

In elke aflevering van de rubriek *Wat bedoelen ze toch met...* staat een spraakmakend begrip uit de wiskundendidactiek of de onderwijskunde centraal, waarover veel is geschreven, maar waarvan toepassing in de wiskundeles niet altijd meteen duidelijk is. Wat wordt met het wetenschappelijk jargon bedoeld en hoe vertaalt zich dit naar de onderwijspraktijk? In de tweede aflevering schrijft **Paul Drijvers** over denkactiviteiten.

Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten?

Rubriek

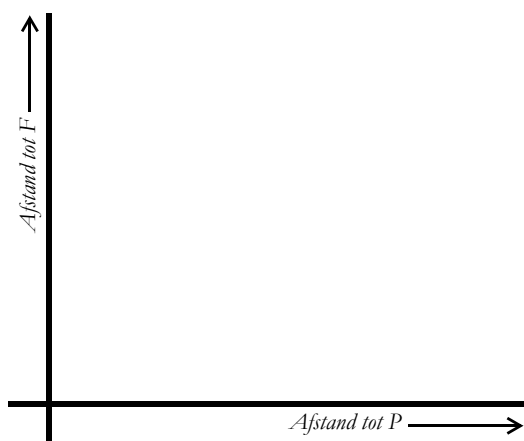
Voorbeeld

Met twee collega's zou ik onlangs een internationale conferentie over Geogebra bezoeken in Hagenberg, Oostenrijk. We gaan met de auto. De routeplanner geeft aan dat de totale afstand vanuit vertrekpunt Nijmegen ongeveer 900 km is, overwegend over een doorgaande snelweg. Na zo'n 350 km passeren we Frankfurt en bij Passau, de laatste stad voor de Oostenrijkse grens, schiet het al aardig op en beginnen we aan de laatste 100 kilometer. Schematisch ziet de route er dus zo uit:



Onderweg hebben we tijd genoeg om over de volgende opgave te denken, die ik hier ook aan u voorleg:

Teken in het assenstelsel hieronder een grafiek waarin de afstand van de auto tot Frankfurt is uitgezet tegen de afstand van de auto tot Passau.



Is het gelukt om de bovenstaande opgave op te lossen? U kunt uw antwoord vergelijken met het mijne, dat te vinden is op de website van de *Nieuwe Wiskrant*, www.fi.uu.nl/wiskrant.

Maar nu de volgende vraag: is dit een opgave die uitnodigt tot wiskundige denkactiviteit? Zo nee, waarom

niet? Omdat u zoiets al vaker heeft gezien? Zo ja, waarom wel? En wat voor denkactiviteiten spelen daarbij dan een rol? Kunt u voor uzelf uw oplossingsproces reconstrueren? Welke manieren van denken, welke aanpak, welke ideeën bleken vruchtbaar?

Wat zijn denkactiviteiten?

De laatste tijd wordt veel gesproken over wiskundige denkactiviteiten, soms afgekort tot WDA. Maar wat zijn dit eigenlijk, waarom staan ze nu zo prominent op de agenda en hoe geef je denkactiviteiten handen en voeten in de onderwijspraktijk?

In het visiedocument *Rijk aan betekenis* beschrijft de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs cTWO, die de examenprogramma's 2015 voor HAVO en VWO ontwikkelt, een aantal kernconcepten en denkactiviteiten (zie figuur 1).

Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.

fig. 1 Standpunt uit het visiedocument van cTWO (2007, p. 21).

cTWO onderscheidt een zestal denkactiviteiten die kernconcepten met elkaar en met contexten verbinden:

- *Modelleren en algebraïseren*
Dit betreft het vertalen van een probleem in wiskundige termen, bijvoorbeeld door het opstellen van formules en vergelijkingen.
- *Ordenen en structureren*
Dit behelst het ordenen van de probleemsituatie en aanbrengen van structuur, bijvoorbeeld door

objecten op kenmerken te classificeren.

- *Analytisch denken en probleemoplossen*

Dit heeft betrekking op het kiezen van een probleemaanpak, de vaardigheid om wiskundige problemen te formuleren, te representeren en oplossingsstrategieën te vinden.

- *Formules manipuleren*

Hier gaat het zowel om handmatige vaardigheden in het herleiden van formules, als om inzicht in de structuur van de formule en in het te volgen oplossingsproces als geheel.

- *Abstraheren*

Bij abstractie gaat het erom dat de wereld van wiskundige objecten voor leerlingen in toenemende mate concreet wordt.

- *Logisch redeneren en bewijzen*

Dit betreft het vermogen om heldere redeneringen en bewijzen op te zetten en deze zorgvuldig te formuleren.

De denkactiviteiten van deze opsomming, die niet de pretentie heeft compleet te zijn, zijn vaak met elkaar verweven. Zo kan bij modelleren bijvoorbeeld een vorm van abstractie en structurering plaatsvinden en doet het oplossen van een ongebruikelijk algebra-vraagstuk een beroep op zowel probleemoplossend vermogen als op vaardigheden in formulemanipulatie. Met deze inventarisatie heeft cTWO denkactiviteiten nadrukkelijk op de agenda gezet als een van de vernieuwende aspecten van de curriculumvernieuwing 2015 voor HAVO en VWO. Hoe is dat zo gekomen? Het belangrijkste kenmerk van de nieuwe 2015-programma's is naar mijn idee de nadruk op de beheersing van algebraïsche (basis)vaardigheden. Dit punt heeft in de discussies binnen en buiten cTWO steeds centraal gestaan. Maar tegelijkertijd is naar voren gebracht dat wiskunde meer is dan algebraïsche vaardigheid en dat de doelen van het wiskundeonderwijs dan ook verder reiken. Om ook deze laatste stem recht te doen en daarmee de onderwijsvernieuwing in balans te brengen, is het idee gegroeid om denkactiviteiten sterker onder de aandacht te brengen.

Denken over denkactiviteiten

Literatuur over denkactiviteiten

Het denken over denkactiviteiten is niet nieuw. Ook in het verleden is de vormende waarde voor het denken als een van de belangrijkste redenen beschouwd om wiskunde te onderwijzen (De Moor, 1999). Al in 1956 schreven Bloom en anderen over *higher order thinking skills* als onderwijsdoelen. Hieronder valt bijvoorbeeld het analyseren van relaties, het combineren van elementen in nieuwe patronen en het opstellen van

abstracte regels. Nog eerder richtte Polya (1945) zich op heuristieken voor wiskunde, op manieren van denken waarop je problemen kunt oplossen en op de vraag hoe je dit kunt leren en onderwijzen. Recenter beschreef Schoenfeld (1992) hoe wiskundigen als ze een probleem oplossen hun tijd verdelen tussen lezen, analyseren, exploreren, plannen, uitvoeren en verifiëren. In eigen land onderscheidt Van Streun (2001) in zijn oratie *Het denken bevorderen* de volgende doelen van wiskundeonderwijs:

- Weten dat: kennis van feiten en begrippen, reproduceren;
- Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden;
- Weten waarom: principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht;
- Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak.

In het tweede en derde punt, 'weten hoe' en 'weten waarom', zien we de wiskundige denkactiviteiten terug.

Denken en doen

De discussie over denkactiviteiten raakt aan de vraag naar de doelen van het wiskundeonderwijs en aan het karakter van wiskunde zelf. Aan de ene kant is de kracht van wiskunde dat een aantal problemen generiek is opgelost, dat je zeker weet dat die oplossingsmethode werkt en dat je daarvan profiteert door die in voorkomende gevallen routinematig te gebruiken. Als je dit doet, bijvoorbeeld als ingenieur in een toepassingssituatie of als leerling die de *abc*-formule gebruikt, dan bewijst de wiskunde haar diensten en hoeft je zelf niet hard meer te denken. Vanuit deze optiek moet wiskundeonderwijs gericht zijn op de beheersing van deze standaardmethoden. Wiskunde voor doeners.

Aan de andere kant is blind toepassen van algoritmen niet zonder risico. Je zult toch ook moeten weten wat je moet doen als de situatie iets van de standaardsetting afwijkt of als je een onverwacht resultaat vindt. Bovendien, hoe zijn die standaardalgoritmen ooit ontdekt? Toch door mensen die bereid waren de ongebaande paden van het denken te betreden? En is het nut van wiskundeonderwijs voor velen, die in hun verdere leven wiskundige toepassingen niet nodig zullen hebben, niet vooral gelegen in het 'leren denken'? Wiskunde voor denkers dan maar?

Hoewel je niet van een strikte scheiding kunt spreken omdat denken en doen ook hand in hand gaan, kan er een spanning bestaan tussen enerzijds wiskunde als toepassingsgericht gereedschap, dat leerlingen moeten leren kennen en kunnen reproduceren, en anderzijds wiskunde als 'denksport' die vraagt om denkactiviteit

en inventiviteit, om productie. De huidige nadruk op denkactiviteiten is in mijn ogen een manier om deze tweedeling in balans te brengen.

Denkactiviteiten zijn relatief

Net als alles zijn ook denkactiviteiten relatief. Daarmee bedoel ik dat je eigenlijk niet kunt spreken van een 'denkactieve opgave', omdat dit moet worden gerelateerd aan de kennis van de leerling die eraan werkt. Een opgave die nieuw is voor een leerling of een originele combinatie van stappen vraagt en daarmee denkactief is, kan vervolgens worden geoefend en daarmee veranderen in een routineopgave. Of een opgave beroep doet op denkactiviteiten hangt af van de voorkennis van de leerling, die zelf weer afhangt van het moment van aanbieden, het curriculum en de praktijk in de schoolboeken. Daarnaast moet het niveau van een denkactieve opgave natuurlijk aangepast zijn aan het niveau en talent van de leerling.

Terug naar het voorbeeld

Hoe kijken we nu vanuit deze omschrijvingen van denkactiviteiten terug op het inleidende voorbeeld van de autorit naar Hagenberg?

Als ik ervan uitga dat u een dergelijke opgave nog niet eerder heeft gezien, dan doet dit probleem wel een beroep op uw denkactiviteiten. De belangrijkste lijkt me het analyseren en probleemoplossen: dit is een nieuwe situatie en een manier om het probleem aan te pakken moet worden bedacht. De labels bij de assen zijn afwijkend van wat gangbaar is. Heuristieken, bijvoorbeeld het onderzoek van randgevallen zoals het vertrek uit Nijmegen en de aankomst in Hagenberg, komen hierbij van pas. De informatie moet goed worden gestructureerd en geordend. Voor een deel is dit al gebeurd door de schematische weergave van de route en het lege assenstelsel te geven. Dit is een didactische keuze van de ontwerper van de opgave: zonder schema en assenstelsel zouden modelleren en structureren belangrijker zijn. Overigens zijn routeschema en assenstelsel zelf ook al abstracties; een zekere abstractiestap is dus ook aan de orde. Algebraïseren speelt alleen een rol als u ervoor kiest om in termen van formules te gaan werken, bijvoorbeeld in de vorm 'tussen F en P geldt afstand P + afstand $F = 450$ '. Bij het tekenen van de grafiek moet ook geredeneerd worden.

Afhankelijk van de formulering van de opgave en van het niveau en de ervaring van degene die de opgave maakt, is dus een samenspel van denkactiviteiten aan de orde.

Hoe verder met denkactiviteiten?

Hoe krijgt deze discussie over denkactiviteiten nu een vervolg in de richting van de praktijk? Hoe vind je geschikte voorbeeldopgaven? Hoe komen denkactivi-

teiten in de nieuwe schoolboeken? Hoe krijgen ze een plaats in het centraal examen? En hoe kun je in de de klas aandacht besteden aan het ontwikkelen van denkactiviteiten?

Geschikte opgaven

Door cTWO is een tweetal werkgroepen ingesteld, één die zich richt op denkactiviteiten in de Tweede Fase en één die zich bezighoudt met het bereiken van de tussendoelen onderbouw van HAVO en VWO, waarvan denkactiviteiten ook deel uitmaken. De resultaten van de Tweede Fase-groep zijn te vinden op de website van cTWO (www.ctwo.nl, tabblad WDA). De resultaten van de onderbouwgroep zijn nog niet beschikbaar, maar figuur 2 geeft een voorbeeld.

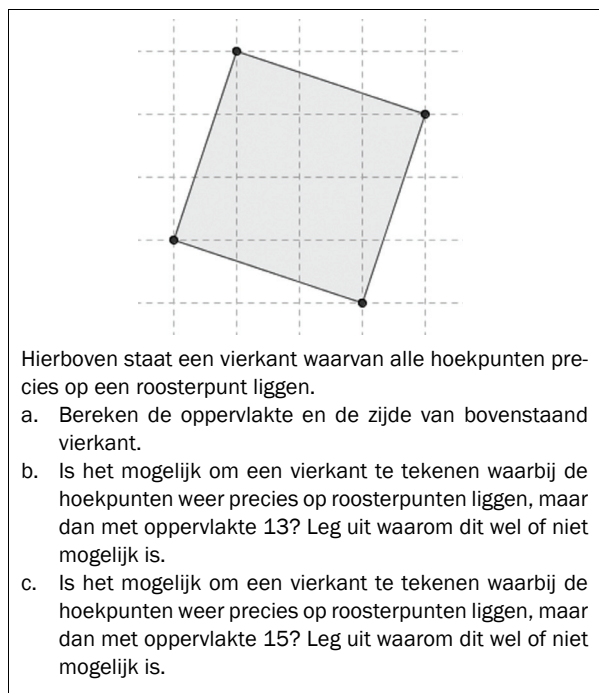


fig. 2 Vierkant op roosterpunten.

Onderdelen b en c van deze opgave zijn denkactief, in de zin dat ze ongebruikelijk zijn en dat met name onderdeel c een redenering vereist. Hoe kun je zeker weten dat 15 niet de som is van twee kwadraten? Opgaven als deze kunnen de docent helpen om aandacht aan denkactiviteiten te besteden

Denkactiviteiten op het centraal examen

Onlangs is een set voorbeeldexamenopgaven verschenen voor de pilotscholen die het 2015-programma wiskunde B VWO uittesten (zie http://www.cve.nl/item/wiskunde_havo_vwo_pilot). Deze voorbeeldopgaven gaan vergezeld van een 'kruisjeslijst' waarin wordt aangegeven welke denkactiviteit bij de betreffende vraag aan de orde zou kunnen zijn. In de toelichting beschrijven de examenmakers hoe ze die lijst hebben ingevuld. Er staat bijvoorbeeld:

Analyseren-Probleemoplossen is aangekruist als er sprake is van een probleemaanpak die meerstaps is, of op een andere manier niet direct standaard.

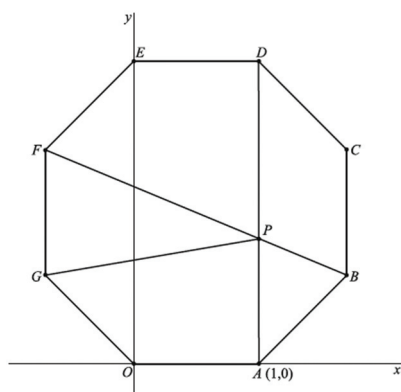


fig. 3 Voorbeeldexamenopgave VWO wiskunde B.

In figuur 3 staat een opgave uit deze collectie over een regelmatige achthoek. De vraag is om de lengte van GP exact te berekenen. Omdat dit een niet-standaard meerstapsprobleem is, is in de kruisjeslijst bij deze opgave Analyseren-Probleemoplossen aangekruist, waarmee meteen is aangegeven dat denkactiviteiten niet altijd een beroep doen op spectaculaire wonderen van de kant van de leerling, maar dat het ook om kleinere denkactiviteiten kan gaan.

Vanzelfsprekend geeft zo'n kruisjeslijst slechts een globale en beperkte karakterisering van de opgaven. Het signaal is echter duidelijk: op het toekomstige CE zullen, misschien meer dan nu het geval is, opgaven voorkomen die een beroep doen op denkactiviteiten en die verder gaan dan het toepassen van standaardalgoritmen 'op de automatische piloot'.

Denkactiviteiten in de klas

Als we het erover eens zijn dat het wiskundeonderwijs ook gericht moet zijn op denkactiviteiten, hoe besteed je daar dan aandacht aan in de les? Kant-en-klare antwoorden op deze vraag zijn er nog niet, maar wel wat aanknopingspunten. Ten eerste is het van belang dat in de les ook opgaven aan de orde komen die zich hiervoor lenen, die uitnodigen tot wiskundig denken. Dus niet alleen reproductie, of het probleem in deelstapjes opdelen zodat er niet gedacht hoeft te worden! Bronnen zoals cTWO kunnen daarbij van pas komen, maar het is natuurlijk ook de bedoeling dat dergelijke opgaven in de reguliere schoolmethoden aan bod komen. Ten tweede kun je als docent ook bestaande opgaven denkactiever maken door te vragen naar het waarom van een methode, of door leerlingen uit te dagen, bijvoorbeeld om zelf dergelijke opgaven te maken. Schoenfeld (1992) raadt bijvoorbeeld aan om de volgende vragen aan leerlingen te stellen tijdens of na het werken aan een opgave:

- Wat ben je precies aan het doen, kun je dat beschrijven?

- Waarom doe je dat, hoe past dit in het oplossingsplan?
- Hoe helpt het je, wat zal het resultaat je opleveren als je dat hebt?

Deze tips betreffen zowel individuele als klassikale werkvormen. In een klassengesprek kan het zinvol zijn leerlingen te vragen hoe ze over het probleem nagedacht hebben en welke lessen voor het aanpakken van zulke problemen we daaruit kunnen trekken door te proberen de denkactiviteiten te benoemen. Ten derde kan het helpen om in de klas voor te doen hoe je als wiskundeleraar zelf hardop over een probleem nadent voor je daadwerkelijk iets begint te doen, met alle overwegingen, associaties en ervaringen die je daarbij gebruikt. Daarbij is het goed om ook 'zijwegen' te vermelden die je niet inslaat, en waarom. Op die manier laat je zien hoe een expert te werk gaat die met een dergelijk probleem wordt geconfronteerd.

Conclusie

We vatten de conclusies van dit artikel als volgt samen. Ondanks het feit dat wiskundige denkactiviteiten niet nieuw zijn, is het denken hierover van belang, omdat ze betrekking hebben op onderwijsdoelen die verder gaan dan basisvaardigheden. De zes denkactiviteiten die cTWO heeft benoemd, vormen daarbij een geschikt uitgangspunt. Voor het werken in de klas en het voorbereiden op het examen is het zinvol om denkactieve opgaven te zoeken en het denken van leerlingen te stimuleren door het stellen van goede uitdagende vragen die zich richten op het 'weten hoe' en het 'weten waarom'.

Paul Drijvers,
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Referenties

- Bloom, B.S. (Ed.) (1956). *Taxonomy of Educational Objectives, the classification of educational goals – Handbook I: Cognitive Domain*. New York: McKay.
- cTWO (2007). *Rijk aan betekenis*. Utrecht: cTWO. <http://www.fi.uu.nl/ctwo/>.
- Moor, E. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Dissertatie. Utrecht: CDB press.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan. Ook beschikbaar via http://gse.berkeley.edu/facultyahschoenfeldSchoenfeld_MathThinking.pdf.
- Streun, A. van (2001). *Het denken bevorderen*. Oratie. Groningen: RuG. Ook beschikbaar via <http://irs.ub.rug.nl/ppn/235192082>.



De *Nieuwe Wiskrant* is het tijdschrift van het Freudenthal Instituut dat u op de hoogte houdt van de nieuwste ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, van vmbo tot hbo, van theorie tot praktijk.

U kunt zich abonneren via onderstaande bon of per email op het adres: wiskrant@fi.uu.nl. Bent u al abonnee, dan kent u vast wel iemand in uw werkkring die de Wiskrant nog niet kent.

✂. —————

Naam:

Adres:

Postcode:..... Woonplaats:.....

Type abonnement (1 jaargang is 4 nummers):

- gewoon € 30
- studentenabonnement € 20; kopie studentenkaart meesturen
(vraag als student eerst na bij je docent of je in aanmerking komt voor een gratis jaarabonnement)

Stuur deze strook (zonder postzegel) naar:

Freudenthal Instituut

t.a.v. Wil Hofman

Antwoordnummer 9672

3500 ZG Utrecht