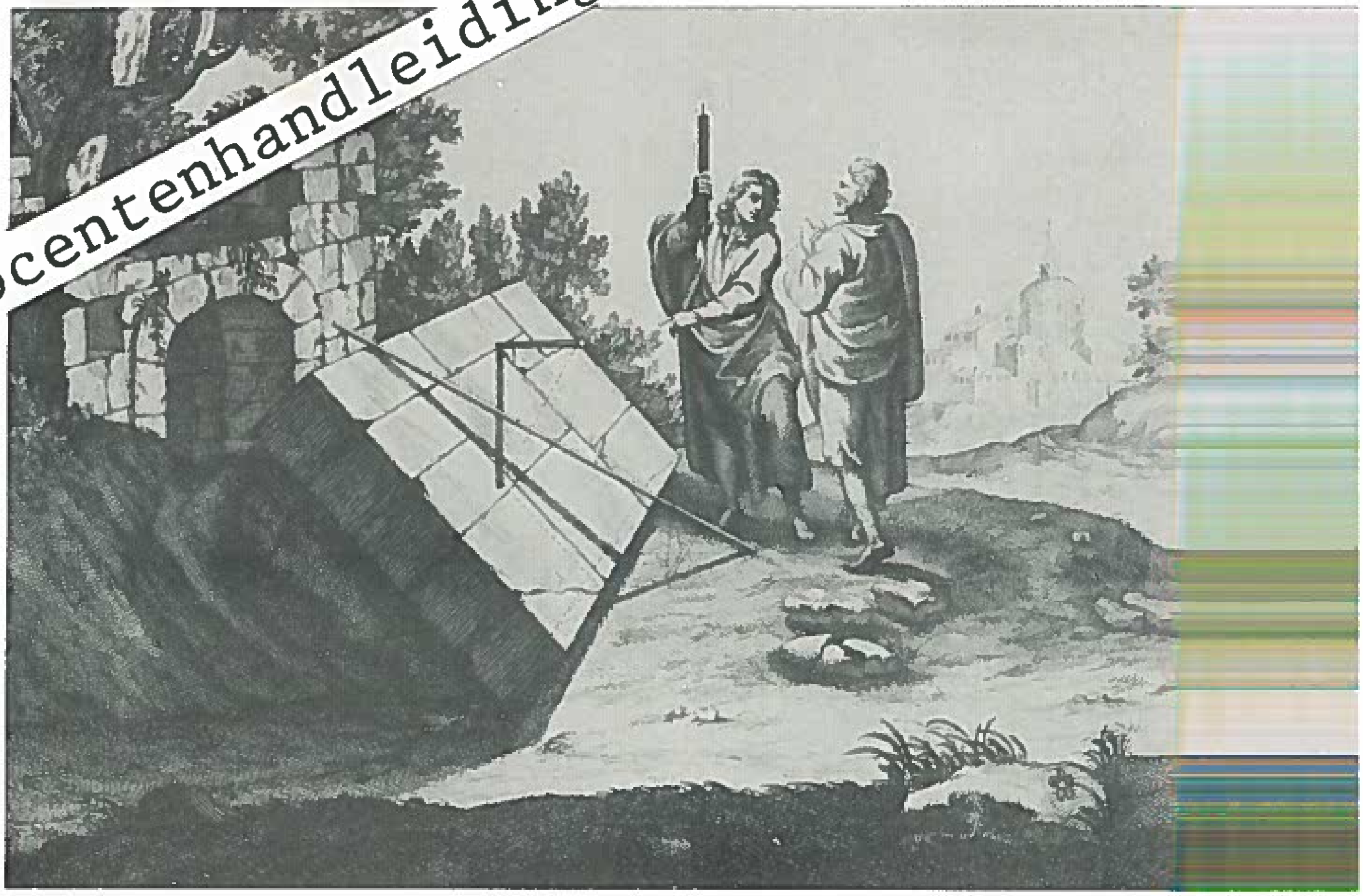


docentenhandleiding

# schaduw

# en

# diepte

Freudenthal instituut
Archief

nen de afdeling Wiskivon.

ad Goddijn.

IOWO; Tiberdreef 4, Utrecht.

LEESWIJZER



Uitgave tot stand gekomen binnen de afdeling Wiskivon.
Verantwoordelijk ontwerper: Aad Goddijn.

IOWO

december 1980. IOWO; Tiberdreef 4, Utrecht.



RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT

# INLEIDING

*Waarom worden schaduwen 's avonds langer?*

*Zijn lampeschaduwen en zonneschaduwen wel hetzelfde?*

*Waarom verandert de maan van vorm?*

*Waarom lopen spoorrails in de verte naar elkaar toe?*

*Hoe maak je een tekening met diepte?*

Eenvoudige vragen over alledaagse verschijnselen. Wie naar antwoorden zoekt krabbelt al gauw wat lijnen op papier, die de essentie van de verschijnselen moeten weergeven. Zo leiden zulke vragen tot meetkunde. Niet de formele meetkunde van axioma's, stellingen en "gegeven A, te bewijzen B". Niet direct tenminste. Wel tot meetkunde die zich in alles om ons heen verbergt en op ontdekking door onze nieuwsgierigheid wacht. Dat is precies waar het in "Schaduw en Diepte" om gaat.

De belangrijkste onderwerpen die in "Schaduw en Diepte" aan bod komen zijn uiteraard schaduwvorming en perspectieftekenen. Het heeft te maken met "licht" en met "kijken".
Daarbij worden begrippen gebruikt die bij de leerlingen in de 2e klas V.O. allang intuïtief aanwezig zijn, maar nu wat expliciter worden geformuleerd.
Het gaat - wiskundig gezien - om:
- rechte lijnen
- evenwijdigheid
- projecties (zijaanzicht, bovenaanzicht, parallelprojectie, centrale projectie)
- constructies met de liniaal.

Al deze wiskundige zaken komen alleen in verband met de schaduw- en perspectiefcontext voor.

Omdat de inhoud van het pakket grotendeels los staat van het nu gebruikte leerplan, lijkt een wat uitgebreidere docentenhandleiding op zijn plaats. Behalve praktische gegevens (over benodigdheden, werkvorm, ervaringen in de klas, tijdsduur) is dan ook een ruime hoeveelheid achtergrondinformatie opgenomen.
Bij de aanwijzingen per onderdeel wordt voortdurend daarheen verwezen. De betreffende laatste delen van deze handleiding kunnen echter evengoed, na bestudering van het leerlingenpakket, als geheel gelezen of .... overgeslagen worden.

## PRAKTISCHE GEGEVENS

### a. *OMVANG EN TIJDSDUUR*

Het pakket bestaat uit drie gedeelten:

| | |
|---|---|
| Licht Op Schaduw | (LOS) |
| Evenwijdigheden | (EWH) |
| Met Het Oog Op Diepte | (MHOOD) |

LOS kan ook afzonderlijk gedaan worden. EHW ook. Voor MHOOD is afzonderlijk gebruik niet aan te bevelen. In ieder geval dient EWH er aan vooraf te gaan.

Omvang en geschatte tijdsduur van de onderdelen:

| | | |
|---|---|---|
| LOS | : | 27 blz., ongeveer 12 lessen. |
| EWH | : | 9 blz., ongeveer 3 lessen. |
| MHOOD | : | 28 blz., ongeveer 12 lessen. |

### b. *OVERZICHT VAN HET LEERLINGENBOEKJE*

<u>Licht Op Schaduw</u>

| | |
|---|---|
| Blz. 2,3 | Algemene oriëntatie op schaduw. |
| 4,5 | Richting van de schaduw t.o.v. de zon, schaduw van wolken, dag en nacht als licht/schaduw. |
| 6,7 | Verkennen van de rechtlijnige gang van het licht in verschillende experimenten. |
| 8,9,10,11 | Tekenen van schaduw in zijaanzichten, gebruik maken van de rechtlijnige gang van het licht. |
| 12,13,14 | Schaduw in bovenaanzicht, verschil tussen zon (ver weg) en lantaarn (dichtbij). |
| 15,16,17,18 | Gelijke afstanden geeft gelijke schaduwafstanden? De zon en de lamp geven verschillend resultaat! |
| 19,20 | Wat voor vormen van schaduw bij één voorwerp kun je hebben? |
| 21,22 | Zichtbaar is belichtbaar. |
| 23,24 | De maan en haar schijngestalten. |

<u>Evenwijdigheden</u>

| | |
|---|---|
| 30,31 | Verkenning van het begrip evenwijdigheid. |
| 32,33 | Evenwijdige lijnen in het lokaal en in gebouwen. |
| 34,35 | Robotpatronen met evenwijdige lijnen. |

| | |
|---|---|
| Blz. 36,37 | Evenwijdigheid op tegelpatronen. |
| 38,39 | De geodriehoek; een tel-opgave. |

Met Het Oog Op Diepte

| | |
|---|---|
| 43 | Interpreteren van suggestieve diepte-tekeningen. Bewust maken van het verschijnsel diepte in tekeningen. |
| 44,45 | Foto's lijken echt, maar toch klopt er iets niet. |
| 46,47 | Inleiding op het diepte-tekenen. |
| 48,49 | De methode van Dürer (met een raam en een touwtje in de klas). |
| 50 t/m 55 | De methode van Alberti (met boven- en zijaanzicht) |
| 55 | Stappen met stokken: De horizon.<br>Het steeds kleiner worden in de verte.<br>Voorbereiding voor het verdwijnpunt. |
| 56,57 | Verklaringen bij de foto's van blz. 45 met behulp van zij- en bovenaanzichten. |
| 58,59,60 | Een leeg raam; inleiding verdwijnpunten. |
| 61,62,63 | Verdwijnen in de verte. |
| 64,65,66 | Onderzoek van evenwijdige lijnen in een tegelvloer en een flatgebouw. |
| 67,68,69 | Zelf tekenen met behulp van verdwijnpunten. |
| 70 | Wolkenbanen in perspectief. |

c. *BENODIGDHEDEN*

* Bij LOS is een lichtbron nodig. Als de zon er niet is kan een diaprojector of andere sterke gerichte lichtbron worden gebruikt.
  Deze kan bijvoorbeeld links voor in de klas worden opgesteld, elke hoogte tussen 1 en 2 meter is goed.
* Verder worden gebruikt:
  - scharen
  - lijm
  - linialen
  - een touw van 5 meter
  - stokken van 1 meter lang
  - een bal (liefst egaal van kleur)
  - kubussen en andere regelmatige veelvlakken.

* Eventueel:

    enkele kompassen

    extra grote vellen papier

    de glasramen die bij "Zie Je Wel" gebruikt worden.

Bij de bespreking per opgave wordt aangegeven wanneer een en ander nodig is. De linialen zijn steeds nodig.

## d. SAMENHANG MET ANDERE PAKKETTEN

Het pakket sluit goed aan bij het eerste klas pakket "Zie Je Wel". Daar gaat het ook om zien-hoe-je-kijkt. Er wordt echter niet van uitgegaan dat "Zie Je Wel" bij de leerlingen bekend is.
In het algemeen zijn de Wiskivon pakketten niet ontworpen als bouwstenen van een onveranderbare volgorde, waarbij de leerstof van pakket N+1 gestapeld wordt op de leerstof van pakket N.
Meer over de samenhang tussen de meetkundepakketten van Wiskivon is te vinden in Wiskrant 21 onder de titel: "Er komt steeds meer lijn in de meetkunde" (Wiskrantboek II, blz. 184).

## e. SAMENWERKING

Veel opgaven lenen zich uitstekend voor samenwerking. Soms moet er iets gedaan worden dat voor één persoon onmogelijk is, zoals op blz. 6, maar veel vaker moet er gedacht worden over verklaringen en dan is het van belang dat er van gedachten gewisseld kan worden.
De meer op tekenen gerichte opgaven kunnen natuurlijk individueel worden gedaan, maar kritische en bewonderende blikken kunnen hier stimulerend werken.

## LEERLINGEN AAN HET WERK;
## BESCHRIJVING EN AANWIJZINGEN VAN BLAD TOT BLAD

De volgende beschrijving is gemaakt naar aanleiding van de praktijkervaringen in de Lunetten-MAVO-LEAO. Daar zijn ook de foto's genomen. Ze benadrukken het typische doe-karakter van het pakket.

### *a. LICHT OP SCHADUW*

blz. 0

De binnenkant van de kaft.
In het boekje wordt zoveel met tekeningen gewerkt dat het ondoenlijk is met aparte werkbladen te werken, zoals bijvoorbeeld bij de pakketten "Klein en Groot" en "Pythagoras".
De aanwijzingen voor de leerling spreken verder voor zichzelf.

Voor de eigenlijke meetkunde-opgaven beginnen, is er een algemene oriëntatie van 4 bladzijden opgenomen. Een leerling die de schaduw aan de verkeerde kant van een voorwerp zocht is natuurlijk een extreem geval; maar heel wat leerlingen blijken in het begin zich bij schaduw niet veel meer te kunnen indenken dan iets donkers dat de zon ergens achter laat vallen. De inleidende bladzijden leiden tot wat nauwkeuriger intuïtieve begrippen.

blz. 2,3 opgave 2

Driepotige krukjes geven in het algemeen driepotige schaduwen. In de klas werd verband gezocht tussen het lepeltje in het rechterkopje en het schaduwlepeltje dat uit het linkerschaduwkopje steekt.
Laat leerlingen zo nodig een en ander nabootsen met een kopje en een lepeltje.
De schaduw van het rechterlepeltje is trouwens ook op de foto te vinden: in het kopje.

blz. 2,3 opgave 4

De opdrachten in deze opgave zijn uiterst simpel. Toch was het voor veel leerlingen niet duidelijk dat de scherpte van de schaduw voornamelijk afhangt van de afstand van voorwerp (hand) tot schaduw.

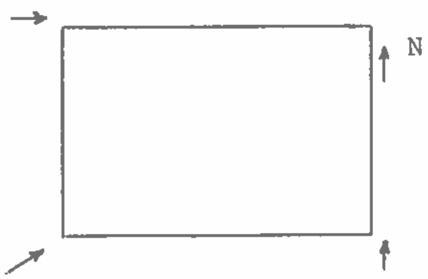
Het hangt samen met het niet puntvormig zijn van de lichtbron, de zon. In de try-out werkten de leerlingen vanzelf al met puntvormige lichtbronnen. Voor het volgende, vooral bladzijde 19 en 20, is het wel van belang dat leerlingen weten hoe je scherpe schaduwen maakt. Halfschaduw wordt in dit pakket verder niet onderzocht; het zou overigens ook tot leuke meetkunde leiden, meet bijvoorbeeld eens de hoek waaronder de zon te zien is, zonder verblind te worden, als volgt.
Laat de zon door een klein gaatje (3 mm) in een vel papier een lichtvlekje werpen op een wit vlak, een paar meter verder. Ook al is het gaatje driehoekig, de lichtvlek is rond! De gezochte hoek berekent men uit de grootte van de lichtvlek en de afstand gaatje-lichtvlek.

<u>blz. 3 opgave 5,6</u>

Het voorbeeld is natuurlijk lastig! Wel geeft het aan: er is een relatie tussen de details aan de handen en die aan de schaduw.
Bij de huiswerkopgave hoort een demonstratie in de klas. Men stelle de diaprojector of andere felle lamp vast op.
In de try-out kwam er onverwachte wiskunde te voorschijn toen een leerling zo ging staan dat de rest van de klas niets meer van zijn mooie schaduwbeeld kon zien. Het was een grappige ontdekking dat hij zich rustig $180^0$ kon draaien, natuurlijk zonder iets aan zijn handen te veranderen. Alleen blafte de schaduwhond nu de klas in in plaats van naar het bord.

<u>blz. 3</u>

Vaak hebben leerlingen van het noorden niet meer begrepen dan dat het de bovenkant van de kaart is. Soms is het ook alleen de plek waar de pijlpunt heen wijst. Dan ontstaat zo iets bij opgave 7:



Laat een kompas in de klas rondgaan. Als alle armen nu eens naar het noorden wijzen, ontstaat er een veld van evenwijdige lijntjes.
Soms denken leerlingen ook dat het noorden het punt op de muur is waar de kompaspijl heen wijst. Laat ze naar hun "noorden" stappen en nog eens op het kompas kijken!
Ook bij opgave 8 gaat het om het verband tussen evenwijdigheid en richting.

Veel leerlingen tekenden eerst een zon in de hoek tussen de auto's. Of de zon zo dichtbij staat? Nee, natuurlijk niet. Wel staan de pijlen dan zo:

Een klassikale activiteit brengt duidelijkheid. We wijzen eerst allemaal naar deze bloempot.

Dan naar een struik 20 meter verder.

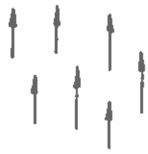
Tenslotte naar de boom daar heel ver weg.

De vingers wijzen eerst

zó:

dan zó:

en tenslotte zó:



En zelfs nu is het nog niet zo gemakkelijk onder woorden te brengen, maar door deze activiteit ontstaat wel begrip voor de bijna-evenwijdigheid van de zonnestralen. Evenwijdig tegenover niet evenwijdig vallend licht is uitvoerig aan de orde vanaf blz. 8.
Het woord 'evenwijdigheid' mag vallen, het hoeft niet.

<u>blz. 5 opgave 12</u>

Er is per lamp één schaduw. Maar schaduw is juist wat de lamp niet belicht.
Een intuïtief idee is: de lamp gooit een schaduw ergens achter.
Aan de hand van opgave 16 komen echter betere schaduw-beschrijvingen naar voren.

<u>blz. 5 opgave 14</u>

Voor lang niet alle leerlingen was het direct duidelijk dat het hier om schaduw van wolken gaat. De schaduw van wolken geeft tussen haakjes een eenvoudige mogelijkheid de hoogte van de wolken ruw te schatten.
Meet met gestrekte arm de schijnbare grootte van de wolk op armlengte afstand tussen duim en wijsvinger o.i.d. De werkelijke grootte van de wolk is te schatten uit de schaduw. Nu kan, met enig rekenwerk de hoogte (of de afstand tot de wolk!) bepaald worden ......

blz. 5 opgave 16

Een typische vraag voor een klassegesprek: De leerlingen kunnen uiteenlopende interessante beschrijvingen geven.

blz. 6,7

De rechtlijnige gang van het licht wordt op de tast ontdekt.
Deze activiteiten kunnen klassikaal uitgevoerd worden; de situatie blijkt spanning genoeg op te leveren om de aandacht vast te houden.
Werkt de klas in groepjes samen, dan zullen meestal niet alle groepjes tegelijk bij opgave 17 zijn. Trouwens, één lamp geeft ruimte voor verschillende groepjes.

opgave 18

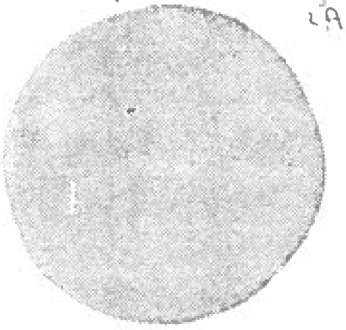
Hier zijn twee leerlingen bezig met de variant voor regenachtige dagen: het papieren rondje moet vastgehouden worden.
Het is best lastig de schaduw op de hand te houden, hij glipt er zó af en dan is terugvinden moeilijk.
De vraag naar de vorm leidt niet altijd direct tot "rechte lijn". Recht is vaak alleen horizontaal of vertikaal. De term "rechte lijn" kan wel in het klassegesprek vallen.

In één klas werd de lijn papiertje-schaduw ook met een touw gespannen.

Als volgt werd dat opgeschreven.

Maak met een plakbandje een klein papieren rondje op de ruit vast.
Ongeveer zo groot:

Mieke Verwey
4A



Als de zon niet schijnt, moet iemand het rondje vast houden, een paar meter van de lamp.

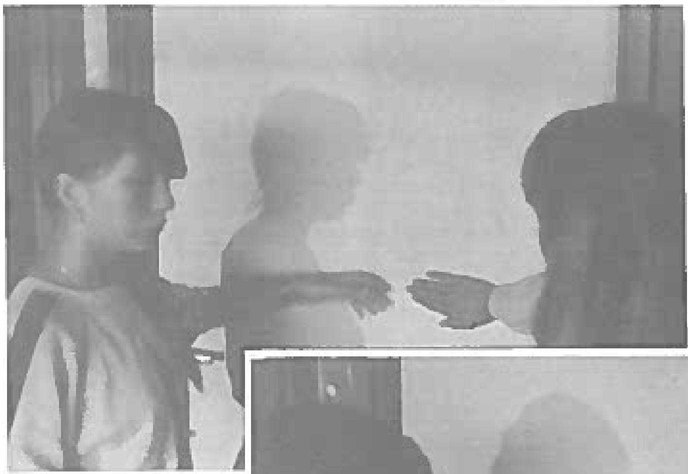
we hebben een rondje geknipt. En op het raam geplakt En toen kwam Willian ench heeft met haar hand de schaduw van het rondje gevangen. Later hebben we het met papier gedaan en met een touw gekeken of het recht was en het klopte nog ook.

Vang zo gauw mogelijk de schaduw van het rondje dicht bij de ruit in je handpalm op. Leg de schaduw heel voorzichtig op de grond.

Wat voor beweging heeft je hand nu gemaakt? van boven naar beneden In een rechte lijn En van beneden naar boven

Blijkbaar is de rechte lijn van het gespannen touw dezelfde als die van de gang van een lichtstraal, op zich best een merkwaardig feit!

opgave 19

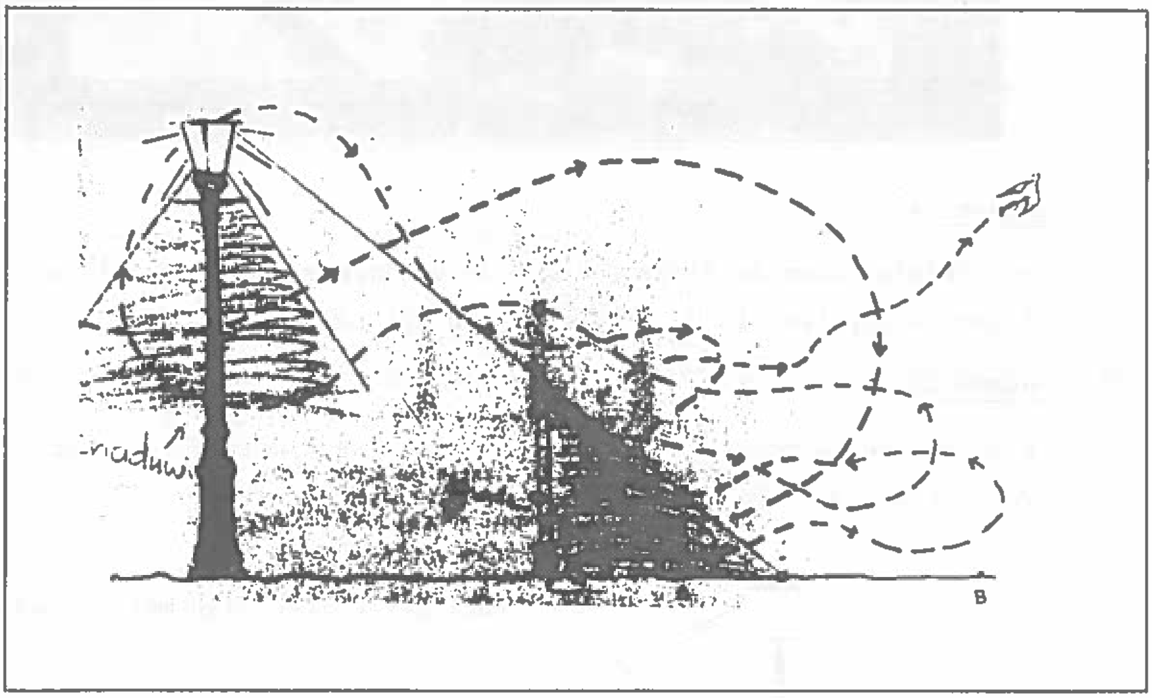


Het bewegen gaat weer niet zo snel, anders raak je uit de koers!

blz. 8 opgave 22

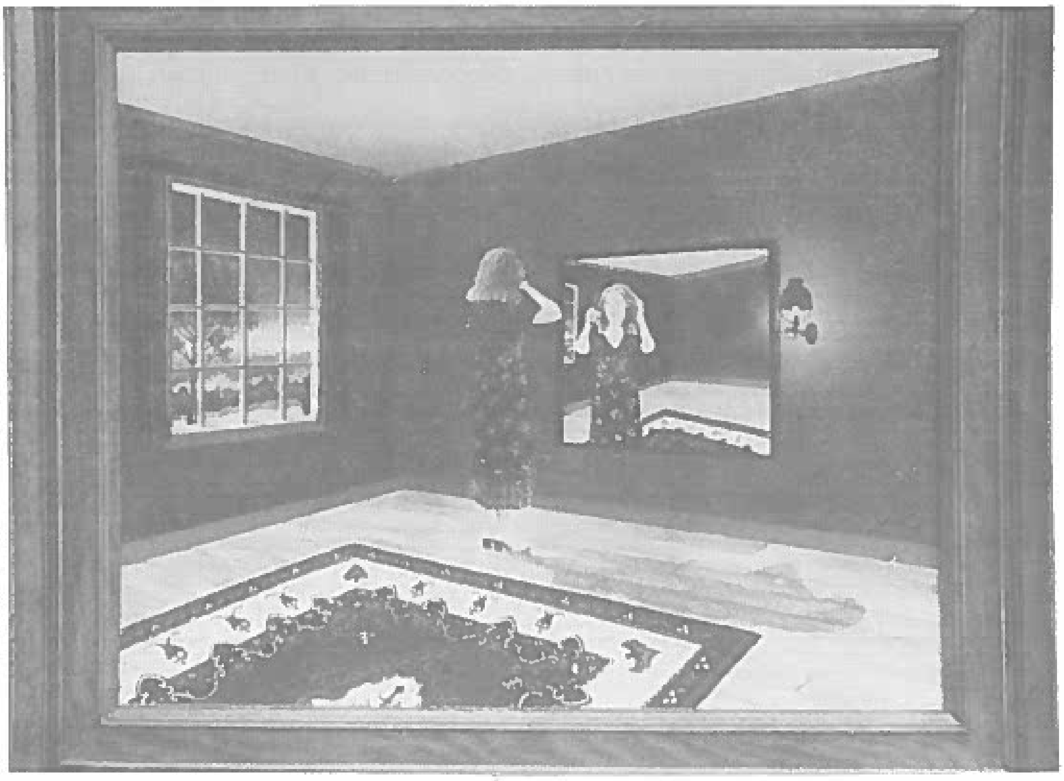
Hier start het meer klassiek meetkundige gedeelte. Er wordt nu ook wat meer preciesheid bij het tekenen verwacht. Men dringe daar vooral in het begin op aan. Het gaat echt om de lichtstraal die langs de bovenkant van het muurtje scheert en niet er een halve centimeter boven loopt. Millimeterprecies!
De moeilijkheidsgraad van deze opgave moet niet onderschat worden. Voor lang niet alle LEAO-MAVO-leerlingen was van tevoren duidelijk dat de grens tussen licht en schaduw te vinden is door de lijn lamp-bovenrand muur te trekken. Daarom zijn de opgaven rond het schaduw-vangen erg belangrijk. Ook al komt het juiste begrip voor de lantaarnopgave bij sommige leerlingen pas in het klassegesprek achteraf, dan is er in ieder geval nog de beleving van de bewegende hand om op terug te vallen en het trekken van de lijn aanvaardbaar te maken zonder dat alles neer komt op een constructie-recept: pak je liniaal, leg hem .... etc.

De lampstandaard geeft trouwens ook schaduw, volgens sommige leerlingen.




Uit deze tekening blijkt dat je schaduw ook ruimtelijk kan opvatten: niet alleen de donkere plek op de grond is schaduw, maar ook de hele ruimte waar het lamplicht niet kan komen.

Wat trouwens te denken van dit schilderijtje?
Aan de strakke realistische benadering te zien beschikt de schilder over een liniaal. Om de juiste schaduwlengte te vinden heeft hij hem duidelijk niet gebruikt. U denkt toch niet dat zoiets door perspectivische vertekening niet meer na te gaan is?

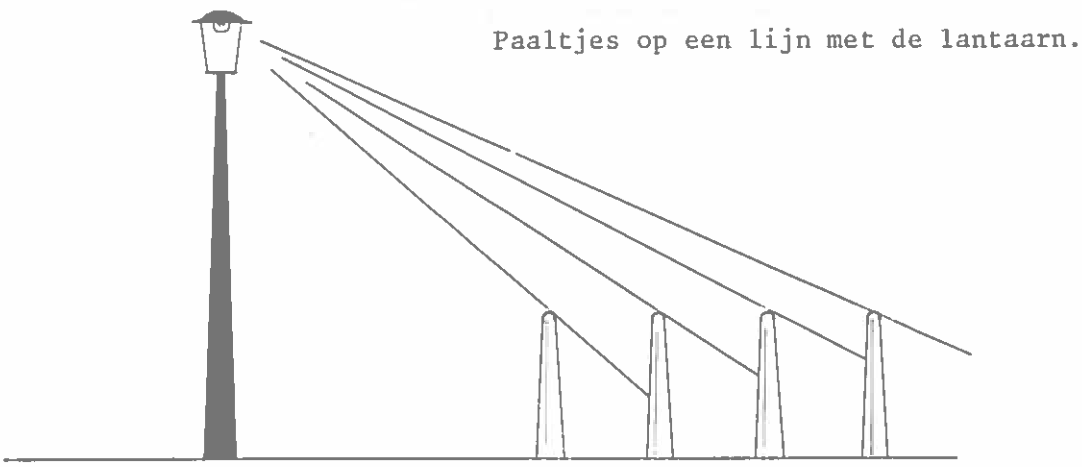


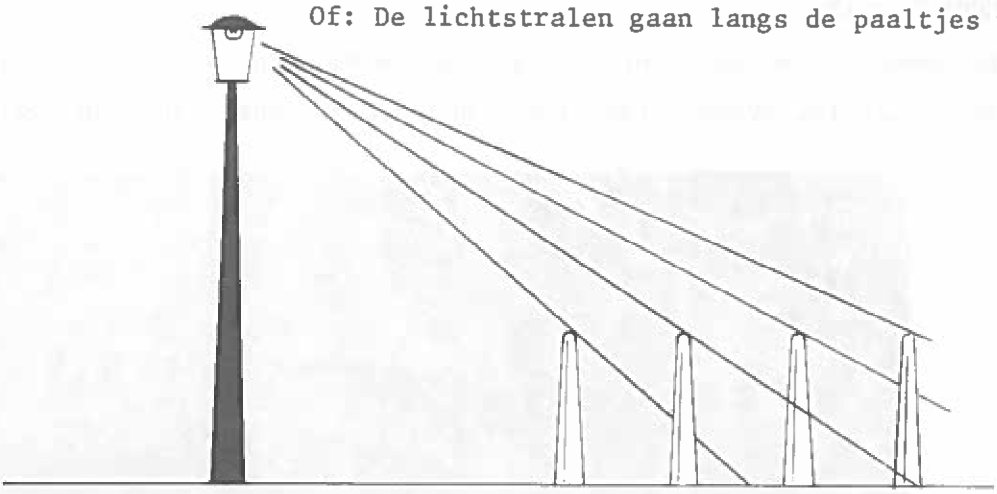
opgave 24

Een tekening door de bladeren heen is voldoende. De hoogte in meters is alleen te bepalen als je de hoogte van het paaltje weet .....

opgave 25

Er zijn diverse mogelijkheden. Het hangt af van wat je veronderstelt over het al dan niet op een lijn staan van de paaltjes.



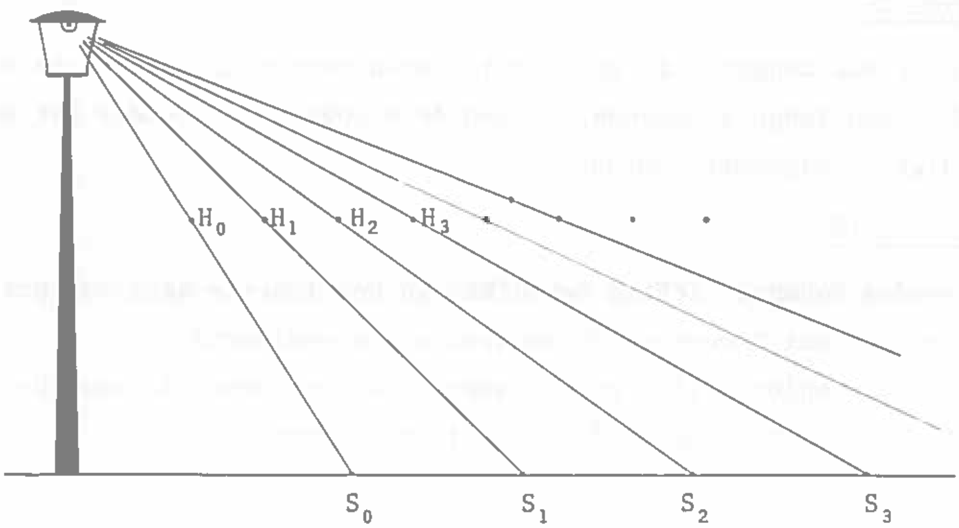


Of: De lichtstralen gaan langs de paaltjes verder.

opgave 26

Deze altijd wat onrust wekkende ervaring kennen we allemaal. En wie heeft nooit het gevoel gehad dat de schaduw voor je uit sneller en sneller loopt? Het is niet zo.

In onderstaande tekening is $H_0$, $H_1$, $H_2$, $H_3$ ..... de positie van het hoofd van de wandelaar na 0, 1, 2, 3, ... seconden.




De onderlinge afstanden zijn gelijk. Maar dan zijn ook de opeenvolgende schaduwbeelden $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ op gelijke afstand! Meetkundig gaat het om "vermenigvuldigen uit L".
De suggestie ontstaat waarschijnlijk doordat de schaduw ook nog langer wordt.

opgave 27,28

Terugvinden van de lichtbron uit twee schaduwen kan altijd. Bij opgave 28 leidt het tot evenwijdige lijnen en zijn er lange linialen nodig.

Conclusie: "Het zal de zon wel zijn".

opgave 29

Je kunt ook zeggen: als de plaatjes even hoog zijn, hebben ze bij zonlicht even lange schaduwen. Zo kan deze opgave ook zonder het begrip evenwijdigheid afgewerkt worden!

blz. 12, 13

Nu worden bovenaanzichten gebruikt. In het laatste deel van het pakket worden ook nog boven- en zijaanzichten gecombineerd.
Speciale problemen zijn er nu nauwelijks; de symmetrie rond de lantaarnpaal zet zich bij opgave 31 voort in de schaduwen.

blz. 14

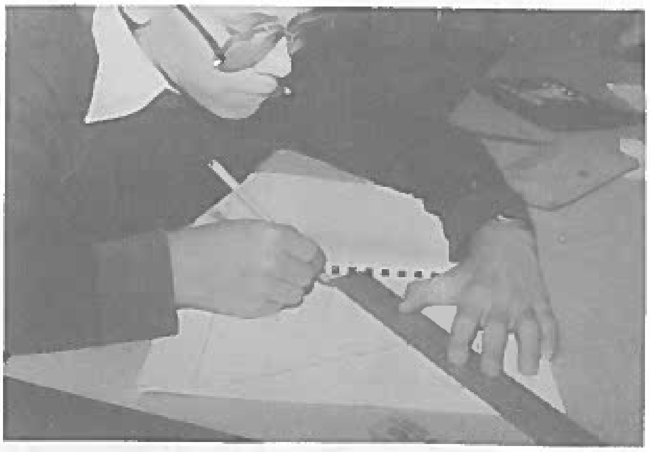
Ook hier kan van symmetrie gebruik gemaakt worden!

blz. 15

Dit is een voorbereiding op de serie van blz. 16 t/m 18.
Vraag bij opgave 36 ook eens door: wat gebeurt er als de lamp steeds hoger gaat, komen de vlekjes dan nog steeds dichterbij elkaar? En tot hoe dicht dan wel?
Merk op dat zo weer evenwijdig licht als limietvorm ontstaat!

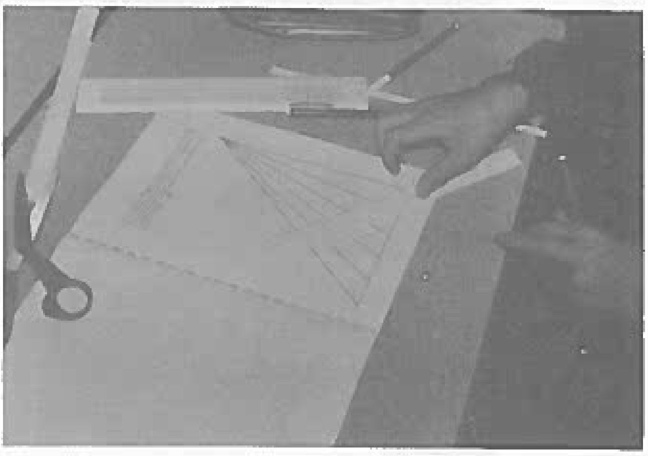
blz. 16

Na al het voorgaande is dit eenvoudig, maar de opgave is nodig i.v.m. de volgende bladzijde.

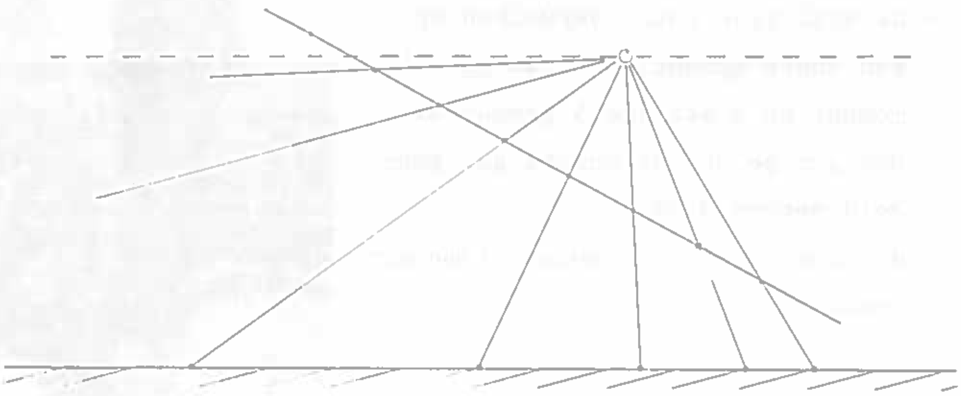


blz. 17

Eerst lijnen trekken, dan schuiven tot het past.
Alleen als het touw horizontaal hangt lukt het de schaduwknopen ook op gelijke afstanden te krijgen.

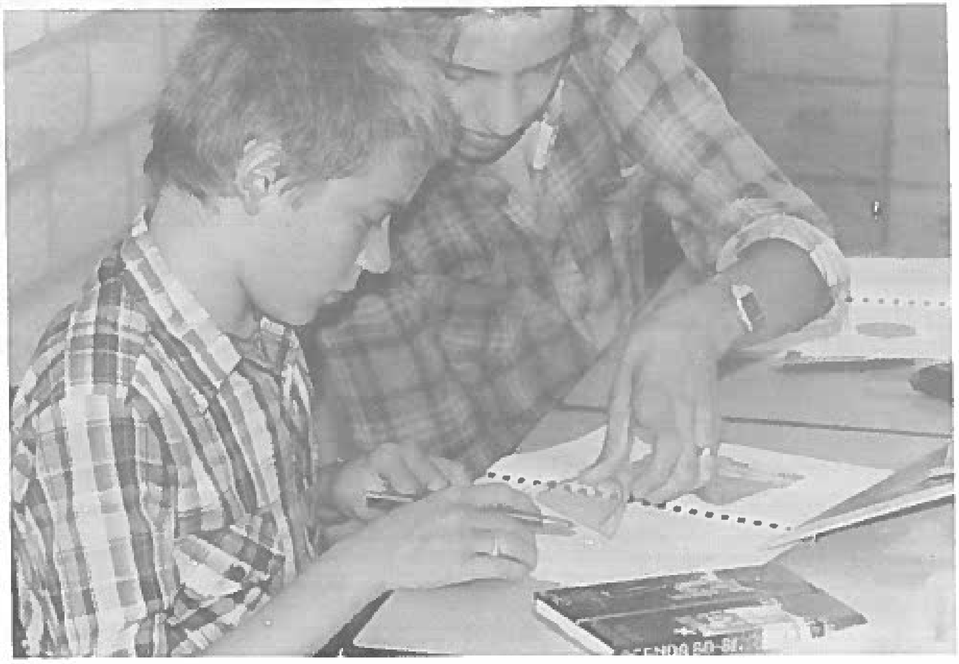


Dat is ook met wat nadenken alleen in te zien: Als het touw niet horizontaal loopt komt het aan een kant, bijv. links, op den duur boven het niveau van de lamp uit. Maar dan zijn er links dus maar eindig veel schaduwen!



Op den duur kan het dus niet goed gaan. Meestal werd wel opgemerkt dat de schaduwen bij opgave 41 aan de linkerkant steeds verder uit elkaar komen te liggen.

blz. 18



Bij zonlicht is dat natuurlijk weer anders!

Eigenlijk is er heel wat klassieke meetkunde aan de orde geweest op deze drie bladzijden!

blz. 19

Deze bladzijde leent zich uitstekend voor wiskunde in de zon op de speelplaats. Mocht er geen zon schijnen dan zijn er twee mogelijkheden:

- de bladzijde laten verwerken op een ander moment. Dat kan op elk moment na bladzijde 5 gebeuren. Men grijpe dus de eerste gelegenheid meteen aan!
- de diaprojector of andere lamp gebruiken.

opgave 40

De rijkdom aan mogelijke vormen stimuleert het werk.
Het tekenen van de schaduwen is eenvoudig: gewoon op ware grootte de schaduwen omtrekken.
Zo gebeurde het hier tenminste.

opgave 41

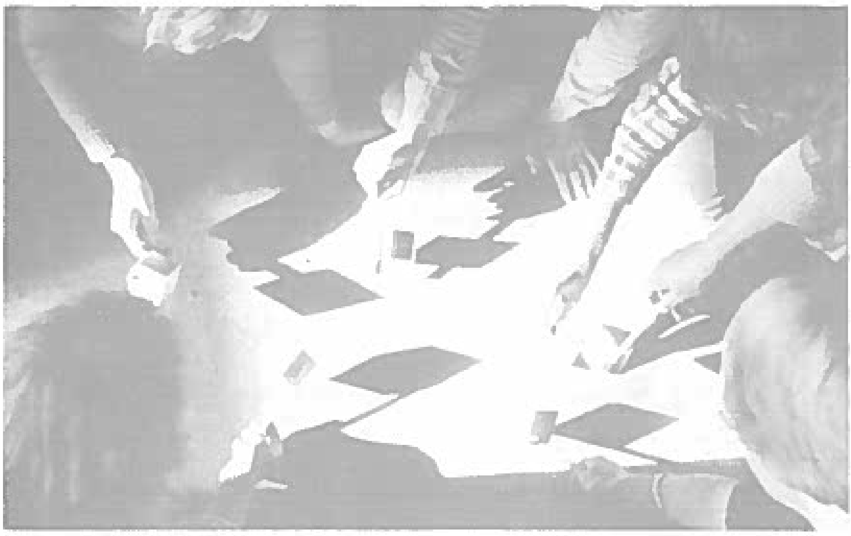
Voor de hand ligt misschien: evenwijdig aan de grond. Dat is niet de enige mogelijkheid! Zie blz.    van deze handleiding voor wat leerlingen nog meer ontdekken.

opgave 42

Bij ver verwijderde lichtbronnen geeft een vierkantje altijd een parallellogram.
"Kun je het nog langwerpiger maken?"
Het duurde even voor het verband met de dalende zon werd gezien. En dan moet in dit geval de lamp naar de muur en juist niet naar de grond.

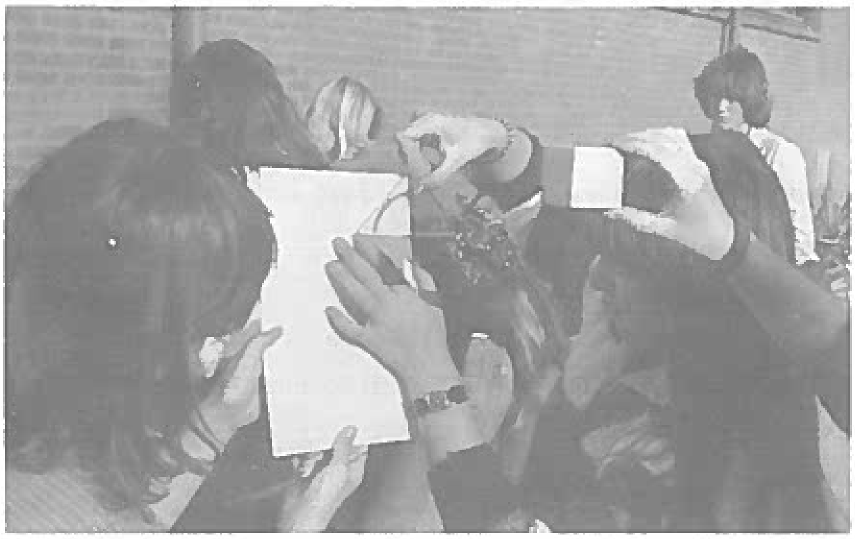
Op blz. 52 wordt voor wiskundig gevorderden uit de doeken gedaan welke figuren er echt kunnen ontstaan.

Voor de leerlingen is het stadium van zelf ontdekken van het grootste belang. Volledigheid is niet noodzakelijk.
Hé, een lijntje kan ook!
Zelfs ontdekten leerlingen dat "geen schaduw" mogelijk was. Wat gebeurt er namelijk als je het vierkantje ver van de muur houdt op de manier van de foto?



Toelichting overbodig!

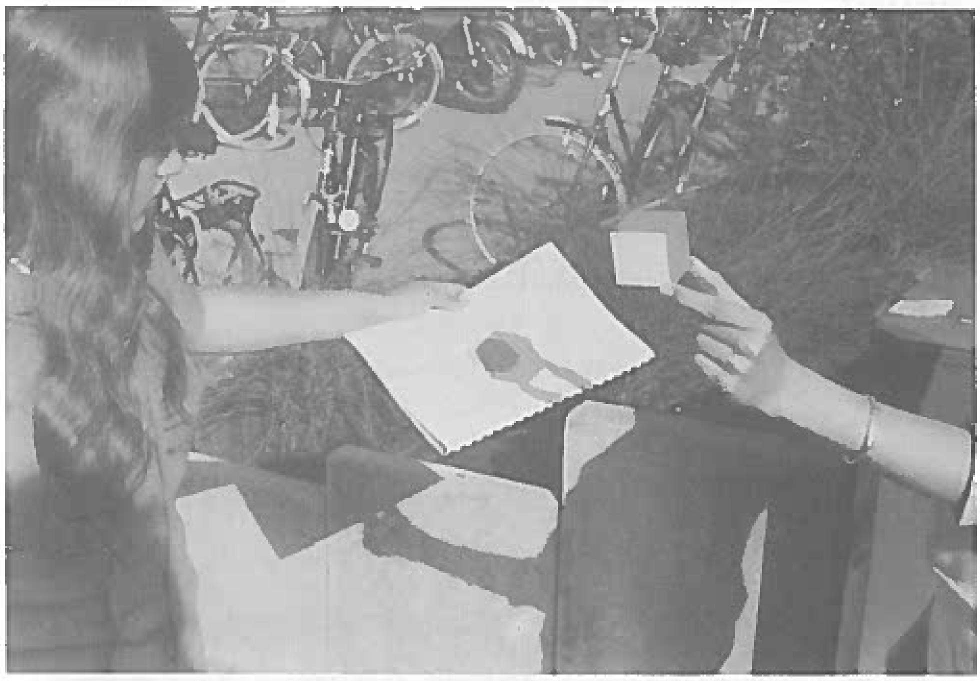
blz. 20 opgave 44



Ook hier levert zelf proberen verrassend veel meer op dan de standaardoplossing (één vlak naar de zon en het vlak waar de schaduw op valt ook naar de zon draaien).

Veel grotere vierkanten zijn namelijk mogelijk. Zie blz. 52 en verder.

opgave 45



Een slimme controle-methode!

opgave 46

Soms lijkt het of je een vijfhoek hebt gemaakt, maar dan zit een schaduwhoekje onder de schaduw van je vingers. Deze vraag is wiskundig benaderd, niet heel simpel. Maar al proberende ontdek je vanzelf: als je de kubus draait, komen er steeds twee hoeken bij of gaan er twee af. Zo ontstond op natuurlijke wijze een "bewijs" dat er geen vijfhoeken zullen komen!
Zie weer blz. 51.

blz. 21,22

De opgaven op deze bladzijde en de volgende laten een bepaald soort gelijkwaardigheid zien van oog en lichtbron: wat het oog kan zien, kan één lamp belichten. Zoals Radjinder het zei: "Als ik zo kijk, en nu een lampje zet waar mijn oog is, dan is het eigenlijk hetzelfde".

Met handbewegingen tussen oog en veelvlak werd de redenering verder ondersteund. Deze opgaven hebben wat te maken met het laatste deel van het pakket: kijken naar hoe je iets ziet.

opgave 51

Een merkwaardig geval natuurlijk!

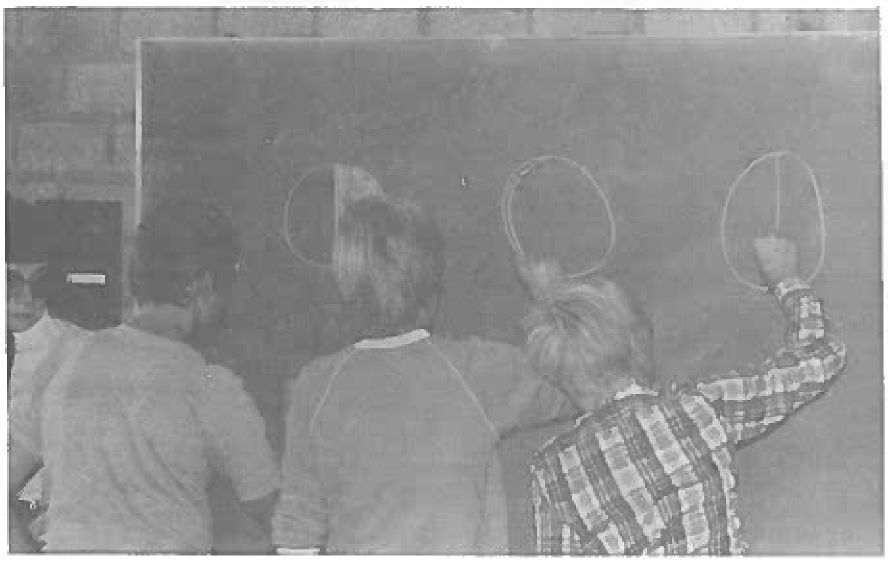
Een andere vraag: waarom zie je op een flitsfoto zo weinig schaduw?

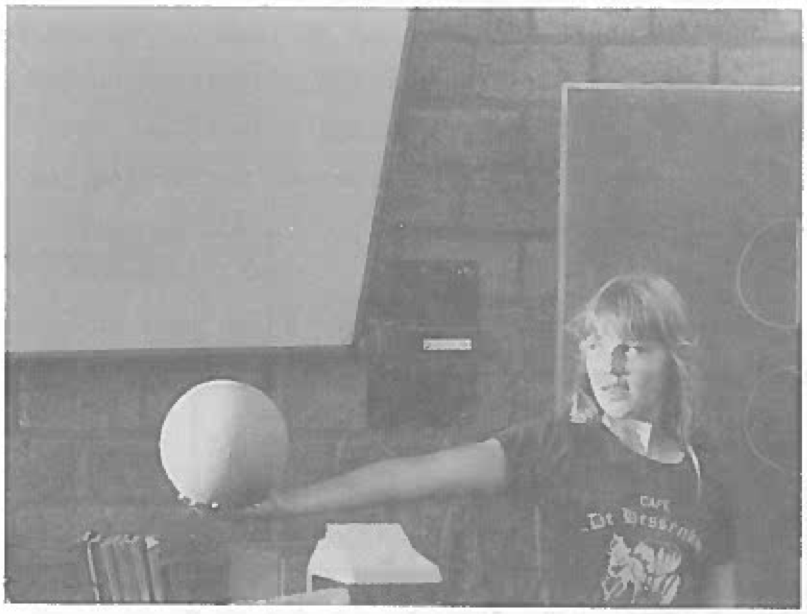
blz. 23, 24

Deze bladzijden gaan over de schijngestalten van de maan. Als je iets in bijna-tegenlicht-ziet, zie je alleen langs de randjes licht. Zo bereiden 52 en 53 het kijken naar de maansikkel voor.

Blz. 24 gaat het beste klassikaal: allemaal tegelijk naar de van links beschenen bal kijken en tekenen.

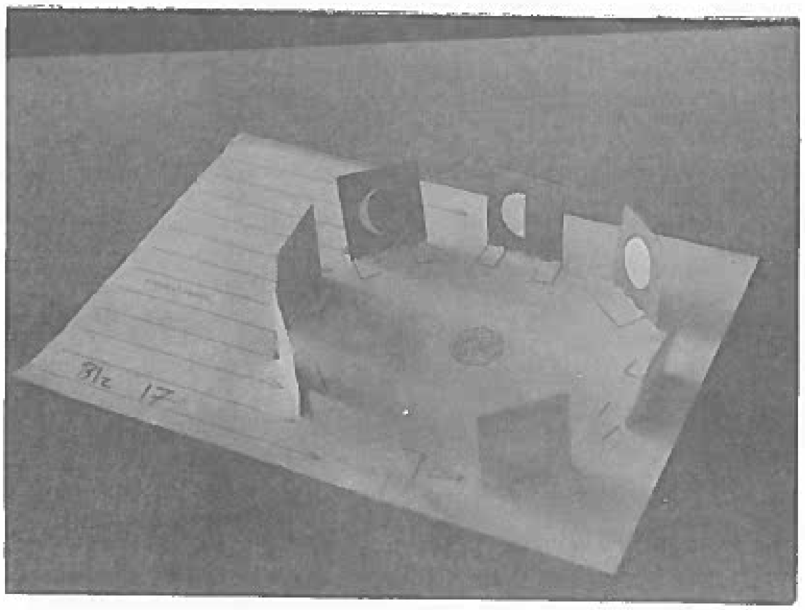
Laat dan een paar leerlingen op het bord hun tekening maken. Neem (uiteraard) leerlingen die ver van elkaar zitten. Het ligt er maar aan van waar je keek wat je zag.





Een aanvulling op opgave 57 en 58: Yvonne draait de bal rond zich. Laat de andere leerlingen bedenken wat Yvonne ziet: zo kijkt de klas "van buiten af" tegen het systeem aarde/maan aan.

In een klas werd opgemerkt dat je toch allemaal de èchte maan hetzelfde zag. Buiten werd uitgeprobeerd hoe dat kwam. Als de maan ver weg is, lijkt ze voor ieder hetzelfde!




opgave 59

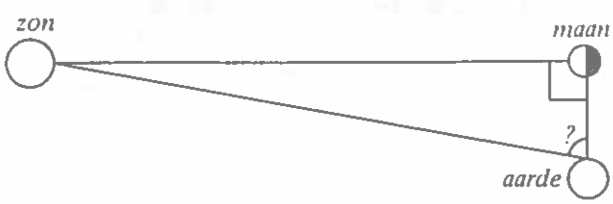
Deze bouwplaat rondt dit gedeelte af. Op een snel verbeterde verwisseling na zullen de maangezichten na het voorafgaande best goed komen te staan!

Het resultaat doet een beetje aan Stone Henge denken, zo'n cirkel met recht opgestelde stenen. En dat heeft ōōk iets met de loop van de zon te maken. Het sterke van deze bouwplaat is, dat de schijngestalten precies in de goede kijkrichting staan. In boeken liggen ze altijd plat in het vlak aarde-maan-baan en dat gaf in een eerdere versie de grootste verwarring. De maanfasen zijn na dit pakket echt helder doorzien.

Een gravure uit 1494 van Albrecht Dürer. Ooit zon en maan zo gezien?

*Zon, maan en zelfs sterren kijken toe als Christus zijn leerlingen onderricht.*

Je kunt er de volledige tekeningen, gravures en houtsneden op doorbladeren: tien keer staan zon en maan zoals op dit plaatje, een elfde keer is het goed. Wist Dürer niet beter?
Aristarchos van Alexandrië mat al in de 3e eeuw voor Christus de hoek tussen zon en halve maan. Daaruit vond hij als verhouding tussen de afstanden zon-aarde en maan-aarde 20 : 1.



Aristarchos en zijn tijdgenoten wisten dus wèl dat de schijngestalten van de maan ontstaan doordat we nu eens meer, dan weer minder van het door de zon beschenen stuk van de maan zien.

## b. EVENWIJDIGHEDEN

In het gedeelte "Met het oog op diepte" is het begrip evenwijdigheid een noodzakelijk gereedschap. In een eerste opzet van het pakket werd dit begrip pas ten tonele gevoerd op het moment dat het nodig was. Maar dan ging het meteen om lijnen die in schijn niet en in werkelijkheid wel evenwijdig zijn. Dat was teveel ineens en leidde tot verwarring. Nu staat het gedeelte over evenwijdigheid apart, maar diverse opgaven bereiden wel voor op "Met het oog op diepte", met name de opgaven 76 tot en met 80.
Ook het aanwijzen van evenwijdige lijnen in het lokaal en in gebouwen moet in dat licht gezien worden.
Intussen is het intuïtieve inzicht in evenwijdigheid ook al ontwikkeld in "Licht op Schaduw", zodat dit gedeelte voor de meeste leerlingen betrekkelijk eenvoudig zal zijn.

<u>blz. 30 opgave 60,61</u>

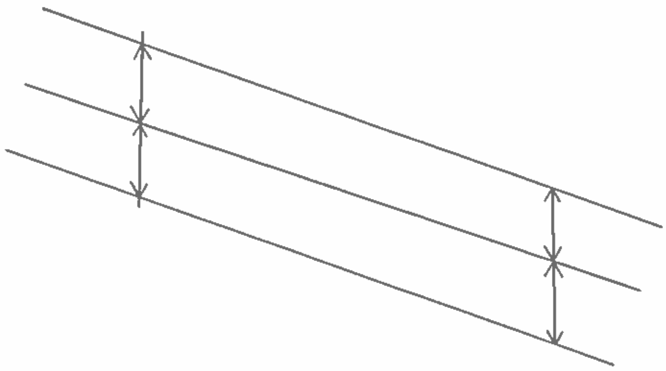
Twee introductie-opgaven.
In opgave 61 komt het direct tot een verscherping van het intuïtieve inzicht: evenwijdige lijnen hebben overal dezelfde afstand. Er is nòg een controle-methode: er langs kijken:

opgave 62

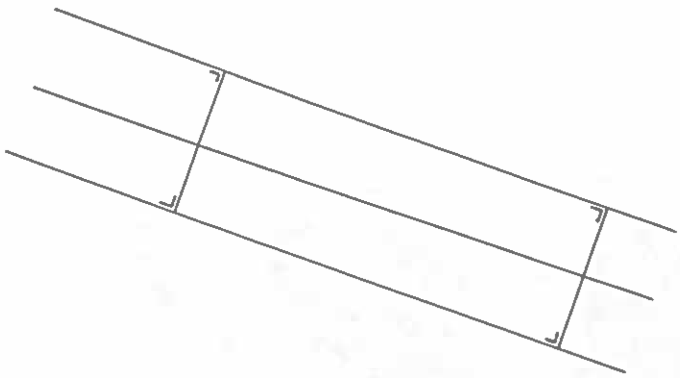
Dit is "hoofdmeetkunde". Volgens een leerling gingen ze door de deur, de gang en de gymzaal, het weiland over en verder, als er maar geen heuvels waren. Daar kon hij de lijnen blijkbaar niet doorheen denken! Uiteraard bleven ze even ver van elkaar en van de grond, als die vlak was. De kromming van het aardoppervlak mag ook ter sprake komen, nodig is dat natuurlijk niet.

opgave 63

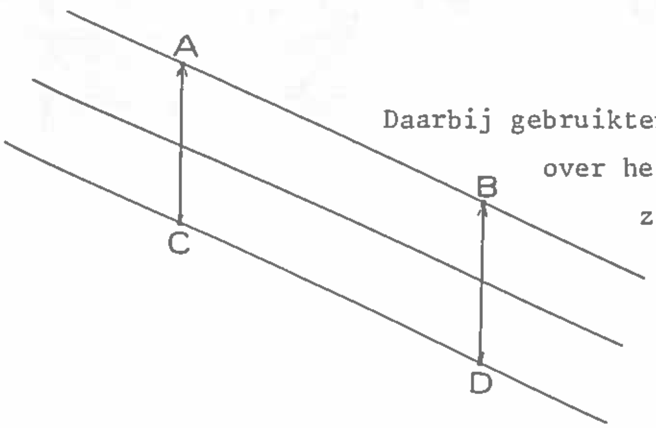
Hoe eenvoudig dit ook lijkt, er kan een heel stuk meetkunde uitrollen. Zoals bij het groepje dat discussiëerde of je zo:



of zó:

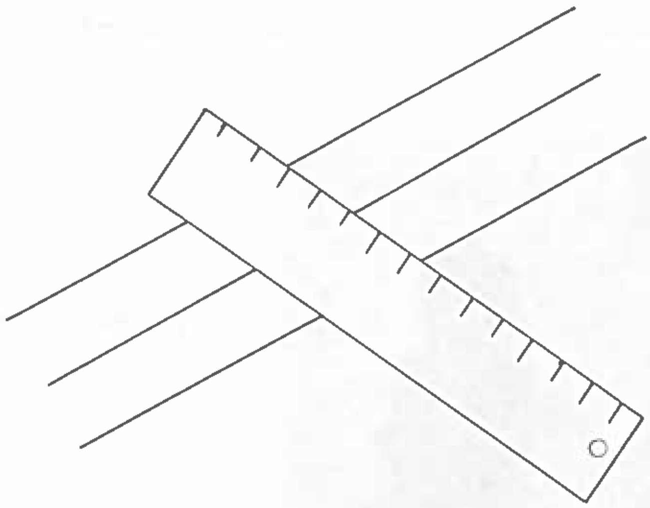


de afstanden moest meten. Hoewel het niet expliciet gezegd werd, bleek voor deze leerlingen duidelijk dat het goed gaat als je maar een vaste afstand tussen de hulplijnen hebt. (AB = CD).




Daarbij gebruikten ze dus de "Stelling" over het parallellogram en zijn overstaande zijden!

Een leerling vond de methode met de loodrechte stand nauwkeuriger. Uiteindelijk legde zijn opponent de liniaal dwars over de lijnen:



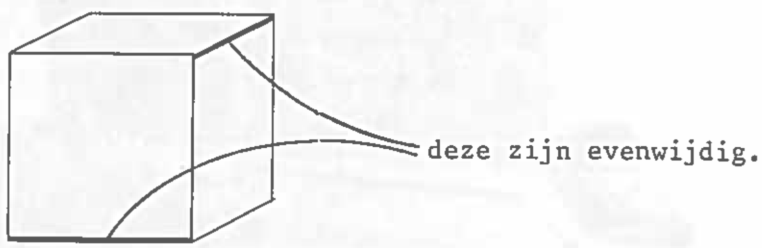
en trok de liniaal om.
De twee lijnen langs de zijden van de liniaal waren natuurlijk ook nauwkeurig genoeg!
Dit hele meetkunde-onderzoek verliep in een vinnige, tien minuten durende, discussie. De openheid van de opgave (is er geen strategie aangegeven, behalve dan de suggestie van vraag 61) maakt dat mogelijk. Van belang is dat leerlingen met meetkunde zèlf werken en niet al te zeer geleid worden. Dan blijkt hoe inventief ze vaak zijn in dit soort situatie's.

opgave 64

Evenwijdigheid is intuïtief bekend. Een definitie is niet echt nodig. Toch kan er later (bij opgave 80 bijvoorbeeld) naar teruggegrepen worden. Dat kan in een klassegesprek, de leerlingen doen dat in het algemeen niet spontaan.

blz. 32 opgave 65

In gebouwen vind je veel evenwijdige lijnen. Uiteraard wordt dat later gebruikt bij MHOOD. Het klaslokaal is wat dit betreft het beste leermiddel.
Een veel voorkomende fout is:



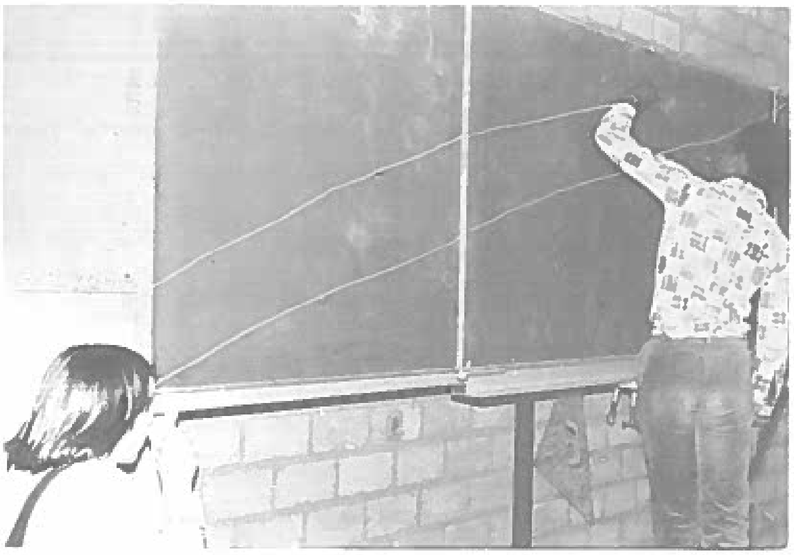

Wordt "evenwijdig" met "horizontaal" verward?

Men leide uit een en ander niet direct gebrek aan ruimtelijk inzicht af. Alleen het woord "evenwijdig" en de definitie zijn nog niet op de juiste wijze met het heus wel aanwezige, maar nog onverwoorde begrip verbonden. Het kost even tijd. Een goede manier is samen een en ander in de klas aan te wijzen.

Zie je deze ribbe?

Houd je potlood daar eens evenwijdig aan.

opgave 67



Voor zover op het bord lopend kan die lijn wel getrokken worden.
Op de foto is het resultaat te krom. Nancy stelt dat, viserend op z'n Zie-je-wel's vast. Als we het bord laten zakken en nog eens proberen, ja, dan ontstaan er weer andere evenwijdigheden!

opgave 69

Drie kleuren moet genoeg zijn. Men kan hetzelfde proberen met de regelmatige veelvlakken!

blz. 34,35

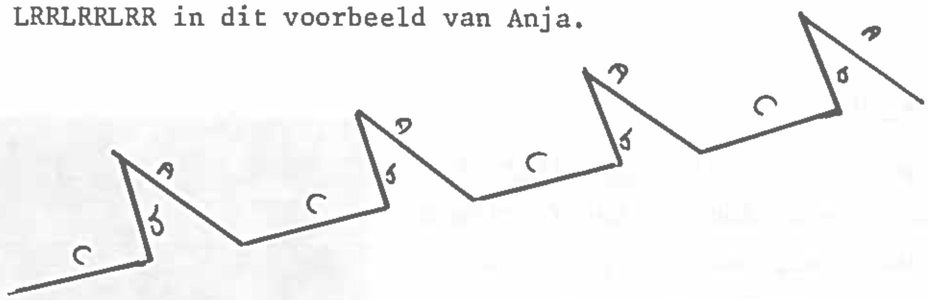
Op deze bladzijden komt de robot uit het pakketje "Hoeken" nog even voor. Mocht dat pakket niet gebruikt zijn, dan is een korte introductie nodig. Een andere mogelijkheid is: nr. 72 tot en met 75 overslaan. Deze opgaven hebben ook geen directe functie als voorbereiding op "Met het oog op diepte".

opgave 72

Precies tekenen wordt beloond met terugkeer na acht rondjes door het schema.

opgave 73

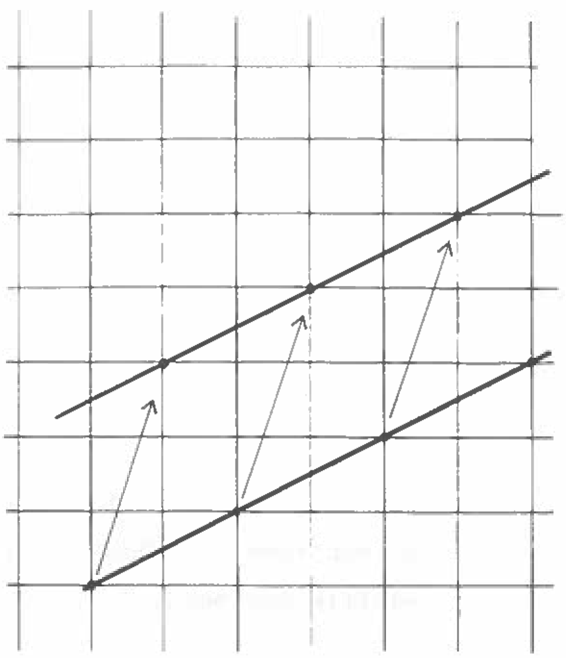
Hier is terugkeer na twee cycli slechts één van de mogelijkheden. Het hangt er van af of je steeds rechtsaf slaat of een ander draai-patroon volgt, zoals LRRLRRLRR in dit voorbeeld van Anja.



blz. 36,37

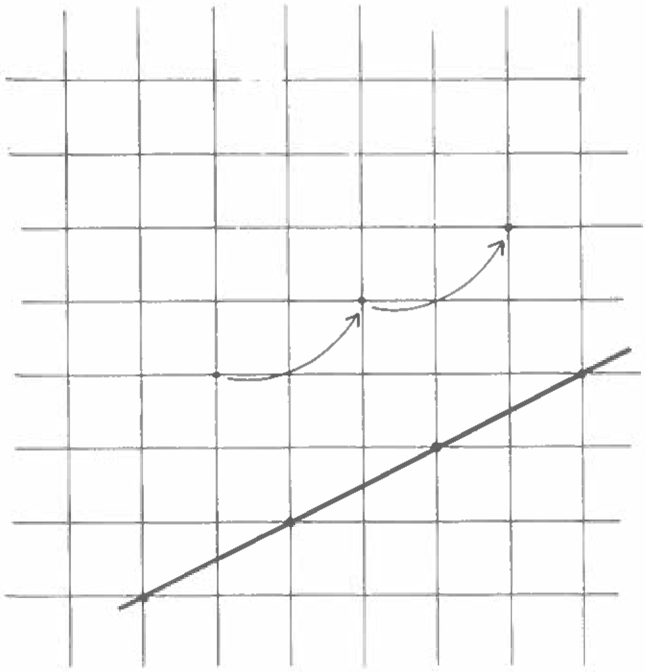
Deze oefening is belangrijk i.v.m. opgave 130 t/m 132.
In het algemeen wordt er door de leerlingen op twee verschillende manieren van de roosterstructuur gebruik gemaakt.

a. De schuifmethode.
   Alle punten van de lijn worden met dezelfde pijlen opgeschoven.



b. De richtingmethode.

De evenwijdige lijn wordt opgebouwd door stapjes te doen in dezelfde richting als de eerste lijn aangeeft ("schuin over twee").



opgave 79

Toch pasten niet alle leerlingen hun zo juist verworden roosterervaringen toe. Dat hoeft ook niet perse, als het rooster maar gebruikt is voor de constructieopgaven 76, 77, 78!
Het papier moet wel vergroot worden als je op primitieve middelen overgaat .....

opgave 80

Door tellen is dit te vinden!
Niet iedereen zal dat al aankunnen, maar we zijn ook nog niet officiëel toe aan twee vergelijkingen met twee onbekenden. "Na drie blaadjes" is een redelijk antwoord.

opgave 81

De geodriehoek is voorzien van lijnen die evenwijdige verplaatsing vergemakkelijken!

blz. 39

De gezochte lijnen werden met getallenparen aangeduid. Weer zijn er veel strategieën om de lijnen te tellen. Eerst tellen hoeveel soorten evenwijdige lijnen, en dan per soort tellen.

Of: uit punt 1 gaan 23 lijnen

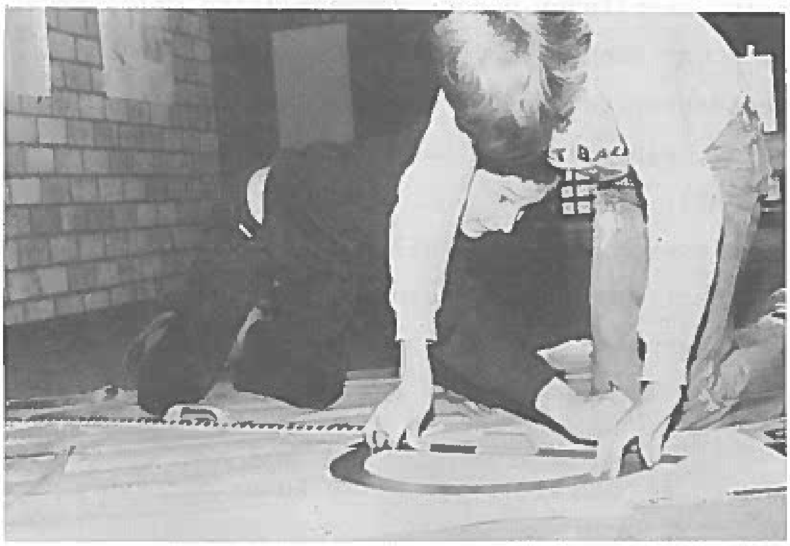
uit punt 2 gaan 22 lijnen

enzovoort.

Dan 1 + 2 + 3 + .. + 23 =

Gelegenheid voor kleine fouten én discussie genoeg!

Twee leerlingen besloten de figuur nog eens te tekenen maar nu twee meter groot. Een hele klus, die 276 lange lijnen trekken.

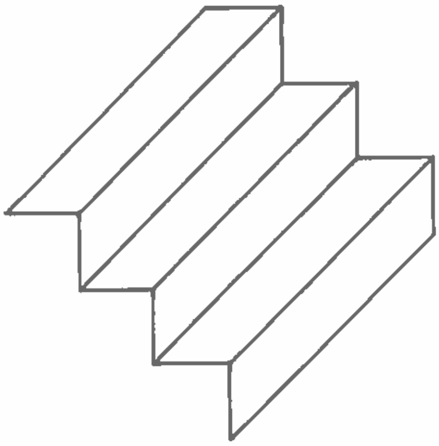


## c. MET HET OOG OP DIEPTE

Perspectieftekenen is een wanhopige poging om de driedimensionale werkelijkheid op een tweedimensionaal vel papier weer te geven. Zonder welwillende medewerking van degene die het resultaat bekijkt heeft dat weinig zin: onwilligen zouden staande kunnen houden dat tekeningen en foto's gewoonlijk plat zijn en dat ook blijven. Een welwillende waarnemer bouwt uit de gegevens op het papier - of het schilderslinnen, of wat dan ook - in gedachten weer een driedimensionaal geheel op. Meestal zal de tekening zoveel details geven dat zo'n interpretatie vlekkeloos zal verlopen, maar interpreteren blijft het.
De eerste bladzijden van dit laatste gedeelte van het pakket draaien om vlak/ruimtelijk, tekenen/interpreteren. Zo expliciet wordt dat niet gesteld, maar de inleidende activiteiten leggen zo wel de begripsmatige basis voor het latere meer technische tekenwerk.

<u>blz. 43 opgave 84</u>

Het resultaat:



Leerlingen zagen er van alles in: trappetjes natuurlijk, maar ook schuifdeuren en accordeons.
In ieder geval dus iets ruimtelijks.
Sommigen vouwden zelfs een papieren trap erbij!
Blijkbaar is aan een ruimtelijke interpretatie niet te ontkomen.

<u>opgave 85, 86</u>

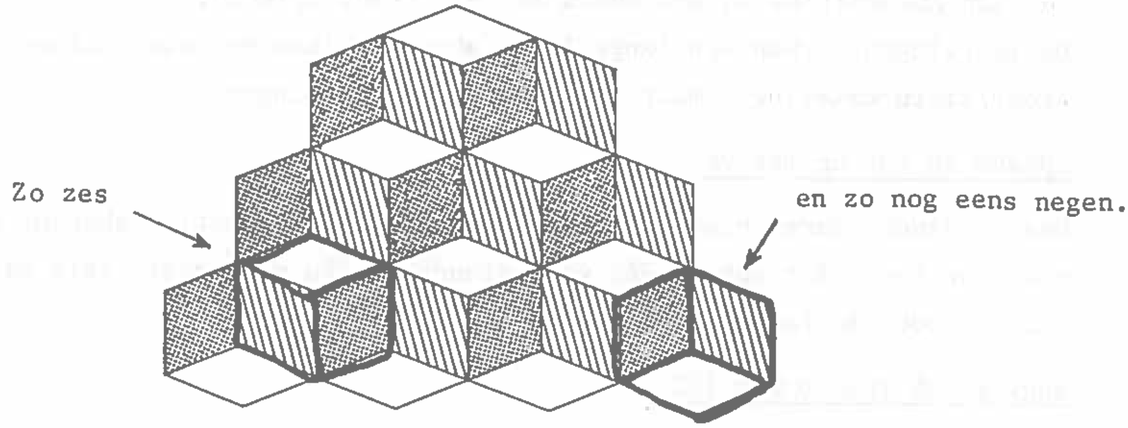
Bij deze opgaven wordt nog duidelijker dat kijken naar de tekeningen interpreteren is. Leerlingen vinden verschillende oplossingen omdat de figuren opzettelijk wat dubbelzinnig zijn gehouden.
Zo leidde het eerste plaatje onder andere tot de volgende benoemingen: een piramide, een gang, een put, een fototoestel, een doolhof (waar je nooit uitkomt).
Linksonder leverde vijf verschillende, meer wiskundige, interpretaties op.

- Een kubus met een kleintje eruit.
- Een klein kubusje, gedraaid voor een grote geplakt.
- Een kleine kubus in een hoek van het plafond.
- Een zeshoek.
- Als klap op de vuurpijl: een holle kubus met een gat. Je ziet de achterkant door het gat!

Het is duidelijk dat de essentie van 85 en 86, de verschillende interpreteerbaarheden, in groepswerk en klassegesprek het beste naar voren komt.

opgave 87, 88, 89

Deze tekening kan, zoals bekend, op twee manieren gezien worden. In het ene geval zijn er 6, in het andere geval 9 kubussen. Omdat je ook bewust tussen die twee beelden heen en weer kunt gaan, is hier heel duidelijk dat het vormen van het drie dimensionale beeld een echte activiteit is, die meestal echter onbewust wordt uitgevoerd.
Sommige leerlingen presteren het - volgens hun zeggen - 15 kubussen te zien.




Wel ja, dat zijn inderdaad 15 verschillende kubussen!
Het is niet eens nodig deze strakke tekening te gebruiken om hetzelfde effect te krijgen.
Twee landschappen? Twee foto's?

Nee, één. De rechter foto is de linker, op de kop!

opgave 90 tot en met 93

Leerlingen vinden foto's "echter" dan tekeningen. Maar bij vraag 93 weten ze toch aan te geven wat er niet klopt. Volledige verklaringen van de afwijkingen van de werkelijkheid is hier nog niet nodig. De toren en de trein komen trouwens verderop in het pakket terug.

opgave 94,95

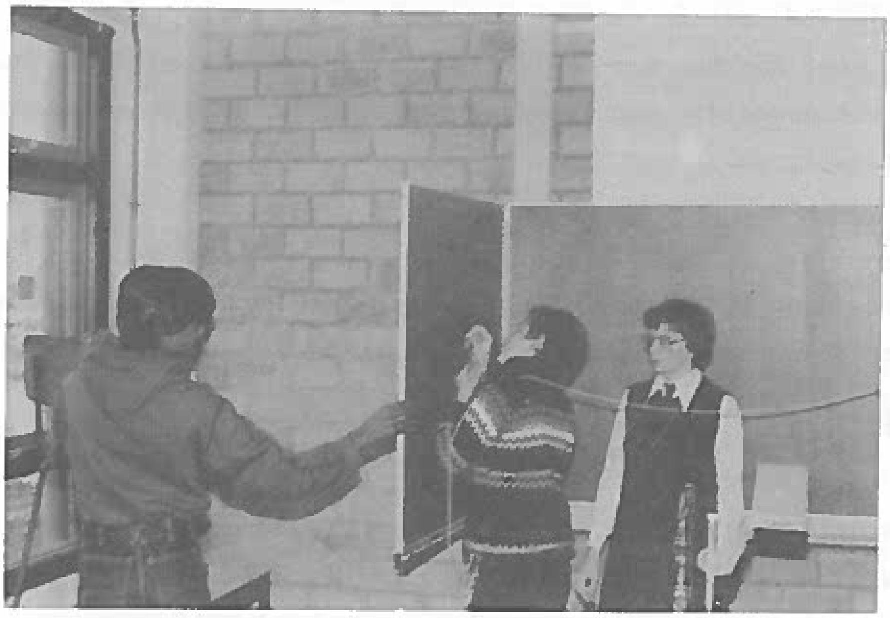
De tekenaar (William Hogarth, 1697 - 1764) gaf als onderschrift mee: "Whoever makes a design without the knowledge of perspective, will be liable to such Absurdities as are shown in this Frontispiece".
De leerlingen merken een lange lijst absurditeiten op, niet alleen groot/klein-omkeringen maar ook voor/achter-storingen.

opgave 96 tot en met 99

Deze opgaven sturen naar het grondidee van het perspectieftekenen: tekenen zoals je iets ziet vanuit één vast standpunt. En niet zoals iets eigenlijk is. Zie ook: Achtergronden I, blz. 44.

opgave 100 tot en met 102

Dit is lastig, maar essentieel. Het eist aandacht en inleving om te achterhalen wat er precies aan de hand is. De vragen maken die inleving wel mogelijk, maar echt doen is natuurlijk beter. Vandaar vraag 102.
Hier wordt dit voor de klas gedaan. Merkwaardig is de spanning die dit hele gebeuren in de klas kan hebben.



Slechts twee leerlingen zijn bezig, maar er komt natuurlijk voortdurend commentaar uit de rest van de groep. Touwtje strakhouden, krijtje iets meer naar rechts, enzovoorts.

De hele stoel hoeft niet getekend te worden, maar het idee moet wel overkomen. Naar 8 punten het touw spannen en tekenen waar het touw door het bord gaat is daarvoor voldoende.

Men leze in "Achtergronden I" over de activiteiten uit "Zie je Wel" die hieraan vooraf kunnen gaan; ook is daar aangegeven waarom in dit pakket juist voor deze lastige prent is gekozen.

opgave 101

Natuurlijk vanuit het oogje!

In "Achtergronden II" (blz. 55) is te vinden hoe uit een perspectieftekening de juiste positie van het oogje omgekeerd is af te leiden, maar dat eist wel meer dan men van de leerlingen kan verwachten. Hier staat het slecht om het grondidee van verwisselbaarheid van tekening en werkelijkheid te demonstreren.

blz. 50

Hier is de voorgaande situatie geabstraheerd tot een getekend zijaanzicht, waar de gespannen touwtjes in kunnen worden getekend.

opgave 106

Nu wordt duidelijk: wat verder weg is, komt klein op het scherm. Maar wat gebeurt er als i.p.v. de fles het oogje verplaatst wordt? Dan wordt de getekende fles kleiner als het oog dichterbij komt!

opgave 107

Het etiket is zo aangebracht dat het op "ooghoogte" zit. Waar de fles ook op de tafel staat, je ziet de bovenrand van het etiket steeds op dezelfde hoogte, omdat de kijklijnen horizontaal zijn en dus samenvallen.
Erg essentieel is dit inzicht hier nog niet. Opgaven 113, 132 en 133 hebben ook met de horizon te maken. Eventueel kan dan op deze opgave worden teruggekomen.

blz. 52 tot en met 55

De opgaven 108 t/m 111 gaan over de illustratie op blz. 52.
Nu is er niet alleen een zijaanzicht beschikbaar maar ook een bovenaanzicht.

En opgave III: zij- en bovenaanzicht combineren om te vinden hoe het scherm er na het tekenen uitziet.

Het geheel is een secuur karweitje, maar de leerlingen merken geleidelijk dat nauwkeurig werken beloond wordt met beter resultaat.
Eventueel kan de stokkenscène weer met een glazen scherm worden nagespeeld, à la "Zie je Wel".

De lijnen op het scherm hebben niets te maken met de jalouzieën aan het eind van de gang!
De historische achtergrond van deze methode komt in "Achtergronden III" (blz. 62) uitvoerig ter sprake.

blz. 55 opgaven 112, 113

Dit "stappen met stokken" is weer een buiten-de-klas-activiteit.
Wat verder is lijkt klein, dat is heel duidelijk, maar nu komt door de grotere afstanden ook een limiet-gevoel aan de orde. Als je steeds verder gaat, blijft er niets van de stok meer over.
En je arm? "Die gaat omhoog tot zō, dan stopt ie".

Zo wordt natuurlijk vooruitgegrepen op het begrip verdwijnpunt. Expliciet komt dat veel later (bij opgave 129) pas aan de orde.

Tussen haakjes: bij deze opgaven worden geen schijnbare afstanden op een *vlak* scherm gemeten. In feite beweegt de uitgestoken hand langs een cirkel. Storend voor de begripsvorming is dat niet, maar toch is hier eigenlijk een iets ander soort perspectief aan de orde: projectie op een bol. Het limiet-gevoel komt bij deze opgaven echter zo sterk en gemakkelijk naar boven, dat de lichte wiskundige onzuiverheid maar voor lief moet worden genomen.
Eigenlijk is dit het perspectief dat gebruikt wordt in de sterrekunde: je meet alles in hoeken op de "hemelbol".

opgave 114 tot en met 118

De tot nu toe ontwikkelde inzichten worden toegepast op de foto's van blz. 45. In opgave 114 is het zijaanzicht weer gegeven. In een vroegere versie van "Klein en Groot" werd ook aan dit probleem gewerkt, echter zonder de suggestie van het zijaanzicht. Dat bleek veel te moeilijk en bij de vraag naar een verklarende tekening kwam er geen zijaanzicht te voorschijn.
In de hier gebruikte versie is het probleem eenvoudiger, het zijaanzicht hoeft alleen gebruikt te worden en dat is nu al vaker gedaan.

opgave 115 en 116

Hoe verder de paaltjes weg staan, hoe dichter ze bij elkaar op het scherm komen. Maar er is meer!
Bij B kan geen paaltje horen. En er is een grens op het scherm die het oneindig verre paaltje aangeeft.
Natuurlijk heeft het weer iets met evenwijdigheid te maken.
Een hulpvraag is: hoe loopt de lijn van het oog naar paaltje 1.000.000?

opgave 117

De trein op herhaling. Dit is best lastig. Eerst moet de foto in verhouding in bovenaanzicht getekend, dan moet omgekeerd een lijn van het oog door de foto naar de "echte" trein getekend worden.

opgave 118

Dit is een meer directere benadering van een soortgelijk probleem dan in opgave 117.

opgave 118 tot en met 124

Hoe Broer Konijn in dit pakket terecht is gekomen is in Achtergronden III beschreven, zie blz. 69.

opgave 120

De lege lijst werkt suggestief om je de werkelijkheid voor te stellen als getekend binnen de lijst.
Een merkwaardige situatie ontstaat als je met zijn tweeën door de lijst naar elkaar kijkt:

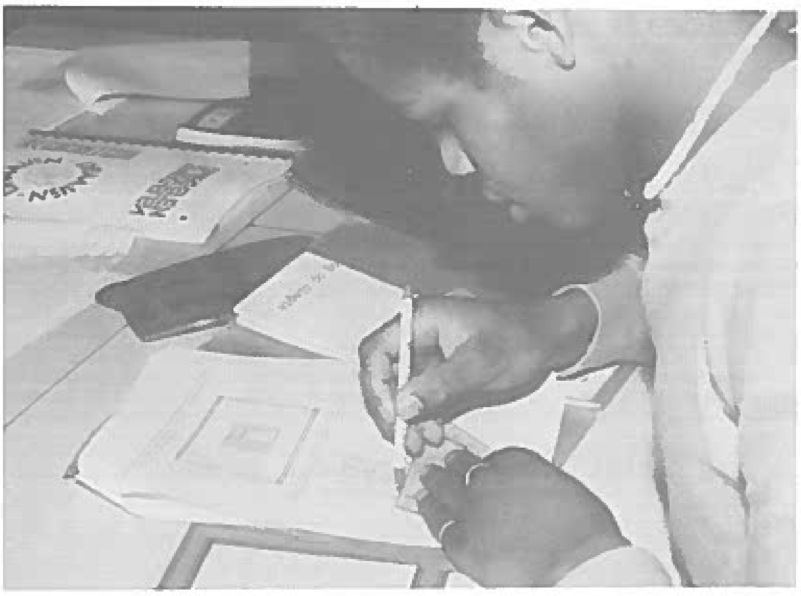
Twee lijsten in elkaar, en dat twee keer.

opgave 121

Het schijnbaar convergeren van evenwijdige lijnen wordt hier onderzocht; precies waarnemen leidt onfeilbaar tot de juiste keuze.

opgave 123, 124

Opgave 124 toont aan dat de in 123 getekende lijnen naar één punt in het midden moeten lopen. De leerlingen tekenden de achterkant van de gang bij 124 heel klein: bijna als een punt.



Zo wordt het verdwijnpunt niet alleen met evenwijdigheid in verband gebracht, maar ook met: hoe verder, hoe kleiner. En dat juist toegepast op de vaste onderlinge afstand van evenwijdige lijnen. Het "stappen met stokken" leidde hier ook al toe.

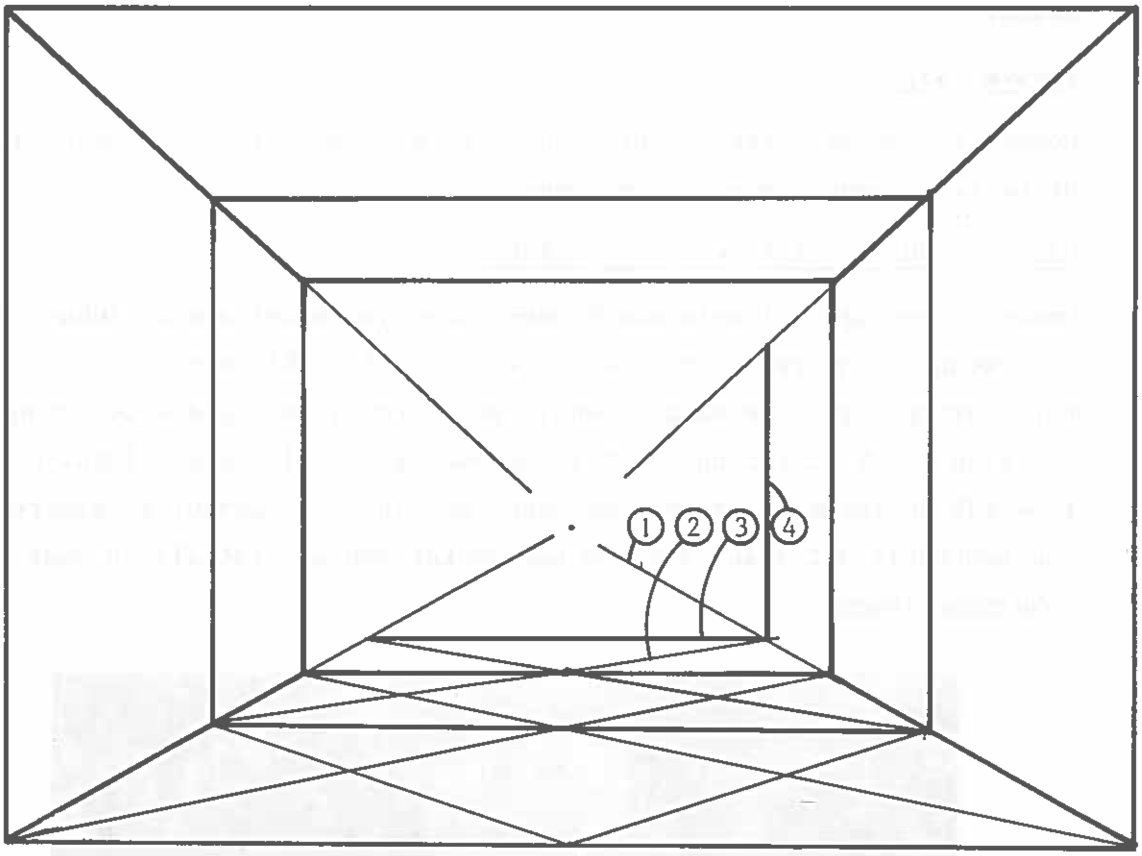
opgave 125

Een leerling, gewezen op het grote gevaar dat zulke vernauwende sporen voor het treinverkeer opleveren, zei geïrriteerd: "Ach, je moet er ook dőőr kijken", waarbij bijna een gat in de foto werd geprikt. Blijkbaar was het idee dat de foto een venster kon zijn tot de "werkelijkheid" er achter goed begrepen!

opgave 127

Het probleem is natuurlijk: waar komt de volgende drempel?
Een leerling merkte op dat het voorste gangdeel 6 cm op de tekening was en het tweede 3 cm. Dus moest de derde ruimte $1\frac{1}{2}$ cm zijn .....
De gedachtengang sluit nauw aan bij het middeleeuwse voorschrift in zulke situaties steeds 2/3 van het voorgaande te nemen. Helaas zijn beide methodes onjuist. Niet voor niets wordt hier op het vloerpatroon gewezen. Laat desnoods eerst een plattegrond van de vloer tekenen. Dan is duidelijk dat de schuine lijnen gebruikt kunnen worden om de volgende drempel te vinden.

Hier is een mogelijke constructievolgorde.




opgave 128

In foto's klopt het allemaal zo mooi, als je tenminste nauwkeurig doortrekt.

opgave 129

Vroeger leerden we allemaal: de verdwijnpunten liggen op de horizon. Hier een duidelijk voorbeeld dat dat niet juist is. Als je tekenvlak niet evenwijdig is aan de vertikale lijnen, dan convergeren de vertikale lijnen op de tekening ook!

Merk op dat het naar elkaar toelopen van die lijnen in het geval van de Dom in Utrecht nog versterkt wordt door het naar boven toe smaller worden van de toren. Zo lijkt hij nog hoger!

opgave 130 t/m 131

Hier is ervaring met tegelvloeren, zoals opgedaan bij opgaven 78 t/m 80 van nut.

Precies werken wordt weer beloond: de drie verdwijnpunten liggen op één lijn: de horizon.

Vraag 132 hangt samen met de etiketten van vraag 107. Men kan daar in het klassegesprek eventueel op terugkomen.

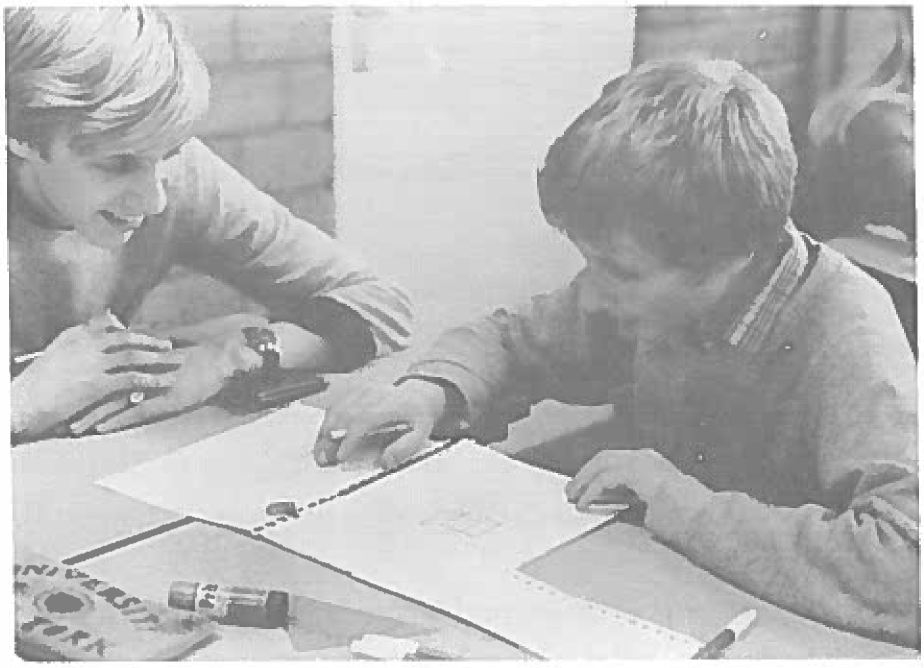
Lees in "Achtergronden III",ook over Alberti's opvatting van de horizon, dat hangt nauw met de plaats van de ogen van de personen op de tekening samen.

opgave 133, 134

Hoewel je ook wel direct kunt zien op welke verdiepingen je neerkijkt, kan de horizon goede diensten bewijzen.

blz. 67, 68: het tekenen van een kubus

Omdat in het traditionele meetkunde-onderwijs zoveel aan de kubus wordt onderzocht, kan het tekenen van de kubus niet uitblijven.
Het systematisch tekenen met behulp van verdwijnpunten die te voren gegeven zijn bleek echter nog niet zo eenvoudig. Zo zijn deze bladzijden toch tamelijk voorgestructureerd geworden: tot in de te gebruiken kleuren toe. Men beoordele het resultaat van het pakket echter niet alleen naar deze kubustekeningen!



opgave 139, 140

Hier kan gezien worden wat er gebeurt als je de verdwijnpunten verder en verder weg legt. Dan worden de ribben weer langzamerhand evenwijdig op de tekening. De tekening van opgave 140 is echter niet een kubus zoals-je-hem-ver-weg ziet. Het is een parallelprojectie van een kubus. De projecterende lijnen komen niet uit een punt (het oog), maar vormen een evenwijdige bundel. In dit geval loopt die bundel als het ware van hoog-rechts-achter naar links-onder-voor.

Als je zoiets wilt zien moet je dus de kubus in de linksonder hoek van je gezichtsveld nemen. Maar dat doet ons oog nooit: het stelt het object centraal en als we een vierkant zien, dan kijken we daar recht tegenaan. Maar dan zouden er geen zijvlakken zichtbaar zijn!
Wel geeft deze tekening een uitstekend overzicht van de kubus voor de goede verstaander. En middens van ribben blijven ook middens van getekende ribben. Alleen vanwege dat soort voordelen wordt deze tekenwijze zo vaak toegepast.

opgave 141

Door de wat rijkere structuren biedt deze tekening wat meer houvast. De opgaven 65 t/m 70 werpen hun vruchten hopelijk af. Anders roepe men die weer eventjes voor de geest.

opgave 142

Als het goed is ligt ook dit verdwijnpunt op de horizon!

ACHTERGRONDEN I

ONTSTAAN EN VERANTWOORDING

Bouwtekeningen leren lezen.

In september 1978 werkten enkele klassen van de MAVO-LEAO "De Lunetten" met een experimenteel ruimte-meetkundepakket "Bouwwerk". De bedoeling was in "Bouwwerk" de ruimtelijke noties te verwerken die nodig leken om de bouwtekeningen van de juist betrokken nieuwe school te kunnen lezen.
Het pakket "Bouwwerk" was echter niet gebonden aan deze specifieke school. In Wiskrant 17 is een en ander uitvoerig beschreven. Hoewel het onderwijs redelijk prettig verliep, is het pakket toch nooit verspreid. Tijdens het werken in de klas bleken de problemen in de ruimtemeetkunde namelijk een stuk dieper te liggen dan aanvankelijk werd verwacht.

Tekenen wat je weet of wat je ziet.

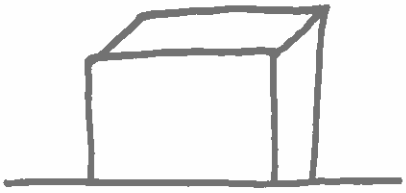
Na een introductie van het begrip "balk" kwam in "Bouwwerk" op blz. 4 de volgende opdracht voor:

> *Zet de balk op drie verschillende manieren voor je. Maak van elke stand een tekening. Let daarbij goed op de ribben die in dezelfde richting lopen.*

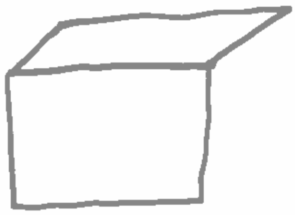
De richtingen van de ribben kwamen op de bladzij daarvoor ter sprake. In een alleen binnen het IOWO verspreid artikel werden de reacties van de leerlingen weergegeven en geïnterpreteerd. In dat artikel zijn de eerste aanzetten voor "Schaduw en Diepte" te vinden.
Hier is een lang gedeelte, geschreven naar aanleiding van de juist genoemde opgave.

> "Vanuit het verkennen van de balk op blz. 3 wordt een suggestie gedaan om de balk in verschillende standen te tekenen. De ribben lopen in groepjes van 4 in 3 verschillende richtingen. Op blz. 4 wordt als steuntje bij het tekenen deze richtingsaanwijzing gegeven. Het steuntje wordt lang niet door iedereen spontaan opgepakt. Met enige hulp komen de meesten echter wel tot redelijke tekeningen. Zo wordt dus met grof geweld een tekenalgoritme opgedrongen dat alleen leidt tot parallelprojectie van een balk. Of tot perspectiefprojectie, als "gelijke richting" met "door één punt" wordt verbonden. Dat laatste gebeurt in de klas niet, waaruit mag blijken dat "gelijke richting" staat voor "evenwijdig". "

De leerlingen tekenen liever niet hun netvlies-beeld na. Ze willen op papier zetten wat ze zien. Zien is dan niet "een foto maken in gedachten". Zien is weten hoe dat blok in elkaar zit. Het staat bijvoorbeeld vlak op tafel.
Dus:



Of: je ziet, als het blok recht voor je staat, twee kanten: voor en boven.
Die maken een hoek.
Dus:

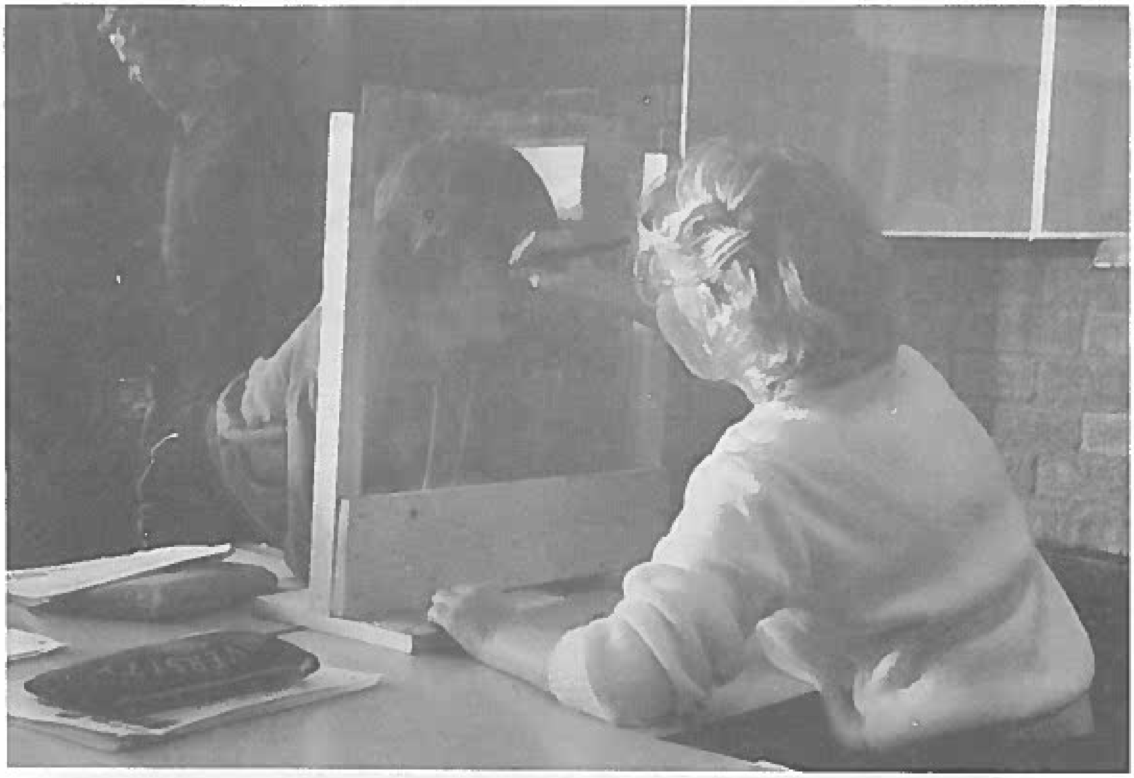


Er is in dit pakketje niet gewezen op de bundel lijnen die het oog met de punten van de balk verbindt, zoals dat op de ets van Dürer en bij het loket van George gebeurt. (Toegelicht na het citaat).
Juist die stap is essentieel: door zo'n benadering wordt het mogelijk om als buitenstaander te kijken naar het systeem object - oog - tekening.
Voor het goed begrijpen van perspectieftekenen moet je zorgen dat *jouw* oog even niet deel is van het te onderzoeken verschijnsel.
Pas door niet naar de vrouw alleen te kijken, zoals de man op het plaatje doet, maar door de hele situatie te bekijken, begrijp je iets van perspectief .

Die blikwisseling ontbreekt in Bouwwerk. Wel wordt er steeds een beroep gedaan op "goed kijken", maar dat geeft nu juist de storing: goed kijken is iets anders dan fotograferen."

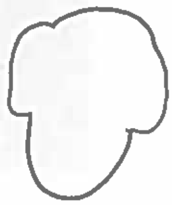
Mentaal verplaatsen.

Hier is voornoemd loket in gebruik:

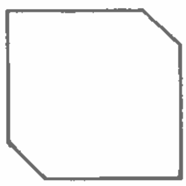


Het gaat om een opgave uit het 1e klas pakket "Zie je wel" dat ook najaar '78 voor het eerst werd uitgeprobeerd.

*Opdracht 6*
*Teken op een glasplaat elkaars hoofd. Begin zo:*
*Let ook eens op de plaats waar je de ogen zet.*

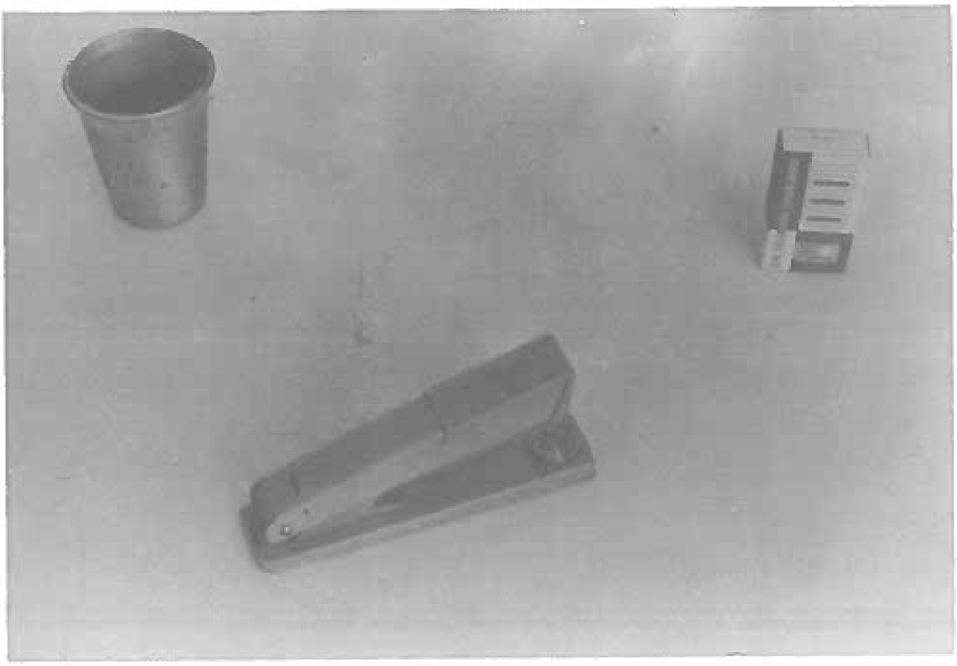


*Rob heeft op de glasplaat een kubus getekend:*
*Zijn tekening ziet er zó uit:*
*Hij heeft alleen de buitenste lijnen getekend.*
*Maak de tekening af.*



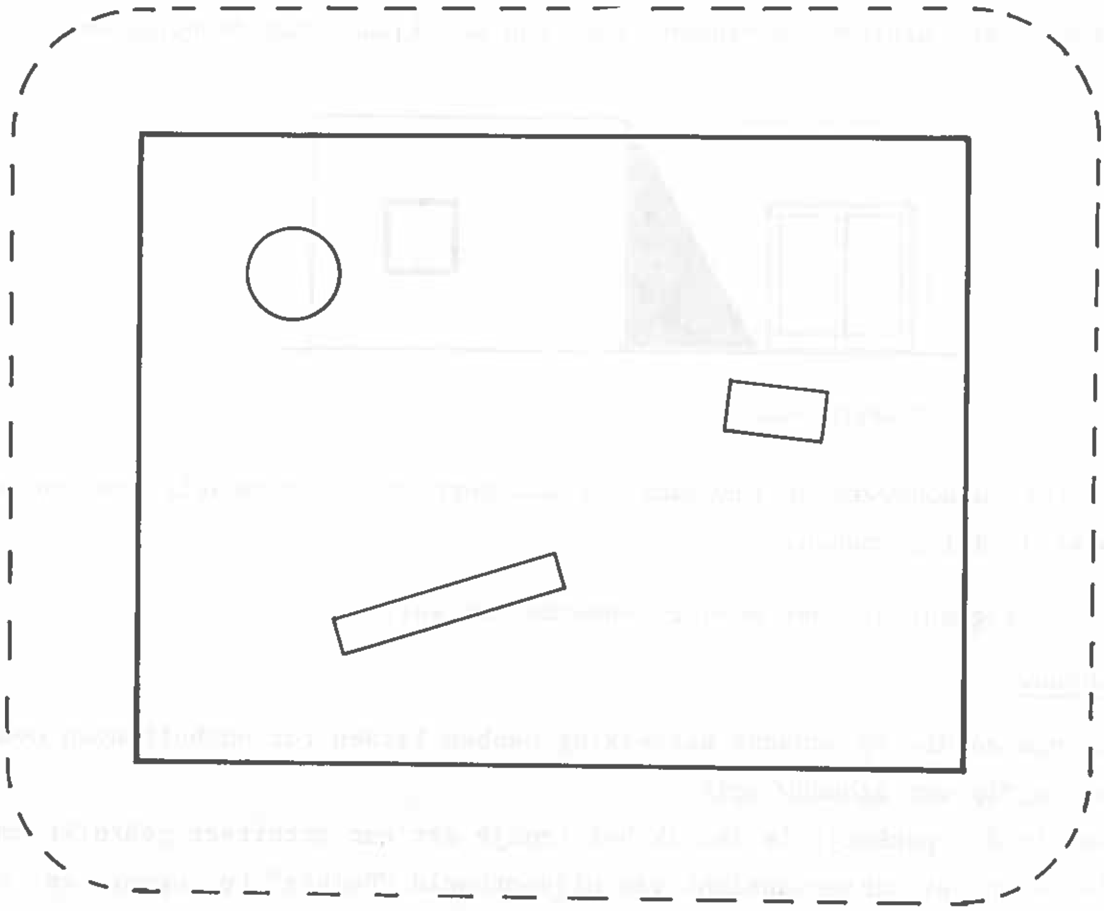
Dit is precies wat Dürer ons met zijn gravure leert. Het centrale idee van het perspectieftekenen is hier volledig aanwezig: de tekening (hier op de glasplaat) kan beschouwd worden als een venster, waardoor de bedoelde werkelijk-

heid gezien wordt. Tijdens het werken met deze glasplaat ben je je niet bewust dat in feite steeds de lijn oog - object gesneden wordt met het vlak waarop je tekent. Daarvoor maakt het eigen oog te veel deel uit van de hele situatie.
In "Met het oog op diepte" wordt op blz. 48 een stap verder gegaan. De lichtstraal wordt nu concreet gemaakt door een touwtje dat steeds van het object naar één vast punt wordt gespannen. Dat vaste punt neemt de rol van het eigen oog over en zo kunnen we ons zelf buiten het gebeuren houden. Dat is in zekere zin een stap van de directe beleving vandaan, maar juist daardoor is het mogelijk meer over de situatie na te denken.
Het in gedachten uit een situatie kunnen stappen en er "mentaal omheen lopen" is een belangrijke zaak voor het wiskundig en vooral meetkundig denken. Stel-je-voor-dat, neem-eens-aan-dat, het zijn termen die eindeloos vaak opduiken bij het wiskundig redeneren.
In "Zie je wel" komt dit mentaal verplaatsen heel direct aan de orde op blz. C3 en C4.
Drie voorwerpen staan op tafel:

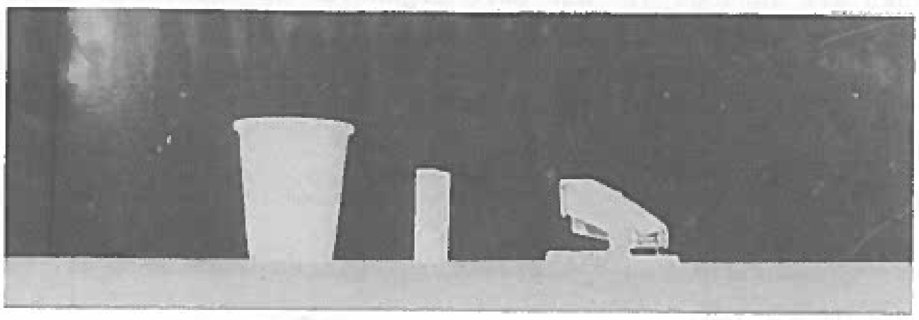


En dan de opgave:

*Van boven gezien:*



*Loop (in gedachte) rondom de tafel van de tekening.*

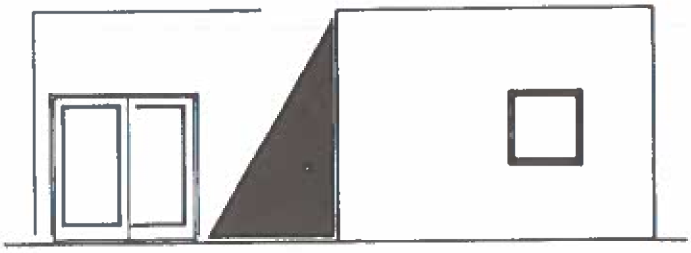


*Waar sta je en in welke richting kijk je als je ziet wat op deze foto staat? Geef dat met een pijltje aan in de tekening.*

Het is ook duidelijk dat hier gewerkt wordt met de begrippen zijaanzicht, bovenaanzicht zonder dat die zo expliciet genoemd worden. In MHOOD en LOS zijn ook op bijna elke bladzijde de toepassingen hiervan te vinden.

Schaduw en Bouwwerk.

In "Belvia" komt een bouwtekening van een bungalow voor. Zoals gebruikelijk in bouwtekeningen is in het zijaanzicht diepte gesuggereerd door schaduw aan te geven op een achteruitspringend deel van de zijkant van de bungalow.



ZIJGEVEL LINKS

Daar wordt in Bouwwerk op ingegaan. De wat dorre blokjesbouwsels moesten een en ander duidelijk maken.

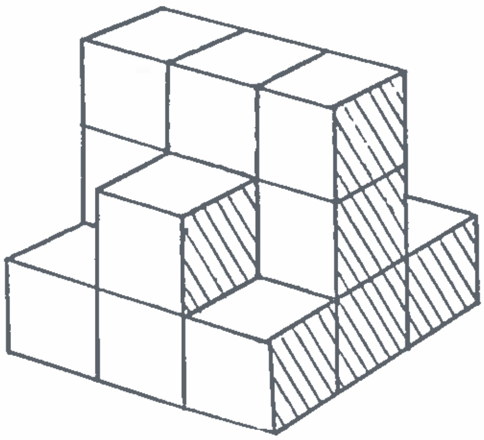
Weer een fragment uit het eerder genoemde artikel:

Schaduw

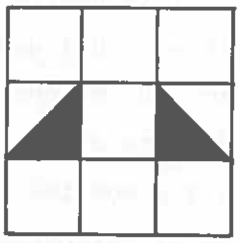
De opgaven die op schaduw betrekking hebben leiden tot onthullingen over het begrip van schaduw zelf.
Fout in dit pakketje is dat ik het trucje dat een architect gebruikt om diepte in het achteraanzicht van bijvoorbeeld "Belvia" te suggereren, zo breed uitspin.
Voor goed met schaduw kunnen werken is heel wat meer nodig:
- begrijpen dat schaduw als het ware tegenover de lichtbron is te vinden.
- begrijpen dat licht "rechtdoor" gaat.
- begrijpen dat ..... (vul zelf alle eigenschappen van parallelprojectie maar in).

Een voorbeeld uit Bouwwerk.

Teken het vooraanzicht van dit drie verdiepingen hoge bouwsel. Geef met schaduw de diepte aan.



En dan tekent een leerling:



Een kras voorbeeld? Nee hoor, je moest de diepte aangeven en op de naar achter liggende stukken is dus schaduw getekend.

In LOS is het onderwerp schaduw eerst uitvoerig geïntroduceerd. Schaduwen worden na enige tijd wel begrepen als plekken waar het rechtdoorgaande licht *niet* komt. Daarvoor moest het onderwerp veel opener, minder op beperkte doelen gericht, worden aangeboden. Daarbij komt nog dat zo'n benadering aanleiding geeft tot veel meer ruimtelijke meetkunde dan in "Bouwwerk" te vinden is.
In "Schaduw en Diepte" gaat het schaduwgedeelte vooraf aan het perspectief. Tekeningen maken bij schaduwverschijnselen maken het in bepaald opzicht namelijk eenvoudiger: je bent namelijk vanzelf al onafhankelijke waarnemer. Mentaal uitstappen is niet nodig. Het werken met de rechtlijnige lichtgang kan zodoende vóór het lastiger perspectiefgedeelte goed beoefend worden.
In beide gevallen gaat het om projecties, alleen is de richting van het licht verschillend.
In de praktijk functioneert bij het onderzoek van perspectief-zien de lichtrichting niet. Euclides dacht zich de richting ook van het oog naar object, alsof het oog het object van een afstand af aftast.

Verschil in context.

Wie de voorbeelden uit "Bouwwerk" legt naast "Schaduw en Diepte" merkt nog een ander verschil. In "Bouwwerk" wordt het tekenen gedaan aan de hand van de simpele balk, maar in "Met het oog op diepte" is gekozen voor veel rijkere afbeeldingen. Er is niet gewerkt met modellen als balken en kubussen maar met echte objecten en foto's.
Deze benadering via een rijkere context biedt de leerlingen in feite veel meer houvast en .... mogelijkheden tot zelf onderzoeken. Vooral in de eerste bladzijden van alle drie de gedeelten zijn de opgaven ook erg open gehouden en niet direct op beperkte doelen gericht. Zo gaat een brede actieve oriëntatiefase vooraf aan de nu veel effectievere constructieopgaven als nr. 25 (de schaduw van de paaltjes) en nr. 111 (het tekenen van de stokken op het scherm).

## Experimenten.

Bij de eerste experimenten in september 1979 heette het pakket in zijn geheel "Licht op Schaduw". Toen werden in drie verschillende klassen na elkaar steeds verbeterde versies gebruikt. In Wiskrant 20 verscheen een beschrijving hiervan: "In de schaduw van de meesters". Daarna werd een voorlopige versie op kleine schaal verspreid, o.a. via regionale bijeenkomsten van leraren.
In het algemeen werd positief op de inhoud gereageerd, maar de moeilijke invoerbaarheid (wegens het losstaan van het examenprogramma) werd herhaaldelijk genoemd.
In dit kader is het goed om te vermelden dat een wiskunde sectie (die van het Ignatius College in Purmerend) voor de eigen school een meetkundeboekje produceerde "En toch zie je diepte", waarin o.a. met materiaal uit "Schaduw en Diepte" een flink stuk echte ruimtemeetkunde binnen het normale programma werd gebracht.
Intussen was het trouwens niet de taak van het IOWO alleen leerstof te produceren die gericht is op het bestaande examen.
De nu gereed gekomen versie wijkt slechts in details van de eerder gepubliceerde versie af, voornamelijk op gebied van de lay-out. Er is wat meer ruimte om in te vullen. Voor die vorm werd gekozen omdat een pakket als dit haast niet anders dan als invulboek realiseerbaar is, zoveel moet er in plaatjes en foto's gemeten en getekend worden.

# Meetkunde in de zon en bij kunstlicht

(Overdruk uit de Nieuwe Wiskrant, jrg. 1, nr. 1 - proefnummer).

**A.J. Goddijn.**

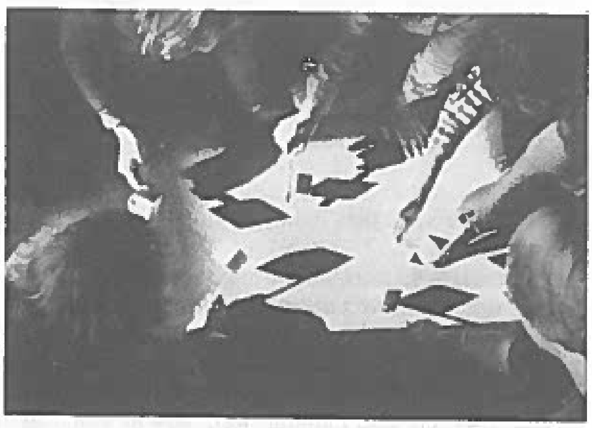
*Summary*

*"Shadows and perspective" is intended for use in the 8th grade. However, various problems in this booklet are an introduction to fine aspects of classical geometry and could be used in more advanced high school classes. Shadows cast by cubes and squares are examined while using natural and artificial light. The conjugate diameters of an ellips are discovered while watching the shadows of a turning windmill. The correct distance to regard a painting is determined by purely geometric means and it is shown by the same method that all quadrangles can be obtained as projections of a square. A particular projection of a cube gives new insight into the orthocenter and the Torricelli point of a triangle.*
*The article is a part of the teacher's guide to "Shadow and perspective".*

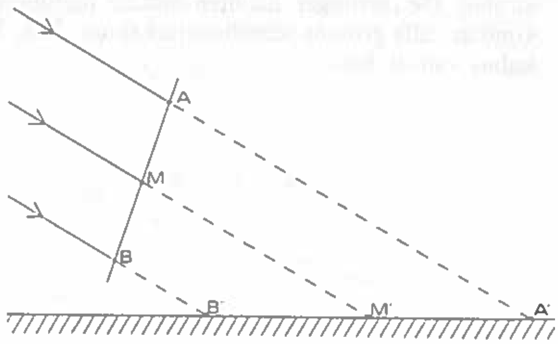
## Inleiding.

IOWO of OW & OC, zon of regen, het doet er voor de Wiskivonpakketjes niets toe: ze blijven verkrijgbaar. Zelfs verschijnen er nog nieuwigheden, juist op de valreep.
De definitieve versies van "Klein en Groot" en "Schaduw en diepte" liggen nu of zeer binnenkort bij IVIO, met docentenhandleiding. "Schaduw en diepte" is de titel van het drieluik Licht op schaduw/ Evenwijdigheden/Met het oog op diepte.
In de docentenhandleiding van "Schaduw en diepte" zijn behalve praktische wenken en beschrijvingen van ervaringen in de klas, ook wat meer achtergronden opgenomen. O.a. een stukje historie en een fraai brokje klassieke meetkunde dat uit de leerlingentekst voortvloeit, maar in de 2e klas MAVO-LBO niet direct aan de orde zal komen. Dat gedeelte uit de docentenhandleiding is ook goed verteerbaar voor niet-gebruikers van het pakket. De belichte onderwerpen zouden echter prima een plaats kunnen hebben in een bovenbouwprogramma waarin meetkunde serieus genomen wordt.

## Allerlei in de zon.



Deze leerlingen onderzoeken de schaduwen die een doodgewone kubus op de vloer kan werpen. Bij zonlicht zijn dat alleen zeshoeken en vierhoeken en een vraag uit het pakketje is dan ook: "Waarom eigenlijk geen vijfhoeken?" Het valt niet mee uit het blote hoofd zomaar een afdoend antwoord te vinden op die vraag, maar de leerlingen die het natuurlijk met een echt kubusje in de oktoberzon deden, geven een aanwijzing: als je de kubus beweegt zie je altijd twee hoeken tegelijk verdwijnen of ontstaan. Voor hen is dat een afdoende verklaring, maar we graven nu even dieper.
De verdwijnende hoeken blijken tegenover elkaar te liggen en daarom denken we direct aan symmetrie. Op de foto is te zien dat alleen puntsymmetrie in aanmerking komt voor nader onderzoek.
We nemen eens twee punten A en B, puntsymmetrisch ten opzichte van M en laten we eens kijken wat de zon er mee doet. Schaduwen van punten geven we met een extra tekentje verder aan, hier dus A', B' en M'. We beschouwen de zon als een bron van evenwijdige lichtstralen, de zon is als het ware een oneindig verre puntvormige lichtbron. Dat is een idealisering van de werkelijkheid, die de zaken hanteerbaar maakt.

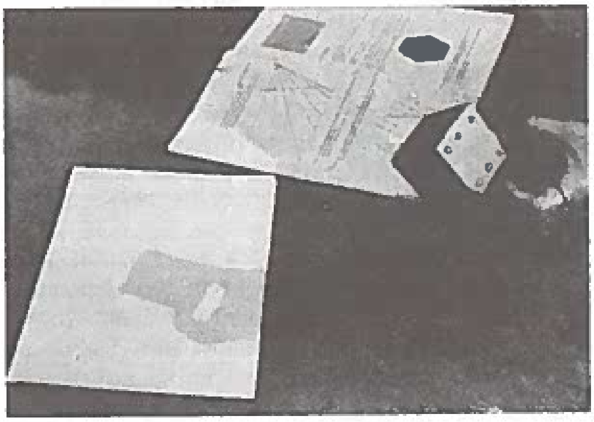



Veel meetkundekennis is niet nodig om vast te stellen dat A'M' gelijk is aan B'M'. En A', M' en B' liggen óók op één lijn, met andere woorden: de puntsymmetrie blijft behouden bij schaduwvorming door de zon.
De gevolgen van deze vaststelling gaan ver: Een kubus is puntsymmetrisch, zijn schaduw dus ook. Weg vijfhoeken!

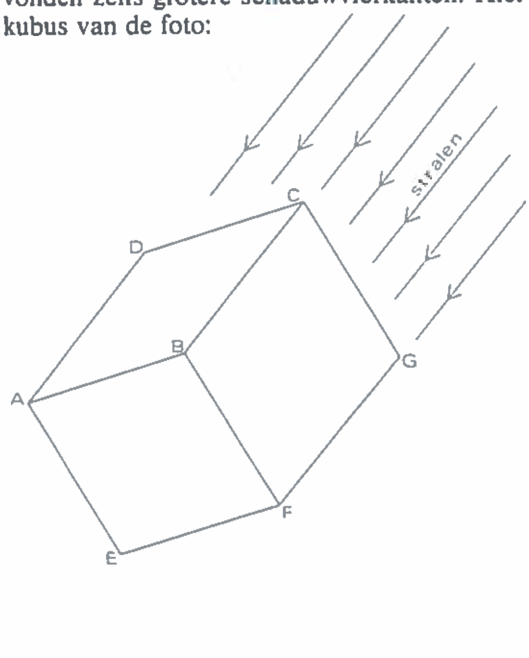
Twee evenwijdige lijnen zijn puntsymmetrisch rond elk punt midden tussen die lijnen. Als de lijnen niet evenwijdig aan de stralen van de zon lopen, moet zoiets ook in het schaduwbeeld gelden.

Voor we verder gaan nog een andere basistechniek. De stralen die door een lijn lopen vormen een vlak. De snijlijn van dit vlak met de vloer is de schaduw, dus ook een lijn. Met twee vlakken door de twee evenwijdige lijnen van zoëven, zien we natuurlijk twee evenwijdige schaduwlijnen.
Deze benadering werkt ook als de stralen uit een punt komen. De vlakken hoeven dan echter niet evenwijdig te zijn.
De puntsymmetrie overleeft deze schaduwvorming in het algemeen ook niet. Wanneer trouwens wel? Dat kan uitgeknobbeld worden aan de hand van het gedeelte "Afstanden" uit het leerlingenboekje. Daar wordt onderzocht wat een lamp en de zon doen met een gespannen touw, waarin op gelijke afstanden van elkaar knopen gelegd zijn.

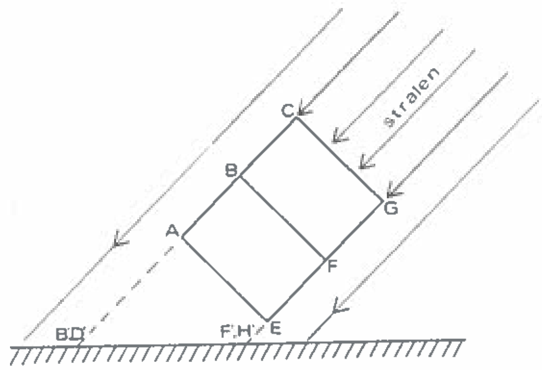
## Vierkante schaduwen?



Hier wordt een kubus schuin gehouden. Toch is er een vierkante schaduw ontstaan. Bij het ontwerpen van het pakket had ik alleen gerekend op de voor de hand liggende methode: de kubus met een van z'n zijvlakken naar de zon en een vel papier loodrecht op de stralen. De leerlingen dachten minder rechtlijnig en vonden zelfs grotere schaduwvierkanten. Hier is de kubus van de foto:




De zonnestralen lopen evenwijdig aan de vlakken ABCD en EFGH. Zo leveren alleen D, B, F en H hoeken in de schaduw op. Neem eens DB loodrecht op de stralengang, de schaduwkolom heeft dan een rechthoekige doorsnede van 1 bij $\sqrt{2}$ meter (of centimeter, dat doet er niet toe). Van opzij gezien:



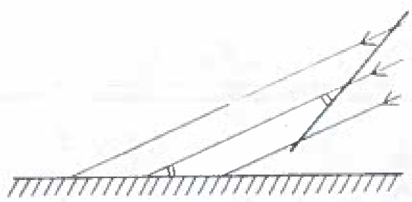

Als $\alpha$ 45° is, wordt B'F'H'D' een vierkant. Het is ook mogelijk BD niet loodrecht op de stralen te houden. Dan moet $\alpha$ iets groter worden genomen. B'F' wordt kleiner. We hebben dus het grootste vierkant gevonden!

## Schaduw van vierkantjes.

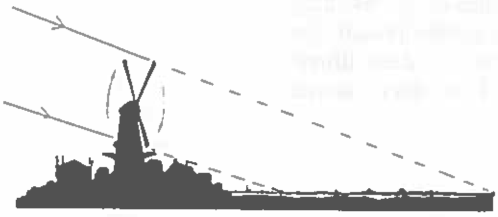
Het ruimtelijk inzicht is even zwaar op de proef gesteld en we houden het nu maar eenvoudig: een vlak vierkantje en zijn zonneschaduw.
Twee vragen uit "Schaduw en diepte":

44. Maak een vierkant van karton. Probeer wat voor verschillende schaduwen je er op de grond mee kunt maken. Teken de vormen die je kunt maken.
45. Hoe moet je het vierkant ten opzichte van de grond houden om een vierkante schaduw op de grond te krijgen?

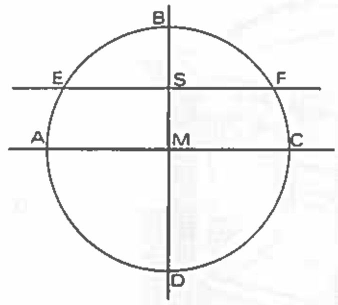
Eerst even vraag 45. We zien direct: evenwijdig aan de grond. Wie minder doorkneed is in de klassieke meetkunde ontdekt, proberend, meer. "Zó schuin" kon ook volgens sommige leerlingen. Ik schets het idee, verdere uitwerking is overbodig.



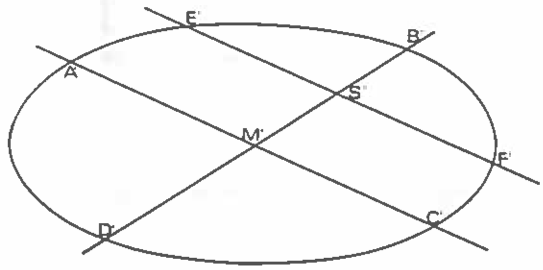
Op een duistere plek in het planimetrieboek heette dat "antiparallel".
Nu vraag 44.
Het zijn allemaal parallellogrammen. Uitgaande van 1 bij 1 meter maak je 's avonds een rechthoek van 1 bij 1000 meter, maar niet van 2 bij 2 meter. Dat is duidelijk. Maar waarom lukt een ruit met diagonalen van 1,41 en 2000 meter wel, terwijl een ruit met diagonalen 1,42 en 1000 meter zich niet laat vormen? Draai het vierkantje eens wat om zijn as. Ziet u dat de oppervlakte van de schaduw constant is?



De diagonalen van het vierkant draaien als molenwieken rond. En de schaduwen van de wieken gaan hun eigen gang in het zonbeschenen veld. Van ver komt de schaduwpunt snel dichtbij, steekt langzaam over en gaat snel weer terug. De baan is een ellips. Kunnen we zo elke twee lijnen door het midden van de ellips als schaduwen krijgen? Nee, bij één schaduwlijn lijkt de andere al vast te liggen. Maar hoe?
Hier zijn de wieken – de diagonalen van het vierkant – met omgeschreven cirkel en een lijn evenwijdig aan AMC.




Natuurlijk is ES gelijk aan SF. Nu de schaduw. De schaduw van de cirkel is de bewuste ellips.



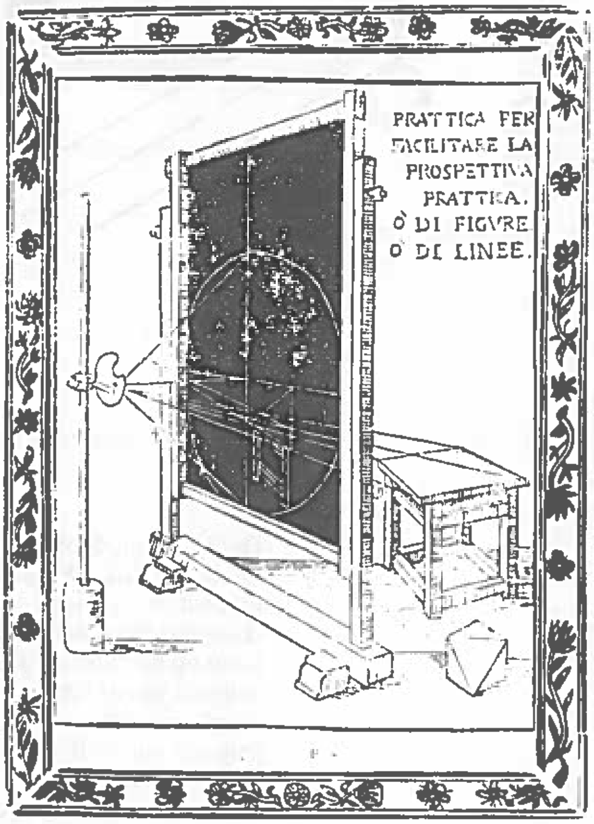

Maar nu is E'S' gelijk aan S'F'. Je kunt ook zeggen: laat de koorde E'F' over de ellips schuiven, steeds evenwijdig aan A'C'. Dan doorloopt het midden van de koorde een lijn, n.l. B'D'.
Uitgaande van koorden evenwijdig aan B'D', vinden we A'C' terug! Twee zulke lijnen heten toegevoegde middellijnen van de ellips. Uit de analytische meetkunde zal dat voor velen nog wel bekend zijn, al zullen weinigen ze op deze manier in de buitenlucht hebben opgemerkt.

Even een opgave tussendoor. Neem een vaste ellips. De oppervlakte van een parallellogram, gevormd door de raaklijnen die evenwijdig zijn aan twee toegevoegde middellijnen, is gelijk aan het produkt van de assen van de ellips. Met het voorgaande in het achterhoofd is het niet moeilijk, maar met analytische meetkunde is het een hele kluif!

We zijn nog niet klaar met ons vierkantje. We moeten nog weten welke ellipsen we kunnen krijgen als schaduw van een cirkel met middellijn $\sqrt{2}$ meter. Denk eens een bol met die middellijn om de cirkel. De schaduw van de bol is weer een ellips, nu met korte as $\sqrt{2}$ en lange as in ieder geval méér meter. Maar de schaduw van de oorspronkelijke cirkel raakt aan die ellips (waarom?) en we zien snel: de schaduw van de cirkel is een ellips met korte as *kleiner* dan $\sqrt{2}$ en met lange as *groter* dan $\sqrt{2}$.
Aan de lezer om te bewijzen dat al deze ellipsen inderdaad als schaduw mogelijk zijn. Daarmee is de schaduw van het vierkantje grondig bekeken!

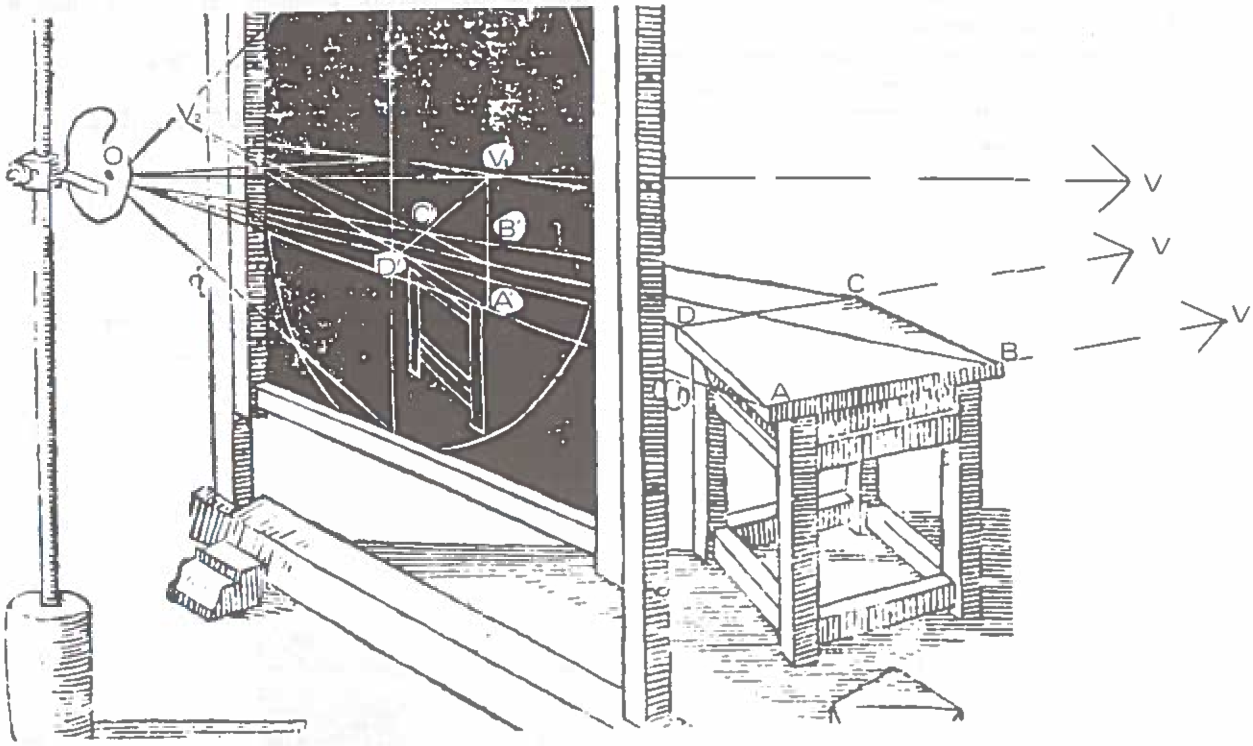
## De juiste afstand tot een schilderij.

Genoeg schaduw en zonneschijn. We gaan over op kunstlicht. Bij een dichtbije lichtbron gaat het niet meer om parallelprojectie maar om centrale projectie. Puntsymmetrie is niet meer behouden en het voorgaande kunnen we beter vergeten.
Centrale projectie wordt ook gebruikt bij perspectieftekenen en daar gaan we even op in om een paar sleutelbegrippen toe te lichten. Eerst de kunst, dan het licht dus en we slaan het leerboek van Giulio Trolli da Spinlamberto uit 1672 open op blz. 21.

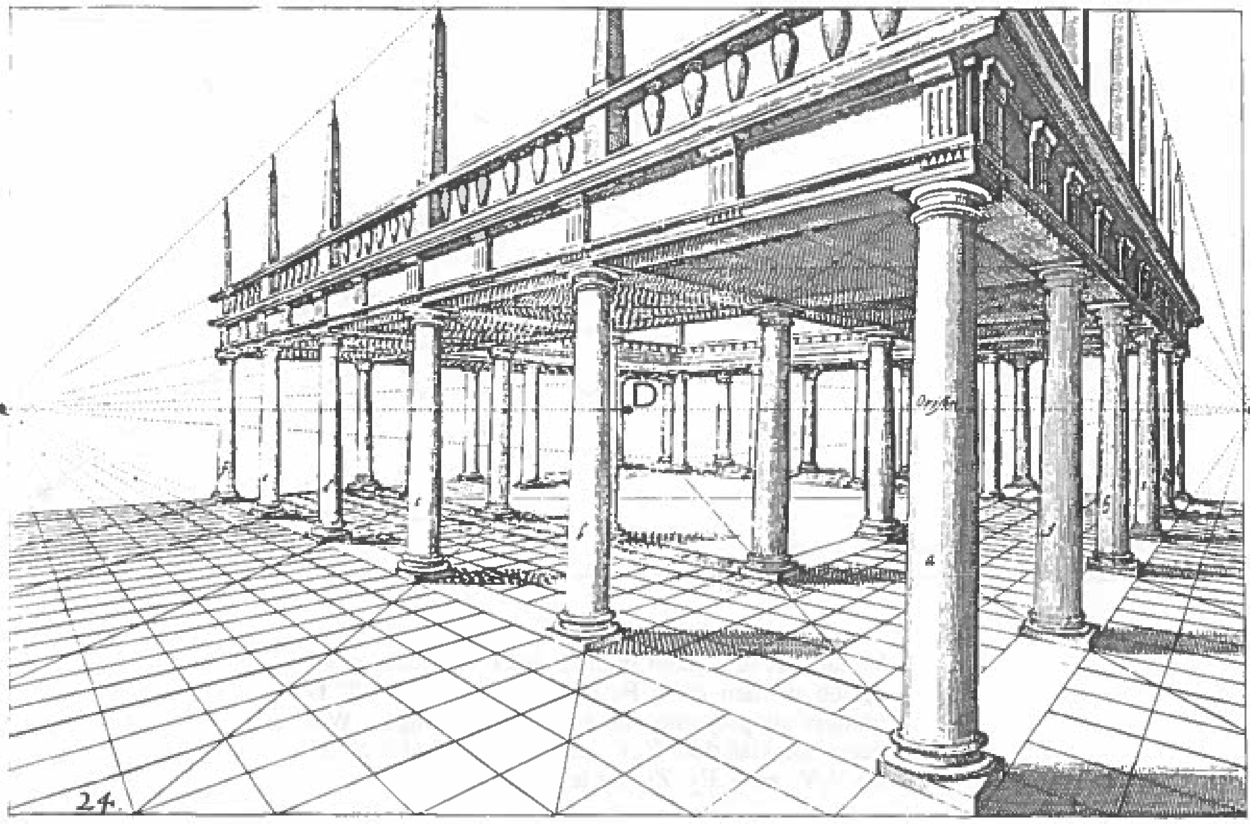



Het "oog" in het palet links is door lijnen met de – laten we aannemen: vierkante – tafel verbonden. Het patroon van de snijpunten met het vlak van tekening (het z.g. tafereel) vormt de gezochte afbeelding van de tafel. Vanuit het gaatje in het palet gezien ziet de tekening er precies uit als de tafel zelf. Precies in de richting van de echte linkerpoot zie je de linkervoorpoot op de tekening. En zo voor alle onderdelen.

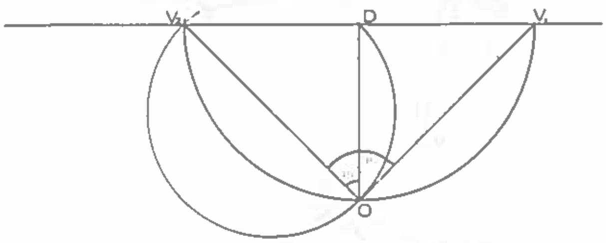
Vanuit dat ene punt gezien, zie je alles op de tekening precies onder dezelfde hoek als de werkelijkheid. De bedoeling van het perspectieftekenen is, deze illusie zo goed mogelijk uit te voeren. Een deel van de illustratie vergroten we even.




Het blad van de vierkante tafel ABCD vinden we al op de tekening: A'B'C'D'. AB en DC zijn in werkelijkheid horizontaal en evenwijdig. Denk ze verder doorgetrokken naar rechts. Hun oneindige verte V komt op het tafereel terecht als het punt $V_1$, dat is het snijpunt van de lijn door O (het "oog"), die evenwijdig loopt met AB en DC, met het tafereel. $V_1$ is het snijpunt van A'B' en D'C'. Zo vinden we ook $V_2$ als snijpunt van B'C' en A'D'. $V_1$ en $V_2$ heten verdwijnpunten. Ze zijn de projecties van de oneindige verten van bundels evenwijdige lijnen. Zo is ieder punt P van het tafereel op te vatten als verdwijnpunt van een geschikte bundel evenwijdige lijnen, n.l. de lijnen evenwijdig aan OP. $V_1$ en $V_2$ liggen nog op ooghoogte. De punten op ooghoogte in het tafereel vormen de horizon. U begript nu wel dat de hoek $V_1 OV_2$ 90° moet zijn en we zijn klaar om met kennis van zaken een perspectieftekening te bekijken uit "Perspective", een leerboek van Jan Vredeman de Vries uit 1599.



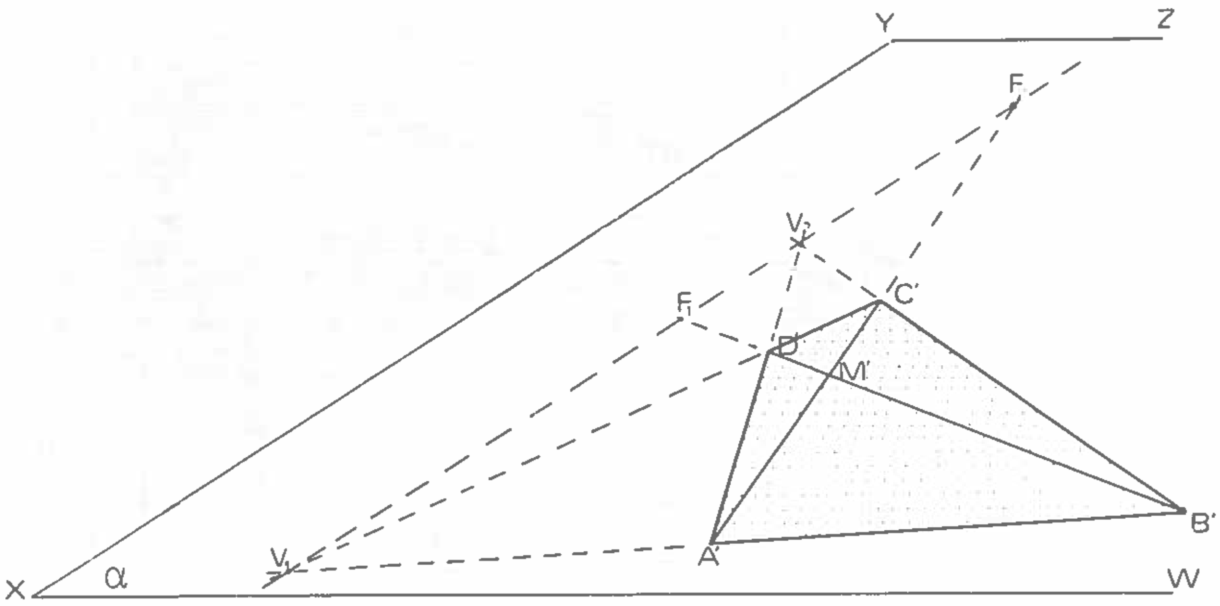

Een tegelvloer, vierkante tegels natuurlijk.
Hoe moeten we deze tekening bekijken? Of: waar is O? In ieder geval de horizon $V_1V_2$ op ooghoogte houden. Maar we willen ook $V_1V_2$ onder 90° zien. De mogelijke punten O liggen dus op een halve cirkel met $V_1V_2$ als middellijn. Van boven gezien:



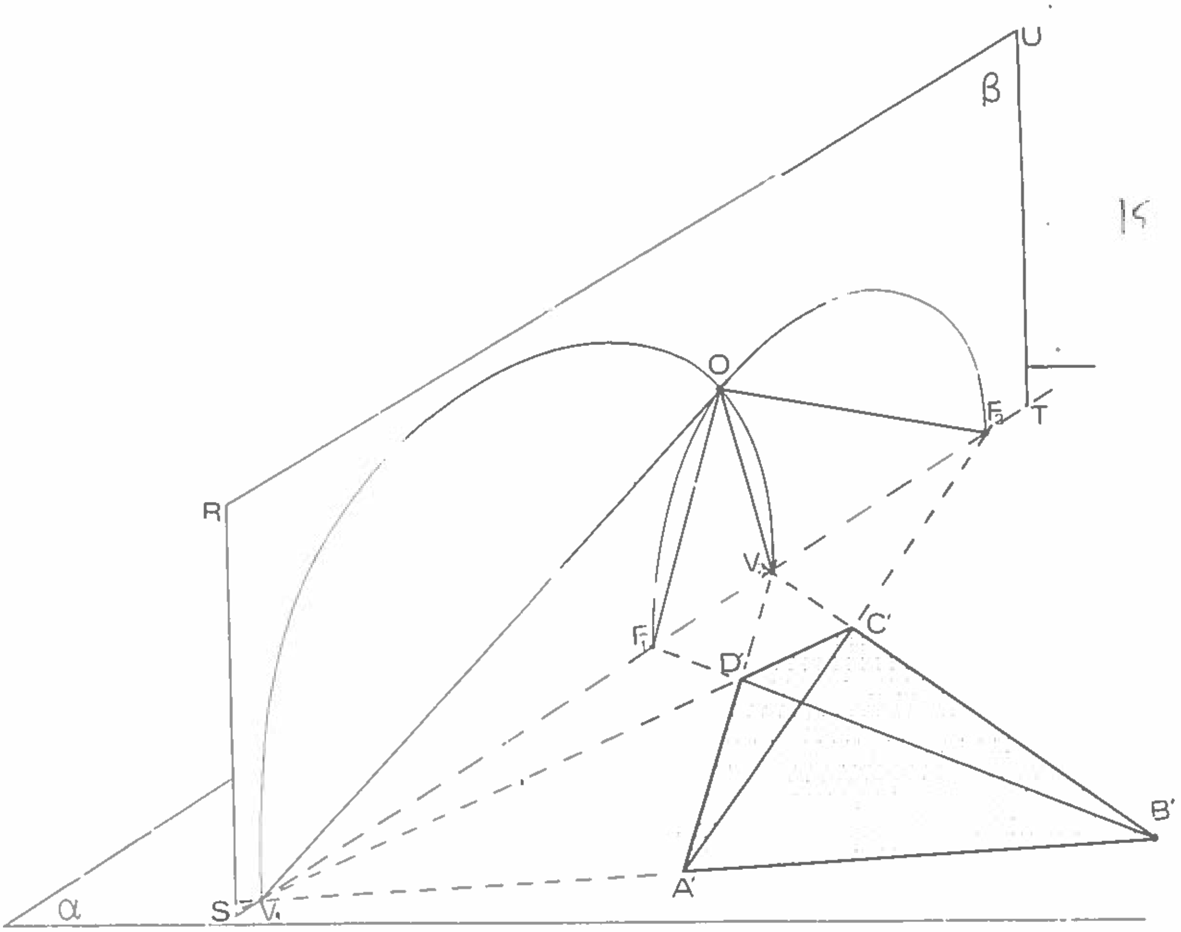

Maar $V_2D$ moet onder 45° gezien worden. Dat geeft ook een cirkelboog aan mogelijkheden. Natuurlijk is het snijpunt van de twee cirkels ons gezochte punt. Vroeger zouden we deze prent uitvergroten en op een dubbele pagina oude Wiskrant drukken. Nu moet het oog wel erg dichtbij. Maar probeer het zelf eens met een andere plaat. Het diepteëffect van de tekening is veel sterker vanuit het goede oogpunt.
Moraal van dit verhaal: er is bij een perspectieftekening niet alleen één goede afstand, er is eigenlijk maar één goed standpunt: het oogpunt van waaruit de tekening gemaakt is.

## Vreemde vierhoeken.

De vierkante tegels hebben op de tekening allerlei rare vormen gekregen: heel smal bij de horizon en vreemd uitgerekt in de hoeken. Het lijkt wel of alles projectie van een vierkant kan zijn en dat gaan we nu dan ook bewijzen.
Eenzelfde probleem is: welke schaduwen kan een vierkant bij puntvormige nabije lichtbron opleveren? De bijbehorende meetkunde is hetzelfde, al lijkt de volgorde oog-tafereel-vierkant nu verwisseld tot lamp-vierkant-schaduw.
In de volgende tekening is een willekeurige vierhoek A'B'C'D' getekend. Dat is de schaduw. Denk het vlak $\alpha$, gesuggereerd door WXYZ horizontaal. $V_1$ en $V_2$ zijn de verdwijnpunten van de zijden, $F_1$ en $F_2$ van de diagonalen.

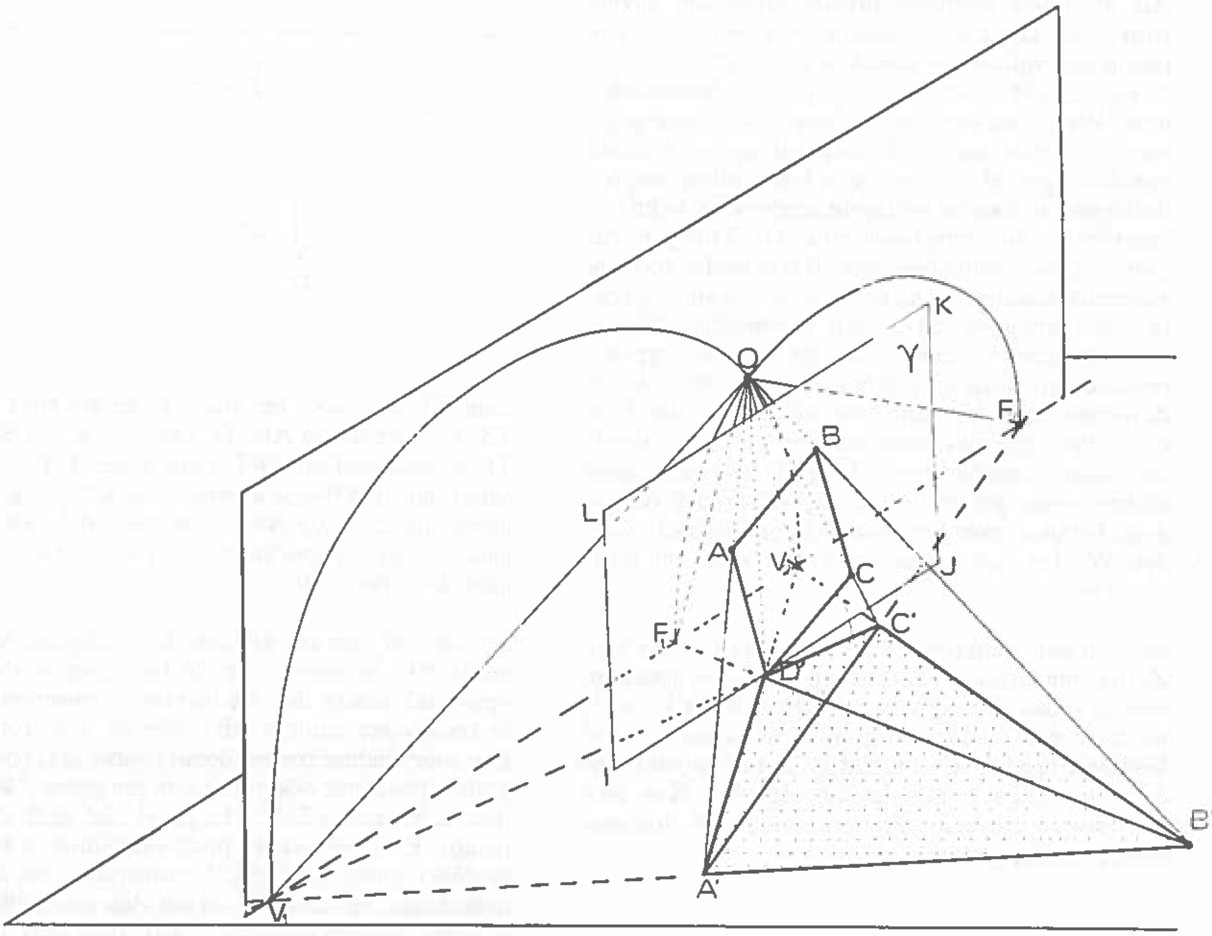



Vanuit het te zoeken punt O moet $V_1V_2$ onder 90° gezien worden en $F_1F_2$ ook. We willen A'B'C'D' immers als projectie van een vierkant krijgen. Wel, neem een vlak door $V_1V_2$ en trek daarin halve cirkels op $V_1V_2$ en $F_1F_2$. Zie de tekening.




Gesuggereerd is dat dat vlak β (met RSTU aangegeven) loodrecht op α staat, maar dat is niet nodig. O is in ieder geval gevonden, er is zelfs wat variatie mogelijk:

O ligt op een cirkel rond de horizon $V_1V_2$. Neem nu een vlak $\gamma$, evenwijdig aan $\beta$; daar leggen we het vierkant in. Voor het gemak nemen we $\gamma$ door D', dat maakt de tekening waarin $\gamma$ door IJKL gesuggereerd is wat overzichtelijker.

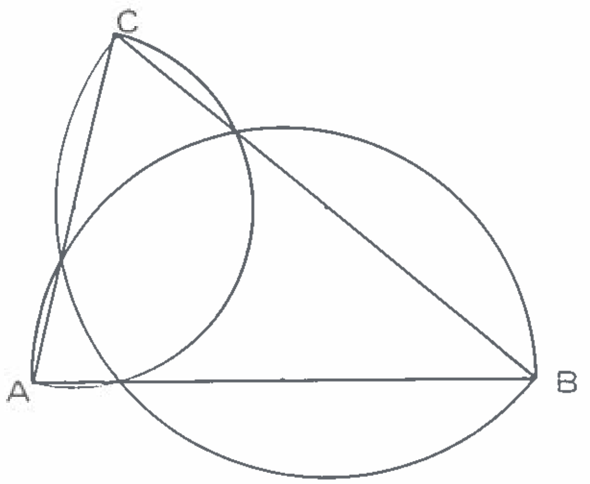



De lijnen OA', OB' etc. bepalen nu A,B etc. in vlak $\gamma$. Hoe ziet ABCD er in werkelijkheid uit?
We hebben gelet op hoeken, dat gebruiken we dan nu ook maar: AB is evenwijdig aan VO. Kijk maar naar het vlak $OV_1B_1$. Dat snijdt $\beta$ en $\gamma$ in respectievelijk $OV_1$ en AB. Dan is AB // $OV_1$. Zo ook BC // $OV_2$. Maar dan is AB $\perp$ BC, want $OV_1$ en $OV_2$ zijn loodrecht. Voor de andere zijden en de diagonalen bewijst men soortgelijke zaken. Kortom: ABCD is vierkant. Maar nu zijn we klaar. A'B'C'D' was een willekeurige veelhoek, die nu schaduw van een vierkant blijkt te zijn. Nog een opgave: de twee cirkels snijden elkaar loodrecht. Waarom?

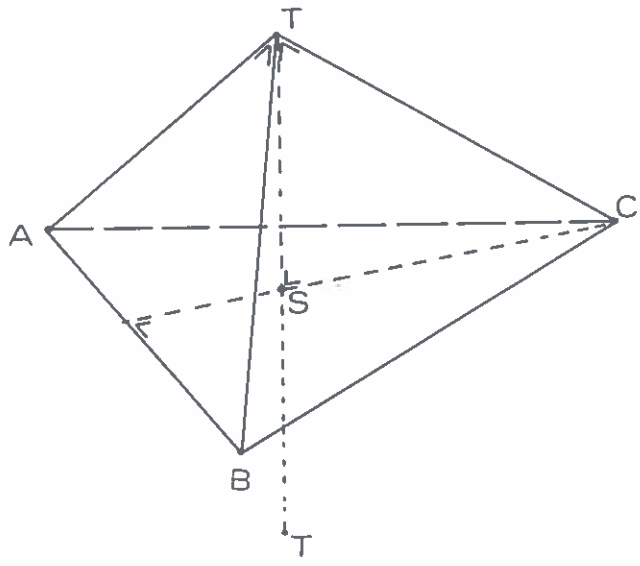
## De kubus, nu beschouwd als willekeurige driehoek.

Nu elke vierhoek er als vierkant uit kan zien, is het hek van de dam. Op een regionale bijeenkomst werden ook vijfhoeken ontdekt als schaduw van een kubus. Als de nabije lichtbron precies langs één zijvlak strijkt, dan kan dat. Natuurlijk proberen we nu een regelmatig vijfhoekige schaduw te krijgen.
Neem een kubus van zeg 10 cm bij een hoofddiagonaal. We projecteren op een vast vlak. Twee gegevens, de windrichting en de steilheid bepalen de stand van de diagonaal. Je kunt nu de kubus alleen nog om de diagonaal draaien: het derde gegeven. De lichtbron moet in het nu vastgelegde vlak ABCD liggen, dat geeft nog twee vrijheidsgraden. Het geheel is door vijf gegevens bepaald. En nu moeten we dus vijf variabelen zo vastleggen dat er een regelmatige vijfhoek ontstaat. Een vijfhoek is pas door zeven gegevens bepaald. Als we de grootte nog even vrij laten – d.w.z. de hoogte die we het samenstel van kubus en lichtbron boven het vaste vlak laten innemen blijft vrij – dan is dat zes gegevens die moeten kloppen. Het zou kunnen lukken, maar gezien de vijf vrijheidsgraden die we maar hebben, moet het onwaarschijnlijk geacht worden. Wie het toch probeert moet het verder zelf maar uitzoeken.

Een extreem denkbeeldig geval bewaren we tot slot: Zet de puntvormige lichtbron precies op een hoekpunt van de kubus. De donkere ruimte achter de kubus is nu door drie vlakken begrensd, die elkaar in het lichtpunt snijden. Een schaduw is een snijvlak van deze driezijdige pyramide met een vlak. Kan elke driehoek zo ontstaan? Proberen maar met driehoek ABC, voorlopig scherphoekig.

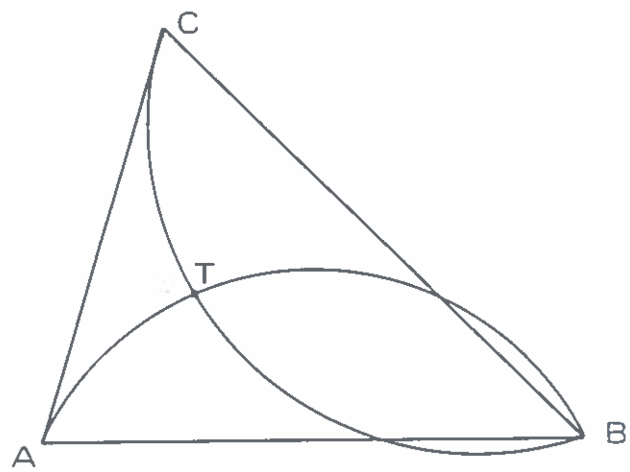



Vanwaar zien we AB onder 90°?
Dat is vanaf de bol met middellijn AB.
De drie bollen met middellijnen AB, BC en AC snijden elkaar in twee punten T en T'. Die punten voldoen. Vanuit T en T' zien we alle zijden onder 90°.




Laat TT' in S door het vlak van de driehoek gaan.
TS is loodrecht op ABCD. Dus is AB ⊥ TS.
TC is loodrecht op ABT. Dus is AB ⊥ TC.
Maar dan is AB ook loodrecht op CS. S ligt op de hoogtelijn uit C op AB. Maar natuurlijk ook op de andere twee hoogtelijnen .... Hé, die hoogtelijnen gaan door één punt!

Je kunt ook van een kleinere hoek uitgaan, bijvoorbeeld 60°; in plaats van de bol moet je dan een oppervlak nemen dat ontstaat door omwentelen van de boog waarvanuit je AB onder 60° ziet, rond AB. Een soort dichtgeknepen donut zonder gat is dat. Een grotere hoek mag ook, maar er is een grens: 3 keer die hoek is hoogstens 360°. Het geval 120° geeft een plat plaatje. Er is precies één punt waarvanuit je alle drie de zijden onder 120° ziet. Je construeert dat door de juiste bogen op AB en BC in het vlak van de driehoek te zetten. Je vindt één punt T. ATC is nu vanzelf 120°.




T is óók een bijzonder punt van de driehoek. Torricelli (ja, die van de kwikbarometer!) bewees in 1640 dat voor dit punt AT + BT + CT minimaal is. Kan de lezer dat ook? Suggestie: draai voor een ander punt T CTB rond B eens 60° naar rechts. Zo ontstaan C' en T'. Beschouw AT + TT' + T'C'.
Toch eeuwig zonde als die mooie meetkunde bestoft in de kast blijft liggen!

ACHTERGRONDEN III

# EEN PAAR STUKJES KUNSTGESCHIEDENIS PASSEND BIJ "MET HET OOG OP DIEPTE"

## Van de Oudheid tot Jan van Eyck.

In MHOOD gaat het eigenlijk om de vraag: hoe zie je wat je ziet?
De behoefte aan zo'n rationalisatie van het zien is zo oud als de meetkunde zelf. Euclides wijdde er een heel boek aan, dat hij "Optika" noemde. Grof gezegd is het een behoefte aan objectiviteit: precies willen weten wat je ziet en wat er voor bedrog via de ogen naar binnen sluipt; kortom: zelf waarnemen en kritisch over dat waarnemen denken.
Wil je een precieze waarneming van de werkelijkheid op papier of een schilderij brengen dan komt het probleem: de wereld is ruimtelijk, maar je tekening is vlak.
Een mogelijke oplossing: teken wat achteraan moet staan gewoon hoger. In Egyptische schilderingen is dat de gebruikelijke manier.
Wil je de toeschouwer als het ware bedriegen, dan is een andere techniek nodig: wat verder weg is moet dan ook op de tekening kleiner lijken, d.w.z. echt kleiner getekend worden. Zo'n techniek was in de Oudheid ook al bekend.
Van Agatharchos van Samos (± 450 voor Christus) wordt verteld dat hij voor de tragedies van Aischylos perspectieve coulissen schilderde. Hij wist

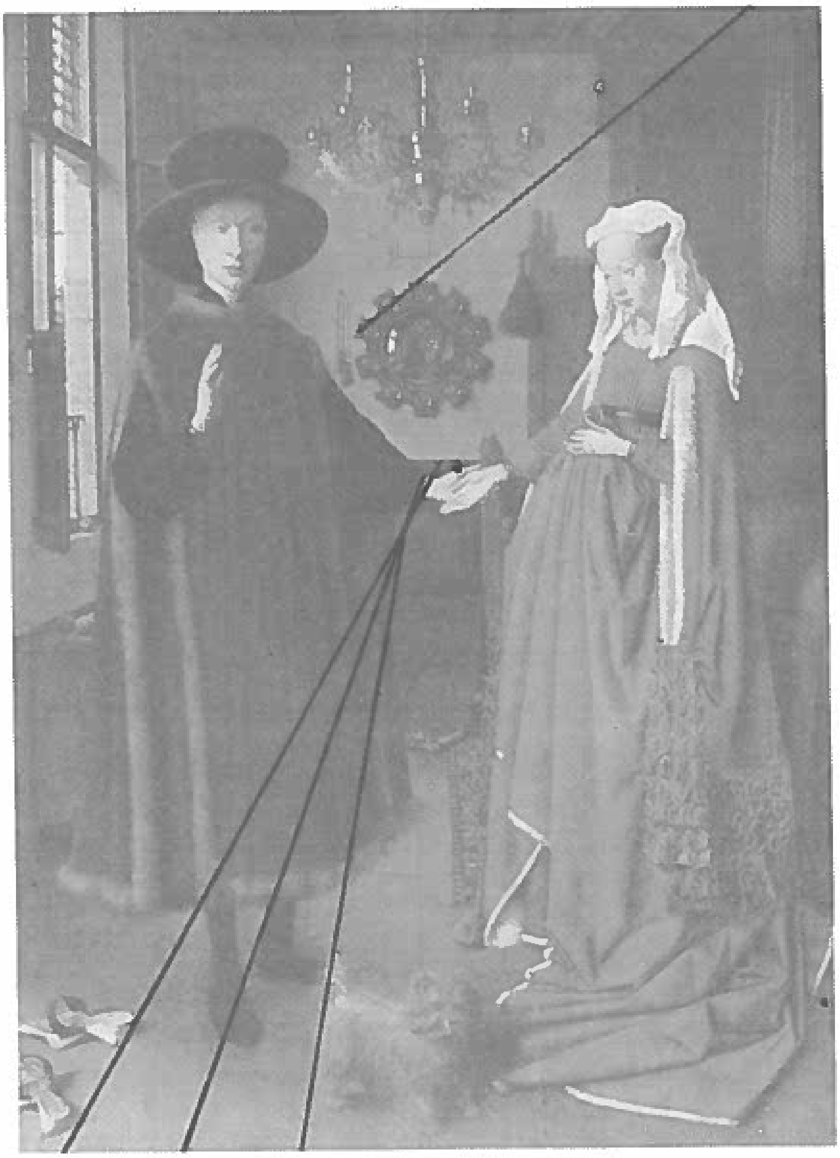
> *"hoe men lijnen in natuurlijke verhouding dient te laten beantwoorden aan de scherpe blik en de uitbreiding der stralen, na een bepaalde plaats als middelpunt te hebben vastgesteld, opdat bepaalde beelden op de geschilderde coulissen de schijn zouden geven van gebouwen en opdat wat op de vlakke voorzijde afgebeeld is, deels terugwijkend, deels naar voren springend zal schijnen."*
> *(Vitruvius, De Architectura VII, preaefatio).*

In Pompeiï zijn in sommige villa's nog fresco's te vinden waarop de Griekse perspectief-techniek is toegepast. Pompeiï werd in 79 na Christus door vulkaanas bedolven, maar ook door andere oorzaken raakte dit stukje klassieke cultuur onder het stof.
Door de middeleeuwse gelovigen werd de heidense wetenschap niet hoog aangeslagen: niet de geleerde, maar de heilige was de meest verheven mens. De waarheid behoefde niet meer door onderzoek veroverd te worden; de waarheid, dat was de geopenbaarde waarheid van het geloof, zoals dat door de kerkvaders was vastgelegd. Zelf waarnemen was niet nodig. De bijbel, Aristoteles en hun commentatoren waren voor de toenmalige wetenschap voldoende.
Een geleidelijk loskomen van deze tradities is in de 14e eeuw te merken. Giotto schildert zijn religieuze scènes op een manier waar de aardse toeschouwer meer

door werd geroerd dan de theoloog. Blijkbaar werd die persoonlijke bewogenheid al méér gewaardeerd. Er zijn natuurlijk veel meer veranderingsprocessen in de late Middeleeuwen aan te wijzen, maar de directe aandacht voor de natuur, die - de uiteraard veroordeelde Roger Bacon al rond 1260 propageerde - lijkt voor de schilderkunst van essentieel belang.

Tot welke precisie in waarnemen men weer in staat was is bekend uit schilderijen van Jan van Eyck. Door hem geschilderde planten kunnen nu in de flora worden opgezocht. Met de traditie-gebonden Middeleeuwse bloemsymbolen is dat onmogelijk.

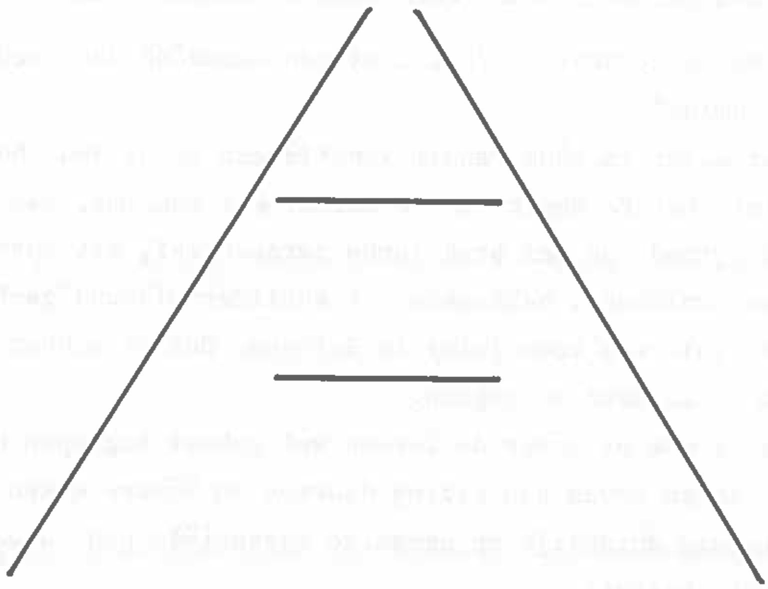
Jan van Eyck suggereert ook veel ruimtelijke werking in zijn schilderijen; zo zie je bij hem vaak door een raam heel klein - dus heel ver weg - allerlei stukken Vlaams landschap op de achtergrond van zijn schilderijen. Jan van Eyck schilderde naar zijn waarneming; nauwkeurig meten op zijn schilderijen wijst uit dat hij niet de technieken hanteerde waar zijn Italiaanse tijdgenoten zich mee bezig hielden.



Op het Arnolfini-portrait hiernaast zien we bijvoorbeeld dat hij de lijnen van de houten vloer in één punt laat samenkomen dat ongeveer op de pols (op het schilderij) van Giovanni ligt. Trekken we de lijn door die gordijnrails (boven het echtelijke bed) aangeeft, dan blijkt die zelfs boven de spiegel langs te lopen en gaat in ieder geval niet door datzelfde punt.

VAN FLORENCE TOT DE PYGMEEËN

In Florence zou zoiets in 1434 al haast niet meer door de beugel kunnen. Daar werkte namelijk begin 15e eeuw een groep architecten en schilders een wiskundige oplossing voor het perspectiefprobleem uit, gebaseerd op de meetkunde van Euclides, die impliceerde dat alle lijnen die in werkelijkheid horizontaal in één richting weglopen, op de tekening juist wel door één punt gaan. Hoofdzakelijk hun methode zal vijf eeuwen lang toegepast worden als er op een vlak iets ruimtelijks gesuggereerd moet worden.
Bedenk dat in de 14e eeuw de eerste houtsneden gemaakt werden. Zo begint een periode waarin iedereen in onze cultuurkring overladen wordt met prenten waarop dit perspectivisch weergeven van de ruimte is toegepast. Hoe sterk onze gewenning aan het perspectief nú is, zien we aan het volgende voorbeeld. Bekijk deze vier lijnen eens.



Het onderste horizontale lijntje lijkt korter dan het bovenste. Dat is natuurlijk niet zo. Maar ook als je dit gezichtsbedrog kent is dat nauwelijks te geloven. Onbewust interpreteren we de schuine lijnen als evenwijdig, maar van ons aflopend, zoals spoorrails. De onderste dwarslijn is dan korter dan "de afstand" van die evenwijdige lijnen, dus korter dan het bovenste dwarslijntje.
Het hele proces verloopt natuurlijk onbewust, zo vaak hebben we dit al toegepast bij het waarnemen van de omgeving, daarom is het ook zo moeilijk weerstand aan deze suggestie te bieden.
Opmerkelijk is dat mensen uit een andere beschaving (bijv. Pygmeeën) niet voor dit gezichtsbedrog gevoelig zijn. Perspectief komt in die cultuur niet voor.

Alberti en Dürer.

De eerste samenhangende beschrijving van het zogenaamde lineair perspectief is "Della pittura libri tre" van Leone Battista Alberti in 1435.
Alberti schrijft:

> *"Et noi qui immaginiamo i razzi quasi essere fili sottilisimi da uno capo quasi come una mappa molto stretissimi legati dentro all'occhio... quasi come troncho di tutti razzi, quel nodo extenda dritissimi et sottilissimi suoi virgulti per sino alla opposita superficie".*

> *"We moeten ons de stralen voorstellen als zeer dunne draden, met een sterke band als een bundel bijeengebonden in het oog ... als een geknotte stronk van stralen, waarvan de knoop jonge takken direct naar elk tegen te komen oppervlak stuurt".*

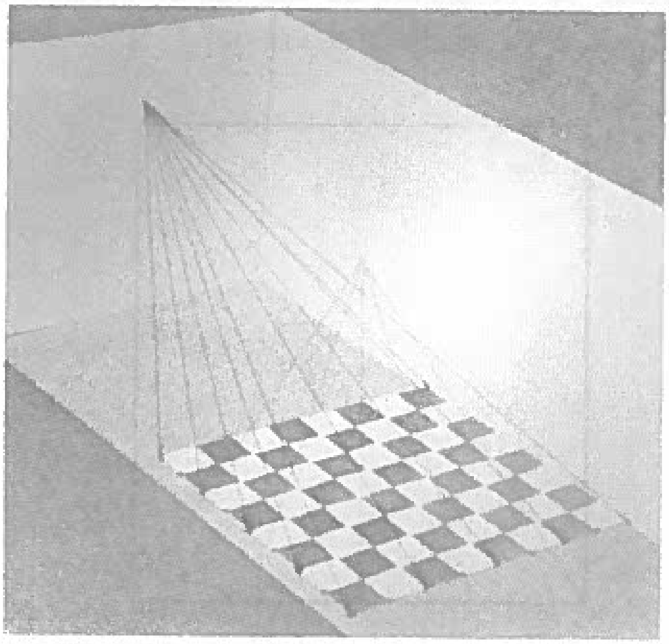
De bundel stralen is de "piramida visiva", de zicht-piramide, en

> *"Chi mira una pictura, vede certa intersegatione d'una piramide".*

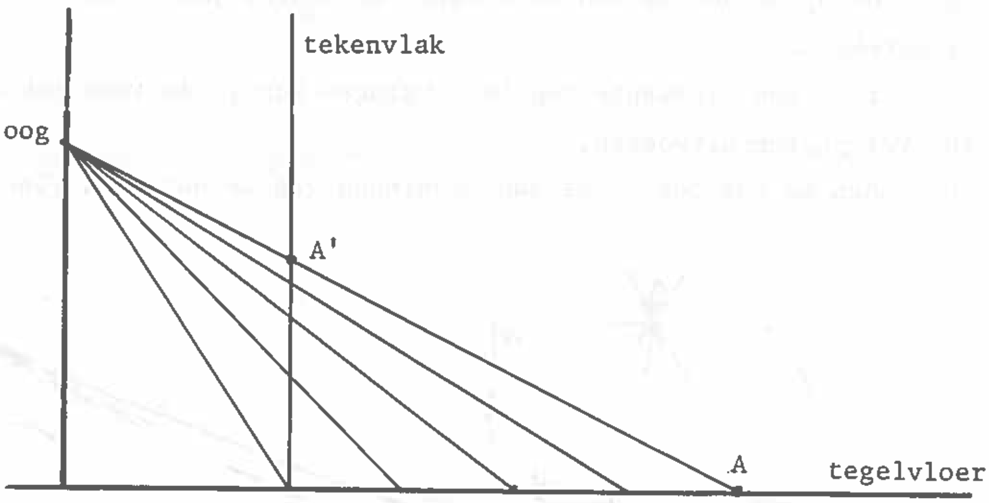
> *"Wie naar een schilderij kijkt, ziet een bepaalde doorsnede van een (zicht-)piramide".*

Albrecht Dürer maakt in 1506 vanuit Venetië een tocht naar Bologna om de "Kunst in heimlicher Perspectiva" te leren. Het geheime, dat is de theoretische achtergrond van het praktische perspectief, dat Dürer toen wel, zij het niet geheel volmaakt, beheerste. De schilder-wiskundige-franciscaner monnik Luca Paciolo was toen juist in Bologna. Het is echter niet zeker of Dürer bij hem in de leer is gegaan.
Twijfelachtig is ook of Dürer de lessen wel geheel begrepen heeft. Sommige van zijn tekeningen geven aanleiding daartoe en Dürers eigen geschriften zijn niet volledig duidelijk op bepaalde essentiële punten wat het praktische tekenwerk betreft.
De gravure die in MHOOD (blz. 48) is opgenomen geeft het centrale idee van het lineair perspectief wel uitstekend weer, maar deze methode is natuurlijk niet voor praktische toepassingen geschikt.
Het constructie systeem dat in MHOOD in opgave 108 t/m 111 wordt gebruikt, wordt in grote trekken precies zo door Alberti beschreven. Hij werkt met een tegelvloer als voorbeeld.
Veel Renaissance-schilderijen vertonen een tegelvloer in de ruimte waar het geschilderde gebeuren plaats heeft. Dat is gezien de bouwstijl van die dagen te verwachten, maar er is ook een groot praktisch voordeel: als je de tegelvloer maar goed kunt tekenen, kun je ook heel gemakkelijk de rest op de juiste plaats krijgen.

Een model in een schoenendoos: tegelvloer met "pyramida visiva".

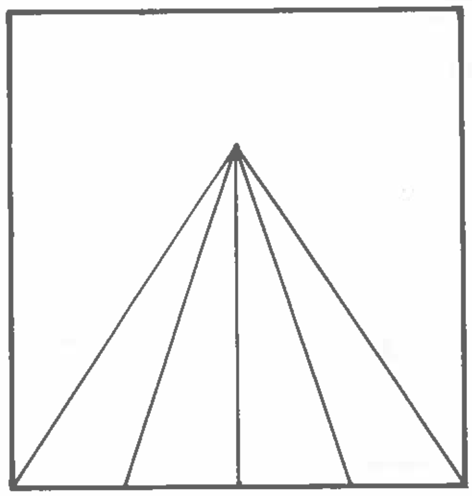


De "pyramida visiva" wordt hier gesuggereerd door de draadjes die van alle hoekpunten van de tegels naar het oogpunt lopen. Nu wordt het vlak waarop getekend wordt recht opstaand gedacht op de voorrand van de tegelvloer. Het gaat er om de snijpunten van de draadjes met dat vlak te bepalen. Dat doet Alberti met twee aanzichten.
Eerst het zijaanzicht:




Elke schuine lijn stelt meerdere draadjes voor. In het zijaanzicht vallen ze samen. Op het tekenvlak zien we precies hoe hoog de punten die bij A op de grond liggen, getekend moeten worden.

Stel je nu voor wat het vooraanzicht van het model is, gezien in de oogrichting, maar alsof je ver achter de rug van de persoon staat die aan de top van de piramida visiva staat. Dan zie je:

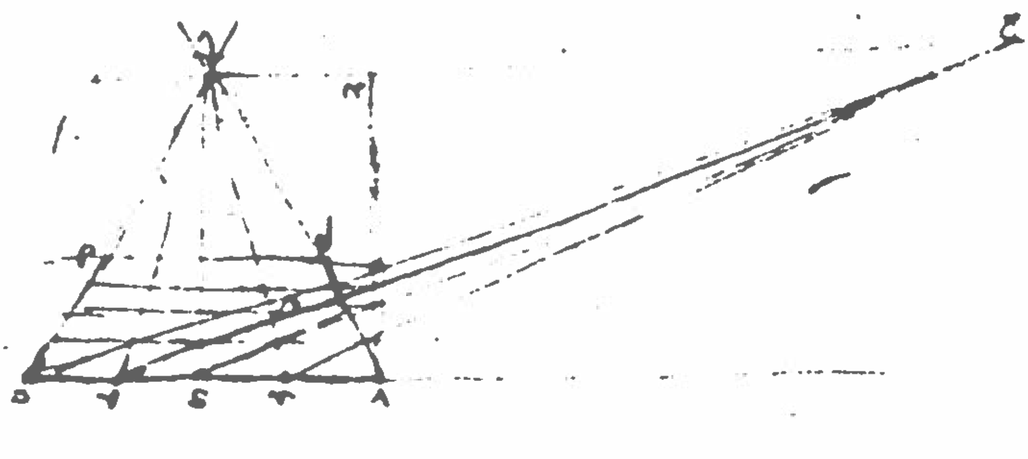


En nu oppassen met onze eigen denkwijze. Het puntje in het midden is geen verdwijnpunt, maar de projectie van het oog op het tekenscherm. De lijnen zijn de projecties van de draadjes en vallen samen met de plekken op het tekenscherm waar je dóór moet kijken om de weglopende vloerlijnen te zien; immers: het vlak {oog-vloerlijn-draadjes naar die vloerlijn} snijdt het tekenvlak juist in zijn projectie op het tekenvlak. Er is dus nog van geen verdwijnpunt sprake!

Teken nu op de bovengevonden hoogtes de dwarslijnen erbij en de tegelvloer is getekend!

Doordat we van vierkante tegels uitgingen kun je de twee tekeningen ook op één vel papier uitvoeren.

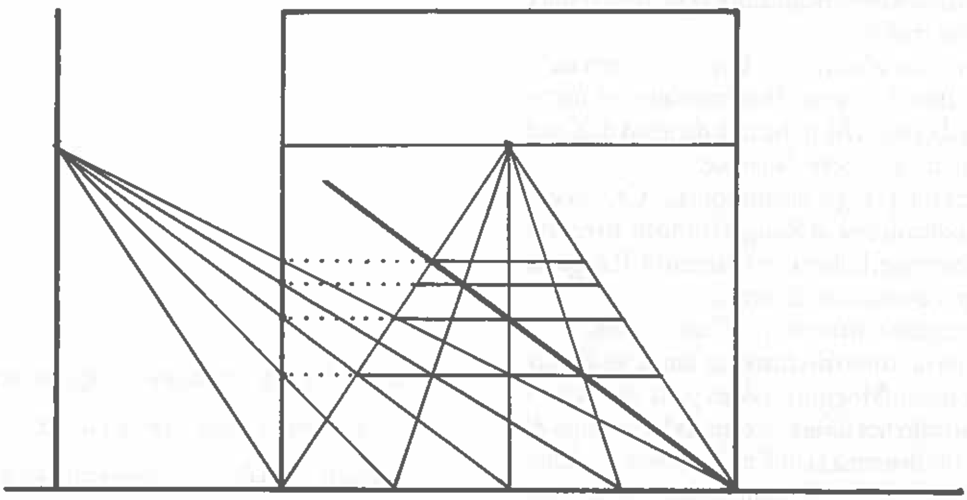
Zo vinden we dat ook in de aantekeningen van Leonardo da Vinci.



De geheimzinnige tekens bij de toppen van de lijnen-waaiers zijn ogen!

De Italianen spraken van "costruzione legittima".

Een diagonaal door de tegelvloer moet natuurlijk nu ook recht zijn op de tekening. Dat gebruikt Alberti als controlemiddel.



Omgekeerd kan zo'n diagonaal natuurlijk getekend worden i.p.v. het zijaanzicht te gebruiken. Dat is minder inzichtelijk, maar werkt sneller. Dürer doet dat en zet bij het snijpunt van diagonaal en horizon (zie later) een oogje; het nabije oog, terwijl dit punt toch niets met een oogpunt te maken heeft.

Het werken met diagonalen wordt in MHOOD terloops toegepast in het voltooien van de gang op blz. 62.

Natuurlijk kan via het twee aanzichten-proces ook elk ruimtelijk voorwerp in goed perspectief worden getekend, maar Alberti suggereert iets anders. Wat hij "centrumlijn" noemt in het volgende citaat, staat voor "horizon" bij ons.

> "*Als dit gedaan is, teken ik in de rechthoek van het schilderij dwars een rechte lijn, evenwijdig aan de onderkant, van de ene kant naar de andere, gaande door het centrum, waarboven niets te vinden is dat niet hoger is dan het oog van de waarnemer. Omdat de lijn door het centrum gaat, noem ik hem centrumlijn. Hieruit volgt dat de mensen op de verste vierkanten, kleiner worden geschilderd dan op de andere; zo laat de natuur ons dat ook zien*".

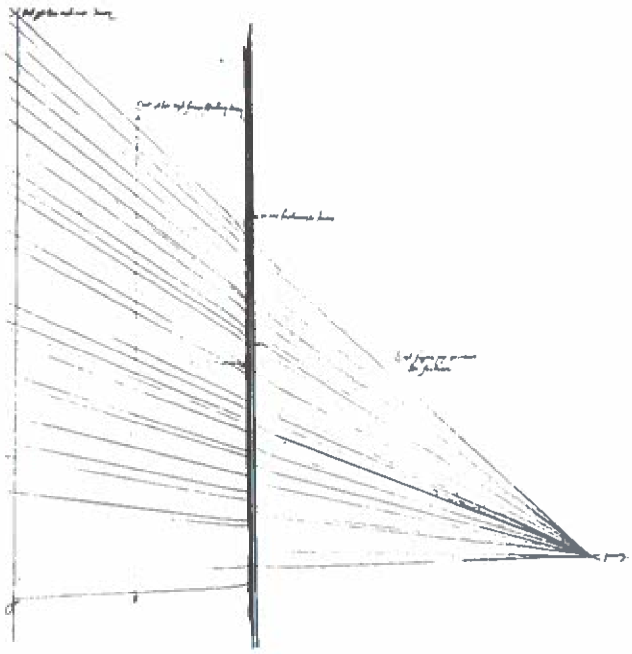
Hoe groot armen, benen, hoofd enz. van een persoon op een bepaald vierkant getekend moesten worden, dat was een probleem van verhoudingen: juist het sterke punt van de ontwikkelde klasse in de koopmansstad Florence. Virtuoos verhoudingsrekenen met de verschillende maat-, gewicht- en geldsystemen van de steden in de omgeving was noodzakelijk.

Ter illustratie een lijstje uit een koopmansrekenboek, waarin de "verhoudingen" worden beschreven.

¶ Firenze con Viẽna del dalfinato. Ca. xxvi.
Marcho uno dariento diuienna fa in firenze once
octo danar tredici.
¶ Firenze con Ziara. Capi. xxvii.
Libbre cento di Ziara di ſtiauonia fanno in firen-
ze libbre.lxxxxix. Marcho uno dariento di Ziara
fa in Firenze once octo danar dieci
¶ Firẽze con Raugia diſchiauonia. Ca. xxviii
Libbre cento di cera di Raugia fanno in firẽze lib
bre cento cinque. Libbra una dariẽto di Raugia fa
in Firenze once undici & mezo.
¶ Firenze con Chiarenza. Capi xxix.
Cãne dieci di panno di chiarenza fanno in Firen-
ze.xi.& mezo. Moggio un duua paſſa dichiaren-
za fanno infirenze libbre.lxxviii. Moggio uno di
ualonia di chiarenza fa in Firenze libbre Lib-
bre.c.di firẽze fanno in chiarẽza libbre.lxxxxviii
Once.i.di firẽze fa in chiarẽza põ.vi.& un quar-
to. Moggio uno di grano di chiarenza fa in Firẽze
ſtaia uentidua.
¶ Firẽze con Modon & Corõ della morea. ca.30.
b ii

Een lijst omrekeningsrecepten. Blijkbaar had iedere stad zijn eigen geld- en gewichtsysteem. Zonder de regel van drieën werd je in Florence niet rijk!

In de handleiding die Pierro della Francesca geeft voor het schilderen, worden ook de koopmanssommen als voorbeeld gebruikt voor het berekenen van meetkundige verhoudingen!
Een andere methode was die van Dürer. Eén blik op de volgende illustratie is genoeg om vast te stellen dat het om vermenigvuldigen van figuren van uit één punt gaat.

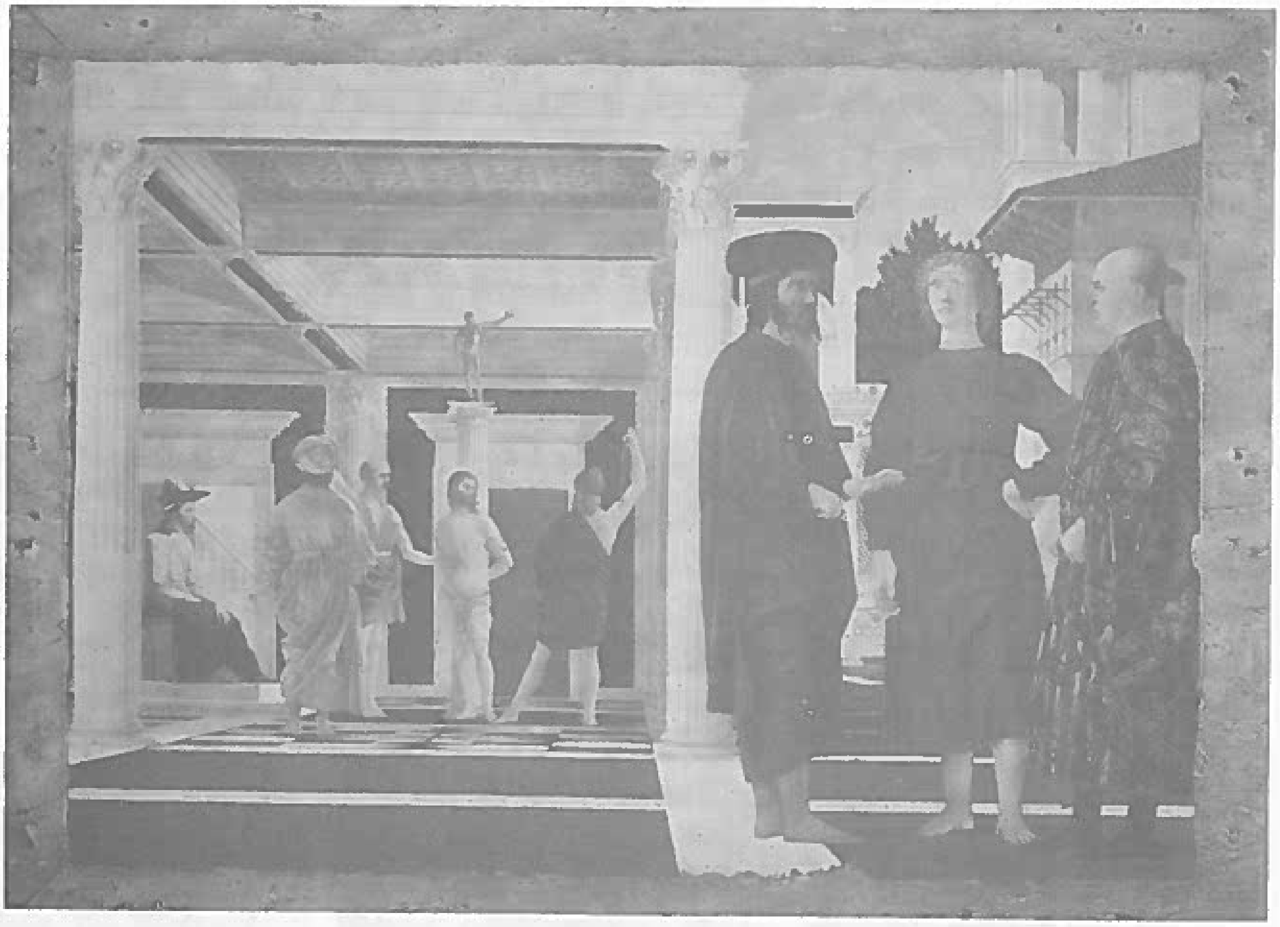


Bij de dikke lijn staat:
dit is de eerder beschreven man.
Bij de lijn links:
dit is de verlengde man.
Rechts staat:
dit is de verkorte man.

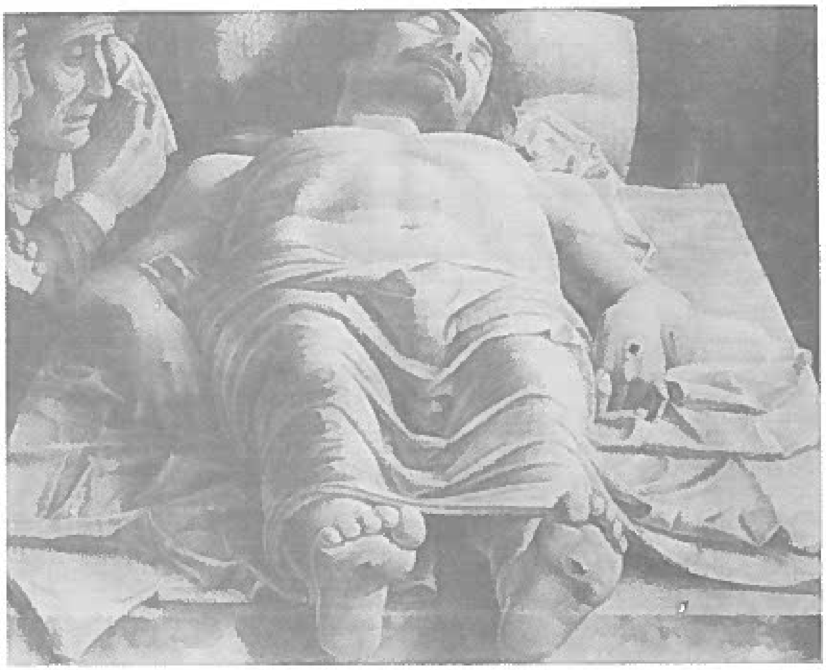
Door Alberti's benadering van het perspectieftekenen loopt één rode draad: het schilderij moet zó worden dat je van één punt voor het schilderij precies alles in de juiste richting ziet. Dat betekent dat het schilderij als een totaliteit, een eenheid gemaakt is. Vergelijk dat nu eens met het mozaiek op blz. 47 van MHOOD: daar is één geschikt oogpunt niet te vinden.

## Een spel op zich.

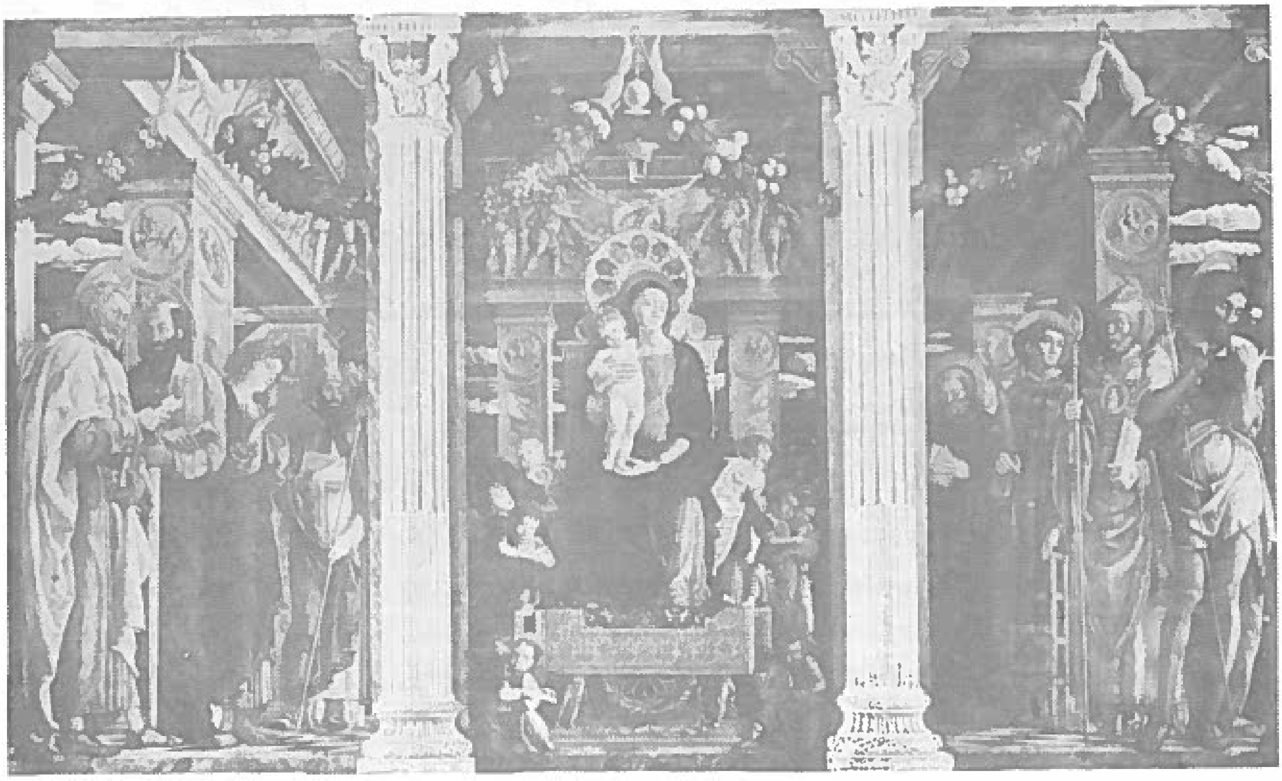
Als eenmaal de techniek van het perspectieftekenen bekend is, kan deze bewust gebruikt worden om een bepaald effect te bereiken.
Een voorbeeld uit 1460, Geseling van Christus door Pierro della Francesca. Het loont de moeite de wijkende lijnen door te trekken naar de projectie van het oogpunt: het ligt heel laag en daardoor lijken de toch al moeilijk verklaarbare figuren op de voorgrond nog belangrijker t.o.v. het eigenlijke gebeuren.



Verkorting van voorwerpen is een noodzakelijk gevolg van deze perspectieftechnieken, maar sommige kunstenaars maakten juist gebruik van moeilijke "scorzi" om te demonstreren met welk gemak ze de problemen van het perspectief aankonden. Van een onverwachte verkorting als deze van Mantegna, gaat een dramatische kracht uit: technisch meesterschap en ontroering gaan in de Renaissance-kunst hand in hand.



Merk op dat de voeten van Christus te klein zijn geschilderd. Rembrandt doet iets dergelijks in zijn "Anatomische les". Uit een oogpunt van schoonheid is het wel te begrijpen.
De naderende trein op blz. 45 van MHOOD is juist zo'n verkorting. Filmers gebruiken dit beeld vaak heel stereotyp als er een trein dreigend aankomt ...
Het idee dat het schilderij een venster zou zijn waar je doorheen kijkt om de "werkelijkheid" er achter te zien, wordt versterkt als de schilder de architectuur van de ruimte waar de schildering zich in bevindt, nog achter het venster voortzet.
Nog een werk van Mantegna: het altaarstuk van de San Zeno in Verona, uit 1459.



Slechts de twee hoofdpilaren zijn echt. De rest is schilderwerk!

De bedoeling lijkt duidelijk: de gelovigen zien achter de pilaren nog meer ruimte en de kerk loopt over in de hemel ....
René Margritte speelt op zijn eigen manier met hetzelfde principe in "La Condition Humaine" uit 1933.

Oorspronkelijk kwam dit schilderij ook in MHOOD voor. Een leerling schreef "dat je toch ziet hoe het er buiten uitziet".
Margritte zelf heeft meer woorden nodig.

> *"De geschilderde boom verbergt de boom die er precies achter staat, buiten de kamer. De boom bestaat voor het idee van de toeschouwer zowel binnen de kamer op het schilderij als buiten de kamer in het echte landschap. Dat is hoe we de wereld zien: we zien de dingen alsof ze buiten onszelf bestaan, terwijl we alleen bezig zijn met de mentale voorstellingen die we binnen ons zelf ervaren".*

Margritte gaat - als een echte surrealist iets te denken overlatend - niet in op het merkwaardige linkerrandje van het schilderij (op het schilderij). Enkele leerlingen deden dat wel: "het kan geen glasplaat zijn (op die schildersezel), want dan moet je het gordijn zien".
Een andere leerling reageerde door de volgende les de strip mee te nemen die nu in het leerlingenboek is opgenomen. Misschien wat minder "cultureel", maar zeker zo aardig!