Universiteit Utrecht

Junior College Utrecht

Numb3rs 409: graphic

Keuzeopdracht voor wiskunde

Een verrijkende opdracht over gebroken dimensies, de Cantor-verzameling, Hausdorff-dimensie
Voorkennis: rekenen met machten en logaritmen

Inleiding

In deze opdracht, die is gebaseerd op een aflevering van de tv-serie *Numb3rs*, verken je iets bijzonders: gebroken dimensies en fractals. Het gaat over objecten die niet lijnvormig zijn zoals een lijntje of een cirkelboog (1 dimensionaal) of vlak zoals een rechthoek of stukje boloppervlak (2 dimensies). Ze hebben een dimensie die daar tussen in ligt. Internet biedt veel plaatjes, maar in deze opdracht ga je zelf gebroken dimensies berekenen.

Tot slot maak je in een presentatie of poster medeleerlingen die nog niets weten van 'gebroken dimensies' kennen, nieuwsgierig naar dat verschijnsel met figuren en verklaringen.

NUMB3RS 409: GRAPHIC

Seth and Charlie walk.
Seth's studying a blown-up high resolution copy of a small portion of the Ultraworld cover.

SETH
I've spent my life with comic book art, especially Ross Moore's. I can't tell if this is real.

CHARLIE
Because you look at the style, the form, the drawing techniques.

SETH
Silly me. What do you do?

CHARLIE
Fractal Number Estimate. It's based on Mandlebrot's use of fractal dimension to measure the jaggedness of a coastline. It's been used to detect forged handwriting, but we're applying it because hand-drawn art can be evaluated with the same process.

In deze aflevering gebruikt Charlie "*dimensie*" om valse striptekeningen op te sporen.

Jullie kennen dimensie in de betekenis van: een lijn heeft een dimensie 1, een (oppervlak)vlak heeft dimensie 2, en ruimte(volume) heeft dimensie 3.

Charlie gebruikt een nieuw soort dimensie, waarbij ook dimensies mogelijk zijn tussen 1 en 2 in, of tussen 2 en 3 etc.
Met andere woorden breuken als dimensie zijn ook mogelijk.

Hij betoogt dat het bij vervalsingen langer duurt om ze te tekenen, en daardoor de inkt meer uitsijpelt en dat geeft een verhoging van de *"wrinkliness"*. En die kan worden gemeten, door zo'n dimensie: *de fractale dimensie*.

Felix Hausdorff (1868-1942),

was een duitse (joodse) wiskundige en wordt gezien als een pionier op het gebied van de topologie. Hij heeft het begrip dimensie generaliseert. In een geometrische figuur, kunnen we praten over de afstand tussen twee punten. Hausdorff beschreef een klasse van ruimten waarin afstand wordt vervangen door een vager concept van ***"nabijheid".***

In deze opdracht gaan we die fractale dimensie eens beter bekijken. Er zijn vele manieren om zo'n fractale dimensie van een object te bekijken. In deze opdracht richten we ons de ***Hausdorff*** dimensie.

De eigenschappen van een nieuwe definitie van dimensie

We gaan de "oude" definitie proberen uit te breiden.
Natuurlijk moeten belangrijke eigenschappen van dat oude begrip dimensie behouden blijven, in onze nieuwe *d-dimensionale* ruimte.

1. Een belangrijke eigenschap van lengte, oppervlakte en volume is dat het *additief* is. Dat wil zeggen dat we kunnen het optellen Als we een figuur opdelen in afzonderlijke stukken, dan is de lengte, oppervlakte, of het volume van het gehele figuurgelijk aan de som van de afzonderlijke stukken. Dus ook in onze nieuwe *d-dimensionale* ruimte moet

dit gelden.

2. Als we de zijden van een rechthoek met *r* vermenigvuldigen, dan wordt de oppervlakte r^2 *(= r * r)* maal zo groot . Als we de zijden van een balk met *r* vermenigvuldigen, dan wordt de inhoud r^3 *(= r * r * r)* maal zo groot. Daaraan komt dus het begrip dimensie nog eens terug, namelijk 2 en 3.
   In de nieuwe d-*dimensionale* ruimte moet dus ook gelden, als we de lengte *r* maal gaan opschalen, dat de *d-dimensionale grootte* r^d maal zo groot wordt.

Hausdorff heeft bewezen dat dat op een consistente manier kan.

Hoe kiest Goudlokje haar pap?
Er is een sprookje (zoek het op !) over een meisje Goudlokje die een stoeltje, een bedje en ook pap moet kiezen. Ze doet dat steeds op dezelfde manier. De kleinste is te klein, de grootste is te groot, en dus de middelste precies goed. De eerste pap is te koud, te laatste is te heet, daar tussen in precies goed! Etc.
Zo gaan wij ook dimensie bepalen.

Voorbeeld: Als we een rechthoek met een 3-dimensionaal object (volume) proberen te meten, dan lukt dat niet. Het is te klein (0 x volume), omdat de rechthoek geen dikte heeft. Aan de andere kant, als we de rechthoek proberen te meten met allemaal lijntjes (lijnstukjes) van dimensie 1 lukt dat ook niet. Het is te groot (oneindig). Maar … als we het gaan proberen met iets van dimensie 2, dan lukt het precies!.
Wiskundig geformuleerd: Voor fractale objecten er een getal *d* (*d* ≥ 0) zodat de *d-dimensionale* dimensie positief is, maar niet oneindig.
Voor alle getallen $e < d$, geldt dan dat de *e*-dimensie oneindig is. En voor $e > d$, zal de e-dimensie 0 zijn.

Onze taak is nu om deze Hausdorff dimensie te vinden, zodat de *d* "precies goed" is.

Eerste voorbeeld: De Cantor verzameling

We beginnen met de gesloten interval [0,1] op de getallenlijn.

Verwijder het middelste derde deel, maar ook de eindpunten, zodat nu 2 gesloten intervallen ontstaan met lengte één derde.

Verwijder het middelste derde van elk van deze twee intervallen, te vormen 4 kleinere intervallen.

Herhaal dit proces oneindig lang.

Vragen:

- Zijn er punten op dit lijnstukje die NIET worden verwijderd?
- Hoeveel punten zijn dat?
- Wat blijft er eigenlijk over op de getallen lijn?

En natuurlijk …..

- Wat zou de dimensie van deze verzameling punten zijn. Niet 0, want … En ook niet 1, want …

De dimensie zit dus ergens dus 0 en 1.

Oplossing:
Door nu de eigenschappen (zie hierboven bij dimensies) waaraan deze *dimensie* moet voldoen toe te passen kunnen we deze dimensie vinden. De belangrijkste constatering is dat de Cantor verzameling eigenlijk bestaat uit twee stukken, de linkerkant en rechterkant, en dat zijn weer die zijn verkleinde versies van de Cantor verzameling zelf!
De schaal factor is 1 / 3.

Stel dat $\mathbf{M_d}$ (object) is een manier om de d-dimensionale dimensie van dat object aan te geven.

Door eigenschap 1. moet gelden:
(a) $\mathbf{M_d}$ (cantorverzameling) = $\mathbf{M_d}$ (linkerstuk) + $\mathbf{M_d}$(rechter stuk).

Door eigenschap 2. moet gelden:
(b) $\mathbf{M_d}$ (linkerstuk) = $\mathbf{M_d}$ (rechterstuk) = $\mathbf{M_d}$ (Cantor Set) * $(1 / 3)^D$

Uit (a) en (b) volgt samen: $\mathbf{M_d}$ (Cantor Set) = $\mathbf{M_d}$ (Cantor Set) * 2 * $(1 / 3)^D$

$\mathbf{M_d}$ (Cantor Set) is een getal (ongelijk aan 0). Als we nu links en rechts door dit getal delen krijgen we:

$$1 = 2 * (1 / 3)^{d,}$$

met andere woorden $3^d = 2.$

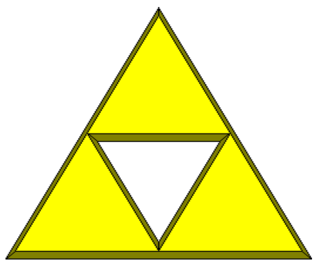
Dan krijg je: $d = \log(2) / \log(3) = 0{,}630\ldots$

als dimensie voor de Cantorverzameling

Onderzoek 1:

Bereken de Hausdorff dimensies van de volgende fractalen:

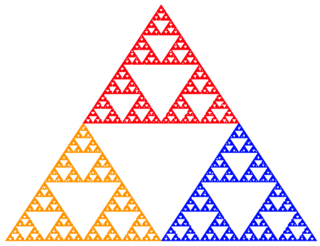
A) De Sierpinksi driehoek



Stap 1) Begin met een gelijkzijdige driehoek. Verdeel die driehoek in 4 congruente kleinere driehoeken, en verwijder de middelste.

Stap 2) Voer voor elke kleine(re) driehoek stap 1 weer uit.

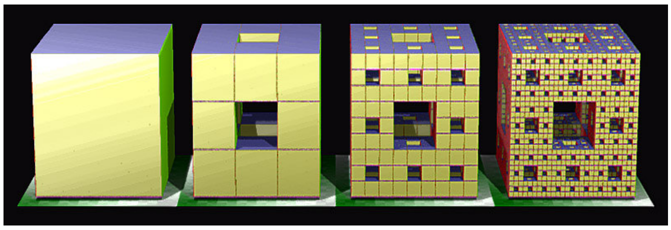
Stap 3) Herhaal dit oneindig vaak.



De punten die nooit verwijderd zullen worden in dit proces heten samen de driehoek van Sierpinski.

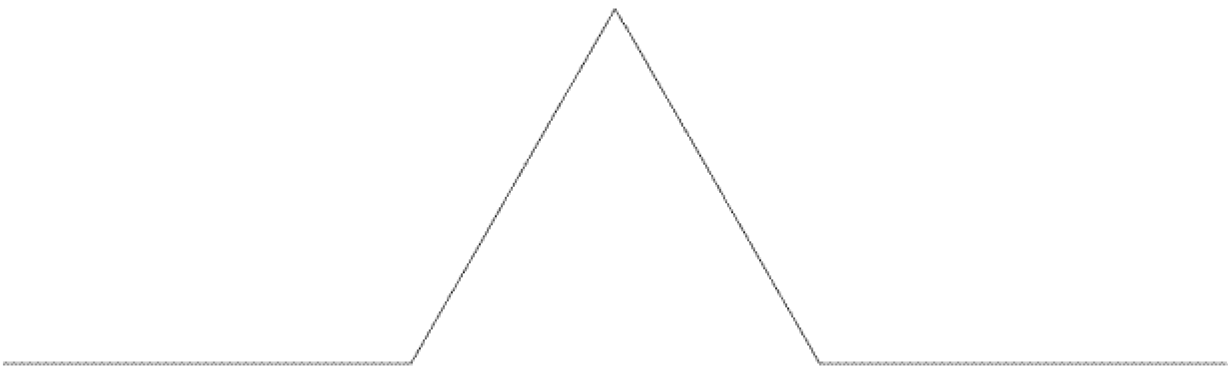
B) De spons van Menger

Begin met een 3x3x3 kubus en verwijder de middelste (1X1X1) kubus, evenals de middelste (1X1X1) kubus van elk aangezicht.
Herhaal dit proces,



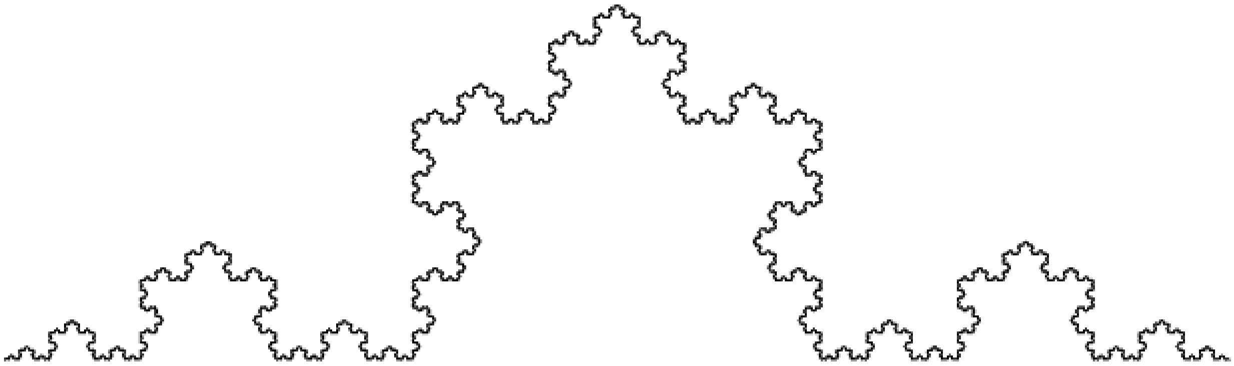
C) Koch curve

Dit is een stukje van de meer bekende Koch sneeuwvlok (die wordt verkregen door het organiseren van drie van deze een "driehoek vorm".)
Begin weer met een gesloten interval [0,1]. Verwijder weer het middelste gedeelte, zoals bij de vorming van de Cantorverzameling
Maar deze keer vervang je dat middelste gedeelte door twee zijden van een gelijkzijdige driehoek die precies past op dit middelste segment, zoals in de onderstaande figuur.



Nu, met de vier segmenten van de lengte 1 / 3, voer je hetzelfde proces weer uit.

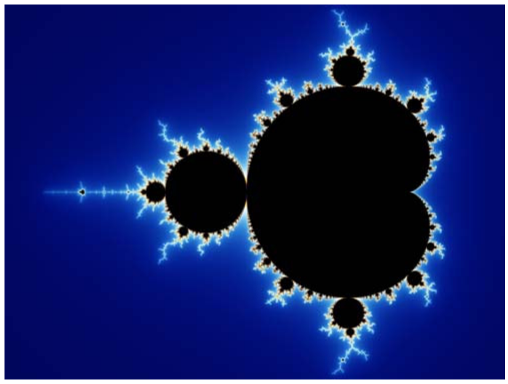
Herhaling van dit proces en het nemen van de "limiet" levert de Koch kromme.



D) Je eigen FRACTAL

Verzin zelf ook zo'n fractal als hierboven. En bereken de Hausdorff dimensie.

Hoe lang is een pennenstreek?



Een andere pionier op het gebied van *fractals* is: Benoît B. Mandelbrot. Hij publiceerde in 1967 een artikel, waarin hij opmerkte op dat als je een fijnere schaal gebruikt om een pennenstreek te meten, hoe langer de curve lijkt te zijn.

Bekend voorbeeld is de kustlijn van Groot-Brittannië. Meet hem eerst op de kaart van Europa, meet hem daarna op de kaart van alleen Groot-Brittannië, daarna op kleinere deelkaarten etc. De omtrek van Groot-Brittannië neemt steeds meer toe.

Hij opperde het vermoedde dat: *de (schijnbare) lengte evenredig zou zijn met de schaal tot de macht van de (Hausdorff-dimensie - 1).* Dit zou de (schijnbare) lengte van de al dit soort omtrekken dus tot oneindig laten naderen als we onze metingen verfijnen.

Onderzoek 2

Kies zelf nu zelf een of andere kromme (uit een boek), een omtrek, een pennenstreek, oid. En ga deze met steeds grotere nauwkeurigheid meten. (Als uw kromme heel klein wordt, moet je misschien een microscoop te gebruiken.)

Schat de Hausdorff dimensie dus van deze kromme, door het meten van de lengte op verschillende schalen.
Gebruik je gegevens om de beste dimensie te vinden die past vermoeden bij Hausdorff's vermoeden hierboven.

Probeer uit te vinden iets wat je kan breken in stukken, zodat een groep mensen kunnen samenwerken bij het nemen van de lengte metingen voor de kleinere schalen (dat wil zeggen, de schalen met meer precisie).
Schat de Hausdorff dimensie dus van deze kromme, door het meten van de lengte op verschillende schalen.
Gebruik je gegevens om de beste dimensie te vinden die past vermoeden bij Hausdorff's vermoeden hierboven.

Onderzoek 2

Kies zelf nu zelf een of andere kromme (uit een boek), een omtrek, een pennenstreek, een handtekening o.i.d.
En ga deze met steeds grotere nauwkeurigheid meten. (Als je kromme heel klein wordt, moet je misschien een microscoop te gebruiken.)

Schat de Hausdorff dimensie dus van deze kromme, door het meten van de lengte op verschillende schalen.
Gebruik je gegevens om de beste dimensie te vinden die past vermoeden bij Hausdorff's vermoeden hierboven.

Afronding
Maak een presentatie of poster waarop je aan je medeleerlingen presenteert wat je in dit keuzeonderwerp hebt geleerd. Bedenk bijvoorbeeld een vraag die je medeleerlingen na de presentatie of het lezen van de poster moeten kunnen beantwoorden.