

EXPONENTIEN EN LOGARITMEN



Freudenthal instituut
Archief

EXPONENTEN EN LOGARITMEN

Een produktie van het Instituut
Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs
ten behoeve van de bovenbouw
van het V.W.O. en H.A.V.O., in
het bijzonder de 4e klas.

Ontwerp tot stand gekomen binnen
de afdeling WISKIVON van het
I.O.W.O.

Verantwoordelijk ontwerper:
Drs. Jan de Lange Jzn.

Voor leraren is een docenten-
boekje verkrijgbaar.

Utrecht, zomer 1978; 1e druk.



Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, Utrecht.

exponenten

en

logarithmen

Inhoud

1e Deel E X P O N E N T E N

Veulens	1
Celdeling	5
Standaardschrijfwijze	9
Sterrekunde	10
Hr. Bommel en de ex-ponenten	12
Halveringstijden	17
Luchtschepen	20
Asymptoten	22
De stap naar $\mathbb{R}$	23
Grafieken	24
Stijgen en dalen	25
Hoofdeigenschap	27
Samenvatting	29
Motten	30
Motorfiets	31
Bevolkingsgroei	32
Landbouwgrond	34
Levensverzekering	35
Zeesterren	36
Spiralen (I)	38
Spiralen (II)	43
Spiralen (III)	45
Muziek	46

Inhoud

2e Deel L O G A R I T M E N

Bommel nader bekeken	51
't Luchtschip nader bekeken	55
Samenvatting	58
Hoofdeigenschap	59
De logaritme nader bekeken	61
Enkele oefeningen	64
Stijgen en dalen nader bekeken	66
Logaritmische schaal	68
Logaritmisch papier	71
Bakteriën	73
Hartkwalen	76
Thiosulfaatinjectie	77
Abortus	78
Zeesterren en spiralen	81
De hoofdeigenschap nader bekeken	83
Ongelijkheden	86
Dubbellogaritmisch papier	88
Sterrekunde nader bekeken	90
Geschiedenis	96
Logaritmentafel	102
Rekenlineaal	104
Rekenschijs	106
Rekenmachine	107

deel 1

exponenten



TWEE VEULENS:

Van den Prinsenhof's
Wicky
(V: Hay el desta ali)
wordt achterna
gezeten door
Miranda (V:?)
(V: vader).

Twee vrienden kopen op dezelfde dag beide een veulen van 50 kg.

Na een maand vergelijken ze de gewichten van hun dieren.

Rudolf zegt: mijn veulen is 10 kg gegroeid.

Wim zegt : mijn veulen is 20% zwaarder geworden.

Twee maanden na de aankoop:

Rudolf: het mijne is weer 10 kg gegroeid

Wim : en het mijne weer 20% zwaarder

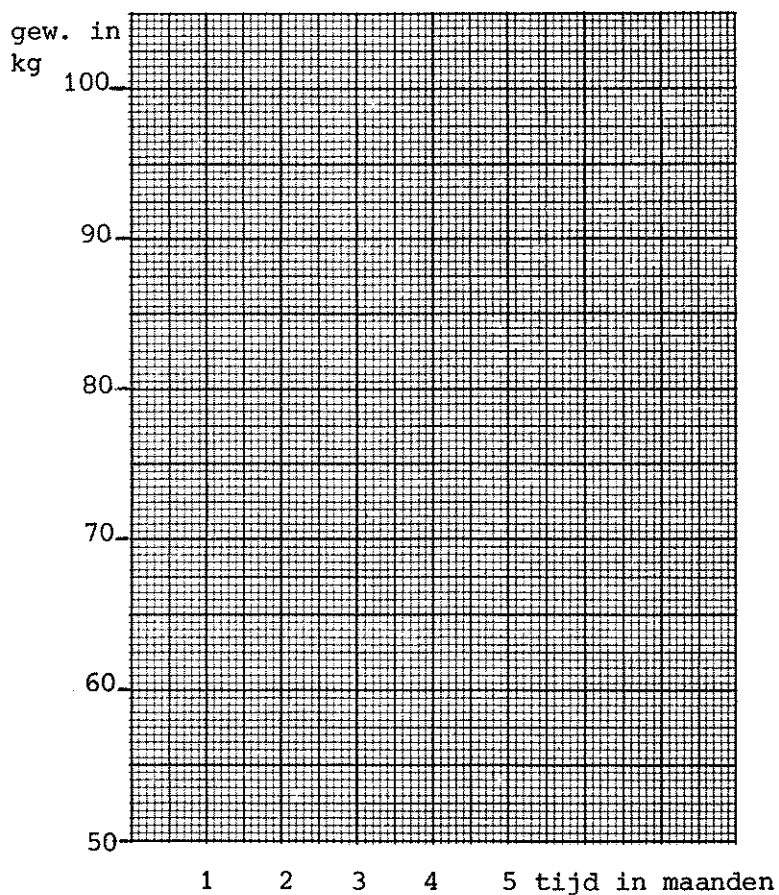
- a - Wat zijn de gewichten van de veulens twee maanden na de aankoop?
- b - Als je het gewicht van Wim's veulen na twee maanden vergelijkt met het gewicht op de dag van aankoop, met hoeveel procent is dat gewicht toegenomen?

Stel even dat de groei op dezelfde wijze doorgaat voor beide veulens:
het ene wordt 10 kg per maand zwaarder, het andere 20% per maand.

c - Maak de volgende tabel af en verklaar het reeds ingevulde:

TIJDSTIP IN MAANDEN NA AANKOOP	GEWICHT VEULEN VAN RUDOLF IN KG	GEWICHT VEULEN VAN WIM IN KG
0	50	50
1	$50 + 10 = 60$	$50 \cdot 1,2 = 60$
2		
3		
4		
5		

d - Teken een punten-grafiek van de voorafgaande tabel:



e - Mag je de punten van de grafieken zonder meer met elkaar verbinden?

- f - Acht je één der twee groeiwijzen op langere duur waarschijnlijk?
 g - Wat vind jij het meest opvallende verschil tussen beide grafieken?

De groei van het *eerste* veulen noemen we LINEAIR.

- h - Hoe luidt de formule die deze lineaire groei weergeeft? Waar komt de naam LINEAIRE groei vandaan?

De groei van het *tweede* veulen gaan we wat uitvoeriger bekijken:

- i - Het gewicht bij aankoop was: _____ kg

Na een maand was het : _____ kg

We nemen nu het *tweede* gewicht, en delen dat door het *eerste*.
 Dit getal is de GROEIFAKTOR over de *eerste* maand dus:

$$F_1 = \frac{\text{_____}}{\text{_____}}$$

Algemener:

GroEIFAKTOR over n- de maand; $F_n = \frac{\text{gewicht einde n- de maand}}{\text{gewicht begin n- de maand}}$

- j - Hoe groot is de groeifactor over de 2e maand, dus F_2 ? En F_3 , F_4 , F_5 ?
 Wat valt op? Is dat bij het eerste veulen ook zo?
- k - Gebruik de groeifactor om een formule te bedenken die de groei weergeeft van het tweede veulen.
- l - De tweede soort groei noemen we:

EXPONENTIËLE GROEI

Kun je die naam verklaren?

In het vervolg zullen we *exponentiële groei* vaak tegenkomen. En (dus) ook het begrip *groeifactor*. Regelmatig heb je dan het verband nodig tussen de groeifactor en de formule (of funktievoorschrift) die de groei weergeeft. Zie je dat verband al?

- m - Probeer eens een formule (of funktievoorschrift) te bedenken die de groei weergeeft als we de groeifactor g noemen en het begingewicht b.

Tenslotte nog dit vraagje:

- n - Jan koopt een veulen van 50 kg dat volgens hem 10% per veertien dagen groeit. (Stel 14 dagen = $\frac{1}{2}$ maand). Groeit dit veulen even snel als dat van Wim (20% per maand)?



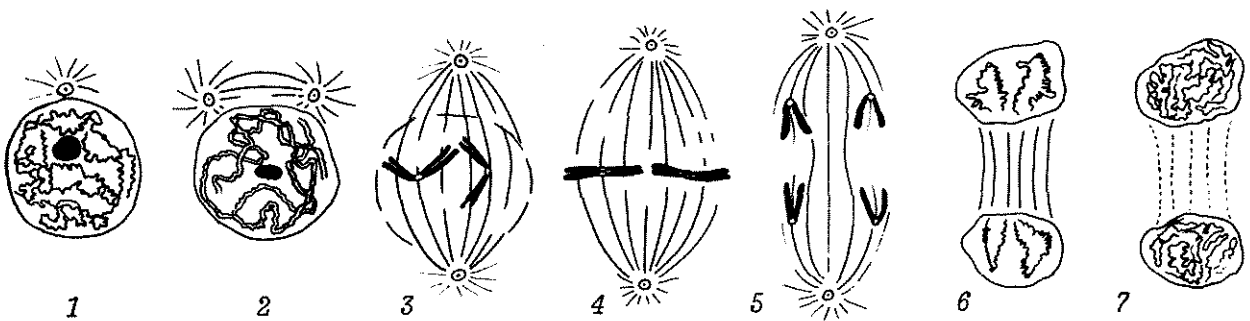
Enig idee wat Wim (rechts) tegen George zegt?

Samenvatting:

We zagen twee verschillende manieren van groeien:

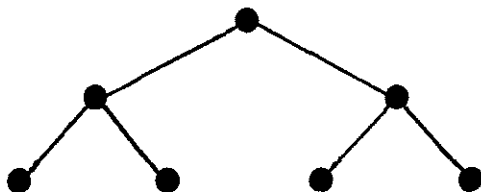
1. Lineaire groei, d.w.z. de volgende waarde ontstaat uit de vorige door *optelling* met een getal, dat konstant is over gelijke tijdsintervallen.
2. Exponentiële groei, d.w.z. de volgende waarde ontstaat uit de vorige door *vermenigvuldiging* met een getal, dat konstant is over gelijke tijdsintervallen; dat getal noemen we de groeifactor.

Als de omstandigheden gunstig zijn deelt een bepaalde cel zich na een tijdsduur in twee cellen. Deze twee, op hun beurt verdelen zich na hetzelfde tijdsinterval ieder weer in tweeën. Dit herhaalt zich.



CELDELING waarbij de dochtercellen hetzelfde aantal chromosomen hebben als de moedercel, en dezelfde chromosale aanleg, dit heet *MITOSE*.

We kunnen dit met een SCHEMA en een TABEL wat duidelijker maken: maak zowel het SCHEMA als de TABEL af.



Tijdstip t	aantal $N(t)$
0	1 = _____
1	2 = 2^1
2	4 = 2^2
3	___ = 2^{--}
4	___ = 2^{--}
5	___ = 2^{--}
t	_____

- b - Hoe groot is de GROEIFAKTOR (over 1 tijdseenheid)?
- c - Teken de grafiek van de groei met $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, \}$.
- d - Teken de grafiek van de groei nu met als domein het interval $[0; 6[$
REALISEER je daarbij goed wat je precies tekent! (Mag je alle punten verbinden?)

We spreken af:

$$2^0 = 1$$

- e - Kun je die afspraak verklaren aan de hand van het bovenstaande?

We beschouwen nu een ander geval waarbij er op het tijdstip 0 al 32 cellen zijn.

- f - Vul de tabel verder in:

t	-4	-5	-2	-1	0	1	2	3	4
N(t)					32				

De formule die deze groei weergeeft is: $N(t) = 32 \cdot 2^t$ $t \in \mathbb{N}$

We willen deze formule ook laten gelden voor $t = -1, -2, -3, \dots$
 dus, in het algemeen, $t \in \mathbb{Z}$.

- g - Kijk eens naar bovenstaande tabel. Wat zullen we afspreken voor de betekenis van:

$$2^{-1} = \text{-----} \quad 2^{-2} = \text{-----} \quad 2^{-3} = \text{-----}$$

of in het algemeen:

$$2^{-n} = \text{-----} \quad (n \in \mathbb{N})$$

- h - Vul passende exponenten in:

$$\text{v.b.: } \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^{\text{---}} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{---}} = 2^{-8}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2^{\text{---}} \quad \left(\frac{1}{8}\right)^8 = 2^{\text{---}}$$

i - Vul in:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{\text{---}} ; \quad 2^3 \cdot 2^{-5} = 2^{\text{---}}$$

$$2^{-3} \cdot 2^5 = 2^{\text{---}} ; \quad 2^{-3} \cdot 2^{-5} = 2^{\text{---}}$$

Probeer, wat je hier ontdekt, in een regel samen te vatten.

Doe dat ook bij de volgende opgave:

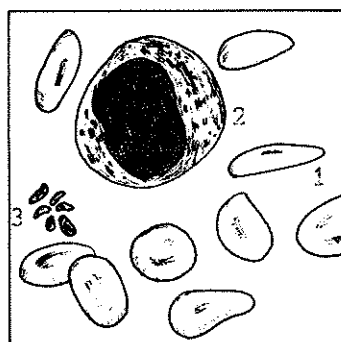
$$j - (2^3)^5 = 2^{\text{---}} ; \quad (2^3)^{-5} = 2^{\text{---}}$$

$$(2^{-3})^5 = 2^{\text{---}} ; \quad (2^{-3})^{-5} = 2^{\text{---}}$$

Samenvatting:

$$2^a \cdot 2^b = 2^{\text{---}} \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

$$(2^a)^b = 2^{\text{---}} \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$



Bloed kan worden gescheiden in PLASMA
(vnl. water)

en

RODE BLOEDLICHAAMPJES (1)

WITTE BLOEDLICHAAMPJES (2)

BLOEDPLAATJES (3)

LEUKEMIE of BLOEDKANKER ontstaat als de celdeling van de witte bloedlichaampjes (MITOSE) uit de hand loopt. D.w.z. als er woekering optreedt. Normaal zal er bij exponentiële groei na een bepaalde tijd een zgn. stationaire fase optreden. Dat wil zeggen dat de groei ophoudt. De grafiek gaat dan horizontaal lopen.

LEUKEMIE wordt onder andere bestreden door medicijnen die de ongebreidelde MITOSE tegen gaan.

k- Vul in de onderstaande lijst van machten van 2 de ontbrekende getallen in:

$2^{10} = 1024$	$2^{-1} = 0,5$
$2^9 = \text{-----}$	$2^{-2} = \text{-----}$
$2^8 = 256$	$2^{-3} = 0,125$
$2^7 = 128$	$2^{-4} = \text{-----}$
$2^6 = 64$	$2^{-5} = 0,03125$
$2^5 = 32$	$2^{-6} = \text{-----}$
$2^4 = 16$	$2^{-7} = 0,0078125$
$2^3 = 8$	$2^{-8} = 0,00390625$
$2^2 = 4$	$2^{-9} = 0,001953125$
$2^1 = 2$	$2^{-10} = 0,0009760125$
$2^0 = 1$	

l - Gebruik de tabel bij de volgende berekeningen
(v.b.: $16 \cdot 64 = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{10} = 1024$)

$$0,03125 \cdot 32 =$$

$$0,0078125 \cdot 1024 =$$

$$16 \cdot 0,015625 =$$

$$0,125 \cdot 256 \cdot 0,5 =$$

Samenvatting:

We zagen hoe we op aanvaardbare wijze definities konden bedenken voor (positieve) getallen waarvan de exponent nul of negatief was:

$$2^0 = 1, \quad 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$$

Verder zagen we dat $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$ en $(2^a)^b = 2^{ab}$ ook geldt als $a, b \in \mathbb{Z}$.

Machten van 10 worden vaak gebruikt om grote of zeer kleine getallen overzichtelijk op te schrijven.

De omtrek van de aarde is b.v. 40.077 km, en dit wordt in de standaard-schrijfwijze geschreven als : $4,0077 \cdot 10^4$ km.

a- De oppervlakte van de aarde is ca. 510 100 000 km².

Dat is $5,101 \cdot 10^{11}$ km².

En de aarde heeft een inhoud van ca. 1 083 000 miljoen km³.

Dat is $1,083 \cdot 10^{12}$ km³.

De afstand van de aarde tot de zon is gemiddeld 150 000 000 km.

Dat is $1,5 \cdot 10^8$ km.

Deze wijze van opschrijven noemen we de standardschrijfwijze.

Bij de standardschrijfwijze schrijven we een getal als een produkt van een getal tussen 1 en 10 (inklusief de 1) en een macht van 10

b - Op dezelfde wijze als bij de celdeling kunnen we inzien dat $10^{-1} = \text{-----}$

$10^{-2} = \text{-----}$ $10^{-3} = \text{-----}$ enz.

Dit maakt het mogelijk ook heel kleine getallen op de standaardmanier te schrijven:

vb.: $0,012 = 1,2 \cdot 10^{-2}$

c - De gemiddelde celgrootte is 0,01 mm.

Vul in: $0,01 \text{ mm} = \text{-----} \cdot 10^{\text{---}}$ mm.

$= \text{-----} \cdot 10^{\text{---}}$ m.

OPDRACHT.

- a - Schrijf de onderstreepte getallen in onderstaand stuk in de standaard voor de gevraagde berekeningen uit, met gebruikmaking van die notatie.

De ruimte is zo goed als leeg maar toch zijn er in het gedeelte van de ruimte dat met de teleskoop te zien is zo'n 10.000.000.000.000.000.000 sterren waarvan de zon er één is.

Met het blote oog kun je er zo'n 2000 à 3000 zien, en met een beetje kijker al gauw zo'n 10.000.

De meeste sterren zitten in melkwegen (de zon zit in "de" melkweg) waarvan op de volgende blz. een foto staat. Er zijn minstens een tien miljard melkwegen.

Dat de ruimte toch leeg is blijkt uit het feit dat er voor iedere kubieke cm materie maar liefst 10.000.000.000.000.000.000 cm³ "leegte" is!

Omdat de afstanden in de ruimte zo groot zijn is er een speciale afstandsmaat gekozen: het lichtjaar, dat is de afstand die het licht in één jaar aflegt.

1 lichtjaar: 946.100.000.000.000.000 cm.

De afstand van het melkwegstelsel NGC 5457 (zie foto) tot ons is 3.600.000 lichtjaren.

- b - Hoeveel km is dat?
De diameter van NGC 5457 is ongeveer 240.000 lichtjaren.
- c - Hoeveel km is dat?
In de melkwegen zitten de sterren erg dicht op elkaar vergeleken bij de rest van de ruimte. Maar als je een ster zou voorstellen door een regeldruppel dan is de eerstvolgende ster nog altijd zo'n 60 km verder op. De sterren in zo'n melkweg bewegen met grote snelheden rond het centrum van zo'n stelsel met snelheden van rond de 300 km/sec.
- d - Hoeveel km per uur is dat?
Een ster in een melkwegstelsel weegt zo rond de 2.000.000.000.000.000.000.000.000.000 gram.
En er waren minstens 10 miljard sterren in een melkweg.
- e - Hoe groot is de totale massa van alle sterren in een melkweg?

Hoeveel; of: de Engelsen hebben geen biljard.

	Nederlands	Engels	Amerikaans
10 ³	Duizend	Thousand	Thousand
10 ⁶	Miljoen	Million	Million
10 ⁹	Miljard	-	Billion
10 ¹²	Biljoen	Billion	Trillion
10 ¹⁵	Biljard	-	Quadrillion
10 ¹⁸	Triljoen	Trillion	Quintillion



EEN MELKWEGSTELSEL IN HET STERREBEELD GROTE BEER.
DE NAAM VAN DEZE "SPIRAAL" IS NGC 5457.



Na de maaltijd begaf heer Bommel zich naar buiten om rustig na te kunnen denken in de stilte der natuur. Peinzende bereikte de bezige zakenman het donkere bomerbos en daar viel zijn blik op een klein ventje, dat somber over een plant gebogen stond.

"Goede avond", sprak hij minzaam. "Wil het gewas niet rijzen?"

Ach ja, soms denkt men wel eens, dat men als bovenbaas alleen staat met moeilijkheden. Maar dan is het troostrijk om op te merken, dat ook een eenvoudige landman zijn zorgen heeft."



"Ik ben geen eenvoudige landman," zei het mannetje bits.

"Ik ben Pee Pastinakel en ik hoor de planten groeien".

"Wat aardig", hernam heer Ollie, een weinig uit het veld geslagen.

"Is dat een mooi geluid".

"Dat hangt er vanaf", zei Pastinakel.

"Dit is een boze zomer. Ik hoor bijna niets. Alleen het geweeeklaag der ponenten". Heer Bommel die z'n onkunde op dit gebied niet wilde laten merken knikte begrijpend.

"Waarom klagen ze?"

"Te droog. Ponenten groeien niet buiten het water. Maar het beekje is helemaal opgedroogd. Willen ze overleven dan moeten ze te water. Dan groeien ze heel hard. Ze heten dan ex-ponenten. In één dag worden ze wel twee keer zo groot!"

"Twee maal zo groot" sprak Bommel. "Dat is toch niet zo snel?"

Ik heb een mooie grote vijver. Tom Poes zegt wel zo'n 100 m².

Redt U toch wat ponenten!"

"U moet het zelf weten", sprak Pee.

Ik zal de kruiwagen even halen. Dan breng ik U vanmiddag een vierkant metertje ponenten".

- a - Laten we het verhaal van de ex-ponenten groei eens vastleggen op roosterpapier. Laat de ponenten te water op woensdag ($t = 0$). Teken het verloop van de groei van de (ex)-ponenten van de zondag ervoor t/m de woensdag er na.

b - Hoe groot is de groeifactor na $t = 0$ (over één dag)?

c - Schrijf een formule op voor de groeifactor vanaf $t = 0$.

d - Gedurende welke dag bedekken de ex-ponenten de hele vijver?

e - Vul in:

Geschokt door de toch wel snelle groei roept heer Bommel de raad in van zijn jonge vriend Tom Poes.

"Kijk nu eens, jeugdige vriend, die groei der ex-ponenten bevalt mij geenszins. Vandaag reeds is de vijver half vol. En dit is pas de _____ dag. Nog _____ dagen en de vijver is vol!"

We willen graag een betekenis geven aan b.v. $2^{\frac{1}{2}}$ of $3^{\frac{1}{4}}$, m.a.w. aan getallen waarvan de exponent een gebroken getal is. Dat is een tamelijk logische stap want nadat we vroeger al zagen wat 2^n , $n \in \mathbb{N}$ betekent hebben we nu betekenis gegeven aan 2^0 , en 2^n , $n \in \mathbb{Z}$.

Nu dus: wat is 2^p , $p \in \mathbb{Q}$?

Daartoe:

- f - Laten we de eerste dag eens wat nader beschouwen. Die loopt van $t = 0$ tot $t = 1$. Teken de grafiek eens die de groei op de eerste dag weer-geeft. Neem voor die ene dag op de X-as 4 cm.

g - Is die grafiek een rechte lijn?

Na de eerste halve dag is er $y \cdot 2$ ex-ponenten.

h - Hoe groot is y ongeveer volgens je grafiek?

i - Hoe groot is de groeifactor over de eerste halve dag (uitgedrukt in y)?

j - Hoe groot is de groeifactor over de tweede halve dag (uitgedrukt in y)?

k - Bepaal de waarde van y uit de voorgaande twee antwoorden.

Heer Bommel en de ex-ponenten

14

l - Als de formule (functievoorschrift) $N(t) = 2^t$ ook geldig is voor $t = \frac{1}{2}$,
dan vinden we $N(\frac{1}{2})$ _____

m - Welke definitie zou je kunnen halen uit de laatste 2 vragen?

n - Lees uit de grafiek af hoe groot de volgende getallen ongeveer zijn:

$$N(1\frac{1}{2}) \approx \text{-----} ; N(2\frac{1}{2}) \approx \text{-----}$$

$$N(3\frac{1}{2}) \approx \text{-----}$$

o - Kun je $N(3\frac{1}{2})$ ook berekenen met behulp van $N(\frac{1}{2})$?

p - Hiervoor maakten we aannemelijk dat:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Waarbij $2^{\frac{1}{2}}$ dus de hoeveelheid ex-ponenten is na een halve dag.
Een dag later, dus na anderhalve dag heeft dit zich verdubbeld.
Waarom?

$$\text{Dus: } N(\frac{3}{2}) = 2^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Analoog: } N(\frac{5}{2}) = 2^{\frac{5}{2}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \text{ enz.}$$

$$\text{Je ziet dus ook hier weer: } 2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$$

q - Bereken: $(2^{\frac{1}{2}})^2 =$

$$(2^{\frac{3}{2}})^2 =$$

$$(2^{\frac{5}{2}})^2 =$$

Ook $(2^a)^b = 2^{ab}$ blijft hier gelden.

De enige gebroken exponent waar we nu een definitie voor hebben
is $\frac{1}{2}$: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Op dezelfde wijze geldt natuurlijk ook:

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(\sqrt{5})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{5}}$$

Maar hoe komen we nu aan goede definities voor $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{1}{4}}$, of in het
algemeen $2^{\frac{1}{n}}$?

Voor $2^{\frac{1}{4}}$ kun je het als volgt aanpakken:

r - Laten we kijken naar de hoeveelheid ex-ponenten na $\frac{1}{4}$ dag. Noem die y.
Bereken y weer met behulp van de groeifactor over de eerste en tweede

$$\frac{1}{4} \text{ dag. Laat zien dat je vindt: } 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

Heer Bommel en de ex-ponenten

15

- s - $N(\frac{1}{4}) = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$. Hoe groot is dan de hoeveelheid ex-ponenten één dag later? En nog een dag later?
Kun je de hoeveelheid na $\frac{3}{4}$ dag ook uitdrukken in $N(\frac{1}{4})$??
- t - Hoe groot is de groeifactor over $\frac{1}{4}$ dag?
Hoe groot is de groeifactor over 1 dag?
Verklaar: $(2^{\frac{1}{4}})^4 = 2$

AFSPRAAK

$2^{\frac{1}{4}}$ is het positieve getal dat tot de 4e macht verheven 2 oplevert.

of:

$$(2^{\frac{1}{4}})^4 = 2 \quad \text{en} \quad 2^{\frac{1}{4}} > 0$$

- u - Waarom moet $2^{\frac{1}{4}} > 0$ erbij?

$2^{\frac{1}{4}}$ wordt ook wel geschreven als $\sqrt[4]{2}$ (4e machtswortel uit 2)

- v - Waarom is $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$?
- w - Maak voor $2^{\frac{1}{3}}$ net zo'n afspraak als we net gemaakt hebben voor $2^{\frac{1}{4}}$.
- We hebben nu afspraken voor $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{4}}$, $2^{\frac{1}{3}}$ en kunnen er meer maken voor $2^{\frac{1}{7}}$, $2^{\frac{1}{5}}$ enz.
Maar wat spreken we af over b.v. $2^{\frac{3}{4}}$?

Dit: $2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = (2^{\frac{1}{4}})^3$

- x - Geef zelf de afspraak voor:

$$2^{\frac{4}{5}} =$$
$$2^{\frac{2}{3}} =$$

- y - Toon aan dat uit voorgaande afspraken volgt dat:

$$2^{1\frac{1}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}}$$
$$2^{2\frac{1}{4}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \text{ enz.}$$

- z - "Bewijs": $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$

Heer Bommel en de ex-ponenten

16

Wat we nu gedaan hebben voor het grondtal 2, laat zich uitbreiden tot ieder positief reëel grondtal:

Laat een a positief reëel getal zijn en n een positief geheel getal;
Dan:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a \quad \text{en} \quad a^{\frac{1}{n}} > 0$$

ofwel:

$a^{\frac{1}{n}}$ is het positieve getal dat tot de n -de macht verheven a oplevert.

we schrijven ook wel:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

bovendien hebben we:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

$$m, n \in \mathbb{N}$$

bb - Bereken: $9^{\frac{1}{2}}$; $64^{\frac{1}{2}}$; $64^{\frac{1}{3}}$; $8^{\frac{2}{3}}$; $16^{\frac{3}{4}}$; $25^{\frac{3}{2}}$;

cc - Bereken met rekenmachien: $\sqrt[5]{11}$, $\sqrt[4]{100}$, $\sqrt[8]{256}$, $\sqrt[3]{1000}$

(Schrijf eerst als macht)

dd - Welke afspraak zullen we maken over de betekenis van $2^{-\frac{1}{2}}$?

- Dus:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$m, n \in \mathbb{R}$$

$$a \in \mathbb{R}_+$$

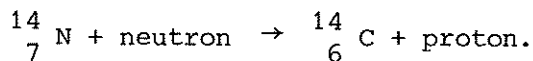
ee - Schrijf als macht van 2 of 3:

$$2, 32, 3\sqrt{3}, 1, \sqrt{8}, 9\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{27}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{3}, 64\sqrt{2}, \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

ff - Om in te zien waarom a positief moet zijn moet je maar eens even denken aan de betekenis (?) van $(-2)^{\frac{1}{2}}$.

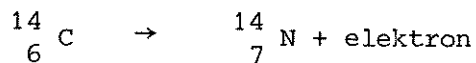
Samenvatting: We definieerden in dit hoofdstukje wat machten met gebroken exponenten voorstellen.

In zeer hoge luchtlagen ontstaat onder invloed van uit de wereldruimte binnendringende deeltjes, de kosmische straling, uit de gewone stikstof-14, het radioactieve isotoop koolstof-14:



Het ${}^{14}_6\text{C}$ vervalt op zijn beurt weer in ${}^{14}_7\text{N}$ en β -straling.

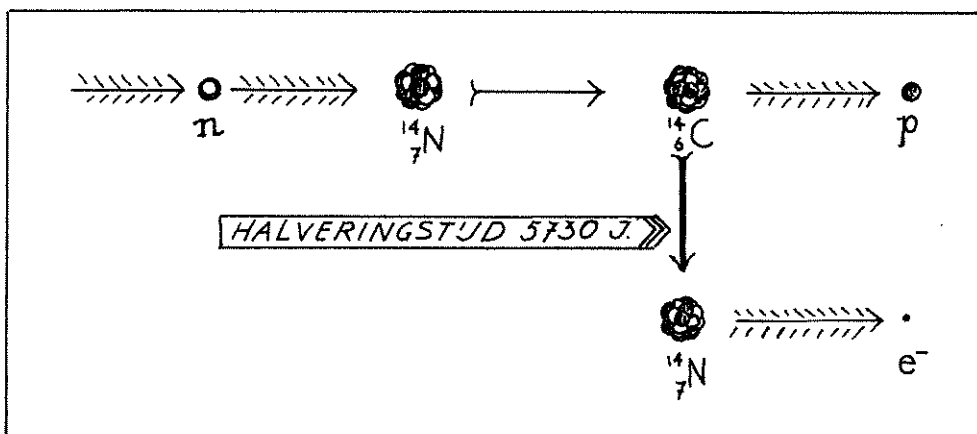
Na 5730 jaar is de helft van de ${}^{14}_6\text{C}$ verdwenen:



- De halveringstijd van ${}^{14}_6\text{C}$ is 5730 ± 40 j.

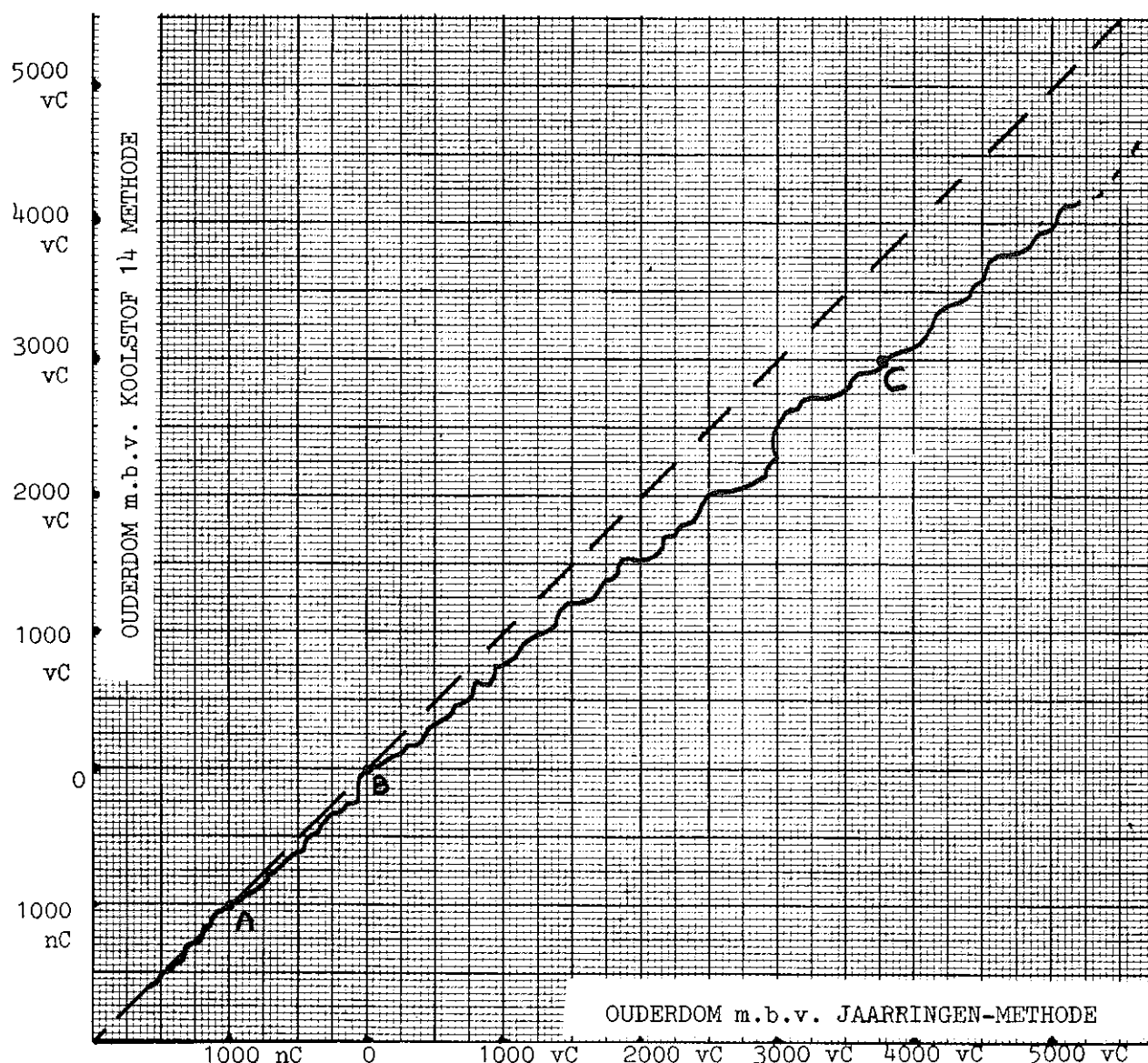
Wat wil dit zeggen?

- Na hoeveel jaar is $\frac{1}{4}$ van de koolstof verdwenen?
- Wat is de groeifactor over 1 tijdseenheid (van 5730 jaar)?
- Neem aan dat er op $t=0$ 10.000 atomen zijn. Bereken dan het aantal ${}^{14}_6\text{C}$ atomen op $t=1$, $t=2$, _____, $t=6$
- Geef de formule voor de groeifunctie (op $t = 0$ zijn er N atomen).



- Hoeveel atomen waren er 5730 jaar geleden?
- Teken de grafiek voor $-1 \leq t < 6$.
- Wat is het belangrijkste verschil met de grafiek van de celdeling?

Ieder levend organisme bevat $^{14}_6\text{C}$. Alhoewel niet al te veel:
 In 1 kg organisch materiaal zit 10^{-6} mg $^{14}_6\text{C}$. Na de dood van b.v.
 een boom wordt geen $^{14}_6\text{C}$ meer opgenomen. Dan daalt de hoeveelheid
 langzaam door radioactief verval. Als je nu nauwkeurig de hoeveelheid
 $^{14}_6\text{C}$ vaststelt in een stuk hout, kun je aan de hand daarvan de ouder-
 dom schatten. Dit gaat redelijk nauwkeurig tot "leeftijden" van 70.000
 jaar. Door o.a. wisselende sterkte van de kosmische straling zijn de
 uitkomsten van leeftijdsbepaling met de koolstofmethode niet altijd
 dezelfde als de "zonne-jaren". De "zonne-jaren" leeftijd valt bij een
 boom b.v. te bepalen met jaarringen. Hieronder zie je een voorbeeld van
 een pijnboom uit Amerika. Als de " $^{14}_6\text{C}$ " leeftijd hetzelfde zou zijn als
 de "zonne-jaren" leeftijd zou ouderdoms lijn samenvallen met de lijn $x = y$.



Bij A en B zijn de ^{14}C leeftijd en de zonne leeftijd gelijk.

h - Hoe groot?

Bij C geeft de ^{14}C methode een veel te jonge boom.

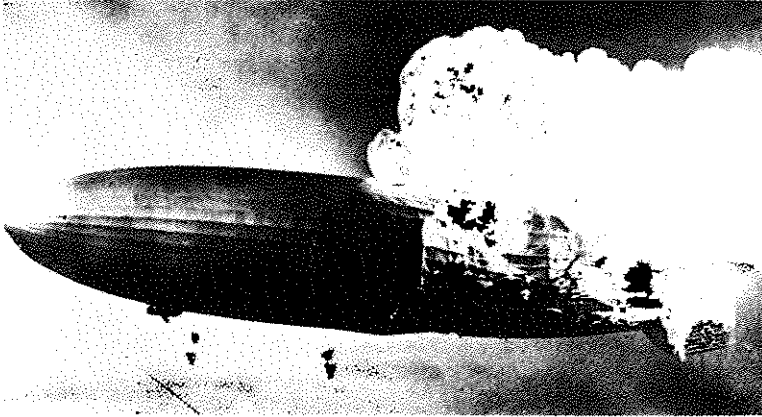
i - Hoe oud is de boom in ^{14}C jaren?

j - En werkelijk?



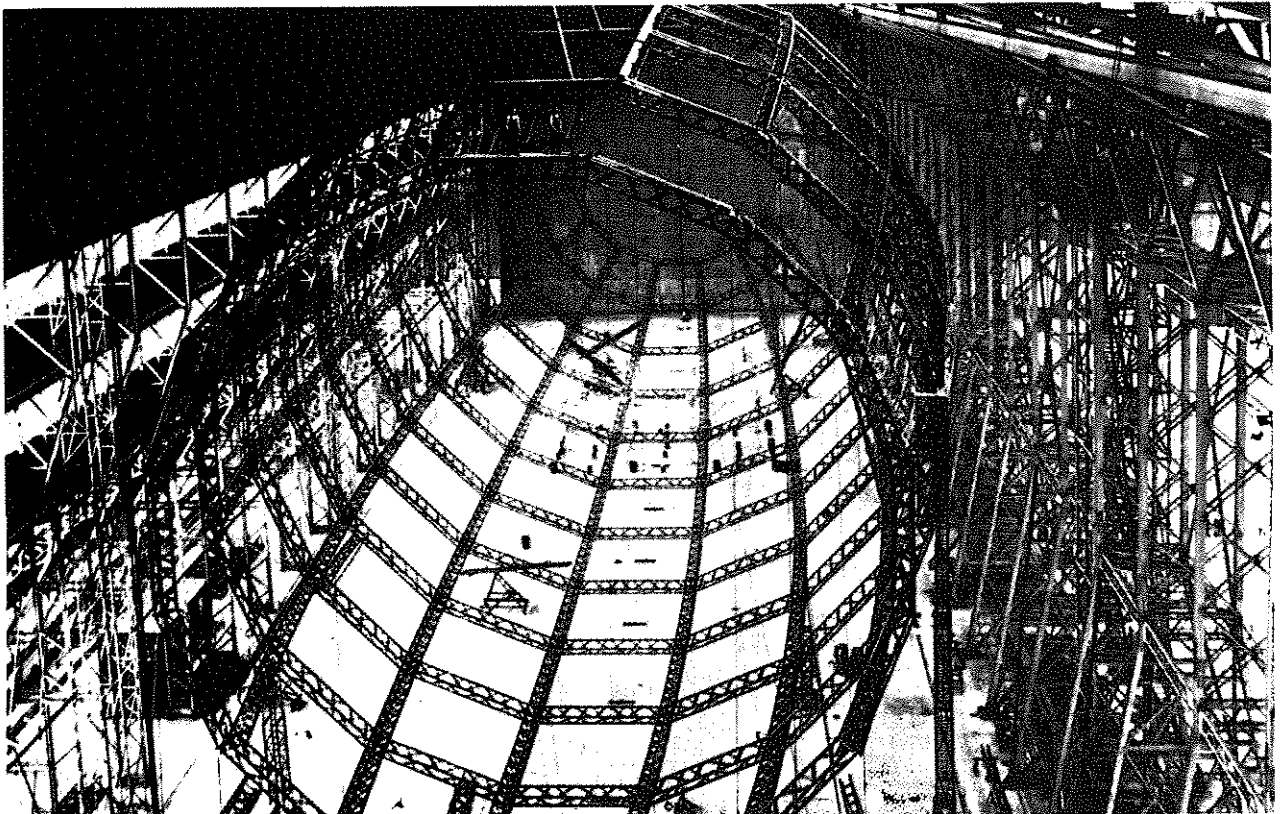
*Een pijnboom (PINUS ARISTATA) in de Witte Bergen in Californië.
Een bestudering van de groeiringen bracht aan het licht
dat deze boom zo'n 4500 jaar oud is.*

In de jaren 30 was het luchtschip erg populair. Tot 6 mei 1937, toen explodeerde (door sabotage?) de trots van Hitler-Duitsland de Hindenburg in New York:



*HINDENBURG, lengte: 245m.
Ontploft vlak voor de landing
Je ziet de watertanks
uit het luchtschip
vallen.*

Het verlies van draaggas door de huid van het luchtschip was in de beginjaren erg groot. 50% in 10 dagen was normaal. Om dat te compenseren nam men grote hoeveelheden water mee, die als de draagkracht minder werd, werden geloosd. Neem als tijdseenheid eens 10 dagen, en ga eens uit van 180.000 m³ draaggas. Om je een indruk te geven van een dergelijk volume is de volgende foto wel aardig. Deze is van de Engelse R-100, tijdens de bouw. Let eens op de beide arbeiders die midden boven op één der spanten staan.



Ga voor de volgende vragen uit van de gegevens van de vorige blz.

- a - Hoe groot is de groeifactor van de hoeveelheid gas?
- b - Hoe luidt de formule voor de groeifunctie?
- c - Teken de grafiek.
- d - Hoeveel gas zit er nog in het luchtschip na één maand?
- e - Hoeveel procent verlies treedt op in één maand?
- f - Na 20% gasverlies kan het luchtschip niet meer vliegen.
Hoeveel vliegdagen zijn er ongeveer na vulling (grafiek)?



Een GOOD-YEAR luchtschip dat gebruikt wordt voor reclame doeleinden, en zo af en toe ook Nederland aan doet.

De huidige luchtschepen (van Good-Year) zijn nogal klein (3.000 m^3). Het gasverlies is nog maar 2% (ongeveer) in 10 dagen.

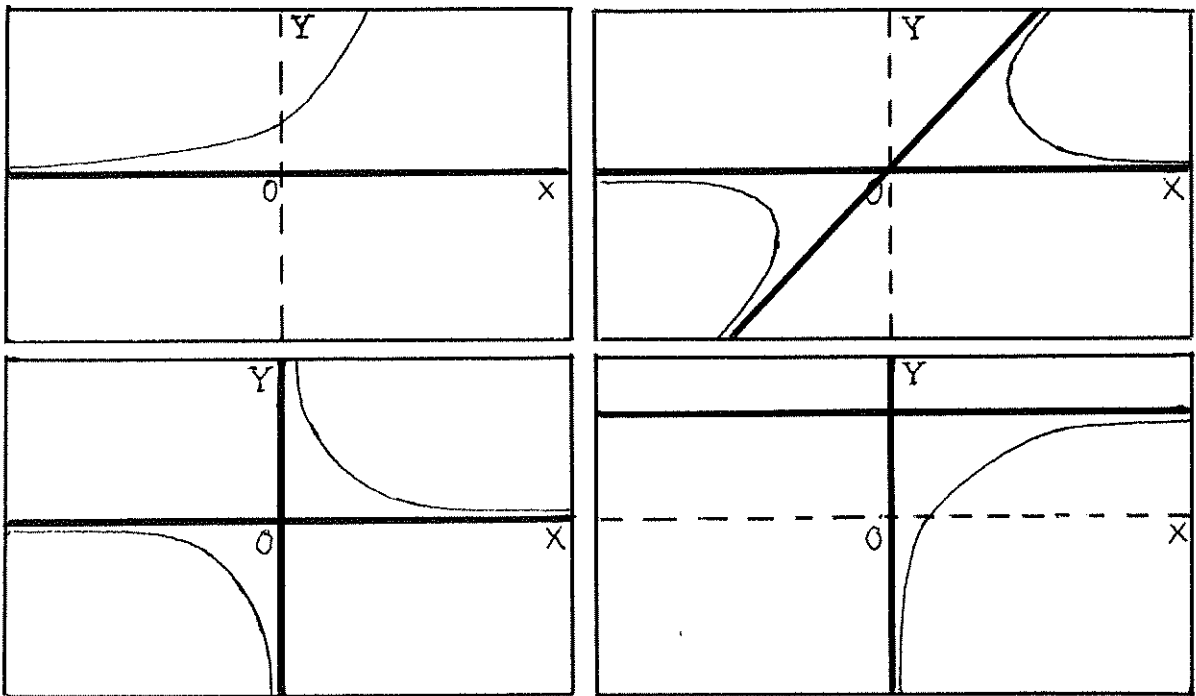
- g - Hoe groot is de groeifactor? En het functie-voorschrift?
- h - Hoeveel procent gasverlies treedt er op in een maand?
- i - Zal het luchtschip ooit volkomen zonder draaggas komen te zitten?
En *zo goed als* zonder?
- j - Kijk nog eens naar de grafiek van het oude luchtschip, waar het "groei" voorschrift $t \rightarrow 180.000 \left(\frac{1}{2}\right)^t$ was. Hoe zie je aan de grafiek dat vrijwel al het draaggas verdwijnt, maar nooit "alles"?

Alle groeifuncties vertonen het verschijnsel: voor grote of kleine (negatief grote) waarden van x of t valt de grafiek *zo goed als* samen met een lijn.

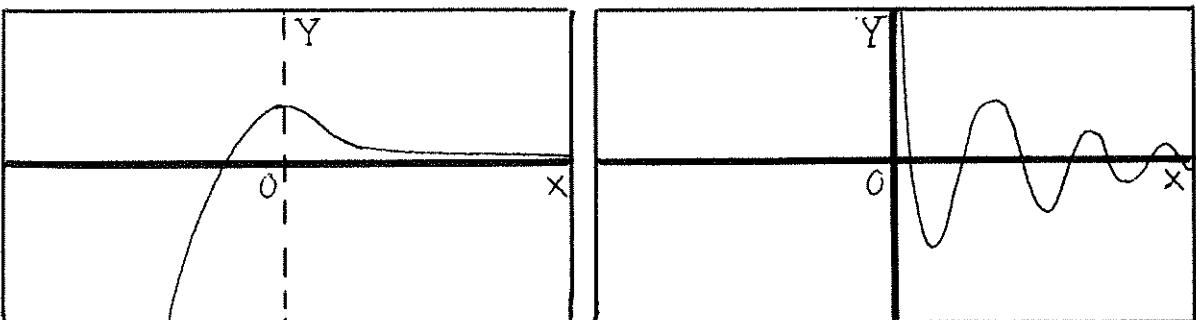
Die rechte lijn noemen we *ASYMPTOOT*.

Bij ons was het steeds de X -as of T -as.

Meestal nadert de grafiek de asymptoot steeds dichtter, zonder deze te snijden, net als bij onze groeifuncties, en zoals bij de volgende voorbeelden: (de ast. is DIK getekend).



Het komt ook wel eens voor dat de grafiek de asymptoot wel snijdt:



a - Teken de grafieken van: ($x \in \mathbb{Q}$)

$$x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad x \rightarrow 2^x + 1; \quad x \rightarrow 3^x - 2; \quad x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3\frac{1}{2}$$

Geef de vergelijkingen van de asymptoten.

Op de vorige bladzijde stonden wat opgaven waarbij je grafieken moest tekenen van enkele exponentiële functies. Er stond bij dat $x \in \mathbb{Q}$ moest zijn. Dan weten we tenminste waar we over praten want al eerder hebben we

b.v. $2^{\frac{1}{2}}$ en $3^{\frac{3}{4}}$ gedefinieerd, of algemener: a^q , $q \in \mathbb{Q}$, $a > 0$.

Die grafieken heb je waarschijnlijk als ononderbroken lijnen getekend. Dat is te verdedigen, maar de grafiek van b.v. $x \rightarrow 2^x$ (met domein $\mathbb{Q}$) is eigenlijk "poreus". Zo zit er b.v. een gaatje op de lijn $x = \sqrt{2}$, omdat $\sqrt{2}$ geen element van $\mathbb{Q}$ is.

Evenzo vind je gaatjes op de lijn $x = \sqrt{3}$, $x = \pi$,

We willen nu 2^x definiëren voor alle reële getallen.

We vullen de gaatjes op, als het ware.

- a - Teken nog eens de grafiek van $f: x \rightarrow 2^x$ $x \in \mathbb{Q}$.
- b - Geef aan waar volgens jou $\sqrt{2}$ ligt (op de X-as).
- c - Kun je aan de hand van de grafiek iets zeggen over de grootte $2^{\sqrt{2}}$?
- d - $\pi \approx 3,14$. Hoe groot is 2^π nu ongeveer?

Je ziet dus dat we, omdat we getallen als $\sqrt{2}$ en π kunnen benaderen met getallen uit $\mathbb{Q}$, we ook een benadering kunnen geven voor $2^{\sqrt{2}}$, 2^π enz.

Daarom zullen we voortaan de exponentiële functies ook gedefinieerd achten voor reële getallen, dus $x \in \mathbb{R}$. We breiden als het ware het domein uit van $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{R}$.

Concluderend:

Stap voor stap hebben we het domein voor $f: x \rightarrow 2^x$ uitgebreid:

Eerst hadden we: $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$; dus domein $\mathbb{N}$

Vervolgens definieerden we: 2^0 , dus domein $\mathbb{N} \cup \{0\}$

Daarna: $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, \dots$; dus domein $\mathbb{Z}$

en $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{4}}$, e.d. ; dus domein $\mathbb{Q}$

Tenslotte maakten we op deze bladzijde aannemelijk dat we als domein $\mathbb{R}$ kunnen nemen.

Op deze bladzijde staan wat opgaven waarbij je moet werken met grafieken van exponentiële functies.

Het domein is steeds $\mathbb{R}$.

- a - Teken de grafieken van: $f: x \rightarrow (\frac{1}{2})^x$
 $g: x \rightarrow 2^{-x}$

in één tekening. Verklaar wat je opvalt aan de grafieken.

- b - Teken de grafieken van $f: x \rightarrow 2^x$
 $g: x \rightarrow (\frac{1}{2})^x$

in één tekening. Verklaar wat je opvalt aan de grafieken.

- c - Teken de grafiek van $f: x \rightarrow 3^x$

Lees uit de grafiek af:

$$3^x < \frac{1}{3}$$

$$3^x > \sqrt{3}$$

- d - Teken de grafiek van $f: x \rightarrow 2^x - 3$

Wat is het domein van f ?

Wat is het bereik van f ?

Geef een benadering (uit de grafiek) voor het nulpunt van f .

Los op met de grafiek:

$$2^x - 3 < 5$$

- e - De laatste opgave levert de ongelijkheid, na overbrenging van de 3 naar het rechterlid:

$$2^x < 8.$$

Dit kun je weer schrijven als

$$2^x < 2^3$$

waarbij de vraag zich misschien voordoet of dit gelijkwaardig is met

$$x < 3$$

Volgens het antwoord van de vorige opgave is dit inderdaad waar.

Op de volgende bladzijde zullen we dit wat nader onderzoeken.

Maar probeer eerst zelf maar eens te ontdekken of het volgende juist is:

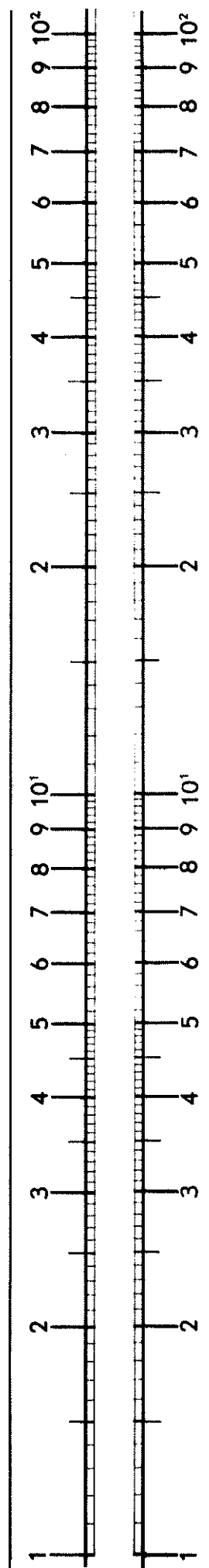
$$(\frac{1}{2})^x < \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$(\frac{1}{2})^x < (\frac{1}{2})^3 \Leftrightarrow$$

$$x < 3.$$

BIJLAGE BIJ: EXPONENTEN EN LOGARITMEN

Hiernaast zie je twee stroken met een logaritmische schaal erop. Door deze uit te knippen kun je ze laten fungeren als eenvoudige rekenlineaal.



- a - Teken de grafieken van f , g en h in één plaatje en die van k , l en m in een andere:

$$f: x \rightarrow 3^x \quad k: x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$g: x \rightarrow 2^x \quad l: x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$h: x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad m: x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

Welk punt hebben de grafieken gemeen?

- c - Bij welke van bovenstaande grafieken zien we (echte) groei?
Welke voorbeelden kennen we al van (positieve) groei?
Bij welke waarden voor de groeifactor is er zulke groei?
dus:

- d - voor welke waarden van a is $f: x \rightarrow a^x$
een functie met (positieve) groei?

- e - Neem in het plaatje met de "echte" groei grafieken twee willekeurige waarden voor x en noem die $x = p$, $x = q$ zó dat $p > q$.
Geef met een lijntje aan hoe groot de bijbehorende functievoorwaarden zijn.

Vul in:

Als de groeifactor groter dan 1 is dan hoort bij een grotere x een grotere functiewaarde of wat meer wiskundig:
kleinere

- f - Als $a > 1$ dan: $p > q \Rightarrow f(p) \dots\dots f(q)$.

Een functie met deze eigenschap heet **STIJGEND**.

- g - Welke voorbeelden hebben we gezien van *negatieve* groei?
Verklaar de uitdrukking *negatieve groei*.

- h - Voor welke waarde van a is $f: x \rightarrow a^x$ zo'n functie met negatieve groei?

- i - Geef zelf een definitie voor een **DALENDE** functie.

Zolangzamerhand weten we bijna voldoende van exponentiële functies.
Voor de volledigheid nog dit:

- j - Wat is het *domein* van alle exponentiële functies van de vorm $x \rightarrow a^x$?
k - Wat is het *bereik* van alle exponentiële functies van de vorm $x \rightarrow a^x$?

Vul aan:

CONCLUSIES:

$$f: x \rightarrow a^x \text{ is } \dots\dots \text{ als } a > 1$$

$$\text{is } \dots\dots \text{ als } 0 < a < 1$$

$$f: x \rightarrow a^x \text{ heeft als domein } \dots\dots$$

$$f: x \rightarrow a^x \text{ heeft als bereik } \dots\dots$$

1 - Toon aan:

$$2^p > 2^q \Leftrightarrow p > q$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^p > \left(\frac{1}{3}\right)^q \Leftrightarrow p < q$$

m - Gebruik dit om de volgende opgaven te maken:
voorbeeld:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 64 \text{ komt op hetzelfde neer als } \left(\frac{1}{4}\right)^x < \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$$

Je weet: $x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x$ is dalend.

Uit voorgaande volgt: $x > -3$

of in louter wiskunde-taal:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{1}{4}\right)^x < 64 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x < \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \\ x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x \text{ is dalend} \end{array} \right\} \Rightarrow x > -3$$

of:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{1}{4}\right)^x < 64 \Leftrightarrow 4^{-x} < 4^3 \\ x \rightarrow 4^x \text{ is stijgend} \end{array} \right\} \Rightarrow -x < 3 \Leftrightarrow x > -3$$

Je kunt ook overgaan op het grondtal 2 of $2\frac{1}{2}$.

Los x zelf op uit:

$$2^x > \sqrt{32}$$

$$5^x > 5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{2}^{-x} < 8$$

$$2^x < 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 16$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$$

$$5^x < \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{3}^x < \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \sqrt[4]{3}$$

$$7^x > \sqrt[3]{49}$$

o - Teken de grafieken $f: x \rightarrow 2^{x+3}$ $x \in \mathbb{R}$
en $g: x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $x \in \mathbb{R}$ in één tekening.

Bepaal het snijpunt en los op:

$$2^{x+3} > \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad x \in \mathbb{R}$$

p - Teken in één figuur de grafieken van de volgende funkties:

$$f: x \rightarrow 2^{2x-2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g: x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} \quad x \in \mathbb{R}$$

Los op:

$$2^{2x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x}$$

$$2^{2x-2} > 2\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} \geq 2$$

$$2^{2x-2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x}$$

$$2^{2x-2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$2^{2x-2} > 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} < 0$$

Tenslotte willen we eigenschappen $2^p, 2^q = 2^{p+q}$ en $(2^p)^q = 2^{pq}$ ook nog bekijken voor het geval $p, q \in \mathbb{R}$.

Eerst maar eens de zogenaamde

HOOFDEIGENSCHAP DER EXPONENTIËLE FUNKTIES:

$$2^p \cdot 2^q = 2^{p+q}$$

Daartoe bekijken we nogmaals de simpele groeifunctie $f: x \rightarrow 2^x$.
Laten we als tijdseenheid de maand nemen waarbij iedere maand 30 dagen duurt.

- a - Hoe groot is de groeifactor over de eerste 3 maanden (jan.febr. maart)?
- b - En over febr. maart, april? Verklaar je antwoorden op a) en b).
- c - Hoe groot is de groeifactor over het tijdsinterval $[0, p]$? ($p \in \mathbb{R}$).
- d - En over $[q, q+p]$? ($p, q \in \mathbb{R}$)
- e - Laat zien dat hieruit volgt: $2^p \cdot 2^q = 2^{p+q}$

In zijn algemeenheid:

Voor elke $a > 0, a \neq 1, a, x, p, q, \in \mathbb{R}$
geldt: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
of
Als $f(x) = a^x$ dan $f(p)f(q) = f(p+q)$.

Een kleine toepassing:

GEGEVEN:	$2^0 = 1$	$2^{0,5} = 1,414213562$
	$2^{0,1} = 1,071773463$	$2^{0,6} = 1,515716567$
	$2^{0,2} = 1,148698355$	$2^{0,7} = 1,624504793$
	$2^{0,3} = 1,231144413$	$2^{0,8} = 1,741101127$
	$2^{0,4} = 1,319507911$	$2^{0,9} = 1,866065983$

Even terug naar een heer van stand en z'n vijver met ex-ponenten.
Bereken de oppervlakte van z'n vijver die met planten bedekt is na:

- 1,1 dag
- 5,4 dag
- 3,2 dag.

Nu rest ons nog een bewijs van $(2^p)^q = 2^{pq}$.

Weer terug naar $x \rightarrow 2^x$; $x \in \mathbb{R}$, x in maanden.

- f - Hoe groot is de groeifactor over jan. - febr. - maart, dus over het eerste kwartaal?
- g - Hoe groot is de groeifactor over 3 kwartalen; uitgaande van die van het eerste kwartaal?
En als je hem direkt over die 9 maanden berekent?
- h - Waarom volgt uit g nu:

$$(2^3)^3 = 2^9$$

- i - Nu algemener.

Beschouw het tijdsinterval: $[0, p]$

Hoe groot is de groeifactor daarover?

Neem nu q perioden met de lengte van $[0, p]$ na elkaar.

Welke periode heb je dan in totaal?

Hoe groot is de groeifactor daarover?

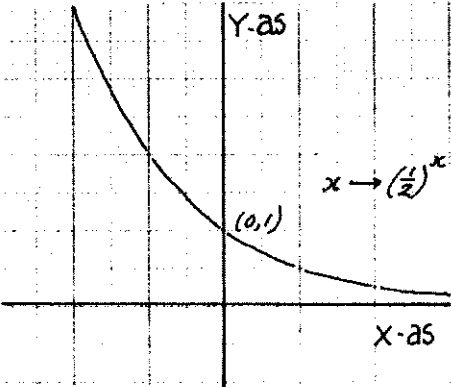
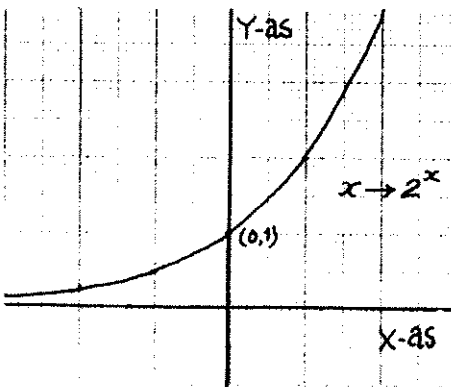
Hoe volgt hieruit dat:

$$(2^p)^q = 2^{pq} \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Samenvatting

29

Funkties van de vorm: $x \rightarrow a^x$ heten exponentiële functies.
Zij bestaan voor $a > 0$, $a \neq 1$; en hebben de volgende eigenschappen:

$0 < a < 1$	$a > 1$
Grafiek	Grafiek
	
Domein $\mathbb{R}$	Domein $\mathbb{R}$
Bereik $\mathbb{R}^+$	Bereik $\mathbb{R}^+$
Nulp. geen	Nulp. geen
Dalend	Stijgend
Asympt. $x - as$	Asympt. $x - as$

HOOFDEIGENSCHAP

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$a > 0, a \neq 1$$

of als $f : x \rightarrow a^x$:

$$f(p) \cdot f(q) = f(p+q)$$

$$a, x, p, q, \in \mathbb{R}$$

$$a^0 = 1$$

$$; a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

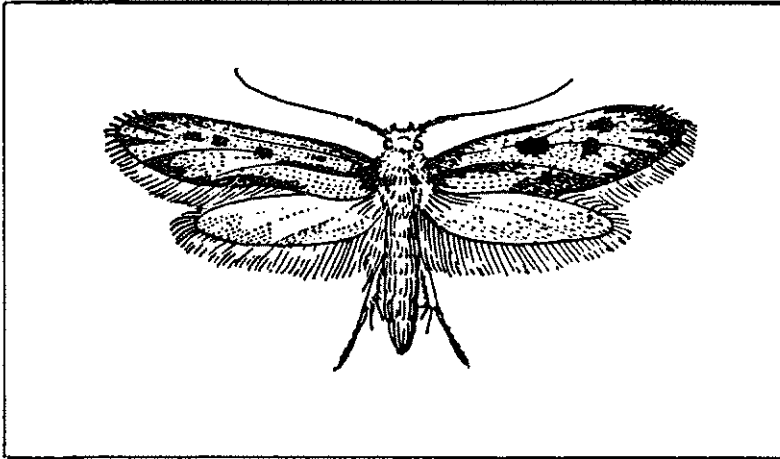
$$; a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$$

$$; a^{\frac{3}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$n \in \mathbb{N}^+, p, q \in \mathbb{R}$$



Deze mot (TINEA PELLIONELLA) is een zeer algemeen soort.

De vrouwtjes leggen ongeveer 150 eieren.

In één jaar kunnen ongeveer 5 generaties voorkomen.

Iedere larve eet (ongeveer) 20 mg wol.

Tweederde van de eieren gaat voortijdig dood, en van de overlevenden is de helft vrouwtjes.

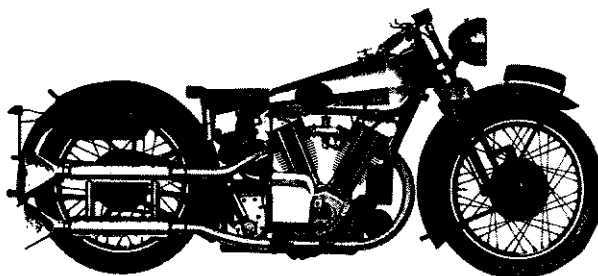
- a - Maak een schema van de groei.
(Beschouw het eerste ouderpaar als 1^e generatie).
- b - Hoeveel wol wordt in één jaar door de afstammelingen van moeder mot opgevreten?
- c - Is het mogelijk een formule te geven die een verband aangeeft tussen de generaties en de hoeveelheid opgegeten wol?



De geschiedenis v.h. motorrijwiel van 1898 t/m 1951 op een serie postzegels uit Tsjechoslowakye.

Het motorrijwiel kent tegen het eind van de 70'er jaren een bloei periode. Jan en alleman wil er een hebben. George ook. Hij heeft f 4.000,- gespaard maar heeft z'n oog laten vallen op een JAWA (zie plaatje) van f 5.000,- Hij zet de f 4.000,- vast voor 8% per jaar. Hoe lang moet hij nog wachten? Maak een grafiek.

Eindelijk is de nieuwe motor er. Inmiddels kost hij f 5.400,-. Na een jaar is zo'n ding wat minder waard. "Afschrijving" heet zoiets. Kenners hebben George verteld dat hij moet rekenen op $33\frac{1}{3}\%$ afschrijving per jaar. Hij wil uiteindelijk de motor wegdoen voor f 1.000,- (ongeveer). Hoeveel jaar kan hij op z'n motor rijden?



Merk: Brough Superior

Bouwjaar: 1924(!)

Motor 680 cc, topsnelheid boven 160 km/u.

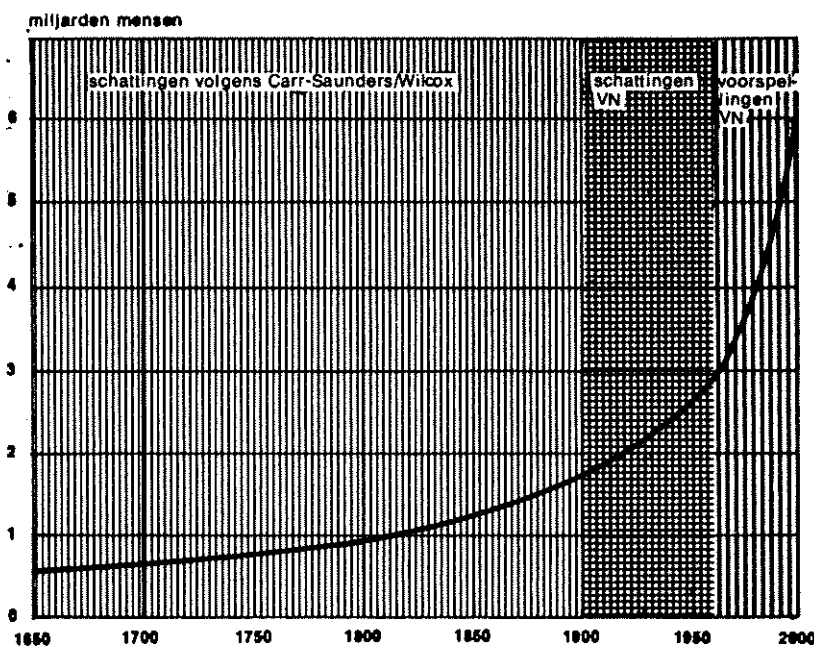
In het jaar 1650 bedroeg de wereldbevolking ongeveer 0,5 miljard en groeide per jaar met zo'n 0,3%.

- a - Is de groei exponentieel?
- b - Hoe groot is de groeifactor?

In het jaar 1970 bedroeg de wereldbevolking rond de 3,6 miljard en groeide per jaar met ongeveer 2,1%.

- c - Hoe groot is de groeifactor dan?

Je ziet dat de grafiek die de groei van de wereldbevolking sinds 1650 weergeeft niet *zuiver* exponentieel kan zijn want de groeifactor was rond 1650 aanmerkelijk kleiner dan rond 1970. Maar *in de buurt van 1650* en *in de buurt van 1970* was de groei wel redelijk zuiver exponentieel. Maar laten we eens naar de grafiek kijken. Geweldig duidelijk is deze niet maar probeer toch de volgende vragen eens op te lossen:



- d - In 1650 waren er 0,5 miljard mensen. Hoe lang duurde het voordat dit aantal was verdubbeld?
- e - In welk jaar waren er 3 miljard mensen? Hoe lang verwacht men dat het zal duren voordat dit aantal is verdubbeld?
- f - Hoe zie je aan de resultaten van d. en e. een verband met b. en c.?

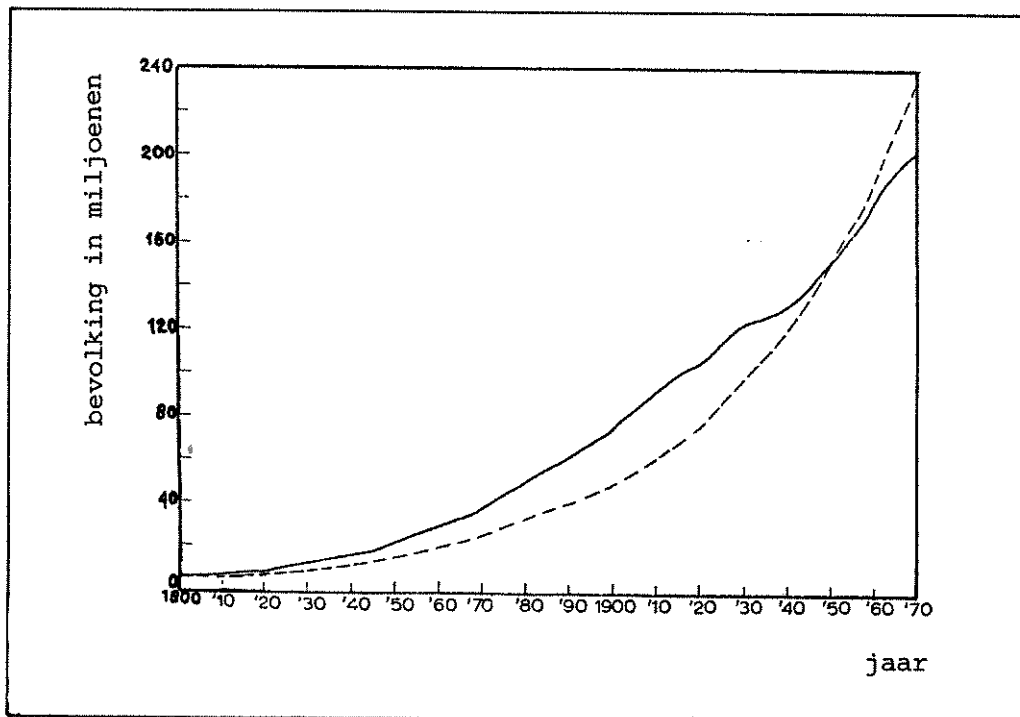
Je ziet dat de verdubbelingstijd enorm veel korter wordt als de groeifactor iets groter wordt.

B.v. bij percentages van 10%, 2% en 0,5%:

Groeipcentage	Groeifactor	Verdubbelingstijd
10%	1,1	7,0 jaar
2%	1,02	35,0 jaar
0,5%	1,005	140,0 jaar

Overigens is voorgaande grafiek wel erg modelmatig.

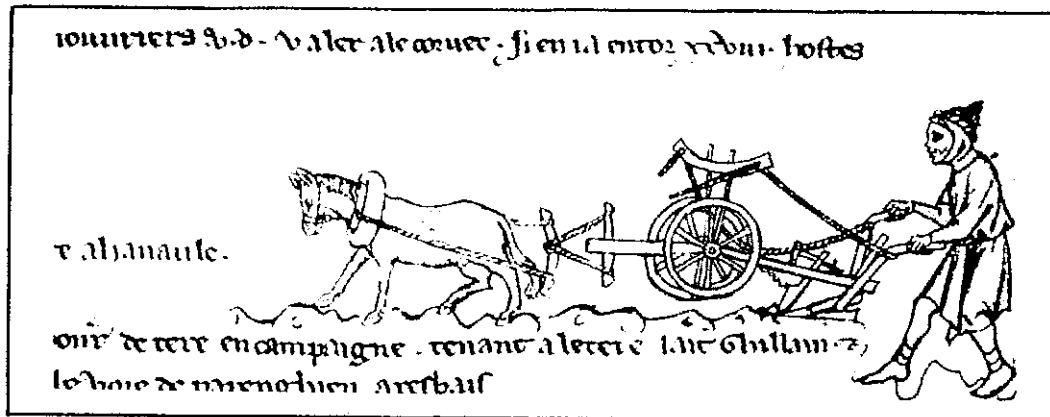
Een aardige indruk van het verschil tussen de werkelijke groei en het exponentieel model vind je bij de grafiek die de groei van de bevolking van de V.S. weergeeft.



De ononderbroken lijn geeft de werkelijke groei aan, de gestippelde lijn is de grafiek van:

$$y = 1,028^x \quad (x = 0 \text{ valt samen met } 1770)$$

- g - Bedenk eens wat mogelijkheden voor het achterblijven van de werkelijke bevolkingsgroei bij het exponentiële model gedurende de laatste 10 jaar.
- h - Hoe groot is het groeipcentage?
- i - Hoe lang is de verdubbelingstijd volgens de grafiek?



Tot nog toe heeft de ontwikkeling van de landbouwtechniek er zorg voor gedragen dat de totale voedselopbrengst (in principe) de groei van de wereld bevolking heeft kunnen bijhouden. Maar de hoeveelheid geschikt land is niet zo eenvoudig uit te breiden.



De wereld bevat ongeveer 4 miljard ha land dat geschikt is voor de voedselopbrengst. Volgens deskundigen hebben we per man minimaal $\frac{1}{4}$ ha. nodig om voor voldoende voedsel te zorgen.

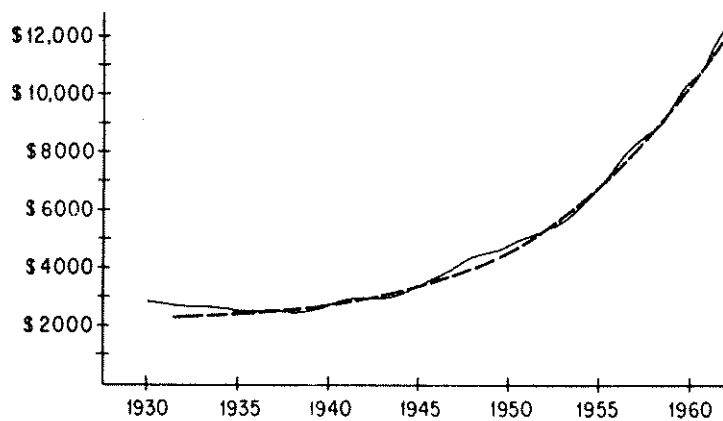
In 1965 waren er ongeveer 3 miljard mensen. Per jaar is de bevolkingstoename ongeveer 1,8%.

In welk jaar zal de maximale mogelijke wereldbevolking bereikt zijn? (Met rekenmachine).

Noem eens wat bezwaren van de voorstelling van zaken in deze som.

Dat de werkelijkheid zich niet altijd zo makkelijk in een eenvoudige wiskundeformule laat vangen blijkt uit onderstaand voorbeeld. Je ziet hieronder voor welk bedrag een gezin in de V.S. levensverzekeringen had afgesloten gedurende de jaren 1930 - 1960.

*Levensverzekering
per gezin in dollars*

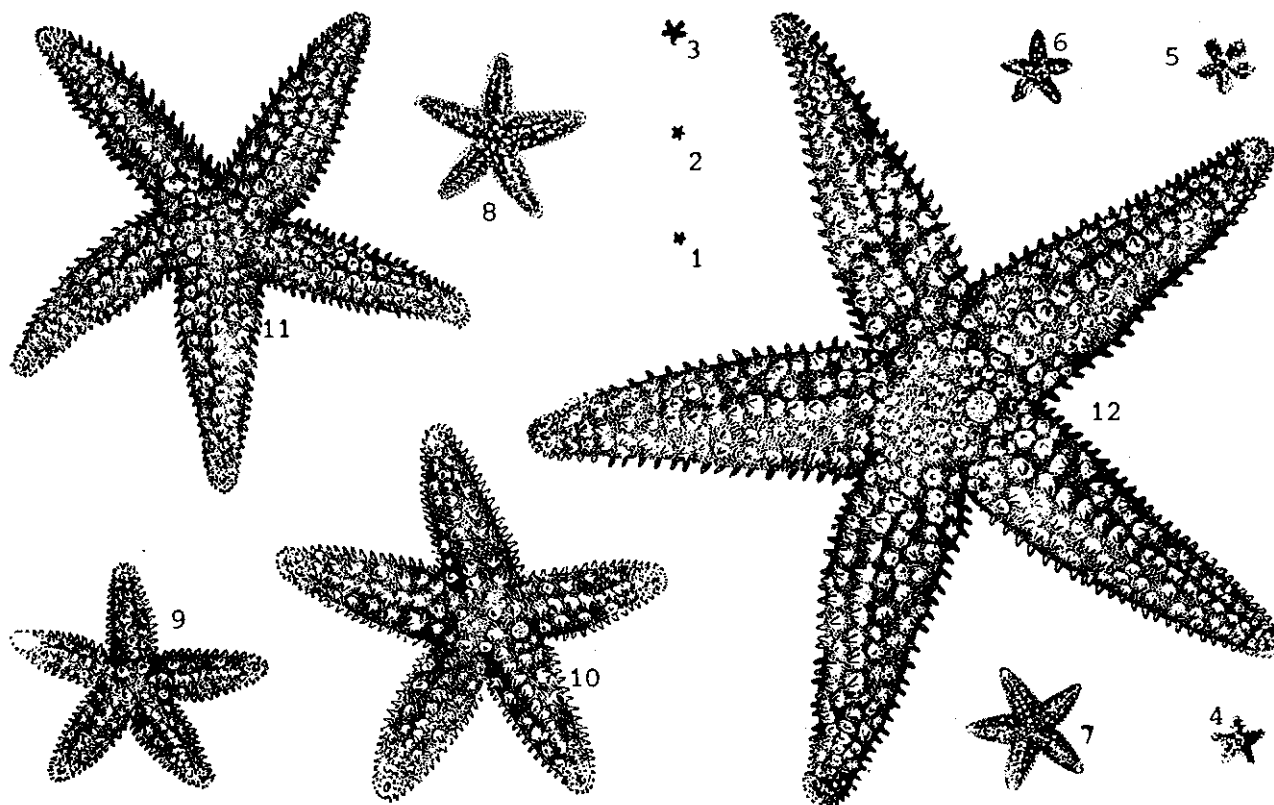


De werkelijke grafiek is weer de ononderbroken lijn.
De wiskundige benadering voldoet aan:

$$y = 8.020 (1,08)^x$$

waarbij $x = 0$ samenvalt met 1957 ; $x = 1$ met 1958 enzovoorts.

- a - Als we er vanuit gaan dat de toename van de hoogte van het levensverzekeringsbedrag geheel voor rekening van de inflatie komt, hoe groot is de inflatie dan geweest van 1932 - 1967?
- b - Hoe had je zelf kunnen ontdekken dat $x = 0$ (ongeveer) moet samenvallen met 1957?

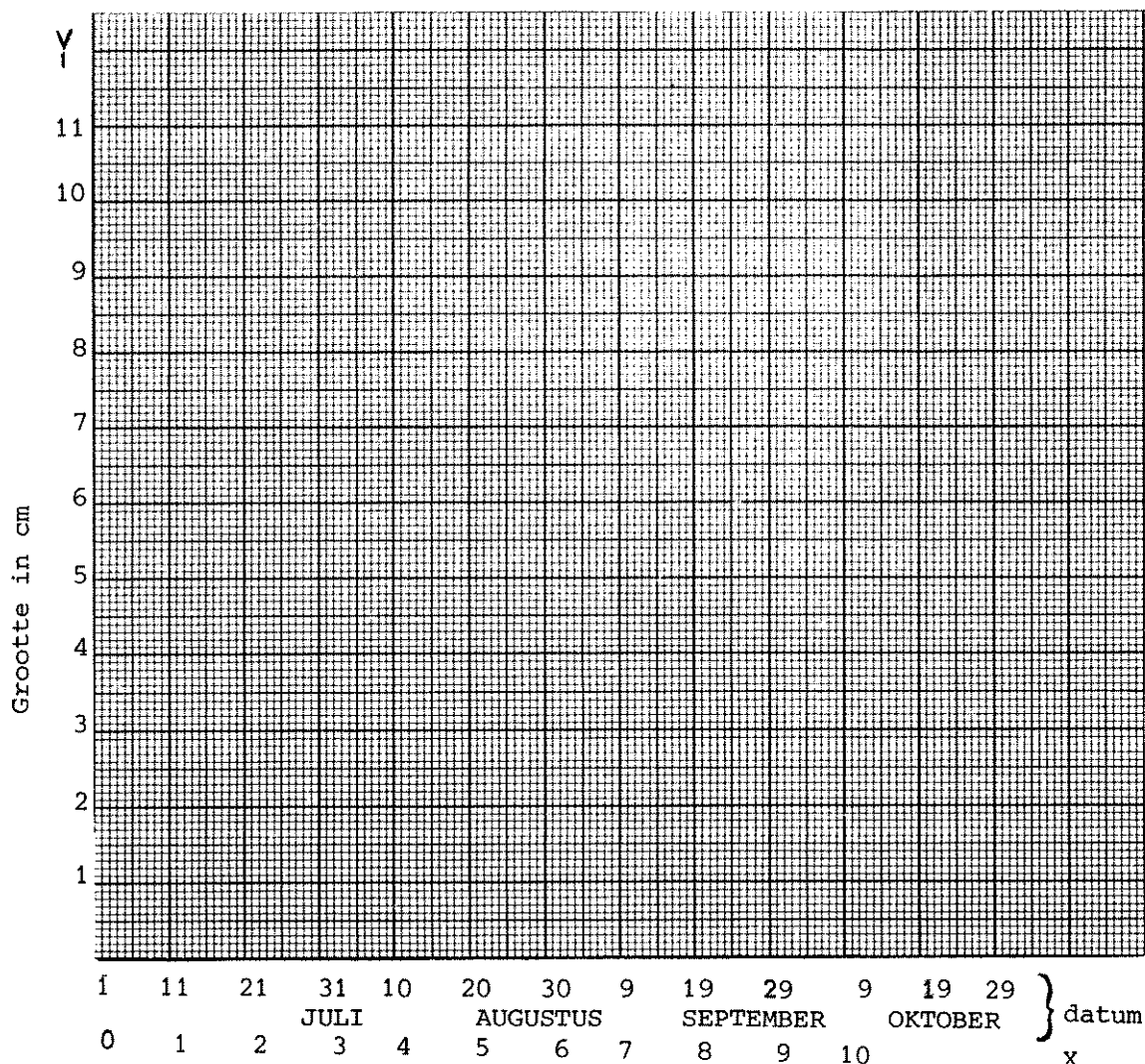


Je ziet op bijgaande plaat een zeester tijdens de groei, op 12 momenten is er een foto genomen. We zullen die groei eens wat verder onderzoeken, en bekijken of er sprake is van exponentiële groei. Meet van alle 12 foto's de lengte van een arm van de ster (vanuit het midden van de ster) in mm nauwkeurig. Vermenigvuldig dit met 2 en we hebben een redelijke maat voor de afmeting van de ster. (waarom)?

Zet deze afmetingen in onderstaande tabel:

STER n ^o	DATUM	GROOTTE
1	3 juli	
2	5 juli	
3	7 juli	
4	15 juli	
5	16 juli	
6	18 juli	
7	26 juli	
8	2 aug.	
9	18 aug.	
10	12 sep.	
11	26 sep.	
12	19 okt.	

a - Maak een puntengrafiek van de groei op onderstaand roosterpapier.



Teken in dezelfde figuur de grafieken van:

$$f : x \rightarrow (1,5)^x - 1 \quad \text{op } [0,4] \quad \text{en:}$$

$$g : x \rightarrow (1,25)^x \quad \text{op } [0,10]$$

op de gebruikelijke manier, zodat 10 dagen langs de x-as overeenkomen met één eenheid.

De punten van $f(x)$ zijn eenvoudig te berekenen, die van $g(x)$ ook, met een rekenmachientje. Vraag anders de funktiewaarden aan je leraar.

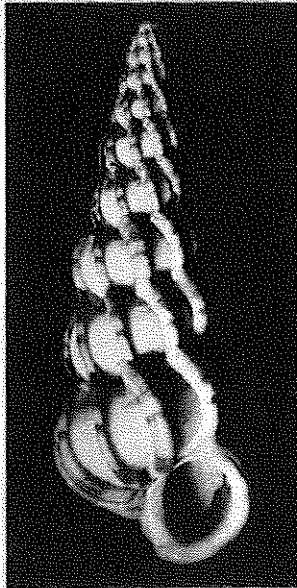
b - Gedurende welke periode van de groei valt de groei van de zeester redelijk te benaderen door $f(x)$?

En gedurende welke gedeelte door $g(x)$?

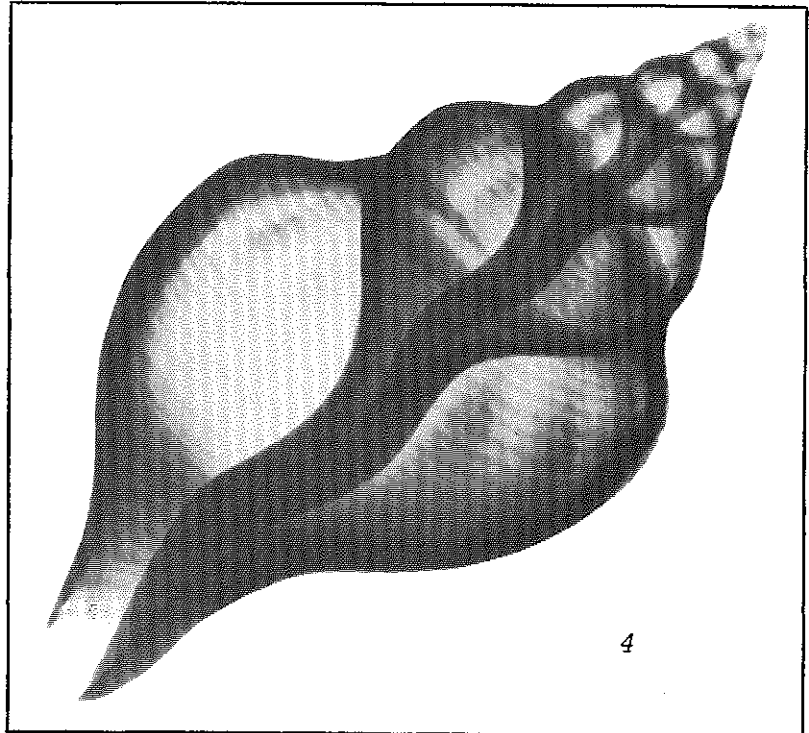
c - Enig idee wat de groeifunctie is van de oppervlakte van de zeester?

d - Overigens is de funktie f niet zuiver exponentieel.

Waarom niet?



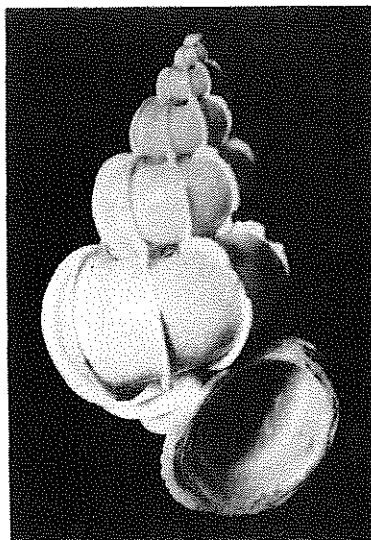
1



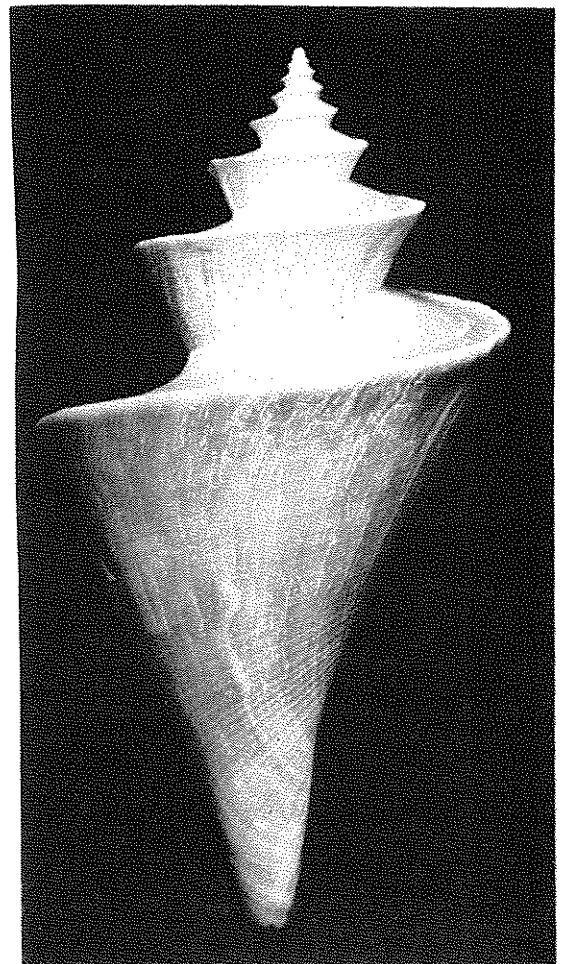
4

1. *clathrus-clathrus*
(wenteltrap)
2. *epitonium*
scalare
(wenteltrap)
3. *thatcheria*
mirabelus
4. rontgenopname
wulk

Voorbeelden van
logaritmische
spiraalen zoals die
in vele variaties
bij schelpen
voorkomen.

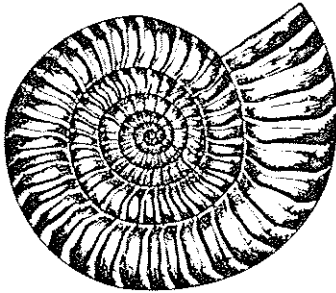


2



3

In de plant en dierwereld komt veel spiraalvorming voor. Twee soorten willen we wat nader beschouwen omdat ze nauw aansluiten bij wat we al weten van *lineaire* en *exponentiële* groei. Wil je een leek uitleggen wat het verschil tussen die twee is dan is het volgende citaat (van een zeebioloog) misschien wel aardig:

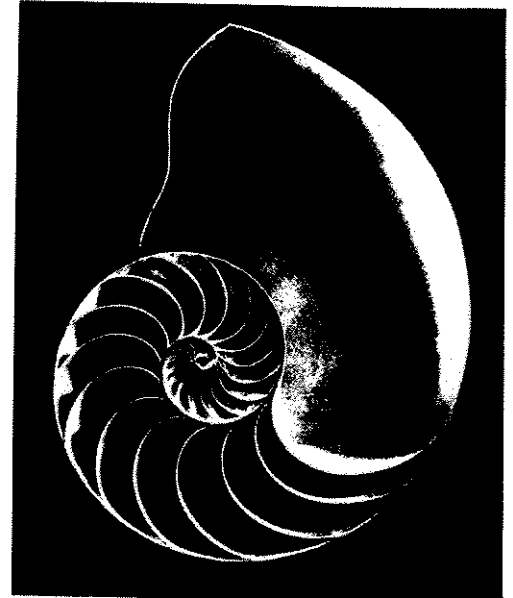
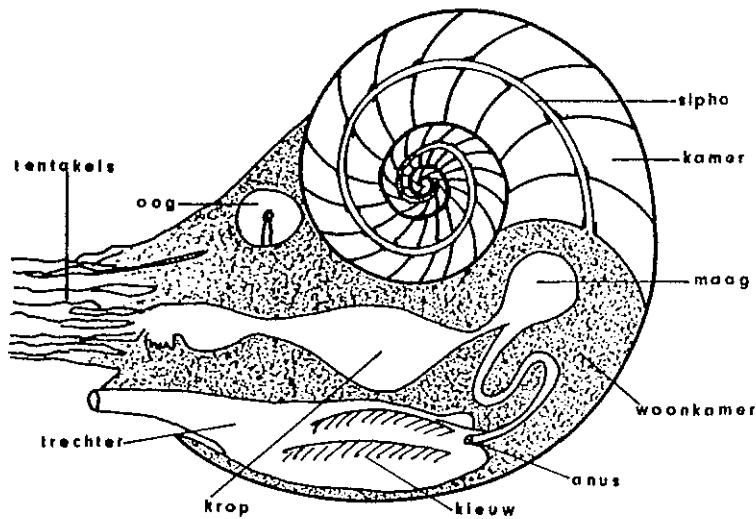


AMMONIET, een uitgestorven dier, sinds 65 miljoen jaar. De schelpen konden wel zo'n 2 meter groot worden. Als naaste verwant leeft nu nog de nautilus, waarvan op de volgende blz. twee plaatjes.



Een vrouwelijke dennekegel, waarvan de dekschubben in een spiraal voorkomen.

Het verschil tussen *lineaire* en *exponentiële* groei ligt in het al of niet meedoen van het reeds voorhandene bij de nieuwe toename. Bij de *lineaire* groei maakt het niets uit of de voorgaande groei pas begonnen of bijna voltooid is; onafhankelijk hiervan komt er steeds dezelfde portie bij. Bij de *exponentiële* groei daarentegen draagt alles wat reeds eerder gegroeid was, actief bij tot de verdere uitbouw. Dit aandeel van de voorgaande aanwinsten in het produktieproces noemt men in het cybernetisch spraakgebruik: *positieve terugkoppeling* (*feed-back*). In de geldmarkt heet het: *samengestelde interest*. Voor de Ammoniet komt het hierop neer, dat elke nieuwe kamer procentueel langer, wijder en volumineuzer wordt. Tal van processen in het levend weefsel zijn gekenmerkt door *exponentiële* groei. Wanneer een orgaan aan één kant *exponentieel* groeit, komt de *exponentiële* curve niet enkel op papier te voorschijn, maar ook in de uiterlijke gestalte van het orgaan zelf. Dit is het geval bij de slagtanden van de olifant en van de uitgestorven mammoeth (tanden van 4 à 5 meter), bij wie de *exponentiële* groei zich concentreerde aan de onderzijde van de tand. De bek van de papegaai wordt door verhoogde *exponentiële* groei aan de bovenkant naar beneden gekromd. De spiraal van de slakkenhuizen ontstaat door maximale *exponentiële* groei aan de buitenomtrek. De strepen op de Nautilus-schaal zijn dubbel-gebogen; dit wijst op sterke *exponentiële* groei aan de zij-kanten en iets gereduceerde *exponentiële* groei aan de buitenomtrek. Ook bij planten wordt de *exponentiële* groei soms zichtbaar; zo b.v. in de dennekegel, die zijn zaad-schubben in *spiralige* rijen rangschikt en bij de zonnebloem, die zijn vruchten in *spiralen* inplant op de bloembodem. Idem bij de bladinplanting op de stam van de ananasvrucht.

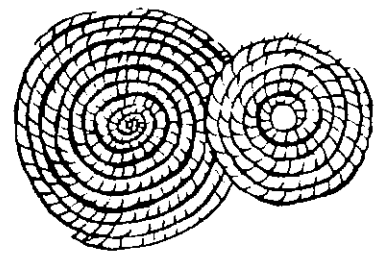


twee plaatjes van de nautilus schelp

Hoe teken je nu een spiraal, waarbij de groei lineair is?

- Teken XY stelsel met A = (1,0)
- Teken een lijn door O die een (pos) hoek van 30° met de x-as maakt en pas daarop af: 1,2 cm noem dit punt B.
- Ga door volgens volgende tabel, en vul het ontbrekende in:

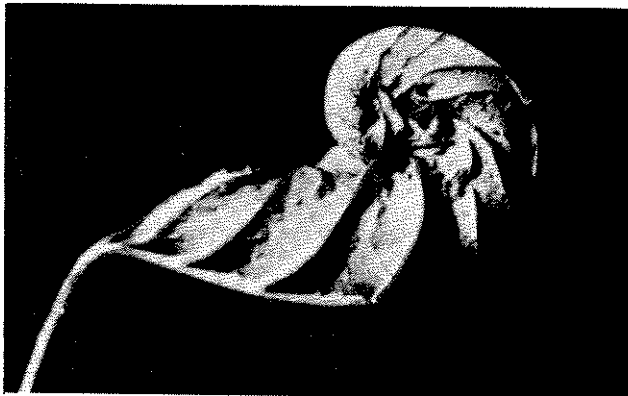
punt	hoek	afstand
A	0°	1 (afstand tot 0)
B	30°	1,2
C	60°	1,4
D	---	---
.		
.		
.		
.		
P	$\alpha = \text{---}$	$1 + \text{---} \alpha$



NUMMILIET net als de AMMONIET reeds lang uitgestorven.

- Je ziet dat de afstand R lineair toeneemt.
- Trek een halve rechte vanuit O.
Hoe groot zijn de stukken waarin de spiraal de rechte verdeelt?
- Een dergelijke lineaire spiraal noemen we meestal een

ARCHIMEDISCHE SPIRAAL



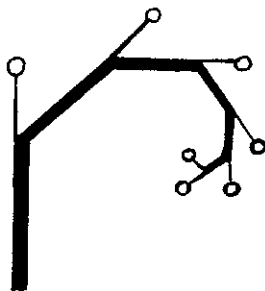
Een dood, opgerold blad

- Probeer nu op dezelfde wijze een spiraal te tekenen waarbij de formule voor de straal gegeven wordt door:

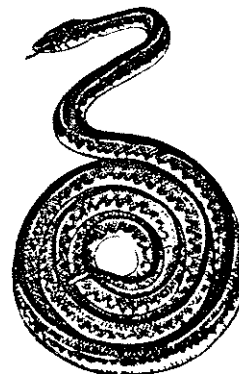
$$R = 2^{\frac{\alpha}{300}} \text{ met } \alpha \text{ in graden.}$$

Begin met $\alpha = 0$ en gebruik het tabelletje van blz 27 om de volgende tabel af te maken:

punt	α	R
A	0	$2^0 = 1$
B	30	$2^{\frac{30}{300}} = 2^{0,1} = \text{-----}$
C	---	-----
.		
.		
.		
.		
P	---	$2^{\frac{\alpha}{300}}$



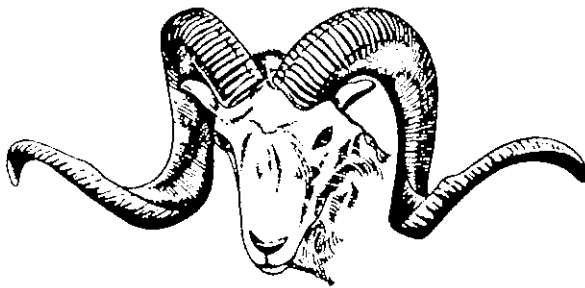
Schema dat de groei van een plant weergeeft (CICINNUS).



- Trek weer een halve rechte vanuit 0, en vertel iets over de stukken waarin de spiraal de lijn verdeelt.
- Je zou misschien verwachten dat deze spiraal de exponentiële spiraal zou heten.
Gebruikelijk is echter de naam:

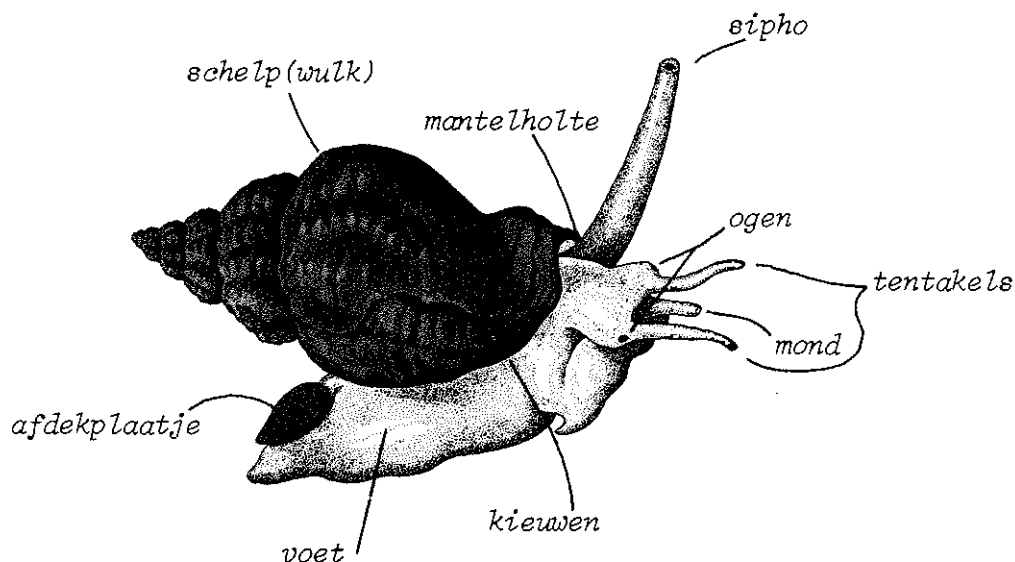
LOGARITMISCHE SPIRAAL

Waarom? Daar kom je gauw genoeg achter.

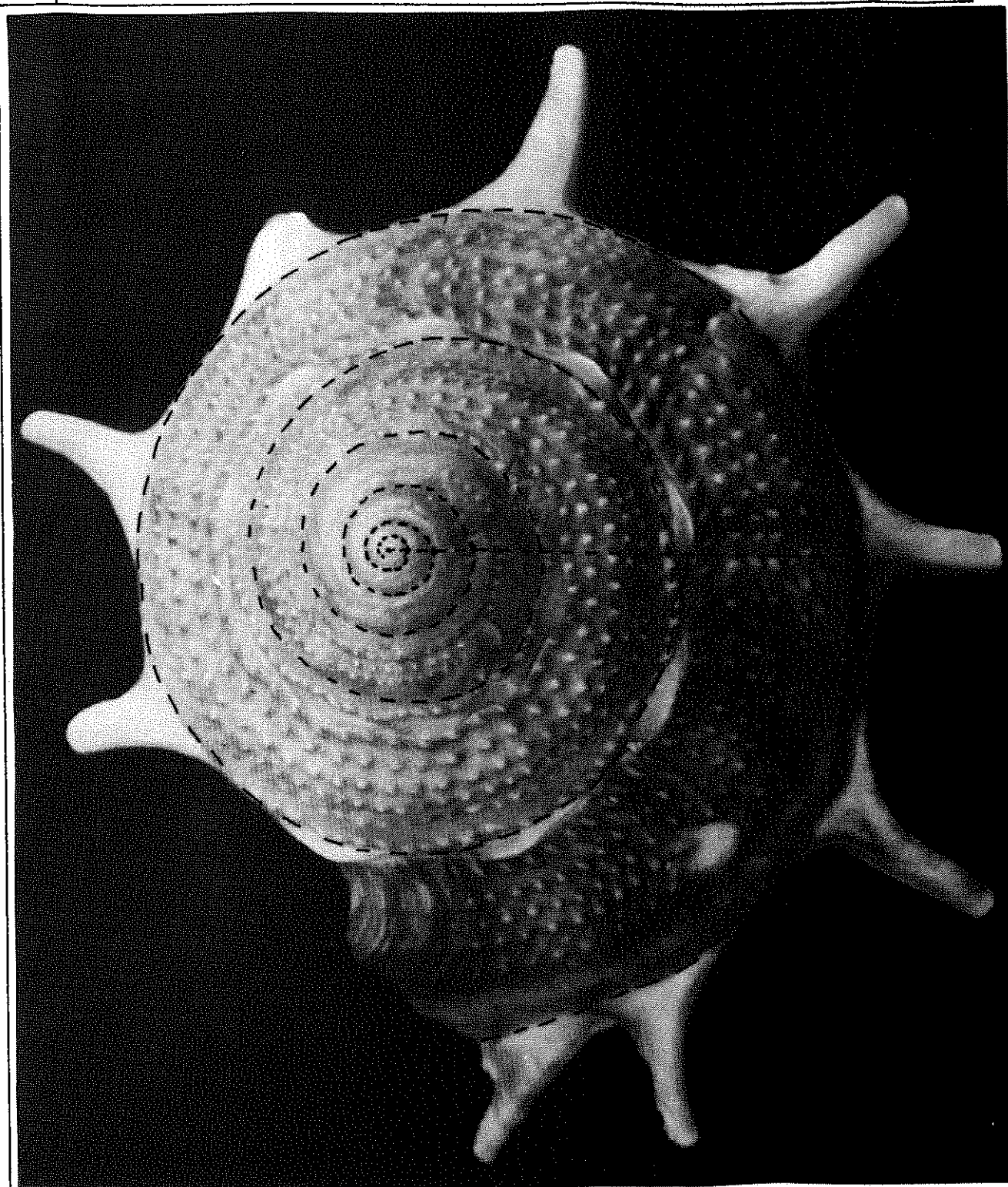


Schaap (ovis poli)

- Ga van alle spiraalplaatjes nog eens na welk soort spiraal het is.



Als je langs het strand een lege schelp vindt, realiseer je je misschien niet altijd dat die eens als tehuis voor een dier heeft gediend. Als er gevaar dreigt trekt het dier zich terug en sluit met het afdekplaatje de opening af.

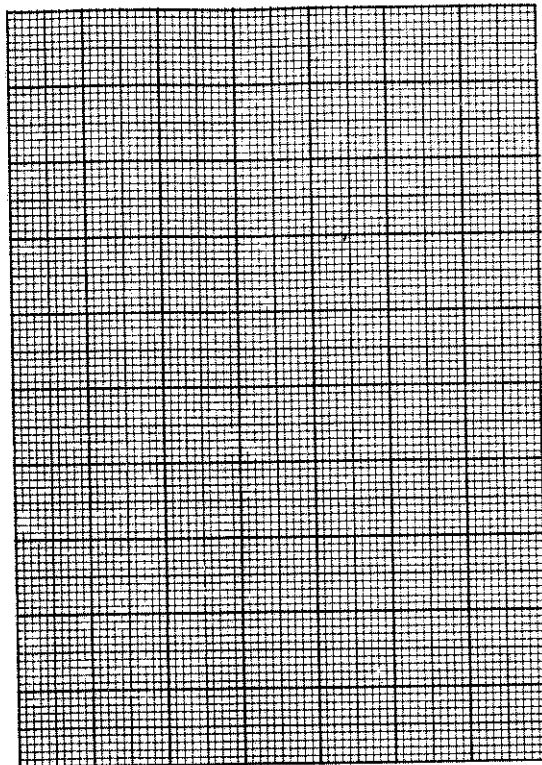


GUILDFORDIA TRIUMPHANS, een schelp die in de stille oceaan bij Japan voorkomt op dieptes van 50 - 100 m. De stekels lossen op zodra ze worden "ingehaald" door het nieuwgevormde gedeelte, er blijven dan kleine uitsteeksels over. De grootte van deze schelp is 3,5 - 7 cm, de kleur geelbruin.

Op de vorige blz. zie je de foto van de omslag nog eens.
Met een stippellijn is de spiraalstructuur nog wat verduidelijkt.
Om te bekijken in hoeverre hier sprake is van exponentiële groei
kunnen we de afstanden opmeten die de spiraal afsnijdt van de
gestippelde rechte vanuit het midden van de schelp.
Je ziet die rechte de spiraal 6 x snijden.
Meet de lengte van die stukken (steeds vanuit het centrum van de schelp).
Zet deze afstanden uit in onderstaand rooster:

Y-as

afstand tot centrum schelp in mm.

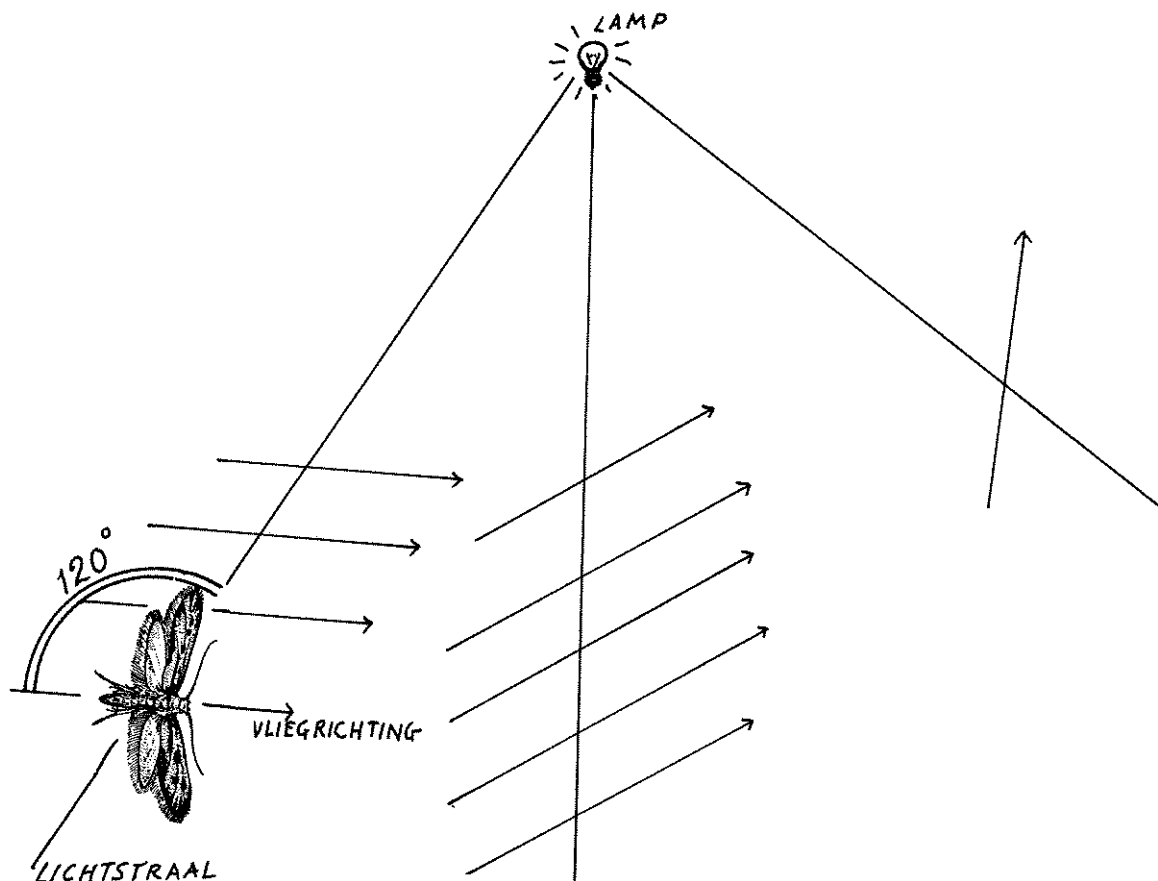


na 1e 2e 3e 4e 5e 6e winding

Om te kijken of deze groei enigszins exponentieel is, kijken we naar de
groeifactor (per winding).

- Waarom?
- Bepaal de (5) waarden van de groeifactor.
- Hoe zou een exponentiele funktie die de groei benadert er uit kunnen zien?
- De beginwaarde is nog een probleem, vooral ook omdat deze bij je meting nogal onnauwkeurig is. Waarom?
- Zoek een beginwaarde die bij de gevonden groeifactor, een goede benadering van de kromme oplevert.
Het makkelijkst gaat dat met de rekenmachine.

- Een mot die door licht wordt aangetrokken vliegt zó naar het licht dat hij steeds een hoek van 120° maakt met de lichtstralen. (Dit heet MENOTAXIS). Om de vluchtbaan van het insect te weten te komen gaan we deze proberen te construeren. Enkele zaken staan reeds ingetekend.
- Stel dat de hoek zó groot is dat na de eerste omwentelingsvlucht de afstand tot de lamp gehalveerd is. Hoe groot zal de afstand dan zijn na de tweede omwenteling?
- Wat voor soort spiraal ontstaat?
- Het zal nu geen verrassing meer zijn dat deze ook wel *GELIJKE HOEK SPIRAAL* wordt genoemd.



TEN YEARS AFTER

ALVIN LEE
& COMPANY



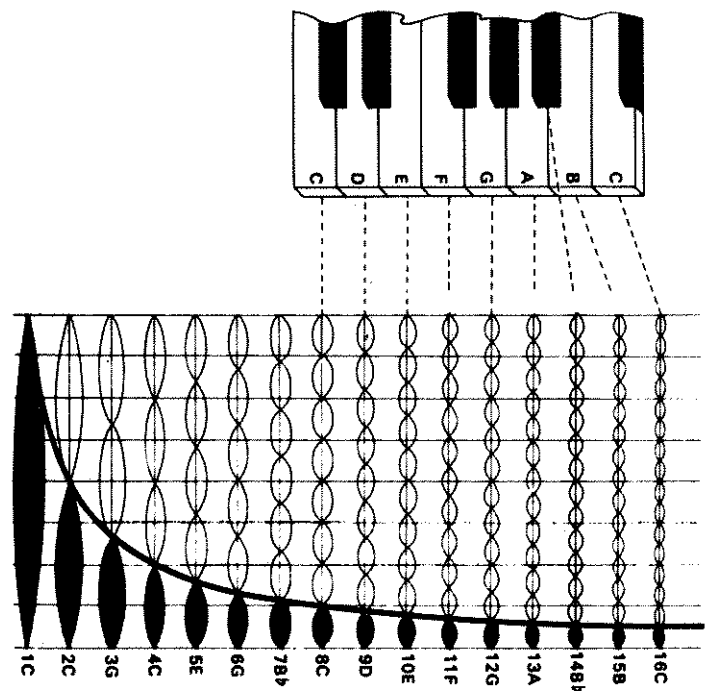
STEREO/XDES 18064

Elk muziekinstrument brengt muziek voort door een bepaald onderdeel te laten trillen.

Bij een snelle trilling is het aantal trillingen van de geluidsgolf per seconde (de frequentie) groot en de toon hoog.

Iedere toon die een muziekinstrument maakt is een combinatie van een aantal tonen. De frequentie die het oor opvangt noemen we de grondtoon, en de hogere tonen die tegelijk worden geproduceerd noemen we de boventonen. Deze ontstaan doordat b.v. de snaar (b.v. bij de gitaar en piano) in verschillende frequenties tegelijk trilt waarbij de extra frequenties veelvoudens zijn van de frequentie van de grondtoon.

Zo hebben we:



- a - Teken het toetsenbord verder naar links tot en met de witte toets die behoort bij 2C.
Geef met stippellijntjes aan welke toon bij welke toets hoort.

Je ziet dat de golflengte van een toon twee keer zo groot is als die van een octaaf hoger. Kijk maar eens naar de verhouding van de golflengten van de C's in voorgaand plaatje.

Die is: $16 : 8 : 2 : 1$; dus de frequenties van de tonen van opéénvolgende octaven is: $1 : 2 : 4 : 8 : 16$ enz.

De frequenties nemen per octaaf dus exponentieel toe.

Je ziet dit ook duidelijk in voorgaand plaatje als je naar de toon G kijkt.

De frequentie van 3G is 3 x zo groot als die van 1C.

Vervolgens treffen we voor G frequenties aan de 6 x, 12 x, enz. zo groot zijn als die van 1C.



Bij een gitaar geeft een bepaalde snaar een toon 10 E.

- b - Als ik nu in het midden m een fretje (strip) monteer en ik druk de snaar daarop dan wordt de snaarlengte gehalveerd.
- c - Waar breng ik de snaar in trilling? Tussen p en m, of tussen m en x?
- d - Welke toon zullen we dan te horen krijgen?
- e - Hoe klinkt die in vergelijking met 10 E?

Tussen 10E en 20E liggen 12 tonen, dus 12 toonafstanden.

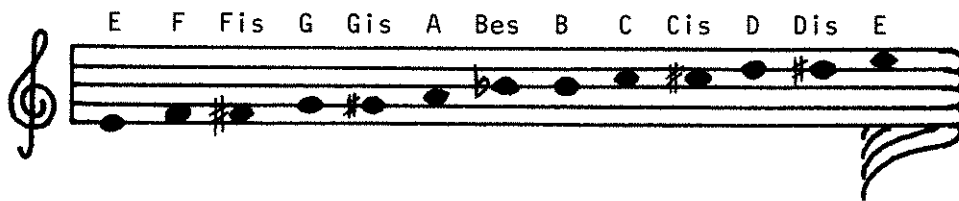
10E, F, Fis, G, Gis, A, Bes, B, C, Cis, D, Dis, 20E

Een bepaalde manier van het stemmen is de "getemperde" waarbij voor de frequenties geldt:

$$\frac{20E}{Dis} = \frac{Dis}{D} = \frac{D}{Cis} = \frac{Cis}{C} = \frac{C}{B} = \frac{B}{Bes} = \frac{Bes}{A} = \frac{A}{Gis} = \frac{Gis}{G} =$$

$$\frac{G}{Fis} = \frac{Fis}{F} = \frac{F}{10E} = k$$

met andere woorden een vaste verhouding k tussen twee opeenvolgende frequenties:



De frequentie van 20E is 2 x zo groot als van 10E

⇒ afstand PX = 2 . PM (in plaatje van gitaar).

Nu moeten we tussen de fretjes van 20E en 10E elf andere fretjes monteren voor de andere tonen.

Stel dat de frequentie van 10E gelijk is aan 1.

Dan moet de frequentie van F gelijk is aan k.

f - Waarom?

g - Druk de frequentie van Fis, G, 20E in k uit.

h - Hoe groot moet k zijn?

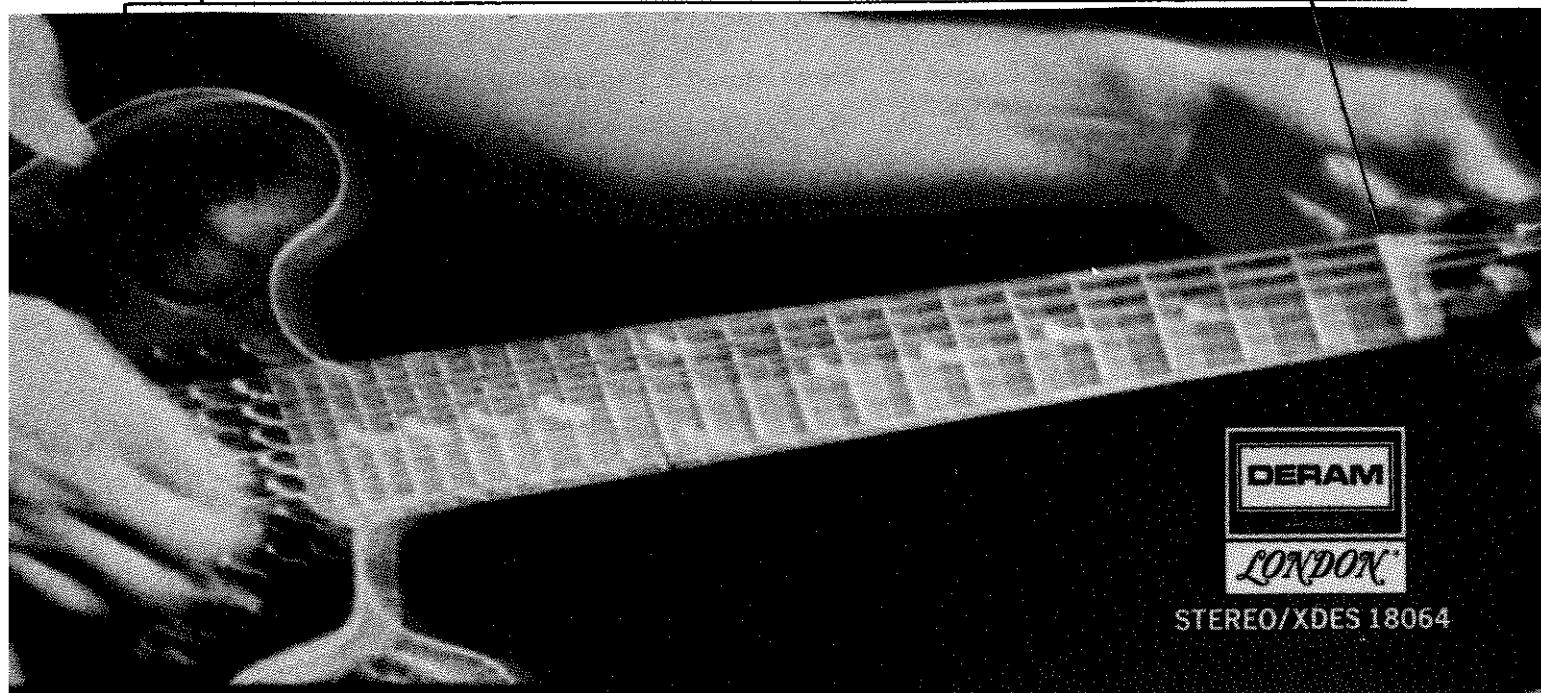
i - Zou je hier kunnen spreken van een groeifactor?

(met betrekking tot opeenvolgende frequenties).

Muziek

x

50



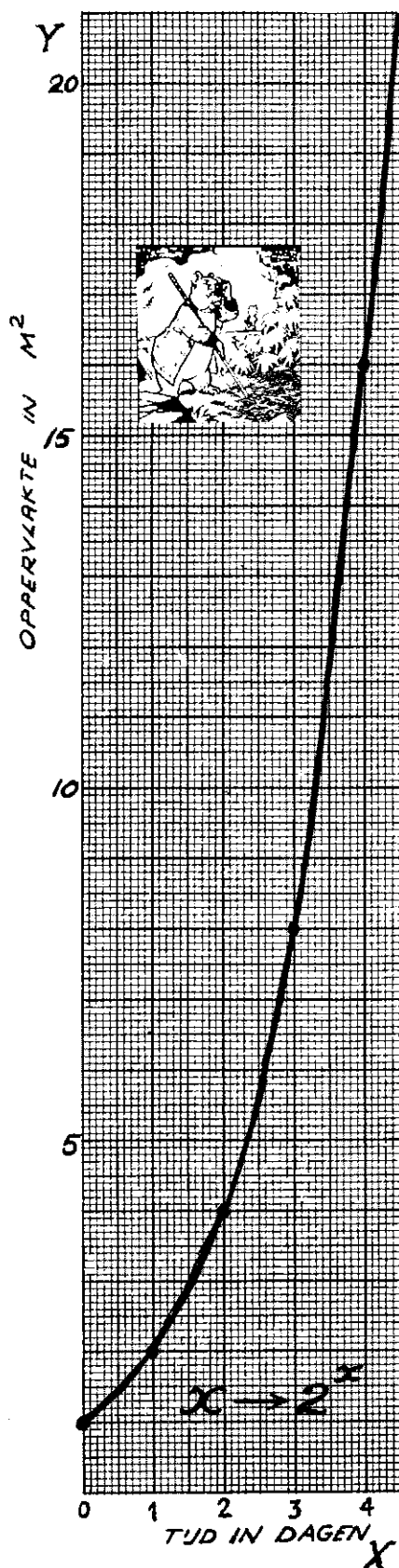
m

Op de vergroting van de foto van de platenhoes van enkele bladzijden terug zie je dat de afstand tussen de fretjes van 10E en 20E precies 100 mm is. Zet bij de foto welke tonen bij de tussenliggende fretjes behoren, en geef een benadering van de volgende getallen door opmeting van de foto:

1, $\frac{1}{2^{12}}$, $\frac{2}{2^{12}}$, $\frac{3}{2^{12}}$,, $\frac{11}{2^{12}}$, 2

deel 2

logaritmen



Hiernaast zie je nog eens de groei van de exponenten (met groeifactor 2) van Hr. Bommel grafisch in beeld gebracht. Althans voor de eerste paar dagen. Beantwoord aan de hand van de grafiek de volgende vraag:

- a - Op welk moment ligt er 10 m² planten in de vijver?

Zonder grafiek kun je dan het antwoord geven op

- b - Op welk moment ligt er 20 m² planten in de vijver?

Kontroleer dit laatste antwoord grafisch.

- c - Op welk moment ligt er 3 m² planten. En 6 m²? En 12 m²?

Verklaar het verband tussen bovenstaande antwoorden.

Laten we het verband tussen oppervlakte en tijd eens vastleggen in tabellen.

- d - Het makkelijkst is:

opp.	1	2	4	8	16	32	m ²
tijd	0	1					dagen

Analoog:

opp.	3	6	12	m ²
tijd				dagen

en:

opp.	5	10	20	m ²
tijd				dagen

en:

opp.	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	m ²
tijd				0	dagen

Bommel nader bekeken

52

e - Tenslotte krijgen we:

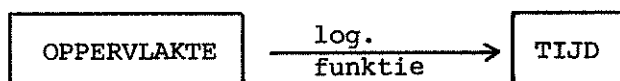
opp.	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	20
tijd																		

De functie die aan de oppervlakte de tijd toevoegt noemen we een:

LOGARITMISCHE FUNKTIE

Deze naam zal later verklaard worden.

We hebben dus:



Omdat de groeifactor van de betreffende exponentiële functie 2 was, schrijven we:

$$x \longrightarrow {}^2\log x$$

of; in woorden:

${}^2\log 10$ is het tijdstip waarop er 10 m^2 planten zijn gevormd, bij groeifactor 2.

f - Bepaal nu aan de hand van de eerder gemaakte tabel ongeveer of waar mogelijk precies de grootte van:

$${}^2\log 1 = \quad {}^2\log 8 =$$

$${}^2\log 2 = \quad {}^2\log 10 =$$

$${}^2\log 3 = \quad {}^2\log 16 =$$

$${}^2\log 4 = \quad {}^2\log 20 =$$

$${}^2\log 5 = \quad {}^2\log 32 =$$

$${}^2\log 6 =$$

en:

$${}^2\log \frac{1}{2} \quad {}^2\log \frac{1}{16}$$

$${}^2\log \frac{1}{8} \quad {}^2\log \frac{1}{64}$$

g -Verklaar waarom:

$${}^2\log 3 + 1 = {}^2\log 6$$

$${}^2\log 10 + 1 = {}^2\log 20$$

$${}^2\log 6 + 1 = {}^2\log 12$$

$${}^2\log 2 = 1$$

h -"Bereken" (mbv. tabel)

$${}^2\log 40$$

$${}^2\log 48$$

Zojuist zagen we dat o.a.

$${}^2\log 6 + {}^2\log 2 = {}^2\log 12$$

i -Wat denk je nu van de uitkomst van:

$${}^2\log 3 + {}^2\log 4$$

$${}^2\log 3 + {}^2\log 5$$

$${}^2\log 3 + {}^2\log 7$$

We hebben nu dus:

de exponentiële functie

$$x \longrightarrow 2^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

die het verband aangeeft

$$\text{TIJD} \longrightarrow \text{OPP.}$$

de logaritmische
functie

$$x \longrightarrow {}^2\log x$$

die het verband
aangeeft

$$\text{OPP.} \longrightarrow \text{TIJD}$$

j - Waarom *bestaat* de inverse van $x \rightarrow 2^x$; $x \in \mathbb{R}$.

k - Teken de grafieken van $x \rightarrow 2^x$

$$x \rightarrow {}^2\log x$$

in één tekening.

l - Welke as van symmetrie heeft dit paar grafieken en waarom?

m - Wat is het domein van elk van deze funkties?

n - Wat is het bereik van elk van deze funkties?

o - Wat is de asymptoot van elk van deze funkties?

p - $x \rightarrow 2^x$ is stijgend op $\mathbb{R}$.

Wat valt er in dit verband op te merken over:

$$x \rightarrow {}^2\log x?$$

q - Verandert er iets aan je laatste 5 antwoorden als je het grondtal
2 verandert in 3 of 5 of $7\frac{1}{2}$ of $\sqrt{2}$?

Zo ja wat?

55

[illegible]

- e - Bestaat hier ook een *inverse* functie?
 f - Hoe zal het funktievoorschrift luiden?
 g - Hoe groot zijn de volgende getallen (ongeveer)?

$${}_2\log 1 =$$

$${}_2\log \frac{1}{6} =$$

$${}_2\log \frac{1}{2} =$$

$${}_2\log \frac{1}{8} =$$

$${}_2\log \frac{1}{3} =$$

$${}_2\log \frac{1}{12} =$$

$${}_2\log \frac{1}{4} =$$

$${}_2\log \frac{1}{16} =$$

- h - Verklaar:

$${}_2\log \frac{1}{3} + 1 = {}_2\log \frac{1}{6}$$

$${}_2\log \frac{1}{6} + {}_2\log \frac{1}{2} = {}_2\log \frac{1}{12}$$

- i - Bereken:

$${}_2\log \frac{1}{24}$$

$${}_2\log \frac{1}{32}$$

$${}_2\log \frac{1}{64}$$

$${}_2\log \frac{1}{36}$$

- j - Wat denk je van de uitkomst van:

$${}_2\log \frac{1}{3} + {}_2\log \frac{1}{4}$$

$${}_2\log \frac{1}{3} + {}_2\log \frac{1}{5}$$

$${}_2\log \frac{1}{3} + {}_2\log \frac{1}{7}$$

- k - Vul in en verklaar:

$${}_2\log \frac{1}{3} = {}^2\log \text{-----}$$

$${}^{1/3}\log 4 = {}^3\log \text{-----}$$

$${}^3\log 5 = {}^{1/3}\log \text{-----}$$

$${}^5\log {}_2 = {}^{1/5}\log \text{-----}$$

We hebben dus:

DE EXPONENTIËLE FUNKTIE

$$x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

die het verband aangeeft:

TIJD $\rightarrow$ INHOUD

en z'n inverse:

DE LOGARITMISCHE
FUNKTIE

$$x \rightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log x$$

die het verband
aangeeft:

INHOUD $\rightarrow$ TIJD

l - Teken de grafieken van $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad x \in \mathbb{R}$

en $x \rightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log x$

in één tekening.

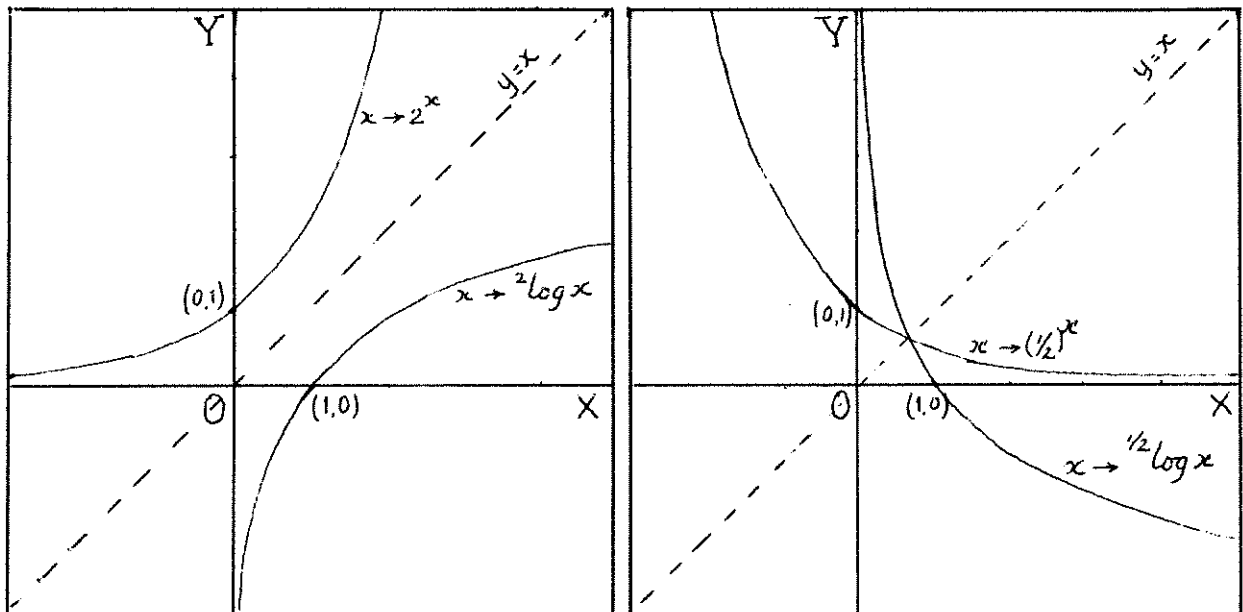
m - Wat is de spiegelas van beide grafieken en waarom?

n - Geef van beide grafieken aan:

- Domein - Bereik - Asymptoten - Stijgen of Dalen.

o - Verandert er iets aan je laatste antwoorden als je i.p.v. $\frac{1}{2}$ als grondtal $\frac{1}{3}$ neemt of $\frac{1}{5}$ of $\frac{1}{2} \sqrt{2}$?

Zo ja, wat?



FUNKTIE	$x \rightarrow 2^x$	$x \rightarrow {}^2\log x$	$x \rightarrow (\frac{1}{2})^x$	$x \rightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log x$
DOMEIN	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
BEREIK	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
SNIPUNT MET ASSEN	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(1,0)
ASTMPT.	x-as	y-as	x-as	y-as
STIJGEND OF DALEND	STIJGEND	STIJGEND	DALEND	DALEND
		2 is hier als grondtal genomen. Voor welke grondtallen verandert er niets aan bovenstaand tabel?		$\frac{1}{2}$ is hier als grondtal genomen. Voor welke grondtallen verandert er niets aan bovenstaand tabel?

Grafiekenpaar	Symmetrieas.
$x \rightarrow 2^x ; x \rightarrow (\frac{1}{2})^x$	
$x \rightarrow 2^x ; x \rightarrow {}^2\log x$	
$x \rightarrow (\frac{1}{2})^x ; x \rightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log x$	
$x \rightarrow {}^2\log x ; {}^{\frac{1}{2}}\log x$	

Na de nogal overrompelende ervaringen met de exponenten besluit heer Bommel bij een volgende gelegenheid wat voorzichtiger te werk te gaan. Hij wil wel wat groen in z'n vijver en vernam van zijn jeugdige vriend Tom Poes dat er veel langzamer groeiend soort kroos was. Dat liet hij nu in z'n vijver groeien.

Hij begon weer met 1 m^2 .

Na A dagen heeft de oppervlakte zich verdubbeld (2m^2).

Na B dagen heeft de oppervlakte zich verdrievoudigd (3m^2).

Tom Poes weet nu al na hoeveel dagen er 6 m^2 zal zijn.

a - Wat denk jij daarvan?

b - En wanneer is er 9 m^2 ; 12 m^2 ; 18 m^2 ; 96 m^2 .

Laten we de groeifactor (over één dag) even g noemen.

c - Druk nu het tijdstip waarop er 2 m^2 kroos is, uit in g , met behulp van logaritmen.

d - Hetzelfde voor 3 m^2 ; 6 m^2 .

e - Het laatste antwoord kun je op 2 verschillende manieren geven. Hoe?

f - Tenslotte: op welk tijdstip is er 12 m^2 ; 18 m^2 ; 96 m^2 .

g - Welke eigenschap van logaritmen, die we al eerder tegenkwamen, vind je hier weer?

Deze eigenschap heet de:

HOOFDEIGENSCHAP DER LOGARITMISCHE FUNKTIES

En luidt dus:

$${}_g\log ab = {}_g\log a + {}_g\log b$$

of:

Als $f: x \rightarrow {}_g\log x$ dan:

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$a, b, x \in \mathbb{R}^+$$

h - Verklaar wat op de vorige bladzijde in het hok staat na het woordje:"of":

i - De hoofdeigenschappen kun je gebruiken, zoals we al zagen, om bepaalde logaritmen te berekenen, als je andere weet.

Zo is ${}^{10}\log 2 = 0,3010$ (ongeveer)
 ${}^{10}\log 3 = 0,4771$ (ongeveer)

j- Bereken nu:

$${}^{10}\log 6, {}^{10}\log 9, {}^{10}\log 10, {}^{10}\log 12, {}^{10}\log 18.$$

k- Kun je onmiddellijk zeggen hoe groot x moet zijn bij de volgende

LOGARITMISCHE VERGELIJKINGEN: ($x \in \mathbb{R}^+$).

$${}^{10}\log x = {}^{10}\log 3 + {}^{10}\log 5$$

$${}^3\log x + {}^3\log 2 = {}^3\log 5$$

$${}^5\log 2x + {}^5\log 4 = {}^5\log 64$$

$${}^2\log (2x+1) = 1 + {}^2\log 3$$

$${}^3\log x + {}^3\log 5 = -1$$

$$\frac{1}{3}\log x + {}^3\log \frac{1}{2} = 2$$

$^2\log 10$ is het tijdstip waarop een groeifunctie met groeifactor 2 een hoeveelheid van 10 (m^2) heeft gevormd. We zagen dit aan de hand van het kroosgroei voorbeeld..

We kunnen dit nu wat algemener gaan bekijken:

$^g\log a$ zal het tijdstip zijn waarop een groeifunctie met groeifactor g een hoeveelheid van a (m^2) heeft gevormd.

Laten we op deze omschrijving wat dieper ingaan. Daartoe weer terug naar:

$$x \rightarrow 2^x \text{ (kroosgroei)}$$

De vraag: wanneer is er $10 m^2$ kroos, is niets anders dan het oplossen van:

$$2^x = 10$$

En de oplossing daarvan is $^2\log 10$.

a - Geef een exponentiële vergelijking:

$^2\log 20$ is de oplossing van:

$^2\log 35$ is de oplossing van:

$^3\log 27$ is de oplossing van:

$^3\log 80$ is de oplossing van:

$^5\log 26$ is de oplossing van:

$^7\log 51$ is de oplossing van:

b - Hoe groot zijn de getallen van bovenstaande oplossing (ongeveer)?

Geef een benadering in één decimaal.

c - Verklaar nu:

$$^2\log 10 = 10$$

en bereken:

$$^2\log 20 =$$

$$^5\log 25 =$$

$$^4\log 5 =$$

$$^2\log 35 =$$

$$^7\log 1 =$$

$$^1\log 3 =$$

$$^3\log 30 =$$

$$^2\log 16 =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2\log 7} =$$

d - Bij vraag a was $^3\log 27$ het enige getal waarvan je precies kon zeggen hoe groot het was.

Waarom?

e - Bereken:

$${}^2\log 8 =$$

$${}^4\log 4 =$$

$${}^2\log 16 =$$

$${}^5\log 125 =$$

$${}^3\log 9 =$$

$${}^6\log \frac{1}{6} =$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log 4 =$$

$${}^{\frac{1}{3}}\log 27 =$$

$${}^2\log 2^{\sqrt{7}} =$$

$${}^3\log 3^p =$$

$${}^{10}\log 1000 =$$

$${}^{0,2}\log 5 =$$

$${}^{10}\log 0,1 =$$

$${}^{0,2}\log 1 =$$

$${}^{10}\log \sqrt{10} =$$

$${}^{0,2}\log 0,2 =$$

f - Van welke vergelijking is ${}^g\log a$ een oplossing?
(bij geschikte keuze van g en a).

We hebben dus:

$${}^g\log a = x$$



$$a = g^x$$

of:

$$g^{g\log a} = a$$

Voor welke waarden van a, g, en x dit geldt moet nog onderzocht worden,
maar van de exponentiële functies weten we al:

$$g > 0, a > 0.$$

- Probeer de hoofdeigenschap:

$${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$$

nu te *bewijzen*.

(zie volgende bladzijde)

Hint: Stel ${}^g\log a = x$

$${}^g\log b = y$$

$${}^g\log ab = z.$$

en bewijs, met gebruikmaking van op vorige pagina staande definitie van ${}^g\log a$, dat $x + y = z$

Voorbeeld.

Bereken ${}^3\log x = \frac{1}{2}$ ($x \in \mathbb{R}^+$)

oplossing:

$${}^3\log x = \frac{1}{2} \iff x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

a - Bereken: ($x \in \mathbb{R}^+$)

$${}^5\log x = 1$$

$${}^x\log 9 = 2$$

$${}^3\log x = 2$$

$${}^4\log x = \frac{1}{2}$$

$${}^x\log 27 = 3$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log x = 2$$

$${}^8\log x = -\frac{2}{3}$$

$${}^x\log \sqrt{2} = 1$$

$${}^5\log x = 0$$

b - Teken de grafiek van $x \rightarrow {}^3\log x$ ($x \in \mathbb{R}^+$)

Los op met behulp van de grafiek:

$${}^3\log x = 2$$

$${}^3\log x > 1$$

$${}^3\log x < -1$$

$$\frac{1}{2} < {}^3\log x < \frac{3}{2}$$

c - Van een groeifactor voor de oppervlakte van een blad is de groeifactor g . Als eenheid wordt de dag genomen.

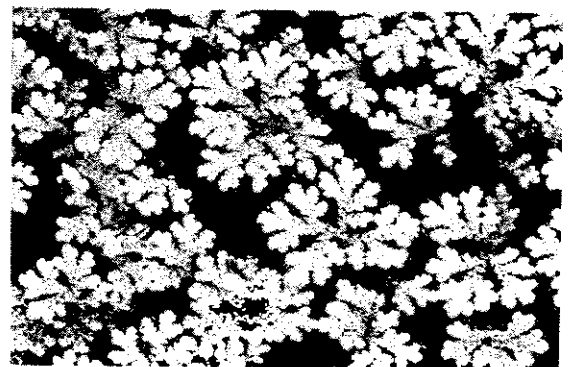
Op $t = 0$ is er 1 mm^2 blad aanwezig.

Bereken de tijd die nodig is om 256 mm^2 blad te vormen als g de waarden (achtereenvolgens) 2, 4 en 16 heeft.

Doe het ook voor

$$g = \sqrt{2} \quad g = 8 \quad g = 5 \quad g = 10$$

Het watervarentje (Savinia) groeit zo snel dat het in korte tijd vijvers en meren kan bedekken. Het komt voor in Zuid-Amerika en Afrika.



Teken de grafiek van $x \rightarrow \frac{1}{3} \log x$ ($x \in \mathbb{R}^+$)

Los op, mbv. grafiek:

$$\frac{1}{3} \log x = 1$$

$$\frac{1}{3} \log x = 0$$

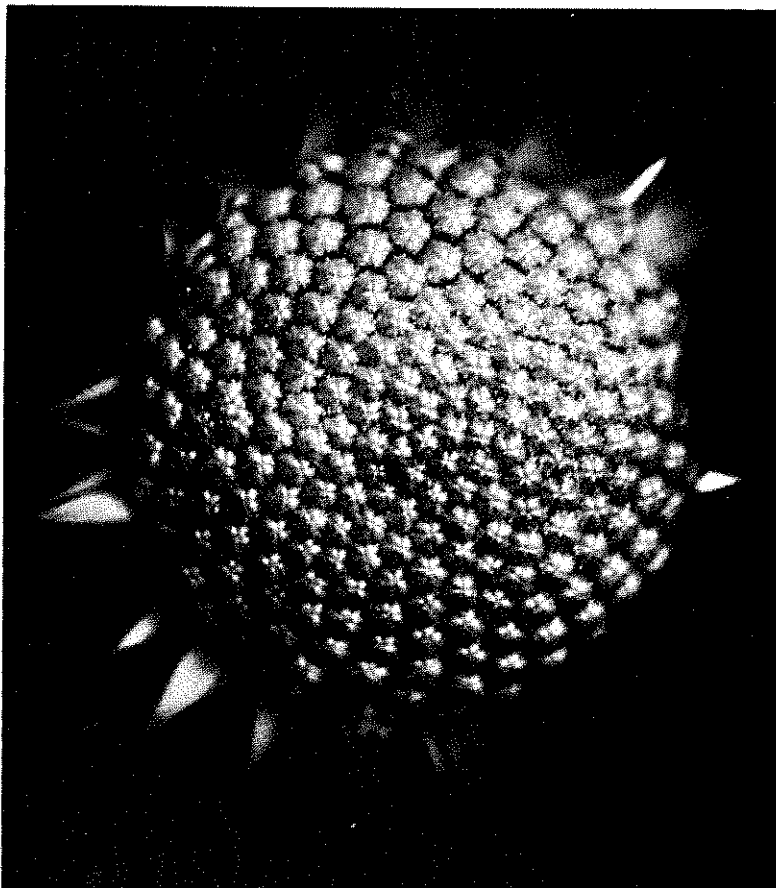
$$\left| \frac{1}{3} \log x \right| = 2$$

$$\frac{1}{3} \log x < 3$$

De groeifactor van de bacteriesoort "Repetitorium Firum" is gelijk aan 6.

Op het tijdstip 0 zijn er 4 bacteriën.

Bereken het tijdstip waarop er 100 bacteriën zijn.



*Exponentiële groei,
resultierend in een
logaritmische spiraal
bij een bloemhart van
een composiet.*

We hebben gezien dat

$$x \rightarrow 2^x$$

en z'n inverse:

$$x \rightarrow {}^2\log x \text{ beide stijgend zijn.}$$

We zagen al eerder

$x \rightarrow f(x)$ heet stijgend als voor ieder tweetal a en b
uit het domein van f geldt:

$$a > b \iff f(a) > f(b)$$

Vul zelf aan:

$x \rightarrow f(x)$ heet dalend als

Deze eigenschap kunnen we gebruiken om te bepalen welke van 2 logaritmen
het grootst is:

$${}^2\log 3 \text{ en } {}^2\log 7$$

$$x \rightarrow {}^2\log x \text{ is stijgend ; } 7 > 3$$

$$\text{dus } {}^2\log 7 > {}^2\log 3.$$

In zo'n eenvoudig geval kun je het ook zó beredeneren:

Groefactor(grondtal) is 2, dus groter dan 1, dus (positieve) groei.

Dan duurt het langer om 7 m^2 te vormen, dan 3 m^2 .

Dus:

$${}^2\log 7 > {}^2\log 3.$$

a - Teken de grafiek van $x \rightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log x$ en lees af hoe groot ${}^{\frac{1}{2}}\log 4$ en
 ${}^{\frac{1}{2}}\log 5$ zijn.

Klopt dit met het dalende karakter van de grafiek?

b - Teken de grafiek van $x \rightarrow {}^3\log x$ en geef aan, in de grafiek, hoe groot ${}^3\log 7$ en ${}^3\log 4$ zijn.

Los op: ${}^3\log x > {}^3\log 7$.

c - Los op: (zonder grafiek te tekenen).

$${}^2\log x > {}^2\log 5$$

$${}^3\log x > {}^3\log \frac{1}{7}$$

$${}^4\log x < {}^4\log 6$$

$${}^{1/5}\log x > {}^{1/5}\log 4$$

Voordat we verder gaan kijken naar het nut en de eigenschappen van de logaritmische functies zullen we eerst even orde op zaken stellen betreffende het grondtal.

d - Heeft $x \rightarrow 1^x$ een inverse functie?

e - Voor welke waarden van g heeft ${}^g\log x$ (dus) geen betekenis?

f - Voor welke waarden van g was g^x niet gedefinieerd?

g - Voor welke waarden van g zal (dus) ook ${}^g\log x$ geen betekenis hebben?

Samenvattend:

${}^g\log x$ bestaat als g _____

en g _____

en x _____

$x \rightarrow {}^g\log x$ is stijgend als g _____

$x \rightarrow {}^g\log x$ is dalend als _____ g _____

Vergelijk dit met bladzijde 29.

Logaritmische schaal

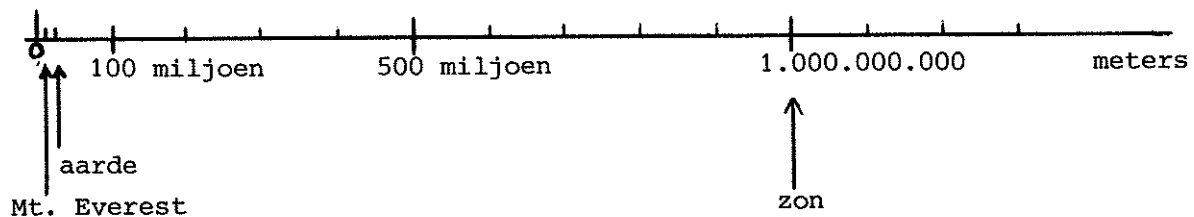
68

De Mount Everest is ongeveer 10.000 m (8840) hoog.

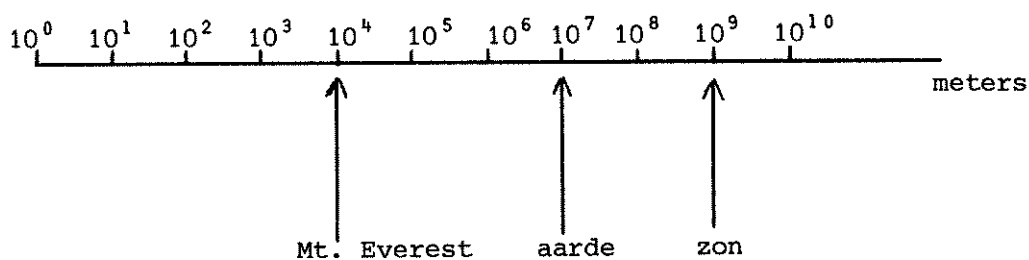
De middellijn van de aarde is ongeveer 10.000.000 m .

De middellijn van de zon is ongeveer 1.000.000.000 m

Als we deze afmetingen op de getallenlijn zetten is dat niet eenvoudig door de grote verschillen tussen de diverse getallen:



Overzichtelijker is de volgende getallenlijn:



Wat is er aan de hand met deze getallenlijn als je hem vergelijkt met de vorige?

Vul aan:

10^1 staat bij het streepje waar normaal de 1 staat

10^2 " " " " " " " " "

10^3 " " " " " " " " "

We zien dus een "voorschrift"

$$10^1 \longrightarrow 1$$

$$10^2 \longrightarrow 2$$

$$10^3 \longrightarrow 3$$

$$10^4 \longrightarrow 4$$

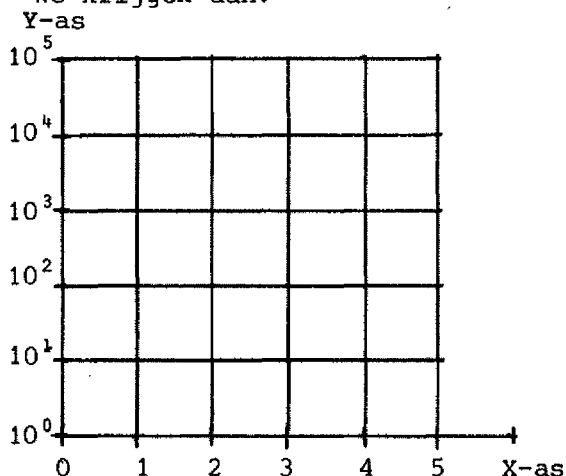
Bedenk zelf welk functievoorschrift dit mogelijk maakt.

Soms maken we van deze schaal gebruik bij het tekenen van grafieken.

De X-as heeft daar b.v. de "normale" verdeling, en langs de Y-as gebruiken we de zojuist ingevoerde schaalverdeling die de logaritmische schaal verdeling wordt genoemd.

- Waarom wordt die schaal zó genoemd?

We krijgen dan:



- Teken op nevenstaand grafiek-papier eens de grafiek van:

$$f: x \longrightarrow 10^x$$

met $x \in [0, 5]$

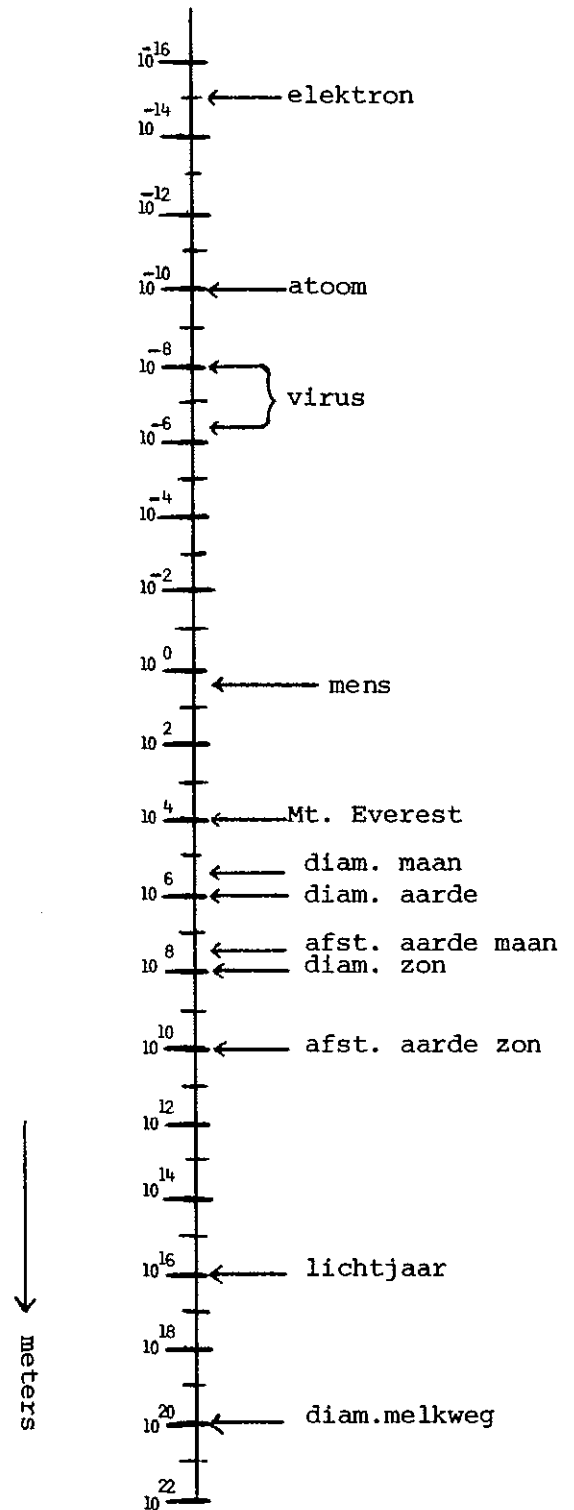
- Hoe ziet de grafiek eruit; waarom?

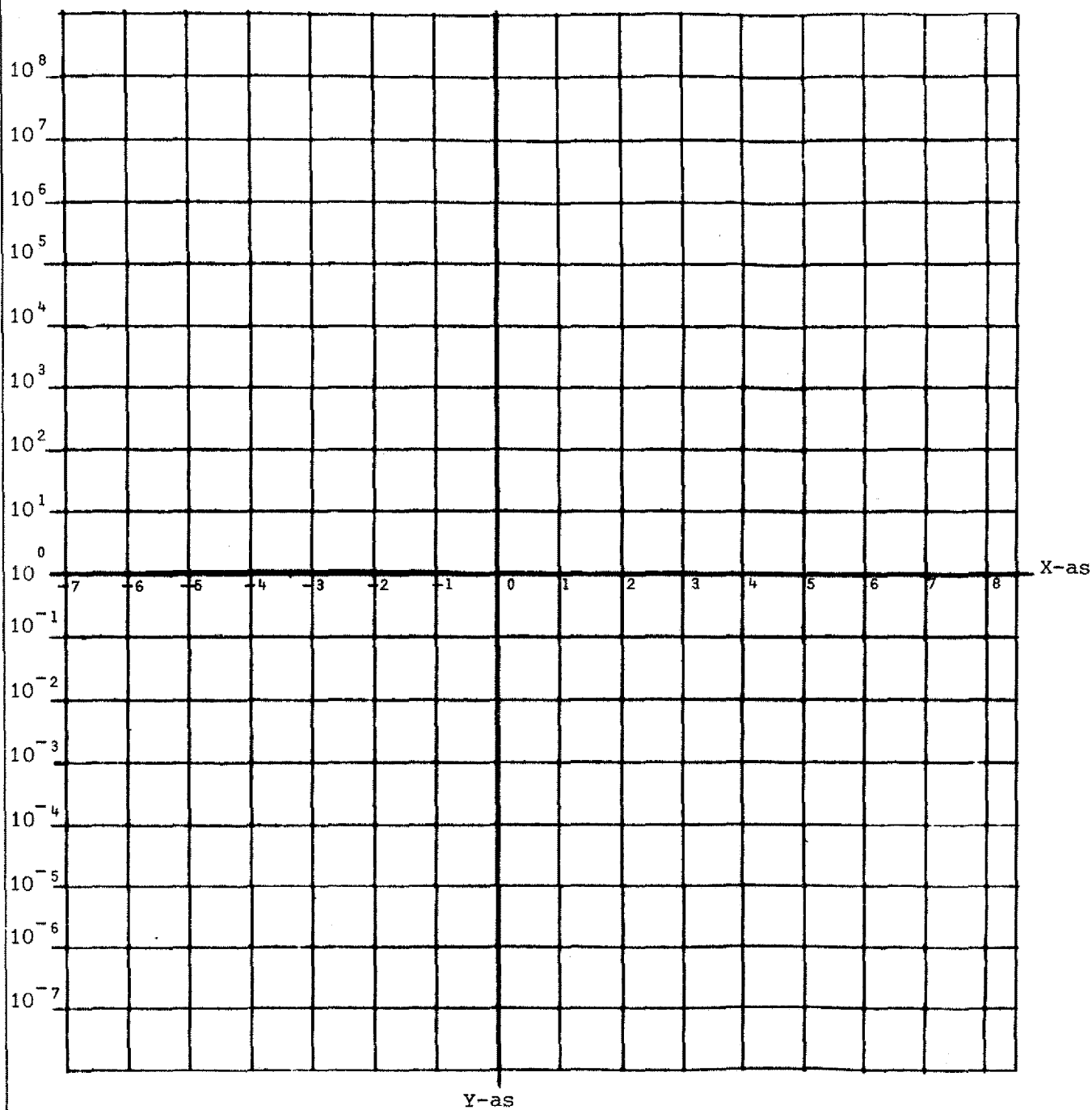
- Probeer aan te geven waar langs de Y-as 500 en 50.000 moeten staan.
(denk even goed na).

Hier zie je nog wat afmetingen, uit de wereld om ons heen met elkaar vergeleken.
Waar is het 0 punt van bovenstaande schaal?



MOUNT EVEREST





a - Teken op bovenstaand logaritmisch grafiekpapier de grafieken van:

$$f : x \rightarrow 100^x$$

$$g : x \rightarrow 10^x$$

$$h : x \rightarrow (\sqrt{10})^x$$

$$k : x \rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

Neem steeds $x \in \mathbb{R}$

- b - Schrijf de functies f , g , h en k alle als een macht van 10.
- c - Welk verband bestaat er tussen de exponenten van de functies (uit vraag b) en de richtingscoëfficiënten van de grafieken?
- d - Teken nu ook de grafiek van:
 $l: x \rightarrow 2^x$
in dezelfde tekening.
- e - Verklaar waarom $2^x = 10^{(\log 2) \cdot x}$
- f - Zie je kans uit de richtingscoëfficiënt van de grafiek van l een schatting te geven van de grootte van ${}^{10}\log 2$?
- g - Hoe zou je op soortgelijke wijze een benadering kunnen vinden voor ${}^{10}\log 3$?

Opmerking: Als het grondtal of groeifactor gelijk is aan 10 wordt het vaak weggelaten.

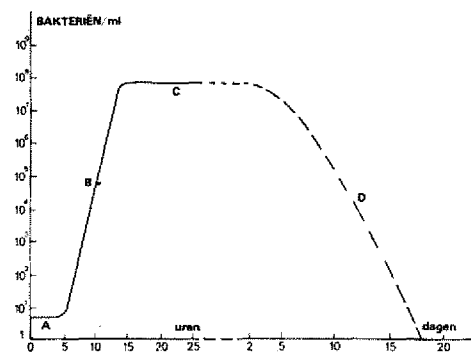
Dus: ${}^{10}\log 3$ wordt geschreven als $\log 3$
 ${}^{10}\log 6$ wordt geschreven als $\log 6$.

Groei en afsterven van allerlei mikroben in een samengestelde bakterieflora, b.v. in een bloempot is een moeilijk te bestuderen proces. Voor studiedoeleinden hebben we meer aan de gang van zaken bij één of twee bakteriesoorten in een kunstmatig milieu: een zuivere kweek.

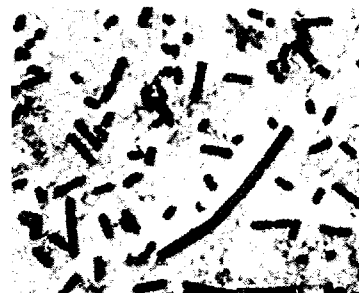
De belangrijkste gebieden in het menselijk lichaam waar bakteriën welig tieren zijn de huid en het spijsverteringskanaal. Beide staan in open verbinding met de buitenwereld, waardoor het binnendringen van bakteriën die het biologisch evenwicht kunnen verstoren wel te verwachten is.

Als je wat bakteriën op een geschikte voedingsbodem overbrengt, zullen deze zich gaan vermeerderen. De groei is vrij eenvoudig te volgen m.b.v. de hedendaagse techniek.

Als we het aantal bakteriën gaan uitzetten tegen de tijd ontstaat de groeikromme die altijd weer dezelfde grondvorm heeft:



Groeikromme. A latentietijd, B exponentiële fase, C stationaire fase, D afnemingsfase.



TYPHUS wordt door deze bacterie veroorzaakt:

SALMONELLA TYPHOSA

We onderscheiden drie fasen:

a - De latentietijd (A)

De bakteriën passen zich aan hun nieuwe omgeving en delen zich nog niet maar worden alleen groter. Uiteraard is de grafiek dan horizontaal.

b - De exponentiële of logaritmische fase (B).

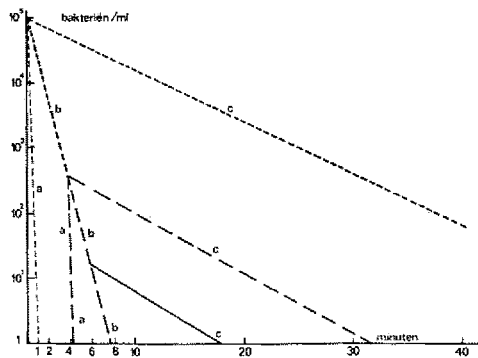
Nu gaat het delen beginnen. In deze fase zijn de bacteriën min of meer in evenwicht met het milieu. Er is sprake van een *groeisnelheid* of: konstante *delingstijd*. Dit kan natuurlijk niet ongebreideld doorgaan omdat een bepaald moment een tekort aan "voeding" ontstaat.

c - De stationaire fase (C).

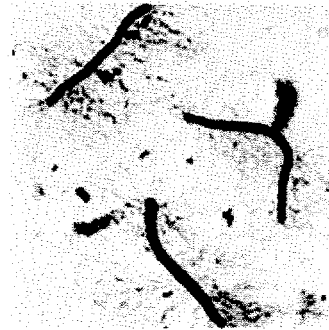
De celdeling is voorbij. Natuurlijk, hier en daar vindt nog wel een deling plaats, maar door afsterving blijft het totaal konstant. Meestal ligt dit aantal tussen de 10^8 en $5 \cdot 10^8$ bacteriën per ml.

d - De afnemingsfase (D).

Het afsterven van de bacteriën krijgt meer en meer de overhand. Dit kan soms doorgaan tot er geen enkele bacterie meer in leven is. Het afsterven gebeurt meestal ook exponentieel:



Afsterfijnen (schematisch). Voorbeeld van sterilisatie in heet water: a 100°C , b 90°C , c 80°C ; weinig bacteriën doden kost minder tijd dan veel bacteriën doden.

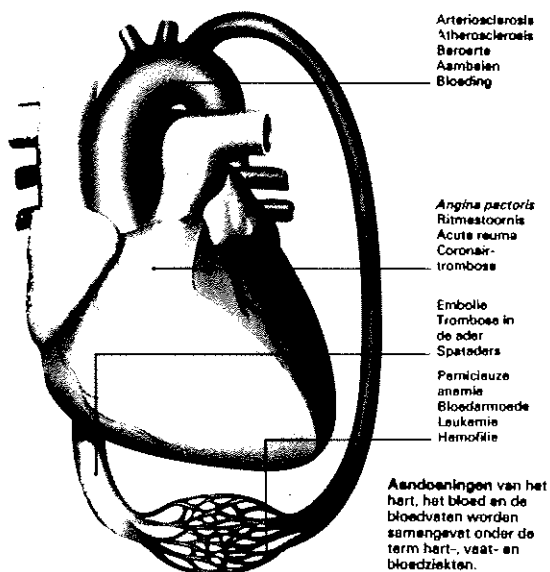


Deze bacterie met zweepdraden is de *ESCHERICHIA COLI* die ziekten aan de urinewegen kan veroorzaken.

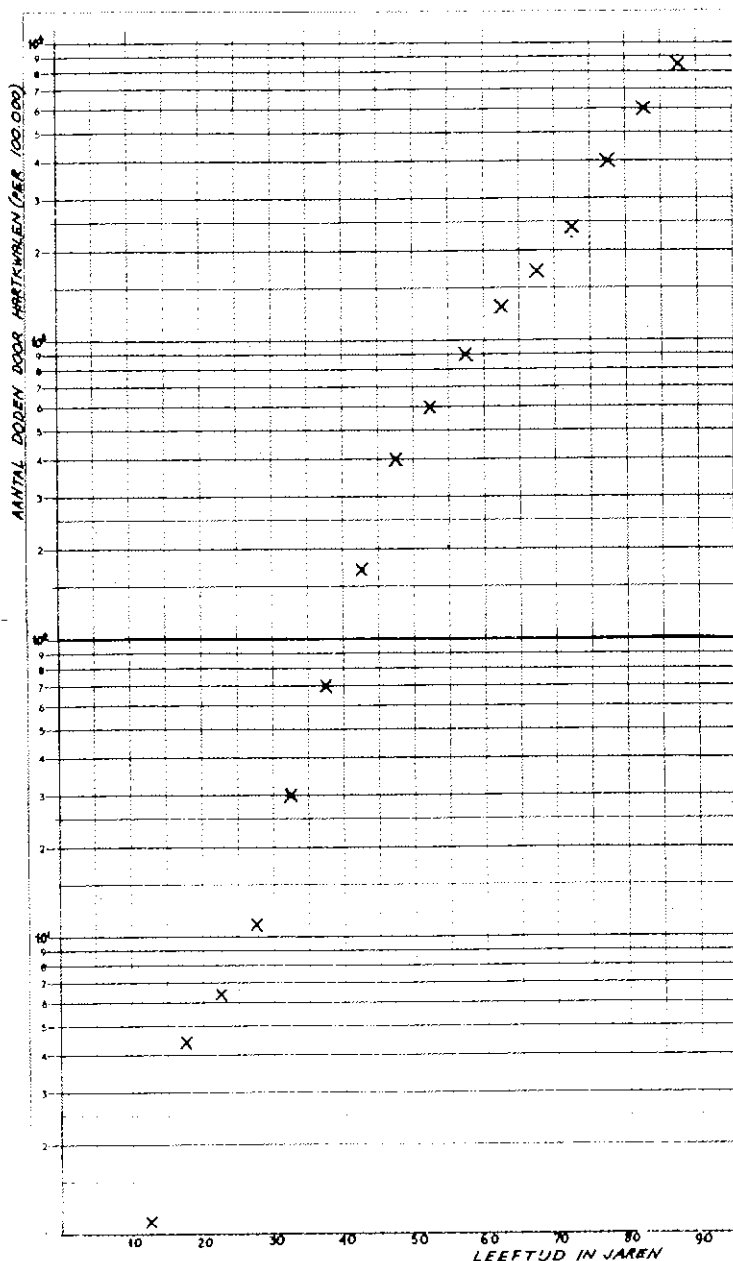
Je ziet in bovenstaande grafiek hoe snel het aantal bacteriën afneemt bij pasteurisatie.

Je ziet dat bij 100°C bijna alle bacteriën binnen een minuut dood zijn.

- a - In het groeiverloop komen we eerst de LATENTIETIJD tegen:
er vindt dan géén groei plaats, de grafiek is een horizontale
lijn. In welk van onze voorbeelden uit het begin was ook sprake
van een latentietijd?
- b - Hoe lang duurt de latentietijd hier?
- c - Hoeveel bacteriën per ml. zijn er dan?
- d - Verklaar de uitdrukking: "konstante delingstijd".
- e - Na de exponentiële groei volgt een STATIONAIRE fase.
Hoeveel bacteriën zijn er dan per ml?
- f - Na de stationaire fase volgt het afsterven.
De afsterflijnen zijn rechte lijnen, op logaritmisch grafiek-
papier. Probeer de bovenste C- afsterflijn eens op gewoon
roosterpapier te tekenen.

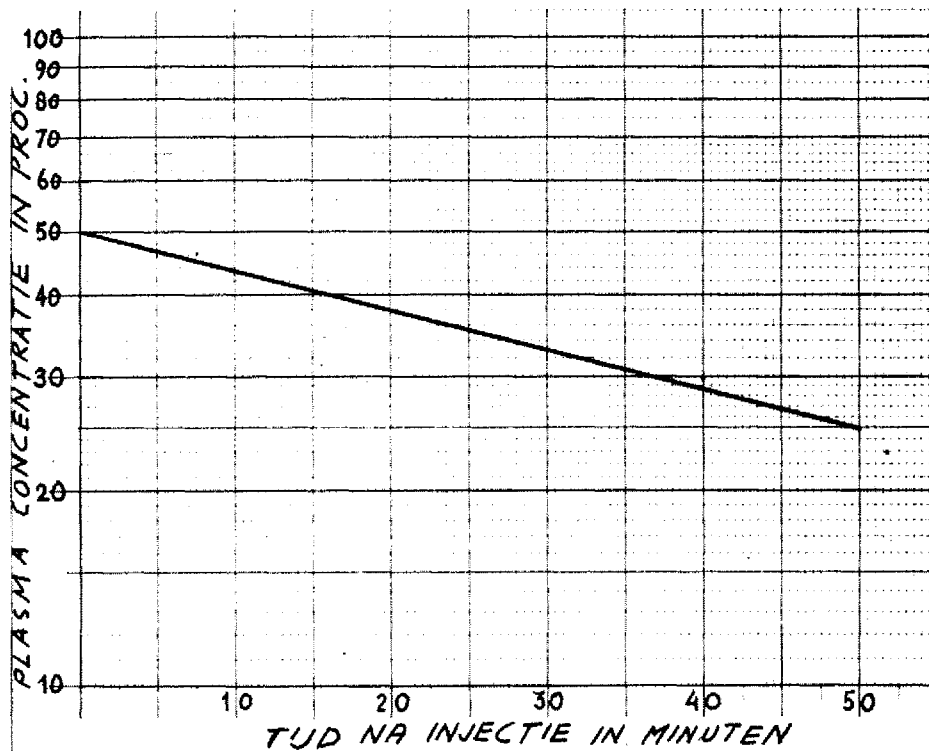


Op onderstaande grafiek zie je het
aantal mensen dat in de U.S.A.
sterft aan hartkwalen (per 100.000)
naar leeftijd uitgezet; en wel op
logaritmisch papier.



- Hoe kun je zien dat de mensen ingedeeld zijn in leeftijds-groepen van 5 jaar "breedte"?
- Hoeveel mensen (per 100.000) sterven in de groep van 10 - 15 jarigen aan hartkwalen?
- En in de groep van 85 - 90 jarigen?
- Tussen de 50 en 90 jaar is de grafiek een vrijwel rechte lijn. Wat wil dat in dit geval zeggen?
- Hoe groot is de groeifactor ongeveer (over het stuk grafiek van 50 - 90 jaar; 5 jaar als eenheid). Wat wil dat hier zeggen?

Een thiosulfaatinjectie ($\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$) verlaagt de bloedplasma concentratie van een patiënt, en wel zó dat de grafiek er op logaritmisch papier zo uitziet:



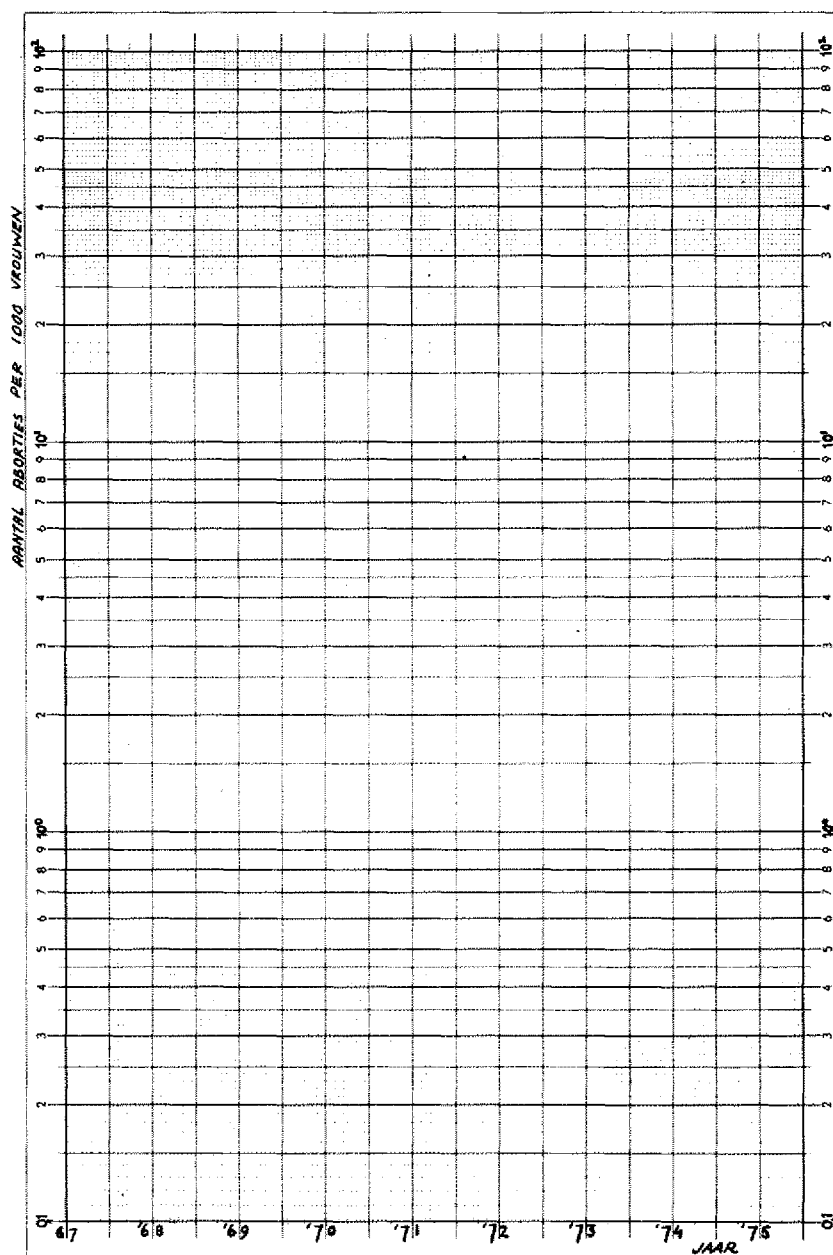
- a - Hoe groot was de plasma concentratie vóór de injectie?
- b - En na 25 minuten? En na 50 minuten?
- c - Is de afname van de plasma concentratie lineair?
- d - Teken bovenstaande grafiek op gewoon roosterpapier.
- e - Hoe groot is de halveringstijd?

Van drie landen, India, Zweden en Tsjecho-Slowakije vind je hierbij het aantal *legale* abortussen dat plaats vindt per jaar, per 1000 vrouwen tussen 15 en 44 jaar oud.

jaar	India	Zweden	Tsj. Slowakije
1967	-	6,0	32,5
1968	-	7,0	33,8
1969	-	9,0	34,0
1970	-	10,5	32,5
1971	-	12,3	32,0
1972	0,2	15,2	30,0
1973	0,4	16,2	26,2
1974	0,8	19,0	25,0
1975	1,5	21,2	-

Op de volgende bladzijde vind je logaritmisch grafiekpapier.

- a - Teken daar de drie grafieken die het verloop van het aantal abortussen in die landen aangeeft.
- b - In welk land neemt het aantal abortussen het snelst toe?
Hoe zie je dat aan de grafiek?
- c - Is de toename in dat land
 - vrijwel lineair;
 - vrijwel exponentieel;
 - geen van beide?
- d - Hoe groot is de "groefaktor" in India?(ongeveer)



e - Stel dat een land x dezelfde "groeifactor" heeft als India, maak dan het volgende tabelletje af, en teken de grafiek in bovenstaande tekening erbij?

Jaar:	Aantal Ab.
1967	1,0
1968	---
1969	---
1970	---
1971	---
1972	---
1973	---
1974	---
1975	---

- f - Wat valt op als je de grafieken van India en het land x met elkaar vergelijkt?

Vul aan:

Op logaritmisch grafiekpapier leiden gelijke
groeifactoren tot _____ lijnen

- g - Zie je aan de grafieken van Zweden of Tsjecho-Slowakije nog een gedeelte dat je exponentieel of lineair zou kunnen noemen.
(over minstens 4 jaar).



De twee maanden oude foetus heeft al "eigen" kenmerken zoals: het patroon van zijn vingerafdrukken, maar is wel geheel van de moeder afhankelijk wat betreft zuurstof en voedsel. Vandaar dat de één de foetus als een menselijk wezen ziet, terwijl de ander het als onderdeel van de moeder beschouwt. En van dat standpunt hangt vaak ook de visie van iemand op abortus af.

In het eerste gedeelte van dit boekje (blz. 36 en 43) hebben we de groei van zeesterren en schelpen wat nader bekeken.

We hebben toen gezien dat de groei van de zeester twee verschillende fasen had, die waren te benaderen door:

$$f: x \rightarrow (1,5)^x - 1 \quad (\text{voor de eerste maand})$$

en

$$g: x \rightarrow (1,25)^x \quad (\text{na de eerste maand})$$

Ook voor de schelp (*Guildfordia Triumphans*) vonden we een funktievoorschrift.

a - Als we nu de grafieken op logaritmisch papier gaan tekenen, hoe zullen de grafieken er dan uitzien? Die van f ook?

b - Op de volgende bladzijde vind je 2 maal een stuk logaritmisch grafiekpapier.

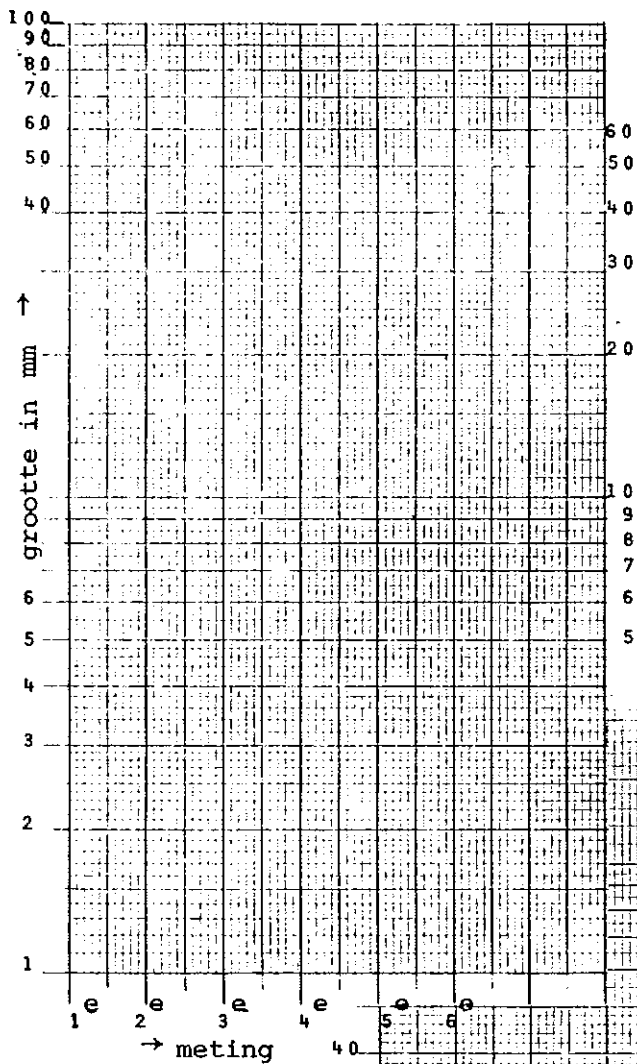
Teken op het eerste de grafiek die de groei van de schelp weergeeft (dus n.a.v. de foto op blz. 43 en de grafiek op blz. 44).

Teken op het tweede de grafiek die de groei van de zeester weergeeft (dus de punten van de grafiek van blz. 37).

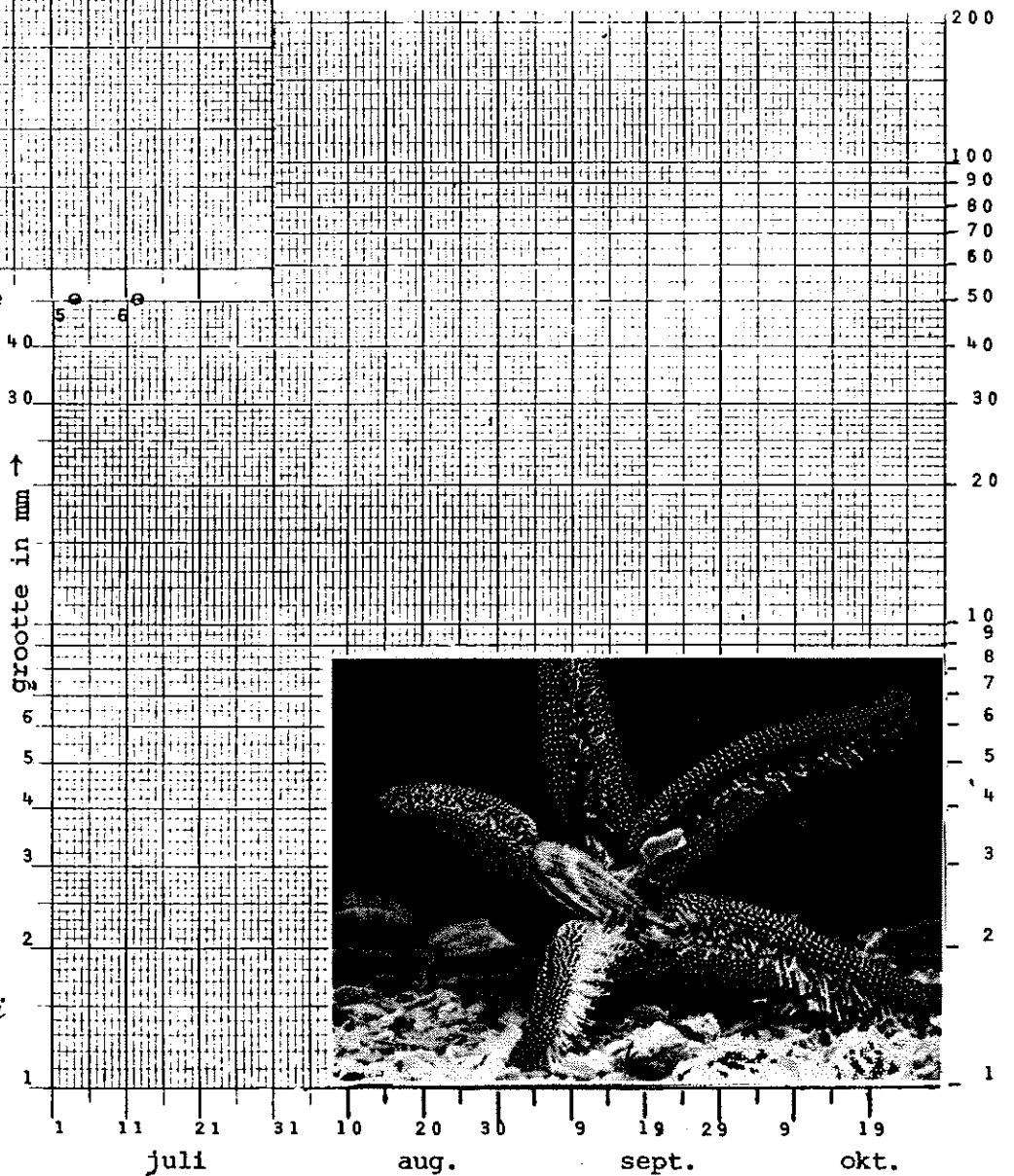
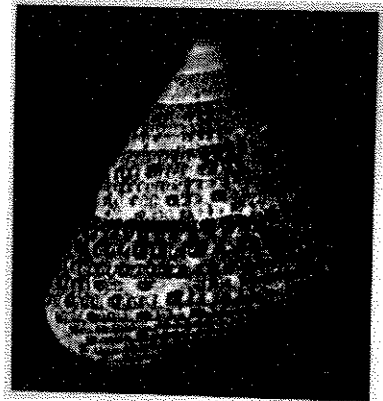
c - Bij de groei van de schelp leverde de beginwaarde nogal wat problemen. Nu je de grafiek op logaritmisch papier ziet is dat ineens veel makkelijker. Waarom?

d - Hoe kun je nu aantonen dat de groei exponentieel is zonder een formule te vinden?

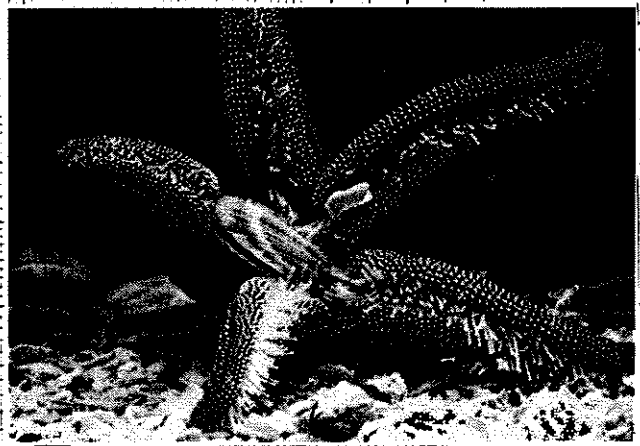
e - Kun je m.b.v. log-papier een formule makkelijker bepalen dan op "normaal" roosterpapier?



Schelpgroei



Zeester-groei



De hoofdeigenschap van de logaritmische funkties:

$${}_g\log ab = {}_g\log a + {}_g\log b \quad (1)$$

Enkele andere eigenschappen volgen daar snel uit:

$${}_g\log \frac{a}{b} = {}_g\log a - {}_g\log b \quad (2)$$

$${}_g\log a^n = n {}_g\log a \quad (3)$$

$${}_g\log a = \frac{{}_p\log a}{{}_p\log g} \quad (4)$$

a - Bewijs (3) voor $n \in \mathbb{N}$ (deze eigenschap geldt ook voor $n \in \mathbb{R}$).

b - Bewijs (2)

Los m.b.v. (1) (2) en (3) x op uit de volgende vergelijkingen:

c - ${}^3\log x = 3^3\log 4$

$${}^4\log x = 5^4\log a - 3^4\log b \quad (a, b > 0)$$

$$\log x = \frac{1}{2} \log 3$$

d - $\log x = -\frac{1}{3} \log 27$

$$\log x = 2 {}^2\log \frac{1}{2}$$

$${}^2\log x + {}^2\log 5 = 1$$

$$e - {}^3\log 2 + {}^3\log x = 3$$

$$\log x^2 = \log 2^5 - \log 2$$

$$2 \log x = \log 3^2 - \log 2$$

Eigenschap (4) :

$$g_{\log a} = \frac{p_{\log a}}{p_{\log g}}$$

laat zich ook schrijven als:

$$p_{\log g} \cdot g_{\log a} = p_{\log a}$$

f - Verklaar dat.

g - Probeer de juistheid van eigenschap (4) aan te tonen voor b.v.:

$${}^{10}\log 2 \cdot {}^2\log 3 = {}^{10}\log 3.$$

$$\text{noem daartoe: } {}^{10}\log 2 = x ; {}^2\log 3 = y ; {}^{10}\log 3 = z$$

en maak gebruik van de eigenschappen der exponentiële funkties en de definitie van de logaritme.

Als dat gelukt is probeer dan in zijn algemeenheid aan te tonen:

$$p_{\log g} \cdot g_{\log a} = p_{\log a}$$

en geef de voorwaarden waaraan p, g en a moeten voldoen.

h - Met behulp van eigenschap (4) zijn bepaalde produkten makkelijk te vereenvoudigen:

$${}^3\log 5 \cdot {}^5\log 3 =$$

$${}^4\log 25 \cdot {}^5\log 16 =$$

$${}^3\log 25 \cdot {}^5\log 3 =$$

$${}^7\log 4 \cdot {}^2\log 49 =$$

De hoofdeigenschap nader bekeken

85

Verder geeft deze eigenschap (4) je de mogelijkheid om van grondtal te veranderen. We zullen later nog zien wanneer en waardoor dit belangrijk kan zijn.

Zo kun je ${}^3\log 5$ schrijven als b.v. $\frac{{}^{10}\log 5}{{}^{10}\log 3}$

maar ook als $\frac{{}^2\log 5}{{}^2\log 3}$

Een veel gebruikt grondtal is 10.

Zo is ${}^{10}\log 2 \approx 0,30$ en ${}^{10}\log 3 \approx 0,4770$

i - Geef een benadering van: (in 2 decimalen nauwkeurig).

${}^2\log 3$; ${}^3\log 2$; ${}^2\log 27$; ${}^3\log 8$.

${}^2\log x$ kun je interpreteren als het tijdstip waarop er $x \text{ m}^2$ kroos in de vijver ligt, waarbij de groeifactor 2 is.

a - Hoe kun je op soortgelijke wijze ${}^2\log(x+1)$ omschrijven?

En: $1 + {}^2\log x$?

b - Teken de grafieken van:

$$f : x \rightarrow {}^2\log(x+1)$$

$$g : x \rightarrow 1 + {}^2\log x$$

in één tekening.

c - Wat is domein van f ? En van g ?

d - Los op: ${}^2\log(x+1) = 1 + {}^2\log x$

en: ${}^2\log(x+1) \geq 1 + {}^2\log x$

met behulp van de grafieken.

Bij het oplossen van de laatste logaritmische ongelijkheid maakten we gebruik van de grafieken. Vaak kun je het ook zonder grafiek doen:

vb.: ${}^2\log x \geq 3$.

Beredeneren vanuit het kroosmodel:

${}^2\log x$: het moment waarop er $x \text{ m}^2$ kroos ligt.

${}^2\log x \geq 3$: dat tijdstip moet groter dan 3 zijn.

Met andere woorden: hoeveel m^2 kroos heb ik na minstens drie dagen groei?

Het antwoord is - uiteraard - 8 m^2 .

Meestal doen we het wat meer wiskundig:

$$\begin{aligned} {}^2\log x \geq 3 & \quad \text{Merk eerst op: } x > 0 \quad (\text{waarom?}) \\ & \quad \text{vervolgens :} \\ & \quad {}^2\log x \geq 3 \cdot {}^2\log 2 \quad (\text{waarom?}) \end{aligned}$$

Tenslotte is $x \rightarrow {}^2\log x$ een *stijgende* functie dus:
 $x \geq 2^3$

e - Los op bovenstaande manier op: (bepaal eerst domein van linkerlid).

$${}^3\log x < 2$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log x > 2$$

$${}^5\log (x+1) > 1$$

f - Los grafisch op: (bepaal eerst domein van linkerlid).

$${}^2\log (x+1) < 4$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log (2x+1) > 1$$

$${}^2\log 2x < 1$$

$${}^3\log (x^2-3) > 0$$

$${}^2\log (3x-6) < 0.$$

g - Waarom is ${}^2\log 3 \notin \mathbb{Q}$?

(Laat eerst zien dat ${}^2\log 3 = \frac{p}{q} \iff 2^p = 3^q; p, q \in \mathbb{N}$).

Dubbellogaritmisch papier

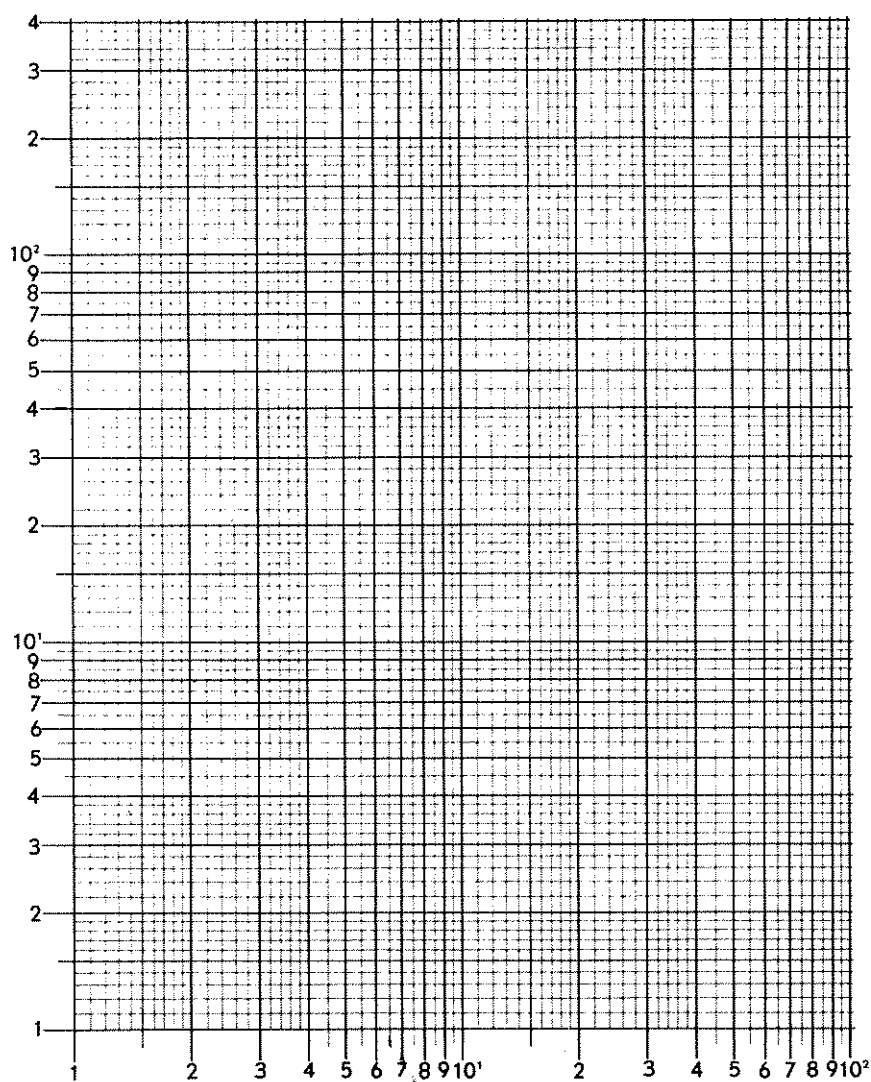
88

We hebben al kennis gemaakt met zgn. Logaritmisch Grafiekpapier waarbij de X-as "gewoon" was verdeeld, en de Y-as logaritmisch.

Soms werken we ook met *dubbellogaritmisch* papier waarbij beide assen logaritmisch verdeeld zijn.

Het voordeel van *logaritmisch* papier was dat een *exponentiële* functie te voorschijn kwam als een *rechte lijn*.

Welk soort functies teken je nu bij voorkeur op dubbellogaritmisch papier?



a - Teken de grafieken van:

- $f: x \rightarrow x$
- $g: x \rightarrow x^2$
- $h: x \rightarrow x^3$
- $k: x \rightarrow x^4$

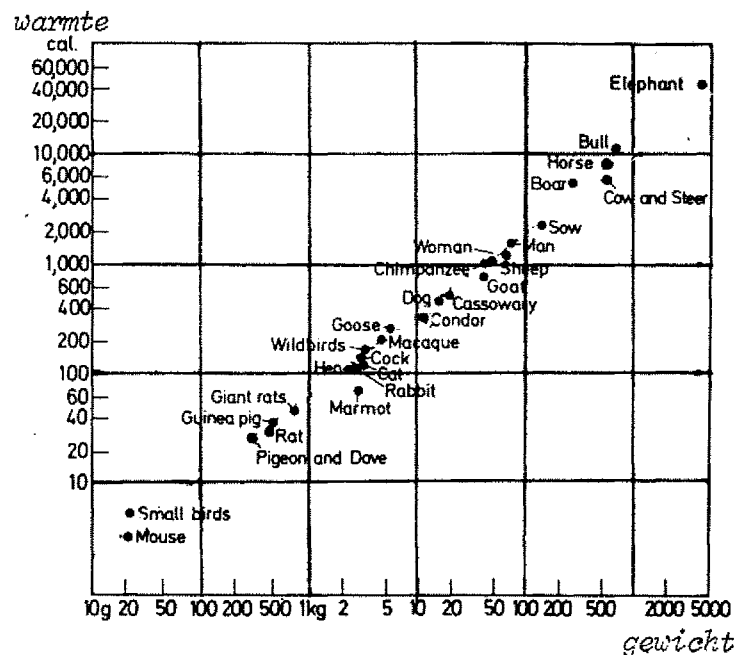
b - Laat zien, d.m.v. hoofdeigenschap dat de grafieken van *machtsfuncties* *rechte lijnen* worden op dubbellogaritmisch papier.

Wat valt bovendien van de richtingscoëfficiënten van die lijnen te vertellen?

Omgekeerd is het ook zo dat als de grafiek op dubbellogaritmisch papier een rechte is, de funktie een funktie is van de vorm:

$$x \rightarrow ax^n$$

Een mooi voorbeeld is de grafiek die het verband aangeeft tussen het gewicht van warmbloedige dieren en de dagelijkse hoeveelheid warmte die geproduceerd wordt:



c - Teken de rechte die bovenstaande puntengrafiek redelijk benadert.

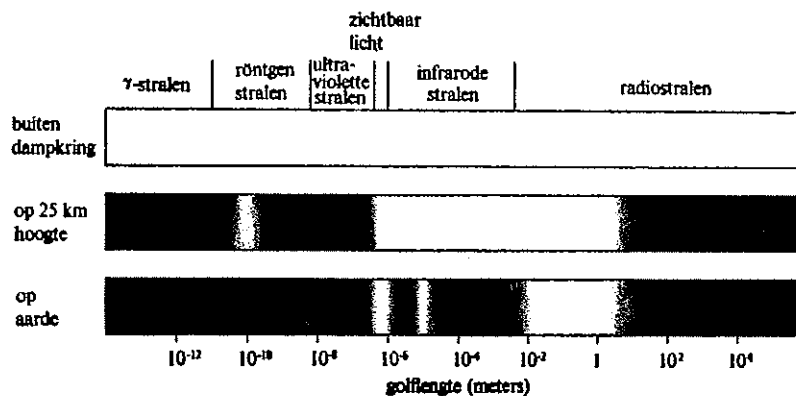
d - Teken in hetzelfde plaatje de grafieken van

$$x \rightarrow 100 \cdot x \quad (x: \text{gewicht in kilo} \\ Y: \text{warmte in kaloriën}).$$

en $x \rightarrow 100 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

e - Stel dat $x \rightarrow a \cdot x^n$ de oorspronkelijke grafiek moet weergeven. Hoe groot zal n dan ongeveer moeten zijn?

Hemellichamen, zoals sterren, zenden straling naar de aarde. Afhankelijk van de golflengte van de straling spreken we van radiostralen, infrarode stralen, zichtbaar licht, ultraviolette stralen, röntgenstralen en γ -stralen. Maar het grootste gedeelte daarvan bereikt de aarde nooit, door de dampkring die ons omgeeft. Het volgende plaatje geeft daarvan een indruk: Je ziet in de bovenste balk alle straling staan zoals die buiten de dampkring kan worden waargenomen:



a - Straling met welke golflengte noemen we röntgenstraling?

Je ziet dat op 25 km hoogte al een groot gedeelte van de straling niet meer doorkomt.

b - Röntgenstraling met welke golflengte is hier nog aanwezig?

Op de aarde zijn nog maar 3 soorten straling waarneembaar.

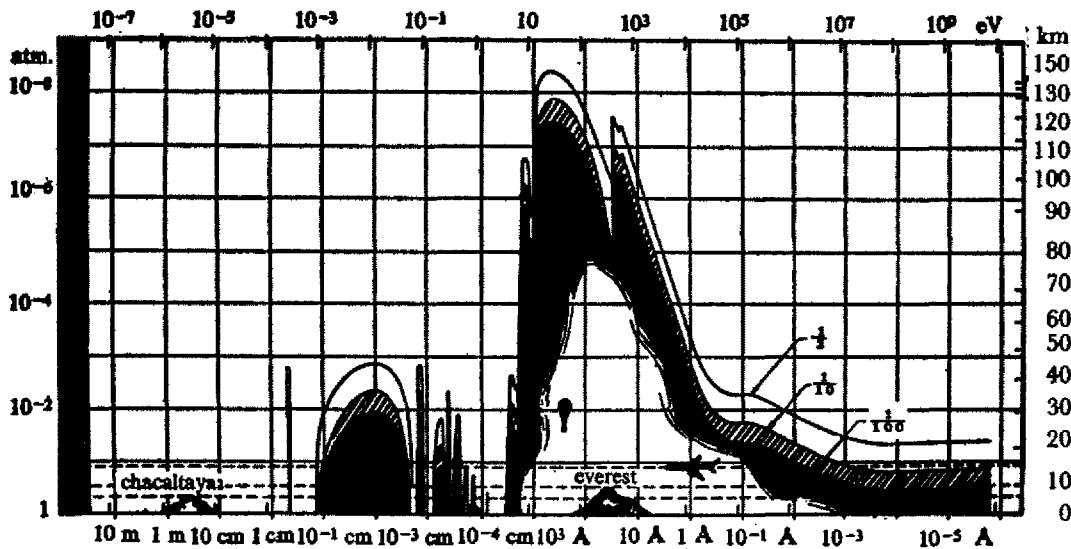
c - Welk soort straling is op aarde waarneembaar en welke golflengte heeft die straling?

De reden waarom de diverse soorten straling de aarde niet bereiken is verschillend:

De lange radiogolven worden door de geleidende lagen (ionosfeer) van de dampkring teruggekaatst.

De korte radiogolven en de infrarode straling worden door koolzuurmoleculen en waterdamp geabsorbeerd.

De ultraviolette straling en de γ -stralen stranden op de ozon moleculen en op atoomkernen in de dampkring.



Wat zien we in bovenstaande grafiek zoal?

Langs de onderzijde een logaritmische schaal met de golflengte (in meters, centimeters en Ångström, niet erg konsekvent dus).

Nu gebeurt het in de natuurkunde vaak dat men niet over de golflengte van straling spreekt maar van de energie, uitgedrukt in e V (elektron Volt). Zo is: $0,1 \text{ Å} = 120 \text{ k e V}$ (kilo-elektron-Volt). Vandaar de schaal aan de bovenzijde van het rooster. (De kleine streepjes geven de e V aan. Je ziet dat: $1 \text{ e V} \approx 10^{-4} \text{ Å}$).

Links zie je de luchtdruk in atmosfeer uitgedrukt (logaritmische schaal), terwijl rechts de bijbehorende hoogte staat aangegeven.

Uit de grafiek blijkt nu dat straling met een golflengte van 1 Å kan worden waargenomen op zo'n 50 - 60 km. (de helft dringt zover door).

Maar op zo'n 40 km is nog maar $\frac{1}{100}$ van die straling te bespeuren.

e - Op welke hoogte nog $\frac{1}{10}$ van de straling?

f - Is het venster van het zichtbare licht (zie balkplaatje) hier ook te zien? Waar?

g - En het venster met de korte radiostralen?

h - Welke straling is op 110 km al bijna helemaal verdwenen?

