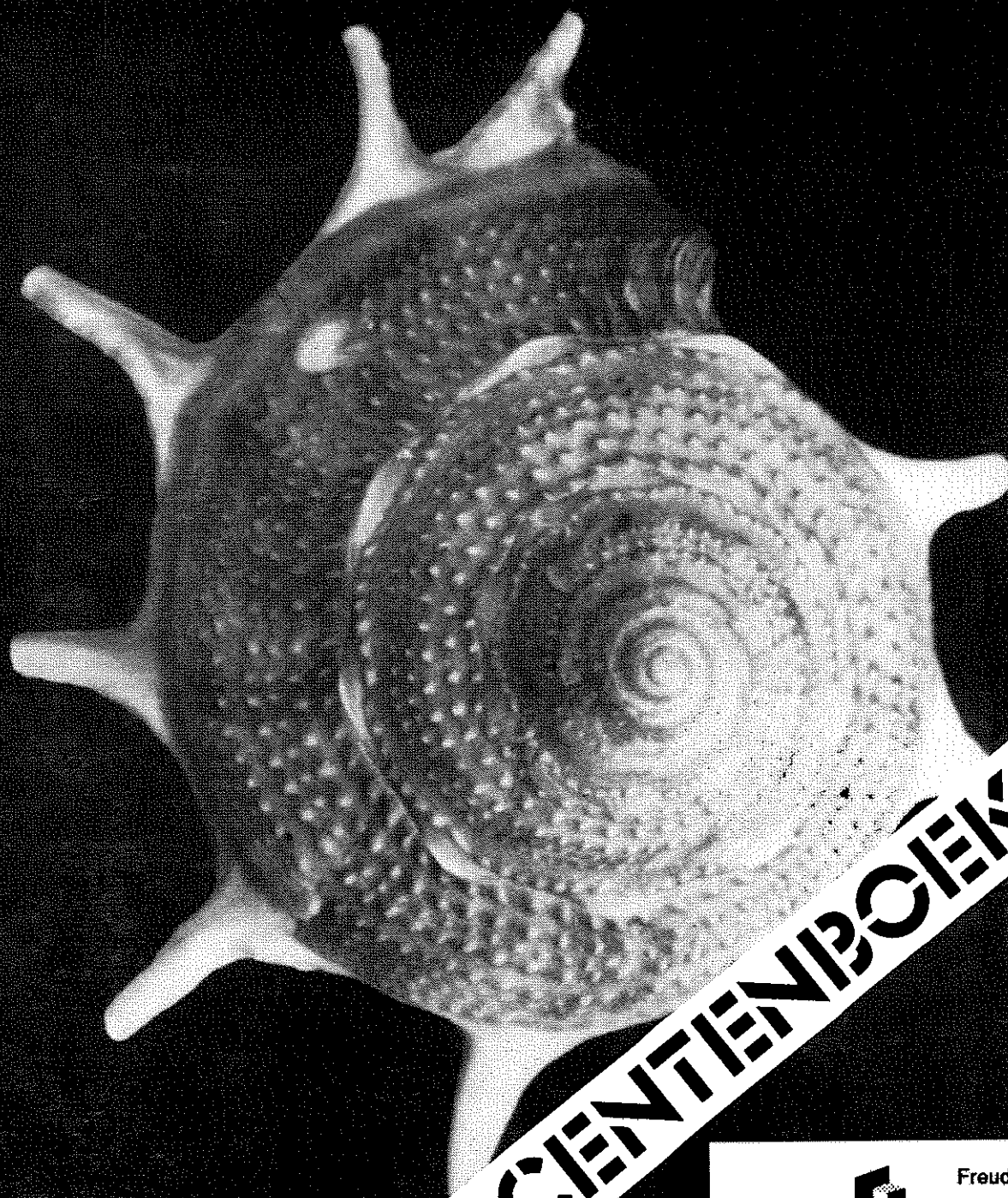


EXPONENTIEN EN LOGARITHMEN



DOCENTENBOEKJE



Freudenthal instituut
Archief

Te gebruiken bij de eerste
druk van zomer 1978.



2e verbeterde versie, april 1979.

Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs
Tiberdreef 4, Utrecht/Overvecht - Tel. (030) 61 16 11

INHOUD

Dit Docentenboekje bevat de volgende onderdelen:

- | | |
|---|---------|
| - Inleiding | blz. 1 |
| - Het boek, van bladzij tot bladzij | blz. 3 |
| - Hoe het groeit | |
| een Wiskrant-artikel van Prof. Van der Blij | blz. 25 |
| - Toetsen | |
| voorbeelden van opgaven voor toetsen | blz. 28 |

Los verkrijgbaar is een uitgebreid antwoordengedeelte dat eventueel aan de leerlingen ter beschikking kan worden gesteld.

Inleiding

INLEIDING

Het boekje "Exponenten en Logaritmen" is in de eerste plaats geschreven voor leerlingen van de 4e klas V.W.O. om hen op een wat andere manier wiskunde te laten doen dan veelal gebruikelijk. Dat "andere" moet dan zijn dat de wiskunde dichter bij de realiteit staat, meer tot de verbeelding sprekend en daardoor hopelijk motiverend wordt gebracht. Met name wordt gedacht aan die leerlingen die niet in een B-richting verder gaan. Tevens lijkt het te gebruiken op de HAVO in de 4e klas, zeker gezien de problemen die met name deze leerlingen hebben wat betreft motivatie. Tenslotte kan het gebruikt worden als stof voor de zogenaamde "ondersteuningswiskunde" zoals die op veel scholen gegeven wordt.

Het leerlingenboekje is tot stand gekomen na proefnemingen op 3 scholen, in totaal in 6 klassen, variërend van Atheneum A tot Gymnasium β. Deze "druk" van het docentenboekje is een sterk verbeterde uitgave, waarbij we dankbaar gebruik hebben gemaakt van de opmerkingen van docenten. Met name willen we noemen Mevr. A. Aukema-Schepel (Lelystad). Hartelijk dank. Op verzoek van verschillende scholen is het antwoordgedeelte nu afzonderlijk te verkrijgen.

WISKUNDIGE DOELEN

In het eerste deel maken leerlingen kennis met allerlei exponentiële functies, al of niet via toepassingen, van de vorm:

$$x \rightarrow b \cdot g^x$$

alsmede iets ingewikkelder vormen.

Daarnaast wordt het domein van deze functie uitgebreid van $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. Tevens zijn er oefeningen in het oplossen van exponentiële vergelijkingen en ongelijkheden, waarbij veel nadruk op de grafische methode ligt.

Het tweede gedeelte introduceert de logaritmische functie als omgekeerde van de exponentiële. Nadat de hoofdeigenschap in 3 fasen is geïntroduceerd volgen eerst oefeningen en het gebruik van logaritmisch en dubbellogaritmisch papier. Daarna komen de afgeleide eigenschappen van de hoofdeigenschap aan bod, afgewisseld met logaritmische ongelijkheden.

Als een soort toegift wordt daarna de logaritmentafel en rekenlineaal behandeld, gezien vanuit een historisch perspectief.

VOORKENNIS

Het boekje is zó geschreven dat het op ieder moment in 4 V.W.O. of 4 HAVO gebruikt kan worden, naast of in plaats van de gebruikelijke leerstof. In het algemeen zal kennis, opgedaan in de onderbouw, voldoende zijn als voorkennis. Met name zijn nodig: functiebegrip, domein, bereik, zelfstandig kunnen maken van grafieken, terwijl het aanbeveling verdient iets te weten over inverse functies, alhoewel dit niet strikt noodzakelijk is.

WELKE WERKWIJZE

Bij de experimenten is gebleken dat het boekje zich leent om op verschillende wijzen te gebruiken. Een zekere mate van samenwerking lijkt wel erg voor de hand liggend. Maar noodzakelijk is het niet. Er was ook een school waarbij de leerlingen zeer zelfstandig werkten, sommigen groepsgewijs, anderen sterk individueel, waarbij de leraar alleen als raadsman optrad. Maar zo af en toe is een klasseggesprek zeer wenselijk. Voor de momenten waarop verwijzen we U verderop in deze handleiding. Maar ook frontaal lesgeven bleek tot in hoge mate mogelijk. Alleen niet (altijd) op de manier: iets vertellen, voorbeeld maken, en daarna sommetjes maken. De toetsing vond op alle drie de scholen op dezelfde wijze plaats.

Voorbeelden van deze toetsen vindt U aan het einde van dit docentenboekje, vlak vóór de antwoorden.

HOEVEEL LESSEN

Deze vraag is zeer moeilijk te beantwoorden, of U moest genoeg nemen met een wel erg globaal: tussen de 11 en 22 uren.

Het is misschien toch wel nuttig hier wat meer over te zeggen. Het grote verschil tussen die 11 en 22 uren zit in het feit dat er om de "normale" wiskundige zaken te behandelen, zonder al te veel aandacht te besteden aan de uitbreiding van $N \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, en aan de toepassingen ongeveer zo'n 11 uur nodig zal zijn. Maar als U wat méér wilt doen, kunt U dit urenaantal flink tot zeer flink uitbreiden, waarschijnlijk wel tot zo'n 25 uur.

We zullen U wat voorbeelden geven van wat mogelijkheden. Dit omdat vooral als U zo'n boekje de eerste keer doorwerkt nog niet precies weet wat U wel en wat U niet leuk vindt.

ZEER BEKNOPT (+ 12 uur)

Veulens, Celdeling, Hr. Bommel (wat ingekort eventueel), Luchtschepen, Asymptoten, Grafieken, Stijgen en Dalen.

Bommel nader bekeken, Luchtschip n.b (ingekort), Logaritme nader bekeken, Enkele oefeningen, Stijgen en Dalen, Hoofdeigenschap nader bekeken, Onge-
lijkheden.

Doet U het op deze manier, dan doet U ongeveer wat "normaal" in de 4e klas gedaan wordt, alhoewel wij het geheel wel wat schraal vinden. Fraaier lijkt ons het volgende programma zoals dat in één der experimentscholen plaats vond.

UITGEBREID (+ 19 uur)

Alles, behalve: Standaardschrijfwijze, Sterrekunde, Halveringstijden, Motorfiets, Bevolkingsgroei, Landbouwgrond, Levensverzekering, Muziek, Bakteriën, Thiosulfaatinjectie, Sterrekunde nader bekeken.

Aan blz. 96-107 werd summier aandacht geschonken, waarbij bleek dat leerlingen de geschiedenis wel degelijk "leuk" vinden.

Overigens zijn er leerlingen die kans zagen tijdens dit tijdsbestek letterlijk "alles" te maken.

Tenslotte: de eerste keer dat U het boekje gebruikt moet U er zeker niet van opkijken als het meer uren kost, dan U begrootte. Maar bent U eenmaal bekend met het pakketje, dan blijken bovenstaande schattingen niet al te optimistisch.

ERVARINGEN

Uw ervaringen, op- en aanmerkingen worden gaarne ingewacht op het IOWO, Tiberdreef 4, Utrecht, tel. 030 - 611611, t.a.v. Drs. Jan de Lange Jzn.

Het Boek

van bladzij

tot bladzij

HET BOEK, VAN BLADZIJDE TOT BLADZIJDE

- 1-4 Het gehele boek is opgehangen aan het begrip "GROEI". Waarbij onder groei niet alleen de toename van iets wordt verstaan, maar ook afname. Dat noemen we dan negatieve groei. Centraal staat dan - natuurlijk - de exponentiële groei, waarbij het begrip groeifactor een belangrijke rol speelt. En dan niet het begrip groeifactor als een faktor die de groei stimuleert, maar zoals gedefinieerd op blz. 3 van het boek, op z'n "leerlings" gezegd: Wat je aan het eind (van een tijdseenheid) hebt, gedeeld door wat je aan het begin hebt.

In het inleidende "Veulen" hoofdstukje komen nog meer zaken aan bod. In de eerste plaats wordt exponentiële groei vergeleken met lineaire groei (die alle leerlingen goed kennen) en bovendien wordt duidelijk dat groei met een vast percentage leidt tot exponentiële groei. Dat percentage wordt vaak de groëivoet genoemd. Verder wordt aangetoond dat $10\% + 10\%$ hier niet gelijk is aan 20% , hetgeen voor veel leerlingen géén overbodige luxe is.

Belangrijk, behalve een goed begrip omtrent de groeifactor, is of de leerlingen nu al zien hoe in het algemeen de formule of het functievoorschrift voor een exponentiële functie er uitziet (vraag 3m).

Op blz. 2 is trouwens nogal wat voorgeprogrammeerd. Dit is gedaan omdat het de inleidende bladzijden zijn en je daarom de leerlingen wat extra houvast wil geven en in de tweede plaats hebben lang niet alle leerlingen ervaringen in het tekenen van grafieken zoals op blz. 2, waarbij langs de X en Y-as verschillende zaken met elkaar worden vergeleken.

- Het lijkt mij verstandig om zowel het begrip groeifactor, als ook de formule (3m) klassikaal te behandelen of bepraten voordat een ieder verder gaat. Tenslotte zijn dit zeer essentiële zaken.

- 5-8 Het hoofdstukje Celdeling levert weinig problemen op. Alhoewel, het laat wel duidelijk zien dat je er met een functievoorschrift niet altijd bent. Het domein is ook zeer belangrijk. Zo kun je natuurlijk géén halve cel krijgen en dat dient tot uiting te komen in het domein.

Verder is het de leerlingen niet altijd even duidelijk dat je met een wiskundig *model* werkt. Immers je gaat er hier vanuit dat alle cellen steeds tegelijkertijd delen. Dat begrip en tevens de "konstante delingstijd" (zie ook "Bakteriën") zijn essentieel om tot dit model te komen.

De vraag is nog of je hier al iets moet vertellen over discrete en continue groei. De woorden zijn met opzet weggelaten, maar duidelijk is voor de leerlingen wel dat de grafiek van de celdeling "anders" is dan b.v. die van veulengroei. Soms is dat verschil niet zo duidelijk. De grafiek van "halveringstijden" (17-19) is die continue of discreet? De discrete of schoksgewijze groei komt o.a. voor als we naar het aantal van b.v. dieren of cellen kijken, terwijl de continue groei voorkomt als we naar het gewicht van een dier kijken, de oppervlakte van een blad, of de lengte van een mens. Overigens verwijzen we hier graag even naar het Wiskrant artikel van Prof. Van der Blij, aan het einde van dit docentenboekje.

Misschien kunt U iets vertellen over de entier-functie in dit verband; en de grafiek van $x \rightarrow 2[x]$ laten zien.

- 9-11 De standaardschrijfwijze is een bladzijde die makkelijk, evenals blz. 10-11, kan worden overgeslagen, maar anderzijds ook weinig tijd kost. Deze manier van getallen schrijven komt ook vaak voor op rekenmachientjes. Sommige van die machientjes hebben ook nog de "ingenieurs notatie". Hierbij is de exponent steeds een drievoud en kunnen er (dus) tot drie cijfers voor decimale punt komen te staan. Vermoedelijk is er een verband met de reeks voorvoeg-

sels bij eenheden: pico-, nano-, micro-, milli-, kilo-, mega-, tera-. Overgang op een ander voorvoegsel vindt meestal plaats bij een faktor 10^3 . Dat blijkt ook uit de tabel op blz. 10. (De Engelsen hebben geen biljard). Uiteraard ligt de keuze van Sterrekunde na de standaardschrijfwijze voor de hand. Gelukkig zouden we willen zeggen, want een gelegenheid om de leerlingen wat meer over de ruimte te vertellen moet natuurlijk aangegrepen worden, nu dit vak al weer jaren geleden van het HBS programma werd geschrapt. Misschien is het goed de hoofdingeling van de ruimte nog even op te halen:

De zon is een doodgewone ster, waaromheen planeten draaien, waarvan de aarde er één is. (Met 1 maan daaromheen).

De ster "zon" zit met ontelbare andere sterren in een groep die we kennen als de "Melkweg". Deze Melkweg heeft een spiraalstructuur, ongeveer als die op blz. 11.

Zo'n melkwegstelsel (in het engels: Galaxy) zit ook weer in een groep en die noemen we in goed nederlands: een cluster.

Voor de leerlingen zijn de reusachtige leegte, alsmede de enorme afstanden steeds weer een verrassing.

- 12-16 Een verhaaltje om 2^x , met x positief rationaal in te voeren. Ogenschijnlijk een niet erg reële kontekst, maar dat valt best mee. In feite is het niets anders dan een bewerking van het alom bekende "kroosgroei" model. Over het algemeen waren de reacties positief op "Bommel", alhoewel docenten het wel eens te gezocht of te ludiek vinden. Hoe dan ook, wiskundig is het een belangrijk gedeelte. Met name het laatste gedeelte van blz. 13 verdient veel aandacht.

- Gezien de ervaringen lijkt het goed ons ook hier in ieder geval klassikaal aandacht aan te schenken. Zelf het probleem oplossen lukt lang niet iedereen, het - achteraf - snappen wel. Dat blijkt vaak weer bij vraag 14r.

- 17-19 De halveringstijden. Een toepassing voor de B-leerlingen met name. Eén die overgeslagen kan worden zonder nadelige-wiskunde-gevolgen. Overigens levert het stukje genoeg gesprekstof op. B.v. over het begrip "tijd". Zo wordt er b.v. gesuggereerd dat de zonnejaren-leeftijd de werkelijke leeftijd is. De jaarringentijd telt "echte jaren", bepaald door de omloop van de aarde om de zon. De ^{14}C -tijd is behept met meetfouten en andere onzekerheden (zie de tekst); daarom lijkt de jaarringentijd beter. Maar de vraag "Wat is de echte tijd?" is niet te beantwoorden. Tijdmeting gebeurt altijd met één of ander proces als maatstaf. Dit kan een astronomisch verschijnsel zijn: as-draaiing van de aarde of de draaiing van de aarde om de zon. Het kan ook een proces op veel kleinere schaal zijn: slinger van een klok, trilling van een atoom. Lang heeft men de voorkeur gegeven aan astronomische verschijnselen als maatstaf voor tijd. Sinds 1967 is de *seconde* vastgelegd als de tijdsduur van 9 192 631 770 trillingen van een cesium-133 atoom. De snelheid waarmee de aarde om zijn as wentelt blijkt niet konstant te zijn vergeleken met atoomklokken, die berusten op het tellen van trillingen van atomen. Om toch de dag met de dagelijkse gang van de zon te laten corresponderen zijn er korrekties nodig. Zo had het jaar 1977 een extra seconde. Je kunt je afvragen bij welk proces welke tijdseenheid hoort. Deze vraag is minder gemakkelijk dan het op het eerste gezicht lijkt: De *dag* wordt niet alleen door de aswenteling van de aarde bepaald; ook de omloop van de aarde om de zon is erbij betrokken! Omdat de afstand aarde-zon niet konstant is, moeten de variaties in de lengte van de zonnedag uitgemiddeld worden. Precies gekoppeld aan de aswenteling van de aarde is de *sterretijd*. Als het *jaar* precies de tijdsduur van één omwenteling van de aarde om de zon zou zijn, zou het niet uit een geheel aantal dagen bestaan. Dat wil men wel

en daarom zitten we met een benaderingsprocedure met schrikkeljaren. De *jaarringenmethode* telt seizoenscycli, geen jaren. Het verschil is niet groot; het wordt veroorzaakt door de precessie van de aardas.

Al de hierboven vermelde processen zijn periodiek. Tijdmeting berust op het tellen van perioden. Bij de ^{14}C -methode tel je geen tijdseenheden; het is geen periodiek proces. Ook bij zandlopers en waterklokken gebruikt men niet-periodieke processen (al zul je voor meting van lange tijdsintervallen het proces moeten herhalen; dan komt er toch weer een periodiciteit).

Het bepalen van de ouderdom via de jaarringen gebeurt met name veel in de V.S. en Zweden. Het heet: DENDROCHRONOLOGIE.

Uit de foto op blz. 19 blijkt al dat zo'n boom behoorlijk oud kan worden. Om tot nog langere tijdschalen te komen, koppelt men de jongste ring van een oude boom aan de oudste van een jonge.

Overigens is het begrip "halveringstijd" natuurlijk niet gebonden aan de ^{14}C -methode. Het is net zoiets algemeen als "verdubbelingstijd" dat uitgebreider terugkomt op blz. 32/33. Het lijkt dan ook zinvol om als men dit hoofdstukje doet, ook blz. 32/33 te behandelen.

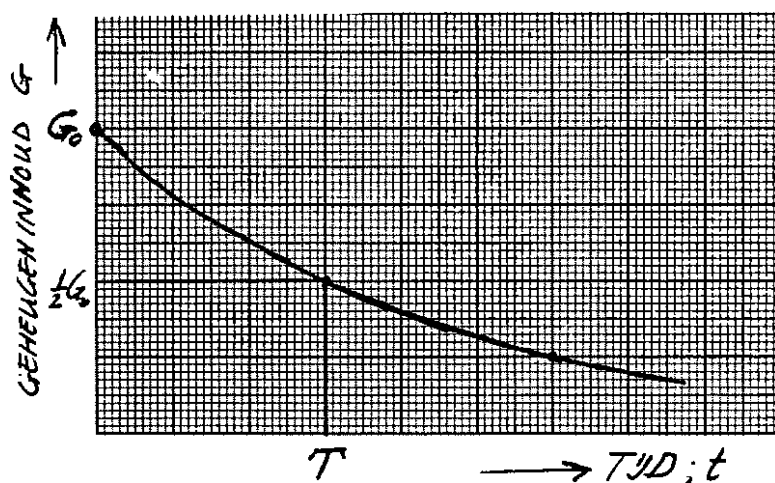
Zoals gezegd "halveringstijden" vind je overal. We noemen twee niet zo bekende voorbeelden.

Het "vergeten" verloopt, volgens vele kenners, ook exponentiël volgens de formule:

$$G = G_0 \cdot e^{-mt}$$

waarin G_0 de geheugeninhoud voorstelt op het tijdstip $t = 0$ en m een maat is voor de vervalsnelheid. Dat de halveringstijd voor een ieder weer anders is, weten we uit ervaring. De grootte van G_0 is (ongeveer) bekend en ligt in de buurt van 10^7 à 10^8 bit.

(Bit: informatie, herleid tot de keuze uit twee alternatieven, de binaire keuze (*binary digit*)).

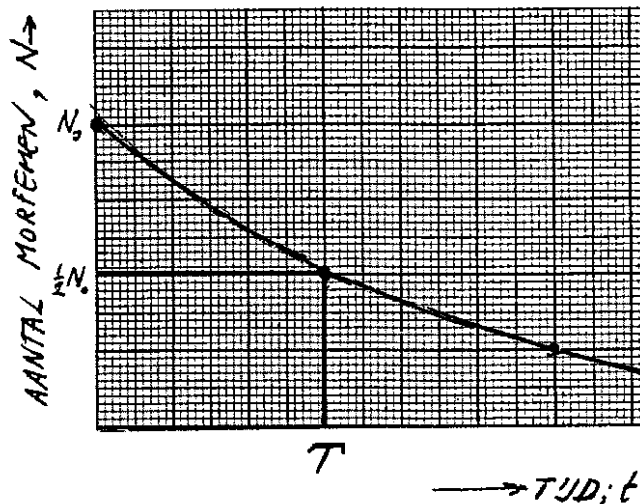


T = halveringstijd.

Een geheel andere "halveringstijd" treffen we aan bij de taalwetenschappen. Een morfeem of woordstam is het kleinste gedeelte van een woord (woordstam) dat nog betekenis op zichzelf heeft. Morfemen hebben ook niet het eeuwige leven. Volgens sommigen vindt ook dit verval exponentiël plaats. Dus weer volgens de formule:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

en volgens het plaatje:



T = halveringstijd.

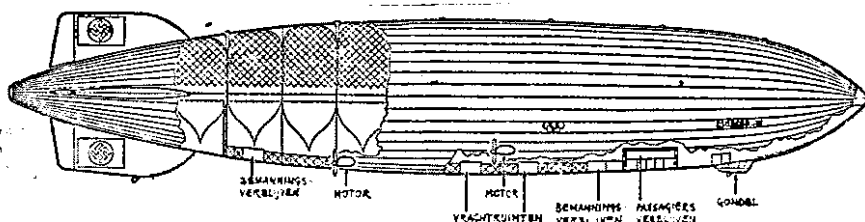
waarbij: N_0 het oorspronkelijke aantal morfemen en λ weer een maat is voor de vervalsnelheid en dus ook wel vervalconstante wordt genoemd. Volgens eerder vermeldde deskundige (R.B. Lees) kon met behulp van het beschikbare materiaal bij de overgang van het Egyptisch naar het Koptisch de halveringstijd gesteld worden op 760 jaar en van het Oudhoogduits naar het Nieuwhoogduits zowel als bij het Oudnoors naar Zweeds op 850 jaar. Hij heeft deze methode ook - met succes - toegepast op de levensduur van talen die tot een gemeenschappelijke moedertaal herleid kunnen worden. Voor het paar Duits-Engels vond hij 1236(!) jaar.

Overigens is in ons boekje geen sprake van e als grondtal. Dus niet λ is bij ons de maat voor vervalsnelheid. Wij zouden schrijven:

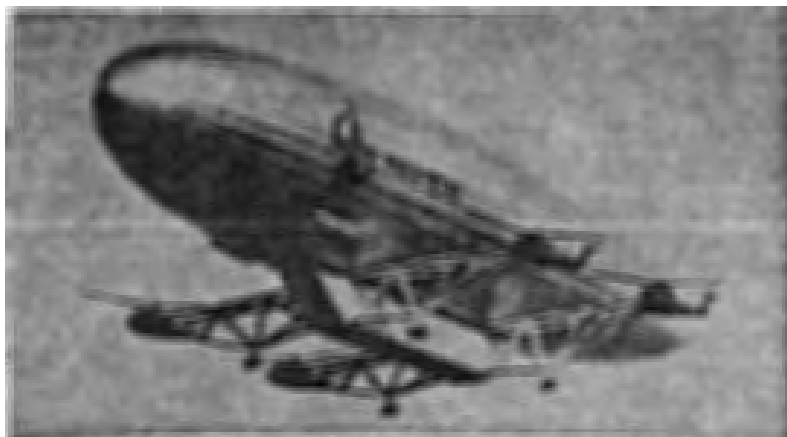
$$N = N_0 \cdot g^t$$

waarbij g groeifactor en als zodanig een maat voor de verval (groei) snelheid. Bij "verval" hebben we dan voor g : $0 < g < 1$.

- 20-21 De luchtschepen leveren niet te veel moeilijkheden op. Dit voorbeeld komt bij de logaritmen weer terug en dient in beide gevallen als voorbeeld van negatieve groei ($0 < g < 1$). Dat was "halveringstijd" ook al, maar daarvan vonden we de kontekst minder geschikt voor "alle" leerlingen dan de luchtschepen. Enige achtergrondinformatie. De 50% lekkage in 10 dagen is juist, in de beginjaren, dat wil zeggen zo rond 1900. De 2 foto's op blz. 20 dateren uit de dertiger jaren, toen de lekkage al flink onder de duim was. Het draaggas zit *niet* direkt onder de huid van het luchtschip, maar in losse gaszakken, die samen zo'n beetje het hele schip opvulden. De "Hindenburg" had er b.v. 16.



De Hindenburg, waarbij duidelijk 4 van de 16 gaszakken zichtbaar zijn.



Een foto van een model van het PIASECKI HELI-STAT projekt uit 1977/1978 waarbij men de gunstige eigenschappen van luchtschepen en helikopters probeert te combineren.

Het lijkt niet uitgesloten dat luchtschepen in de toekomst nog een belangrijke rol gaan spelen in het luchtverkeertransport. De vele ongelukken in de vóóroorlogse jaren waren vaak te voorkomen geweest. Zo hadden de Duitsers waterstofgas in hun ballonnen, wat zeer brandgevaarlijk was (zie foto), maar de Amerikanen weigerden helium te leveren. En verongelukte de R-100 (zie foto) doordat het zo nodig snel af moest en veel te luxe en zwaar was uitgerust.

- 22 De asymptoten. Voor 4e klas leerlingen vinden we niet nodig hier een formule definitie van een asymptoot te geven. Dat is bovendien allesbehalve eenvoudig. Het daadwerkelijk kunnen herkennen van een asymptoot leek ons voldoende.
- 23 Iets soortgelijks vinden we op blz. 23. Je kunt natuurlijk tegen de leerlingen zeggen: "Nou jongens, die exponenten, dat zit wel snor in R". Maar het leek ons beter toch even aan te geven waar het probleem zit en hoe je het toch tamelijk aannemelijk kunt oplossen.
- 24-29 Deze bladzijden leveren weinig problemen. Hoogstens nog de opmerking dat $a = 1$ uitgesloten is. Als je leerlingen vraagt waarom dat er zo staat (in het kader op blz. 27), geven ze meestal als antwoord: "dan is er immers geen groei". Overigens wordt hier, bij de logaritmen, nog nader op ingegaan en wel op blz. 67.
- 30-50 Uit de nu volgende serie toepassingen kunt U Uw keuze maken. Dat wil ook zeggen dat U alles over kunt slaan, maar evengoed ook alles maken. Enkele suggesties willen we wel doen. Eerst een indeling naar schoolvakken:

Biologie	: Motten, Zeesterren, Spiralen.
Economie	: Motorflets, Levensverzekering.
Aardrijkskunde	: Bevolkingsgroei, Landbouwgrond.
Muziek	: Muziek.

Dit kan een aanwijzing geven welke onderwerpen U wilt behandelen.

Wilt U iets vertellen over verdubbelingstijden, dan moet U bevolkingsgroei doen. Daarbij goed aansluitend is Landbouwgrond, maar de hulp van een rekenmachine of computer is wel nodig. Overigens is er een vuistregeltje om verdubbelingstijden te schatten als het percentage bekend is:

$$T \approx \frac{70}{p} \quad \begin{array}{l} T: \text{verdubbelingstijd} \\ p: \text{percentage} \end{array}$$

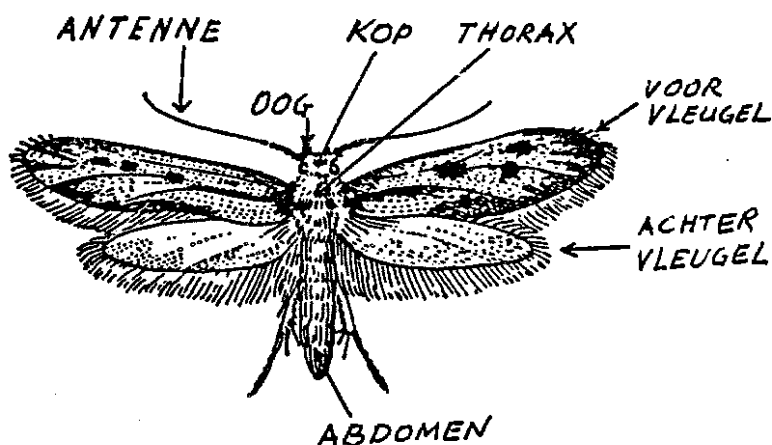
Over die wereldbevolking wordt trouwens veel onzin verkondigd. Ook door serieuze instellingen als b.v. de U.N.O. (V.N.). Volgens de grafiek van blz. 32, gebruikt o.a. door de Club van Rome, wordt een wereldbevolking van 6 miljard voorspeld voor 2000. Wijzelf schatten

5,6 miljard in het voorbeeld "Landbouwgrond" (zie antwoorden). De laatste schatting (juli 1978) van de V.N. is 5,8 miljard, met daarbij de aantekening dat de groei niet meer zo super-exponentieel zal zijn.

Niet al te lang geleden werd geschat dat de wereldbevolking in het laatste "kwartaal" van de volgende eeuw zo'n 80 miljard zou bedragen. Nu rekenen dezelfde experts ons voor dat het slechts 12 tot 15 miljard zal zijn. Dus ruim binnen de 16 miljard die te voeden zouden zijn volgens het model van "Landbouwgrond". Dat "voeden" zou dan wel wat eerlijker moeten dan nu, want nu beschikt 30% van de wereldbevolking over 70% van de hulpbronnen. Voor de meer economisch ingestelden leveren de problemen "Motorfiets" en "Leveringsverzekering" weinig problemen en kosten ook niet veel tijd. Ongetwijfeld kunt U via Uw economie-collega meer van dit soort voorbeelden krijgen.

De biologietoepassingen spreken de meeste leerlingen nogal aan, vanwege de verrassing dat er zoveel wiskunde in de biologie zit. Ook lenen deze opdrachten zich goed voor groepswork. Tenslotte zit er wel heel wat werk aan. Enige opmerkingen.

Bij het plaatje van de mot op blz. 30 past nog wel commentaar. . Het lichaam van de meeste insektensoorten (zo'n kleine miljoen op dit moment) bestaat uit 3 delen: de kop, het borststuk (thorax) en het achterlijf (abdomen):



Verder treffen we aan: de antennes, voor het opvangen van geluidsgolven, de ogen, zoals bekend facetogen. Deze zijn zeer gevoelig voor beweging. Het kan uit wel 4000 facetten bestaan, die ieder als enkelvoudig oog werken. Verder de voor- en achtervleugels en de geledede poten (meestal 6 stuks). De voortplantingsorganen zitten in het achterlijf. De paring verloopt ongeveer als volgt:

een mannelijke mot speurt het vrouwtje naar keuze op. Die verspreidt namelijk een bijzondere geur via een klier aan één van haar poten. Via zijn zintuig-ontvangers op de antennes neemt de man dat waar. Na de copulatie, in de lucht, zoekt het vrouwtje een geschikte plaats om haar eitjes te leggen, 150 eieren per keer zoals we zagen.

Het mottenprobleem verrast door de grote hoeveelheid opgevreten wol. De zeesterren hebben hele andere problemen. Althans de opgaven daarover. Zo hebben veel leerlingen moeite met de grafiek, omdat de meetpunten onderling niet op gelijke afstand liggen. Ze zijn geneigd steeds 1 cm verder een kruisje te zetten. Verder is lang niet iedereen geweldig onder de indruk van het kloppen van de wiskundige grafiek met de zeester-grafiek. Zoals een meisje zei: "De ster heeft zich helemaal niet aan de grafiek ge-

houden". Een discussie over wiskundige modellen, de voor- en nadelen hiervan lijkt hier zeer op z'n plaats.

Dat de benadering over de eerste maand gegeven wordt door

$$f : x \mapsto (1,5)^x - 1$$

en dus *niet* exponentieel is, moet wel benadrukt worden. Die -1 zit er hier bij omdat de grafiek dan in (0,0) kan beginnen. Dat ook een ander wiskundig model mogelijk is blijkt later als we dit voorbeeld op logaritmisch papier gaan maken (blz. 82).

Voor nadere bijzonderheden over zeesterren en schelpen, zie bij blz. 73/82.

De Spiralen (I) leveren weinig problemen op, terwijl bij Spiralen (II) weer duidelijk wordt dat je wiskundig model niet meer is dan een - goede - benadering van de werkelijkheid. Met een rekenmachientje is er trouwens veel plezier te beleven aan Spiralen (II).

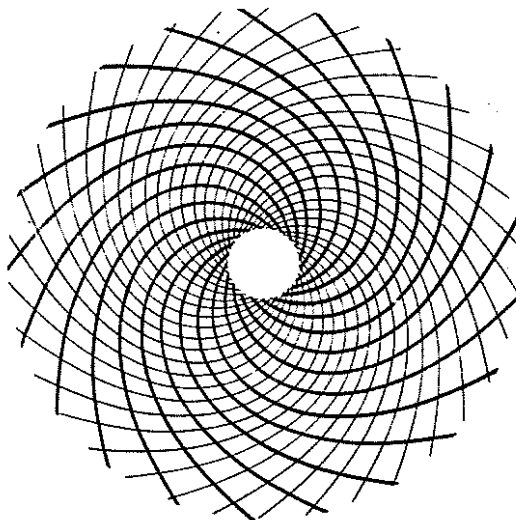
De spiraal wordt algemeen als de mooiste wiskundige kromme beschouwd. We hebben in de leerlingentekst al gezien hoe je zo'n kromme konstrueert. Ook hebben we spiralen gezien bij de Composieten (blz. 65), denneappel (39) en verder is ook de ananas een bekend voorbeeld. Er zit echter meer achter spiralen.

De meeste van ons kennen de Fibonacci-getallen wel:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

waarbij ieder volgend getal de som is van de voorgaande twee.

Nu bevat het hart van de zonnebloem 21 spiralen linksom (vanuit centrum) en 34 spiralen rechtsom.



De denneappel 5 en 8 en de ananas 8 en 13. Allemaal Fibonacci-getallen!

Als we de rij Fibonacci-getallen voortzetten blijkt er een limiet te zijn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$$

Deze limiet is ongeveer 1,6180.

Dit is eenvoudig met een zakrekenmachientje te zien. We vinden:

$1 > 1$
 $1 > 2$
 $2 > 1,5$
 $3 > 1,6667$
 $5 > 1,6$
 $8 > 1,625$
 $13 > 1,6154$
 $21 > 1,6190$
 $34 > 1,6176$
 $55 > 1,6182$
 $89 > 1,6180$
 $144 > 1,6181$
 $233 > 1,6180$
 $377 > 1,6180$
 610
 $\cdot$
 $\cdot$
 $\cdot$

Deze limiet op zijn beurt is weer niets anders dan de *gouden snede*.

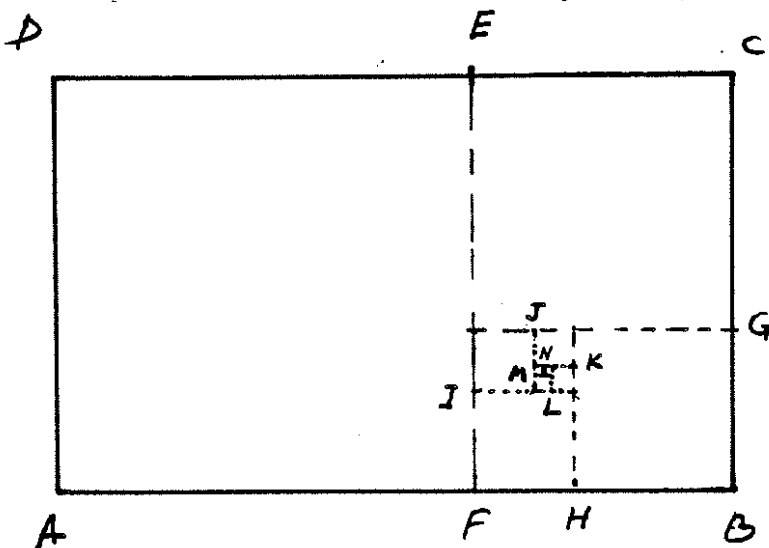
De gouden snede:



als geldt: $AB : AC = AC : CB$.

Waarom is $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

Laten we eens een rechthoek tekenen vanuit de gouden snede, de zogenaamde gouden rechthoek:



dus

$$DC : DE = DE : EC$$

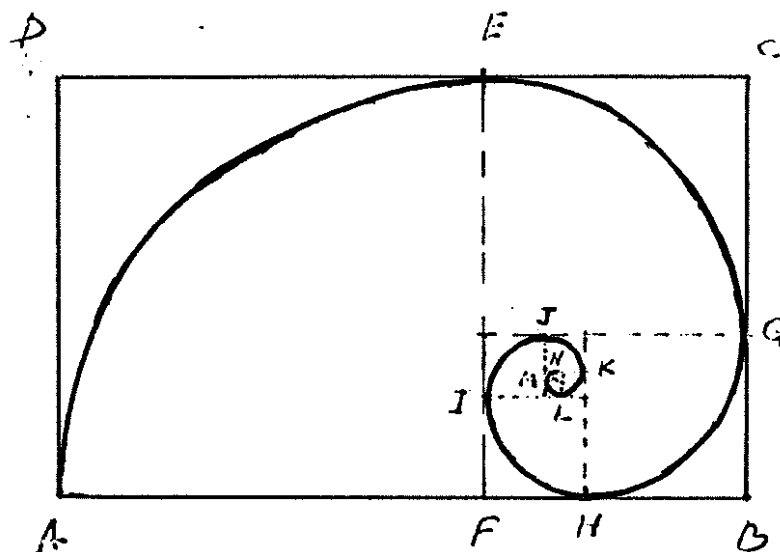
en

$$DE = AD.$$

Stel $\frac{DC}{DE} = \frac{DE}{EC} = \psi$.

Teken vervolgens de lijn door E, evenwijdig aan AD en dan geldt dat ook EFBC een gouden rechthoek is. Daar halen we weer een vierkant vanaf. Dit zetten we voort. Als we nu de lengtes van de opeenvolgende vierkantjes vergelijken, vanaf de kleinste getekende, vinden we: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (DE), kortom de reeks van Fibonacci.

Tekenen we ten slotte een spiraal door de punten A, E, G, H, I, J, K, L, M en N dan vinden we een logaritmische spiraal.



Overigens kan uit de gulden snede onmiddellijk ψ worden berekend:

$$\begin{aligned} \text{Stel } AC &= x \\ BC &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Dus gulden snede: } \frac{AC}{BC} = x (= \psi).$$

$$\text{Dan: } \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \rightarrow x = 1,6180$$

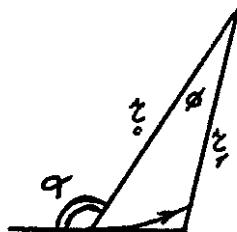
$$\text{of } \psi = 1,6180$$

hetgeen weer geheel klopt met de waarde gevonden bij Fibonacci.

We hebben hier slechts een tipje van de sluier opgelicht. Stof tot overdenken genoeg dachten we.

Bij Spiralen (III).

Duidelijk zal zijn dat je bij 90° een cirkel beschrijft. Als je wat preciezer wilt werken bekijken we de vlucht over een klein hoekje ϕ .



Voor die ϕ benader je de baan door een raaklijn; met behulp van de sinusregel vind je dan voor de verkorting:

$$\frac{r_1}{r_0} \approx \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\sin(\alpha - \phi)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \phi)} ; \text{ neem b.v. } \psi = 5^\circ \Rightarrow n = 72 \text{ dus } \frac{r_1}{r_0} = \frac{\sin 120}{\sin 115} \approx 0,95$$

Als je nu $\phi = \frac{2\pi}{n}$ neemt, met n geheel en niet "al te klein". De verkortingsfactor voor een hele omwenteling is nu ongeveer:

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \frac{2\pi}{n})} \right)^n ; \text{ voor } n = 72 \text{ is dit ongeveer } 0,0248.$$

Aannemelijk is dan dat de verkortingsfaktor precies gelijk is aan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \frac{2\pi}{n})} \right)^n$$

Tenslotte wat betreft het eerste deel, het hoofdstukje "Muziek". Een pittig hoofdstukje met een toch wel verrassend resultaat.

Voor de liefhebbers hier nog iets, waarbij een gitaar met bespeler wel aanwezig dient te zijn:

Pythagoras heeft zich al bezig gehouden met de problemen van het stemmen.

Hij ging uit van de reine quint en het octaaf.

Reine quint frekwentieverhouding 2 : 3

Octaaf " " 1 : 2

Pythagoras had waarschijnlijk geen weet van de boventonentheorie op blz. 46. Zijn door de schoonheid der getallen geïnspireerde theorie is wel in overeenstemming met de boventonen.

De stemming is als volgt bij Pythagoras:

(onder de tonen staan frekwentieverhoudingsgetallen)

C	E	G	C	D	A	C	E
1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	4	$\frac{81}{16}$	

De hoge E in dit overzichtje heeft $\frac{81}{16}$ als frequentieverhoudingsgetal, d.w.z. $\frac{81}{16}$ zo grote frequentie als grondtoon C.

De vijfde boventoon van C heeft 5 als frequentieverhoudingsgetal; dus 5x zo grote frequentie als grondtoon C.

Als je in deze stemwijze de laagste C en E laat samenklinken, is het resultaat niet om aan te horen, omdat de 5de boventoon van de C vlak aan zit tegen de vierde boventoon van de E.

Dat betekent dat harmonieën in deze stemwijze slechts quinten en octaven zijn.

Wil je de tertsen harmonisch laten klinken, dan moet de stemming getempereerd worden, d.w.z. benaderen van een zo goed mogelijke klank.

Voor dit tempereren zijn verschillende mogelijkheden. De z.g. "getempereerde stemwijze" is de laatste eeuw algemeen in de westerse muziek in gebruik.

De middentoonstemming dateert uit de renaissance.

	Pythagoras	Middentoonstemming	Getempereerd
Octaaf	1 : 2	1 : 2	1 : 2
Quint	2 : 3	1 : $\sqrt[4]{5}$	1 : $2^{7/12}$
Terts	64 : 81	4 : 5	1 : $\sqrt[3]{2}$

Bij de middentoonstemming wordt uitgegaan van goede samenklank van de tertsen en het octaaf, met de quint wordt gerommeld.

Tussen de lage C en de ruim twee octaven hogere E zitten 4 quinten. Geef ze elk $\sqrt[4]{5}$ zouden wij nu zeggen. Toen werkte men met benaderingen.

Bij de getempereerde stemwijze gaan we uit van goede samenklank van het octaaf. De quint en de tertsen worden benaderd, door alle 12 afstanden gelijk te maken $\sqrt[12]{2}$.

De quint krijgt $2^{7/12}$, je kunt ook zeggen: "Er gaan 12 quinten in 7 octaven".

De tertsen krijgt $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$. Je kunt ook zeggen: "Er gaan 3 tertsen in een octaaf".

Benaderingen:

De getempereerde quint $2^{7/12} \approx 1,498$.

De reine quint bij Pythagoras $\frac{3}{2}$.

De quint in middentoonstemming $\sqrt[5]{5} \approx 1,495$

$$\sqrt[5]{5} < 2^{7/12} < \frac{3}{2}$$

De getempereerde quint is zuiverder dan de quint in middentoonstemming.

$$\frac{5}{4} < \sqrt[3]{2} < \frac{81}{64}$$

De getempereerde tertsklinkt zuiverder dan de tertsbij Pythagoras.

- 51-57 - De invoering van de logaritme vindt hier plaats, als inverse, maar toch op een andere wijze dan veelal gebruikelijk. Zeker als men al kennis heeft van logaritmen, verdient het aanbeveling deze bladzijden goed voor te bereiden.

Vraag a) levert geen probleem. 3,3 wordt algemeen als antwoord gegeven. Maar let vooral op vraag b). Op welk moment ligt er 20 m^2 .

Het "goede" antwoord luidt: 1 dag later, want de groeifactor is 2, dus verdubbeling (van 10 naar 20) duurt precies één dag. U ziet hier dus het begrip groeifactor weer een belangrijke rol spelen.

Mensen die al eerder logaritmen hebben gehad, hebben wel eens de neiging om de vraag op te lossen door te denken dat het antwoord tussen $^2\log 16$ en $^2\log 32$ inligt, of als ze de logaritmen echt nog niet willen gebruiken, tussen de 4 en de 5.

Als de stap van a) naar b), met behulp van de groeifactor met succes gemaakt is, levert de rest van deze bladzijden nauwelijks problemen.

Wel verdient vraag 53g) wat nadere aandacht. Aangezien de hoofdeigenschap nog niet ter sprake is gekomen, is dit antwoord fout:

$$^2\log 2 + 1 = ^2\log 3 + ^2\log 2 = ^2\log 3 \cdot 2 = ^2\log 6.$$

Wel: $^2\log 3$ is het tijdstip waarop de oppervlakte 3 m^2 is.

$^2\log 3 + 1$ is het tijdstip een dag later en daar de groeifactor 2 is, is de oppervlakte nu 6 m^2 . Het bijbehorende tijdstip is $^2\log 6$.

Voor de verklaring van 56k), zie het antwoordengedeelte.

Tenslotte nog wat algemenere opmerkingen over deze bladzijden.

De ingang via het konkrete groeiproces biedt de mogelijkheid om een aantal zaken een konkrete basis te geven:

- Bij grotere oppervlakten behoren éénvoudig latere tijdstippen en v.v.

$$\text{"Dus"} \quad 2^x > 2^y \Leftrightarrow x > y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$\text{en } ^2\log x > ^2\log y \Leftrightarrow x > y \quad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

- Eén "meting" bij dit proces levert één koppel (tijdstip, oppervlakte). Als je de grafiek wilt tekenen kun je kiezen wat langs de X-as en wat langs de Y-as komt te staan. Het gaat daarbij om een keuze tussen twee functies die elkaars inverse zijn; de grafieken zijn elkaars gespiegelde in de rechte $Y = X$.

- 59-60 Nadat de leerlingen duidelijk is geworden (op blz. 53,56) dat er misschien wel zo'n regel is als $\log a + \log b = \log a \cdot b$, wordt dat hier verder uitgediept, zonder dat we nu direkt een "bewijs" leveren. Deze bladzijde geeft overigens verrassende resultaten. Een - groot - gedeelte heeft direkt of na enig nadenken door dat je tijden bij elkaar moet optellen. Degene die de tijden met

elkaar willen vermenigvuligen worden, bijna allemaal, snel door de anderen overtuigd. Slechts een enkeling laat zich pas door de leraar overtuigen. Misschien is het wel leuk om te vertellen dat vraag a) uitgeprobeerd is op - laten we het wat onvriendelijk zeggen - wiskunde-analfabeten. Verrassend was dat de meesten tot het goede antwoord - verzesvoudiging in $A + B$ dagen - kwamen. Misschien was het voor hen een voordeel dat ze - nog - minder van wiskunde wisten dan Uw leerlingen.

De leerlingen zijn trouwens nogal geneigd om deze bladzijde als een "bewijs" van de hoofdstelling te aanvaarden.

61-65 Geven geen aanleiding tot kommentaar.

66 Als U erg slimme figuren in de klas hebt, kunt U misschien wat meer aandacht besteden aan het feit dat:

Als f een *stijgende* funktie is, dan heeft f een inverse funktie g die ook *stijgend* is.

Van deze algemene regel kunnen twee bewijzen worden behandeld, namelijk een meetkundig bewijs, en een nogal abstrakt bewijs.

Bij het meetkundig bewijs wordt gebruik gemaakt van de eigenschap dat de grafiek van een inverteerbare funktie na spiegeling in de lijn $Y = X$ overgaat in de grafiek van de inverse funktie.

Bij het abstrakte algebraïsche bewijs wordt teruggevallen op de abstrakte definities van funktie, stijgende funktie, bijektieve funktie en inverse funktie.

Maar de stelling wordt vooral duidelijk uit het volgende schema:

$$\begin{array}{ccc} x & < & y \\ \updownarrow f & & \updownarrow g \\ x' & < & y' \end{array}$$

waarbij g en f elkaars inverse zijn.

68-72 Natuurlijk, logaritmisch papier staat niet "op het programma" voor de 4e klas, maar het is toch wel een zeer fraaie toepassing van de logaritmen. Bovendien wordt logaritmisch grafiekenpapier zeer vaak gebruikt, zoals al enigszins duidelijk wordt uit de toepassingen op blz. 73-81. En is het tekenen van een grafiek op logaritmisch papier dé manier om te kijken of de funktie exponentiëel is. Dit blijkt met name als we de groei van de zeester of schelp nogmaals bekijken (81-82).

73-82 Hoeft U niet te doen als U 68-72 overgeslagen heeft. Welke van de toepassing U wilt doen is een kwestie van persoonlijke voorkeur. Erg goed "deden" de "Hartkwalen" en "Abortus" het in de klas. De leerlingen waren verbaasd door de aantallen hartkwalen, alsmede door het snel verhogend risico. Bij "Abortus" kwam daarbij het wiskundig interessante feit dat gelijke groeifactoren tot evenwijdige lijnen leiden. Bij de foto van de foetus is met opzet een zeer neutraal bijschrift geplaatst. Of U er een discussie over "Abortus" aan wilt wijden, hangt ook weer van U en Uw klas af. De leerlingen kijken overigens toch wel enigszins verrast op zo'n onderwerp in een wiskundeboekje aan te treffen.

Enige achtergrondinformatie betreffende zeesterren en schelpen is misschien hier op z'n plaats. Eerst de zeester maar.

De zeesterren behoren alle tot de stekelhuidigen of Echinodermata. Daartoe behoren tevens: de zeelelies, zeeëgels, slangsterren en zeekomkommers. Ondanks de soms verwarrende namen, allemaal dieren.

De bouw van deze ogenschijnlijk zeer verschillende dieren is wiskundig gezien steeds gelijk. Het basispatroon bestaat uit drie onderdelen:

Een monding:

Daaromheen:

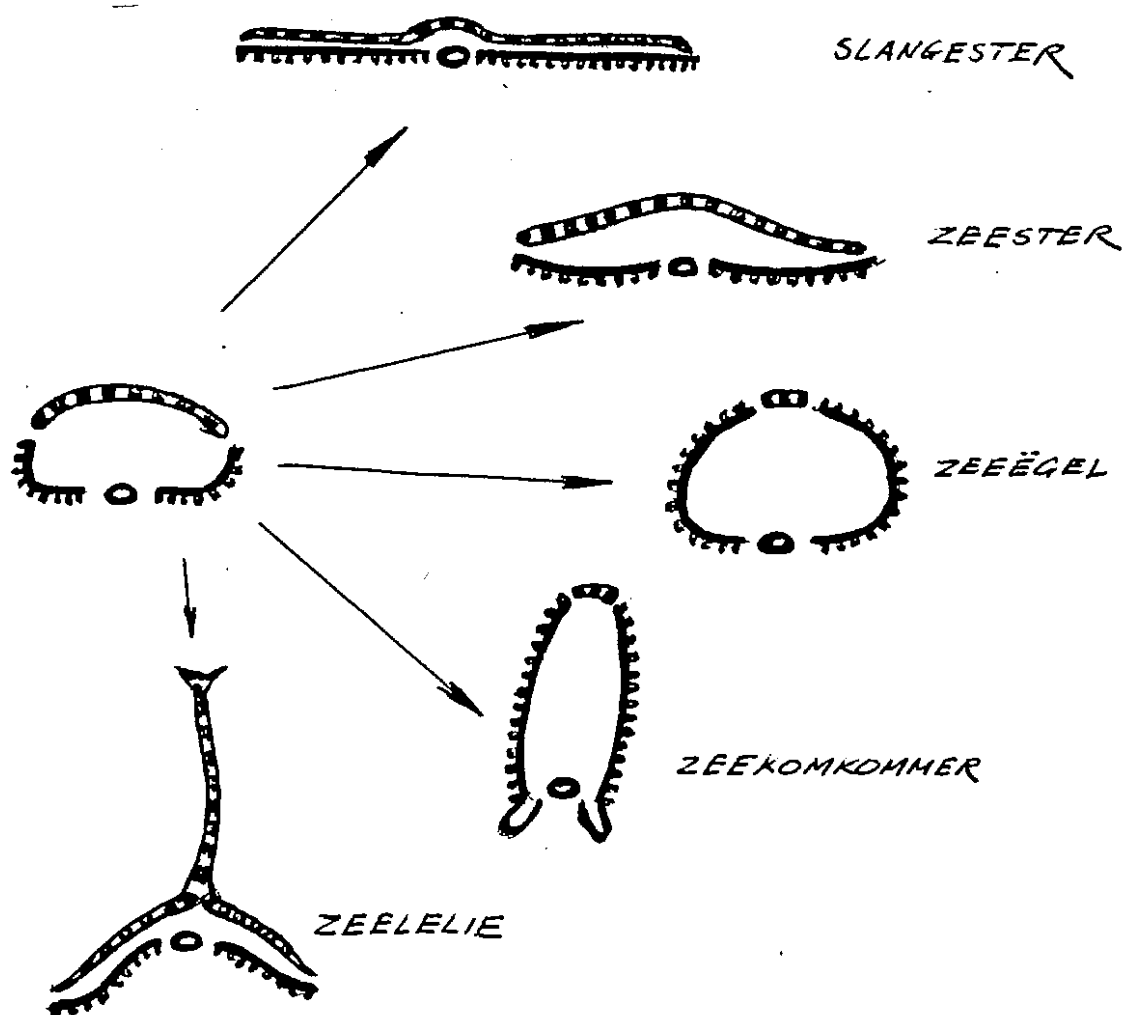
de buisvoetjes (zeer goed te zien op de foto op blz. 82), die deel uitmaken van het kanalsysteem dat met vloeistof is gevuld:



Tenslotte een uitwendig skelet van kalkplaatjes.



Een dier zoals hierboven bestaat niet, maar van dit model uitgaande kunnen we wel alle 5 typen krijgen:



Hierbij dient te worden aangetekend dat de zee-komkommer normaal zich in horizontale positie bevindt en de zeelelie "op z'n kop", zodat het net een plant lijkt.

Overigens komt er ook een stengelloze soort voor, die dus sprekend op een (slange)ster lijkt.

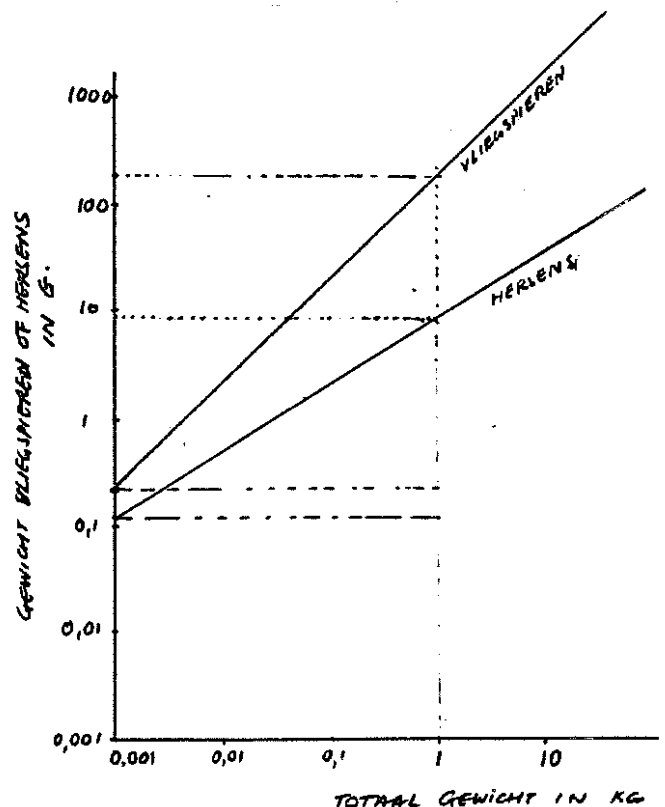
De gewone zeester heeft 5 symmetrievlakken en een vijfvoudige rotatie-as. De larven hebben slechts de gewone spiegelsymmetrie. Er zijn ook minder algemene soorten zeesterren die 6 of 9 armen hebben. Andere soorten hebben nauwelijks armen, doordat de ruimte ertussen bijna geheel is opgevuld. De foto op blz. 82 toont een zeester die een schelp "gevangen" heeft. Om de schelp open te krijgen maakt de ster gebruik van de kleeftkracht van zijn voetjes. Daarmee kan hij de twee kleppen van de schelp (een "Pecten") uit elkaar trekken. Vervolgens stulpt hij de maag door de monding naar buiten, tussen de kleppen. Hij verteert het schelpdier buiten z'n lichaam via maagsappen (tenslotte heeft hij geen kaken) en slikt het vervolgens in.

Tenslotte moet het regeneratievermogen van zeesterren genoemd worden. Zelfs als een zeester alle armen kwijtraakt vormen zich weer nieuwe armen. De Pecten (Kamschelp) die door de zeester op blz. 82 te grazen is genomen, is één van de meer dan 125.000 soorten weekdiersoorten. Daartoe behoren ook de gewone strandschelp en de inktvis. Net als bij de stekelhuidigen, allemaal met hetzelfde grondpatroon, alhoewel dat hier nog vaker zeer onduidelijk is. Over het inwendige van één der soorten was al wat te zien op blz. 41 van het leerlingboek. Wat wij vaak terugzien is uitsluitend de schelp, gevormd uit kalk, door de mantel. Maar er zijn ook soorten waarbij de schelp geheel is verdwenen (Naaktslakken).

De belangrijkste groepen zijn de *slakachtigen* (plaatjes blz. 38, 42) (Gastropoda); de *weekleppigen* (plaatje blz. 82, verder in ruime mate voorhanden op Noordzeestrand) (Bivalvia) en de *inktvis* (plaatje blz. 40), waartoe ook de ammoniet (39) behoorde. Van de slakachtigen komen kleine soorten wel voor langs ons strand, met name de kleine zwarte tepelhoortjes, de witte wenteltrapjes (38) en de wulk (42). De eerste 2 soorten vaak na oostenwind.

83-87 Dit zou het slot kunnen zijn van het boek. U vindt hierin veel van de "gebruikelijke" sommen terug. Toch wordt hier en daar nog even terug verwezen naar de kontekst waarin de logaritme is geïntroduceerd. Sommige leerlingen zijn echter nu al zo geroutineerd dat ze nauwelijks meer terugdenken aan vijvers met kroos. Wilt U meer sommen inlassen, dan kan dit prima na blz. 87.

88-89 Dubbellogaritmisch papier is wel wat anders dan loglog-papier. Loglog-papier heeft één "normale" as en de ander is ontstaan door tweemaal de logaritme te nemen. De resultaten zijn weer zeer verrassend en toch eenvoudig met de hoofdeigenschap te verklaren. (Zie het antwoordengedeelte). Een ander voorbeeld uit de dierenwereld is de volgende grafiek waarbij voor een aantal vogelsoorten hun gewicht wordt vergeleken met het gewicht aan spieren (+) en aan hersens (o). Doordat hier langs de assen dezelfde zaken worden vergeleken (gewichten) is het bepalen van een formule niet zo'n probleem. (Zie ook antwoordengedeelte). De grafieken zien er zó uit, zoals hiernaast is afgebeeld:



richtingscoëfficiënt grafiek vliegspiers: $\frac{5,8}{6} \approx 1$
 richtingscoëfficiënt grafiek hersenen : $\frac{3,7}{6} \approx 0,6$

Waarom zijn deze resultaten niet zo verwonderlijk?

Tot nog toe:

vliegspiers: $x \rightarrow a \cdot x^1$

hersenen : $x \rightarrow b \cdot x^{0,6}$

Laten we eens zien of daar een eenvoudige verklaring voor is. Als de aerodynamische eigenschappen van vogels en vleugels voor alle ongeveer hetzelfde is, lijkt het niet te drien te veronderstellen dat de energie, nodig om te vliegen, recht evenredig is met het totale gewicht en dus ook het gewicht van de vliegspeer recht evenredig zal moeten zijn met het totale gewicht. En klaarblijkelijk is de hoeveelheid hersenen evenredig met de oppervlakte van het dier, net als bij de hoeveelheid geproduceerde warmte. Dit levert, vergeleken met het gewicht op:

$$x \rightarrow a \cdot x^{2/3}$$

wat redelijk klopt met de gevonden 0,6.

(Opp.: kwadratisch; gewicht: kubisch vandaar: 2/3).

- 90-95 Levert wat meer sterrekunde, waarbij wat grafieken staan op dubbellogaritmisch papier. Daarbij levert de ietwat moeilijke grafiek op blz. 92 nog mogelijkheden tot het maken van de grafiek die het verband aangeeft tussen de hoogte en de luchtdruk (door vergelijking van de linker met de rechter schaal). Overigens, het witte gedeelte waarin een ballon en een vliegtuig te ontwaren zijn, moet eigenlijk zwart zijn. De berg Chacaltaya staat op de grafiek omdat daar een sterrewacht is gevestigd. In het begin van deze handleiding hebben we heel globaal iets over de ruimte verteld. Wat uitdieping kan hier misschien goed zijn.
- Sterrekunde in één der oudste wetenschappen. In de 16e en 17e eeuw kwam men er achter dat de aarde niet het centrum van het heelal is. Aanvankelijk moest men het doen met zichtbaar-licht-telescopen. Het stukje leerlingentekst maakt duidelijk dat dit een ernstige beperking was. Een belangrijke vordering was de ontdekking van de 21 cm radiostraling waarbij de Nederlanders Oort en van der Hulst baanbrekend werk hebben verricht. De radiotelescoop bij Westerbork (Drente) heeft grote ontdekkingen mogelijk gemaakt.



De radiotelescoop van Westerbork bestond tot 1969 uit één spiegel met een diameter van 25 m. Sindsdien zijn er elf bijgebouwd, die op een 1,6 km lange rail zijn opgesteld, en zo als een reusachtige telescoop dienst doen.



Hiernaast een plaatje van de Melkweg. De lijnen verbinden punten met gelijke radiostralingen. Een radiokaartje van de melkweg dus. Tevens ziet U getallen, variërend van 0 tot 4. Deze geven de intensiteit van de röntgenstraling daar aan. Dus tevens een röntgenkaartje.

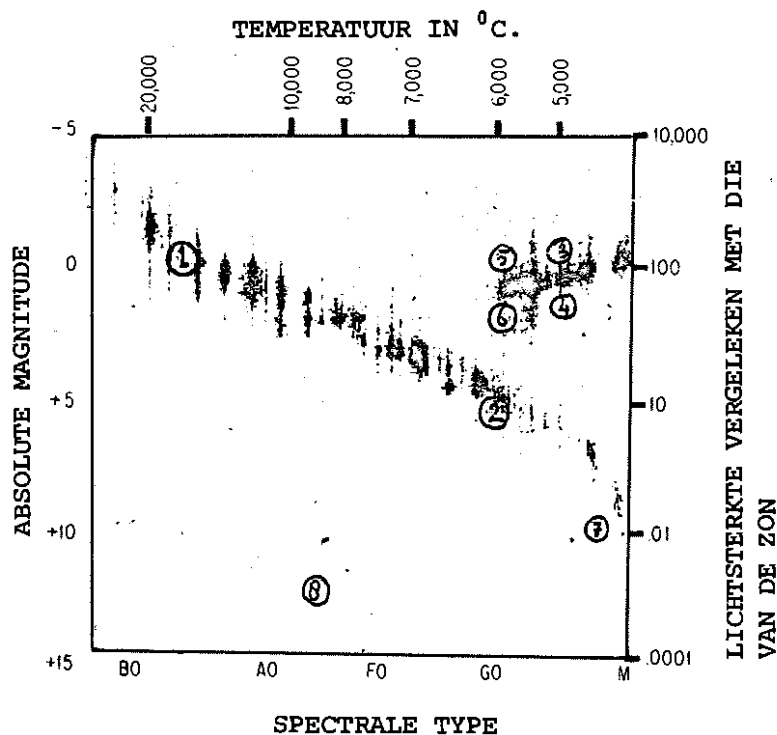
Infrarode straling dringt nauwelijks tot de aarde door, maar de resultaten die de laatste jaren geboekt zijn, zijn wel sensationeel. Zo zijn er zeer "jonge" sterren, die door stofwolken omgeven zijn. Deze stof, verhit door de ster, zendt infrarode straling uit. Sommige sterren zijn alleen in het infrarood te zien. Misschien zijn dit zeer krachtige sterren, met een helderheid die een miljoen keer zo groot is als onze zon, maar die door de nevel verborgen blijft. Na het zichtbare licht, komt de Ultra-violette straling, die geheel wordt geabsorbeerd door de atmosfeer, evenals de röntgen en gammastralen. Deze wordt dan ook met kunstmanen waargenomen.. Sterren worden nog steeds gevormd uit een gasmassa. Die gaswolk krimpt in, onder de onderlinge aantrekking der stofdelen. In het dichtste deel ontstaat dan door "implosie" de zon. Verder ontstaan door "klontering" langzaam maar zeker planeten. Zo vond ons eigen zonnestelsel zo'n 5 miljard geleden z'n huidige vorm, maar straks is de zon "op", over weer zo'n 5 miljard jaar. Dan zal de zon groter en kouder worden, met een honderd maal zo grote lichtkracht. De binnenste planeten worden vernietigd. Hij groeit maar door tot 400 maal z'n huidige grootte en ook de aarde wordt vernietigd. Als hij zo goed als helemaal is opgebrand, zal hij verschrompelen tot een minuskuul wit dwergje. Tenslotte zal ook de laatste straling verdwijnen en dan spreken we van een zwarte dwerg. Deze zijn niet waarneembaar, maar er moeten er vele zijn.

De structuur, zoals die dus nog zo'n 5 miljard jaar zal blijven.

De zon, dan van binnen naar buiten de planeten:

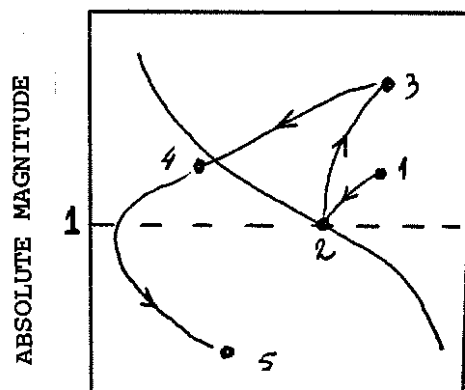
Mercurius,	massa	0,055 x aarde,	omlooptijd:	88	dagen
Venus	,	"	0,815 x aarde,	"	: 224,7 "
Aarde	,	"	"	: 365,26	"
Mars	,	"	0,38 x aarde,	"	: 687 "
Jupiter	,	"	317,9 x aarde	"	: 11,86 jaar
Saturnus	,	"	95,2 x aarde	"	: 29,46 "
Uranus	,	"	"	: 84,01	"
Neptunus	,	"	"	: 164,8	"
Pluto	,	"	"	: 247,7	"

Voor de klassifikatie van sterren is een Hertzsprung-Russel diagram onontbeerlijk. Hierin is de lichtsterkte van sterren (vergeleken met de zon) uitgezet tegen de temperatuur en wel op dubbellogaritmisch papier:



De meeste sterren liggen op de band die van linksboven naar rechtsonder loopt. Linksboven de zeer hete en heldere sterren (1). De zon treffen we aan bij (2), de rode dwergen (koud (nou ja) en lichtzwak) bij (7). Naast de band liggen de rode reuzen (3), reuzensterren (4), Cepheïden (5) en R R Lyrae - veranderliker (6). De witte dwergen (sterren in het laatste stadium), treffen we bij (8) aan,

De levensloop van de zon ziet er in een H.R. diagram als volgt uit:



(de zon zit nu in 2, de "geboorte" vindt plaats in 1, het "overlijden" in 5).

De Krabnevel (pag. 93 van het leerlingenboek) is een ster in het eindstadium. De explosie vindt U terug in het H.R. diagram, als we van 2 naar 3 gaan. Er zijn echter ook nevels die in het beginstadium verkeren (ergens bij de 1).

Zoals eerder vermeld, vormt ons zonnestelsel een onbeduidend onderdeel van de Melkweg. Over afmetingen vonden we al iets in de leerlingentekst. Een radio-plaatje kwamen we onlangs in deze tekst tegen.

Melkwegen of hun beurt komen ook in groepen voor, of: cluster (of galaxies). In onze "lokale groep" komen zo'n 30 galaxies of melkwegstelsels voor. Onze melkweg, net als NGC 5457 (blz. 11 leerlingenboek) heeft een duidelijke spiraalstructuur. Andere sterrenstelsels hebben een min of meer elliptische vorm. Er is een fraai klassifikatiesysteem ontworpen: De elliptische modellen van E_0 t/m E_7 :



verder de staafspiraalen (SpiralBars)



en gewone spiralen (Spirals):



Tenslotte nog iets over het "Uitdijend heelal". De vooraanstaande theoretici zij het niet eens wat betreft de toekomst, wel wat betreft het verleden. In het "begin der tijden" was de "oermaterie" in een "oneindig kleine" ruimte samengepakt. Deze is ontploft en ontploft nog steeds. Maar of deze uitdijning door zal gaan, of dat de boel weer zal instorten, is een zaak waar nog geen zinnig antwoord op te geven valt. Misschien dat de zwarte gaten in de toekomst wat meer licht op deze zaak werpen. Zeer populair gezegd is een zwart gat een (restant) van een ster die het witte dwerg stadium voorbij is. Dan verdwijnt de ruimte in de atomen (tussen kern en elektronen) geheel, dus alle materie klit op elkaar. Zoiets zal uiteraard verschrikkelijk "zwaar" zijn. De zwaartekracht wordt dan ook zó groot, dat zelfs licht niet kan ontsnappen. Dus wat zien we? Niets.

Tot zover de sterrekunde.

Alhoewel, er is nog een mooie toepassing van logaritmen, die verband houdt met de helderheid van hemellichamen. Duidelijk zal zijn dat voor ons de zon het helderste hemellichaam is, maar dat is logisch, die staat immers zeer dicht bij. Uit het H.R.-diagram bleek al dat er sterren zijn die wel 100.000 maal zo helder zijn als de zon. De schijnbare lichtsterkte wordt uitgedrukt in magnituden. De magnitudeschaal is afkomstig van Hipparchus (2e eeuw voor Chr.). Het huidige systeem is zo ingericht dat de schaal van Hipparchus er redelijk in past. Een *verschil* van 5 magnituden komt overeen met een *faktor* 100 in de lichtsterkte. Dus een verschil van 1 magnitude komt overeen met een faktor $100^{1/5} \approx 2,5$.

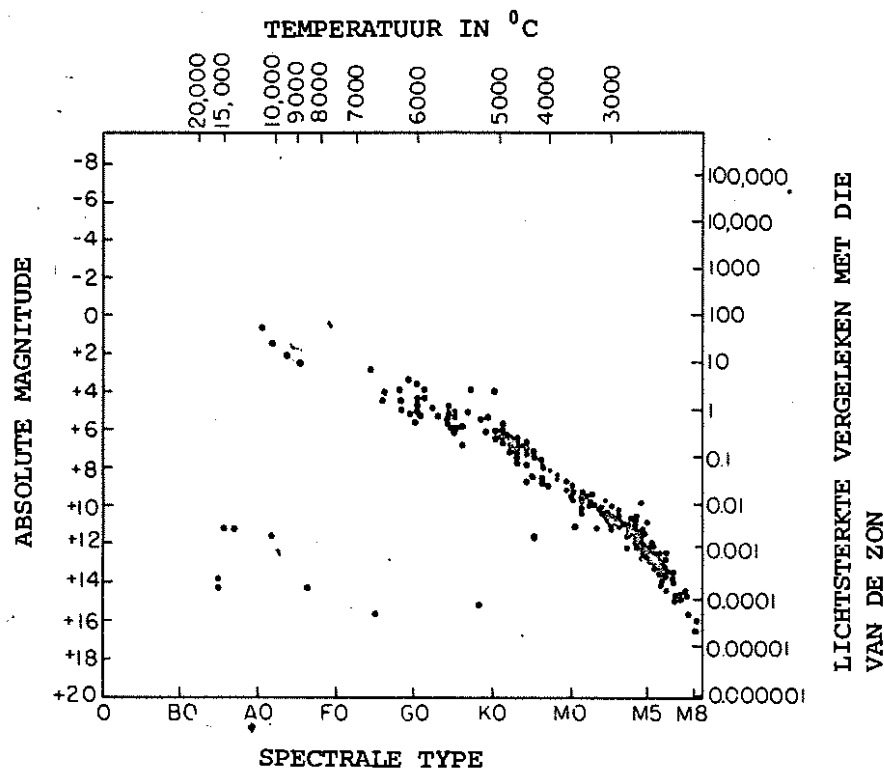
Een verschil van 2 magnitude komt dus overeen met een faktor $100^{\frac{2}{5}} \approx 6,3$.
 Vervolgens: 3 magnitude: $100^{\frac{3}{5}} \approx 15,9$
 4 magnitude: $100^{\frac{4}{5}} \approx 39,8$
 5 magnitude (volgens definitie): 100.

Duidelijk zal ook zijn:

10 magnitude: 10.000
 15 magnitude: 1.000.000
 20 magnitude: 100.000.000

De magnitude-schaal is dus logaritmisch en de analogie met het onderdeel muziek uit het leerlingenboekje is duidelijk.

We laten nog een H.R.-diagram zien van de sterren die niet te ver van de zon staan (de reuzen en super-reuzen vallen dan af), waarbij rechts de helderheid staat (vergeleken bij de zon) en links de absolute magnitude-schaal. Absoluut wil zeggen, dat er een korrektie is gemaakt voor de afstand tot de aarde en dus een "objektieve" maat is.



De schaal werkt zó dat de helderste sterren het laagste magnitude getal hebben, volgens de formule:

$$m = -\frac{5}{2} \log \frac{S}{S_0}$$

waarin S de van de ster afkomstige energiestroom is, die de eenheid van oppervlak op aarde passeert en S_0 een willekeurig gekozen standaard. Voor de zon komen we dan uit op $-26,86$. De zwakste waarneembare ster heeft een schijnbare helderheid van $+24$.

Hoeveel keer helderder dan deze ster is de zon?

Als de afstand van de ster tot de aarde r is, dan maakt de straling die de aarde bereikt, deel uit van een stralingsfront met oppervlakte $4\pi r^2$. Is L de totale lichtsterkte van de ster, dan is:

$$L = 4\pi r^2 S$$

dan is de absolute magnitude:

$$M = -\frac{5}{2} \log \frac{L}{L_0}$$

De schijnbare magnitude van de zon is - 26,86. De absolute: $M = 4,8$. Dit klopt goed met het laatste H.R.-diagram. We zien in het eerste H.R.-diagram dat bijvoorbeeld de witte dwergen absolute magnitudes tussen de +10 en +15 hebben, dus lichtzwak zijn. De zeer hete O-sterren (linksboven) zijn ook zeer lichtsterk, de reuzen en superreuzen, aanzienlijk kouder, ook.

We komen in de fotografie ook vaak exponentiële of logaritmische (of meetkundige) getallenrijen tegen.

Zoals bekend hangt de belichting van de film af van 2 zaken: in de eerste plaats de belichtingstijd, ook vaak sluitertijd genoemd. Veel camera's hebben tegenwoordig een gedeelte van de volgende sluitertijden:

1/2000 1/1000 1/500 1/250 1/125 1/60 1/30 1/15 1/8 1/4 1/2
1 2 4 sec.

De "groeifactor" is dus vrijwel 1/2, hetgeen hier inhoudt dat bij iedere volgende stap er 2x zoveel licht op de film komt. 2x zoveel licht bij iedere volgende instelling ligt ook aan de basis van de diafragma's. d.w.z. de "grootte" van het gat waardoor licht op de film valt.

De aanduidingen voor de lensopeningen zijn:

f/64 f/45 f/32 f/22 f/16 f/11 f/8 f/5,6 f/4 f/2,8 f/2 f/1,4

De kleinste opening is f/64, de grootste f/1,4.

Door de laatste valt ruim 2000 maal zo veel licht als door de eerste.

Kombineren we:

1/1000	met	f/1,4
1/500	met	f/2
1/250	met	f/2,8
1/125	met	f/4
1/60	met	f/5,6
1/30	met	f/8
1/15	met	f/11
1/8	met	f/16
1/4	met	f/22
1/2	met	f/32
1	met	f/45
2	met	f/64

dan krijgen we steeds (bijna) dezelfde hoeveelheid licht op de film.

De diafragma-waarde f wordt als volgt bepaald:

$$f = \frac{\text{brandpuntsafstand lens}}{\text{doorsnede van de opening}}$$

Als U nog eens terugkijkt naar de tabel met de f-waarden, kunt U dan de "groeifactor" van deze tabel bepalen, en verklaren waarom deze zo groot is? Maar deze reeksen getallen komen ook voor op filmpjes. Deze bestaan in snelle, dat wil zeggen zeer lichtgevoelige en langzame soorten. Er zijn daar twee aanduidingen voor: het ASA getal en het DIN getal. Zo komen b.v. de volgende getallen voor:

ASA:	6400	3200	1600	800	400	200	100	50	25	12	6
DIN:	39	36	33	30	27	24	21	18	15	12	9

waarbij links de zeer snelle en rechts de langzame films staan. Snelle films hebben grove korrels, trage zeer fijne. Gemiddeld wordt 100ASA/21DIN gebruikt.

Zou U kans zien het verband aan te geven tussen de ASA en DIN getallen?
Ziet U kans de volgende tabel aan te vullen:

ASA	160		40	
DIN		20		10

96-107 Zoals eerder aangekondigd, is dit te beschouwen als een appendix. Alhoewel de rekenmachientjes een vaste plaats op de scholen dreigen te veroveren en zodoende log-tafel en rekenlineaal tot schaduwen van het verleden hebben teruggebracht, kan het misschien toch geen kwaad de leerlingen iets te laten proeven van het hoe en het waarom. Bovendien ligt er een goede mogelijkheid om iets aan de geschiedenis van de logaritmen te doen. Veel tijd hoeft dit alles niet te kosten.

Misschien vindt U het leuk om nog iets te vertellen over het maken van log-tafels. Zoals in de leerlingentekst al stond waren Briggs en Napier het al snel eens dat $\log 1 = 0$ en $\log 10 = 1$ moest gelden. Laten we eens zien hoe Briggs, overigens naar een idee van Napier, $\log 5$ berekende.

We gaan daartoe uit van $\log 10 = 1$ en $\log \sqrt{10} = \log 3,162277 = 0,5$
5 ligt nu tussen 10 en $\sqrt{10}$.

ofwel tussen 10 en 3,162277.

Om nu de logaritme van 5 te berekenen, berekenen we het meetkundig gemiddelde ($\sqrt{a \cdot b}$) van 10 en 3,162277; dat is 5,623413.

De bijbehorende logaritme is dan het rekenkundig gemiddelde van 1 en 0,5, dus 0,75.

Dus: $\log \sqrt{10} \cdot 3,162277 = \log 5,623413 = 0,75$

We willen nog verder naar de 5 toe, dus nemen we het meetkundig gemiddelde van 3,162277 en 5,623413, ofwel 4,216964, dan krijgen we:

$$\log \sqrt{3,162277 \cdot 5,623413} = \log 4,216964 = 0,625$$

$$\log \sqrt{5,623413 \cdot 4,216964} = \log 4,869674 = 0,6875$$

En zo kunnen we nog uren doorgaan.

De laatste 2 stappen zijn:

$$\log \sqrt{5,000008 \cdot 4,999997} = \log 5,000003 = 0,6989702$$

$$\log \sqrt{4,999997 \cdot 5,000003} = \log 5,000000 = 0,6989700$$

Als uitsmijter willen we U niet een stukje van Battus onthouden, waarin hij, met behulp van logaritmen, komt tot een rampindex:

Ramp, hoe erg wij een ramp vinden, hangt af van het aantal slachtoffers dat erbij is te betreuren (dit aantal zal ik verder met N aanduiden), het aantal kilometers dat ons scheidt van de plaats van de ramp (die afstand zal ik verder A noemen), en het aantal jaren dat tussen ons en de ramp ligt (dit tijdsverschil geef ik voortaan door T aan).

Ik ben op zoek naar een formule die de ergte E van een ramp afleidt uit de waarden van N, A en T. De drie variabelen hebben ieder hun natuurlijke begrenzing. Het aantal doden N moet onder de drie miljard liggen, want meer mensen zijn er niet. Het aantal kilometers A moet onder de 20.000 liggen, want dan ben je de halve wereld om. Bij een ongeluk op de maan moet voor A genomen worden de afstand tot de woonplaats van de verongelukte. Ook bij vliegtuig-ongelukken blijkt de ergte sterk afhankelijk van de vraag of er Nederlanders bij betrokken waren, dus ook hier is A onze verwijdering van de woonplaats van de slachtoffers. Het aantal jaren T naar het verleden (of naar de toekomst bij een verwachte ramp) moet onder de 100 liggen, want anders beschouwen we het als een historische gebeurtenis, die je niet erg kunt vinden (of als

een profetie die zo ver vooruit ligt dat je er niet wakker van ligt). De ergste ramp die je kan treffen, wees eerlijk, is het overlijden van één persoon op afstand nul en tijdsverschil nul. Dat is namelijk de eigen dood. De formule moet dus voor A en T gelijk aan nul, de waarde oneindig opleveren. Tussen A en N bestaat een duidelijk verband: hoe verder een ramp plaatsvindt hoe meer doden erbij moeten vallen, willen we het even erg vinden. In eerste benadering lijkt mij een ramp met acht doden op 100 kilometer afstand (in Nederland dus) even erg als een ramp met tachtig doden op 1000 kilometer afstand (in Europa dus), of een ramp met achthonderd doden op 10.000 kilometer (buiten Europa). In de formule zullen we dus N en A op elkaar moeten delen, het quotiënt N/A zal in de formule voorkomen.

Hoe groter N, hoe erger; maar het gaat niet evenredig. Als er bij een ramp van duizend doden nog tien extra doden gemeld worden maakt dat de misère niets groter, maar bij een ramp die eerst acht doden had, wel. Enkele weken geleden publiceerde een dagblad een rectificatie: "Vorige week schreven we dat er 20.000 Armeniërs gedood werden; maar het waren er 200.000." Geen lezer had geprotesteerd, maar de redactie vond het weglaten van die nul kennelijk te gek. Dat aantal zal heus niet de ronde 200.000 zijn geweest, maar waar we naar kijken is naar het aantal cijfers in het dodental. De ergte is kennelijk evenredig met dat aantal cijfers. Zo is een ramp met duizend doden evenveel erger dan een ramp met honderd, als een ramp met honderd doden erger is dan een ramp met tien doden (alles op gelijke afstand in ruimte en tijd). De ergte E is dus evenredig, niet met N, maar met de logaritme uit N (zeg maar: het aantal cijfers waarin N wordt geschreven). Dat is niet zo verwonderlijk, want een zintuig als het oor werkt net zo: de decibellen zijn de logaritmen van de feitelijke geluidsenergie.

Aangezien we al wisten dat N en A op elkaar gedeeld worden, zal de formule dus de logaritme uit N/A bevatten.

Wat de tijdsafstand T betreft, stel ik voor om die met de ruimtelijke afstand A in de noemer te zetten. Dat maakt een ramp met acht doden een jaar geleden even erg als een ramp met tachtig doden tien jaar geleden. Onze ergheidsformule luidt dus:

$$E = \log \frac{N}{AT}.$$

Aangezien er nog geen internationaal aanvaarde eenheid van ergheid is afgesproken (het aantal haren dat je uit je hoofd trekt?), kunnen we die door onze formule gelijk vastleggen.

Merk op dat de breuk N/A alleen oneindig groot wordt (en daarmee ook zijn logaritme) als A of T nul zijn. T is nooit nul, want je hoort een ramp altijd iets later dan hij gebeurt. Wat het betekent als A nul is, beschreef ik al.

Wilt U weten hoe erg een ramp in verleden of toekomst is, deel dan het aantal slachtoffers door het produkt van de afstand in kilometers en de afstand in jaren, en kijk hoeveel cijfers het quotiënt bevat. Zo kunnen we ongelijke soortige rampen vergelijken. Bent U het er niet mee eens, stel dan een betere formule op.

Battus, Piet Grijs, Jan Eter, zijn alle pseudoniemen van H. Brandt Cortius, o.a. wiskundige.

Hoe het groeit

Hoe het groeit

F. v.d. Blij

Discrete en continue groei

De kreet exponentiële groei, meestal in ongunstige zin gebruikt, is gemeengoed geworden. De klassieke legende over graankorrels op een schaakbord, op het eerste veld 1; op het volgende veld tweemaal zoveel, dus 2; op het daarop volgende veld weer twee maal zo veel, dus 4; dan 8, 16 enzovoorts maakt de snelheid van deze groei duidelijk. Op het laatste veld komen 2^{63} graankorrels te liggen!

Hebben we geen verdubbeling, maar vermenigvuldiging met een factor a en beginnen we met $N(0)$, dan is het aantal $N(t)$ na t stappen $N(t) = N(0) \cdot a^t$ geworden. Bij rente op rente van 4% is $a = 1,04$ en na 18 jaar is het kapitaal al meer dan verdubbeld.

Dit model is te gebruiken voor biologische groei, van een populatie, van bladoppervlakte. Maar ook, met $a < 1$, voor een proces van afsterven, zoals radioactief verval.

Groeivergelijkingen

We onderscheiden modellen voor schoksgewijze of discrete groei (van het aantal dieren, het aantal cellen) en voor continue groei (het gewicht van een dier, de oppervlakte van een blad).

Het model van exponentiële groei komt neer op de aanname dat de groei behalve met de tijdsduur ook met de aanwezige hoeveelheid evenredig is. Werken we met een evenredigheidsconstante α , die we wel de groeicoëfficiënt noemen, dan vinden we de vergelijkingen:

- discrete groei: $N(t+1) - N(t) = \alpha N(t)$,
- continue groei: $N(t+h) - N(t) = \alpha h N(t)$.

De eerste formule geeft $N(t+1) = (1 + \alpha) N(t)$, dus $N(t) = N(0) \cdot (1 + \alpha)^t$. De tweede, na deling door h , gevolgd door limietovergang $h \rightarrow 0$, geeft:

$$N'(t) = \alpha N(t), \text{ dus } N(t) = N(0) \cdot e^{\alpha t}.$$

Bij deze groei vergelijkingen hebben we voor $\alpha > 0$ een stijgende functie $N(t)$, bij $\alpha = 0$ een constante functie $N(t)$, en bij $\alpha < 0$ een dalende functie $N(t)$.

Bij de beschrijving van de groei van een populatie zal α het verschil van een geboortecoëfficiënt en een sterftecoëfficiënt zijn.

We gaan nu het model aanpassen door de groeicoëfficiënt α niet constant te nemen. We kunnen α periodiek van de tijd t laten afhangen (dag- en nacht ritme of zomer- en wintergroei). Het ligt voor de hand nu te stellen:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \beta \sin \gamma t.$$

In het continue geval krijgen we:

$$N'(t) = (\alpha_0 + \beta \sin \gamma t) \cdot N(t).$$

Uit $\frac{N'(t)}{N(t)} = \alpha_0 + \beta \sin \gamma t$ lossen we direct op

$$N(t) = N(0) \cdot e^{\alpha_0 t - \beta \gamma^{-1} \cos \gamma t},$$

d.w.z. schommelingen (als $\beta \neq 0$) om de exponentiële groei.

Een andere variant krijgen we door aan te nemen dat de groeicoëfficiënt afhangt van de waarde van $N(t)$. Bij voorbeeld kan door overbevolking (van de eendekroosjes in de vijver of van de muizen in muizenstad) de vruchtbaarheid afnemen en zelfs negatief worden.

Laat K het kritieke getal voor $N(t)$ zijn. Dan is een redelijk model dat met een groeicoëfficiënt:

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

In het continue model krijgen we de differentiaalvergelijking

$$N'(t) = \alpha_0 \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot N(t).$$

Logistische groei

In de biologie heet dit het model van *logistische* groei. Zolang $N(t)$ klein is t.o.v. K , is de groei vrijwel exponentieel, voor $N(t) \approx \frac{1}{2} K$ ongeveer lineair, voor $N(t)$ iets kleiner dan K een heel langzame groei naar $K = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$.

Dit is fraai te illustreren met het lijnelementenveld, zowel dit veld als de oplossingskrommen zijn invariant onder translaties in de richting van de t -as. Dit wordt duidelijk als u bedenkt dat $N'(t)$ alleen afhangt van de constanten α_0 en K en van de waarde van $N(t)$. Het lijnelementenveld stijgt voor $0 < N(t) < K$, daalt voor $N(t) > K$. (zie fig. 1).

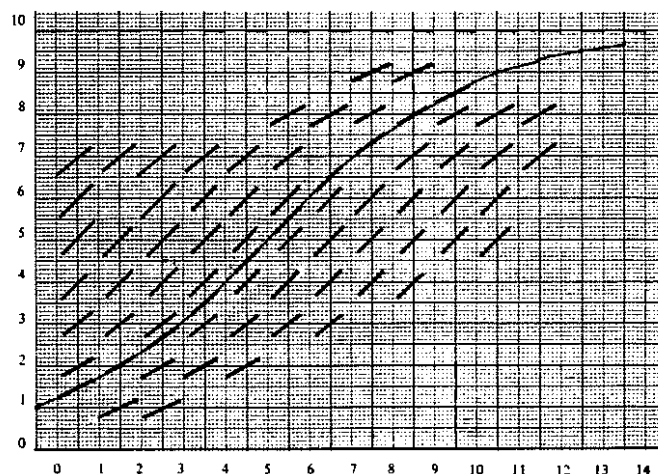


fig. 1

grafiek van $y = \frac{10}{1 + 9e^{-0,4t}}$.

Rekenliefhebbers kunnen de vergelijking oplossen:

$$\frac{K N'(t)}{(K-N(t)) \cdot N(t)} = \alpha_0,$$

$$\frac{N'(t)}{K-N(t)} + \frac{N'(t)}{N(t)} = \alpha_0, \text{ na integratie volgt:}$$

$$-\ln |K-N(t)| + \ln N(t) = \alpha_0 t + \beta.$$

$$\text{We vinden als oplossing } N(t) = \frac{K \cdot N(0)}{N(0) + (K-N(0)) e^{-\alpha_0 t}}$$

Bestudering van de logistische groei in het geval van een *discreet* model geeft grote complicaties. We kunnen dit begrijpen, omdat nu bij een waarde $N(t) < K$ de volgende waarde $> K$ kan zijn; als dan de daarop volgende, die kleiner moet zijn, zelfs kleiner dan K wordt, lijkt het mogelijk dat voortdurende schommelingen rond K mogelijk zijn. Om de notatie overzichtelijk te houden voeren we in $\beta = 1 + \alpha_0$ en $\gamma_t = \alpha_0 N(t) / (1 + \alpha_0) K$.

De differentievergelijking wordt dan na behoorlijk wat rekenwerk:

$$\gamma_{t+1} = \beta \gamma_t (1 - \gamma_t).$$

We schrijven $F(y) = \beta y (1-y)$ en merken op dat F het segment $[0,1]$ in zichzelf afbeeldt als $0 < \beta \leq 4$. Dit zullen we verder veronderstellen. We moeten nu itereren

$$\gamma_{t+1} = F(\gamma_t), \quad (0 \leq \gamma_t \leq 1).$$

Dit kan zowel met de handrekenmachine als met de grafiek snel gedaan worden. Voor $\beta < 1$ krijgen we een monotoon naar 0 dalende rij. Voor $3,57 < \beta < 4$ is het gedrag van de rij $\gamma_t, \gamma_{t+1}, \gamma_{t+2}, \dots$ erg onoverzichtelijk. De theorie van zo'n eenvoudige differentievergelijking is al erg gecompliceerd. We volstaan maar met een paar opmerkingen. Zijn er evenwichtspunten $c = \gamma_t = \gamma_{t+1}$ etc?

Dan moet $c = F(c)$

De oplossing $c = 0$ is triviaal, verder $c = 1 - 1/\beta$:

Zijn er punten met periode twee, zijn er dus getallen c en d zodat

$$\gamma(t) = c, \gamma(t+1) = d, \gamma(t+2) = c, \gamma(t+3) = d \text{ enzovoort?}$$

Dan moet

$$d = F(c) = \beta c (1-c), \\ c = F(d) = \beta d (1-d).$$

Naast $c = d = 0$ en $c = d = 1 - 1/\beta$ vinden we nog

$$\{c, d\} = \left\{ \frac{1}{2\beta} (\beta + 1) \pm \frac{1}{2\beta} \sqrt{(\beta + 1)(\beta - 3)} \right\}.$$

Voor $\beta > 3$ vinden we inderdaad zulke punten. Met het rekenmachientje vinden we voor $\beta = 3,75$ als schommelwaarden 0,3816721855 en 0,8849944812. Beginnen we met een iets andere beginwaarde, dan gaat het heel anders.

We schrijven alleen de eerste twee decimalen van zo'n rijtje op:

0,30; 0,79; 0,63; 0,88; 0,41; 0,90; 0,32; 0,82; 0,55; 0,93; 0,25; 0,70; 0,79; 0,63; 0,87; 0,41.

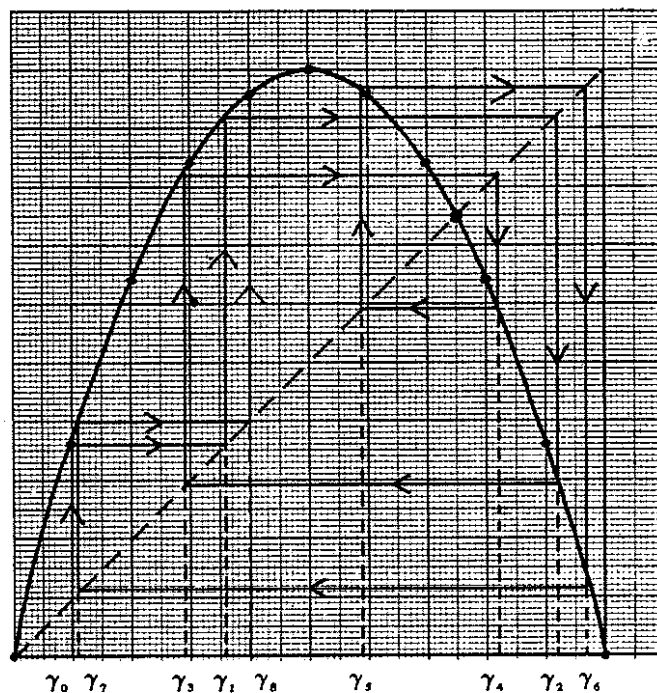
Hier is nog niet veel touw aan vast te knopen, u moet bedenken dat ik maar 2 cijfers opschreef, maar rekende met 10 cijfers. Het is nog maar de vraag of de rij 0,79; 0,63; 0,87; 0,41 zich nu steeds gaat herhalen.

Er is natuurlijk ook te rekenen aan cycles met lengte 3, dus oplossingen van $d = F(c)$, $f = F(d)$ en $c = F(f)$. Het rekenwerk laten we aan de lezer over.

In het gebied $3,75 < \beta \leq 4$ hangt het gedrag erg van de beginwaarde af. We kunnen direct of na een poosje in de cycle met lengte 2, 3, 4, terechtkomen. We kunnen ook blijven schommelen.

Het geval $\beta = 4$ is nog het eenvoudigste. Met volledige inductie kunt u controleren dat $\gamma_t = \sin^2(2^t \alpha)$, $\gamma_0 = \sin^2 \alpha$ de oplossing is. Periodiciteit hangt af van het al dan niet rationeel zijn van $\frac{\alpha}{\pi}$.

We geven nog een wild rijtje bij $\beta = 4$. We tekenen het in figuur 2.



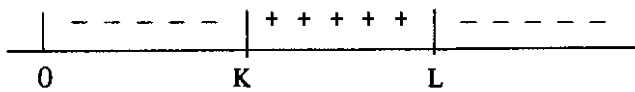
$\gamma_0 = 0,10$	$\gamma_{10} = 0,15$
$\gamma_1 = 0,36$	$\gamma_{11} = 0,50$
$\gamma_2 = 0,92$	$\gamma_{12} = 0,00$
$\gamma_3 = 0,29$	$\gamma_{13} = 0,00$
$\gamma_4 = 0,82$	$\gamma_{14} = 0,00$
$\gamma_5 = 0,59$	$\gamma_{15} = 0,00$
$\gamma_6 = 0,97$	$\gamma_{16} = 0,02$
$\gamma_7 = 0,11$	$\gamma_{17} = 0,06$
$\gamma_8 = 0,40$	$\gamma_{18} = 0,23$
$\gamma_9 = 0,96$	$\gamma_{19} = 0,71$

fig. 2

Steeds vertikaal tot parabool, horizontaal tot diagonaal, vertikaal tot parabool enz. enz.

Dieren in een bos

Door de bizarheid van de oplossingen van dit discrete logistische groeimodel, waarover in de laatste jaren veel gepubliceerd werd, zouden we onze continue modellen bijna vergeten. We bespreken nu nog één voorbeeld, dieren in een bos. We nemen de vruchtbaarheidscoëfficiënt α negatief als $N(t)$ erg klein is. (De dieren komen elkaar bijna niet tegen, hetgeen de voortplanting niet ten goede komt.) Bij stijgend aantal neemt de vruchtbaarheid α toe, wordt positief, bereikt een maximum en neemt dan, door overbevolking weer af, wordt nul en daarna zelfs negatief. De functie α (van y) heeft dus het tekenverloop:



Voor het lijnelementenveld vinden we (zie fig. 3) horizontale elementen als $N(t) = 0, K$ en L , stijgende elementen als $K < N(t) < L$, dalende elementen als $0 < N(t) < K$ en $N(t) > L$.

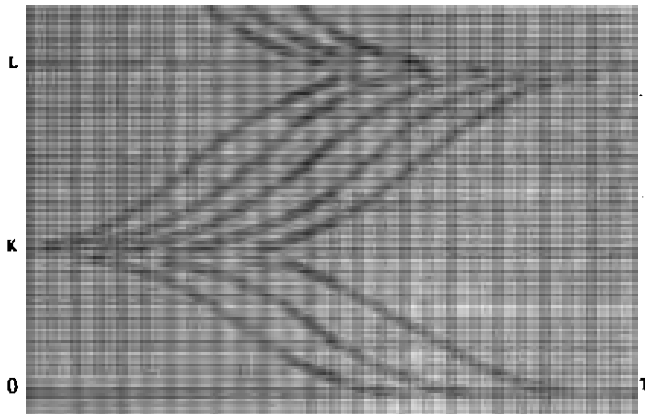


fig. 3

Het karakter van de evenwichtspunten $N(t) = K$ en $N(t) = L$ is verschillend, is de beginwaarde iets kleiner dan K , dan nadert de oplossing tot 0, is hij iets groter dan K , dan nadert hij tot L . Het punt K is een *labiel* evenwicht (een dubbeltje op zijn kant). Het punt L is een *stabiel* evenwichtspunt, bij een beginwaarde iets kleiner dan L nadert de oplossing tot L , bij een beginwaarde iets groter dan L eveneens.

In de natuur, waarin vanzelfsprekend kleine storingen optreden, zal de evenwichtswaarde K dus niet gerealiseerd kunnen worden, L echter wel.

Onder deze aannamen komen we tot de conclusie dat een diersoort die door een calamiteit of menselijk ingrijpen in aantal onder een zekere grens komt, tot uitsterven is gedoemd.

Alleen ingrijpen van de mens door fokken en de gefokte dieren weer loslaten — in feite dus de groeicoëfficiënt verhogen, kan het aantal weer boven de kritische grens brengen, waardoor na een zekere tijd weer een stabiel evenwicht zal intreden.

U ziet dat we zonder *kwantitatieve* veronderstellingen over α , heel wat kwalitatieve consequenties voor de oplossing uit het lijnelementenveld konden aflezen. Als u kwantitatief te werk zoudt gaan en b.v. stellen:

$\alpha = -\alpha_0 (N(t) - K) N(t) - L$ dan is de bijbehorende differentiaalvergelijking wel op te lossen, maar aan de oplossing ziet u niet-direct de bijzonderheden, die we boven vermeld hebben.

Er is nog veel te doen, deze beschrijving in het discrete geval; of twee diersoorten die prooi en roofdier zijn. Of de roofdieren worden opgegeten door super roofdieren. Voedselvergiftigingen, explosieve epidemieën, allemaal groei, continu of discreet, allemaal wiskundige problemen voor liefhebbers!



Toetsen

TOETSEN.

Enige opgaven zoals die voorkwamen op toetsen bij de experimenteerscholen.

1. Los op:

$$\begin{aligned} {}^4\log x &= 2 \\ {}^4\log 8 &= x \\ {}^5\log 0,04 &= x \\ {}^x\log 8 &= -3 \end{aligned}$$

2. Los op:

$$\begin{aligned} 3. \quad {}^2\log x - 3 &= {}^2\log 3 \\ ({}^3\log x)^2 &= 4 \\ 3^{x+1} - 3^x &= 5^4 \\ {}^2\log({}^2\log x) &= 2 \\ {}^3\log x + {}^3\log(x-1) &= {}^3\log(x+3) \\ \frac{{}^3\log x}{{}^3\log 5} &= 2 \end{aligned}$$

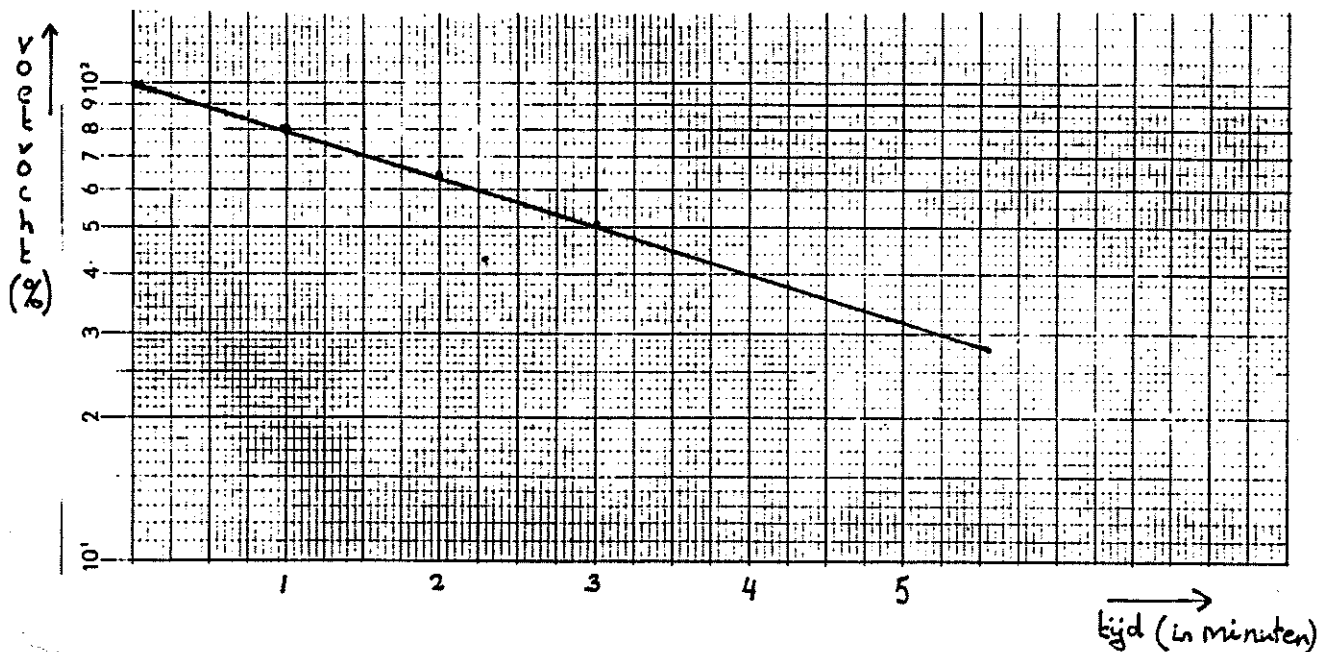
3. Los op:

$$\begin{aligned} {}^3\log x + {}^3\log 2 &= -1 \\ {}^8\log x &= 2^{{}^2\log x^2} \\ \frac{1}{3}\log x &\geq -2 \\ -\frac{2}{3} < {}^8\log x < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4. De groeifactor van een bakteriesoort is 5.
Op tijdstip 0 zijn er 10^3 bacteriën.
Geef het tijdstip waarop er 10^5 bacteriën zijn.

5. GEURVRETTERS gelegd in schoenen absorberen behalve geur ook voetvocht ("zweet"). Hieronder is een grafiek op logaritmisch papier getekend die het verband aangeeft tussen het vochtigheidsgehalte van de voeten (uitgaande van 100% vochtige voeten) en de voor de absorptie benodigde tijd.

- a. Verloopt de afname van de hoeveelheid vocht lineair?
Verklaar je antwoord.
- b. Schat de groeifactor, die behoort bij deze grafiek.
- c. Beschrijf de bij de grafiek behorende funktie.
Geef aan wat de door jou gebruikte letters voorstellen.



6. Gegevens zijn de functies f en g :

$$f : x \rightarrow {}^2\log(x-1)$$

$$g : x \rightarrow {}^2\log x - 1$$

Teken de grafieken van f en g in één tekening.

Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .

Los op: $f \geq g$.

7. Bereken met behulp van een logaritmentabel ${}^2\log 7$ in twee decimalen nauwkeurig.

8. Teken de grafiek van:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x \cdot {}^2\log 7\}$$

Liggen er behalve $(0,0)$ nog meer roosterpunten op deze grafiek?

9. Los op: $2^{x+3} - 2^x = 7$

$$\text{Los op: } {}^5\log(x+3) - {}^5\log(x-1) = {}^5\log 2.$$

10. $f : x \rightarrow {}^2\log x + 1$

$$g : x \rightarrow \sqrt{2} \log(x-1)$$

Teken de grafieken van beide functies in één tekening en bereken de x -coördinaat van het snijpunt.

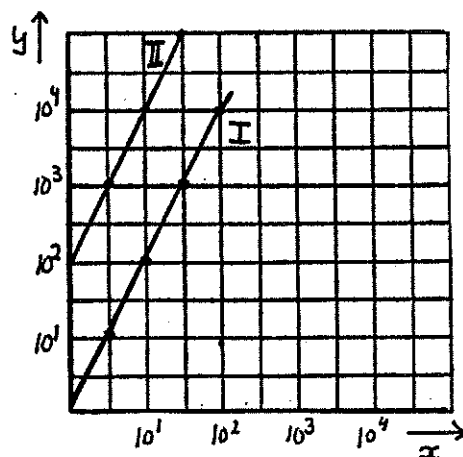
11. $f : x \rightarrow 3 + {}^2\log x$

$$g : x \rightarrow -1 + {}^{1/2}\log x$$

Teken de grafieken van beide functies, beredeneer dat ze maar één snijpunt hebben en los op: $f \geq g$.

12. Bewijs dat ${}^4\log 9 = {}^2\log 3$.

13. Hiernaast zijn op dubbellogaritmisch papier twee grafieken getekend. Beschrijf bij elk van deze grafieken een passende functie.



14. Toon aan dat het volgende getal een rationaal getal is:

$$4 \cdot {}^2\log 3 \cdot ({}^5\log 2 \cdot {}^3\log 5 - {}^3\log 32)$$

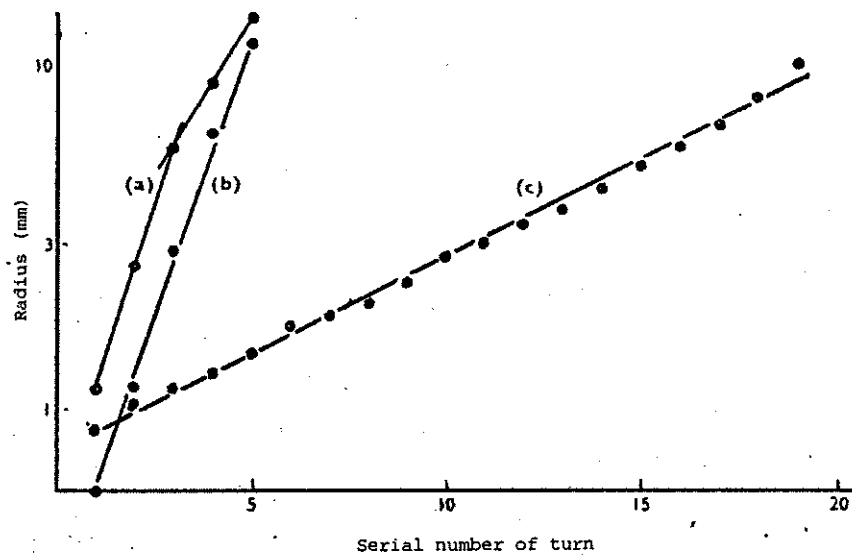
15. a. Los op: ${}^x\log 2 = 0$

b. Schets de grafiek van de functie $x \rightarrow {}^x\log 2$.

c. Heeft de grafiek asymptoten?

Zo ja, welke?

16. In onderstaande figuur is het aantal omwentelingen van drie schelpen (a), (b) en (c) uitgezet tegen de straal.



- Welke soort papier is gebruikt?
- Geef formules die de groei van schelpen (b) en (c) beschrijven.
- Wat valt je op bij schelp (a)? Verklaring?

archief FI

02.02.033

Exponenten en Logaritmen

Docentenboekje, te gebruiken bij de eerste druk