Rekenvaardigheden staan sterk in de belangstelling, ook in het voortgezet onderwijs. Docenten in de brugklas verbazen zich wel eens over wat hun leerlingen wel en vooral niet kunnen op rekengebied. Vanwaar deze verbazing? Aan de hand van twee fragmenten uit een rekenmethode identificeren **Caroliene van Waveren Hogervorst** en **Joke Daemen** enkele opvallende kenmerken van het rekenen op de basisschool, die sommige moeilijkheden van leerlingen in de overgang naar het voortgezet onderwijs begrijpelijk maken.

“Pak allemaal je rekenboek en kijk op pagina 86”

Wat een aantal bladzijden uit een rekenmethode voor groep 8 duidelijk maakt over de aansluiting PO-VO

Inleiding
Een van de werkgroepen tijdens de Nationale Wiskundedagen had als titel: *Aansluiten op het rekenonderwijs in de basisschool: van drijfzand naar vaste grond*. De deelnemende docenten kregen in deze werkgroep (onder andere) de gelegenheid te kijken in de rekenmethodes voor de basisschool. Dat leverde veel gespreksstof en vragen op.

In dit artikel gaan we in op een aantal opmerkingen en vragen die toen gesteld zijn. We doen dit op een praktische manier, door uit te gaan van enkele bladzijden uit een leerlingenboek voor groep 8 van de methode *Rekenrijk* (Bokhove e.a., 2011). De bedoeling is dat u als lezer een beeld krijgt van een rekenles en van de rekendidactiek op de basisschool. U kunt dan zelf conclusies trekken over hoe u als VO-docent daar het beste op kunt voortbouwen.

Een fragment uit een rekenboek: leerkrachtgebonden les
In het basisonderwijs zijn er, net als in het voortgezet onderwijs, verschillende methoden op de markt. Een methode met ruim 10 % marktaandeel is *Rekenrijk*. In figuur 2 ziet u les 3 uit blok 4 van de nieuwste versie van *Rekenrijk*, pagina 86 en 87 van het leerlingenboek voor groep 8. De les gaat over delen door een breuk; het is een leerkrachtgebonden les, waarover later meer. Hieronder bespreken we een voor een de opmerkingen en vragen die door docenten gesteld werden toen ze deze en vergelijkbare bladzijden doorbladerden.

Waar is de uitleg, waar is de samenvatting?
Het eerste wat veel wiskundedocenten zich afvragen, is waar de leerlingen uitleg kunnen vinden, of een samenvatting van hoe je moet rekenen. Moet de leerling dat zelf verzinnen? Nee, dat hoeft de leerling niet op eigen houtje te doen. De realistische didactiek in *Rekenrijk* en andere methodes gaat ervan uit dat de leerlingen onder leiding van de leerkracht aan de slag gaan met opgaven en situaties, en al doende ontdekkingen doen en komen tot notaties, verkortingen en handige strategieën.

De leraar wordt daarbij ondersteund door de docentenhandleiding. Bij ieder leerlingenboek van *Rekenrijk* hoort een lerarenhandleiding – en ook bij andere methodes is dat het geval. Daarin vinden leraren tips voor de klassikale instructie, hoofdrekenopgaven, observatiepunten en reminders van belangrijke zaken. Leerkrachten op de basisschool maken hier veel gebruik van. Voor kinderen die de brugklas binnenkomen, is het dus nieuw dat ze zelf een uitleg of samenvatting in het boek moeten lezen.

Waarom zijn er zoveel manieren om opgaven te maken?
Het volgende wat opvalt, is dat er bij de opgaven verschillende suggesties staan om te gaan rekenen. Zo staan er bij opgave 1 een getallenlijn en een verhoudingstabel afgedrukt, en bij opgave 3 een maatbeker.

Om de gebruikte suggesties op waarde te schatten, is het goed om iets af te weten van de rekendidactiek op de basisschool. Een belangrijk principe binnen die rekendidactiek is het principe van modelleren en formaliseren.

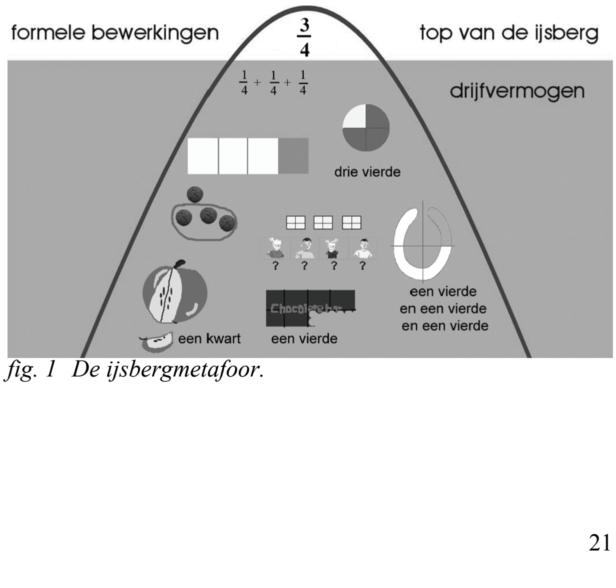


fig. 1 De ijsbergmetafoor.

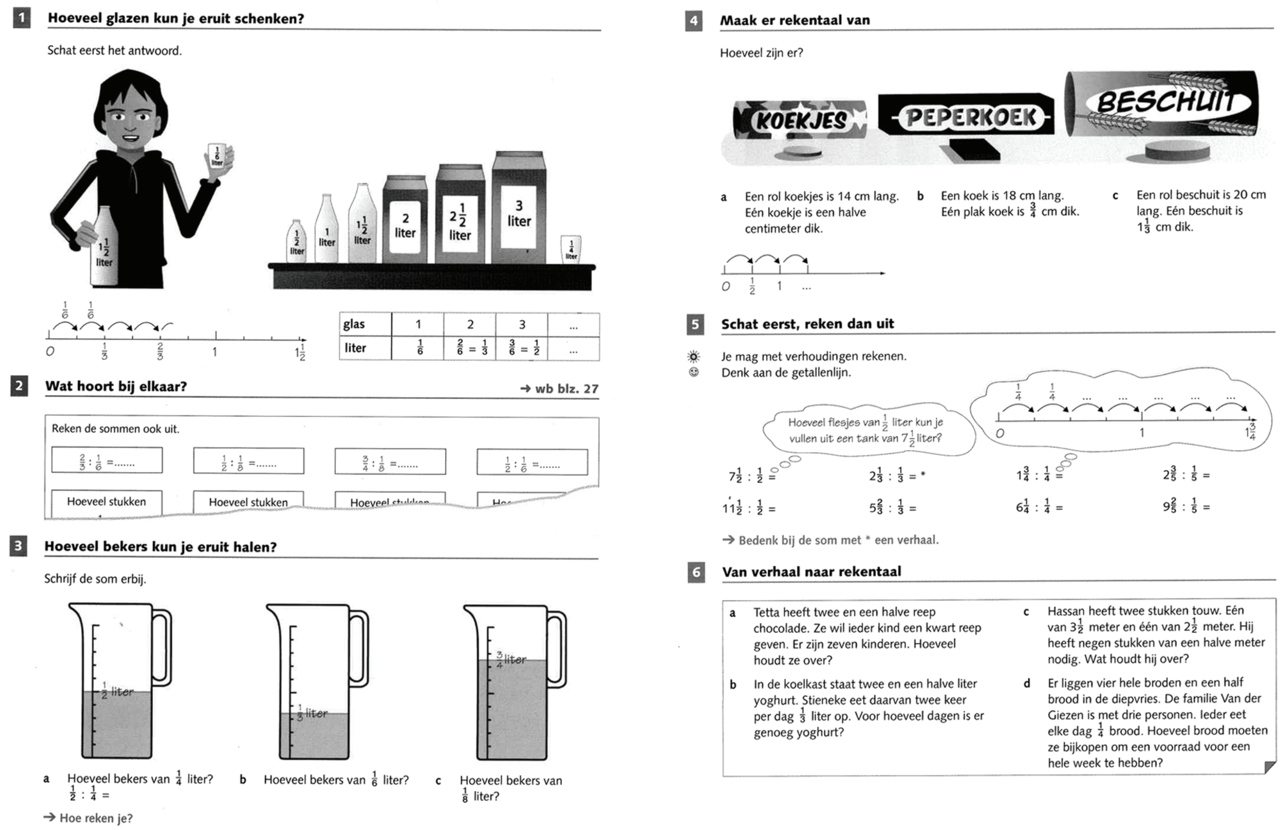


fig. 2 Les 3 uit blok 4 van Rekenrijk, pagina 86 en 87 van het leerlingboek voor groep 8.

Ter verheldering van dit principe hebben Boswinkel en Moerlands (2003) de metafoor van de ijsberg geïntroduceerd (figuur 1). Zij zien het formeel omgaan met getallen en bewerkingen – het maken van sommen met kale getallen – als het topje van de ijsberg. Voorafgaand aan dit rekenen op formeel niveau gebeurt er veel: de leerlingen doen informele kennis op over getallen en bewerkingen en ontdekken de structuur daarvan. Ze ontwikkelen inzicht, waardoor ze de formele bewerkingen begrijpen. Dit deel van het leerproces zit als het ware onder water, maar zorgt er wel voor dat de ijsberg blijft drijven. Pas als kinderen dit inzicht hebben, zo wordt aangenomen, kunnen regeltjes en standaardoplossingen beklijven.

Om kinderen op weg naar abstractie structuur te laten ontdekken in getallen en bewerkingen, worden modellen ingezet. De getallenlijn, de verhoudingstabel en de maatbeker (met een verticale getallenlijn) fungeren in de les die we hier bekijken als model. Ze zijn niet bedoeld als oplossingswijze, als maniertje, maar als hulpmiddel om inzicht te krijgen in de getallen en bewerkingen. Het idee dat het realistisch rekenen kinderen opzadelt met heel veel verschillende manieren, is dan ook enigszins een karikatuur. Het is eerder de bedoeling om de leerlingen op diverse momenten in hun leerproces te ondersteunen. Aangezien niet alle leerlingen op hetzelfde moment even formeel kunnen rekenen, zijn er verschillende modellen en rekenwijzen in beeld. Dat is ook goed te zien in de afgebeelde les van *Rekenrijk*. De auteurs schrijven in de handleiding dat de verhoudingstabel iets abstracter is dan de getallenlijn. Vandaar dat bij opgave 5 de snellere rekenaars door middel van het zonnetje (aanwijzing voor de gemiddelde en goede rekenaars) het advies krijgen met verhoudingen te rekenen.

Oefenen de kinderen wel genoeg?

Op het eerste gezicht lijkt het of er weinig sommen te maken zijn. Er zijn echter nogal wat sommen 'verdekt' opgesteld. Zo moeten de kinderen (aldus de handleiding) bij opgave 1 beredeneren hoe vaak $\frac{1}{6}$ liter past in $\frac{1}{3}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ en 3 liter, en hetzelfde rijtje voor $\frac{1}{4}$ liter, en dit met zowel de getallenlijn als de verhoudingstabel. In opgave 2 wordt verwezen naar het werkboek, waar ook oefeningen staan. Verder hebben veel rekenmethodes bijpassende software en rekenen veel kinderen minstens één keer per week nog extra op de computer.

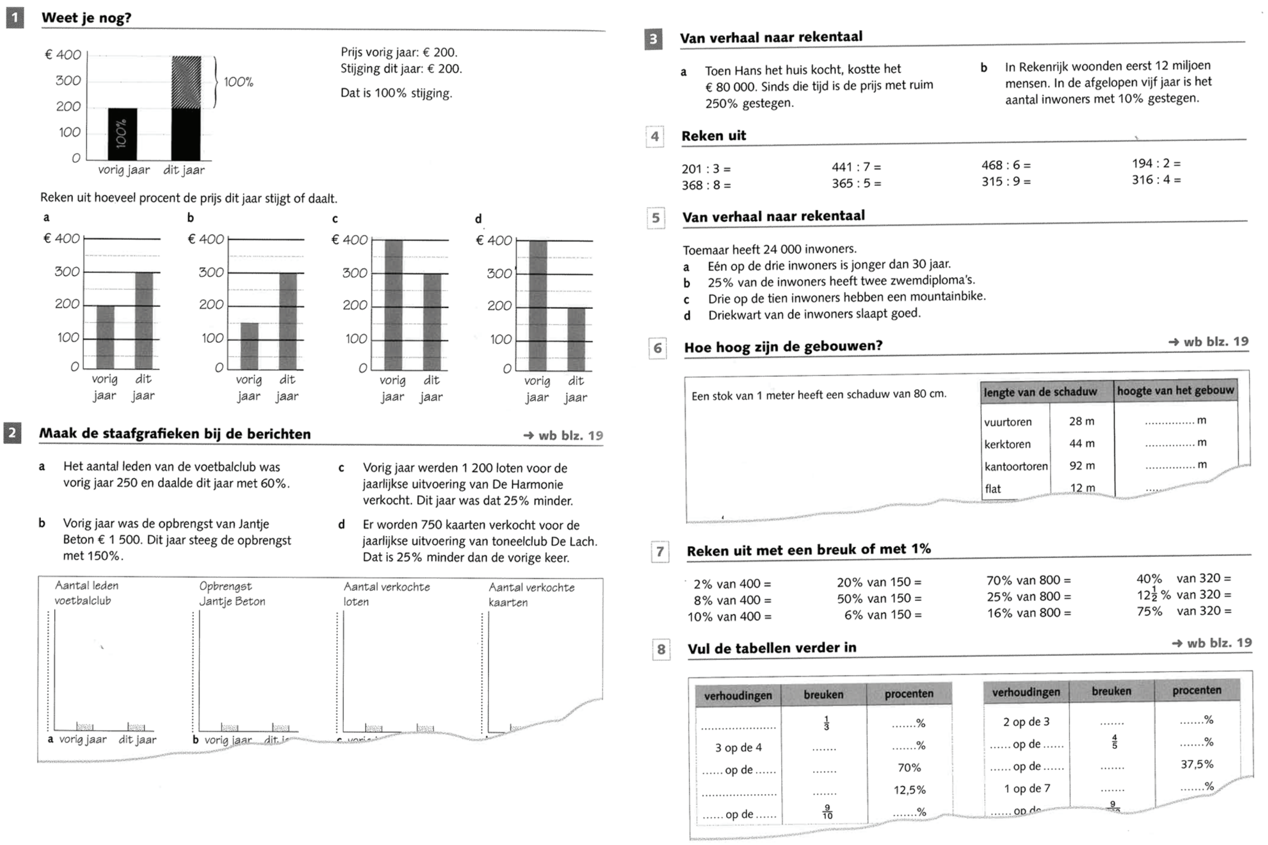
Niet alle kinderen maken evenveel opgaven. Op de basisschool wordt rekening gehouden met verschillen tussen leerlingen. *Rekenrijk* bijvoorbeeld beveelt de leerkracht aan om in een leerkrachtgebonden les als deze ongeveer 25 minuten uit te trekken voor klassikale interactie: een warming-up (gebaseerd op speelse oefeningen) en een groepsinstructie. Daarna gaat de grote groep aan het werk en geeft de leerkracht verlengde instructie aan de kinderen die dat nodig hebben. Deze krijgen extra uitleg, meestal op een wat concreter niveau in de ‘ijsberg’ en gaan daarna pas zelfstandig aan de slag. Voor hen zijn de aanwijzingen waar een smiley voor staat bedoeld. De leerlingen die juist heel snel klaar zijn, maken extra opgaven (zoals opgave 6; deze extra opgaven zijn te herkennen aan het ezelsoor) of gaan aan de slag met extra materiaal voor begaafde rekenaars.

De kinderen rekenen dus genoeg. Het is eerder de vraag of ze wel genoeg met wiskunde bezig zijn. In de kerndoelen is sprake van het schoolvak ‘rekenen-wiskunde’ en er zijn minstens twee kerndoelen die de nadruk leggen op probleemoplossen: ‘Leerlingen leren praktische en formele reken-wiskundige problemen op te lossen en oplossingen helder weer te geven’ en ‘Leerlingen leren aanpakken bij het oplossen van reken-wiskundeproblemen te onderhouden en leren oplossingen te beoordelen’ (SLO, z.j., p. 41). In de meeste methodes is er echter weinig aandacht voor probleemoplossen. Kolovou, Van den Heuvel-Panhuizen & Bakker (2009) hebben onderzoek gedaan naar aandacht voor probleemoplossen in groep 4 binnen de zes reken-wiskundemethoden die samen bijna het hele onderwijs bestrijken. Ze concluderen dat in al deze methodes er slechts zeer weinig opgaven zijn die kinderen echt uitdagen. Het grootste deel van de opgaven komt neer op routinewerk.

Al met al zijn nieuwe brugklasleerlingen dus niet zo gewend aan open problemen waar je eens goed voor moet gaan zitten. Wel verwachten ze dat ze veel moeten oefenen en zullen ze niet gek opkijken van differentiatie. Ze zullen het eerder wonderlijk vinden dat alle kinderen hetzelfde huiswerk krijgen.

Waarom is er zoveel aandacht voor schatten?

Het valt op dat er bij twee opgaven, nummer 1 en 5, tegen de kinderen gezegd wordt: schat eerst je antwoord. De bedoeling hiervan is dat ze achteraf hun antwoord kunnen controleren. Zo ondersteunt het schatten het precies rekenen. Het is, met andere woorden, een manier om je antwoord kritisch te beschouwen in de context van de vraag, iets wat in het VO van belang wordt gevonden. Daarnaast wordt schatten in het PO ook gestimuleerd omdat het een bijdrage levert aan de maatschappelijke zelfred-



1 Weet je nog?

Prijs vorig jaar: € 200.
Stijging dit jaar: € 200.

Dat is 100% stijging.

Reken uit hoeveel procent de prijs dit jaar stijgt of daalt.

2 Maak de staafgrafieken bij de berichten → wb blz. 19

a Het aantal leden van de voetbalclub was vorig jaar 250 en daalde dit jaar met 60%.

b Vorig jaar was de opbrengst van Jantje Beton € 1 500. Dit jaar steeg de opbrengst met 150%.

c Vorig jaar werden 1 200 loten voor de jaarlijkse uitvoering van De Harmonie verkocht. Dit jaar was dat 25% minder.

d Er worden 750 kaarten verkocht voor de jaarlijkse uitvoering van toneelclub De Lach. Dat is 25% minder dan de vorige keer.

3 Van verhaal naar rekentaal

a Toen Hans het huis kocht, kostte het € 80 000. Sinds die tijd is de prijs met ruim 250% gestegen.

b In Rekenrijk woonden eerst 12 miljoen mensen. In de afgelopen vijf jaar is het aantal inwoners met 10% gestegen.

4 Reken uit

201 : 3 =	441 : 7 =	468 : 6 =	194 : 2 =
368 : 8 =	365 : 5 =	315 : 9 =	316 : 4 =

5 Van verhaal naar rekentaal

Toemaar heeft 24 000 inwoners.
a Eén op de drie inwoners is jonger dan 30 jaar.
b 25% van de inwoners heeft twee zwemdiploma's.
c Drie op de tien inwoners hebben een mountainbike.
d Driekwart van de inwoners slaapt goed.

6 Hoe hoog zijn de gebouwen? → wb blz. 19

Een stok van 1 meter heeft een schaduw van 80 cm.

lengte van de schaduw		hoogte van het gebouw
vuurtoren	28 m	.... m
kerktoren	44 m	.... m
kantoortoren	92 m	.... m
flat	12 m	....

7 Reken uit met een breuk of met 1%

2% van 400 =	20% van 150 =	70% van 800 =	40% van 320 =
8% van 400 =	50% van 150 =	25% van 800 =	$12\frac{1}{2}$ % van 320 =
10% van 400 =	6% van 150 =	16% van 800 =	75% van 320 =

8 Vul de tabellen verder in → wb blz. 19

verhoudingen	breuken	procenten
....	$\frac{1}{3}$	.......%
3 op de 4	....	.......%
...... op de	....	70%
....	....	12,5%
...... op de	$\frac{9}{10}$	.......%

verhoudingen	breuken	procenten
2 op de 3	....	.......%
...... op de	$\frac{4}{5}$	.......%
...... op de	....	37,5%
1 op de 7	....	.......%
...... op de	$\frac{9}{}$	

fig. 3 Les 4 uit blok 3 van Rekenrijk, pagina 62 en 63 van het leerlingenboek voor groep 8.

zaamheid van leerlingen en het gevoel voor getallen en bewerkingen stimuleert. Waarschijnlijk dankzij de toegenomen aandacht voor schattend rekenen zijn de kinderen tussen 1987 en 2004 beter gaan schatten. Janssen, van der Schoot & Hemker (2005, p. 4) schrijven in hun verslag over de periodieke peiling van het rekenonderwijs aan het einde van de basisschool het volgende over schatten: 'Leerlingen kiezen in 2004 vaker een meer adequate strategie en het succespercentage op deze opgaven is dan ook sterk toegenomen.'

Een tweede fragment uit een rekenboek: zelfstandig-werken-les

De les die we hiervoor bespraken, was een zogenaamde leerkrachtgebonden les. *Rekenrijk* kent ook lessen waarin de kinderen na een korte instructie zelfstandig aan het werk gaan. Daar hebben we ook een voorbeeld van opgenomen (figuur 3). Ook hier gaan we in op de opmerkingen en vragen die door docenten gesteld werden bij het zien van deze en vergelijkbare lessen.

Leren de kinderen wel hun antwoord noteren?

De oplettende kijker ziet dat er in het leerlingenboek weinig aandacht is voor het noteren van de antwoorden. In het basisonderwijs is daar inderdaad relatief weinig aandacht voor. Leerkrachten zijn meer gericht op begrip en juiste antwoorden dan op correcte notaties. Zo is er weinig aandacht voor een correct gebruik van het is-gelijk-teken. Veel leerlingen gebruiken dit teken als aankondiging van een tussenantwoord in plaats van een equivalentieteken. Ze breien dan alles aan elkaar, bijvoorbeeld op de volgende manier: $5 \times 7 = 35 \times 2 = 70$. Het is wellicht te begrijpen dat leerkrachten met een klas vol kinderen van zeer uiteenlopende niveaus daar niet altijd aan toe komen. Bovendien is het equivalentiebegrip een heel abstract begrip, dat misschien meer op zijn plaats is in het VO.

Toch zou het wel goed zijn als leerkrachten op de basisschool hun leerlingen meer stimuleren het denk- en rekenwerk te noteren; ook binnen de didactiek van het realistisch rekenen wordt dit belangrijk gevonden. En in de kerndoelen staat: 'Leerlingen leren praktische en formele rekenwiskundige problemen op te lossen en oplossingen helder weer te geven' (SLO, z.j.).

Voor het VO betekent dit voorlopig dat het noteren van berekeningen voor de leerlingen nog geen vanzelfsprekende zaak is.

Waarom zijn de uitkomsten allemaal mooie getallen?

De gekozen getallen in de opgaven zorgen ervoor dat de opgaven 'mooi' uitkomen. (Een uitzondering hierop vormt opgave 6 van de als eerste besproken les, maar daar staat expliciet benoemd dat er 'wat over blijft'.) Hieruit blijkt dat in het basisonderwijs het accent ligt op hoofdrekenen. Hoofdrekenen wil zeggen: rekenen met het hoofd (niet per se helemaal uit het hoofd); als je wilt, kun je een tussenantwoord noteren, maar je hebt steeds goed in de gaten met welke orde van grootte je aan het rekenen bent. Naast dit accent op hoofdrekenen, wordt er ook nog gecijferd. Hoewel er minder tijd wordt besteed aan schriftelijke procedures zoals het cijferen dan zo'n dertig jaar geleden, worden ze nog steeds aangeleerd.

Een tweede reden om getallen te kiezen die voor mooie uitkomsten zorgen, is dat de kinderen zich op deze manier gemakkelijker een voorstelling kunnen maken van de situatie.

Vanaf de brugklas zullen leerlingen moeten wennen aan het feit dat opgaven niet altijd mooi uitkomen, zeker bij vakken als aardrijkskunde, economie, natuur- en scheikunde. In het begin zullen ze dan misschien denken dat hun oplossing fout is omdat deze niet op een rond getal uitkomt. Dit is iets om rekening mee te houden in het VO.

Van context naar bewerking

Leerlingen in het VO weten vaak niet hoe ze in complexe contexten kunnen beginnen aan een opgave. Dit is ook in het PO een probleem. *Rekenrijk* probeert hier wat aan te doen door leerlingen te laten oefenen met het destilleren van een opgave uit een plaatje of een korte tekst. Opgave 3 en 5 in figuur 2 zijn hier een voorbeeld van. Zulke opgaven heten in *Rekenrijk* 'Van verhaal naar rekentaal'. Een leerkracht die werkt volgens de realistische rekendidactiek stimuleert het besef dat er bij elk verhaaltje verschillende sommen te formuleren zijn. Het is goed als kinderen vaststellen dat bijvoorbeeld bij opgave 5b het antwoord kan zijn $25\,\%$ van 24000, $24000 : 4$ en ook $\frac{1}{4} \times 24000$.

Ook in het *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie* (Van Groenestijn, Borghouts & Janssen, 2011) wordt dit horizontaal mathematiseren nadrukkelijk genoemd. Het protocol stelt als doel dat leerlingen leren hoe ze van context naar bewerking moeten komen en uiteindelijk de oplossing weer koppelen aan de context om te controleren of het antwoord wel mogelijk is. Verder is er een nieuwe, aanvullende methode in de maak, *Real Life Rekenen* (Bruin-Muurling & Verschoor, 2012) voor de bovenbouw van de basisschool die leerlingen hiermee laat oefenen in complexere situaties. Wellicht is deze methode ook geschikt voor gebruik in de onderbouw van het VO. In ieder geval is duidelijk dat het horizontaal mathematiseren binnen rekenen en wiskunde zowel voor het PO als het VO een aandachtspunt is.

Handig of niet handig?

Bij opgave 7 staan twee suggesties: reken uit met een breuk of met 1%. Op de basisschool leren kinderen om te kiezen welke van de twee handig is. In het VO wordt vaak standaard gegrepen naar 'rekenen via 1%' maar voor opgaven als 20% van 150 is dat natuurlijk nogal omslachtig. Je kunt sneller een vijfde deel van 150 nemen of even een verhoudingstabel gebruiken:

100%	10%	20%
150	15	30

Bij de opgave 16% van 800 is het rekenen via 1% efficiënt, je hoeft dan alleen 16×8 uit te rekenen. Een gemengde benadering met een verhoudingstabel kan ook:

100%	10%	1%	6%	10% + 6% = 16%
800	80	8	48	80 + 48 = 128

De meeste kinderen hebben op de basisschool op een dergelijke manier met de verhoudingstabel leren werken. De stap naar geformaliseerd rekenen met procenten moeten veel kinderen nog zetten. Voor hen is nieuw in de brugklas dat 16% van 800 gelijk staat aan $0{,}16 \times 800$.

Ze doen al best veel

Diverse leraren merkten op bij het doorbladeren van de rekenmethodes dat er meer gebeurt op de basisschool dan ze gedacht hadden, en dat het aanbod best groot is. Zo hadden zij niet verwacht dat ook staafgrafieken (opgave 1 en 2), verhoudingen (opgave 6), spiegelen (niet op deze pagina's) of uitslagen van figuren (niet op deze pagina's) aan de orde komen. Het aanbod verschilt ook per methode en per leerkracht. Veel leraren die in de brugklas lesgeven, weten dat er grote verschillen zijn tussen wat leerlingen op diverse basisscholen geleerd hebben.

Tot slot

De door Meijerink et al. (2009) geformuleerde referentieniveaus 1F en 1S zullen voor enige stroomlijning van PO naar VO zorgen. Maar wat waarschijnlijk zal blijven, is dat leerlingen in groep 8 niet allemaal hetzelfde abstractieniveau bereiken, omdat de rekendidactiek probeert aan te sluiten bij de ontwikkeling van de kinderen. Dat geldt zeker voor het leerstofonderdeel breuken.

Niet alle leerlingen bereiken in groep 8 – als het gaat om 'vermenigvuldigen met een breuk' en 'delen door een breuk' – het formele niveau. De snellere leerlingen worden wel gestimuleerd om op een steeds formeler niveau te gaan rekenen, bijvoorbeeld door alleen te denken aan een getallenlijn of verhoudingstabel. Maar voor veel kinderen geldt dat het proces eindigt bij het daadwerkelijk gebruik van de getallenlijn of verhoudingstabel.

Tijdens de werkgroep op de Nationale Wiskundedagen dachten veel wiskundedocenten echter dat alle kinderen aan het eind van de basisschool op formeel niveau kunnen rekenen met breuken. Daar richten de docenten ook hun onderwijs op in. Bruin-Muurling (2010) beschrijft in haar proefschrift dat op dit gebied duidelijk een kloof bestaat tussen wat er op de basisschool wordt bereikt en waar het voortgezet onderwijs vertrekt. Als een wiskundeleraar bij een opgave als $2\frac{1}{3}:\frac{1}{3}$ zegt: 'Gewoon vermenigvuldigen met het omgekeerde', is het dus geen wonder dat de kinderen zeggen: 'Dat hebben we nooit gehad!' Met dit artikel hopen we een bijdrage te leveren aan het verkleinen van die kloof.

Wie meer gedetailleerde informatie over de leerlijnen rekenen zoekt, kan terecht bij de website Rekenlijn.nl (Freudenthal Instituut, SLO en KPC-groep, 2010). Die geeft een overzicht van alle rekenleerlijnen voor leerlingen van vier tot veertien en besteedt ook aandacht aan de verschillende niveaus van abstractie. Daarnaast zijn uiteraard de brugklasleerlingen zelf een belangrijke bron van informatie.

Caroliene van Waveren Hogervorst,
Joke Daemen,
COLUU, Universiteit Utrecht

Caroliene van Waveren Hogervorst en Joke Daemen zijn beide eerstegraadslerarenopleider bij het Centrum voor Onderwijs en Leren van de Universiteit Utrecht. Dit artikel is tot stand gekomen in het kader van het Expertisecentrum Lerarenopleiding Wiskunde en Rekenen (www.elwier.nl), een door het Ministerie van OCW gesubsidieerd project waarin verschillende lerarenopleidingen samenwerken.

Literatuur

Bokhove, J., Borghouts, C., Buter, A., Kuipers, K., Veltman, A., & Bazen, K. (2011). *Rekenrijk: Reken-wiskundemethode voor het basisonderwijs*. Leerlingenboek 8a. Derde editie. Groningen: Noordhoff.

Boswinkel, N., & Moerlands, F. (2003). Het topje van de ijsberg. In *De Nationale Rekendagen 2002, een praktische terugblik.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Bruin-Muurling, G. (2010). *The development of proficiency in the fraction domain – affordances and constraints in the curriculum* (proefschrift). Eindhoven: TUE.

Bruin-Muurling, G., & Verschoor, M. (2012). *Real life rekenen*. Tilburg: Zwijsen.

Freudenthal Instituut, SLO & KPC-groep (2010). *Rekenlijn – stroomlijning en visualisering leerlijnen rekenen 4–14 jaar*. Gevonden op 15 maart 2012 op http://www.fi.uu.nl/rekenlijn/

Groenestijn, M. van, Borghouts, C., & Janssen, C. (2011). *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie*. Assen: Van Gorcum.

Janssen, J., Schoot, F. van der, & Hemker, B. (2005). *Balans [32] van het rekenwiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4. PPON-reeks nr. 32: uitkomsten van de vierde peiling in 2004.* Arnhem: Cito Instituut voor toetsontwikkeling. Gevonden op 5 maart 2012 op: http://www.cito.nl/nl/onderzoek%20en%20wetenschap/onderzoek/ppon/ppon_balansen.aspx

Kolovou, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Bakker, A. (2009). Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks: A needle in a haystack. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*(2), 29-66.

Meijerink, H. P. et al. (2009). *Referentiekader taal en rekenen. De referentieniveaus.* Enschede: OCW/SLO.

SLO (z.j.) *Kerndoelenboekje*. Gevonden op 5 maart 2012 op http://www.slo.nl/primair/kerndoelen/Kerndoelenboekje.pdf/
