Feedback over aftrekmethoden van leerlingen via de lege getallenlijn[1]

- mogelijkheden en uitdagingen -

J.A. Vermeulen & T.J.H.M. Eggen
Universiteit Twente/Cito, Arnhem

1 inleiding

In het huidige reken-wiskundeonderwijs worden leerlingen tijdens de rekenles geregeld gevraagd uit te leggen hoe ze tot hun antwoord zijn gekomen, zodat de leraar leerlingen kan helpen bij het verwoorden en vergelijken van verschillende oplosstrategieën (Kraemer, 2011). Hiermee wordt de nadruk meer gelegd op het geven van feedback die leerlingen ondersteunt bij de innovatie van verschillende oplosstrategieën (Fuson & Fuson, 1992; Klein, Beishuizen & Treffers, 1998). Het klassikaal bespreken van oplossingen is niet alleen een vorm van instructie, maar is tegelijkertijd een vorm van assessment, omdat het de leraar informatie geeft over de leervorderingen van de leerling. Deze integratie van assessment en instructie wordt in de literatuur over assessment beschreven als *Assessment for Learning* (Assessment Reform Group, 1999); de informatie die de leraar over de oplossingswijzen van leerlingen verzamelt, wordt direct gebruikt om daar waar nodig de instructie aan te passen zodat het leerproces van de leerling wordt bevorderd. Assessment en feedback hebben hierin een formatieve functie. Dit wil zeggen dat informatie over het leerproces en over de leeruitkomsten van leerlingen wordt gebruikt om het leren te bevorderen (Bennet, 2011).

Voor het zo goed mogelijk ondersteunen van leerlingen bij de innovatie van verschillende oplosstrategieën is het belangrijk dat de leraar informatie heeft over welke strategieën de leerling op dat moment beheerst en in welke mate. Naast klassikale discussies over oplossingsstrategieën, bestaan er ook meer gestructureerde assessmentmethoden, zoals diagnostische interviews, voor het verzamelen van informatie over oplossingswijzen en misconcepties van leerlingen (Moyer & Milewics, 2002). Een assessment methode is diagnostisch van aard als het gericht is op het verzamelen van gedetailleerde informatie over voorkennis, fouten en denkpatronen (Keeley & Tobey, 2011). Hiermee ligt echter niet vast met welk doel deze informatie wordt verzameld; diagnostische assessment informatie kan zowel formatief als summatief worden gebruikt. Assessment heeft een summatieve functie als het gebruikt wordt om te oordelen over de prestaties van leerlingen, bijvoorbeeld in een zak-slaagbeslissing (Bennett, 2011). In de huidige studie richten we ons op de ontwikkeling van een diagnostisch instrument dat primair voor formatieve doeleinden gebruikt kan worden.

Het afnemen van diagnostische interviews vergt veel van de interviewvaardigheid van de leraar. Onderdeel van deze vaardigheid is het op de juiste momenten doorvragen, goed luisteren en te interpreteren wat de leerling vertelt (Moyer & Milewics, 2002). Een van de valkuilen is het stellen van suggestieve vragen die gericht zijn op het toetsen of de leerling het antwoord weet, in plaats van na te gaan hoe de leerling tot zijn/haar antwoord is gekomen. Daarnaast zijn niet alle leerlingen in staat hun oplossingsproces te verbaliseren, waardoor het moeilijker is betrouwbare en valide informatie te verzamelen (Leighton, 2004). Bovendien vergen dergelijke interviews veel tijd doordat ze vaak één op één worden afgenomen. Dit maakt het frequent afnemen van dergelijke interviews met een formatieve functie minder aantrekkelijk voor leraren. Ondanks ontwikkelingen op het gebied van ICT in het onderwijs, is er in Nederland nog relatief weinig gedaan aan het efficiënter maken van het verzamelen van diagnostische informatie met behulp van ICT.

Met deze studie dragen we bij aan de ontwikkeling van een diagnostisch instrument voor aftrekken tot 100 in groep 5. In het bijzonder richt dit onderzoek zich op de mogelijkheden en uitdagingen om met behulp van de lege getallenlijn (een rechte lijn zonder indicatoren en getallen) leraren handelingsgerichte informatie te geven over het oplossingsproces van individuele leerlingen. De lege getallenlijn werd met de komst van realistisch reken-wiskundeonderwijs in Nederland in het begin van de jaren negentig geherintroduceerd als didactisch model voor het leren optellen en aftrekken (Klein,e.a., 1998; Treffers & De Moor, 1990). Niet alleen geeft een lege getallenlijn leerlingen de mogelijkheid hun oplossingsproces te laten zien aan de leraar, ze krijgen door het gebruik van de getallenlijn tijdens het oplossingsproces feedback over welke stappen ze hebben genomen en welke stappen ze nog moeten zetten. Hierdoor dient de getallenlijn als een hulpmiddel (c.f., scaffold, Vygotsky, 1978) waardoor de leerling mogelijkerwijs in staat is opgaven op te lossen die hij/zij zonder hulp niet op zou kunnen lossen (Klein, e.a., 1998).

De keuze om een diagnostisch instrument te ontwikkelen specifiek voor groep 5, is gebaseerd op de inhoud van het curriculum in groep 5, die aanzienlijk breder is dan in groepen 3 en 4. Door de hervorming van het rekenwiskundeonderwijs is het aanleren van verticaal (kolomsgewijs, onder elkaar) rekenen uitgesteld tot (medio-eind) groep 5 (Klein e.a., 1998). Leerlingen worden in groep 5 voorbereid op het gebruik van het formele cijferalgoritme waarbij leerlingen verticaal (onder elkaar) rekenen in plaats van horizontaal (van links naar rechts). Het aanleren van nieuwe procedures gaat doorgaans gepaard met het ontstaan van (tijdelijke) misconcepties en systematische fouten (Ashlock, 2006). Daarnaast leren leerlingen in groep 5 nieuwe operaties als vermenigvuldigen en delen en leren ze rekenen tot 100 en sommigen zelfs tot 1000 (Treffers, Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 1999). Het ontwikkelen van een diagnostisch instrument voor groep 5 biedt de mogelijkheid de diagnostische informatie ook preventief en proactief te gebruiken om niet alleen het leerproces van leerlingen met rekenproblemen, maar van *alle* leerlingen te bevorderen (Crisp, 2012; Stobart, 2008).

Voor het ontwikkelen van een diagnostisch instrument voor aftrekken in groep 5 maken we gebruik van het *Evidence Centered Design* (ECD; Rupp, Gushta, Mislevy & Schaffer, 2010; Leighton & Gierl, 2007) raamwerk. In het ECD-raamwerk wordt wetenschappelijke kennis over de relatie tussen cognitieve processen, taakkenmerken en antwoordpatronen gebruikt om vervolgens op basis van de antwoordpatronen en taakkenmerken inferenties te maken over de cognitieve processen die bij een leerling hebben plaatsgevonden. Het ECD-raamwerk bestaat uit een leerlingmodel, bewijsmodel, taakmodel, montagemodel en een presentatiemodel. In het leerlingmodel wordt beschreven hoe leerlingen de vaardigheid ontwikkelen. Het taakmodel beschrijft taken waarmee deze vaardigheden aangeleerd en getoetst kunnen worden. Om op basis van de prestaties op taken uit het taakmodel conclusies te kunnen trekken over de ontwikkeling van de leerling, is een bewijsmodel nodig. Het bewijsmodel bestaat uit scoringsregels, in dit geval het coderingssysteem dat gebruikt wordt om de oplossingen van leerlingen op de getallenlijn te duiden. Daarnaast is in het bewijsmodel vastgelegd welke statistische modellen nodig zijn om het taakmodel aan het leerlingmodel te koppelen. Hoe deze koppeling in elkaar steekt, is beschreven in het montagemodel. Tot slot is in het presentatiemodel beschreven hoe de taken uit het taakmodel aan de leerling worden aangeboden (Rupp e.a., 2010).

Met dit onderzoek wordt beoogd bij te dragen aan wetenschappelijke kennis over de kenmerken die een diagnostisch instrument voor rekenen-wiskunde moet hebben om leraren feedback te geven die bruikbaar is voor het nemen van formatieve beslissingen. In deze kleinschalige verkennende studie zullen de volgende onderzoeksvragen worden beantwoord:

1 Hoe zijn de oplossingen van leerlingen op de lege getallenlijn gerelateerd aan de getalskenmerken van de items?
2 In welke mate kunnen de oplossingen van een leerling op de lege getallenlijn zodanig worden gecodeerd dat leraren op een efficiënte wijze feedback over het oplossingsproces van de leerling krijgen?

2 methode

instrumenten

In de eerste fase van het onderzoek zijn twee taken afgenomen, die bestonden uit tien tweecijferige aftrekopgaven tot 100. De eerste taak (*T*1) bestond uit kale items (fig.1) en de tweede taak (*T*2) bestond uit items met dezelfde getallen als in *T*1, maar nu weergegeven in een context (fig.2).

	Zonder tiental overschrijding		Met tiental overschrijding
A1	75 – 25 =	B1	70 – 35 =
A2	52 – 40 =	B2	80 – 43 =
A3	71 – 11 =	B3	83 – 57 =
A4	79 – 50 =	B4	62 – 58 =
A5	95 – 20 =	B5	60 – 35 =

figuur 1: items taak 1

Ana heeft 75 punten behaald. Elsa heeft 25 punten minder.
Hoeveel punten heeft Elsa dan?

A1

figuur 2: context gebruikt in alle opgaven uit taak 2

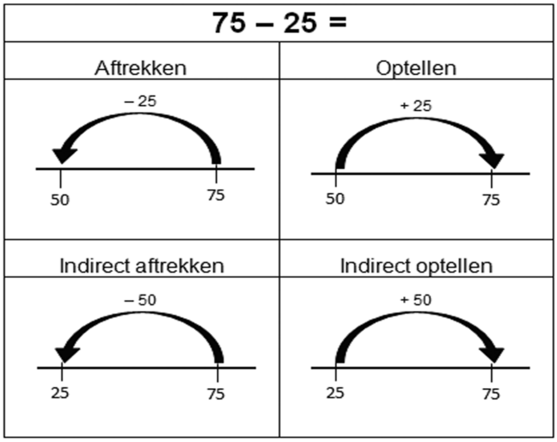
participanten en procedure

Beide taken zijn door dertig leerlingen van twee basisscholen op twee verschillende dagen gemaakt. Tijdens elk afnamemoment kreeg de leerling een kaartje met daarop een aftrekopgave en werd de leerling gevraagd de opgave op te lossen (kladpapier was toegestaan). Daaropvolgend werd de leerling gevraagd de opgave opnieuw op te lossen op een lege getallenlijn. Deze procedure werd herhaald totdat alle tien de opgaven van de taak waren gemaakt. In totaal zijn 600 oplossingen op de getallenlijn verzameld en op video opgenomen. Aan het einde van het schooljaar zijn de oplossingen van de leerlingen in een interview voorgelegd aan de twee leraren. Leerlingen kregen in principe geen instructie over hoe ze moesten rekenen op de lege getallenlijn, maar tijdens de afname bleek dat zeven leerlingen de taken niet konden maken zonder een (herhalings)instructie over het gebruik van de lege getallenlijn.

Op de Panama-conferentie van eind januari 2013 is tijdens een werkgroep een deel van de resultaten aan conferentiedeelnemers voorgelegd. Tijdens deze werkgroep hebben de deelnemers van de Panama-conferentie bijgedragen aan de ontwikkeling van een coderingssysteem voor de oplossingen op de getallenlijn. Bij de werkgroep waren ongeveer dertig experts aanwezig, hiervan hebben zeventien experts (56, 8 procent) hun schriftelijke antwoorden ingeleverd. Uit de groep van zeventien experts hadden zes experts een hoofdzakelijk wetenschappelijke achtergrond, tien experts een praktische achtergrond en had één expert een combinatie van die twee.
Tijdens de expertmeeting werden aan de experts enkele oplossingen van leerlingen op de getallenlijn voorgelegd en werden zij gevraagd relevante informatie voor leraren eruit te halen. Vervolgens ontvingen ze citaten uit de interviews van de leraren en werd hen gevraagd wat de mogelijkheden en uitdagingen waren wat betreft het gebruik van de lege getallenlijn als diagnostisch hulpmiddel. Voor de antwoorden van de experts moet nog een coderingsschema worden ontwikkeld. Deze data zijn nog niet meegenomen in de beantwoording van de onderzoeksvragen.

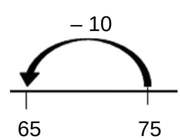
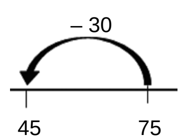
coderingssysteem voor oplossingen op de lege getallenlijn

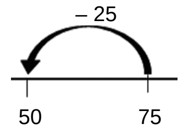
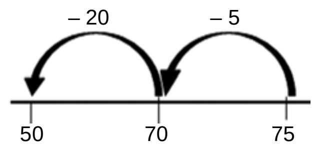
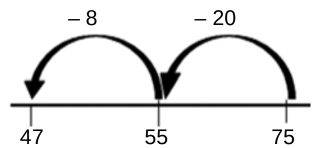
Voor aftrekken geldt bijvoorbeeld dat leerlingen inzicht in de verschillende betekenissen van het minteken (–) in termen van ‘verschil bepalen’, ‘indirect optellen’ en ‘eraf halen’ moeten ontwikkelen (Fuson & Fuson, 1993; Hop, 2012; Kraemer, 2011). Of leerlingen indirect (‘verschil bepalen’) dan wel direct aftrekken, geeft informatie over hun conceptuele ontwikkeling voor wat betreft de relatie tussen optellen en aftrekken. Daarom zijn in eerste instantie alle oplossingen gecodeerd in termen van direct aftrekken, indirect aftrekken, indirect optellen en direct optellen (fig.3).



figuur 3: codering verschillende interpretaties aftrekken

Op basis van het coderingssysteem zoals gebruikt in 'Diagnosticeren en Plannen in de Onderbouw (Cito, 2008) en in de PPON (Periodieke Peilingen van het Onderwijs in Nederland) 'Medio peiling voor rekenen-wiskunde' is het coderingssysteem zoals weergegeven in figuur 4 ontwikkeld (Kraemer, 2009; 2011, pag.152).

Code	Omschrijving	Voorbeeldafbeelding
Juiste antwoord	Leerling beantwoordt de opgave correct.	n.v.t.
Rekenkundig correct	De leerling maakt geen rekenfouten in de bewerkingen op de getallen-lijn.	n.v.t.
Juiste richting	De leerling zet het laagste getal links ten opzichte van het hoogste getal.	n.v.t.
10-sprong	De leerling telt er 10 bij op of trekt er 10 vanaf. (waarde van de boog)	
Veelvoud van 10	De leerling telt er een veelvoud van 10 bij op of trekt er een veelvoud van 10 vanaf.	

Samengestelde sprong	De leerling telt er een samengesteld (niet afgerond getal) bij op. Dit houdt in dat de leerling de eenheden en de tientallen niet splitst, maar beide tegelijk erbij optelt of er vanaf trekt.	
Via het tiental	De leerling telt er een zodanige hoeveelheid bij op, of trekt er een zodanige hoeveelheid vanaf dat hij/zij op een tiental uitkomt.	
Eenheden over het tiental	De leerling springt niet via het tiental, maar telt in één keer de eenheden erbij op, of trekt er in één keer alle eenheden vanaf. Deze sprong is kleiner dan een 10sprong.	

figuur 4: coderingssysteem oplossingsstappen op de getallenlijn.

3 resultaten

gebruik kladpapier

Van de dertig leerlingen gebruikten vijftien (50,0 procent) leerlingen in zowel *T*1 als *T*2 geen kladpapier en tien leerlingen gebruikten bij beide taken kladpapier. Van deze tien leerlingen gebruikten vier leerlingen zowel in *T*1 als in *T*2 geen lege getallenlijn en gebruikten vijf leerlingen bij beide taken het kladpapier om een lege getallenlijn te tekenen. Tot slot tekende één leerling wel een getallenlijn in *T*2, maar niet in *T*1. Voor *T*1 werd door dertien (43,3 procent) leerlingen kladpapier gebruikt, voor *T*2 waren dit twaalf (40,0 procent) leerlingen. Van de dertien leerlingen, tekenden vijf (38,5 procent) leerlingen een lege getallenlijn op het kladpapier. Van de twaalf leerlingen in *T*2, waren dit er zes (50 procent). Slechts één leerling gebruikte bij *T*2 wel kladpapier, maar tekende geen lege getallenlijn en gebruikte bij *T*1 het kladpapier niet. Tot slot waren er twee leerlingen die bij *T*1 wel kladpapier gebruikten, maar geen lege getallenlijn tekenden, en bij *T*2 geen kladpapier gebruikten. Doordat hetzelfde kladpapier voor de gehele taak is gebruikt, is niet na te gaan in hoeverre het gebruik van kladpapier afhing van kenmerken van de opgaven.

verschillende interpretaties aftrekken

Uit figuur 5 blijkt dat bij het merendeel van de gecodeerde oplossingen de directe aftrekstrategie is gebruikt. In slechts 16,1 procent van de oplossingen was sprake van een indirecte strategie. Opgemerkt moet worden dat dit percentage indirect aftrekken dan wel optellen een overschatting is, omdat de oplossingen op de getallenlijn van opgave *B*1 (70 – 35 =) niet eenduidig te coderen zijn. Daarom zijn in figuur 5 ook de aantallen en percentages zonder deze opgave weergegeven. In dat geval is er in 9,7 procent van de oplossingen sprake van een indirecte aftrekstrategie. Het gebruik van een indirecte of directe strategie was nauwelijks gerelateerd aan de kenmerken van de opgaven. Het merendeel van de leerlingen (*N* = 28; 93,3 procent) gebruikte altijd een directe strategie en twee leerlingen (6,7 procent) gebruikten altijd een indirecte strategie.

	Alle opgaven		Zonder opgave B1	
Strategie	**Aantal**	**Percentage**	**Aantal**	**Percentage**
Aftrekken	526	78,4%	472	84,4%
Optellen	21	3,1%	19	3,4%
Indirect aftrekken	80	11,9%	30	5,4%
Indirect optellen	28	4,2%	24	4,3%
Onduidelijk	16	2,4%	14	2,5%
Totaal	671*		559	

* Meer dan 600 omdat 70 – 35 = zowel als indirect als direct gecodeerd is, omdat dit tot dezelfde oplossing op de getallenlijn leidt.

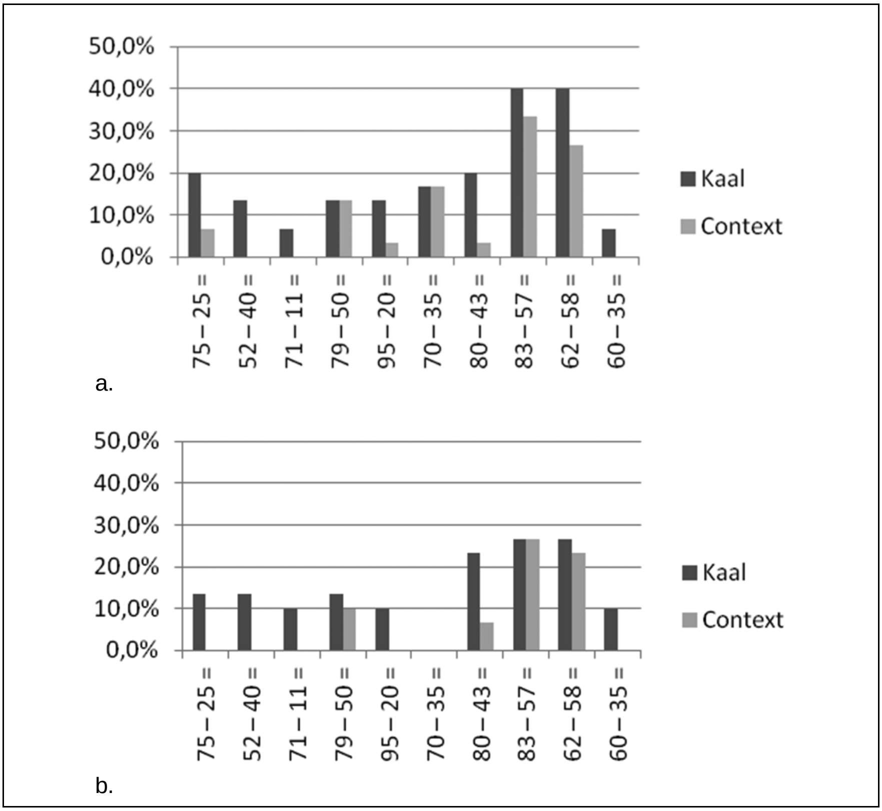
figuur 5: verschillende interpretaties van aftrekken

juiste antwoord

De opgaven bleken zonder getallenlijn, uit het hoofd, gemakkelijk te zijn (fig.6). *T*2 (context, tweede afnamemoment) was gemakkelijker dan *T*1 (kaal). Opgaven met tientaloverschrijding (*B*) bleken moeilijker te zijn dan items zonder tientaloverschrijding (*A*); in deze laatste categorie werden minder fouten gemaakt dan in *B* items.

rekenkundig correct

Van de zeshonderd oplossingen op de lege getallenlijn waren er 546 (91,0 procent) rekenkundig correct. Dit betekende niet automatisch dat de leerling ook het juiste antwoord op de opgave gaf, maar hield in dat de leerling geen rekenfouten maakte in de oplossing op de getallenlijn. Van negen (30,0 procent) van de dertig leerlingen waren alle twintig oplossingen op de lege getallenlijn rekenkundig correct. Van de overige 70 procent van de leerlingen hadden de meeste leerlingen, met uitzondering van één leerling die slechts elf opgaven rekenkundig juist oploste, veertien (70,0 procent) van de items rekenkundig correct op de getallenlijn opgelost. In zowel *T*1 als *T*2 werden bij item *B*4 (62 – 58 =) het vaakst rekenfouten gemaakt in de oplossingen op de getallenlijn.



figuur 6: percentage onjuiste oplossingen (a) zonder en (b) met lege getallenlijn

juiste richting

Vier (13,3 procent) leerlingen rekenden systematisch in de verkeerde richting, wat inhoudt dat deze leerlingen bij elk item het hoogste getal links ten opzichte van het laagste getal op de getallenlijn plaatsten. Het merendeel van de leerlingen (*N* = 20; 66,7 procent) rekende altijd in de juiste richting. De overige leerlingen (*N* = 6; 20,0 procent) rekenden niet bij elk item in de juiste richting; in hoeverre dit afhing van de itemkenmerken verschilde echter van leerling tot leerling.

kenmerken sprongen op de lege getallenlijn

Slechts drie (10,0 procent) leerlingen gebruikten nooit een tiensprong om een opgave op te lossen. Over de zeshonderd gecodeerde getallenlijnen werd de tiensprong 122 (20,3 procent) keer waargenomen. Het gebruik van een veelvoud van tien bleek echter populairder (N = 436; 72,7 procent). Geen enkele leerling gebruikte in elke opgave een tiensprong. Wel hadden twee (6,67 procent) leerlingen een duidelijke voorkeur voor het gebruik van de tiensprong. Zij gebruikten voor elf (55,0 procent) items één of meerdere tiensprongen. De opgave *A*3 (71 – 11 =) heeft duidelijk kenmerken die het gebruik van een tiensprong voor de hand liggend maakt. Bij deze opgave werd de tiensprong in *T*1 22 (73,3 procent) keer gebruikt en in *T*2 24 (80 procent) keer. Deze opgave leende zich niet voor het gebruik van een veelvoud van tien. Desalniettemin waren er drie (10,0 procent) leerlingen waarbij een veelvoud van tien werd geobserveerd. Hiervan gebruikte één leerling een rekenkundig onjuiste oplosstrategie en gebruikte de andere twee leerlingen een indirecte strategie waarbij ze het verschil tussen 11 en 71 bepaalden. Vervolgens is ook gecodeerd in hoeveel stappen de leerling op de lege getallenlijn heeft gezet om de opgave op te lossen. Hieruit bleek dat de meeste opgaven in twee sprongen werden opgelost (fig.7). Bij 26 (86,7 procent) van de leerlingen waren twee sprongen de modus. Daarnaast bleken twee leerlingen bij alle *T*1 en *T*2 alle opgaven in slechts één sprong op te lossen. Deze leerlingen gebruikten in wezen niet de getallenlijn, zoals bedoeld, maar rekenden uit hun hoofd. Het maximum aantal sprongen dat gebruikt is om een opgave op te lossen, is negen.

Aantal sprongen	Frequentie	Percentage
1	153	25,5%
2	352	58,7%
3	68	11,3%
4	17	2,8%
5	7	1,2%
6	0	0,0%
7	0	0,0%
8	0	0,0%
9	1	0,2%
Totaal	600	

figuur 7: frequenties en percentages van het aantal sprongen op de lege getallenlijn

kenmerken tussen antwoorden op de lege getallenlijn

De resultaten laten een grote spreiding zien tussen leerlingen wat betreft het springen via het tiental. Drie leerlingen sprongen nooit via het tiental; dit waren tevens de leerlingen die nooit een tiensprong gebruiken. Deze leerlingen sprongen voornamelijk met veelvouden van tien en samengestelde sprongen. Springen via het tiental blijkt samen te hangen met de getalskenmerken van de opgaven. Zowel in $T1$ als $T2$ werd in opgave $A2$, $A4$ en $A5$ het minst via het tiental gesprongen. Deze drie opgaven waren opgaven waar leerlingen een veelvoud van tien moesten aftrekken. Hierdoor is het minder voor de hand liggend dat ze via het tiental springen. Desalniettemin hebben vier leerlingen bij deze opgaven via het tiental gesprongen. Daarnaast bleek dat door de meeste leerlingen via het tiental werd gesprongen bij opgaven $B1$, $B2$ en $B5$. Deze opgaven kenmerkten zich echter allemaal met veelvoud van tien – $2n$ (bijvoorbeeld $B1$: 70 – 35 =). Eén leerling noteerde nooit tussenantwoorden op de getallenlijn.

4 discussie

Dit onderzoek is ontworpen om bij te dragen aan de ontwikkeling van een diagnostisch instrument voor aftrekken tot honderd. Specifiek is onderzocht hoe de opgavenkenmerken gerelateerd zijn aan de oplossingsstappen die leerlingen op de lege getallenlijn zetten. Deze studie is gericht op de ontwikkeling van een diagnostisch instrument met een formatieve functie, daarom is een coderingssysteem van de oplossingen van leerlingen op de lege getallenlijn ontwikkeld (zie par.2, ‘methode). De oplossingen van de leerlingen worden zodanig samengevat dat strategieën, fouten en bijbehorende misconcepties kunnen worden opgespoord. Met deze informatie kunnen de leraren hun instructie aan het ontwikkelingsniveau van de leerling aanpassen. Dit houdt in dat leraren de informatie direct moeten kunnen gebruiken om de leeromgeving van een leerling zodanig aan te passen dat het leren wordt geoptimaliseerd. In de onderstaande paragrafen zijn de resultaten beschreven in relatie tot het ECD-raamwerk (Rupp e.a., 2010).

leerlingmodel

In het leerlingmodel worden de oplosstrategieën en fouten van leerlingen gerelateerd aan een verwacht ontwikkelingspatroon. Verwacht werd dat naarmate leerlingen vaardiger worden in optellen en aftrekken, zij geen visueel model in de vorm van een getallenlijn meer nodig hebben, omdat zij nu een mentale representatie hebben om op terug te vallen (Kraemer,

2011). Echter, dat een groot deel van de leerlingen die geen herhaling hadden gehad in het gebruik van de lege getallenlijn aan het begin van groep 5 geen idee hadden hoe zij moesten aftrekken op de getallenlijn impliceert dat dit mentale model nog niet voldoende aanwezig is om op terug te vallen. Ook impliceert het dat het onwaarschijnlijk is dat deze leerlingen een getallenlijn visualiseren wanneer zij opgaven uit het hoofd oplossen.
Van leerlingen die bij *T*1 of *T*2 kladpapier gebruikten, tekende tussen een derde en de helft van de leerlingen een lege getallenlijn. Dit laat zien dat sommige leerlingen een duidelijke voorkeur hadden voor de lege getallenlijn. In de voorlopige analyses is echter nog niet onderzocht of de leerlingen die op hun kladpapier een getallenlijn tekenen de opgaven op een andere manier oplosten dan leerlingen die dit niet deden.
Wat betreft het gebruik van de indirecte dan wel directe optel- of aftrekstrategie bleek uit de resultaten dat het grootste deel van de leerlingen een voorkeur had voor een directe strategie. Dit zou kunnen betekenen dat deze leerlingen nog geen begrip hebben van de relatie tussen optellen en aftrekken. Echter, als gekeken wordt naar de getalskenmerken van de opgaven, leende alleen item *B*5 (62 – 58 =) zich voor een indirecte optel- of aftrekstrategie. Daarnaast kan het ook te maken hebben met hoe leerlingen geleerd hebben de getallenlijn te gebruiken. Uit onderzoek blijkt dat leerlingen zich door de instructie niet vrij voelen in hoe ze de lege getallenlijn gebruiken om een opgave op te lossen. Hierdoor zijn leerlingen minder flexibel in het gebruiken van een oplossing die past bij de kenmerken van de opgave (e.g., Van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

taakmodel

Het doel van de taken was het uitlokken van een oplossingsproces op de lege getallenlijn dat het conceptuele denkniveau van de leerling weergeeft. Uit de resultaten kan geconcludeerd worden dat opgaven met veelvouden van 10 hiervoor minder geschikt zijn omdat bleek dat leerlingen hun oplosstrategie aanpasten aan de getalskenmerken van de opgaven. Aangezien het springen met veelvouden van tien of het springen naar een tiental indicatief is voor het conceptuele denkniveau van de leerling (Kraemer, 2011) is het niet wenselijk dit met de opgaven uit te lokken. Daarnaast was van slechts één opgave te verwachten dat dit de indirecte optel- of aftrekstrategie zou uitlokken. Wanneer het diagnostische instrument hierover informatie aan leraren zou moeten geven, zouden meer van dergelijke kenmerken opgenomen moeten worden in de taak. Tot slot bleken de opgaven zodanig makkelijk dat veel leerlingen ze uit hun hoofd konden beantwoorden. Hierdoor verdween de noodzaak voor het gebruik van de lege getallenlijn als hulpmiddel.

presentatiemodel

Het merendeel van de leerlingen in dit onderzoek associeerde de getallenlijn met een lage rekenvaardigheid en protesteerde tegen het verplicht gebruiken van de lege getallenlijn. Dit bleek ook uit de interviews die Van den Heuvel-Panhuizen (2008) met twee leerlingen voerde. Uit de huidige studie bleek dat deze weerstand deels afhankelijk was van de school waar de leerling op zat. Op de ene school kregen de leerlingen aan het begin van groep 5 twee weken herhalingsinstructie, omdat de leraar het belangrijk vond dat met de uitbreiding van het getalsdomein naar boven de 100 en tot 1000, leerlingen terug moeten kunnen vallen op de lege getallenlijn. Op de andere school daarentegen had de leraar duidelijk de opvatting dat de lege getallenlijn geen geschikt hulpmiddel meer is voor leerlingen in groep 5 en dat deze leerlingen van andere hulpmiddelen (leeg kladpapier) gebruik zouden moeten maken. Gegeven deze resultaten zou het beter zijn om leerlingen zelf te laten kiezen of ze wel of geen gebruik maken van de lege getallenlijn. Dit maakt echter onduidelijk wat de diagnostische informatie is die achteraf aan leraren wordt gerapporteerd, omdat niet alle leerlingen de getallenlijn zullen gebruiken. De vraag is of de informatie die dan wordt verzameld nog voldoende handelingsgericht is om formatief gebruikt te worden.

beperkingen

Deze pilot-studie kent een drietal beperkingen. Op de eerste plaats hebben we onterecht aangenomen dat alle leerlingen wisten hoe ze moeten rekenen met de lege getallenlijn. Ondanks dat alle leerlingen in voorgaande leerjaren hebben leren rekenen met de (lege) getallenlijn wisten zeven leerlingen niet meer hoe ze moesten rekenen op de getallenlijn. Ten tweede was het door het afnamedesign niet mogelijk om kaal en context met elkaar te vergelijken omdat dit gekoppeld was aan het afnamemoment. Het gebruik van dezelfde getallen en de korte tijd tussen de afnamemomenten maken het waarschijnlijk dat er sprake is van een hertest-effect. Tot slot is in deze studie nog niet onderzocht welke scoringsregels en psychometrische procedures (bewijsmodel) het beste in ons ECD-raamwerk passen.

5 conclusie

Uit deze eerste exploratie kan geconcludeerd worden dat leerlingen zich laten leiden door de getallen in de opgaven, maar tegelijkertijd ook een voorkeur voor een bepaalde oplosstrategie op de lege getallenlijn hebben. Onze verwachting is dat deze wisselwerking tussen de invloed van de

getalskenmerken van de opgaven enerzijds en de voorkeur van de leerling anderzijds gerelateerd is aan het conceptuele denkniveau van de leerling. Specifiek gaat het hier om het conceptuele begrip dat de leerling van de relatie tussen getallen tot 100 heeft en het uitvoeren van optel- en aftrekbewerkingen.
Ten tweede kan geconcludeerd worden dat de opgaven in deze studie niet voldoende geschikt zijn voor het uitlokken van verschillende oplosstrategieën. Zo kan geconcludeerd worden dat opgaven waarin een veelvoud van 10 voorkwam niet geschikt zijn om leerlingen met verschillende conceptuele niveaus van elkaar te onderscheiden. Daarnaast was er weinig noodzaak om de getallenlijn als hulpmiddel te gebruiken doordat de opgaven redelijk gemakkelijk uit het hoofd te beantwoorden waren. Het is daarom beter om opgaven aan te bieden die in de zone van naaste ontwikkeling van de leerlingen liggen. Ook kan geconcludeerd worden dat het beter is om alle leerlingen dezelfde instructie over het werken met de lege getallenlijn te geven. Op die manier wordt variatie in strategiegebruik door variatie in instructie beperkt. Tot slot bleek het dwingen van leerlingen om op de getallenlijn te rekenen een negatief effect te hebben op de motivatie. Deze leerlingen bleken minder gebruik te maken van de mogelijkheid om met de lege getallenlijn hun antwoord te controleren. Hiermee zal in het ontwerp van een nieuwe versie van het instrument rekening gehouden worden door leerlingen zelf te laten kiezen tussen hoofdrekenen, dan wel rekenen met de lege getallenlijn. Ondanks dat dan niet van alle leerlingen informatie over de oplossingswijzen op de getallenlijn wordt verzameld, kan wel worden geanalyseerd bij welke typen opgaven de leerlingen wel of niet voor het gebruik van de lege getallenlijn kiezen.

noten

1 Dit onderzoek is onderdeel van het ICA (Improving Classroom Assessment) project dat wordt gesubsidieerd door het NWO (Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek; NWO MaGW/PROO: Project 411-10-750).

literatuur

Ashlock, R.B. (2006). *Error patterns in computation. Using error patterns to improve instruction.* (9th ed.) Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Assessment Reform Group. (1999). *Assessment for Learning: Beyond the black box.* Cambridge University.

Bennett, R. E. (2011). Formative assessment: A critical review. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 18,* 5-25. doi:10.1080/0969594X.2010.513678.

Crisp, G. T. (2012). Integrative assessment: Reframing assessment practice for current and future learning. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 37, 33-43. doi:10.1080/02602938.2010.494234

Cito (2008). *Rekenen-Wiskunde. Diagnosticeren en plannen in de onderbouw. Diagnostisch onderwijzen en plannen.* Arnhem: Cito.

Fuson, K.C. & A.M. Fuson (1992). Instruction supporting children's counting on for addition and counting up for subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 72-78.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (2008). Learning from 'didactikids': An impetus for revisiting the empty number line. *Mathematics Education Research Journal, 20*(3), 6–31.

Heuvel-Panhuizen, M. van den & K. Buys (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Hele getallen onderbouw basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Keeley, P. & C.R. Tobey (2011). *Mathematics formative assessment.* Thousand Oaks, CA: Corwin.

Klein, A.S., M. Beishuizen & A. Treffers, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 443-464. doi:10.2307/749861

Kraemer, J.M. (2009). *Balans (40) over de strategien en procedures bij het hoofdrekenen halverwege de basisschool. PPON-reeks* (Vol. 40). Arnhem: Cito.

Kraemer, J. M. (2011). *Aftrekken onder de 100*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven [proefschrift].

Leighton, J. (2004). Avoiding misconception, misuse, and missed opportunities: The collection of verbal reports in educational achievement testing. *Educational Measurement: Issues and Practice, 23*, 6–15.
doi:10.1111/j.1745-3992.2004.tb00164.x/abstract

Leighton, J.P. & M.J. Gierl (eds.) (2007a). *Cognitive diagnostic assessment for education. Theory and applications*. New York: Cambridge University.

Moyer, P. & E. Milewicz (2002). Learning to question: Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 293–315. doi:10.1023/A:1021251912775

Rupp, A.A., M. Gushta, R.J. Mislevy & D.W. Shaffer (2010). Evidence-centered design of epistemic games: Measurement principles for complex learning environments. *The Journal of Technology, Learning, and Assessment, 8*(4). Retrieved November 10th, 2011 from http://www.jtla.org

Stobart, G. (2008). *Testing times: The uses and abuses of assessment*. London: Routledge.

Treffers, A. & Moor, E. de (1990). *Proeve van een nationaal programma van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg, The Netherlands: Zwijsen.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Londen: Harvard University Press.