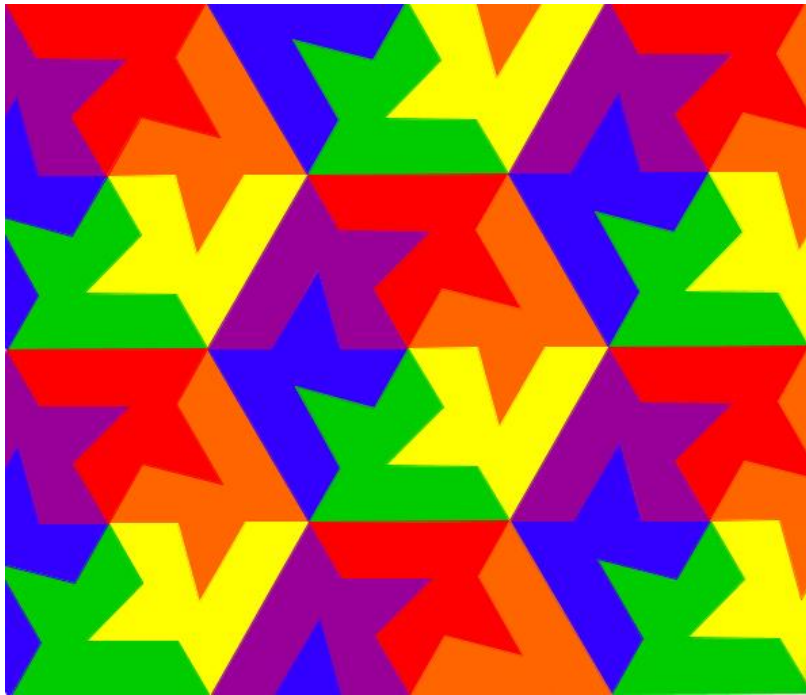


Vlakvullingen of Tessellations

Een les voor de bovenbouw van de basisschool en de eerste klassen van het voortgezet onderwijs over vlakvullingen

Samenvatting van de voorbereiding



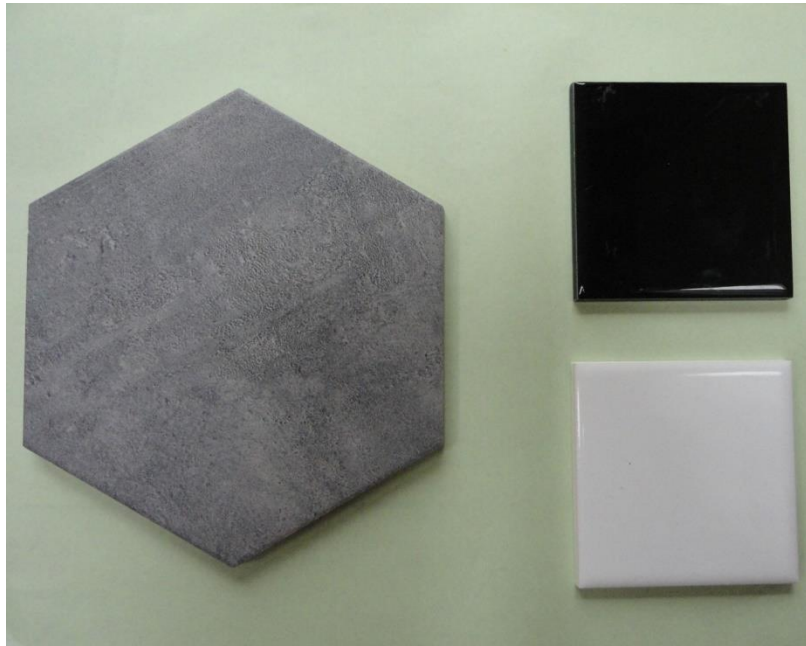
Deze lessen gaan over het maken van vlakvullingen met één vorm en grootte.

Wat is een vlakvulling of een tessellation? Het is een naadloze vulling van het platte vlak. Bij het tegelen met echte tegels is er wel een voeg, maar toch noemen we dat naadloos.

Een bezoek aan een plaatselijke tegelhandel in IJmuiden leert dat er weinig variatie is in vormen van tegels. Natuurlijk zijn er vierkante tegels en veel rechthoeken. Met rechthoeken wordt veel getegeld met tegels van verschillend formaat .



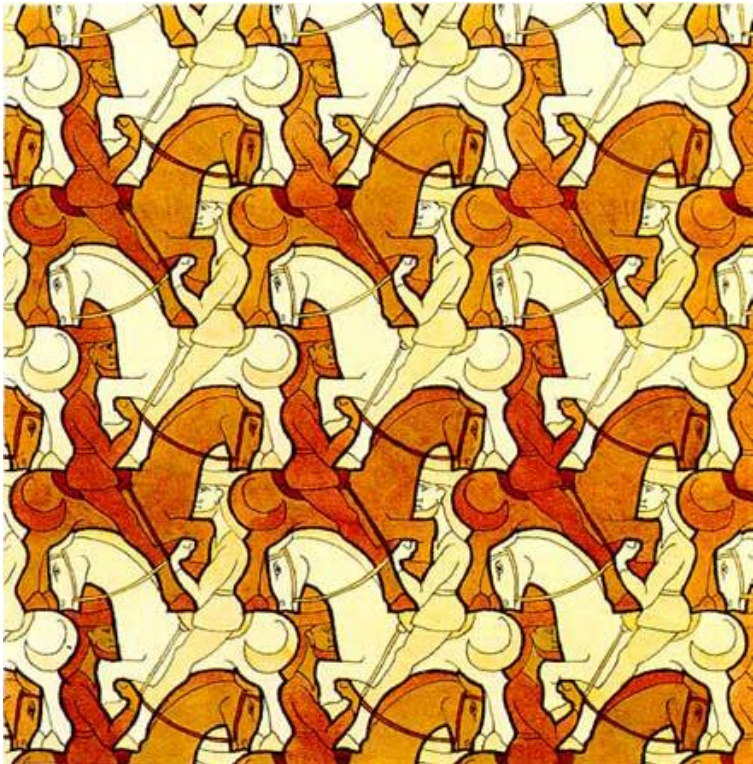
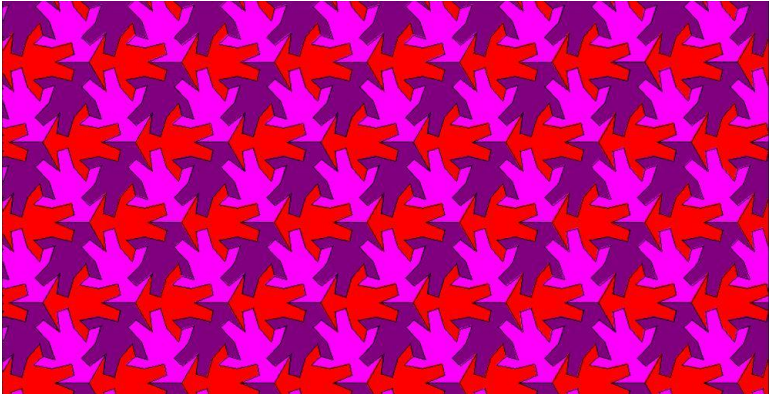
Ik verlaat de toonkamer met één regelmatige zeshoek. Vierkante tegeltjes heb ik thuis nog in reserve.



Op internet vind je veel mooie voorbeelden. We kiezen er een stel met één vorm en grootte. Van straatstenen tot ruiters van M.C. Escher.

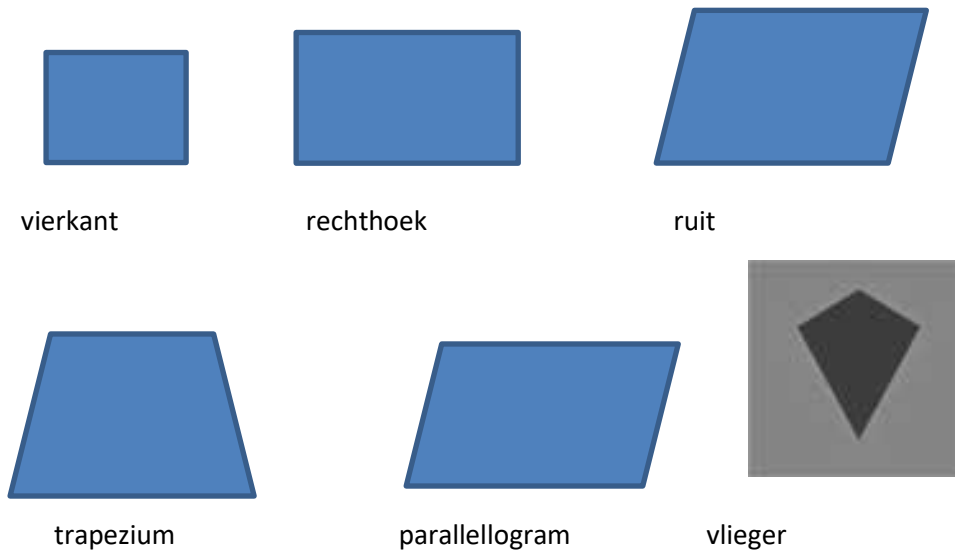


Zoeken moet je doen met tessellation/images want met zoeken naar tegelen kom je bij de tegelhandels uit.

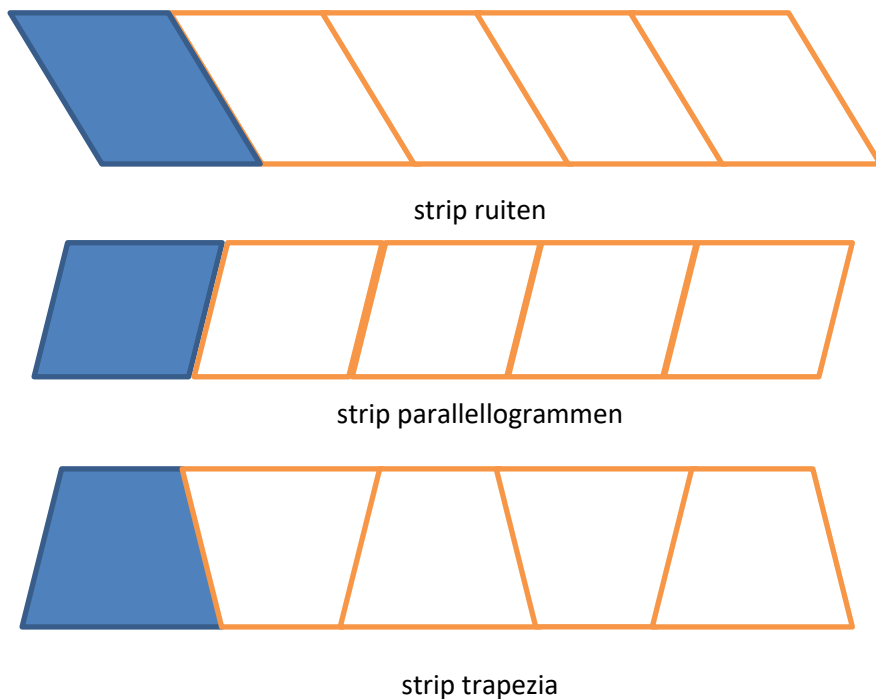


Bij de plaatjes die je op internet kunt vinden kom je ook allerlei vlakvullingen tegen met twee of meer vormen. Escher liet in zijn metamorfosen figuren een aantal malen veranderen. Heel mooi om na deze lessen eens met leerlingen naar het werk van Escher te kijken.

We besluiten de les te beginnen met een reeks bijzondere vierhoeken:

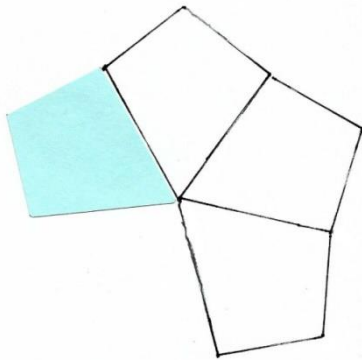


Voor veel leerlingen van groep 8 zijn sommige begrippen nieuw! Vierkant en rechthoek vullen het vlak bijna vanzelfsprekend. Bij ruit, parallellogram en trapezium kun je al gauw een strip maken.



En strips vullen het vlak natuurlijk. Bij de vlieger is het wat lastiger. Zijden met gelijke lengten moeten tegen elkaar. Maar wel volgens een bepaald patroon.

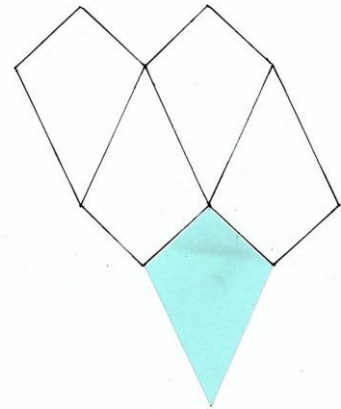
Met onderstaand patroon kun je het vlak niet vullen.



Maar zo lukt het wel:

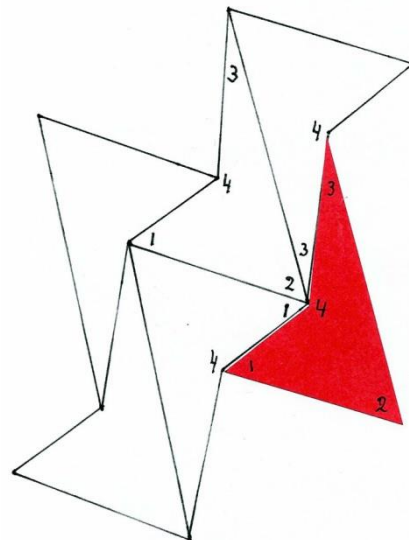
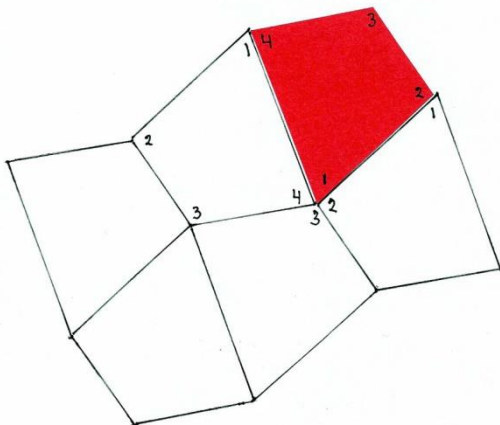
Wat (bijna) niemand verwacht is dat ook een willekeurige vierhoek het vlak vult.

Een mooi bewijs is dat de som van de vier hoeken van een vierhoek 360 graden is.



Als die vier hoeken in één punt samen komen en zijden van gelijke lengte aan elkaar liggen is het bewijs rond. Dan lukt het om steeds verder te tegelen.

De vierhoek hoeft niet eens convex te zijn (beide diagonalen liggen binnen de figuur).



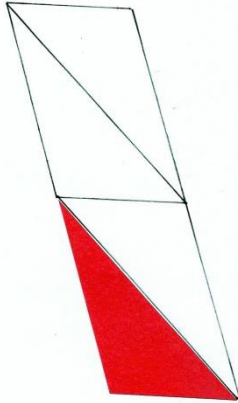
De vierhoek mag ook nog concaaf zijn (d.w.z.: één diagonaal buiten de figuur óf anders gezegd: één van de hoeken groter dan 180 graden).

Dit stukje over convexe en concave figuren is natuurlijk niet voor de leerlingen maar uitsluitend voor de leerkracht.

Met de leerlingen van groep 8 zal ik wel laten zien dat een vlakvulling van alle vierhoeken lukt. Maar we zullen het bij een aanschouwelijk bewijs laten.

In het voortgezet onderwijs kun je wel over hoeken en graden praten.

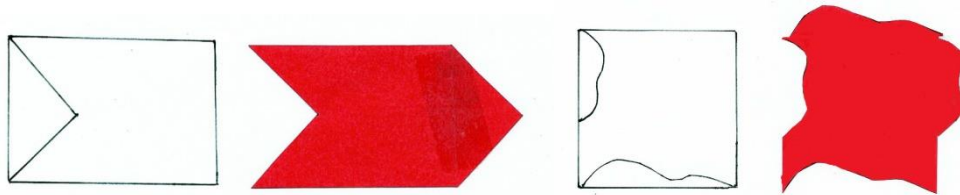
Het is makkelijk in te zien dat een willekeurige driehoek het vlak vult. Immers, twee van die driehoeken vormen een parallellogram en parallellogrammen vullen het vlak.



Al gauw realiseer ik me dat dit niet gaat lukken in een tijdsbestek van een uur. In overleg met de school plan ik twee lessen op twee opéénvolgende dagen. In de eerste les zullen we ons concentreren op vlakvullingen van bijzondere vierhoeken en misschien tot slot de vlakvulling van een willekeurige vierhoek.

In de tweede les eerst een samenvatting van de eerste dag. Op de tweede dag zullen de leerlingen proberen zelf iets moois te maken.

Als je een vierkant, rechthoek of een willekeurige vierhoek vervormt op de volgende manier dan vult die het vlak ook.



We zullen aan het begin van de tweede les eerst nog de plaatjes laten zien van de vlakvullingen uit de PowerPoint en vervolgens ook een filmpje dat we op YouTube vonden over het maken van een vlakvulling.

URL YouTube:

<https://www.youtube.com/watch?v=WBVzoaFi90E>
<https://www.youtube.com/watch?v=WBVzoaFi90E>

Daarna gaan de leerlingen aan het werk. We hopen dat er aan het eind van de tweede les al iets toonbaars is. De leerlingen krijgen in de krokusvakantie de tijd om nog iets heel moois te maken.

De mooiste ontwerpen krijgen een prijsje.

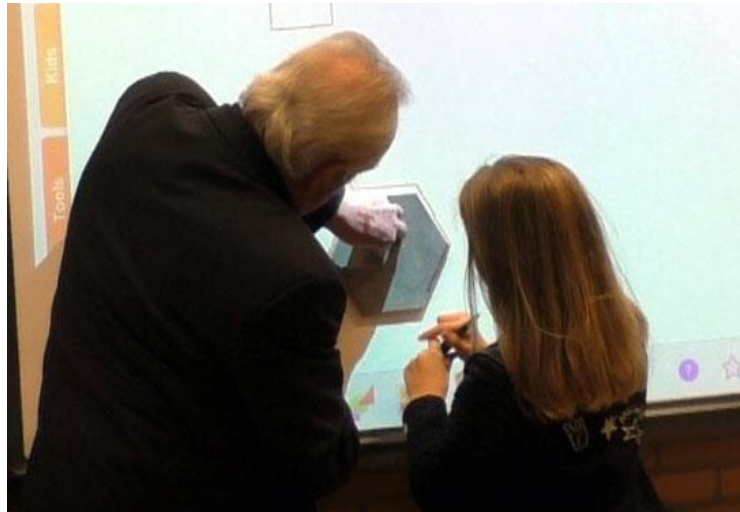
Gebruikt in deze lessen

- 80 grams wit papier
- 120 grams gekleurd papier om matrijzen te knippen
- linialen
- scharen
- plakband
- plaatjes internet (bijgevoegd)
- powerpoint met plaatjes en filmpje (bijgevoegd)

Verslag van de lessen

De eerste les

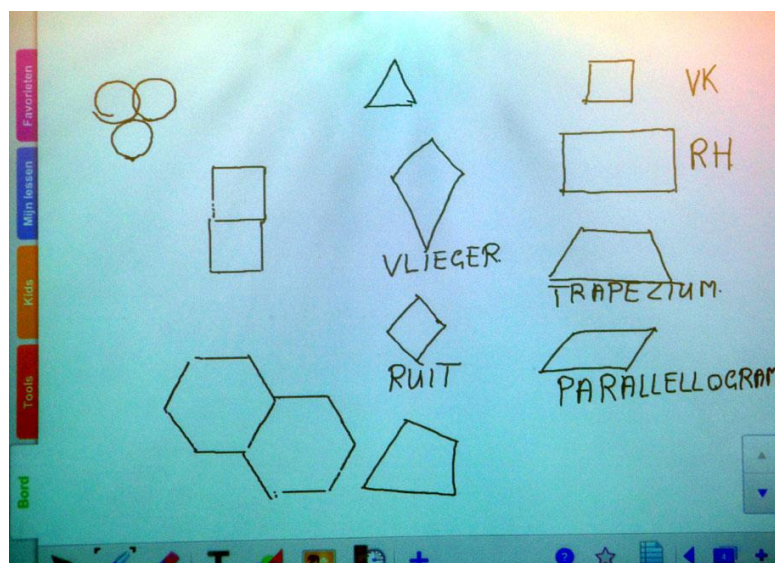
We beginnen met een gesprek over tegels in ons huis. Er was maar één leerling die in haar huis geen tegels heeft. Ik laat de tegels zien die ik heb meegenomen. We beginnen met het omtrekken van het zwarte vierkante tegeltje op het digibord om zo het tegelpatroon zichtbaar te maken. Met een andere leerling samen maken we patroon van de regelmatige zeshoek zichtbaar:



We laten nu met behulp van de powerpoint de plaatjes zien van allerlei verschillende vlakvullingen, te beginnen met de straatstenen en eindigend met de ruiters van Escher.

We gaan proberen om vandaag en morgen ook iets moois te maken!

Maar eerst het begin. Op het digibord maken we een reeks bijzondere vierhoeken. Ik teken de figuren en schrijf na overleg met de kinderen de namen van die vierhoeken er bij. vierkant, rechthoek zijn bekende begrippen. Maar vanaf de ruit (drop) wordt het lastiger. Parallelogram, trapezium en vlieger zijn voor de leerlingen onbekend.



Aan het werk

De leerlingen krijgen een dik blaadje gekleurd papier en een blaadje wit papier.

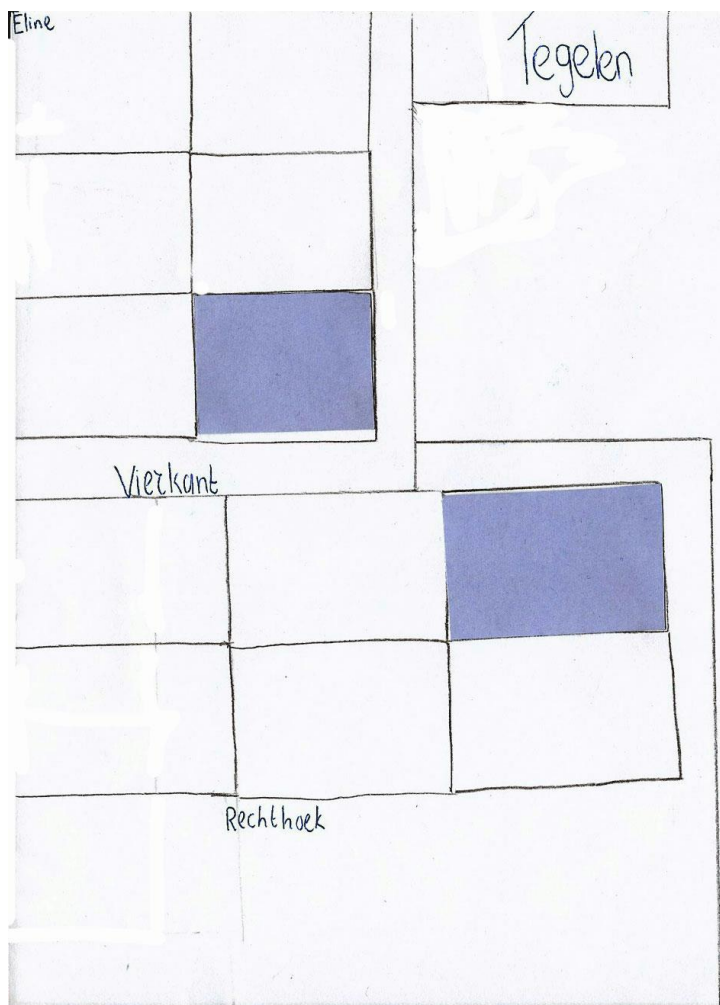
Opdracht: Neem één van de vierhoeken van het bord en maak een matrijsje. En maak op het witte papier een tegelpatroon. De matrijs niet te groot en niet te klein maken. Ongeveer een centimeter of vier. Moedig het gebruik van linialen en het eerst tekenen aan voordat je een matrijsje knipt.



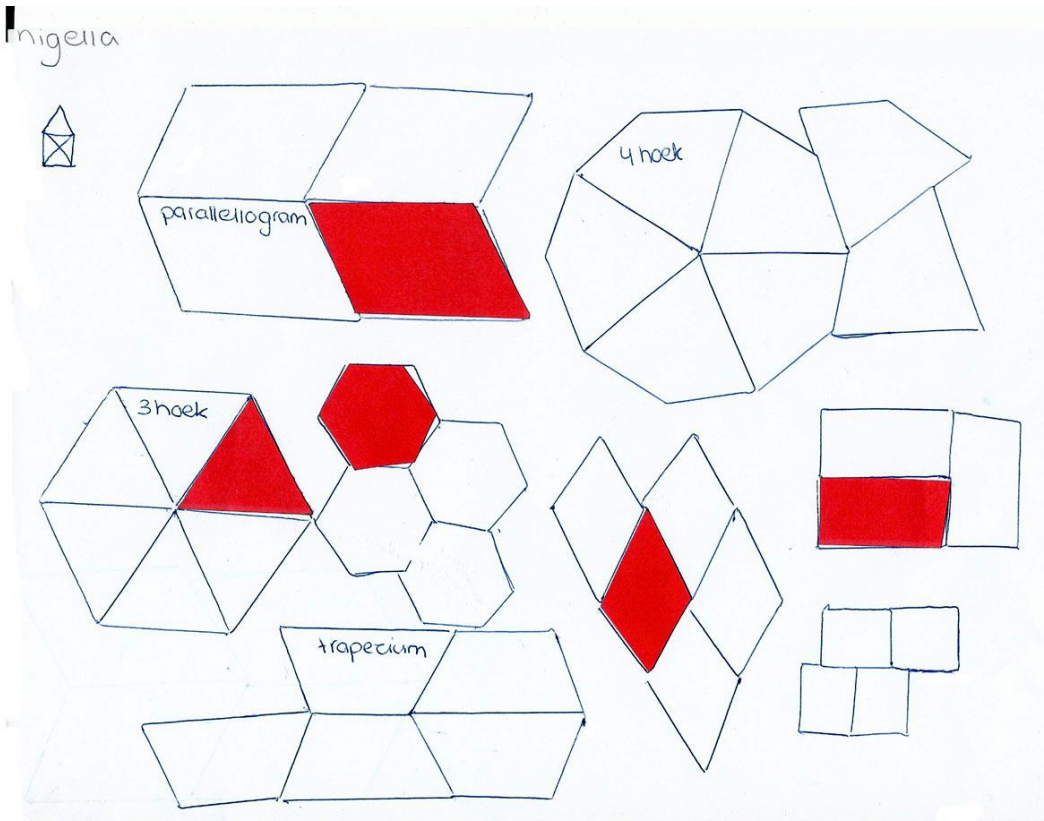
Wat onmiddellijk opvalt is het grote verschil tussen vaardigheden van leerlingen in dat opzicht. Eerste indruk is dat de meisjes dat over het algemeen beter kunnen dan jongens. Het is natuurlijk ook een precies werkje.

Hieronder volgt een overzicht van de probeersels van enkele leerlingen:

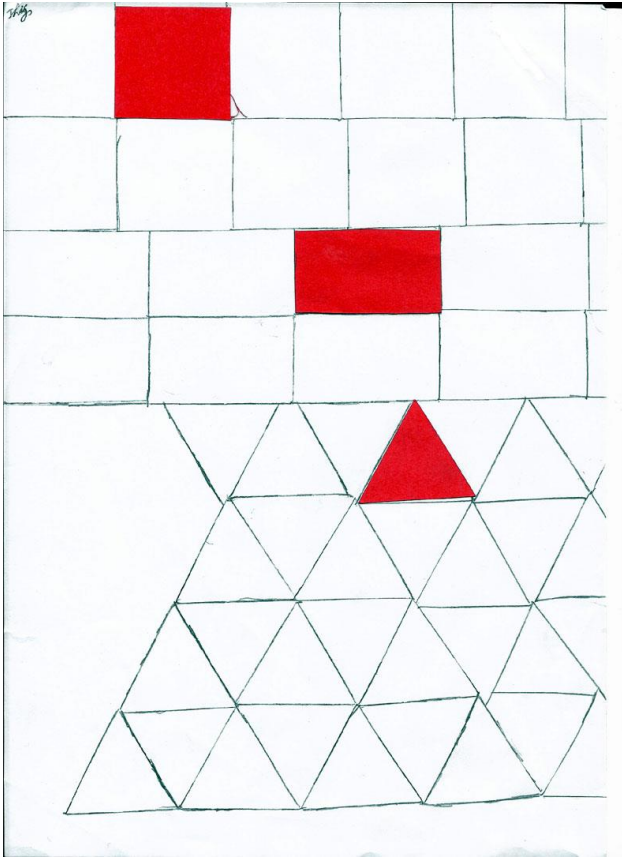
Het werk van Eline: net werk, ondanks het feit dat haar vierkant niet vierkant is



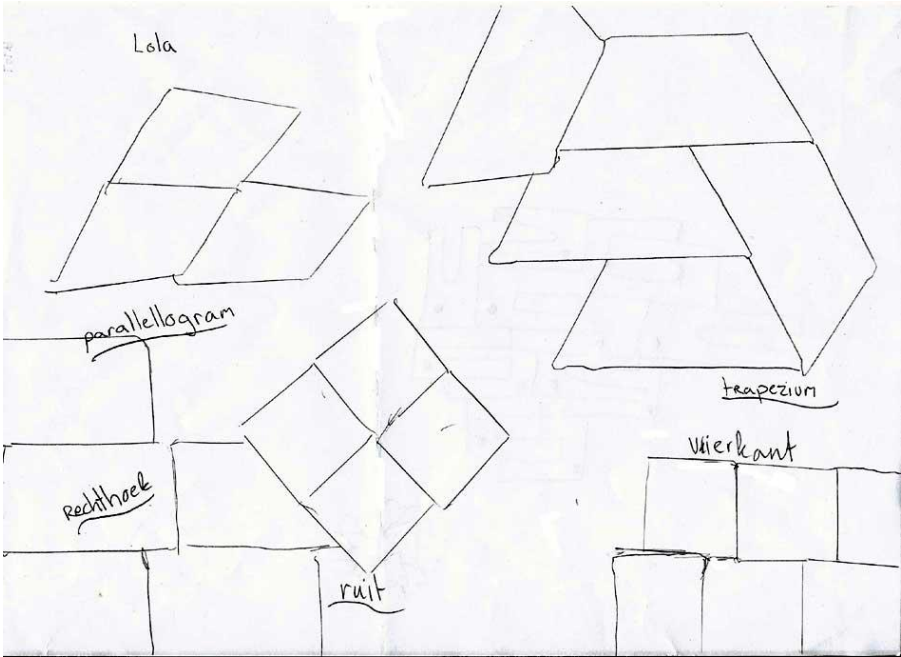
Het werk van Nigella: de vierhoek klopt niet echt:



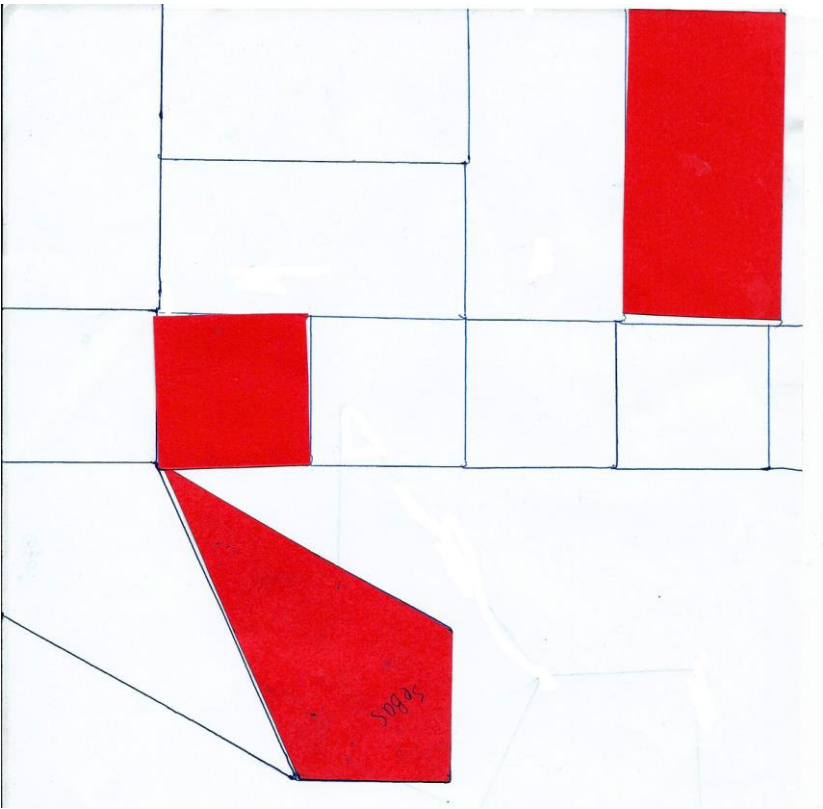
Mooi werk van Thijs:



Lola's werk : het trapezium klopt niet echt:

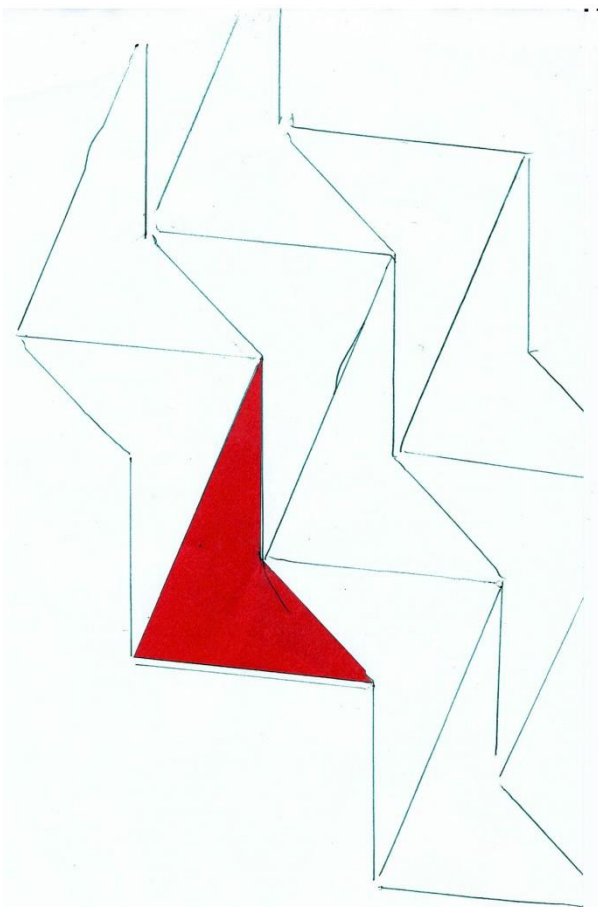


Mooi werk van Sebas:





En nog een prachtig anoniem werk over de concave vierhoek: mooi gedaan!



We besluiten de les met de conclusie dat alle vierhoeken het vlak vullen. Dat wordt niet helemaal door alle leerlingen begrepen. Daar is meer tijd en onderzoek voor nodig.

's Avonds nog even door het werk van alle kinderen gebladerd. Ze hebben mooi werk geleverd. Het is echter niet allemaal scherp. Morgenochtend toch proberen om het nog eens duidelijk te maken.

De tweede les



We beginnen de les met de samenvatting van gisteren: Alle vierhoeken tegelen. Nog met elkaar eens kijken naar de plaatjes van de powerpoint.

Vervolgens kijken we met elkaar naar het filmpje op You Tube:

<https://www.youtube.com/watch?v=WBVzoaFi90E>
<https://www.youtube.com/watch?v=WBVzoaFi90E>

Opnieuw dik en dun papier om iets moois te maken. Aan het werk!

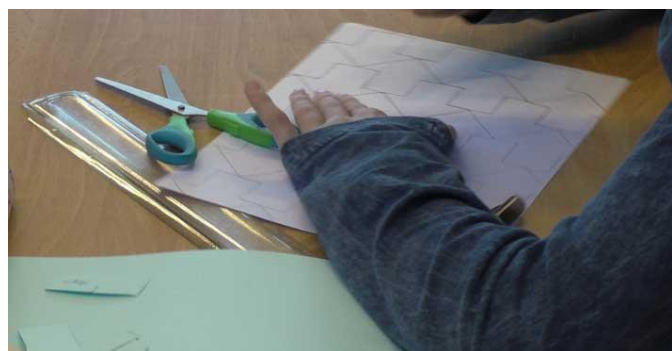


Er zijn toch wel veel kinderen die de fel gekleurde pijl als inspiratie nemen.



Zomaar een pijl vult het vlak niet. Je moet toch heel wat uitzoeken en meten voor dat je dat kloppend hebt. Maar dat lukt toch heel wat kinderen.

Anderen vinden het vervormen van een vierkant of rechthoek een goed idee.



Moedig kinderen aan om nog een keer opnieuw te beginnen en vooral netjes en precies te werken.



Ook kan er thuis aan verder gewerkt worden.

Sommige leerlingen vragen ook om de plaatjes van de powerpoint nog een keer te laten zien.

Het plaatje van de pijlen moet blijven staan zodat goed gekeken kan worden en op het bord gemeten.



Vier weken later halen we het werk op.

Samen met de juf bepalen we de winnaars en delen de prijsjes uit.

Hier een selectie van het werk van groep 8:



Tygo



Caithlin



Hannelore

Met dank aan de leerlingen en leerkrachten van groep 8 van de Jan Campertschool in Driehuis.

Willem Uittenbogaard

Email: w.uittenbogaard@uu.nl

huispagina: <http://www.staff.science.uu.nl/~uitte104/>

Redactie en foto's: Sylvia Eerhart