



Gravemeijers opvattingen over de theorie van realistisch reken-wiskundeonderwijs

- beschouwing naar aanleiding van een publicatie -

J.M.C. Nelissen
Flsme, Universiteit Utrecht

In een experiment werd nagegaan of splitsaanpakken het inzichtelijk werken met tientallen en eenheden bevorderen. Het uitvoeren van meetactiviteiten is volgens Gravemeijer c.s. daarvoor een geschikte basis. Het experiment werd gestart met het meten van allerlei voorwerpen waarna werd overgegaan op het gebruik van een standaardliniaal. Ter voorbereiding op dit experiment werd een 'hypothetisch leertraject' uitgewerkt. Het doel was uiteindelijk te leren werken met sprongen van tien en eenheden. Een punt van aandacht en discussie is of de getallenlijn niet op korte termijn zou moeten fungeren als model voor representatie van mentale operaties in plaats van als 'tool' om te leren.

1 Inleiding: design research

In het hoofdstuk 'A hypothetical Learning Trajectory on Measurement and Flexible Arithmetic' van Gravemeijer c.s. (2003) wordt verslag gedaan van een onderzoek dat getypeerd wordt als 'design research'. Dit wordt ook wel *developmental research* genoemd, een term die de lezers van dit tijdschrift zullen associëren met 'ontwikkelingsonderzoek'.

Van Parreren maakte ooit onderscheid in formerend en constaterend onderzoek. Formerend onderzoek is dan vergelijkbaar met ontwikkelingsonderzoek. Terwijl in constaterend onderzoek, dat vaak tevens is opgezet als hypothesetoetsend onderzoek, een bepaalde stand van zaken wordt vastgesteld (bijvoorbeeld: hoe leerlingen rekenen in het getalengebied van 1 tot 100), reikt de bedoeling van formerend onderzoek verder. In formerend onderzoek of ontwikkelingsonderzoek worden nieuwe ideeën getoetst in de bestaande onderwijspraktijk, met de bedoeling die 'praktijk' te verbeteren. Maar tegelijkertijd is analyse van de opgedane ervaringen aanleiding om aan 'theorievorming' te werken. Hypothesetoetsing is echter ook in 'design research' mogelijk, zij het dat de hypothese die men wil toetsen, op grond van ervaringen tussentijds aangescherpt en bijgesteld kan worden. Dit laatste luistert overigens nauw en is soms onderwerp van kritische discussie: hoe immers kun je een hypothese nog toetsen als je die voortijdig wijzigt? Daar staat de vraag tegenover waarom een hypothese niet aangescherpt en verbeterd zou mogen worden, als daar goede argumenten voor (blijken) te zijn.

2 Modellen

De theorie waar Gravemeijer van uitgaat wordt gekenmerkt, zegt hij, door een drietal heuristischeken. Om te beginnen moet wat kinderen leren *real* (betekenisvol) zijn.

Ten tweede wordt het leerproces gekenmerkt door het principe van *guided reinvention*. De onderzoeker bedenkt vooraf welke leerroutes de leerlingen vermoedelijk zullen afleggen en dit wordt een 'hypothetisch leertraject' genoemd.

Ten derde onderwerpen leerlingen modellen, om te beginnen informele, en dat gebeurt op basis van het werken met materiële en symbolische 'tools'. Uit het proefschrift van Gravemeijer kennen we al het leerproces dat hij kenmerkt als een proces waarbij gestart wordt als 'model van' en dat overgaat in 'model voor'. Dat laatste is uiteraard een algemener model. Modellen worden beschouwd als het resultaat van de handelwijzen waarop leerlingen hun activiteiten organiseren, en ze worden daarom *student-generated models* genoemd. Dat is dus iets anders dan de uit de 'abstracte' wiskunde afgeleide gematerialiseerde modellen, zoals onder meer door de Russische psycholoog Gal'perin is bepleit. Aanvankelijk zijn de modellen verbonden met de informele werkwijzen van leerlingen en hebben ze een contextspecifiek karakter. De overgang naar 'model voor' vindt plaats als het model zelf uitgangspunt is om te redeneren.

Een punt van aandacht bij die overgang is steeds: hoe kan men aansluiten bij de ideeën van de leerlingen en tegelijkertijd het leerproces stimuleren dat men wenselijk acht?

3 Hypothetisch leertraject

Deze vraag leidde bij Simon tot het formuleren van het concept van het hypothetisch leertraject. Het onderwijs en leerproces dat is gebaseerd op dit concept is gericht op de groep en niet slechts op het individu. Het accent ligt bovendien op de constructies van de leerlingen (meer dan op de inhoud) doch ook op instructie van de leerkracht omdat het leren in een sociale setting plaatsvindt en de leraar het groepsproces moet begeleiden. Gravemeijer typeert een leertraject met behulp van de metafoer van de globale planning van een reis. Een reis kun je alleen in grote lijnen plannen en tijdens de reis zijn vaak bijstellingen nodig.

Hoe een hypothetisch leertraject concreet verloopt, dient systematisch in onderzoek te worden nagegaan. Uit dat onderzoek moeten leerkrachten niet slechts leren dat de ene methode beter werkt dan de andere, er moet vooral inzicht worden gegeven in ‘hoe’ een nieuwe aanpak werkt. De leerkracht moet uiteindelijk zelfstandig kunnen overwegen wat de betekenis is van een aanpak in de eigen klas. De ervaring van de leerkracht kan vervolgens weer bijdragen aan de verbetering van (aspecten van) de theorie. Het idee van hypothetisch leertraject wordt verduidelijkt aan de hand van een onderwijsexperiment in groep 3.

4 Een onderwijsexperiment

Het experiment is gericht op leren meten en flexibel rekenen. Gravemeijer wijst op voorafgaand onderzoek waarin werd nagegaan hoe de lege getallenlijn een steun kan zijn bij het leren optellen en aftrekken onder de 100. Het maken van sprongen was de meest gebruikte, informele werkwijze. Deze werkwijze wordt onderscheiden van het splitsen van getallen in tienten en enen. De splitswerkwijze bleek problemen op te leveren (Beishuizen 1997). Daarom werd de voorkeur gegeven aan de strategie van redeneren op basis van sprongen. Niettemin wordt erkend dat de splitsmethode zekere voordelen heeft, namelijk als basis voor schriftelijk uitvoeren van algoritmen en voor het schatten. Dit was een argument om splitsaanpakken (*collection based strategies*) te onderzoeken die het inzichtelijk werken met tientallen en eenheden stimuleren. In eerdere experimenten was gebleken dat het werken met de kralenketting bij leerlingen tot verwarring had geleid. Wordt met bijvoorbeeld het getal 23 nu de 23^{ste} kraal bedoeld (ordinaal) of de 23 reeds getelde kralen (kardinaal)? En waar moet je nu beginnen als je er bijvoorbeeld zeven kralen aan toe wil voegen? Omdat dit in de groep tijdens de les doorgaans geen punt van discussie was, raakten de leerlingen voort-

durend in verwarring. Een kralenketting is al met al geen effectieve *tool* en dus ook geen zinvolle basis voor het gebruik van de lege getallenlijn. Het uitvoeren van meetactiviteiten is volgens Gravemeijer daar echter wél een goede basis voor en daarom stapten de onderzoekers over op meten, in het bijzonder op non-conventionele meetactiviteiten zoals het ontwerpen van een eigen ‘liniaal’. De noodzaak om bij bepaalde taken te werken met grotere maateenheden (tien in plaats van één) kreeg extra aandacht omdat dit een inzichtelijke basis is om de structuur van ons getallensysteem te leren kennen. Het onderwijsexperiment werd gestart met het meten van de lengte van allerlei voorwerpen. De resultaten van de meetactiviteiten en in het bijzonder het gebruik van tientallen en eenheden werden telkens vergeleken en nabesproken. Er kon vervolgens overgegaan worden op een *schematized ruler* en dat is een goede basis voor het redeneren over aanpakken voor optellen en aftrekken.

5 Nogmaals: het hypothetisch leertraject

Als voorbereiding op het experiment werd door de auteurs een ‘hypothetisch leertraject’ uitgewerkt. De verwachting daarbij was dat er bij de leerlingen behoefte zou ontstaan aan een meetprocedure die ze allen op dezelfde manier, dus standaard, zouden kunnen uitvoeren. Bijvoorbeeld *king's foot* of *unifix cubes* die in rijen van tien in elkaar kunnen worden geschoven en als grotere meeteenheden kunnen worden gebruikt. Voorts werd er verwacht dat door het gebruik van de (niet-conventionele) rij-van-tienkubusjes, de behoefte aan één-voor-één tellen zou afnemen. Dit zou leiden tot meten met tientallen en eenheden. Dat is weer de basis om te kunnen meten met een strook, waarop tien en eenheden zijn gerepresenteerd. Uit de meetactiviteiten blijkt dan bijvoorbeeld dat een tafel langer is dan de bank. Hoeveel langer? Past een bepaald voorwerp in de kast? Dat zijn zo opdrachten die de leerlingen uitvoerden.

Het is nu tijd voor de introductie van de *measurement stick*, dat is een meetlat die gebruikt wordt om de waterhoogten te bepalen. Op die lat zijn geen getallen, alleen eenheden in blokken van vijf aangegeven, waardoor de leerlingen worden gestimuleerd de vijfstructuur en vervolgens de decimale structuur te benutten voor het meten. Volgens de verwachting kan in deze fase de ‘lege getallenlijn’ worden geïntroduceerd. Het idee is dat de leerlingen die getallenlijn gebruiken als een lijn waarop gemeten wordt met tien en enen. Sprongen op de lijn representeren afstanden en deze strategie van het maken van sprongen wordt onderwerp van reflectie.

Uit het boven geschetste leertraject ontwikkelt zich bij de leerlingen een algemeen ‘model van getalrelaties’ dat de basis is voor wiskundig redeneren.

6 Nabeschuwing

Het kan, naar mijn idee, geen enkel kwaad het belang van de rol van de leerkracht in de verschillende fasen van het hypothetisch leertraject, dat in het hier besproken onderzoek werd geconstrueerd, extra te benadrukken. Dat geldt om te beginnen als we denken aan het organiseren en het leiden van de groepsdiscussies. Die moeten zodanig verlopen dat de sterke rekenaars niet voortdurend in de groep zitten te schitteren zodat leerlingen die zwak zijn in rekenen comfortabel kunnen wegdromen. De rol van de leerkracht is met name zo gecompliceerd omdat verwacht wordt dat de leerkracht ongedwongen en niet sturend (het gaat immers om het leerproces van de kinderen) nieuwe ideeën en voorstellen introduceert, bijvoorbeeld het gebruik van de *measurement stick*. Om het proces dat gekarakteriseerd wordt door Gravemeijer als een proces van ‘model van, naar model voor’, soepel te laten verlopen, is het ook weer de leerkracht die reflectie op de gehanteerde modellen moet uitlokken. Dat doen de meeste leerlingen doorgaans niet spontaan en ook niet met voldoende diepgang.

Daar komt bij dat de leerkracht voortdurend in de gaten moet houden of de uitgelokte leerprocessen in overeenstemming zijn met het hypothetisch leertraject. Met andere woorden, of de empirische processen niet strijdig zijn met theoretische constructies. Indien dat niet of in onvoldoende mate het geval is, dan moet de leerkracht weten hoe ingegrepen moet worden. Het idee om getalrelaties en operaties met getallen te baseren op meten, is een mooi idee. Het doet denken aan het werk van Davydov die immers het meten als basis zag voor de ontwikkeling van getalbegrip inclusief het breukbegrip. Davydov baseerde het getalbegrip op inzicht in de relatie tussen grootte, maat en getal (Van Parreren & Nelissen 1977), een idee dat door Freudenthal positief werd besproken.

Toch zou ik graag de aandacht willen vestigen op een discussiepunt en wel het volgende. De getallenlijn, die in het

voorgestelde leertraject centraal staat, zou mijns inziens op korte termijn *niet* (meer) gebruikt moeten worden als middel om te *leren*, maar als model om reeds verworven inzichten en mentale operaties te *representeren*. De operaties die inzichtelijk in het hoofd worden uitgevoerd (bijvoorbeeld $7 + 7 = 14$) worden gerepresenteerd op de -volle en daarna de lege - getallenlijn. Vervolgens kunnen die inzichten op de getallenlijn worden ‘geëlaboreerd’, waardoor *transfer* van het geleerde plaatsvindt. De opgave $7 + 7$ is dan de basis voor de opgave $17 + 7$ of $67 + 7$. En neem deze opgave: bij 9 van de 26 kinderen in de groep, hebben ze thuis een hond, bij hoeveel kinderen hebben ze thuis geen hond ($26 - 9$)? De kinderen hebben al geleerd dat je ‘min 9’ kunt uitvoeren als ‘min 10, plus 1’. Dit sluit ook naadloos aan bij het idee om te werken met grotere maateenheden, waar Gravemeijer zelf voor pleit. Op de getallenlijn zou dus niet met boogjes 9 maal een kind eraf gehaald moeten worden, maar zou beter met een boog (of sprong) een ‘inzicht’, een ‘operatie’ gerepresenteerd kunnen worden: min 10, plus 1. Anders gezegd, de getallenlijn als model biedt uitstekende mogelijkheden voor de kinderen om te laten zien hoe ze ‘redeneren’ en hoe ze hun redenering ‘representeren’. Ik geloof niet dat deze kanttekening strijdig is met de gedachten die in het hier besproken hoofdstuk zijn beschreven.

Literatuur

- Beishuizen, M. (1997). Development of mental strategies and procedures up to 100. In: Beishuizen, M., K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (eds.). *The role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Parreren, C.F. van & J.M.C. Nelissen (1977) (red.) *Rekenen. Teksten en analyses Sovjetpsychologie 2*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Gravemeijer, K., J. Bowers & M. Stephan (2003). A hypothetical Learning Trajectory on Measurement and Flexible Arithmetic. *Supporting Students' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in social context*. In: Stephan, M., J. Bowers, P. Cobb & K. Gravemeijer (eds). Reston, VA: NCTM.

A research project investigated whether ‘collection based strategies’ would contribute to insightful learning of the number system up to 100. The execution of measuring activities is, according to Gravemeijer, a meaningful foundation for that. This article discusses whether the number line should be used as model for representing mental operations instead of as a tool for learning.