en opmerkingen komen. Veel vragen gaan over notaties, de volgorde van bewerkingen en de structuur van formules. Enkele voorbeelden:

- 'Betekent $2x^2 - 2x^2$ dat je keer moet doen?' De leerling denkt dat de vermenigvuldigpunt is weggelaten.
- $y = -2x^2$ wordt bij substitueren van -5 voor $x$ meestal 50, de rekenmachine helpt dan ook niet.
- 'Hoe zit de formule $y = 5 - 2x(x-3)$ in elkaar?'
- 'waarom is $(6x+3)/3$ niet gewoon $6x+1$?'

Verder worden basale rekenvaardigheden, zoals het vermenigvuldigen en vereenvoudigen van breuken, besproken. Ook hier blijken veel leerlingen problemen mee te hebben. In klassengesprekken keert Mieke vaak terug naar rekenvoorbeelden met getallen om de structuur van formules zichtbaar te maken. Ze laat leerlingen sommetjes bedenken die dezelfde structuur hebben als de formule. Door dan te kijken hoe je de berekeningen maakt, wordt ook de structuur van de formule duidelijk. Dit helpt, maar ook hierbij blijkt dat nogal wat leerlingen niet veel vaardigheden in huis hebben wanneer ze met getallen moeten rekenen. Samenvattend merkt Mieke op:
'Mijn leerlingen maken kennis met de algebra voornamelijk via twee leerlijnen:
– via de lijn tabellen/grafieken/formules
– via de lijn regelmaat/patronen en formules.
Een duidelijke context ondersteunt het manipuleren; voor zwakkere (HAVO)-leerlingen is die bijna onontbeerlijk. De vraag is hoe ze dan toch een hoger, abstracter, niveau kunnen bereiken. De leerlingen zouden veel beter 'handig' moeten leren rekenen met getallen. Heel essentieel is

om dit als extra leerlijn te zien die via generalisatie het manipuleren met formules duidelijk maakt. Een simpel voorbeeld:

$2 \times 10 + 3 \times 10 = 5 \times 10$ kan gebruikt worden om in te zien dat $2x + 3x = 5x$.

Verder is er veel aandacht voor de algebra-taal nodig.'

Uit de ervaringen van Mieke kan geconcludeerd worden dat het manipuleren met formules voor leerlingen een vreemde eend in de bijt is. Mieke zet diverse middelen naast het boek in, om de leerlingen de zin en betekenis van wat ze aan het doen zijn duidelijk te maken. Ze grijpt vaak terug naar concrete rekensituaties. Deze doorgaande lijn van rekenen via gegeneraliseerd rekenen naar algebra lijkt een vruchtbare bodem te kunnen leggen voor algebraïsche vaardigheden. In het Nederlandse wiskundeonderwijs is deze lijn echter niet uitgewerkt. Ook de lijn waarin leerlingen hun eigen algebra-taal ontwikkelen en gebruiken, is in Nederland nauwelijks uitgewerkt.

***Corine van den Boer, Gregorius College, Utrecht***

In de eerste twee klassen werken de leerlingen vrijwel altijd aan de hand van concrete situaties. Aan het eind van de tweede klas krijgen de leerlingen voor het eerst te maken met de term vergelijking. Corine laat in een overzicht (zie figuur 2) zien met welke zevenmijlslaarzen ze met de leerlingen door dit onderwerp moet heenwerken.

Ook in hoofdstuk 12, het laatste hoofdstuk van het jaar, worden nog vergelijkingen opgelost. Dit hoofdstuk komt door tijdnood echter niet altijd goed uit de verf.

In de derde klas wordt ervan uitgegaan dat de leerlingen de stof uit de tweede nog goed in hun hoofd, maar zeker ook in hun vingers hebben. Ook bij Corine doen zich problemen voor met hoofdstuk 4 'rekenen met formules':

- HAVO-leerlingen hebben veel moeite met het onderscheiden van gelijksoortige termen: $2a + 7a$ mag je samennemen tot $9a$ maar $a^2 + 7a$ niet.
- Het rechthoeksmodel en de tabel worden gebruikt om haakjes weg te werken en om factoren buiten haakjes te brengen. Corine presenteert steeds beide modellen. Veel, voornamelijk HAVO-, leerlingen kunnen moeilijk begrijpen wat er precies gebeurt: waarom kun je $3 \times (2 + x)$ voorstellen als een rechthoek? Leerlingen die de tabel goed kunnen maken en invullen, zien soms niet dat het antwoord er als het ware al in staat. VWO-leerlingen begrijpen vaak wel dat het oppervlaktemodel een denkmodel is, waarin dus ook negatieve lengtes voor kunnen komen.
- Voor alle leerlingen gaat het herschrijven van $3(x+5)$ na verloop van tijd meestal goed.
  Het herschrijven van $2 + 3(x+5)$ is al wat lastiger en het herschrijven van $2 - 3(x+5)$ is voor geen enkele leerling meteen vanzelfsprekend.
  Het probleem zit hem uiteraard in de min. Is dat een min die staat voor de bewerking aftrekken, of is het een min die van 3 een negatief getal maakt? En hoe moet je daar nu mee gaan rekenen?

*Hoofdstuk 9 (2hv) heeft als onderwerp 'vergelijkingen'. Hoe ziet dat hoofdstuk eruit?*

9.1 Vergelijkingen: leerlingen krijgen één concrete situatie over een spaarrekening; bordje wordt geïntroduceerd, de begrippen 'vergelijking' en 'oplossing' en het vervangen van de × door de vermenigvuldigingspunt.

9.2 Gelijksoortige termen samennemen. Oplossen van vergelijkingen als $3 \cdot (n+2) = 90$.

9.3 Omslagpunt berekenen van twee grafieken a.h.v. concrete situaties; d.m.v. tabel.

9.4 Weegschaal; vinden van omslagpunt van twee lineaire verbanden (eerst tekenen; oplossen vergelijking; dus geen gebruik tabel; bij volgende som: eerst berekenen en controleren d.m.v. tekenen grafieken).

*Dit is een moment dat ik vaak de vraag krijg: waar is dit goed voor? Waarom moet ik dit leren? Par. 9.2 en 9.3 vinden ze vaak nog wel leuk, kunnen ze overzien, maar hier haken leerlingen die het voorgaande wel konden uitvoeren maar niet begrijpen, af.*
*Ik zou bovendien hier de voorkeur geven aan de term 'snijpunt' in plaats van 'omslagpunt'. De concrete situatie bestaat voor de leerlingen hier uit twee 'betekenisloze' grafieken. Wat ze dus zien is een 'snijpunt' van de twee grafieken.*

9.5 Oefenen met weegschaal (nu heet het ineens 'links en rechts hetzelfde') en weer één kale opgave met omslagpunt; bordjesmethode is uit het zicht verdwenen.

9.6 Ongelijkheden; één concrete situatie gevolgd door de begrippen 'ongelijkheid' en 'oplossing' + notatiewijze; kaal oefenen (eerst vergelijking van maken, dan getallen invullen die groter/kleiner zijn dan de oplossing van de ongelijkheid; vervolgens oplossing van de ongelijkheid opschrijven).

*fig. 2 Overzicht van het hoofdstuk over vergelijkingen uit Moderne Wiskunde*

- Voor de VWO-leerlingen komen er extra problemen wanneer zij in de laatste paragraaf ook nog eens delingen voorgeschoteld krijgen (zie figuur 3).

Slechts een kwart pagina wordt besteed aan presentatie en oefening van dit soort moeilijke herleidingen. Hier vervallen veel leerlingen dan maar tot het uitvoeren van een regel – probeer boven en onder in dezelfde factoren te splitsen; controleer of je niet door nul deelt – terwijl ze (het nut van) de regel niet begrijpen.

Over hoofdstuk 6 'vergelijkingen en ongelijkheden' merkt Corine op dat het een lijdensweg is, zowel voor haar als voor de leerlingen. Alles loopt door elkaar door de enorme hoeveelheid onderwerpen die de leerlingen te verstouwen krijgen, voor het oplossen van vergelijkingen de volgende reeks methoden: bordjesmanier, weegschaal, haakjes wegwerken, product van twee termen = 0, inklemmen.

Formules met breuken waarbij de teller en de noemer een gemeenschappelijke factor bevatten kun je eenvoudiger schrijven. Dat gebeurt door teller en noemer door die gemeenschappelijke factor te delen. Maar die factor mag niet gelijk zijn aan 0, want dan geldt de formule niet. Daarom wordt in voorbeeld 1 $x = 0$ uitgesloten en in voorbeeld 2 $x = -4$.

**VOORBEELD**

**1**

$$y = \frac{10 \cdot x^2}{2x}$$

$$y = \frac{\cancel{2} \cdot 5 \cdot x \cdot \cancel{x}}{\cancel{2} \cdot \cancel{x}}$$

$$y = 5x$$

als $x \neq 0$

**2**

$$y = \frac{3x\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}$$

$$y = 3x$$

als $x \neq -4$

*fig. 3 Opgave uit Moderne Wiskunde 6e editie, deel 3V*

Voor veel leerlingen is er weinig tot geen verband tussen de oplossing(en) van een vergelijking en de oorspronkelijke vergelijking. Dit blijkt wanneer ze het snijpunt van twee grafieken moeten bepalen, ze weten dan vaak niet hoe ze de gevonden $x$-en moeten interpreteren en hoe ze de coördinaten van de snijpunten kunnen berekenen.
Ook op de toets over vergelijkingen bleek dat leerlingen fouten maken door het uitvoeren van aangeleerde, maar niet begrepen en daardoor onjuist gebruikte algoritmes.

Corine merkt afsluitend op:
'Het grote probleem voor de leerlingen is mijns inziens de omslag van het werken in concrete situaties, waar je je in ieder geval nog iets bij kunt voorstellen, naar het werken met met name $y$ en $x$. In concrete situaties gaat het allemaal wel goed, echter de stap naar generalisatie en 'abstracte' situaties gaat te snel en is vaak te ondoorzichtig voor veel leerlingen. Leerlingen en docenten vervallen (noodgedwongen?) tot het snel aanleren van algoritmes en geven/krijgen te weinig tijd om zich vervolgens de algoritmes eigen te maken.'
Verder merkt Corine nog op dat leerlingen bij het zelf opstellen van formules geen problemen hebben.

Ook uit de ervaringen van Corine komt het beeld naar voren dat het meer abstracte betekenisloze manipuleren met formules de meeste problemen levert. De methode biedt daarbij weinig steun en lijkt door de grote hoeveelheid onderwerpen per hoofdstuk juist een deel van de problemen te verergeren.

## Conclusies

Zowel uit de onderzoeken als uit de praktijkervaringen blijkt dat er inderdaad een probleem is op het gebied van de algebraïsche vaardigheden. Het probleem blijkt vooral te ontstaan op het moment dat de context of situatie het manipuleren niet meer ondersteunt. In de methoden voor HAVO/VWO lijkt er in klas 3 een plotselinge overgang te zijn van meer concrete naar meer abstracte algebra. Alle abstracte onderwerpen worden dan in de haast even snel aangeboden, waardoor de problemen alleen maar groter worden. Het onderbouw algebraprogramma is topzwaar in klas 3 HAVO/VWO.
Er is in de uitwerking van de algebralijn geen goed evenwicht gevonden tussen aandacht voor begrip en betekenis en het inoefenen van vaardigheden. Vaardigheden worden in de haast aangeboden en er is een weinig doordachte aanpak voor het oefenen ervan. Dat dit gevolgen zal hebben voor de wijze waarop leerlingen in de Tweede Fase omgaan met algebra en analyse lijkt vanzelfsprekend.
In het volgende artikel uit deze serie gaan we na welke algebra, in het bijzonder welke algebraïsche vaardigheden, vanuit de Tweede Fase algebra en analyse gezien, echt nodig zijn. Daarbij proberen we ook vanuit die kant na te gaan waar en wat er dan echt misgaat.

*Monica Wijers, Freudenthal Instituut, Utrecht*

## Literatuur


Commissie MAVO/VBO aansluitend onderwijs (1994). *Recht doen aan verscheidenheid, opzet en ontwikkelingsperspectief van de afsluiting MAVO en VBO.*

Kindt, M. (1980). Als een kat om de hete algebrij, *Wiskrant, 5*, 155-156.

Team W12-16 (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16*, Freudenthal Instituut / SLO.

Sissing, H. (1997). Het TIMMS-onderzoek. De Nederlandse prestaties bij de algebraopgaven. *Euclides, 73*(3), 83-87.