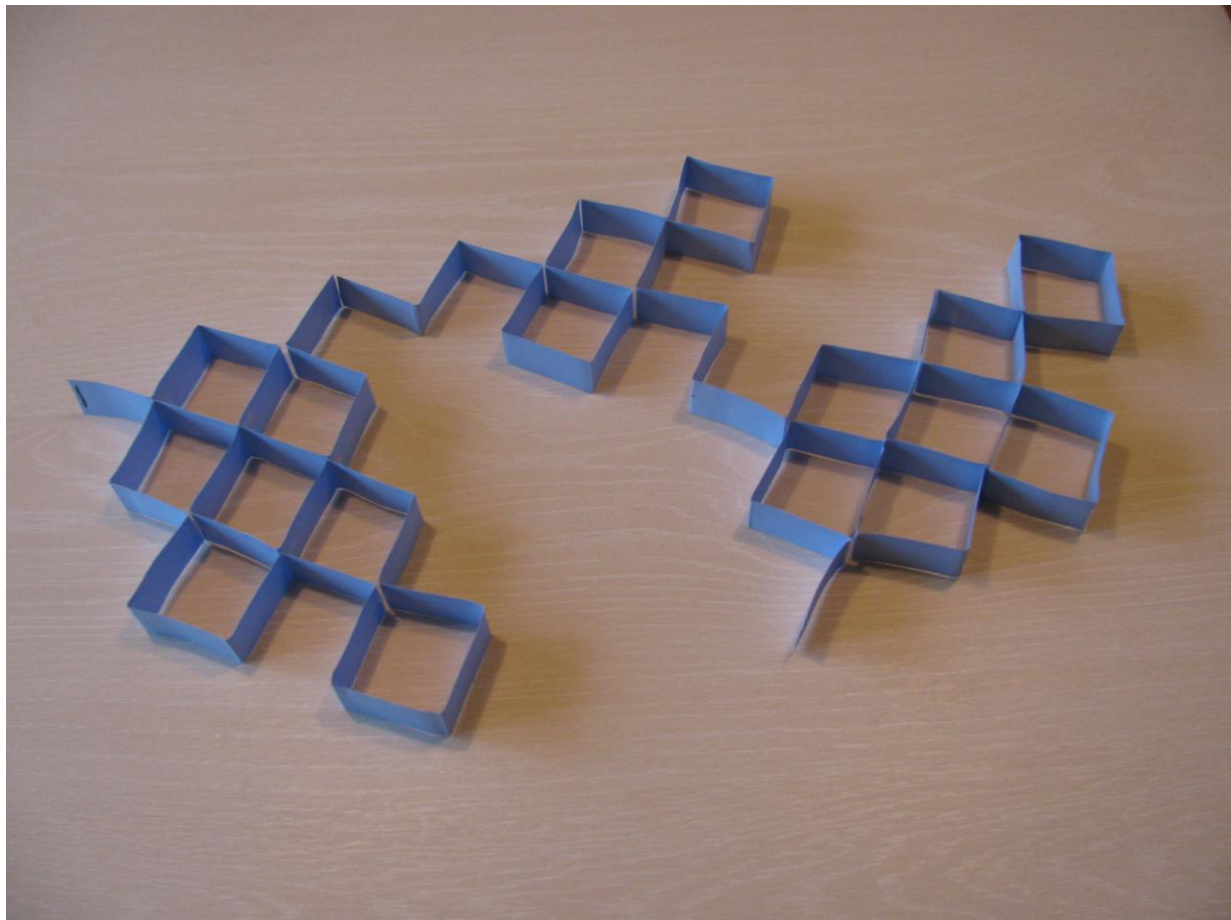


WISKUNDE B-DAG 2012

Vrijdag 16 november, 9:00-16:00 uur



Eenvou(w)dig

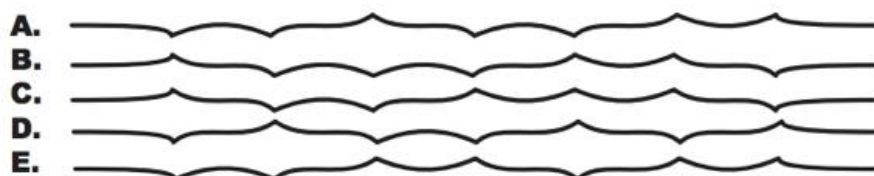


De Wiskunde B-dag wordt mede mogelijk gemaakt door



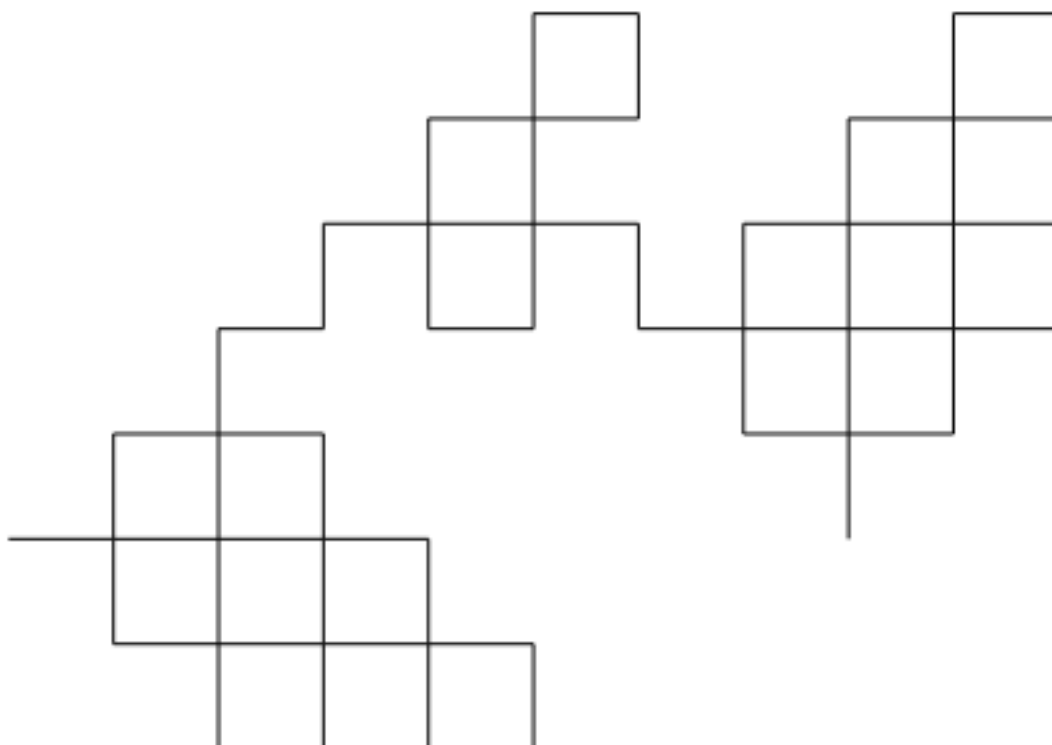
Opgave 6 van de Kangoeroe wedstrijd wizPROF 2010:

- 6.** Een strook papier wordt drie keer dubbel gevouwen. Daarna wordt hij opengevouwen. Als je het papiertje rechtop zet, dan zie je van boven de vouwtjes. Welke van de volgende tekeningen van die bovenrand is fout?



De foto van de voorpagina zie je hieronder als 'nette' tekening. Het is een labyrint-achtige figuur die je krijgt na zes keer dubbelvouwen van een strook papier volgens een voorgeschreven vouwrecept.

Daarna wordt de gevouwen strook opgevouwen zó dat er op de vouwlijnen knikken komen met steeds een hoek van 90 graden:



Over zulke labyrint-achtige patronen gaat de Wiskunde B-dag van dit jaar.

Inleiding op de opdracht

De opdracht van de Wiskunde B-dag van dit jaar is erg eenvoudig van opzet: hij gaat over het herhaaldelijk dubbelvouwen van papierstroken op een voorgeschreven manier. Scherpe vouwen zorgen er voor dat je na het uitvouwen een mooie meetkundige figuur krijgt, bestaande uit rechte stukken die steeds op een vouwlijntje naar links of naar rechts een haakse knik maken.

Het vouwrecept is eenvoudig, maar er blijken verrassende patronen te ontstaan die er al snel behoorlijk complex uitzien. Deze patronen ga je onderzoeken.

Het doel van deze opdracht is dat je de patronen kunt verklaren en zelfs (zonder ze echt te vouwen) kunt voorspellen. Niet alleen voor de patronen die je zelf hebt gevouwen, maar ook voor patronen die je zou krijgen na bijvoorbeeld 10 keer vouwen. En dat kun je echt niet meer met een strookje papier uitvoeren!

Opzet van de opdracht

In **Deel A** (Verkenning) word je met gerichte vragen op weg geholpen bij het vouwen en het bestuderen van eigenschappen van de patronen die dan ontstaan. Voer het vouwen uit en vergelijk een serie vouwen met de meetkundige figuren die dat oplevert. Dat is heel nuttig als ondersteuning van het eigen onderzoek dat je in deel B gaat doen.

Na deze verkenning ben je in staat om in **Deel B** (Onderzoek) je eigen gang te gaan. Daarbij kun je je laten leiden door de gegeven onderzoeks-suggesties, maar laat je daardoor niet beperken! Er valt echt veel meer te ontdekken.

Belangrijk is dat je in je verslag van de activiteiten van deze dag een buitenstaander-met-gevoel-voor-wiskunde duidelijk maakt wat je zoal hebt ontdekt.

Daarbij mag je de aangereikte representaties van deel A gebruiken, maar eigen manieren van communiceren over wat je hebt ontdekt zijn zeker ook welkom.

Je krijgt ook toegang tot een applet op het web waarmee patronen kunnen worden gemaakt. Begin niet te snel met het applet! Zorg er in de verkenningsfase voor dat je, door zelf stroken papier te vouwen, goed grip krijgt op het vouwproces en het resultaat daarvan. Gebruik het applet dus pas bij deel B.

Het applet kan jouw ideeën wellicht goed ondersteunen in de uitwerking van je werkstuk.

Indeling van de dag

- Neem zeker twee uur de tijd om in deel A rustig het vouwen en de patronen die daardoor ontstaan te verkennen. Met name die tijdsinvestering bepaalt hoe diepgaand je onderzoek kan worden in deel B.
 - Reserveer voldoende tijd voor je verslag. Om 16 uur moet dat worden ingeleverd. Begin daar dus niet te laat mee!

Het eindproduct

Deze Wiskunde B-dag opdracht leent zich heel goed voor een verslag dat niet slaafs de vragen en suggesties volgt. Zorg er voor dat het verslag zelfstandig leesbaar is voor iemand die de opdracht niet bij de hand heeft.

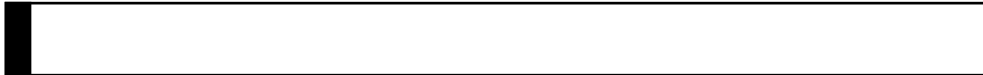
Als je handgeschreven stukken inlevert, schrijf (en teken) die dan met een **zwarte pen**. Het werk moet namelijk goed kopieerbaar zijn.

Succes en veel plezier met deze opdracht

DEEL A: VERKENNING

Inleiding

Voor deze Wiskunde B-dag opdracht heb je stroken papier nodig; véél stroken! De precieze afmetingen van deze stroken zijn niet zo belangrijk. Je kunt bijvoorbeeld een A4'tje over de lengte in acht repen knippen. Op het uiteinde van een strook maak je aan één kant een klein stukje zwart. Dat is het beginpunt van de strook.



Zet de strook op zijn zijkant voor je op tafel *met het zwarte stukje naar je toe* zoals hierboven is getekend.

Vervolgens ga je de strook enkele malen dubbelvouwen, zonder hem tussentijds weer open te vouwen. Je vouwt altijd het rechtereind van de (al gevouwen) strook naar het linkereind.

Na een aantal keren dubbelvouwen ziet het er ingewikkeld uit, maar je kunt altijd het beginpunt terugvinden met dat zwarte stukje.

Vouwen van de strook kan steeds op twee manieren:

- Vouw van je af, dus linksom. Het rechtereind komt dan *achter* het linkereind. Dat geven we aan met de letter *l*.
- Vouw naar je toe, dus rechtsom. Het rechtereind komt dan *vóór* het linkereind. Dat noteren we met de letter *r*.



De dubbelgevouwen strook wordt weer gevouwen en zo gaat dat een paar keer door. Elke keer heb je de keus uit *l* en *r*.

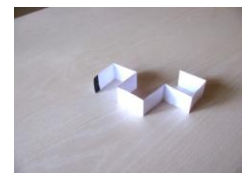
Een **vouwrecept** is een rijtje letters *l* en *r*. Daarmee worden de vouwacties voorgeschreven. Het recept voer je van links naar rechts uit. Een voorbeeld maakt duidelijk wat is bedoeld. Bij het vouwrecept *l r r* zijn er drie vouwstappen:

Stap 1: <i>l</i> , dus linksom	Stap 2: <i>r</i> , dus rechtsom	Stap 3: <i>r</i> , dus rechtsom

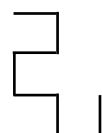
Na het uitvoeren van het vouwrecept doe je het volgende:

- Vouw de strook weer uit. Zorg ervoor dat bij alle vouwlijnen hoeken van 90 graden ontstaan en dat de tussenstukjes recht blijven.
- Zet de uitgevouwen strook op zijn kant voor je op tafel, met het zwarte stukje aan de linkerkant naar je toe.

Het resultaat zie je op de foto rechts.



Van bovenaf gezien krijg je de vorm die rechts is getekend. We noemen deze figuur een **looppatroon**. De looppatronen tekenen we meestal zó dat er **vanuit het begin horizontaal naar rechts** wordt gestart.



Het looppatroon kan ook worden beschreven als route van het beginpunt naar het eindpunt van de strook langs alle knikken.

Stel je voor dat je van beginpunt tot eindpunt langs het looppatroon loopt. Steeds loop je een stukje rechte weg, dan komt er een **knik** van 90 graden naar links of 90 graden naar rechts. Na weer een stukje rechte weg komt er een volgende knik naar links (*L*) of naar rechts (*R*). Alleen de knikken zijn van belang; de stukjes tussen twee knikken zijn steeds even lang.

Bij het looppatroon van het voorbeeld hoort de route *RLLRLL*.





Het rijtje letters *L* en *R* noemen we voor het gemak, net als de figuur zelf, het **looppatroon**.

Bij het dubbelvouwen en weer uitvouwen zijn dus twee zaken van belang:

- het **vouwrecept**. Dit geeft aan hoe er moet worden gevouwen, met een rijtje letters *l* en *r*
- het **looppatroon**. Dit is het resultaat na uitvoering van een vouwrecept, beschreven met een figuur en/of een rijtje letters *L* en *R*.

Oriënterend onderzoek

Hieronder staan de vier vouwrecepten met twee keer vouwen. In de plaatjes wordt steeds horizontaal naar rechts gestart (maar dat is alleen bedoeld om te weten waar en hoe je start).

vouwrecept	looppatroon
<i>rr</i>	 <i>RRL</i>
<i>rl</i>	 <i>LRR</i>
<i>lr</i>	 <i>RLL</i>
<i>ll</i>	 <i>LLR</i>

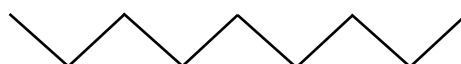
Uiteraard controleer je de vier mogelijkheden door de vouwrecepten uit te voeren en de resultaten en hoe die zijn ontstaan, aandachtig te bekijken.

Om verder vertrouwd te raken met vouwrecepten en de bijbehorende looppatronen, ga je eerst alle vouwrecepten met drie keer dubbelvouwen uitvoeren.

Voor het redeneren over vouwrecepten en bijbehorende looppatronen is het erg nuttig om eerst een aantal concrete voorbeelden zelf met stroken uit te voeren.
Sla deze handwerk-activiteiten dus vooral niet over!

◆ Verkennende vraag 1.

- a. Er zijn acht mogelijkheden voor een vouwrecept met drie keer vouwen. Welke zijn dat?
- b. Maak een overzicht voor drie keer vouwen, zoals hierboven is gegeven voor twee keer vouwen: de vouwrecepten en de bijbehorende looppatronen.
- c. Het zigzagpatroon dat hieronder is getekend vind je niet als mogelijkheid bij drie keer vouwen. Dat had je ook wel op voorhand kunnen weten. Hoe dan?



Bij twee keer vouwen krijg je altijd een vast aantal rechte stukken (4) en een vast aantal knikken (3).

♦ **Verkennde vraag 2.**

- a. Hoeveel rechte stukken en hoeveel knikken heeft een looppatroon bij drie keer dubbelvouwen?
- b. Hoeveel rechte stukken en hoeveel knikken heeft een looppatroon als je n keer vouwt ($n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$)?

De rangorde van de knikken

Bij vier keer dubbelvouwen krijg je, na het uitvouwen, in totaal 16 stukjes en 15 vouwlijntjes. De gestippelde vouwlijntjes zijn hieronder van links af genummerd in de volledig uitgevouwen strook. Dat zijn de posities van de knikken in het bijbehorende looppatroon.



♦ **Verkennde vraag 3.**

- a. Op welke positie (bij welk nummer hierboven) vind je het vouwlijntje dat hoort bij de eerste keer vouwen?
En welke posities (nummers) horen bij de tweede keer, bij de derde keer en bij de vierde keer vouwen?

Op elke positie komt een L of een R te staan, afhankelijk van het vouwrecept. Iemand heeft een looppatroon gemaakt, waarbij op de posities 2, 7, 8 en 12 een R staat. Daarmee is het hele looppatroon terug te vinden!

- b. Bepaal het hele looppatroon (geef het rijtje R 'en en L 'en).
- c. Wat was het vouwrecept?

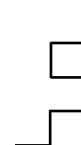
♦ **Verkennde vraag 4.**

We gaan uit van een vouwrecept met zes keer dubbelvouwen. Je hebt dan een looppatroon met 64 stukjes en 63 knikken

- a. Extra informatie: de eerste knik vanaf links is een R .
Van welke van de andere 62 knikken weet je nu zeker dat het een R of een L is?
- b. Nog meer informatie: het looppatroon begint met $RLLR$.
Van hoeveel knikken kun je nu nog niet weten of ze R of L zijn?

♦ **Verkennde vraag 5.**

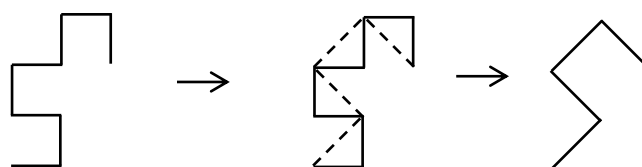
- a. Waarom kan de figuur hiernaast niet het resultaat zijn van een vouwrecept?
- b. Waarom kan het rijtje $RLLRRLLRLLRRRL$ nooit als looppatroon optreden?



De samenhang tussen twee looppatronen

We gaan in een gegeven looppatroon knikken verbinden door telkens één knik over te slaan. We starten links.

Bekijk de stippellijn in het middelste plaatje. Die gaat van begin- naar eindpunt van het looppatroon en slaat daarbij steeds één knik over. Zo krijgen we het resultaat rechts. Er zijn als het ware vier knikken in het gegeven looppatroon rechtgevouwen.



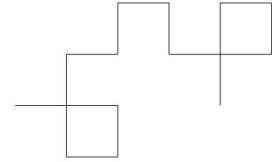
◆ **Verkennde vraag 6.**

- Het looppatroon in het linkerplaatje hoort bij het vouwrecept rll .
Leg uit waarom het rechterplaatje ook een looppatroon is. Bij welk vouwrecept?
- Er bestaat nog een ander looppatroon links dat ditzelfde looppatroon rechts oplevert.
Welk looppatroon is dat?

◆ **Verkennde vraag 7.**

Het looppatroon dat hiernaast is getekend, hoort bij het vouwrecept $rllr$.

- Wat verandert er aan het looppatroon als je de eerste r van het vouwrecept vervangt door een l ?
Welke veranderingen zie je in de bijbehorende lettercode van het looppatroon?
- Wat verandert er aan het oorspronkelijke looppatroon als je in het vouwrecept de r op de laatste plaats vervangt door een l ?
Welke veranderingen in de lettercode van het looppatroon zie je nu?



◆ **Verkennde vraag 8.**

Het looppatroon $LRLLLRLRRLLR$ is het resultaat van een vouwrecept met vier keer dubbelvouwen.

- Er is een vouwrecept waarbij de R op de tweede positie een L is en er verder zoveel mogelijk letters hetzelfde blijven als in het gegeven looppatroon.
Welke letters in het gegeven looppatroon moeten dan ook anders zijn, en welke verandering in het vouwrecept hoort daar bij?
- Er is ook een vouwrecept waarbij de L op positie 4 van het gegeven looppatroon een R is en er verder zoveel mogelijk letters hetzelfde blijven.
Wat kun je nu opmerken over de lettercode van het looppatroon en het vouwrecept?

Een schematisch overzicht van het ontstaan van een looppatroon

Hieronder is schematisch weergegeven hoe het uiteindelijke looppatroon stapsgewijs ontstaat bij het uitvoeren van het vouwrecept $rlrl$.

Van onder naar boven zie je het looppatroon (met L en R) na één keer, na twee keer, na drie keer en na vier keer vouwen. Steeds is de positie van de knikken gegeven waar ze in het uiteindelijke looppatroon (posities 1 t/m 15) terechtkomen.

na vouw 4	L	R	R	L	L	L	R	R	L	R	R	R	L	L	R
na vouw 3		R		L		L		R		R		R		L	
na vouw 2				L				R				R			
na vouw 1								R							
positie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

◆ **Verkennde vraag 9.**

Bij een zeker vouwrecept met vier keer vouwen zijn hieronder drie knikken gegeven.

na vouw 4				L	R		R				?		?	?	
na vouw 3															
na vouw 2															
na vouw 1															
positie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Welke letters (L of R) staan op de drie posities met de vraagtekens?

DEEL B: COMPLEXE EENVOUD: EIGEN ONDERZOEK

In de verkennende vragen van deel A heb je al veel experimenteel onderzocht door zelf stroken te vouwen. Gebruik die ervaringen nu om dieper door te dringen in de geheimen van looppatronen die ontstaan bij verschillende vouwrecepten.

Afspraak

Gebruik het applet om een vermoeden dat je hebt te toetsen op waarheid. Maar alleen een paar voorbeelden vormen nog geen bewijs dat het vermoeden altijd waar is. Probeer daarom steeds ook sluitende redeneringen te vinden om je vermoeden te bewijzen.

Drie beweringen

De drie beweringen hieronder zijn waar. Het overtuigend beantwoorden van de bijbehorende vraag kan helpen bij het onderzoek. Uiteraard zijn beweringen over eigen ontdekkingen ook welkom.

- **Bewering 1:**
Voor elk looppatroon geldt dat het eerste en laatste rechte stuk loodrecht op elkaar staan.
Vraag:
Probeer een sluitende redenering te vinden waaruit blijkt dat dit altijd waar is.
- **Bewering 2:**
Bij een gegeven vouwrecept kun je van elke knik van het bijbehorende looppatroon voorspellen of hij L (inksom) of R (rechtsom) is.
Vraag:
Hoe kun je bij het vouwrecept $rrrlrrrlr$ voorspellen wat voor soort knik (R of L) op positie 16 staat?
- **Bewering 3:**
Bij een gegeven looppatroon kun je altijd achterhalen welk vouwrecept daarbij hoort.
Vraag:
Kun je een algemene methode geven waarmee je vanuit een gegeven looppatroon snel het bijbehorende vouwrecept kunt vinden?

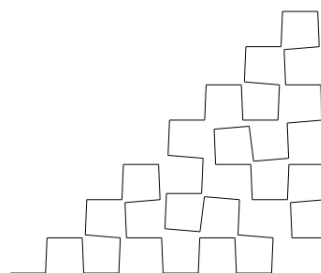
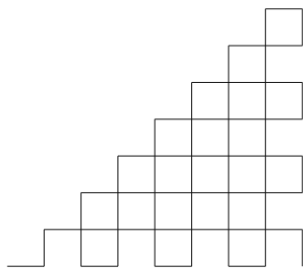
Verdere suggesties.

Hieronder staan een aantal suggesties voor onderzoek. Maak een keuze uit deze mogelijkheden of kies eigen onderzoeksvragen.

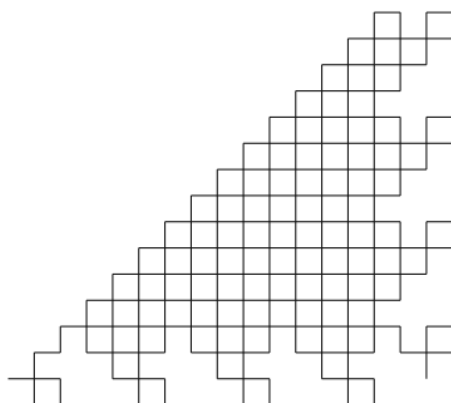
Vertel in duidelijke bewoordingen wat je hebt onderzocht en wat je hebt gevonden.

- Kies een vast getal n ($= 1, 2, 3, 4, 5, \dots$).
Bij alle looppatronen die je met de gekozen n keer vouwen kunt maken is de afstand van beginpunt tot eindpunt hetzelfde.
Onderzoek waarom dat zo is.
Opmerking: die afstand hangt natuurlijk af van de lengte van de strook waarmee je begint. Het is handig om met een strook van lengte 2^n te beginnen, want dan hebben de stukjes allemaal lengte 1.
- Kies een vast getal n ($= 1, 2, 3, 4, 5, \dots$).
Zet het beginpunt van een looppatroon op een vaste plaats op roosterpapier.
 - Waar liggen nu de mogelijke eindpunten van een looppatroon na n keer vouwen?
 - Onderweg van begin- naar eindpunt kunnen er punten zijn die verder van het beginpunt afliggen dan het eindpunt. Onderzoek welke afstanden er mogelijk zijn.Kun je de maximale afstand van een punt in het looppatroon tot het beginpunt uitdrukken in n ?

- Er zijn veel looppatronen waarbij knikpunten in het patroon elkaar raken. Dat wil zeggen dat je terugkomt bij een al eerder bezocht punt. Dit treedt op als RRR of LLL in het looppatroon voorkomt: na drie knikken R of L ben je terug waar je was. Als $n = 5$ heeft elk looppatroon ten minste één deelrijtje LLL (dat kun je controleren)
 - Laat zien dat voor elke $n > 5$ ieder looppatroon ten minste één deelrijtje LLL bevat.
 - Beredeneer dat het aantal deelrijtjes LLL in elk looppatroon bij toenemende n steeds groter wordt (in elk geval niet kleiner wordt).
- Bekijk onderstaande figuren: links een looppatroon met knikken van 90 graden, rechts hetzelfde patroon met knikken die iets minder dan 90 graden zijn. In de rechter figuur is duidelijk te zien dat het looppatroon geen overlapping heeft: een recht stukje wordt nooit twee keer doorlopen. Dus $RRRR$ of $LLLL$ kan niet voorkomen in een looppatroon.



- Kun je bewijzen dat $RRRR$ (of $LLLL$) niet mogelijk is in een looppatroon?
- Wanneer krijg je te maken met raakpunten die pas later in het patroon optreden, zoals in het hier gegeven looppatroon?
- In een looppatroon kun je symmetrieën vinden, zoals zichtbaar in het volgende plaatje. Dat geldt voor het hele plaatje, maar ook voor kleinere delen binnen het plaatje. Kun je beredeneren waar die verschillende vormen van symmetrie optreden?



- Neem uit een gegeven looppatroon een aaneengesloten blokje van 2^k letters L en R . Zo'n blokje letters heeft dus lengte 4, 8, 16, 32, ... ($k \geq 2$). Tel nu in dat aaneengesloten blokje het aantal keren dat L voorkomt en het aantal keren dat R voorkomt. Het verschil tussen die twee aantallen blijkt 0 of 2 te zijn.
 - Kun je dat beredeneren?
 Het verschil tussen het aantal R en het aantal L in een blokje noemen we de *discrepantie* van dat blokje. De vorige bewering zegt dus dat de speciale blokjes van lengte 2^k de discrepantie 0 of 2 hebben.
 - Onderzoek wat de maximale discrepantie is in een looppatroon dat hoort bij n keer vouwen en formuleer een vermoeden.

Einde