Oefeningen in Algebra

een bundel ideeën

samenstelling: Martin Kindt

Ten geleide

Oefeningen in algebra hebben niet zelden een *reproduktief* karakter. Aan de hand van een voorbeeld moeten leerlingen de bekende rijtjes algebra-sommen maken.
Deze wijze van oefenen kan alleen effect sorteren als zij gedurende lange tijd en met grote regelmaat wordt uitgevoerd. De praktijk van het huidige wiskunde-onderwijs laat dit niet toe. Het wiskunde-programma voor de leeftijdsgroep 12 - 16 is te breed en het aantal lesuren te gering om gedurende enige jaren wekelijks aan algebra te doen.
In het kader van het project 'Langlijnige Algebra' heb ik nagedacht of het mogelijk zou zijn om, in navolging van oefen-ideeën die op het Freudenthal Instituut ontwikkeld zijn voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, een serie voorbeelden van zogenaamde *produktieve oefeningen* te ontwerpen.
Oefeningen waarbij het niet gaat om het inslijpen van automatismen, maar waarbij de leerling uitgedaagd wordt om na te denken. Deze bundel is een eerste proeve van zulke opgaven. Bij veel van de opgaven heb ik mij beperkt tot het domein van de natuurlijke getallen, ik noem dat 'natuurlijke algebra'. In andere opgaven staan de variabelen steeds voor positieve (rationale dan wel reële) getallen; negatieve getallen zijn in de bundel vermeden.
In het bijgevoegde artikel 'Algebra kan ook natuurlijk zijn' (eerder gepubliceerd als onderdeel van een artikel dat ik samen met Aad Goddijn schreef onder de titel *Knelpunten en toekomstmogelijkheden voor de wiskunde in het VO*, Tijdschrift voor Didactiek van de β–wetenschappen, jaargang 18, nr.1, 2001) kan de lezer een paar gedachten vinden over een mogelijk uitstel van infiltratie van negatieve getallen in de algebra.
Sommige ideeën uit de bundel vormden mede de inspiratie tot het ontwerpen van Algebra Applets op het Wisweb; ik noem daarbij: 'Stroken', 'Stroken met etiketten', 'Stippel-Algebra' en 'Geometrische Algebra 2D'. In het project WELP (Wiskunde-applets en lespraktijk) worden deze en andere applets geïntegreerd in algebra-hoofdstukken.

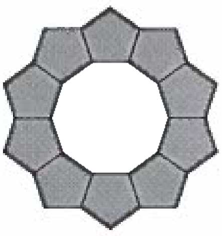
Martin Kindt
Utrecht, januari 2003

Algebra kan ook natuurlijk zijn

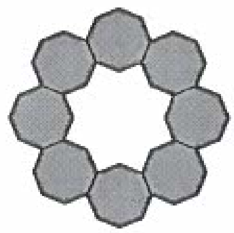
Klachten over algebraïsche vaardigheden zijn van alle tijden. De hevigheid en het aantal ervan zijn de afgelopen jaren sterk toegenomen. Zorgt de tijdgeest er voor dat de doorsnee-leerling zich met te veel dingen bezighoudt en niet meer de concentratie kan opbrengen of de accuratesse bezit om algebra te leren?
Of is er wat mis met het wiskundeprogramma? Sommigen schuiven de schuld op het bezit van geavanceerde rekenapparaten, zoals de grafische rekenmachine. Anderen beweren juist dat diezelfde apparaten de algebra bijna overbodig maken.
Wij menen dat de klachten over het gebrek aan elementaire algebravaardigheden niet ongegrond zijn. Sterker nog wij constateren regelmatig bij havo/vwo leerlingen een gebrek aan zelfvertrouwen bij het gebruik van algebra. Dit manco is deels te wijten aan de op reproduktie gerichte algebra-didactiek in de diverse methoden. Zonder te pretenderen dat wij daarvoor een kant en klare oplossing weten, willen wij hier enkele ideeën lanceren, die de leerling actiever bij het leerproces zouden kunnen betrekken en hem uiteindelijk meer kans zouden moeten bieden algebra op adequate wijze te gebruiken in daartoe geëigende situaties.

Het stond zo in het boek

In het kader van het project BPS (bèta-profielen in het studiehuis) legden we een groepje N&T-leerlingen (4 vwo) een onderzoeksopdracht voor die onder andere handelde over de vraag of je met regelmatige veelhoeken van dezelfde soort een krans kunt maken en zo ja welke aantallen van veelhoeken daarbij nodig zijn. Albrecht Dürer heeft zich met dit probleem bezig gehouden en dacht dat dit met vijfhoeken bijvoorbeeld niet mogelijk was. Zijn tekening was blijkbaar niet nauwkeurig; hij beschikte echter niet over een computer waar je bijvoorbeeld met Cabri constructies kunt uitvoeren die wel precies zijn. Met dit programma konden de leerlingen bijna in een handomdraai kransen van regelmatige veelhoeken maken.



krans van 10 vijfhoeken



krans van 8 achthoeken

Blijkbaar heeft Dürer, die veel affiniteit met meetkunde had, niet gezien dat rekenen en algebra soms helpen om inzicht te krijgen in een meetkundig probleem. Bij dit onderzoek bestaat de wiskundige kern uit hoekberekening en vaststelling van deelbaarheid. Immers, bij de vorming van een krans wordt de veelhoek een aantal keren geroteerd om een zeker punt buiten die veelhoek totdat hij weer terug is in de oorspronkelijke stand. Een aanloopvraag betrof het verband tussen de hoekgrootte van een regelmatige veelhoek en zijn aantal zijden. Een van de leerlingen vroeg de observant of dit goed was:

$$\text{hoekgrootte} = \frac{(\text{aantal hoeken} - 2) \times 180}{\text{aantal hoeken}}$$

De laatste beaamde dit, maar vroeg ook om uitleg. Dat was te veel gevraagd; niet zonder enige schroom luidde het antwoord: 'het stond zo vorig jaar in het boek'. Op de vraag of hij de formule korter kon opschrijven (met de bedoeling om 'aantal hoeken' te vervangen door één letter), antwoordde hij gretig: je kan dit (= aantal hoeken) tegen dit wegstrepen. 'Oh, ja, wat hou je dan over?' Het voorstel werd schielijk ingetrokken. Op nader verzoek wilde hij wel 'aantal hoeken door N vervangen. Mede in verband met het vervolg stuurde de begeleider aan op de rondwandelingstrategie: als je één compleet rondje om de N-hoek loopt maak je N keer dezelfde draai. Gevolg: het aantal graden van een buitenhoek is $360/N$ en van een binnenhoek dus $180 - 360/N$. De leerling snapte dit meteen, maar wilde nu ook wel eens kijken of het klopte met die eerdere formule, met andere woorden of

$$\frac{(N-2) \times 180}{N} = 180 - \frac{360}{N}$$

een identiteit is.

Dat bleek onoverkomelijk moeilijk. Na terugkomst van een tochtje van de observant langs de andere leerlingen, besloot deze hem uit zijn lijden te verlossen. Als je nou eens die *N* uit de noemer wilt laten verdwijnen... Goed, hij vermenigvuldigde links en rechts met *N*, ging daarbij nog een keer in de fout, kwam uit op een zeer eenvoudige identiteit, die na zeer diep nadenken ten slotte werd doorzien.
We merken op dat het hier een intelligente groep leerlingen betrof en de bedoelde leerling was zeker niet de minste.

Automatismen exit?
Dit soort ervaringen hebben we ook opgedaan tijdens het Profi- project waarin het nieuwe wiskunde B programma voor vwo werd uitgetest: intelligente leerlingen met een goede probleemaanpak, die vastlopen op elementaire algebra. Een voor de hand liggende reactie is dan: 'zie je wel, ze leren geen algebra meer tegenwoordig, ze missen de automatismen'.
Bij de opstelling van het algebraprogramma voor de basisvorming heeft men zich sterk laten leiden door de behoefte van de grote meerderheid van de populatie van de 12- tot 16-jarigen.
In de verantwoording van het leerplan wiskunde 12-16 staat letterlijk: *Bij algebra gaat het in het leerplan W12-16 om het werken aan problemen, waarin verbanden tussen variabelen een rol spelen. Bij voorkeur gaat het om problemen die voortkomen uit realistische situaties. De verbanden kunnen worden voorgesteld of beschreven met diverse middelen, te weten 'tabellen', 'grafieken' en 'formules'.*
En even verder staat nog: *In het voorgestelde leerplan vormen algebraïsche technieken geen doel op zich, maar ze staan in dienst van problemen rond verbanden tussen variabelen.*
In de praktijk van het onderwijs betekent dit dat er van meet af aan in de algebra-hoofdstukken veel aandacht is voor functies van één variabele en de samenhang tussen de representatievormen daarvan.
Wij vragen ons in alle gemoede af welk doel dit laatste precies dient en waarom dit zo belangrijk geacht wordt. Hoe het ook zij, de breedte van het totale wiskundeprogramma enerzijds en de hierboven geformuleerde doelstelling anderzijds hebben tot gevolg gehad, dat het aantal algebra-technische oefeningen in de wiskundemethoden tamelijk beperkt is. Bovendien valt op dat de auteursgroepen didactisch nauwelijks raad wisten met wat we hier badinerend 'de laatste restanten van de klassieke algebra' noemen. In een boek waarin voortdurend contextrijke wiskunde wordt aangeboden, passen geen saaie rijtjes oefeningen, waarbij de leerling op commando haakjes moet wegwerken of juist invoeren. Die didactische stijlbreuk wreekt zich in de praktijk omdat 'inoefenen' eventueel alleen effect kan hebben bij geduldige en langdurige toepassing en daar is in de huidige situatie absoluut geen tijd voor. Dat de leerlingen zich geen automatismen verwerven is dan ook niet verwonderlijk.
In de nieuwe druk van sommige onderbouwmethoden, waarvan weer aparte havo/vwo-delen zijn uitgebracht, ziet men als reactie nu weer een zekere toename van de stereotiepe rijtjes oefeningen. De grote vraag is of dat wezenlijk helpt. Eigenlijk zijn we er zeker van dat dit niet het geval is. Günther Malle zegt [in Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Vieweg 1993] dat iedere leraar vroeg of laat merkt dat de 'oefenideologie' relatief weinig oplevert: *(...) Ich erinnere mich an zahlreiche Klagen von Lehrern, die nicht verstehen konnten, warum ihre Schüler trotz 'hunderter' Übungsaufgaben immer noch Fehler beim Termumformen oder Gleichunglösen machen.*
Toch moet men vaststellen dat heel veel vroeger de leerlingen althans tot het eindexamen over veel meer technieken beschikten, vooral waar het 'letterbreuken' betrof. Oude Mulo-examens laten opgaven zien van een complexiteit die nu als verbijsterend wordt ervaren. Natuurlijk werden er in die 'goede oude tijd' ook idiote fouten gemaakt en ... ebden de algebra-vaardigheden na het verlaten van de school snel weg. Bovendien waren er de vaak onoverkomelijke problemen bij de zogenaamde ingeklede vergelijkingen en wat heeft de leerling aan een pakket algebravaardigheden als hij die niet kan gebruiken bij het opstellen van eenvoudige modellen? Ook de transfer naar andere schoolvakken, zoals natuurkunde of economie, liet vaak te wensen over.
In het huidige wiskundeonderwijs wordt terecht van meet af aan meer aandacht besteed aan het bouwen van formules en het opstellen van algebraïsche modellen. Naar ons gevoel heeft dat wel degelijk enig effect. Leerlingen van nu zijn niet geheel hulpeloos als ze een probleemsituatie moeten omzetten in algebra. Ze tonen zich wel vaak hulpeloos als het gaat om het herleiden van algebraïsche expressies.
We herinneren ons een voorbeeld in 5 vwo wiskunde B, waarbij leerlingen de differentie van x^3 over het interval $[k, k + 1]$ moesten berekenen: *mijnheer, hoe moet je* $(k + 1)^3$ *doen?* Dat niet onmiddellijk de binomiumformule voor de derde macht wordt aangeroepen, deert ons absoluut niet, wij zouden bijna zeggen, integendeel. Wat we wel erg vinden is het gebrek aan zelfredzaamheid. Merk op dat door de aard van de vraag ('bereken de differentie') het verleidelijke $(k + 1)^3 = k^3 + 1$ wel verworpen

móest worden: een derde-graadsfunctie kan onmogelijk een constante differentie vertonen. Deze toch 'kale' opgave bevat blijkbaar al meer context dan de klassieke algebra-oefeningen waar Günther Malle op doelt en die geen controle c.q. reflectie oproepen.

Beginnersalgebra in drie methoden

Als men de nieuwste druk van de drie grote wiskundemethoden (Getal & Ruimte, Moderne Wiskunde, Netwerk) voor havo/vwo klas 1 vergelijkt, valt op dat grafieken en verhoudingstabellen aan het begin van de algebra-lijn staan. Ook wordt er in het begin van het boek aandacht besteed aan zeg maar voortgezet rekenen. Het 'letterrekenen' krijgt in de eerste klas bij G&R de meeste aandacht, daarna volgt Netwerk, daarna MW (bijna niets).

Overzicht van de algebra in klas 1 (hoofdstuktitels) in de drie methoden:

G&R	MW	Netwerk
getallen	*verhoudingen*	*verhoudingen*
grafieken	*breuken*	*grafieken en tabellen*
negatieve getallen en formules	*grafieken*	*rekenwerk*
rekenen met formules	*regels ontdekken*	*formules*
machten en formules	*negatieve getallen*	*variabelen*
	formules	*machten*
	vergelijken	
	vergelijkingen	

We richten onze aandacht op het traditionele aspect van de schoolalgebra, te weten 'rekenen met symbolen', 'manipuleren met expressies', 'herleiden', enz.

In G&R start het symbolisch rekenen in hoofdstuk 8: rekenen met formules.

Het hoofdstuk begint met 'machientjes' die gebruikt worden om (lineaire) verbanden te beschrijven. Vervolgens wordt de vertaling naar een formule gemaakt en worden ook bijbehorende grafieken bekeken. Dan worden de 'levensechte' contexten verlaten. In de marge (blz. 49 deel 2) staat de veelzeggende tekst: *Tot nu toe kwamen formules bij verhaaltjes te voorschijn. Maar je kunt ook zonder verhaaltjes formules verzinnen. Wiskundigen gebruiken dan bij voorkeur de letters x en y* (sic!).

Na een paar voorbeelden van het type:

$$4b+7b = \underbrace{b+b+b+b}_{4b} + \underbrace{b+b+b+b+b+b+b}_{7b} = 11b$$

staat er: je *moet* zulke herleidingen *zonder tussenstap* opschrijven. Dit is een staaltje van dwingend wiskundeonderwijs. Nog zo'n staaltje: bij 'haakjes wegwerken' wordt de'papagaaienbek' als visueel ezelsbruggetje meteen maar geïntroduceerd; het komt er op neer dat leerlingen procedures moeten inoefenen, op een voorgeschreven manier en zonder noemenswaardige oriëntatiebasis.

Vier hoofdstukken later komen *'machten en formules'* aan bod. De eerste drie paragrafen bevatten aardige voorbeelden van kwadratische verbanden, daarna komt het kale rekenwerk met machten. Geen verhaaltjes meer, maar rijtjes sommen. Eén uitzondering is de 'extra' opgave: *maak een zo groot mogelijk getal met drie drieën.*

Het lijkt er soms op of de auteurs niet in staat zijn, dan wel weigeren om op het terrein van de traditionele algebra didactische principes toe te passen uit de realistische wiskunde, zoals *'produktief (of constructief) oefenen'* en het *'opbouwen van een relatienet'*; principes die in de rekendidactiek wel vruchten hebben afgeworpen. Het moet toch mogelijk zijn om in de oefenpraktijk van de algebra deze principes toe te passen, ook al lijkt dat misschien lastig.

In MW omvat de algebralijst meer hoofdstukken, maar die zijn ook wat korter. Het symbolisch rekenen is in deze methode duidelijk verder naar achter geschoven. Er wordt heel lang gewerkt met machientjes en woordformules. Op bladzijde 258 deel 1a staat er in een roze kader: 'een *formule* over het verband tussen bijvoorbeeld nummer en aantal kun je *korter schrijven.*

Zo kun je de formule: *nummer* × 7 + 4 = *aantal* korter schrijven als: $n \times 7 + 4 = a$.
De zeer voorzichtige opbouw gaat door in hoofdstuk 12 *Vergelijken* om ten slotte te eindigen in 14 *Vergelijkingen*, waarbij niet verder wordt gegaan dan *constante* × *onbekende* + *constante* = *constante*. Van symbolisch rekenen is in klas 1 nauwelijks sprake. Een leraar die met deze methode werkt, verklaarde onlangs: je hebt iedere keer het gevoel dat je alleen maar heel lange aanlopen maakt. Inderdaad is het anticiperen in MW naar ons idee veel te ver doorgevoerd.

In Netwerk worden in hoofdstuk 8 met de naam *Formules* uitsluitend (lineaire) woordformules behandeld. In hoofdstuk 11 (*Variabelen*) wordt voor het eerst met letters gerekend. De opbouw oogt wat meer doordacht dan bij G&R en de paragrafen met sommen vertonen wat meer variatie. Maar ook hier de papagaaienbek voor vermenigvuldigingen als $7 \cdot (t + 10)$. Wat opvalt is dat de vermenigvuldigingspunt nergens wordt weggelaten, dus nog geen $3a$. Alle termen zijn nog van de eerste graad.
Het hoofdstuk 13 *Machten* begint met een betekenisvolle intro. In de derde paragraaf (*rekenen met machten*) wordt geoefend in het 'korter schrijven' van vormen als $q^4 \cdot q \cdot q^9$ en $2 \cdot k^3 + 9 \cdot k^3$.
Het letterrekenen gaat duidelijk minder ver dan in G&R; termen met meer dan één variabele komen hier bijvoorbeeld niet voor. Hoewel het er allemaal wat vriendelijker uitziet dan in G&R, is ook hier weinig ruimte voor flexibiliteit en ontbreken constructieve oefeningen en problemen nagenoeg.

Samenvattend kan men zeggen dat het idee om het rekenen met letters zo lang mogelijk uit te stellen tot in klas 2 in twee van de drie methoden al weer verlaten is. Dat heeft natuurlijk alles te maken met de inmiddels ervaren aansluitingsproblematiek bij wiskunde B op havo en vwo in de bovenbouw.

Amerikaanse algebra
Het Freudenthal instituut heeft in samenwerking met een team van de Universiteit van Madison in het midden van de jaren '90 een leergang ('Mathrmatics in Context') voor de Amerikaanse Middleschool (leeftijdscategorie 10 tot 14) ontwikkeld. Bij het opstellen van de algebralijn zijn daarbij drie hoofdlijnen ('strands') onderscheiden:
–*Processen*
–*Restricties*
–*Patronen*

De lijn aangeduid met 'Processen' kan min of meer worden beschouwd als de pendant van wat in het Nederlandse programma 'Verbanden' wordt genoemd. Het gaat daarbij vooral om soorten groei met hun kenmerken en hun representatie. Daarbij gaat men, vanwege de leeftijdsgrens 14 jaar, niet zo ver als het Nederlandse programma, maar de geest is de zelfde.

De lijn 'Restricties' behelst het oplossen van vergelijkingen of stelsels vergelijkingen, eerst prae-formeel en later meer formeel, en het gebruiken van lineaire voorwaarden bij optimaliseringsproblemen (een aanzet tot lineair programmeren). Dit alles zoveel mogelijk in zinvolle context.
In het Nederlandse onderwijs wordt minder aandacht besteed aan stelsels vergelijkingen en optimaliseringsproblemen en ontaardt, alle goede beginbedoelingen ten spijt, het oplossen van vergelijkingen in het uitvoeren van allerlei (nauwelijks begrepen) kunstjes. In 'Mathematics in Context' is juist de geleidelijke en natuurlijke opbouw, startend met stelsels vergelijkingen buitengewoon succesvol gebleken. Jonge kinderen blijken spontaan lineaire combinaties te maken om zo naar vormen toe te werken die tot de oplossing leiden (zie het katern 'Comparing Quantities'). Ook de lineaire optimaliseringsmethoden blijken in de praktijk uitdagend voor de leerlingen en geven een goede introductie van het begrip variabele (katern 'Decision making').

Tenslotte is er de '*Patroon-lijn*', waarbij het voornamelijk gaat om de voortzetting van ontdekte regelmaat het bouwen van formules bij getalpatronen en figurale patronen alsmede het ontwikkelen van inzicht in de structuur van algebraïsche expressies. Hiervan zijn zeker voorbeelden in de Nederlandse methoden te vinden, maar naar onze mening worden die daar te weinig gebruikt bij het beoefenen van 'letterrekenen'.

De ervaring met de algebra in Mathematics in Context heeft geleerd dat het mogelijk is om jonge kinderen zelf algebraïsche procedures te laten uitvinden en toe te passen in situaties die door hen als betekenisvol worden ervaren.

Algebra naar de knoppen?
In zijn inauguratie *'Wiskundeonderwijs naar de knoppen'* schetste Frans Keune de door hem waar-

genomen verloedering van de schoolwiskunde. De titel verwijst naar het gebruik van rekenmachines op school. Zonder twijfel zijn er ook wiskundeleraren die menen dat met de komst van de grafische rekenmachine het verdere verval van de algebra is ingeluid, iets wat als straks de met computeralgebra toegeruste machines worden toegestaan, nog erger zal worden.
Inmiddels is de grafische rekenmachine (GR) ingeburgerd in de bovenbouw van havo en vwo en het valt te verwachten dat zij verder zal afdalen en bijvoorbeeld in klas 3 van beide schooltypen gemeengoed zal worden.
Aan de landelijke invoering van de GR is een ontwikkelingsonderzoek van het Freudenthal Instituut voorafgegaan. In het verslag van dit onderzoek wordt onder meer gesteld
(...) Het gebruik van de grafische rekenmachine roept op dat de leerling zichzelf nieuwe problemen gaat stellen en problemen gaat generaliseren. dat betekent voor de leerling een verruiming van het wiskundige blikveld en een verandering van houding ten aanzien van wiskunde van een 'passief-uitvoerende' in een 'actief-onderzoekende'.
Of dit ideaal bereikt wordt, hangt af van veel factoren. Zo wordt bijvoorbeeld in het ene schoolboek veel meer expliciete inmenging van de GR gevraagd dan in het andere. Dat de schoolboeken merkneutraal zijn is uiteraard begrijpelijk; jammer is het dat zij daardoor moeilijk kunnen inspelen op specifieke eigenschappen van een bepaalde machine. De leraar kan veel doen om dit gemis op te vangen, maar de vraag is dan weer of het studiehuis hiertoe ruimte biedt. Wat dat betreft zou het naar de derde klas halen van de GR een verbetering kunnen inluiden; de leerling raakt dan vertrouwd met het idee om experimenteel aan wiskunde te werken, te reflecteren op zijn uitkomsten en ten slotte het verifiëren ervan met behulp van algebra. In die zin zou de GR juist een enorme versterking van het algebra-onderwijs kunnen betekenen, in plaats van afbreuk te doen aan algebraïsch inzicht.
Een voorbeeld van didactisch gebruik van de GR is wat wel eens 'grafiekenalgebra' wordt genoemd. Vermenigvuldiging van twee lineaire functies levert grafisch gezien een parabool op. Een mooie vraag is dan bijvoorbeeld of iedere paraboolgrafiek op deze manier gemaakt kan worden. Verwant hiermee is het ontbinden in lineaire factoren bij polynoomfuncties. Op basis van de grafiek (van bijvoorbeeld een derde-graadsfunctie) op het scherm, worden nulpunten 'gezien'. Uitdeling van de bijpassende lineaire factor levert een polynoom van lagere graad op, hetgeen weer grafisch te 'zien' is. Als die een nulpunt heeft, kan opnieuw worden uitgedeeld en zo kan een algebraïsche wet (de zogeheten factorstelling) experimenteel worden ontdekt.
Een sterk punt van de GR is dat transformaties van grafieken snel kunnen worden uitgevoerd, waarbij de leerling de juiste algebraïsche instructie moet geven. De machine geeft direct feed-back en missers kunnen gemakkelijk worden gecorrigeerd. Zo ontdekten leerlingen van een klas 4 havo via de GR dat omkering van het grondtal a in $y = a^x$ spiegeling van de grafiek in de y-as tot gevolg heeft. Op de vraag van de leraar om nu bijvoorbeeld ook de grafiek van $y = \sin x + 1$ te spiegelen in de y-as werd zoals te verwachten door sommige leerlingen eerst $1/y$ geprobeerd. Na deze 'error'-ervaring volgde nog wat 'trial', ook met andere functies, totdat vastgesteld werd dat de vervanging van x door $-x$ steeds het beoogde effect heeft. Terugkoppeling naar het eerste voorbeeld leverde vervolgens de identiteit $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ op, waarvoor toen een nadere algebraïsche verklaring werd gezocht.

In het algemeen kan worden gezegd dat enerzijds het grafisch constateren c.q. verifiëren van algebraïsche equivalenties en anderzijds het gebruiken van geschikte formules om gewenste grafische effecten te bereiken, een krachtige bijdrage kunnen leveren tot het ontwikkelen van algebraïsch inzicht in de middenbouw van havo/vwo.

Binnen niet al te lange tijd zal ook de symbolische rekenmachine (SR) zijn intrede doen. Die maakt dat de leerlingen herleidingen, zeker van meer gecompliceerde vormen, niet meer zelf hoeven uit te voeren. Er zal op zijn minst moeten worden onderzocht welke vaardigheden vereist zijn om de SR met succes te kunnen gebruiken. Het is ondenkbaar dat een leerling zonder basisvaardigheden in algebra een SR kan hanteren, net zo als het ondenkbaar is dat iemand die zelf nooit heeft gerekend op zinvolle wijze met een gewone rekenmachine kan omgaan. Er zal bijvoorbeeld een soort symbolisch taalgevoel moeten worden ontwikkeld en daarbij zijn praktische oefeningen nodig. En zoals bij de rekendidactiek in de loop der jaren de aandacht verschoven is van gecompliceerd cijferwerk naar 'eenvoudig hoofdrekenen en 'schattend rekenen', zo zou men kunnen verwachten dat het leren van vaardigheden betreffende 'eenvoudige hoofdalgebra' en 'schattend algebra' belangrijke aspecten van algebraonderwijs zullen worden. Het denken daarover en het onderzoek daarnaar begint nu op gang te komen. Het is duidelijk dat het gebruik van de GR en eventueel in een later stadium de SR in het voortgezet onderwijs ingrijpende gevolgen voor het algebraonderwijs zal hebben. Het 'naar de knoppen' hoeft in dit geval, bij zorgvuldige didactische afweging en bij het ten nutte maken van de rijke mogelijkheden die de techniek ons biedt, beslist geen negatieve kwalificatie te zijn.

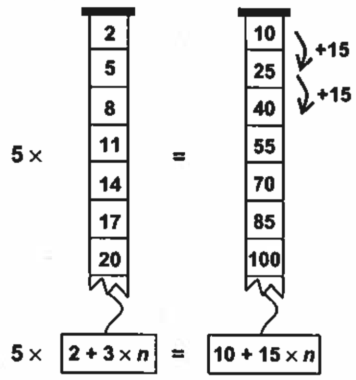
Start algebra met natuurlijke getallen

Laten we ons weer richten op het aanvankelijk algebraonderwijs. In het eerste jaar van het voortgezet onderwijs kan, zeker als al gedifferentieerd is naar havo/vwo, nog wel eerder dan nu het geval is een aanvang met voorzichtig letterrekenen worden gemaakt. Daartoe leent de wereld van de natuurlijke getallen zich waarschijnlijk het beste. Dit gebied is voor de leerling concreet, misschien wel concreter dan sommige van de verhaaltjes die nu in de schoolboeken figureren.

Een paar eenvoudig voorbeelden ter toelichting. In een klas kan aan de leerlingen gevraagd worden twee getallen te bedenken die samen 20 zijn en daarna het produkt van het gekozen tweetal uit te rekenen. Vervolgens zal inventarisatie plaatsvinden van de resultaten gevolgd door natuurlijke vragen als: wat is de laagst- en wat is de hoogst-mogelijke uitkomst. Na systematisch opschrijven van de rij van alle mogelijke uitkomsten, kan dan een patroon van regelmaat worden ontdekt, enz. Op eenvoudige wijze en aansluitend bij het elementaire rekenen, treedt hier het concept van 'variabele uitkomst' naar voren. Bovendien leidt het op natuurlijke wijze tot een klassieke probleemsituatie, namelijk een optimaliseringsprobleem. Je kunt dit probleem ook 'continu' stellen (en dat moet ook zeker gebeuren), bijvoorbeeld door te vragen naar de rechthoek met de grootste oppervlakte die je met een gegeven stuk touw kunt afperken. Het voordeel van aanvangen met de discrete versie is dat snel een patroon zichtbaar wordt en dat er, althans bij beperking tot de natuurlijke getallen, slechts eindig veel mogelijkheden zijn.

Het probleem is ook rijker dan men misschien op het eerste gezicht zou denken; de volledige theorie van de tweede-graadsvergelijking kan heel goed hieraan worden opgehangen.

Een ander eenvoudig voorbeeld is de lineaire vorm. Werkend in het domein van de natuurlijke getallen roept een uitdrukking als $2 + 3 \times n$ gemakkelijk een getallenpatroon op, namelijk de rekenkundige rij 2, 5, 8, ... Als zo'n rij met een vast getal wordt vermenigvuldig of als twee zulke rijen worden opgeteld, komt er weer een rekenkundige rij, want de sprong tussen opvolgende getallen blijft constant. Op die wijze kan bijvoorbeeld eenvoudig worden ingezien dat $5 \times (2 + 3 \times n)$ en $10 + 15 \times n$ gelijkwaardig zijn en ook dat $(3 + 4 \times n) + (1 + 5 \times n) = (4 + 9 \times n)$.



Natuurlijk moet hier nog wel wat aan voorafgaan en veel hangt ook af van de presentatie. In het MIC-materiaal en het oorspronkelijke W 12-16 materiaal is gekozen voor getalstroken om rijen getallen voor te stellen. In de schoolboeken is dit idee helaas niet overgenomen. Inmiddels wordt er op het Freudenthal Instituut gewerkt aan de ontwikkeling van een Java-applet ('stroken-algebra') waarmee de leerling interactief op de computer aan het werk kan; de eerste ervaringen hiermee zijn veelbelovend. Zo kunnen in een vroeg stadium eenvoudige algebra-berekeningen worden uitgevoerd, waarbij de leerling naar believen kan terugvallen op de zichtbare regelmaat in de getalstrook of de rij. Een lineaire vorm, waarbij de variabele beperkt wordt tot natuurlijke (of desgewenst tot gehele getallen), krijgt op deze wijze als het ware een aritmetisch gezicht! Bij een lineaire vorm in twee variabelen is een getallentableau nodig - er komt immers een dimensie bij - en ook deze voorstelling heeft aantrekkelijke kanten.

Een lineaire vorm in één reële variabele krijgt een (meetkundig) gezicht als de grafiek behandeld is, en dan kunnen bovengenoemde bewerkingen uitstekend grafisch worden geïnterpreteerd en begrepen.

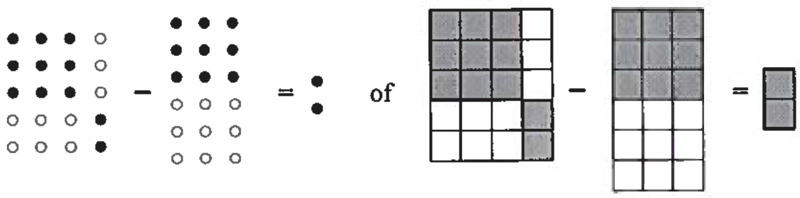
Bij een vorm in twee variabele gaat het voor jonge leerlingen (waarschijnlijk) te ver om naar de grafische voorstelling te kijken.

In dit verband willen we ook een aardig voorbeeld noemen, ontleend aan het werk 'Aanschouwelijk Algebra' van W.W. Sawyer.
Bekijk het rijtje sommen hiernaast:
De leerling wordt dan gevraagd dit rijtje voort te zetten.
Kan hij er op rekenen dat er 2 uit blijft komen?
En zo ja, dan vraagt dit om een 'bewijs'.

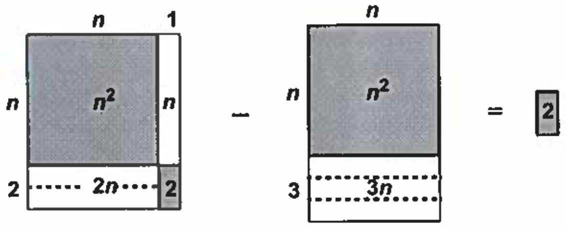
$$\begin{aligned} 2\times3-1\times4 &= 2\\ 3\times4-2\times5 &= 2\\ 4\times5-3\times6 &= 2\\ 5\times6-4\times7 &= 2\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Een eerste idee zou kunnen zijn om de produkten voor te stellen door een stippenpatroon (zoals Pythagoras die al gebruikt schijnt te hebben) of een vierkantjespatroon en via een slimme kleuring het verschil zichtbaar te maken.

Bijvoorbeeld:



Nog een paar voorbeelden en het inzicht waarom het altijd klopt, zal groeien. De generalisatie wordt vertolkt door dit plaatje:



Men moet hierbij niet de problemen onderschattendie leerlingen met die laatste voorstelling kunnen hebben. De n in het plaatje wordt vaak als één vaste lengte geïnterpreteerd, terwijl zij juist een variabele moet representeren! Computeranimatie kan hier uitkomst binden. Een voorstelling waarbij n naar believen kan worden opgerekt of ingekrompen, zonder dat de essentie van het plaatje verandert, is veel suggestiever en kan het generalisatieaspect oproepen. Ook hiertoe is een Java-applet in ontwikkeling.

Ten slotte kan er naar de formule

$$(n+1)\times(n+2)-n\times(n+3)=2$$

worden toegewerkt.

Voor wat oudere leerlingen zou hiervan ook een wat volwassener versie kunnen worden gekozen.

Kies vier opvolgende natuurlijke getallen; neem het produkt van de binnenste twee en dat van de buitenste twee en let op het verschil in uitkomst. Onderzoek of dat verschil verandert als je een ander rijtje van vier opvolgende getallen neemt. Geef een verklaring voor wat je ontdekt.

De leerling zal dan zelf op het idee moeten komen om de vier getallen voor te stellen door bijvoorbeeld n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ en met elementaire algebra zijn weg verder vinden.

Een derde mogelijkheid is om het vraagstuk te presenteren via getalstroken. De vertaling naar voorgaande formule gaat dan bijna automatisch goed. De strokenmethode kan ook een verklaring van het type:

$$(n+1)(n+2)-n(n+3)=n(n+2)+(n+2)-n(n+2)-n=2$$

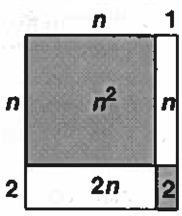
oproepen.

Dit soort activiteiten, waarbij de leerling de 'kracht' van de algebra bij het doorzien van arithmetische wetmatigheden zal ervaren, komen helaas te zelden voor in de schoolboeken.

Een andere activiteit die nauwelijks in de methoden wordt gestimuleerd is het maken van zogenaamde 'eigen produkties', waarbij leerlingen zelf voorbeelden c.q. opgaven construeren. Bovenstaand voorbeeld biedt een ideale mogelijkheid hiertoe. Vraag bijvoorbeeld of de leerling zelf een rijtje van analoge rekensommen ontwerpt die alle dezelfde uitkomst hebben. Uiteraard moet hij dan ook de verklaring erbij leveren.

De wereld van de natuurlijke getallen geeft prachtige mogelijkheden tot probleemgeörienteerd algebraonderwijs. Zeker als begrippen als deelbaarheid en priemgetal behandeld zouden worden. Helaas zijn deze zaken in een zekere democratiseringsdrift geschrapt uit het wiskundeprogramma; wat ons betreft zou dat met gezwinde spoed moeten worden teruggedraaid. In '*33550336: Een volmaakte voltreffer*' beschrijft de leraar N. Brokamp in de Nieuwe Wiskrant (jaargang 14, nr.3) een werkelijk schitterende ervaring in een vwo B klas met een onderzoek naar wat al in de Oudheid *volmaakte getallen* werd genoemd, namelijk getallen, zoals 6 en 28, die gelijk zijn aan de som van hun 'echte' delers (inclusief 1). Ogenschijnlijk een nutteloos onderwerp en een typisch staaltje van recreatieve wiskunde. Dit onderwerp heeft een rijke historie en het grappige is, dat de klas in zekere zin de geschiedenis in versneld tempo doorliep. Overigens leidt de oplossing naar zogenaamde Mersenne-getallen ofwel priemgetallen van de vorm $2^p - 1$ (p is zelf priem anders is het getal zeker deelbaar); dat zijn juist de grote priemgetallen waar zo af en toe in de krant melding van wordt gemaakt bij het verbreken van een record. Ze spelen een uiterst belangrijke rol in de cryptografie. Getaltheorie, jarenlang het speeltje van zuivere wiskundigen, heeft in deze tijd ook maatschappelijk betekenis. Dat leerlingen door getaltheoretische problemen en de magie die daar soms van uit gaat, kunnen worden gegrepen, blijkt overduidelijk uit Brokamp's verslag, maar bijvoorbeeld ook uit de verkoopcijfersvan het bekende boek 'de Telduivel' .

Negatieve getallen en geometrische algebra
In een van de voorgaande voorbeelden, werd al gebruik gemaakt van het zogenaamde 'rechthoeksmodel' bij het vermenigvuldigen van vormen. In alle schoolboeken komen deze rechthoeksmodellen voor. Wat dan opvalt is dat na een korte introductie dit model weer gauw wordt verlaten. Het gevolg is dat er zeer weinig leerlingen zullen zijn, voor wie het rechthoeksmodel een concrete oriënteringsbasis wordt. Waar in de methoden voortdurend wordt geanticipeerd op andere zaken, wordt hier die fase juist in ijltempo doorlopen. Nu is dat niet geheel onbegrijpelijk, als je aan de moeilijkheden met negatieve getallen denkt bij dit model. Juist die negatieve getallen maken dat er zoveel mis kan gaan bij de herleiding van algebraïsche vormen. Bij observaties gedurende dit schooljaar in klas 3 vwo worden we voortdurend gesterkt in die mening. De vraag rijst of het niet verstandiger zou zijn om eerst maar eens een poos algebra met positieve getallen te bedrijven. In toepassingen spelen negatieve getallen nauwelijks een rol, dus erg veel last kan men daar niet van hebben. Met name de regels voor het vermenigvuldigen van negatieve en positieve getallen, die nu al in klas 1 worden behandeld, zouden heel goed kunnen worden uitgesteld tot bijvoorbeeld klas 3. Het mes zou dan aan ten minste twee kanten snijden. Het algebraïsche werk zou dan in een soort tweede ronde op een abstracter niveau worden gerepeteerd (principe van telescoped reteaching) en het oppervlaktemodel zou een tijdlang kunnen worden gebruikt, waarbij de leerling zelf het moment kan bepalen waarop hij dit langzaam maar zeker los wil laten (principe van progressieve schematisering).
Een tussenstap daarbij, ooit door de al eerder genoemde W.W.Sawyer bedacht, is de vermenigvuldigings-tabel die wel overdraagbaar is naar de negatieve wereld.



×	n	1
n	n^2	n
2	$2n$	2

$$(n+1)\times(n+2) = n^2 + 3n + 2$$

Het idee van de tabel is in sommige schoolboeken goed opgepakt en wordt ook gebruikt bij de omgekeerde bewerking, het ontbinden in factoren. Het is echter duidelijk abstracter dan het rechthoeksmodel en omdat het te snel wordt ingevoerd en bovendien opgelegd, zullen de meeste leerlingen dit reproduktief hanteren en de basis ervan vergeten. En dan is het niet meer dan een handig schema voor vermenigvuldigen dat je even goed kan vervangen door het onder elkaar plaatsen, zoals dat vroeger wel gebeurde.

$$\begin{array}{rl} n+2 & \\ n+1 & \\ \hline n+2 & \times \\ n^2+2n & \\ \hline n^2+3n+2 & + \end{array}$$

In feite is dit laatste schema nog wat handiger, want er kan direct worden doorgeschakeld naar een produkt van drie of meer factoren en dat gaat bij het tabelschema minder rechtstreeks.

Produktief oefenen en structuren
In de eerder genoemde methode Getal & Ruimte staat de volgende opdracht in een paragraaf waarin vrijwel alle opdrachten beginnen met de gebiedende wijs 'herleid'.
Bij een toets moet een klas tien herleidingen maken. Elke herleiding heeft als uitkomst $12ab$. *Bedenk tien opgaven die als uitkomst* $12ab$ *hebben. Laat een andere leerling de opgaven controleren.*
Dit is een voorbeeld van wat wel 'eigen produkties' worden genoemd. Het leereffect van dergelijke opdrachten kan bijzonder groot zijn. Helaas komt dit type opdrachten te sporadisch voor in de methoden.
Een wat verdergaand voorbeeld van 'produktief oefenen' past bij een thema dat we de 'prijs van de algebra' hebben genoemd..

Algebra kost tijd, en dus geld. Hier volgt een gedetailleerde prijslijst:

Prijslijst:	
bewerkingen +, –, ×, :, /	1 punt per keer
kwadrateren	2 punten per keer
3-de macht nemen	3 punten per keer
4-de macht nemen	4 punten per keer
enz.	enz.
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis

Voorbeeld 1: wat kost **3*n* + *m*** ?

3	**gewoon getal**	**gratis**
n	**aanroep variabele**	**1 punt**
3 × *n*	**vermenigvuldiging**	**1 punt**
m	**aanroep**	**1 punt**
3 × *n* + *m*	**optellen**	**1 punt**
	totaalprijs	**4 punten**

Er kan bijvoorbeeld worden vastgesteld dat $(3n + m)^2$ een prijs van 6 punten heeft; we letten er immers op dat de onuitgeschreven vermenigvuldiging ook 1 punt kost. De gelijkwaardige drieterm $9n^2 + 6mn + m^2$ kost maar liefst 12 punten. Na de prijs van diverse vormen te hebben vastgesteld (een soort oefening in algebraïsche zinsontleding) kan worden vastgesteld dat equivalente expressies niet dezelfde waarde hoeven te hebben en kan bij gegeven expressies de goedkoopste vorm worden gezocht. Een aardig spel, waarbij flexibel gedrag wordt gestimuleerd en de leerling al doende zichzelf heel veel oefeningen in het herleiden oplegt.
Overigens is dit spel niet zonder praktische waarde, want de 'punten' kunnen als een maat voor 'rekentijd' worden opgevat. Bij computerprogramma's die zeer vaak dezelfde complexe berekeningen moeten uitvoeren, kan het van belang zijn, welke vormen er voor de berekeningen worden gekozen.
Het economisch rekenen is al door niemand minder dan Newton in practijk gebracht (zie [26]).
Hij ontdekte bijvoorbeeld dat het berekenen van waarden van het polynoom

$$y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17$$

bij substitutitie in deze vorm veel meer tijd kost, dan bij substitutie in de gelijkwaardige vorm:

$$y\,(y\,(y\,(y-4)+5)-12)+17$$

of even goed

$$(((y-4)\,y+5)\,y-12)\,y+17$$

In Newton's notatie:

$$\overline{\overline{\overline{y-4}\;y+5}\;y-12}\;y\;+17$$

In ons puntenspel krijgt de klassieke polynoomvorm 20 punten, terwijl de tweede vorm (thans Hornervorm genoemd) slechts 11 punten toebedeeld krijgt.
Terzijde: het zou niet zo'n slecht idee zijn de leerlingen voor de aardigheid eens met de schrijfwijze van Newton te confronteren. Ten eerste is er het historisch aspect en ten tweede relativeert het onze conventies een beetje.

De meest pregnante vorm om de structuur van een samengestelde algebraïsche expressie duidelijk te is misschien het gebruik van 'kringen'

$$y - 4 \times y + 5 \times y \; - 12 \times \; y + 17$$

In het licht van later gebruik van grafische of symbolische rekenmachine is het bijzonder belangrijk dat dit soort schema's kunnen worden gehanteerd.
Andere vormen om zulke structuur te ontleden zijn 'operatiebomen' en 'pijlenkettingen', maar daar gaan we hier niet verder op in .

Testen van formules
Polya schrijft in Mathematical Discovery (volume 1), over het belang van het testen van formules door te letten op bijzondere gevallen, en waar mogelijk op dimensies. Als voorbeeld nemen we de klassieke formule die aan Heron wordt toegeschreven, maar die Archimedes al gekend moet hebben. Als een driehoek bijvoorbeeld de zijden 13, 14 en 15 heeft, kan de oppervlakte als volgt worden berekend: bereken eerst de helft van de omtrek, dat is hier dus 21. Trek de drie zijden beurtelings af van de halve omtrek: dat geeft 8, 7 en 6. Vermenigvuldig deze uitkomsten en de halve omtrek met elkaar, dat levert op: 7056. Trek de vierkantswortel uit dit getal en je hebt de oppertvlakte: 84. Men zou de leerling de originele tekst van Heron [21] in vertaling kunnen voorleggen en vragen om zijn beschrijving van dit algoritme om te zetten in een formule. De gedaante zoals die in oude schoolboeken stond, luidt:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Hierin stellen dan *a, b* en *c* de zijden van de driehoek voor en *s* de halve omtrek: $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.
Vervolgens zou de formule op verschillende aspecten kunnen worden getest.
–Wat is er bijvoorbeeld aan de hand als $s - a = 0$?
–Kan de vorm onder het wortelteken negatief zijn?
–Hoe zit het met de 'symmetrie' in de formule?
–Wat is het effect op O als alle zijden bijvoorbeeld met 10 worden vermenigvuldigd?
–Wat levert de formule in het geval $a = b = c$? Klopt dat wel?
–En hoe zit dat voor $a = b \neq c$?
–Bij een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden *a* en *b* kan de oppervlakte direct in *a* en *b* worden uitgedrukt; is die uitdrukking ook in overeenstemming met Heron's formule?

Zo kan één formule een rijkdom aan zinvolle algebra-oefeningen opleveren. We hebben hier een tamelijk complex voorbeeld gekozen, maar er zijn andere, meer eenvoudig oppervlakte- en inhoudsformules die aanleiding geven tot dergelijke beschouwingen. Ook formules met een natuurkundige inslag zijn vaak heel geschikt voor dit type activiteiten. En voor leerlingen die later computeralgebra zullen hanteren zal het een essentiële vaardigheid zijn om een formule op zijn merites te kunnen beoordelen.
We merken op dat de formule ook na het hier beschreven onderzoek nog lang niet bewezen is. Het zuiver meetkundige bewijs dat Heron geeft is fraai, maar moeilijk. Een demonstratie op basis van de stelling van Pythagoras, waarbij redelijk stevige algebra om de hoek komt kijken, zou wel aan de leerlingen kunnen worden uitgelegd. Op zichzelf is de formule niet echt belangrijk, al staat die nog wel in menig wiskunde-vademecum, maar als bron van onderzoek kan hij interessant zijn.

Aandachtspunten
Als we naar de schoolboeken kijken, valt er de komende jaren veel te doen om het algebraonderwijs te verbeteren. De activiteiten rondom functies van één variable zijn te eenzijdig en ook vaak nog te microscopisch. Daarbij valt op hoe weinig probleemgeoriënteerd de methoden zijn. Om leerlingen enige vertrouwdheid met symbolisch rekenen bij te brengen zal de opzet veel breder moeten zijn.
Het inzetten van formules om uitdagende problemen op te lossen, dat is het enige dat zin kan geven aan de algebra. Vaardigheden om foutloos ingewikkelde herleidingen te volvoeren lijken met de komst van de electronische hulpmiddelen overbodig te worden. Dat betekent dat de oefeningen in algebratechniek relatief simpel kunnen zijn; het gaat niet om het verwerven van automatismen en routines, maar om het ontwikkelen van inzicht in de structuur van formules en van een zeker algebraïsch zelfvertrouwen.
Wij pleiten uitdrukkelijk voor meer aandacht voor rijen en voor getalproblemen in de havo/vwo-klas-

sen. Niet alleen vanwege de wiskundige schoonheid die daarvan kan uitgaan, maar vooral ook om didactische reden: discrete variabelen zijn concreter dan continue variabelen. Het werken met negatieve getallen is in aanvankelijk algebra-onderwijs vaak een storende factor, waardoor veel fouten ontstaan en leerlingen onzeker worden. Als de invoering daarvan meer geleidelijk gebeurt en niet onmiddellijk een zekere volledigheid wordt nagestreefd (bijvoorbeeld bij het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen, waarbij de parameters in alle mogelijke combinaties van negatief en positief moeten worden opgelost), zou al veel gewonnen kunnen worden. Natuurlijk zal er vanwege het algebraïsch-meetkundig permanentieprincipe bij grafieken een moment komen, waarbij het 'manipuleren met minnen' onvermijdelijk is, maar dat zou niet mogen interfereren met de elementaire structuurregels van de algebra.
Het hier volgende rijtje aandachtspunten is naar onze mening van belang voor ontwikkelaars van algebra-onderwijs in havo/vwo:

–*ontwikkelen van symbolisch taalgevoel*
–*doorgronden en testen van formules*
–*herleidingen verklaren vanuit de betekenis van standaardoperaties*
–*construeren en generaliseren*
–*gebruiken van geometrische modellen*
–*gebruiken van de geschiedenis van de algebra*
–*flexibel en produktief oefenen*
–*vertalen in en redeneren met algebra*
–*didactisch gebruiken van ICT*
–*weerstand bieden aan de drang naar volledigheid*

Men zou leerlingen moeten laten ervaren dat de potentie van de algebra verder reikt dan het concies beschrijven van verbanden tussen variabelen en het oplossen van vergelijkingen. De behoefte aan laatstgenoemde vaardigheid is met de komst van de moderne zakcomputer nauwelijks nog aanwezig. Algebra is ook een middel bij het oplossen van problemen en misschien vooral bij het sluitend krijgen van redeneringen. Dit de leerling te laten ervaren en hem hierin enigszins vaardig te maken lijkt ons de belangrijke uitdaging voor de leerplanontwikkeling op het gebied van de algebra in de komende jaren.

Som en produkt(I)

? + ? = 12
? × ? = ?

Twee hele getallen, je weet niet welke.
Maar er is wel iets van die getallen bekend!
Namelijk dit: als je ze **optelt** komt er **12** uit.
Nu worden die twee getallen met elkaar **vermenigvuldigd.**

- Wat kan de uitkomst zijn ?

Som en produkt (II)

$$6 + 14 = 20 \qquad 6 \times 14 = 84$$

de **som**
van 6 en 14

het **produkt**
van 6 en 14

Van twee hele getallen is alleen bekend dat de **som** gelijk is aan **20**.
Die getallen zouden bijvoorbeeld 6 en 14 kunnen zijn; in dat geval is hun **produkt** 84.
Maar er zijn ook andere getallen mogelijk om een som van **20** te geven.
Daarbij hoort dan een ander produkt.

- Kleur in het 'honderdveld' de vakjes met de mogelijk uitkomsten van het produkt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Schrijf de uitkomsten van groot naar klein. Kun je een patroon ontdekken in de rij getallen die je zo krijgt?

Som en produkt (III)

Van twee hele getallen is het **produkt** gelijk aan **24**.

♦ Welke uitkomsten kan hun **som** hebben?

Van drie hele getallen is de **som** gelijk aan **10**.

♦ Welke uitkomsten kan hun **produkt hebben**?

Som en produkt (IV)

$$\boxed{A + B = 12}$$

$$\downarrow$$

$A \times B =$ ... of ... of ... of ... of ... of ...

$$\boxed{A \times B = 12}$$

$$\downarrow$$

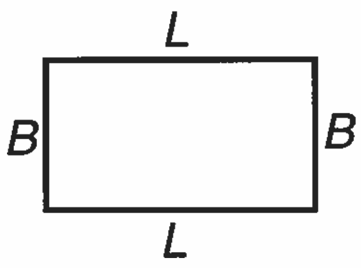
$A + B =$ ... of ... of ...

$$\boxed{A \times B \times C = 12}$$

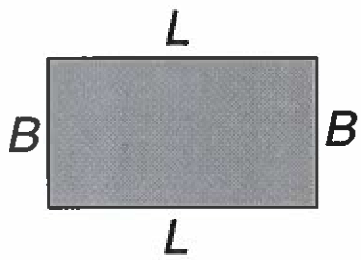
$$\downarrow$$

$A + B + C$ = ... of ... of ... of ...

Omtrek en oppervlakte (I)



$$\mathit{omtrek} = L + B + L + B$$
$$= 2 \times (L + B)$$
$$= 2 \times L + 2 \times B$$



$$\mathit{oppervlakte} = L \times B$$

Van een rechthoek zijn lengte en breedte een geheel aantal cm.
Je weet niet hoe lang lengte en breedte zijn, maar wél dat de **omtrek** 18 cm is.

- Teken de mogelijke rechthoeken. Hoe groot kan de **oppervlakte** zijn?

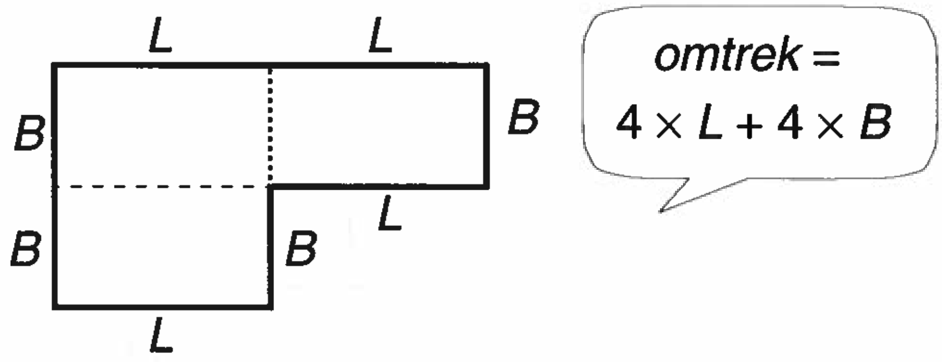
Van een rechthoek zijn lengte en breedte een geheel aantal cm.
Je weet niet hoe lang die zijn, maar wél dat de **oppervlakte** 18 cm^2 is.

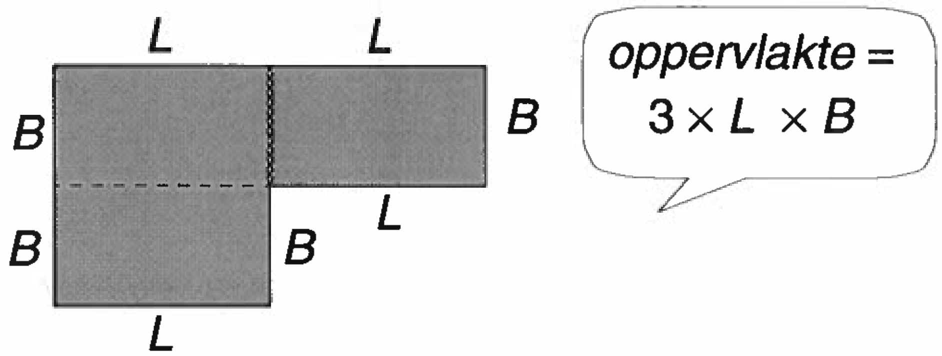
- Teken de mogelijke rechthoeken. Hoe groot kan de **omtrek** zijn?

Van een rechthoek is de **omtrek** 22 cm en de **oppervlakte** 28 cm^2.

- Hoe groot is de lengte en hoe groot is de breedte?

Omtrek en oppervlakte (II)



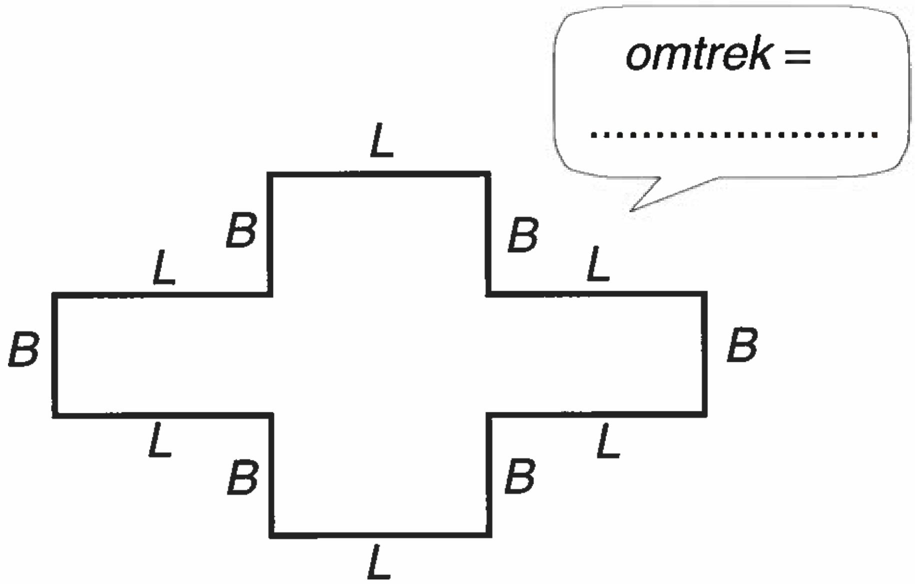


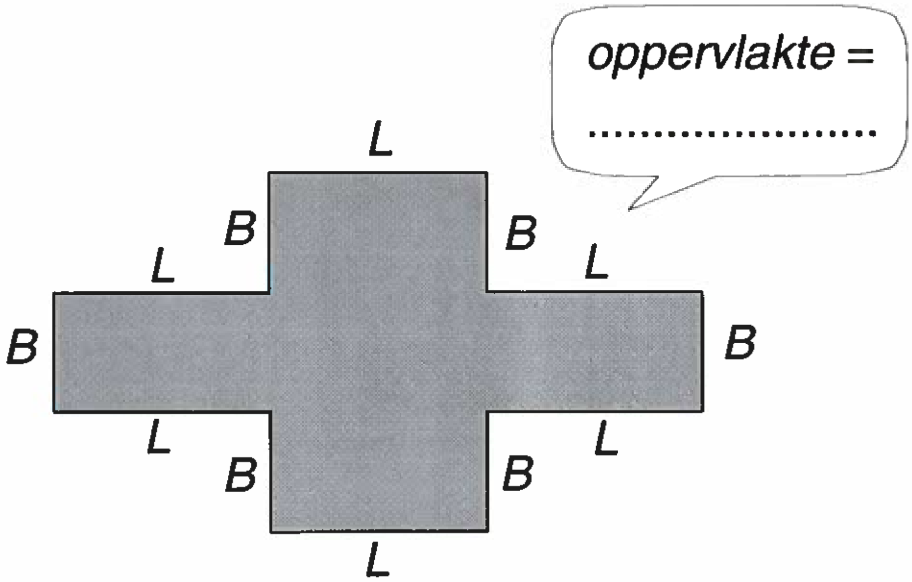
L en *B* staan voor hele getallen.

Stel dat de **omtrek** van bovenstaande figuur 52 cm is.
♦ Hoe groot kan de **oppervlakte** zijn?

Stel dat de **oppervlakte** van bovenstaande figuur 42 cm^2 is.
♦ Hoe groot kan de **omtrek** zijn?

Omtrek en oppervlakte (III)

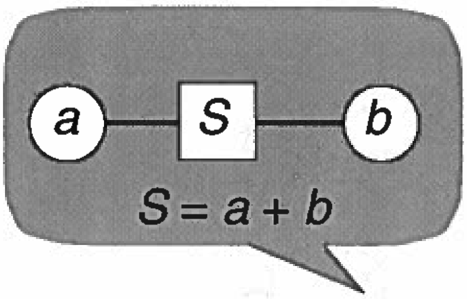


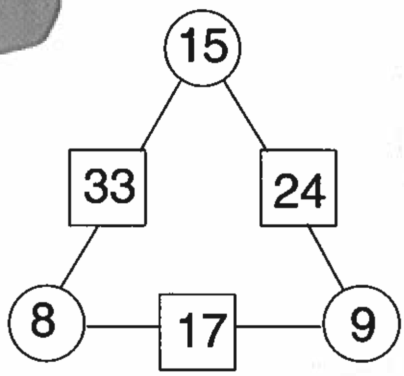


- Vul de formules voor **omtrek** en **oppervlakte** in.

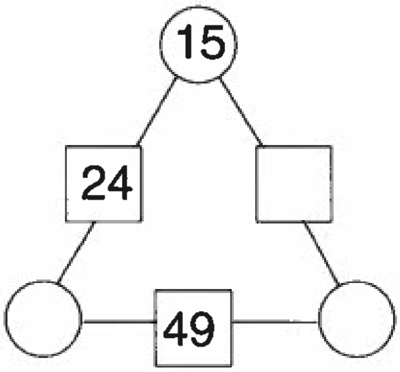
- Bedenk zelf een opgave over omtrek en oppervlakte bij deze figuur.

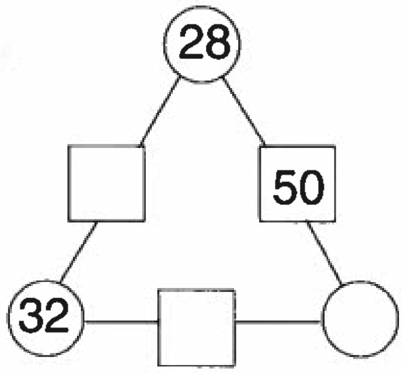
Zoek de drie getallen

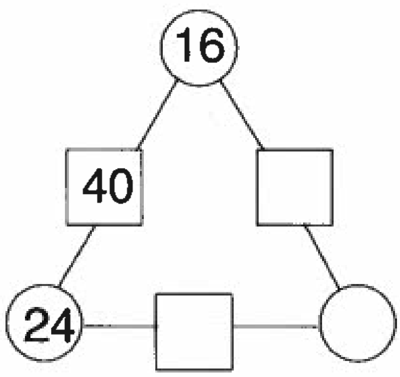


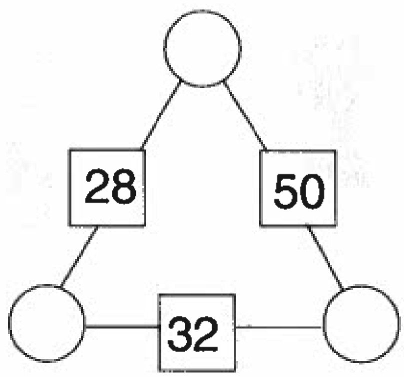


♦ Vul passende getallen in:

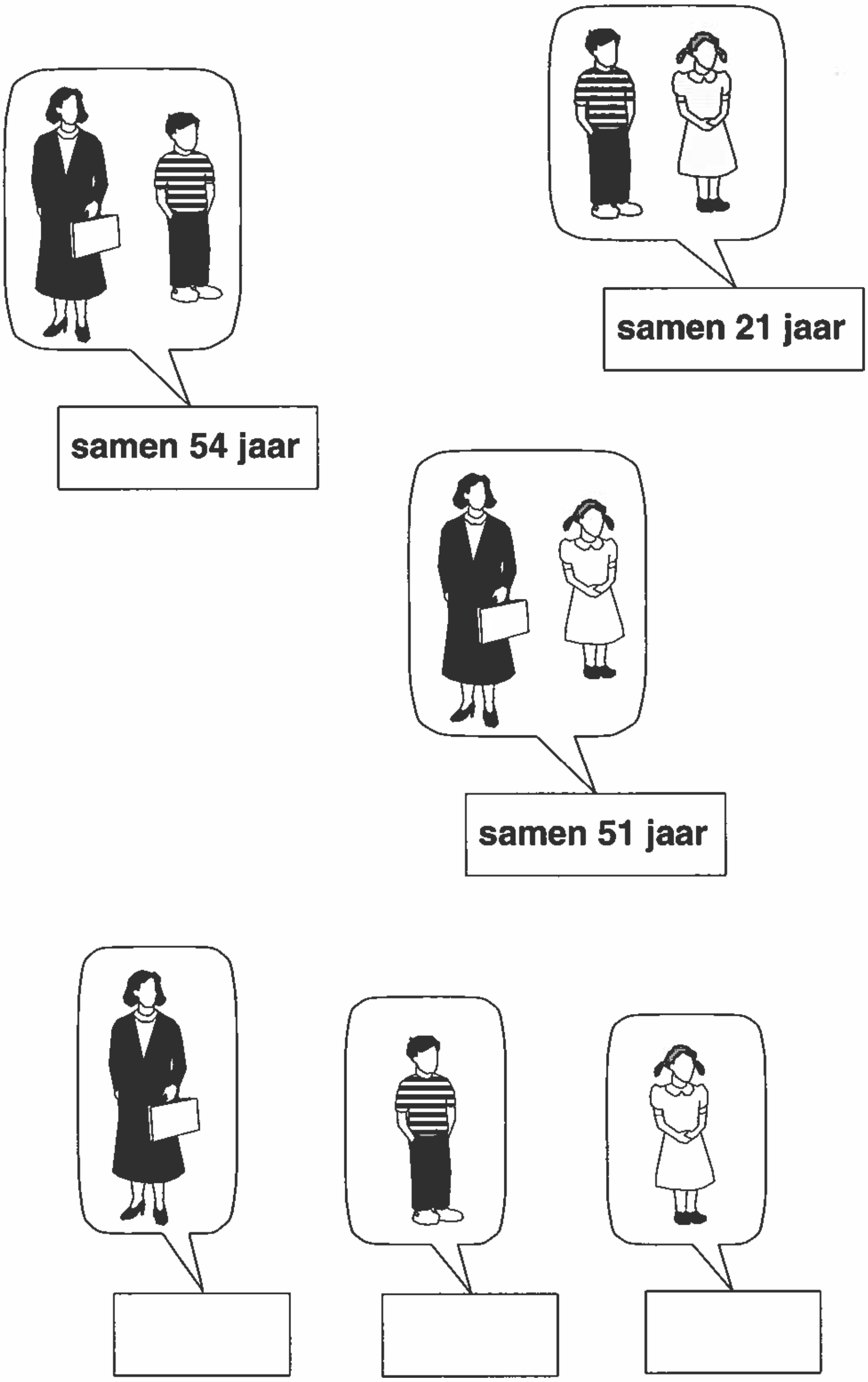




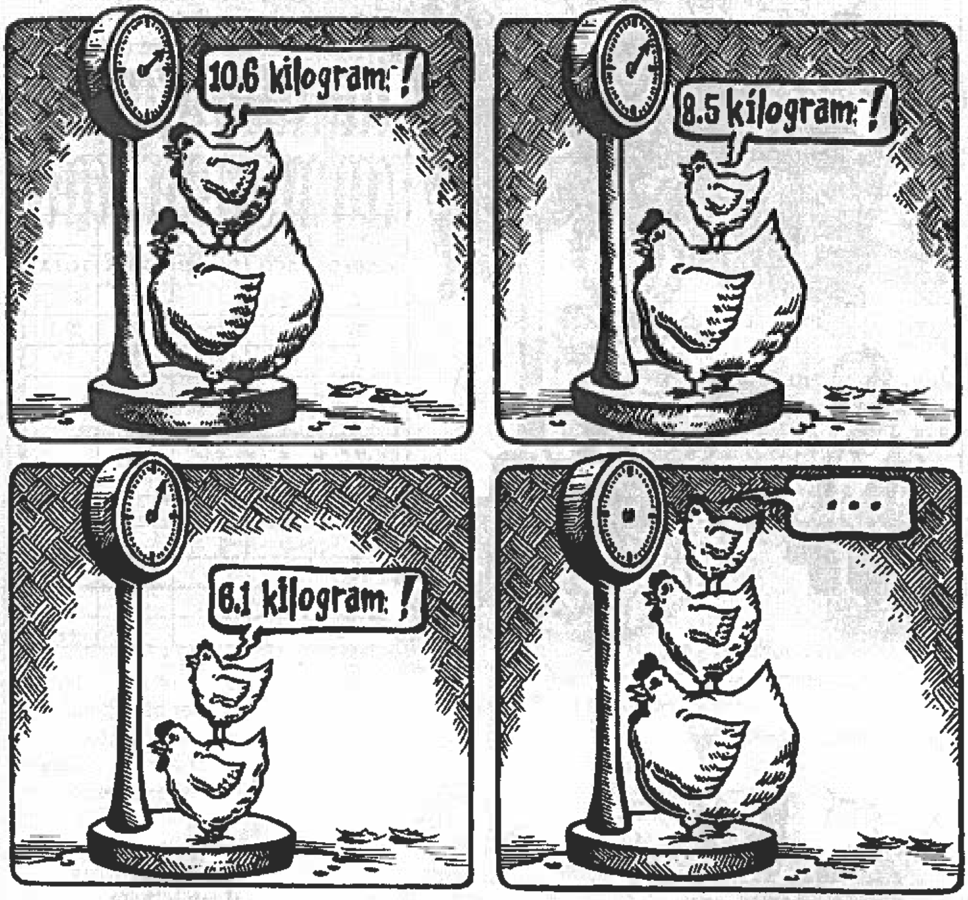




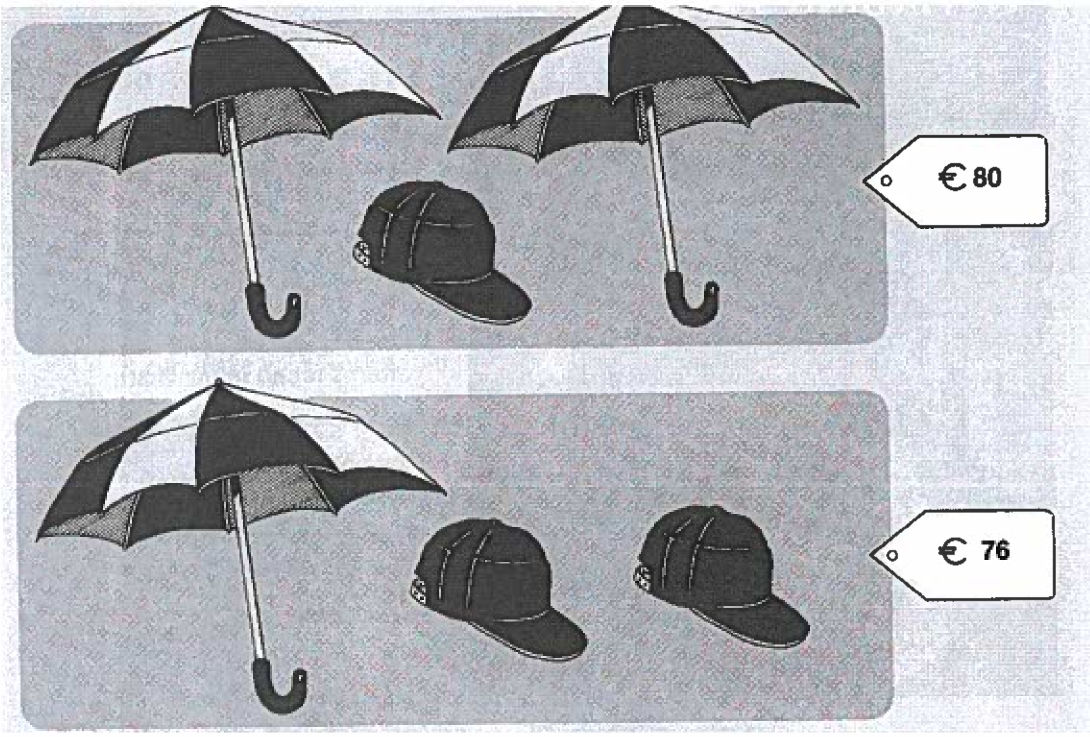
Hoe oud?

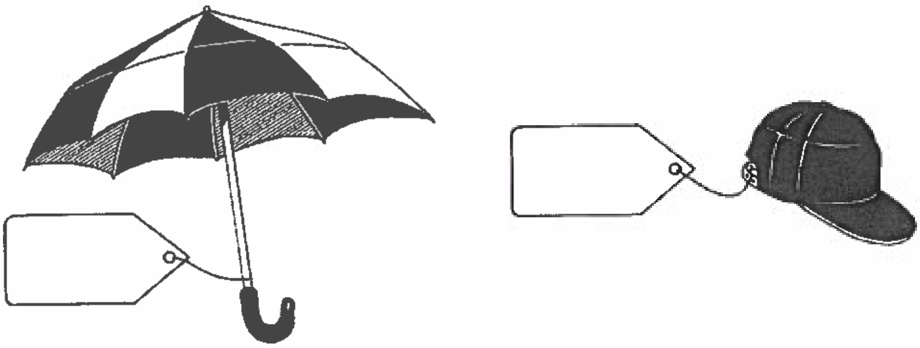


Hoe zwaar?



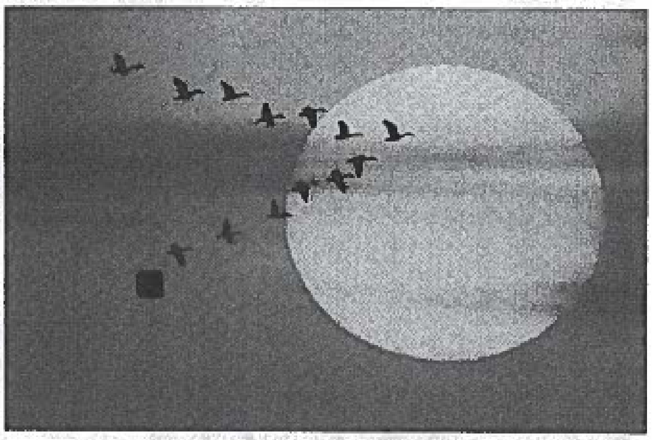
Hoe duur?



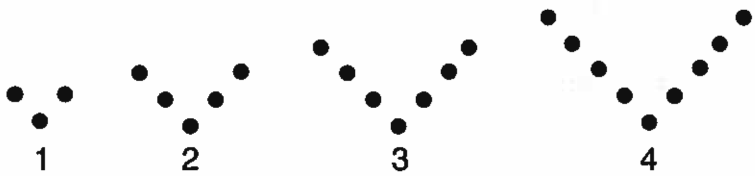


Letterpatronen (I)

Een V-formatie in de lucht...

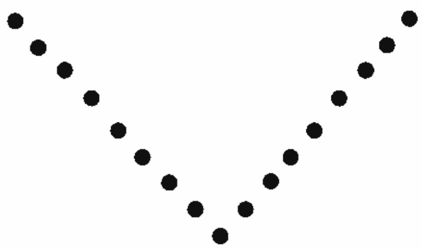


V-formaties met stippen:



Op het plaatje zie je de eerste vier V-patronen. Elk patroon heeft een rangnummer. Hieronder zie je een V-patroon met 17 stippen.

- Welke rangnummer heeft dit V-patroon?



- Hoeveel stippen heeft het V-patroon met rangnummer 85?

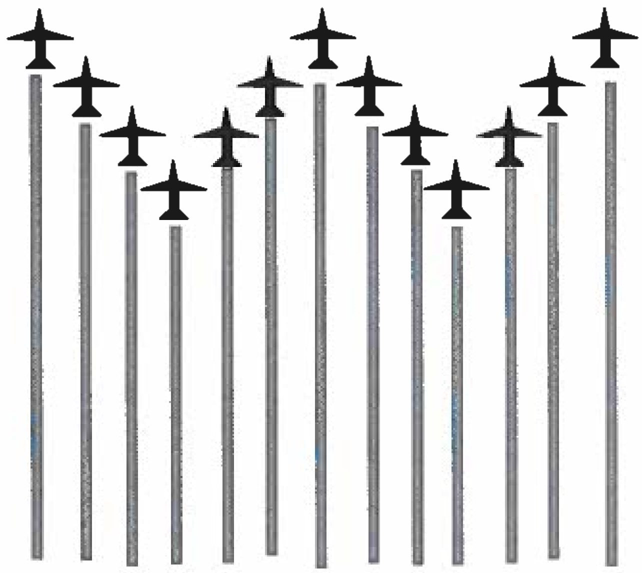
- Bestaat er een V-patroon met 35778 stippen? Waarom?

- Bedenk een regel om bij een gegeven rangnummer het aantal stippen van het V-patroon te vinden.

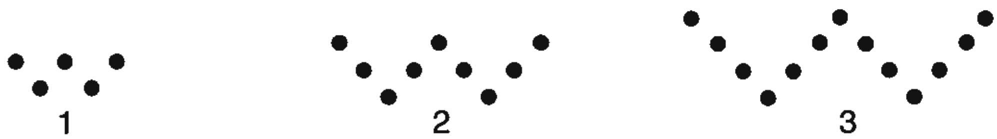
- Geef die regel ook in formulevorm; gebruik hierbij de letters n en V (n = rangnummer, V = aantal stippen)

Letterpatronen (II)

Bij een vliegshow vliegt een eskader in W-formatie.



Het begin van de rij W-patronen:



- Vul de tabel in:

rangnr	1	2	3	4	5	6
aantal stippen	5	...	...	...	...	...

- Hoeveel stippen heeft het W-patroon met rangnummer 25?

- Bedenk een formule voor het aantal stippen in het W-patroon met rangnummer *n*.

Letterpatronen (III)

- Wat is het verband tussen een W-getal en een V-getal met rangnummer *n*?
  Je zou zeggen W = 2 × V of toch niet?

- Voor een lichtreclame wil de firma Willemse een grote W maken van oranje lampjes. Zij bestellen 100 lampjes.
  Hoeveel lampjes heeft de grootste W die ze nu kunnen maken?

Het onderstaande gedicht is van Marjolein Kool.

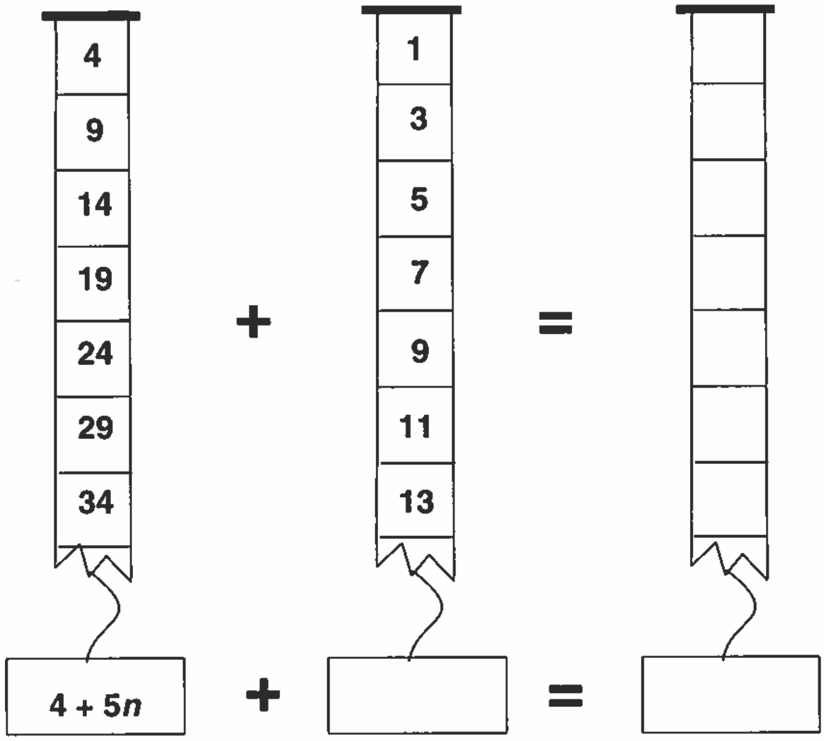
> De ganzen vlogen in een V.
> Er werd geen tijd vermorst
> en ieder die het zag benee,
> riep: 'Kijk, de V van Vorst!'
>
> Ze vlogen door tot Londen. Daar
> ontwaakte het besef:
> De V van vorst is simpel, maar
> hoe vlieg je in een F?

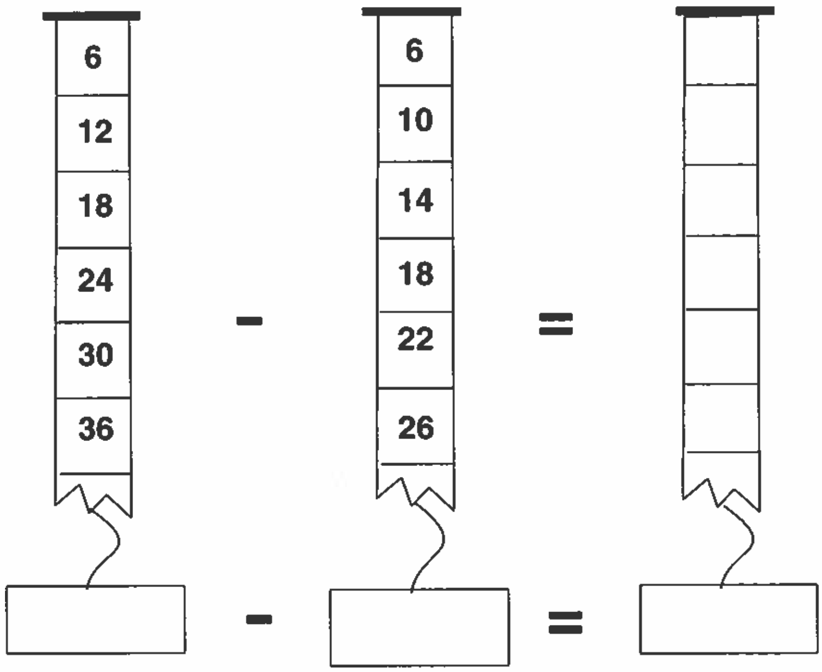
- Bedenk stippenpatronen die F-getallen voorstellen.

- Bedenk een formule voor het aantal stippen bij jouw F-patroon met rangnummer *n*

- Kies zelf nog een ander letterpatroon en maak bijbehorende formule.

Rekenen met stroken (I)





Rekenen met stroken (II)

8				10
11				20
14				30
17	+		=	40
20				50
23				60
26				70

	+		=	

18				10
36				22
54				34
72				46
90	-		=	58
108				70
126				84

	-		=	

Rekenen met stroken (III)

5 ×		=	
	1		
	3		
	5		
	7		
	9		
	11		
	13		

5 × ☐ = ☐

$\frac{1}{2}$ ×		=	
	10		
	16		
	22		
	28		
	34		
	40		
	46		

$\frac{1}{2}$ × ☐ = ☐

Rekenen met stroken (IV)

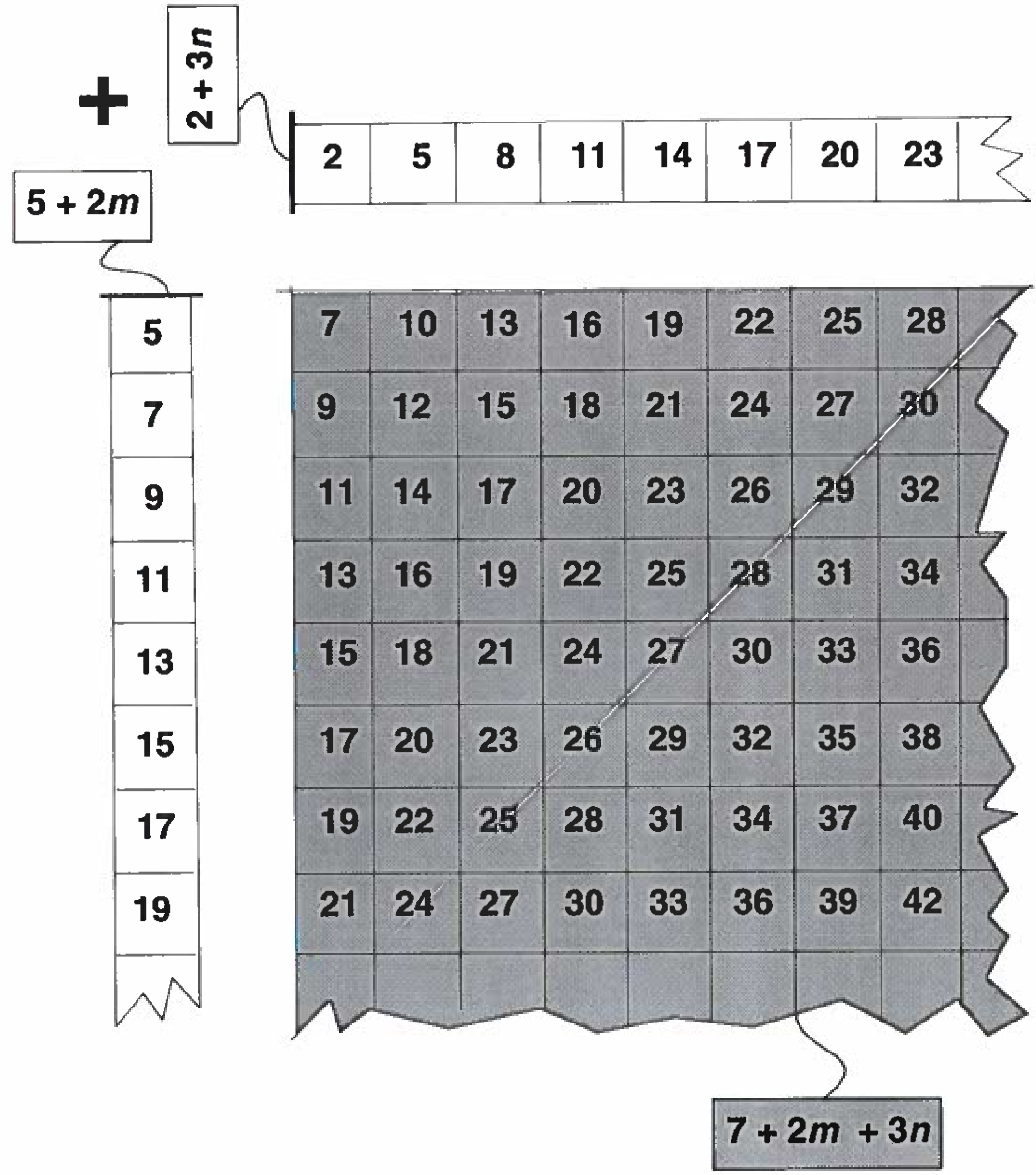
3 ×	+ 2 ×	=
2	1	
3	3	
4	5	
5	7	
6	9	
7	11	
8	13	

3 × ☐ + 2 × ☐ = ☐

2 ×	− 5 ×	=
3	1	
8	3	
13	5	
18	7	
23	9	
28	11	
33	13	

2 × ☐ − 5 × ☐ = ☐

Stroken en borden (I)

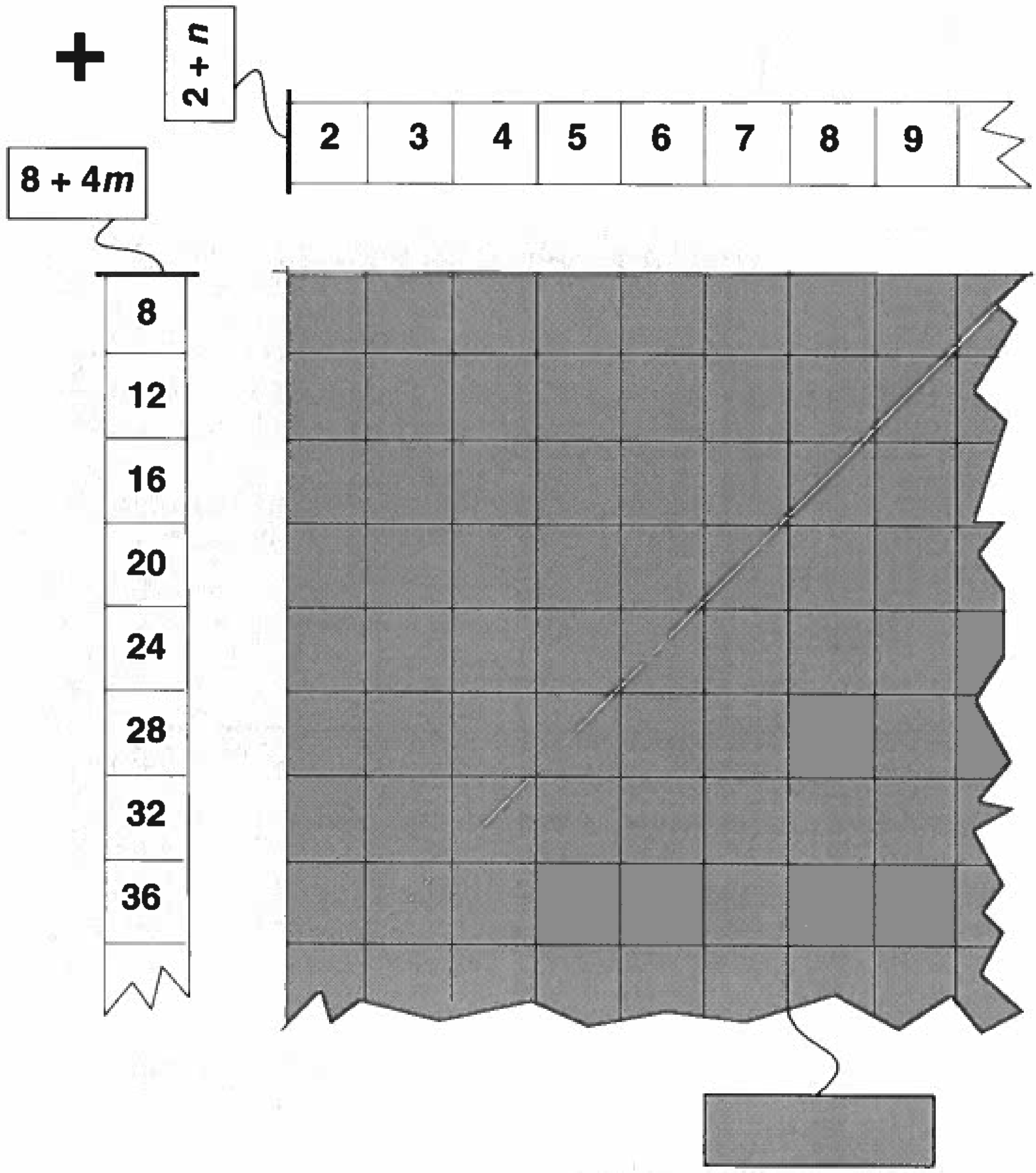


- Zoek het getal dat hoort bij $m = 3$ en $n = 2$
- Ook bij $m = 3$ en $n = 5$

- Bij $m = 4$ hoort een horizontale rij in het getallenveld. Welke rij is dat?
- Bij $n = 5$ hoort een ....

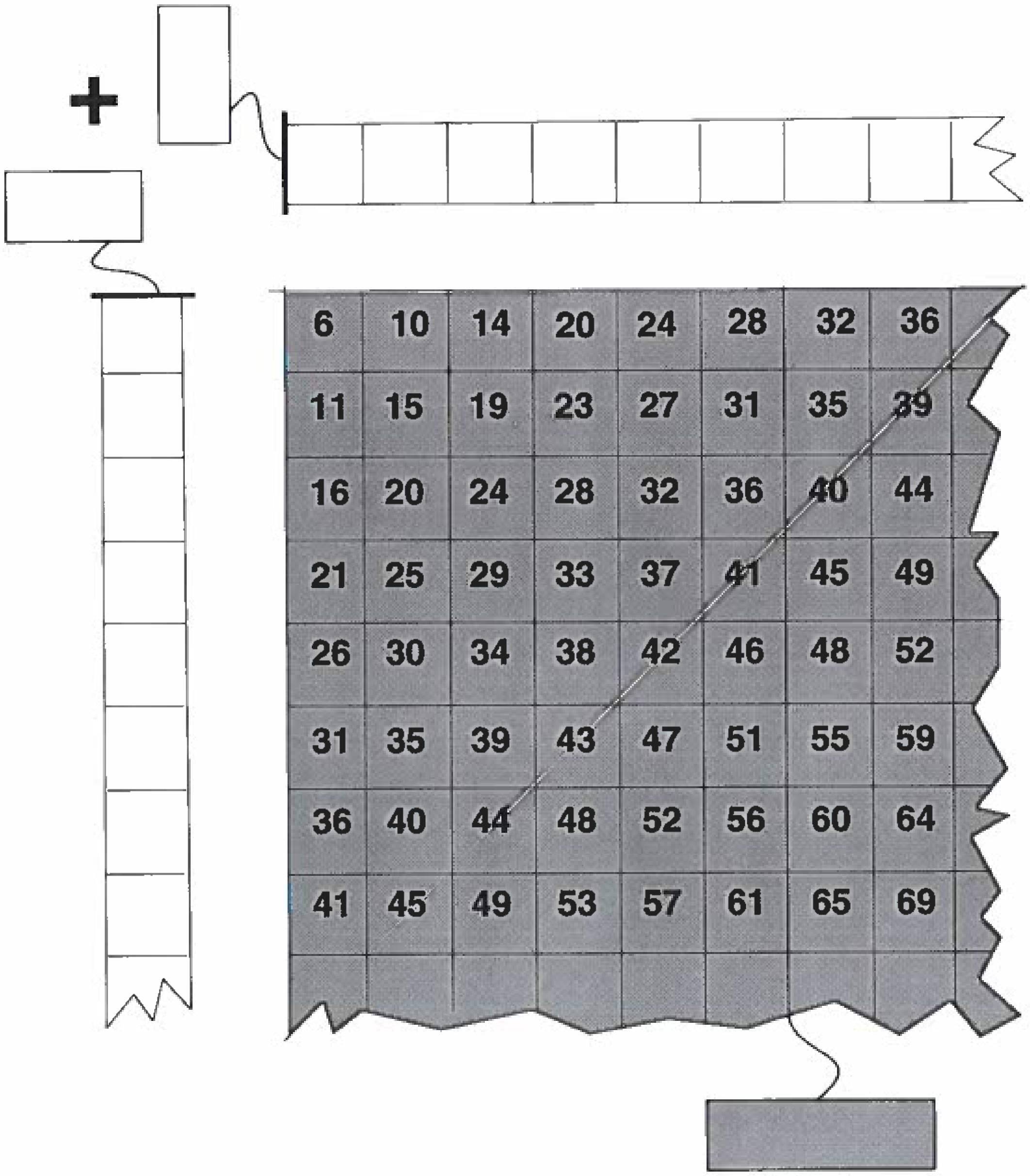
- Welke getallen uit het veld horen bij $m = n$?
- Maak daar een strook van met bijbehorende formule.

Stroken en borden (II)



- Vul het bord in. Welke formule past er bij het bord.
- Welke strook past bij $m = 3$? Welke formule heeft die strook?
- Dezelfde vragen voor $n = 0$.
- Ook voor $m = n$.
- Ook voor $m = n + 1$.

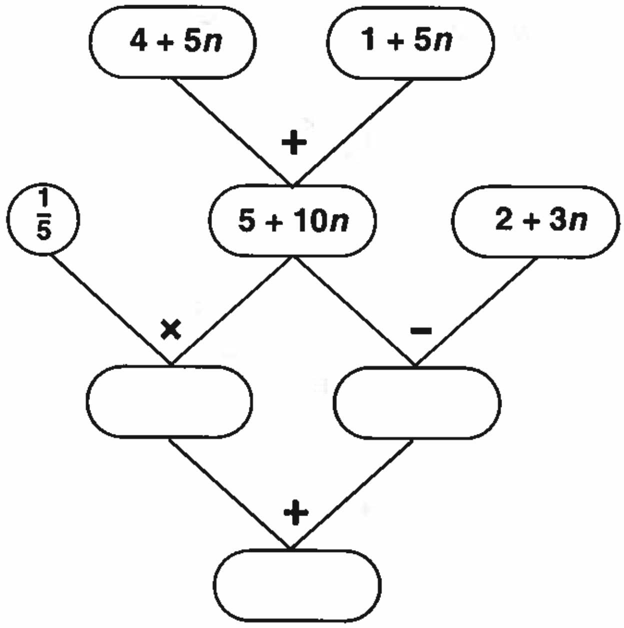
Stroken en borden (III)

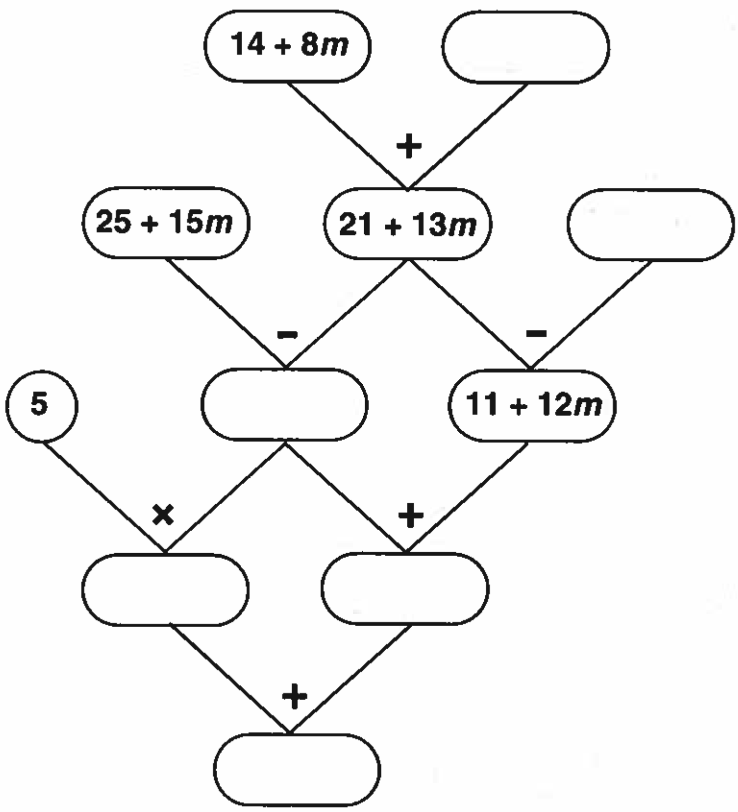


- Welke formule past er bij het bord?

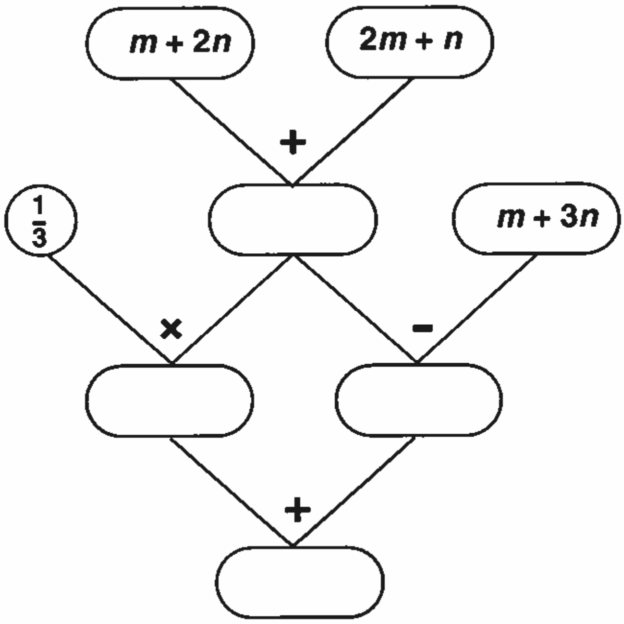
- Uit welke twee stroken kan het bord zijn ontstaan?

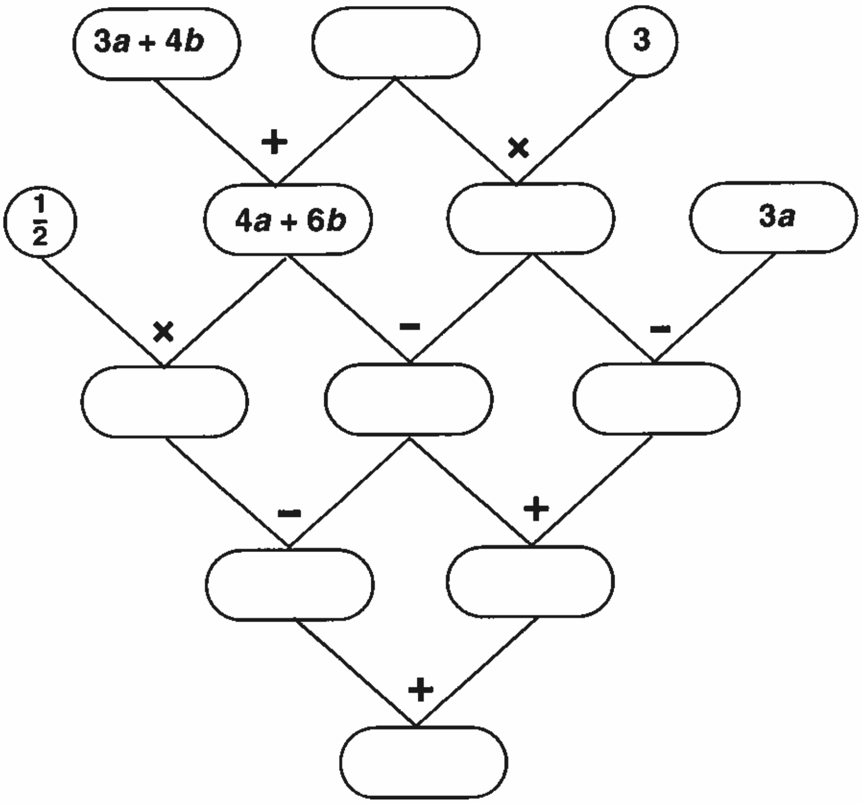
Rekenen met formules (I)





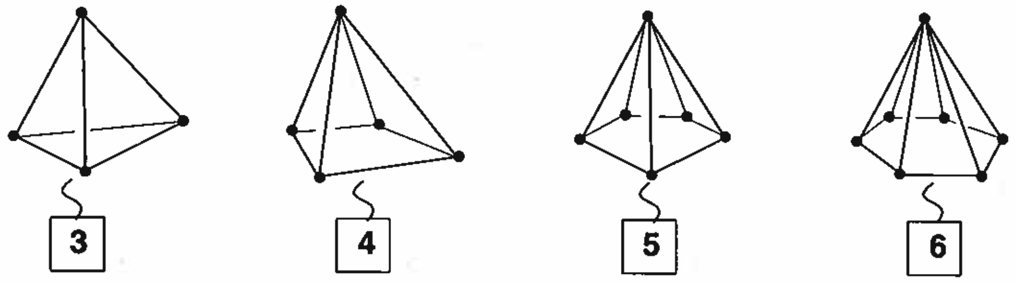
Rekenen met formules (II)





Hoekpunten, ribben, vlakken(I)

Het begin van een rij **piramides**.
Het rangnummer geeft aan hoe veelzijdig de piramide is.
De eerste piramide is 3-zijdig, de tweede 4-zijdig, enz.



Tel van elke piramide het aantal hoekpunten (= H), het aantal ribben (= R), en het aantal vlakken (= V).

Voorbeeld: voor de 4-zijdige piramide geldt: $H = 5$, $R = 8$, $V = 5$

- Vul verder in:

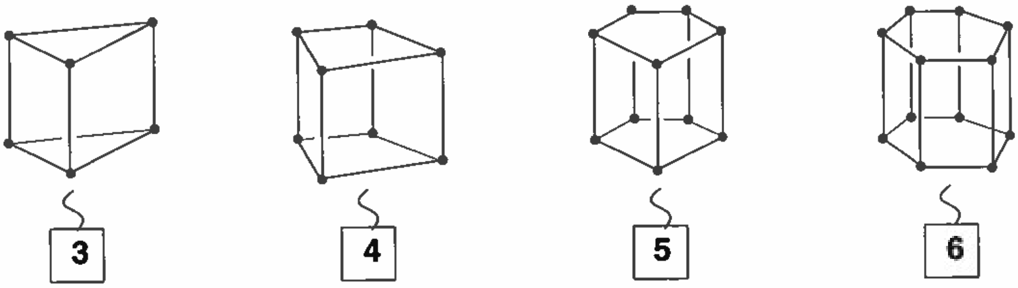
n	H	R	V
3			
4	5	8	5
5			
6			
7			

- Geef formules voor H , R en V van een n-zijdige piramide.
- Voor de hierboven getekende piramides geldt: $H + V = R + 2$. Controleer maar.
- Met de formules voor H , R en V kan worden uitgelegd dat deze gelijkheid voor **iedere** piramide waar is. Hoe?

Hoekpunten, ribben, vlakken(II)

Nu een rij **prisma's**.

Te beginnen met een **3-zijdig** prisma, daarna een **4-zijdig** prisma, enz.



Let weer op de aantallen hoekpunten, ribben en vlakken.

- Vul in:

n	H	R	V
3			
4	8	12	6
5			
6			
7			

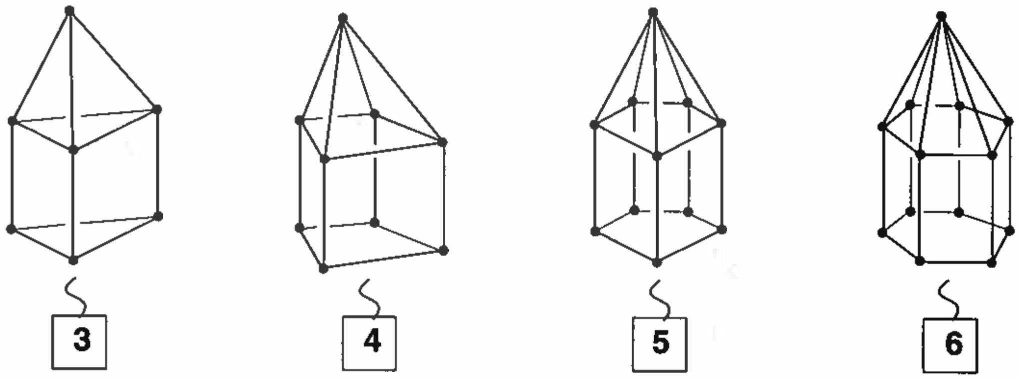
- Geef nu formules voor H, R en V van een n-zijdig prisma.

  H = ... R = ... V = ...

- Geldt voor ieder prisma de gelijkheid: $H + V = R + 2$?
  Gebruik je formules om dit uit te zoeken.

Hoekpunten, ribben, vlakken(III)

Als je een piramide op een passend prisma zet krijg je een **torentje**.



Let nu op de aantallen hoekpunten, ribben en vlakken van de torentjes.

- Vul in:

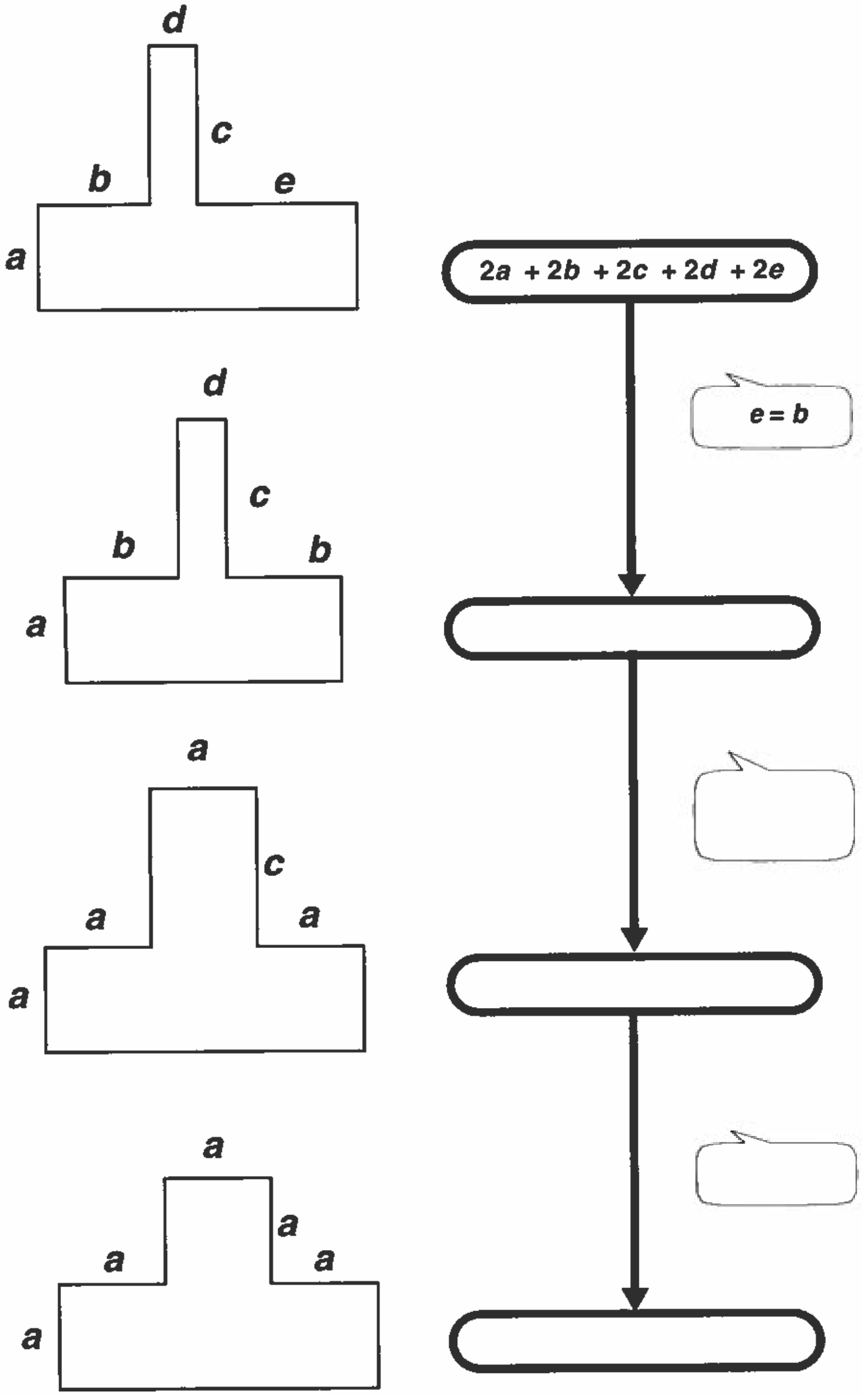
n	*H*	*R*	*V*
3			
4	9	16	9
5			
6			
7			

- Geef formules voor ***H***, ***R*** en ***V*** van een ***n***-zijdig torentje.

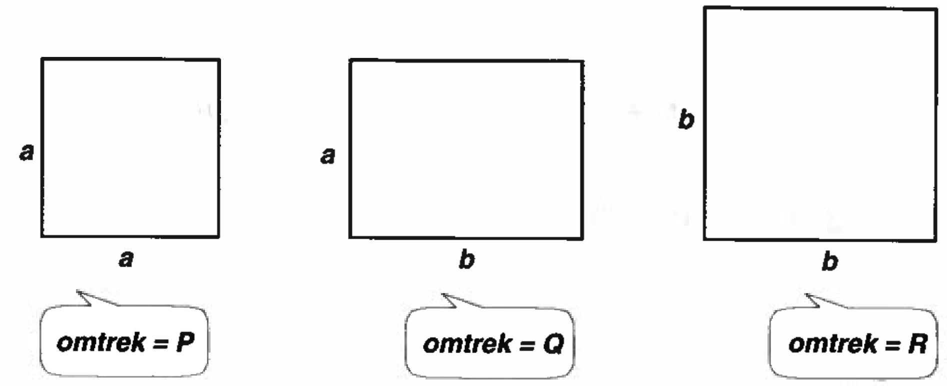
  H = ... ***R*** = ... ***V*** = ...

- Ook voor ieder torentje geldt de gelijkheid: ***H* + *V* = *R* + 2**.
  Gebruik je formules om dit uit te leggen.

Omtrekformules(I)



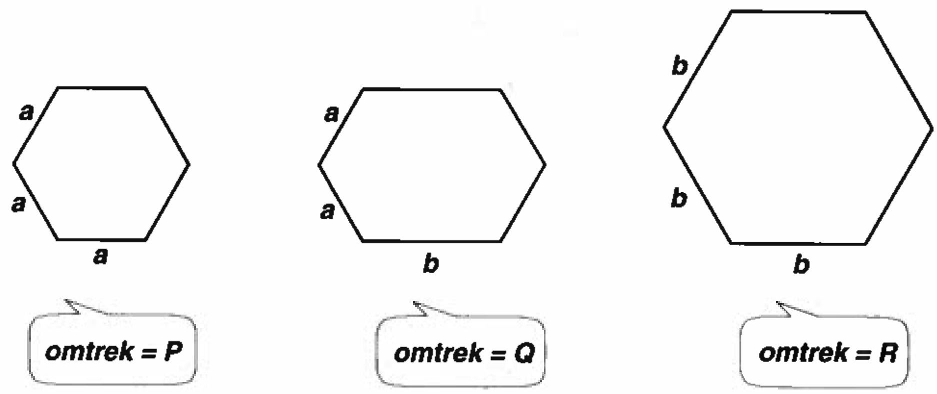
Omtrekformules(II)



- Vul passende formules in:

  $P =$ .... $Q =$ .... $R =$ ....

- Leg uit dat geldt: $Q = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}R$



- Vul passende formules in:

  $P =$ .... $Q =$ .... $R =$ ....

- Leg uit dat geldt: $Q = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}R$

Veeltermen en gewichten (I)

$$a + a + b + b + b + c + c + c + c = 2a + 3b + 4c$$

negenterm *drieterm*

2, 3 en 4 zijn de **gewichten** van *a, b en c*

Met de gewichten 2, 3 en 4 en de letters *a, b* en *c* kunnen ook andere drietermen worden gemaakt, bijvoorbeeld $4a + 3b + 2c$.
In totaal zijn er zes drietermen die je zo kunt maken.

- Schrijf de vier andere drietermen op.
- Tel de zes drietermen bij elkaar op en je krijgt weer een drieterm. Welke?

Als bekend is dat $c = b$, kun je van $2a + 3b + 4c$ een tweeterm maken!

$$\boxed{\begin{array}{c} 2a + 3b + 4c \\ c = b \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2a + 3b + 4b}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2a + 7b}$$

Dit kun je ook met de andere vijf drietermen doen.

- Hoeveel verschillende tweetermen krijg je dan? Welke?
- Als je ook nog weet dat $a = b$ kun je er ééntermen van maken. Welke?

Veeltermen en gewichten (II)

$$w + w + x + y + y + y + y + y + z + z = 2w + x + 5y + 2z$$

vierterm

w **heeft gewicht 2, *x* gewicht 1, y gewicht 5 en z gewicht 2**

Het gewicht 1 wordt in de formule vaak weggelaten, maar als je dat duidelijker vindt, mag je best schrijven: $2w + 1x + 5y + 2z$

De som van de gewichten in de vierterm is nu 10.

- Bedenk vijf andere viertermen met w, x, y en z, waarbij de som van de gewichten 10 is.

- Tel die vijf viertermen op zo dat je weer een vierterm krijgt. Wat is nu de som van de gewichten?

Als bekend is dat $w = x$ en dat $z = y$, kan $2w + x + 5y + z$ worden omgewerkt tot tweeterm.

$$\boxed{\begin{array}{c} 2w + x + 5y + 2z \\ w = x \text{ en } z = y \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2x + x + 5y + 2y}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{3x + 7y}$$

Werk jouw viertermen om tot tweetermen, gegeven dat $w = x$ en $z = y$.

- Welke tweetermen krijg je dan?

- De som van al die tweetermen is ook gelijk aan een tweeterm. Welke is dat?

Veeltermen en gewichten (III)

Op een school worden voor het vak wiskunde in het laatste periode van het jaar drie proefwerken gegeven: twee in de 'gewone' tijd (1 lesuur) en één in de proefwerkweek (2 lesuren).
Bij het bepalen van het eindcijfer is het niet eerlijk om alle drie de cijfers even zwaar te rekenen.
De leraar vertelt de klas hoe hij het cijfer uitrekent:

$$\frac{A + B + 2C}{4}$$

In de formule is A het cijfer voor het eerste, B voor het tweede en C voor het derde (lange) proefwerk.
Een andere formule (die precies hetzelfde resultaat geeft) is:

$$\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}C$$

Tanja haalt voor het eerste proefwerk een 4, voor het tweede een 6 en voor het laatste een 9.

- Bereken volgens beide formules haar eindcijfer.

- Bedenk zelf nog wat mogelijke resultaten en bereken het eindcijfer.

De leraar berekent een zogenaamd **gewogen gemiddelde.**

Een ander gewogen gemiddelde van A, B en C is bijvoorbeeld:

$$\frac{A + 2B + 3C}{6} \qquad \text{ofwel:} \qquad \frac{1}{6}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{2}C$$

- Stel dat een leraar deze formule gebruikt, om het eindcijfer uit drie proefwerken te bepalen. Zou dat 'eerlijk' kunnen zijn?

- Geef twee formules voor het 'gewone gemiddelde' (waarbij elk proefwerk even zwaar telt).

Veeltermen en gewichten (IV)

Om een voetbalveld bespeelbaar te houden kan het zo'n 150 uren per per jaar worden gebruikt. Het aantal teams dat op de velden speelt, mag daarom niet te groot zijn.

Er is een formule bedacht om te berekenen, hoeveel velden er nodig zijn om alle teams het seizoen te laten spelen.

Die formule luidt:

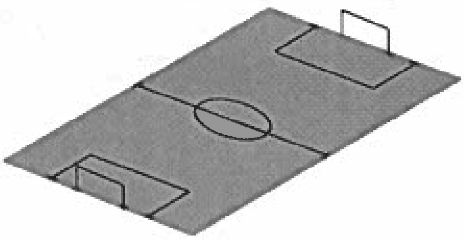
$$V = \frac{3S + 2J + P}{18}$$

V = aantal velden

S = aantal seniorenteams en junioren A-teams (groep I)

J = aantal junioren B- en C-teams (groep II)

P = aantal pupillenteams (groep III)



De 'gewichten' in de formule hebben te maken met de speeltijd van de diverse teams. Seniorenteams spelen 90 minuten.

- Hoe lang denk je dat de andere teams spelen? ______________

Club 'Roodgroen' heeft 8 teams in groep I, 12 in groep II en 8 in groep III

- Hoeveel velden heeft 'Roodgroen' nodig? ______________

Invullen in de formule geeft lang niet altijd een gehele uitkomst.
Neem 'Blauwgeel'. Die club heeft 12 teams in groep I, 14 in II en 16 in III.

- Hoeveel velden heeft die club nodig? (Rond de uitkomst naar boven af)

____

De clubs 'Roodgroen' en 'Blauwgeel' gaan fuseren (worden samen één).
De naam van de nieuwe club wordt 'Regenboog'.

- Hoeveel velden heeft 'Regenboog' nodig? ______________

Stel dat er maar één veld beschikbaar is voor een voetbalclub.
De club heeft teams in alle drie de groepen.

- Welke aantallen teams in de groepen I, II en III zijn dan mogelijk?

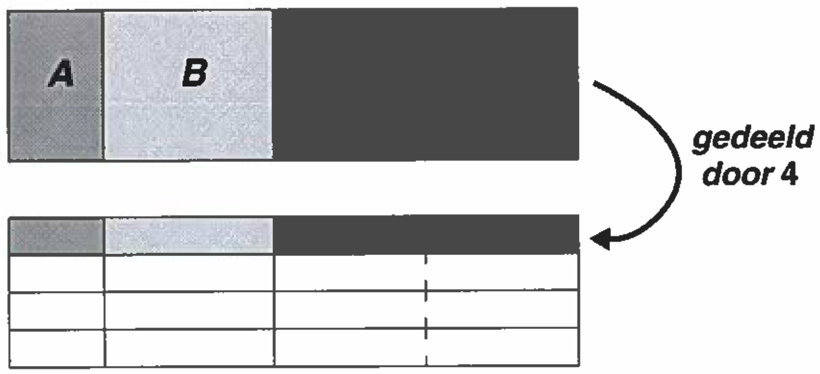
____

Gelijkwaardig (I)

$\frac{A+B+2C}{4}$ en $\frac{1}{4}A+\frac{1}{4}B+\frac{1}{2}C$ zijn **gelijkwaardig**

Dat betekent: welke getallen je ook invult voor *A*, *B* en *C*, de uitkomsten van beide zullen steeds hetzelfde zijn.

Dit kan bijvoorbeeld worden uitgelegd met een plaatje.



- Gelijkwaardig of niet?

$\frac{A+2B+3C}{6} \overset{?}{=} \frac{1}{6}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{2}C$

$\frac{A+2B+3C}{6} \overset{?}{=} \frac{A}{6}+\frac{B}{3}+\frac{C}{2}$

$2 \times (5A+3B+C) \overset{?}{=} 10A+3B+C$

$2 \times (5A+3B+C) \overset{?}{=} 2 \times (5A+3B)+C$

$2 \times (5A+3B)+C \overset{?}{=} 10A+6B+C$

Gelijkwaardig (II)

Tien formules.

Een groepje *gelijkwaardige* formules noemen we een *familie*.

- Verbind de leden van dezelfde familie door een lijntje.

$3X + 18Y + 63Z$

$3 \times (X + 6Y + 21Z)$

$3 \times (X + 7Z) + 6Y$

$3X + 3 \times (2Y + 7Z)$

$3X + 18Y + 21Z$

$3 \times (X + 6Y) + 21Z$

$3 \times (X + 2Y + 7Z)$

$3X + 6Y + 21Z$

$3 \times (X + Y) + 3 \times (Y + 7Z)$

Gelijkwaardig (III)

- Bedenk zoveel mogelijk formules die gelijkwaardig zijn met:

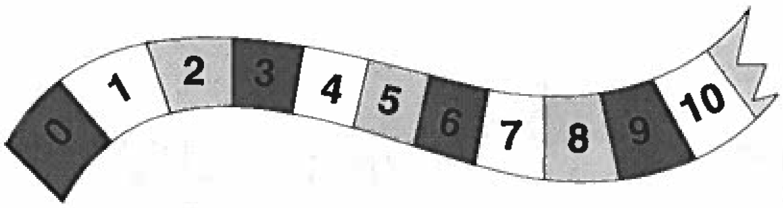
$$\mathbf{5}\boldsymbol{a} + \mathbf{10}\boldsymbol{b} + \mathbf{20}\boldsymbol{c}$$

Spelregel: de letters *a, b* en *c* mogen elk maar één keer voorkomen in een formule.

- Net zo voor:

$$\frac{P + 2Q + 2R + 4S}{12}$$

Rood-wit-blauw (I)



De getallenstrook is rood-wit-blauw-rood-wit-blauw-rood-... enzovoort

- Welke kleur heeft het veld van getal **100**? En van **1000**?

- Welke getallen tussen **1000** en **1010** staan op een rood veld?

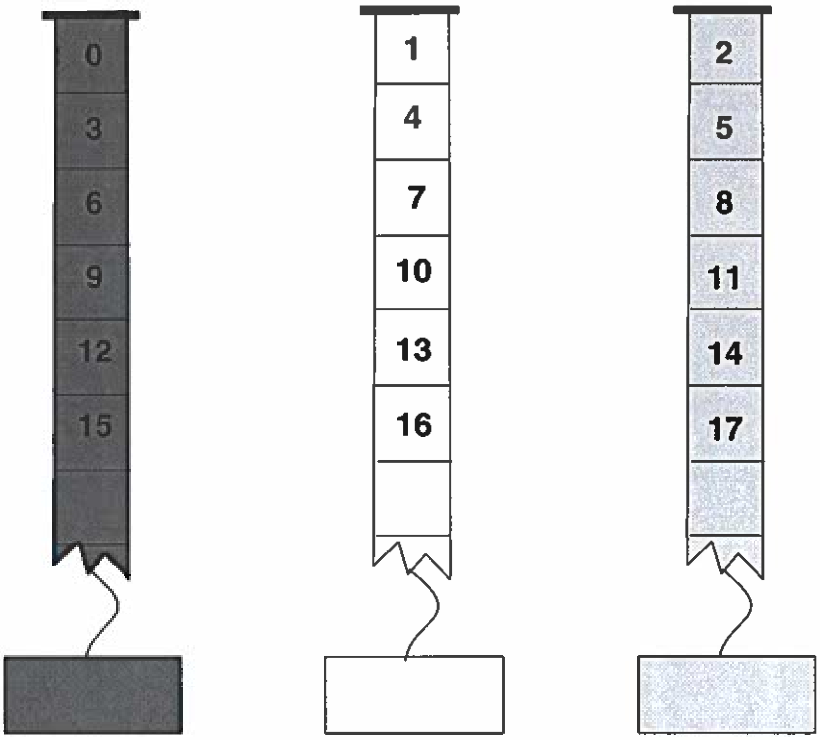
- Bedenk zelf een 'blauw getal' van vijf cijfers.

- Als je twee 'rode getallen' optelt, het doet er niet toe welke, krijg je weer een 'rood getal'. Is dat waar, denk je?
  Zo ja,probeer uit te leggen waarom dat zo is.

- Wat weet je van de som van twee 'blauwe getallen' ?

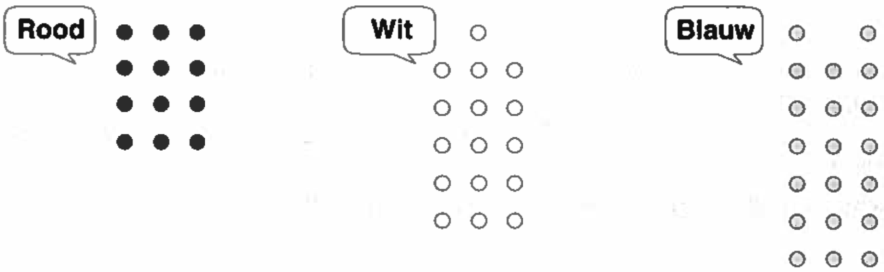
Rood-wit-blauw (II)

Een rode, een witte en een blauwe strook.
♦ Geef bij elk een passende formule.



Rood-wit-blauw (III)

De rode, witte en blauwe getallen kunnen worden voorgesteld door 'stippenpatronen'. Bijvoorbeeld:



Aan het stippenpatroon kun je bijvoorbeeld zien: **Wit + Blauw = Rood**

♦ Hoe zie je dat? Doet het er toe welk wit en welk blauw getal je neemt?

♦ Vul de *opteltabel* in.

+	**Rood**	**Wit**	**Blauw**
Rood			
Wit			**Rood**
Blauw			

Verschillende verschillen(I)

Isabelle heeft €100 verdiend; zij wil een paar Nikes kopen, die normaal €70 kosten. Ze denkt dus €30 over te houden.
Wat een geluk! Als ze in de winkel komt blijken ze € 8 afgeprijsd.

- Hoeveel euro's houdt ze over?
- Je kunt dat zó uitrekenen: $100 - (70 - 8)$, of zó: $(100 - 70) + 8$
  Welke manier heb jij gedaan?
  Leg uit, zonder naar de uitkomst te kijken, dat de andere manier ook goed is.

Stel dat Isabelle van te voren wist, dat de Nikes afgeprijsd waren, maar dat ze niet wist hoeveel euro's er afgingen ...
Ze wist dus dat ze meer dan 30 euro's terug zou krijgen voor haar briefje van honderd.

- Verklaar uit dit verhaaltje: $\mathbf{100 - (70 - \boldsymbol{a}) = 30 + \boldsymbol{a}}$

Nog een wat algemenere formule: $\mathbf{100 - (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) = 100 - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}}$

- Verklaar die formule met een verhaaltje.
  (Je mag veronderstellen $p < 100$ en $a < p$).

Een fout die vaak wordt gemaakt is: $100 - (p - a) = 100 - p - a$

- Verzin een verhaaltje waarbij iemand $100 - p - a$ terugkrijgt van 100 euro's in plaats van $100 - p$.

- Vul in: $100 - (\dots\dots\dots) = 100 - p - a$

Verschillende verschillen(II)

Als je **minder** aftrekt, hou je **meer** over.

Voorbeeld:

$$50 - 20 = 30$$
$$50 - (20 - x) = 30 + x$$

Als je **meer** aftrekt, hou je **minder** over.

- Geef zelf een voorbeeld:

- Vier gevolgtrekkingen. De eerste is compleet. Verklaar die.
  Maak de ander drie compleet.

$y = 10 - x$
$z = 15 - y$

$z = 5 + x$

$y = 10 - x$
$z = 15 + y$

$z =$ ....

$y = 10 + x$
$z = 15 + y$

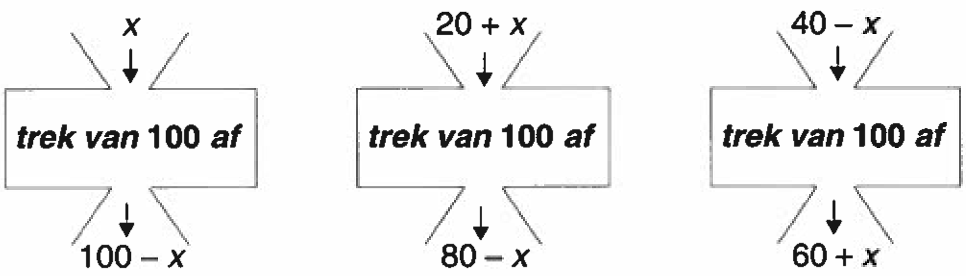
$z =$ ....

$y = 10 + x$
$z = 15 - y$

$z =$ ....

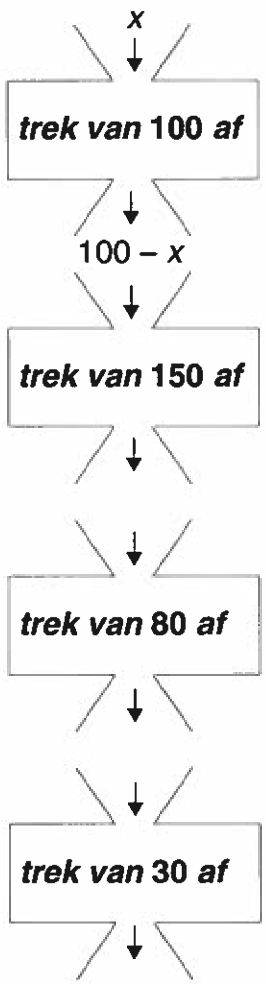
- Bedenk zelf ook een paar van zulke gevolgtrekkingen.
  Gebruik andere letters dan *x, y ,z.*

Verschillende verschillen(III)



- INVOER en UITVOER zijn samen steeds 100. Controleer!

- Maak de ketting af :



Bij de ketting van machientjes hoort een 'ketting van verschillen':

$30 - [80 - (150 - (100 - x))] = ...$

- Wat is de uitkomst?

- Maak zelf een ketting van machientjes en geef de uitkomst bij:

  $10 - (9 - (8 - y))$

  $16 - [9 - (4 - (1 - a))]$

  $32 - [16 - [8 - (4 - (2 - k))]]$

- Bedenk zelf zo'n kettingopgave.

Maak dat het klopt (I)

$$\begin{array}{c} \boxed{X = 5} \\ \downarrow \\ \boxed{20 + 5X = 45} \end{array}$$

Controleer dat dit klopt.

- Nu omgekeerd.
  Zoek een waarde voor
  X waarbij dit klopt:

$$\begin{array}{c} \boxed{X = \ldots} \\ \downarrow \\ \boxed{20 + 5X = 35} \end{array}$$

- In de volgende schema's moet je steeds een waarde voor
  X zien te vinden, waarbij de onderste regel klopt.
  Het is een kwestie van 'raden met verstand' en narekenen!
  In alle gevallen

$$\begin{array}{c} \boxed{X = \ldots} \\ \downarrow \\ \boxed{25 + X = 125} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boxed{X = \ldots} \\ \downarrow \\ \boxed{25X = 125} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{X = \ldots} \\ \downarrow \\ \boxed{\dfrac{1}{X+1} = \dfrac{1}{5}} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boxed{X = \ldots} \\ \downarrow \\ \boxed{\dfrac{1}{X-1} = \dfrac{1}{5}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{X = \ldots} \\ \downarrow \\ \boxed{X \times (X + 1) = 30} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boxed{X = \ldots} \\ \downarrow \\ \boxed{\dfrac{X}{X+1} = \dfrac{3}{4}} \end{array}$$

Maak dat het klopt (II)

$$\frac{2}{A+1} = 1$$

$$\frac{B+1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{C-1}{C+1} = \frac{3}{5}$$

$$E^2 + E = 110$$

$$(D-1) \times (D+1) = 99$$

$$5 \times (F + 10) = 80$$

$$2G = G + 17$$

$$\frac{1}{H} + \frac{7}{8} = 1$$

$$A + B + C + D + E + F + G + H = 60$$

Maak dat het klopt (III)

$$a = 4$$

$$a + 2b = 10$$

$$a + 2b + 3c = 28$$

$$a + 2b + 3c + 4d = 68$$

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e = 93$$

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f = 123$$

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g = 200$$

- Voor welke waarden van *b, c, d, e, f, g* kloppen alle regels in de driehoek?
- Hoe veranderen de antwoorden als *a* niet 4, maar 8 is?

Generatieproblemen

Anja, haar moeder, haar grootmoeder en haar overgrootmoeder zijn vandaag samen 200 jaar.

Moeder was 30 jaar toen Anja geboren werd.

Grootmoeder was 25 jaar toen Anja's moeder geboren werd.

Overgrootmoeder was 20 jaar bij de geboorte van Anja's oma.

Stel de leeftijd van Anja, haar moeder, haar grootmoeder en haar overgrootmoeder achtereenvolgens gelijk aan ***a, b, c*** en ***d*** jaar.

- Schrijf alles wat je weet over ***a, b, c*** en ***d*** in formulevorm.

- Bereken ***a, b, c*** en ***d***.

Peter, zijn vader, zijn grootvader en zijn overgrootvader zijn ook samen 200 jaar.

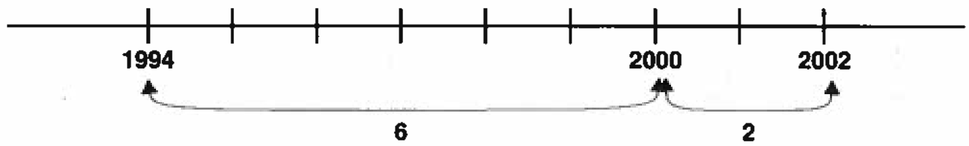
Vader is vier keer zo oud als Peter, grootvader is anderhalf keer zo oud als vader, overgrootvader is anderhalf keer zo oud als grootvader.

Stel de leeftijd van Peter, zijn vader, zijnr grootvader en zijn overgrootvader achtereenvolgens gelijk aan ***p, q, r*** en ***s*** jaar.

- Schrijf alles wat je weet over ***p, q, r*** en ***s*** in formulevorm.

- Bereken ***p, q, r*** en ***s***.

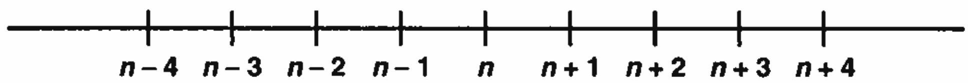
Op de getallenlijn (I)



Tussen 1994 en 2002 zit 8 jaar.

- Hoeveel jaar zit er tussen 2011 en 1945?

In het jaar $\boldsymbol{n}$ landen er voor het eerst mensen op Mars.
Na 1 jaar landen zij weer veilig op aarde, dat is dan in het jaar $\boldsymbol{n+1}$.
Weer 1 jaar later blijken ze een onbekende ziekte te hebben,
dat is in het jaar $\boldsymbol{n+2}$.
Met de bouw van de lanceringsraket werd 1 jaar tevoren begonnen,
dus in het jaar $\boldsymbol{n-1}$



Tussen $\boldsymbol{n-1}$ en $\boldsymbol{n+2}$ zit 3 jaar.
Je kunt dus schrijven:

$$(n+2)-(n-1)=3$$

- Hoeveel jaar zit er tussen $\boldsymbol{n-4}$ en $\boldsymbol{n+10}$?

- Bereken:

$$(n+8)-(n-2)=$$

$$(n+7)-(n-3)=$$

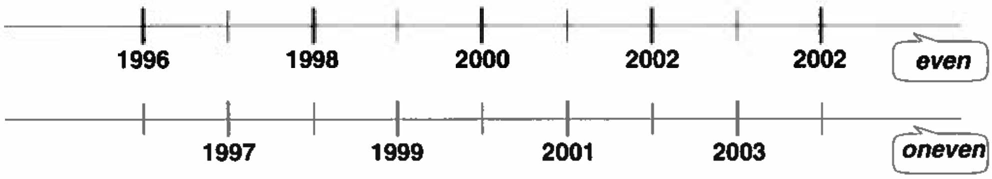
$$(n-1)-(n-4)=$$

$$(n+3)-(n-3)=$$

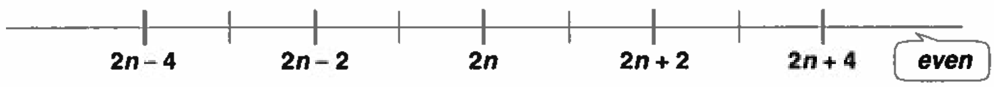
- Hoeveel jaar zit er tussen $\boldsymbol{n-k}$ en $\boldsymbol{n+k}$?

Op de getallenlijn (II)

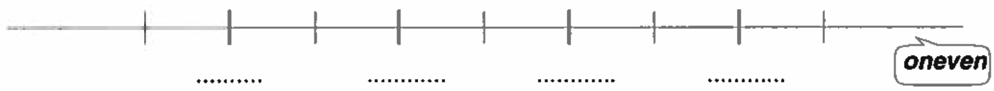
Even en **oneven** jaren



Een **willekeurig** even jaartal kan je voorstellen door $\mathbf{2n}$.
Het even jaartal dat volgt op $\mathbf{2n}$ is $\mathbf{2n + 2}$, daarop volgt $\mathbf{2n + 4}$, enz.
Het even jaartal dat voor $\mathbf{2n}$ ligt, is $\mathbf{2n - 2}$, daarvoor ligt $\mathbf{2n - 4}$, enz.



Daar tussen liggen de oneven jaartallen.



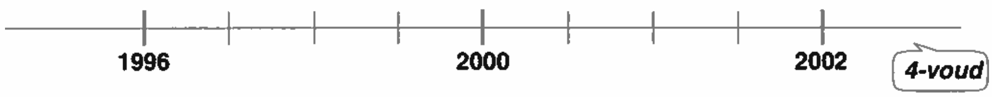
- Schrijf passende formules bij de 'oneven getallenlijn'.
- Bereken:

$$\mathbf{(2n + 8) - (2n - 6) =}$$

$$\mathbf{(2n + 3) - (2n - 3) =}$$

$$\mathbf{(2n + 4) - (2n - 3) =}$$

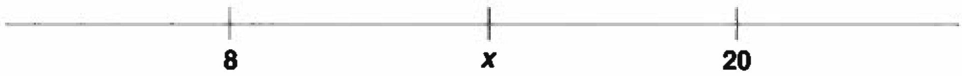
Olympische jaartallen zijn deelbaar door 4.



- Hoe kun je een **willekeurig** Olympisch jaartal voorstellen?
- Welk Olympisch jaartal volgt daarop en welk gaat vooraf?

  Olympische winterspelen worden tegenwoordig in een jaar gehouden, dat precies midden tussen twee Olympische jaren ligt.
- Hoe kun je een **willekeurig** jaartal van winterspelen voorstellen?

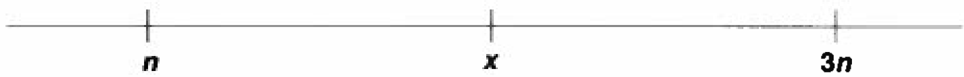
Op de getallenlijn (III)



Het getal x is zó gekozen dat: $x - 8 = 20 - x$

- Welke waarde heeft x?

- Welke waarde heeft x als geldt: $x - 1971 = 2001 - x$?

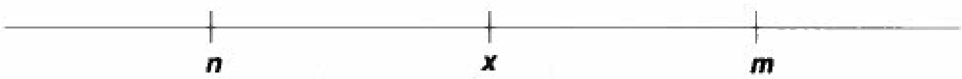


formule in n

- $x - n = 3n - x \longrightarrow x =$ ....

formule in n

- $x - 5n = 25n - x \longrightarrow x =$ ....



formule in n en m

- $x - n = m - x \longrightarrow x =$ ....

Op de getallenlijn (IV)

Het getal y is zó gekozen dat: $y - 8 = 2 \times (20 - y)$
- Welke waarde heeft y?

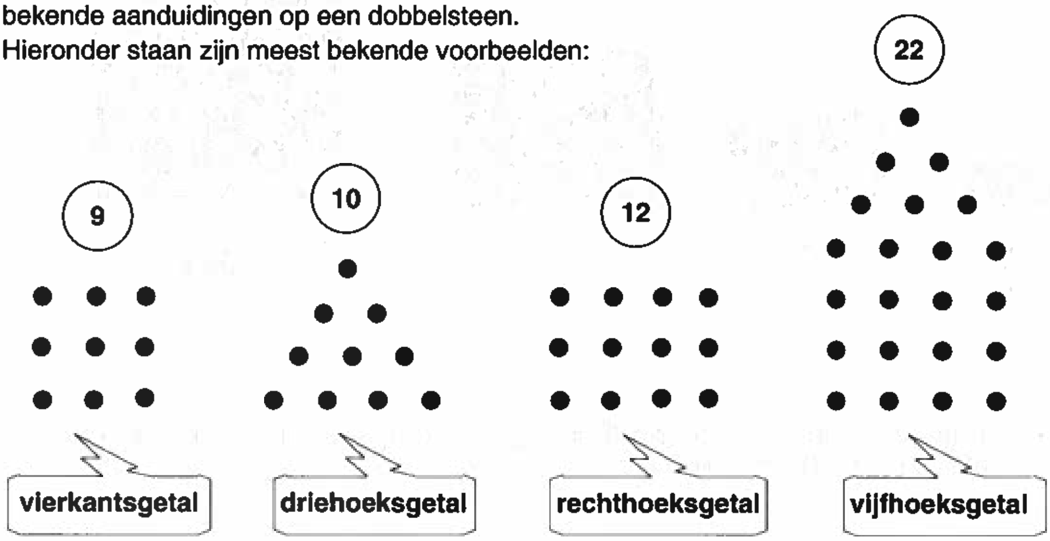
- Welke waarde heeft y als: $y - 1971 = 2 \times (2001 - y)$?

$y - n = 2 \times (m - y)$
- Welke formule (in n en m) kun je bedenken voor y ?

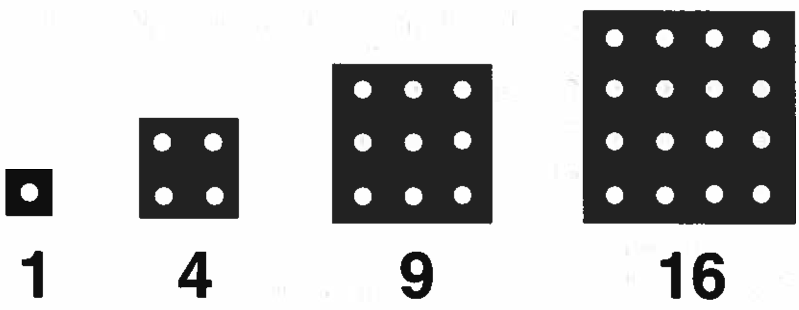
- Maak een verdeling van het stuk tussen **8** en **20** en plaats z ergens tussenin.
- Welke gelijkheid hoort daarbij? Welke waarde krijgt z?
- Hoe zit het als je **8** en **20** vervangt door n en m?

Stippenpatronen (I)

Nikomachos leefde omstreeks het jaar 100 na Chr in Griekenland.
Hij schreef een boek over wat hij noemde de ' wonderbaarlijke en goddelijke eigenschappen van de natuurlijke getallen'.
Nikomachos stelde getallen soms voor door 'stippenpatronen', vergelijkbaar met de bekende aanduidingen op een dobbelsteen.
Hieronder staan zijn meest bekende voorbeelden:



Je ziet welke namen hij aan de soorten getallen gaf.
Laten we beginnen met de eerste soort, de *vierkantsgetallen*.



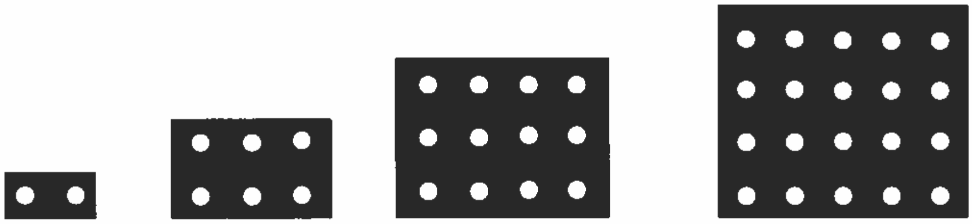
- Schrijf de volgende tien vierkantsgetallen op. De stippenpatronen hoef je niet te tekenen (in gedachten kun je die wel 'zien').

- Let op de sprongen tussen twee opvolgende vierkantsgetallen. Welke regelmaat zie je? Hoe kun je dat aan de stippenpatronen zien?

- 144 is een vierkantsgetal. Hoe zit dat met 1444? En met 14444? Gebruik een rekenmachientje om dat te onderzoeken.

Stippenpatronen(II)

De eerste vier *rechthoeksgetallen*



2 6 12 20

- Schrijf de volgende tien rechthoeksgetallen op. De stippenpatronen zet je in gedachten voort.

- Let op de sprongen tussen twee opvolgende rechthoeksgetallen. Welke regelmaat zie je? Hoe kun je dat aan de stippenpatronen zien?

- Is 9900 een rechthoeksgetal? Licht je antwoord toe.

Neem het gemiddelde van paren opvolgende rechthoeks getallen.
Dat begint zo:

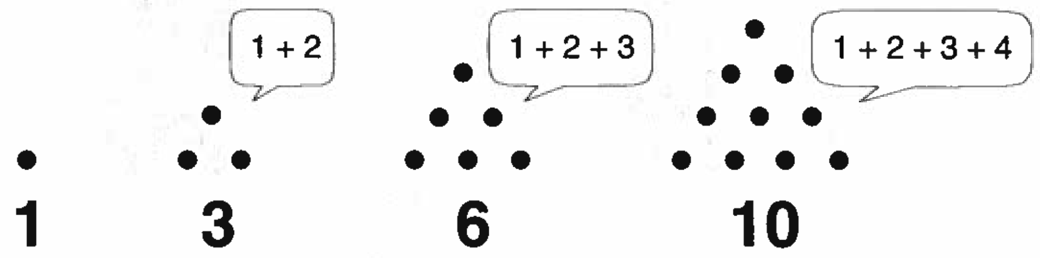
gemiddelde van 2 en 6 is 4
gemiddelde van 6 en 12 is 9
gemiddelde van 12 en 20 is 16

- Ga hier nog even mee door.
  Welke bijzondere getallen krijg je als gemiddelden?
  Probeer dat te verklaren.

Stippenpatronen(III)

Nikomachos is niet de eerste geweest die stippenpatronen gebruikte. Ruim 600 jaar eerder (zo'n 500 jaar voor Chr.) leefde Pythagoras, een geleerde die leider was van een religieuze sekte.
In de leer van Pythagoras speelden 'natuurlijke getallen' de hoofdrol.
De lijfspreuk van hem en zijn volgelingen was: '*alles is getal*'.

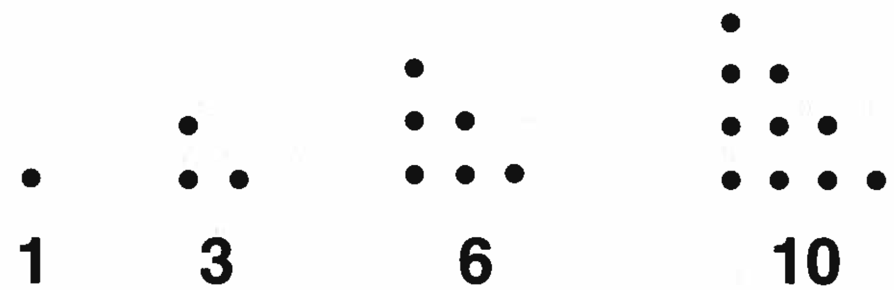
Het favoriete getal was de som van de getallen 1, 2, 3 en 4 , dus 10.



10 is het vierde getal in de rij van *driehoeksgetallen*.

- Schrijf de volgende tien driehoeksgetallen op.

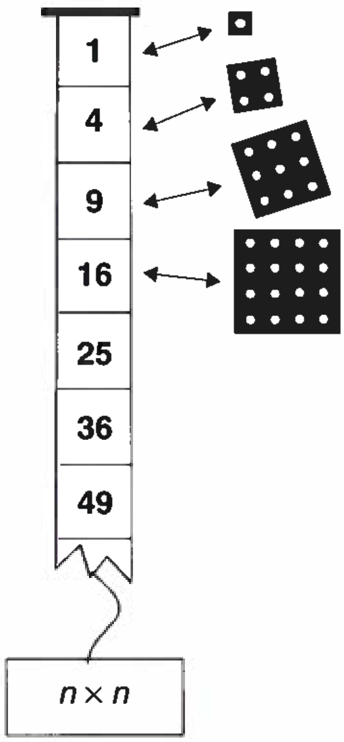
De stippenpatronen van de driehoeksgetallen kun je ook zó tekenen:



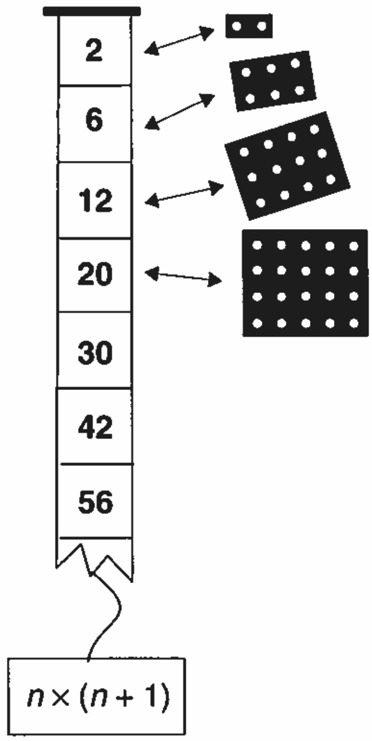
- Welke speciale getallen krijg je als elk van de driehoeksgetallen verdubbelt? Hoe kun je dat verklaren vanuit de stippenpatronen?
- Is 4950 een driehoeksgetal? Licht je antwoord toe.
- Bereken de som van alle hele getallen onder 100.

Stroken bij stippen(I)

vierkantsgetallen



rechthoeksgetallen



Merk op dat de formule bij de vierkantsgetallen ook korter kan: n^2
Spreek uit: *n* kwadraat. (*kwadraat* betekent oorspronkelijk 'vierkant')

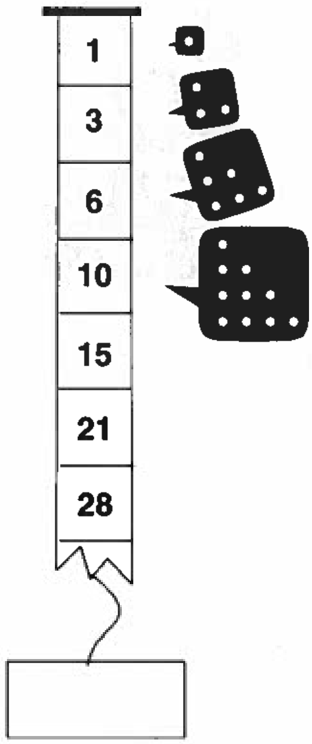
- Vergelijk de twee stroken. Welke strook moet je bij de linker optellen om de rechter te krijgen?

De formules $n \times (n + 1)$ en $n^2 + n$ zijn gelijkwaardig.

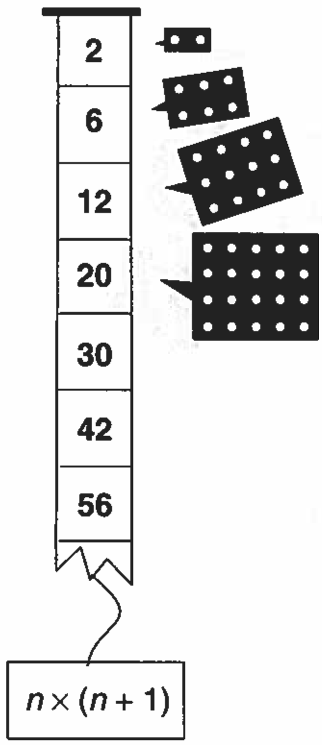
- Hoe kun je dit uitleggen met behulp van stippenpatronen?

Stroken bij stippen(II)

driehoeksgetallen



rechthoeksgetallen



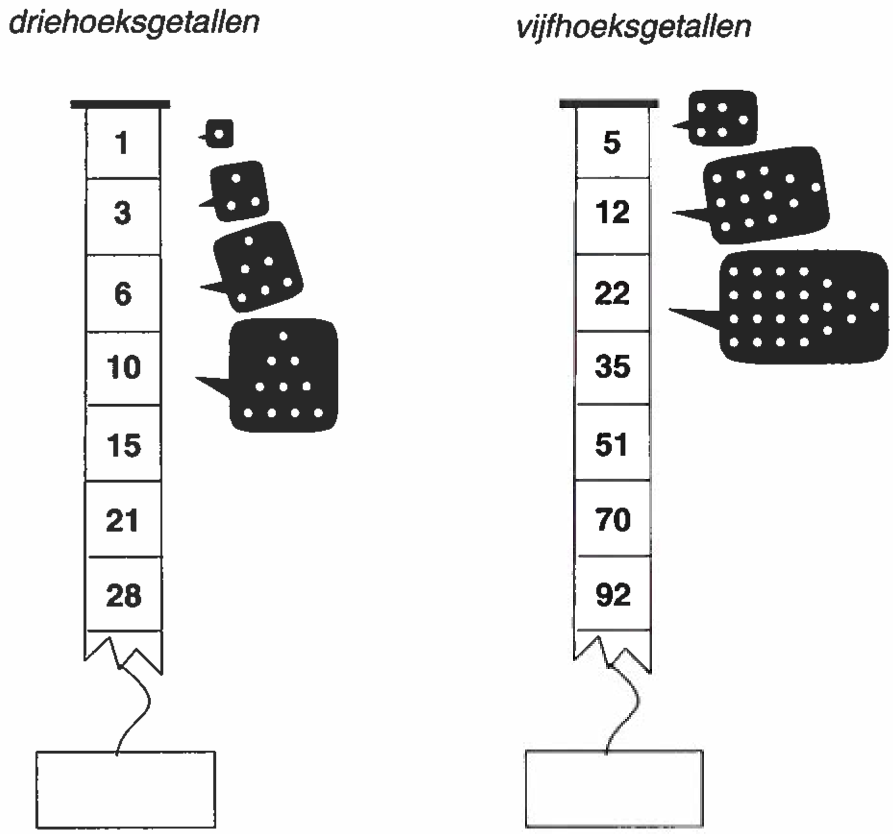
Vergelijk de driehoeksgetallen en de rechthoeksgetallen.

- Welke formule past er bij strook van driehoeksgetallen?
- Noem een (of meer) formules die hiermee gelijkwaardig zijn.

Met behulp van de formule voor driehoeksgetallen kun je de som van de eerste honderd getallen uitrekenen:

- $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 98 + 99 + 100 =$ ______

Stroken bij stippen(III)

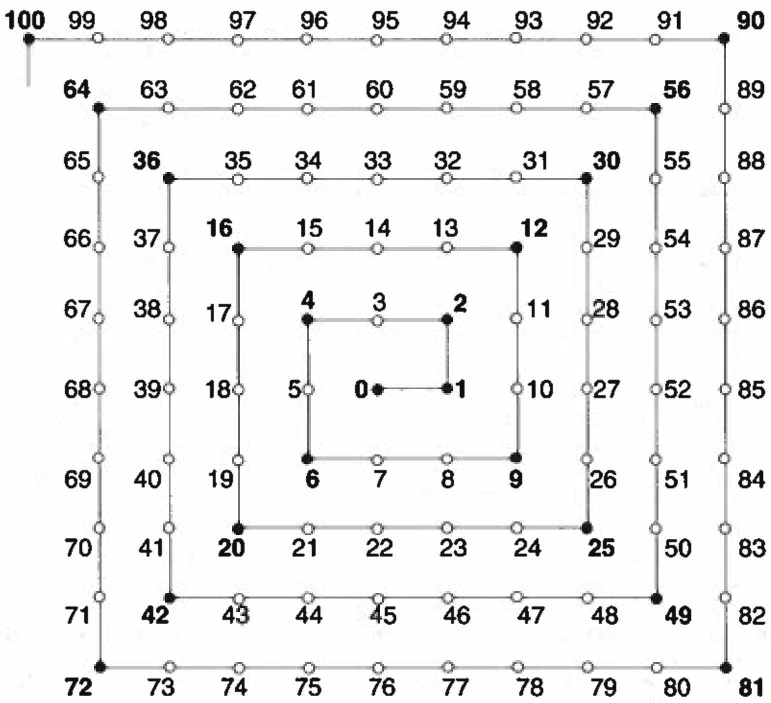


Vergelijk de getallen in beide stroken.

- Welk vijfhoeksgetal volgt op 92?
- Bedenk een formule die past bij de strook van vijfhoeksgetallen.

Getallenspiraal (I)

De getallenlijn kun je langer maken in de vorm van een spiraal!



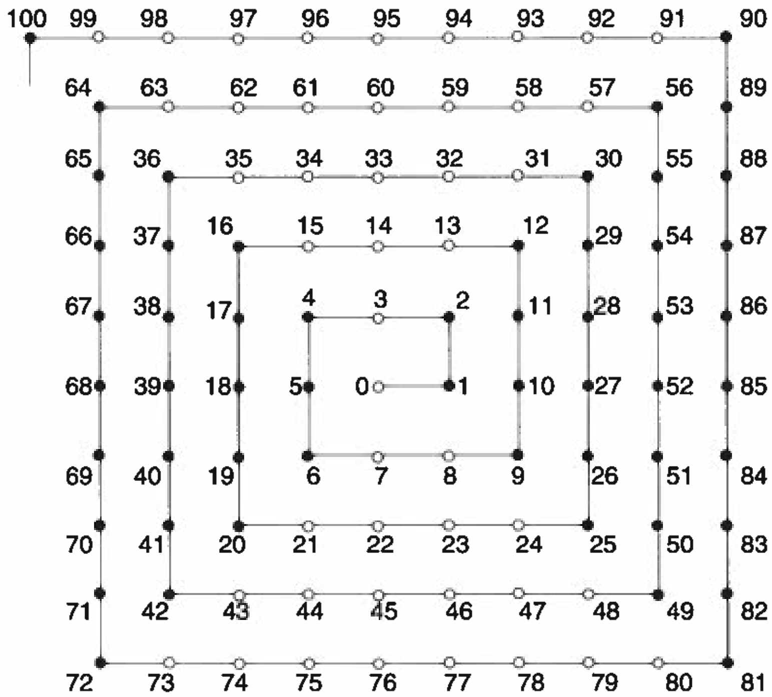
Op de hoeken van de spiraal (bij de zwarte stippen) staan bijzondere getallen.

- Welke bijzonderheid hebben die getallen?

In de figuur zie je dat elk vierkantsgetal precies midden tussen twee rechthoeksgetallen ligt.
Bijvoorbeeld: **49** ligt precies midden tussen **42** en **56**.
Logisch, want **49** = **7** × **7** en **42 = 6** × **7** en **56 = 8** × **7**

- Het vierkantsgetal 144 ligt precies in het midden tussen de rechthoeksgetallen .... en ....
- Het vierkantsgetal 1444 ligt precies in het midden tussen de rechthoeksgetallen .... en ....
- Het vierkantsgetal n^2 ligt precies in het midden tussen de rechthoeksgetallen .... en ....

Getallenspiraal (II)



De stippen op de verticale stukken van de getallenlijn zijn zwart, de andere wit. Als je de 'zwarte' getallen op één stuk bij elkaar telt, is de uitkomst gelijk aan de som van de daaropvolgende 'witte' getallen. Controleer maar:

$$\mathbf{1} + \mathbf{2} = 3$$

$$\mathbf{4} + \mathbf{5} + \mathbf{6} = 7 + 8$$

$$\mathbf{9} + \mathbf{10} + \mathbf{11} + \mathbf{12} = 13 + 14 + 15$$

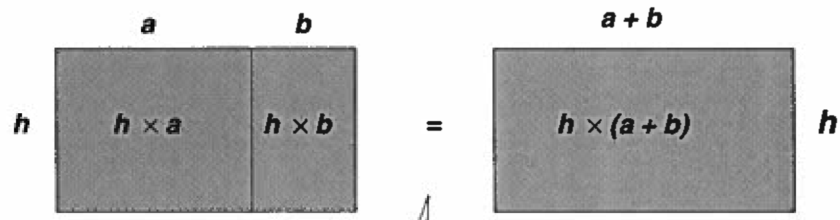
$$\mathbf{16} + \mathbf{17} + \mathbf{18} + \mathbf{19} + \mathbf{20} = 21 + 22 + 23 + 24$$

- Wat is de volgende regel van het schema?
- Je kunt die regel controleren zonder al die getallen op te tellen.
  Hint: Let op de sprongen van 'zwart' naar 'wit'.

De n-de regel begint met het zwarte getal n^2 .

- Wat is het laatste zwarte getal op die regel? Hoe groot zijn de sprongen van zwart naar wit?
- Probeer nu te verklaren: 'zwarte som' = 'witte som'

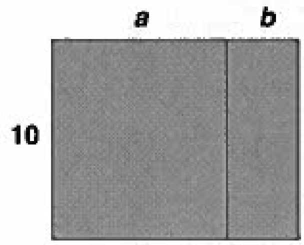
Oppervlakkige algebra (I)



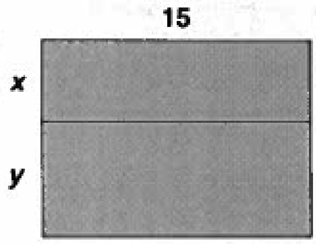
$h \times a + h \times b = h \times (a + b)$

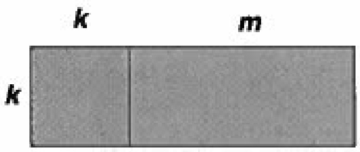
ofwel

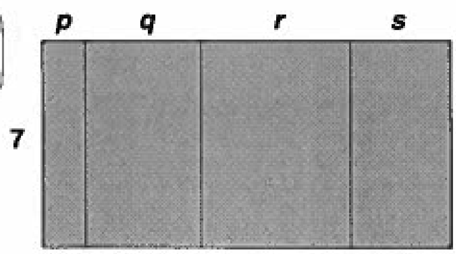
$ha + hb = h(a + b)$



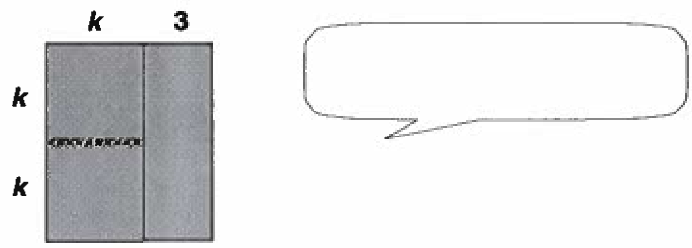
$10a + 10b =$ ....

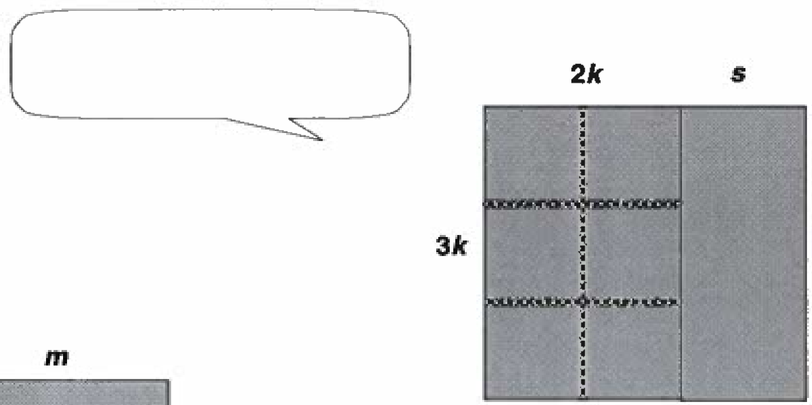


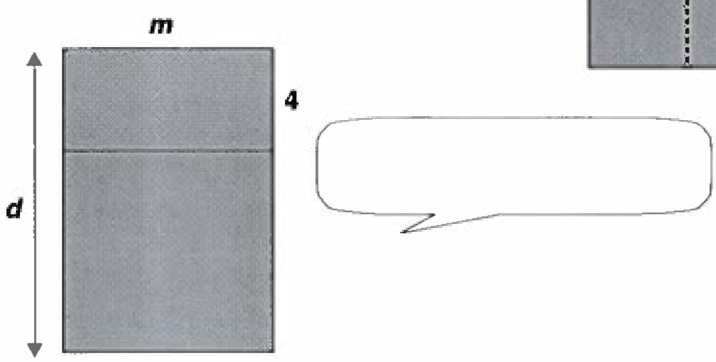


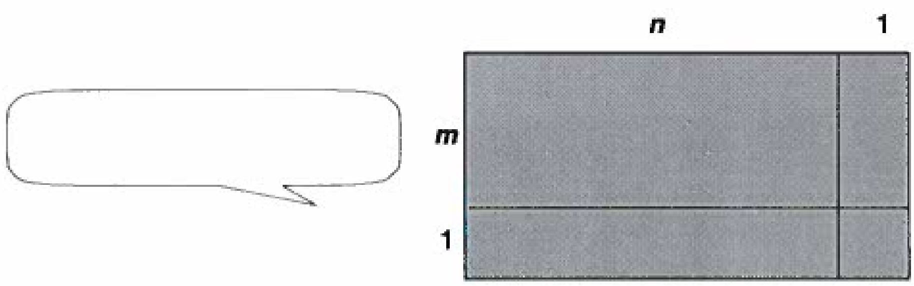


Oppervlakkige algebra (II)

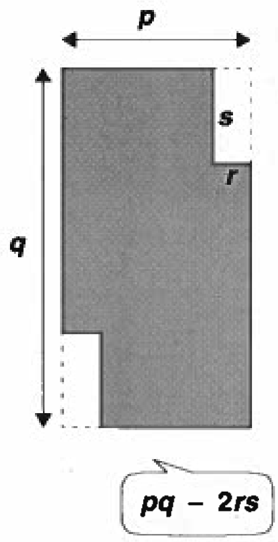


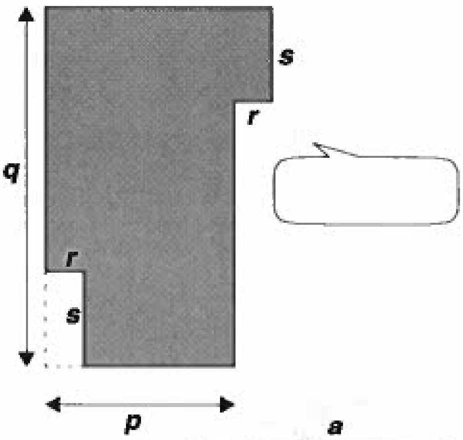


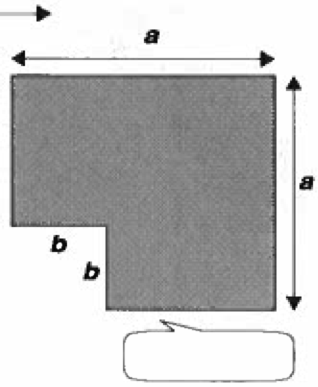


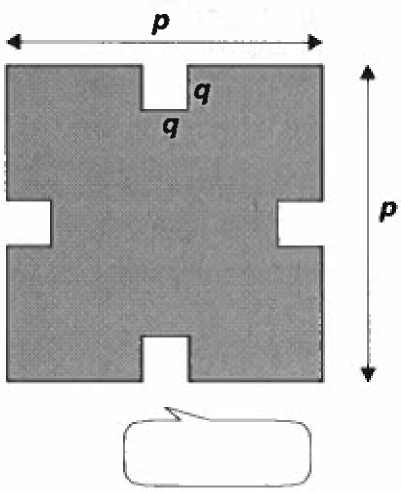


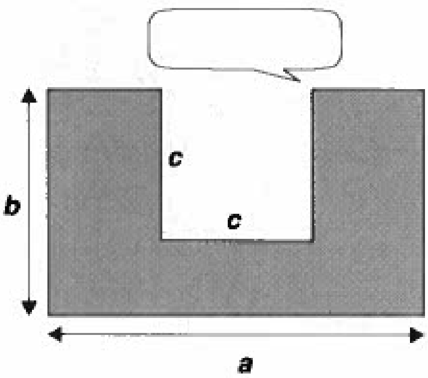
Oppervlakkige algebra(III)

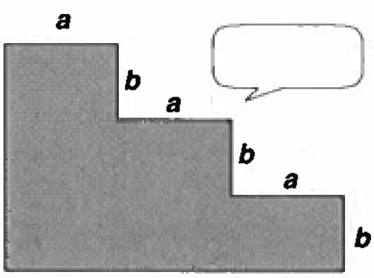






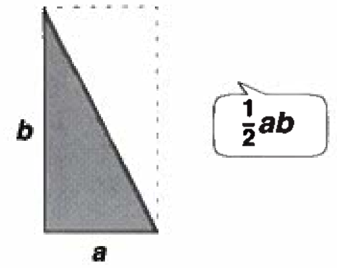


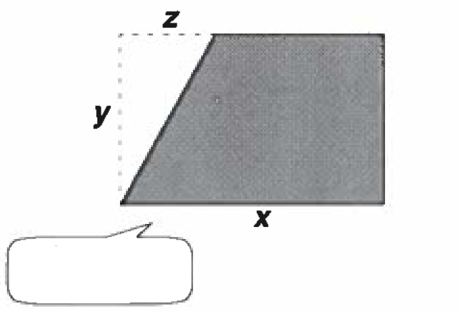


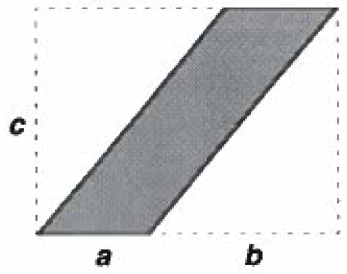


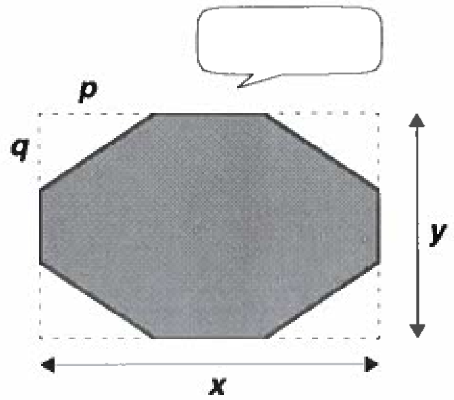
- Verzin een figuur met oppervlakte $ab - 3c^2$
- Ook één met oppervlakte $p^2 + 4q^2$

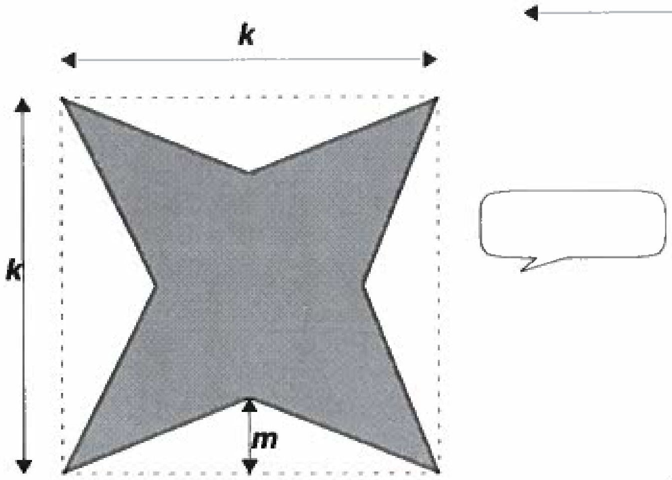
Oppervlakkige algebra (IV)

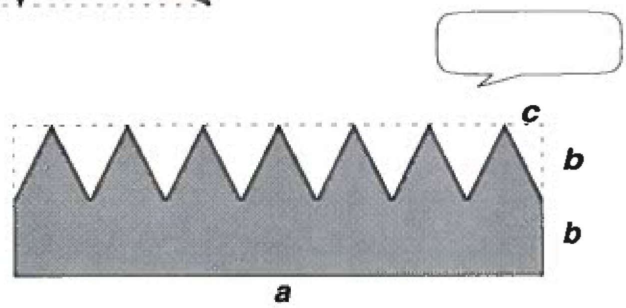












Hoe merkwaardig?(I)

a en ***b*** zijn natuurlijke getallen die samen 10 zijn.

- Welke waarden kan $a^2 + b^2$ hebben? Maak een tabel.

$a + b = 10$ K M

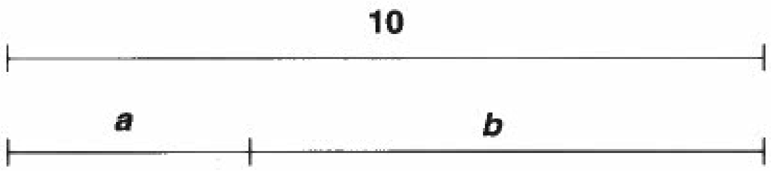
a	b	$a^2 + b^2$	$ab + ba$	$K + M$

- Welke waarden kan $ab + ba$ hebben? Gebruik de tabel hierboven.

- Tel de waarden van $K = a^2 + b^2$ en $M = ab + ba$ op en je krijgt iets merkwaardigs ....

- Onderzoek wat er gebeurt als ***a*** en ***b*** decimale getallen zijn die samen 10 zijn, bijvoorbeeld $a = 3{,}8$ en $b = 6{,}2$.
  Bedenk zelf nog een paar andere mogelijkheden.

Hoe merkwaardig?(II)



- Teken het vierkant met zijde ***a***. Ook dat met zijde ***b***.
- Teken een rechthoek met horizontale zijde ***a*** en verticale zijde ***b.*** Ook met horizontale zijde ***b*** en verticale zijde ***a.***
- Hoe is nu te verklaren dat $(a^2 + b^2) + (ab + ba) = 100$?

Stroken en formules (I)

0	1	1	1
1	4	2	3
4	9	5	5
9	16	10	7
16	25	17	9
n^2	$(n+1)^2$	n^2+1	$2n+1$

- Vul de ontbrekende getallen bij de stroken in.
- Gelijkwaardig of niet?

$n^2 \overset{?}{=} n \times n$

$2n+1 \overset{?}{=} n \times n + 1$

$n^2+1 \overset{?}{=} n^2+1^2$

$2(n+1) \overset{?}{=} 2n+1$

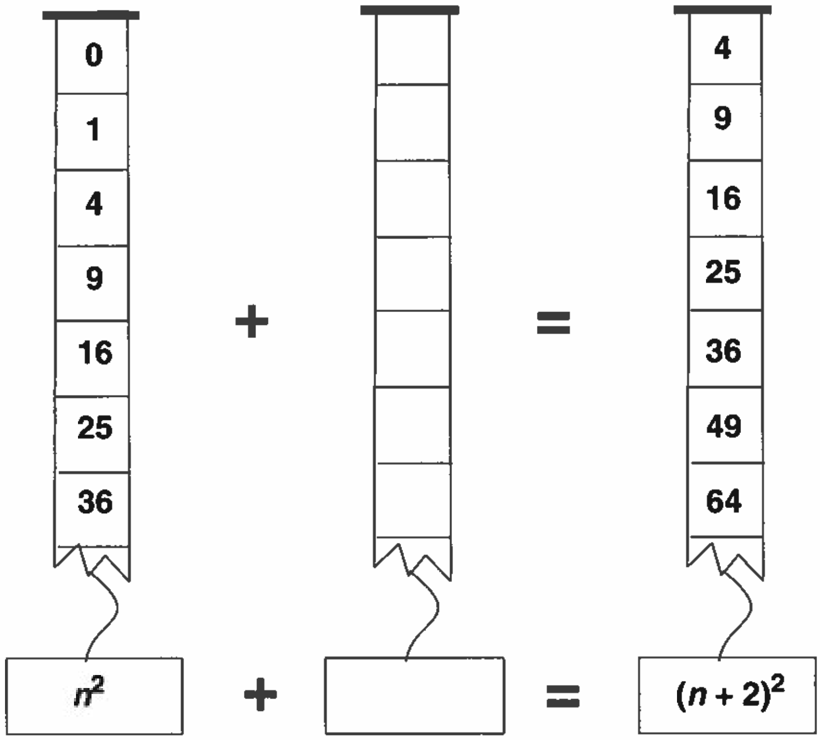
$(n+1)^2 \overset{?}{=} n^2+1^2$

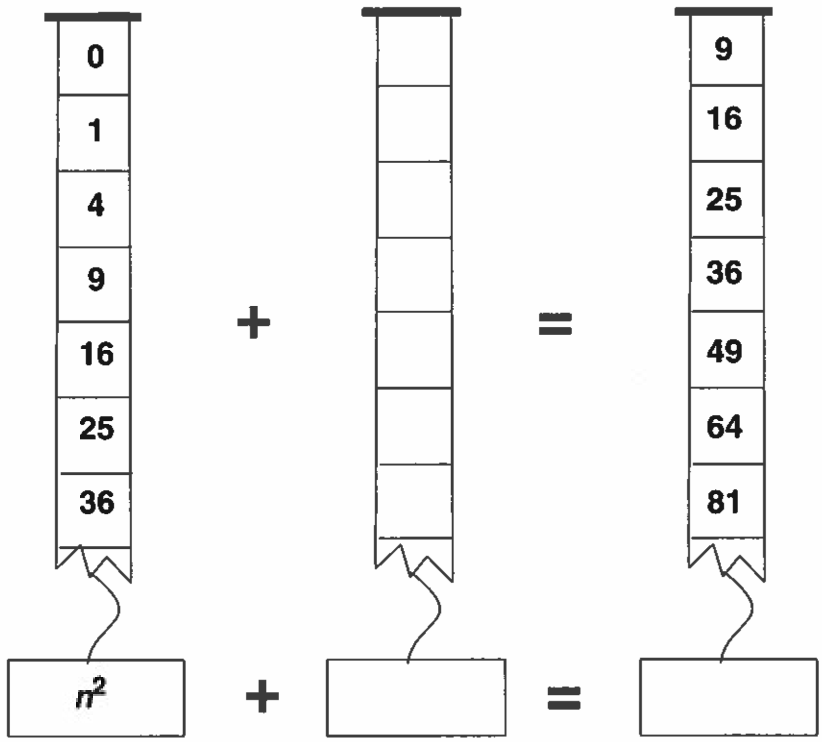
$(n+1)^2 \overset{?}{=} n^2+2n+1$

$n^2+1 \overset{?}{=} n \times n + 1 \times 1$

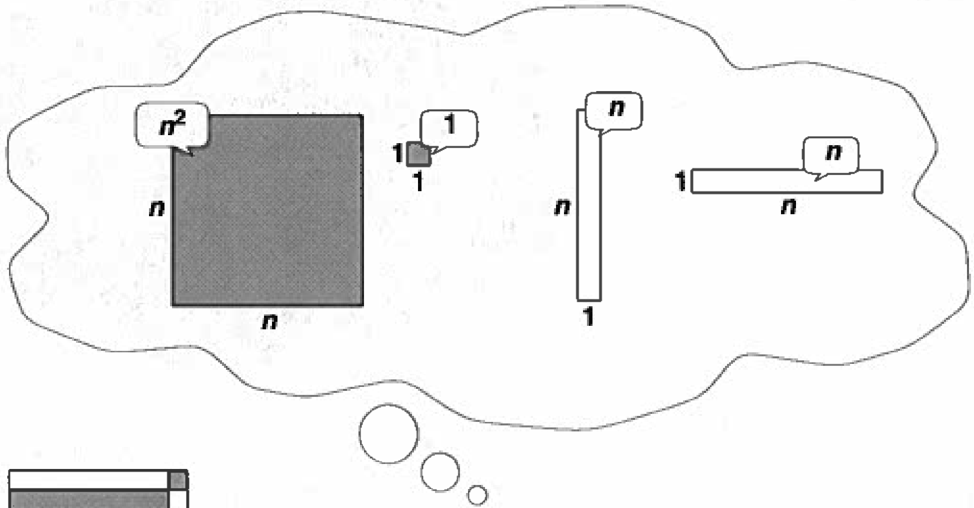
$(n+1)^2 \overset{?}{=} n^2 +1 + 2n$

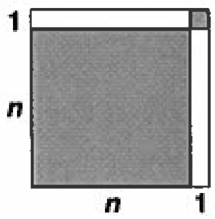
Stroken en formules (II)



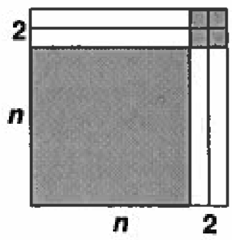


Vierkantsformules

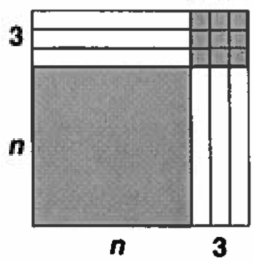




$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$



$$(n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4$$



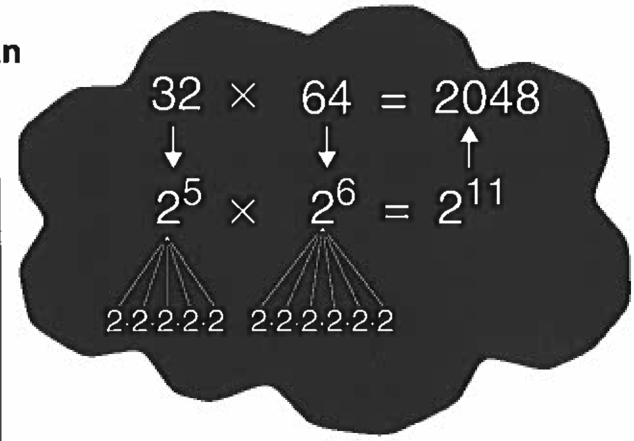
$$(n + 3)^2 = n^2 + 6n + 9$$

- Hoe gaat dit verder? Schrijf de volgende drie formules op.

Machtige tafels(I)

Hieronder staat een tafel van machten van 2:

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576



- Lees de uitkomsten van de volgende produkten af uit de tafel:

  16 × 8192 = ...

  8 × 16384 = ...

  512 × 512 = ...

  1024 × 1024 = ...

- Noem alle produkten van twee hele getallen waar 1048576 uitkomt:

Machtige tafels (II)

Tafel van machten van 3	
n	3^n
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2187
8	6561
9	19683
10	59049
11	177147
12	531441
13	1594323
14	4782969
15	14348907
16	43046721
17	129140163
18	387420489
19	1162261467
20	3486784401

vul in:

$$243 \times 81 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \uparrow$$

$$3^{\cdots} \times 3^{\cdots} = 3^{\cdots}$$

- Lees de uitkomsten van de volgende produkten af uit de tabel:

  $81 \times 19683 = \ldots$

  $2187 \times 59049 = \ldots$

  $6561 \times 6561 = \ldots$

  $729 \times 729 \times 729 = \ldots$

- Lees de uitkomsten van de volgende machten af uit de tabel:

  $81^3 = \ldots.$

  $243^4 = \ldots.$

  $27^5 = \ldots.$

- Wat is groter: 9^{10} of 10^9 ?

Machtige tafels (III)

- Maak zelf een tafel van machten van 5 (tot en met 5-tot-de-tiende)
  Bedenk een paar opgaven die je daarmee kunt maken.

n	5^n
0	1
1	5
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

- De tafel van machten van 1 is wel heel gemakkelijk. Waarom?
- Er is een tafel van machten waarin de getallen snel oplopen, maar die toch heel gemakkelijk te maken is. Welke tafel is dat, denk je?
- Als je de tafels van machten van 2 en 3 naast elkaar zet en je vermenigvuldigt de getallen die op dezelfde regel staan, dan komt er:

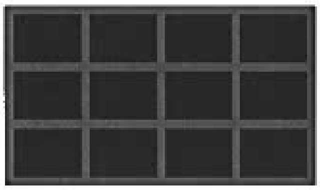
$$1 \times 1 = 1$$
$$2 \times 3 = 6$$
$$4 \times 9 = 36$$
$$8 \times 27 = 216$$

enz.

  De uitkomsten zijn dan juist de machten van 6.
  Als je het niet gelooft, controleer maar met je rekenmachientje.

- Hoe kun je zonder rekenmachientje uitleggen dat: $2^{10} \times 3^{10} = 6^{10}$?

Delers(I)



Een tablet chocola bevat 12 stukjes.

- Bij welke aantallen personen kun je dit tablet 'netjes' (= eerlijk en met hele stukjes) delen?

Als je de vraag goed beantwoord hebt, dan heb je zojuist de *delers* van 12 gevonden. Misschien heb je er niet aan gedacht dat je het tablet ook alleen op kunt eten, maar 1 is ook een deler van 12.

- Vul onderstaande deler-tabel verder in:

getal	delers	aantal delers
1	1	1
2	1 , 2	2
3	1 , 3	2
4	1 , 2 , 4	3
5	1 , 5	2
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12	1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12	6
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		

Delers(II)

Bekijk de deler-tabel van de getallen 1 tot en met 25.
Daar zijn getallen bij met maar 2 delers.
Zulke getallen worden **priemgetallen** genoemd.

- Welke getallen onder 25 zijn priemgetallen?
- Welke zijn de drie volgende priemgetallen?

Misschien heb je al een handige manier ontdekt om de delers van een getal te vinden. Als je één deler weet, kun je (meestal) meteen een andere vinden. Zo komen de delers in paren te voorschijn.

Neem als voorbeeld het getal 108.
Het eerste paar delers is flauw: 1 en 108.
Omdat 2 een deler is, weet je meteen ook 54 (want $2 \times 54 = 108$).
De volgende deler is 3, daar hoort dan 36 bij (want $3 \times 36 = 108$).
Enzovoort.
Zo komt er: 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 9 , **12** , **18** , **27** , **36** , **54** , **108**

De vetgedrukte getallen krijg je min of meer cadeau.

- Probeer te beredeneren, dat je in dit geval alleen de getallen van 1 tot en met 10 hoeft te 'proberen'.
- Vind op deze manier de delers van: 88 ; 144 ; 210

Bij de meeste getallen is het aantal delers even.

- Bij welke soort getallen is dat niet het geval?

In de tafel van machten van 2 komt het getal 8192 voor.

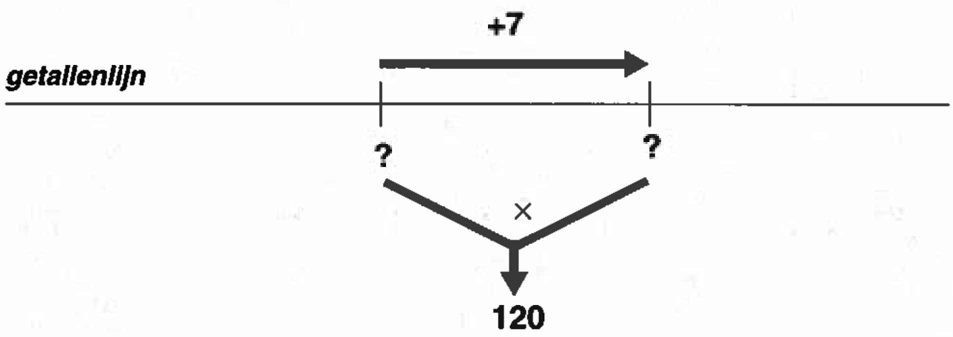
- Welke delers heeft dit getal?
- Hoeveel delers heeft 3^{10}?
- Bedenk zelf een heel groot getal, waarvan je bijna zonder rekenen kunt zeggen hoeveel delers dat getal heeft.

Delers (III)

Van twee getallen is het volgende bekend:

* ***hun produkt is*** **80**
* ***hun som is*** **21**

- Welke twee getallen zijn dat?



- Zoek de twee getallen.

- Zoek een waarde voor x zodat $x \times (x + 4) = 96$

- Zoek een waarde voor n zodat $n \times (n - 4) = 77$

- Zoek een waarde voor p zodat $(p + 7) \times (p + 10) = 108$

Priemgetallen

De Griekse geleerde Eratosthenes leefde omstreeks 240 voor Chr.
De man was buitengewoon veelzijdig; behalve wiskundige was hij ook historicus, aardrijkskundige, taalgeleerde en dichter. Hij is beroemd geworden door zijn meting van de aarde. Verder heeft hij een slimme manier bedacht om priemgetallen te vinden ....

Bekijk het honderdveld hieronder.

1 is geen priemgetal en daarom is het veld van 1 grijs gemaakt.
2 is een priemgetal , dat veld blijft wit.
Vervolgens zijn de velden van alle andere 2-vouden grijs gemaakt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3 is een priemgetal, dat veld blijft wit.
* Maak nu de velden van de 3-vouden die dat nog niet zijn, grijs.

5 is een priemgetal , dat veld blijft wit.
* Maak nu de velden van de 5-vouden die dat nog niet zijn, grijs.

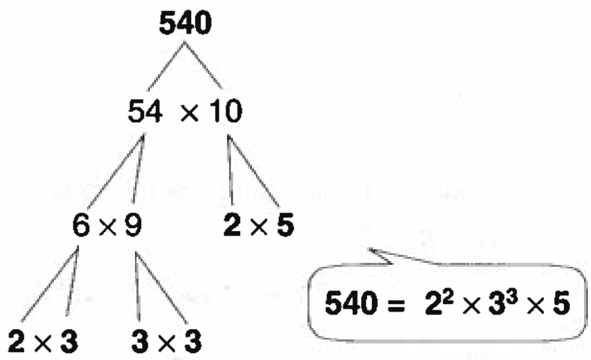
7 is een priemgetal , dat veld blijft wit.
* Maak nu de velden van de 7-vouden die dat nog niet zijn, grijs.

Alle witte velden bevatten nu een priemgetal!

Verklaring: het eerste priemgetal na 7 is 11. De 11-vouden onder de 100 zijn al verdwenen (22, 44, 66, 88 zijn 2-vouden, 33, 66, 99 zijn 3-vouden, 55 is 5-voud en 77 is 7-voud). Het eerste 11-voud dat geen veelvoud is van 2, 3, 5 of 7 is 121 (= 11 × 11) en dat valt buiten het honderdveld. Evenzo zijn alle 13-vouden (behalve 13 zelf) uit het honderdveld grijs gemaakt, enz.

Priemfactoren

Priemgetallen zijn als het ware de bouwstenen voor de natuurlijke getallen. Ieder natuurlijk getal is namelijk een produkt van priemgetallen.
Voorbeeld: $540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ of korter: $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$
Dit wordt een *ontbinding in priemfactoren* genoemd.
Zo'n ontbinding kun je op allerlei manieren vinden. Je probeert het getal te splitsen in twee factoren (groter dan 1 en kleiner dan dat getal); ditzelfde doe je dan (als het kan) met die factoren, zo lang tot net je alleen nog maar priemfactoren hebt. Bij 540 kan dat zo gaan:



Maar er zijn ook allerlei ander splitsingen mogelijk; die leiden dan wel altijd tot dezelfde ontbinding!

- Ontbind in priemfactoren:

135

135 = ...

704

704 = ...

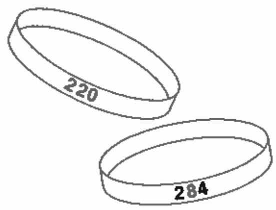
2100

2100 = ...

- Bedenk drie zulke opgaven voor je buurman of buurvrouw.

Bevriende getallen(I)

Om een hechte vriendschap tussen twee mensen te bezegelen, dragen de beide vrienden (of vriendinnen) soms een 'talisman' (bijvoorbeeld een ring of een oorbel) met daarin een korte tekst gegraveerd.
In de tijd van Pythagoras werden daarbij wel de getallen **220** en **284** gebruikt.
Die getallen worden wel ***bevriende getallen*** genoemd.



Wat is het geheim van de getallen 220 en 284?

- Vind alle delers van 220.
  Tel al deze delers op.
- Doe hetzelfde met 284.

Als je geen fouten hebt gemaakt, zijn de beide uitkomsten die je vond aan elkaar gelijk! Anders gezegd:

de som van de delers van 220 = de som van de delers van 284

Deze eigenschap van twee getallen is heel uitzonderlijk.
Beroemde wiskundigen hebben zich in later tijden ingespannen om andere paren van zulke bevriende getallen te vinden.

De Franse wiskundige Pierre Fermat, die eigenlijk jurist was, vond in 1636 een nieuw paar: **17296** en **18416**.
Leonard Euler, een Zwitser, wiens beeltenis nu nog op Zwitserse bankbiljetten te zien is, gaf in 1747 een lijst met dertig paren bevriende (en grote) getallen; een paar jaar later breidde hij de lijst nog eens uit tot zestig paren.
Grappig is het dat al die knappe geleerden een betrekkelijk klein paar over het hoofd hadden gezien, namelijk het paar **1184** en **1210.**
Dit paar is ontdekt door een zestien jaar oude Italiaanse jongen, Nicolo Paganini, in het jaar 1866.

- Controleer dat **1184** en **1210** bevriende getallen zijn.

Bevriende getallen (II)

De Arabische wiskundige Tabit ibn Qorra, die leefde van 826 tot 901, had lang voor de Europese wiskundigen, een formule gevonden om bevriende getallen te maken.

Die formule is bar ingewikkeld. Kijk maar:

ALS

$$p = 3 \times 2^{n} - 1$$
$$q = 3 \times 2^{n-1} - 1$$
$$r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$$

en *p, q, r zijn drie oneven priemgetallen*

DAN zijn

$$A = 2^{n} \times p \times q$$
$$B = 2^{n} \times r$$

BEVRIENDE getallen

- Stel $n = 2$. Ga na dat p, q, r inderdaad priemgetallen zijn.
  Gebruik de gevonden waarden voor p, q en r om A en B te berekenen.
  En je ziet ...
- Stel $n = 3$. Welke van de drie getallen p, q, r is **niet** een priemgetal.

Voor $n = 3$ gaat de vlieger dus niet op!
Voor $n = 4$ wél! Als je geen lijst met grote priemgetallen hebt, is dat lastig om te controleren. Een computer heeft bevestigd dat het inderdaad zo is,

- Bereken A en B voor $n = 4$ en vergelijk je resultaat met de vondst van Pierre de Fermat (vorig blad).
- De getallen van Nicolo Paganini volgen niet uit bovenstaande formule. Ontbind die twee getallen maar in factoren en dan zie je het!

Blijkbaar geeft de formule van Tabit ibn Qorra niet alle bevriende getallen !

Rekenen met machten (I)

$$a \times a \times a \times b \times b \times c = a^3 \times b^2 \times c^1 = a^3b^2c$$

De **exponenten** van *a, b,* en *c* zijn 3, 2 en 1.
(*opmerking*: de exponent 1 wordt meestal niet opgeschreven)

Met de exponenten 3, 2 en 1 en de letters *a, b* en *c* kunnen ook andere produkten worden gemaakt, bijvoorbeeld ab^3c^2.
In totaal zijn er zes produkten die je zo kunt maken.

- Schrijf de vier andere produkten op.
- Vermenigvuldig de zes produkten met elkaar.
  De uitkomst kan in de vorm $a^{\cdots}\, b^{\cdots}\, c^{\cdots}$ worden geschreven.
  Welke exponenten krijg je dan?

Als bekend is dat $b = a$, kan je a^3b^2c worden vereenvoudigd

$$\boxed{\begin{array}{c} a^3b^2c \\ b = a \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a^3a^2c}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a^5c}$$

Dit kun je ook met de andere vijf produkten doen .

- Hoeveel verschillende produkten krijg je dan? Welke?
- Als je ook nog weet dat $c = a$ kun je ze als **machten** van *a* schrijven. Welke?

Rekenen met machten (II)

$$2m^3 \times 3m^2 = 2 \times 3 \times m^5 = 6m^5$$

$\boxed{2 \times m \times m \times m}$ $\boxed{3 \times m \times m}$

- Geef zoveel mogelijk andere vermenigvuldigingen met dezelfde uitkomst.

.... × .... $= 6m^5$

.... × .... $= 6m^5$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Rekenen met machten (III)

$3a = a + a + a$ $\qquad$ $a^3 = a \times a \times a$

$\longleftarrow \boxed{a = z^2} \longrightarrow$

$3z^2 = z^2 + z^2 + z^2$ $\qquad$ $(z^2)^3 = z^2 \times z^2 \times z^2 = z^6$

$$\boxed{4z^2} + \boxed{3z^2} + \boxed{2z^2} - \boxed{z^2} = \boxed{8z^2}$$

- Op de plaats van ____ kun je $+$, $-$ of $\times$ invullen om de volgende regels kloppend te maken:

$$\boxed{4z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{3z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{2z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{z^2} = \boxed{10z^2}$$

$$\boxed{4z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{3z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{2z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{z^2} = \boxed{24z^8}$$

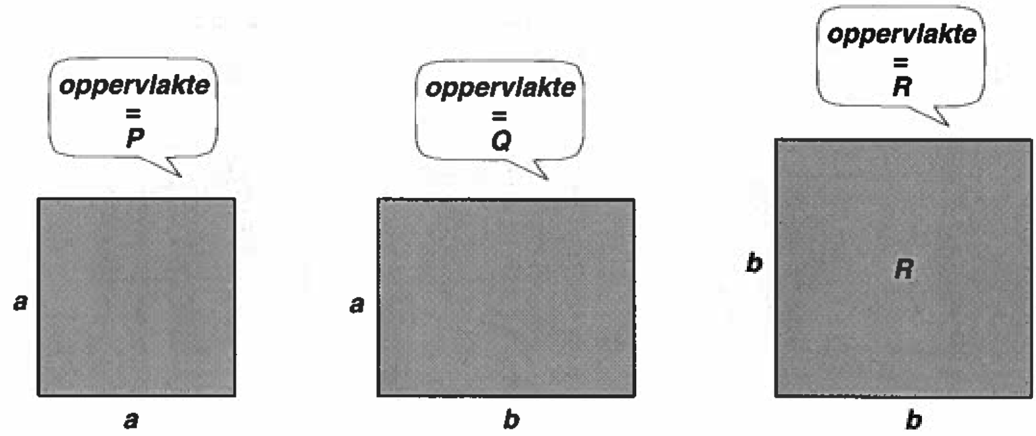
$$\boxed{4z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{3z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{2z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{z^2} = \boxed{14z^4}$$

$$\boxed{4z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{3z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{2z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{z^2} = \boxed{10z^4}$$

$$\boxed{4z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{3z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{2z^2}\ \underline{\qquad}\ \boxed{z^2} = \boxed{2z^2}$$

Tussen twee vierkanten

Een rechthoek tussen twee vierkanten:



- Vul passende formules in: ***P*** = ... , ***Q*** = ... , ***R*** = ...

Hieronder staan zes formules waarin ***P, Q*** en ***R*** voorkomen.

- Onderzoek welke van die zes formules juist zijn.

$$\boxed{Q^2 = PR}$$

$$\boxed{Q = \frac{P+R}{2}}$$

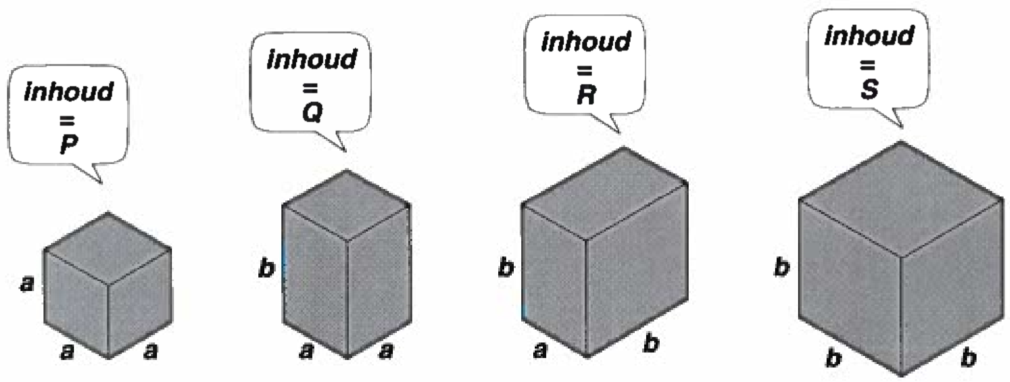
$$\boxed{Q = \sqrt{PR}}$$

$$\boxed{2Q = P + R}$$

$$\boxed{Q - P = R - Q}$$

$$\boxed{\frac{Q}{P} = \frac{R}{Q}}$$

Tussen twee kubussen



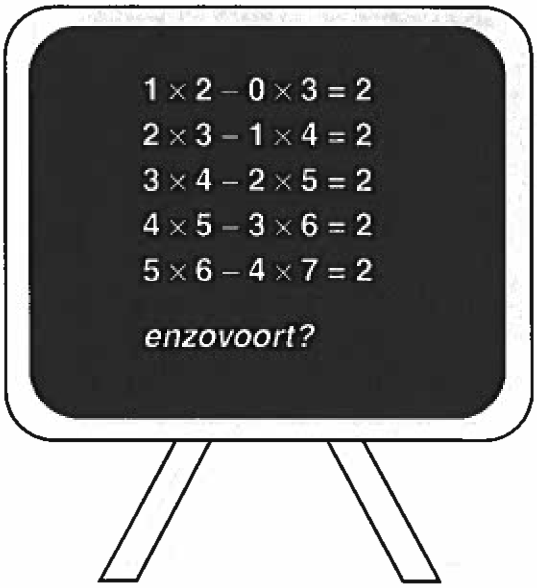
- Vul passende formules in: ***P*** = ... , ***Q*** = ... , ***R*** = ... , ***S*** = ...
- Ga na dat de volgende formules juist zijn:

$\boxed{Q^2 = PR}$ $\boxed{Q = \sqrt{PR}}$ $\boxed{\frac{Q}{P} = \frac{R}{Q}}$

- Maak nu zoveel mogelijk goede formules voor ***Q***, ***R*** en ***S***.

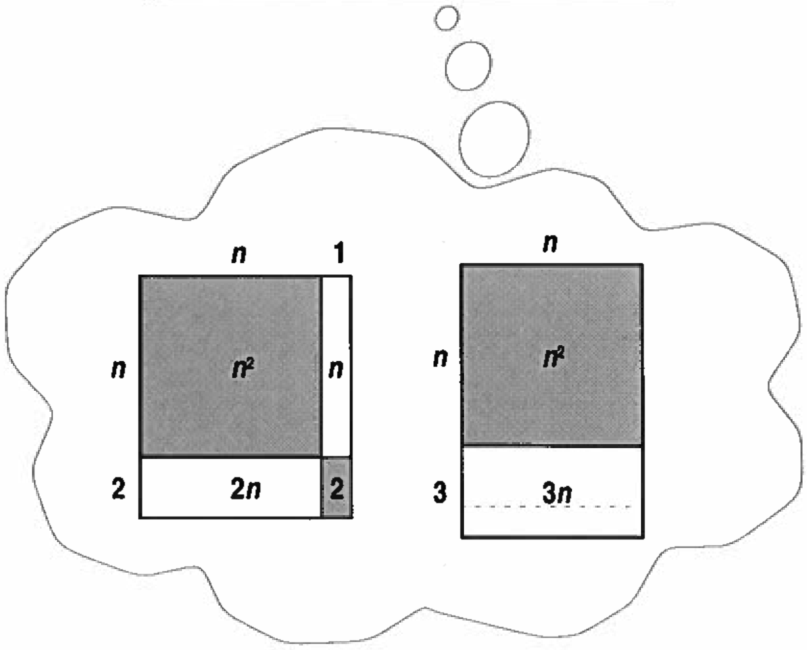
- Probeer ook goede formules te vinden voor ***P***, ***Q***, ***R*** en ***S***.

Daar kun je op rekenen(I)

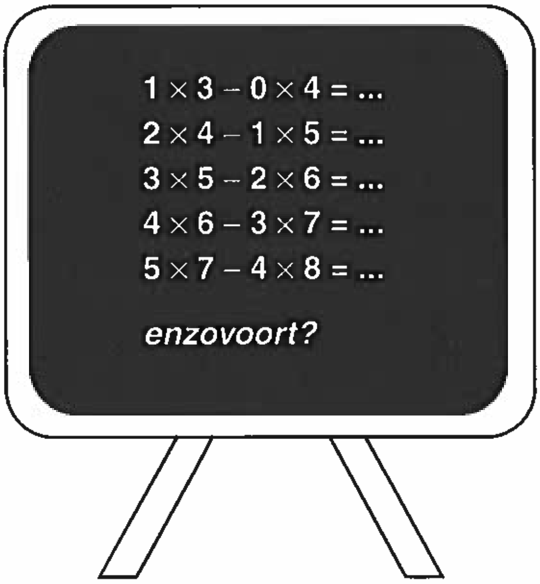


- Controleer de sommetjes op het bord. en zet het rijtje nog beetje voort. Sterk toch?
- Bedenk ook nog een paar sommen die bij voortzetting veel verder in de rij zouden voorkomen. Kan je er op rekenen dat uitkomst steeds 2 is?

De verklaring: $\boxed{(n + 1) \times (n + 2) - n \times (n + 3) = 2}$



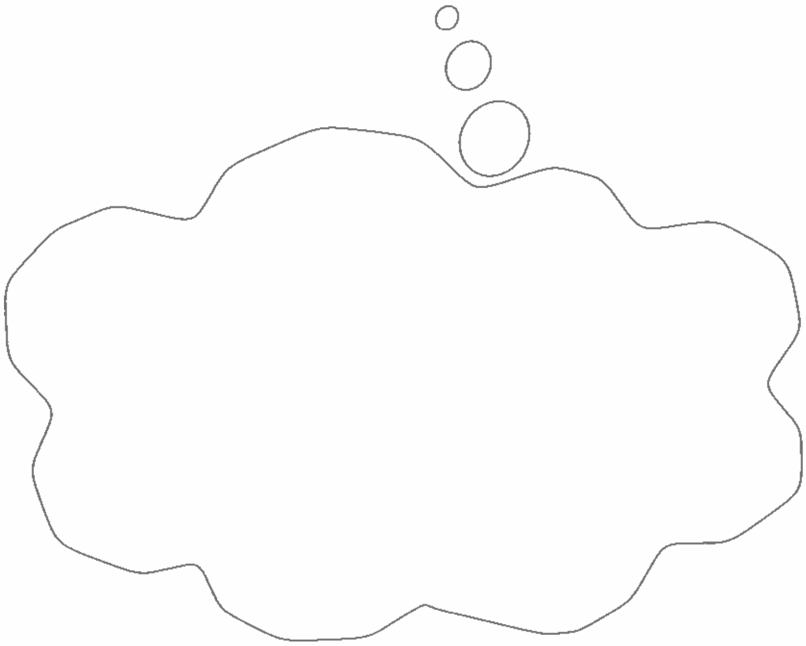
Daar kun je op rekenen(II)



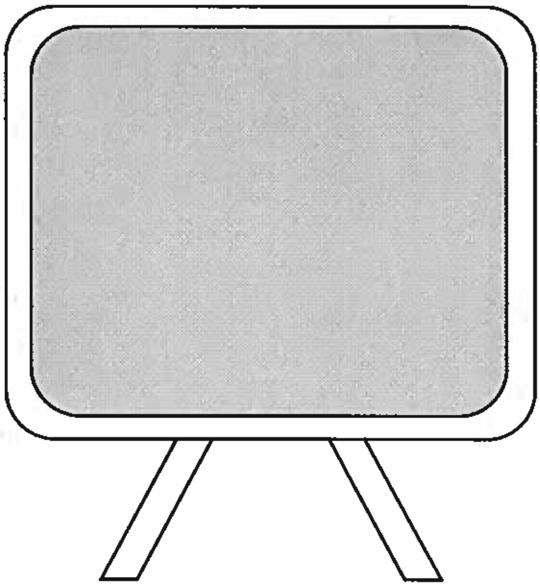
- Hoe zit het met dit rijtje sommen?

- Welke formule past bij dit rijtje?

- Maak een plaatje met een verklaring:



Daar kun je op rekenen(III)

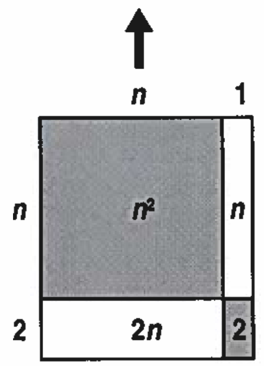


- Ontwerp zelf nu ook een paar rijtjes sommen met steeds dezelfde uitkomst.

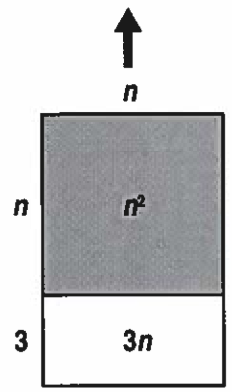
- Geef daar ook de passende formules bij.

Daar kun je op rekenen(IV)

$(n+1)\times(n+2)=n^2+3n+2$



$n\times(n+3)=n^2+3n$



$(n+2)\times(n+3)=$ ....

$n\times(n+5)=$ ....

$-$ ....

$(n+2)\times(n+\ldots.)=$ ....

$n\times(n+\ldots.)=$ ....

$-$ 10

....

....

$-$ ....

Dictee

in woorden	in formule
de som van ***n*** en ***m*** verminderd met **5**	$n + m - 5$
de som van ***n*** en **8** en dat vermenigvuldigd met ***n***	$(n + 8) \times n$
het produkt van ***n*** en ***m*** en dat verminderd met ***k***	
de som van de kwadraten van ***n*** en ***m***	
het kwadraat van de som van ***n*** en ***m***	
de som van het 2-voud van ***n*** en het 3-voud van ***k***	
de som van ***n*** en **6** vermenigvuldigd met het verschil van ***n*** en **6**	
het produkt van de derde machten van ***n*** en ***m***	
het kwadraat van het 5-voud van ***n***	
het 5-voud van het kwadraat van ***n***	

De prijs van de algebra (I)

Algebra kost tijd, en dus geld.
Een gedetailleerde prijslijst vind je hieronder

Prijslijst:	
bewerkingen +, –, ×, :, /	1 punt per keer
kwadrateren	2 punten per keer
3-de macht nemen	3 punten per keer
4-de macht nemen	4 punten per keer
enz.	enz.
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis

Voorbeeld 1: wat kost $\mathbf{3}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}$?

3	**gewoon getal**	**gratis**
$\boldsymbol{n}$	**aanroep variabele**	**1 punt**
$\mathbf{3} \times \boldsymbol{n}$	**vermenigvuldiging**	**1 punt**
$\boldsymbol{m}$	**aanroep**	**1 punt**
$(3 \times n) + (m)$	**optellen**	**1 punt**
	totaalprijs	**4 punten**

Voorbeeld 2: wat kost $(\mathbf{3}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m})^2$?

$\mathbf{3}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}$	zojuist berekend	**4 punten**
$(\mathbf{3}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m})^2$	**kwadrateren**	**2 punten**
	totaalprijs	**6 punten**

- Stel de prijs vast van:

$$n^2 + 3n$$

$$n \times (n + 3)$$

$$(n + 1) \times (n + 3)$$

$$n^2 + 4n + 3$$

De prijs van de algebra (II)

$n^2 + 3n$ en $n \times (n + 3)$ zijn gelijkwaardige formules.
Toch zijn ze niet even duur! (Zie vorig blad).

- Hieronder staan paren gelijkwaardige formules. Overtuig je daarvan. Ga steeds na welk van de twee het 'goedkoopst' is.

$n + n + n + n$ en $4 \times n$

$n \times n \times n \times n$ en n^4

$n + n + n + n$ en $4 \times n$

$(m + 1)^2$ en $(m + 1) \times (m + 1)$

$(m + 1)^2$ en $m^2 + 2m + 1$

$a^2 \times a^3$ en a^5

$(a^3)^2$ en a^6

De prijs van de algebra (III)

- Vergelijk de prijzen van a^4b^4 en $(a^2b^2)^2$

De beide formules zijn gelijkwaardig, maar de tweede is 2 punten goedkoper.

- Probeer een zo goedkoop mogelijke formule te vinden die gelijkwaardig is met a^4b^4

Je kunt n^{15} op allerlei manieren anders schrijven (dat wil zeggen vervangen door een gelijkwaardige formule).
Hier komen een paar mogelijkheden:

$$n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n$$

$$(n \times n \times n \times n \times n)^3$$

$$n^{10} \times n^5$$

- Welk van die drie is goedkoper dan n^{15} ?
  Probeer een gelijkwaardige formule te vinden die de laagste prijs heeft.

- Zoek de goedkoopste formule die gelijkwaardig is met x^{24}

Breuken splitsen(I)

Stambreuken

In het Egypte van zo'n 4000 jaar geleden kenden de rekenmeesters met stambreuken, zoals:

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{5}\quad \textbf{enz.}$$

Kortom met breuken waarvan de **teller** gelijk is aan 1.

Een breuk met een andere teller dan 1 kan altijd worden gesplitst in stambreuken. Dat is eigenlijk flauw, kijk maar naar het voorbeeld:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Het is niet flauw als je zo weinig mogelijk stambreuken mag gebruiken. in dit voorbeeld:

$$\frac{3}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Nog een voorbeeld:

$$\frac{19}{24} = \frac{12+6+1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}$$

- Probeer in zo weinig mogelijk stambreuken te splitsen:

$$\frac{7}{8} = \frac{\dots + \dots + \dots}{8} = \frac{1}{\dots} + \frac{1}{\dots} + \frac{1}{\dots}$$

$$\frac{5}{6} = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{13}{16} = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{13}{18} = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{99}{100} = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$$

Breuken splitsen (II)

Bij een breuk mogen teller en noemer door hetzelfde getal worden gedeeld; de breuk verandert dan niet van waarde.

Voorbeelden: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ (teller en noemer zijn gedeeld door 3)

$\frac{b}{5b} = \frac{1}{5}$ (teller en noemer zijn gedeeld door *b*)

Deze regel pas je toe bij het splitsen in stambreuken.

Voorbeelden: $\frac{n+1}{3n} = \frac{n}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n}$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

- Splits zo mogelijk in stambreuken:

$\frac{x+y}{xy} =$ $\frac{k+m+n}{kmn} =$

$\frac{p+1}{pq} =$ $\frac{p+1}{p^2} =$

- Vul een passende formule in:

$$\frac{\ldots + \ldots + \ldots + \ldots}{abcd} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

Breuken op stroken (I)

Vul de lege vakjes in

1		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{4}$	$-$	$\frac{1}{5}$	$=$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{30}$

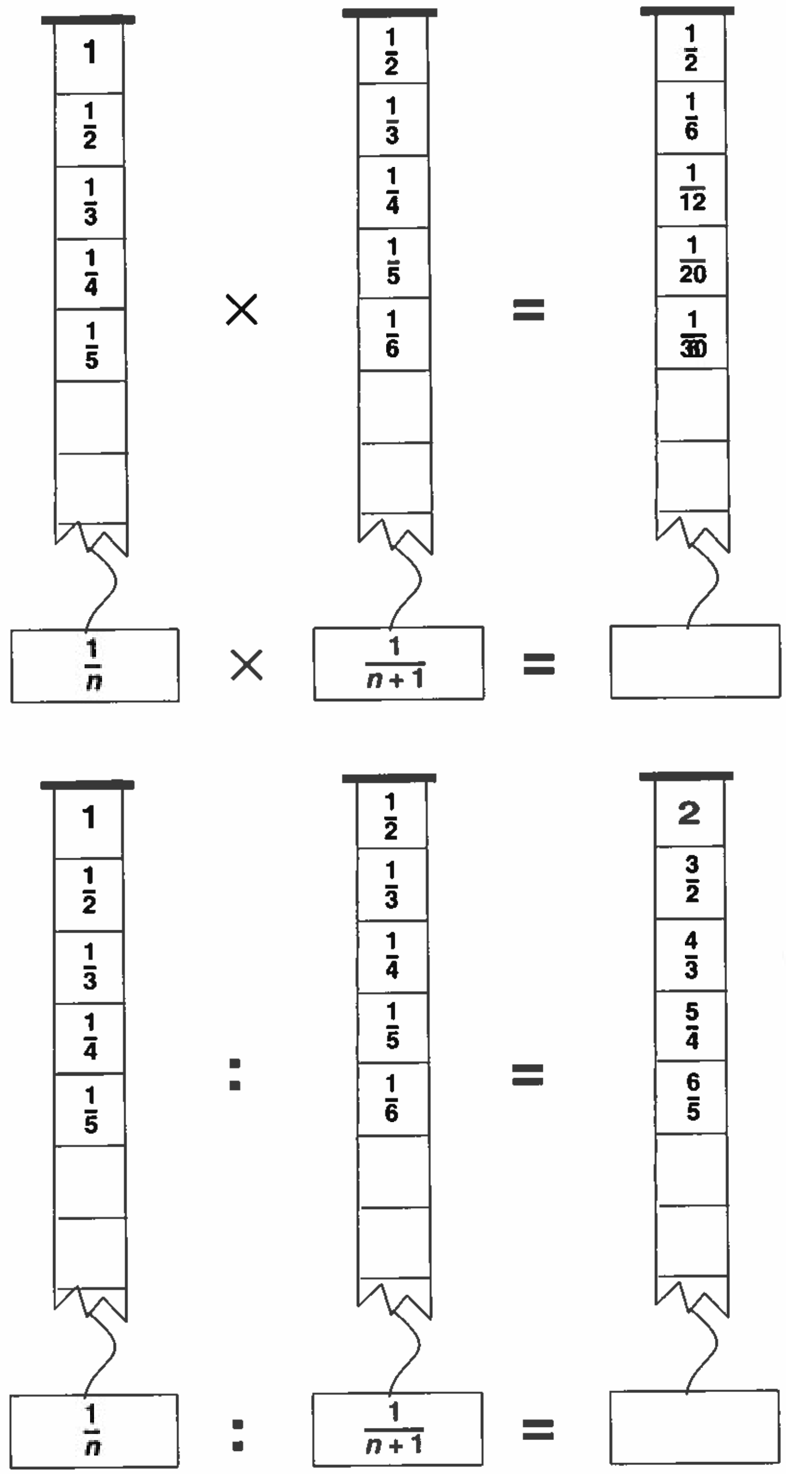
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \boxed{}$$

1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{9}{20}$
$\frac{1}{5}$	$+$	$\frac{1}{6}$	$=$	$\frac{11}{30}$

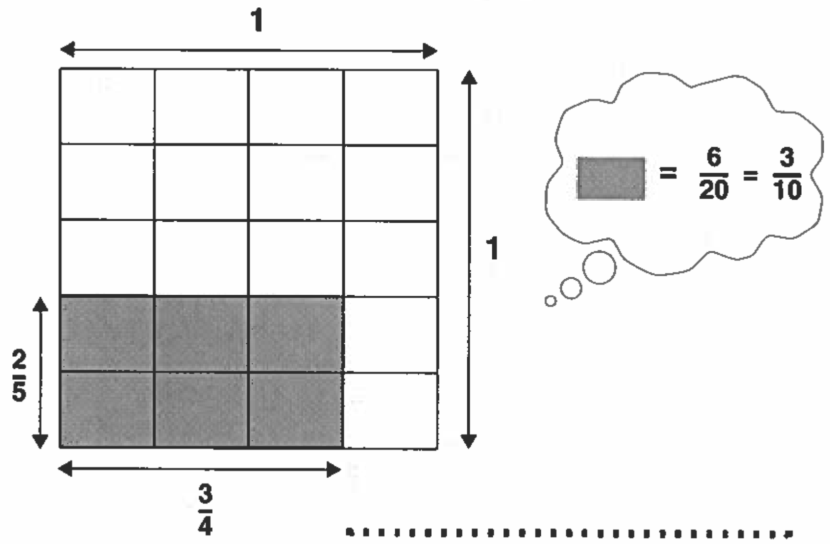
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \boxed{}$$

Breuken op stroken (II)

Vul de lege vakjes in



Breuken vermenigvuldigen (I)



$$\boxed{\frac{3}{4}\times\frac{2}{5} = \frac{3\times 2}{4\times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}}$$

- Maak een tekening bij: $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3} = \frac{4\times 2}{5\times 3} = \frac{8}{15}$

- Bereken: $\frac{3}{5}\times\frac{1}{4} =$ $\qquad$ $\frac{3}{5}\times\frac{4}{5} =$

  $\frac{3}{4}\times\frac{1}{5} =$ $\qquad$ $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4} =$

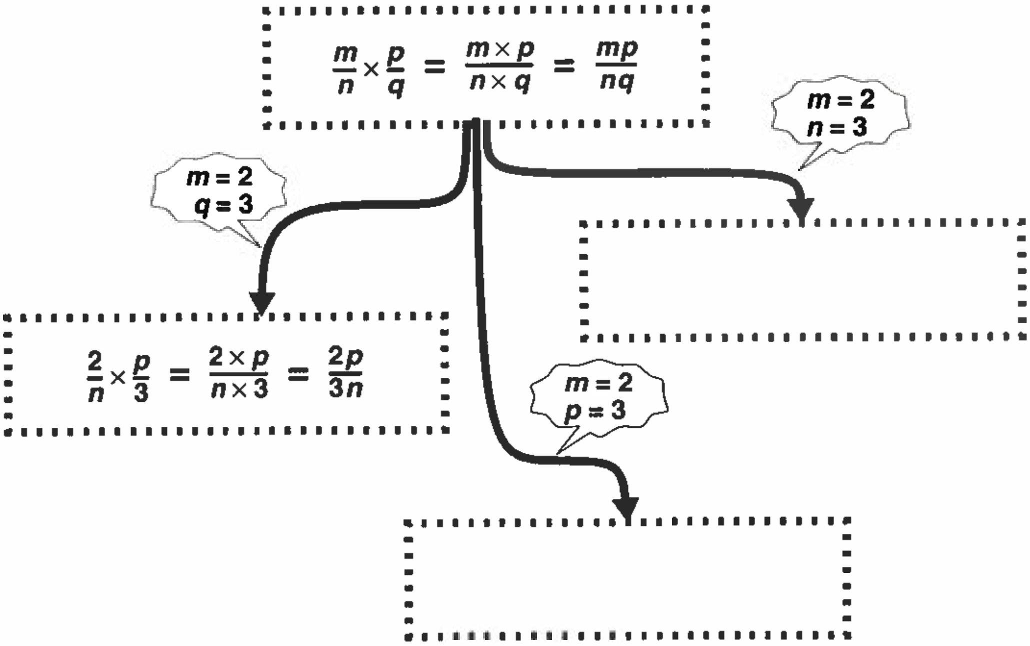
- Bereken: $p^2 + q^2 + 2pq$ voor $p = \frac{1}{3}$ en $q = \frac{2}{3}$

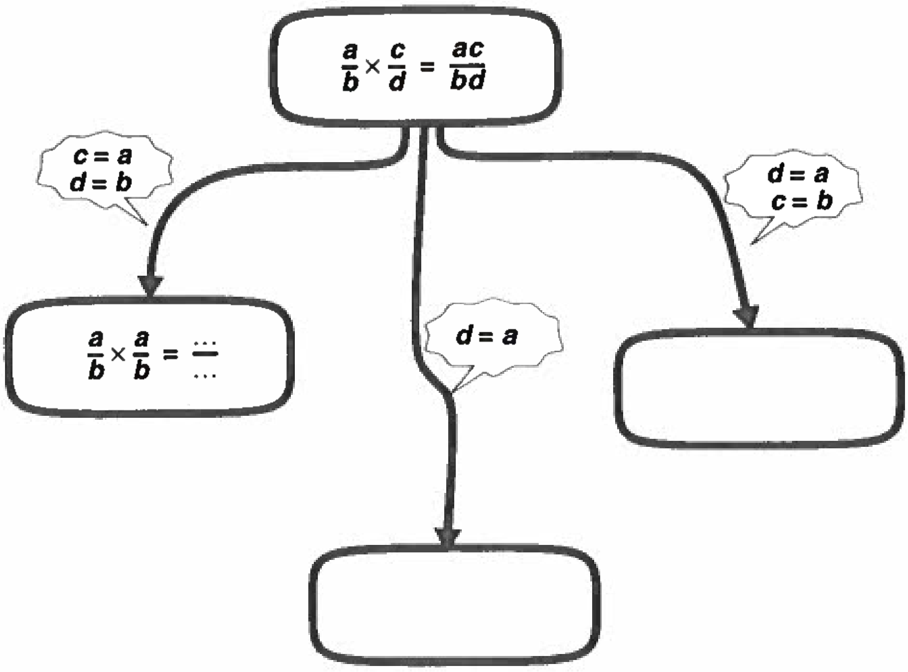
  Ook voor: $p = \frac{2}{5}$ en $q = \frac{3}{5}$

- Bereken: $p^2 - q^2$ voor $p = \frac{3}{4}$ en $q = \frac{1}{4}$

  Ook voor: $p = \frac{5}{8}$ en $q = \frac{3}{8}$

Breuken vermenigvuldigen (II)





Tussenbreuken(I)

Je hebt gezien dat:

$$\boxed{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m \times p}{n \times q}} \quad \text{......... (A)}$$

Misschien denk je nu ook dat:

$$\boxed{\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \stackrel{?}{=} \frac{m + p}{n + q}} \quad \text{......... (B)}$$

- Bereken op deze manier de 'som' van $\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{4}$

  Ga na (bijvoorbeeld met je rekenmachientje) na dat de uitkomst tussen de twee breuken in ligt, en dus nooit de som kan zijn!

- Hoe kun je op een goede manier de som van $\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{4}$ berekenen?

De formule (B) is geen goede formule om breuken op te tellen, maar wel om 'tussenbreuken' te vinden. Daarom noemen we die nu een 'tussenbreuk-formule'.

- Ga aan de hand van een paar voorbeelden na, dat $\frac{m+p}{n+q}$ steeds een breuk is, die tussen $\frac{m}{n}$ en $\frac{p}{q}$ ligt.

- Bedenk ook een paar voorbeelden, waarbij $\frac{m+p}{n+q}$ precies het gemiddelde is van de breuken $\frac{m}{n}$ en $\frac{p}{q}$

In een klas van 31 leerlingen zitten veel meer meisjes dan jongens (19 tegen 12).

In een parallelklas (29 leerlingen) is het juist andersom (12 tegen 17)

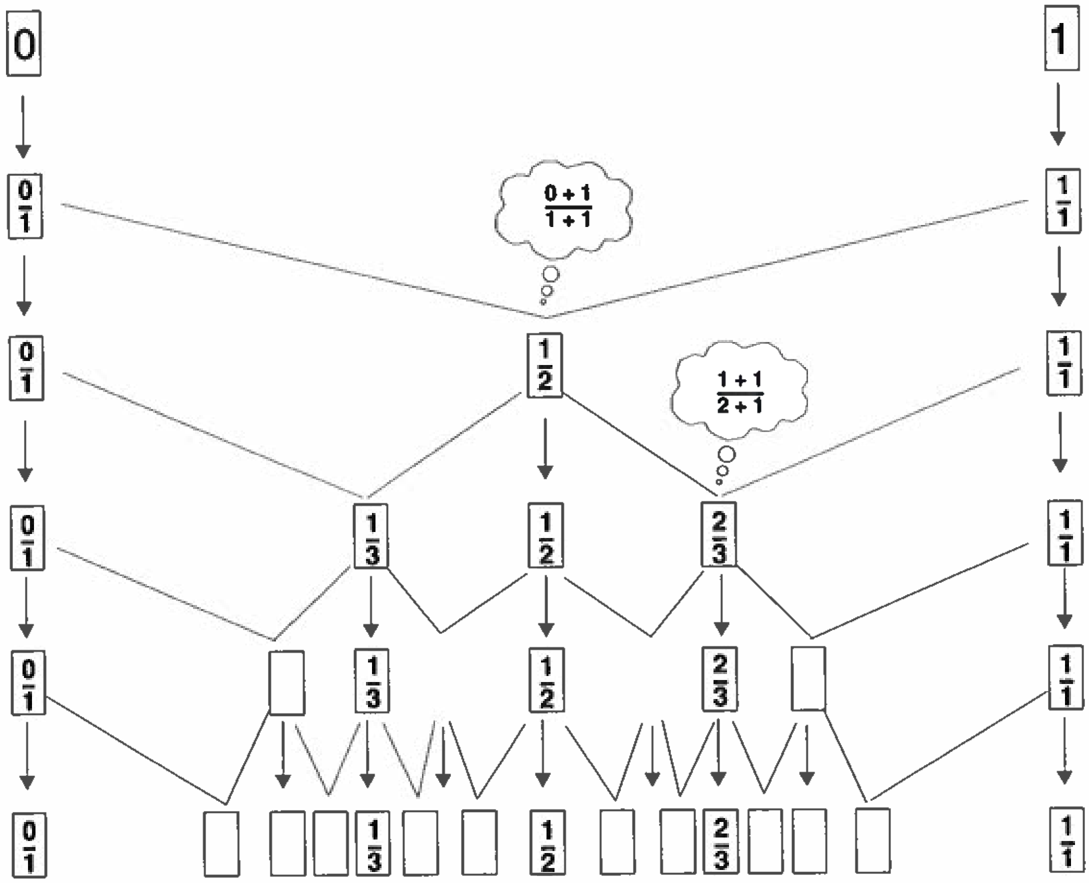
De klassen worden samengevoegd voor gymnastiek, waarbij meisjes en jongens apart les krijgen.

- Ga na dat die samenvoeging een meer evenwichtige verdeling tussen meisjes en jongens oplevert.
- Wat heeft dit voorbeeld met de 'tussenbreuk-formule' te maken?

Tussenbreuken(II)

Met de tussenbreukformule, kunnen stap voor stap, steeds weer nieuwe breuken worden gemaakt.

- Vul passende breuken in bij de lege hokjes.



Somformule

De goede formule voor het optellen van breuken is (helaas) veel ingewikkelder dan de tussenbreuk-formule. Daar komt ie:

$$\boxed{\frac{m}{n}+\frac{p}{q} = \frac{m\times q + n\times p}{n\times q}}$$

- Controleer deze formule voor de breuken $\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{4}$
- Bedenk zelf nu ook een paar voorbeelden, waarmee je deze formule kunt controleren.
- Welke (eenvoudiger) formule krijg je als $m = 1$ en $p = 1$?
- Welke (flauwe) formule krijg je als $n = 1$ en $q = 1$?

De somformule is voor veel gevallen ingewikkelder dan nodig is, maar hij klopt wel altijd.
Hier heb je een voorbeeld, waarbij je het gemakkelijk zonder formule af kunt:

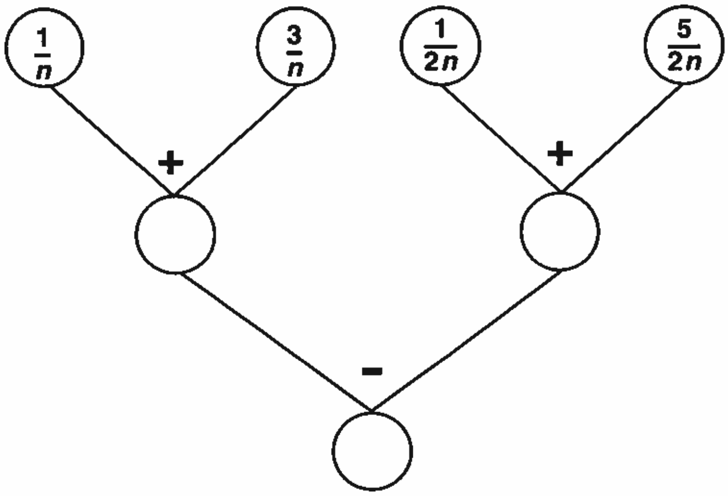
$$\frac{3}{n}+\frac{2}{n}=\frac{5}{n}$$

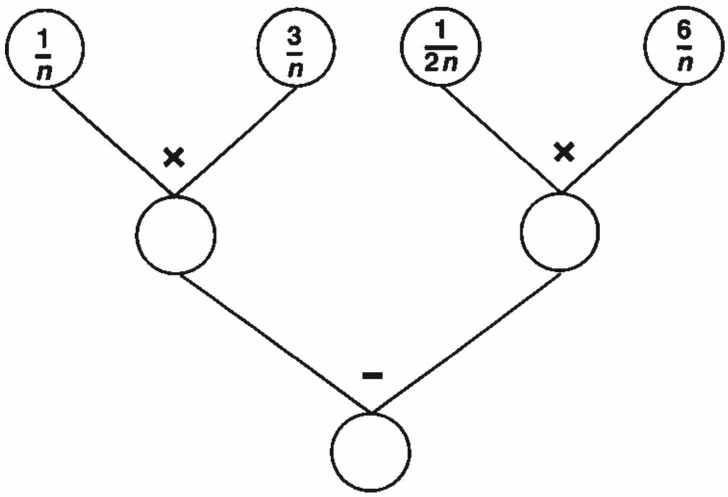
- Als je de formule (met $m = 3$, $p = 2$ en $q = n$) zou gebruiken, komt er:

  $$\frac{3}{n}+\frac{2}{n} = \frac{3\times n + n\times 2}{n\times n}$$

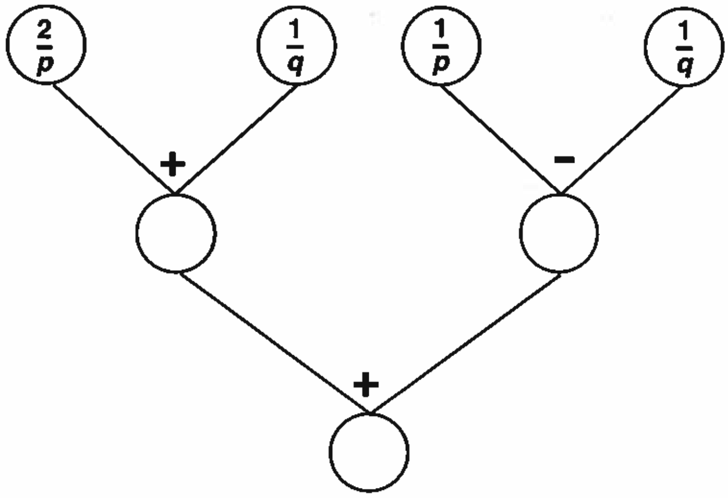
  Laat zien dat deze uitkomst overeenkomt met $\frac{5}{n}$
- Maak (met of zonder formule) één breuk van: $\frac{m}{3}+\frac{m}{2}$
- Ook van: $\frac{m}{3}+\frac{p}{2}$

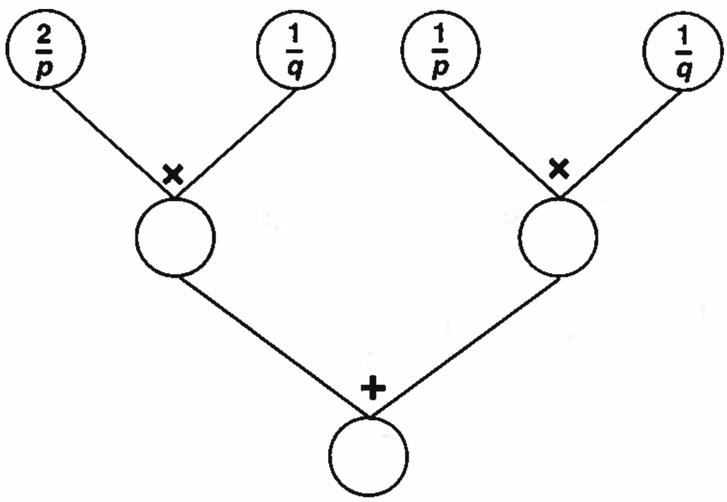
Bomen met breuken(I)





Bomen met breuken (II)





Breukensommen

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{6} = \ldots$$

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{a}+\frac{6}{a} = \ldots$$

$$\frac{b}{2}+\frac{b}{4}+\frac{b}{6}+\frac{b}{12} = \ldots$$

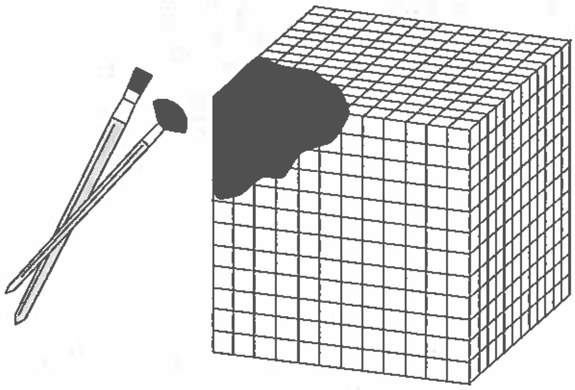
$$\frac{2}{b}+\frac{4}{b}+\frac{6}{b}+\frac{12}{b} = \ldots$$

$$\frac{c}{2}+\frac{c}{6}+\frac{c}{8}+\frac{c}{10}+\frac{c}{12}+\frac{c}{40} = \ldots$$

$$\frac{2}{c}+\frac{6}{c}+\frac{8}{c}+\frac{10}{c}+\frac{12}{c}+\frac{40}{c} = \ldots$$

- Bedenk zelf één paar sommen dat hier sprekend op lijkt.

Kubus verven (I)



Een kubus van 12 bij 12 bij 12 cm is gelijmd uit kleine houten kubusblokjes, elk van 1 bij 1 bij 1 cm.

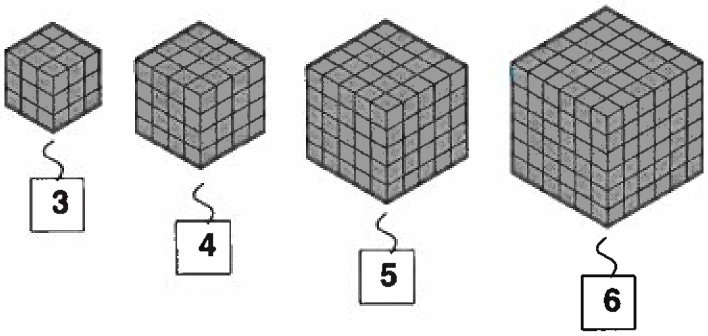
- Hoeveel van die kubusblokjes zijn er in totaal gebruikt?

De kubus wordt van buiten rood geschilderd.
Er zijn kubusblokjes die 3 rode zijvlakken krijgen.

- Hoeveel kubusblokjes zijn dat?
- En hoeveel kubusblokjes krijgen 2 rode zijvlakken?
- En hoeveel slechts 1 rood zijvlak?
- En hoeveel kubusblokjes worden helemaal niet geschilderd?

Kubus verven (II)

Een rij geverfde kubussen:

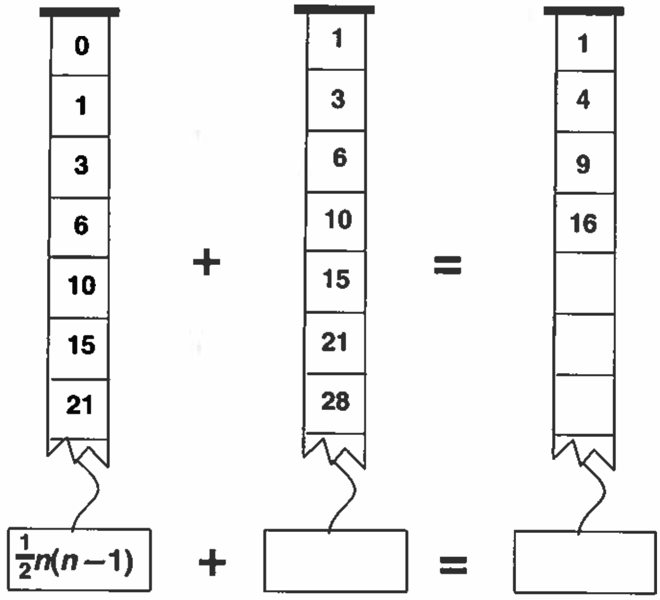


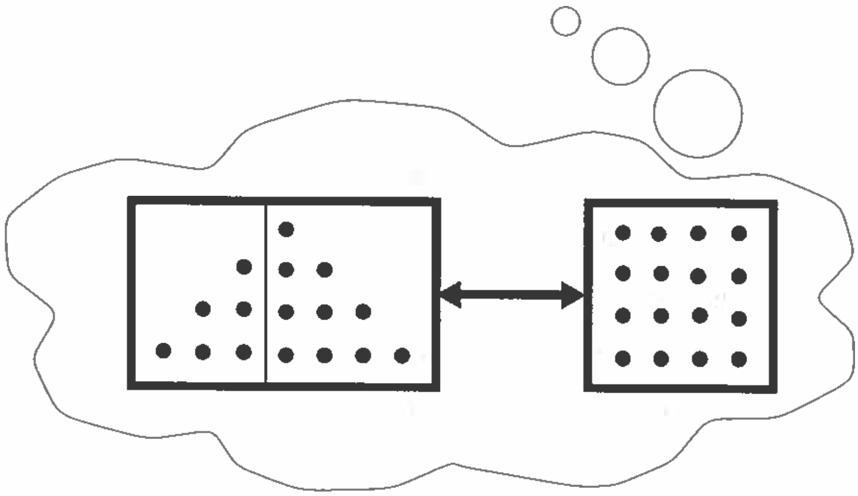
De eerste kubus is 3 bij 3 bij 3 cm , de tweede 4 bij 4 bij 4 cm, enz.
Bekijk onderstaande tabel; r staat voor de lengte van de *ribbe* in cm.
De waarde van r bij de getekende kubussen staat op de 'etiketjes'.
Het aantal kubusblokjes met 3 gekleurde vlakjes, noemen we A_3
Evenzo staan A_2 , A_1 en A_0 , voor het aantal kubus blokjes met 2, 1 en 0 gekleurde vlakjes. A_{tot} tenslotte staat voor het totaal aantal kubusblokjes.

r	A_3	A_2	A_1	A_0	A_{tot}
3	8	12	6	1	27
4					
5					
6					
7					
8					

- Controleer de eerste regel van de tabel en vul de tabel verder in.
- Welke regelmatigheden merk je op?
- Verklaar de formule: $A_2 = 12(r-2)$
- Probeer ook formules te vinden voor A_1 , A_0 en A_{tot}

Driehoeksgetallen en kwadraten

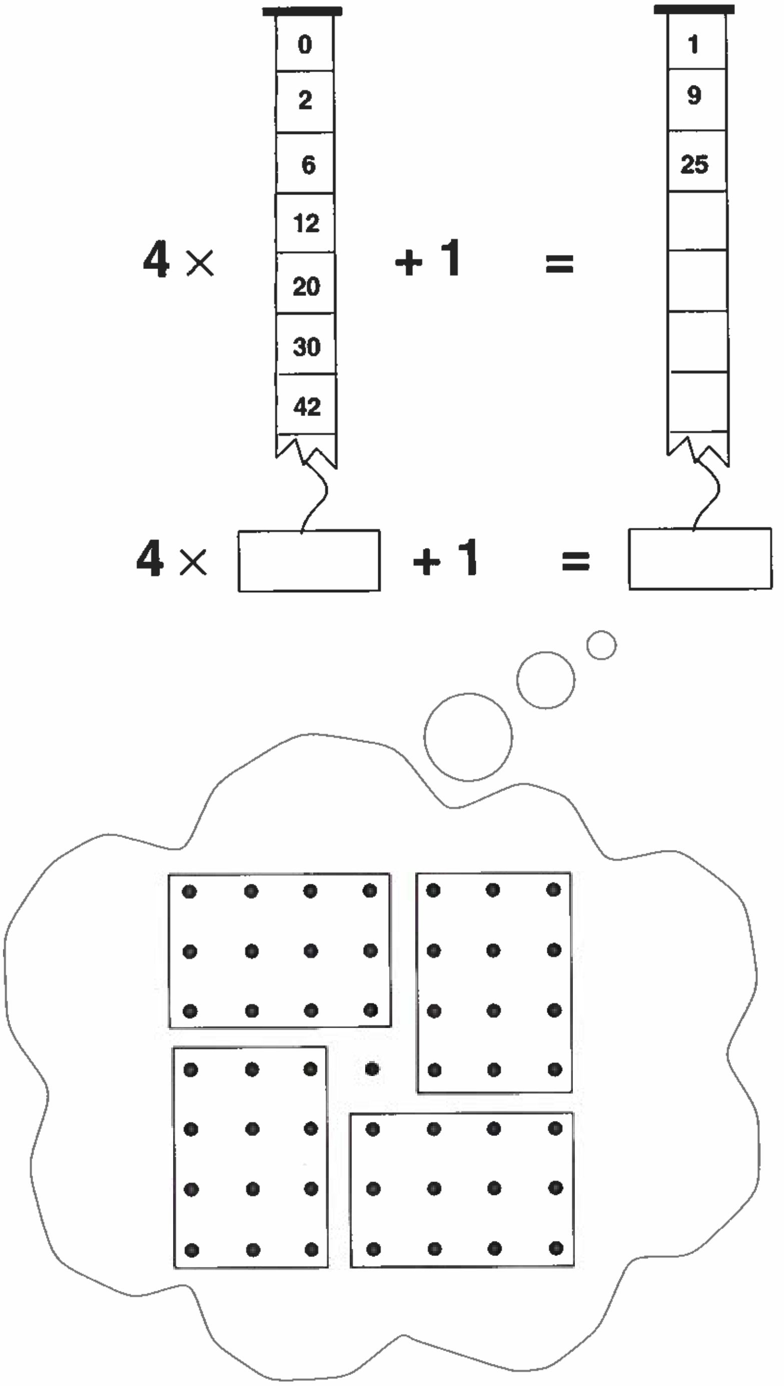




$$\boxed{\tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{1}{2}n(n+1) = n^2}$$

- Verklaar :
  1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 100

Rechthoeksgetallen en kwadraten



$$4n(n + 1) + 1 = (2n + 1)^2$$

Een merkwaardig produkt (I)

Een rechthoek grasland is 31 m lang en 29 m breed.

- Geef uit het hoofd een schatting voor de oppervlakte.
- Hoeveel m^2 wijkt die schatting af van de precieze oppervlakte?

- Dezelfde twee vragen voor een grasland van 41 bij 39 meter

- 51×49 → schatting: $50 \times 50 =$ .... ; precieze uitkomst = ... ; verschil = ...

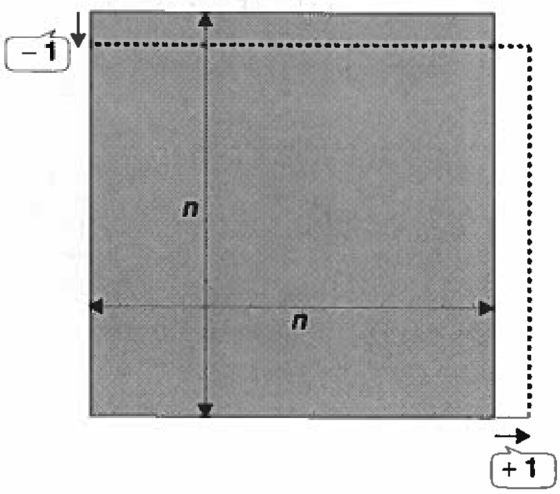
- Maak net zo'n schema voor 61×59.

- Verklaar uit de figuur:

Het verschil tussen $n \times n$ *en* $(n + 1) \times (n - 1)$ *is gelijk aan* **1**

of in formule:

$$(n + 1) \times (n - 1) = n^2 - 1$$



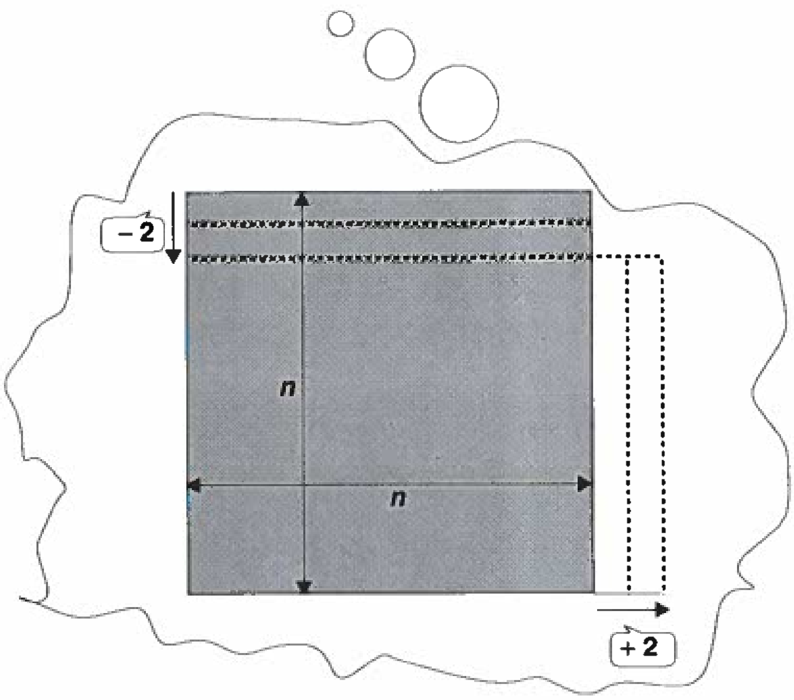
Een merkwaardig produkt(II)

- 32×28
  - schatting: $30 \times 30 =$ ....
  - precieze uitkomst = ...
  - verschil = ...

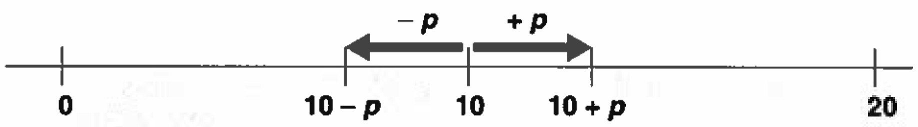
- Maak net zo'n schema voor 42×38.

- Ook voor 52×48.

- Bedenk een algemene regel.



Een merkwaardig produkt (III)



- Bekijk de getallenlijn en vul in:

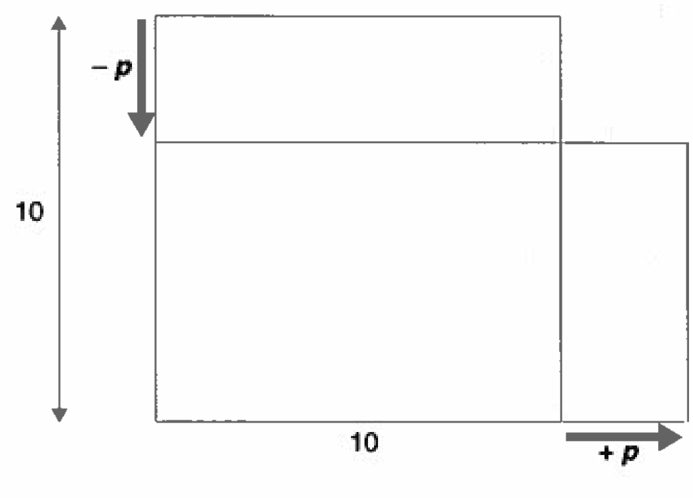
  (10 + *p*) + (10 – *p*) = ...

  (10 + *p*) – (10 – *p*) = ...

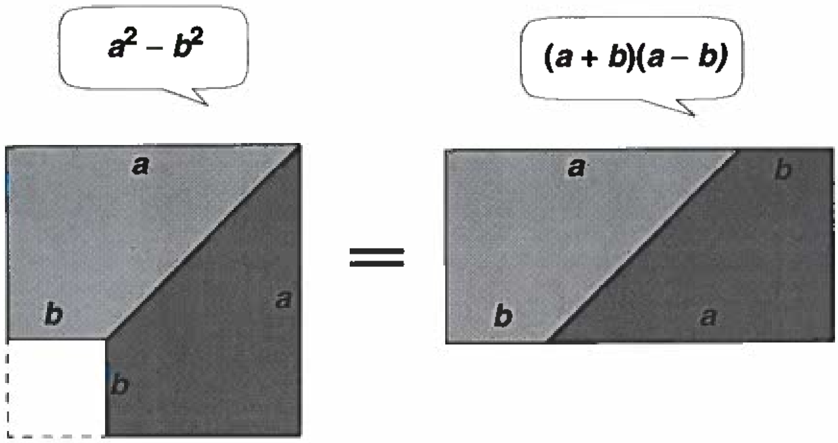
August denkt dat dat '**10 + *p*** maal **10 – *p*'** gelijk is aan 100.

Want zegt hij: **10** maal **10** is **100**
10 – *p* is ***p*** minder dan **10,**
maar **10 + *p*** is ***p*** meer dan **10,**
dus dat heft elkaar op.

Heeft August gelijk, denk je?



Een merkwaardig produkt (IV)



$$\boxed{a^2 \text{ min } b^2 = (a + b) \text{ maal } (a - b)}$$

voorbeeld:

$54^2 - 46^2 \;=\; (54 + 46) \times (54 - 46) \;= 100 \times 8 \;= 800$

- Bereken op deze wijze zonder rekenmachientje:

  $52^2 - 48^2$ = ... = ... = ...

  $67^2 - 33^2$ = ... = ... = ...

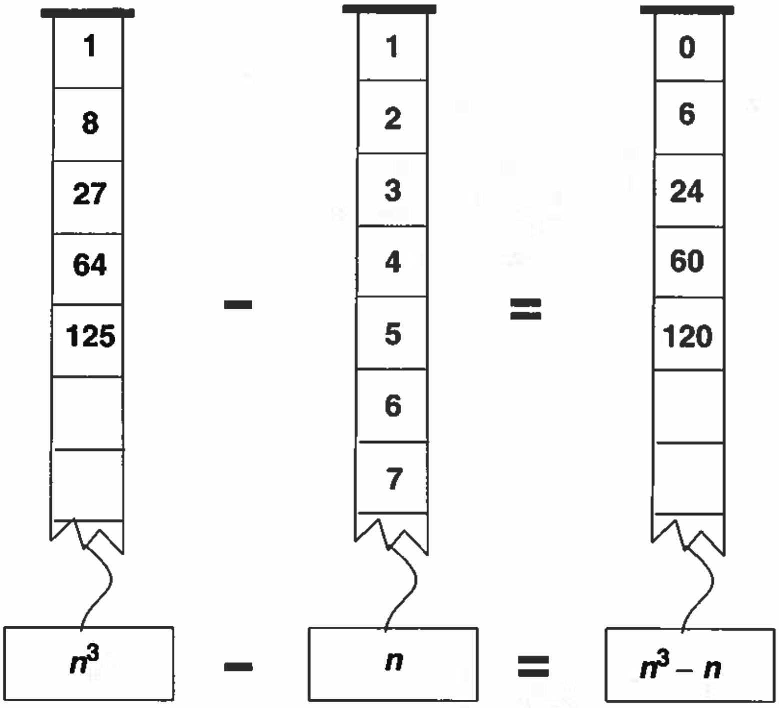
  $501^2 - 499^2$ = ... = ... = ...

- Bedenk zelf een paar van zulke vermenigvuldigingen die je (bijna) uit je hoofd kunt doen.

- **100** maal **100** is groter dan **100 +** ***p*** maal **100 –** ***p***
  Hoeveel groter?

- n^2 is groter dan $n + 10$ maal $n - 10$
  Hoeveel groter?

Deelbaar door 6



- Vul de ontbrekende vakjes in.

Als je goed naar de rechter strook kijkt, dan lijkt het erop of alle getallen in die strook deelbaar zijn door 6.

- Neem nog een paar andere waarden voor ***n*** en onderzoek of dit dan ook klopt.

In de strook met etiket $n^3 - n$ zit nog een mooi patroon verstopt.

We beginnen met 6: $\mathbf{6 = 1 \times 2 \times 3}$

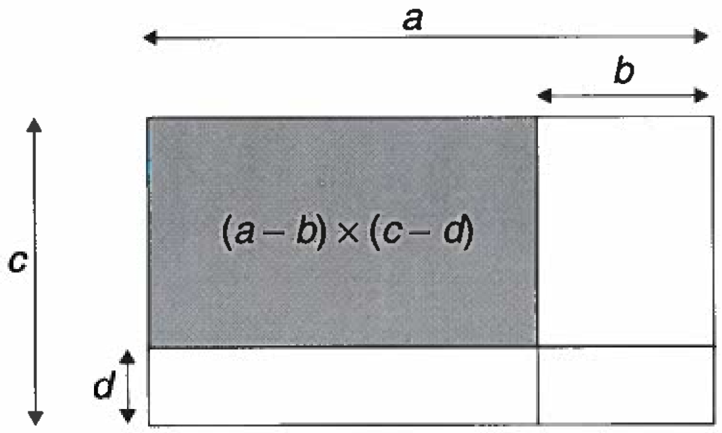
En dan verder: $\mathbf{24 = 2 \times 3 \times 4}$

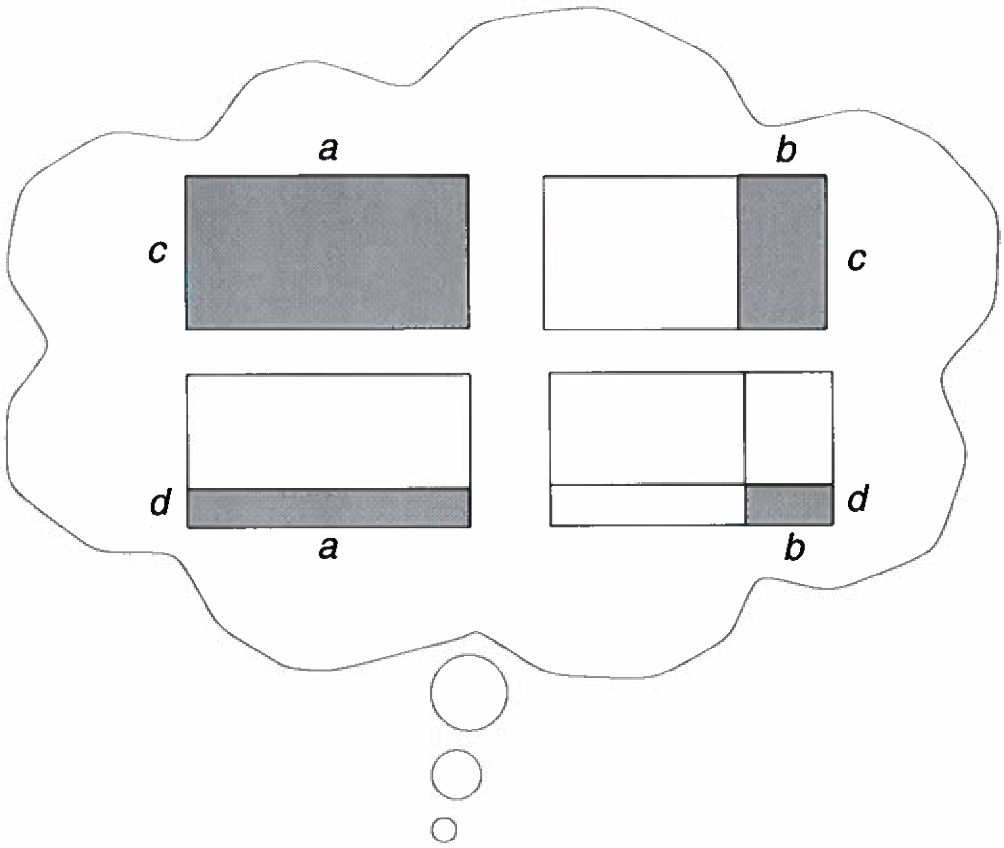
$\mathbf{60 = 3 \times 4 \times 5}$

- Gaat dat zo door? Probeer nog een paar getallen.
- Vul in (en controleer!) : $n^3 - n =$ .... × .... × ....

- Probeer te verklaren waarom $n^3 - n$ deelbaar is door **6**, welke waarde je ook kiest voor ***n***.

Verschillen vermenigvuldigen(I)

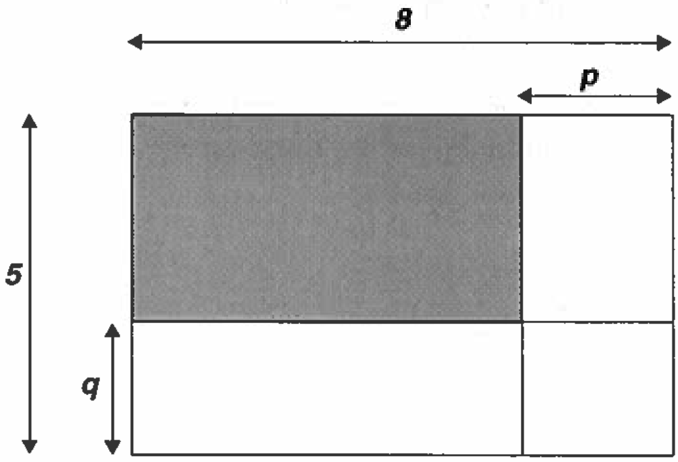




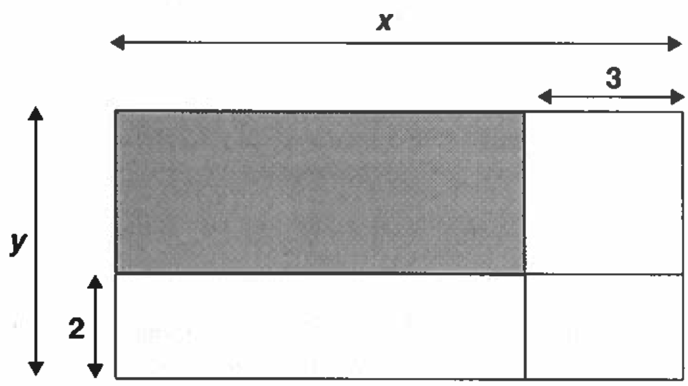
$$(a - b) \times (c - d) = a \times c - a \times d - b \times c + b \times d$$

- Deze formule volgt uit de plaatjes. Hoe kun je dat uitleggen?
- Klopt de formule ook als $a = b$? Licht je antwoord toe.

Verschillen vermenigvuldigen (II)



$(8-p)\times(5-q) =$ ...40 – ....



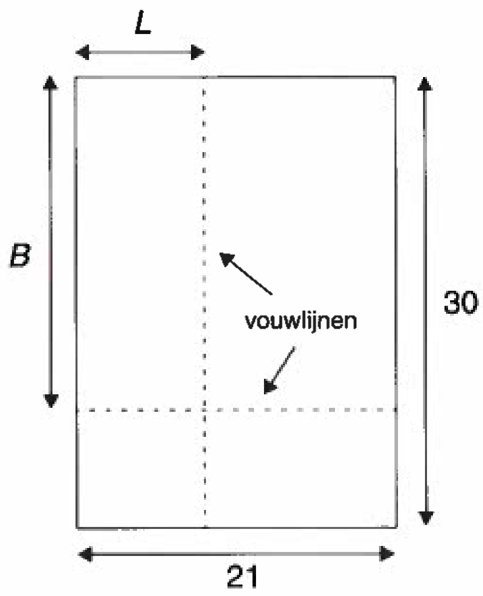
$(x-3)\times(y-2) =$ ....

- Maak zelf nu ook een produkt van verschillen met een plaatje dat daarbij past.

Verschillen vermenigvuldigen (III)

Een vel papier, formaat A4 heeft afmetingen 210 mm bij 297 mm.
Afgerond op centimeters is dat : 21 bij 30.

- Neem een vel A4 en maak daar twee vouwen in: eentje evenwijdig met de korte kant en eentje evenwijdig met de lange kant.
  De afstanden tot de kanten doen er niet toe.

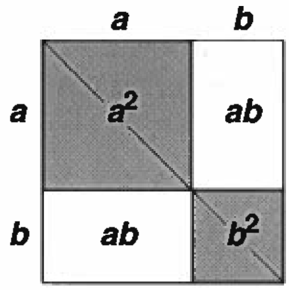


Noem de afstand van de 'verticale' vouwlijn tot de linkerkant *L*
en de afstand van de 'horizontale' vouwlijn tot de bovenkant *B*.

- Vouw het papier open; door de vouwlijnen zijn vier rechthoeken ontstaan.
  Schrijf in elk van die rechthoeken een formule voor de oppervlakte (die formule moet de letters *L* en *B* bevatten).

- Wat moet er uitkomen als je die vier oppervlakten bij elkaar optelt?
  Klopt dat ook?

Kwadraten van sommen (I)



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

- Verklaar de gelijkwaardigheid van $(a+b)^2$ en $a^2 + b^2 + 2ab$ uit het plaatje.

- Bereken uit het hoofd: $a^2 + b^2 + 2ab$ voor het geval dat $a = 37$ en $b = 63$

- Stel $b = a$. De gelijkheid moet dan geldig blijven.
  Ga zonder plaatje na dat $(a+a)^2$ en $a^2 + a^2 + 2aa$ inderdaad gelijkwaardig zijn.

- Stel nu $b = 2a$ en reken na dat de formule klopt.

- Stel $a = 2p$ en $b = 3p$ en vul dit in bij $(a+b)^2$ en $a^2 + b^2 + 2ab$
  Reken na dat er hetzelfde uitkomt.

Kwadraten van sommen (II)

Het onderstaande gedicht komt uit de bundel "*Een leeuwerik boven een weiland*" van de schrijver K. Schippers.
De titel van het gedicht is een ingewikkelde formule.
Het gedicht eindigt ook met een formule, maar die ziet er veel mooier uit.
Daarmee wil de dichter de schoonheid uitdrukken van iemand die hem lief is.

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

je schoonheid min je ogen noem ik *a*
de geest die in je dartelt *b*
je ogen
c
opgeteld en minstens een kwadraat gegeven:
$(a + b + c)^2$

- Die laatste mooie formule is gelijkwaardig met de ingewikkelde formule aan het begin. Dat volgt uit onderstaand plaatje. Leg dat uit.

	a	**b**	**c**
a	a^2	**ab**	**ac**
b	**ab**	b^2	**bc**
c	**ac**	**bc**	c^2

- Neem $c = 0$, maar laat ***a*** en ***b*** gewoon staan in de beide formules. Welke gelijkwaardige formules krijg je dan?

- Stel $a = b = c$. Je kunt nu beide formules met één letter schrijven. Reken na dat ze gelijkwaardig zijn.

- Het kwadraat van 111 heeft een grappige uitkomst: 12321. Je kunt dit met een rekenmachientje controleren, maar je kunt ook de twee formules van het gedicht gebruiken ....

Kwadraten van sommen(III)

Volgende stap: het kwadraat van $a + b + c + d$

Het zal je wel niet verbazen dat de regel zo begint:

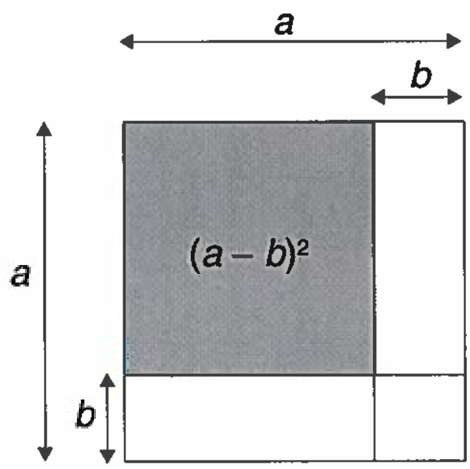
$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab +$ ....

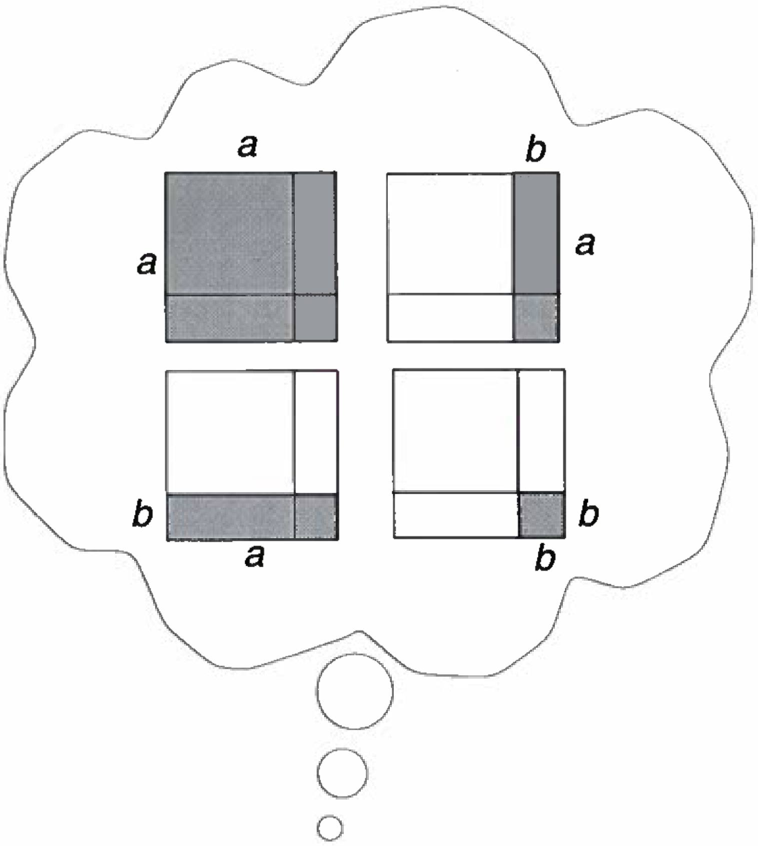
- Maak de regel af en teken een plaatje waaruit blijkt dat die goed is!

- Verklaar uit die regel dat $1111^2 = 1234321$

- Neem $a = b = c = d$. Schrijf de twee formules met één letter en reken na dat ze gelijkwaardig zijn.

Kwadraten van verschillen(I)

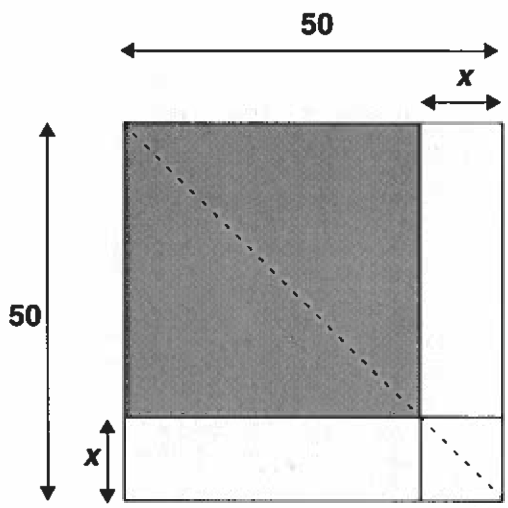




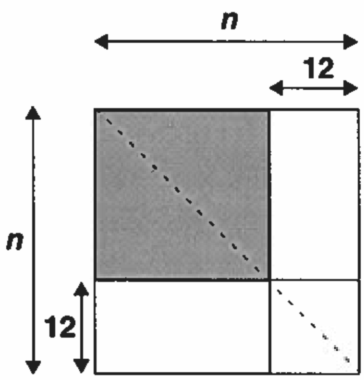
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- Deze formule volgt uit de plaatjes. Hoe kun je dat uitleggen?
- Klopt de formule ook als $a = b$? Licht je antwoord toe.

Kwadraten van verschillen (II)



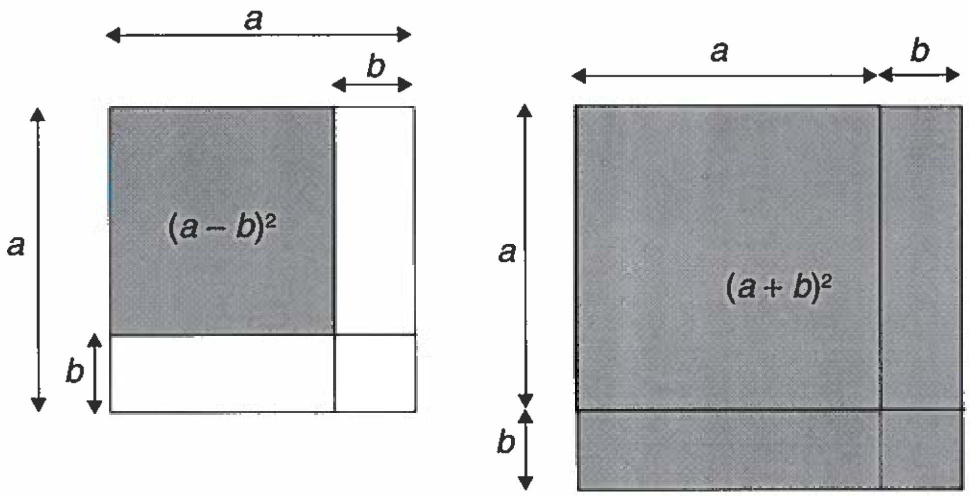
$(50 - x)^2 = 2500$ ....



$(n - 12)^2 =$ ....

- Maak zelf nu ook een kwadraat van een verschil en teken het plaatje dat daarbij past.

Meer over kwadraten



$$(a-b)^2+(a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

- Verklaar deze formule.
- Bereken uit je hoofd : $99^2 + 101^2$
- Ook: $49^2 + 50^2 + 51^2$

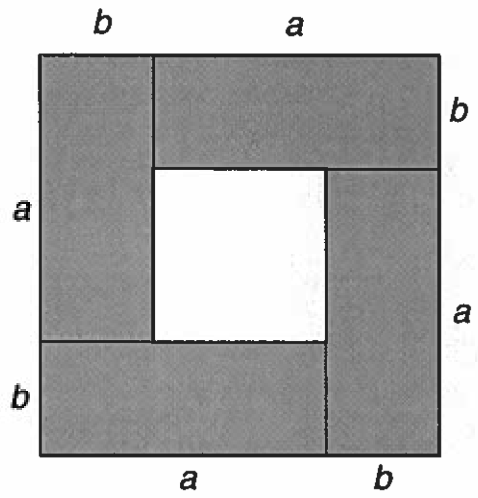
$S = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$
Bewering: *S* is deelbaar door 5, bij elke hele waarde voor *n*

- Onderzoek of de bewering klopt. Zo ja, probeer een sluitende verklaring te geven.

$T = (n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$

- Door welk getal zal *T* deelbaar zijn, bij elke hele waarde van *n*? Geef een sluitende verklaring.

Som, verschil, produkt



$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

- Verklaar deze formule uit het plaatje.
- Onderzoek of de formule ook klopt voor $a = b$.

$\boldsymbol{S^2 - V^2 = (S + V)(S - V)}$

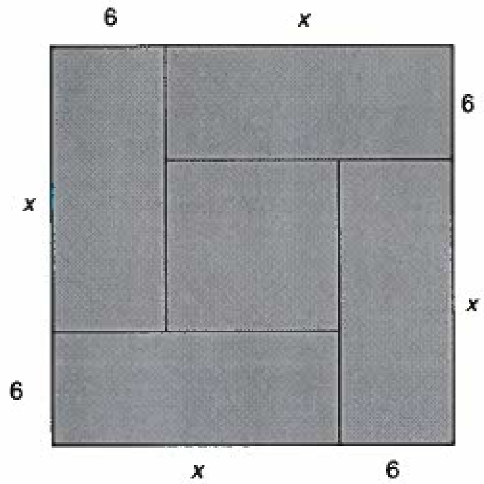
- Stel $\boldsymbol{S} = a + b$ en $\boldsymbol{V} = a - b$
  Vul dit bij de vetgedrukte formule in.
  Dit leidt tot de formule in het zwarte kader!

S staat voor de som, ***V*** voor het verschil en ***P*** voor het produkt van twee getallen.

- Vul s.v.p. de tabel in:

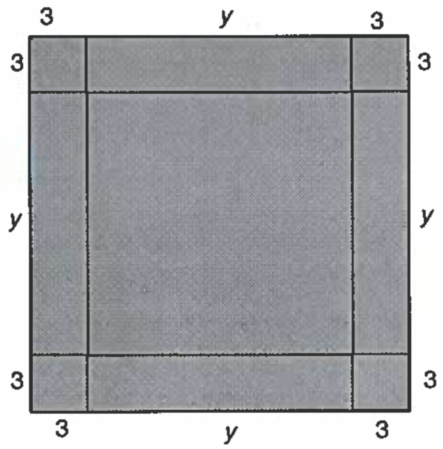
S	***V***	***P***
13	3	
22		96
	19	120
	0	576

Vierkantsvergelijkingen (I)



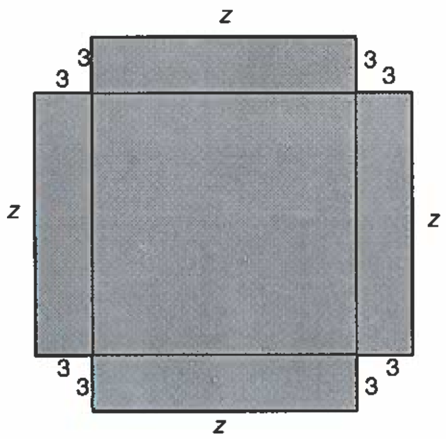
oppervlakte = 441
ofwel:
$(x + 6)^2 = 441$

- Bereken de waarde van *x*.



oppervlakte = 400
ofwel:
$(3 + y + 3)^2 = 400$

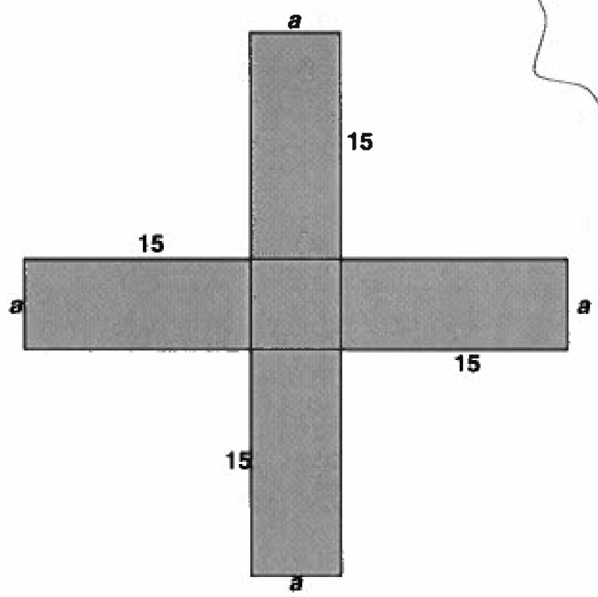
- Bereken de waarde van *y*.



oppervlakte = 364
ofwel:
$z^2 + 4 \times 3z = 364$

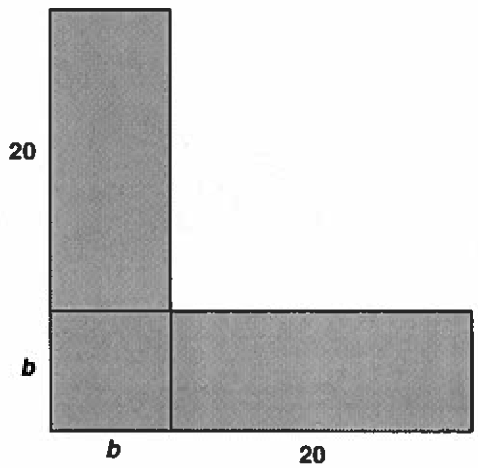
- Bereken de waarde van *z*.

Vierkantsvergelijkingen (II)



oppervlakte = 396
ofwel:
$a^2 + 60a = 396$

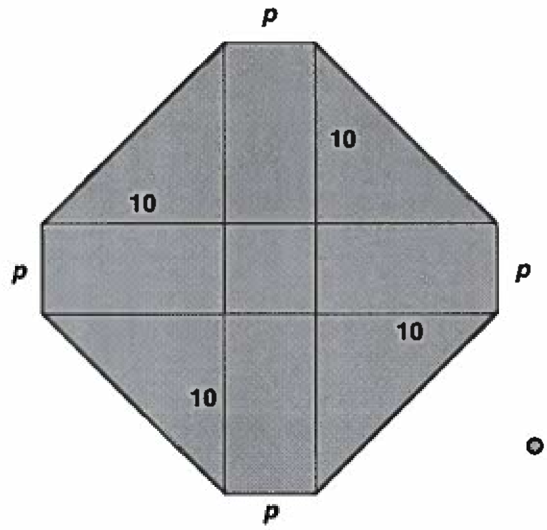
- Bereken de waarde van *a*.



oppervlakte = 384
ofwel:
$b^2 + 40b = 384$

- Bereken de waarde van *b*.

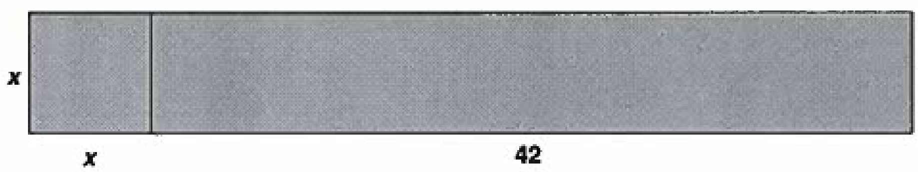
Vierkantsvergelijkingen (III)



oppervlakte = 425
ofwel:
$p^2 + ... + ... = 396$

- Bereken de waarde van *p*.

oppervlakte = 343
ofwel:
.... + ... = 343



- Bereken de waarde van *x*.

Antieke vergelijking (I)

Het kwadraat van het met 3 verminderde vijfde deel van een troep apen was verborgen in een grot.
1 aap die in een boom geklommen was, was zichtbaar.

Hoeveel apen waren er in totaal?

Bhaskara, India (1114 - 1185)

Antieke vergelijking (II)

De zoon van Pritha, verbitterd door het gevecht schoot een koker vol pijlen af om Karna te doden:

- met de helft van zijn pijlen weerde hij die van zijn tegenstander af;

- met 4 maal de vierkantswortel uit het gehele aantal doodde hij diens paard;

- met 6 pijlen velde hij Salya;

- met 3 vernietigde hij zijn zonnescherm-standaard en boog;

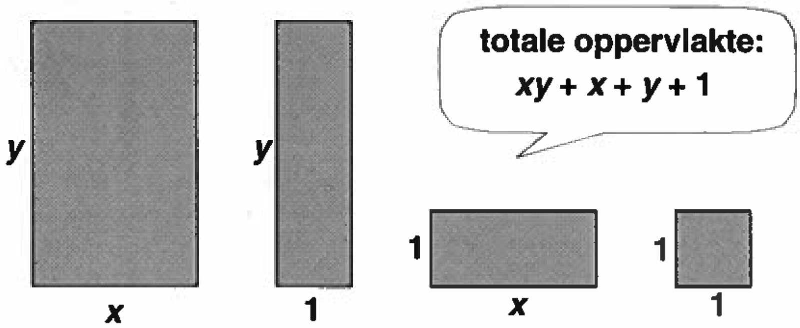
- met 1 pijl trof hij het hoofd van de dwaas.

*Hoe talrijk waren de pijlen die Arjuna *) liet vliegen?*

**) Arjuna is de zoon van Pritha*

Bhaskara, uit Vya Ganita (= 'wortelrekening')

Ontbinden in factoren (I)



- Hoe kun je met de vier stukjes één rechthoek leggen?
- Verklaar nu: $xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$
- Vul in: $xy + 2x + 2y + 4 = (x + \dots)(y + \dots)$
  Hoe kun je dat met een plaatje uitleggen?
- Vul de ontbrekende getallen in:

$$ab + 2a + 3b + 6 = (a + \dots)(b + \dots)$$

$$pq + 5p + 6q + 30 = (p + \dots)(q + \dots)$$

$$xy + 11x + 9y + \dots = (x + 9)(y + \dots)$$

$$mn + \dots m + \dots n + 200 = (m + 20)(n + \dots)$$

- Stel $b = a$, $q = p$, $y = x$ en $n = m$ dan komt er (vul in):

$$a^2 + 5a + 6 = (a + \dots)(a + \dots)$$

$$p^2 + 11p + 30 = (p + \dots)(p + \dots)$$

$$x^2 + 20x + \dots = (x + 9)(x + \dots)$$

$$m^2 + \dots m + 200 = (m + 20)(m + \dots)$$

Ontbinden in factoren (II)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{x+6} \arrow[r, "\textit{kwadraat}"] \arrow[drr, dashed] & \boxed{x^2+12x+36} \arrow[r, "\textit{min } 1"] & \boxed{x^2+12x+35} \arrow[d, "\textit{ontbind}"] \\
 & & \boxed{(x+5)(x+7)}
\end{tikzcd}$$

- Controleer bovenstaande berekening.
- Voer net zo'n berekening uit met achtereenvolgens:

  $x+4$, $y+10$, $z+11$, $p+1$

- Bedenk zelf nog een paar andere voorbeelden.
- Kun je een algemene regel geven?

Formules onderzoeken (I)

In een oud algebraboek staat deze formule:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Zonder die formule te verklaren, kan je een paar eenvoudige tests uitvoeren om te onderzoeken of de formule goed kan zijn.

- Verwissel ***a*** en ***b***.

$$(a + b)^3 \downarrow (b + a)^3$$

gelijkwaardig!

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \downarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gelijkwaardig?

- Stel $b = 0$

  Dan: $(a + b)^3 =$ .... en $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$ ....

- Stel $b = a$

  Dan: $(a + b)^3 =$ . ... en $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$ ....

- Stel $b = 10a$

  Dan: $(a + b)^3 =$ . ... en $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$ ....

Dit alles is nog geen garantie dat de formule goed is, maar het geeft wel wat vertrouwen.

- Probeer een sluitende verklaring voor de formule te vinden.

Formules onderzoeken (II)

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Voor $(a + b)^4$, $(a + b)^5$, enz. bestaan ook zulke formules, al worden die steeds een beetje ingewikkelder.

- Vul in (door gebruik te maken van een of meer tests:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + ...a^2b^2 + ... ab^3 + b^4$$

- Net zo voor:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + ... + ... + ...$$

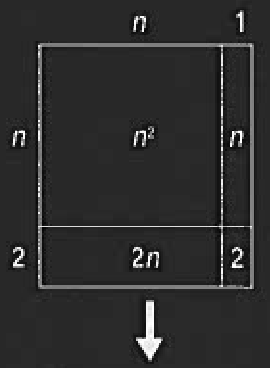
- En voor:

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^3b^2 + ... + ... + ... + ...$$

Vermenigvuldigen (I)

$$(n+1)\times(n+2)=?$$

$$\begin{array}{rl} n+2 & \\ n+1 & \times \\ \hline n+2 & \\ n^2+2n & \\ \hline \boxed{n^2+3n+2} & + \end{array}$$



$$\boxed{n^2+3n+2}$$

$$(n+1)\times n+(n+1)\times 2=$$

$$(n^2+n)+(2n+2)=$$

$$\boxed{n^2+3n+2}$$

- Gebruik deze formule om uit het hoofd 11×12 te berekenen.
  Ook: 101×102 (controleer met rekenmachientje).
  Probeer ook 51×52.

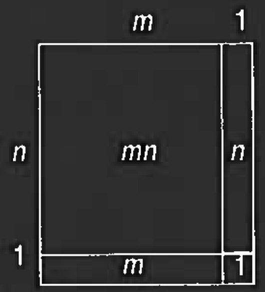
- Geef een formule voor $(n+1) \times (n+3)$.
  Bedenk een paar vermenigvuldigingsopgaven die je nu uit het hoofd kunt berekenen.

- Maak zelf een formule waarmee je moeilijk lijkende vermenigvuldigingen uit je hoofd kunt maken.

Vermenigvuldigen (II)

$$(m+1)\times(n+1) = ?$$

$$\begin{array}{rl} n+1 & \\ m+1 & \\ \hline n+1 & \times \\ mn+m & \\ \hline \boxed{mn+m+n+1} & + \end{array}$$



$$\downarrow$$

$$\boxed{mn+m+n+1}$$

$$\begin{aligned} (m+1)\times n + (m+1)\times 1 &= \\ (mn+n) + (m+1) &= \\ mn+n+m+1 &= \\ \boxed{mn+m+n+1} & \end{aligned}$$

- Laat zien dat: $(m+1)\times(n+2) = mn+2m+n+2$

- Werk uit: $(m+2)\times(n+1) =$
  Ook: $(m+2)\times(n+2) =$

- Laat zien dat:

$$\begin{array}{cl} (m+1)\times(n+1) & \\ (m+1)\times(n+2) & \\ (m+2)\times(n+1) & \\ (m+2)\times(n+2) & \\ \hline (2m+3)\times(2n+3) & + \end{array}$$