Didactiek

BRONJA VERSTEEG

Pizza's en repen

Leerlijn en didactiek van breuken in het po

In het basisonderwijs wordt gestart met de begripsvorming rond breuken, gevolgd door het ontwikkelen van oplossingsprocedures bij bewerkingen met breuken en een aanzet tot het vlot rekenen met breuken. In de onderbouw van het voortgezet onderwijs ligt de nadruk op formele rekenregels ($\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$, hoe reken je dat uit?) en het toepassen van deze breukenkennis binnen andere vakgebieden zoals de wiskunde, economie of aardrijkskunde. Bronja Versteeg beschrijft de didactiek en de opbouw van de leerlijn breuken, zoals die in het primair onderwijs wordt gehanteerd.

Docenten in het vo en mbo krijgen vaak van leerlingen te horen: 'Dat heb ik op de basisschool nooit gehad!' Dat heeft onder andere te maken met het formele niveau waarop docenten insteken, terwijl veel leerlingen dat niveau niet behaald hebben en niet verder zijn gekomen dan een concrete of misschien abstracte voorstelling van zaken.

Hoofdlijnen

De leerstof van de basisschoolmethode is opgebouwd uit verschillende fasen of hoofdlijnen: de begripsvorming, de ontwikkeling van oplossingsprocedures, het vlot leren rekenen en het flexibel toepassen van kennis in nieuwe situaties. De stappen zijn deels chronologisch, maar beïnvloeden elkaar onderling ook. Dit wordt duidelijk weergegeven in het model *Hoofdlijnen* uit het protocol Ernstige RekenWiskundeproblemen en Dyscalculie (ERWD)[1].

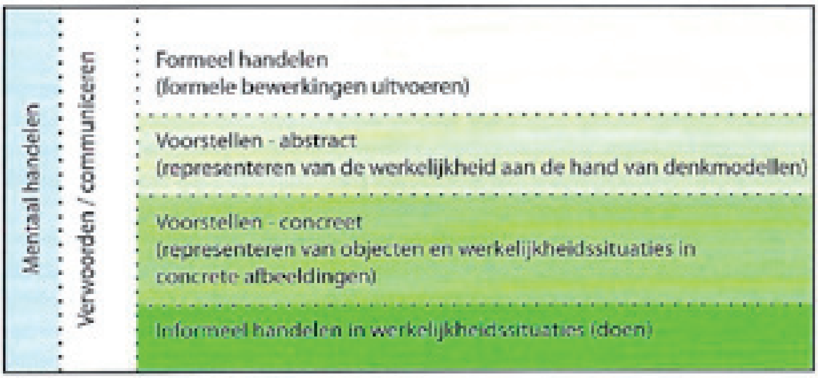
Naast de hoofdlijnen wordt in het protocol-ERWD (zie ook het artikel van Jaap Vedder en Mieke van Groenestijn op pagina 34) ook het *handelingsmodel* (afbeelding 2) beschreven. Dit model geeft inzicht in 'hoe' de docent vanuit de te behalen rekendoelen de onderwijsactiviteiten kan afstemmen op de onderwijsbehoeften van de leerlingen in de klas. Dit model, dat een goed uitgangspunt is bij de vormgeving van het rekenonderwijs in het primair onderwijs, wordt in dit artikel ook als uitgangspunt genomen.

1. Hoofdlijnen, uit: protocol-Ernstige RekenWiskundeproblemen en Dyscalculie

Begripsvorming

In de meeste rekenmethoden van het basisonderwijs begint de leerlijn breuken in jaargroep 6. In de voorgaande groepen is wel gesproken over de helft en een kwart binnen de lijn van bijvoorbeeld klokkijken of het meten, maar in groep 6 wordt in de methode expliciet gesproken over de leerlijn breuken en wordt bijvoorbeeld ook de breukenstreep geïntroduceerd. Het belangrijke doel van deze fase is de betekenisverlening en het vullen van het breukenconcept. Het breukenconcept is een netwerk van kennis, vaardigheden en inzichten die door de leerlijn heen steeds verder uitgebouwd wordt. Het breukenconcept is nodig om uiteindelijk abstracte bewerkingen met breuken met inzicht uit te kunnen voeren. Vanuit de concrete situatie (context) van bijvoorbeeld het eerlijk verdelen van een pizza, taart, pannenkoek, reep, stokbrood of cake onder een aantal mensen wordt duidelijk dat bij breuken elk deel even groot moet zijn. Een pizza verdelen met vier mensen: je krijgt één van de vier gelijke delen, dat schrijf je als $\frac{1}{4}$ pizza. In eerste instantie worden stambreuken (breuken met teller 1) gebruikt, later ook niet-stambreuken en samengestelde breuken.

In de rekenmethoden wordt vervolgens de stap gezet van handelen in 'werkelijkheidssituatie' (snijden van een taart of stokbrood) naar het 'concreet voorstellen' aan de hand van afbeeldingen van een taart of een stokbrood. De opdracht die gegeven wordt is bijvoorbeeld: kleur $\frac{3}{4}$ deel van de taart. De afbeeldingen ondersteunen de relatie met de werkelijkheid, maar op een abstracter niveau. Je kunt de taart niet meer snijden, maar nog wel tekenen en kleuren. In het handelingsniveau 'abstract voorstellen', wordt de werkelijkheid nog een stapje abstracter weergegeven en worden leerlingen ondersteund met abstracte breukenmaterialen en modellen (zie afbeelding 3). In de begripsvormingsfase worden bijvoorbeeld cirkels en stroken gebruikt om de breuk te bepalen (welk deel is het), maar ook om breuken met elkaar te vergelijken. De afwisseling van modellen en materialen met verschillende vormen is belangrijk om te voorkomen dat leerlingen een kwart blijven zien als een kwart cirkel.



2. Handelingsmodel

Verwoorden van handelingen

Leerlingen vinden het vreemd dat 'hoe groter de noemer is, hoe kleiner het deel is'. Door materiaal te gebruiken zien de leerlingen dat een strook in 8 stukken kleinere stukken oplevert dan een strook in 4 stukken (waarde van een breuk). Door breuken te vergelijken en letterlijk op elkaar te leggen, wordt ook duidelijk dat twee stukken van een zesde deel passen in één stukje van een derde deel (gelijkwaardigheid). Het is alle twee hetzelfde deel van een strook, maar het bestaat wel uit een verschillend aantal stukjes. Ook de maatbeker wordt ingezet om breuken te vergelijken. Met het gebruik van maatbekers is de stap naar de getallenlijn niet zo groot meer. Daarnaast geeft een maatbeker van een liter en een onderverdeling in deciliters ook een ingang om de relatie tussen breuken en kommagetallen inzichtelijk te maken. Het verwoorden van de handelingen en het benoemen van het resultaat is binnen dit proces essentieel. Het verwoorden van de verschillende stappen dwingt de leerlingen de breukenkennis die zij opdoen expliciet te maken. Hierdoor wordt het ook mogelijk om op een steeds hoger abstractieniveau te werken. De relatie tussen breuken en het delen wordt expliciet gemaakt bij 'een deel van een hoeveelheid nemen' of zoals in afbeelding 3 'een deel van een geheel met een waarde'. Daarbij berekenen de leerlingen bijvoorbeeld $\frac{1}{12}$ deel van 24 euro.

Trucjes

Als een leerling een onvoldoende breukenconcept ontwikkelt, worden sommen als $\frac{3}{4}$ deel van 2400 opgelost met een 'trucje' (2400 delen door 4 en dan keer 3). Deze leerlingen krijgen moeite met het toepassen van bewerkingen met breuken in nieuwe situaties waarin het trucje niet meer precies zo opgaat ($1\frac{3}{4}$ x 2400). In de begripvormingsfase ontwikkelen leerlingen concepten. In eerste instantie maken ze een kennisnetwerkje met informatie als: wat is een breuk, hoe kan een breuk er uitzien. Maar later ook: de relatie tussen $\frac{1}{4}$ deel nemen en delen door 4; $\frac{1}{3}$ deel is hetzelfde deel als $\frac{3}{9}$ deel en de relatie tussen $\frac{1}{2}$ deel en 50% en 0,5 en 1 op de 2. De leerlingen gaan onderliggende rekenwiskundige concepten op een steeds formeler niveau begrijpen.

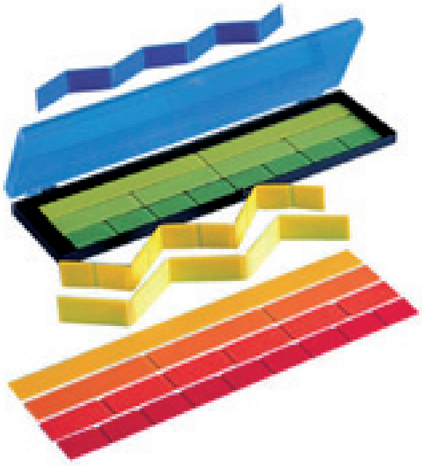
Ontwikkelen van oplossingsprocedures

Aansluitend aan de begripsontwikkeling in concrete contexten, ontwikkelen leerlingen ook oplossingsprocedures bij de bewerkingen die ze tegen komen. De procedures bestaan dan bijvoorbeeld uit herhaald optellen, gelijknamig maken, helen eruit halen, het gebruik van de tafels en de deeltafels. De strook en de getallenlijn ondersteunen deze oplossingsprocedures. Het strokenmodel geeft ondersteuning bij het berekenen van een deel van een hoeveelheid, zoals $\frac{3}{4}$ deel van 240. Het model lokt de stappen uit: hoeveel is $\frac{1}{4}$ deel waard? Als je weet dat $\frac{1}{4}$ deel 60 waard is, hoeveel is dan $\frac{3}{4}$ deel waard?

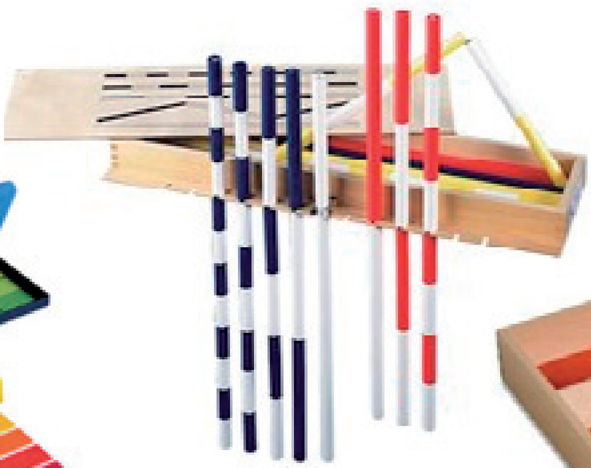
De getallenlijn ondersteunt het optellen, aftrekken en het vermenigvuldigen van breuken. Ook het vermenigvuldigen en delen van breuken vraagt in eerste instantie een concrete context om vervolgens te komen tot oplossingsprocedures. Door voor de zwakke rekenaars te differentiëren binnen de fasen van het handelingsmodel (werken met materialen en modellen op een concreter handelingsniveau) en daarmee aan te sluiten bij de onderwijsbehoeften, is het mogelijk om met deze leerlingen ook met bewerkingen met breuken aan de slag te gaan. Ontwikkelen van procedu-

Referentieniveau 1F breuken:

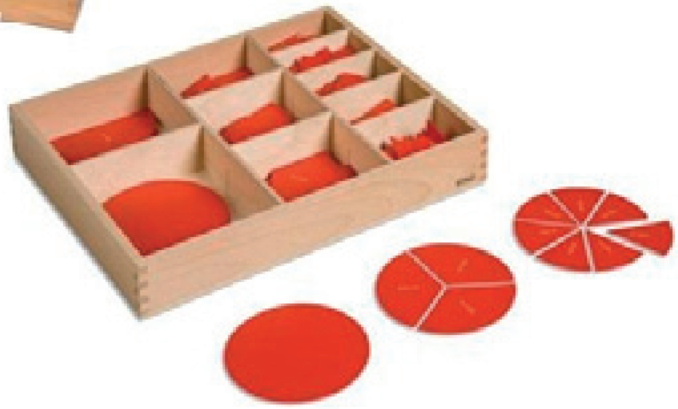
- Vergelijken en ordenen van eenvoudige breuken en deze in betekenisvolle situaties op een getallenlijn plaatsen: $\frac{1}{4}$ liter is minder dan $\frac{1}{2}$ liter
- Omzetten van eenvoudige breuken in decimale getallen: $\frac{1}{2}$ = 0,5; 0,01 = $\frac{1}{100}$
- Optellen en aftrekken van veel voorkomende gelijknamige en ongelijknamige breuken binnen een betekenisvolle situatie: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$
- Een deel van een geheel getal nemen: $\frac{1}{3}$ deel van 150 euro
- In een betekenisvolle situatie een breuk vermenigvuldigen met een geheel getal



3. *Breukenstroken*



Breukenstokken



Breukendoos

res in de fasen van 'doen' en 'realistische denkmodellen' is voor deze leerlingen essentieel.

Vlot leren rekenen

Na de fase van het ontwikkelen van oplossingsprocedures bij bewerkingen vraagt het handelingsmodel steeds vlottere procedures op steeds formeler niveau. Aan de ene kant gaat het om het vlot bepalen van de juiste strategie bij de bewerking en aan de andere kant om het vlot oplossen van de som. Daar is veel oefening voor nodig. Voor de zwakke rekenaars in po, vo en mbo blijkt deze overstap te groot. Deze leerlingen hebben veel langer concrete ondersteuning nodig om de bewerking uit te kunnen werken. Te snel van de concrete fase afstappen betekent vaak het aanleren van een trucje zonder inzicht: delen door een breuk is het vermenigvuldigen met het omgekeerde. Maar zwakke rekenaars moeten te veel van dit soort onbegrepen kennis onthouden aan de hand van trucs die geen betekenis voor hen hebben. En daar gaat dan ook vaak iets mis: trucs worden door elkaar gehaald, verkeerd ingezet of gewoon vergeten. Voor de betere rekenaars is het oefenen zonder directe ondersteuning met denkmodellen juist essentieel om te kunnen werken op het hoge abstractieniveau dat de wiskunde in het vo vraagt.

Flexibel toepassen

Om oplossingsstrategieën flexibel in te kunnen zetten in nieuwe situaties moeten leerlingen betekenis kunnen geven aan rekensituaties met breuken en begrijpen welke kennis en vaardigheden zij op dat moment kunnen gebruiken om een rekenprobleem aan te pakken en op te lossen. Dit vraagt strategisch denken en handelen. Voor de betere rekenaars levert dit vaak geen echte problemen op. Na een korte instructie lukt het hen deze rekenregels in andere situaties in te zetten. Het automatiseren van de koppeling tussen de eenvoudige en veel gebruikte breuken, percentages en kommagetallen (ook $\frac{1}{20}, \frac{1}{25}, \frac{1}{100}$) is bijvoorbeeld een belangrijke voorwaarde om flexibel te kunnen rekenen. Het is daarom essentieel om in de fase van de begripsvorming de relatie tussen breuken en kommagetallen in te zetten en deze vanuit inzicht op te bouwen.

Didactische principes doortrekken

Ook voor de zwakke rekenaars in vo en mbo is het belangrijk om (binnen RT-situaties) het handelingsmodel in te zetten. Het doortrekken van didactische principes van het po naar vo en mbo geeft dan een aantal consequenties. In het 'rekenlokaal' van vo en mbo zouden rekenmaterialen als breukstokken of breukenstroken moeten liggen zodat de docent deze stappen in het handelingsmodel kan zetten. Ten tweede is het belangrijk dat er voldoende tijd is voor de verschillende hoofdlijnen en handelingsniveaus. De ene leerling heeft meer tijd nodig om de verschillende fasen onder de knie te krijgen dan andere. Van de docent wordt verwacht dat hij/zij afstemt op de onderwijsbehoeften van de leerlingen.

Bronja Versteeg is senior adviseur bij Giralis Groep.