

Ontwikkelingsonderzoek

theorie en praktijk

Rob de Jong
Monica Wijers
(redactie)



nederlandse vereniging tot ontwikkeling van het reken-wiskunde onderwijs

ontwikkelingsonderzoek

Ontwikkelingsonderzoek

theorie en praktijk

Rob de Jong
Monica Wijers
(redactie)

*Verslag van de studiedag over ontwikkelingsonderzoek,
georganiseerd door de werkgroep onderzoek van de NVORWO
en NVvW, 3 juni 1993 te Utrecht*

Een produktie van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het
Reken-Wiskunde Onderwijs

eindredactie: Rob de Jong en Monica Wijers
bureauredactie en lay-out: Ank van der Heiden, Sylvia Pietets en Ada Ritzer
druk: Technipress, Culemborg

© 1993 Freudenthal instituut

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

Inhoudsopgave

Woord vooraf <i>Rob de Jong en Monica Wijers</i>	7
Inleiding <i>Lieven Verschaffel</i>	9
Ontwikkelingsonderzoek als basis voor theorievorming <i>Koenno Gravemeijer</i>	17
Ontwikkelingsonderzoek in eerste aanzet <i>Adri Treffers</i>	35
Ontwikkelingsonderzoek: een overbodige categorie? <i>Klaas Koster</i>	59
Ontwikkelingsonderzoek bezien vanuit de rol van de advocaat van de duivel <i>Gellof Kanselaar</i>	63
Discussieverslag	67
Een case study ontwikkelingsonderzoek <i>Martin van Reeuwijk</i>	69
Toetsontwikkelingsonderzoek <i>Marja van den Heuvel-Panhuizen</i>	85
Ontwikkelingsonderzoek negatieve getallen <i>Leen Streefland</i>	111
Terugblik op de studiedag <i>Ed Elbers</i>	131
Ontwikkelingsonderzoek: perspectief <i>Rob de Jong</i>	139

Woord vooraf

Ontwikkelingsonderzoek! Een in domeinspecifieke kringen volledig geaccepteerde, maar in het traditionele onderwijsonderzoek nog wat omstreden categorie van onderzoek. Sommigen roemen de ruime mogelijkheden tot theoretische en praktische opbrengsten. Anderen twijfelen aan het wetenschappelijke gehalte. Er zijn ook collega's die ontkennen dat hier sprake is van een afzonderlijke categorie met eigen definities en criteria.

Op 3 juni 1993 organiseerde de werkgroep onderzoek van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskundeonderwijs (NVORWO) en van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) een studiedag over ontwikkelingsonderzoek. Die dag werd door een groep van circa 60 onderzoekers en ontwikkelaars in De Uithof (Utrecht) van gedachten gewisseld over de uitgangspunten en methodologie van ontwikkelingsonderzoek. Dit gebeurde via algemene verhalen, reflecties hierop door enkele discussianten, presentaties van drie voorbeelden van ontwikkelingsonderzoek en een terugblik/perspectief.

Het inhoudelijk gedeelte van het programma zag er als volgt uit:

- 10.00 - 10.45 Koeno Gravemeijer:
Ontwikkelingsonderzoek als basis voor theorievorming
- 11.00 - 11.45 Adri Treffers: Ontwikkelingsonderzoek in eerste aanzet
- 11.45 - 13.00 Discussie aan de hand van de inbreng van de discussianten:
Gellof Kanselaar en Klaas Koster
- 14.00 - 14.30 Martin van Reeuwijk: Een case study ontwikkelingsonderzoek
- 14.30 - 15.00 Marja van den Heuvel-Panhuizen: Toetsontwikkelingsonderzoek
- 15.15 - 15.45 Leen Streefland: Ontwikkelingsonderzoek negatieve getallen
- 16.00 - 16.30 Ed Elbers en Rob de Jong: Terugblik en perspectief

Lieven Verschaffel functioneerde die dag als zaalvoorzitter.

Dit boekje vormt het verslag van de studiedag. Bij de opbouw is de chronologische volgorde aangehouden. Lieven Verschaffel is gevraagd een inleiding te schrijven.

De rode draad in alle presentaties, maar ook in de discussiebijdragen, vormde de theorie-praktijk relatie. Daarom is gekozen voor de titel: Ontwikkelingsonderzoek – theorie en praktijk.

Bij deze spreekt de werkgroep haar waardering uit voor de enthousiaste inzet van alle sprekers en studiedagdeelnemers.

Voorts dankt zij Ank van der Heiden, Sylvia Pieters en Ada Ritzer voor de eindredactionele klus.

Rob de Jong
Monica Wijers

Inleiding

Ontwikkelingen en perspectieven in de methodologie van onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs¹

Lieven Verschaffel²
Katholieke Universiteit Leuven

Rond 1970 kon men onderzoekers, actief op het terrein van het reken-wiskundeonderwijs, ruwweg onderbrengen in twee categorieën.³

Aan de ene kant waren er de psychologen en de onderwijskundigen die het inhoudsgebied rekenen-wiskunde gebruikten als een – overigens heel dankbaar – proefveld voor de ontwikkeling van hun algemene theorieën over denken, leren en instructie.⁴ Wat onderzoeksmethodologie betreft werd door deze groep nauw aangesloten bij de empirisch-wetenschappelijke traditie, die de psychologie en de onderwijskunde in deze periode sterk domineerde. Deze onderzoekstraditie wordt gekenmerkt door nauwkeurig vooropgestelde hypothesen, een strak onderzoeksdesign en een statistisch onderbouwde data-analyse (naar analogie met de zogenaamde positivistische wetenschappen).

Daarnaast waren er echter ook wiskundigen en wiskundendidactici die publiceerden over wiskundige begripsvorming en wiskundig probleem-oplossen, over de manier waarop wiskundige kennis en vaardigheden zich ontwikkelen, over de hindernissen die daarbij genomen moeten worden, over de rol van allerhande instructiematerialen en -technieken, enzovoort. In tegenstelling tot de eerstgenoemde groep onderzoekers, nam de tweede groep van oudsher z'n toevlucht tot een andere, veel bredere waaier van methoden van kennisverwerving, waaronder introspectie, gedachtenexperimenten, intuïtie, historisch onderzoek, observaties van en gesprekken met leerlingen, persoonlijke ervaringen met bepaalde instructiematerialen en -methoden, enzovoort.

Beide groepen koesterden niet enkel verschillende onderzoeksvragen en -methoden, maar hadden bovendien elk hun eigen kanalen voor informatie-uitwisseling en discussie (boeken, tijdschriften, verenigingen, congressen, ...) en dit zowel op internationaal als op nationaal vlak. En wanneer er uitzonderlijk iets vanuit het ene kamp tot in het andere doordrong, kon het daar meestal op weinig enthousiasme rekenen: de psychologen en onderwijskundigen keken minachtend neer op de 'onwetenschappelijke' aanpak van de wiskundendidactici, terwijl deze laatsten zich dan weer ergerden aan het triviale karakter van de onderzoekshypothesen of aan de geringe praktische waarde van de uitkomsten van het psychologisch of onderwijskundig onderzoek.⁵

De voorbije tien tot vijftien jaar heeft het landschap van het onderzoek op het gebied van het reken-wiskundeonderwijs – zowel internationaal als in het eigen taalgebied – drastische wijzigingen ondergaan. Allerlei ontwikkelingen op wetenschappelijk én maatschappelijk gebied hebben er immers toe geleid dat de studie van het wiskunde-leren en wiskunde-onderwijzen uitgegroeid is tot een erkend terrein voor wetenschappelijk onderzoek – sommigen gewagen zelfs van een aparte wetenschappelijke discipline – waarin ruimte is voor een rijke verscheidenheid aan inzichten, concepten en methoden afkomstig uit uiteenlopende (hulp)disciplines zoals psychologie, onderwijskunde, antropologie, sociologie, filosofie, wiskunde(didactiek), artificiële intelligentie, wetenschapsgeschiedenis ...⁶

Tot de uiterlijke tekenen van het ontstaan van deze nieuwe onderzoeksgemeenschap behoren onder andere de oprichting van wetenschappelijke verenigingen (zoals de International Group for the Psychology of Mathematics Education of – in het eigen taalgebied – de Onderzoeksgroep van de Nederlandse Vereniging voor de Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs) en van nieuwe domeinspecifieke wetenschappelijke tijdschriften (zoals het *Journal for Research in Mathematics Education* of – wat ons taalgebied betreft – het *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*), waarin onderzoekers afkomstig uit de beide tradities – zowel psychologen en onderwijskundigen als wiskundigen en wiskundendidactici – zich thuisvoelen.

Hoewel deze nieuwe onderzoeksgemeenschap vooralsnog geen algemeen erkend theoretisch kader noch een duidelijk afgelijnd onderzoeksprogramma heeft, is daarbinnen de laatste jaren toch een vrij grote eensgezindheid gegroeid omtrent de kerndoelen en sleutelvragen van het onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, én over de basisoriëntatie(s) vanwaaruit dit onderzoek het beste geschiedt. Enkele belangrijke krachtlijnen, zoals die uit het huidig onderzoek sterk naar voren komen, zijn:⁷

- aandacht voor de complexiteit van wiskundige kennis (bijvoorbeeld voor de interactie tussen conceptuele, procedurele en metacognitieve kennis);
- erkenning van het belang van intuïtieve, motivationele, emotionele aspecten van wiskunde-leren;
- beklemtonen van het actieve en constructieve karakter van (wiskunde-)leren;
- aandacht voor langdurige ontwikkelingsprocessen en voor verstrengeling van leerlijnen;
- belangstelling voor de socio-culturele context waarin wiskundig denken en handelen plaatsvindt;
- aandacht voor de rol van instructievariabelen (bijvoorbeeld leerkracht, leermaterialen, onderwijstechnieken, software, toetsen ...) in de ontwikkeling van wiskundige kennis en vaardigheden;
- verschuiving van constaterend onderzoek, waarin wiskundige denk- en leerprocessen in de gegeven onderwijsomstandigheden bestudeerd worden, naar construe-

rend onderzoek, waarin nieuwe vormen van reken-wiskundeonderwijs ontwikkeld en uitgeprobeerd worden;

- een groeiend politiek bewustzijn bij onderzoekers gekoppeld aan een grotere bereidheid om effectief mee te werken aan de verbetering van de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs (bijvoorbeeld via actieve betrokkenheid bij constructie van nieuwe leerplannen, handboeken, software, toetsen, inservice-trainingen van leerkrachten, enzovoort).

Deze groeiende eensgezindheid over de kerndoelen, sleutelproblemen en basisoriëntaties van het onderzoek op het gebied van het reken-wiskundeonderwijs, heeft eveneens geleid tot belangrijke verschuivingen op methodologisch vlak. De meest in het oog springende verschuiving is ongetwijfeld de toenemende diversificatie en liberalisatie inzake methoden van onderzoek en analyse (in vergelijking met de strakke methodologische aanpak uit de klassieke empirisch-wetenschappelijke onderzoekstraditie).⁸

Voorbeelden van methoden die de laatste jaren een grote opmars hebben gekend, zijn⁹:

- klinische interviews, waarbij het verloop van het gesprek niet helemaal vooraf vastligt maar in belangrijke mate bepaald wordt door de antwoorden en reacties van de leerling (Ginsburg, Kossan, Schwartz en Swanson, 1983);
- ethnografische methoden, waarmee vooral de sociale en culturele aspecten van wiskundig denken en handelen in kaart gebracht kunnen worden (Eisenhart, 1988);
- microgenetische analyses van de ontwikkeling van wiskundige concepten en/of vaardigheden bij één enkel individu gedurende een lange periode (zie bijvoorbeeld Schoenfeld, Smith en Arcavi, ter perse);
- construerende onderzoekingen, waarin het effect van nieuwe instructiematerialen en/of technieken bestudeerd wordt hetzij bij individuele leerlingen of kleine groepen (zie bijvoorbeeld Steffe, 1991) of bij grotere groepen in het kader van zogenaamde onderwijsexperimenten (zie bijvoorbeeld Lampert, 1986).

Bij vrijwel al deze onderzoeksmethoden en -technieken spelen video-opnamen een onmisbare rol.

Het voorgaande samenvattend, kunnen we stellen dat de methodologische grenzen die twintig jaar geleden nog de diverse onderzoekstradities in verband met reken-wiskundeonderwijs scheidden, thans zo niet verdwenen dan toch sterk vervaagd zijn. Betekent dit dat alle problemen op methodologisch vlak daarmee van de baan zijn? Helemaal niet! Immers, zodra onderzoekers de vertrouwde, geëffende methodologische paden verlieten en nieuwe wegen insloegen, stootten zij op allerlei (onvoorziene) problemen in verband met de verzameling, de analyse, de interpretatie en de rapportering van data, waarop de klassieke methodologische handboeken geen antwoord gaven,

maar waarvoor zij toch een wetenschappelijk bevredigende oplossing wilden vinden. Het is dan ook niet zo verwonderlijk dat onderzoekers zich steeds nadrukkelijker gingen toelekken op deze methodologische kwesties.

Een fraaie illustratie daarvan vormt een recent themanummer van het *Journal for the Learning Sciences*, waarin drie vooraanstaande onderzoekers – namelijk A. Schoenfeld, A. Brown en J. Saxe – de weg beschrijven die ze hebben afgelegd vanaf het moment dat ze tot het besef kwamen dat het arsenaal van onderzoeksmethoden en -technieken dat ze tijdens hun opleiding hadden meegekregen en dat ze tot dan toe met succes hadden aangewend, niet langer volstond voor de studie van de complexe fenomenen rond (wiskunde-)leren en -onderwijzen waarin zij inmiddels geïnteresseerd geraakt waren.

In zijn artikel betoogt Schoenfeld (1992) dat onderzoekers die nieuwe methoden bedenken en gebruiken, de plicht hebben om daarover in methodologisch georiënteerde bijdragen te rapporteren. Hij schetst tevens een soort raamwerk voor het schrijven van dergelijke bijdragen, dat hij vervolgens invult met twee voorbeelden afkomstig uit eigen onderzoek, namelijk:

- 1 de ontwikkeling van een coderingsschema om de macro-structuur van wiskundige probleemoplossingsprocessen in kaart te brengen en
- 2 de constructie van een systeem om de evolutie in de kennisstructuur van een bepaald wiskundig concept (namelijk functies) bij één individu gedetailleerd weer te geven.

Hierna volgt een opsomming van de punten die volgens Schoenfeld (1992) in zo'n methodologische bijdrage alleszins aan bod moeten komen:

- een beschrijving van de bedoeling van de methode;
- een uitleg waarom het nodig was een nieuwe methode te ontwikkelen;
- een gedetailleerde beschrijving van de methode zodat lezers die ze zelf willen toepassen, dit kunnen;
- een voldoende omvangrijke en concrete data-set zodat lezers kunnen nagaan (a) of hun interpretatie van het materiaal overeenkomt met die van de auteur(s) en (b) of de methode die door de auteur gevolgd is, inderdaad resulteert in de resultaten en bijbehorende interpretatie;
- een methodologische discussie waarin de sterke en zwakke punten van de methode opgesomd worden, waarin aangegeven wordt in welke omstandigheden de methode het meest geschikt is, en waarin punten als betrouwbaarheid en validiteit aan bod komen.¹¹

In hetzelfde themanummer vertelt Brown (1992) hoe zij – na jarenlang te hebben gewerkt als (experimenteel) psycholoog – steeds nauwer betrokken raakte bij het ontwerpen, realiseren, evalueren en implementeren van complexe nieuwe onderwijsleeromgevingen. Tevens gaat ze dieper in op een aantal cruciale methodologische proble-

men die rijzen 'when one attempts to situate a research agenda in a classroom setting that one is simultaneously involved in designing under conditions of continuous flux'. Zo bespreekt zij onder andere:

- de keuze tussen het laboratorium en de klas als context voor gegevensverzameling;
- problemen rond de uitgebreidheid van de materiaalverzameling (bijvoorbeeld grootte van de proefgroep; aantal momenten van datacollectie; aantal facetten van het fenomeen waarover er gegevens ingewonnen worden ...);¹²
- het selectieprobleem, bijvoorbeeld wanneer er stukken uit een individueel interview of uit een ethnografisch rapport van een groeps- of klasgesprek gekozen (moeten) worden om een bepaald theoretisch punt empirisch te onderbouwen.

Het themanummer van het *Journal for the Learning Sciences* vormt slechts één van de vele uitingen van het drastisch gewijzigd internationaal klimaat op het gebied van de onderzoeksmethodologie met betrekking tot wiskunde-leren en -onderwijzen, maar tevens van de grote inspanningen die de onderzoeksgemeenschap zich thans getroost om dit geheel van nieuwe onderzoeksinstrumenten en -strategieën verder te optimaliseren en te funderen.

Op dit punt is er ongetwijfeld een belangrijke rol weggelegd voor het Freudenthal instituut. Immers, vanaf haar ontstaan heeft dit instituut – aanvankelijk sterk tegen de toenmalige 'Zeitgeist' in – werk gemaakt van alternatieve onderzoeksmethoden en strategieën die tegemoetkomen aan de complexiteit van het wiskundig denken en handelen van leerlingen, en uitdrukkelijk en rechtstreeks gericht zijn op de optimalisering van dit wiskundig denken en handelen. We denken daarbij uiteraard in de eerste plaats aan het zogenaamde ontwikkelingsonderzoek, dat zowat tot het handelsmerk van het Freudenthal instituut is uitgegroeid.¹³ Maar daarnaast heeft het Freudenthal instituut ook nog verscheidene andere, meer beperkte, doch eveneens erg originele methodologische bijdragen geleverd, zoals de techniek van mutuele observatie (waarbij de leerling zelf gevraagd wordt om commentaar te geven op de interpretatie van zijn/haar oplossingshandelen door de interviewer (Van den Brink, 1981) of de techniek van 'de leerling als handboekauteur' (waarbij men leerlingen zelf een les(senreeks) rond een bepaalde wiskundige topic laat samenstellen om toegang te krijgen tot hun kennisbasis (Van den Brink, 1987).

noten

- 1 Dit artikel is gedeeltelijk geïnspireerd op een overzichtsartikel over recent onderzoek op het gebied van wiskunde-leren en -onderwijzen van De Corte, Greer en Verschaffel (ter perse).
- 2 L. Verschaffel is onderzoeksleider bij het Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek.
- 3 In zijn beschrijving van het landschap van het onderzoek op het gebied van reken-wiskundeonderwijs rond 1970, onderscheidt Bishop (1992, p. 713 en verder) geen twee doch drie tradities, namelijk de 'empirical-scientist', de 'pedagogue' en de 'scholastic-philosopher tradition'. In onderhavige tekst worden de laatste twee tradities gemakshalve samengenomen.
- 4 Zo schrijft Kilpatrick (1981, p. 25) over Thorndike: 'His theory was his hammer and he looked around and saw the arithmetic curriculum as something to pound'.
- 5 Zie in dit verband onder meer Freudenthals (1978) scherpe aanvallen op onderzoek van reken-wiskundeonderwijs vanuit een algemeen leerpsychologische invalshoek in *Weeding and Sowing*.
- 6 Over het ontstaan van deze onderzoeksgemeenschap schrijft Kilpatrick (1992, p. 3) het volgende: '... research in mathematics education has struggled to achieve its own identity. It has tried to formulate its own issues and its own ways of addressing them. It has tried to define itself and to develop a cadre of people who identify themselves as researchers in mathematics education. During the last two decades, that task of self-definition has largely been accomplished.'
- 7 Voor een uitvoerige bespreking van deze krachtlijnen van het huidige onderzoek, zie onder meer De Corte, Greer en Verschaffel (ter perse).
- 8 In een persoonlijk commentaar op een eerste ontwerp van bovenvermeld artikel van De Corte, Greer en Verschaffel (ter perse), schreef Schoenfeld: 'Over the past decade, the field has gotten much more sophisticated about the research it does, and it has a broader sense of what science is – no longer purely empirical, as in either the statistical methods you describe or in some of the community's blind reliance on computer simulations, the scientism of the 1980's.'
- 9 Zie in dit verband onder andere Romberg (1992).
- 10 Schoenfeld (1992) stelt het als volgt: 'Researchers putting forth new methods, or results based on new methods have the responsibility to explain the methods – to describe where they come from and how they can be used, and to characterize their strengths and limitations.'
- 11 Schoenfeld (1992) beklemtoont echter sterk dat de noties 'betrouwbaarheid' en 'validiteit' zeker niet in enge (statistische) zin geïnterpreteerd mogen worden: 'I invoke them in the broadest possible sense, meaning that (a) the methods and results should cast light upon issues of theoretical consequence, and (b) readers should know how likely it is that if they looked at the same kinds of things the author did, and performed the analyses described in the paper, that they would report essentially similar findings.'
- 12 In dit verband schrijft Brown (1992) onder meer: 'Increasingly, I find that in the interest of converging operations, and because of the multifaceted nature of my data base, I prefer a mixed approach, suiting the method to the particular data. I mix and match quantitative and qualitative methodologies in order to describe the phenomena, a mixture that is becoming common place in the journals, reflecting the increasingly complex issues that psychologists now address. In my own work, I routinely combine a concentration on large scale data bases with in-depth microgenetic analyses of a few children or perhaps a group.'
- 13 Rond ontwikkelingsonderzoek werd door de Onderzoeksgroep van de NVORWO reeds in 1985 een studiedag georganiseerd (zie Verschaffel en Van Oers, 1986).

literatuur

- Brown, A. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal for the Learning Sciences*, 2, 141-178.
- De Corte, E., B. Greer, and L. Verschaffel (in press). Mathematics. In: D. Berliner and R. Calfee (eds.), *Handbook of Educational Psychology*. New York: MacMillan.
- Eisenhart, M.A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 99-114.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing*. Dordrecht: Reidel.
- Ginsburg, H.P., N.E. Kossan, R. Schwartz, and D. Swanson (1983). Protocol methods in research on mathematical thinking. In: H.P. Ginsburg (ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press, 7-47.
- Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In: D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan, 3-38.
- Lampert, M. (1986). Knowing, doing and teaching multiplication. *Cognition and Instruction*, 3, 305-342.
- Romberg, T.A. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. In: D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan, 49-64.
- Schoenfeld, A. (1992). On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to do? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *Journal for the Learning Sciences*, 2, 179-214.
- Schoenfeld, A., J. Smith, and A. Arcavi (in press). Learning: a microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject-matter domain. In: R. Glaser (ed.), *Advances in instructional psychology*. Vol. 4. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Steffe, L. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In: E. von Glasersfeld (ed.), *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, 177-194.
- Van den Brink, J. (1981). Mutual observation. *For the Learning of Mathematics*, 2, 22-25.
- Van den Brink, J. (1987). Children as arithmetic book authors. *For the Learning of mathematics*, 7, 44-48.
- Verschaffel, L. en B. van Oers (1986). Onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs. Verslag van een NVORWO-conferentie te Noordwijkerhout 23-24 mei 1985. *Pedagogische Studien*, 63, 38-40.

Ontwikkelingsonderzoek als basis voor theorievorming

Koeno Gravemeijer
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Freudenthal wilde zijn lezingen nog weleens beginnen met een analyse van de titel. Ik wil deze keer ook zo beginnen. Allereerst de term ontwikkelingsonderzoek, een term die op verschillende manieren wordt gebruikt. Soms doelt men op evaluatie-onderzoek dat nauw aansluit op het ontwikkelwerk, soms ook gaat het om onderzoek in dienst van ontwikkelwerk. Hier wil ik de term ontwikkelingsonderzoek reserveren voor een specifiek soort onderzoek waarbij het ontwikkelwerk deel uitmaakt van de onderzoeksmethode. De titel 'Ontwikkelingsonderzoek als basis voor theorievorming' lijkt een tautologie: vormt onderzoek niet altijd de basis voor theorievorming? In ieder geval wel in de zin dat hypothesen pas tot 'theorie' verheven worden wanneer ze in onderzoek bevestigd zijn (in casu niet verworpen zijn). De theorievorming vindt in het algemeen vooraf plaats, in wat wel exploratief onderzoek genoemd wordt, als écht onderzoek wordt het niet altijd serieus genomen. Bij ontwikkelingsonderzoek vindt juist wél theorievorming plaats: de theorievorming vormt een essentieel onderdeel van het onderzoek. Onder meer daarin verschilt het hier bedoelde geïntegreerde ontwikkelingsonderzoek van meer federatieve combinaties van ontwikkeling en onderzoek. Ontwikkelingsonderzoek in deze zin ligt in het verlengde van weloverwogen ontwikkelwerk. Immers ook daar vindt theorievorming plaats, zij het dat deze vaak impliciet blijft. Ik kies mijn startpunt voor het vervolg bij 'weloverwogen ontwikkelwerk'.

1 weloverwogen ontwikkelwerk

In de zestiger en zeventiger jaren diende je daarvoor een curriculumontwikkelingsstrategie te gebruiken. Kenmerkend aan de strategieën van die tijd is het basisprincipe 'baseer je op empirisch onderzoek'. Enerzijds betreft dit het 'kapitaliseren op wetenschappelijke kennis', anderzijds gaat het om aanvullend, formatief of summatief, evaluatie-onderzoek. Idealiter zijn ontwikkeling en onderzoek in dergelijke modellen in tijd en persoon gescheiden en worden de doelen operationeel gedefinieerd. Het evaluatie-onderzoek wordt veelal sterk gereguleerd vanwege het gewicht dat aan deze evaluatie wordt toegekend; het zijn de formatieve en summatieve evaluatie die het curriculum legitimeren.

Domeinspecifieke kennis wordt meestal niet genoemd. Dit wordt gezien als iets van-

zelfsprekends. In een enkel geval wordt wel aangegeven dat je ervaren onderwijsgevenden kunt bevragen wanneer de beschikbare wetenschappelijke kennis te kort schiet. Blijkbaar wordt verondersteld dat het hier gaat om standaardkennis die algemeen beschikbaar is. Dit type kennis wordt niet tot het terrein van de wetenschap gerekend, althans, er wordt niet over gerapporteerd. Ook aan de praktijk van het ontwikkelwerk wordt voorbijgegaan. Ontwerpers worden geacht te werken zoals de strategie voorschrijft. Dat de praktijk weleens anders zou kunnen zijn, wordt niet opgemerkt. De ontwikkelaars worden in een keurslijf gedrongen dat hen niet past. Goffree (1986) spreekt in dit verband van ééndimensionale ontwerptheorieën, waarover hij opmerkt dat ze vaak uitmonden in ontwerpen voor ééndimensionale leerprocessen, in casu mechanistisch onderwijs.

Inmiddels wordt de betekenis en bruikbaarheid van de eerste generatie ontwerpmodellen (Merrill e.a., 1990) sterk gerelativeerd. Pieters (1992) wijst onder meer op de complexiteit en het quasi-chaotische karakter van het ontwerpproces. Daarnaast vestigt hij de aandacht op de impliciete kennis van de ontwerper. Hij sluit daarmee aan bij Merrill en anderen (1990) die erop wijzen dat deze ontwerpmodellen te weinig ruimte bieden om de 'finegrained expertise' van de ontwikkelaars te benutten.

Kortom, het probleem zit hem in het negeren van de domeinspecifieke kennis van de ontwikkelaars.

2 bricolage

'Theorie-geleide bricolage' (Gravemeijer, 1992) biedt een alternatief dat juist niet uitgaat van een formeel model, maar dat de domeinspecifieke kennis van de ontwikkelaar centraal stelt. Onder domeinspecifieke kennis verstaan we hier: vakinhoudelijke kennis, vakdidactische kennis, kennis van leergangen en van relevante onderzoeksgegevens.

De bricolage-metafoor¹ wordt onder meer gebruikt om zichtbaar te maken dat de ontwikkelaar niet blanco begint. Bricolage betekent letterlijk: knutselen. We moeten daarbij denken aan het knutselen van een klusjesman, iemand die alle mogelijke klusjes aanpakt. Zo iemand bewaart allerlei restmateriaal dat bij een nieuwe klus misschien nog wel eens van pas zou kunnen komen. Wanneer in voorkomende gevallen uit deze voorraad geput wordt, kan het gebeuren dat de materialen voor iets anders gebruikt worden dan waarvoor ze gemaakt zijn. Laat ik een voorbeeld geven.

U kent waarschijnlijk wel de rechthoekige hoekijzers waarmee je twee balken onder een hoek van negentig graden aan elkaar kunt maken. Op een keer wilde ik een driehoekige schraag maken. Daar had ik andere hoekijzers voor nodig, twee van 75 graden en één van 30 graden. Die zijn niet zomaar bij de doe-het-zelfwinkel te krijgen. In plaats van hoekijzers heb ik toen scharnieren gebruikt. Daar het om een driehoekige

constructie ging, deed het er niet toe dat de hoekijzers geen vaste hoek hadden. Je krijgt vanzelf een starre constructie.

Het voorbeeld toont de kracht van de bricolage-aanpak. Het probleem van de scherp-hoekige hoekijzers wordt opgelost door scharnieren op een nieuwe manier te gebruiken. Het repertoire aan mogelijkheden van de bricoleur wordt zo op een vrij eenvoudige wijze uitgebreid, en wel door bestaande middelen op een nieuwe manier toe te passen. Het voorbeeld toont ook een kenmerkend element dat in de bedoelde theorie-geleide bricolage van belang is: het beschikbare materiaal – in dit geval een scharnier – wordt beoordeeld op de functie die het kan vervullen in een nieuw ontwerp. Op eenzelfde manier kan er naar een bestaande onderwijsactiviteit gekeken worden: bijvoorbeeld, met het oog op de rol die deze in een ‘realistische’² leergang kan vervullen.

De onderwijsactiviteiten worden, anders gezegd, door een ‘realistische’ bril bekeken. Deze visie op wiskundeonderwijs, deze theorie, bepaalt hoe de onderwijsactiviteiten gezien worden, hoe ze ingepast worden en hoe ze zonodig aangepast worden – vandaar: *theorie-geleide bricolage*.

Theorie moet hier ruim opgevat worden. In feite gaat het om een theoretisch kader, een geheel van theorieën en noties dat aangeduid kan worden met de term *beliefsysteem*. Dit omvat domeinspecifieke kennis, normen en waarden, onderwijstheorie, leertheorie, implementatietheorie en dergelijke – deels in de vorm van uitgewerkte theorieën, deels in de vorm van weinig expliciet gemaakte noties.

Het complexe karakter van dit theoretisch kader brengt met zich mee dat er bij het ontwikkelwerk sprake is van een complex keuzeprocess. Er is geen duidelijke hiërarchie van theorieën. Nu eens zal een implementatietheoretische overweging de doorslag geven, dan weer is het een vaktheoretisch of een leertheoretisch argument dat beslissend is. Uiteindelijk probeert de ontwikkelaar te komen tot een – voor hem of haar – begrijpelijk geheel van onderwijsactiviteiten. Dat wil zeggen: de ontwikkelaar ontwikkelt een minitheorie over hoe het onderwijs zich in de klas zal afspelen en hoe het daarmee samenhangende leerproces van de leerlingen zal verlopen. Freudenthal (1988) spreekt in dit verband van een *gedachte-experiment*: het onderwijsleerproces is door de ontwikkelaar voorgedacht, voor het daadwerkelijk plaats vindt. In de *try-out* zoekt de ontwikkelaar vervolgens naar aanwijzingen of het onderwijsleerproces al dan niet verloopt zoals verwacht. Op basis van deze informatie wordt de minitheorie bijgesteld en het onderwijs aangepast.

3 doordenken en beproeven

Het is dit cyclische proces van doordenken en beproeven dat Freudenthal centraal stelt in ontwikkelingsonderzoek. Een cyclisch proces dat des te efficiënter is als de cyclus korter is. Wat achter het bureau bedacht is, wordt direct uitgetoetst, het onderwijs

wordt geanalyseerd en het resultaat van deze analyse wordt weer benut om het ontwikkelwerk te vervolgen. Kortom, een proces van doordenken en beproeven dat resulteert in een produkt dat theoretisch en empirisch gefundeerd is; doordacht en beproefd.

Ontwikkelwerk opgevat als ontwikkelingsonderzoek levert zo, naast een concrete leergang voor een bepaald onderwerp, de daaraan ten grondslag liggende lokale onderwijstheorie: een theorie over hoe je dat onderwerp het best kunt onderwijzen. In ons geval gaat het om 'het best' in de context van een uitgesproken visie op reken-wiskundeonderwijs. Een visie die door Freudenthal getypeerd is als 'wiskunde als menselijke activiteit' en die ook tot uitdrukking komt in het streven 'de leerlingen hun eigen wiskunde te laten ontwikkelen'. Meer concreet komt het erop neer dat de informele kennis en informele strategieën van de leerlingen als startpunt genomen worden, om hen vandaaruit formele kennis te laten ontwikkelen. De ontwikkelaars staan daarvoor globale heuristieken ter beschikking, zoals het *reinvention-principe* en de *didactische fenomenologie*. De probleemstelling van zo'n ontwikkelingsonderzoek luidt: hoe moet een leergang voor dit onderwerp eruit zien, opdat de overgang informeel-formeel zelfstandig kan worden gemaakt door de leerlingen?

De zo ontwikkelde lokale onderwijstheorieën vormen weer de basis voor een domeinspecifieke onderwijstheorie; een theorie specifiek voor realistisch reken-wiskundeonderwijs. Zo'n theorie is algemener dan de lokale onderwijstheorieën, maar altijd nog specifiek dan de gangbare onderwijsleertheorieën die voor elk leerstofgebied geschikt geacht worden.

4 grensverleggend onderzoek

Theorievorming impliceert onderzoek. Ik gebruikte zojuist al de term ontwikkelingsonderzoek. Ongemerkt is het accent verlegd van ontwikkelwerk naar ontwikkelingsonderzoek. Het wordt tijd hier even bij stil te staan. Wanneer is er sprake van onderzoek?

Ik zou deze vraag als volgt willen beantwoorden. Het doel van onderzoek is het ontwikkelen van gefundeerde, wetenschappelijke, theorie. Gefundeerd, in de zin van theoretisch en empirisch gefundeerd. Wetenschappelijk, in de zin van: geen privétheorie van de ontwikkelaar, maar een theorie die wordt gedeeld met een gemeenschap van onderzoekers. We kunnen hierbij verwijzen naar Ernest (1991) die laat zien dat nieuwe wiskundige kennis pas de status van wetenschappelijke kennis krijgt wanneer deze kennis geaccepteerd wordt door de wiskundige gemeenschap. Essentieel in dit proces is de rapportage over en de onderbouwing van de nieuwe inzichten.

In het geval van ontwikkelingsonderzoek zal het in het algemeen gaan om een bescheiden theoretische vooruitgang. Ontwikkelingsonderzoek kenmerkt zich door een proces van kleine stapjes. Grensverleggend onderzoek hoeft ten slotte niet te beteke-

nen dat de grens in één keer over de hele linie verlegd wordt. De grens kan ook verlegd worden door elke keer een klein stukje te verleggen. Dit cumulatieve effect van kleine stapjes is karakteristiek voor ontwikkelingsonderzoek. In die zin past de bricolage-metafoor, zoals Jacob die gebruikt om de evolutie te beschrijven, heel goed.

'Evolution behaves like a tinkerer who, during eons upon eons, would slowly modify his work, unceasingly retouching it, cutting it here, lengthening there, seizing opportunities to adapt it progressively to its new use.'

(o.c. in Lawler; 1985, p. 253.)

Dit idee van eindeloos aanpassen, verbeteren en bijschaven past bij een langlopend onderzoeksprogramma. Merk op, dat hier, anders dan in de evolutie, sprake is van een theorie-geleide ontwikkeling en niet van een toevalsproces waar de directe effecten de doorslag geven. Het eerder genoemde aspect van bricolage, voortbouwen op wat er al is, komt ook hier weer naar voren.

5 theorievorming

Bij traditioneel curriculumonderzoek is de centrale vraag: werkt het?

Bijvoorbeeld binnen de context van het toepassen van eerste generatie ontwerpmodellen. Daar is het de formatieve of summatieve evaluatie die het nieuwe curriculum legitimeert. Legitimering, indien deze laat zien dat het nieuwe curriculum werkt. Gaat het om instructietheorieën, dan zal het succes van het curriculum dat volgens de bewuste theorie ontworpen is, de juistheid van de theorie moeten aantonen.

Bij ontwikkelingsonderzoek is de vraag een heel andere. De vraag is niet: 'juist' of 'beter' maar 'hoe ...?' Bijvoorbeeld: 'hoe richt je een leergang rekenen tot honderd zo in dat deze daadwerkelijk aansluit bij de informele strategieën van de leerlingen en hen bovendien in staat stelt deze strategieën uit te bouwen tot algemene formele oplossingsprocedures?' Dit is een vraag die je allereerst concreet beantwoordt met het ontwikkelen van een passende leergang. Maar er zit ook een theoretische component in: de gewenste leergang weerspiegelt een lokale onderwijstheorie voor het betreffende leerstofgebied, welke een verbijzondering is van de realistische onderwijstheorie. Deze verbijzondering werkt in twee richtingen. Enerzijds is de lokale onderwijstheorie een uitwerking van de domeinspecifieke onderwijstheorie, anderzijds wordt deze onderwijstheorie zelf gevonden door te generaliseren over lokale onderwijstheorieën. Anders gezegd: de domeinspecifieke onderwijstheorie is zowel startpunt als resultaat. De onderwijstheorie wordt niet toegepast, maar uitgewerkt, verbeterd en verfijnd. De basisvisie krijgt handen en voeten in lokale onderwijstheorieën. Deze lokale theorieën worden stapsgewijs verbeterd in een cumulatief proces van opeenvolgende onderzoeken. Tegelijkertijd ontstaat er meer zicht op de gemeenschappelijke structuur van al deze lokale theorieën. Deze kan vervolgens expliciet gemaakt worden als domeinspe-

cifieke onderwijstheorie. Zo'n meer algemene theorie geeft op haar beurt weer richting aan de diverse ontwikkelingsonderzoeken.

Kortom: de domeinspecifieke en de lokale onderwijstheorieën ontwikkelen zich in een dialectisch proces waarbij de aanvankelijk vage, globale, normatief gekleurde, basisvisie geleidelijk aan vervangen wordt door expliciete, gedetailleerde en gefundeerde theorie.

6 onderzoeksmethode

De eigensoortige onderzoeksvraag van ontwikkelingsonderzoek brengt een specifieke onderzoeksaanpak met zich mee. In traditioneel curriculumonderzoek beslist het experiment. Soms wordt er overigens een overdreven bewijskracht toegekend aan empirische toetsing, alsof de juistheid van een theorie, of de effectiviteit van een bepaalde onderwijsaanpak voor eens en voor altijd vastgesteld zou kunnen worden door een 'beslissend experiment'. Een positie die alleen houdbaar is als je uitgaat van onafhankelijke empirische feiten en van volledig reproduceerbare onderzoeksresultaten. In de wetenschapstheorie wordt zowel de onafhankelijkheid van empirische 'feiten' als de reproduceerbaarheid van onderzoeksresultaten in twijfel getrokken.

Freudenthal (1991) betoogt dat met name de experimenten in de onderwijswetenschappen niet herhaalbaar zijn. Dit betekent zijns inziens dat experimentele resultaten als zodanig onvoldoende overtuigingskracht bezitten. Natuurkundige experimenten ontleen hun bewijskracht aan het feit dat collega-onderzoekers de experimenten na kunnen doen. Zo'n herhaling zal in principe dezelfde resultaten opleveren. Collega-onderzoekers kunnen het experiment navolgen: letterlijk en figuurlijk. Figuurlijk navolgen wil in dit geval zeggen dat ze zich voor kunnen stellen hoe het experiment verlopen is en hoe de resultaten tot stand zijn gekomen. De onderzoeksresultaten 'spreken voor zich' omdat de collega-onderzoeker zich er een voorstelling van kan maken.

Bij onderwijsexperimenten is dit veelal niet het geval. De onderwijswerkelijkheid is zo complex dat onderzoeksresultaten niet voor zichzelf spreken. Collega-onderzoekers kunnen het experiment niet in letterlijke zin navolgen daar het in het algemeen onmogelijk is volslagen identieke condities te creëren. In figuurlijke zin kunnen collega-onderzoekers het experiment alleen navolgen als het experiment voldoende precies beschreven is. Het doen van ontwikkelingsonderzoek wordt daarom op de volgende wijze door Freudenthal beschreven:

'Developmental research means: experiencing the cyclic process of development and research so consciously, and reporting on it so candidly that it justifies itself, and that this experience can be transmitted to others to become like their own experience.'

(Freudenthal 1991, p. 161)

Het zichzelf rechtvaardigen waar Freudenthal het hier over heeft, is deels argumentatief van karakter. Empirische gegevens worden niet blind geaccepteerd, maar geïnterpreteerd binnen het beschikbare referentiekader. Een onderbouwing van onderzoeksresultaten zal dan ook altijd bestaan uit een combinatie van empirische bevindingen en theoretische overwegingen. De resultaten staan daarmee open voor discussie. Dezelfde 'feiten' kunnen immers anders geïnterpreteerd worden. Bovendien kunnen er voor een bepaalde leergang andere prioriteiten worden gesteld of andere criteria worden aangelegd. Het iteratieve karakter van ontwikkelingsonderzoek brengt bovendien met zich mee dat aan de onderwijstheorieën geen absoluut karakter verleend kan worden.

Dit wetenschapsmodel sluit daarmee tevens aan bij het socio-constructivistische concept van kennisoverdracht: directe transfer van kennis is niet mogelijk, kennisoverdracht is alleen mogelijk in een proces van 'negotiation of meaning' (Cobb e.a., 1992).

7 objectiviteit

Theorieontwikkeling binnen ontwikkelingsonderzoek kunnen we kenschetsen als de opbrengst van het leerproces van de ontwikkelaar. Deze dient vervolgens als basis voor het leerproces van een gemeenschap van onderzoekers. Het beoordelaars-onafhankelijke concept van objectiviteit wordt hier vervangen door intersubjectiviteit.

Hoe de ontwikkelingsonderzoeker zijn/haar theorie legitimeert, heeft Freudenthal hierboven feitelijk al aangegeven: door het expliciteren van zijn/haar leerproces. In dit opzicht kan gemakkelijk worden aangesloten bij in kwalitatief onderzoek gebruikelijke werkwijzen. Daartoe schets ik kort de invulling die Smaling (1990) geeft van betrouwbaarheid, validiteit en objectiviteit binnen kwalitatief onderzoek.

betrouwbaarheid

Betrouwbaarheid staat voor: vrijheid van toevallige fouten, soms gedefinieerd als reproduceerbaarheid. Voor kwalitatief onderzoek – en ook voor ontwikkelingsonderzoek – betekent dit virtuele herhaalbaarheid. Externe betrouwbaarheid vereist de virtuele herhaalbaarheid van het onderzoek door andere onderzoekers. De nadruk ligt hier op virtueel. Het gaat erom dat het onderzoek zo beschreven wordt dat het door buitenstaanders te reconstrueren is.

Wat hier bedoeld wordt, komt goed tot uitdrukking in de Engelse term 'tackability'. Deze (na-)volgbaarheid kan verkregen worden door in het onderzoeksverslag melding te maken van:

(...) 'tegen- en meevallers, van de gevolgde werkwijze, van het gebruikte begrippenkader en ook van de redenen die er waren om bepaalde keuzen te doen.'

(Smaling 1990, p. 6)

De interne betrouwbaarheid heeft betrekking op de intersubjectieve overeenstemming tussen de participerende onderzoekers. Deze overeenstemming wordt verkregen in een open discussie steunend op theoretische en empirische argumenten.

validiteit

Validiteit staat voor vrijheid van systematische fouten en correspondentie met het beoogde. Dit betreft de relatie tussen enerzijds de onderzoeksgegevens, de onderzoeksuitkomsten en de conclusies en anderzijds hetgeen de onderzoekers zeggen te onderzoeken. Ook de validiteit kan weer worden uitgesplitst in 'intern' en 'extern', respectievelijk binnen en buiten het onderzoek.

De interne validiteit betreft de geldigheid van de onderzoeksresultaten in de feitelijke onderzoekssituatie. De onderzoeker kan de kwaliteit van zijn oordelen en interpretaties verhogen door serieus te zoeken naar tegenvoorbeelden, of door op zoek te gaan naar alternatieve interpretaties en verklaringen. Ook kan hij collega-onderzoekers vragen de rol van 'advocaat van de duivel' te spelen. Daarnaast kan navraag bij de onderzochten, de onderzoeker in bepaalde gevallen behoeden voor fouten. Ook controle door collega-onderzoekers, maakt dit mogelijk.

De externe validiteit betreft de betekenis van de onderzoeksresultaten voor andere situaties. Bij kwalitatief onderzoek heeft deze externe validiteit niet zozeer betrekking op de exacte generaliseerbaarheid van de conclusies naar andere situaties. Het gaat meer om een genuanceerde generaliseerbaarheid: hoe bepaalde aspecten van onderzoeksresultaten in bepaalde situaties kunnen worden gebruikt. Ecologische validiteit wordt hier niet geïnterpreteerd als iets statisch, maar als de manier waarop de geldigheid van een onderzoeksresultaat in verschillende situaties varieert.

objectiviteit

Betrouwbaarheid en validiteit zijn indicatoren van objectiviteit, maar objectiviteit is meer. Smaling (1987; 1989) brengt dit tot uitdrukking in de door hem ontwikkelde Münchhausen-conceptie van objectiviteit als methodologische norm:

(...) 'de onderzoeker moet ernaar streven recht te doen aan het object van studie; dit gebeurt met betrekking tot een bepaalde vraag, probleemstelling en doelstelling binnen een bepaald kader (zoals een bepaalde onderwijscultuur of een basisvisie op het reken-wiskundeonderwijs). Dit recht doen heeft twee belangrijke aspecten: het positieve aspect, dit betreft het laten spreken van het studieobject, en het negatieve aspect, dit betreft het niet vertekenen van het studieobject.'

(Smaling 1990, p. 7)

Hij wijst in dit verband op de deelname-distantiebalans, rolneming en het triangulatie-beginsel.

De deelname-distantiebalans eist dat de onderzoeker een middenweg vindt tussen te grote afstandelijkheid en te grote betrokkenheid. Dit kan bijvoorbeeld ook door te zgen voor afwisseling in deelname en distantie.

Rolneming impliceert het innemen van wat Cobb (1987) noemt: een 'actors point of view'. Goede rolneming voorkomt enerzijds te grote afstandelijkheid, terwijl anderzijds het besef dat de actor zich niet van zijn eigen gezichtspunt bewust hoeft te zijn een te grote betrokkenheid kan voorkomen.

De term triangulatie verwijst naar driehoeksmeting. Zoals ook bij driehoeksmeting twee gezichtspunten nodig zijn om de plaats van het derde hoekpunt van een driehoek te bepalen, zo kunnen twee verschillende bronnen ook meer zicht bieden op een bepaald fenomeen. Smaling noemt verschillende vormen van triangulatie. Je kunt bijvoorbeeld verschillende soorten gegevens combineren, of verschillende onderzoeksmethoden, je kunt ook dezelfde gegevens door verschillende onderzoekers laten verzamelen.

Deze methodologische overwegingen hebben consequenties voor de uitvoering van de verslaggeving over het onderzoek. De wetenschappelijke waarde van uitkomsten van ontwikkelingsonderzoek is afhankelijk van de onnavolgbaarheid van het leerproces van de onderzoeker. Daar hoogstens virtuele en geen feitelijke herhaalbaarheid mogelijk is, is deze navolgbaarheid of trackability van essentieel belang; pas dan wordt intersubjectieve overeenstemming over de interpretatie van de onderzoeksresultaten mogelijk. Navolgbaarheid vraagt om explicitering van het leerproces; dat betekent dat de ontwikkelaar zich de leerwinst bewust moet maken:

- wat is het nieuwe?

Om dit te legitimeren moet hij/zij zich het leerproces bewust maken:

- waarom acht ik dit waar?

In het antwoord zitten theorie en empirie verweven; de theorie bepaalt immers waar je naar kijkt en hoe je de empirische gegevens interpreteert. Een realistische invalshoek betekent bijvoorbeeld dat veel waarde gehecht wordt aan de eigen inbreng van de leerlingen, aan reflectie en niveauverhoging³.

De zaak wordt nog gecompliceerder doordat de theorie zelf meegroeit tijdens het onderzoek. Dit geldt met name op het niveau van de lokale theorieën. In het cyclische proces van doordenken en beproeven wordt de theorie – en de leergang – al aangepast voor deze formeel getoetst is. De try-outs leveren niet alleen feed-back, maar vooral ook feedforward. Feedforward in die zin dat ervaringen in de klas direct worden verwerkt in een volgende les. Anders gezegd: tijdens de try-out worden ontdekkingen gedaan die in de theorie geïncorporeerd worden. Dit proces voltrekt zich overigens ook op een ander niveau: de oplossingen van de leerlingen bevatten soms aanwijzingen voor een perspectiefvolle aanpak. Zo vond Streefland (1991) bijvoorbeeld in de oplossingen van kinderen inspiratie voor een nieuwe breukendidactiek.

In samenhang met de lokale onderwijstheorie kan ook de domeinspecifieke onderwijstheorie verder tot ontwikkeling komen gedurende een concreet ontwikkelingsonderzoek. Bijvoorbeeld doordat er meer inzicht ontstaat in hoe iets werkt en waarom het werkt. Op meer algemeen niveau geformuleerde inzichten kunnen zo weer ingezet worden om de leergang te verbeteren.

8 verschillende paradigma's

Het erkennen van de nauwe samenhang tussen theorie en empirie in ontwikkelingsonderzoek gaat samen met bescheiden legitimeringsaanpakken. Anders dan bij hard empirisch onderzoek wordt aan het onderzoek geen absolute bewijskracht toegekend. De bewijskracht is eerder argumentatief van aard. Dit heeft te maken met het idee van intersubjectiviteit, dat een open discussie veronderstelt. Het past bovendien bij de dynamiek van het onderzoeksprogramma.

Daarnaast zijn er nog andere verschillen met het gangbare curriculumonderzoek. Ik wil in dit verband nog even stilstaan bij de kijk op evaluatie-onderzoek. In de rationeel-empirische benadering dient grootschalig evaluatie-onderzoek om – achteraf – vast te stellen of een curriculum 'werkt'. Evaluatie-onderzoek dat past bij ontwikkelingsonderzoek dient om uit te vinden onder welke *condities* het werkt. Waar in rationeel-empirisch onderzoek getracht wordt te controleren op storende variabelen, zal de ontwikkelingsvariant zich eerder richten op het in kaart brengen van de onderzoekscondities. Dit laatste past bij het veranderingsperspectief dat bij deze benadering hoort. De evaluatie anticipeert op maatregelen die kunnen worden genomen om de vernieuwing zo succesvol mogelijk te maken. Gangbaar evaluatie-onderzoek is in het algemeen meer constaterend van aard.

9 template voor ontwikkelingsonderzoek

Ik wil deze bijdrage afsluiten met een globaal model voor ontwikkelingsonderzoek, dat ik een template voor ontwikkelingsonderzoek genoemd heb. De ideeën voor dit 'template' ontleen ik onder meer aan het proefschrift van Leen Streefland (1991, English version) en aan ervaringen met het uitlijnen van het scriptie-onderzoek van Ans Veltman (1993).

Ik zal dit template kort toelichten met het onderzoek over de lege getallenlijn als voorbeeld.

probleemanalyse

- leergang kenmerken (eisen)
- basismateriaal (voorbeelden., aanzetten, ideeën)

definiëring onderzoeksvraag

- doelformulering: nieuwe leergang met bepaalde kenmerken
- explicitering inbedding in theoretisch kader (inbedding kenmerken en leergang)
- omschrijving basismateriaal (denk aan verzameling bricoleur)
- domeinkennis (onderzoeksgegevens, leerboeken e.d.)
- lokale onderwijstheorie in ontwikkeling (een idee dat je kunt verantwoorden)

methoden en technieken

methode:

- ontwerpen leergang
doordenken en beproeven (cyclisch: dialectisch feedforward / iteratief) en vastleggen leerproces ontwikkelaar met het oog op rechtvaardiging

technische aspecten:

- specificeren ijkpunten
(in relatie tot eisen, theoretisch kader, domeinkennis en lokale onderwijstheorie in ontwikkeling)
N.B. wordt tijdens het proces aangevuld
- definiëring technieken dataverzameling
- beschrijving experimentele condities
- aanduiding type ontwikkelingsonderzoek, onderzoek gericht op:
 - exploratie / funderend – hoe zou het misschien kunnen?
– wat wil je precies?
 - uitwerking (voorwerk en concrete verwachtingen/problemen)
 - toetsing theorie (rol modelsituatie, variatie contexten etcetera)

uitvoering

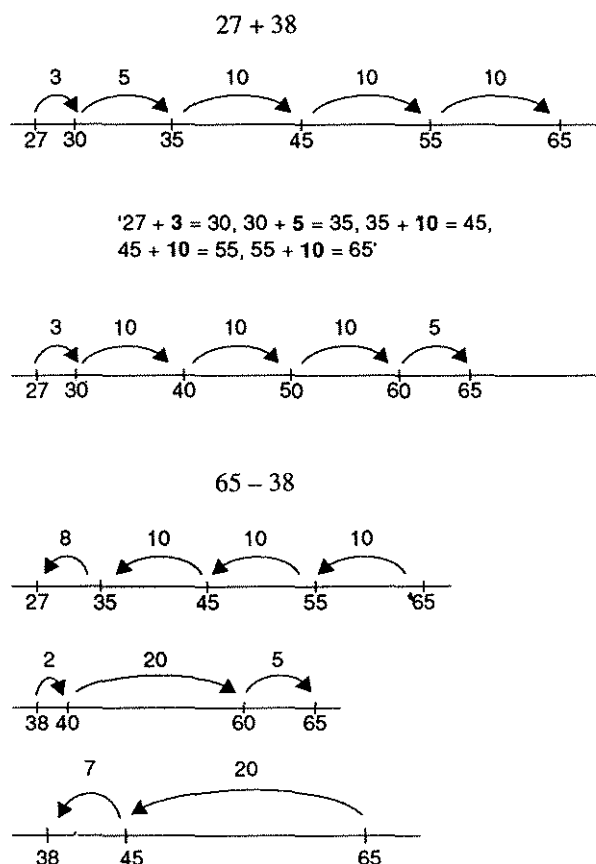
doordenken en beproeven, expliciteren en vastleggen (reflection-in-action)

verslaggeving

- essentiële kenmerken voorgestelde leergang (met inhoudelijke en empirische onderbouwing)
- bevindingen ten aanzien van ijkpunten
- nieuwe inzichten

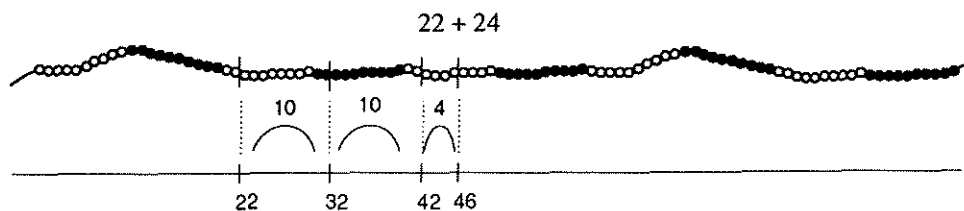
probleemanalyse

Bij het rekenen onder de honderd maken de leerlingen verschillende soorten fouten. Leerlingen die al vroeg onder elkaar leren rekenen, zoals in de USA gebruikelijk is, maken de standaardfouten tegen het cijferalgoritme. Ook leerlingen bij wie het naast elkaar rekenen met concreet positiemateriaal is voorbereid, maken fouten tegen het positiesysteem. Als we toepassingsopgaven fenomenologisch bekijken, blijkt bovendien dat er een discrepantie bestaat tussen het kardinaal georiënteerde positiemateriaal en toepassingen met een meer lineaire structuur (met betrekking tot afstanden en dergelijke). Tenslotte blijken de informele strategieën die leerlingen in toepassingssituaties ontwikkelen nogal eens het karakter van een *rijgmethode* te hebben, waarbij som of verschil stapsgewijs benaderd wordt. Dit is een aanpak die eerder lineair dan kardinaal is. Verwacht wordt dat de lege getallenlijn hier hulp kan bieden. Dit is een lineair model waarop oplossingen volgens de rijgmethode goed uitgebeeld kunnen worden (fig. 1).



figuur 1

Verwacht wordt dat problemen die zich in eerdere experimenten met de getallenlijn hebben voorgedaan, ondervangen kunnen worden door een kralensnoer als instap te gebruiken (Whitney, 1988; Treffers en De Moor, 1990) (zie fig. 2).



figuur 2

onderzoeksvraag, doelformulering

De te ontwikkelen leergang moet passen binnen de realistische didactiek en tegemoet komen aan de hierboven gesignaleerde problemen. Criteria waaraan de leergang moet voldoen, zijn:

- de leerlingen moeten in de gelegenheid gesteld worden informele strategieën te gebruiken (dit kan onder meer naar voren komen in een brede variatie van oplossingsmethoden en het flexibel omgaan met deze oplossingsmethoden). Bovendien dienen de leerlingen uit de voeten te kunnen met toepassingssituaties en zou de getallenlijn steun moeten bieden bij niveauverhoging.

De domeinkennis die ingebracht wordt betreft:

- kennis van informele strategieën,
- de verschillende verschijningsvormen van optellen en aftrekken,
- eerdere ervaringen met de getallenlijn,
- het idee van Whitney om een kralensnoer als voorbeeld te gebruiken.

methoden en technieken

In ontwikkelingsonderzoek zijn de methoden en technieken van het ontwerpen en het onderzoeken nauw verweven. Dit maakt het lastig ze beknopt te beschrijven. In het volgende zal ik mij daarom beperken tot de *strategische implicaties* van de volgende kernpunten van realistisch reken-wiskundeonderwijs: het reinvention principe, de didactische fenomenologie en niveaus.

reinvention principe

De leidraad bij het ontwikkelen van realistisch reken-wiskundeonderwijs is de gedachte dat de leerlingen in staat gesteld moeten worden hun spontane, informele kennis en strategieën zelfstandig uit te bouwen tot meer formele wiskundige kennis en vaardigheden. De leerling moet als het ware her-uitvinden wat anderen al eerder uitgevonden hebben. Bij het ontwerpen van een leergang kan de ontwikkelaar-onderzoeker een reconstructie van het proces dat tot deze uitvinding heeft geleid als richtsnoer

gebruiken. Daarnaast dient de onderzoeker alert te zijn op de mogelijkheid dat de spontane oplossingsstrategieën van de leerlingen zelf aanwijzingen leveren voor een route waarlangs her-uitvinding plaats kan vinden.

Voor het ontwikkelingsonderzoek betekent dit dat de onderzoeker alert moet zijn op spontane oplossingsstrategieën die mogelijk kunnen fungeren als opstapje voor meer algemene formele aanpakken. Enerzijds betekent dit dat de onderzoeker de beoogde wiskundige kennis en vaardigheden kan duiden als een formalisering of algoritmisering van meer basale wiskundige activiteiten. Anderzijds moet ook de mogelijkheid worden open gehouden dat de leerlingen adequate aanpakken ontwikkelen die verschillen van de standaardaanpak. Het is namelijk heel goed mogelijk dat dergelijke vondsten beter passen bij de eigenlijke doelstellingen.

In het geval van het rekenen onder de honderd is de formele standaardstrategie de splitsmethode: de getallen worden gesplitst in tientallen en eenheden en die worden in eerste instantie onafhankelijk van elkaar verwerkt ($37 + 25 = ..$, $30 + 20 = 50$ en $7 + 5 = 12 \rightarrow 50 + 12 = 62$). Hierbij passend onderwijs zal veel aandacht geven aan het uiteenleggen van getallen in tientallen en eenheden. Onderzoek heeft echter laten zien dat goede rekenaars veelal gebruik maken van de zogenoemde G10-methode, waarbij $37 + 25$ wordt uitgerekend via $37 + 20 = 57$, $57 + 5 = 62$ (Beishuizen, 1993). Een oplossingsmethode die goed past bij sprongen op het honderdveld. Een overeenkomstige reinvention aanpak is onder meer uitgewerkt in de methode *Rekenen & Wiskunde* (Gravemeijer, 1983). Kijken we echter naar de strategieën die kinderen spontaan in toepassingssituaties gebruiken, dan blijken er weer andere oplossingen naar voren te komen (Vuurmans, 1991). Veel leerlingen hanteren de zogenoemde rijgmethode (Treffers en De Moor, 1990). Bij een opgave als $37 + 25$ wordt het tweede getal in stapjes bijgeteld. Dat kan met kleine stapjes ($37 + 3 = 40$, $40 + 10 = 50$, $50 + 10 = 60$, $60 + 2 = 62$), en met grotere sprongen (de G10-methode kan als een bijzonder geval van de rijgmethode worden gezien). De lege getallenlijn wordt gezien als een geschikt hulpmiddel om dit type informele strategieën op te roepen, en om spontane niveauverhoging te stimuleren. Als er zich inderdaad zo'n proces voltrekt, mogen we een grote variëteit aan oplossingsstrategieën verwachten. Bovendien zullen deze oplossingen verschillen naar niveau. Tenslotte mogen we in dit geval ook flexibiliteit in aanpak verwachten. Omgekeerd kunnen starre oplossingsmethoden erop wijzen dat de leerlingen aanpakken van anderen overnemen die ze zich niet eigen hebben gemaakt. Bij het onderzoek naar de lege getallenlijn was één van de vragen daarom of de variëteit aan oplossingsstrategieën die de rijgmethode toelaat ook in het leerling-werk is terug te vinden.

didactisch-fenomenologische analyse

Informele strategieën krijgen vooral kansen bij het oplossen van contextopgaven. Enerzijds omdat formele opgaven meestal al naar een stereotype aanpak verwijzen en anderzijds omdat contextopgaven vaak aangrijpingspunten bieden voor oplossings-

strategieën. Een van de taken van de ontwikkelaar-onderzoeker is daarom op zoek te gaan naar geschikte contextopgaven. Dat vraagt een verkenning van het toepassingsgebied van de wiskunde die aan de orde is met het oog op geschikte opgaven. Bovendien vraagt het van de onderzoeker dat deze een analyse maakt van de samenhang tussen concrete contextopgaven en feitelijk gehanteerde oplossingsstrategieën.

Het onderzoek naar de lege getallenlijn is onder meer ingegeven door de vaststelling dat de gebruikelijke kardinale aanpak zich slecht verhoudt met het meer lineaire karakter van veel toepassingen. Het spontaan optreden van de rijmethode wordt immers toegeschreven aan het lineaire karakter van de contextopgaven die tot dit type oplossing aanleiding gaf.

niveaus

In de ontwikkeling van informeel naar formeel is een globale niveau-indeling mogelijk. Informele oplossingen zijn in het algemeen nog sterk gebonden aan de context waarin de opgave gepresenteerd is. In een volgende fase moet de oplossingsstrategie van specifieke contexten losgemaakt worden. Hiertoe worden de leerlingen vergelijkbare opgaven in wisselende contexten aangeboden. De onderzoeker zal moeten nagaan of de beoogde veralgemenisering inderdaad optreedt. De verschuiving van contextgebonden naar algemeen zal tot uitdrukking moeten komen in een verschuiving van de aandacht van de context naar de oplossingsmethode.

Dit blijkt bijvoorbeeld wanneer de leerlingen de efficiëntie van bepaalde oplossingsmethoden zelf aan de orde stellen. Meer indirect blijkt dit uit oplossingen die eerder ingegeven lijken te zijn door efficiëntie-overwegingen dan door de context van de opgave. Flexibiliteit in het rekenen tot honderd betekent bijvoorbeeld dat een opgave als: $75 - 68$ anders aangepakt wordt dan: $54 - 8$. In het eerste geval is het namelijk efficiënter de opgave op te vatten als hoeveel is het verschil? Terwijl bij $54 - 8$ het erafhalen de voorkeur verdient. Op het algemene niveau zal de leerling een contextopgave, die naar verschil bepalen verwijst, oplossen als erafhalen wanneer één van de twee getallen klein is.

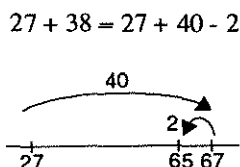
Dezelfde overgang kan ook worden geanalyseerd vanuit de rol die de getallenlijn speelt als model. Ik kom daar straks nog op terug.

uitvoering en verslaggeving

Het ontwikkelingsonderzoek dient te resulteren in een explicitering van nieuwe kennis (leerwinst) en in een navolgbaar verslag van het onderliggende proces van kennisverwerving (het leerproces van de onderzoeker). Merk op dat een beschrijving van het leerproces van de onderzoeker niet voldoende is. Het leerproces krijgt pas echt betekenis als een navolgbaar leerproces, wanneer de ervaringsgegevens op een betrouwbare wijze gedocumenteerd zijn. Trackability betekent niet alleen dat het leerproces navolgbaar is, maar betekent ook dat de empirische basis van het leerproces traceer-

baar is. Concreet betekent dit dat empirische uitspraken teruggevoerd kunnen worden op ruwe data. Dit veronderstelt een procedure waarbij de ruwe data (observatieverslagen, logboekantekeningen, toetsresultaten, interviewgegevens e.d.) bewaard blijven en dat de manier waarop de ruwe data zijn geïnterpreteerd wordt vastgelegd.

Tot slot nog een enkele opmerking over meer algemene theorievorming rond het getallenlijn-onderzoek. Gaandeweg het onderzoek komt de rol van de lege getallenlijn als model steeds meer in het centrum van de belangstelling te staan. Dit resulteert in een opleving en uitbouw van een theoretische beschouwing van een ideaal model in termen van 'model-van' en 'model-voor' (Streefland, 1985; Treffers, 1991; Gravemeijer, 1993). De getallenlijn komt eerst te voorschijn als model *van* het manipuleren met kralen op het kralensnoer. Op eenzelfde manier kan de getallenlijn gebruikt worden om een model te maken van een toepassingsprobleem. Na verloop van tijd verschuift de aandacht echter van de context (reëel of kralensnoer) naar de getalrelaties die aan de orde zijn. Wanneer de leerling zich in zijn/haar handelen laat leiden door de getallen is er duidelijk sprake van een hoger abstractieniveau. Het model verzelfstandigt en kan nu benut worden om formele redeneringen met getallen te ondersteunen. Anders gezegd: het model functioneert nu als een model *voor* het formele rekenen (zie bijvoorbeeld fig. 3).



figuur 3

Een dergelijke beschouwing over de rol van een model in een leergang blijkt vervolgens weer een goede basis te bieden voor een verdere doordenking van de realistische onderwijstheorie en daarbij passend ontwikkelingsonderzoek.

noten

- 1 De bricolage-metafoor wordt ontleend aan Lévi Strauss die de bricolage opvoert als een model voor de wijze waarop de menselijke geest zich ontwikkelt (o.c. in Lawler, 1985).
- 2 'Realistisch' in de zin van wat Treffers (1987) in zijn indeling van stromingen binnen het reken-wiskundeonderwijs de realistische stroming noemt.
- 3 In concreto betekent dit dat het onderwijsleerproces een sterke nadruk krijgt, aan operationele doelen wordt minder belang gehecht, zeker als het gaat om leerprestaties in termen van routinematige beheersing van deelvaardigheden. Dit betekent niet dat de realistische onderwijstheorie daarmee immuun gemaakt wordt voor empirische vergelijking met andersoortige leergangen. Voor alle rekenleergangen is er tenslotte één gemeenschappelijke maat waar ze aan afgemeten kunnen worden: de mate waarin de leerlingen uit de voeten kunnen met reële toepassingen.

literatuur

- Beishuizen, M. (1993). Mental Strategies and Materials or Models of Addition and Subtraction upto 100. In: *Dutch Second Grades, Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 24 (4).
- Cobb, P. (1987). Information-processing Psychology and Mathematics Education – A Constructivist Perspective. *The Journal of Mathematical Behavior* 6 (1), 4-40.
- Cobb, P., Erna Yackel and T. Wood (1992). A Constructive Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education* 23 (1), 1-53.
- Ernest, P. (1991) *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.
- Freudenthal, H. (1988). Ontwikkelingsonderzoek. In: Gravemeijer, K. en K. Koster (eds.), *Onderzoek, ontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek*. Utrecht: OW&OC.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Goffree, F. (1986). *Rekenen, Realiteit en Rationaliteit* (oratie).
- Gravemeijer, K. (1983). *Rekenen & Wiskunde*. Baarn: Bekadidact.
- Gravemeijer, K. (1992). Onderwijsontwikkeling en Ontwikkelingsonderzoek. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* 10 (3), 2-13.
- Gravemeijer, K. (1993). The empty number line as an alternative means of representation for addition and subtraction. In: Lange, J. de, I. Huntley, Ch. Keitel and M. Niss (eds.), *Innovation in mathematics education by modelling and applications*.
- Lawler, R.W. (1985). *Computer Experience and Cognitive Development: A Child's Learning in a Computer Culture*. New York: Ellis Horwood Ltd; Chichester/John Wiley & Sons.
- Merril, D.M.L. and M. Jones (1990). Limitations of first generation instructional design. *Educational Technology* 30 (1), 7-11.
- Pieters, J.M. (1992). *Het ongekende talent* (oratie).
- Smaling, A. (1987). *Methodologische objectiviteit en kwalitatief onderzoek*. Lisse: Swets & Zeitlinger B.V.
- Smaling, A. (1989). Objectiviteit als methodologische norm. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* 7 (3/4), 34-37.
- Smaling, A. (1990). Enige aspecten van kwalitatief onderzoek en het klinisch interview. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* 8 (3), 4-10.
- Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant* 5 (1), 60-68.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education, a Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Treffers, A. en E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijsen.
- Treffers, A. (1990). Didactical Background of a Mathematics Program for Primary Education. In: L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht: CD-β press, 21-57.
- Veltman, A. (1993). *Van het begin en van het eind* (doctoraalscriptie).
- Vuurmans, A.C. (1991). *Rekenen tot honderd*. 's-Hertogenbosch: KPC.
- Whitney, H. (1988). *Mathematical Reasoning, Early Grades*. Princeton (paper).

Ontwikkelingsonderzoek in eerste aanzet

over de ontdekking en rechtvaardiging van produktieve ideeën

Adri Treffers

Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Produktieve ideeën komen niet zomaar uit de lucht vallen. En ze worden vaak volgens een vast stramien gerechtvaardigd, in eerste aanzet. Althans in de ontwikkeling van het realistische rekenonderwijs.

In het volgende worden enkele voorbeelden van ontstaansgeschiedenissen van vruchtbare en invloedrijke gedachten beschreven waar ik enigermate bij betrokken was.

De eerste stamt uit de jaren zeventig en betreft het concept van de cijferende vermengvuldiging volgens de methode van het herhaalde optellen. Hierop ga ik nogal uitvoerig in.

De andere voorbeelden worden slechts kort aangeduid: ze betreffen recente voorbeelden uit de *Proeve van een Nationaal Programma ...*.

De reden waarom ik me op de eerste fase van het ontwikkelingsonderzoek richt, is tweërlei:

- 1 Misschien kan men enige lering trekken uit deze gevalstudies over de vraag hoe ontwikkelingsonderzoek wordt opgestart.
- 2 Wellicht kan men uit deze voorbeelden een formule of format destilleren voor de aanvraag van ontwikkelingsonderzoek bij bevoegde personen of instanties.

Freudenthal definieert ontwikkelingsonderzoek als 'het cyclische proces' van ontwikkeling en onderzoek 'op een zodanige bewuste wijze beleven, verwoorden en verantwoorden dat deze belevenis aan anderen ter mede- en nabeleving kan worden overgedragen' (1988, p. 52). Allereerst dient daarbij volgens Freudenthal het gedachte-experiment volgens welke het eerste concept van de lessenserie of de leergang tot stand kwam, beredeneerd te worden beschreven. En vervolgens de harde feiten uit het ontwikkelingsproces die tot het uiteindelijke proces hebben geleid. Tezamen moeten ze het eindprodukt aannemelijk en overdraagbaar maken.

Maar voor het zover is, als het al ooit zover zal komen, moet men meestal zichzelf en anderen overtuigen dat het nieuwe concept de moeite van ontwikkeling en onderzoek waard is. Wat was de aanleiding ertoe? Hoe kwam men op het idee? Waarom kan er een probleem mee worden opgelost of een mogelijkheid benut? Op welke theoretische en praktische gronden kan worden verwacht dat een verdere ontwikkeling ervan zal lonen? Hoe verhoudt het zich tot wat eerder en elders reeds is gedaan? Enzovoort.

In het eerste voorbeeld gaan we echter nog wat verder en doe ik kort verslag van het onderwijsexperiment dat op basis van het eerste idee is uitgevoerd en van de uitkomst in de vorm van een prototype van een nieuwe leergang waarop het ontwikkelingsonderzoek uiteindelijk was gericht. Tevens zeggen we ook nog iets over de kenmerken die dit onderzoek heeft.

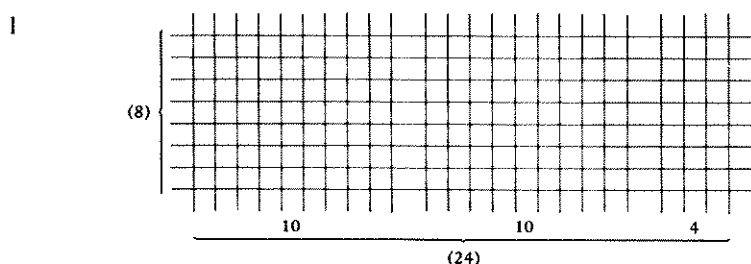
In de andere voorbeelden zeg ik hoofdzakelijk iets over de ontwikkeling en rechtvaardiging van enkele recente nieuwe ideeën in de eerste exploratiefase van het ontwikkelingsonderzoek.

Tenslotte wordt het wetenschappelijke karakter van ontwikkelingsonderzoek in discussie gebracht.

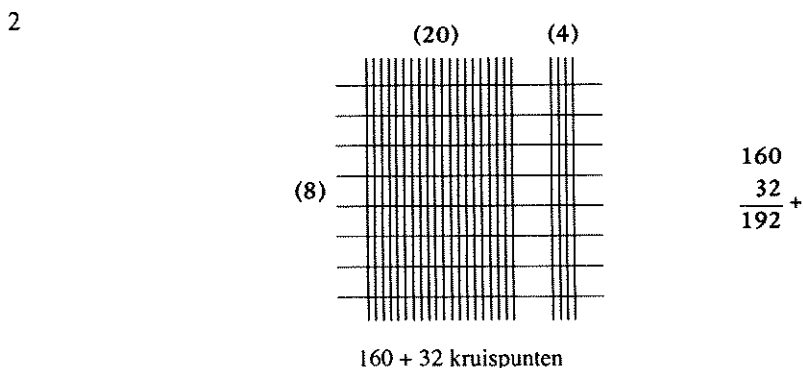
1 leergang cijferend vermenigvuldigen volgens het kruispuntenmodel

In de periode 1973-1975 werd in het Wiskobasproject een aanschouwelijke methode voor het aanleren van het vermenigvuldigingsalgoritme ontwikkeld. Dit gebeurde met het zogenoemde kruispuntenmodel volgens de werkwijze van de progressieve schematisering.

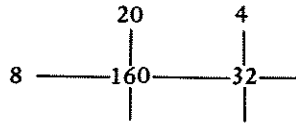
De leergang verliep in vijf fasen (fig. 1).



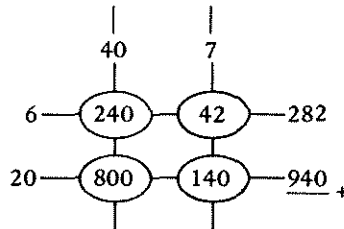
Bepaal het aantal kruispunten van 8 bij 24 wegen op een stadsplan.



3



4



5

$\frac{47}{6} \times$	$\frac{47}{20} \times$	$\frac{47}{26} \times$
$\frac{240}{42}$	$\frac{800}{140}$	$\frac{940}{282}$
$\frac{282}{282} +$	$\frac{940}{940} +$	$\frac{1222}{1222} +$

figuur 1: kruispuntenmodel

De leergang werd ontworpen door Van Bruggen, die hem ook leerpsychologisch funderde en verantwoordde aan de hand van handelingspsychologische theorieën van Galperin c.s. en Lompscher c.s. (Van Bruggen, 1975). De resultaten van de betreffende leergang op de ontwerpsschool bleken zeer bevredigend te zijn.

We citeren de conclusies van een peiling die in twee parallelklassen werd gehouden:

‘Zijn deze prestaties opzienbarend ten opzichte van het bestaande rekenonderwijs? Afgaande op het type sommen dat de kinderen kunnen maken, zou men zeggen van niet. Immers, in het begin van het vierde leerjaar is men hieraan ook in het bestaande rekenprogramma toe en wellicht zullen deze kinderen de vraagstukken sneller kunnen maken. Men dient daarbij echter te bedenken dat ook leerlingen van het derde leerjaar die het Wiskobascijferprogramma volgen, deze sommen al kunnen maken – zij het op een lager niveau van schematisering. En vervolgens is het van belang te weten, dat in het Wiskobasprogramma de tijd die aan het cijferend rekenen besteed wordt – ruwweg geschat – minder dan de helft is van die binnen het bestaande rekenonderwijs. Bovendien worden bij de progressieve schematisering andere algemene wiskundige doeleinden nagestreefd. Kortom, we stelden het reeds eerder: het is niet juist een en ander te vergelijken op basis van de eindprestaties, omdat ten dele andere doelen beoogd worden. Maar ver-

gelijkt men desondanks die produktopbrengsten, dan blijken er geen opzienbarende verschillen te bestaan of het zou moeten zijn dat er bij de aanpak volgens progressieve schematisering vrijwel geen uitvallers voorkomen.'

(Ter Heege en Treffers, 1979, p. 120)

2 twijfel komt op: het geval Els

Toen echter kreeg ik een kort verslag van Ter Heege onder ogen over een gesprek met Els. Els bleek kale vermenigvuldigopgaven heel behoorlijk te kunnen oplossen – ze was, zeg maar op dit terrein, een gemiddelde leerling en zeker geen slechte. Maar wat geschiedde toen Els de volgende opgave voorgelegd kreeg?

- > Naast mij woont een familie met vader, moeder en één zoon. De zoon is veertien jaar. Zijn vader is vier keer zo oud. Hoeveel jaar is vader?

Els tekent (fig. 2):

$$\begin{array}{r}
 10 \\
 \hline
 100 \\
 40 \\
 \hline
 140 \\
 56 \\
 \hline
 196
 \end{array}$$

figuur 2: Els tekent

Zij zegt erbij: 'Dit is al twee keer opgeteld.'

Dan schrijft ze de volgende som op (fig. 3):

$$\begin{array}{r}
 196 \\
 196 \\
 \hline
 392
 \end{array}$$

figuur 3: de volgende som

Ze zegt erbij: 'Dit is dus vier keer opgeteld.'

Een week later worden de gesprekken met Els vervolgd.

Ze krijgt het volgende probleem voorgelegd:

> Sinterklaas geeft vijf zwarte pieten opdracht cadeautjes rond te brengen in een dorp.

In elke zak zitten 32 pakjes. Hoeveel cadeautjes zijn dat bij elkaar?

Els (fig. 4):

$$\begin{array}{r} 32 \\ 32 \\ 32 \\ 32 \\ 32 \\ \hline 160 \end{array}$$

figuur 4: hoeveel cadeautjes?

Herhaald optellen! Maar ... het sommetje is wellicht te eenvoudig. Daarom krijgt ze er één met grotere getallen: dertien zwarte pieten met elk 34 pakjes in de zak.

'Ook deze toch niet gemakkelijke optelling wordt feilloos gemaakt. Dit is opvallend, omdat Els in deze oplossingen laat zien dat ze goede oplossingen maakt op een niveau dat thuishoort in het begin van het derde leerjaar. Met name op het niveau van vóór de start van het algoritme van de vermenigvuldiging. Het is ook duidelijk dat Els zich aardig kan redden met deze werkwijze.'

(Ter Heege en Treffers, 1979, p. 122-125)

3 een nieuw idee

De gedachte die toen sterk bij me opkwam was dat we wellicht met het kruispuntenmodel op de verkeerde weg zaten. Deze gedachte werd nog meer versterkt toen nadere studie uitwees dat de toepassingen van vermenigvuldigen in het algemeen van alle vier basisoperaties de grootste moeilijkheden bleken op te leveren (Brown en Kücherman, 1976; Bright, 1978; McIntosh, 1979).

Zou het herhaalde optelmodel niet tot het vermenigvuldigalgoritme omgevormd kunnen worden volgens hetzelfde principe van progressieve schematisering en verkorting waarop ook de leergang van het kruispuntenmodel berust? – dat was voor ons de brandende vraag.

Bij de naspeuring van de onderwijsliteratuur troffen we een artikel aan dat summier over een dergelijke aanpak handelde (Hutton, 1977). Voor ons was dat voldoende aan-

24	of zo genoteerd	24
24		24
24		24
24		24
24		24
24		24
24		24
24		24
24		24
+		+
16	32	32
19	2	160
1	9	192

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 + \text{ of } 20
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 24 \\
 10 \times \text{ of } 20 \\
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 20 & 40 \\
 \hline
 24 & 0 \\
 \hline
 2 & 4 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 24 \\
 10 \times \\
 \hline
 40 \\
 200 + \\
 \hline
 240
 \end{array}$$

- 3 In de derde fase wordt, uiteraard weer in een reële samenhang, een tamelijk complex probleem zoals bijvoorbeeld 28×57 aangeboden.

De lange optelling die erachter steekt wordt, zo veronderstellen we, in deze fase:

$$\begin{array}{r}
 57 \left[\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \\
 10 \times 57 = 570 \\
 57 \left[\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \\
 10 \times 57 = 570 \\
 57 \left[\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \\
 8 \times 57 = \begin{array}{r} 456 \\ 1596 \end{array} +
 \end{array}$$

- 4 In fase 4 komen de kinderen tot een verdere verkorting die hen dichtbij het algoritme brengt: ' $78 \times 83 =$ '

$$\begin{array}{r}
 83 \\
 8 \times \\
 \hline
 664
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 83 \\
 70 \times \\
 \hline
 5810
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5810 \\
 664 + \\
 \hline
 6474
 \end{array}$$

- 5 Fase 5 is die van het standaardalgoritme:

$$\begin{array}{r}
 83 \\
 78 \times \\
 \hline
 664 \\
 5810 \\
 \hline
 6474
 \end{array}$$

We citeren de samenvatting van de betreffende beschrijving over de nieuw te ontwerpen leergang:

'Ziehier een deelleergang in vijf fasen volgens het principe van de progressieve schematisering met behulp van het herhaalde optellen. Tot slot van dit onderdeel volgt nog een overzicht van de vijf stappen aan de hand van enkele opgaven:

eerste stap:

8×83 ; lange optelling; uitrekenen met behulp van de tafels; aandringen op verkorting van inwisselhandeling; basis voor vervolg;

tweede stap:

10×83 ; regel van de nul ontdekken en motiveren;

derde stap:

18×83 ; splitsen in 8×83 en 10×83 ;

vierde stap:

78×83 ; splitsen; snel uitrekenen; aanzet tot ineenschuiven van de aparte vermenigvuldigingen;

vijfde stap:

78×83 ; definitief algoritme.

Bij deze progressieve schematisering zijn de variabelen:

- de globale werkwijze, het niveau;
- de notatiewijze op de onderscheiden niveaus;
- het snel en effectief rekenen, het gebruik van de tafels, het uit het hoofd inwisselen en uitrekenen.

Regelmatig wordt uitgegaan van een reële situatie met een vermenigvuldigingskarakter, waardoor de kinderen zich steeds kunnen realiseren waar ze mee bezig zijn, en de eigenaardige 'technische' fouten voorkómen of snel gecorrigeerd kunnen worden (we komen later op deze kwestie terug).'

(Treffers, 1979, p. 25)

5 vergelijking van de twee leergangen

Als belangrijke pluspunten van het kruispuntenmodel werden aangemerkt: de motorische activiteit van het weven, de noodzaak van het bundelen en het zichtbaar maken van eigenschappen als commutativiteit en distributiviteit.

Als een mogelijk praktisch nadeel werd de slordigheid van het strepen trekken in de eerste fasen genoemd.

We citeren:

'Naar onze ervaring – we komen hier later nog op terug – zijn dit belangrijke pluspunten. Maar ook de mogelijke minpunten willen we niet ongenoemd laten. Voor veel onderwijsgeveenden is het namelijk een negatief gegeven, dat de kinderen zoveel strepen moeten trekken, waardoor de werkschriften er aanvankelijk wat slordig uit kunnen komen te zien.

Naast dit praktische bezwaar – tenminste als men dit aldus ervaart – staat nog het mo-

gelijke didactische nadeel van de onnatuurlijke inkleding. Geen enkele leerling zal immers uit zichzelf een algemene uitbeelding van een vermenigvuldigingssituatie in de vorm van een kruispuntenmodel schetsen (tenzij het ook werkelijk over kruispunten gaat). Anders gezegd: aanvankelijk moet hij met zachte dwang tot een dergelijke visualisering gebracht worden. Op zichzelf hoeft dit geen gewichtig bezwaar te zijn, ware het niet dat hierdoor het toepassingsbereik voor sommige leerlingen wel eens ingeperkt zou kunnen worden; er kan als het ware een scheiding tussen de 'vanzelfsprekende' herhaalde optelling en de 'aangeleerde' kruising ontstaan. Het gevolg daarvan zou dan zijn dat die kinderen de cijferhandelingen wel goed leren, maar moeite hebben het vermenigvuldigingskarakter in een bepaalde toepassingssituatie te onderkennen.' (p. 32).

Wat als negatief bij het kruispuntenmodel wordt aangemerkt, is precies het positieve hoofdpunt van het herhaald optelmodel, althans in de argumentatie van het gedachte-experiment anno 1979.

We citeren het hele stuk over de plus- en minpunten van de nieuw voorgestelde aanpak van toen:

'Allereerst sluit de werkwijze van het herhaalde optellen heel goed aan bij de aanpak die kinderen gebruiken als ze voor een concreet vermenigvuldigingsprobleem gesteld worden. We herinneren hier aan de eerder genoemde opgave: 'hoeveel beukenootjes zitten in acht doosjes met ieder 24 nootjes?', die door alle leerlingen getalsmatig en volgens een of andere strategie van herhaald optellen wordt gemaakt. En aangezien vermenigvuldigingsopgaven in de meeste gevallen een sterk 'herhalingselement' bevatten, mag dus in het algemeen gesteld worden dat het optelmodel heel natuurlijk aansluit bij de werkwijze van de kinderen.

Ten tweede wordt een snelle en effectieve schematisering uitgelokt doordat de kinderen met de abakus de ' $10 \times$ '- en ' $100 \times$ '-problematiek hebben leren kennen en doorzien. Met als gevolg, dat een lange optelrij, bestaande uit dezelfde termen, opgedeeld wordt in parten van tien (honderd) en vervolgens snel uitgerekend. Kortom, het optelmodel sluit goed aan bij hetgeen de kinderen geleerd hebben met de abakus.

Ten derde voert de voortschrijdende algoritmisering de kinderen op een ongedwongen wijze naar het definitieve algoritme: de verkorting dringt zich als het ware vanzelf op. Of juister, het bekende algoritme is een natuurlijk sluitstuk van een steeds verdergaande verkorting, c.q. matematisering.

Ten vierde sluit de methode van het vermenigvuldigen als herhaald optellen goed aan bij die van het delen als herhaald aftrekken (waarover straks meer).

Ten vijfde kan de optelaanpak – we noemden het reeds – relatief eenvoudig in de onderwijspraktijk gerealiseerd en in een leerboek neergelegd worden. Anders gezegd: de werkwijze van het leren cijferen volgens het herhaalde optellen met gebruikmaking van de abakus, is praktisch-didactisch eenvoudiger, dus minder verfijnd en overzichtelijker, dan de aanpak via het kruispunten- en rechthoeksmodel: de fasen zijn duidelijker onderscheiden en minder met elkaar verweven.

Zitten er dan geen nadelen aan deze optelaanpak in vergelijking met het kruispuntenmodel of het rechthoeksmodel?

Een nadeel zou kunnen zijn dat de aanpak sterk getalsmatig en weinig visueel is. In samenhang daarmee komen bepaalde eigenschappen van het vermenigvuldigen dan ook niet zo duidelijk aan het licht. Zo is bijvoorbeeld via het herhaalde optellen niet direct duidelijk dat 8×24 gelijk is aan 24×8 , terwijl dit in het kruispunten- of rechthoeksplaatje in één oogopslag zichtbaar wordt. Toch is dit bezwaar niet van overwegend belang – tenminste niet voor het algoritmiseren. Immers, de kinderen zijn reeds in de vóór-

algorithmische fase met die eigenschappen geconfronteerd. Ook tijdens de fase van het algoritmiseren worden andere modellen gebruikt om er bepaalde eigenschappen mee te demonstreren.' (p. 32)

6 ontwikkelingsonderzoek herhaald optellen

Toen bleek dat we binnen het IOWO nog één of twee jaar ontwikkelingsonderzoek konden doen, na het schooljaar 1978-79, hebben we (Dekker, Ter Heege en Treffers) die mogelijkheid direct aangepakt om het nieuwe concept van het vermenigvuldigings-algoritme te ontwikkelen en te beproeven op de ontwerpschool van Wiskobas. Dit gebeurde in een combinatieklas met veertien leerlingen in klas 3 (groep 5).

Het eerder geschetste ontwerp bleek in eerste ronde niet helemaal te voldoen. Met name het schematiseren en verkort noteren van de herhaalde optelling diende aangepast te worden: de eerder aangeduide fasering gaf te weinig houvast.

De lange herhaalde optelling werd toen in de tweede ronde met een verticale beweging van de hand uitgebeeld en vervolgens met een strepenschema op papier gezet.

Dat gaat bij 28×56 zó:

$$\begin{array}{r} 56 \\ + 8 \quad 8 \times 56 = \\ + 10 \quad 10 \times 56 = \\ + 10 \quad 10 \times 56 = \end{array}$$

De volgende notatiestap is dan:

$$\begin{array}{r} 56 \\ + 8 \quad 8 \times 56 = \\ + 20 \quad 20 \times 56 = \end{array}$$

Maar deze stap kan alleen gezet worden indien de rekenvaardigheid zover gevorderd is dat deze deelprodukten uit het hoofd uitgerekend kunnen worden. Dat kan trouwens op twee manieren, namelijk via herhaald optellen van rechts naar links onder gebruikmaking van de tafels en met al dan niet direct inwisselen ($8 \times 56 = 48 + 400 = 448$) of via hoofdrekenen van links naar rechts ($8 \times 56 = 400 + 48 = 448$).

In de loop van het experiment kregen we steeds meer het idee dat we eerst het hoofdrekenen zouden moeten laten ontplooiën voordat de verkorte rekenwijze van de standaardmethode bij ' 8×56 ' met direct inwisselen wordt aangeleerd.

We zijn dan ook van geïntegreerd cijferen gaan spreken (Dekker *et al*, 1982, voor-

woord). Daarin wordt uitgedrukt dat cijferen geïntegreerd wordt met toepassingen, maar ook vervlochten met flexibel rekenen of hoofdrekenen.

Bij het geleidelijk aan inoefenen van de standaardprocedure na de hoofdrekenfase, wordt aangestuurd op het direct uitrekenen van 8×56 met inwisselen (zo nodig):

$$\begin{array}{r} 56 \\ 8 \times \\ \hline 48 \\ 400 \\ \hline 448 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 56 \\ 8 \times \\ \hline 448 \end{array}$$

Dit oefenspoor wordt gevolgd na de eerste fasen zodra ingewikkelder opgaven als 28×56 (in context en ook kaal) geëxploreerd worden. Zijn de leerlingen in staat de elementaire opgaven in de meest verkorte versie (dus met direct inwisselen) uit te rekenen, dan bezitten ze in feite ook de basisvoorwaarden om de complexe opgaven verkort uit te voeren.

Het resultaat van de wijzigingen was in ieder geval dat het herhaalde optellen met een simpel kruispuntenschema werd uitgebeeld, waarbij het vermenigvuldigtal heel werd gelaten en de vermenigvuldiger uiteengelegd in tientallen (honderdtallen) en eenheden, zie het kruisschema van 28×56 . En ook dat er een duidelijk zicht werd gekregen op het oefen- en exploratiespoor.

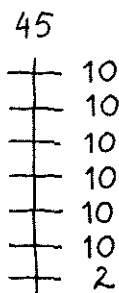
In *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas* (Dekker, Ter Heege en Treffers, 1982) is uitgebreid verslag gedaan van het onderwijsexperiment en de opbrengst ervan. Hier volstaan we met te melden dat de resultaten zowel voor vermenigvuldigen als later ook voor delen volgens progressieve schematisering en verkorting zonder meer positief genoemd kunnen worden. Er bleken vrijwel geen uitvallers te zijn, al werkten kinderen wel op een verschillend niveau van verkorting gedurende de leergang – maar dat was nu juist de reden dat ze niet hoefden af te haken!

Om een indruk te geven van de differentiatie in oplossingsmethoden na tien à vijftien lessen nemen we de volgende contextopgave (zie Treffers en De Moor, 1990, p. 205-207).

'In een adresboek van 62 bladzijden staan op iedere pagina 45 namen. Hoeveel namen staan er in het hele boek?

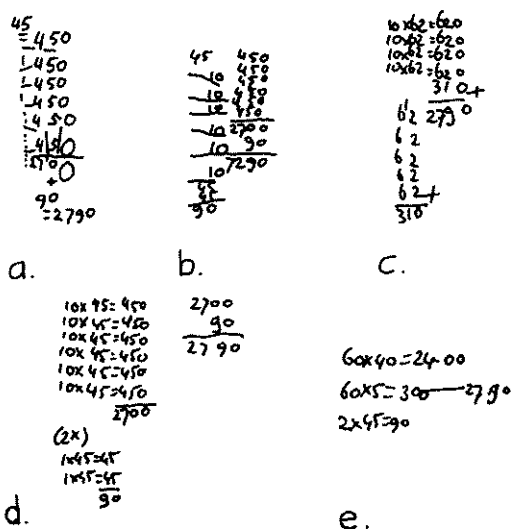
In gedachten zien ze een lange optelling op een tel- of rekenrol. In de klas is zoiets namelijk een paar keer ook werkelijk zo lang genoteerd. Enkele lessen later duiden ze die lengte aan door een lange streep in de lucht (met handbeweging) te trekken, en nog wat later door een streep op papier.

In het adresboekprobleem zien de handbeweging en de tekening als verkorte aanduiding van de rekenrol waarop 62 keer 45 onder elkaar staat, er als volgt uit (fig. 5):



figuur 5: 62×45

Zes happen van tien termen 45 worden als het ware uit de kolom genomen en vervolgens nog een hap van twee keer 45. In de volgende figuur staat het werk van vijf leerlingen uit groep 5 (fig. 6):



figuur 6: leerlingenwerk

In werkwijze (a) zien we nog duidelijk de gedachtenspooren van de lange optelling op de rekenrol in schema gezet. Werkwijze (b) verschilt daarvan niet veel. Alleen worden hier de happen van 10×45 expliciet aangegeven. De verwisseling van enkele cijfers (7290 in plaats van 2790) wordt hier kennelijk niet gecorrigeerd door een globale schatting-vooraf. In (c) wordt de omkeereigenschap toegepast. Wellicht gebeurt dit uit gewoonte of om sneller te rekenen. Bij het inwisselen zet deze leerling het te onthouden getal boven aan de kolom. De deelluitkomsten van ' 4×620 ' en ' 5×62 ' worden niet eerst apart uitgerekend. Dit kan als we naar het standaardalgoritme toewerken een handicap gaan vormen. De tafelprodukten worden op deze manier niet voldoende benut – correctie is nu geboden. Werkwijze (d) heeft zich evenals die van (c) qua notatiewijze van de lange

optelling losgemaakt. De wijze van opschrijven is overzichtelijk, de deelluitkomsten worden eerst gescheiden uitgerekend en dan samengevoegd. De volgende fase is die van het direct uitrekenen en noteren van 60×45 , we komen daar zo nog op. Tenslotte staat in (e) een verregaand verkorte rekenwijze. Mede door het zich realiseren van de lange optelling gebruikt deze leerling bepaalde eigenschappen. Zij of hij is nu toe aan een beslissende verkorting die naar de eindvorm voert.

7 korte terugblik en aanvulling

Ontstaansgeschiedenis, rechtvaardiging en verantwoording van het eindprodukt in de vorm van een prototype van een leergang behoeven nauwelijks toelichting.

De aanleiding was duidelijk: het geval Els.

De richting waarin de oplossing werd gezocht, leek ook nogal voor de hand te liggen: aansluiten op de natuurlijke methode van het herhaalde optellen. De leergang was gemakkelijk te markeren.

De bijstellingen leken achteraf nogal plausibel: ondersteun de lange optelling visueel, sluit aan bij het hoofdrekenen en volg twee onderwijssporen: een oefen- en een exploratiespoor.

Toen de ontwikkelde leergang aan vakdeskundigen – onderwijsgeven, methoden-schrijvers, onderzoekers, begeleiders en docenten – werd gepresenteerd, bleek de plaats en de functie van contextproblemen in de leergang niet duidelijk genoeg te zijn toegelicht. Op grond van deze kritiek werd de volgende tekst toegevoegd.

‘Welnu, globaal gesproken kunnen we drie soorten opgaven onderscheiden die voor de cijferleergang van vermenigvuldigen en delen van belang zijn.

Categorie I: kale cijfersommen.

Categorie II: enkelvoudige contextopgaven.

Categorie III: samengestelde contextopgaven.

De opgaven van categorie I van de soort 32×85 worden gebruikt voor het inoefenen van reeds geleerde cijferprocedures, maar dienen uitdrukkelijk niet als uitgangspunt voor de ontwikkeling van de nieuwe procedures voor nieuwe deelgevallen, omdat ze de kinderen daartoe te weinig inhoudelijk houvast kunnen bieden.

De opgaven van categorie II kenmerken zich door hun eenvoud: ze betreffen één enkele bewerking, de leerling kan zich de probleemstelling gemakkelijk voorstellen, en er is weinig ‘ruis’ van de context.

Het gaat hier om opgaven van het type:

- in een doosje zitten 36 bonbons; hoeveel bonbons zitten er in 12 van die doosjes?
- in een restaurant worden 178 gasten verwacht, aan iedere tafel kunnen 12 personen zitten, hoeveel tafels zijn er nodig?

Welnu, dit soort problemen wordt zowel voor het aanleren van nieuwe (verkorte) procedures gebruikt als voor het inoefenen van reeds geleerde werkwijzen. Stel bijvoorbeeld dat men in een bepaalde les tot de methode van het afsplitsen van een tiental wil komen, dan kan men daarvoor het bovengenoemde bonbon-probleem nemen. In ieder geval gaat men dan niet uit van het kale probleem van 12×36 . Ook wordt dit soort en-

kelvoudige contextopgaven voor het inoefenen van zo'n tiental-afsplitsing gebruikt, naast de opgaven van categorie I.

De opgaven van categorie III zijn minder elementair dan die van categorie II: het gaat daarbij niet om één bewerking maar om een probleemstelling van meerdere operaties, de probleemstelling is bijgevolg ook minder simpel, ze ligt vaak ingebed in een ruimere tekst plus plaatjes, is soms verbonden met andere begrippen en bevat derhalve heel wat 'ruis' rond de rekenopgave.

Dit soort problemen wordt niet precies in de leergang van het cijferen geplaatst, maar wel in de buurt ervan. Ze hebben dus geen functie voor de ontwikkeling van de algoritme, maar behoren tot het domein van de toepassingen – schatten, afronden, 'globaal' rekenen kunnen daarbij soms een belangrijke rol spelen.

(Dekker *et al*, 1982, p. 209)

Tenslotte nog een citaat over een algemeen theoretische kwestie:

'Dan nog iets over de *generaliseerbaarheid van de werkwijze* die bij de progressieve schematisering gevolgd wordt. Een van de discussianten interesseerde zich met name voor deze algemene probleemstelling. We kunnen er hier slechts dit van zeggen: we proberen met deze leergang de kloof te overbruggen die er bestaat tussen enerzijds de kinderlijke werkwijzen bij toepassingsproblemen en anderzijds de volwassen cijferprocedures die ze moeten leren. (Dat hier een kloof is, blijkt uit onderzoeksgegevens die in het volgende hoofdstuk vermeld staan). Die schakeling nu is een algemene didactische opgave: brengt men die niet tot stand dan ontstaan er als het ware twee gescheiden systemen van werken – zoals blijkt. Daarbij ligt uiteraard het aangrijpingspunt bij de 'natuurlijke' kinderlijke werkwijze, maar het eindpunt bij de 'volwassen' aanpak.

Nu kan men zich afvragen hoe 'natuurlijk' die aanpak van de kinderen wel is. Speelt het onderwijs hier een rol? In het algemeen natuurlijk wel, maar onafhankelijk van het onderwijs is het zo dat optellen (aftrekken) het primaat heeft boven het vermenigvuldigen (delen) – een welhaast 'logische' noodzaak. Bijgevolg is de gesignaleerde additieve aanpak van vermenigvuldigings- en delingsproblemen aanvankelijk heel natuurlijk. Goede leerlingen herkennen al snel het vermenigvuldigen en delen als zelfstandige operaties. Maar voor een derde tot de helft van de kinderen uit de middenklassen is dat beslist niet het geval: deze groep leert weliswaar de vermenigvuldigings- en delingsalgoritmen, maar werkt in toepassingssituaties 'primitief' i.c. additief. Naar onze mening is dit uiteenlopen van de 'algoritmische' en de 'informele' aanpak bij enkelvoudige contextproblemen slechts te vermijden indien vanaf de start van de ontwikkeling van de algoritmen de verbinding met (eenvoudige) contextproblemen behouden blijft. De noodzaak van dat schakelen is naar onze mening het enig generaliseerbare in de onderhavige didactiek van het leren cijferen volgens progressieve schematisering, die zoals uit het voorgaande blijkt, wezenlijk verschilt van de gangbare traditionele en moderne werkwijzen.'

(Dekker *et al*, 1982, p. 212-213)

Uit het voorgaande blijkt hoezeer het noodzakelijk is om onderwijs theoretische beschouwingen in de beschrijving van ontwikkelingsonderzoek te betrekken. Theorie filtert en richt de praktijk, juist voor de betrokken buitenstaanders die het ontwikkelproces niet direct hebben meeleefd.

Tenslotte de opbrengst van het onderzoek voor de onderwijspraktijk. De thans twee grootste methoden van het basisonderwijs *Wereld in Getallen* en *Rekenen & Wiskunde* die samen meer dan de helft van de onderwijsmarkt bedienen, hebben beide het herhaald-optel-model opgenomen. Dat is wellicht mede op basis van het genoemde ontwikkelingsonderzoek gebeurd.

De relatie tussen hoofdrekenen en cijferen is pas aan het einde van de jaren tachtig duidelijk vastgesteld: mede op basis van de *Proeve ...* zijn de schrijversgroepen van de educatieve uitgeverijen overeengekomen om het startpunt van het cijferen een half tot een heel schooljaar naar achteren te schuiven, en er pas begin groep 6 mee te starten. Op deze manier krijgt het hoofdrekenen volop de gelegenheid om zich verder te ontwikkelen en wordt het niet voortijdig door het cijferen weggedrukt.

Dit is zonder meer een revolutionaire ontwikkeling. Zo zijn we via het cijferen in casu het vermenigvuldigen via herhaald-optellen de betrekkelijkheid en beperktheid van het cijfermatige optellen en vermenigvuldigen gaan inzien en tevens de kracht van het hoofdrekenen. En uiteraard ook het belang van het uitgaan van contextopgaven.

Een en ander is in die tijd trouwens ook voor andere leergangen van toepassing geweest (zie de bijlage).

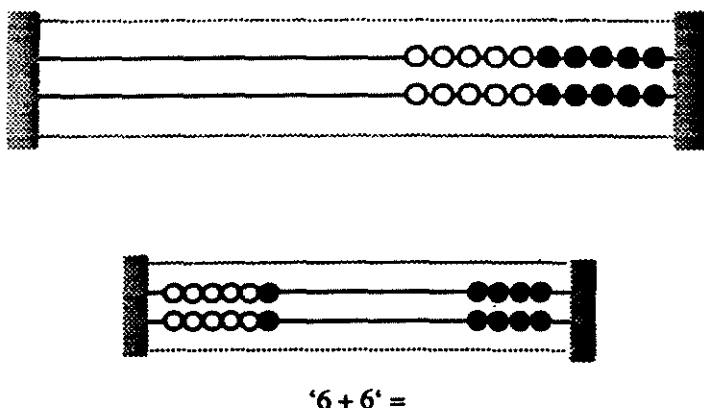
8 nieuwe aanzet

Maar het zojuist geciteerde theoretische grondbeginsel van de realistische richting in het reken-wiskundeonderwijs werkt ruimer dan alleen in de context van de rechtvaardiging, verantwoording en overtuiging. Ook de ontdekking en ontwikkeling worden erdoor gericht.

Voor een algemene beschrijving verwijs ik naar de bijlage over de verticale periode (1982-92) – ik ga daar nu niet verder op in.

Wel wil ik daaraan toevoegen dat voor het produceren van vruchtbare ideeën noodzakelijk is dat men zeer goed op de hoogte is van de betreffende leergebieden en een brede kijk heeft op leerprocessen, prestaties en obstakels van de leerlingen op die terreinen. Kortom, men dient zich behoorlijk op zo'n onderwijsdomein georiënteerd te hebben. Ik geef daarvan tot slot een eenvoudig recent voorbeeld uit eigen ervaring, namelijk over het *rekenrek*.

Toen ik het idee van het rekenrek kreeg, was ik goed op de hoogte van de moeilijkheden die kinderen bij het automatiseren en memoriseren van het optellen en aftrekken tot twintig ondervinden, en ook van de hulpmiddelen die daarbij worden gebruikt (fig. 7).

figuur 7: $6 + 6 =$

Met name de hulpmiddelen met een vijfstructuur, zoals de eierdoos van Van Eerde en Van den Berg, de vijfstaafjes van Hatano, de dubbel-vijfbakjes van Flexer trokken mijn aandacht.

Indachtig het feit dat kinderen zowel vijfstructuren als dubbele gebruiken bij het rekenen tot twintig kreeg ik het idee om het oude telraampje te structureren, te verbreden en op een andere wijze te gebruiken – het rekenrek als idee was klaar. Er was eigenlijk geen mogelijkheid om het idee via gericht ontwikkelingsonderzoek uit te voeren. Maar wel werkten velen mee – zij het minder systematisch en gericht – om een programma voor het rekenrek te helpen ontwikkelen.

Hoe dit alles precies uitpakte laat ik hier buiten beschouwing. De opbrengst is kort gezegd dat het rekenrek een goed middel is bij het vlot leren optellen, maar dat het aftrekken nogal wat problemen geeft. Dat dit een algemeen probleem is blijkt uit een recente studie van Gray (1991).

Deze kwestie is me bijgebleven. En zeer onlangs kreeg ik het idee om het memoriseren van de tafels tot twintig maar tot optellen te beperken en het aftrekken via optellen te benaderen:

$$13 - 8 = \dots$$

$$13 - 8 = 5$$

Eerst dient het boogje om de uitkomst te controleren via optellen. Maar misschien gaat het na verloop van tijd ook vooraf als rekenstrategie functioneren, was de gedachte. Als dat zo zou zijn dan waren de gevolgen daarvan voor het onderwijs zeer aanzienlijk. Een simpel idee met mogelijk grote gevolgen. Zou het werken? – dat is de vraag.

Karin Vlug heeft explorerend onderzoek verricht. De resultaten daarvan zijn opmerkelijk, in eerste ronde: kinderen die kunnen optellen, maar niet goed kunnen aftrekken, blijken met de boogjesbenadering al snel aftreksommen vlot te kunnen maken. De meesten gaan uit zichzelf over van controleren – achteraf, naar rekenstrategie – vooraf, en zetten dus zelf aftrekken om in aanvullend optellen.

Hoe nu verder? Welke plaats krijgen nu het rekenrek en de kralenketting met vijfstructuur? Hoe laten we de boogjesrelatie zien op de getallenlijn? Welke opbouw is het beste voor het optellen en aftrekken tot twintig? Ziehier een mogelijk startpunt voor ontwikkelingsonderzoek.

Er is een idee. Het lijkt de moeite waard. Mogelijke knelpunten kunnen ermee worden weggenomen, wellicht. Het kan onderwijstheoretisch worden gefundeerd ... enzovoort. Interessant is dat het idee voortkomt uit het denken over een belangrijk knelpunt dat in onderzoek is gesignaleerd – en dat dit idee zo simpel is, of lijkt.

Hoe zou een aanvraag van dergelijk ontwikkelingsonderzoek er moeten uitzien?

Deze vraag brengt ons terug bij het eerder beschreven onderzoek.

9 algemene kenmerken van ontwikkelingsonderzoek in eerste aanpak

In de publikatie van 1979 werd de realistische aanpak van het herhaalde optellen scherp geprofileerd tegenover *andere aanpakken*, maar ook tegenover de realistische methode volgens progressieve schematisering en verkorting met het kruispuntenmodel. Ook werd de realistische didactiek in een *historisch kader* geplaatst (Streefland, 1979). Zowel de algoritmen als de didactiek om ze te ontwikkelen waren onderwerp van beschouwing.

samenvattend

Al was er dus bij het begin van het ontwikkelingsonderzoek:

- een duidelijk concept van een nieuwe leergang
- die mogelijk een oplossing zou kunnen bieden voor een feitelijk geconstateerd knelpunt in bestaande leergangen
- een concept dat vakspecifiek en onderwijstheoretisch gefundeerd en geprofileerd werd ten opzichte van andere methoden
- en dat tevens in een passend historisch kader van wiskunde en didactiek werd geplaatst.

Wat ontbrak was:

- een plan voor zowel de opzet en uitvoering van het ontwikkelingsonderzoek evenals voor de wijze waarop daarover gerapporteerd zou worden.

Maar dat was toen niet aan de orde, vanwege de opheffing van het IOWO in 1979 of 1980 (wat uiteindelijk 1981 werd).

Over zo'n onderzoeksplan zou trouwens ook niet veel meer gezegd zijn, dan dat het onderzoek in de ontwerpschool van Wiskobas zou plaatsvinden met een groep van het derde leerjaar (klas 3, thans groep 5). Maar nu, anno 1993, ben ik van mening dat die planning van het onderzoek beter doordacht en vooraf verantwoord zou moeten worden dan we toen deden. En dan doel ik niet zozeer op een gedetailleerde uitlijning vooraf, alswel op de wijze waarop de leerprocessen worden geregistreerd, de onderwijsgang wordt opgetekend, de peilingen van de tussenstanden in de leergangen worden verricht, hoe contextopgaven daarin worden betrokken, hoe de relatie met hoofdrekenen wordt gelegd, en zo meer. Hoe het ook zij, in het algemeen meen ik dat in het voorgaande vijf algemene pijlers van op te starten ontwikkelingsonderzoek zijn neergezet. Ontbreekt één ervan dan zijn de opzet en uitvoering wellicht onvoldoende hecht verankerd. In ieder geval is duidelijk dat zonder een didactisch grondidee of gedacht programma van een probleemgebied of knelpunt in het onderwijs geen zinvol ontwikkelingsonderzoek kan worden verricht. En dat om te bepalen of het nieuwe concept mogelijk vruchtbaar zou kunnen zijn, een theoretische en historische inkadering zo niet noodzakelijk dan toch heel wenselijk is – zeker als externe deskundigen over de uitvoering en uitvoerbaarheid ervan moeten oordelen.

10 slot: de oude man, de jonge jongen en de middelbare muilezel

Voor goed opgezet, gefundeerd en gemotiveerd onderzoek zoals in het voorgaande en in de bijlage beschreven en aangeduid, kon tot nu toe geen beroep worden gedaan op SVO- of NWO-gelden, eenvoudigweg omdat opvattingen over wetenschappelijk onderzoek daarmee niet strookten (Gravemeijer, 1992; Van den Heuvel-Panhuizen, 1992).

In ieder geval maakt de professionele verzuiling van ontwikkeling en onderzoek een produktieve integratie van beide werkzaamheden schier onmogelijk.

Terugkijkend op het voorgaande over de relatie tussen ontwikkelen, onderzoeken en onderwijzen, moet ik denken aan de oude Chinese vertelling over een man, een jongen en een ezel.

'Een oude man, een jonge jongen en een middelbare muilezel maakten een verre tocht naar de meest nabijgelegen stad. De oude man bereed de ezel en de jonge jongen liep ernaast. Dat is niet in de haak, zeiden de mensen van het eerste dorp waar ze doorheen trokken. Hij zit zelf prinsheerlijk op z'n zetel en de jonge jongen laat ie lopen.'

Dat is ook het eerste tafereel van de ontwikkeling van het kruispuntenmodel in de onderwijspraktijk van de proefschool van Wiskobas. Ontwikkeling gedragen door de onderwijspraktijk, maar zonder dat daar diepergaand onderzoek bij betrokken werd,

daarvoor ontbrak de tijd in de eerste fase van Wiskobas waarin een nieuw schoolwerkplan ontwikkeld moest worden.

‘Toen stapte de oude man af en ging de jonge jongen op de muilezel zitten. Maar in het tweede dorp dat ze passeerden, spraken ze er schande van dat hij de oude man liet lopen.’

Het tweede tafereel dat wij lieten zien was dat van het constaterende onderzoek in de onderwijspraktijk, zonder dat daar toen nog verdere ontwikkeling bij betrokken was. Wat presteren de kinderen met het vermenigvuldigen volgens het kruispuntenmodel? – dat was de vraag die we in de peiling probeerden te beantwoorden. De uitkomst was op zich niet zo verrassend – de prestaties waren goed. Alleen bij het oplossen van toepassingsproblemen waarop de toets nu juist niet was gericht, bleek uit een ‘toevallig’ hulpgesprek dat een leerling, Els genaamd, niet met dat kruispuntenmodel overweg kon.

‘Daarna gingen de oude man en de jonge jongen beiden op de ezel zitten. En toen vonden de mensen van het derde dorp waar ze doorheen kwamen dat de muilezel zo te zwaar werd belast.’

Het derde tafereel dat we schetsten was dat van het ontwikkelingsonderzoek met het herhaald-optel-model. Inderdaad een zwaar onderwijskarwei omdat niet alles van meet af aan op rolletjes bleek te lopen. Maar wel met een bevredigende voortgang. Nieuwe inzichten ten aanzien van het gebruik van elementaire contextopgaven, het visueel ondersteunen van herhaald optellen en het verkorten ervan, de hechte hoofdrekkenbasis waarop het algoritmiseren dient plaats te vinden, en de tweesporigheid van het onderwijs via het oefenen van de basisopgaven en het exploreren van complexere producten.

‘In de vierde doorgangplaats wandelden de oude man en de jonge jongen met de muilezel aan de teugellijn. Wat is dat dom, zeiden de dorpelingen toen, ze lopen terwijl ze een muilezel bezitten die hen kan vervoeren ...?’

En dat is wat in feite in het laatste tafereel met het rekenrek gebeurd is. Dit nieuwe leermiddel is nauwelijks via ontwikkeling en onderzoek in de onderwijspraktijk beproefd. Anders gezegd: er is geen gefundeerd onderwijsprogramma of een prototype ervan via ontwikkelingsonderzoek ontwikkeld. Terwijl het basismateriaal en het onderwijsidee dat eraan ten grondslag ligt toch de moeite van ontwikkelingsonderzoek waard lijken.

En zo zijn we weer terug bij het begin van dit slot.

literatuur

- Bright, G.W. (1978). Assessing the Development of Computation Skills. In: M.N. Suydam en R.E. Reijs (eds.), *Developing Computational Skills*. Reston, 148-163.
- Brown, M. en D. Kuchmann (1976). Is it an add, miss? *Mathematics in School* 5, 15-17.
- Bruggen J. van (1975). *Leren cijferen bekeken door een leerpsychologische bril*. Utrecht: IOWO.

- Dekker, A., H. ter Heege en A. Treffers (1982). *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*. Utrecht: OW&OC.
- Freudenthal, H. (1988). Ontwikkelingsonderzoek. In: K. Gravemeijer en K. Koster (eds.), *Onderzoek, Ontwikkeling en Ontwikkelingsonderzoek*. Utrecht: OW&OC, 49-55.
- Gray, E.M. (1991). An Analysis of Diverging Approaches to Simple Arithmetic: Preference and Its Consequences. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (6), 551-575.
- Gravemeijer, K. (1992). Onderwijsontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 10 (3), 3-13.
- Heege, H. ter en A. Treffers (1979). Peiling. In: A. Treffers (ed.), *Cijferend Vermenigvuldigen en Delen (1). Overzicht en Achtergronden*. Utrecht: IOWO, 107-131.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (1992). Onderzoek van reken-wiskundeonderwijs: gaan we weer gouden tijden tegemoet? *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 11 (1), 33-40.
- Hutton, J. (1977). Memoirs of a Maths Teacher (5). Logical Reasoning. *Mathematics Teaching*, 81, 8-12.
- Lek, A. (1992). *Met repen begrepen. Ontwikkelingsonderzoek benoemde breuken*. Utrecht: VOU.
- McIntosh, A. (1979). Some Children and Some Multiplications. *Mathematics Teaching*, 87, 14-16.
- Streefland, L. (1979). Historisch Perspectief. In: A. Treffers (ed.), *Cijferend Vermenigvuldigen en Delen (1). Overzicht en Achtergronden*. Utrecht: IOWO, 131-154.
- Treffers, A. (ed.) (1979). *Cijferend Vermenigvuldigen en Delen (1). Overzicht en Achtergronden*. Utrecht: IOWO.
- Treffers, A. (1992). Terug naar de toekomst. In: E. Wijdeveld (ed.), *Rekenen anno 2002*. Utrecht: NVORWO.
- Treffers, A. en E. de Moor (1990). *Proeve van een Nationaal Programma voor het Reken-Wiskundeonderwijs op de Basisschool. Deel 2 Basisvaardigheden en Cijferen*. Tilburg: Zwijssen.

bijlage

verticale periode (1982-1992)

Het verticale 'ideaalbeeld', dat ons toentertijd overigens al voor ogen stond, werd gerepresenteerd door de staartdeling. Wiskobas ontwikkelde die via het eerlijk verdelen uit elementaire contextopgaven. De delingsprocedure die de methode *Rekenen & Wiskunde* wat later via het opdelen uit contextopgaven afleidde, bleek echter beter te voldoen. Het voorbeeld is inmiddels overbekend:

'Er worden 1128 soldaten vervoerd in bussen met 36 plaatsen.
Hoeveel bussen zijn er nodig?'

Waarom fungeert nu juist dit voorbeeld als paradigma voor het uitlijnen van leergangen? In traditionele methoden zal men zo'n probleem niet aantreffen. Maar zòu het erin staan, dan was het louter bedoeld als toepassing.

Hier echter staat de opgave juist aan de basis van een zelf te construeren algoritme. Het bijzondere eraan is namelijk dat de oplossingen van de leerlingen in feite al de hele toekomstige leergang weerspiegelen (fig. 8).

$ \begin{array}{r} 36 \overline{) 1128} \\ \underline{360} \quad 10 \text{ bussen} \\ 768 \\ \underline{360} \quad 10 \text{ bussen} \\ 408 \\ \underline{360} \quad 10 \text{ bussen} \\ 48 \\ \underline{36} \quad 1 \text{ bus} \\ 12 \quad (1 \text{ bus}) \end{array} $ (a.)	$ \begin{array}{r} 36 \overline{) 1128} \\ \underline{720} \quad 20 \\ 408 \\ \underline{360} \quad 10 \\ 48 \\ \underline{36} \quad 1 \\ 12 \quad (1) \end{array} $ (b.)	$ \begin{array}{r} 36 \overline{) 1128} \\ \underline{1080} \quad 30 \\ 48 \\ \underline{36} \quad 1 \\ 12 \quad (1) \end{array} $ (c.)
--	--	--

figuur 8

Met andere woorden: in dit voorbeeld komt tot uitdrukking hoe elementaire contextproblemen als concrete oriënteringsbasis voor het verticale mathematiseren kunnen fungeren. Dus hoe kinderen zelf, zij het onder leiding, de standaardprocedure van de staartdeling kunnen construeren. Ze stellen zich zo bij het rekenen namelijk werkelijk iets voor: de rekenhandelingen krijgen door de vervoerscontext betekenis. Omgekeerd verleent die context zin om de betreffende rekenhandeling te verkorten en te schematiseren. Ook kale rekenopgaven over delen kunnen door middel van die betekenisverlening (in dit geval via een vervoersprobleem) opgelost worden.

Algemener geformuleerd laat dit voorbeeld zien op welke wijze een ideale leergang vanaf het informele contextgebonden rekenen naar het formele vakmatige opereren loopt, via het intermediair van een contextsituatie die als denk- en rekenmodel dienst kan doen. Nog algemener gesteld: in realistisch reken-wiskundeonderwijs zoeken we naar modelsituaties die als brug kunnen fungeren tussen het informele contextgebonden werken en het formele vakmatige opereren.

Kinderen lossen contextproblemen context-afhankelijk op, althans op een bepaald niveau in het onderwijsleerproces. Maar vaak bieden die werkwijzen geen duidelijk perspectief, omdat ze zich niet laten verkorten en schematiseren tot procedures die binnen het vak gangbaar zijn. Het zoeken van ontwikkelaars en onderzoekers richt zich nu op problemen die dergelijke oplossingswijzen juist wel kunnen genereren; zie het genoemde voorbeeld.

De didactische hoofdvraag van de jaren tachtig was nu, of er voor alle leergangen problemen te vinden zijn, die als modelvoorbeeld kunnen dienen. Voor een aantal leergangen werd daarop een bevredigend antwoord gevonden.

Laat ik een recent voorbeeld van zo'n modelsituatie geven op het gebied van het aanvankelijke breukrekenen om daarmee nog eens de basisstructuur van het realistische reken-wiskundeonderwijs, of beter, van realistische leergangen en langlopende leer-

processen te schetsen (Lek, 1992). Let daarbij vooral op de overeenkomst met het staartdelingsparadigma.

Het gaat om de volgende opgave, bestemd voor leerlingen van groep zes:

Adri krijgt $\frac{3}{4}$ reep. Anita krijgt $\frac{5}{6}$ reep.

- Hoeveel stukjes zal die reep hebben?
- Wie krijgt het meeste, Adri of Anita?
- Hoeveel krijgt die dan meer dan de ander?
- Hoeveel hebben ze samen?
- Hoeveel van die reep van Adri is er nog over?
- Hoeveel van die reep van Anita is er nog over?
- Hoeveel hebben ze samen over?

Deze jonge kinderen hebben uiteraard het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken nog niet gehad. Wel is de breuk als beschrijver van deel-geheel relaties behandeld. Ook kennen de kinderen de breuk als operator werkend op een getal. Ze kunnen dus bijvoorbeeld 'drie van de vier' als $\frac{3}{4}$ van het geheel opvatten en ook $\frac{3}{4}$ deel van bijvoorbeeld twaalf bepalen.

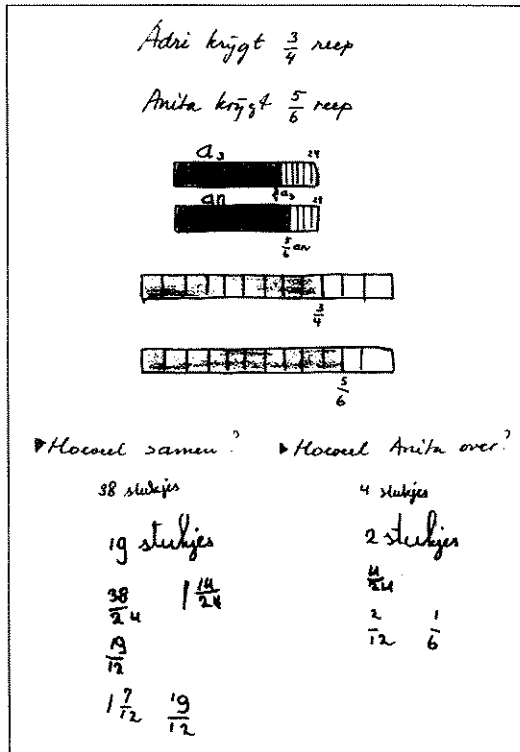
Nu de zojuist genoemde opgave, wat is daar zo speciaal aan? Speciaal is de context van de reep chocolade. Of beter gezegd – zie ook de context van het busprobleem in relatie tot het delingsalgoritme – het gaat om de plaats en functie die de reepcontext vervult in het breuken-leerproces. Niet als toepassingssituatie van een reeds (technisch) verworven algoritme, maar als concrete oriënteringsbasis voor een nog te verwerven algoritme!

Zo laat die reepcontext bijvoorbeeld toe dat de eerste en buitengewoon belangrijke vraag over het aantal stukjes gesteld kan worden. Dat wil zeggen, een vraag die door de kinderen op zinvolle wijze geïnterpreteerd en beantwoord kan worden. En dat blijkt niet het geval als in plaats van een reep gekozen wordt voor een weg, een cake of iets anders, omdat die objecten in principe willekeurig onderverdeeld kunnen worden. Bij een reep kan dat niet: één stukje is zo hard dat je dat nauwelijks nog kunt breken, laat staan eerlijk in tweeën of drieën kunt verdelen.

Specifiek voor de reepcontext is derhalve dat de kinderen vrijwel direct naar een 'passende' reep gaan zoeken, dus in ons voorbeeld naar een reep die zowel in vier als in zes porties verdeeld kan worden. De oplossing van 12 (of 24) stukjes komt dan al snel in zicht (vraag 1). En wie het meeste krijgt, Adri of Anita (vraag 2), is dan ook niet zo moeilijk meer te bepalen. Tenminste niet als de kinderen de breuk $\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{6}$ als operator op 12 of 24 kunnen laten werken.

Bijna alle leerlingen tekenen de repen; in figuur 9 staan twee voorbeelden.

Slechts een enkeling rekent al vrijwel direct zonder enige visuele ondersteuning.



figuur 9

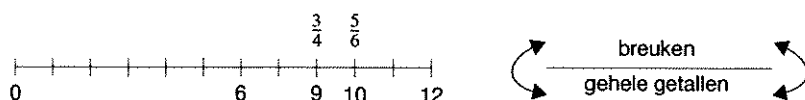
De grote differentiatie in antwoorden verschijnt pas bij de serie 'hoeveel'-vragen. Sommige leerlingen beantwoorden alle vragen met aantallen stukjes, dus met gehele getallen. Anderen antwoorden in termen van breuken, dus met delen van een reep. In figuur 9 geven we enkele antwoorden op de vragen: 'Hoeveel samen?' en 'Hoeveel heeft Anita over?'

Net als bij de staartdeling (fig. 7) tekent zich in de oplossingswijzen van de kinderen van één groep de totale leergang af, die loopt van het informele contextgebonden handelen naar het formele vakmatige opereren. Dit nu is een belangrijke indicatie dat de reepcontext als modelsituatie kan fungeren om de afstand tussen het informele en formele breukrekenen te helpen overbruggen. Verdere schematisering van dit model leidt dan naar de dubbele getallenlijn als basismodel voor operaties met breuken (fig. 10) en later ook naar het rechthoeksmodel (een plak).

Tenslotte nog twee opmerkingen over het verticale mathematiseren in dit verband. De basis voor de verticale mathematisering wordt via de reepcontext gelegd in het reeds bekende systeem van de gehele (natuurlijke) getallen. Het feit dat kinderen daarin

kunnen opereren wordt als grondslag gebruikt voor het rekenen met breuken (zie ook Streefland, 1987).

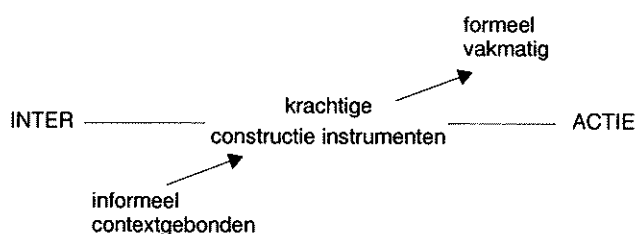
Kortom, het reeds aanwezige kennisbestand van het vaksysteem moet mede in de beschouwing over de rekenniveaus worden betrokken. Anders gezegd: realiteit dient in subjectieve zin opgevat te worden als datgene wat zin, betekenis en realiteitswaarde heeft voor deze (groep van) leerlingen en dat zal op een gegeven moment uiteraard ook de door hen verworven vaksystematische kennis zijn, in casu het opereren met getallen.



figuur 10

De dubbele getallenlijn symboliseert de mentale scheidslijn tussen de twee genoemde systemen en de wijze waarop – desgewenst – via die getallenlijn steeds van het ene systeem naar het andere kan worden omgeschakeld.

De tweede opmerking betreft de horizontale component van het mathematiseren. Deze dient voorafgaande aan het verticale mathematiseren, maar ook tijdens die fase, verder uitgebouwd te worden. In het geval van de breuken bijvoorbeeld gebeurt dit met het aanbrengen van intuïtieve noties over deel-geheel, over de breuk als operator en dergelijke. Horizontaal en verticaal mathematiseren zijn zodoende vervlochten en ondersteunen elkaar op deze wijze.



figuur 11

Welnu, vanaf omstreeks 1980 zijn leergangen ontwikkeld die globaal dezelfde realistische basisstructuur bezitten als zojuist geschetst voor de staartdeling en voor de breuken (fig. 11).

Ontwikkelingsonderzoek: een overbodige categorie?

Klaas Koster
Vakgroep onderwijskunde, Universiteit Groningen

1 meta-analyse op wetenschapstheoretisch niveau

In de beide inleidingen van hedenmorgen wordt de nadruk gelegd op het specifieke karakter van ontwikkelingsonderzoek. Mij is gevraagd vooral op het betoog van Koeno Gravemeijer te reageren.

Mijn eerste opmerking is dat de tekst van Gravemeijer vooral een beschouwing is op meta-niveau. Het lijkt een poging tot een wetenschapstheoretische legitimering van ontwikkelingsonderzoek als de grondslag voor de bevordering van het verloop van domeinspecifieke leer- en instructieprocessen. De meerwaarde van ontwikkelingsonderzoek ten opzichte van het gebruikelijke onderwijsonderzoek ziet hij in:

- a het theoriegeleide, domein-georiënteerde karakter van ontwikkelingsonderzoek;
- b de systematische opéénvolging van theoretische doordenking en praktische beproeving;
- c het accent op de vraag *hoe* iets werkt in plaats van op de vraag *of* iets werkt;
- d het bieden van een interpretatiekader voor uitkomsten van onderzoek.

Op zich is er niets mis met dit soort wetenschapstheoretische en methodologische beschouwingen. Een tijdschrift als *Kennis en Methode* doet niet anders dan dit type artikelen publiceren. Het probleem dat ik met de tekst heb, is dat van het gebruikelijke onderzoek in de sociale wetenschappen eerst een karikatuur wordt gemaakt en dat vervolgens wordt gezegd dat ontwikkelingsonderzoek de oplossing biedt van het theorie-empirie- en het theorie-praktijkprobleem. Wat mij betreft is een specifieke methodologie voor ontwikkelingsonderzoek overbodig. Zelfs betwijfel ik ernstig het nut van het onderscheid van een aparte categorie van regels voor ontwikkelingsonderzoek. Zwart-wit gezegd: ontwikkelingsonderzoek is als onderzoekscategorie overbodig.

2 verhouding ontwerpen - beproeven

Wat naar mijn oordeel wel nuttig kan zijn, is systematisch in het verrichten van onderzoek twee fasen te onderscheiden: de ontwerpfase en de beproevingsfase. Ook dit is verre van nieuw: the context of discovery en the context of justification zijn sinds jaar

en dag standaardbegrippen in methodologische handboeken. Het misverstand dat de tekst van Gravemeijer kan opwekken is dat het ontwikkelingsonderzoek vooral op de eerste context betrekking heeft en dat de rechtvaardigheidscontext, inclusief de beproeving van de houdbaarheid van ontwikkelde theorieën ondergesneeuwd raakt. Beide contexten zijn echter nadrukkelijk met elkaar verbonden. Een metafoor kan dit wellicht verduidelijken. Jaren geleden had ik het genoeg in het Parijse Lido op dezelfde avond twee voorstellingen te mogen volgen.

De eerste voorstelling volgde ik backstage: wat ik daar zag waren heen en weer rennende danseressen, 'bricoleurs', toneelknechten, choreografen, kleedsters en dergelijke. Een en ander was voor mij complete chaos, maar voor de uitvoerenden was het ongetwijfeld 'theoriegeleide bricolage' gericht op het maken van een fraaie voorstelling voor het publiek. In de voorafgaande repetities was het nog aanzienlijk rommeliger geweest, zo werd mij verzekerd.

De tweede voorstelling maakte ik mee in de zaal: ik zag toen een gestileerde uitvoering van dans en acrobatiek waarin alle rommeligheid ontbrak. Dezelfde voorstelling had dus twee gezichten: één van de uitvoerenden achter het toneel en één van de bezoekers in de zaal. Beide met andere beschrijvings- en beoordelingscategorieën.

Zo zou het ook met de positie van 'ontwikkelings'onderzoek kunnen zijn. Aan de ene kant theoriegeleide bricolage tijdens het ontwerpproces, aan de andere kant 'publieke verantwoording' en 'rechtvaardiging' tijdens de beproevingsfase.

Naar mijn oordeel is er geen enkele reden waarom ontwikkelingsonderzoek zich in de beproevingsfase niet zou kunnen bedienen van de standaardprocedures voor de 'publieke verantwoording' van onderzoeksuitkomsten. Ontwikkelingsonderzoek dat de pretentie wil hebben onderzoek te zijn, dient zich ook in algemene zin als onderzoek te verantwoorden. En dat is overigens ook precies wat er in de proefschriften van Streefland en Van den Brink als voorbeelden van ontwikkelingsonderzoek is gedaan. Er is veel ontworpen, er is veel doordacht en er is beproefd. Mijn eerste conclusie is dat in ieder geval in de beproevingscontext specifieke regels voor ontwikkelingsonderzoek overbodig zijn.

3 regels voor de ontwerpfase?

Een interessante vraag is of dit in de ontwerpfase van het ontwikkelingsonderzoek (cyclisch proces van constructie en uitproberen van een toets of onderwijsprogramma) eveneens het geval is. Ook hierop luidt het antwoord: 'ja'. Voor de ontwerpfase van onderzoek gelden nauwelijks beperkende regels. Zelfs de zogenaamde 'strengere' methodoloog A.D. de Groot sprak over de 'vrijheid van ontwerp' als beginfase van iedere onderzoekscyclus. Gravemeijer en Treffers lijken voor ontwikkelingsonderzoek een aantal aanvullende regels te willen hanteren. Zij menen dat in de verhouding tussen

ontwerpen, ontwikkelen en onderzoeken het primaat ligt bij theoriegerichte ontwikkelingsactiviteiten. Het onderzoek staat ten dienste van het verbeteren van het ontwikkelingsproces. Zij hebben weinig op met constaterend onderzoek *sec*.

De teksten van Gravemeijer en Treffers benadrukken dat weldoordacht en weloverwogen ontwikkelingswerk veronderstelt dat een ontwerper gebruik maakt van vakdidactische en domeinspecifieke leer- en instructietheorieën en dat de ontwerper een visie ontwikkelt op het reken-wiskundeonderwijs. Opnieuw: daar is niets mis mee. Wel maakt het mij nieuwsgierig naar de vraag hoe een ontwerper tot bijstellingen komt op grond van een try-out van zijn programma. Zijn er procedures en criteria op grond waarvan de *ontwerper* kan worden geholpen zijn visie en theorieën te toetsen c.q. te herzien? Bijvoorbeeld: een premisse in het realistische rekenonderwijs is dat tijdens de instructie aangesloten moet worden bij informele strategieën van de leerlingen. Dit leidt ertoe dat de rol van het memoriseren van declaratieve kennis als basis voor het leren probleemoplossen weinig nadruk krijgt in de onderwijsprogramma's. Tijdens het cyclische proces van ontwerpen en beproeven van onderwijsprogramma's zou wellicht meer dan thans het geval is, moeten worden afgewogen of de visie van de ontwerper wel strookt met de wijze waarop leerlingen de voorgelegde problemen interpreteren en oplossen.

In het algemeen geldt dat het gebruik van onderzoekskennis over het leren van kinderen en over stagnaties in processen van kennisverwerving weinig accent krijgt in de beschrijving van ontwikkelingsactiviteiten door Gravemeijer en Treffers. Dominant in hun beschrijvingen over onderwijsconstructie zijn de domeinkennis en de vakdidactische kennis. Daarbij wordt de indruk gewekt dat ontwikkelingsgericht onderzoek synoniem is met de realistisch georiënteerde reken-wiskundendidactiek. Hier dreigt het gevaar dat een bepaald theoretisch kader niet alleen fungeert als een 'belief system', maar verwordt tot een ideologie. Weliswaar wijst Gravemeijer terecht op de beperkte legitimeringsaanspraken van de procedure van intersubjectieve oordeelsvorming over de betekenis van bepaalde waarnemingen tijdens het verloop van leer- en instructieprocessen. Aan de andere kant: de criteria of ijkpunten om te beoordelen of een leergang voldoet zijn rechtstreekse vertalingen van premissen uit de realistische didactiek. Bijvoorbeeld: een leergang moet voldoen aan de eis dat de leerlingen in de gelegenheid worden gesteld informele strategieën te gebruiken, leerlingen moeten beschikken over een brede variatie van oplossingen, methoden etcetera. De criteria en ijkpunten lijken hier normatief te worden gebruikt. Of de criteria en ijkpunten zelf de toets der empirische kritiek kunnen weerstaan, lijkt geen onderwerp van het debat te zijn.

Het 'geval Els' in de lezing van Treffers is een goed voorbeeld van de noodzaak óók de vooronderstellingen van de ontwikkelaar/ontwerper over de gewenste vormgeving van het onderwijs voortdurend te beproeven. Ik zou wensen dat het 'Els-gehalte' in de ontwerpfase wordt verhoogd. De 'ijkpunten' of de criteria om te beoordelen of een

ontwerp wel of niet voldoet, zijn deels uiteraard onderwerp van regelmatig overleg in een ontwikkelgroep. De systematiek van case studies kan hier echter naar mijn indruk eveneens behulpzaam zijn.

4 afsluitend

Het is overbodig ontwikkelingsonderzoek te onderscheiden als een afzonderlijke onderzoekscategorie met een eigen methodologisch regelsysteem. Theoriegericht onderzoek naar de houdbaarheid van de premissen van de realistische rekendidactiek kan het beste plaatsvinden via de methodologische standaardregels die gelden voor onderzoek; namelijk dat een onderzoek moet voldoen aan eisen van betrouwbaarheid, validiteit en objectiviteit. Ontwikkelingsonderzoekers die zich op meta-niveau met de herdefiniëring van de laatste drie begrippen willen bezighouden, doen er naar mijn idee verstandig aan zich om te scholen tot methodoloog of wetenschapsfilosoof. Ontwerpers, ontwikkelaars en onderzoekers van het reken-wiskundeonderwijs lijken mij meer baat te vinden bij het nauwlettend registreren hoe onderwijsleerprocessen in schoolklassen verlopen en wat de opbrengsten theoretisch en praktisch zijn van verschillende vormgevingen van het reken-wiskundeonderwijs.

Ontwikkelingsonderzoek bezien vanuit de rol van advocaat van de duivel

Gellof Kanselaar
Vakgroep onderwijskunde, Universiteit Utrecht

Voorafgaand aan deze bijeenkomst hebben Koster en ik als discussianten enkele stukken ontvangen. De bedoeling was te reageren op de bijdragen van Gravemeijer met de titel *Ontwikkelingsonderzoek als basis voor theorievorming* en van Treffers met de titel *Ontwikkelingsonderzoek in eerste aanzet*. De vraag hierbij is, of ontwikkelingsonderzoek een apart soort onderzoek is met eigen methoden en procedures en een eigen soort rechtvaardiging. Mijn mening is dat ontwikkelingsonderzoek niet een nieuw soort onderzoek is met eigen methoden van dataverzameling en data-analyse en dat het zich daarmee niet zou kunnen onttrekken aan de eisen van validiteit, betrouwbaarheid en controleerbaarheid van wetenschappelijk onderzoek. De titel voor mijn invalshoek bij deze discussie ontleen ik aan een citaat uit het stuk van Gravemeijer bij zijn behandeling van het begrip 'validiteit'. Daar citeert hij Smaling: 'Ook kan hij (G.K. de onderzoeker) collega-onderzoekers vragen de rol van 'advocaat van de duivel' te spelen'. In deze rol zal ik proberen een bijdrage aan de discussie over ontwikkelingsonderzoek te leveren.

Ontwikkelingsonderzoek wordt omschreven als een cyclisch en gedeeltelijk parallel lopend proces van ontwikkelen en onderzoeken. Het onderzoek wordt hierbij gezien als een gewenste toetsing van het ontwikkelingsproces om na te gaan of het ontwikkelde produkt ook werkt zoals bedoeld. Deze behoefte aan onderzoek impliceert dat de procedures gevolgd bij het ontwikkelen, geen voldoende rechtvaardiging bieden voor de veronderstelde werking van het ontwikkelde materiaal en evenmin als een rechtvaardiging gelden voor de juistheid van in het materiaal gerealiseerde ideeën. Ondanks pogingen om ontwerpprocessen te systematiseren, heeft ontwerpen nog steeds meer weg van probleemoplossen dan van een deterministisch denkproces. Met andere woorden: de ontwerpprocedures bieden geen garantie voor de adequaatheid van het ontwikkelde materiaal. Het gaat bij het ontwerpen om het oplossen van open problemen waarbij niet op voorhand de juiste uitkomst vaststaat. Integendeel de 'juistheid' van de uitkomst is hetgeen nog te bewijzen valt. Wel speelt expertise van de ontwerper/ontwikkelaar een essentiële rol voor de kwaliteit van het ontwerp. De rechtvaardiging van produktieve ideeën (terminologie van Treffers) kan mijns inziens ook niet gebaseerd zijn op de expertise van de persoon van de ontwikkelaar. Mijn eerste argument hiervoor is dat juist de denkprocessen van experts moeilijk te expliciteren en voor anderen moeilijk te volgen zijn. In die zin overtuigen zij anderen niet. Op de tweede plaats kost het tien jaar om een expert te worden in een enigszins complex do-

mein en het is duidelijk dat het Freudenthal instituut een centrum van experts is, maar dat garandeert meer de kwaliteit van de ontwikkelde produkten dan van een bijdrage aan de wetenschappelijke theorie-ontwikkeling. Samenvattend: *onderzoek is nodig*.

Om misverstanden te voorkomen merk ik op dat ik deze discussie voer om na te gaan welke rechtvaardigingsmogelijkheden er bij ontwikkelingsonderzoek zouden kunnen zijn en niet omdat ik denk dat medewerkers van het Freudenthal instituut deze opvattingen zouden huldigen.

Waarvoor is onderzoek nodig? Hier zijn tenminste twee aspecten te onderscheiden. Het eerste is de vraag naar het beoogde effect van het ontwikkelde materiaal (leerresultaat) en het tweede betreft de vraag naar de verklaring van het onderwijsleerproces (wetenschapsontwikkeling). Deze twee aspecten hoeven niet noodzakelijk samen te gaan. Als een verwacht effect uitblijft, kan dat evenzeer een bijdrage aan de theorievorming leveren over bijvoorbeeld leerprocessen bij de leerling, terwijl het wel bereiken van een effect door veel andere, contaminerende of gecorreleerde variabelen veroorzaakt kan zijn en niet door de in het materiaal gerealiseerde ideeën van de ontwikkelaar. Met andere woorden: ook hier is geen lineair deterministische relatie tussen ontwerp (instructie) en leerproces. Verklaringen kunnen ook vanuit verschillende perspectieven en niveaus gezocht worden; bijvoorbeeld een verklaring voor het verschil tussen ideaal curriculum en gerealiseerd curriculum (docentgedrag) of tussen verschil in gepresenteerde lesstof en voorkennis van informele strategieën van leerlingen.

Welke pretentie hebben 'ontwikkelingsonderzoekers'? Ik ben daar niet helemaal zeker van. Als je wilt aantonen dat je materiaal een positief resultaat oplevert, richt je je in je verslaggeving waarschijnlijk meer tot de praktijkmensen (uitgevers, docenten). Bij deze doelgroep gelden vooral argumenten van realiseerbaarheid, bereikt effect en geloof in de expertise van de ontwikkelaar. Het toetsen van het bereikte effect is geen eenvoudige zaak, maar ligt toch meer in de buurt van ontwerpactiviteiten dan van onderzoek (zie presentatie van Marja van den Heuvel). Wanneer je je richt op wetenschapsontwikkeling zul je de manier van overtuigen gebruiken die bij het wetenschappelijk forum hoort.

Het template voor ontwikkelingsonderzoek dat Gravemeijer in zijn bijdrage presenteert, vertoont veel overeenkomst met de wijze waarop ik experimenteel psychologisch onderzoek heb leren doen: vooronderzoek, definiëring van de vraag, beschrijving van de methode en technieken, uitvoering en verslaggeving. Een mogelijk verschil zit in het weglaten van een fase tussen uitvoering en verslaggeving. Hiertussen zit namelijk de fase van het analyseren en interpreteren van de onderzoeksgegevens. Bij de definiëring van de technieken van dataverzameling en de analyse en interpretatie van de gegevens zit een belangrijk aspect dat invloed heeft op de betrouwbaarheid van de uitspraken. Ik heb af en toe de indruk (subjectieve interpretatie) dat vakdidactici in hun onderzoek geneigd zijn het ongewapende menselijke oordeel betrouwbaarder te vinden dan psychologisch opgeleide personen dat doen. De invloed van onder

andere Freud en de 'vertekenende' Gestaltwetten bij de waarneming hebben hun sporen nagelaten. Rationalisaties voor gedrag en oordelen, de invloed van vooroordelen en verwachtingen op de waarnemingen, maken sociaal-wetenschappelijk getrainde onderzoekers veel wantrouwender ten aanzien van de betrouwbaarheid van het ongewapende oordeel. De sociaal-wetenschappelijke onderzoeksmethodologie is er juist voor om ons te beschermen tegen onze eigen vooroordelen en wensen bij de interpretatie van onze onderzoeksgegevens. De onderzoeker hoort mijns inziens ten aanzien van zijn onderzoeksopzet en uitvoering zelf de rol van advocaat van de duivel te spelen, of in termen van De Groot: het H_0 -standpunt in te nemen. Dit wil zeggen: er op voorhand vanuit te gaan dat je verwachtingen niet uitkomen, c.q. niet waar zijn. Een voorbeeld om duidelijk te maken wat ik met het ongewapende oog bedoel: 'met het ongewapende oog kan ik toch zo wel zien of een driehoek gelijkzijdig is of niet. Dat hoef ik toch niet te bewijzen volgens de regels van de wiskunde om tot een geldige en betrouwbare uitspraak te komen'. Terwijl de vertekening door eigen belangen van de waarnemer hier meestal minder waarschijnlijk zijn dan bij onderzoek dat gedaan wordt vanuit een duidelijke visie. De door bij het onderwijs betrokken mensen vaak zo hoog geprezen visie op onderwijs mag van mij het ontwikkelingsproces mede sturen maar niet de interpretatie van de onderzoeksgegevens. Of om de recentere term 'missie' uit de organisatiekunde te gebruiken: op het moment van onderzoek dien je mijns inziens meer de rol van advocaat van de duivel te spelen dan die van missionaris.

Ik zou het jammer vinden als de invloed van ontwikkelingsonderzoek op het wetenschappelijke forum (en daarmee ook de mogelijkheden om geld voor onderzoek te verkrijgen) minder is dan mogelijk, doordat de betrouwbaarheid van de technieken van dataverzameling, -analyse en -interpretatie te weinig aandacht krijgt. Ik vind dat er naar verhouding al veel te veel evaluatie-onderzoek gebeurt naar wat beleidsmakers hebben bedacht en inventarisatie van wat practici doen. Ontwikkelingsonderzoek waarbij onderzoek wordt gedaan naar onderwijs dat zoveel mogelijk op basis van wetenschappelijke kennis (vakdidactisch en onderwijspsychologisch) is vormgegeven, kan een belangrijker bijdrage leveren aan de effectiviteit van het onderwijs dan het uitsluitend constaterende effectiviteitsonderzoek. De wapens die wij hebben in de strijd om het onderzoek zo betrouwbaar mogelijk te maken, liggen op het terrein van de onderzoeksdesigns, meetinstrumenten en analysetechnieken. Ik meen dat ontwikkelingsonderzoek niet alleen de zwakste vormen van betrouwbaarheid hoeft na te streven. Ontwikkelingsonderzoek kan de vorm van exploratief 'voor'onderzoek hebben, maar het kan ook zeker toetsend zijn. Een grote variatie aan methoden van onderzoek kan zowel het ontwikkelingsaspect als de wetenschapsontwikkeling dienen.

Na deze opmerkingen over onderzoek nog enkele opmerkingen over wetenschapsontwikkeling op basis van ontwikkelingsonderzoek. Het werk binnen het IOWO, OW&OC en het Freudenthal instituut heeft een belangrijke bijdrage geleverd aan onze

kennis van onderwijsleerprocessen bij het reken-wiskundeonderwijs. Een aantal theoretische uitgangspunten bij dit werk werden door Freudenthal c.s. al gehanteerd voordat deze binnen de onderwijspsychologie tot 'mode' werden. Wetenschapsonwikkeling binnen ontwikkelingsonderzoek kent evenals de componenten ontwikkeling en onderzoek twee kanten van de medaille, namelijk kennis over de didactische vormgeving en kennis over het leerproces. Met een voorbeeld uit de bijdrage van Treffers zal ik dit illustreren. Het voorbeeld betreft het begrip verkorten.

De term verkorting komt in de bijdrage van Treffers verschillende keren voor. Hierbij wordt via Van Bruggen ook nog verwezen naar Gal'perin en Lompscher. Het begrip verkorting wordt echter voornamelijk gebruikt om een verkorting in de notatie van een vermenigvuldiging aan te geven, met andere woorden in de didactische vormgeving (28×57 wordt $10 \times 57 = 570$ en $10 \times 57 = 570$ en $8 \times 57 = 456$ is tezamen 1596; tegenover 57 en 28 onder elkaar vermenigvuldigen). In termen van cognitieve processen bij de leerling hoeft er tussen deze vormen echter helemaal geen verschil te zijn in mate van verkorting. Met andere woorden: als de opeenvolging in didactische vormgeving wel tot goede antwoorden leidt, is dit nog niet te verklaren in termen van toegenomen verkorting in cognitieve processen. De vraag is of men bij ontwikkelingsonderzoek in beide (instructie- en leerproces) 'verklaringen' is geïnteresseerd. Ik zou dit graag zien omdat dan de opbrengst in termen van wetenschapsonwikkeling mijns inziens het grootst is. Het vraagt echter vaak wel verschillende methoden van dataverzameling en -analyse, bijvoorbeeld observatie van de instructie versus protocolanalyse van hard-op-denken-gegevens van de leerling. Dat kennis over het één (didactische vormgeving) niet automatisch leidt tot kennis over het ander (leerproces) is ook de mening van Treffers (In: L. Streefland (ed.), 1991. *Realistic mathematics education in primary school*. p. 26 e.v.). De connecties tussen leer- en instructieprincipes in ontwikkelingsonderzoek zijn echter meestal niet arbitrair. Door de relatie tussen beide componenten (vormgeving op basis van vakdidactische en andere uitgangspunten en het actuele leerproces) zo diepgaand mogelijk te onderzoeken, is de kans op wetenschapsonwikkeling die een bijdrage kan leveren aan het optimaliseren van onderwijsleerprocessen het grootst. Samenwerking tussen verschillende disciplines lijkt mij hierbij vruchtbaar. Graag ging ik daarom ook in op de uitnodiging om hier een bijdrage aan de discussie te leveren. Tot slot: ook ik heb vaker gedacht zendeling te willen worden dan advocaat van de duivel.

Discussieverslag

De discussie werd geleid door Lieven Verschaffel en op gang gebracht door reflecties van de twee discussianten: Gellof Kanselaar en Klaas Koster.

De discussie concentreert zich op het eerste punt van Koster:

- Vormt ontwikkelingsonderzoek een afzonderlijke categorie?
- Zo ja, hoe verhoudt deze categorie zich dan tot het meer klassieke type onderwijsonderzoek ?
- Zijn deze twee typen onderzoek in verschillende fasen op elkaar te betrekken?

Van Oers bestrijdt de uitspraak van Koster dat ontwikkelingsonderzoek en het (meer traditionele) onderwijsonderzoek niet van elkaar zouden verschillen. Ontwikkelingsonderzoek beoogt naast kennisgroei ook praktijkverbetering, terwijl het klassieke onderwijsonderzoek nog wel eens parasiteert op de praktijk. Het gaat ècht om twee aparte categorieën. Voorts is Van Oers verbaasd, dat in het betoog van Gravemeijer de leraar schitterde door afwezigheid. Hij is toch de bricoleur bij uitstek?

Koster blijft in zijn reactie bij de oorspronkelijke stelling: beide soorten onderzoek hebben dezelfde kenmerken. Veel sociaal-wetenschappelijk onderzoek wordt immers ook gedaan ten behoeve van de praktijk. Hij vraagt zich af of het wel de manier van onderzoek is die anders is, of alleen de manier van rapporteren.

Gravemeijer benadrukt het praktijkgerichte karakter van ontwikkelingsonderzoek. In zijn betoog lag de nadruk echter op de theorieën. De opbrengst is meer dan alleen een betere praktijk en een praktijktheorie voor leraren, het is ook een theorie over wiskundeonderwijs en is daarmee van nut voor verder onderzoek. Voorts gaat hij in op de eerste uitspraak van Koster. Er zijn principiële verschillen. Bij ontwikkelingsonderzoek ontwikkel je de theorie al doende. De theorie ligt niet klaar. Je werkt met korte cycli waarin ontwikkelen en onderzoek elkaar afwisselen.

Vermeulen wijst in dit verband op de epistemologische achtergronden.

Gravemeijer gaat hierop door. Ontwikkelingsonderzoek impliceert een theorie over hoe kennis zich ontwikkelt: in interactie met de praktijk bouw je kennis op. Dit past goed bij de constructivistische theorieën over kennisverwerving.

Elbers beklemtoont de relatie tussen onderzoeksfase en onderzoekstype. In een eerste fase kunnen case-studies een belangrijke rol spelen. Allerlei onconventionele manieren van onderzoek, waaronder bricolage, doen zich voor. De vraag is of deze fase zich methodologisch zo gemakkelijk laat uitwerken. Kun je wel regels bedenken? Het 'geval Els', door Treffers beschreven, leidde bij de ontwerper tot een vonk, terwijl de goede oplossingen van haar buurmeisje niet eens werden opgemerkt. Hoe reglementeer je dit soort zaken? In een tweede onderzoeksfase moet je je rechtvaardigen naar de bredere kring. Onderzoek op grote schaal kan dan geboden zijn. Deze fasen zijn te vergelijken met wat Popper 'the context

of discovery' en 'the context of justification' noemt.

Dekker voert een pleidooi om de eigenheid van ontwikkelingsonderzoek helder te houden. De ontwikkelingsonderzoeker stelt zichzelf andere vragen. Hij is er op uit om leerprocessen bij leerlingen te realiseren. Dekker benadrukt dat lesmateriaal niet de enige beïnvloedende factor is. Ook de docent, de interactie en de praktijk in de klas zijn belangrijke factoren. Hoe deze vorm te geven om gewenste leerprocessen te realiseren, moet ook beschreven worden. Wordt de docent te weinig in de beschouwingen betrokken, dan ontstaan er uitsluitend 'papieren' vernieuwingen.

Gravemeijer gaat vervolgens in op enkele reacties. Een fasering heeft ook haar beperkingen. Discovery en justification lopen vaak door elkaar. En wat de rol van de docent betreft: het gaat inderdaad niet om de leerstof maar om het onderwijs zelf. Om de opbrengst te versterken is het van belang beter te expliciteren wat de theorie is en waarom die goed is. De kernvraag is niet: 'werkt het?', maar: 'hoe werkt het?' en: 'kan het beter?'

Kanselaar wijst er op dat het bij ontwikkelingsonderzoek belangrijker is de leerling in het oog te hebben dan de docent.

Wierstra gaat nog eens in op de onderscheiding in fasen. In de eerste fase vind je vaak een bevestiging van je vooroordelen. In een volgende fase is meer distantie nodig. Theorievorming gebeurt niet in de fase dat je je ideeën of visie nog aan het ontwikkelen bent. Hij noemt enkele voorbeelden van publikaties uit het PLON-project.

Treffers is het eens met een vorm van fasering. Vergelijkend onderzoek is binnen het grotere verband van het ontwikkelingsonderzoek zeker mogelijk. Hij noemt het voorbeeld van de staartdeling (Rengerink, 1983). In de praktijk blijken grote verschillen tussen ontwikkelingsonderzoek en 'gewoon' onderzoek. Voor ontwikkelingsonderzoek zijn er te weinig kansen in de Nederlandse verzorgingsstructuur. Waar moet hij heen om subsidie te krijgen voor een – algemeen noodzakelijk geacht – onderzoek naar kommagetallen? Als ontwikkelingsonderzoek 'normaal' onderwijsonderzoek is, waarom is er dan nooit geld voor te krijgen? Aan de universiteiten zou ook meer aandacht moeten komen voor ontwikkelingsonderzoek.

Smaling betreurt het dat de wetenschapsfilosofie wat terzijde wordt geschoven. Dit vak kan uiterst nuttig zijn voor de gevoerde discussie. Het is goed om te weten waarover het gaat als we spreken over ontdekkingscontext en rechtvaardigingscontext. Het is niet een 'na elkaar', maar het gaat om twee sporen die 'naast elkaar' plaatsvinden in het onderzoek. Er zijn allerlei soorten ontdekkingscontexten met hun eigen rechtvaardigingscontexten. De deze dag uitgesproken oordelen over handelingsonderzoek hebben alles te maken met ontologie. Steeds gaat het er om het gedrag van mensen te verklaren. Daarin kun je beslist niet uit de voeten met uitsluitend 'als-dan' redeneringen. Er is meer aan de hand. De gevoerde discussie is niet neutraal maar verwijst naar fundamentele kwesties.

Schoemaker geeft de voorkeur aan de term praktijkloyaliteit boven praktijkgerichtheid. Als onderzoeker heb je een dubbele verantwoording: naar de wetenschap én naar het veld. Bij de beschrijving van ontwikkelingsonderzoek heeft hij sterk de behoefte aan een genetische terminologie.

Een case study ontwikkelingsonderzoek

project data visualization

Martin van Reeuwijk
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 inleiding

In 1989 werd de vakgroep OW&OC (die toen nog geen Freudenthal instituut heette) door Tom Romberg van de universiteit van Wisconsin in Madison, USA gevraagd toetsen te ontwikkelen voor de Amerikaanse schoolsituatie. De wijze waarop in Nederland wiskundeonderwijs getoetst wordt, en de beschrijving van alternatieve toetsen in het proefschrift van Jan de Lange, spraken Tom Romberg zeer aan. Hij wilde graag onderzoeken of dergelijke toetsvormen ook te gebruiken zouden zijn in het Amerikaanse wiskundeonderwijs.

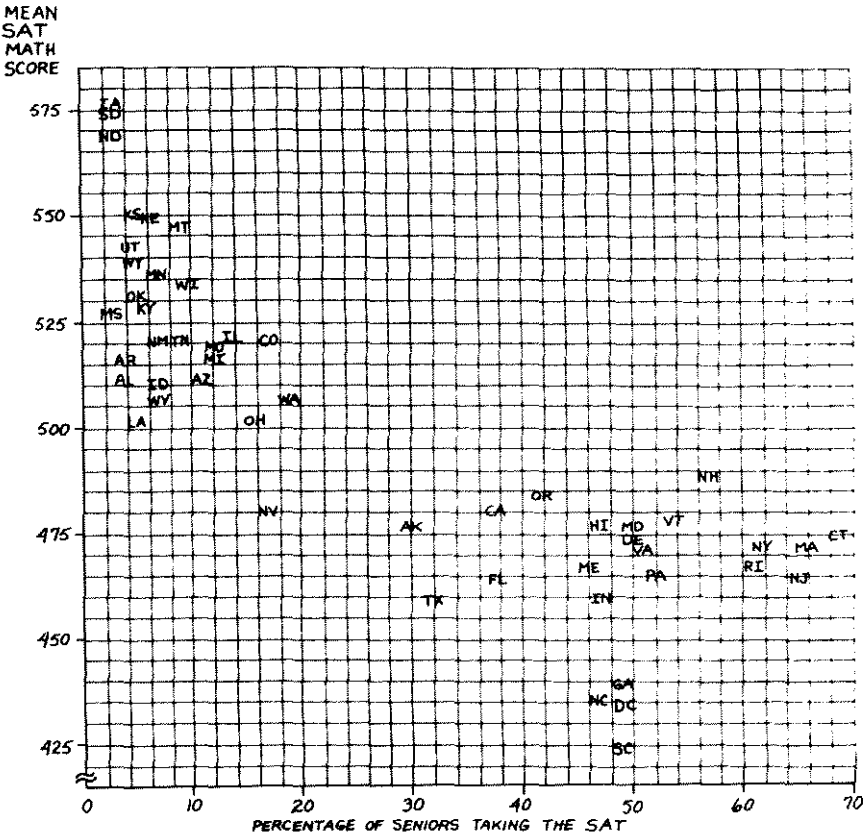
De doelen die worden nagestreefd in het Nederlandse wiskundeonderwijs, en die ook worden getoetst, waren echter niet terug te vinden in het Amerikaanse onderwijs. Als voorwaarde werd daarom door OW&OC gesteld dat er ook een leergang zou moeten worden ontworpen. Tom Romberg ging hiermee accoord en daarmee veranderde de onderzoeksvraag.

Het doel van het project werd, te onderzoeken wat de mogelijkheden van realistisch reken-wiskundeonderwijs in een Amerikaanse situatie zijn, alsmede te identificeren wat de problemen zijn bij implementatie van een curriculum voor realistisch reken-wiskundeonderwijs. De *NCTM Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989) waren net gepubliceerd en Tom Romberg zag in het realistische reken-wiskundeonderwijs een mogelijke invulling van de ideeën die in de Standards worden beschreven. Speciale aandacht zou worden besteed aan de toetsen, zij het in een geïntegreerd onderwijsontwikkelingsproject.

Op verzoek van de Amerikanen werd ervoor gekozen, een pakketje over statistiek te ontwikkelen en dat uit te proberen op een highschool in Milwaukee. In deze presentatie doe ik verslag van dit project. Ik beschouw dit project als een voorbeeld van ontwikkelingsonderzoek.

SAT Scores

The following plot shows the SAT math scores in each state in 1985 against the percentage of seniors in each state who took the test. Each state is identified by its postal code. For example, Mississippi is MS. The nationwide mean was 475.



1. In general, as a larger percentage of students take the test, what happens to the SAT math score?
2. Find the two clusters of states. Within the cluster on the left, is there a positive, negative, or no association between the percentage taking the test and the score?
3. Within the cluster on the right, is there a positive, negative, or no association?
4. Taking into account the percentage of students taking the test, which state(s) do you think have the best SAT math score? Which have the worst?
5. Using the facts you discovered in questions 1 through 4, write a summary of the information given in the scatter plot. Include an analysis of the position of your state.

figuur 1: uit de Quantitative Literacy Series, Program Sampler, section VI: scatter plots

2 voorwerk

De keuze om een pakketje te maken over statistiek was ingegeven door het feit dat Gail Burrill meedeed, een docente die erg goed op de hoogte is van het statistiekonderwijs op Amerikaanse highschools; zij zou het pakketje op haar school gaan uitproberen. Statistiek is een populair onderwerp in de USA. In 1989 was er nog niet veel leerlingenmateriaal voor statistiek beschikbaar. Het Quantitative Literacy Project had wel een serie leerlingenboekjes over statistiek uitgebracht, maar deze waren nogal gesloten en oppervlakkig, zoals het voorbeeld in figuur 1 laat zien.

Volgens een traditionele wijze van 'vertellen, uitleggen, aanleren' worden in deze serie boekjes statistische begrippen behandeld. Er wordt nauwelijks aandacht besteed aan het gebruik van verschillende strategieën, het werken op verschillende niveaus, het redeneren, en de eigen inbreng van leerlingen. Dit zijn zaken die in de realistische visie op het reken-wiskundeonderwijs zeer belangrijk zijn.

De vijf vragen bij het voorbeeld over de SAT-scores gaan niet veel verder dan het aflezen van de grafiek. Leerlingen worden nauwelijks uitgedaagd dieper op de gepresenteerde gegevens in te gaan. Om een indruk te geven van de doelen die in het realistisch reken-wiskundeonderwijs worden nagestreefd, zijn een paar extra vragen bij dit probleem ontworpen:

- 6 Slechts 15 staten scoren onder het gemiddelde van 475.
Kun je hier een verklaring voor geven?
- 7 Bedenk een verklaring voor de grafiek. Waarom zou de grafiek er uitzien zoals hij er uitziet?

Door extra gegevens te presenteren, bijvoorbeeld over de bevolkingsaantallen en de oppervlakten van de vijftig staten in de USA, kun je nog dieper op het probleem ingaan. De volgende vragen vereisen een grondiger analyse van de grafiek.

- 8 Reken met behulp van de populaties en de oppervlakten voor elke staat de bevolkingsdichtheid per staat uit. Geef in je grafiek aan waar dichtbevolkte en dunbevolkte staten liggen.
Wat valt op als je nu naar de grafiek kijkt?
- 9 Wat kun je nu over de staten Oregon, Ohio en Alaska zeggen?

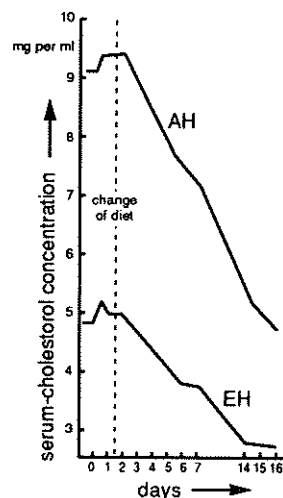
In overleg met Gail Burrill en Tom Romberg werd een eerste globale beschrijving van de leergang op papier gezet. De auteurs van het Freudenthal instituut zouden een pakketje maken over beschrijvende statistiek waarin aandacht zou zijn voor: verschillende grafische representaties, eenvoudige centrum-maten, spreidingsmaten en correlatie op informele wijze. Tevens zou het hele pakketje in het teken staan van het ontwikkelen van een kritische attitude ten opzichte van het gebruik van statistiek. Het voorbeeld in figuur 2 illustreert wat we voor ogen hadden met de kritische attitude.

Tegelijk met het ontwerpen van het leerlingenmateriaal werden ook docentenhandleiding, toetsen, nascholingsmateriaal en een begeleidingsmodel ontworpen. We zullen

in het vervolg van deze presentatie enkele aspecten van dat ontwikkelingsonderzoek nader bekijken.

This graph shows the “dramatic” effect of a change in diet on the level of cholesterol. The decrease in cholesterol of patient AH is particularly spectacular.

10. The lost origin is not the only mistake in this graph. What other manipulation adds to the effect?
11. Draw a “proper” graph of the two patients.



figuur 2: you can always get what you want

De onderzoeksvraag luidde:

- 1 Onderzoeken wat de mogelijkheden van realistisch reken-wiskundeonderwijs en de toetsing daarvan in een Amerikaanse situatie zijn.
- 2 Identificeren van de problemen bij implementatie van een curriculum voor realistisch reken-wiskundeonderwijs.

doelen

De uitwerking van de onderzoeksvraag betekent in de praktijk: de ontwikkeling van een mini-leergang beschrijvende statistiek, geïnspireerd op de filosofie van realistisch reken-wiskundeonderwijs. Allereerst werd een uitgebreide doelbeschrijving opgesteld met doelen op drie niveaus, van specifiek naar algemeen.

Op het lage niveau vinden we definities, basisvaardigheden en standaardalgoritmen, behorend bij het onderwerp beschrijvende statistiek. Het middenniveau kan worden gekarakteriseerd door termen als: integreren van kennis uit verschillende wiskundedomeinen, kiezen van een geschikte oplossingsmethode, een overwogen keuze kunnen maken voor een geschikte representatie. De doelen op het middenniveau zijn minder gebonden aan het onderwerp beschrijvende statistiek dan die op het lage niveau. Op het hoogste niveau vinden we nog algemener doelen. Redeneren, wiskundig denken, het ontwikkelen van een kritische attitude, reflecteren, gebruiken van creativiteit, generaliseren, en mathematiseren zijn doelen op het hoogste niveau.

In bijlage 1 is de volledige doelbeschrijving opgenomen.

didactiek

De filosofie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt gereflecteerd in de doelbeschrijving. Om de doelen te kunnen verwezenlijken wordt een bepaalde werkwijze in de klas gesuggereerd. Freudenthal vat het bedoelde onderwijs samen met de term 'Wiskunde als menselijke activiteit'. In dit project werd dat geoperationaliseerd door de volgende activiteiten:

- De leerlingen de kans geven creatief te zijn bij het oplossen van problemen, door open vragen aan te bieden die verschillende oplossingsstrategieën toelaten.
- De leerlingen de mogelijkheid bieden en aanmoedigen kennis en vaardigheden op een flexibele wijze te gebruiken.
- Leerlingen het belang van systematisch en georganiseerd werken laten inzien.
- Oplossingen van problemen laten generaliseren naar andere situaties dan de gegeven probleemsituatie.
- Het bevorderen van het kritisch analyseren van het probleem, en het reflecteren op de oplossing van het probleem.
- De leerlingen aanmoedigen tot schatten en het gebruiken van het gezond verstand bij het oplossen van een probleem.
- Het bevorderen van samenwerken en gebruiken van andere media dan papier en pen.
- Momenten voor eigen producties en eigen constructies in het lesmateriaal en in de lessen inbouwen.

Het was duidelijk dat er in de nascholing en begeleiding ruime aandacht besteed moest worden aan deze nieuwe manier van onderwijs geven. De docenten op de highschool in Milwaukee hadden immers geen ervaring met deze 'open' wijze van lesgeven.

een eerste versie van het pakketje

Op hetzelfde moment dat de doelbeschrijving en de beschrijving van het type onderwijs werden gemaakt, werden ook uitdagende en geschikte contexten verzameld. Er groeide een verzameling ideeën die gebruikt werd bij het ontwerpen van het pakketje en de toetsen. Een cyclisch proces van uitwerken, beproeven, discussie, reflectie en bijstelling ontstond. Zo'n proces is kenmerkend voor de ontwikkelingsgang van deze minileergang beschrijvende statistiek.

Er werd gekozen om conflictsituaties op te roepen – in dit geval het gebruik van incorrecte grafische representaties zoals in figuur 2. De verwachting was dat leerlingen op hun eigen niveau een inbreng zouden kunnen leveren en dat de context de leerlingen hiertoe zou stimuleren, en hen ook zou stimuleren tot reflectie en discussie. Aan de hand van een paar voorbeelden zullen we in het volgende hoofdstuk laten zien of en in hoeverre de verwachting bevestigd werd. Omdat het proces een cyclisch karakter heeft, is het moeilijk een exact verslag te doen van de volgorde waarin de diverse onderdelen van het onderwijspakket werden ontwikkeld. Een eerste grove versie van het

leerlingenpakketje werd gemaakt. Tegelijkertijd werden de doelen en het theoretische kader waarin het pakketje paste geëxpliciteerd. Bij het ontwerpen van de volgende versie van het leerlingenpakketje werden ook de doelen weer bijgesteld.

De verzamelde voorbeelden, ideeën en contexten, samen met de jarenlange ervaring in ontwerpen van lesmateriaal (Hewet, Hawex, W12-16) werden door Jan de Lange en Heleen Verhage gebruikt om de eerste versie van het pakketje te maken.

De eerste ronde van het ontwikkelingsproces leverde de volgende produkten op:

- eerste versie van het pakketje Data Visualization;
- ideeën voor toetsen bij het pakketje;
- doelbeschrijving van het pakketje;
- beschrijving van het type onderwijs.

een tweede (pilot) versie van het pakketje

De produkten uit de eerste ronde werden opgestuurd naar Gail Burrill en Tom Romberg, die vanuit hun deskundigheid commentaar leverden.

Hierna werd de tweede versie van het leerlingenpakketje gemaakt en werden ook de begeleidende materialen bijgesteld. De tweede versie zou worden gebruikt in de pilot in september 1989. Het proces van ontwerpen en doordenken leverde een produkt op dat nu in de klas kon worden beproefd. Het pakketje bestond uit acht hoofdstukken. Samenvattingen van deze hoofdstukken zijn in bijlage 2 terug te vinden.

Ook in de toetsen – die we verder buiten beschouwing laten – zijn zowel de doelen op drie niveaus als de didactische principes terug te vinden. In elk hoofdstuk van het pakketje en in elke toets zijn operationalisaties van de doelen (zogenaamde ijkpunten) aan te wijzen. We zullen ons in deze presentatie beperken tot twee voorbeelden van ijkpunten.

Het uitwerken van de ideeën op grond van de opmerkingen uit Amerika leverde tenslotte de volgende verzameling materialen op waarmee we de klas ingingen:

- pilot versie van het pakketje Data Visualization;
- vier toetsen bij het pakketje;
- hoofdstukbeschrijving en antwoorden bij het pakketje;
- doelbeschrijving van het pakketje;
- beschrijving van het type onderwijs;
- model voor nascholing en begeleiding;
- vragenlijst om de houding van de leerlingen ten opzichte van wiskunde te meten.

De nascholing en begeleiding bestonden eruit dat ik vier weken naar Milwaukee zou gaan om te observeren en de docenten waar nodig te assisteren.

De vragenlijst was overgenomen van Alan Schoenfeld en had aangetoond een goed instrument te zijn om op kwantitatieve wijze te meten hoe leerlingen over het vak wiskunde dachten. De vragenlijsten laten we in deze presentatie verder buiten beschouwing.

3 experiment

Aanvankelijk zouden twee docenten op Whitnall High School in Milwaukee met het pakketje gaan werken. Door een verschepingsfout kwamen er echter 200 exemplaren van het boekje in plaats van de bedoelde 60 op de school terecht. Daarop besloot de sectie om in alle algebraklassen met Data Visualization te gaan werken.

Het gevolg was dat er zes docenten en zeven klassen (variërend van een hoog niveau 'honors' klas tot een laag niveau 'applied math' klas) met leerlingen van veertien tot achttien jaar met het pakketje gingen werken. De lessen begonnen op woensdag.

observeren en begeleiden

Tijdens de vijf weken dat het experiment duurde, werd er wekelijks een bijeenkomst gehouden met de docenten. Dit was zeer ongebruikelijk, omdat ze het verschijnsel sectievergadering niet kenden. Ik observeerde zoveel lessen als mogelijk en besteedde veel tijd aan het praten met de docenten over hun ervaringen. Een van de opmerkelijkste ervaringen was dat docenten veel meer moeite met de nieuwe aanpak hadden dan de leerlingen. Na een week waren de leerlingen echt betrokken geraakt bij het pakketje, maar hadden de docenten nog veel moeite om niet terug te vallen in hun oude gewoonten van lesgeven.

toetsen

Na het tweede hoofdstuk werd een standaard proefwerk afgenomen. En in dezelfde week werd ook de tweede toets uitgereikt. De opdracht was:

Construeer je eigen toets. Je hebt vier weken de tijd om zelf een toets te ontwerpen.

De toets moet in één uur te maken zijn, en je moet ook de antwoorden leveren.

De derde toets werd slechts in één klas afgenomen. Leerlingen werden gevraagd een artikel te herschrijven met gebruik van grafische representaties.

De laatste toets, ook weer een vrij traditioneel proefwerk, werd aan het eind van de vijf weken in alle klassen afgenomen. Dit proefwerk werd op basis van de door ons aangeleverde ideeën aangepast en verbeterd door de docenten van de school.

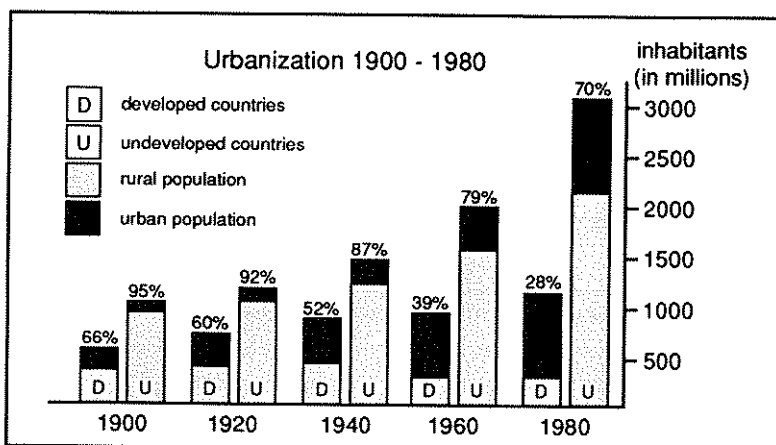
4 reflection in action

Het experiment liep lang niet altijd van een leien dakje. Er waren momenten dat een bepaalde opgave niet werkte, leerlingen (en docenten) begrepen hem niet, of reageerden heel anders dan was bedoeld. Ter plekke werd zo'n opgave improviserend aangepast. De aanpassingen van het pakketje die tijdens het experiment zijn gemaakt, zijn later ook in de revisie gebruikt. We geven hieronder twee voorbeelden.

voorbeeld 1

In de hoofdstukken 1 en 2 van het pakketje worden bekende begrippen opgehaald en opgefrist. Gemiddelde en mediaan worden gebruikt om gegevens te beschrijven. Ook wordt er gerekend met breuken en procenten in realistische situaties teneinde tot zinnige grafieken en statistieken te komen. De verwachting was dat dit niet veel problemen voor leerlingen zou opleveren. Deze bladzijden zouden ons informatie geven over hoe leerlingen een probleem aanpakken. Ook over de keuze van bepaalde oplossingsstrategieën bij relatief eenvoudige rekenproblemen hoopten we informatie te verkrijgen.

The next graph shows urbanization in the world from 1900 to 1980.



8. In 1900, 66% of the population in developed countries lived in rural areas. What was the percentage for undeveloped countries?
9. Comment on the following statements:
 "In 1900 more than 80% of the total population lived in rural areas."
 "In 1980 the number of people living in cities is the same for developing countries and developed countries."

figuur 3: procentrekenen en redeneren

Hoofdstuk 1 doet een beroep op rekenvaardigheden zoals figuur 3 laat zien. Het bleek dat de leerlingen veel moeite hadden om dit soort problemen aan te pakken en op te lossen. Procenten, kommagetallen en breuken waren inderdaad eerder aan de orde gekomen. De leerlingen waren zeer vaardig in het oplossen van standaardvraagstukken, maar het gebruiken van de kennis in een toepassingssituatie bleek een groot probleem te zijn. Afleesvragen waren nog wel te doen, maar zodra er meer werd gevraagd, wis-

ten de leerlingen vaak niet hoe ze het probleem moesten aanpakken. Het vertalen van het probleem naar de wiskunde vormde een groot probleem. In overleg met elkaar besloten de docenten extra tijd te besteden aan het werken met procenten, breuken en kommagetallen in toepassingssituaties. Extra lessen werden ingelast en extra materiaal verzameld om leerlingen vertrouwd te maken met contextvraagstukken.

Hoofdstuk 2 begint met een bladzijde waarin de begrippen gemiddelde, mediaan en frequentie worden opgefrist. Het bleek dat ook hier leerlingen wel de definitie van deze begrippen kenden, maar dat ze deze niet konden gebruiken in toepassingssituaties. Wat tevoren niet als een probleem werd ingeschat, bleek helemaal niet vanzelfsprekend te zijn. De docenten verzamelden krantestukjes als bron voor extra opgaven over gemiddelde en mediaan, en verschaften de leerlingen daarmee extra oefenmateriaal. Ook bleek dat de leerlingen geen idee hadden hoe data verzameld werden. Een kritische houding ten opzichte van de gegevensverzameling (steekproef, representativiteit, selectie) was bij de meeste leerlingen niet aanwezig.

In de revisie zijn op grond van deze ervaringen twee extra hoofdstukken toegevoegd in het begin van het pakketje: een hoofdstuk over data verzamelen, en een hoofdstuk over het gemiddelde en de mediaan.

voorbeeld 2

Hoofdstuk 3 staat helemaal in het teken van de vorming van een kritische attitude. De vraag was in hoeverre leerlingen de gepresenteerde grafieken ook echt kritisch zouden bekijken. Omdat dit hoofdstuk een kern van het pakketje is, wilden we ook graag weten of het hogere doel dat in dit hoofdstuk wordt nagestreefd, zou worden gehaald.

De figuren 2 en 4 geven voorbeelden van het soort opgaven dat in dit hoofdstuk staat. Door het stellen van inzichtelijke vragen bij een grafiek wordt van de leerling een kritische analyse van het plaatje verwacht.

Het kernprobleem in het vraagstuk over de 'oil barrels' is dat niet de inhoud, maar de hoogte wordt gebruikt om de toename in de prijs weer te geven. De docenten hadden in de sectie-bijeenkomst bedacht het probleem te vereenvoudigen door leerlingen te vragen de inhoud van een cilinder te verdubbelen. Deze extra opgave werd als huiswerk meegegeven. De verwachting was dat er zeker wel een aantal leerlingen zouden zijn die de straal van de cilinder zouden verdubbelen. Dit verkeerde antwoord zou dan een mooie aanleiding zijn voor een discussie over de formule voor de inhoud van een cilinder. De les waarin deze opgave werd besproken, liep echter anders dan de docenten hadden verwacht.

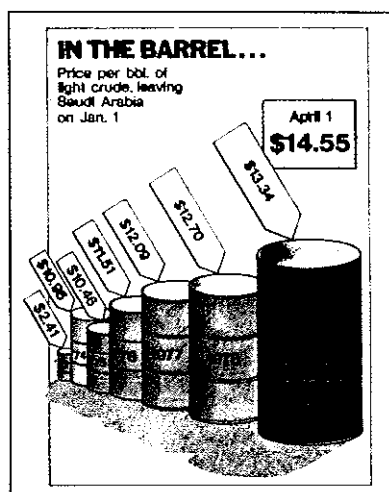
De docent vroeg wie een oplossing had voor het cilinder-verdubbelprobleem. Vijf vingers gingen de lucht in. Eén van de slimmere leerlingen kreeg het woord en zei: 'Je moet gewoon de diameter verdubbelen, dat is alles'. De docent tekende de twee cilinders op het bord zoals in figuur 5. De overige leerlingen waren het hier wel mee eens

tot ineens iemand zijn hand opstak en zei dat het toch niet klopte.

De docent nodigde hem uit naar het bord te komen en te laten zien wat er niet klopte. Hij tekende twee kleine cilinders in de grote cilinder (zie fig. 5) en legde uit: 'Als je de diameter verdubbelt, dan krijg je een te grote cilinder. Een cilinder met een inhoud van maar twee keer zo groot, betekent twee kleine cilinders. In deze cilinder', en hij wees naar de grote cilinder op het bord, 'met een diameter van twee diameters, kan ik twee kleintjes passen, en dan is er nog ruimte over om er meer in te stoppen. Het is dus niet goed om de diameter te verdubbelen'.

De docent was verrast door dit antwoord, maar door de heldere uitleg begrepen de leerlingen nu dat het eerste antwoord niet goed was.

This graph is taken from *Time Magazine*:

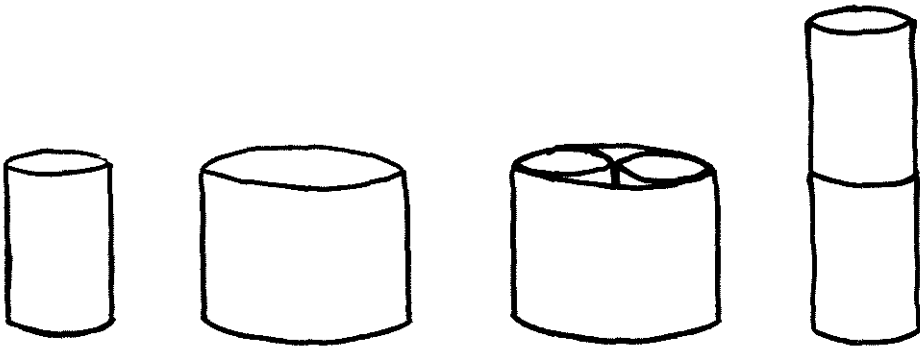


4. Make a sketch of the barrel that represents the price of a barrel on April 1: \$14.55.
5. Draw a barrel with height of 1 inch and diameter of 0.5 inch, and let it represent \$2.41.
6. What is the volume of that barrel?
7. Draw a barrel to represent \$13.34 (next to the one of \$2.41) on a proper scale (that means with a volume that is $13.34 / 2.41$ times as large as the one from 1973).
8. How many barrels can you buy for \$100 during each of the years in the above graph? Draw a graph.

figuur 4: inhoud, oppervlakte, of hoogte?

Maar hoe moest het dan wel? Een andere leerling durfde nu ook te reageren. Ze kwam naar het bord en tekende twee kleine cilinders op elkaar gestapeld, en zei: 'Nu heb je een cilinder met een inhoud van twee keer'. Voor de leerlingen was het probleem nu opgelost, maar de docent wilde het probleem ook nog met de formule oplossen. Omdat de docent dat wilde gebeurde het, maar of alle leerlingen dit begrepen was zeer de vraag. De leerlingen hadden op hun eigen niveau, volgens eigen inzichten, het vraagstuk opgelost en ze hadden geen behoefte meer aan de 'ingewikkelde' manier van de docent.

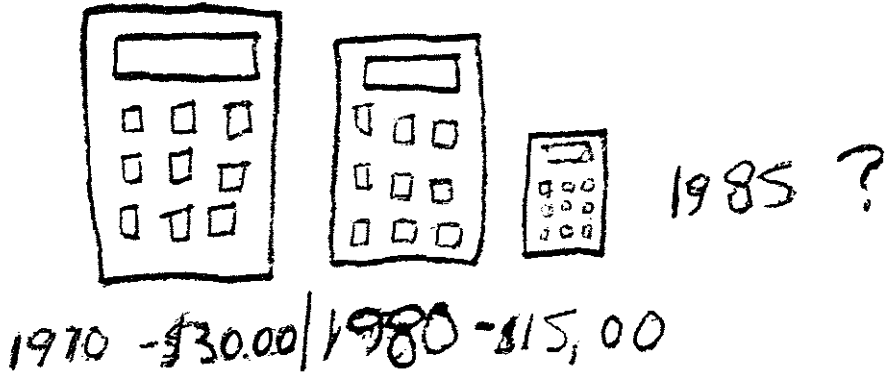
Bij de nabespreking vertelde de docent dat ze de twee reacties uit de klas niet had verwacht, en dat ze niet wist hoe daarop te reageren. En bovendien wist ze niet of het wel correcte antwoorden waren. Zij had immers een oplossing met de formule, en die moesten de leerlingen toch ook kunnen gebruiken! Ze voelde zich enigszins teleurgesteld dat geen enkele leerling met háár oplossing was gekomen.



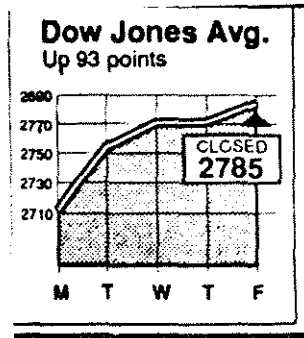
figuur 5: een kleine en een grote cilinder op het bord

De verwachtingen ten aanzien van het ontwikkelen van een kritische attitude werden bevestigd. Leerlingen kwamen met creatieve verklaringen voor foute grafieken, en lieten in eigen produkties zien dat ze de essentie van dit hoofdstuk hadden opgepikt. De leerlingen hadden plezier in het vinden van de misleidende fout in een grafiek. De resultaten op de tweede 'ontwerp je eigen' toets laten zien dat leerlingen hiervan ook iets hebben geleerd. In veel van de door de leerlingen ontworpen toetsen zitten vragen over het kritisch kijken naar een grafiek. De volgende voorbeelden van leerlingenwerk laten zien dat dit hogere doel is bereikt.

Diminishing cost of calculators: How much would a calculator cost in 1985 ?



figuur 6: werk van een leerling, geïnspireerd door hoofdstuk 3



- What is the error in the line graph above?
- What do you think happened?

figuur 7: werk van een leerling, gebruikmakend van andermans 'fout'

5 verslaglegging en discussie

Door de enorme medewerking van de docenten en leerlingen, en door de intensieve begeleiding beschikten we over veel informatie: observatieverslagen, leerlingenwerk, interviews met docenten, toetsen, door docenten van commentaar voorziene boekjes, vragenlijsten. Al deze informatie moest nu netjes worden geordend en vastgelegd.

De diverse bronnen van informatie en de veelzijdigheid van de klassen waarin het pakketje was uitgeprobeerd geven een zekere garantie voor objectiviteit. Intersubjectivi-

teit is misschien een betere beschrijving. Immers, de informatie die verzameld was met verschillende instrumenten, versterkte elkaar. Er is sprake van triangulatie.

het pakketje

Op basis van het experiment werd het pakketje herzien. Twee extra hoofdstukken werden tussengevoegd, de formuleringen van de teksten en de vragen werden bijgesteld, en het gebruik van histogrammen werd in andere hoofdstukken geïntegreerd. Een jaar later werd het pakketje nogmaals uitgeprobeerd op dezelfde school. Daarna is het pakketje nog een keer herzien en vervolgens commercieel gepubliceerd. Het wordt nu door scholen over heel Amerika gebruikt.

het lesgeven

De leerkrachten moesten hun ideeën over lesgeven bijstellen. Het eerste voorbeeld illustreert hoe vast de docenten zaten aan een traditionele manier van vertellen en uitleggen. De verandering in attitude van de docenten is een essentieel kenmerk van de realistische aanpak. Nascholing is daarbij heel belangrijk. De eigen ervaring heeft echter de meeste overtuigingskracht. Het pakketje Data Visualization is niet alleen een andere presentatie van wiskunde. Het vraagt ook om ander docentengedrag. Tijdens de vijf weken Data Visualization ondergingen de docenten een verandering zoals de volgende reeks uitspraken laat zien.

'it's so difficult to unteach'

'we began to recognize that we not only needed new ways of teaching but a new way of thinking about what mathematics we should teach'

'we are not **teaching** statistics; students are learning how to use statistics to solve problems!'

'... most of the time in most classes, all of the students were engaged in **doing** mathematics'

'the creativity and ingenuity of many students was exciting'

'... be a guide, and not a teller ...'

De docenten zagen de resultaten van de nieuwe aanpak. Leerlingen hadden meer plezier in wiskunde, er werd zinniger wiskunde geleerd, en meer leerlingen raakten betrokken. De wiskundeleraars van Whitnall High School proberen nu ook in hun andere wiskundelessen de ideeën uit de realistische visie te implementeren. Mogelijk is dit een voorbeeldwaaruit blijkt dat de realistische didactiek pakketje-overstijgend is.

onderzoeksverslag

Al de informatie uit het eerste experiment is gebruikt om een boek te schrijven over het project. Alle aspecten van het project die in deze presentatie zijn genoemd, komen er veel uitgebreider aan de orde. In het boek wordt het pakketje toegelicht en besproken, er staan uitgebreide observatieverslagen van de lessen in. Interviews met de docenten zijn uitgewerkt, en van de resultaten op de toetsen is een uitgebreide analyse gemaakt. Het project wordt van verschillende kanten belicht. De docenten, de leerlingen, de opdrachtgever en de ontwerpers komen allemaal aan het woord.

het vervolg

De ervaringen met het Amerikaanse onderwijs worden nu gebruikt in een grootschaliger project: het Middle School Project. Dit is een samenwerkingsproject tussen de Universiteit van Wisconsin in Madison en het Freudenthal instituut. In dit project wordt een nieuw leerplan ontwikkeld voor leerlingen van tien tot veertien jaar op Amerikaanse middleschools.

De nieuw-verworven inzichten op het gebied van de beschrijvende statistiek zijn onder andere gebruikt in het project W12-16. Ook in andere onderwijsontwikkelingsprojecten zijn de ervaringen met Data Visualization terug te vinden. Dit wil niet zeggen dat het cyclische proces van ontwikkelen, uitproberen, herzien voor de beschrijvende statistiek is afgerond. Nieuwe inzichten blijven zich ontwikkelen.

tot slot

In deze presentatie heb ik getracht te schetsen hoe het ontwikkelingsonderzoek in het project Data Visualization is verlopen. Het ontwikkelen van een pakketje is slechts een onderdeel van het hele proces. Bij het implementeren van realistisch reken-wiskundeonderwijs is meer aan de hand. Naast het ontwikkelen van een pakketje is ook de theorie over een realistische aanpak van de beschrijvende statistiek verder ontwikkeld. We hebben ook meer zicht gekregen op de nascholingscomponent.

Het resultaat van deze case study is in veel vervolgwerk van het Freudenthal instituut terug te vinden en heeft ook zijn gevolgen voor Amerikaanse collega-onderzoekers en -ontwikkelaars van wiskundeonderwijs. Tijdens dit project is veel vastgelegd van het cyclische ontwikkelingsproces. Bovendien is geprobeerd om aan alle aspecten van onderwijsontwikkeling aandacht te besteden.

Onderwijsontwikkeling is een geïntegreerd proces van nascholing, implementatie, toetsen, ontwerpen van materiaal en onderzoek. Dat is ook nu weer gebleken.

literatuur

- Gravemeijer, K.P.E. (1992). Onderwijsontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* 10 (3), 3-13.
- Lange, J. de (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW&OC.
- Lange, J. de and H. B. Verhage (1992). *Data Visualization*. Scotts Valley, CA: WINGS for Learning.
- Lange, J. de, M. van Reeuwijk and G. Burrill (1993). *Learning and Testing Mathematics in Context - The Case Data Visualization*. Scotts Valley, CA: WINGS for Learning.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Quantitative Literacy Series (1986). Program Sampler. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
- Smaling, A. (1987). *Methodologische objectiviteit en kwalitatief onderzoek*. Lisse: Swets & Zeitlinger BV.

Bijlage 1

De volledige doelbeschrijving van het pakketje Data Visualization

doelen op laag niveau: specifieke vaardigheden

De leerling leert de volgende begrippen begrijpen en gebruiken: frequentie, klasse en klasse-interval, staafdiagram, histogram, lijngrafiek, cirkeldiagram, stam-blad diagram, box plot, scatter diagram, correlatie.

De leerling kan een verzameling gegevens beschrijven met behulp van: gemiddelde, mediaan, modus, kwartielen.

De leerling kan diverse andere grafische representaties lezen en begrijpen: kaarten, tabellen, artistieke grafieken.

De leerling is in staat verminkte vormen van gegevensrepresentatie te herkennen: het gebruik van inhoud en volume om grootheden weer te geven, het ontbreken van de oorsprong in een grafiek, ongelijke verdeling over de assen, selectieve keuze van data.

De leerling is in staat een lineair verband tussen twee variabelen met een rechte lijn in een grafiek weer te geven, en een formule voor deze lijn op te stellen.

doelen op midden niveau: concrete doelen

De leerling is in staat gegevens weer te geven door het gebruik van tabellen, grafieken, en statistische maten.

De leerling kan op basis van de situatie, de soort gegevens en het gestelde probleem een overwogen keuze maken voor een geschikte representatie van de gegevens.

De leerling kan in kwalitatieve zin voorspellen wat het effect van verandering in de gegevens is op de centrum-maten.

De leerling kan een grafische representatie lezen en na kritische overweging een uitspraak doen over de juistheid van de representatie.

De leerling kan het verband tussen twee variabelen beschrijven, zowel door naar alleen de gegevens te kijken, als naar de twee- of driedimensionale grafische representaties.

doelen op hoog niveau: algemene hogere vaardigheden

De leerling is in staat de relevante informatie, relatie en structuren te herkennen, en kan problemen vertalen in wiskundige begrippen, structuren en relaties.

De leerling kan een probleem in verschillende manieren formuleren en visualiseren, en kan de isomorfie tussen verschillende problemen herkennen.

De leerling kan basisvaardigheden uit verschillende subdomeinen van de wiskunde gebruiken bij het oplossen van een probleem, en kan standaard oplossings technieken uit verschillende disciplines gebruiken.

De leerling kan het gebruik van de wiskunde in toepassingssituaties beoordelen en naar waarde schatten.

De leerling kan na het oplossen van het probleem de resultaten binnen de context interpreteren en kritisch analyseren.

De leerling kan op grond van de situatie kiezen voor een geschikte oplossingsstrategie, en een gekozen model of strategie aanpassen of verfijnen na een verdere analyse van het probleem.

Bijlage 2

Een samenvatting van het pakketje Data Visualization.

hoofdstuk 1, world statistics

Aan de hand van een wereldkaart met urbanisatiegegevens komen staafdiagrammen en cirkeldiagrammen aan de orde. Het kunnen lezen en interpreteren van deze grafieken staat centraal. Daarnaast wordt er ook gerekend en geredeneerd met de gegevens uit de grafieken.

hoofdstuk 2, population of the orkneys

Gemiddelde, staafdiagrammen, histogrammen, klasse-intervallen worden gebruikt als representaties om gegevens over bevolkingsaantallen weer te geven. Het begrip frequentiedichtheid wordt aangegrepen om de invloed van bepaalde keuzes voor klasse-intervallen zichtbaar te maken. Een kritische analyse van de situatie is van belang om een goede keuze te kunnen maken. De overstap van histogram naar lijngrafiek wordt gemaakt in de context van windkracht.

hoofdstuk 3, you can always get what you want

Dit vormt een kernhoofdstuk van het pakketje. Verschillende mis-representaties van gegevens worden getoond. De ontwikkelde kritische attitude is van groot belang om de gepresenteerde grafieken juist te kunnen interpreteren. Een lijstje van mogelijk misbruik van statistiek wordt opgesteld.

hoofdstuk 4, every picture tells a story

Twee minder gebruikelijke methoden om data te presenteren worden gebruikt om leerlingen te laten inzien dat je iets al heel snel een grafiek kunt noemen. Ook hier is een gezonde kritische houding belangrijk om de essentie uit de grafiek te kunnen halen.

hoofdstuk 5, numbers make the picture

Vanaf dit hoofdstuk komen nieuwe statistische technieken aan de orde. In dit hoofdstuk wordt het stam-bladdiagram gebruikt in verschillende situaties en worden gemiddelde, mediaan en modus gebruikt om uitspraken te doen over de data.

hoofdstuk 6, box-plots

Box-plots en kwartielen worden gebruikt om een aantal verschillende datasets te beschrijven. Twee problemen over salarissen vragen om een kritische houding van de leerling.

hoofdstuk 7, scatter plots

Zonder de formule voor correlatie en regressie te noemen worden min of meer lineaire verbanden tussen twee variabelen onderzocht. Eerst worden scatter plots gemaakt waarna er gevraagd wordt een uitspraak te doen over het verband tussen de variabelen.

hoofdstuk 8, mixed exercises

Diverse grafische representaties uit eerdere hoofdstukken komen terug. De formule voor regressie komt aan de orde, en er zitten een aantal lastige grafieken in waar flink bij geredeneerd moet worden om tot een juiste interpretatie te komen.

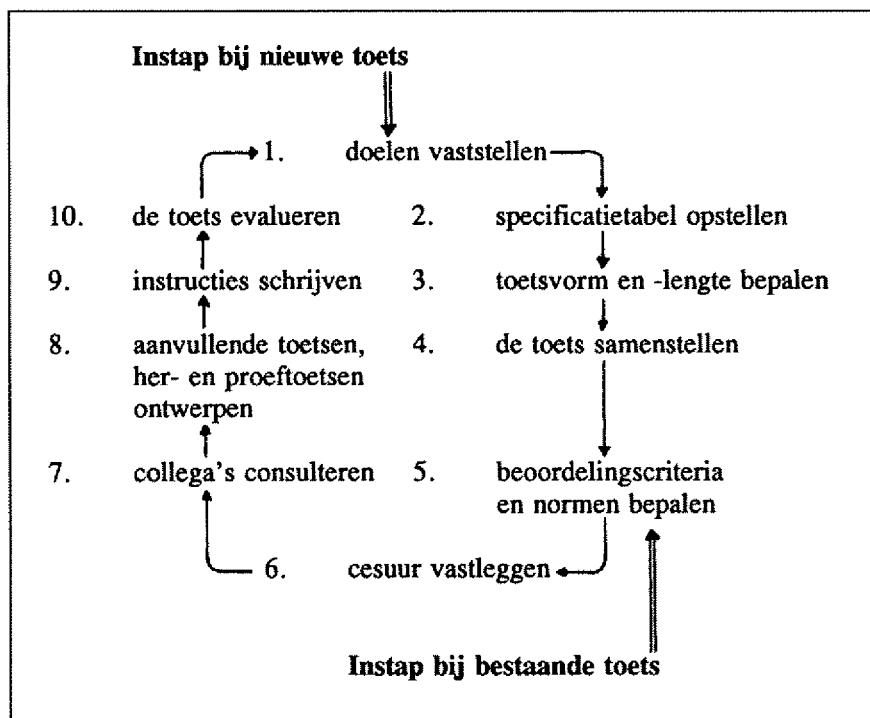
Toetsontwikkelingsonderzoek

Vanuit het perspectief van realistisch reken-wiskunde-onderwijs

Marja van den Heuvel-Panhuizen
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 procedures voor toetsontwikkeling

Hoe maak je voor reken-wiskundeonderwijs geschikte toetsen? Het gemakkelijke van deze vraag is dat er boeken bestaan waarin precies staat beschreven hoe dit moet. Een voorbeeld daarvan is de in 1991 verschenen publikatie van de Werkgroep Docenten Onderwijszaken (DOZ) *Toetsen en beoordelen*. Het hierin opgenomen tien-stappenplan geeft precies aan hoe men goede toetsen kan ontwerpen (fig. 1).



figuur 1: tien-stappenplan ontwerpen toets (DOZ, 1991, 75)

Kenmerkend voor dit stappenplan is echter dat men om de kern van de zaak heengaat. Nergens staat aangegeven, hoe men nu eigenlijk aan die goede toetsopgaven komt. Het gebeurt ergens tussen het vaststellen van de doelen en het samenstellen van de toets. Met name de specificatietabel (zie fig. 2) speelt hierin een belangrijke rol.

Niveau van vragen

	Kennis	Begrip	Toepassing	Analyse	Synthese	Evaluatie	Totaal
<i>Onderwerpen</i>							
onderwerp 1							
onderwerp 2							
onderwerp 3							
onderwerp 4							
Totaal aantal vragen							

figuur 2: specificatietabel (DOZ, 1991, 76)

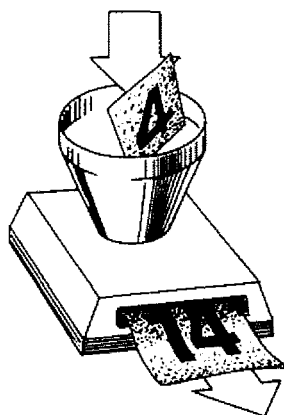
Nadat de onderwerpen waarover de toets moet gaan zijn bedacht, moet met behulp van deze tabel worden vastgesteld op welk vraagniveau de opgaven betrekking hebben. Op die manier kan ervoor worden gezorgd dat je toetst wat je wilt toetsen.

Deze procedure van toetsontwikkeling met behulp van een specificatietabel is een heel gangbare als het gaat om reken-wiskundetoetsen, tenminste in de USA. Het was Tyler die rond 1930 met deze procedure van toetsontwikkeling een begin maakte bij zijn pogingen om toetsen te ontwerpen voor een aantal universitaire cursussen (zie: Kilpatrick, 1993). De methode die hij hierbij volgde, zal iedereen bekend voorkomen. Hij begon met het formuleren van de doelen van de cursus, waarbij hij zoveel mogelijk in gedragstermen aangaf wat de studenten zouden moeten weten en kunnen. De volgende stap was het bedenken van situaties waarin naar voren zou kunnen komen of de betreffende doelstelling wel of niet werd beheerst. Vervolgens werden de situaties aan de studenten voorgelegd en werden hun reacties geëvalueerd. Later werd deze aanpak van Tyler uitgewerkt door Bloom. Zijn in 1956 gepubliceerde taxonomie groeide uit tot de zogenoemde 'content-by-process matrix' (de specificatietabel uit de DOZ-publicatie), waarbij de proces-dimensie een versie is van zijn taxonomie en de inhoud-dimensie wordt gevuld door de verschillende leerstofonderdelen van een bepaald vak.

Deze inhoud-proces-matrix verschaft jarenlang een raamwerk voor de constructie en analyse van toetsen en is in veel reken-wiskundetoetsen herkenbaar. Door de veranderende ideeën over reken-wiskundeonderwijs blijkt deze aanpak nu niet meer zo te voldoen. In de ogen van Romberg, Zarinnia en Collis (1990) is het duidelijk een 'old

world framework'. Eén van de voornaamste bezwaren ertegen is het atomiserende effect dat ervan uitgaat. De te toetsen vaardigheden worden opgedeeld in kleine eenheden. Dit doet volgens hen geen recht aan de complexiteit van de doelen en leerprocessen, waarop het onderwijs van de toekomst gericht zal moeten zijn. Hoe echter het 'new world framework' eruit zou moeten zien, kunnen Romberg c.s. op dit moment nog niet zeggen. Ze kunnen wel al een paar alternatieve manieren van toetsen laten zien die passen bij de nieuwe opvattingen over reken-wiskundeonderwijs. Eén van de alternatieven die zij noemen is het op de SOLO-taxonomie (Structure of Observed Learning Outcome) gebaseerde superitem (zie fig. 3), waarbij aan de leerlingen een bepaalde opgave wordt voorgelegd met een serie deelvragen. Elk van deze vragen verwijst naar een bepaald niveau van cognitief functioneren. Anders dan bij de taxonomie van Bloom zijn deze niveaus niet vooraf door onderwijskundigen en psychologen vastgesteld, maar gebaseerd op antwoorden van leerlingen op opgaven, die afkomstig zijn uit verschillende vakgebieden. Zo zijn er voor elk vak niveaus van functioneren ontwikkeld. Voor het betreffende item zegt de eerste vraag iets over het feit of de leerling de informatie die in de opgave is gegeven, letterlijk kan weergeven. De tweede vraag geeft aan of de leerling de informatie die in de stam is gegeven kan volgen en die kan gebruiken om het antwoord te vinden. De laatste vraag, tenslotte, zegt of de leerling ook op een 'abstract' niveau kan aangeven wat de machine doet.

This is a machine that changes numbers. It adds the number you put in three times and then adds 2 more. So if you put in 4, it puts out 14.

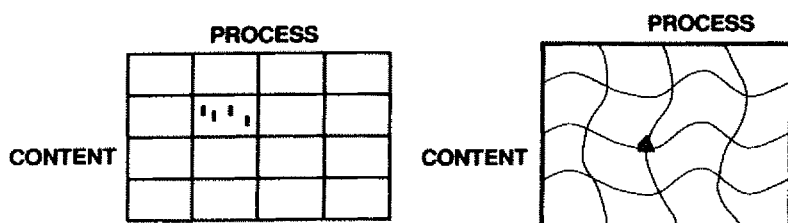


- U. If 14 is put out, what number was put in?
- M. If we put in a 5, what number will the machine put out?
- R. If we got out a 41, what number was put in?
- E. If x is the number that comes out of the machine when the number y is put in, write down a formula that will give us the value of y whatever the value of x .

figuur 3: superitem op basis van de SOLO-taxonomie ontwikkeld

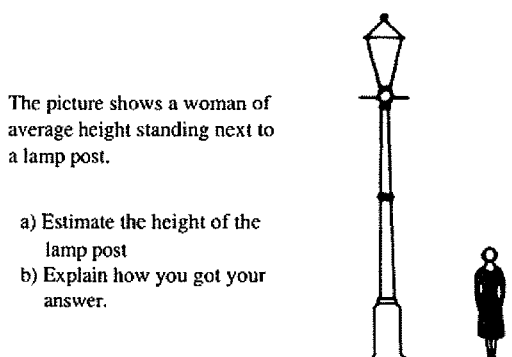
De ontwikkeling van dit soort items (zie: Collis, Romberg & Jurdak, 1986) valt uiteen in twee delen: (a) het schrijven van de stam behorende bij een bepaald onderdeel van de wiskunde en (b) het bedenken van vragen bij die stam die overeenkomen met de SOLO-niveaus.

Ondanks de verschillen met de 'oude' inhoud-proces-aanpak, heeft deze SOLO-aanpak toch veel met deze 'oude' aanpak gemeen. Ook uit de aanpassing die Pandey (1990) voorstelt – een minder rigide matrix met vagere afgrenzingen tussen de verschillende categorieën (zie fig. 4) – blijkt, dat men eigenlijk geen echt alternatief heeft om toetsopgaven te genereren.



figuur 4: een minder rigide inhoud-proces-matrix (Pandey, 1990, 44)

Het is dan ook niet verwonderlijk dat men – zoals uit een inventariserend onderzoek van Romberg en Wilson (1992) is gebleken – blijft zitten met de onbevredigende situatie dat het merendeel van de gebruikte reken-wiskundetoetsen niet past bij de nieuwe ideeën over reken-wiskundeonderwijs zoals geformuleerd in de Standards. De studie van Romberg en Wilson toonde overigens ook aan dat dit soort items wél bestaat. Zowel binnen de USA (onder andere in California) als daarbuiten (onder andere in Engeland, Australië én Nederland) werden items gevonden die precies passen bij de Standards. Een voorbeeld daarvan is het uit 1988 daterende item van de vrouw bij de lantaarnpaal van de Northern Examining Association uit Engeland (zie fig. 5).



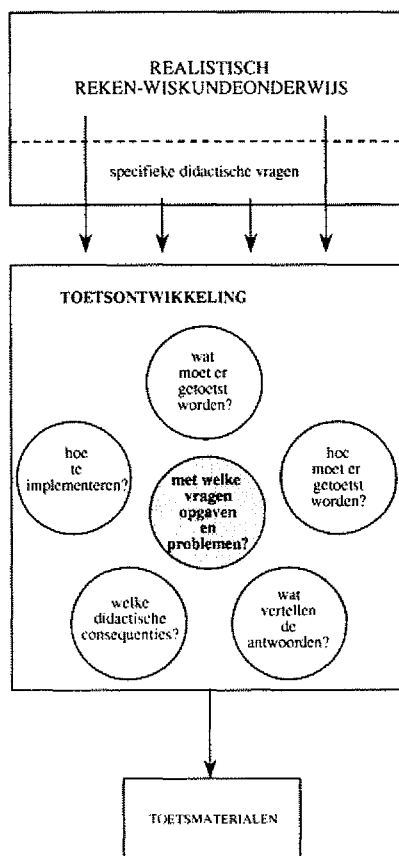
figuur 5: toetsitem van de Northern Examining Association, 1988

De vraag die echter blijft bestaan is: hoe kan dit soort items ontwikkeld worden? Wat het antwoord hierop is voor Engeland en Australië, gaat de grenzen van dit artikel te buiten, maar ten aanzien van de Nederlandse situatie zal er in het volgende wel een poging worden gewaagd. Met de Nederlandse situatie wordt niet bedoeld: hoe Nederland in zijn algemeenheid aan zijn reken-wiskundetoetsen komt en ook niet hoe via allerlei statistisch schaaftwerk betrouwbare schalen kunnen worden geconstrueerd om zicht te krijgen op het niveau waarop leerlingen functioneren. Waar het antwoord wel betrekking op zal hebben, is op didactische toetsontwikkeling binnen realistisch reken-wiskundeonderwijs. Geprobeerd zal worden enig zicht te geven op hoe binnen realistisch reken-wiskundeonderwijs toetsopgaven ontwikkeld kunnen worden die leerkrachten informatie verschaffen voor het nemen van didactische beslissingen. Het zal dus meer gaan over dé toetsen dan over hét toetsen.

2 toetsontwikkeling binnen realistisch reken-wiskundeonderwijs

Wie denkt dat er nu een beter tien-stappenplan ontvouwd zal gaan worden, of een betere specificatietabel, die heeft het mis. De toetsontwikkeling binnen het realistisch reken-wiskundeonderwijs verkeert nog in een zodanig stadium dat er hooguit wat richtlijnen kunnen worden gegeven. Met andere woorden: de toetsontwikkeling zelf is ook nog in ontwikkeling. Een nog belangrijker reden is echter dat *zo'n formele procedurele aanpak niet past bij realistisch reken-wiskundeonderwijs*. Dat is niet omdat het belang van een systematische werkwijze wordt ontkend, maar vooral omdat men er met het volgen van zo'n stappenplan of het invullen van zo'n specificatietabel niet komt. Daarvoor hebben zij beide een te gering genererend vermogen. Ze zeggen namelijk niet wát je moet toetsen en ook niet hoe je dat moet doen en wat je vervolgens met de resultaten moet doen. De realistische onderwijstheorie – of zo men wil: de realistische onderwijsfilosofie – doet dat wel. Zij stuurt én voedt de toetsontwikkeling en geeft antwoord op de vragen die zich bij toetsontwikkeling voordoen (zie fig. 6).

Het zijn de doelen van reken-wiskundeonderwijs en de ideeën over hoe deze doelen bereikt kunnen worden, aangevuld met specifieke didactische vragen (je wilt iets weten over bepaalde leerlingen over een bepaald onderdeel in een bepaalde fase van hun leerproces) die bepalen wat er getoetst moet worden. Tegelijkertijd geeft de realistische onderwijstheorie ook duidelijke aanwijzingen over hoe en wanneer dat getoetst moet worden, met wat voor soort problemen (dit is gearceerd om aan te geven dat dit centraal zal staan in dit artikel) en hoe je de antwoorden moet interpreteren en wat de didactische consequenties ervan zijn. Bovendien wordt de toetsontwikkeling niet los gezien van de implementatie.



figuur 6: toetsontwikkeling binnen realistisch reken-wiskundeonderwijs

Wie vindt dat dit allemaal wat te mooi wordt voorgespiegeld, heeft wél een beetje gelijk. Zo gemakkelijk als het daarnet beschreven is, gaat het niet. Goede toetsopgaven kom je pas na veel bedenken, overleg, gedachtenexperimenten, en via observaties en het werken met kinderen op het spoor. Het is een complex proces dat ook nog moeilijk precies te traceren is omdat er zoveel impliciet gebeurt, maar waarin in ieder geval de realistische onderwijs Theorie als sturende en voedende kracht onmiskenbaar aanwezig is. Het is juist in dit opzicht, dat toetsontwikkeling binnen realistisch reken-wiskundeonderwijs anders is dan toetsontwikkeling met behulp van het 'old world framework'. In de nu volgende voorbeelden zal geprobeerd worden iets van dat proces van toetsontwikkeling binnen realistisch reken-wiskundeonderwijs zichtbaar te maken.

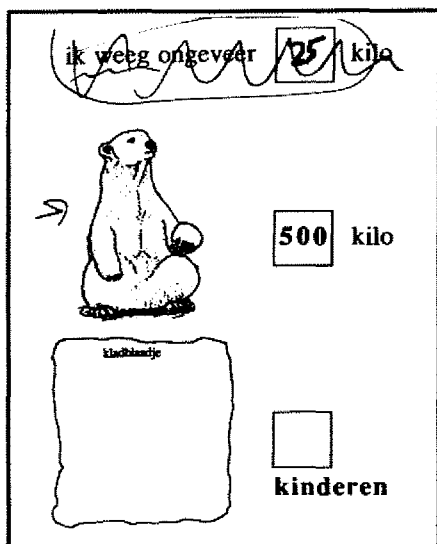
3 het ijsbeer-item als een prototypisch voorbeeld

Voor het eerste voorbeeld moeten we ons verplaatsen naar groep 5. De kinderen hebben de vermenigvuldig- en deeltafels tot en met tien al redelijk onder de knie en kunnen ook al vermenigvuldigen en delen met grotere getallen, maar het echte cijferen hebben ze nog niet gehad. Voor de realistische didactiek is dit een ideaal moment om te toetsen, waarbij niet alleen moet worden nagegaan in hoeverre de leerlingen datgene wat aan de orde is geweest beheersen, maar waarbij ook gezocht moet worden naar aangrijpingspunten voor verder onderwijs. Die tweezijdigheid van terugkijken en vooruitkijken is heel essentieel voor het toetsen binnen realistisch reken-wiskundeonderwijs en stelt dan ook meteen bepaalde eisen aan de te gebruiken toetsopgaven.

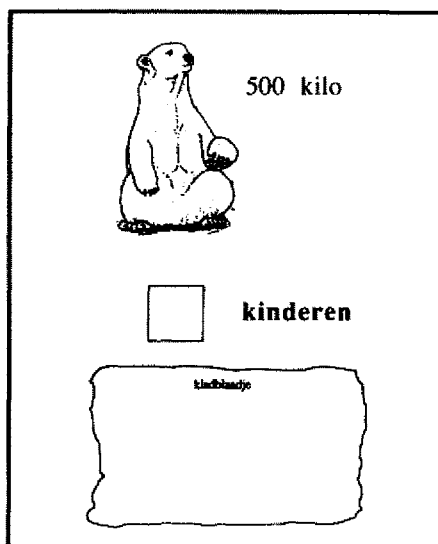
Een eerste vereiste is dat de kinderen de vrijheid moeten voelen om de opgave op hun eigen manier op te lossen. Ze moeten niet belast worden met het volgens een bepaalde voorgeschreven procedure oplossen van het probleem en moeten bovendien niet het gevoel krijgen dat ze iets moeten doen dat ze nog niet hebben gehad. Een belangrijke manier om dit te bereiken is, te voorkomen dat de toetsopgave zelf dwingende verwijzingen in zich heeft naar een toe te passen operatie. Dit betekent dus dat een contextopgave meer voor de hand ligt dan een kale som, omdat bij een kale som de operatie in feite al vastligt. Bovendien is het al of niet gehad hebben van een opgave dan ook veel zichtbaarder. Ook voor de in plaats van de kale som te gebruiken contextopgave geldt dat deze niet expliciet op een bepaald sommetje aan moet sturen.

Wat de context wel moet doen, is strategieën aanreiken om het probleem op te lossen. De context waarin het probleem verrat ligt moet zodanig zijn dat de kinderen door zich in de context in te leven op ideeën worden gebracht om het probleem op te lossen. En last but not least, de kinderen moeten geconfronteerd worden met een probleem dat op zichzelf de moeite waard is om op te lossen. De meest primaire eis die de realistische didactiek aan de te gebruiken problemen stelt is dat de problemen zinvol moeten zijn. Dat betekent niet dat de problemen op de een of andere manier nuttig moeten zijn, maar wel dat er problemen moeten worden gezocht waarin datgene wat men wil toetsen zich op een heel natuurlijke manier voordoet. (Hier komt toch weer even Tyler om de hoek kijken!)

Met dit als sturende en voedende bagage in het achterhoofd is een lijst met gewichten van verschillende dieren voldoende om de volgende opgave te bedenken: Geert weegt 25 kg. Hoeveel kinderen zoals Geert wegen evenveel als een ijsbeer? (zie fig. 7). Strikt genomen is dit een deelopgave, maar het is wel een deelopgave die op allerlei manieren kan worden opgelost, zelfs via vermenigvuldigen of optellen of via verhoudingen. Precies wat we zochten, maar toch niet helemaal wat we zochten. Waarom moet dat gewicht van dat kind eigenlijk vermeld worden? Met andere woorden: diezelfde bagage gevuld vanuit de realistische onderwijstheorie zorgde er later voor dat dit in de uiteindelijke vorm is weggelaten (zie fig. 8).



figuur 7: eerste versie ijsbeer-item



figuur 8: tweede versie ijsbeer-item

Realistisch reken-wiskundeonderwijs wil dat kinderen échte problemen kunnen oplossen, problemen zoals we die in het dagelijks leven tegenkomen, waarbij de oplossingsweg niet bij voorbaat al vastligt en waarbij je zelf moet uitzoeken welke gegevens je moet gebruiken. Vaak betekent dit dat je eerst nog ontbrekende gegevens moet achterhalen. Vandaar ook dat maatkennis binnen realistisch reken-wiskundeonderwijs een belangrijke rol speelt. Bovendien maakt ditzelfde maatgevoel het ook mogelijk dat er schattingen gemaakt kunnen worden, die op hun beurt weer kunnen helpen bij het vinden van een geschikte strategie.

Door het weglaten van het gewicht van het kind krijgt de opgave meer het karakter van zo'n echt probleem. Er wordt om eigen inbreng gevraagd. Behalve dat de opgave op geen enkele manier verwijst naar een bepaalde standaardprocedure, wordt ook expliciet een beroep gedaan op de maatkennis van de kinderen. Een ander gevolg van het weglaten van het gewicht is – en misschien is dit wel de grootste winst – dat aan de kinderen meer constructieruimte wordt geboden. Doordat ze zelf een bepaald gewicht als uitgangspunt kunnen nemen, kunnen ze de opgave in zekere zin naar hun hand zetten. Behalve dat dit de leerlingen de mogelijkheid geeft om te laten zien wat ze kunnen, maakt het de opgave ook informatiever.

Samenvattend kan gezegd worden dat de ijsbeer-opgave een opgave is die past bij realistisch reken-wiskundeonderwijs en waarmee we tegelijkertijd veel over de kinderen te weten kunnen komen: over hoe ze zo'n open probleem aanpakken, over hun maatkennis, over de 'deel'-strategieën die ze toepassen en over de uitdrukkings- en structureringsmiddelen die ze gebruiken om hun oplossingsproces te ondersteunen.

Het beste bewijs dat deze opgave inderdaad werkt zoals bedoeld is, zijn de antwoorden van de kinderen. Het zou te ver voeren om daar nu verder op in te gaan, maar hopelijk zegt deze selectie van antwoorden (zie fig. 9) al genoeg.

Bovendien laten deze antwoorden zien dat de toetsontwikkeling niet alleen betrekking heeft op de vraagkant maar ook op de antwoordkant. Andere toetsopgaven leveren andere antwoorden op en vragen om de ontwikkeling van een nieuw repertoire van analyse-technieken. Veel ogenschijnlijk gebrekkige formuleringen van kinderen getuigen bij nadere beschouwing van een groot inzicht. Om greep hierop te krijgen is reconstructie nodig, waarbij je je steeds moet afvragen wat het kind bedoeld kan hebben. (Wat te denken bijvoorbeeld van een leerling die vraag 2 van het eerder genoemde superitem (zie fig. 3) beantwoordt met '17'?).

Een gevolg van het feit dat de toetsopgaven meerdere antwoorden toelaten, is ook dat het scherpe onderscheid tussen goed en fout vervaagt. In plaats van te kijken of een oplossing goed of fout is, gaat het er nu meer om of een antwoord 'billijk' is of niet. Er moet dus afscheid genomen worden van het idee dat er alleen gestreefd moet worden naar objectieve toetsen. In plaats daarvan moet juist gewerkt worden aan de ontwikkeling van faire toetsen (De Lange, 1987), toetsen waarbij de leerlingen kunnen laten zien wat ze kunnen. Ook hiervoor is weer nodig dat het standpunt van de leerling wordt ingenomen.

Een andere belangrijke ervaring met deze ijsbeer-opgave is dat zij leerkrachten nieuwsgierig blijkt te maken naar wat kinderen kunnen en hoe ze te werk gaan. Het is vooral deze inherente overtuigingskracht van de opgave – waardoor leerkrachten op het spoor kunnen worden gezet van een realistische didactiek – die maakt dat deze opgave als één van de prototypen van realistische toetsopgaven kan worden beschouwd.

4 een lange weg van bedenken, uitproberen en verbeteren

Het zal duidelijk zijn dat een opgave zoals de ijsbeer-opgave niet zomaar uit de lucht is komen vallen. Er is veel toetsontwikkelingsonderzoek aan vooraf gegaan. De opgave is afkomstig uit de serie toetsen (Van den Heuvel-Panhuizen en Gravemeijer, 1990) die ontwikkeld is in het kader van het MORE-onderzoek (Gravemeijer en anderen, 1993) en maakt, zoals gezegd, deel uit van één van de toetsen voor groep 5. Hoewel het MORE-onderzoek er niet voor was opgezet, kan het wel als een soort ontwikkel-tuin voor toetsontwikkeling worden beschouwd. Men zou kunnen zeggen dat dit onderzoek op het Freudenthal instituut de start inluidde van toetsontwikkelingsonderzoek, gericht op het basisonderwijs. Hetgeen natuurlijk niet wil zeggen dat er tevoren niets op dit gebied is gedaan. Verre van dat.

Denk bijvoorbeeld aan het idee van de toetsles dat door Ter Heege en Treffers al in 1979 is beschreven in *Leerplanpublikatie 10* (Treffers, 1979), denk ook aan de peilin-

gen van Ter Heege bij het NOT-programma *Pluspunt* (Ter Heege, Van den Heuvel-Panhuizen en Scholten, 1983/1984), de toets die ontwikkeld is door Van Galen en anderen (1985) ten behoeve van *Rekenen in een tweede taal*, om nog maar niet te spreken over onderzoek gericht op de ontwikkeling van individuele interviews, zoals het *Kwantiwijzer*-instrumentarium (Van den Berg en Van Eerde, 1985) en de gesprekken met een afhaker van Ter Heege (1981/1982), die ook zeker raakvlakken hebben met de ontwikkeling van schriftelijke toetsen, en tenslotte, vergeet ook niet dat er in 1987 al door OW&OC een conferentie is georganiseerd met *het toetsen bij realistisch reken-wiskundeonderwijs* als een van de hoofdthema's. Met andere woorden: toen er voor het MORE-onderzoek toetsen ontwikkeld moesten worden, hoefde men niet met lege handen te beginnen. De toetsen die ten behoeve van dit onderzoek ontwikkeld zijn, dragen dan ook duidelijk de sporen van die eerdere aanzetten.

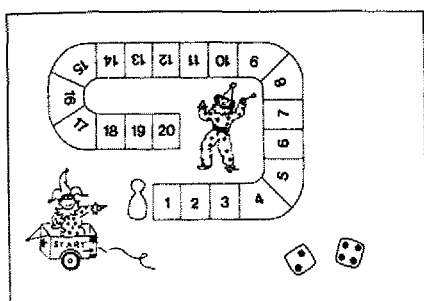
Daarnaast is er ook duidelijk sprake van groei. Door dingen uit te proberen en door reflectie weten we nu meer dan we eerst wisten. Bijvoorbeeld: welke kenmerken goede realistische toetsopgaven moeten hebben en hoe je schriftelijke toetsen informatiever kunt maken (zie voor een beschrijving hiervan: Van den Heuvel-Panhuizen (1990) en Van den Heuvel-Panhuizen en Gravemeijer (1991a)). Een en ander betekent ook dat we bepaalde dingen nu anders zouden doen dan vroeger. Dat geldt ook voor de MORE-toetsen. Het ijsbeer-item is niet voor niets een item dat in het derde en laatste jaar van het onderzoek is ontwikkeld. Ook dat steeds bijstellen van je ideeën wordt gestuurd en gevoed door de realistische onderwijstheorie. Om dat corrigerend vermogen te illustreren, volgt nu een stukje reparatiewerk met betrekking tot een paar items uit de MORE-begintoets.

5 reparatiewerk aan enkele items uit de MORE-begintoets

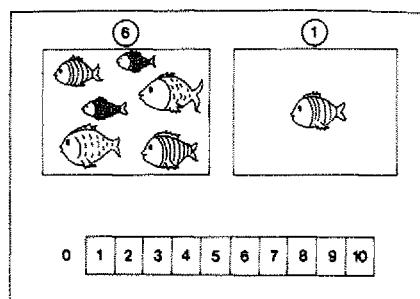
De MORE-begintoets is een toets die bedoeld is om afgenomen te worden in de eerste weken van groep 3. Deze toets bevat onder andere een aantal opgaven die betrekking hebben op optellen en aftrekken. De bedoeling van deze opgave was, te weten komen in hoeverre kinderen als ze starten in groep 3 al in staat zijn tot het uitvoeren van bepaalde kwantitatieve bewerkingen. Omdat er wat dit betreft een onderscheid gemaakt kan worden tussen het werken met aantallen (telbare objecten) en het werken met getallen (cijfersymbolen die bepaalde aantallen representeren), is het optellen en aftrekken op twee manieren getoetst: met telbare objecten op het toetsblad en met getallen op het toetsblad (zie fig. 10, 11, 12 en 13).

Ofschoon de opgaven in deze vorm zeer waardevolle informatie hebben opgeleverd over de getalsmatige vaardigheden van kinderen aan het begin van groep 3 (hierover zal later nog iets worden gezegd), zijn er toch minstens twee dingen te noemen die anders hadden gemoeten. Over de optelopgaven kunnen we redelijk tevreden zijn, maar

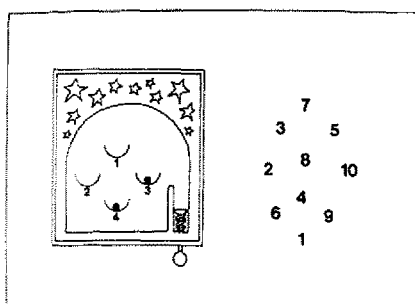
over de aftrekopgaven niet – geen onbekend verschijnsel in de didactiek van het aanvankelijk reken-wiskundeonderwijs.



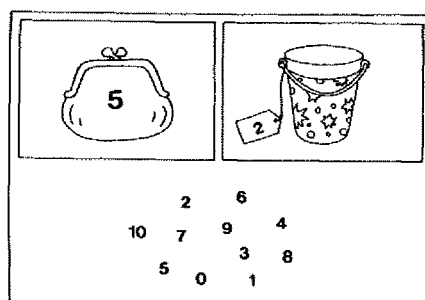
figuur 10: optellen telbaar



figuur 11: aftrekken telbaar



figuur 12: optellen niet-telbaar

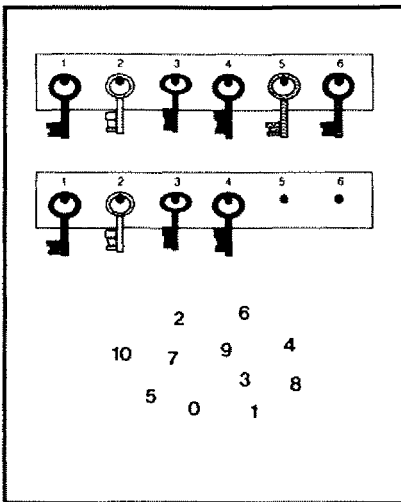


figuur 13: aftrekken niet-telbaar

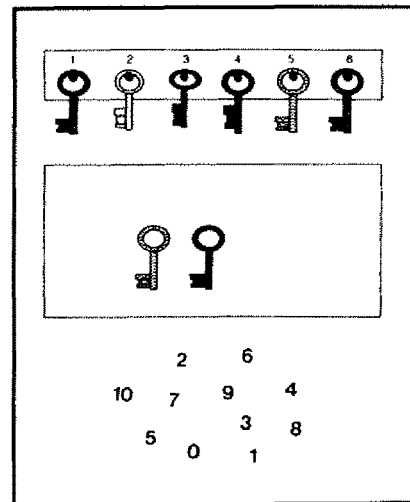
Op de eerste plaats is er tussen de twee aftrekopgaven niet alleen een verschil in presentatie (telbaar en niet-telbaar), maar ook in mathematische structuur. De vis-opgave verwijst naar ' $6 - 1 = 1$ ' en de portemonnaie-opgave naar ' $5 - 2 = 3$ '. Op zichzelf is dit verschil niet zo'n probleem (want niet alleen de gebeurtenis in de context bepaalt hoe iets wordt uitgerekend), maar dit verschil maakt het wel moeilijker om na te gaan of de manier waarop de aantallen gegeven zijn (via objecten of via symbolen) wat uitmaakt. Het tweede probleem betreft die nogal kunstmatige getallenlijn onderaan op de bladzijde. Net als bij het optellen in de telbare vorm is deze getallenlijn zowel voor het aangeven van de uitkomst, als voor de ondersteuning bij het vinden van de oplossing bedoeld. Het grote verschil is dat de bij het optellen in de telbare vorm gebruikte getallenlijn deel uitmaakt van de context en daardoor veel natuurlijker is. Er moet dus aan twee dingen iets gedaan worden: (a) er zou een zodanige context bedacht moeten wor-

den dat er net als bij de niet-telbare aftrekopgave sprake is van een 'zoveel worden er weggehaald' situatie en (b) de context zou een natuurlijke getallenlijn moeten bevatten. Dat laatste is in feite het meest belangrijke en het meest bepalend voor de opgave. Een natuurlijke getallenlijn dus. Het eerste dat toen opkwam was: ook bij het aftrekken het ganzenbord gebruiken. Je moet voor straf vijf plaatsen terug. Op het toetsblad is een ganzenbord zichtbaar met een pion op zes en een dobbelsteen met vijf ogen boven. Alles is telbaar, een natuurlijke getallenlijn als steun en het is een 'zoveel worden er weggehaald' situatie, maar ... toch niet geschikt vanwege de mogelijke startfouten die met deze situatie in de hand worden gewerkt. De kinderen mogen ze wel maken, maar je moet natuurlijk vermijden dat je ze uitlokt door de situatie. De optelvariant is trouwens zodanig dat startfouten ook worden vermeden.

Als het ganzenbord bij het aftrekken niet zo geschikt is, zijn er dan misschien nog andere situaties te bedenken waarin kinderen op een natuurlijke manier met een getallenrij worden geconfronteerd? Huisnummers, maar die springen van de ene kant van de straat naar de andere. Dan schiet de herinnering aan die schoolgang met die rij met genummerde haakjes naar voren. Jassen op een rij, een aantal jassen zijn weg. Maar jassen zijn moeilijk te tekenen. Dan maar sleutels, die hangen ook wel eens op een genummerde plaats. De eerste poging ziet er zo uit (zie fig. 14), maar tevreden is anders. Behalve dat het geen 'zoveel worden er weggehaald' situatie is, zijn die lege plaatsen bij 5 en 6 misschien zo dominerend dat de kinderen bij de vraag 'Hoeveel zijn er weg?' eerder de 5 en de 6 als antwoord zullen aankruisen dan de 2. Een nieuwe poging volgt.



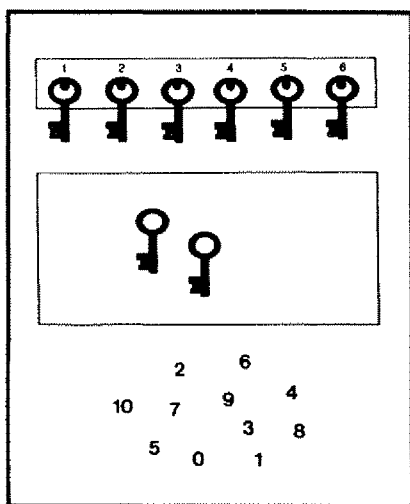
figuur 14: eerste poging



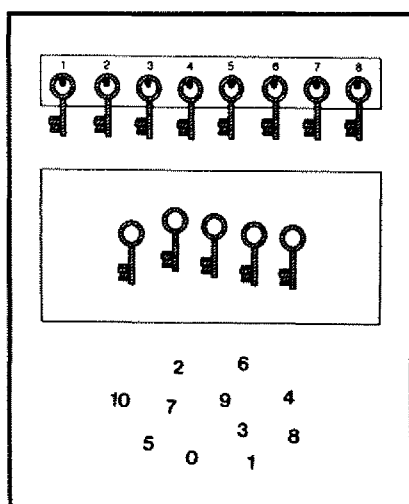
figuur 15: tweede poging

Er wordt een 'zoveel worden er weggehaald' situatie van gemaakt (zie fig. 15). De sleutels die eraf zijn gehaald liggen op tafel en de vraag die nu wordt gesteld is: 'Hoe-

veel zijn er nog over?’, precies dezelfde vraag als bij de portemonnaie-opgave. Even helemaal tevreden. Maar dan komt de opbrengst van ander recent ontwikkelingsonderzoek boven: het voor het aftrekken zo essentiële verschil tussen het aan de achterkant erafhaken en het aan de voorkant erafhaken (Gravemeijer, 1992; Treffers en Veltman, 1993). Behalve of de kinderen in staat zijn vast te stellen hoeveel sleutels er nog aan het rek hangen, is het natuurlijk ook van belang te weten hoe ze dit aanpakken. Die twee sleutels die nu op tafel liggen, kunnen er aan de achterkant zijn afgehaald of aan de voorkant, of kunnen ook zomaar ergens uit de rij zijn geplukt. Voorwaarde om dit zichtbaar te maken is wel, dat het allemaal dezelfde sleutels zijn. Dit doet misschien dan wel afbreuk aan het triviale realiteitsgehalte (ofschoon ook hierbij wel een realistisch verhaal te bedenken valt), maar het maakt de opgave wel realistischer in die zin dat het beter past bij de realistische didactiek. Het reikt de kinderen een context aan die én steun biedt én flexibel is, en zowel voor de leerling als voor de leerkracht het leerproces in zekere zin zichtbaar maakt. Bij deze laatste versie van de sleutel-opgave (zie fig. 16 en 17) zou de volgende toetsinstructie gegeven kunnen worden: ‘Er hangen zes (respectievelijk acht) sleutels aan het rek. Twee (respectievelijk vijf) worden eraf gehaald en op tafel gelegd. Hoeveel hangen er dan nog aan het rek? Streep eerst op het rek door welke sleutels eraf zijn gehaald. Kruis dan onder op de bladzijde aan hoeveel sleutels er nog aan het rek hangen.’



figuur 16: twee eraf

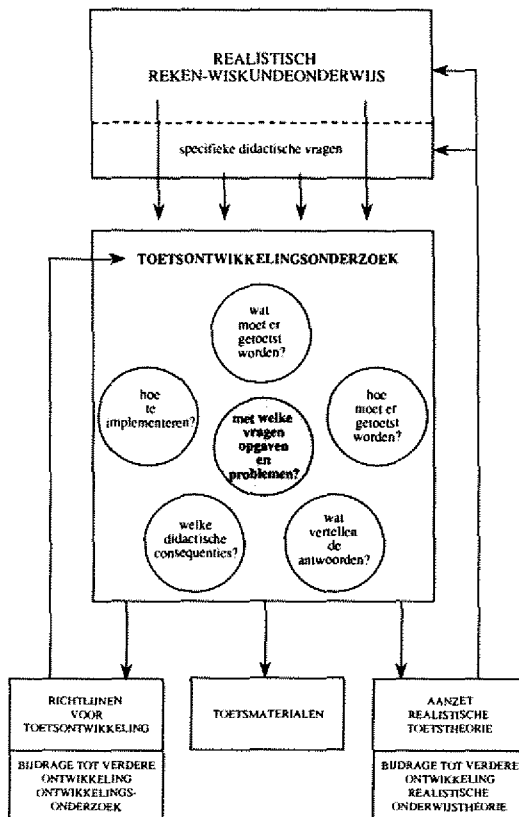


figuur 17: vijf eraf

De volgende stap is: kijken hoe de kinderen hierop reageren. Passen de leerlingen inderdaad hun strategie aan aan de grootte van de tweede term, of doen ze misschien iets waaruit blijkt dat het toch allemaal weer anders moet. Met andere woorden: het reparatiewerk is nog lang niet af.

6 meer dan toetsmateriaal alleen

Toetsontwikkeling binnen realistisch reken-wiskundeonderwijs levert niet alleen toetsmateriaal op. De manier van werken waarbij naast het bedenken, uitproberen en verbeteren, ook voortdurend gereflecteerd wordt op wat er gevonden is en hoe dit gebeurd is, en waarbij ook voortdurend terugkoppeling plaats vindt naar de sturende en voedende bron, maakt dat de output veel rijker is (zie fig. 18). Behalve dat het toetsmaterialen oplevert, verschaft het ook allerlei aanwijzingen die weer bij nieuwe toetsontwikkeling gebruikt kunnen worden. Verder laat de toetsontwikkeling ook haar bron niet ongemoeid. De bij de toetsontwikkeling opgedane ervaringen en gevonden resultaten leveren weer een bijdrage aan de verdere ontwikkeling van de realistische onderwijstheorie. En tenslotte verschaft toetsontwikkeling nog inzicht in de specifieke manier van onderzoek doen die hierbij wordt toegepast: ontwikkelingsonderzoek. In het volgende zal op elk van deze punten wat nader worden ingegaan.



figuur 18: toetsontwikkelingsonderzoek vanuit het perspectief van realistisch reken-wiskundeonderwijs

richtlijnen voor toetsontwikkeling

Tegelijk met het ontwikkelen van concrete toetsopgaven, krijgen we ook steeds meer greep op het ontwikkelproces zelf en komen we belangrijke richtlijnen voor toetsontwikkeling op het spoor. Het eerder genoemde innemen van het standpunt van de leerling en de beschrijvingen van kenmerken die goede realistische toetsopgaven moeten hebben (Van den Heuvel-Panhuizen, 1990; Van den Heuvel-Panhuizen en Gravemeijer, 1991a), zijn daarvan voorbeelden. Maar dit proces gaat door. Steeds ontdekken we weer andere dingen, zoals bijvoorbeeld dat het heel vruchtbaar kan zijn om voor de ontwikkeling van schriftelijke toetsen te rade te gaan bij interview-technieken. Terwijl vroeger schriftelijk toetsen en mondeling toetsen als twee gescheiden werelden werden gezien, blijken nu de ideeën achter het mondeling toetsen heel goed bruikbaar te zijn voor de verbetering van het schriftelijk toetsen. Vangnet-vragen, tweede kansvragen en hulpbladen bij toetsopgaven, zijn daarvan voorbeelden (Van den Heuvel-Panhuizen, in voorbereiding).

verdere ontwikkeling realistische onderwijstheorie/toetstheorie

De toetsontwikkeling wordt niet alleen gestuurd en gevoed door de realistische onderwijstheorie, maar levert ook een bijdrage aan de verdere ontwikkeling van deze theorie. Door de bij de toetsontwikkeling opgedane ervaringen en gevonden resultaten hebben een aantal aspecten van de realistische onderwijstheorie een steviger fundament gekregen of zijn bijgesteld. Zo ondersteunen zowel de getalsmatige vaardigheden van de kinderen aan het begin van groep 3, als de grote verschillen tussen contexten en formuleopgaven in een bepaalde latere fase van de ontwikkeling, niet alleen de ideeën over de rol van de informele vaardigheden en de rol van de contexten daarin, maar tevens dragen zij bij tot een aanscherping van deze ideeën, met name ten aanzien van het idee van contextgebonden kennis en strategieën.

Interessant om te melden is nog dat deze feedback zelfs verder blijkt te reiken dan de Nederlandse realistische onderwijstheorie. Ook bij de aan deze onderwijstheorie verwante Dortmundse constructivistische stroming vindt men, mede naar aanleiding van de in Duitsland opgedane ervaringen met de MORE-begintoets, dat de informele vaardigheden van de kinderen niet alleen onderzocht moeten worden om aangrijpingspunten te kunnen bieden voor het te geven onderwijs, maar ook duidelijk een plaats moeten krijgen binnen de theorie van reken-wiskundeonderwijs (Selter, in druk).

Behalve een bijdrage aan de verdere ontwikkeling van de realistische onderwijstheorie is er ook sprake van een groeiend inzicht in het toetsen bij realistisch reken-wiskundeonderwijs en de daarbij gebruikte instrumenten. Het al eerder genoemde idee van vooruittoetsen om greep te krijgen op de informele vaardigheden is daarvan een voorbeeld, en dat geldt ook voor het bieden van constructieruimte.

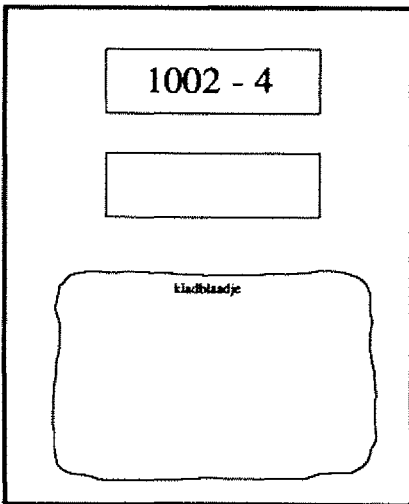
verdere ontwikkeling ontwikkelingsonderzoek

Tenslotte nog iets over het onderzoek dat tot dit alles heeft geleid: ontwikkelingsonderzoek – geen procedure-gericht onderzoek, maar constructie-gericht onderzoek, duidelijk herkenbaar aan de reflecterende en uitproberende manier van werken met de domeinspecifieke theorie als sturende en voedende bron, en duidelijk herkenbaar aan de veelzijdige en gelaagde output. Waardevol voor een goede verstaander, maar kennelijk niet voor een buitenstaander. Die heeft ook nog bewijzen nodig, want zonder bewijzen is het geen onderzoek. Die bewijzen zouden dan aangedragen moeten worden door empirische toetsing. Meestal opgevat als het nagaan of bepaalde ontdekkingen of ideeën – dan hypothesen genoemd – ook houdbaar zijn als het gaat om grote aantallen leerlingen, leerkrachten, lessen, vul maar in. Natuurlijk kan deze manier van toetsing waardevolle informatie opleveren, maar vaak niet de informatie waarom het bij de theorievorming die we hier op het oog hebben, gaat: de realistische onderwijs-theorie en als onderdeel daarvan een realistische toetstheorie. Ontwikkelingsonderzoek levert deze informatie wel en heeft daarbij eigen bewijskracht. Om dit duidelijk te maken drie voorbeelden.

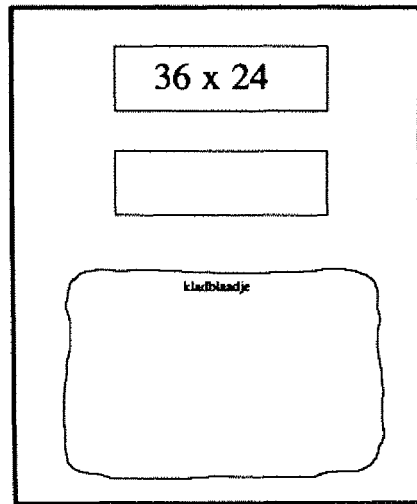
7 eigen bewijskracht ontwikkelingsonderzoek

het eerste voorbeeld: inzicht in bewerkingen

Dit voorbeeld heeft betrekking op twee kale opgaven, die bedoeld waren om na te gaan of de leerlingen inzicht hebben in de bewerkingen (zie fig. 19 en 20). Ze zijn afkomstig uit een toets voor groep 7 (Van den Heuvel-Panhuizen en Gravemeijer, 1991b).



figuur 19: toets 7.1, opgave 1



figuur 20: toets 7.1, opgave 2

De bijbehorende instructie luidt als volgt: 'Bij deze aftrekopgave hoef je niet de uitkomst in te vullen. Wat je wél moet doen, is een andere aftreksom bedenken waar dezelfde uitkomst uit komt.' Na een paar toetsboekjes van de leerlingen te hebben nagekeken, weet je al dat opgave 1 helemaal niet zo geschikt is om er achter te komen of de leerlingen inzicht hebben in de bewerkingen. Dit inzicht houdt bijvoorbeeld in dat de leerling weet dat er bij beide getallen eenzelfde getal opgeteld kan worden zonder dat de uitkomst verandert. Als je dit inzicht in de bewerkingen niet hebt, zit er niets anders op dan de som eerst uit te rekenen. Het was de bedoeling van de toetsopgave, dat via de kladblaadjes duidelijk zou worden hoe de kinderen tot de oplossing zijn gekomen. Bij de vermenigvuldigopgave blijkt dit ook werkelijk zo te werken. Het is niet moeilijk te zeggen of de kinderen wel of niet van de associatieve eigenschap gebruik hebben gemaakt (zie fig. 21). Bij de aftrekopgave is dit duidelijk anders. Om hier hetzelfde effect te bereiken als bij de vermenigvuldigopgave hadden de getallen een stuk moeilijker moeten zijn (bijvoorbeeld: $8642 - 5876$). Met andere woorden: wil men toetsen of de leerlingen gebruik kunnen maken van de eigenschappen van de bewerkingen, dan moet ervoor gezorgd worden dat de leerlingen ook de noodzaak ervaren om gebruik te maken van die eigenschappen. Wie het kan, kan uit het hoofd een andere som bedenken. Wie het niet kan, zal eerst de uitkomst moeten uitrekenen. Bij moeilijke getallen zal dat betekenen dat de leerling zijn of haar toevlucht moet nemen tot het kladblaadje, met als gevolg dat zichtbaar wordt hoe er is gewerkt.

Het hier beschreven onderzoekje naar hoe met schriftelijke toetsopgaven kan worden nagegaan of leerlingen inzicht hebben in de bewerkingen en of ze gebruik kunnen maken van bepaalde eigenschappen ervan, heeft een stukje kennis opgeleverd dat geen verder bewijs meer behoeft. Ook het feit dat u nu misschien denkt, dat we dat van die aftrekopgave ook van te voren hadden kunnen weten, is een ondersteuning van de gemaakte conclusie – en deze gedachte maakt bovendien dat dit onderzoek op ander onderzoek gaat lijken. Ook ander onderzoek levert vaak uitkomsten op die van te voren bedacht hadden kunnen worden. Ook als we die toetsopgave bij grotere aantallen leerlingen hadden uitgeprobeerd, zou de hiervoor geformuleerde conclusie niet veel anders hebben geluid. Hetgeen echter niet wil zeggen dat verder ontwikkelingsonderzoek nooit zal kunnen leiden tot een bijstelling ervan.

1004 - 6	Kindbeeldje	1298	Kindbeeldje 12x72 6x
1003 = 5	Kindbeeldje	8 x 100	Kindbeeldje
1000 - 5 = 998	Kindbeeldje	108 x 8	Kindbeeldje
1000 - 7 (998)	Kindbeeldje	2 x 432	Kindbeeldje 36 12x 144 288 864
100 + 898	Kindbeeldje	432 x 2 216 x 4 108 x 8 54 x 16 72 x 32	Kindbeeldje 36 12x 144 288 864 I ♥ cats
900 + 98 = 998	Kindbeeldje	4 x 54	Kindbeeldje 36 12x 144 288 864 4x58 54 4 916
998 1000 - 2 = 998	Kindbeeldje		Kindbeeldje 36 38 24 28 144 256 288 512 864 1024

figuur 21: voorbeelden van antwoorden bij opgave 1 en 2

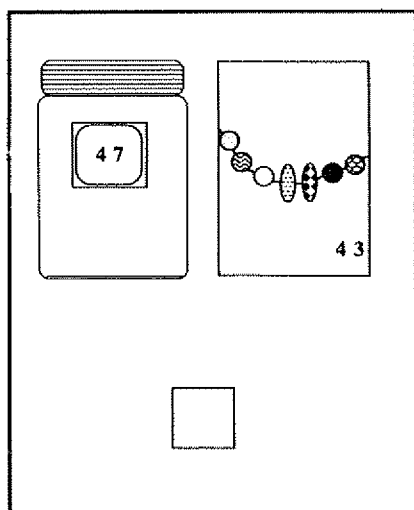
het tweede voorbeeld: context versus kaal, informeel versus formeel

Het tweede voorbeeld betreft de grote verschillen die bij het MORE-onderzoek (Gravemeijer e.a., 1993) gevonden zijn tussen contextopgaven en formuleopgaven. Bij nieuwe soorten sommen – sommen die nog niet waren behandeld of waarvan de behandeling net gestart was – liep de contextvariant duidelijk voor op de formulevariant. De verschillen in de percentages goed waren soms zeer aanzienlijk, terwijl het toch over dezelfde sommen ging (zie fig. 22).

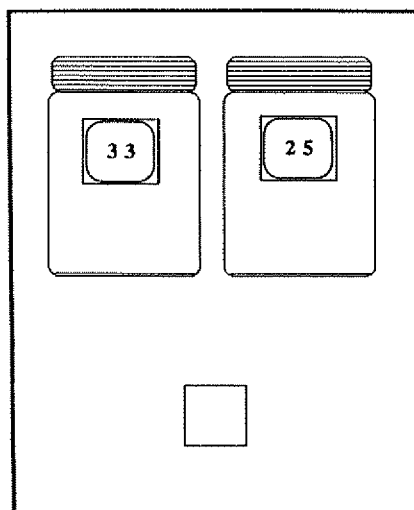
toets	C 47-43	F 47-43	C 33-25	F 33-25	C 100-85	F 100-85	C 145-138	F 94-29
4.2 (nov)	60	38	54	21	-	-	-	-
4.4 (apr/mei)	-	-	64	40	60	55	52	37
5.1 (sept)	-	-	71	49	70	54	60	33

figuur 22: percentages 'goed' bij contextopgaven (C) en formuleopgaven (F)

In figuur 23 tot en met 27 is weergegeven welke contextopgaven zijn gebruikt. In feite zijn het vrij platte opgaven die de rijkheid van de ijsbeer-opgave missen, maar waarvan de kracht in iets anders zit. De gebruikte contexten reiken oplossingsstrategieën aan, zoals die van het aanvullend optellen, waardoor aftreksommen bereikbaar worden die dat in formulevorm op dat moment niet zijn.



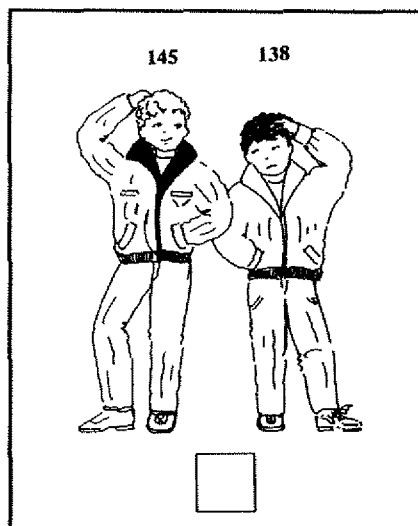
figuur 23: 47 – 43



figuur 24: 33 – 25

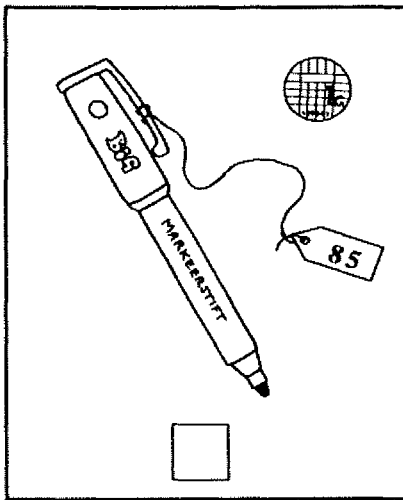
Zo weet aan het eind van groep 4 al zo'n 50% van de kinderen juist uit te rekenen wat het verschil in lengte is tussen die twee jongens (fig. 25), ofschoon op dat moment nog geen sommen boven de honderd met oversprong van het tiental zijn behandeld. Bij

een vergelijkbare kale aftrekopgave onder de honderd, lag de score dan ook 15% lager. Dit is nog niks vergeleken bij de verschillen die in het begin van groep 4 tussen de resultaten op contextopgaven en formuleopgaven zijn gevonden. Daar liepen ze soms op tot boven de 30%. Getalsmatige problemen kunnen oplossen is duidelijk niet hetzelfde als sommetjes kunnen maken. Of beter gezegd: bij kale sommen worden kennelijk niet die strategieën aangewend, die de contextopgaven zo gemakkelijk maken.

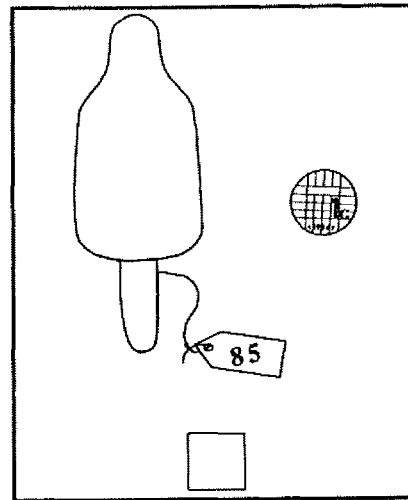


figuur 25: 145 – 138

Zowel de grote discrepanties als het feit dat de bevindingen steeds weer worden ondersteund door weer andere gelijksoortige bevindingen, maakt dat je aanvoelt dat je iets op het spoor bent dat meer is dan alleen een toevalligheid. Het is een bevestiging van de realistische onderwijstheorie die het toepassen vooraf laat gaan aan werken op het formele niveau. Het laat bovendien ook zien hoe dit in het onderwijs gerealiseerd kan worden. Hetgeen niet wil zeggen dat verder ontwikkelingsonderzoek op dit punt niet meer nodig is. Behalve antwoorden leveren de toetsgegevens ook nieuwe vragen op. Een belangrijke vraag is bijvoorbeeld hoe de contextopgaven en de formuleopgaven zich verderop in het leerproces verhouden. Andere vragen zijn hoe de contexten zich tot elkaar verhouden en of er behalve bijzondere contexten ook bijzondere getallen zijn. Een nadere bestudering van de verschillende afnamen en versies van het sommetje 100 – 85 (zie fig. 26 en 27) stuurt wel aan op deze vragen.



figuur 26: 100 – 85 (4.4)

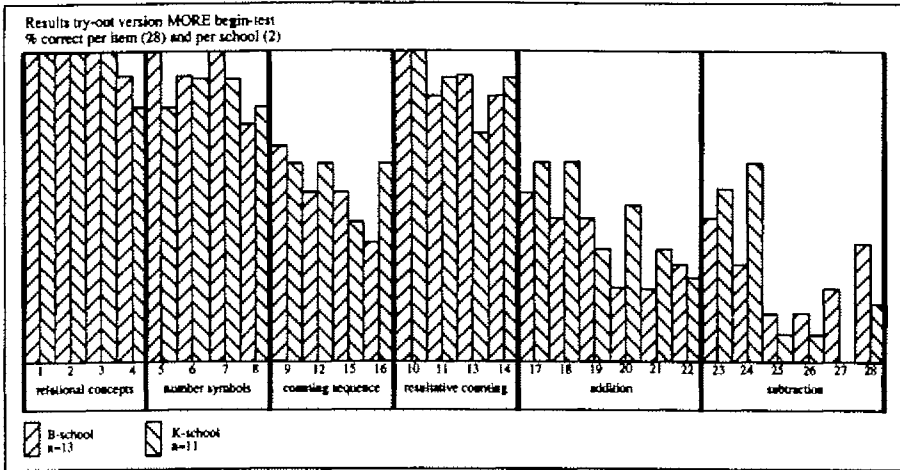


figuur 27: 100 – 85 (5.1)

het derde voorbeeld: de MORE-begintoets

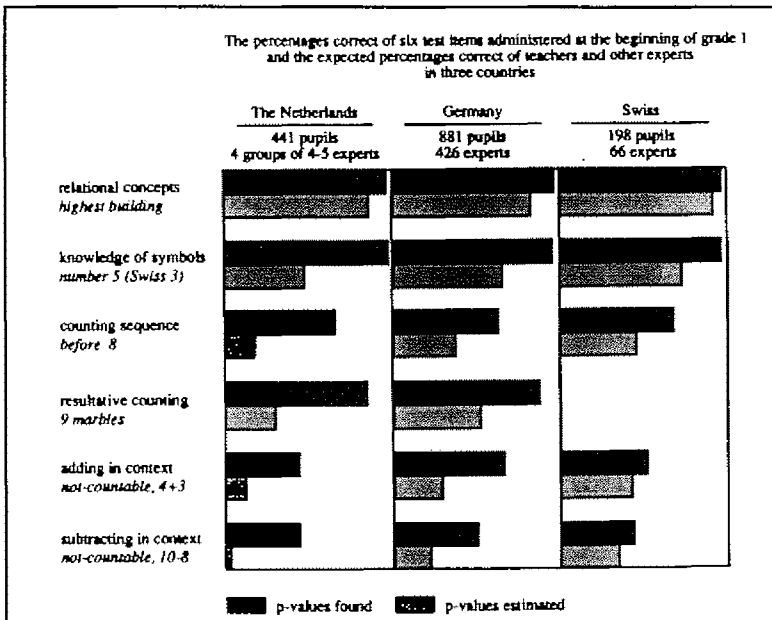
Het derde voorbeeld betreft de MORE-begintoets. In feite is hier sprake van eenzelfde ervaring als bij het tweede voorbeeld. Een grote groep kinderen bleek namelijk aan het begin van groep 3 al verder te zijn dan de methode. Het bijzondere van deze toets zijn niet alleen de resultaten die ze heeft opgeleverd en de consequenties voor het onderwijs die eraan worden verbonden, maar vooral ook de manier waarop deze gegevens zijn verzameld. Terwijl de bezwaren tegen de gebruikelijke paper-and-pencil tests overal breed worden uitgemeten, blijkt zo'n zelfde toets afgenomen aan het begin van groep 3 ons iets te vertellen wat tot nu toe alleen maar in individuele onderzoeken van kinderen naar voren is gekomen.

Anders dan de voorgaande twee voorbeelden is deze toets inmiddels voorgelegd aan grote aantallen leerlingen. De resultaten hiervan bevestigen onze eerste bevindingen. We begonnen in twee kleuterklassen met deze resultaten (zie fig. 28). De afname vond plaats bij de oudste kleuters aan het eind van het schooljaar. Ondanks de hoge scores maakten we de toets niet moeilijker omdat het wel eens twee goede kleuterklassen konden zijn. Vervolgens vonden we bij de definitieve afname in groep 3 ongeveer dezelfde resultaten, maar nu zelfs met een stevig plafondeffect. De prestaties van de leerlingen overtroffen niet alleen onze verwachtingen maar ook die van een groep geraadpleegde deskundigen.



figuur 28: resultaten proefafname MORE-begintoets

Tenslotte kwam de toets in Duitsland (Selter, in druk) en in Zwitserland (Hengartner en Röthlisberger, in druk) terecht. Nog meer leerlingen, nog meer deskundigen, weliswaar iets afwijkende afnamecondities, maar weer dezelfde resultaten (zie fig. 29). Resultaten in de vorm van pure percentages waaraan bij beide onderzoeken belangrijke consequenties worden verbonden voor het onderwijs.



figuur 29: resultaten MORE-begintoets in drie landen

Moge dit voorbeeld duidelijk maken dat er bij ontwikkelingsonderzoek ook met grote aantallen gewerkt kan worden. Veel hangt af van de soort kennis waarnaar je op zoek bent en de soort uitspraken die je wilt doen. Wil je met zekerheid iets kunnen zeggen over het niveau van de kinderen die starten in groep 3, dan zijn twee kleuterklassen niet voldoende. Tegelijkertijd zijn we op basis van die observaties in die twee kleuterklassen wel in staat geweest om een klassikale reken-wiskundetoets te maken die, gezien de spontane navolging en toepassing in binnen- en buitenland, waarschijnlijk bepaalde kwaliteiten zal hebben. In het binnenland kunnen naast de vele aanvragen van schoolbegeleidingsdiensten om de toetsen te mogen gebruiken, het onderzoek van Kraemer (1988) genoemd worden en de domein-specifieke taken bij een 'learning potential test' (Tissink, Hamers en Van Luit, 1993). Aan de buitenlandse voorbeelden kan naast het al genoemde Duitse en Zwitserse onderzoek, ook nog het Amerikaanse project van Doyle worden toegevoegd. In Sheboygan, Wisconsin, is men op basis van de MORE-toetsen 'RME (Realistic Mathematics Education)-like' test-items aan het ontwikkelen (Doyle, in press).

ter afsluiting

Met de voorgaande voorbeelden van toetsontwikkelingsonderzoek is geprobeerd te laten zien dat ontwikkelingsonderzoek op haar eigen manier haar uitkomsten kan onderbouwen. Ontwikkelingsonderzoek is hierbij niet noodzakelijkerwijs aangewezen op de gebruikelijke methodologie, maar heeft eigen bewijskracht. De basis voor deze bewijskracht wordt gevormd door minstens drie pijlers: inherente overtuigingskracht, interne en externe consistentie, en een corrigerend vermogen.

Bepaalde bevindingen zijn op zichzelf al zo overtuigend dat ze geen verder bewijs meer behoeven dat gebaseerd is op grote aantallen en een meer gecontroleerde manier van meten en analyseren. In plaats daarvan lijkt de kennis van het domein hier belangrijker te zijn. Deze kan maken dat een enkele ervaring al voldoende kan zijn om te begrijpen hoe iets in elkaar zit. Ook het feit dat bepaalde bevindingen steeds weer op de een of andere manier zowel binnen als buiten het gebied van het Nederlandse realistisch reken-wiskundeonderwijs bevestigd worden, draagt bij tot deze bewijskracht. Dit kunnen directe bevestigingen zijn in de vorm van overeenkomstige onderzoeksresultaten, maar ook indirecte in de vorm van het overnemen van bepaalde output, omdat men er een bepaald vertrouwen in heeft. Het meest cruciaal voor deze bewijskracht is echter het corrigerend vermogen. Alleen als ontwikkelingsonderzoek in staat is om haar uitkomsten ter discussie te stellen en open staat voor nieuwe bevindingen zal zij haar bewijskracht behouden. In de voorbeelden die in dit artikel zijn gegeven, is geprobeerd iets van dit corrigerend vermogen naar voren te laten komen. Het is ook om deze reden dat bijeenkomsten zoals deze zo belangrijk zijn. Hopelijk zal er aanleiding zijn om bepaalde dingen weer wat bij te stellen en zo weer verder te komen.

literatuur

- Berg, W. van den, en D. van Eerde (1985). *Kwantiwijzer*. Rotterdam: Erasmus Universiteit.
- Collis, K. F., Th. A. Romberg, M. E. Jurdak (1986). A Technique for Assessing Mathematical Problem-solving Ability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 3, 206-221.
- Doyle, J. (in press). *A New Way of Testing in Mathematics Classrooms*.
- Galen, F. van, K. Gravemeijer, J. M. Kraemer, A. Meeuwisse en W. Vermeulen (1985). *Rekenen in een tweede taal*. Enschede: SLO.
- Gravemeijer, K. (1992). Onderwijsontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 10 (3) 3-14.
- Gravemeijer, K., M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, N. Ruesink, L. Streefland, W. Vermeulen, E. te Woerd en D. van der Ploeg (1993). *Methoden in het reken-wiskunde-onderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek*. Utrecht: CD-β press, Freudenthal instituut.
- Heege, H. ter (1981/1982). Het rekenen van Gijsbert (1 t/m 4). *Willem Bartjens*, 1, 25-26, 67-68, 109-111, 172-177.
- Heege, H. ter, M. van den Heuvel-Panhuizen en P. Scholten (1983/1984). *Pluspunt*. Handleiding klas 2, 3, 4 en 5. Hilversum: Nederlandse Onderwijs Televisie.
- Hengartner, E. en H. Röthlisberger, (in druk). *Rechenfähigkeit von Schulanfängern*.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (1990). Realistic Arithmetic/Mathematics Instruction and Tests. In: K. Gravemeijer, M. van den Heuvel, en L. Streefland. *Contexts, Free Productions, Tests, and Geometry in Realistic Mathematics Education*. Utrecht: OW&OC, 53-78.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den en K. Gravemeijer (1990). *Reken-wiskunde Toetsen*. Utrecht: OW&OC/ISOR (interne publikatie).
- Heuvel-Panhuizen, M. van den en K. Gravemeijer (1991a). Tests are not all bad. In: L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht: CD-β press/Freudenthal institute.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den en K. Gravemeijer (1991b). *Toets 7.1*. Utrecht: OW&OC (interne publikatie).
- Kilpatrick, J. (1993). The Chain and Arrow: From the History of Mathematics Assessment. In: M. Niss (ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. An ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 31-46.
- Kraemer, J.M. (1988). Rekenprestaties, school en etniciteit. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 7 (2) 3-15.
- Lange, J. de (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW&OC.
- Romberg, Th.A., Zarinnia, E.A., en Collis, K.F. (1990). A New World View of Assessment in Mathematics. In: G. Kulm, *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics*. Washington DC: AAAS, 21-38.
- Romberg, Th. A. en L. D.Wilson (1992). Alignment of Tests with the Standards. *Arithmetic Teacher*, 40 (1), 18-22.
- Selter, Chr. (in druk). *Die Kluft zwischen den arithmetischen Kompetenzen von Erstkläzlern und den Pessimismus der Experten*.
- Tissink, J., J. H. M. Hamers en J. E. H. van Luit (1993). Learning Potential Tests with Domain-general and Domain-specific Tasks. In: J. H. M. Hamers, K. Sijtsma, A. J. J. M. Ruijsse-naars (eds.), *Learning Potential Assessment - Theoretical, Methodological and Practical Issues*. Amsterdam/Lisse: Swets & Zeitlinger, 243-266.
- Treffers, A. (ed.), (1979). *Cijferend vermenigvuldigen en delen* (1). Overzicht en achtergronden. Leerplanpublikatie 10. Utrecht: IOWO.
- Treffers, A. en A. Veltman (1993). Verschil in methoden (2). *Vernieuwing / Tijdschrift voor onderwijs en opvoeding*, 52, 3, 14-17.
- Werkgroep Docenten Onderwijszaken (DOZ) (1991). *Toetsen en beoordelen*. Culemborg: Phaedon (2e druk).

Ontwikkelingsonderzoek negatieve getallen

Schets van een leerproces

Leen Streefland
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 inleiding

De wiskunde en de natuurwetenschappen – hun historische ontwikkeling wijst dit uit – kennen voortgang bij de gratie van het telkens opnieuw ontstaan van ideeën, die productief blijken te zijn. Wie nader ingaat op de historische context, waarin zulke ideeën gedijen, ontdekt alras, dat het dikwijls zo is dat er ‘iets in de lucht hangt’, waardoor de beslissende vonk overspringt. Met het didactiseren en de didactiek voor het wiskundeonderwijs is het al niet anders. In deze bijdrage probeer ik al terugblikkend te reconstrueren welke voedingsbodem er voor de didactiek van de negatieve getallen was, waarop vruchtbare ideeën voor verder ontwikkelingsonderzoek zouden kunnen gedijen. Uit het ontwikkelingsonderzoek dat nog gaande is, worden enkele voorbeelden besproken. In ander verband zal ik nader ingaan op theorievorming en ontwikkelingsonderzoek.

2 hoe het allemaal begon

Het begon voor mij allemaal met een zeker verdichtingspunt in mijn werkzaamheden. Ik was via de analyse van lesprotocollen zijdelings betrokken bij het MORE-project. In de toetsen ervoor zaten opdrachten voor eigen productie.

MORE-opdracht

‘Maak zelf zoveel mogelijk sommen met de getalletjes 3, 8, 4 en 20.’

Tot mijn verbazing bedenken twee kinderen uit groep 4 iets als ‘ $3 - 8 = \text{min } 5$ ’.

Ik kreeg dit voorbeeld van Marja van den Heuvel omdat ik op dat moment nog meer negatieve getallen op mijn activiteitenbordje had liggen.

Ongeveer in dezelfde tijd moest ik een artikel beoordelen voor het *Tijdschrift voor de Didactiek van de β -wetenschappen*, kortweg TD- β , dat over negatieve getallen handelde. Tevens verscheen het boek *Tegengesteld*, waarover al eerder door Goffree en anderen (1988) in TD- β gepubliceerd was en waarop door Broekman (1989) was gereageerd en dat ik in TD- β zou bespreken (Streefland, 1990).

Zo bleken de negatieve getallen allerlei sluiptwegen te hebben om in mijn werkzaamheden door te dringen.

Voordat ik hierop nader in ga, sta ik eerst nog even stil bij het voorbeeld uit de MORE-toets: ' $3 - 8 = \text{min } 5$ '. Maakte dit kind van circa acht jaar spontaan onderscheid tussen wat we wel noemen de bewerkingsmin en de toestandsmin? Zou dat echt zo zijn of koos het voor deze oplossing omdat het niet gewend was dat een som of een uitkomst met een operatiesymbool begint?

Ik liet het geval verder rusten, maar bedacht nog wel: de realistische didacticus die eigen produkties predikt, zal ook de consequenties onder ogen moeten zien. Wat doen we met produkties die buiten het programma vallen?

TD- β tegengesteld

Kemme (1990) vergeleek in zijn artikel in TD- β twee contexten voor negatieve getallen op hun werkbaarheid in de praktijk van het voortgezet onderwijs, namelijk 'Heks' en 'Treintjes'.

De inmiddels welhaast spreekwoordelijk geworden 'Heks' brouwt haar geheimzinnige mengsel met warme, positieve en koude, negatieve blokjes.

De leerlingen verkennen haar toverkunsten en worden zodoende ingeleid in een context die de negatieve getallen concretiseert. Wat mij bij het bekijken van deze context in *Moderne Wiskunde* direct al opviel was, dat er vragen gesteld werden, die vooronderstelden dat negatieve getallen volgens klassen van getallenparen gedefinieerd kunnen worden, bijvoorbeeld -5 door (0,5), (1,6), (2,7), ..., en dat dit in feite in 'Heks' ook voorondersteld werd, zonder dat dit overigens voor de leerlingen geëxpliciteerd werd. Daardoor maakt 'Heks' als context en wiskundig een gekunstelde indruk. Het is een artificiële context of, in termen van Freudenthal, een valse concretisering.

Wat ik me afvroeg was:

Zouden de bushaltes van Jan van den Brink met hun in- en uitstappende passagiers geen veel betere context zijn om het idee van het getallenpaar voor negatieve getallen te funderen?

In de praktijk deed de 'Heks' het, blijkens het onderzoek van Kemme, heel wat beter dan de 'Treintjes'. Voor alle duidelijkheid: de treintjes zijn er in twee soorten: positieve en negatieve. Wanneer nu een negatief treintje ook nog achteruit rijdt, dan ...

Dát was de gedachte erachter: een negatief, achteruit rijdend treintje concretiseert de tekenregel 'min-maal-min is plus', althans dat dachten de ontwerpers.

Het bestaan van dergelijke contexten doet overigens vermoeden dat het onderwijzen van negatieve getallen kennelijk minder gladjes verloopt dan enkele eenvoudig lijkende tekenregels suggereren. Naar Kemmes onderzoek uitwijst, blijken de 'Treintjes' zo hun eigen lastige logica te hebben en als zodanig te veel behekt te zijn om nog als geschikte context voor negatieve getallen te kunnen dienen. Er is nu zelfs sprake van

een nog valsere concretisering dan de 'Heks'.

Wat is er toch met die artificiële contexten aan de hand?, zo vroeg ik mij af.

Tijd om hier diep op in te gaan was er niet, want het boek *Tegengesteld* (1989) onder redactie van Goffree en Buys was ook al verschenen en diende besproken te worden in TD-β.

tegengesteld

Kort voor *Tegengesteld* was Fischbeins *Intuitions in Science and Mathematics Education* (1987) verschenen met een hoofdstuk over negatieve getallen dat de moeite van het lezen meer dan waard was. Dit was des te meer het geval daar het me op het spoor bracht van een schitterend artikel van Glaeser uit 1981, dat de samenstellers van *Tegengesteld* kennelijk ontgaan is. Uit beide publikaties komt een historisch beeld naar voren van de negatieve getallen, dat zowel onthullend als onthutsend is.

Eeuwenlang, namelijk, hebben wiskundigen gezocht naar mogelijkheden om op grond van hoeveelheden en hoegrootheden de tekenregels voor de negatieve getallen concreet te maken, dat wil zeggen uit te leggen. Wie iets van (de geschiedenis van de) wiskunde weet, zal beamen dat er grote namen mee gemoeid zijn: Stevin, Fermat, Euler, MacLaurin, d'Alembert, Carnot, om er enkele te noemen.

Wat men in feite poogde was de ideeën van 'bezit en schuld', 'boven en onder zeeniveau', enzovoort, te verzoenen met de formeel-operationele structuur van de negatieve getallen door de tekenregels (onder andere het vermenigvuldigen van negatieve getallen) met concrete modellen te onderbouwen. Dit resulteerde in cognitieve conflicten. Ter illustratie een citaat van Lazare Carnot (1753-1823), die lid was van de Academie van Wetenschappen in Parijs.

'A multitude of paradoxes and relative absurdities result from the same notion; for instance, that -3 would be smaller than 2 ; nevertheless $(-3)^2$ would be greater than $(2)^2$, that is to say that, considering two unequal quantities, the square of the greater would be smaller than the square of the smaller: This shocks every clear idea which one may get referring to the notion of quantity'.

(Cf. Glaeser, p. 326)

Laten we hiermee ophouden, moet Hankel, een negentiende eeuwse Duitse wiskundige er na gedacht hebben. Hij stelde voor te eisen, dat de algebraïsche regels voor het rekenen met positieve gehele getallen voor de negatieve getallen – weliswaar binnen de context van de complexe getallen – zonder voorbehoud geldig zouden blijven, bijvoorbeeld de wet van de distributiviteit van de vermenigvuldiging over de optelling. Hankel weigerde dus doodeenvoudig langer naar een concreet model voor negatieve getallen te zoeken. Deze puur formele stellingname is bekend geworden als Hankels *permanentieprincipe*.

Aan de distributieve wet licht ik dit principe toe.

Distributieve wet: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Deze moet nu geldig zijn voor bijvoorbeeld:

$$(5 - 3)(4 - 2) = 5 \times 4 + 5 \times -2 + -3 \times 4 + -3 \times -2.$$

Nu is:

$$5 \times 4 = 20$$

$5 \times -2 = -10$; hierbij kan een leerling zich nog wel iets voorstellen, bijvoorbeeld 5 maal een tekort of schuld van 2 gulden.

$-3 \times 4 = -12$; hiermee wordt het al lastiger. Dit is niet meer intuïtief begrijpbaar zegt Fischbein. Dit gaat ons voorstellingsvermogen te boven, tenzij we de zaak omdraaien in 4×-3 . We belanden dan bij het vorige geval. En passant is dan echter wel de formele wet van de commutativiteit toegepast.

$-3 \times -2 = +6$ zal hier als uitkomst afgedwongen moeten worden om aan beide zijden van de gelijkheid waarmee we begonnen '4' als uitkomst te krijgen.

Mijn lezen rondom de bespreking van *Tegengesteld* en het te bespreken boek zelf, maakten nogal wat bij me los. Ik werd mij er bijvoorbeeld van bewust, dat in de didactiek voor negatieve getallen in het voortgezet onderwijs met gekunstelde contexten als 'Heks' en 'Treintjes' zich de geschiedenis herhaalde en dat men door kennis te nemen van de historie beter had kunnen weten. Tegen dit ongeweten beter weten in had men getracht wat onverzoenlijk was met elkaar te verzoenen.

Een vraag voor mij was:

Zou, bij een op de geest van de historie geïnspireerde aanpak van de negatieve getallen, zich in de kinderen het conflict van de onverzoenlijkheid van deze getallen als concrete hoeveelheden of hoegrootheden en de negatieve getallen als formele wiskundige constructen in hun rol van bijprodukten van wiskundige berekeningen, herhalen?

Ik verwachtte hierop een bevestigend antwoord ondanks het MORE-voorbeeld.

Een afgeleide vraag was:

Zou in een didactiek voor negatieve getallen dus aandacht aan beide verschijningsvormen van negatieve getallen geschonken moeten worden? Zou ik moeten mikken op een prototype dat beide beginselen van meet af aan in zich draagt?

En tenslotte nog de constatering:

Indien mijn eerste vraag bevestigend beantwoord kan worden, wat ik verwachtte, dan kunnen artificiële contexten als 'Heks' en 'Treintjes' als onderdeel van een leergang negatieve getallen op theoretische gronden verworpen worden.

Maar er was nog meer. Zo was het mij opgevallen, dat Glaeser het niet had over '*nombres négatifs*', maar dat hij sprak van '*nombres relatifs*'. En zo is het ook. Neem bijvoorbeeld de temperatuur met vriezen en dooien als context. -3°C met als tegenhanger $+3^{\circ}\text{C}$ bestaan slechts bij de gratie van elkaar en ten opzichte van een *afgesproken* nulpunt. Wanneer men voor temperatuur zou besluiten op de schaal van Kelvin met zijn

absolute nulpunt over te gaan, dan is het met temperatuur als concrete context voor de negatieve getallen gedaan.

Want, naar MacLaurin in 1748 al stelde:

... 'an isolated quantity cannot be considered as negative: it may be so only by comparison. A negative quantity is not, rigorously speaking, less than nothing. It is not less real than a positive quantity, considered in an opposite sense.'

(Cf. Fischbein, 1987, p. 98; Glaeser, 1981, p. 117)

De vraag die dit voor mij opwierp, was:

Zou er met de keuze van nul als scheiding tussen plus en min en zijn rol in de didactiek van de negatieve getallen niet veel meer gedaan moeten worden, dan tot nu toe het geval is?

En: wanneer 'die nul' dan toch een willekeurige tweedeling teweeg brengt, kunnen we dan naar het voorbeeld ervan ook niet met andere scheidingspunten, zoals bijvoorbeeld het rekenkundig gemiddelde werken?

De bewustwording en het aanscherpen van voorgaande vragen werd sterk beïnvloed door Jan van den Brink met wie ik over deze kwesties in gesprek was geraakt.

De 'kwestie van de nul' bracht me later nog op een vraag over niveaus in het leerproces. Herhaaldelijk is er door Treffers (1987) en anderen op gewezen dat het voortgaande mathematiseren wordt gekenmerkt door niveauverhogingen. Is eenmaal een zeker formeel niveau – in de zin van beantwoordend aan de vaksystematiek – bereikt, dan kan reductie van dat niveau, of herwaardering zoals ik het liever noem, plaatsvinden. Dit betekent bijvoorbeeld dat de natuurlijke getallen op formeel niveau weer één van de concrete bronnen kunnen zijn voor de algebra. Op die manier geformuleerd, wekt zo iets de indruk van een voorwaarde. Bijvoorbeeld: eerst moet een leerling in formele zin over natuurlijke getallen kunnen denken, voordat met de negatieve getallen kan worden begonnen.

Ik zou de zaken echter willen omkeren en de vraag willen stellen:

Kunnen we niet juist, door eerder, op de basisschool, te beginnen met negatieve getallen, bijdragen aan het formaliseren van de natuurlijke getallen in het leerproces van de kinderen?

Dit zou in overeenstemming zijn met wat Hankel deed. Toen hij de negatieve getallen *binnen de context van de complexe getallen* beschouwde, konden de negatieve getallen pas *écht* geformaliseerd worden.

Ik maak hier nog de volgende kanttekening bij: uit onderzoek naar de effecten van op vormkenmerken gericht, mechanistisch wiskundeonderwijs blijkt, dat '0' als formeel neutraal element van de natuurlijke getallen niet als zodanig functioneert voor de leerlingen. Juist de negatieve getallen vanuit hoeveelheids- en hoegroothedsstandpunt vormen een geschikte context om de 'nul' extra in het zonnetje te zetten.

zakrekenmachine

Vanwege mijn deelname aan een project van de SLO en de Universiteit Utrecht over de integratie van zakrekenmachines in leergangen, lag het voor de hand, in te gaan op de vraag:

Kan de zakrekenmachine een functionele rol spelen in een leergang negatieve getallen?

Vanzelfsprekend luidde mijn antwoord bevestigend.

Mijns inziens zou de zakrekenmachine hier heel goed ingezet kunnen worden ter *ondersteuning* van het leerproces. Bijvoorbeeld: stel dat de minimumtemperaturen van de dagen van een wintermaand zijn bepaald: -3, -5, -4, -5, -3, -5, -4, -5, -6, ... enzovoort en dat de leerlingen het gemiddelde van enige (positieve) getallen kunnen uitrekenen. Toepassing van de zakrekenmachine voor de berekening van het gemiddelde van (negatieve) temperaturen zal – naar verwachting – leiden tot bezuiniging op het aantal handelingen bij het intoetsen. Een andere mogelijkheid is het doen van machinespecifieke activiteiten.

Een voorbeeld. Zakrekenmachines voorzien in de mogelijkheid een bepaalde bewerking te herhalen. Stel, dat de leerlingen het recept krijgen voor het voortbrengen van de volgende getallenrij: 1, -2, 4, -8, 16, ... en dat zij daarna de vraag krijgen te onderzoeken of zij door een ander intoetsprogramma te volgen de gegeven rij wel of niet veranderen kunnen in de rij: -1, 2 -4, 8, -16 ... of in -1, -2, -4, -8, -16, ... en waarom dat wel of niet kan.

tussenstand

De vragen die al theoretiserend over de didactiek van de negatieve getallen op kwamen, hadden betrekking op:

- getallenparen, de buscontext en haltegebeurtenissen;
- artificiële contexten als 'Heks' en 'Treintjes' en de theoretische verwerpelijkheid ervan bij bevestiging van de
- conflicthypothese;
- het inrichten van de leergang vanaf het begin volgens de beginselen van hoeveelheid en hoegrootheid aan de ene kant en dat van de formele wiskundige bijproducten anderzijds;
- de rol van markeringspunten als de 0 en het rekenkundig gemiddelde;
- het met jongere kinderen beginnen met negatieve getallen in dienst van het formaliseren van de natuurlijke getallen;
- het functioneel inzetten van de zakrekenmachine.

3 hoe het verder ging

Hierover kan ik kort zijn. Vanzelfsprekend raakte ik steeds meer geïnteresseerd. Het lag dus voor de hand dat ik een rol kreeg bij het ontwerpen van een onderwijsleerpakket voor negatieve getallen voor het project *Maths in Context*, een Middle School Project, dat de Universiteit van Madison (Wisconsin) en het Freudenthal instituut gezamenlijk uitvoeren. Anton Roodhardt en ik tekenden voor het ontwerpen van het pakketje *Dry en Wet Numbers* (1993).

Omdat binnen de context van dit project weinig ruimte tot echt ontwikkelingsonderzoek aanwezig is, besloot ik een poging te wagen subsidie te krijgen van NWO via de Stichting Pedon en alvast met voorwerk te beginnen in afwachting van een eventuele toe- of afwijzing van Pedon. Het is niets geworden omdat Pedon een abrupte koerswijziging in het beleid heeft gemaakt. Inmiddels is echter heel wat voorwerk verricht op de Fatima Jozefschool in Bussum in samenwerking met en met grote inbreng van de directeur Rob Gertsen. Voor zover dat in dit stadium van het ontwikkelingsonderzoek mogelijk is, zullen de aandachtspunten aan het eind van de vorige paragraaf met ervaringen worden toegelicht. Ik beperk me hierbij tot de kwesties van de getallenparen, de conflicthypothese, de nul, rekenkundig gemiddelde en de zakrekenmachine.

4 enkele voorlopige resultaten van het ontwikkelingsonderzoek

Inleiding en overzicht

Uit de overweldigende hoeveelheid kwalitatieve gegevens die het ontwikkelingsonderzoek heel snel genereerde zal ik slechts putten om op de beantwoording van enkele eerder geformuleerde vragen in te gaan.

Wat daarbij duidelijk moet worden, zijn de essentiële aandachtspunten in de individuele leerprocessen en welke invloed deze hebben op het bijstellen van de leergang. Wat mij betreft is er pas sprake van ontwikkelingsonderzoek, wanneer er een aanwijsbare *verstrengeling* plaatsvindt van het onderwijzen (met de leergang) en het leren.

getallenparen, de buscontext en haltegebeurtenissen

Eerste probleem:

31 mensen in de bus; 10 stappen in en 2 uit bij de halte. Hoeveel?



figuur 1

Een voorbeeld van leerlingenwerk (fig. 2).

in	uit
13	7
9	1
8	0
12	5
11	3
20	12
17	9
18	10

figuur 2

De aandacht richtte zich op haltegebeurtenissen, die dezelfde verandering in het passagiersbestand teweegbrachten.

In het eerste geval '8 meer' of '+8' na de halte. In het tweede geval ging het om '5 minder' of '-5'. Natuurlijk was er ook aandacht voor paren die de verandering 0 beschreven. Bij een verandering van '-5' horen ook 'kleine' gebeurtenissen als (2,7), (1,6) en (0,5) en om de verandering vast te stellen wordt er gerekend:

$$2 - 7 = -5, 1 - 6 = -5 \text{ en } 0 - 5 = -5.$$

Ziedaar hoe de klassieke 'toestandsmin' als het ware de 'bewerkingsmin' vervangt, wanneer de 0 als aantal instappers optreedt. Er is dus sprake van een verkorting, waarin de 'statische min' uit de 'dynamische' ontstaat.

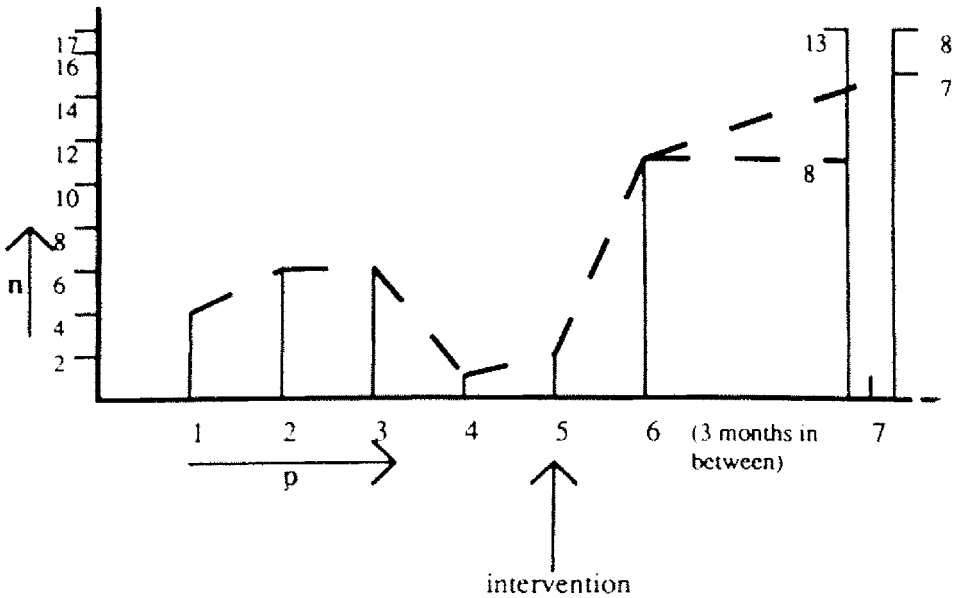
Dit zou mooi meegenomen zijn, wanneer het aan de orde geweest was bij het verkennen van de buscontext. Dat is niet het geval geweest. In het bijgestelde programma zullen dergelijke haltesommetjes dus moeten voorkomen.

Waarop de aandacht zich wel richtte, was het systematisch invullen van de haltetabelletjes. Eerst vond een vrije verkenning plaats. Na het vijfde geval met haltetabelletjes, was er een interactief lesgedeelte, waarin op het werk gereflecteerd werd. Dat bleek duidelijk invloed te hebben, zoals uit het volgende overzicht blijkt (fig. 3).

opgVI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1				+				+	+		±						
2				+			±				+	+		+			+
3	+			+			±			+	+						+
4							+										
5					+											±	
6				+	+		+	+	+		+	±		+	+	+	+

figuur 3: verloop van het systematisch invullen (+) van 6 opgaven (vert.) door 17 leerlingen (hor.).

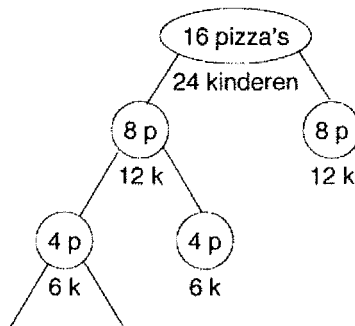
Drie maanden later volgde een opdracht tot vrije produktie. Voor zover de leerlingen haltetabellen produceerden (respectievelijk dertien leerlingen en acht leerlingen) bleek het oplossingsgedrag vrij persistent (respectievelijk acht van de dertien en zeven van de acht), zoals de volgende grafiek laat zien (fig. 4).



figuur 4

Ik maak hierbij nog twee kanttekeningen.

Ten eerste vertoont het leerproces grote gelijkenis met dat voor het schematiseren met het tafelschikkingschema om gelijkwaardige verdeelsituaties voort te brengen, bijvoorbeeld (fig. 5; Streefland, 1991).



figuur 5

Na de nodige instabiliteit lijken de kinderen op koers te komen. In dit verband verwijs ik naar mijn artikel over theorievorming door ontwikkelingsonderzoek (Streefland, 1993). Ten tweede blijkt de interventie door het interactieproces succesvol. Dit komt vermoedelijk door de voorafgaande vrije exploratie, die alle kinderen gemakkelijk aankonden. Er is, in termen van Elbers (1993) een cultuur van voorstructurering van de interactie in realistisch wiskundeonderwijs (zie opnieuw: Streefland, 1993).

Tweede probleem (zie fig. 6):

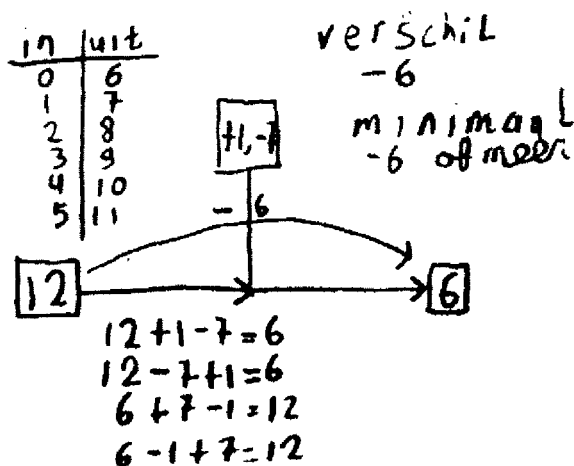
Bedenk rekenzinnen voor:



figuur 6

Toen de kinderen voor het eerst met een dergelijke situatie geconfronteerd werden, vonden acht van de zeventien leerlingen: 'Ik laat de bus gewoon achteruit rijden!' Twee van hen maakten er toen al een passende rekenzin bij: $12 + 3 - 0 = 15$, daarmee de in- en uitgetallen in hun tegengestelde veranderend.

Natuurlijk trok deze gedachte de aandacht van eenieder in de kleine werkgemeenschap. (Dit leek heel wat beter te voldoen dan een negatieve trein achteruit laten rijden!). Drie maanden later volgde een vrije productieopdracht. Die leverde veel werk als het volgende op (fig. 7):



figuur 7: twee sommen voor 'de bus achteruit'

Tien leerlingen maakten sommen voor de bus achteruit, waarbij zeven van hen ook algebraïsche eigenschappen toepasten om nieuwe sommen te genereren en drie van hen zelfs al regels formuleerden als: 'als je omgekeerd rekent, dat is van links naar rechts, dan worden de plussen minnen en de minnen plussen'.

Een nieuwe onderzoeksvraag was hiervan het gevolg.

Zou zich misschien een soort tussengebied beginnen af te tekenen tussen de positieve en de negatieve getallen, waarin leerlingen impliciet met tegengestelden rekenen? Zo ja, dan zou op verzameld materiaal later gereflecteerd kunnen worden.

de conflicthypothese

Deze kwam aan het licht bij het aftrekken onder elkaar van links naar rechts. De problemen druisten hier tegen de noties van de kinderen in, zodra het totale resultaat en met name dat in de kolom met de grootste plaatswaarde negatief was. Het volgende voorbeeld is illustratief (fig. 8).

Handwritten student work showing a subtraction problem and a handwritten explanation:

$$\begin{array}{r} 1823 \\ - 9745 \\ \hline 8122 \end{array}$$

Deze is fout want de schulden
kan je nergens van aftrekken
Ik heb dus 7922 schuld!
~~-100 geen schuld~~
dus ik heb ^{noeg} 7822 schuld

figuur 8: een moeilijke som, volgens de maker

Zolang de tekorten niet in de dominante kolom voorkwamen, ging het goed met het aftrekken van links naar rechts. Via hun vertrouwde methode konden de leerlingen hun uitkomsten eventueel verifiëren en plausibel maken. Dertien van de zeventien leerlingen pasten bij eigen produkties de notatie met tekorten toe, de anderen gebruikten andere, eigen notaties (boogjes, cirkeltjes en dergelijke).

Twee tekorten van dezelfde omvang hebben geen verschil, zo werd vastgesteld.

Bij de revisie van dit onderdeel zullen de aftrekkingen meer in de context van halteproblemen beschouwd worden (stations). Het begrip tegengestelde zal een nadrukkelijker rol moeten spelen dan nu het geval was. Het beoogde conflict zal bewuster worden uitgelokt. Nu werden de dingen opzettelijk te veel aan de leerlingen overgelaten, om te zien hoe ver ze min of meer spontaan zouden kunnen komen.

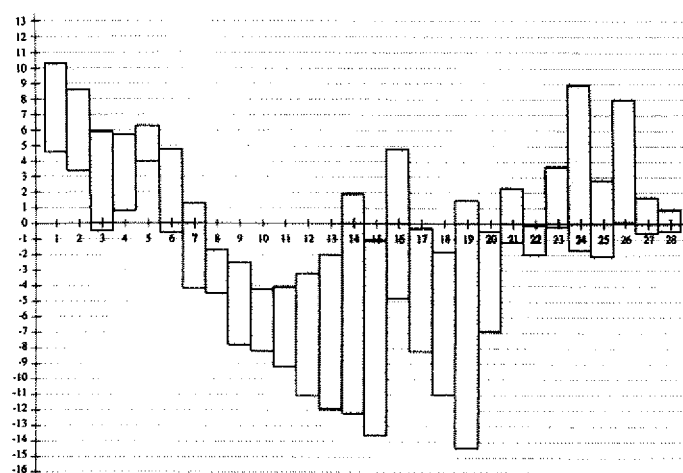
Het voorgaande betekent, dat het inrichten van de leergang volgens de twee genoemde

beginselen vanaf het begin inderdaad een goede oplossing lijkt, te meer daar 'bussen en haltegebeurtenissen' en 'cijferend aftrekken van links naar rechts' op een ongekunstelde manier met elkaar verbonden kunnen worden.

nul, rekenkundig gemiddelde en zakrekenmachine

Het verschijnsel temperatuur werd bekeken binnen de context van de Elfstedentochten van 1985 en 1986. Aanvankelijk kreeg het verloop van de temperatuur gedurende een etmaal veel aandacht; eerst kwalitatief, met een dagje uit het leven van Jenny, en later kwantitatief (bloembakken op het balkon).

Vanuit ingekleurde thermometers werden grafieken opgebouwd. Grafieken speelden in de activiteiten trouwens een belangrijke rol. Na het nodige voorwerk, waarin ook de maximum-minimum thermometer aan de orde kwam, volgde de grafiek voor de maand februari 1985 (fig. 9).



de temperatuur in Eelde in de maand februari 1985

figuur 9

Achter elk balkje het dagverloop van de temperatuur denken, mèt grafiek, bleek voor sommigen nogal lastig.

vorst- en dooidagen

Natuurlijk ging het bij het aflezen ook over vorst- en dooidagen. Wat zouden de kinderen daaronder verstaan?

De uitkomst was verrassend. De kinderen definieerden namelijk door:

- aanwijzen (1) (ik noem de 19^e een ...);
- het noemen van kwaliteiten of verschijnselen (8) (warmer worden, kouder worden, ijs smelten en dergelijke);

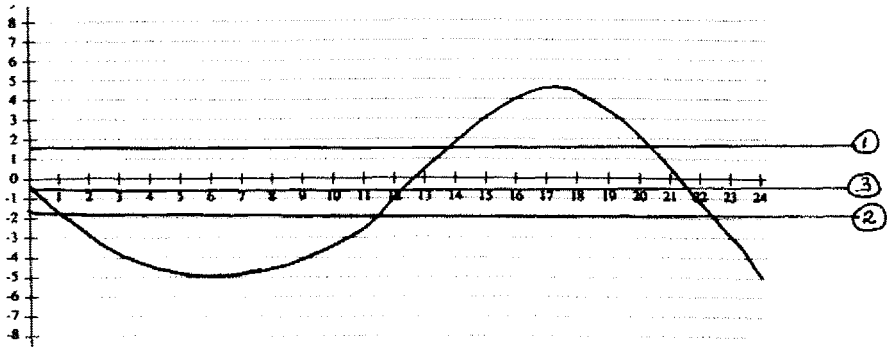
- noemen van speciale gevallen (6) (dooddag +2, vriesdag -2);
- nul als grens kiezen (4);
- gemiddelde temperatuur als criterium nemen (3).

kanttekening

Het definiëren kan onderdeel zijn van het voortgaande mathematiseren. Naar blijkt zijn er duidelijke niveaus van definiëren te onderscheiden, niveaus die iets te maken hebben met de gebezigde taal. Ook in het definiëren kan dus niveauverhoging plaatsvinden. Definiëren behoeft dus niet steeds tot het eind van het mathematiseringsproces te worden uitgesteld. Omdat enkele kinderen zelf bij herhaling het gemiddelde noemen als criterium voor het beslissen over strengere of minder strenge (vorst)-dagen, werd daaraan nogal wat aandacht besteed.

gemiddelde

Wat zou het gevolg zijn als alle gemeten temperaturen eerlijk verdeeld zouden zijn over de hele dag? Dat was de terminologie waarmee over gemiddelde gesproken werd. Eerst kwalitatief! Waar zou de eerlijk-verdeel grafiek ongeveer komen (fig. 10)?



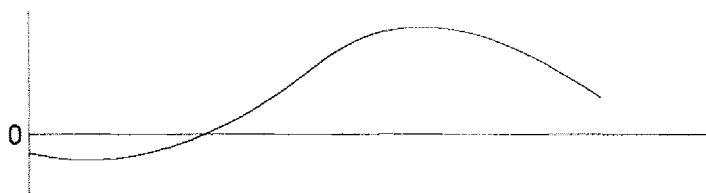
figuur 10

Esther tekent eerst ①. 'Te hoog', vindt zij zelf en velen met haar. Daarvoor zijn er teveel metingen onder nul.

Dan tekent zij ②. 'Te laag', beslist zij zelf met de groep. Teveel doorgeschoten in het vorstgebied.

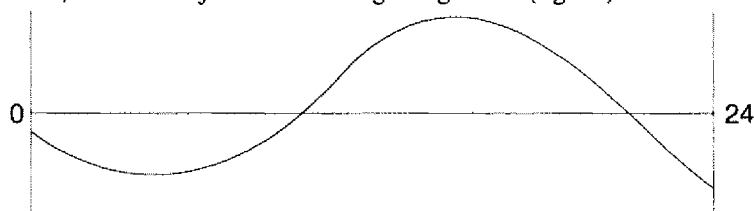
Dan tekent zij ③ en zegt. 'Je kunt de grafiek strak trekken als een touwtje', en maakt er het gebaar bij. Iedereen stemt in, alleen de onderzoeker tekent op het bord (fig. 11) en vraagt: Klopt Esthers methode met de touwtjesmethode nu nog?

Neen, vinden allen, hij komt nu hoger: die eerlijk-verdeel of gemiddelde grafiek. Hij moet boven nul.



figuur 11

Roel heeft dan een lumineus idee: dan trek je hem toch gewoon strak vanaf de andere kant! In een volgende les wordt nog eens op deze kwestie terug gekomen. Monique verwoordt dan, wat al die tijd al in de lucht gehangen had (fig. 12).



figuur 12

'Je moet zorgen', zegt Monique, 'dat het stukje boven de lijn even groot is als die twee stukjes onder de lijn'. Vanuit volwassen wiskundig standpunt kan dit intuïtief integreren genoemd worden. Monique behoort tot de zwakste leerlingen van de groep. Natuurlijk is er tijdens deze lessen ook numeriek met gemiddelden gewerkt, waarbij de zakrekenmachine zijn diensten verleende.

Geval:

uur	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
temp	-1.5	-3.5	-5	-6	-5	-4	-2	+1	+3	+2	-1	-3	-5.5

Richard K. paste, wat ik noem, de *groepeermethode* (gm) toe, namelijk $1 + 3 + 2 = 6$ en dat valt weg tegen -6 van 6 uur. Hij kwam in eerste instantie wel in de knoei met het bepalen van het gemiddelde, vond hij. Er waren namelijk nog maar negen getallen over, dus kon hij delen door 9 en zo kreeg hij wat anders dan zijn kornuiten in de groep. Interessante vraag (voor hem en alle groepeerders): Je deed $1 + 3 + 2 - 6 = 0$, niet waar? Is '0' nu een temperatuur of een getal? (Iets voor de revisie.)

Anderen *sorteerden* (sm) eerst negatief en positief bij elkaar, voordat zij de uitkomst van de optelling bepaalden. Er waren ook leerlingen die zowel groepeerden als sorteerden (gm + sm). De resultaten waren als volgt:

gm	sm	gm + sm
7	5	4

Voorbeelden van leerlingewerk (fig. 13):

1

$$-0,5 + -3 + -4,5 + -3,5 + -1 + 2 + 4 + 4 + 2 + -1 + -5 = -16 \text{ oftewel } 16 \times 2 = 32$$

zoeken

alle de karte bij elkaar en dan alle boven

$$0 = 12 \text{ bij elkaar} = \text{meer } -16$$

je kunt ze bij elkaar $(-1 - 5 = -6 \quad -1 - 5 = -6 \text{ en})$

$$2 + 4 + 4 + 2 = 12 \text{ en } (4,5 + 4,5 = 9) + -0,5 + -3 + 3,5$$

$$+ -5 = -6 + -1 - 5 = -6 + -6 + -6 + 9 + 12 + 0,5 - 3 + 3,5$$

(Ik heb maar een uitgetoetst)

2

$$0,5 \times 2 (=1,5) + -3 (= -1,5) + 4,5 \times 2 (=9) + -3,5 (= -1,5) + 2 \times 1 (=2) + \text{overig}$$

$$1 + 5$$

$$-5$$

samen 0 dus al weg

2 alle minnen: (-)

bij elkaar en dan alle plusjes.

en dan intikken op het apparaat

3 maar je kan ook methodes maken:

Eerst al zoveel mogelijk wegwerk

ken en dan alle plusjes bij elkaar

en alle minnen bij elkaar

$$5 + -5 = 0$$

en dan : 13

3

$$-0.5 + 3 + 4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 4 + 2 + 1 + 5 = -16 : 13 = -1,23$$

fig 2

$$\begin{array}{r} (-0.5/3.5) + (-3/1/5) + (4.5/4.5/5/1) + (2/4/4/2) = 16 : 13 = 1.2307692 \\ -4 \quad + \quad 9 \quad + \quad 15 \quad + \quad 12 \quad = -16 : 13 = 1.2307692 \end{array}$$

uit mijn hoofd

fig 2 = 1.23
Rekenmachine

4

$$0.5 | -3 | -4.5 | -5 | -4.5 | -3.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | -1 | -5 | \quad -1.23$$

Port manier

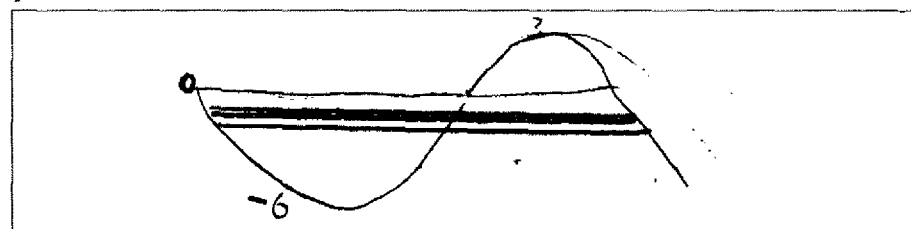
$$(-1+5) = 6 + (2+4+4+2) = 12 + (-0.5+3) = 3.5 (4.5+4.5) = 9 (3.5+5) = 8.5$$

je telt eerst alle min getallen en dan alle ^{plus} getallen
je kan ook ^{makkelijke} twee getallen bij elkaar optellen en dan ^{in je hoofd} alle ~~gro~~ grootte getallen bij elkaar optellen.
Of je f kan ze combineren

figuur 13

Hier volgen ook nog drie voorbeelden uit de tweede sessie (fig. 14):

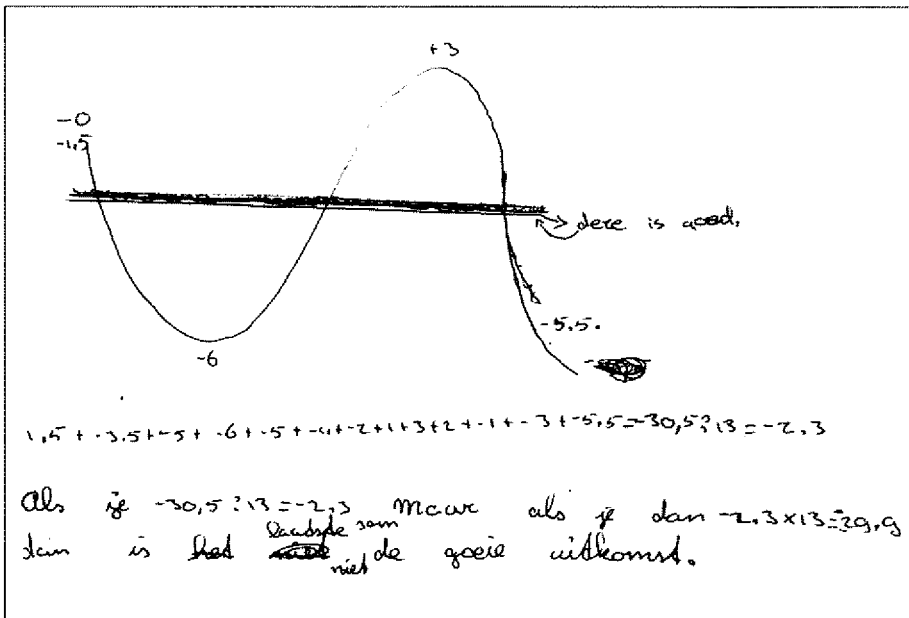
1



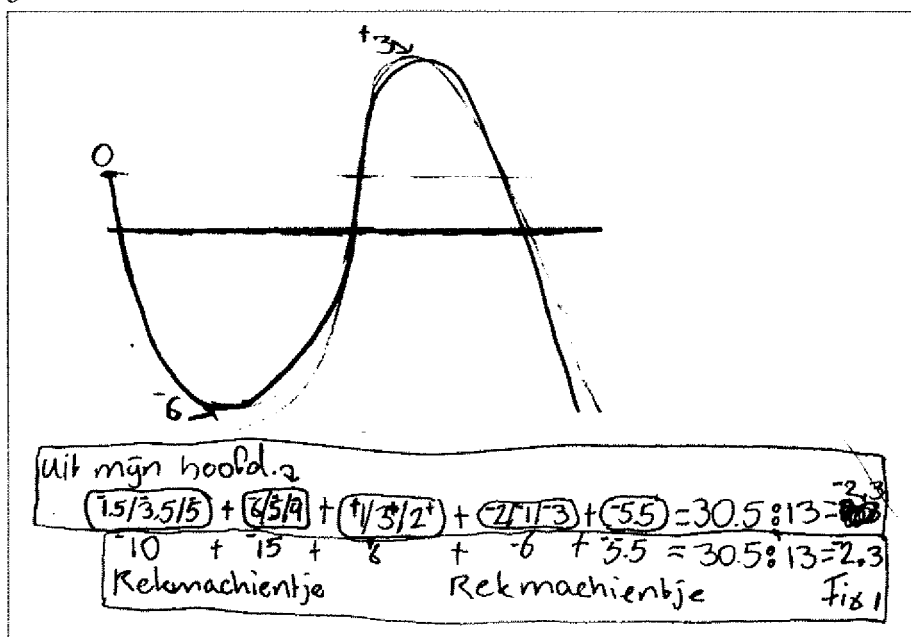
Bij deze grafiek vermeldde Richard:

je hebt drie getallen is samen 6 en in het begin is er een -6 dus dat kan je weg laten vallen en de rest is er onder -1.5 -3.5 -5 ~~5~~ -5 -4 -2 -1 -3 -5.5 dus het moet heel wat onder nul zijn dat tel je op en deelt het door 13 (de -6 en +1 +3 +2 dat heb ik laten vallen dus die laatste weg) en dat is 2.341538

2



3



figuur 14

Twee leerlingen lieten in eerste instantie alle minnen weg, maar betrokken die wel bij de uitkomst. Dan hoefden ze hem maar één keer in te tikken.

Over voorgaand werk is heel veel te zeggen. Ik beperk me echter tot het volgende commentaar.

- Er wordt heel *intensief* geoefend in het rekenen met positieve en negatieve temperaturen, dat wil zeggen: het is toepasselijk rekenen in dienst van een hoger doel. Bij *extensief* oefenen gaat het uitsluitend om het oefenen zelf (zie Freudenthal, 1991).
- Het inzetten van de zakrekenmachine (de Galaxy 9X van Texas Instruments) heeft grote invloed op de instelling van de leerlingen. Zij organiseren het rekenen duidelijk vooraf, maken onderscheid tussen hoofdwerk en machinewerk en passen op adequate wijze toepasselijke functies van de zakrekenmachine toe; met name de FIX-knop voor het afronden van de gemiddelden op een door de leerlingen zelf te kiezen aantal decimalen achter de komma, blijkt populair te zijn.
- Door het intensieve oefenen vindt voortdurend de overschrijding plaats van de grens tussen concrete, benoemde getallen, de temperaturen en niet-benoemde getallen sec. Met name voor de '0' blijkt daarin een kernrol te zijn weggelegd.
- Het schommelen rond een gemiddelde blijkt binnen deze context heel functioneel, temeer daar hiermee aangesloten wordt bij suggesties die een deel van de kinderen spontaan deed.

Voor de revisie van de leergang geldt dat meer aandacht geschonken dient te worden aan het verband tussen een daggrafiek en het blokje waartoe hij samengedrukt wordt in een maandgrafiek.

5 cesuur en besluit

Midden in het werk breek ik af. Verder ben ik met dit ontwikkelingsonderzoek nog niet gekomen. De leergang in wording is ook nog niet verder, althans wanneer het op uitgeprobeerde ideeën aankomt en de bijstelling daarvan op grond van door de kinderen ingebrachte ideeën. Speculeren over verwachtingen ten aanzien van een eventueel vervolg, lijkt weinig zinvol. Terugblikken om nog eens te kijken wat er gebeurd is, zowel inhoudelijk als theoretisch, ligt meer voor de hand.

Wat dan opvalt is, dat al veel theorievorming plaatsvond, nog voordat met het eigenlijke ontwikkelingsonderzoek werd begonnen. Voor mij is dit aanleiding om elders nader op de kwestie theorievorming door ontwikkelingsonderzoek in te gaan, alsmede op de vorm waarin zich het onderzoek tot nu toe voltrok. Inhoudelijk gezien, heeft het onderzoek nogal wat nieuwe gezichtspunten opgeleverd voor de didactiek van de negatieve getallen.

Als voorbeelden noem ik:

- het impliciete opereren in het ‘tussengebied’, met
- de speciale rol voor ‘nul’ en ‘rekenkundig gemiddelde’, en
- de verrijking van het leerproces door het inzetten van de zakrekenmachine, en tenslotte
- de verstrengeling van het concrete en het formele spoor in de leergang.

Het allerbelangrijkste is echter dat de theorievorming van de kinderen over negatieve getallen van beslissende invloed is op de uiteindelijke samenstelling van hun ‘researchprogramma’: *een prototypische leergang*.

literatuur

- Broekman, H. (1989). Sluiproutes of alternatieve wegen. *Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen* 7 (1), 67-73.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel, hoofdstuk 8: The Practicality of Intuitive Meanings. Analysis of an example: The Negative Numbers, 97-103.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. China lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2 (3), 303-346.
- Goffree, F., J. Vedder en K. Buys (1988). Sluiproutes door realistische leergangen - ongewenste verkortingen. *Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen* 6 (1), 5-23.

- Goffree, F. en K. Buys (1989). *Tegengesteld*. Wiskundendidactiek op de grens van basis- en voortgezet onderwijs, toegespitst op negatieve getallen.
- Kemme, S. (1990). *Uitleggen van wiskunde*. Utrecht: Freudenthal instituut.
- Streefland, L. (1990). Boekbespreking Tegengesteld. *Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen* 8 (1), 59-70.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Streefland, L. (1992). Het ontwerpen van een wiskundeleergang. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* 10 (4), 3-15.
- Roodhardt, A. en L. Streefland (1993). *Dry and Wet Numbers*. Freudenthal instituut, interne publicatie.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Terugblik op de studiedag

methodisch verbreden en theoretisch verdiepen

Ed Elbers

Vakgroep algemene sociale wetenschappen, Universiteit Utrecht

Bij wijze van terugblik zal ik reageren op verschillende presentaties van vandaag. Vooraf wil ik zeggen dat ik enorm genoten heb van de vele staaltjes van ontwikkelingswerk die hier de revue gepasseerd zijn. Daarom wil ik nu meteen duidelijk zeggen dat ik de werkwijze die in het ontwikkelwerk wordt toegepast – of nu gesproken wordt met Streefland van ‘progressieve theoretisering’ of met Gravemeijer van ‘theoriegeleide bricolage’ (vergelijk: De Jong en Streefland, 1992) – overtuigend vind. De diverse lezingen op deze studiedag hebben prachtige voorbeelden en successen van die werkwijze laten zien. Als ik enige kanttekeningen maak – dat is immers de bedoeling van een ‘dagsluiting’ – doe ik dat met veel waardering voor het hier getoonde werk.

1 methodologisch verbreden

In het licht van de successen die met het ontwikkelingswerk worden geboekt, ben ik er verbaasd over dat kennelijk toch de behoefte wordt gevoeld om het onderzoek op een abstract, wetenschapsfilosofisch niveau te legitimeren, en af te grenzen van ander onderzoek. Verschillende onderzoekers menen een paradigmastrijd waar te nemen, en streven er daarom naar de eigen zaak met grondslagendiscussies overtuigend te verdedigen. Dat vind ik veel te zwaar aangezet, en ik vraag me af of een dergelijke fundering nodig is.

Kuhn (1970), de historicus van de wetenschap, noemde grondslagendiscussies ooit een symptoom van een wetenschappelijke crisis. Maar als ik de presentaties op deze dag tegen het licht houd, neem ik helemaal geen crisis waar. Integendeel. Waarom dan toch deze poging om een wetenschapsfilosofische fundering te geven aan het ontwikkelingswerk? Natuurlijk is er op zichzelf geen bezwaar tegen wetenschapsfilosofische reflectie, maar ik denk dat het verkeerd is te verwachten dat critici en sceptici door zulke grondslagendiscussies overtuigd zullen worden. Een succesvol programma kan de confrontatie met concurrerende programma's met zelfvertrouwen tegemoet zien en moet haar gelijk niet baseren op een filosofische stellingname, maar op inhoudelijke successen, in dit geval op de ontwikkeling van nieuwe ideeën en methoden in het rekenonderwijs.

In plaats van die globale verantwoording en legitimering, zou er meer methodologisch werk moeten geschieden dat gericht is op concrete vormen van onderzoek, op concrete methoden voor bepaalde fasen in het ontwikkelwerk. In de verschillende fasen waaruit het ontwikkelwerk bestaat zijn telkens andere vragen aan de orde; voor het zoeken naar antwoorden op die vragen zijn telkens eigen methoden van onderzoek nodig. Ik zou ervoor willen pleiten dat de discussies in de toekomst veel meer op die methoden worden geconcentreerd, met andere woorden dat er meer methodische reflectie op die specifieke methoden wordt uitgevoerd.

Een voorbeeld is de methode van de case study. Adri Treffers maakte gebruik van een case study waarin werd getoond dat de fouten van Els voor een doorbraak zorgden in het ontwikkelingswerk. Er zijn trouwens op deze dag wel meer voorbeelden te horen geweest, waar één enkel geval heel verhelderend bleek te zijn. Case studies spelen zo te zien een belangrijke rol in het ontwikkelingswerk. Maar er is eigenlijk weinig idee welke methodologie daarbij aan de orde is, hoe je op een methodisch verantwoorde wijze een case study kunt uitvoeren, welke fouten je daarbij moet vermijden, en hoe je overtuigend kunt zijn met maar één enkel voorbeeld. Er is door verschillende sprekers gezegd: het is toch niet altijd nodig om onderzoek te doen bij grote aantallen kinderen om een standpunt overtuigend naar voren te kunnen brengen. Ik ben het daarmee eens: het grootschalig onderzoek is niet de enig aanvaardbare methode in de wetenschap. Ook de case study is een gebruikelijke vorm van wetenschappelijk onderzoek. Een methodische reflectie op de speciale mogelijkheden en problemen van die methode ligt daarom voor de hand.

Een ander voorbeeld is de inhoudsanalyse. Marja van den Heuvel liet kinderen rekenopgaven maken, en verzamelde de kladblaadjes die de kinderen bij het oplossen van de sommen hadden beschreven. Vervolgens analyseerde ze die kladnotities. Zo'n analyse gebeurt tamelijk intuïtief. Ook hier dienen zich daarom methodische vragen aan. Hoe kan een inhoudsanalyse methodisch adequaat uitgevoerd worden? Het zou een vooruitgang zijn als er methodologische regels zouden kunnen worden geformuleerd over de manier waarop je zo'n analyse van schriftelijk materiaal moet aanpakken, en met name ook hoe je ervoor kunt zorgen niet in allerlei valkuilen terecht te komen.

Dit is een pleidooi om erover na te denken, in welke omstandigheden bepaalde methodische technieken op hun plaats zijn, en voor welke vragen welke methodische technieken geschikt zijn. Ik denk dat dat meer oplevert dan een globale wetenschapsfilosofische verdieping. Ik beweer ook dat het heel goed mogelijk is daarbij aan te sluiten bij recente ontwikkelingen in de sociale wetenschappen, waar echt niet alleen grootschalig onderzoek wordt toegepast. De methode van de case study bijvoorbeeld wordt op ruime schaal gebruikt. Ik denk aan het onderzoek op het gebied van de taalontwikkeling. Dit onderzoek maakt vanaf een bepaald moment, zo'n twintig, vijfentwintig jaar geleden, intensief gebruik van data afkomstig uit case studies. Enkele kinderen

worden gedurende een lange periode zeer uitvoerig geobserveerd. Hun uitingen worden, soms vanaf de eerste maanden, op een of andere manier geregistreerd. Die data vormen geweldige corpussen die ook internationaal worden uitgewisseld, en met behulp waarvan onderzoek naar de taalontwikkeling van kinderen plaatsvindt. Veel gedetailleerde observaties bij één kind leveren hier geschikter materiaal op dan minder intensieve observaties bij veel kinderen. Ook in het ontwikkelingsonderzoek van het rekenonderwijs is het een prachtige mogelijkheid om longitudinaal onderzoek te doen waarbij enkele kinderen intensief worden gevolgd.

Ook in de leerpsychologie worden case studies steeds belangrijker. Ik denk aan het werk van Barbara Rogoff (1990) en haar groep, waarin een uitvoerige analyse van enkele kinderen belangrijker wordt gevonden dan grootschalig onderzoek.

Toch wil ik nog wel iets zeggen over grootschalig onderzoek waarbij veel kinderen betrokken zijn. In haar presentatie bracht Marja van den Heuvel haar aarzeling over onderzoek met grote groepen kinderen duidelijk naar voren. Zo betoogde zij dat sommige resultaten behaald bij een kleine groep kinderen zoveel inzicht bieden dat het niet te verwachten is dat verder onderzoek bij meer kinderen tot andere conclusies zal leiden.

Bij het bespreken van de vraag of grootschalig onderzoek nodig is, moet in aanmerking worden genomen dat je op verschillende momenten in het onderzoekswerk te maken hebt met verschillende wetenschappelijke gemeenschappen, verschillende fora, die allemaal op een eigen manier overtuigd moeten worden. De groep onderzoekers op het Freudenthal instituut is misschien vrij snel overtuigd van het belang van een bepaald inzicht of een bepaalde observatie. Dat wil echter nog niet zeggen dat NWO of een bepaalde werkgemeenschap bij NWO op dezelfde gemakkelijke manier kan worden overtuigd. Iedere onderzoeker heeft te maken met verschillende fora; de vragen die worden gesteld en de overtuigingskracht die nagestreefd wordt, moeten aangepast worden aan het forum waaraan de onderzoeksresultaten worden gepresenteerd.

Bovendien is ook hier de vraag van belang in welke fase het onderzoek verkeert. Volgens de wetenschapsfilosoof Lakatos (1970) is het normaal dat onderzoekers in de eerste fasen van theorie-ontwikkeling vooral naar bevestiging van hun wetenschappelijke vermoedens zoeken. Ze bekommeren zich in eerste instantie niet erg om de kritiek die ze van anderen krijgen en de schijnbare ongerijmdheden in hun theoretische standpunten. Maar er volgt onvermijdelijk een tweede fase waarin de nieuwe theorie wordt blootgesteld aan een vergelijking met andere theorieën. In die fase is het onvoldoende de theorie te ondersteunen met positieve voorbeelden: dan zal actief geprobeerd moeten worden kritiek te weerleggen en aan tegenstanders te laten zien dat de eigen theorie slaagt waar andere, concurrerende theorieën falen.

Ik zie het bricoleren als een onderdeel in de onderzoeksfase die leidt tot theorievorming. De argumenten en voorbeelden die daarbij naar voren worden gebracht zijn voor de groep van insiders snel overtuigend. Maar er volgt daarna onvermijdelijk het moment waarop de theorie ook voor een grotere groep buitenstaanders overtuigend gepresenteerd moet worden. In dat geval is verder onderzoek noodzakelijk en dan zullen case study-onderzoek en inhoudsanalyse soms niet voldoende zijn. Het antwoord op de vraag: 'Moet je verder onderzoeken als je zelf al overtuigd bent?' luidt daarom bevestigend. Op de eerste plaats weet je nooit zeker dat je gelijk hebt. Bovendien is dat onderzoek een manier om de deur open te zetten voor buitenstaanders die nog overtuigd moeten worden.

In dat verband wil ik iets aan de orde stellen waarover ik vandaag niets gehoord heb. Wat gebeurt er nadat de ontwikkeling van een nieuwe methode is afgesloten? Bij de ontwikkeling van een nieuwe leergang is natuurlijk een proefgroep betrokken, er zijn proefklassen, maar op zeker moment wordt de beslissing genomen dat zo'n leergang op heel veel scholen wordt gebruikt. Wat gebeurt er daar? Blijven die sterke kwaliteiten van zo'n leergang behouden in al die klassen waar het rekenen en de wiskunde tot de routinematige activiteiten van elke dag behoren, of is het zo dat de overgang van experimenteerfase naar routine ook tegelijkertijd een terugval met zich meebrengt in de activiteiten van kinderen. In de arbeidspsychologie kent men iets dergelijks: het 'Hawthorne-effect', naar de fabriek waarin de produktiviteit toenam in een afdeling waarin wetenschappelijk onderzoek werd gedaan. De arbeiders in die afdeling werkten een stuk harder louter vanwege het feit dat zij volop bij de onderzoekers in de aandacht stonden. Dergelijke effecten zijn in schoolklassen net zo goed te verwachten.

Er is in de klas bovendien meer aan de hand dan leren en onderwijzen. Er is daar een heel complex sociaal-psychologisch gebeuren, dat soms interfereert met de mooie doelen en uitgekiende werkwijzen van een leermethode. Desforges en Cockburn (1987) wijzen het sociale gebeuren in de klas aan als het centrale probleem in de rekenles. Zij wijzen op de moeilijkheden die de leerkracht heeft om het gebeuren in de klas te sturen en in de hand te houden. Het is niet zo eenvoudig om kinderen een actieve rol te laten spelen in de les zonder dat de orde meteen verdwenen is. Zo is er onderzoek waaruit blijkt dat kinderen in de klas allerlei strategieën hanteren om de leerkracht zover te krijgen als ze willen. Een voorbeeld is dat kinderen soms met heel gerichte strategieën reageren op open vragen. Ze geven bewust geen antwoord, zodat de leerkracht aanvullende informatie geeft. Tenslotte wordt het dan wel duidelijk waar de leerkracht op uit is. Zulke manieren om te hengelen naar het juiste antwoord zijn, zeker in een realistische werkwijze, ongewenst. Het zou interessant zijn te weten of zulke strategieën ook nog voorkomen in klassen die gewend zijn te werken met behulp van realistische methoden.

In de klas waarover Streefland vertelde, gebeurt dat waarschijnlijk niet. Maar misschien in de routine van de alledaagse rekenles op een doorsneeschool wel. Hoe verloopt de implementatie van nieuwe methoden in het alledaagse schoolleven van de kinderen in Nederland? Daar zou ik graag iets meer over willen horen. Daarvoor is grootschalig onderzoek nodig en kan niet volstaan worden met studies van enkele gevallen.

2 theoretisch verdiepen

Ik wil de stelling verdedigen dat ontwikkelingsonderzoek, veel meer dan tot nu toe het geval is, moet worden ingebed in theorievorming op andere gebieden van de sociale wetenschappen, zoals de ontwikkelingspsychologie, de onderwijspsychologie, de leerpsychologie, de sociale psychologie. Het werk dat tot stand is gebracht en dat we vandaag hebben gezien, zou een stimulans kunnen betekenen voor die andere gebieden in de studie van lerende kinderen. Ik beweer heel nadrukkelijk niet dat de onderzoekers van de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs te rade moeten gaan bij andere sociale wetenschappen, bijvoorbeeld de ontwikkelingspsychologie, en daar dingen vandaan zouden moeten halen om hun eigen werk te ondersteunen. Ik wil niet uitsluiten dat dat soms kan. Maar ik wil ook de omgekeerde weg bepleiten. Ontwikkelingspsychologen zouden kunnen profiteren van het werk dat hier gebeurt om daarmee hun eigen theorieën te verbeteren. Eigenlijk zou er in samenspraak aan theorieontwikkeling moeten worden gedaan. Als cognitief ontwikkelingspsycholoog ben ik jaloers op het materiaal dat Streefland vandaag presenteerde. Daar valt heel veel mee te doen. Ik denk dat die andere, verwante wetenschappen, zouden kunnen bijdragen aan een verdere ondersteuning en onderbouwing van het ontwikkelingswerk. Ik wil daar een aantal voorbeelden van geven.

In de presentaties die we vandaag gehoord hebben, zijn dikwijls impliciete aannamen te vinden, aannamen over kinderen, over de ontwikkeling van kinderen, over denkprocessen, over sociaal-psychologische processen, over interactieprocessen. Het zijn vaak aannamen die min of meer impliciet zijn, die soms niet echt goed uitgewerkt zijn. Het zijn aanzetten voor theorieën over hoe kinderen zijn, hoe kinderen zich ontwikkelen, hoe kinderen interacteren met anderen, hoe kinderen denken. Het zijn aanzetten, vooronderstellingen, die een belangrijke rol spelen in het ontwikkelingsonderzoek, maar die eigenlijk een theoretische verdieping missen. Ze blijven daardoor toch vaak enigszins in de lucht hangen.

Ik geef een voorbeeld uit de presentatie van Koeno Gravemeijer. Hij zei: informele kennis en informele strategieën moeten als startpunt worden genomen, zodat kinderen van daaruit formele kennis kunnen ontwikkelen. In verband daarmee sprak hij over het 're-invention' principe. Zo'n uitspraak vraagt om serieuze onderbouwing vanuit de

cognitieve ontwikkelingspsychologie en vanuit de leerpsychologie. Informele kennis, informele strategieën van kinderen, wat zijn dat? Hoe moet je ze die voorstellen? Van wat voor soort abstractieniveau zijn ze? Hoe werkt re-invention? Je kunt wel vanuit een constructivistische visie beweren dat er zoiets moet plaatsvinden, en ik ben het daar ook wel mee eens, maar toch zou ik concreter willen weten, hoe dat dan geschiedt. Bovendien moet je de vraag stellen, welke informele kennis, welke informele strategieën zijn hier van belang? Niet elke kennis, niet elke strategie, kinderen doen ook domme dingen. We zullen ons beeld van de creatieve produkties en van de spontane ideeën van kinderen moeten uitbreiden.

Een ander voorbeeld komt uit het verhaal van Adri Treffers. De fout van Els speelde in zijn betoog een belangrijke rol. Maar wil je van zo'n observatie gebruik maken dan moet daaraan een theorie over fouten en over fouten maken ten grondslag liggen. Wanneer maken kinderen fouten? Is dat slecht, is dat goed? Wanneer is een fout een produktieve fout, wanneer improductief? Hoe onderscheid je die soorten fouten? Ook hier is een impliciete vraag om theorieontwikkeling, waarop de onderwijspsychologie of de leerpsychologie op dit moment weinig te antwoorden hebben, maar die in samenspraak met het ontwikkelingswerk zou kunnen geschieden.

Nog een voorbeeld uit de presentatie van Treffers. We proberen de kloof te overbruggen, zei hij, tussen de kinderlijke werkwijzen en de volwassen procedures. Ook daar zijn vooronderstellingen aanwezig. Wat zijn precies kinderlijke werkwijzen? Zijn ze kwalitatief verschillend of zijn ze kwantitatief verschillend van die van volwassenen? Hoe zit het met de volwassen procedures? Hoe breng je ze bij elkaar? Hoe overbrug je die kloof? Moeten kinderen dat zelf doen, hoe kunnen wij, volwassenen, hen daarbij begeleiden? Enzovoort.

Tijdens zijn presentatie presenteerde Martin van Reeuwijk verschillende voorbeelden van opdrachten voor kinderen. Bij één daarvan vertelde hij, dat kinderen dit leuk vinden om te doen. Daar had ik meteen de associatie: motivatietheorieën. Sommige dingen vinden kinderen niet leuk, andere vinden ze wel leuk om te doen. Als we ze willen motiveren, moeten we er rekening mee houden dat motivatie niet iets is dat alleen maar van de kinderen moet komen. Kennelijk is er een interactie met het materiaal, met de taken die hun voorgelegd worden. Dit zou kunnen leiden tot de ontwikkeling van motivatietheorieën die zo'n interactie zouden willen onderzoeken. Het is evident dat de didactische ontwikkelaars daarvan zouden kunnen profiteren.

Ik heb al even aandacht besteed aan de vraag die zich naar aanleiding van de presentatie van Marja van den Heuvel stelde: hoe kunnen de kladblaadjes van de kinderen bij het beantwoorden van een opgave het best worden geanalyseerd? Je moet daarbij, zo zei ze, het standpunt van de kinderen innemen. Mijn vraag is dan, hoe moeten we ons dat standpunt voorstellen? Hoe kunnen we in de huid van kinderen kruipen? Dat vraagt om een verdere ontwikkelingspsychologische onderbouwing.

In haar verhaal gaf ze ook aan dat contextopgaven het veel beter doen dan kale sommen. Ook daar zou je een leerpsychologische en een onderwijspsychologische onderbouwing kunnen geven. Hier ligt een centraal probleem in de cognitieve ontwikkelingspsychologie. Ondanks het vele werk dat over dit probleem al verricht is (Donaldson, 1978; Hughes, 1986), zijn er nog veel vragen over. Het is bijvoorbeeld helemaal niet zo dat contextopgaven het altijd beter doen: de vorm waarin een som wordt gegeven kan het beantwoorden ook moeilijker maken (zie Wood, 1988).

Tenslotte is er het verhaal van Leen Streefland over het thema van het kind als onderzoeker. Zijn beschrijving leverde een fascinerende andere kijk op kinderen op. Het is prachtig zoals in die klas kinderen als gelijken benaderd worden, als mede-onderzoekers en om op die manier aan de slag te gaan. Maar: hoe ver kun je daarmee gaan? En in hoeverre zijn de resultaten toch op de een of andere manier voorgetekend door het feit dat kinderen de volwassenen toch niet helemaal als onderzoeker beschouwen, maar van hen uiteindelijk toch een onderwijzende rol verwachten.

Het gaat hier om aannamen en vooronderstellingen, om meer of minder impliciete theorieën, die veelal nog niet voldoende theoretisch zijn uitgewerkt en onderbouwd en waarvoor verdere theorievorming nodig is. De onderwijskunde, de leerpsychologie, de cognitieve psychologie, de ontwikkelingspsychologie en de sociale psychologie zouden daaraan een bijdrage kunnen leveren. Niet als éénrichtingsverkeer, maar als tweerichtingsverkeer, in de zin van gezamenlijk werk en gezamenlijke theorievorming.

3 conclusie

Mijn conclusie is tweeledig. Bij het ontwikkelingswerk moet bewuster gebruik worden gemaakt van de vele methodische instrumenten die de sociale wetenschap te bieden heeft. Grootschalig onderzoek kan soms nodig zijn om de waarde van een ontwikkelde methode met voldoende overtuigingskracht aan te tonen. Met andere woorden: in methodisch opzicht moet er een verbreding nagestreefd worden.

Aan de andere kant moet er een theoretische verdieping plaatsvinden, in die zin dat er meer aansluiting wordt gezocht bij de theorievorming over lerende kinderen. Dat kan winst opleveren voor het ontwikkelwerk, en het kan tegelijkertijd ook een stimulans zijn voor de ontwikkelingspsychologische en onderwijskundige theorievorming.

Methodologische verbreding en theoretische verdieping – die leuzen zouden de ontwikkelaars van het rekenonderwijs in hun vaandels moeten schrijven om nog verder te komen in het werk waarover zij ons vandaag op deze inspirerende dag hebben verteld.

literatuur

- Desforges, C. en A. Cockburn (1987). *Understanding the mathematics teacher*. Londen: The Falmer Press.
- Donaldson, M. (1978). *Children's Minds*. London: Fontana.
- Hughes, M. (1986). *Children and number. Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Blackwell.
- Jong, R.A. de en L. Streefland (1992). Commentaar bij een discussie. *Tijdschrift voor nascho-ling en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 10 (3), 41-43.
- Kuhn, T. (1970). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Lakatos, I. (1970). Falsification and the methodology of scientific research programmes. In: I. Lakatos en A. Musgrave (eds.), *Criticism and the growth of knowledge*. London: Cambridge University Press, 91-196.
- Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking. Cognitive development in social context*. New York: Oxford University Press.
- Wood, D. (1988). *How children think and learn*. Oxford: Blackwell.

Ontwikkelingsonderzoek: perspectief

Rob de Jong
Vakgroep onderwijskunde, Universiteit Utrecht

Het lijkt niet goed mogelijk een perspectief te schetsen, voorspellende uitspraken te doen over de toekomst van het ontwikkelingsonderzoek. Dát er een toekomst is, is evident. Maar hoe deze eruitziet? Ik beperk me tot een pleidooi voor een karwei dat mijns inziens verricht moet worden.

- 1 In de loop van de afgelopen jaren is ontwikkelingsonderzoek succesvol gebleken. Het heeft zowel internationaal erkende leergangen als belangwekkende theorieën opgeleverd. Ik verwijs naar de publikaties in de Reidelserie en naar de *Proeve* – deze zou overigens ook in het Engels vertaald moeten worden. Kennelijk is er sprake van een procédé dat de moeite waard is. De term ‘procédé’ kan aanleiding geven tot misverstanden. Het is niet de bedoeling met dit woord aan te geven als zou er een vaststaande en gestolde aanpak zijn. Integendeel. Natuurlijk biedt ontwikkelingsonderzoek op zichzelf nog geen enkele kwaliteitsgarantie: er zijn goede en minder goede onderzoeken. Voorbeelden hiervan zijn genoegzaam bekend. Maar ... het procédé behoeft, gelet op zijn successen, niet ter discussie te worden gesteld.
- 2 Waarom praten we er dan de hele dag over? Er is toch kennelijk iets aan de hand. Ondanks de vele publikaties en de prachtige voorbeelden blijft er toch te veel *implicit* waardoor er in de uiteenzettingen met anderen (bijvoorbeeld collega's uit andere instituten) verwarringen ontstaan. En dat is jammer en onnodig. Enerzijds is ontwikkelingsonderzoek een werkwijze met heel duidelijke kenmerken, bijvoorbeeld:
 - de cruciale plaats van het gedachte-experiment;
 - de locatie van het onderzoek: de klas;
 - de omvang van het onderzoek: kleine aantallen leerlingen;
 - de aandacht voor het bijzondere geval (denk aan ‘Els’ in het betoog van Trefers);
 - de zorgvuldige bijstellingen in korte cycli (denk aan het ijsbeer-item in de test van Van den Heuvel-Panhuizen).

Anderzijds zijn er vele acties die niet expliciet gemaakt zijn, bijvoorbeeld:

- In het verhaal van Van Reeuwijk komt de passage voor: ‘een heleboel voorbeelden, ideeën en contexten, samen met de jarenlange ervaring in het ontwerpen van lesmateriaal van Jan de Lange en Heleen Verhage werden gebruikt om

een eerste versie te maken'. Voor ons is dan de vraag interessant: wat doen De Lange en Verhage nu precies met dat materiaal, waaruit bestaat hun vakmanschap? Daarover horen we te weinig.

- Gravemeijer gebruikt herhaaldelijk de term 'bricolage'. Maar: hoe leer je – als beginnend onderzoeker – bricoleren? En waar?
 - Hoe herken je de potentiële mogelijkheden in een protocol? Treffers zag het vrijwel meteen in het leerlingenwerk van Els.
 - Wat heb je nodig om een gedachte-experiment te doen? Zowel Gravemeijer als Treffers wijzen op de noodzaak.
- 3 De combinatie van uiteengelegde kenmerken met impliciete gedeelten schept onduidelijkheden, die niet nodig zijn en (dus) opgeheven moeten worden. De tegenwerping kan zijn dat de laatstgenoemde acties tot het geheim van de smid behoren. Ook al zou dat zo zijn, dan willen we toch pogingen doen om het te weten te komen. Misschien moet er maar eens een onderzoeker gaan zitten aan de tafel van De Lange en Verhage teneinde hun werkwijzen in kaart te brengen.
- 4 Om minstens twee redenen willen we weten hoe de vork in elkaar steekt. Ten eerste. Omdat we anders altijd afhankelijk blijven van de deskundigheid van de ontwerpers van nu: Gravemeijer, Treffers, Van Reeuwijk, Van den Heuvel-Panhuizen, Streefland. En ... hoe sterk ze ook zijn, ze zijn toch sterfelijk. Hun vakmanschap moet overgedragen kunnen worden aan een nieuwe generatie onderzoekers. En ten behoeve van die overdracht is ontrafeling van het zogenaamde geheim, de verwoording en openbaarmaking ervan noodzakelijk. Ten tweede. Omdat we het over wetenschap hebben. Kennis, leergangen, theorieën worden mede gelegitimeerd door de weg te beschrijven die de onderzoeker gegaan is, door de gevolgde methode, de te onderscheiden stappen uiteen te zetten. Welke treatments zijn gedaan (Koster wees hierop)? Welke kinderen? Wat is hun onderwijsachtergrond? Vandaag ligt de nadruk sterk op legitimatie vanuit de theorie. De methodische kant is er echter ook. Methode en gegevens zijn nauw gebonden. Als je de methode niet kent, weet je niet wat je aan de gegevens hebt.
- 5 Explicitering is dus om twee (verwante) redenen noodzakelijk. Maar: niet alles wat móet is mogelijk. Kun je alles wel vertellen? Blijven we het toch niet hebben over heel ongrijpbare zaken? Ook al komen de door Treffers geschetste 'productieve ideeën' niet zomaar uit de lucht vallen, toch heeft het er alle schijn van alsof we te maken hebben met moeilijk navolgbare artistieke prestaties. Natuurlijk is dát ook waar. Maar ... het ontwerpen is niet uitsluitend een unieke actie. En het gaat niet aan om een heel scala aan activiteiten impliciet te houden omdat een (beperkt) gedeelte moeilijk in kaart te brengen is. We moeten niet een onterecht *pars pro toto* toepassen.

- 6 Een volgend punt. Onderzoek, ook ontwikkelingsonderzoek, blijft *mensenwerk*. Het succes van ontwikkelingsonderzoek is vooral ook het succes van mensen die met een procédé werken, die met elkaar een procédé bedenken. Het succes van ontwikkelingsonderzoek is méér afhankelijk – zo lijkt wel – van de mensen dan van het procédé. Echter: zouden deze mensen met een andere werkwijze evenveel succes hebben gehad? *Dát is de vraag*. Ik denk het niet. Het gaat om de kwaliteit van het gereedschap. Ook een goede timmerman timmert met een goede hamer beter dan met een slechte.
- 7 Uit het voorgaande trek ik de conclusie dat het concept van ontwikkelingsonderzoek in al zijn uitvoerende kenmerken systematisch geëxpliciteerd moet worden: de 'logic in use' tot 'reconstructed logic'. Er moet een methodologie komen. Let wel: géén methodiek. Maar een *vrijzinnige leer*. Deze combinatie van woorden lijkt op een contradictio in terminis. Immers, 'vrijzinnig' verwijst naar ongebondenheid en 'leer' naar tucht en discipline. Toch kan juist deze spanning heel vruchtbaar zijn: ontwikkelingsonderzoek als mensenwerk dat gestempeld wordt door degene die ermee werkt, maar vanuit de structuur van een zekere nader te omschrijven orde. Ongetwijfeld biedt het door Gravemeijer gepresenteerde template in dit verband een houvast, waarmee een onderzoeker aan de slag kan.
- 8 Deze vrijzinnige leer moet uitgewerkt worden in een *handboek ontwikkelingsonderzoek*. En wel:
 - om alle verzamelde expertise (kennis en ambachtelijkheid) over te dragen aan een nieuwe generatie onderzoekers;
 - om buitenstaanders duidelijk te maken wat we bedoelen met de term.
- 9 Wat moet de inhoud van dit handboek zijn? Volgens Van den Heuvel-Panhuizen mag het 'geen formele procedurele aanpak zijn', want – zo zegt ze – 'dat is strijdig met realistisch reken-wiskundeonderwijs'. Mijns inziens heeft ze gelijk. Bovendien is formalisme nooit vrijzinnig. Het zou een boek moeten zijn met:
 - voorbeelden van verricht ontwikkelingsonderzoek (zoals vanmiddag gepresenteerd);
 - achtergrondbeschouwingen die als het ware een fundament geven aan de voorbeelden (zoals hedenmorgen gepresenteerd);
 - algemene beschouwingen van ontologische aard (dominerende mensbeelden), van epistemologische aard (de bronnen van onze kennis) en van methodologische aard (opvattingen over objectiviteit, validiteit, betrouwbaarheid).

In ieder geval moet dat boek ook een gedeelte bevatten met handreikingen. Niet uitsluitend beschrijvingen en beschouwingen. Er zijn vele modaliteiten mogelijk tussen enerzijds descriptie en anderzijds prescriptie. Het hoeft niet uit te monden

in de alom bekende modellen uit de klassieke curriculumliteratuur. Geen formele procedures maar *kapstokken* en *tips*.

- 10 Dat handboek móet er komen. Met elkaar moeten we daaraan werken. Wat mij betreft: onder auspiciën van de NVORWO en NVvW. Wellicht vormt het verslag van deze dag een eerste aanzet.