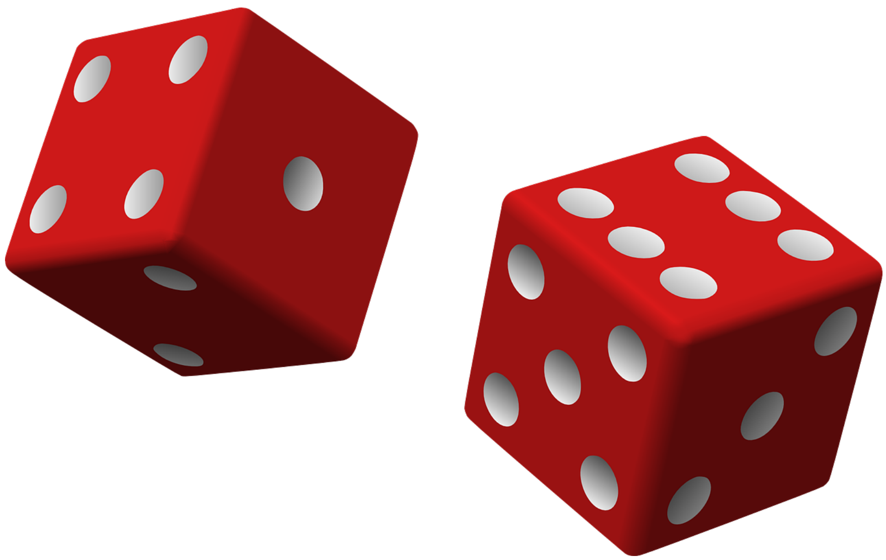
Een gooi naar de winst



Wiskunde B-dag 2016, vrijdag 18 november, 9:00u-16:00u

Inleiding

Over de opdracht

In een voetbalcompetitie is het vaak tot het eind spannend. Onderweg kunnen vreemde uitslagen voorkomen. Dat Ajax wint van PSV en PSV wint van Feyenoord hoeft niet te betekenen dat Ajax vervolgens ook wint van Feyenoord. Het komt regelmatig voor dat Feyenoord dan alsnog van Ajax wint. Wie dan van de drie teams het sterkste team is blijft dan nog onduidelijk. Maar dat is voetbal...
Op de Wiskunde B-dag van dit jaar onderzoeken we of dit ook voorkomt als je gaat dobbelen. We onderzoeken daartoe een eenvoudig dobbelspel: beide spelers hebben een dobbelsteen, gooien deze, en wie het hoogste aantal ogen gooit wint. Er blijken setjes dobbelstenen te bestaan waarbij geen van de stenen duidelijk het sterkst is in dit spel, en zulke dobbelstenen ga je uiteindelijk zelf maken.

Structuur van de dag

Deze Wiskunde B-dag opdracht bestaat uit basisopgaven, extra opgaven en een eindopgave. Probeer ongeveer de helft van je dag aan de eindopgave te besteden.

Wat lever je in?

Aan het eind van deze dag lever je een verslag in. Daarin beschrijf je de resultaten die je bij de opgaven hebt gevonden. Vertel je eigen verhaal zó dat het duidelijk en overtuigend is. Uiteraard gebruik je daarbij belangrijke toelichtende figuren als illustraties. Wees begrijpelijk voor anderen die niet aan de Wiskunde B-dag meedoen maar wel voldoende wiskunde beheersen. Dat betekent dat je ook de problemen helder moet introduceren en dat je, waar nodig en nuttig, teruggrijpt op wat je in eerdere opgaven hebt verkend en beargumenteerd.

Kortom: je schrijft een eigen duidelijk verhaal, met wiskundige argumenten onderbouwd. De kwaliteit van je verslag telt zeker ook mee in de beoordeling!

Voor het verslag kan het nuttig zijn om al in de ochtend te beginnen met het uitschrijven van de opgaven en de antwoorden die je gevonden hebt. Bedenk ook dat het gehele verslag om 4 uur 's middags moet worden ingeleverd!

Basisopgaven

Opgave 1 (Oogjes toe)

Susanne en Rogier hebben allebei een 'gewone' dobbelstenen met zes vlakken en op die vlakken respectievelijk 1, 2, 3, 4, 5 of 6 ogen, gooien deze, en wie het hoogste aantal ogen gooit wint. De ene keer wint Rogier, de andere keer Susanne. Als ze maar vaak genoeg spelen, dan zullen ze allebei bij benadering de helft van de keren winnen. Dat vindt Susanne niet prettig.

a) Susanne tekent bij het zijvlak met 2 ogen een oogje erbij. Ze speelt nu dus met 1, 3, 3, 4, 5, 6. Rogier nog steeds met 1, 2, 3, 4, 5, 6. Zal Susanne nu op den duur vaker winnen, of maakt het niet uit?

b) Rogier heeft door dat Susanne een extra oogje gezet heeft op het zijvlak van de 2 ogen. Daarom gaat hij ook op één van de zijvlakken een oogje erbij zetten. Op welke zijde kan hij het beste een oogje erbij te tekenen om zo vaak mogelijk te winnen, die met 1, 2, 3, 4, 5 of 6? Waarom?

Opgave 2 (Is meer altijd beter?)

Ook Rogier valt door de mand en ze stoppen het spel. Dan komt Susanne met drie nieuwe dobbelstenen, die we voor het gemak T, U en V noemen. Susanne en Rogier mogen niet allebei met dezelfde steen spelen.

- $T : 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- $U : 2, 3, 4, 5, 6, 7$
- $V : 1, 1, 1, 1, 1, 100$

Ze gaan opnieuw dobbelen, en Rogier mag als eerste kiezen welke dobbelsteen hij wil. Susanne kiest als tweede een dobbelsteen.

a) Welke dobbelsteen moet Rogier kiezen en waarom?

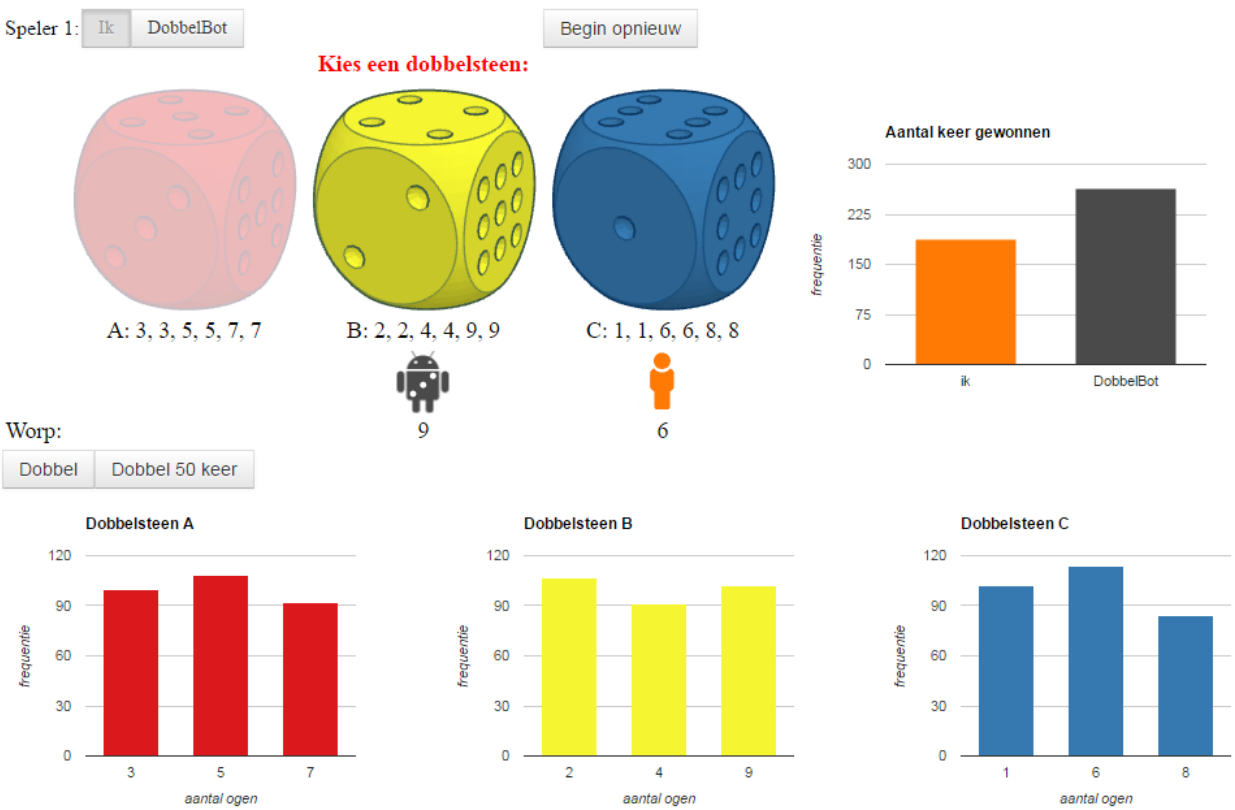
b) Stel, Rogier kiest dobbelsteen U. Welke kan Susanne dan het beste kiezen en waarom?

Opgave 3 (Dobbelen tegen Dobbelbot)

Het is tijd om zelf eens te gaan dobbelen. Je doet dat digitaal. Je gaat de variant van het spel waarbij jij als eerste een dobbelsteen moet kiezen uit drie dobbelstenen spelen tegen Dobbelbot: een computerprogramma dat opvallend goed is in dit spelletje.

Ga naar `http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/dobbelen/`
(verkort adres: `http://bit.ly/2fuJMwM`, of gebruik de QR code hieronder)

Zoals je ziet zijn er drie dobbelstenen om uit te kiezen. Dobbelsteen A, bijvoorbeeld, heeft 6 zijden en op deze zijden staan respectievelijk 3, 3, 5, 5, 7 en 7 ogen (er zijn dus twee zijden waar 3 ogen op staan, enzovoort). DobbelBot is zo vriendelijk om jou eerst een dobbelsteen te laten kiezen (bovenin staat bij speler 1 ‘ik’ geselecteerd; laat deze instelling zo staan).



Figuur 1: DobbelBot na het spelen van veel potjes. Er is een paar keer van dobbelsteen gewisseld.

a) Kies een dobbelsteen om mee te spelen door erop te klikken. DobbelBot kiest hierna één van de overgebleven dobbelstenen. Druk op de knop ‘Dobbel’ .

Je ziet nu hoeveel ogen jij hebt gegooid en hoeveel ogen DobbelBot heeft gegooid. In de drie grafieken onderin worden de resultaten van de dobbelstenen bijgehouden. In de grafiek rechtsboven wordt het onderlinge resultaat bijgehouden: hoe vaak jij hebt gewonnen (het hoogste aantal ogen hebt gegooid) en hoe vaak DobbelBot heeft gewonnen.

b) Speel nu minstens 300 keer tegen DobbelBot. Wissel af en toe eens van dobbelsteen.

De kans is groot dat DobbelBot beter gepresteerd heeft dan jullie. Zie maar in de staafgrafiek rechtsboven.

c) Verander nu Speler 1 in DobbelBot en druk op OK. Zorg er voor dat jij nu vaker wint dan DobbelBot.

d) Is er een dobbelsteen die je het beste kan kiezen als je Speler 1 bent? Geef een beredeneerd antwoord.

Opgave 4 (Een kans om te winnen)

Hoe vaak wint dobbelsteen A van B? In deze opgave leer je over de winstkans van een dobbelsteen t.o.v. een andere dobbelsteen.

We beginnen met de dobbelstenen uit de simulatie met DobbelBot. Hieronder staat een tabel waarin je kunt noteren in welke gevallen dobbelsteen A wint van dobbelsteen B, en omgekeerd. Een deel van de tabel is al ingevuld.

Tabel 1: Wie wint er?

		A					
		3	3	5	5	7	7
B	2	A	A				
	2	A					
	4	B					
	4					A	
	9						
	9		B				

a) Maak de bovenstaande tabel af.

De **winstkans** van dobbelsteen A bij spelen tegen dobbelsteen B noteren we als $w(A,B)$. De winstkans $w(A,B)$ is gelijk aan $\frac{\textit{het aantal uitkomsten waarbij A wint van B}}{\textit{het totaal aantal uitkomsten}}$

b) Wat is $w(A,B)$? En $w(B,A)$?

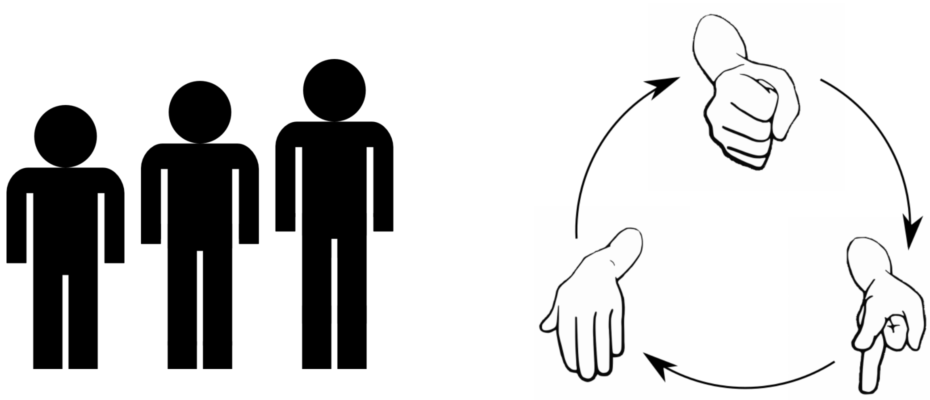
c) Bereken ook $w(B,C)$ en $w(C,A)$ met een tabel.

We noemen een dobbelsteen A **sterker** dan dobbelsteen B als $w(A,B) > w(B,A)$. We noteren dit als $A \to B$.

d) Is er in het geval van het spel tegen DobbelBot een dobbelsteen die sterker is dan de andere twee dobbelstenen? Wat heeft dit te maken met wat je ontdekt hebt tijdens het spelen tegen DobbelBot?

Je kunt in DobbelBot dus bij iedere dobbelsteen een andere dobbelsteen vinden die sterker is. Dat is een wonderlijke paradox! Dit soort setjes dobbelstenen gaan we vandaag onderzoeken.

In een **zwendelset** is elke dobbelsteen aantrekkelijk om te kiezen, omdat hij sterker is dan één of (nog beter) meerdere andere dobbelstenen. Maar elke dobbelsteen moet ook weer zwakker zijn dan tenminste één andere dobbelsteen in de set. Dit is precies wat je nodig hebt om als tweede speler in het voordeel te zijn.



(a) Bij lengtes heb je geen cykels (b) Bij steen-papier-schaar wel

Figuur 2: Wat is een cykel?

In een zwendelset kun je altijd ten minste één ‘kringetje’ van dobbelstenen aanwijzen waarin de één telkens sterker is dan de ander (het bewijs hiervoor kun je leveren als extra opgave 16). Als dat een kringetje van drie dobbelstenen A, B en C is, dan heb je bijvoorbeeld $C \to A$, $A \to B$, $B \to C$. We noemen zo'n kringetje van drie of meer dobbelstenen een **cykel**.

Als je het spelletje *steen-papier-schaar* kent dan weet je dat steen, papier en schaar ook een soort cykel vormen: bij elke keuze is er een antwoord dat sterker is. Samen vormen ze kringetje.

Het zal inmiddels duidelijk zijn dat je met een zwendelset je klasgenoten soms aardig voor de gek kunt houden. Met een beetje geluk troggel je ze met een dobbelspel hun zakgeld af, vandaar de naam “zwendel”.

Opgave 5 (Nog een zwendelset)

Er bestaan nog meer zwendelsets. We bekijken de volgende dobbelstenen:

- $D : 1, 1, 7, 7, 8, 8$
- $E : 2, 2, 3, 3, 9, 9$
- $F : 4, 4, 5, 5, 6, 6$

a) Bereken de onderlinge winstkansen en ga na dat dit een zwendelset is.

Susanne en Rogier gaan weer dobbelen.

b) Rogier moet als eerste pakken en denkt daar goed over na. Hij pakt dobbelsteen D. Waarom?

Opgave 6 (Tabellen en diagrammen bij dobbelstenen)

Bekijk de twee dobbelstenen $K : 1, 1, 3, 5, 5, 6$ en $L : 2, 2, 2, 4, 5, 6$. Als je hiermee gaat dobbelen, dan kan het ook gelijkspel zijn. We noteren dat met $-$ in de tabel.

Tabel 2: Dobbelstenen K en L: wie wint?

		K					
		1	1	3	5	5	6
L	2	L	L	K	K	K	K
	2	L	L	K	K	K	K
	2	L	L	K	K	K	K
	4	L	L	L	K	K	K
	5	L	L	L	$-$	$-$	K
	6	L	L	L	L	L	$-$

Je ziet eenvoudig dat $w(K,L) + w(L,K) < 1$.

a) We kijken nu naar twee dobbelstenen met de volgende eigenschap: als een ogenaantal op dobbelsteen A voorkomt, komt het niet op dobbelsteen B voor. Leg uit dat $w(A,B) + w(B,A) = 1$

Een tabel maken kan veel werk zijn. Je kunt als je wil een Excel file downloaden waarin je sneller twee zeszijdige dobbelstenen kunt vergelijken. Je kunt eventueel zelf deze file aanpassen of uitbreiden voor meer dobbelstenen of dobbelstenen met meer of minder zijden.

`http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/dobbelen/tabel.xlsx`
(verkort adres: `http://bit.ly/2fKtnaF`, of gebruik de QR code hieronder)

We voegen de dobbelsteen $M : 1, 2, 3, 4, 5, 6$ toe.

b) Laat met behulp van tabellen zien dat deze set dobbelstenen K, L en M geen zwendelset is.

Opgave 7 (Een set van vier dobbelstenen)

Susanne heeft de smaak te pakken en komt met een set van vier dobbelstenen. Rogier moet als eerste een dobbelsteen kiezen.

- $W : 1, 1, 1, 5, 5, 5$
- $X : 2, 2, 2, 2, 6, 6$
- $Y : 0, 0, 4, 4, 4, 4$
- $Z : 3, 3, 3, 3, 3, 3$

a) Wat is de som van ogen op elk van de dobbelstenen? Verwacht je hierdoor dat één van dobbelstenen sterker is dan alle andere dobbelstenen?

b) Is $WXYZ$ een zwendelset?

Als je meer dobbelstenen hebt, kun je ook grotere cykels hebben. Bij een cykel van vier dobbelstenen geldt dat 1 sterker is dan 2, 2 sterker dan 3, 3 sterker dan 4 en 4 weer sterker dan 1.

c) Kun je in deze set een cykel van vier dobbelstenen vinden?

d) Hoeveel cykels van drie dobbelstenen zitten er in deze set?

Opgave 8 (Zwendelsets vergelijken)

Susanne gaat weer dobbelen tegen Rogier. Rogier heeft geleerd van de vorige keer; Susanne moet als eerste een dobbelsteen kiezen. Ze hebben beiden goed door dat ze op de winstkansen moeten letten en hebben die uitgerekend. Stel, Susanne mag nog wel kiezen met welke set ze gaan spelen: ABC (opgave 4), DEF (opgave 5) of $WXYZ$ (opgave 7).

a) Welke set kan Susanne het beste kiezen?

Stel, Rogier mag toch kiezen welke set het wordt (en Susanne nog steeds de eerste dobbelsteen).

b) Welke set moet hij kiezen?

Opgave 9 (Veelzijdige dobbelstenen)

Nadat Rogier vele malen verloren had van Susanne probeerde hij het eens op een andere manier. Dobbelstenen zijn niet allen zeszijdig. Er bestaan bijvoorbeeld ook vierzijdige, achtzijdige, twaalfzijdige en twintigzijdige dobbelstenen. En met dubbele piramides kun je zelfs zeven- of dertienzijdige dobbelstenen maken!

Figuur 3: Veelzijdige dobbelstenen

Om Susanne te verwarren kwam Rogier met een heel vreemde set dobbelstenen:

- $Q : 3, 3, 6$
- $R : 2, 2, 5, 5$
- $S : 1, 4, 4, 4, 4$

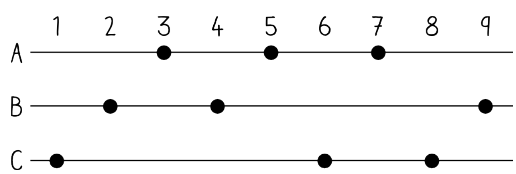
Is dit een zwendelset?

Opgave 10 (Schuiven in stippendiagrammen)

Tot nu toe heb je bestaande sets dobbelstenen geanalyseerd. Maar hoe kun je zelf een zwendelset maken? In deze opgave beschrijven we een mogelijke aanpak.

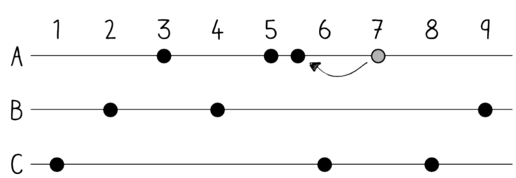
Laten we nog eens kijken naar de drie dobbelstenen van DobbelBot: $A = 3,3,5,5,7,7$; $B = 2,2,4,4,9,9$; $C = 1,1,6,6,8,8$. Hieronder staan deze drie dobbelstenen op een andere manier weergegeven in een **stippendiagram**.

Omdat alle getallen precies twee keer voorkomen kun je de situatie vereenvoudigen naar driezijdige dobbelstenen $A = 3,5,7$; $B = 2,4,9$; $C = 1,6,8$ zonder dat de winstkansen veranderen.



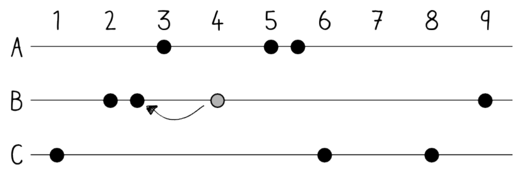
a) Leg uit hoe je met behulp van een stippendiagram de waarden voor $w(A,B)$ en $w(B,A)$ kunt uitrekenen (opgave 4b)

Je kunt een stippendiagram als startpunt zien. Door stippen te verschuiven kun je proberen de winstkansen te vergroten. Bijvoorbeeld, begin met het diagram hierboven en schuif bij dobbelsteen A het punt bij 7 naar links:

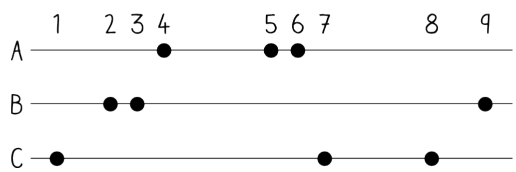


b) Wat zijn nu $w(A,B)$, $w(B,C)$ en $w(C,A)$?

We kunnen bijvoorbeeld nog een verschuiving doen:



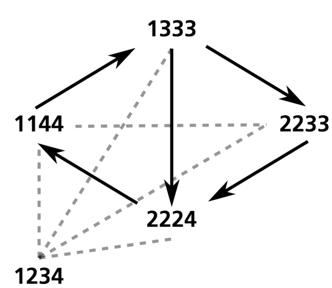
Als je het vervelend vindt dat de 2 en de 5 nu dubbel voorkomen, dan kan je de getallen allemaal wat opschuiven, bijvoorbeeld zo:



Je ziet dat we door deze verschuivingen de dobbelstenen van opgave 5 teruggevonden hebben.

We kijken nu naar een vijftal dobbelstenen met vier zijden, waarbij de som van de ogen op elk van de dobbelstenen 10 is en het aantal ogen per zijde 1, 2, 3 of 4 is. Er zijn precies vijf dobbelstenen mogelijk onder deze randvoorwaarden. We noteren de dobbelstenen voor het gemak niet meer met een letter, maar met de ogenaantallen zonder komma ertussen: 1234, 1333, 2233, 2224 en 1144. Is deze set dobbelstenen een zwendelset?

We kunnen als volgt een grafische voorstelling maken van de sterkte van de dobbelstenen ten opzichte van elkaar.



We zetten de dobbelstenen verspreid op het blad. Vervolgens zetten we een pijl van dobbelsteen A naar dobbelsteen B als $A \rightarrow B$ (opfrisser: dit betekent dat dobbelsteen A sterker is dan dobbelsteen B, oftewel, $w(A,B) > w(B,A)$). We tekenen een gestippelde lijn als $w(A,B) = w(B,A)$. Zo'n voorstelling heet een **graaf**. Bij de graaf van een zwendelset komt bij iedere dobbelsteen een pijl aan en vertrekt van iedere dobbelsteen een pijl.

Je kunt in de graaf eenvoudig op zoek naar cykels: er is er een cykel van drie dobbelstenen en een cykel van vier!

Er zijn geen pijlen van en naar dobbelsteen 1234. De dobbelsteen is **neutraal**. Hierdoor is de set dus geen zwendelset. Laat je deze neutrale dobbelsteen weg, dan hou je wel een zwendelset over.

Opgave 11 (De graaf bij een set dobbelstenen)

Teken de graaf bij de dobbelstenen uit opgave 7.

Opgave 12 (Algebraïsch dobbelen)

De dobbelstenen

- G : 1,4,4
- H : 3,3,3
- I : 2,2,5

vormen een zwendelset. De kansen zijn $w(G,H) = \frac{2}{3}$, $w(H,I) = \frac{2}{3}$ en $w(I,G) = \frac{5}{9}$. Rogier wil de set aanpassen zo dat die laagste kans ($\frac{5}{9}$) wat groter wordt. Hij doet dat door het aantal zijden 21 te maken. Dobbelsteen G heeft n enen en $21 - n$ vieren: $G : 1,1,\ldots,1,4,4,\ldots,4$. Dobbelsteen H bestaat uit 21 drieën, $H : 3,3,\ldots,3$. Dobbelsteen I heeft n vijven en $21 - n$ tweeën. Bijvoorbeeld, als $n = 3$ krijg je de set $G : 1,1,1,4,4,\ldots,4,4$, $H : 3,3,3,3,\ldots,3,3,3,3$ en $I : 2,2,\ldots,2,2,5,5,5$.

a) Druk de winstkansen $w(G,H)$, $w(H,I)$ en $w(I,G)$ uit in n.

Twee van de drie kansen zijn hetzelfde.

b) Hoe moet Rogier het getal n zo kiezen dat de kleinste van de kansen $w(G,H)$, $w(H,I)$ en $w(I,G)$ zo groot mogelijk is?

c) En bij een 30-zijdige dobbelsteen?

Extra opgaven

Deze extra opgaven zijn niet verplicht en niet noodzakelijk voor de eindopgave. Je kunt er wel ideeën mee opdoen en je begrip van zwendelsets mee vergroten. Doe de extra opgaven alleen als je er 's ochtends tijd voor hebt.

Opgave 13 (Extra oefening: een speciale graaf)

Stel je heb het volgende vijftal zeszijdige dobbelstenen: 222777, 116666, 055555, 444449, 333388. Deze set heeft enkele bijzondere eigenschappen.

a) Teken een graaf bij dit vijftal dobbelstenen.

b) Maak een overzicht van alle cykels in de graaf.

Opgave 14 (De neutrale dobbelsteen)

We bekijken nu alleen zeszijdige dobbelstenen waarvan de som van ogen (ogensom) 21 is en het aantal ogen per zijde 1, 2, 3, 4, 5 of 6 is. Een voorbeeld is de 'gewone' dobbelsteen $O : 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

a) Maak nog een aantal dobbelstenen A met de som van de ogen 21 en bereken telkens $w(A{,}O)$ en $w(O{,}A)$.

Net als 1234 neutraal was tegen de dobbelstenen met ogensom 10, is O neutraal tegen dobbelstenen met ogensom 21.

b) Bewijs dit, oftewel dat $w(O{,}A) = w(A{,}O)$ voor iedere dobbelsteen A met ogensom van 21.

Als A niet noodzakelijk een ogensom heeft van 21, maar wel alleen ogen 1, 2, 3, 4, 5 of 6, dan is er een algemener resultaat.

c) Bewijs dat $w(A{,}O) = \frac{ogensom(A)-6}{36}$ en $w(O{,}A) = \frac{36-ogensom(A)}{36}$

d) Bewijs in deze lijn een nog algemener resultaat voor dobbelstenen met de ogen $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ voor een positief geheel getal n.

Opgave 15 (Duale dobbelstenen)

We kijken nu naar vijfzijdige dobbelstenen waarvan de som van de ogen 15 is en waarbij de oogaantallen 1, 2, 3, 4 of 5 zijn, bijvoorbeeld 12255.

a) Geef alle mogelijkheden van dit soort dobbelstenen.

Elk zo'n dobbelsteen A heeft een **duale dobbelsteen** A^*. De oogaantallen van A^* krijg je door 6 min de oogaantallen van A te doen. Bijvoorbeeld, de duale van 12255 is 6-5, 6-5, 6-2, 6-2, 6-1 is 11445.

b) Leg uit dat voor elk zo'n dobbelsteen A de som van de ogen van de duale A^* ook weer 15 is.

c) Bewijs dat $w(A,B) = w(B^*,A^*)$

Een dobbelsteen A is **zelfduaal** als $A = A^*$.

d) Bewijs dat voor twee zelfduale dobbelstenen A en B geldt $w(A,B) = w(B,A)$

e) Stel A is zelfduaal. Bewijs: als $w(B,A) > w(A,B)$, dan $w(B^*,A) < w(A,B^*)$

Opgave 16 (Cykels)

Bewijs dat elke zwendelset een cykel heeft.

Opgave 17 (Een bovengrens voor de som van de kansen)

Stel dobbelstenen A, B en C vormen een cykel $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$, dan hebben we telkens gerekend aan de winstkansen $w(A,B)$, $w(B,C)$ en $w(C,A)$. Die kansen zijn uiteraard ieder ≤ 1. Kunnen die kansen alle drie 1 zijn? Of is er een grens? In deze opgave ga je bewijzen dat

$$w(A,B) + w(B,C) + w(C,A) \leq 2$$

Als je de winstkansen wilt uitrekenen, dan vergelijk je de zijden van de dobbelstenen, bijvoorbeeld met een tabel. Om hiermee te kunnen redeneren hebben we eerst wat notatie nodig. We gaan ervan uit dat alle drie de dobbelstenen 6 zijden hebben. De getallen op de zijden van A noteer je met $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6$. Bijvoorbeeld, in opgave 4 is $A_1 = 3, A_2 = 3, A_3 = 5, A_4 = 5, A_5 = 7$ en $A_6 = 7$. We gebruiken dezelfde notatie voor de getallen op de zijden van dobbelstenen B en C; bijvoorbeeld $B_5 = 9$.

We noteren $A_1B_2 = 1$ als het getal op de eerste zijde van A groter is dan het getal op de tweede zijde van B (dus als $A_1 > B_2$), en $A_1B_2 = 0$ als dat niet zo is (als $A_1 \leq B_2$). Evenzo, algemener voor $1 \leq i,j \leq 6$.

$$A_iB_j = 1$$

als $A_i > B_j$ en anders $A_iB_j = 0$.

a) Leg uit dat A_1B_1, B_1C_1 en C_1A_1 niet alle 1 kunnen zijn.

b) Algemener: leg uit dat A_iB_j, B_jC_k en C_kA_i niet alle 1 kunnen zijn (voor $1 \leq i,j,k \leq 6$).

c) Leg uit dat

$$w(A,B) = \frac{A_1B_1 + A_1B_2 + \ldots + A_6B_5 + A_6B_6}{36}$$

d) Leg uit dat de som met 216×3 termen

$$\begin{array}{l} A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \\ +A_1B_1 + B_1C_2 + C_2A_1 \\ +A_1B_1 + B_1C_3 + C_3A_1 \\ +\dots \\ +A_6B_6 + B_6C_5 + C_5A_6 \\ +A_6B_6 + B_6C_6 + C_6A_6 \end{array}$$

gelijk is aan

$$216(w(A,B) + w(B,C) + w(C,A))$$

e) Leg uit hoe uit de vorige drie onderdelen volgt dat

$$w(A,B) + w(B,C) + w(C,A) \leq 2.$$

f) Formuleer een veralgemenisering van het resultaat naar een willekeurig aantal dobbelstenen met een willekeurig aantal zijden. Je hoeft dit niet te bewijzen.

Eindopgave - zwendelsets

De eindopgave van de Wiskunde B-dag 2016 is dat jouw groepje een zwendelset dobbelstenen maakt. We geven jullie daarbij drie doelstellingen. Doelstellingen 1 en 2 zijn belangrijker dan doelstelling 3. Maak een zwendelset die zoveel mogelijk van de doelstellingen haalt.

Doelstellingen:

1. Zorg dat de kans waarmee speler 2 wint zo groot mogelijk is. Ga er van uit dat speler 1 alle kansen heeft doorgerekend en dus slim speelt.

2. Zorg dat de set een grote cykel heeft.

3. Zorg dat de set meerdere cykels heeft.

Toelichting bij doelstelling 1: Je wilt een goede set voor als speler 1 (die de eerste dobbelsteen pakt) slim speelt (hij pakt dan de steen met voor jou de laagste winstkans). Die laagste winstkans moet dus zo groot mogelijk zijn.