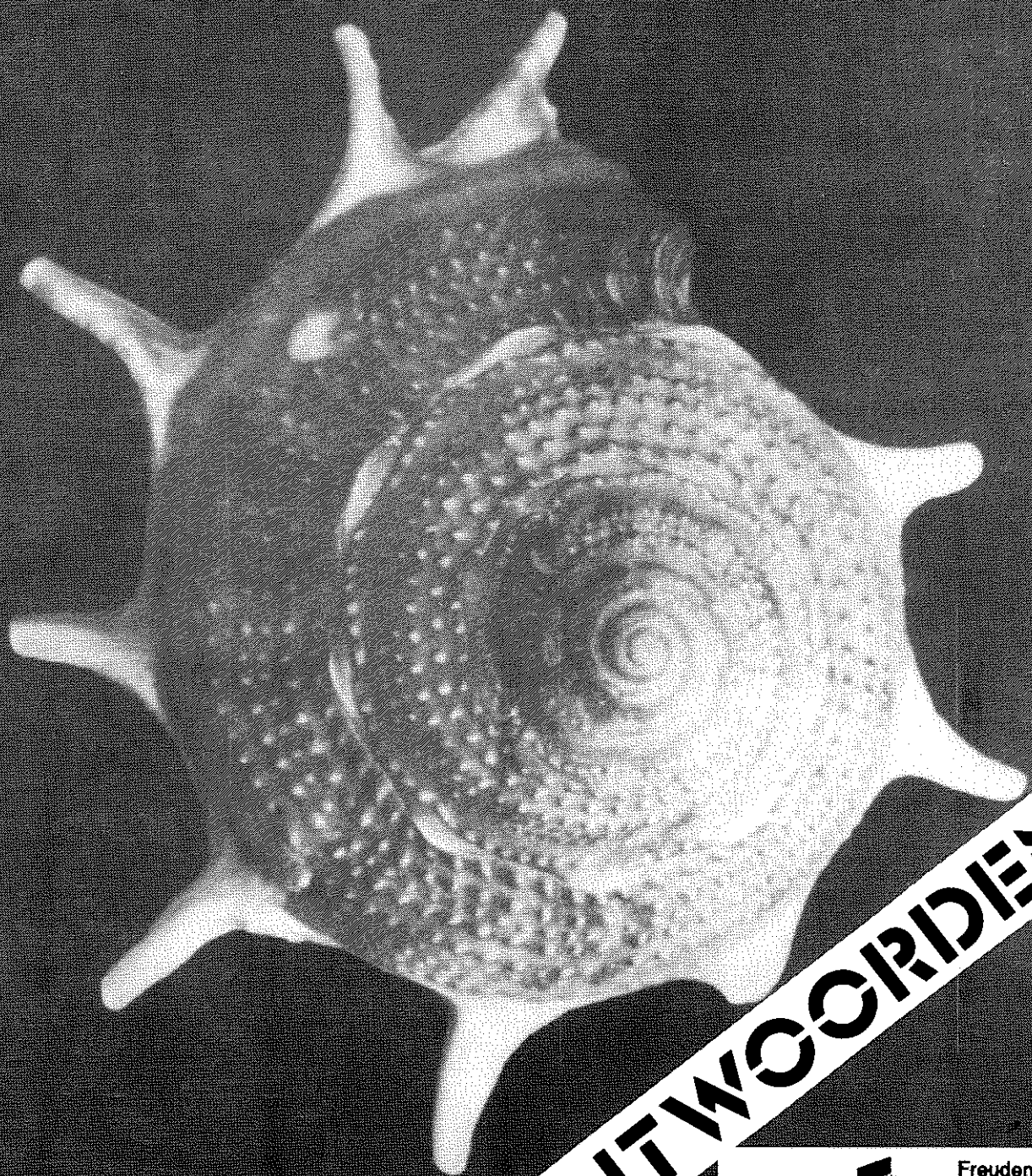


EXPONENTIEN EN LOGARITMEN



ANTWOORDEN



Freudenthal instituut
Archief

Te gebruiken bij de eerste
druk van zomer 1978.



2e verbeterde versie, april 1979.

Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs
Tiberdreef 4, Utrecht/Overvecht - Tel. (030) 61 16 11

exponenten en logaritmen

Antwoorden

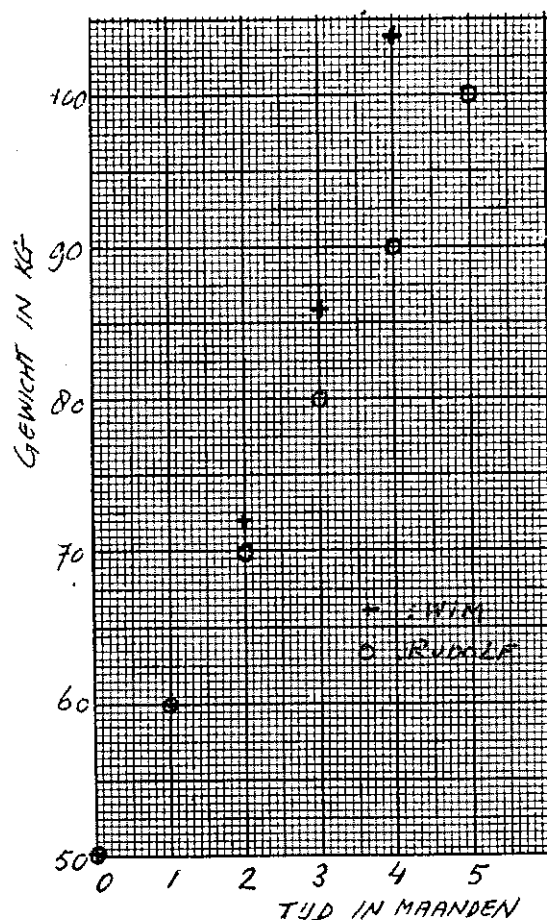
1.a. 70 kg; 72 kg.

1.b. 44%

2.c.

TIJDSTIP IN MAANDEN NA AANKOOP	GEWICHT VEULEN VAN RUDOLF IN KG	GEWICHT VEULEN VAN WIM IN KG
0	50	50
1	$50 + 10 = 60$	$50 \cdot 1,2 = 60$
2	$50 + 2 \cdot 10 = 70$	$50 \cdot (1,2)^2 = 72$
3	$50 + 3 \cdot 10 = 80$	$50 \cdot (1,2)^3 \approx 86$
4	$50 + 4 \cdot 10 = 90$	$50 \cdot (1,2)^4 \approx 104$
5	$50 + 5 \cdot 10 = 100$	$50 \cdot (1,2)^5 \approx 124$

2.d.



2.e. Nee, niet zonder meer. Maar rekening houdend met de *veronderstelde* regelmatigheid der groei is er weinig bezwaar tegen het tekenen van een continue grafiek.

3.f. Nee, noch de een, noch de ander.

3.g. Hopelijk zeggen de leerlingen dat de ene grafiek een rechte lijn is, en de andere niet.

3.h. $G(t) = 50 + 10t$.

3.i. $F_1 = \frac{60}{50} = 1,2$

3.j. $F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 1,2$

Konstante groeifactor. Bij eerste veulen *niet*.

3.k. $G(t) = 50 \cdot (1,2)^t$

3.l. De variabele komt als exponent voor. Vandaar.

3.m. $G(t) = b \cdot g^t$

4.n. Jan's veulen na één maand: $50 \rightarrow 55 \rightarrow 60,5$ kg.

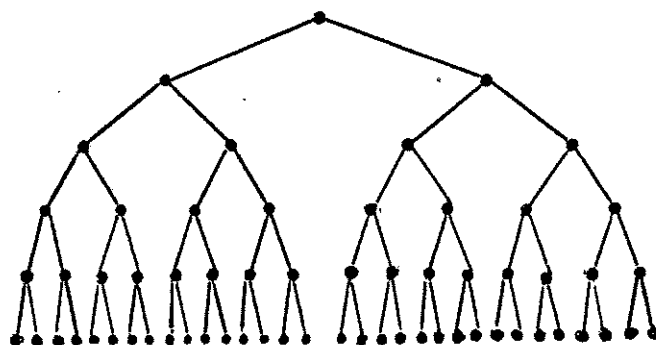
Wim's veulen na één maand: $50 \longrightarrow 60$ kg.

Dus $10\% + 10\% \neq 20\%$.

Iets wat ook al bleek bij vraag 1.b.: $20\% + 20\% \neq 40\%$.

Bij het plaatje: Je mag een gegeven paard niet in de bek kijken.

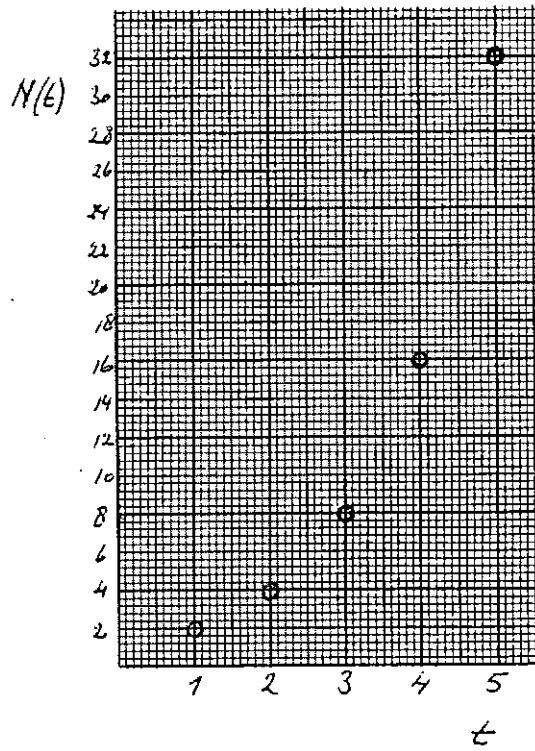
5. Tabel en schema



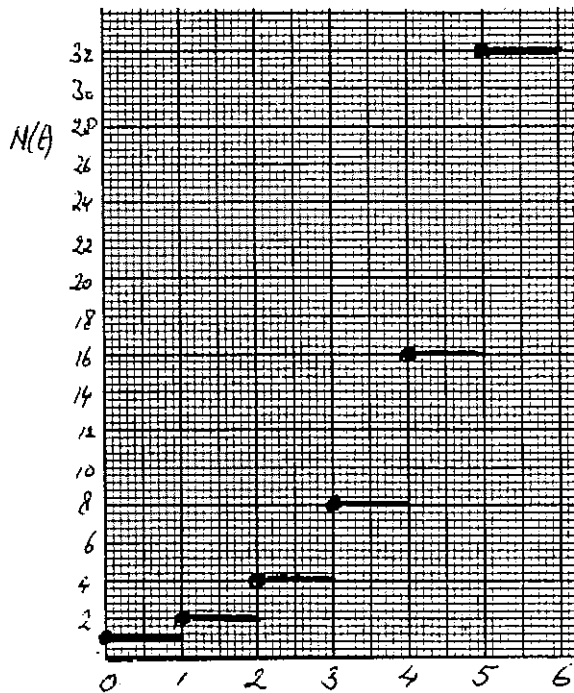
t	N(t)
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	$16 = 2^4$
5	$32 = 2^5$
t	2^t

6.b. $g = 2$

6.c.



6.d.



6.e. Ja, aan de hand van de tabel op blz. 5 bijvoorbeeld

6.f.

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
N(t)	2	4	8	16	32	64	128	256	512

$$6.g. \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}, \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$2^{-n} = \frac{1}{2^n}$$

$$6.h. \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^{-5}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = 2^{-4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 2^{-8}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^8 = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^{24}} = 2^{-24}$$

$$7.i. \quad 2^3 \cdot 2^5 = 2^8$$

$$2^{-3} \cdot 2^5 = 2^2$$

$$2^3 \cdot 2^{-5} = 2^{-2}$$

$$2^{-3} \cdot 2^{-5} = 2^{-8} \quad 2^a \cdot 2^b = 2^{a+b} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$$7.j. \quad (2^3)^5 = 2^{15}$$

$$(2^{-3})^5 = 2^{-15}$$

$$(2^3)^{-5} = 2^{-15}$$

$$(2^{-3})^{-5} = 2^{15}$$

$$(2^a)^b = 2^{ab} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$$8.k. \quad 2^9 = 512$$

$$2^{-2} = 0,25$$

$$2^{-4} = 0,0625$$

$$2^{-6} = 0,015625$$

$$8.1. \quad 0,03125 \cdot 32 = 2^{-5} \cdot 2^5 = 2^0 = 1$$

$$0,0078125 \cdot 1024 = 2^{-7} \cdot 2^{10} = 2^3 = 8$$

$$16 \cdot 0,015625 = 2^4 \cdot 2^{-6} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$0,125 \cdot 256 \cdot 0,5 = 2^{-3} \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} = 2^4 = 16$$

$$9.a. \quad 5,101 \cdot 10^8$$

$$1,083 \cdot 10^{12} \text{ km.}$$

$$1,5 \cdot 10^8$$

$$9.b. \quad 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

$$9.c. \quad 0,01 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mm.}$$

$$= 1 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

$$10.a. \quad 10^{22}$$

$$10^{22}$$

$$9,461 \cdot 10^{17}$$

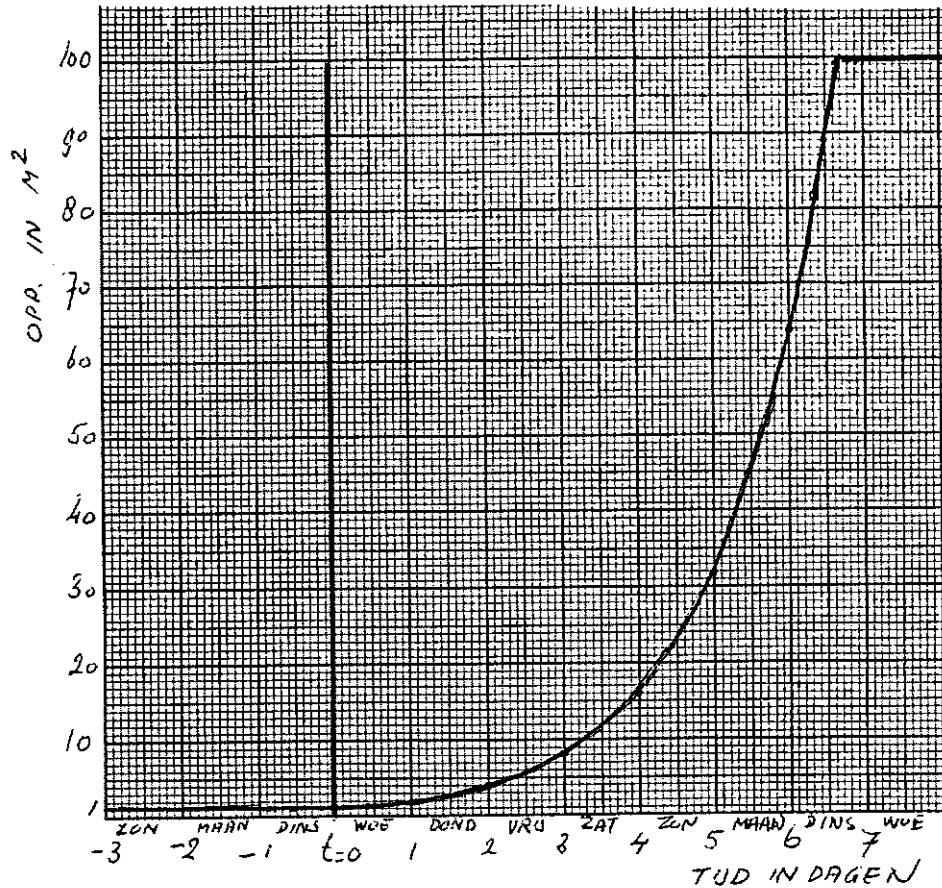
$$10.b. \quad 3,40596 \cdot 10^{19}$$

$$10.c. \quad 2,27064 \cdot 10^{18}$$

$$10.d. \quad 1,08 \cdot 10^6$$

$$10.e. \quad 2 \cdot 10^{43} \text{ gram}$$

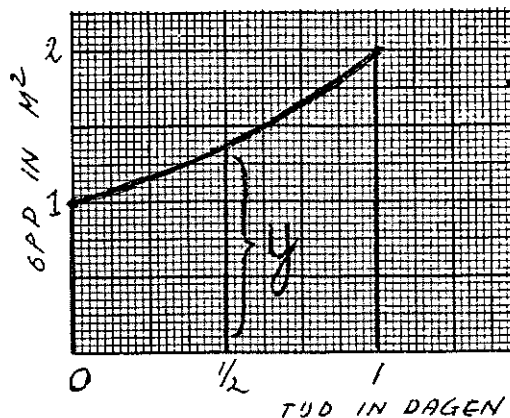
13.a.

13.b. $g = 2$ 13.c. Groeifunctie: $x \rightarrow 2^x$

13.d. wo : 1 ma: 32
 do : 2 di: 64
 vr : 4 wo: 128
 za : 8
 zo : 16 dus in de loop van dinsdag groeit de vijver vol.

13.e. In de loop van de zesde dag: half vol
 In de loop van de zevende dag: vol (dus één dag later).

13. f,g,h.



$$y \approx 1,4$$

13.g. nee

13.i. $g(\text{eerste halve dag}) = \frac{Y}{1}$

13.j. $g(\text{tweede halve dag}) = \frac{2}{Y}$

13.k. $\frac{Y}{1} = \frac{2}{Y} \Rightarrow Y^2 = 2 \Rightarrow Y = \sqrt{2}$ (negatief voldoet niet).

14.l. $N(\frac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{2}}$

14.m. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

14.n. $N(1\frac{1}{2}) \approx 2,8$ (n.l.: $2 \cdot N(\frac{1}{2})$)

$N(2\frac{1}{2}) \approx 5,6$ (n.l.: $4 \cdot N(\frac{1}{2})$)

$N(3\frac{1}{2}) \approx 11,2$ (n.l.: $8 \cdot N(\frac{1}{2})$)

14.o. Ja, want zoals bij n reeds opgemerkt:

$N(3\frac{1}{2}) = 8N(\frac{1}{2}) \approx 11,2$

want in 3 dagen treedt verachtvoudiging op.

14.p. Omdat de "verdubbelingstijd" één dag is.

Want de groeifaktor over één dag is twee.

14.q. $(2^{\frac{1}{2}})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

$(2^{\frac{3}{2}})^2 = (2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

$(2^{\frac{5}{2}})^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$

14.r. $g(\text{eerste kwart dag}) = \frac{Y}{1}$

$g(\text{tweede kwart dag}) = \frac{\sqrt{2}}{Y}$

dus: $Y^2 = \sqrt{2}$ dus $Y = \sqrt[4]{2}$

verder: $N(\frac{1}{4}) = 2^{\frac{1}{4}}$

dus: $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$

15.s. $N(1\frac{1}{2}) = 2 \sqrt[4]{2}$
 $N(2\frac{1}{2}) = 4 \sqrt[4]{2}$
 $N(3\frac{1}{2}) = \sqrt{2} \cdot N(\frac{1}{2})$ want de groeifactor over een halve dag is $\sqrt{2}$

15.t. $g_{\frac{1}{2}\text{dag}} = \sqrt[4]{2}$
 $g_{1\text{dag}} = 2$

De verklaring van $(2^{\frac{1}{4}})^4 = 2$ ligt in het feit dat $2^{\frac{1}{4}}$ de groeifactor over een kwart dag is. Dus over één dag $(2^{\frac{1}{4}})^4$
 Anderzijds is de groeifactor over één dag gelijk aan 2.

15.u Omdat we een éénduidige afspraak willen maken over $2^{\frac{1}{2}}$;

15.v. Omdat beide getallen tot de vierde macht verheven, 2 geven.

15.w. $(2^{\frac{1}{3}})^3 = 2$; $2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$
 Hier is niet nodig $2^{\frac{1}{3}} > 0$

15.x. $2^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$
 $2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

15.y. $2^{1\frac{1}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ want $2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}}$
 $2^{2\frac{1}{4}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ op analoge wijze.

15.z. $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$ want $2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
 dus $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$

16.bb. $9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3$

$$64^{\frac{1}{2}} = 8$$

$$64^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 8$$

$$25^{\frac{3}{2}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 125$$

16.cc. $11^{\frac{1}{5}} \approx 1,6153943$

$$100^{\frac{1}{4}} \approx 3,1622777$$

$$\sqrt[8]{256} = 2$$

$$1000^{\frac{1}{3}} = 10$$

16.dd. $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

16.ee.

$2 = 2^1$	$\sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2^{-\frac{1}{2}}$
$32 = 2^5$	$9\sqrt{3} = 3^{\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{3} = 3^{-1}$
$3\sqrt{3} = 3^{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2} = 2^{-1}$	$64\sqrt{2} = 2^{\frac{13}{2}}$
$1 = 2^0 = 3^0$	$\frac{1}{27} = 3^{-3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 3^{-\frac{1}{2}}$

16.ff. $(-2)^{\frac{1}{2}}$ zou het getal moeten zijn dat, gekwadraterd, -2 oplevert.
Dit kan niet.

17.a. 11460 jaar

17.b. $g = \frac{1}{2}$

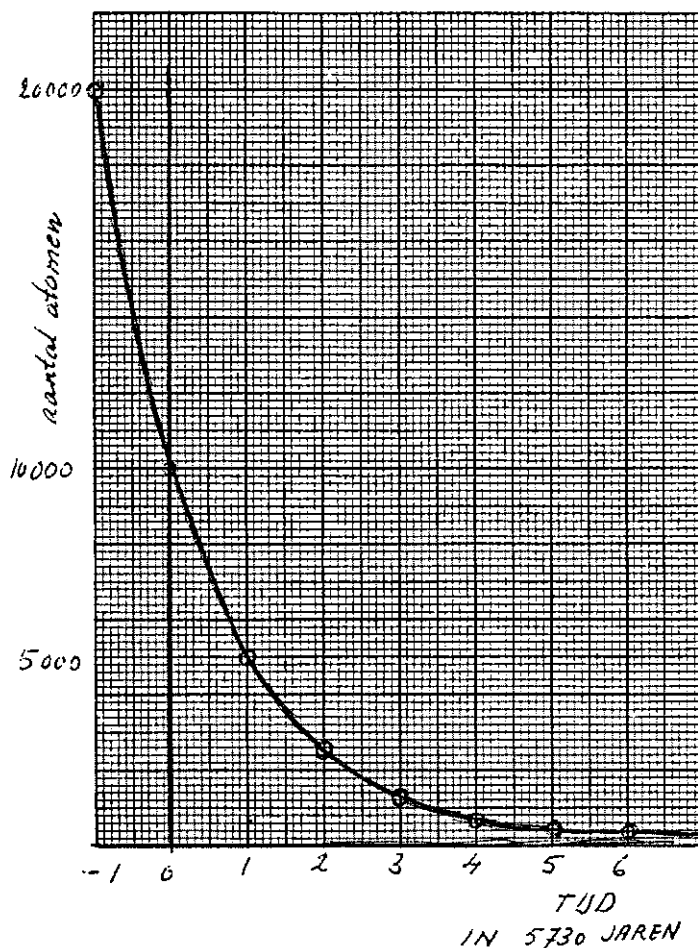
17.c.

$t = 0$	:	10.000 atomen
$t = 1$	:	5.000 atomen
$t = 2$	:	2.500 atomen
$t = 3$	:	1.250 atomen
$t = 4$	:	625 atomen
$t = 5$	:	312 of 313
$t = 6$	:	156

17.d. Aantal: $N(\frac{1}{2})^t$

17.e. 20.000 atomen

17.f.



17.g. Dit is een *dalende* functie. Overigens nog steeds *discreet*,
 daar de functiewaarden nog steeds natuurlijke getallen zijn.
 Gebruik is in dit geval echter om de grafiek *continu* te tekenen,

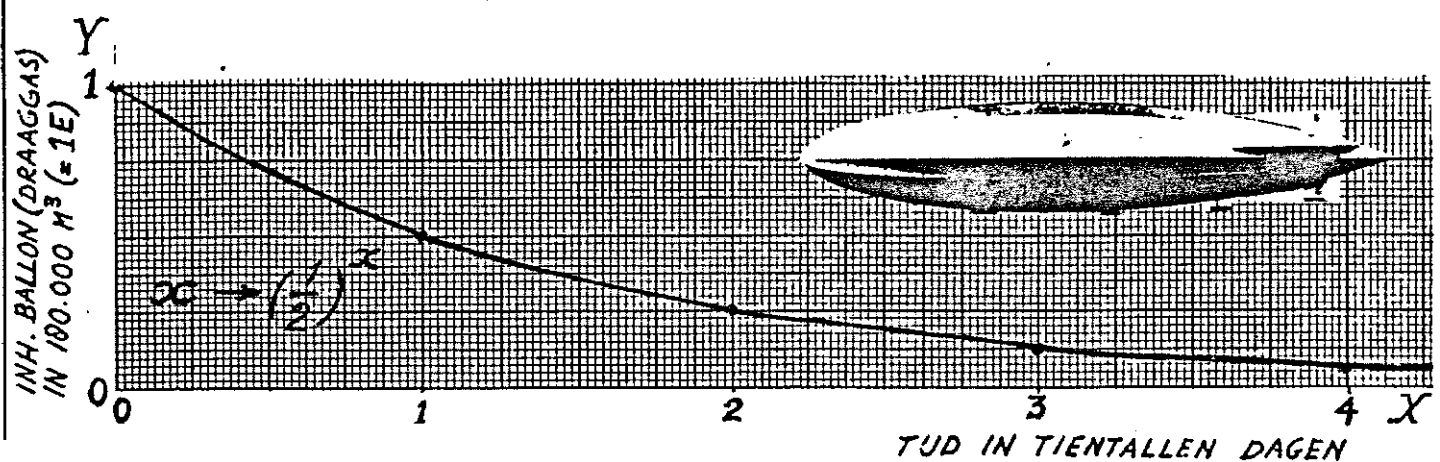
19.h. 1000 n.C.; d.w.z. de leeftijd is ± 1000 j.

19.i. 3000 v.C.; d.w.z. de leeftijd is ± 5000 j (14 C methode)

19.j. 3750 v.C.; d.w.z. de leeftijd is ± 5750 j. (jaarringen)

21.a. $g = \frac{1}{2}$ over 10 dagen

21.b. $V(t) = 180.000 \left(\frac{1}{2}\right)^t$
 of: $x \rightarrow 180.000 \left(\frac{1}{2}\right)^x$



21.d. Na één maand van 180.000 m^3 naar 22.500 m^3

21.e. Verlies na één maand: 87,5%

21.f. 20% verlies is 36.000 m^3 ; dus minimaal 144.000 m^3 nodig; dit wordt
 al op de 4^{e} dag bereikt (volgens grafiek).

21.g. $g = \frac{98}{100} = \frac{49}{50}$ (over 10 dagen)
 $x \rightarrow 180.000 \left(\frac{49}{50}\right)^x$

21.h. nog *geen* 6%

21.i. Nee, nooit echt zonder, wel zo goed als zonder.

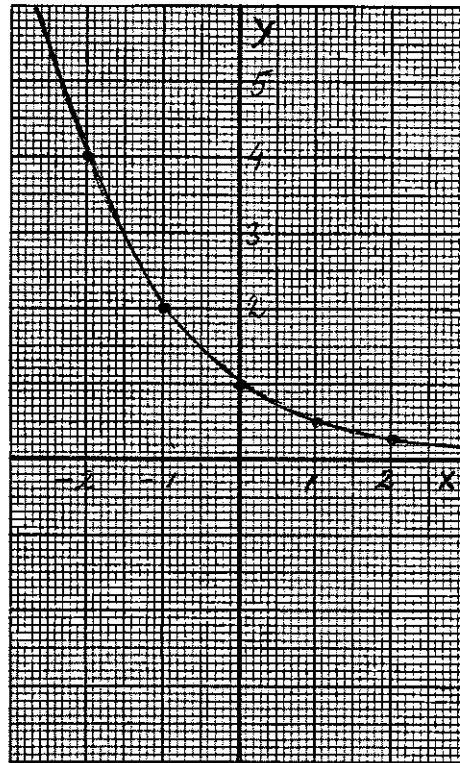
21.j. De grafiek nadert de X-as (of T-as) wel, maar snijdt hem nooit.
 X-as is horizontale asymptoot.

22.a. $x \in \mathbb{Q}$

$x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$

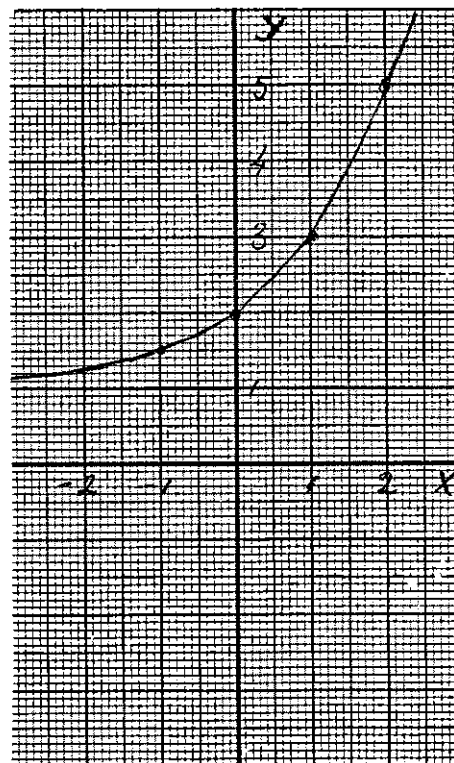
ast: $x - \text{as}$

$y = 0$



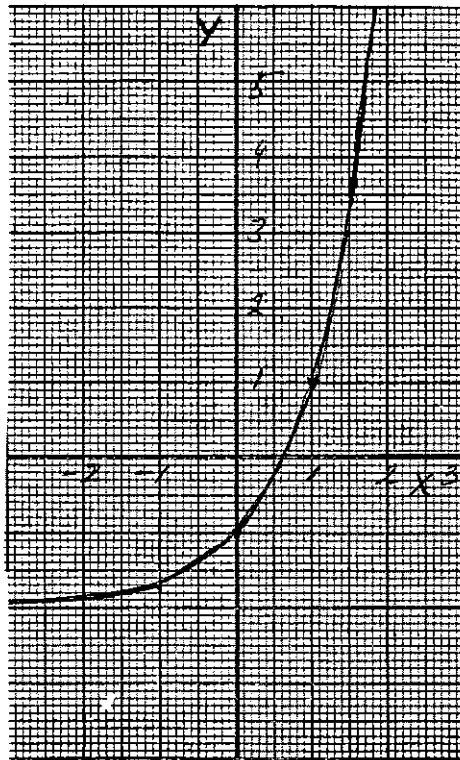
$x \rightarrow 2^{x+1}$

ast: $y = 1$



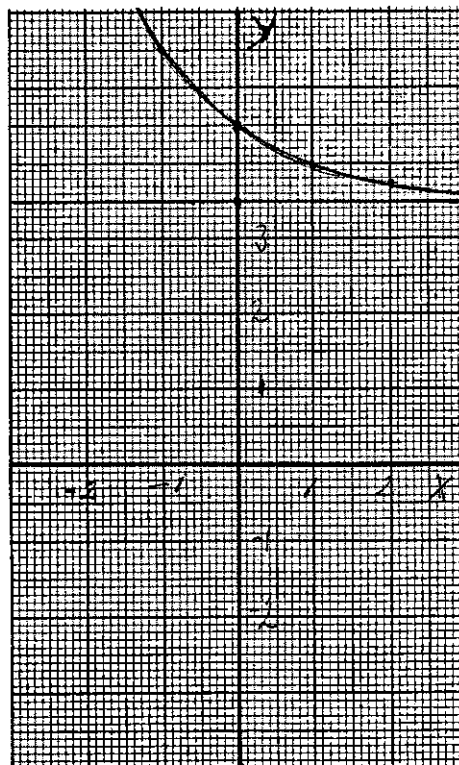
$$x \rightarrow 3^x - 2$$

$$\text{ast: } y = -2$$

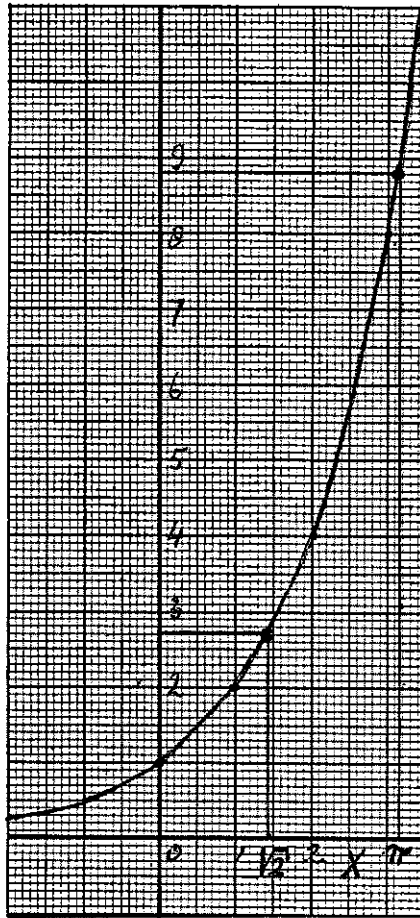


$$x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3\frac{1}{2}$$

$$\text{ast: } y = 3\frac{1}{2}$$



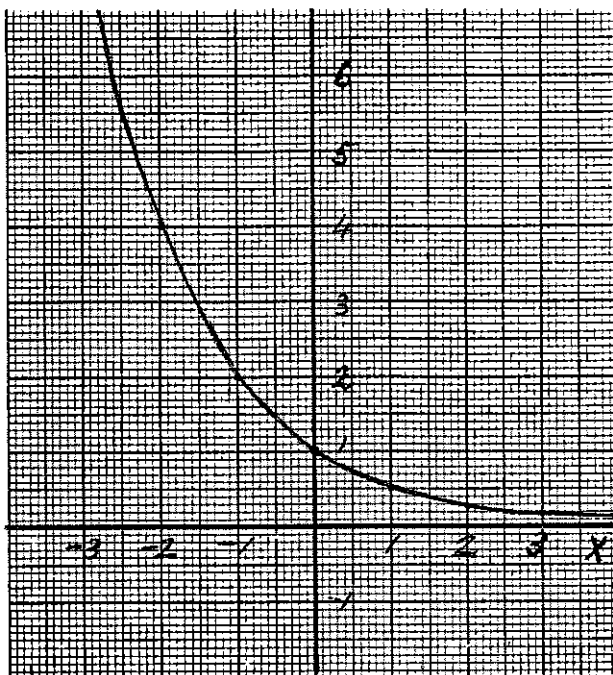
23.a.b.



23.c. $2^{\sqrt{2}} \approx 2,7$

23.d. $2^{\pi} \approx 8,8$

24.a.



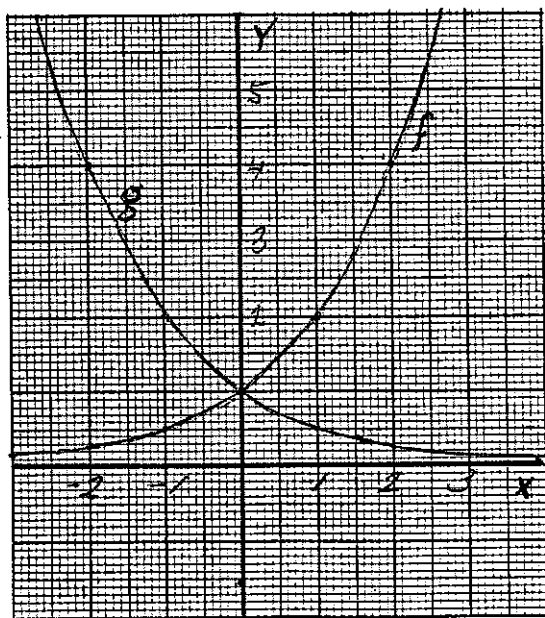
$$f : x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$g : x \rightarrow 2^{-x}$$

Het zijn dezelfde grafieken,
want

$$2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

24.b.



$$f : x \rightarrow 2^x$$

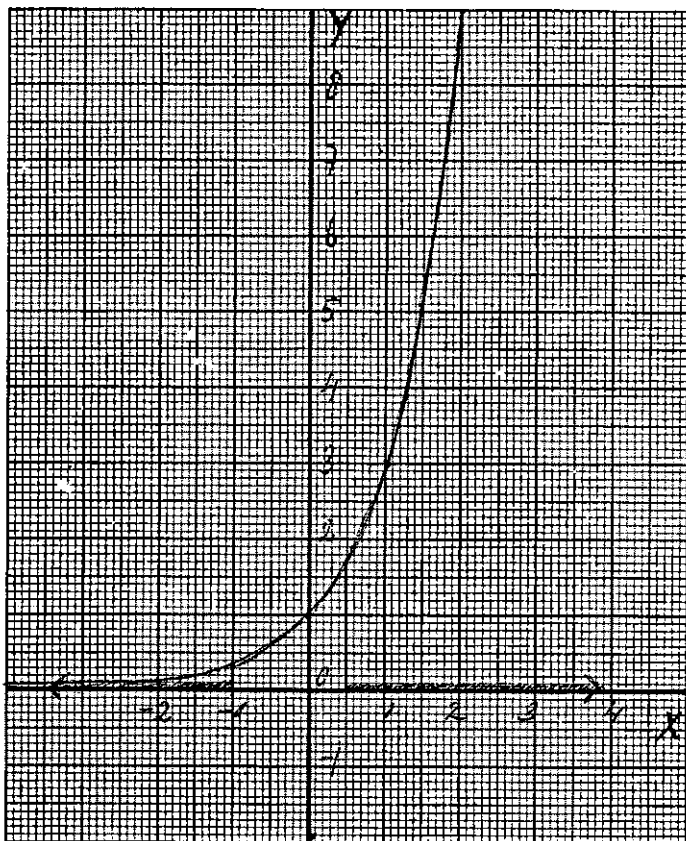
$$g : x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Ze zijn elkaars gespiegelde
t.o.v. de Y - AS

want

$$f(x) = g(-x)$$

24.c.



$$f : x \rightarrow 3^x$$

$$3^x < \frac{1}{3} \quad \left(\frac{1}{3} = 3^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow x < -1$$

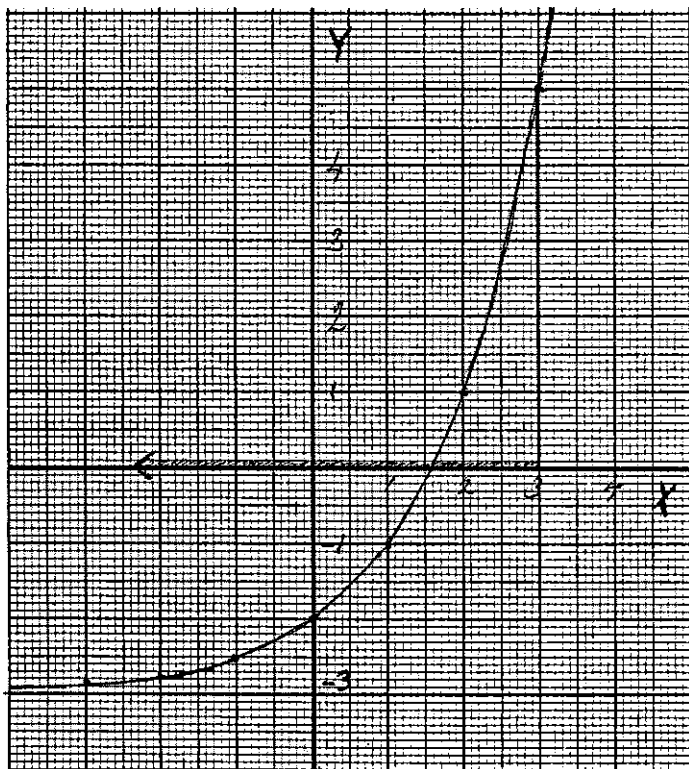
$$S = \langle \leftarrow, -1 \rangle$$

$$3^x > \sqrt{3} \quad (\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}})$$

$$\Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$S = \langle \frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$$

24.d.



$$f : x \rightarrow 2^x - 3$$

$$\text{domein: } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{bereik: } \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > -3\} &= \\ &= \langle -3, \rightarrow \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{nulpunt: } x &\approx 1,5849626 \\ &1,6 \end{aligned}$$

$$2^x - 3 < 5$$

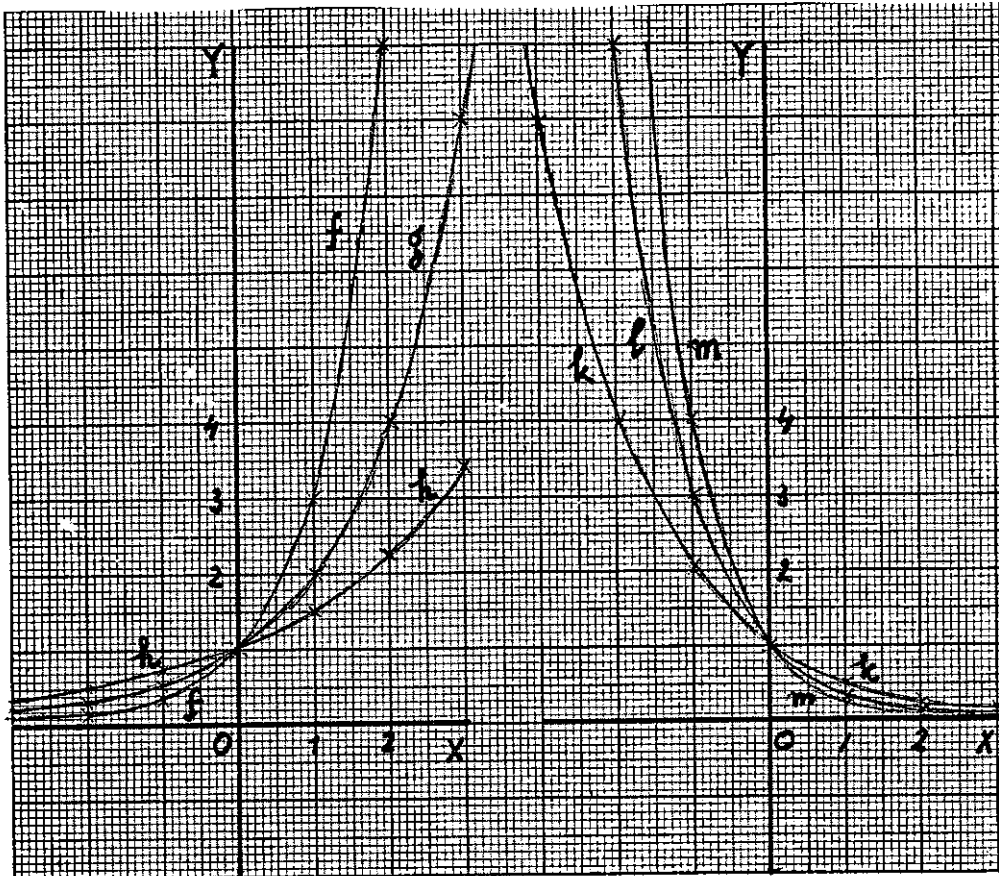
$$\begin{aligned} 2^x - 3 &= 5 \Rightarrow 2^x = 8 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$2^x - 3 < 5 \Rightarrow x < 3$$

$$S = \langle \leftarrow, 3 \rangle$$

24.e.

Niet juist.



25a.

$$f: x \rightarrow 3^x$$

$$g: x \rightarrow 2^x$$

$$h: x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$k: x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$l: x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$m: x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

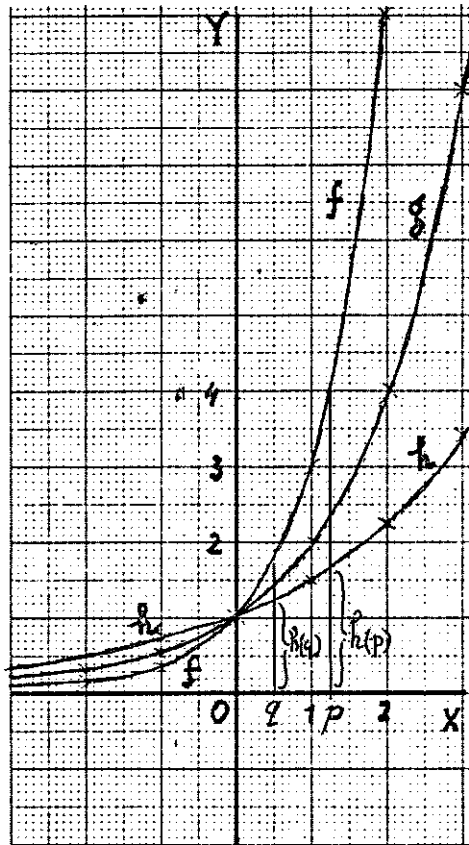
25.b. gemeenschappelijk punt: (0,1)

25.c. "echte" groei : f, g, h

andere vb. : groei ex-ponenten
 groei veulen Wim
 celdeling.

25.d. $a > 1$

25.e.f.



$$p > q \Rightarrow$$

$$f(p) > f(q)$$

25.ef.

25.g. Halveringstijden

luchtschip

negatieve groei omdat de hoeveelheid steeds *minder* wordt.25.h. $a < 1$, en vanzelfsprekend: $a > 0$.25.i. Zij $x \rightarrow f(x)$ een functie met de eigenschap:

$$p > q \Rightarrow f(p) < f(q) ; p, q \in \mathbb{R}$$

dan heet die functie *dalend*.25.j. $\mathbb{R}$ 25.k. $\mathbb{R}^+$

$$2^p > 2^q \Leftrightarrow p > q$$

omdat $x \rightarrow 2^x$ stijgend

$$\left(\frac{1}{3}\right)^p > \left(\frac{1}{3}\right)^q \Leftrightarrow p < q$$

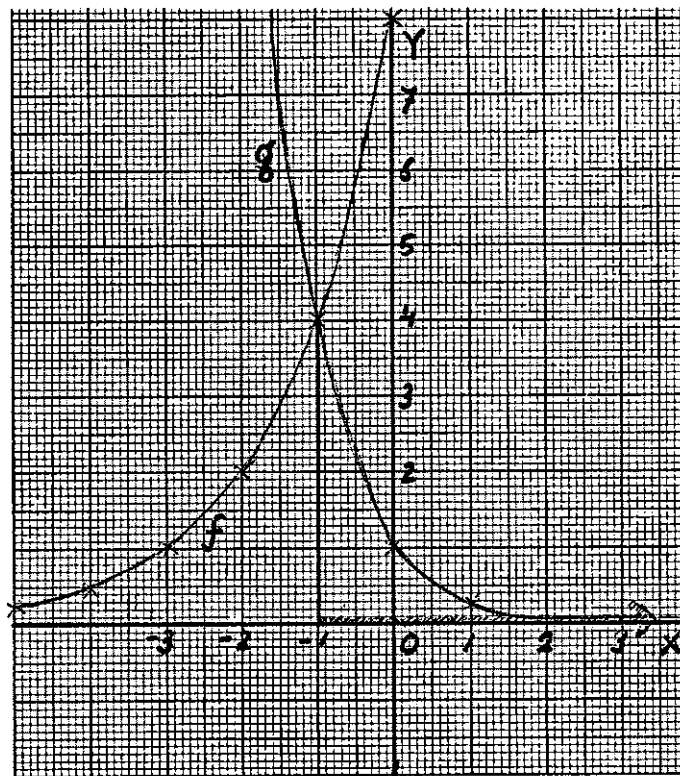
omdat $x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x$ dalend.

26.m. $S = \langle \frac{5}{2}, \rightarrow \rangle$
 $S = \langle \leftarrow, 0 \rangle$
 $S = \langle \leftarrow, -2 \rangle$
 $S = \langle -\frac{1}{4}, \rightarrow \rangle$

$S = \langle \frac{3}{2}, \rightarrow \rangle$
 $S = \langle -2, \rightarrow \rangle$
 $S = \langle \leftarrow, -1 \rangle$
 $S = \langle \frac{2}{3}, \rightarrow \rangle$

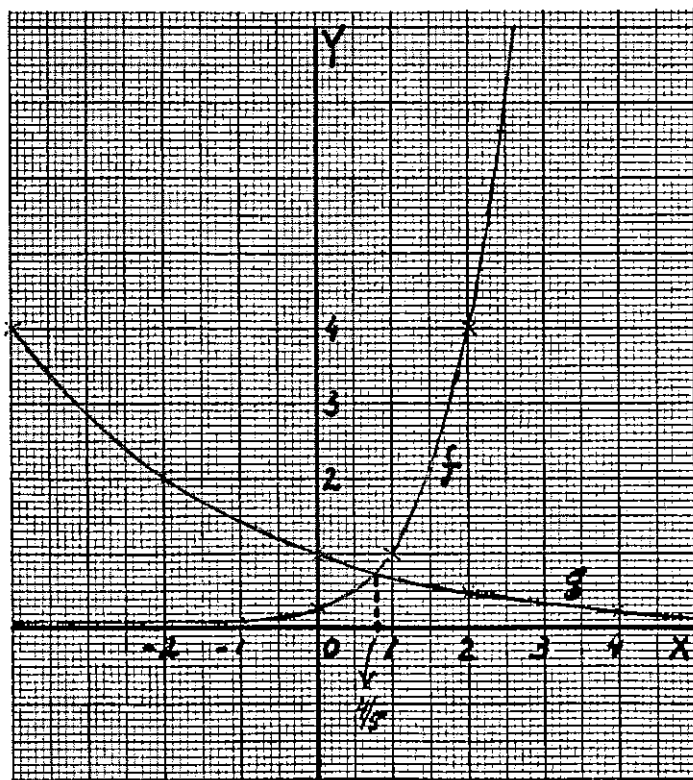
$S = \langle \leftarrow, 6 \rangle$
 $S = \langle \leftarrow, 0 \rangle$
 $S = \langle \leftarrow, -4 \rangle$

26.o.



$$x > -1$$

26.p.



$$\begin{array}{llll}
 26.p. & x = \frac{4}{5} & S = \left\langle \frac{7}{4}, \rightarrow \right\rangle & S = [-2, \rightarrow) \\
 & S = \left\langle \frac{4}{5}, \rightarrow \right\rangle & S = \left[\frac{1}{2}, \rightarrow \right) & x < 3 \quad S = \left\langle \leftarrow, 3 \right\rangle \\
 & & \mathbb{R} & \emptyset
 \end{array}$$

$$27.a. \quad g = 8$$

27.b. $g = 8$; gelijke tijdsintervallen geven bij exponentiële groei gelijke groeifactoren.

$$27.c. \quad g_1 = \frac{2^p}{2^0} = \frac{2^p}{1}$$

$$27.d. \quad g_2 = \frac{2^{p+q}}{2^q}$$

$$27.e. \quad g_1 = g_2 \Rightarrow \frac{2^p}{1} = \frac{2^{p+q}}{2^q} \Rightarrow 2^p \cdot 2^q = 2^{p+q}$$

$$\begin{aligned}
 \text{toepassing: na 1,1 dag: } 2^{1,1} &= 2^1 \cdot 2^{0,1} = 2 \cdot (1,071773463) \\
 &= 2,143546926 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{na 5,4 dag: } 2^{5,4} &= 2^5 \cdot 2^{0,4} = 32 \cdot (1,319507911) \\
 &= 42,224 \dots \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

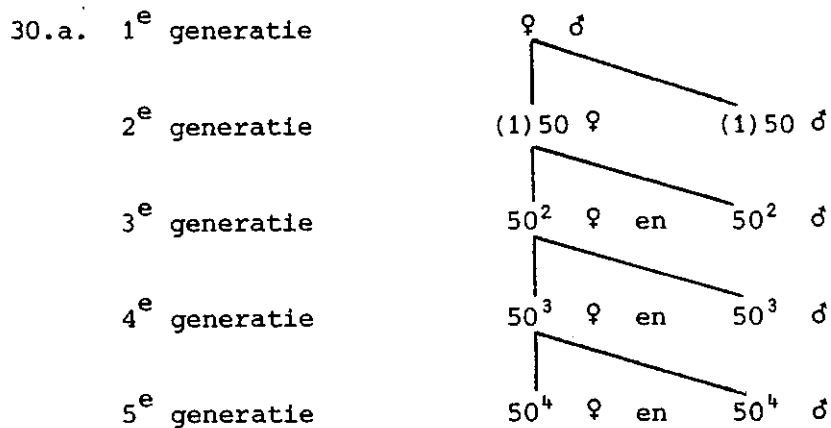
$$\begin{aligned}
 \text{na 3,2 dag: } 2^{3,2} &= 2^3 \cdot 2^{0,2} = 8 \cdot (1,148698355) \\
 &= 9,189586840 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

$$28.f. \quad g_1 = 8 = 2^3$$

$$\begin{aligned}
 28.g. \quad g_2 &= 8 \cdot 8 \cdot 8. \text{ of } g_2 = 2^9 \text{ (direkt over 9 maanden)} \\
 &= 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3
 \end{aligned}$$

28.h. Zie g.

$$\begin{array}{lcl}
 28.i. \quad [0, p] : g_1 = \frac{2^p}{2^0} ; & q \text{ zulke perioden: } (2^p)^q & \\
 [0, pq] : g_2 = \frac{2^{pq}}{2^0} = 2^{pq} & & \left. \vphantom{\begin{array}{l} [0, p] \\ [0, pq] \end{array}} \right\} (2^p)^q = 2^{pq}
 \end{array}$$



aantal afstammelingen

$$50 + 50 + 50^2 + 50^2 + 50^3 + 50^3 + 50^4 + 50^4 =$$

$$2.50 + 2.50^2 + 2.50^3 + 2.50^4 = 12.755.100$$

(ongeveer de totale Nederlandse bevolking).

30.b. die eten dus

$$12.755.100 \times 20 \text{ mg wol} = 255.102.000 \text{ mg.}$$

$$= 255.102 \text{ g}$$

$$\approx 255 \text{ kg}$$

30.c. $H(x) = 20 \cdot 2.50^{x-1} = 40.50^{x-1}$

H : gewicht wol in mg.

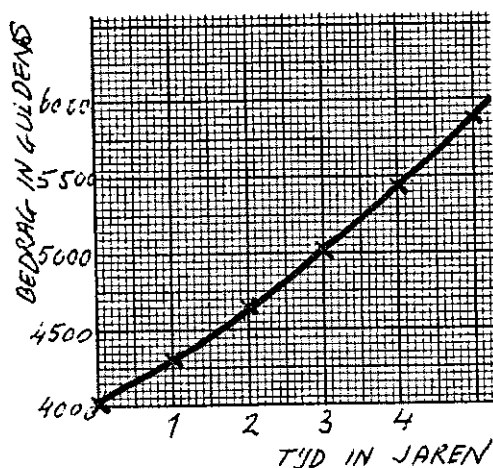
x : nummer der generatie

31. f 4000 à 8%

na 1 jaar: $4000 + 320 = f 4320,-$

na 2 jaar: $4000 + 320 + 345.60 = f 4665,60$

na 3 jaar: $4000 + 320 + 345.60 + 373,25 = f 5038,85$



dus na 3 jaar kan hij een motor kopen van f 5000,-

Prijs van aangeschafte motor f 5400,-

afschrijving per jaar $33\frac{1}{3}\%$

na 1 jaar : $5400 - 1800 = f\ 3600,-$

na 2 jaar : $5400 - 1800 - 1200 = f\ 2400,-$

na 3 jaar : $5400 - 1800 - 1200 - 800 = f\ 1600,-$

na 4 jaar : $5400 - 1800 - 1200 - 800 - 533,33 = f\ 1067,67$

Dus na 4 jaar kan hij hem voor f 1000,- wegdoen.

Bij een rentepercentage van 8% in de groeifactor: 1,08

bij een afschrijvingspercentage van $33\frac{1}{3}\%$ is de groeifactor $\approx 0,67$

Vergelijk dit met blz. 35.

- 32.a. Ja; vast percentage levert exponentiële groei
(denk en kijk maar weer eens bij de veulens).
- 32.b. 1,003
- 32.c. 1,021
- 32.d. Als we de grafiek aanhouden: ongeveer 165 jaar.
- 32.e. 3 miljard mensen in 1965.
6 miljard mensen in 2000
dus verdubbeling in ongeveer 35 jaar.
- 32.f. Een *grotere* (1,021 tegen 1,003) groeifactor geeft een veel *kortere* verdubbelingstijd.
- 33.g. Voorbehoedsmiddelen worden steeds belangrijker.
Ook veranderde opvattingen over gezinsgrootte.
- 33.h. 2,8%
- 33.i. ongeveer 30 jaar (kijk b.v. naar $20 \rightarrow 40 \rightarrow 80 \rightarrow 160$ miljoen).

34. 4 miljard ha.
per man $\frac{1}{4}$ ha. } dus voedsel voor 16 miljard mensen.

De groeifactor is 1,018

Met de rekenmachine is dan te berekenen wanneer er 16 miljard mensen zijn, uitgaande van 3 miljard in 1965.

Er zullen, afhankelijk van de rekenmachine, tamelijk vaak afrondingen plaats moeten vinden.

Een grote rekenmachine levert na een eenvoudig programma (hier in BASIC, maar ECOL gaat net zo makkelijk) dat we rechtsonder op de volgende bladzijde afdrukken, als resultaat:

We zien dus dat we de tijd hebben tot 2059 om tegenmaatregelen te nemen.

1966 3.054	1985 4.286243	2004 6.015678	2023 8.442914	2042 11.8495	2061 16.6306
1967 3.108972	1986 4.363396	2005 6.12396	2024 8.594887	2043 12.06279	2062 16.92995
1968 3.164934	1987 4.441937	2006 6.234192	2025 8.749595	2044 12.27993	2063 17.23469
1969 3.221902	1988 4.521892	2007 6.346407	2026 8.907087	2045 12.50096	2064 17.54492
1970 3.279897	1989 4.603286	2008 6.460643	2027 9.067415	2046 12.72598	2065 17.86072
1971 3.338935	1990 4.686145	2009 6.576934	2028 9.230629	2047 12.95505	
1972 3.399036	1991 4.770495	2010 6.695319	2029 9.39678	2048 13.18824	
1973 3.460218	1992 4.856364	2011 6.815835	2030 9.565922	2049 13.42563	
1974 3.522502	1993 4.943779	2012 6.93852	2031 9.738108	2050 13.66729	
1975 3.585907	1994 5.032767	2013 7.063413	2032 9.913394	2051 13.9133	
1976 3.650453	1995 5.123357	2014 7.190554	2033 10.09184	2052 14.16374	
1977 3.716162	1996 5.215577	2015 7.319984	2034 10.27349	2053 14.41869	
1978 3.783053	1997 5.309458	2016 7.451744	2035 10.45841	2054 14.67822	
1979 3.851147	1998 5.405028	2017 7.585876	2036 10.64666	2055 14.94243	
1980 3.920468	1999 5.502316	2018 7.722421	2037 10.8383	2056 15.2114	
1981 3.991037	2000 5.60136	2019 7.861425	2038 11.03339	2057 15.4852	
1982 4.062875	2001 5.702185	2020 8.002931	2039 11.23199	2058 15.76393	
1983 4.136007	2002 5.804824	2021 8.146983	2040 11.43417	2059 16.04769	
1984 4.210455	2003 5.909311	2022 8.293629	2041 11.63998	2060 16.33654	

```

10 LET A=3
20 FOR I=1 TO 100
30 LET D=1965+I
40 PRINT D
50 LET B=1.019
60 LET A=A*B
70 PRINT A
80 PRINT
90 NEXT I
100 END

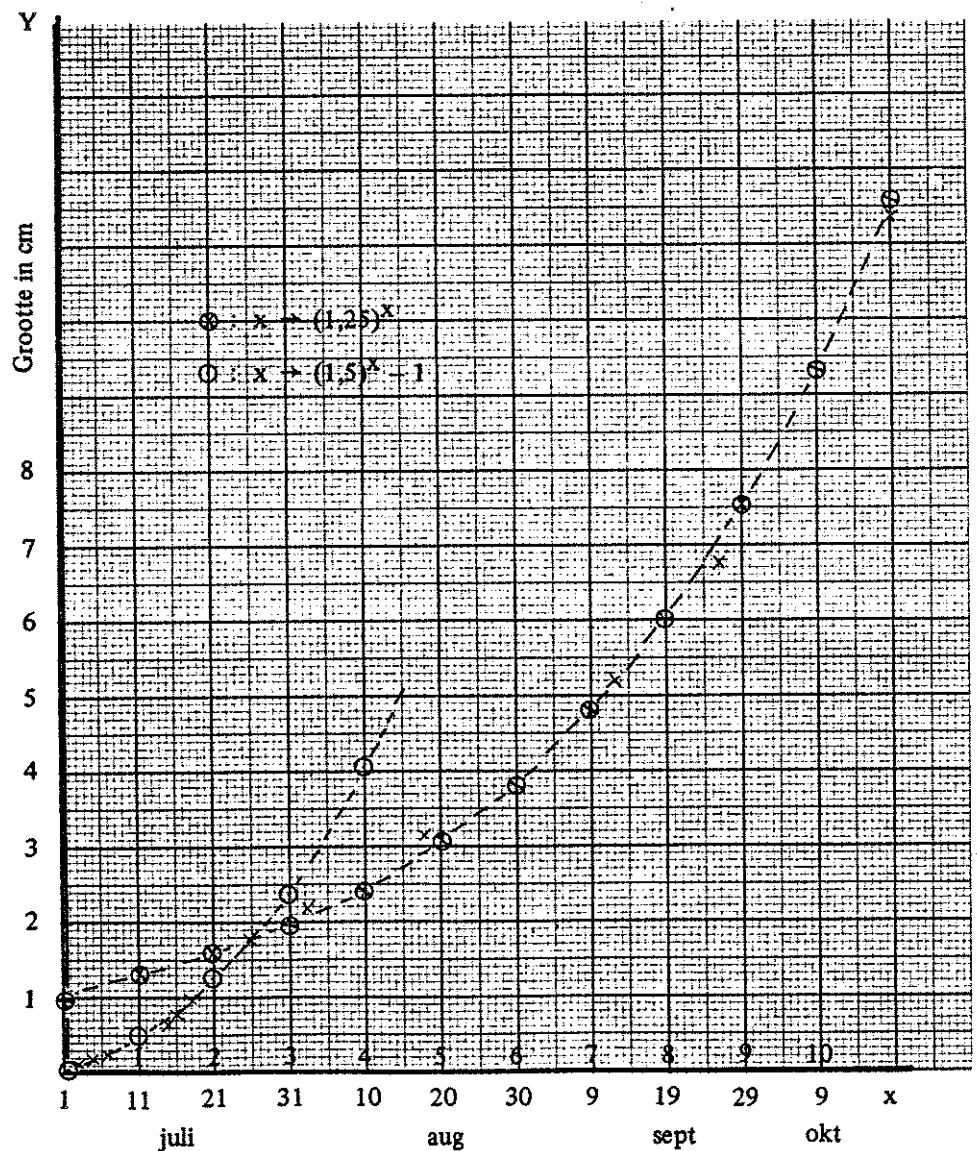
```

35.a. Als we de grafiek naar rechts wat verder tekenen, is het mogelijk een ruwe benadering te geven van de mate waarin het bedrag waarvoor een-amerikaans gezin verzekerd is, de laatste jaren is toegenomen. Voor 1932 lijkt \$ 2500,- een redelijke schatting en afhankelijk van de nauwkeurigheid van extrapolatie zal 1967 zoiets als \$ 18.000,- opleveren (Met rekenmachine : \$ 17.345,-)
De inflatie zou dan ongeveer 700% zijn, in 35 jaar.

35.b. $y = 8.020 (1,08)^x$
d.w.z. 8.020 is de "beginwaarde" dus de waarde behorend bij $x = 0$.
1,08 is de groeifactor. Dus het groeipercentage per jaar is 8%.
Vergelijk dit met blz. 31.

37.a.

3 juli	1,5 mm
5 juli	2 mm
7 juli	3 mm
15 juli	7 mm
16 juli	8 mm
18 juli	10 mm
26 juli	18 mm
2 aug.	22 mm
18 aug.	32 mm
12 sep.	52 mm
26 sep.	68 mm
19 okt.	114 mm



37.b. $f(x)$ benadert de groei in juli.

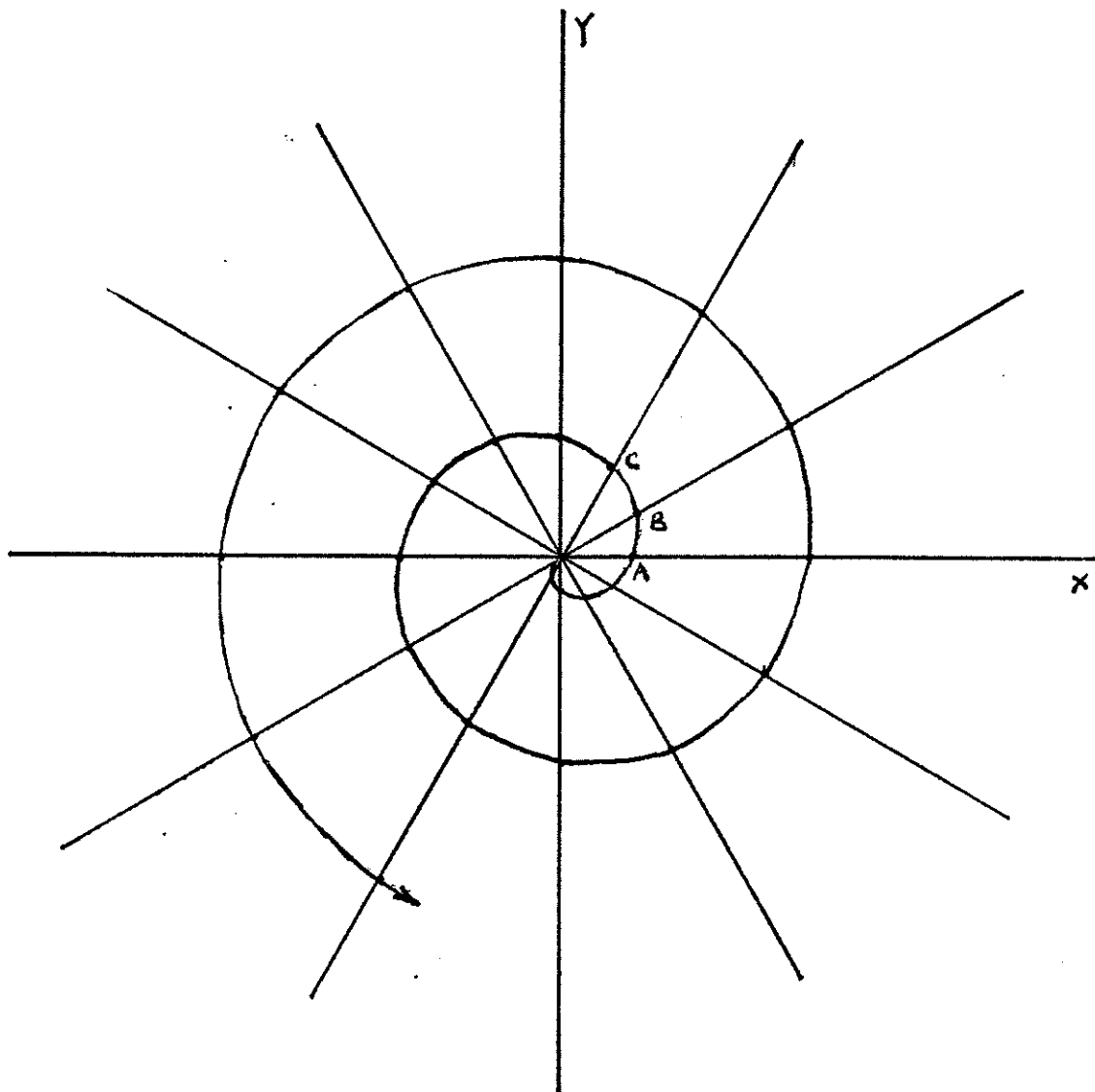
$g(x)$ voor aug. sept. okt.

37.c. Oppervlakte zal zoiets zijn als: .

$x \rightarrow b(1,6)^x$ (groefaktor zal $1,25^2$ zijn).

37.d. Door de toevoeging van -1 achter de $(1,5)^x$

40



punt	hoek	afstand
A	0°	1
B	30°	1,2
C	60°	1,4
D	90°	1,6
E	120°	1,8
	$\vdots$	
P	$x = n \cdot 30^\circ$	$1 + \frac{1}{150} x$

40. (vervolg)

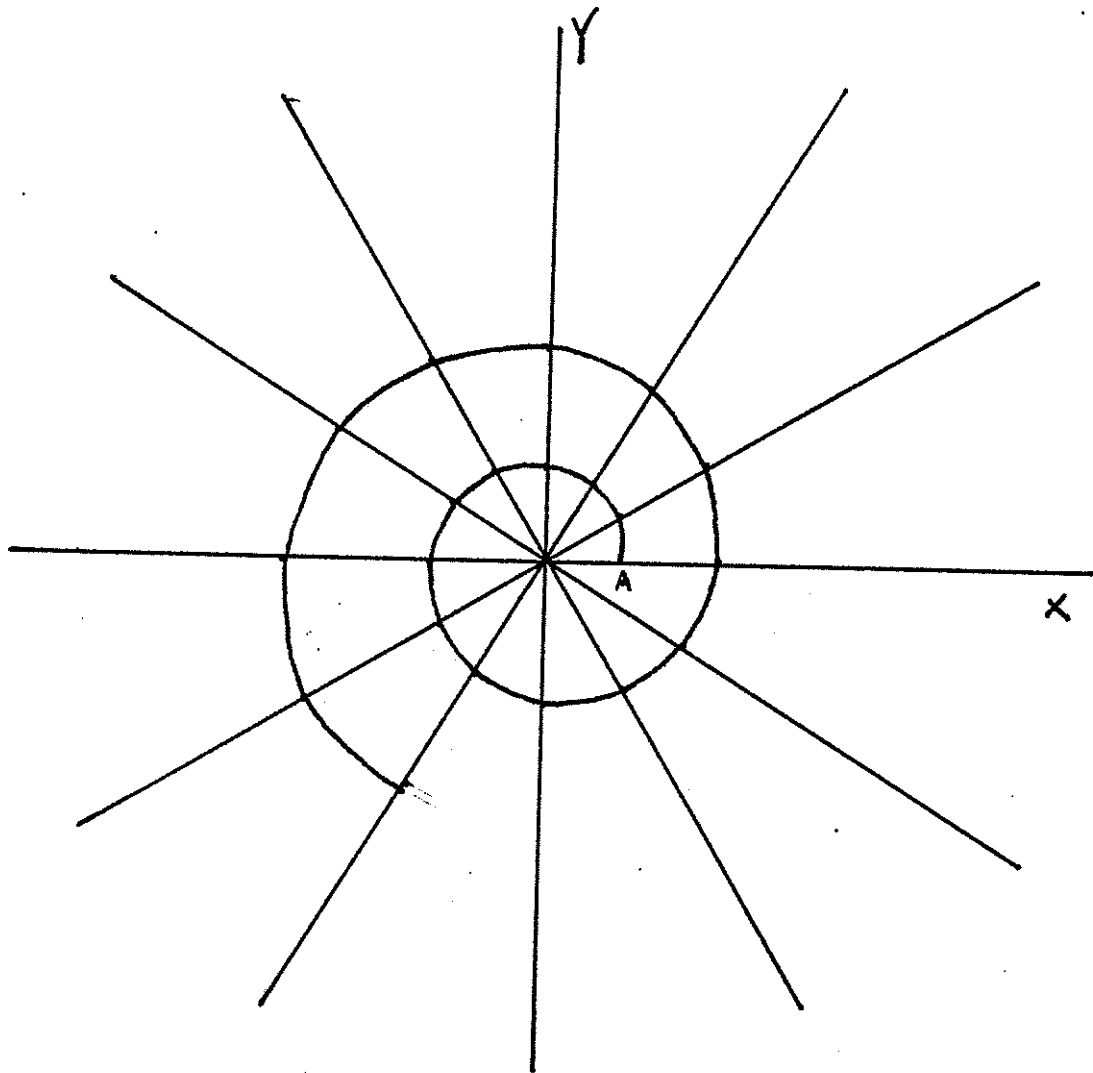
Iedere halve rechte vanuit 0 wordt in gelijke stukken verdeeld door de spiraal, afgezien van het eerste stuk, en wel van lengte 2,4 cm.

41. Eerst maar even de tabel:

punt	hoek (α)	afstand . (R)
A	0°	2 = 1
B	30°	2 ^{0,1} = 1,07
C	60°	2 ^{0,2} = 1,15
D	90°	2 ^{0,3} = 1,23
E	120°	2 ^{0,4} = 1,32
F	150°	2 ^{0,5} = 1,41
G	180°	2 ^{0,6} = 1,52
H	210°	2 ^{0,7} = 1,62
I	240°	2 ^{0,8} = 1,74
J	270°	2 ^{0,9} = 1,87
K	300°	2 ¹ = 2
etc.		
	360°	2 ^{1,2} = 2,3

(zie blz. 27)

41. (vervolg)



De stukken waarin een rechte door O wordt verdeeld door de spiraal zijn nu *niet* gelijk, maar worden, vanuit O gezien, steeds groter.

Als $\alpha_2 - \alpha_1 = 360^\circ$ dan

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(2^{1/300})^{\alpha_2}}{(2^{1/300})^{\alpha_1}} = (2^{1/300})^{\alpha_2 - \alpha_1} = 2^{360/300} \approx 2,3$$

44. a. per winding een gelijke groeifactor zou exponentiële groei betekenen.

b. OA	3 mm	}	dus $G_1 = 2,3$
OB	7 mm		
OC	14 mm	}	dus $G^2 = 2$
OD	26 mm		
OE	48 mm	}	dus $G_4 = 1,8$
OF	81 mm		
			dus $G_5 = 1,7$

(alle waarden bij benadering)

- c. Een redelijke benadering voor de groeifactor kan alles rond de 2 zijn.

Dus: $x \rightarrow b \cdot 2^x$

- d.e. Als we 2 als groeifactor nemen levert de beginwaarde 3 goede resultaten:

$$x \rightarrow 3 \cdot 2^x$$

dan:

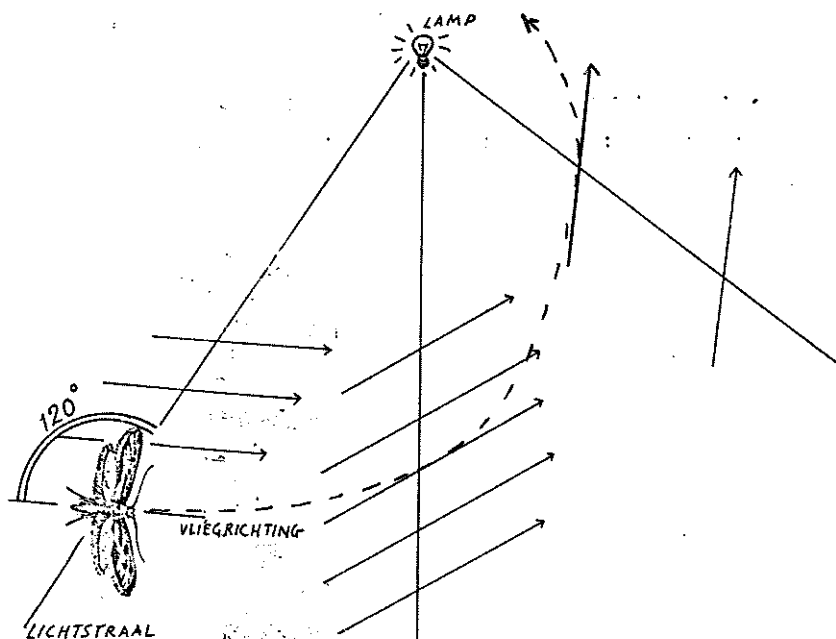
	volgens ons wisk. model	volgens foto
OA	3	3
OB	6	7
OC	12	14
OD	24	26
OE	48	48
OF	96	81

Nemen we 1,9 als groeifactor dan levert 3,5 als beginwaarde redelijke resultaten:

	foto	$x \rightarrow 3 \cdot 2^x$	$x \rightarrow (3,5) (1,9)^x$
OA	3	3	3,5
OB	7	6	6,7
OC	14	12	12,6
OD	26	24	24,0
OE	48	48	45,6
OF	81	86	86,6

De beginwaarde is een probleem omdat deze uit de foto het onnauwkeurigst is.

45.

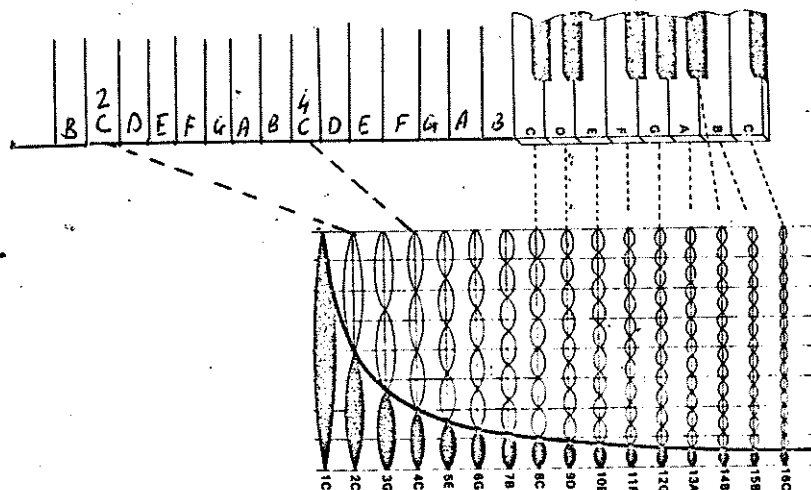


Als na één omwenteling de afstand tot de lamp gehalveerd is, zal na twee omwentelingen de afstand tot een kwart zijn teruggebracht.

We krijgen dus de rij:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$, m.a.w. er ontstaat een logaritmische spiraal.

47.a.



48.c. Tussen p en m (boven het "gat" van de gitaar)

48.d. 20 E

48.e. Hoger (zie blz. 49 voor verklaring).

49.f. $\frac{\text{freq. } F}{\text{freq } 10E} = k$ dus als freq. 10E gelijk is aan 1,
dan is freq. F gelijk aan k.

49.g.	10 E = 1	Bes = k^6
	F = k	B = k^7
	Fis = k^2	C = k^8
	G = k^3	Cis = k^9
	Gis = k^4	D = k^{10}
	A = k^5	Dis = k^{11}
		20E = $k^{12} = 2$

49.h. $k^{12} = 2$, dus $k = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12}$

49.i. Ja, nl: k

50. M zit in het midden van een snaar.

X zit twee keer zo ver, d.w.z. de frequentie van de bijbehorende toon is 2x zo laag.

Stel de frequentie van de toon behorende bij M is 1.

Dit komt overeen met een snaarlengte in de foto van 100 mm.

De frequentie van de toon behorend bij het fretje rechts van M is $2^{1/12}$. Dit komt overeen met een snaarlengte in de foto van 106 mm.

Analoog: het volgend fretje: $2^{2/12}$; 112 mm.

en vervolgens:

$2^{3/12}$	; 119 mm.
$2^{4/12}$	; 126 "
$2^{5/12}$	; 133 "
$2^{6/12}$	; 142 "
$2^{7/12}$	; 150 "
$2^{8/12}$	; 159 "
$2^{9/12}$	; 168 "
$2^{10/12}$	; 178 "
$2^{11/12}$	; 188 "
$2^{12/12}$	; 200 "

Dit levert de volgende benaderingstabel:

(Ter vergelijking de werkelijke (afgeronde) waarden).

50. (vervolg).

	2^0	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$	$2^{12/12}$
benaderde waarde	1	1,06	1,12	1,19	1,26	1,34	1,42	1,50	1,59	1,68	1,78	1,88	2
werkelijke waarde	1	1,06	1,12	1,19	1,26	1,33	1,41	1,49	1,59	1,68	1,78	1,89	2

ANTWOORDEN LOGARITMEN

51.a. 3,3 dag

51.b. 4,3 dag

51.c. 1,5 ; 2,5; 3,5 (ongeveer)

Op één dag treedt verdubbeling op. Vandaar.

51.d.

opp.	1	2	4	8	16	32	m ²
tijd	0	1	2	3	4	5	dagen

Analoog:

opp.	3	6	12	m ²
tijd	1,5	2,5	3,5	dagen

en:

opp.	5	10	20	m ²
tijd	2,3	3,3	4,3	dagen

en:

opp.	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	m ²
tijd	-3	-2	-1	0	dagen

52.e.

opp.	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	20
tijd	-3	-2	-1	0	1	1,5	2	2,3	2,5	2,8	3	3,2	3,3	3,5	3,8	3,9	4	4,3

52.f. 0 3

1 $\approx$ 3,3 $\approx$ 1,5 42 $\approx$ 4,3 $\approx$ 2,3 5 $\approx$ 2,5

-1 -4

-3 -6

53.g. Eén dag nadat er 3 m^2 is, is er 6 m^2

Analoog voor de andere.

53.h. ${}^2\log 40 = {}^2\log 20 + 1 \approx 4,3 + 1 = 5,3$

${}^2\log 48 = {}^2\log 24 + 1 = {}^2\log 12 + 2 \approx 5,5$

53.i. ${}^2\log 12$ (vgl ook met tabel: $1,5 + 2 = 3,5$)

${}^2\log 15$ (vgl. ook met tabel: $1,5 + 2,3 \approx 3,9$)

${}^2\log 21$

54.j. Omdat $x \rightarrow 2^x$ stijgend is op $\mathbb{R}$.

54.k. Zie blz. 58 leerboek.

54.l. De lijn $y = x$; het zijn elkaars inversen.

54.m. Zie blz. 58.

54.n. Zie blz. 58

54.o. Zie blz. 58

54.p. Ook stijgend (op $\mathbb{R}^+$)

54. q. nee, zolang $g > 1$

55.a. 1,4

55.b. 2,4

55.c. Vrij redelijk

55.d.

INHOUD in 180.000 m^3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
TIJD in 10 tallen dagen	0	1	1,6	2	2,3	2,5	2,9	3	3,2	3,3

De getallen zijn niet erg nauwkeurig te geven.

56.e. Jazeker, want deze is dalend op $\mathbb{R}$.

56.f. $x \rightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log x$

56.g.	0	2,5
	1	3
	1,6	3,7
	2	4

56.h. Na één dag in de hoeveelheid gehalveerd

$$56.i. \quad {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{24} = {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{12} + 1 \approx 4,7$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{64} = 6$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{32} = 5$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{36} = {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{9} + 2 \approx 5,2$$

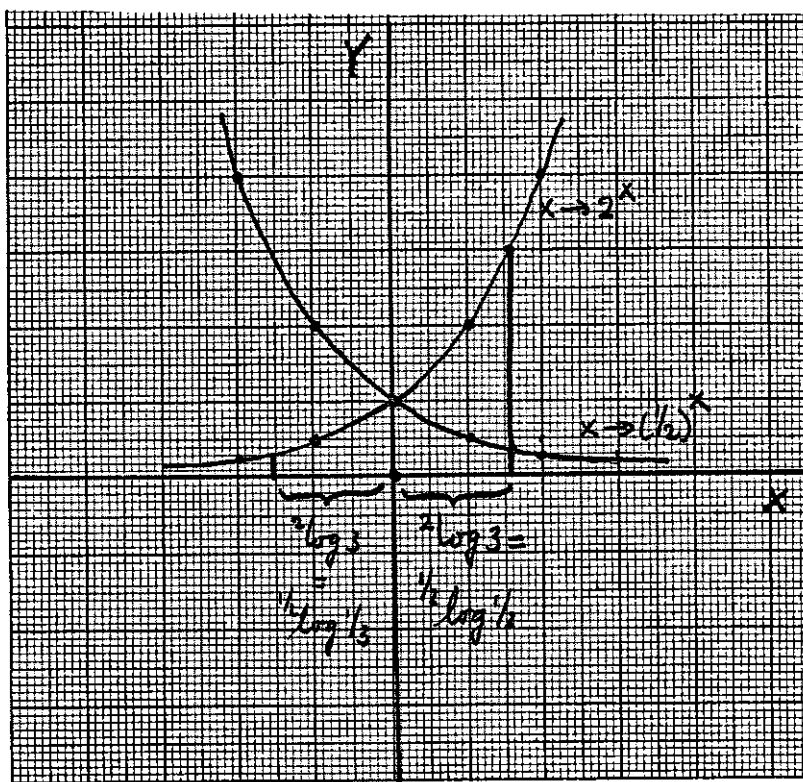
$$56.j. \quad {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{12}$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{15}$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{21}$$

$$56.k. \quad {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{3} = {}^2\log 3.$$

Want uitgaande van 1 duurt het met groeifactor $\frac{1}{2}$ net zo lang om $\frac{1}{3}$ te krijgen als met groeifactor 2 om 3 te krijgen. Dit kan geïllustreerd worden met de grafieken van $x \rightarrow 2^x$ en $x \rightarrow (\frac{1}{2})^x$



$${}^3\log 5 = \frac{1}{3} \log \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3} \log 4 = {}^3\log \frac{1}{4}$$

$${}^5\log \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \log 2$$

57.l. Zie blz. 58 leerboek.

57.m. $y = x$, vanwege het feit dat beide funkties elkaars inverse zijn.

57.n. Zie blz. 58 leerboek.

57.o. Nee, zolang $0 < g < 1$

58. Symmetrie-assen: $x = 0$, $y = x$, $y = x$, $y = 0$.

59.a. Na $A + B$ dagen. Immers je laat ze eerst verdubbelen, *daarna* verdrievoudigen, dan heb je verzesvoudiging.

59.b. $9 m^2 : B + B = 2B$

$12 m^2 : A + A + B = 2A + B$

$18 m^2 : B + B + A = 2B + A$

$96 m^2 : A + A + A + A + A + B = 5A + B$

59.c. $\left. \begin{array}{l} \text{groeifactor } g \\ \text{hoeveelheid } 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tijdstip: } g_{\log 2} = A$

59.d. $3 m^2 : g_{\log 3} = B$

59.e. $6 m^2 : g_{\log 6}$
of : $g_{\log 2} + g_{\log 3}$ (zie 59.a.)

59.f. $12 m^2 : g_{\log 12} = 2g_{\log 2} + g_{\log 3}$

$18 m^2 : g_{\log 18} = 2g_{\log 3} + g_{\log 2}$

$96 m^2 : g_{\log 96} = 5g_{\log 2} + g_{\log 3}$

59.g. $g_{\log a} + g_{\log b} = g_{\log ab}$.

60.h. $g_{\log ab} = g_{\log a} + g_{\log b}$

Laat zich met behulp van funktienotatie ook zó schrijven:

$f(ab) = f(a) + f(b)$

waarbij $f : x \rightarrow g_{\log x}$

60.j. $^{10}\log 6 = ^{10}\log 2 + ^{10}\log 3 \approx 0,7781$

$^{10}\log 9 = ^{10}\log 3 + ^{10}\log 3 \approx 0,9542$

$^{10}\log 10 = 1$

$^{10}\log 12 = 2 ^{10}\log 2 + ^{10}\log 3 \approx 1,0791$

$^{10}\log 18 = 2 ^{10}\log 3 + ^{10}\log 2 \approx 1,2552$

60.k. 15

$$\frac{5}{2}$$

$$8$$

$$\frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{18}$$

61.a. $2^x = 20$

$2^x = 35$

$3^x = 27$

$3^x = 80$

$5^x = 26$

$7^x = 51$

61.b. ongeveer 4,3

ongeveer 5,1

3

(bijna) 4

(iets meer dan) 2

(iets meer dan) 2

61.c. De verklaring staat op blz. 61, in het boek.

20	25	25
----	----	----

35	1	$\frac{1}{3}$
----	---	---------------

30	16	7
----	----	---

61.d. ${}^3\log 27$ is de opl. van $3^x = 27$; dus $x = 3$ De andere vgl. zijn niet oplosbaar in $\mathbb{N}$

62.e.

3	1
---	---

4	3
---	---

3	-1
---	----

-2	-3
----	----

$\sqrt{7}$	p
------------	---

3	-1
---	----

-1	0
----	---

$\frac{1}{2}$	1
---------------	---

62.f. ${}_g \log a$ is, bij geschikte keuze van g en a de oplossing van $g^x = a$.

62.63 Bewijs hoofdeigenschap:

$${}_g \log a = x \iff g^x = a \quad (I)$$

$${}_g \log b = y \iff g^y = b \quad (II)$$

$${}_g \log ab = z \iff g^z = ab \quad (III)$$

Substitueer (I) en (II) in (III):

$$g^z = g^x \cdot g^y.$$

Volgens de hoofdeigenschap der exponentiële functies:

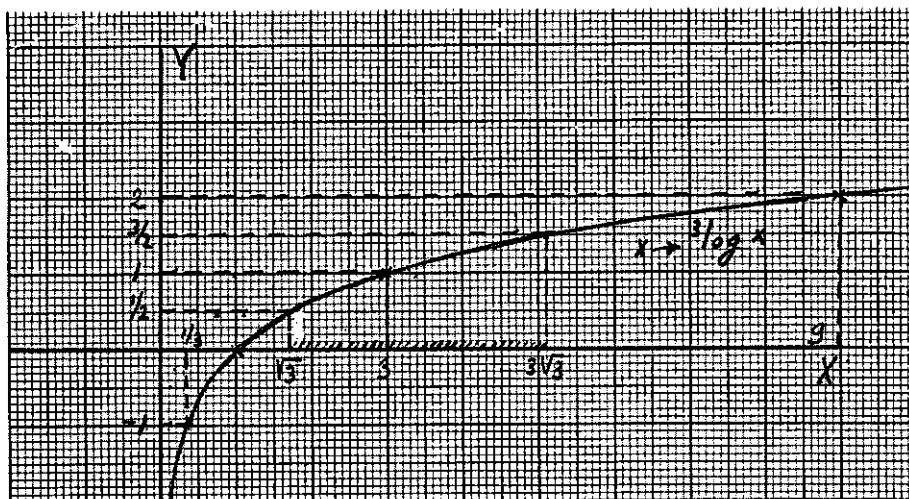
$$g^z = g^x \cdot g^y = g^{x+y}$$

Dus $z = x + y$ *klaar.*

64.a.

5	3	9
2	3	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\sqrt{2}$	1

64.b.



Uit de grafiek volgt:

$${}^3 \log x = 2 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{dus: } S = \{9\}$$

$${}^3 \log x > 1 \Rightarrow x > 3$$

$$S = \langle 3, \rightarrow \rangle$$

$${}^3 \log x < -1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{3}$$

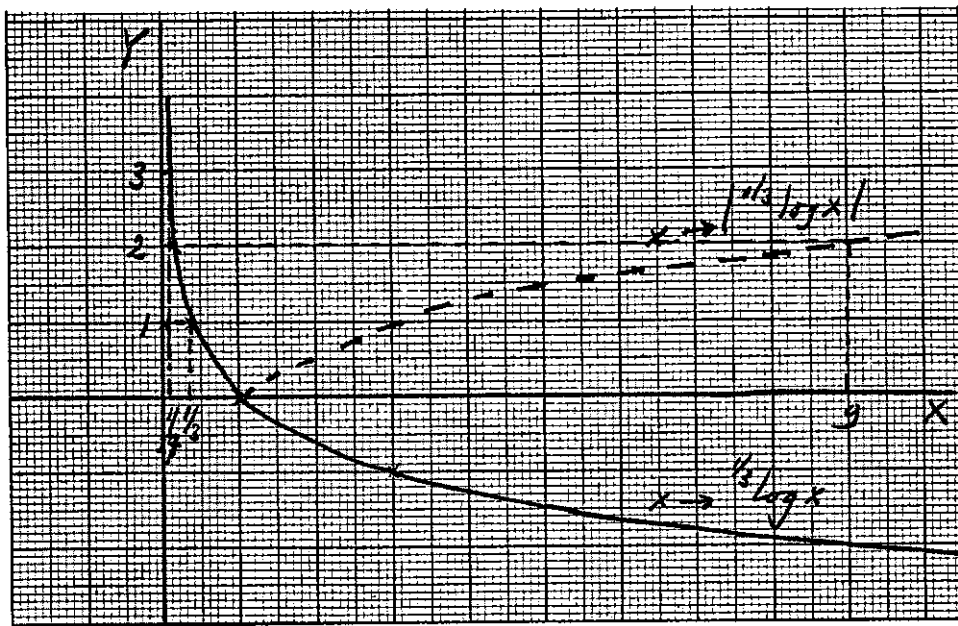
$$S = \langle 0, \frac{1}{3} \rangle$$

$$\frac{1}{2} < {}^3 \log x < \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{3} < x < 3\sqrt{3}$$

$$S = \langle \sqrt{3}, 3\sqrt{3} \rangle$$

64.c. $2^x = 256 \Rightarrow x = {}^2\log 256 = 8$ of: $2^x = 2^8$
 $4^x = 256 \Rightarrow x = {}^4\log 256 = 4$ of: $2^{2x} = 2^8$
 $16^x = 256 \Rightarrow x = {}^{16}\log 256 = 2$ of: $2^{4x} = 2^8$
 $(\sqrt{2})^x = 256 \Rightarrow x = {}^{\sqrt{2}}\log 256 = 16$ of: $2^{\frac{1}{2}x} = 2^8$
 $(8)^x = 256 \Rightarrow 2^{3x} = 2^8 \quad x = \frac{8}{3}$
 $5^x = 256 \Rightarrow x = {}^5\log 256$
 $10^x = 256 \Rightarrow x = {}^{10}\log 256$

65.d.



$$\frac{1}{3} \log x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9} \quad \text{dus:} \quad S = \left\{ \frac{1}{9} \right\}$$

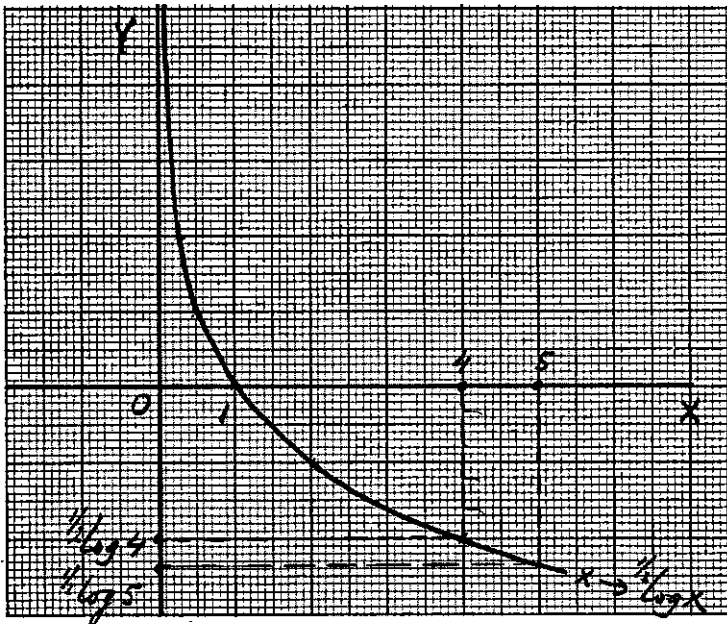
$$\frac{1}{3} \log x = 0 \Rightarrow x = 1 \quad S = \{1\}$$

$$\left| \frac{1}{3} \log x \right| = 2 \Rightarrow x = 9 \vee x = \frac{1}{9} \quad S = \left\{ \frac{1}{9}, 9 \right\}$$

$$\frac{1}{3} \log x \leq 3 \Rightarrow x > \frac{1}{27} \quad S = \left(\frac{1}{27}, \rightarrow \right)$$

- 65.e. Groeifunctie: $x = 4.6^x$
 want $a=6, b=4$
 Dus: $4.6^x = 100 \iff 6^x = 25 \iff x = {}^6\log 25.$

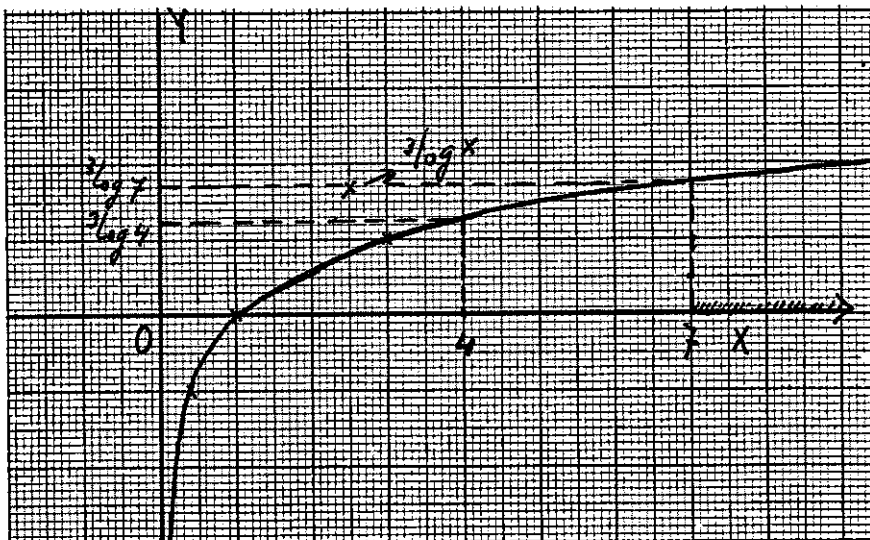
66.a.



Uit grafiek: $5 > 4 \Rightarrow {}^{1/2}\log 5 < {}^{1/2}\log 4$

Klopt met dalende karakter.

67.b.



${}^3\log x > {}^3\log 7 \Rightarrow x > 7$ dus $S = < 7, \rightarrow >$

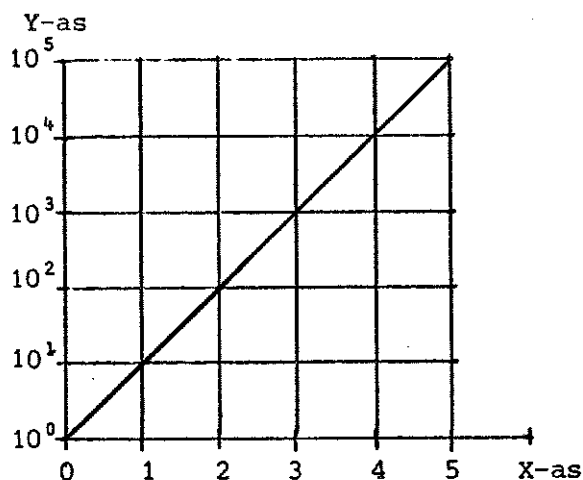
- 67.c. $S = < 5, \rightarrow >$ $S = < \frac{1}{4}, \rightarrow >$
 $S = < 6, \rightarrow >$ $S = < 0, 4 >$

67.d. Nee, want $x \rightarrow 1^x$ is niet stijgend of dalend.

67.e. $g = 1$

67.f.g. $g \leq 0$.

69. Functievoorschrift: $x \rightarrow 10^x \log x$



De grafiek is een rechte lijn,

want $f: x \rightarrow 10^x$ maar door het log-papier krijgen we daarna:

$x \rightarrow 10^x \log x$ dus totaal:

$f : x \rightarrow x$ want

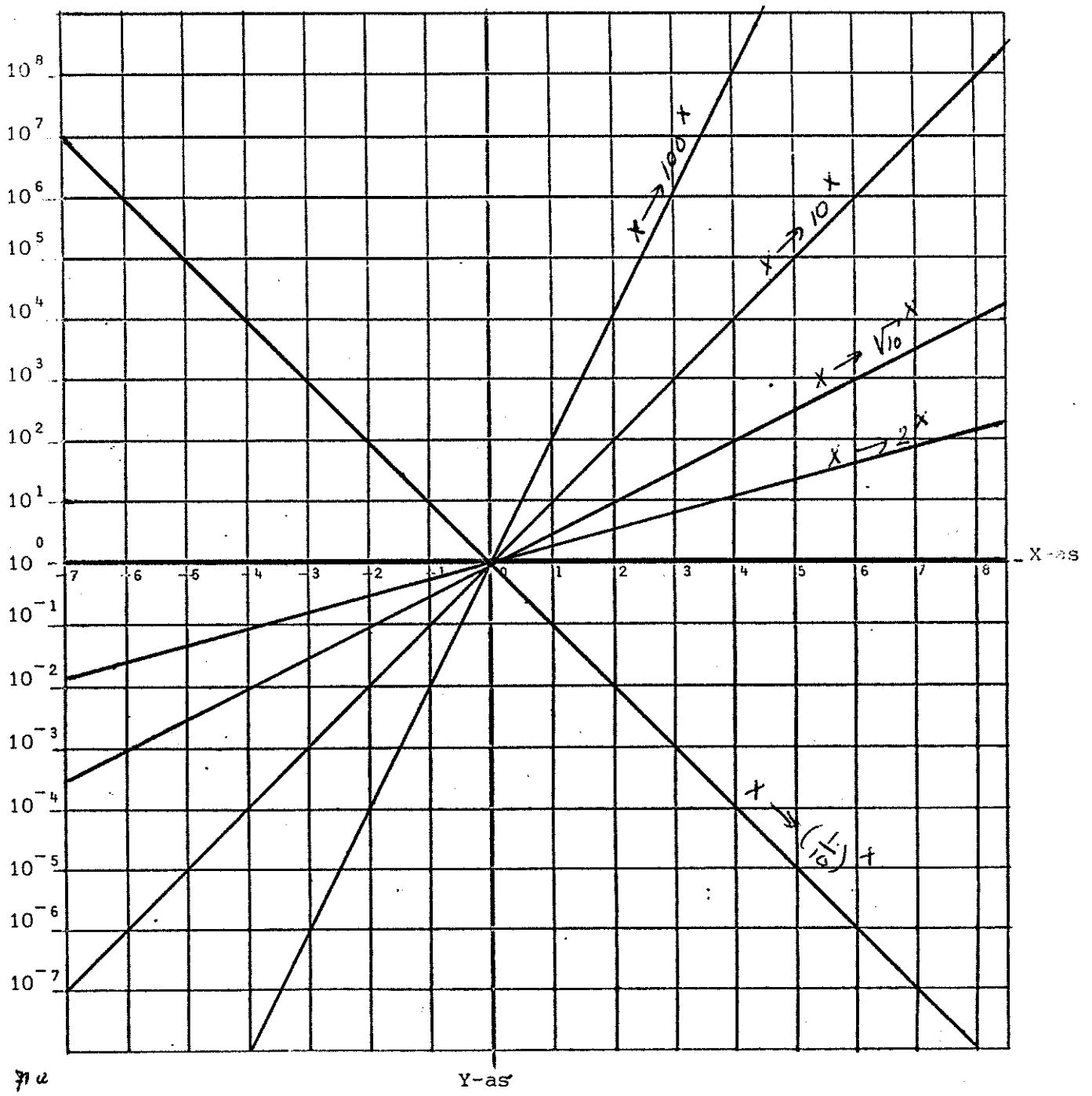
$x \rightarrow 10^x$ en $x \rightarrow 10^x \log x$ zijn elkaars inverse.

De 500 en 50.000 moeten ruim *boven* de helft van het interval
[100,1000] en [10.000,100.000]

staan (zie bv. grafieken papier op blz. 76).

70. Het 0 punt bestaat niet op een log. schaal.

71.



72.b. $f: x \rightarrow 10^{2x}$
 $g: x \rightarrow 10^x$
 $h: x \rightarrow 10^{\frac{1}{2}x}$
 $k: x \rightarrow 10^{-x}$

72.c. De coëfficiënt van de exponent van de funktie is de richtingscoëfficiënt van de grafiek.

72.d. $l: x \rightarrow 2^x$ zie 72.a.

72.e. $2^x = 10^{(10 \log 2) \cdot x}$ want $10^{10 \log 2} = 2$

72.f. Volgens 72 is de richtingscoëfficiënt van de grafiek gelijk aan $10 \log 2$. Volgens de grafiek is dit ongeveer 0,3.

72.g. Door het tekenen van de grafiek van
 $m: x \rightarrow 3^x$.

75.a. Latentietijd vonden we bij de groei der exponenten.
 Voordat de ponenten te water werden gelaten vond er géén groei plaats.

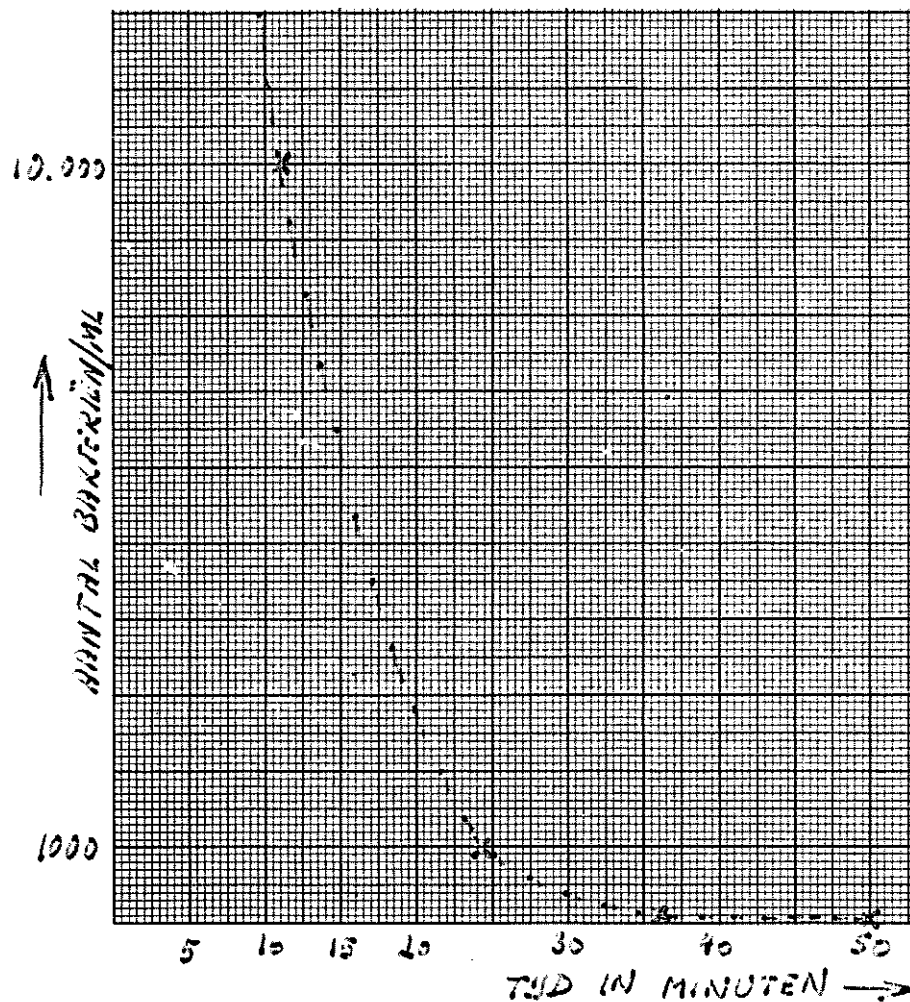
75.b. Ongeveer 4 uren.

75.c. 5 tot 6 bakt./ml.

75.d. Konstante delingstijd wil zeggen dat de tijd tussen twee opeenvolgende delingen steeds gelijk is.

75.e. Ongeveer 10^8 bakt./ml.

75.f.



- 76.a. Doordat er steeds een kruisje in het midden van een interval van 5 jaar staat.
- 76.b. Iets meer dan 1.
- 76.c. Tussen de 8000 en 9000.
- 76.d. Dat de toename exponentieel is.

76.e. g is ongeveer 1,5

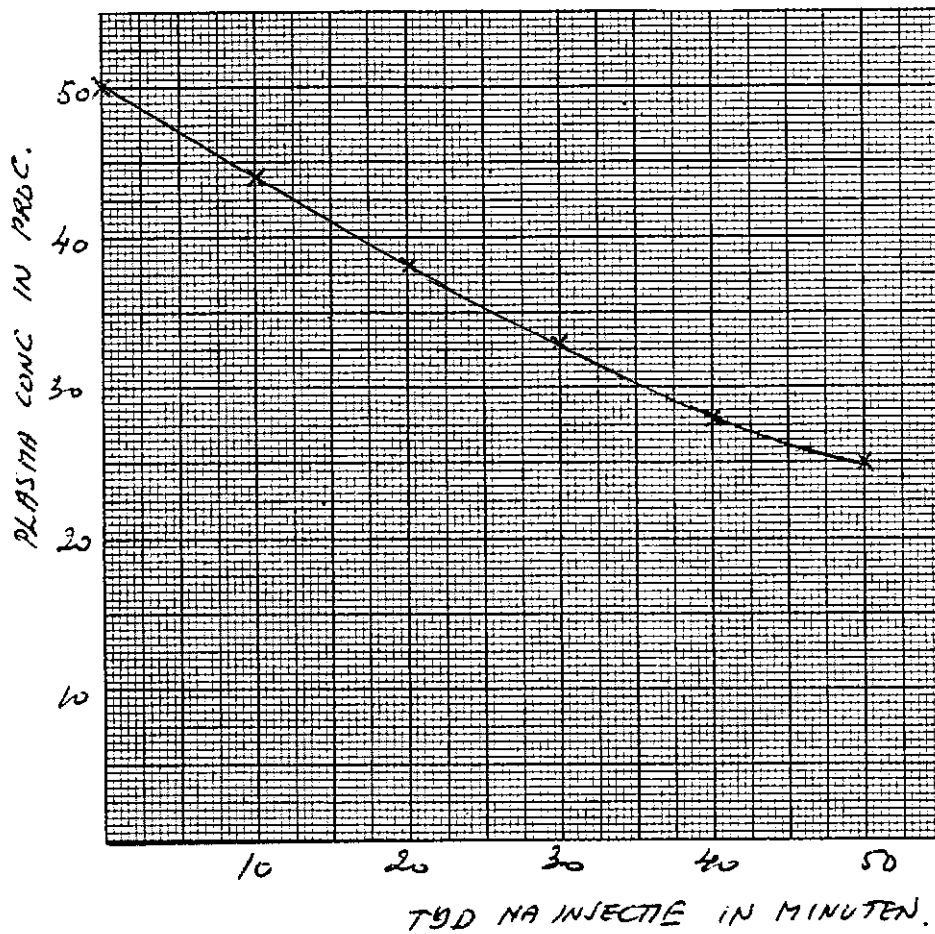
Dat wil zeggen dat als je 5 jaar ouder wordt je kans om te overlijden aan hart en vaatziekten 1,5 keer zo groot wordt.

77.a. 50%

77.b. 35%; 25%

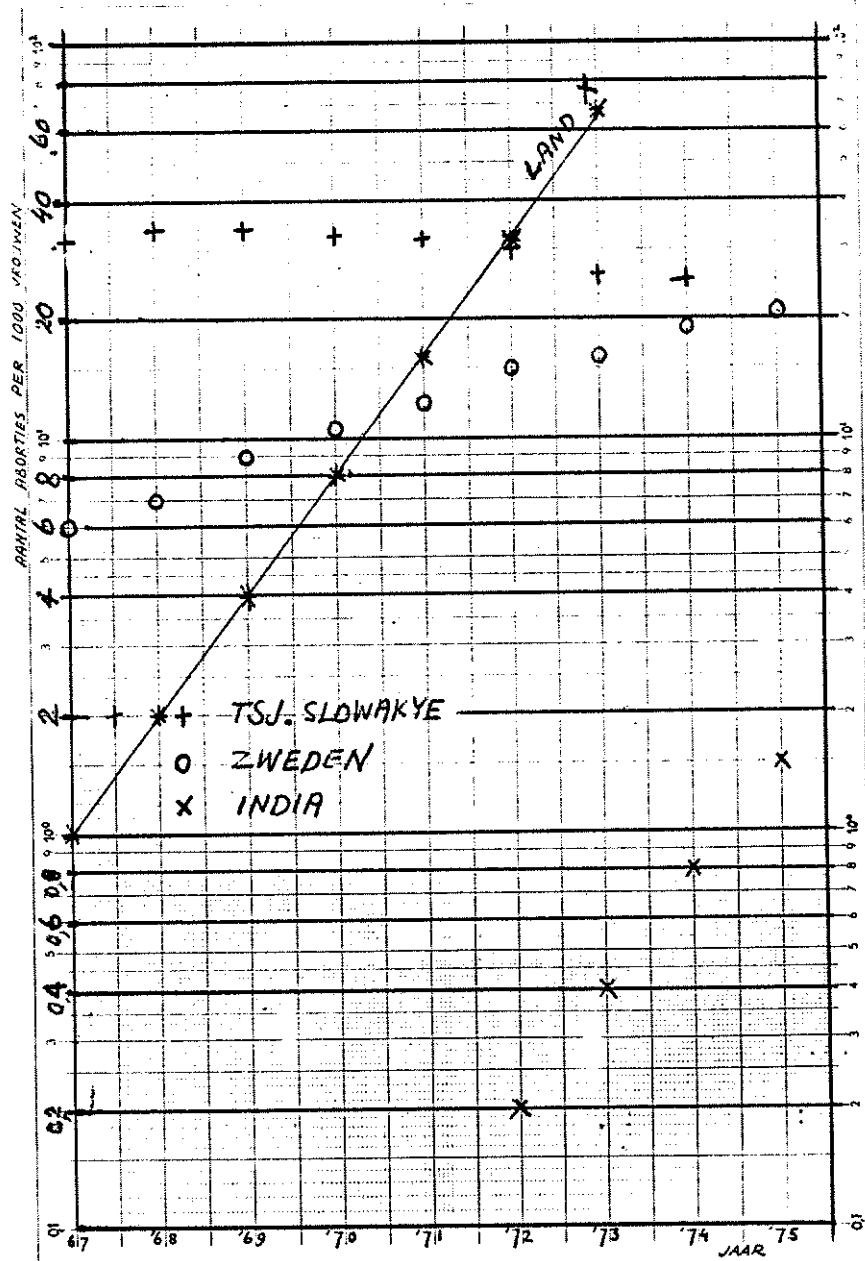
77.c. Nee, exponentieel

77.d.



77.e. 50 minuten.

78.a.



78.d.

67.b. India, grootste helling

78.c. Exponentieel voor India
Tamelijk exponentieel voor Zweden.

78.d. 2

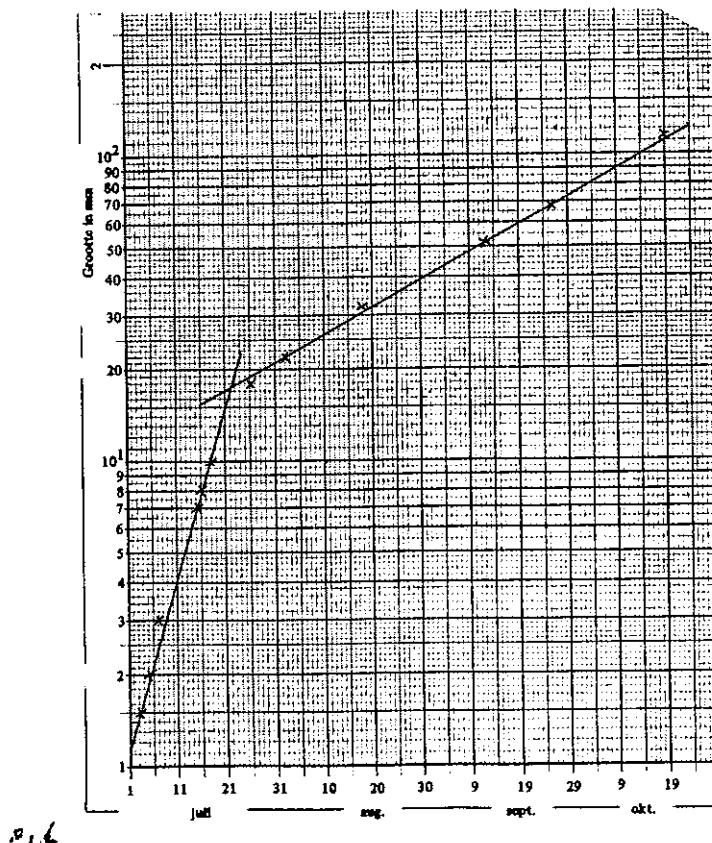
79.e.	1967	1,0
	1968	2,0
	1969	4,0
	1970	8,0
	1971	16,0
	1972	32,0
	1973	64,0
	1974	128,0
	1975	256,0

80.f. De grafieken zijn (bijna) twee evenwijdige lijnen.
Gelijke groeifactoren geven evenwijdige lijnen.

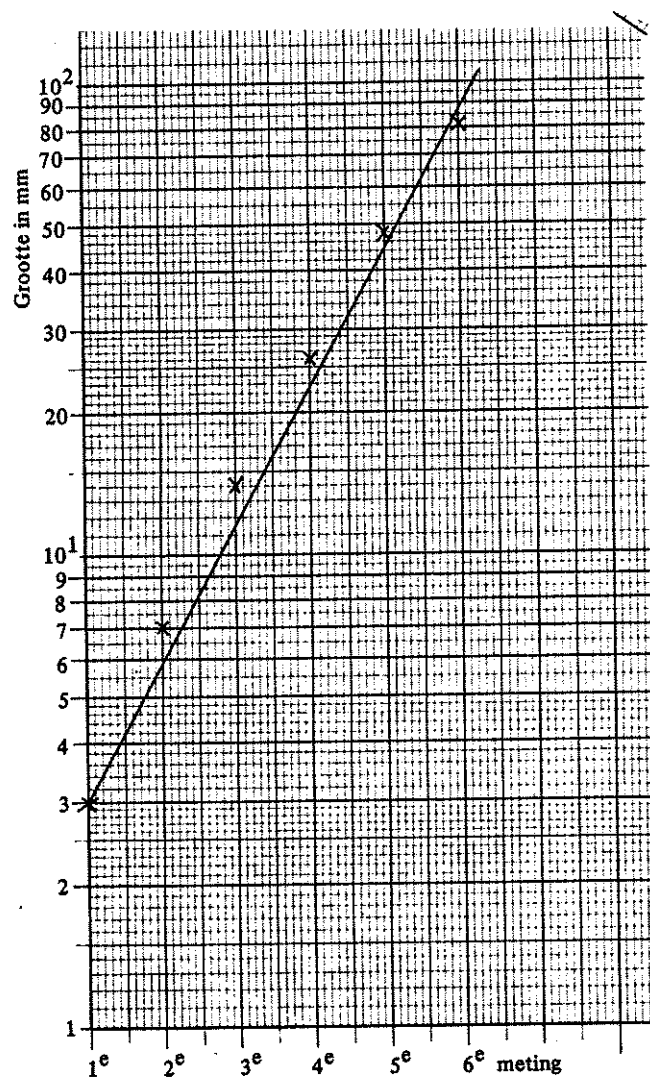
80.g. Exponentieel: Zweden
Redelijk lineair : Tsj. Slowakije (1969 - 1972)

81.a. Als recht lijnen, behalve die van $f: x \rightarrow (1,5)^x - 1$; die is door de
-1 *niet* meer exponentieel.

81.b. Denk eraan: niet de functies tekenen, maar de opgemeten punten hier
gaan tekenen. Aan de hand van die grafieken kunnen we dan misschien
iets over de bijbehorende functies zeggen!



81.b.



81.c. Omdat de beginwaarde nu langs de Y-as is af te lezen, n.l. daar waar de grafiek de Y-as snijdt.

81.d. Omdat de grafiek redelijk te benaderen valt door een rechte lijn.

81.e. Ja, met name vanwege 81.c. Uiteraard geldt dit alleen voor exponentiële functies.

$$83.a. \quad {}^g\log a^3 = {}^g\log a.a.a. = {}^g\log a + {}^g\log a + {}^g\log a = 3 {}^g\log a.$$

$$83.b. \quad {}^g\log \frac{a}{b} + {}^g\log b = {}^g\log a \text{ (volgens (1))}$$

$$83.c. \quad S = \{64\}$$

$$S = \left\{\frac{a^5}{b^3}\right\}$$

$$S = \{\sqrt{3}\}$$

83.d. $S = \{\frac{1}{3}\}$

$S = \{\frac{1}{1000}\}$

$S = \{\frac{2}{3}\}$

84.e. $S = \{13\frac{1}{2}\}$

$S = \{4, -4\}$ (ook neg. oplossing, want x^2 is pos. dus $\log x^2$ bestaat).

$S = \{\frac{3}{2}\sqrt{2}\}$ (géén neg. oplossing, want dan bestaat $\log x$ niet).

84.f. "Kruiselings vermenigvuldigen" levert het antwoord.

84.g. $^{10}\log 2 \cdot ^2\log 3 = ^{10}\log 3.$

$$\left. \begin{array}{l} ^{10}\log 2 = x \iff 10^x = 2 \\ ^2\log 3 = y \iff 2^y = 3 \end{array} \right\} \text{substitutie: } 3 = (10^x)^y = 10^{xy} \text{ (I)}$$

$$^{10}\log 3 = z \iff 10^z = 3 \text{ (II)}$$

Uit (I) en (II) volgt: $xy = z$ klaar.

Het algemene bewijs volgt daar onmiddellijk uit.

84.h. $\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{array}$

85.i. $^2\log 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58$

$^3\log 2 = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63$

$^2\log 27 = \frac{3\log 3}{\log 2} \approx 4,75$

$^3\log 8 = \frac{3\log 2}{\log 3} \approx 1,89$

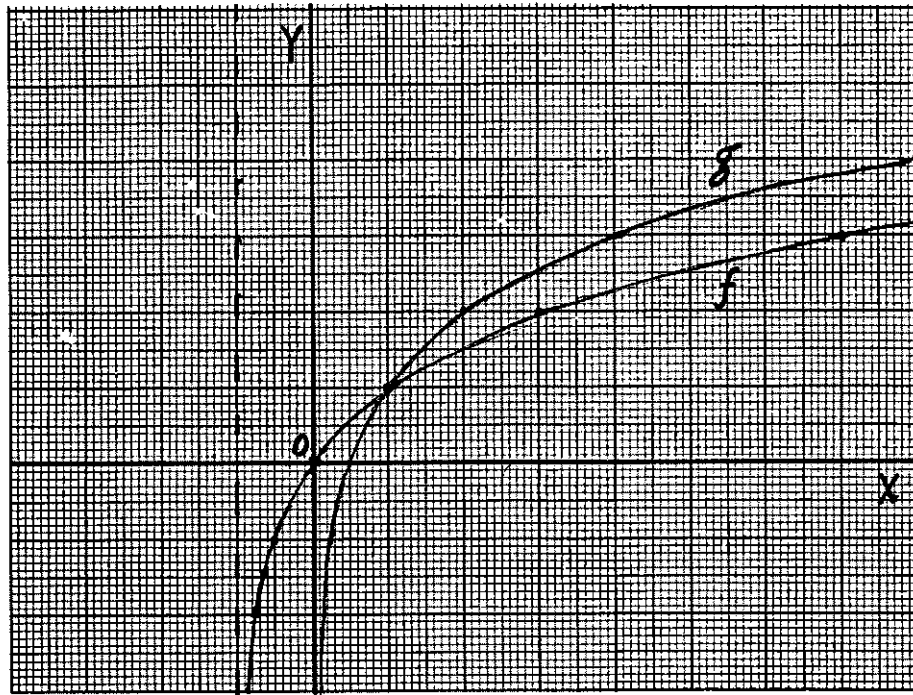
86.a. $^2\log (x+1)$: het tijdstip waarop er $(x+1) \text{ m}^2$ kroos ligt, bij groeifactor 2.

Of als je het wilt vergelijken met $^2\log x$:

het tijdstip waarop er 1 m^2 méér ligt.

$1 + ^2\log x$: één (dag) nadat er $x \text{ m}^2$ was gevormd bij groeifactor 2.

86.b.

86.c. Domein f : $\{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > -1 \}$ Domein g : $\mathbb{R}^+ = \langle 0, \rightarrow \rangle$

86.d. Via grafiek de ongelijkheid na het oplossen van:

$${}^2\log(x+1) = 1 + {}^2\log x.$$

$$S = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x \leq 1 \} = \langle 0, 1]$$

87.e. $S = \langle 0, 9 \rangle$

$$S = \langle 0, \frac{1}{4} \rangle$$

$$S = \langle 4, \rightarrow \rangle$$

87.f. oplossingen: $S = \langle -1, 15 \rangle$

$$S = \langle -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \rangle$$

$$S = \langle 0, 1 \rangle$$

$$S = \langle 2, 2\frac{1}{3} \rangle$$

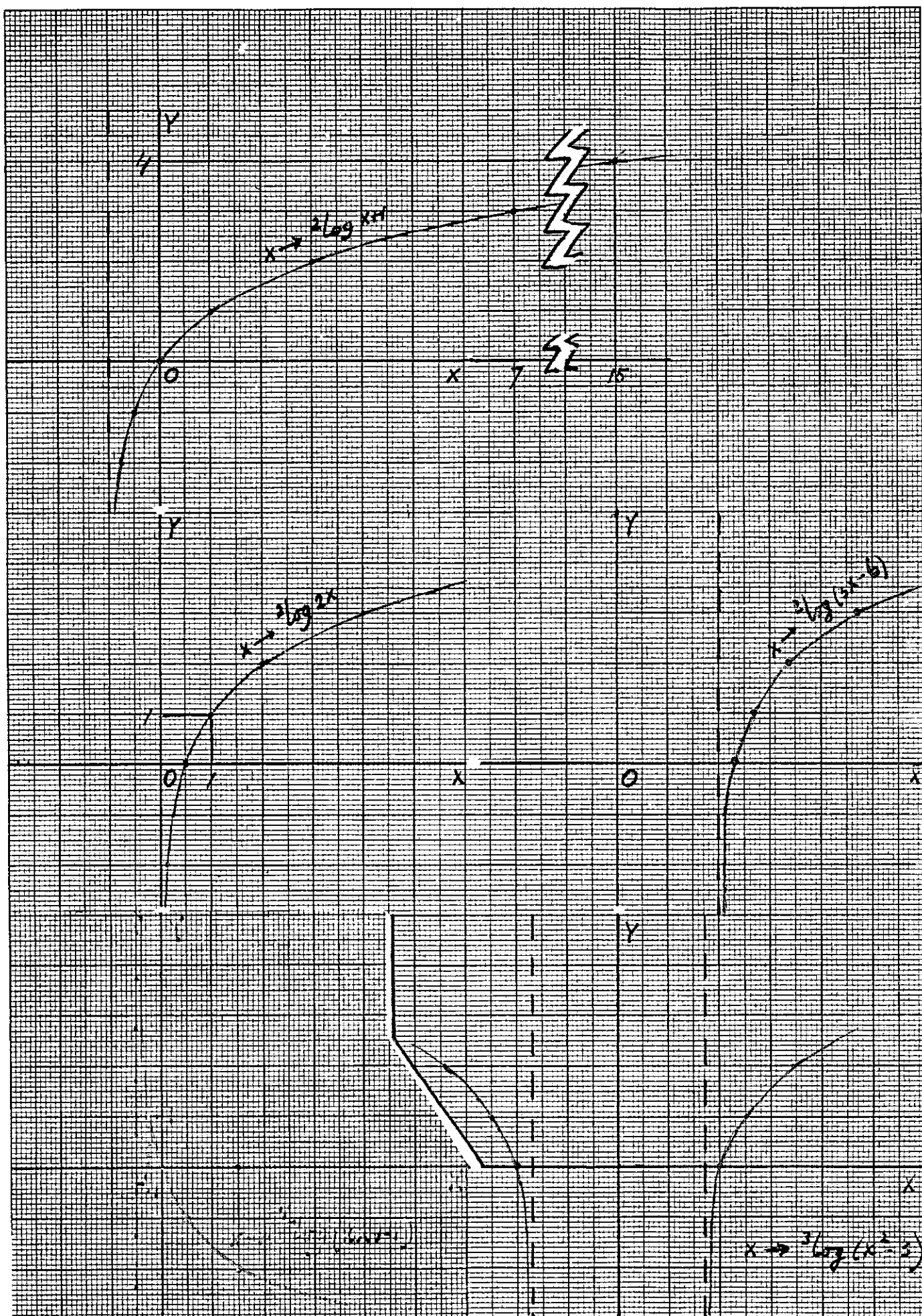
$$S = \langle \leftarrow, -2 \rangle \vee \langle 2, \rightarrow \rangle$$

Grafieken: zie volgende bladzijde.

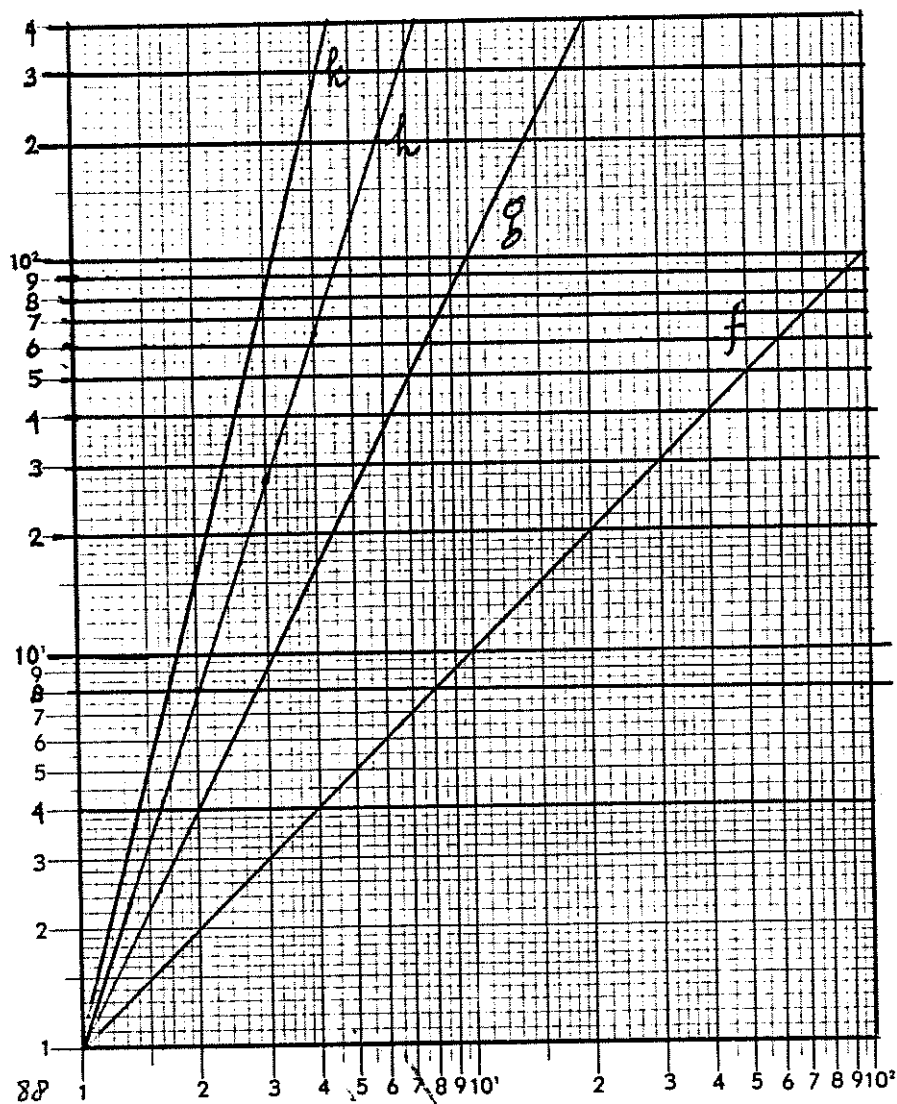
87.g. $2^p = 3^q$ 2^p is altijd even. 3^q nooit.

$$\text{Dus } 2^p \neq 3^q \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

87.f.



- 88.a. Funkties van de vorm $x \rightarrow ax^n$ (machtfunkties) worden op dubbel-logaritmisch papier rechte lijnen.



- 89.b. Laten we het eens aantonen voor $x \rightarrow x^3$

Op dubbellog.papier: $\log x \rightarrow \log x^3$

$$\log x \rightarrow \log x$$

$$\text{ofwel : } y \rightarrow 3y$$

Dus de grafiek wordt een rechte met als richtingscoëfficiënt de exponent van de machtsfunctie.

Als $a \neq 1$ krijgen we (neem b.v. $a = 2$):

$$x \rightarrow 2 x^3$$

$$\log x \rightarrow \log 2 x^3$$

$$\log x \rightarrow \log x^3 + \log 2$$

$$\log x \rightarrow 3 \log x + \log 2$$

$$y \rightarrow 3y + \log 2$$

88.b. vervolg

Dus een lijn evenwijdig aan $y \rightarrow 3y$

waarbij de lijn de Y-as snijdt in 2 (2 langs de Y-as op dubbel-log. papier is immers $\log 2$).

of, algemeen:

$$x \rightarrow ax^n$$

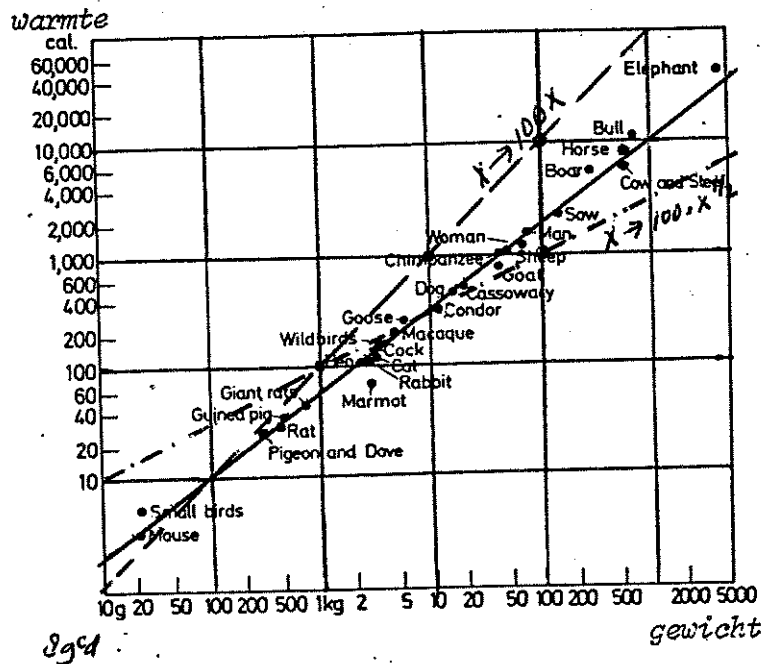
$$\log x \rightarrow \log ax^n$$

$$\log x \rightarrow \log x^n + \log a$$

$$\log x \rightarrow n \log x + \log a$$

$$y \rightarrow ny + c$$

89.c,d.



89.e. tussen de $\frac{1}{2}$ en 1. ($\frac{2}{3}$ eigenlijk).

90.a. tussen 10^{-11} en 10^{-8} m.

90.b. rond 10^{-10} m

90.c. zichtbaar (rond 10^{-6} m)
Klein gedeelte Infrarood (rond 10^{-5} m)
Gedeelte radiostraling (10^{-2} tot bijna 10 m)

90.d. Omdat zij waarnemingen buiten de dampkring kunnen doen, waar alle of vrijwel alle straling nog voorkomt.

90.e. Ongeveer 47 km.

92.f. Ja, bij 10^6 m, dus bij 10^{-4} cm.

- 92.g. Zeer duidelijk, aan de linkerkant van het plaatje, zo van iets meer dan 10^{-1} cm tot ruim 10 m.
- 92.h. Straling met een golflengte tussen $10^2 \text{ \AA}$ en $10 \text{ \AA}$ (10^{-5} cm tot 10^{-5} cm).
- 93.i. Met een golflengte tussen de 10 en $10^3 \text{ \AA}$
- 93.j. Hoe verder weg, des te meer gassen die absorberen, worden tegengekomen.
- 95.k. Dat alle straling voorkomt (over een bepaald interval); dus dat er geen gaten in de grafiek zitten.
- 95.l. Dat verband wordt gegeven door een functie $x \rightarrow ax^u$.
- 95.m. Op logaritmisch papier.
1 procent per jaar afname wil zeggen, exponentiële afname, dus op log. papier een rechte lijn.

