

De veerkracht van het rekenrek

W. van den Berg, H.A.A. van Eerde
RISBO, Erasmus Universiteit, Rotterdam

1 Inleiding

Opvattingen over automatiseren

Tot de leerstof die van oudsher in het rekenonderwijs in groep drie en vier van de basisschool centraal staat, behoort het optellen en aftrekken tot twintig (fig. 1). Dit rekenen tot twintig is de basis van de basisvaardigheden zou men kunnen zeggen. Bij veel van het verdere rekenen hangt slagen of falen af van een goede ontwikkeling van deze basisvaardigheden. Daarom wordt hier in het onderwijs veel tijd en aandacht aan besteed.

$4 + 3$	$8 + 6$	$8 - 6$	$13 - 7$
$4 + 5$	$7 + 7$	$6 - 3$	$15 - 8$

figuur 1: optel- en aftrekopgaven tot twintig

Aanvankelijk staat daarbij het verwerven van inzicht in de bewerkingen optellen en aftrekken centraal. Als dit inzicht eenmaal verworven is en kinderen deze bewerkingen op een of andere wijze (meestal tellend) kunnen uitvoeren, streeft men zo snel mogelijk naar een stadium waarin kinderen steeds meer antwoorden van rekenopgaven snel en goed uit het hoofd weten. Van automatisering is sprake wanneer een leerling de uitkomst van een opgave direct weet na het zien of horen van de opgave.

De didactiek die gehanteerd wordt om kinderen te leren automatiseren, wordt gekenmerkt door een grote mate van verscheidenheid. Dit is het gevolg van de verschillende vakinhoudelijke theorieën die ten grondslag liggen aan de in Nederland gebruikte reken-wiskundemethoden. Hierin is sprake van een tweedeling, namelijk in een realistische en een mechanistische stroming. Binnen de realistische rekendidactiek is men het erover eens, dat een onderwijsleerproces dat tot automatisering van het rekenen tot twintig moet leiden, gekenmerkt dient te worden door voortgaande verkorting van oplossingsmethoden. Dergelijke verkortingen kunnen echter alleen tot stand komen door gebruik te maken van wiskundige relaties tussen getallen en operaties. Op basis van inzicht in deze relaties is het mogelijk 'handig' te rekenen en aanvankelijk uitvoerige oplossingsprocessen steeds ver-

der te verkorten, door gebruik te maken van reeds aanwezige kennis. Deze kennis fungeert als steun- of ankerpunt binnen het nieuw op te bouwen kennisnetwerk. Enerzijds kan daarbij sprake zijn van een steeds verdere uitbreiding van het arsenaal aan geautomatiseerde opgaven door opgaven uit elkaar af te leiden.

Zo kan een kind dat weet dat $3 + 3 = 6$, deze kennis inzetten om daaruit het antwoord van de opgave $3 + 4$ af te leiden: $3 + 3 + 1 = 7$. Verdubbelingen fungeren zo als ankerpunt voor het afleiden van de uitkomst van andere opgaven. In veel realistische methoden wordt daarom nadrukkelijk aandacht besteed aan het leren van de verdubbelingen en het daaruit afleiden van uitkomsten van andere daarop gelijkende opgaven. Daarnaast wordt het denkproces ondersteund en verkorting gestimuleerd, door gebruik van modellen en daarop gebaseerde schematiseringen. In deze modellen zijn wiskundige structuren geoperationaliseerd die de basis vormen voor handige, verkorte oplossingsmethoden.

Kijkt men naar de resultaten van het rekenonderwijs, dan blijken veel kinderen bij het rekenen tot twintig de gestelde doelen niet te halen binnen de daarvoor beschikbare tijd, ongeacht de aard van het genoten onderwijs (Span, Abbring en Meijer, 1985; Wijnstra, 1988). Ondanks de aandacht voor verschillende oplossingsstrategieën vallen ook bij realistische methoden de resultaten bij het leren automatiseren tegen (Van den Heuvel-Panhuizen, 1990). Verder komt uit onderzoek naar het handelen van kinderen (bijvoorbeeld Van Eerde en Verhoef, 1978; Thornton, 1990) naar voren, dat een belangrijke oorzaak voor het achterblijven van kinderen ligt in het onbenut laten van de wiskundige relaties tussen getallen en operaties, die binnen dit leerstofgebied bestaan. Nogal wat kinderen hanteren in plaats daarvan inefficiënte, weinig verkorte, vaak niet onderwezen telprocedures, welke geen perspectief bieden op automatisering. Al met al reden tot zorg.

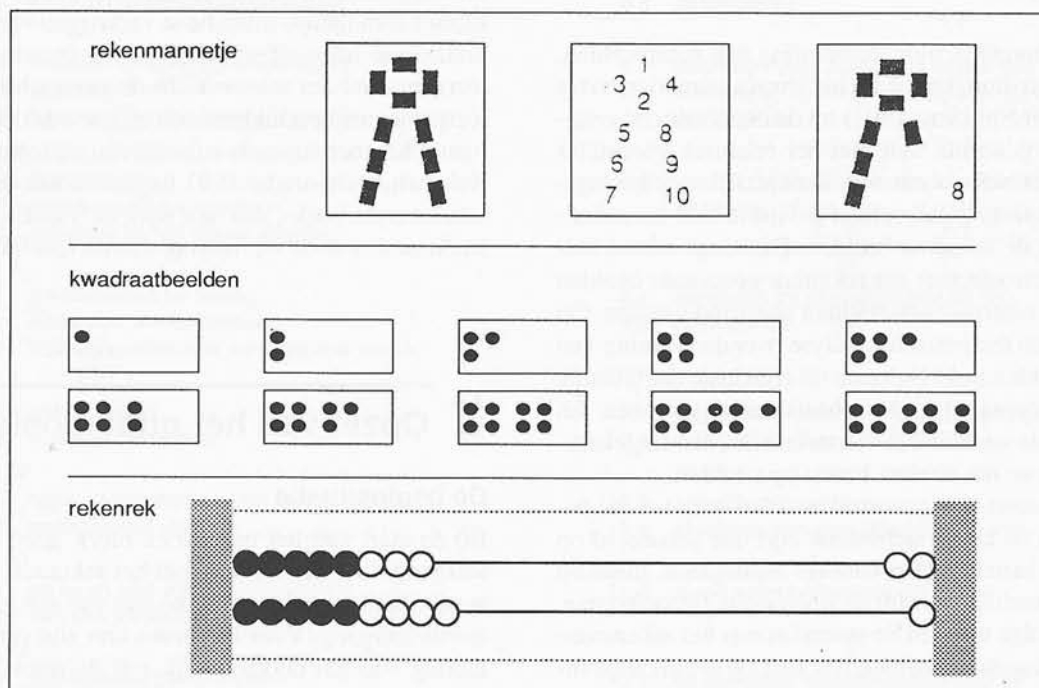
Getalbeelden

Rekendidactici zoeken reeds lang de oplossing van de problematiek rond het leren van de basisautomatismen, in het werken met adequate structureringen van hoeveelheden als relevante fase in het onderwijsleerproces. Structurering biedt kinderen een extra steunpunt voor

het verkorten van basisoperaties. Zo benadrukken Born en Lay de waarde van de dubbelstructuur (Radatz en Schipper, 1983). Anderen vragen aandacht voor het structureren van hoeveelheden rond vijf (Neuman, 1987). Het werken met vijfstructuren is oeroud (Zaslowsky, 1984); uit antropologisch onderzoek is gebleken dat de structurering van onze vingers daaraan ten grondslag ligt. In de literatuur rond gebruik van de vijfstructuur treft men overigens verschillende uitwerkingen aan. Hatano (1982) en Flexer (1988) kiezen een uitwerking waarbij vijftallen kolomsgewijs gerangschikt zijn. Whitney (1986) daarentegen kiest voor een horizontale (rij)afbeelding. Bij deze laatste ruimtelijke ordening sluit de vijfstructuur ook goed aan bij informele strategieën van kinderen waarbij de vingers gebruikt worden. Binnen de diagnostiek en remediëring van rekenproblemen wordt al langer gewezen op het belang van gebruik van de vijfstructuur, mede omdat deze aansluit bij informele strategieën waarbij kinderen op hun vingers rekenen en de daarin van nature aanwezige vijfstructuur gebruiken (Van den Berg en Van Eerde, 1985). Uit onderzoek bij kleuters blijkt dat zij spontaan het getal vijf als ankerpunt kiezen bij eenvoudige optel- en aftrekhandelingen onder de tien (Yoshida en Kuriyama, 1991). Ook uit onderzoek van Siegler en Robinson (1982) blijkt, dat kleuters al verkort op hun vingers rekenen en dat ze relatief goed het getal vijf kunnen optellen. Uit eigen onderzoek is gebleken, dat er een variëteit aan spontaan vingergebruik bestaat waarbij bepaalde handelingen weinig perspectief bieden op verdere verkortingen, maar andere handelingen waarbij de vijfstructuur gebruikt wordt wel tot optimaal verkorte mentale handelingen leiden. Toch wordt het vingergebruik niet systematisch onderwezen. Carpenter en Moser (1983) halen Steffe

aan die erop wijst dat het werken met concreet materiaal effectiever is dan vingergebruik, niet omdat het een betere aanpak is, maar gewoonweg omdat het onderwezen en geoefend wordt, in tegenstelling tot het gebruik van vingers.

In het Nederlands taalgebied heeft de discussie over de wijze waarop men uitvoerige telprocedures bij het rekenen tot twintig beter en sneller zou kunnen verkorten zich toegespitst op de vraag welke getalbeelden daarvoor het meest geschikt zijn. Een getalbeeld is een voorstelling van een getal in de vorm van een gestructureerde hoeveelheid elementen. In de Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs (Treffers en De Moor, 1990) wordt als mogelijke oplossing voor de problemen bij het leren van basisautomatismen een belangrijke plaats toegekend aan het gebruik van de vijfstructuur, vanwege de goede aansluiting bij de tienstructuur en de mogelijkheid voor het snel aflezen van hoeveelheden tot twintig. De vijfstructuur sluit aan bij informele strategieën, waarbij kinderen op hun vingers rekenen (bijvoorbeeld de opgave $7 + 6 = ..$ wordt dan door het kind herleid tot $5 + 2 + 5 + 1 = ..$). De auteurs van de Proeve bepleiten nader onderzoek naar de waarde van de vijfstructuur, speciaal met het oog op de zwakke rekenaars. In aansluiting op het verschijnen van het concept van de Proeve (Treffers, De Moor en Feijs 1987a) ontstond een levendige theoretische discussie tussen voor- en tegenstanders van verschillende getalbeelden (Treffers, De Moor en Feijs, 1987b, 1989; Feijs, 1990; Van Erp en Van Parreren, 1991). Over één ding is men het eens: getalbeelden vormen de basis voor verkorte handelingen die tot automatisering van optel- en aftrekkopgaven tot twintig moeten leiden.



figuur 2

De gedachte hierachter is dat dergelijke getalbeelden, 'Gestalten', de gewenste mentale ondersteuning voor het doorbreken van telprocedures kunnen geven, doordat ze door hun visuele karakter getallen makkelijk voorstelbaar maken. Maar men verschilt van mening over de uitwerking van dit idee. In de discussie gaat het om drie soorten getalbeelden die verschillen in de wijze van structurering van de afgebeelde elementen: het rekenmannetje, kwadraatbeelden en het rekenrek (fig. 2). Gedegen onderzoek om de theoretische veronderstellingen empirisch te onderbouwen en de bijdrage van de drie genoemde getalbeelden aan het proces van het leren automatiseren vast te stellen, is tot nu toe nauwelijks uitgevoerd. Een voorwaarde voor dergelijk onderzoek is de beschikbaarheid van leergangen waarbinnen een bepaald getalbeeld een centrale rol vervult. Alleen voor het rekenmannetje is een uitgewerkte leergang op de markt gebracht (Van Erp, 1989). Een eerste kleinschalig onderzoek naar de waarde van het rekenmannetje lijkt er op te wijzen dat dit getalbeeld niet krachtig genoeg is om ongewenste telstrategieën van kinderen blijvend te doorbreken (Van Luit en Compagnie-Rietberg, 1991 en 1992). De kwadraatbeelden zijn door Feys als geschikte getalbeelden naar voren gebracht (Feys, 1990). In Vlaanderen werden in het verleden handboeken gebruikt waarin dit idee uitgewerkt was. Getalbeelden spelen ook een belangrijke rol bij het leren automatiseren met het rekenrek, dat zodanig gestructureerd is dat daarin dubbel-, vijf- en tienbeelden verenigd zijn. De eerste ervaringen met het rekenrek leidden tot bemoedigende resultaten (Feijs, 1989; Speerpunt Rekenen). In aansluiting op deze ervaringen publiceerde Treffers (1990) een kernleergang voor het rekenrek waarin hij een aantal uitgangspunten schetst voor de verdere ontwikkeling van een leergang.

In een beschouwing over de vorming van getalbeelden, hun waarde en hun functie bij het leren automatiseren tot twintig, komt Nelissen (1991) tot de conclusie dat getalbeelden die gevormd zijn met het rekenrek geschikter zijn voor het verwerven van inzichtelijke oplossingsmethoden dan de getalbeelden gevormd met het rekenmannetje of de kwadraatbeelden. Dit hangt samen met de flexibiliteit van met het rekenrek gevormde beelden en de wijze waarop deze beelden gevormd worden. Op grond van een theoretische analyse over de vorming van mentale beelden trekt Nelissen de conclusie dat mentale beelden gevormd worden op basis van ons denken. En dat niet, zoals vaak wordt verondersteld, het omgekeerde het geval is: dat denken berust op beelden.

De getalbeelden die gevormd worden met het rekenmannetje en de kwadraatbeelden zijn niet gebaseerd op wiskundige inzichten, op handige strategieën, maar op beelden die rechtstreeks uit de waarneming voortkomen. Dientengevolge steunen de operaties met het rekenmannetje en de kwadraatbeelden ook niet op wiskundige inzichten, maar op perceptief gevormde beelden die het ri-

sico hebben te berusten op niet of half begrepen inzichten. Bij het rekenrek in de uitwerking van Treffers zijn de gevormde getalbeelden wel gebaseerd op wiskundige inzichten, zij het in een laat stadium.

Ondanks zijn theoretisch onderbouwde voorkeur voor het rekenrek stelt Nelissen toch ook vragen bij de centrale rol die wordt toegekend aan getalbeelden die hiermee gevormd zijn. Deze bieden volgens hem op zich zeker nog geen garantie voor een geslaagd leerproces. Om kans van slagen te hebben zal een leergang met het rekenrek volgens Nelissen aan een aantal voorwaarden moeten voldoen. Allereerst moeten in een vroegtijdig stadium inzichtelijke strategieën gekoppeld worden aan de vorming en het gebruik van getalbeelden. Tevens bepleit Nelissen een meer centrale plaats voor deze strategieën door ze onderwerp van constructie, discussie, reflectie en toepassing te maken.

Onderzoek naar het rekenrek

Ondanks het ontbreken van onderzoek naar de waarde van de verschillende getalbeelden lijkt men inmiddels, althans in het basisonderwijs, de getalbeelden gevormd met het rekenrek te prefereren boven de twee andere getalbeelden.

Toen de eerste signalen daarvan zich aandienden lag het voor de hand haast te maken met systematisch ontwikkelingsonderzoek ten behoeve van de ontwikkeling van een nieuwe didactiek voor het leren van de basisautomatismen met het rekenrek, om daarmee handen en voeten te geven aan een verdere uitwerking van leergangen in methodische materialen. Op initiatief van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken Wiskunde Onderwijs (NVORWO) werden voor een dergelijk onderzoek middelen gezocht, maar niet gevonden. Wel bleek het mogelijk subsidie te verkrijgen voor evaluatieonderzoek naar effectiviteit en implementatie van de leergang met het rekenrek. In de verwachting dat deze leergang snel beschikbaar zou zijn, mede door impulsen vanuit het toen lopende ontwikkelingsproject Speerpunt Rekenen, werd medio 1991 begonnen aan de uitvoering van dit onderzoek (Van den Berg en Van Eerde, 1992b). In dit artikel doen we verslag van de resultaten.

2 Opzet van het onderzoek

De beginsituatie

Bij de start van het onderzoek bleek geen uitgewerkte leergang voor het werken met het rekenrek voorhanden te zijn, laat staan dat er sprake was van een geïmplementeerde leergang. Voordat sprake kon zijn van een effectmeting was het noodzakelijk zelf de ontwikkeling van een uitgewerkte leergang met het rekenrek ter hand te

nemen en deze vervolgens te beproeven door zelf een aantal leerlingen te trainen. Daarbij diende het onderzoek de grootschalige kenmerken van summatieve evaluatie te behouden.¹

Deze verlangde grootschaligheid bracht de onderzoekers in een lastig parket. Met name door het verlangde grote aantal proefpersonen was zoveel tijd voor training en effectmetingen nodig, dat volstrekt onvoldoende tijd resteerde voor een gefaseerde ontwikkeling van het rekenrekprogramma en voor training van leerlingen gedu-

rende een langere periode dan nu gebeurd is. Daardoor kreeg het onderzoek slechts sporen van de kenmerken van ontwikkelingsonderzoek en formatieve evaluatie² waardoor de omvang het heeft gewonnen van de diepgang.

Naar een leergang gebaseerd op het rekenrek

Als basis voor de constructie van een leergang rond de vijfstructuur is de kernleergang van Treffers (1990) gekozen. Tevens werd gebruik gemaakt van praktische

Les 1	
1.1	verkenning van het rek
1.2	vijfbeelden tot tien
1.3	opzetten en herkennen dubbelbeelden en bijna-dubbelbeelden tot tien
Les 2	
2.1	getalbeelden tot tien
2.2	afsplitsen van dubbelsommen ($4 + 3 = (3 + 3) + 1$)
2.3	afsplitsen van vijfsommen ($6 + 3 = (5 + 3) + 1$)
Les 3	
3.1	vriendjes van tien ($9 + 1, 2 + 8, 7 + 3, 6 + 4, 5 + 5$)
3.2	twee manieren van aftrekken (op het rek: rechts weghalen of links bedekken)
3.3	afleiden halvering uit verdubbeling ($8 - 4 = 4$, want $4 + 4 = 8$)
Les 4	
4.1	inverse relatie
4.2	vriendjes bij elkaar/uit elkaar ($7 + 3 = 10$, dus $10 - 3 = 7$)
Les 5	
5.1	de relatie tussen optellen, aftrekken en splitsen
5.2	oefenen getalbeelden tot twintig
Les 6	
6.1	afleiden splitsing uit aftrekking of optelling
6.2	herhalen getalbeelden tot twintig
Les 7	
7.1	opwarmertje
7.2	getalbeelden tot twintig
7.3	sommen op het rek en afleiden
Les 8	
8.1	getalbeelden tot twintig
8.2	afsplitsen verdubbelingen
8.3	oplossingsmethode sorteren met vijven
Les 9	
9.1	getalbeelden
9.2	sorteren met vijven
Les 10	
10.1	oplossingsmethode 'van tien aftrekken'
10.2	sorteren met vijven
Les 11	
11.1	sorteren met vijven
11.2	van tien aftrekken
Les 12	
12.1	drie oplossingsmethoden
12.2	kiezen eigen oplossingsmethode bij optellen
1.4	oefenen getalbeelden
1.5	controleren dubbelsommen ($4 + 4$) en vijfsommen ($5 + 3$) tot tien
1.6	differentiatie
2.4	controleren dubbel- en bijna-dubbelsommen, vijf- en bijna-vijfsommen
2.5	differentiatie
3.4	afleiden 'vijferaf'-sommen uit 'vijferbij'-sommen ($8 - 3 = 5$, want $5 + 3 = 8$)
3.5	controleren aftreksommen tot tien
3.3	differentiatie
4.3	oefenen getalbeelden tussen tien en twintig
4.4	controleren optellen en aftrekken tot tien
4.5	differentiatie
5.3	inventariseren oplossingsmethoden voor overbruggen van tien
5.4	differentiatie
6.3	afsplitsen verdubbelingen boven tien
6.4	controleren optellen en aftrekken tot tien
6.5	differentiatie
7.4	controle oplossingsmethoden optellen en aftrekken tot tien
8.4	aanvullen tot tien, aftrekken tot tien
8.5	differentiatie
9.3	afsplitsen (verdubbeling en halvering)
9.4	eigen oplossingsmethode kiezen
10.3	afsplitsen tiensom
10.4	afsplitsen van gemakkelijke sommen
11.3	eigen oplossingsmethode kiezen
12.3	kiezen eigen oplossingsmethode bij aftrekken

figuur 3: overzicht rekenrekprogramma

suggesties die in de hiervoor beschreven theoretische discussies vermeld werden. Maar er is meer nodig voor het uitwerken van deze grote lijnen tot een concrete leergang, tot lesjes met uitgewerkte instructie en didactische aanwijzingen voor de leraar-onderzoeker, en met concrete afbeeldingen, opgaven en werkmateriaal voor de leerlingen.

Daarvoor is gebruik gemaakt van de Werkboeken twee tot en met vijf van de Kwantiwijzer voor leerkrachten (Van den Berg, Van Eerde en Lit, 1992a), en de handleiding bij de module Tellen en rekenen tot 20 uit het Speerpunt Rekenen (Buijs en Van Eerde, 1991).

In figuur 3 wordt een overzicht gegeven van de leergang die in dit onderzoek gebruikt is (Van den Berg en Van Eerde, 1992c).

Vraagstelling

In dit onderzoek stond de vraag centraal of het gebruik van de vijfstructuur bij het structureren van hoeveelheden tot twintig in een leergang, inderdaad een mogelijke oplossing voor de problemen van zwakke leerlingen bij het leren van basisautomatismen zou kunnen zijn.

Voor de beantwoording van deze probleemstelling zijn de resultaten die zwakke leerlingen behalen met een leergang gebaseerd op de principes van de vijfstructuur en het vingerrekenen, vergeleken met een leergang waarbij de vijfstructuur ontbreekt. Een eventuele superioriteit van een leergang waarin de vijfstructuur centraal staat, wint aan kracht als er sprake is van vergelijking met een sterke, beproefde concurrent.

Deze sterke concurrent is gevonden in de leergang 'automatiseren tot twintig' in de mechanistische rekenmethode 'Jongleren Met Getallen/Naar Zelfstandig Rekenen'. Uit recent onderzoek naar de effecten van twee rekenmethoden, medio groep vier, blijkt dat deze leergang tot betere prestaties leidt dan de dito leergang in de realistische methode 'De wereld in getallen' (Van den Heuvel-Panhuizen, 1990).

Meer specifiek werd de vraagstelling: boeken leerlingen die aanvullend rekenonderwijs krijgen met een rekenrekprogramma (R) meer leerwinst, dan leerlingen die aanvullend rekenonderwijs krijgen met een mechanistisch programma (M) en dan leerlingen die alleen het regulier onderwijs volgen (C)?

Opzet van het onderzoek

In de eerste fase van het onderzoek is gewerkt aan het opstellen van de beide programma's voor aanvullend onderwijs en is een proefonderzoek uitgevoerd om tot een definitieve keuze van samenstelling en uitvoeringscondities te kunnen komen.

In de tweede fase van het onderzoek zijn trainingen met de programma's uitgevoerd. Beide onderwijsprogramma's bestaan uit twaalf lessen van dertig minuten. We-

kelijks zijn twee lesjes aan groepjes van drie leerlingen gegeven door drie ervaren proefleiders. De leerlingen waren afkomstig uit jaargroep vier, van twaalf grote basisscholen verspreid over de provincie Zuid-Holland. Al deze scholen maken gebruik van een realistische methode. Met een drietal toetsen zijn de rekenprestaties van leerlingen op diverse momenten vastgesteld. Er is gebruik gemaakt van twee klassikale toetsen: een tempotoets (KVL) met opgaven in getal- en symboolvorm, en een contexttoets (Cito) met opgaven in contextvorm, waarbij de getallen en operaties verpakt zijn in een tekst of een afbeelding. Deze klassikale toetsen zijn op alle vier meetmomenten afgenomen: vooraf, tussentijds na zes lessen, achteraf na de laatste les, en achteraf enige maanden later (retentiemeting).

Op de eerste drie meetmomenten is tevens een individuele rekentoets met opgaven in getal- en symboolvorm afgenomen, waarmee het gebruik en de beheersing van verschillende informele oplossingsstrategieën vastgesteld is (kwalitatieve bepaling van het beheersingsniveau). Om de invloed van de mogelijk storende variabele 'intelligentie' onder controle te kunnen houden is bij alle leerlingen een klassikale versie afgenomen van de SON-R.

De meting van deze covariant heeft na de eerste zes trainingslessen plaatsgevonden. Alle toetsen zijn afgenomen door getrainde studenten (niet de trainers). Aan de hand van de resultaten op het eerste meetmoment (voormeting) voor de klassikale tempotoets en contexttoets zijn uit een totale groep van 328 leerlingen 180 leerlingen geselecteerd waarvoor geconstateerd werd dat de basisautomatismen tot twintig nog niet beheerst werden.

Dit zijn de leerlingen waarop het onderzoek zich gericht heeft en die we in het vervolg zwak zullen noemen. Uit deze groep werden drie leerlingen per klas a-select aan elk van de drie onderzoeksgroepen toegewezen. Elke klas/school leverde dus negen zwakke leerlingen aan de drie onderzoeksgroepen. Elke onderzoeksgroep bestond dus uit 36 leerlingen afkomstig van twaalf scholen. De 180 zwakke leerlingen zijn op deze wijze verdeeld in 108 leerlingen in de onderzoeksgroepen (R, M en C) en 72 leerlingen buiten de onderzoeksgroepen (K).

Om bij het bepalen van effecten de storende invloed van tevoren bestaande verschillen in beheersing van basisautomatismen tegen te gaan, zijn de leerlingen voor de onderzoeksgroepen geselecteerd volgens een a-selectie toewijzingsprocedure, zodat naar verwachting groepen zouden ontstaan met een gelijk gemiddeld beheersingsniveau.

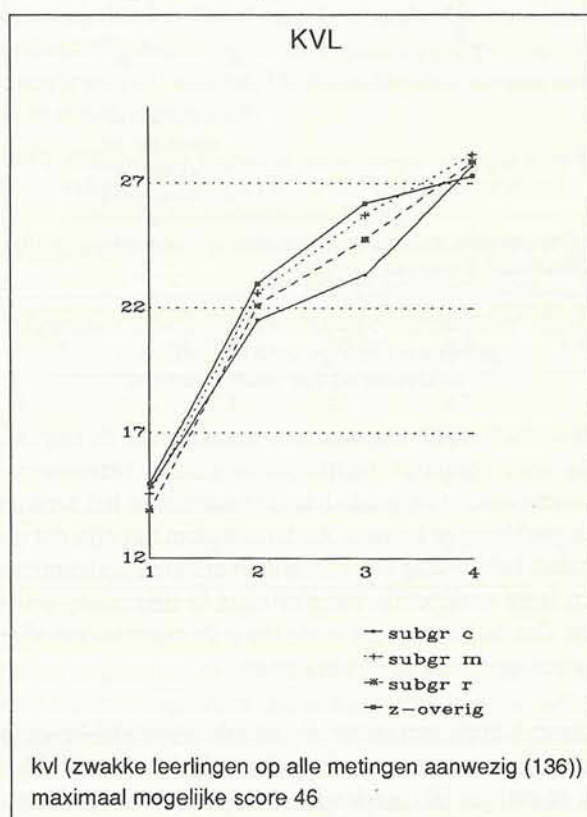
Bovendien wordt bij vergelijking van de toename in beheersing tussen twee momenten (leerwinst) de meting op het eerste moment als covariant behandeld, waardoor tevoren bestaande verschillen in beheersing, zelfs als deze gering zijn, verdisconteerd worden.

3 Resultaten

Resultaten op de tempotoets

Beheersing van basisautomatismen wordt onder meer gekenmerkt door een tijdsaspect. Om te kunnen vaststellen of er sprake is van geautomatiseerde kennis dient een rekenopgave (hoeveel is: $15 - 8$) vrijwel onmiddellijk de uitkomst (is zeven) op te roepen. Bij een klassikale vaststelling van de stand van beheersing van basisautomatismen bij het rekenen tot twintig dient derhalve een zekere tijdsdruk aanwezig te zijn bij het oplossen van de opgaven. Dit is het geval bij de tempotoets. Deze toets bestaat uit 46 opgaven.

De gemiddelde scores voor elk van de vier groepen met zwakke leerlingen, de onderzoeksgroepen R, M en C en de overige zwakke leerlingen in de klassen (K), voor de vier momenten waarop de tempotoets is afgenomen, worden in figuur 4 weergegeven.



figuur 4: tempotoets; gemiddelde scores voor onderzoeksgroepen en overige zwakke leerlingen in de klassen op vier meetmomenten

De af te lezen groei in de prestaties op de tempotoets kan het gevolg zijn van aanvullend en/of regulier onderwijs (we zullen dit in het vervolg kortweg 'leerwinst' noemen), maar ook van gewenning aan de toetsprocedure. De relatief grote vooruitgang tussen de eerste en de tweede meting (zie ook tabel 1) zou hierdoor verklaard kunnen worden. Meer aannemelijk is echter dat de hoe-

veelheid verstreken onderwijstijd, die tussen de eerste en tweede meting aanzienlijk groter was dan tussen de daaropvolgende metingen, hierop van invloed is geweest en dat ook hier sprake is van leerwinst. Wanneer gekeken wordt naar verschillen tussen groepen in toename van de toetsscores tussen twee momenten dan gelden onbedoelde versturende invloeden als gewenning aan de toetsprocedure voor alle vergeleken groepen in even sterke mate en kan een eventueel verschil in vorderingen derhalve niet daaruit verklaard worden, maar alleen uit het verschil in inhoud van het gegeven onderwijs. Verschillen in toename van toetsscores betekenen dan dus verschillen in leerwinst.

tabel 1: tempotoets; leerwinst tussen meetmomenten voor de onderzoeksgroepen en de klas (zwakke leerlingen; aanwezig op alle meetmomenten)

groep	vergeleken meetmomenten			
	2-1	3-2	3-1	4-3
R	8.2	2.7	10.9	3.0
M	8.0	3.1	11.1	2.4
C	6.7	1.8	8.5	4.4
K	8.0	3.2	11.2	1.1

Voor het vaststellen van leerwinst zijn voor alle groepen vier paarsgewijze vergelijkingen tussen meetmomenten gemaakt:

- 2-1: leerwinst in de periode tussen de beginmeting en de meting halverwege het aanvullend onderwijs;
- 3-2: leerwinst in de periode tussen de metingen halverwege en direct na afloop van het aanvullend onderwijs;
- 3-1: leerwinst in de periode tussen de beginmeting en de meting direct na afloop van het aanvullend onderwijs;
- 4-3: leerwinst (retentie) in een periode van een maand na afloop van het aanvullend onderwijs.

Voor een vergelijking van leerwinsten tussen de groepen in deze perioden staan de gemiddelde verschillen in tabel 1. De leerlingen in de twee trainingsgroepen (R en M) gaan ongeveer evenveel vooruit. Halverwege de periode waarin aanvullend onderwijs gegeven wordt is de leerwinst van deze groepen groter dan van de controlegroep (C). Direct na afloop van het aanvullend onderwijs is dit verschil nog toegenomen. De trainingsgroepen hebben een maand later opnieuw leerwinst gemaakt, maar de winst van de controlegroep is nu groter, waardoor het eerder bestaande verschil nagenoeg verdwenen is.

Om na te gaan of de verschillen in leerwinst tussen de drie onderzoeksgroepen significant zijn, zijn covariantie-analyses uitgevoerd over de resultaten bij de vier me-

tingen (covarianten: score op het eerste van de twee vergeleken meetmomenten en niet-verbale intelligentie). Daarbij bleek dat er geen significante verschillen bestaan tussen de onderzoeksgroepen. Er wordt met de tempotoets op geen van de vergeleken meetmomenten een hoofdeffect gemeten van de extra onderwijsprogramma's. Kortom: aanvullend onderwijs, gebaseerd op de principes van de vijfstructuur en het vingerrekenen, leidt niet tot een grotere leerwinst dan aanvullend onderwijs gebaseerd op mechanistische principes. Beide aanvullende programma's leiden tot een iets grotere leerwinst dan het reguliere onderwijs, maar dit verschil is niet significant, en kan derhalve op toeval berusten.

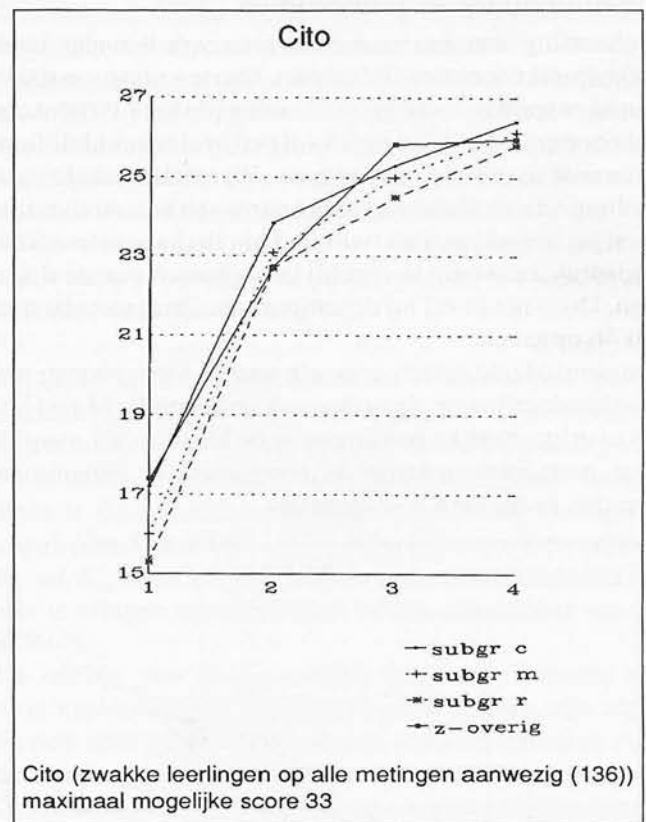
De overige zwakke leerlingen in de klassen (K) en die in de controlegroep hebben in de onderzoeksperiode alleen het rekenonderwijs in de klas gevolgd. De leerlingen uit de controlegroep hebben ook driemaal aan de individuele toets deelgenomen. Om te controleren of deelname aan individuele toetsingen de leerresultaten beïnvloedt vergelijken we de leerwinst van deze twee groepen. De leerwinst van de klas is in de eerste twee perioden groter dan van de controlegroep, maar dit verschil verdwijnt weer in de derde periode. Deelname aan individuele toetsingen lijkt niet tot betere leerresultaten te leiden.

De leerwinst van zwakke leerlingen in de klas is in de eerste twee perioden vergelijkbaar met die van de groepen die aanvullend onderwijs krijgen naast het onderwijs in de klas (M en R). Dit wijst erop dat de eerder geconstateerde grotere leerwinst voor de Trainingsgroepen in vergelijking met de controlegroep vermoedelijk op toeval berust. Na drie perioden is de leerwinst van de klas het kleinst van alle groepen (zie in tabel 1 het totaal van de laatste twee kolommen). Er is dan een duidelijker interpreteerbaar beeld ontstaan. De leerwinst van de Trainingsgroepen is het grootst en van de twee vergelijkingsgroepen het kleinst. Maar de verschillen tussen de vier groepen lijken gering. Bij toetsing met covariantie-analyses blijkt dat de leerwinst voor deze vier groepen (de drie onderzoeksgroepen en de overige zwakke leerlingen) op geen enkel moment significant verschilt. Beide aanvullende programma's leiden weliswaar tot een iets grotere leerwinst dan het reguliere onderwijs, maar dit verschil is niet significant. Er is derhalve sprake van groepen die statistisch niet aantoonbaar verschillen in toename in beheersing van basisautomatismen.

Resultaten op de contexttoets

Voor het vaststellen van de toename in beheersing van basisautomatismen is naast de tempotoets gebruik gemaakt van een toets met zogenaamde contextopgaven. Bij deze toets ontbreekt de tijdsdruk die bij de tempotoets wel aanwezig is. De toets is daarom minder geschikt voor een directe meting van de kennis van basisautomatismen. Kinderen hebben voldoende tijd om de opgaven bijvoorbeeld tellend op te lossen. Bij vrijwel alle opgaven vereist de oplossing eerst een transformatie

van contextprobleem naar wiskundig probleem en vervolgens een rekenkundige oplossing van het wiskundig probleem. De contexten worden meestal in woorden weergegeven. Sommige worden ondersteund door een plaatje of model dat past bij de probleemsituatie.



figuur 5: contexttoets; gemiddelde scores voor onderzoeksgroepen en overige zwakke leerlingen in de klassen op vier meetmomenten

Dit verbale en/of schematische karakter van de opgaven kan voor sommige leerlingen een extra belemmering vormen om tot de juiste transformatie naar het wiskundig probleem te komen. Anderzijds kan het zijn dat een grotere beheersing van basisautomatismen bijdraagt aan een beter verlopende transformatie in toepassingssituaties. Om dit laatste vast te stellen is de contexttoets afgenomen die uit 33 opgaven bestaat.

Figuur 5 geeft een overzicht van de gemiddelde scores op de contexttoets voor de onderzoeksgroepen (R, M en C) en de klas (K) op de vier momenten waarop de contexttoets afgenomen is. De onderlinge positie van de drie onderzoeksgroepen verandert niet, wel groeien ze naar elkaar toe. Kijken we voor elke groep afzonderlijk naar de scores op de vier meetmomenten dan zien we dat alle groepen geleidelijk hogere scores behalen. Net als bij de tempotoets kan de groei in de prestaties op de contexttoets het gevolg zijn van een aantal factoren. Het kan zijn dat het aanvullend of regulier onderwijs de verandering in prestaties teweeg brengt, tot leerwinst leidt. Maar ook kan het zijn dat toename in beheersing van de toetsprocedure (met name het geleidelijk door-

gronden van verbale of schematische kenmerken van de opgaven) groei in prestaties tot gevolg heeft. Dit laatste kan een verklaring zijn voor de relatief grote vooruitgang tussen de eerste en de tweede meting (tabel 2). Een meer aannemelijke verklaring is echter ook hier de hoeveelheid verstreken onderwijstijd. Tussen de eerste en tweede meting is net als bij de tempotoets aanzienlijk meer tijd verstreken dan tussen de daaropvolgende metingen.

Wanneer gekeken wordt naar verschillen tussen groepen in toename van de toetsscores tussen twee momenten dan moet een eventueel verschil in vorderingen verklaard worden uit het verschil in inhoud van het gegeven onderwijs. Verschillen in toename van toetsscores betekenen dan dus verschillen in leerwinst. Immers, andere versturende invloeden als gewenning aan de toetsprocedure gelden voor alle vergeleken groepen in even sterke mate. Voor het vaststellen van leerwinst zijn voor alle groepen dezelfde vier paarsgewijze vergelijkingen tussen meetmomenten gemaakt als bij de tempotoets. Voor een vergelijking van leerwinsten tussen de groepen in deze perioden kijken we naar de gemiddelde verschillen in tabel 2. De leerlingen in de trainingsgroepen gaan ongeveer evenveel vooruit. De controlegroep vordert minder in alle drie perioden.

tabel 2: contexttoets; leerwinst tussen meetmomenten voor de onderzoeksgroepen en de klas (zwakke leerlingen; aanwezig op alle meetmomenten)

groep	vergeleken meetmomenten			
	2-1	3-2	3-1	4-3
R	7.4	1.8	9.2	1.3
M	7.1	1.9	9.0	1.2
C	6.7	1.4	8.1	1.1
K	5.3	3.1	8.4	0.2

Om na te gaan of de verschillen in leerwinst tussen de drie onderzoeksgroepen significant zijn, zijn covariantie-analyses uitgevoerd over de resultaten bij de vier metingen. Daarbij bleek dat er geen significante verschillen bestaan tussen de onderzoeksgroepen. Er wordt met de contexttoets op geen van de vergeleken meetmomenten een hoofdeffect gemeten van de extra onderwijsprogramma's.

Kortom, over het geheel genomen zien we eenzelfde beeld als bij de tempotoets: aanvullend onderwijs, gebaseerd op de principes van de vijfstructuur en het vingerrekenen, leidt niet tot een grotere leerwinst dan aanvullend onderwijs gebaseerd op mechanistische principes. Beide aanvullende programma's leiden tot een iets grotere leerwinst dan het reguliere onderwijs, maar dit verschil is niet significant en kan derhalve op toeval berus-

ten. De overige zwakke leerlingen in de klassen en de controlegroep hebben in de onderzoeksperiode alleen het rekenonderwijs in de klas gevolgd. De leerlingen uit de controlegroep hebben ook driemaal aan de individuele toets deelgenomen. Om te controleren of deelname aan individuele toetsingen de leerresultaten beïnvloedt vergelijken we de leerwinst van deze twee groepen. De leerwinst van de klas is in de eerste periode kleiner dan die van de controlegroep, maar dit verschil verdwijnt weer in de volgende perioden. Deelname aan individuele toetsingen lijkt niet tot betere leerresultaten te leiden. Na drie perioden is de leerwinst van de klas het kleinst van alle groepen (aanvankelijk heeft deze groep de hoogste score, maar aan het eind zelfs de laagste). Er is na drie perioden een duidelijk interpreteerbaar beeld ontstaan. De leerwinst van de twee groepen die aanvullend onderwijs krijgen naast het onderwijs in de klas, is het grootst en van de groepen die alleen regulier onderwijs krijgen, het kleinst. Maar de verschillen tussen de vier groepen lijken gering. Bij toetsing met covariantie-analyses blijkt, dat de leerwinst voor deze vier groepen (de drie onderzoeksgroepen en de overige zwakke leerlingen) op geen enkel moment significant verschilt. Beide aanvullende programma's leiden weliswaar tot een iets grotere leerwinst dan het reguliere onderwijs, maar dit verschil is niet significant. Er is derhalve sprake van groepen die statistisch niet aantoonbaar verschillen in toename in beheersing van basisautomatismen binnen contextopgaven.

Resultaten op de individuele rekentoets

Inleiding

Naast de hiervoor besproken kwantitatieve effectmetingen is bij de leerlingen uit de drie onderzoeksgroepen een individuele rekentoets afgenomen, ontleend aan de opgavenseries uit de Kwantiwijzer voor leerkrachten (Van den Berg, Van Eerde en Lit, 1992a). Deze toets werd driemaal in de periode van aanvullend onderwijs afgenomen: direct voorafgaand, halverwege en direct na afloop. Bij de individuele toets is een retentiemeting achterwege gebleven. De toets bestaat uit twaalf opgaven voor het optellen en aftrekken tot twintig, die in gemakkelijk te begrijpen contexten zijn geplaatst.

Voor elke opgave wordt in een protocol vastgelegd welke uitkomst gegeven wordt, de tijd die de leerling voor de berekening nodig heeft en de wijze waarop de leerling de opgave uitrekent. Dit laatste wordt vastgesteld met behulp van observaties en door het stellen van vragen. Na afloop wordt aan de hand van het protocol per opgave bepaald:

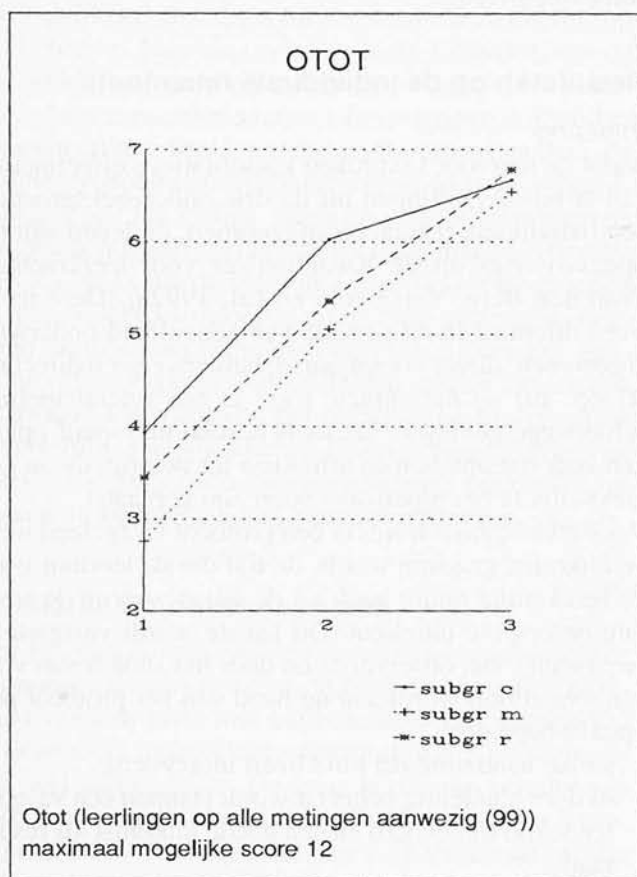
- welke handeling het kind heeft uitgevoerd;
- of deze handeling beheerst wordt (binnen een vastgelegde tijd uitgevoerd en een goede uitkomst als resultaat);
- of het om een gewenste (verkorte) handeling gaat;
- of de opgave beheerst wordt (met een gewenste han-

deling opgelost wordt die tot een snel en goed resultaat leidt; het gaat dus om een gewenste handeling die bovendien beheerst wordt).

Na codering van het protocol zijn voor de twaalf opgaven van deze kwalitatieve toets per leerling scores voor vier verschillende aspecten berekend:

- opgaven: antwoorden: het aantal goede uitkomsten;
- handelen: beheersing: het aantal opgaven dat met een beheerste handeling wordt opgelost;
- handelen: gewenstheid: het aantal opgaven waarbij een gewenste handeling wordt uitgevoerd;
- opgaven: beheersing: het aantal opgaven opgelost met een gewenste en tevens beheerste handeling.

Voor elk van deze aspecten zijn alleen de resultaten berekend van leerlingen uit de drie onderzoeksgroepen (R, M en C), die bij alle drie toetsafnamen aanwezig waren. We bespreken nu de resultaten van de beheersing van opgaven en vatten daarna de resultaten op de andere aspecten samen, omdat die nagenoeg eenzelfde beeld geven.



figuur 6: gemiddelde scores beheerste opgaven

Beheerste opgaven

Beheersing van de opgave is het meest strenge van de vier onderscheiden aspecten: de handeling moet gewenst zijn en beheerst. De gemiddelde scores voor het aantal beheerste opgaven zijn weergegeven in figuur 6. De gemiddelde scores zijn hier zoals verwacht het laagst van alle kwalitatieve aspecten. Bij de eerste meting beheersen alle zwakke leerlingen uit de onderzoeksgroepen gezamenlijk gemiddeld drie tot vier opgaven op een totaal van twaalf. Tijdens en direct na afloop van de aanvullende onderwijsprogramma's (tweede en derde meetmoment) wordt het verschil tussen de groepen geleidelijk iets kleiner. De trainingsgroepen R en M behalen bij de derde meting nagenoeg dezelfde score als de controlegroep. Kijken we voor elke groep afzonderlijk naar de scores op de drie meetmomenten dan zien we dat alle groepen geleidelijk hogere scores behalen. De leerlingen gezamenlijk beheersen bij de derde meting echter gemiddeld niet meer dan ongeveer zeven opgaven. Daarmee halen ze niet het criterium van tachtig procent overeenkomend met een score van 9.6.

Voor een vergelijking van leerwinsten tussen de groepen in de perioden waarin aanvullend onderwijs werd gegeven, kijken we naar de gemiddelde verschillen, weergegeven in tabel 3. De drie groepen maken ongeveer evenveel leerwinst tussen meting 1 en 2, waarna de trainingsgroepen doorgroeien, maar de controlegroep bijna niet. De leerlingen die met het rekenrekprogramma gewerkt hebben en vooral de leerlingen die het mechanistisch programma gevolgd hebben gaan over de gehele periode het meest vooruit, maar de verschillen met de controlegroep zijn niet groot.

tabel 3: individuele toets; leerwinst tussen meetmomenten voor beheersing van opgaven voor de onderzoeksgroepen

groep	vergeleken meetmomenten		
	2-1	3-2	3-1
R	1.9	1.4	3.3
M	2.3	1.4	3.7
C	2.1	0.7	2.8

Als er al sprake is van een effect van aanvullend onderwijs, dan is dit gering en het sterkst aanwezig voor het mechanistische programma. De covariantie-analyses over de resultaten bij de drie metingen laten zien dat er geen significante verschillen bestaan in beheersing van opgaven tussen de onderzoeksgroepen. Er wordt met de individuele toets op geen van de vergeleken meetmomenten een effect gemeten van de extra onderwijsprogramma's. Kortom: aanvullend onderwijs, gebaseerd op de principes van de vijfstructuur en het vingerrekenen, leidt ook hier niet tot een grotere leerwinst dan aanvul-

lend onderwijs gebaseerd op mechanistische principes. Beide aanvullende programma's leiden tot een iets grotere leerwinst dan het reguliere onderwijs, maar dit verschil is niet significant en kan derhalve op toeval berusten. De resultaten van de beheersing en gewenstheid van handelingen zijn op dezelfde wijze geanalyseerd als voor de beheersing van opgaven. Bij deze aspecten van het handelen leiden beide onderzoeksprogramma's eveneens tot een iets grotere leerwinst dan het reguliere onderwijs, maar ook deze verschillen zijn niet significant.

Conclusies

Uit de analyses van de scores behaald op de individuele toets blijkt, dat er op geen enkel aspect significante verschillen tussen de drie onderzoeksgroepen zijn. Alle groepen boeken leerwinst, de trainingsgroep M op alle onderscheiden aspecten van het oplossingsgedrag iets meer dan de trainingsgroep R en nog iets meer dan de controlegroep, maar de verschillen zijn gering.

We concluderen daarom dat er ook op grond van de resultaten bij de individuele toets op geen van de kwalitatieve aspecten een effect van de aanvullende onderwijsprogramma's is. Bij de eerste meting is de controlegroep altijd iets beter dan de rekenrekgroep en deze laatste groep weer beter dan de mechanistische groep. De twee groepen die extra onderwijs kregen, hebben de controlegroep bij de derde meting bijna of volledig ingehaald. Deze inhaalmanoeuvre vindt bij twee van de drie gemeten aspecten (de beheersing van het handelen en de beheersing van opgaven) plaats tussen meting 2 en 3. Hier is vermoedelijk sprake van een zekere invloed van de programma's, zij het een geringe.

Ook tussen de groepen die extra onderwijs krijgen bestaat op alle aspecten weinig verschil. Bij het begin scoort R iets hoger dan M. Dit verschil wordt weliswaar kleiner, maar blijft bestaan.

Zoals verwacht worden de gemiddelde scores lager naarmate de criteria strenger worden. Bij de derde meting zien we de volgende gemiddelde scores: gewenstheid van het handelen (gemiddelde totale groep: 8.8), beheersing van het handelen (gemiddelde totale groep: 7.7) en beheersing van de opgaven (gemiddelde totale groep 6.7). Aan het eind van groep vier blijken deze zwakke leerlingen het automatiseren nog niet onder de knie te hebben.

4 Discussie

Interpretatie van de resultaten

De resultaten van dit onderzoek laten zien dat er geen significante verschillen in leerwinst zijn tussen de leerlingen die extra onderwijs kregen met het rekenrekpro-

gramma en de leerlingen die extra onderwijs kregen met het mechanistisch programma, maar dat er wel bepaalde trends zijn waar te nemen. Een ander recent onderzoek waarbij met behulp van een computerprogramma gewerkt werd aan het automatiseren tot twintig in groep vier met (verticaal geordende) vijftallen, liet eveneens geen duidelijke leereffecten zien (Slettenhaar, 1993). Slettenhaar wijt het uitblijven van leereffecten aan het ontbreken van een inbedding van het computerprogramma in een leergang.

Betekenen deze resultaten nu dat het werken met de vijfstructuur niet waardevol is voor het proces van het leren automatiseren? En dat het rekenrek geen veerkracht heeft, die zwakke leerlingen een duwtje kan geven? Wij menen dat dit een voorbarige conclusie is. De betekenis van de gevonden resultaten moet in het licht worden gezien van de randvoorwaarden van het onderzoek die ernstige beperkingen hebben opgelegd aan de remediële context die met het rekenrekprogramma beoogd werd. Deze randvoorwaarden waren gunstiger voor het mechanistisch programma dan voor het rekenrekprogramma.

Zowel de omvang van het leerstofgebied dat behandeld werd, als de hoeveelheid extra onderwijstijd, moesten voor beide groepen constant gehouden worden. De extra lessen werden aan groepjes van drie leerlingen gegeven. Door deze groepering en door de uniformiteit in leerstof en leertijd kreeg de uitvoering van de hulpprogramma's echter meer het karakter van het onderwijs in de klas, aan de hele groep, dan van remediërend onderwijs voor zwakke leerlingen. Hierdoor en doordat er grote verschillen bestonden in snelheid waarmee leerlingen nieuwe leerstof oppikten, was voor sommige kinderen het tempo veel te hoog. Uit de lesobservaties blijkt verder, dat over de hele linie veel te weinig kon worden ingegaan op wat kinderen deden of vertelden; er was zeker geen optimale interactie mogelijk. Vooral bij het rekenrekprogramma werd dit door de trainers als een belemmering ervaren. Dit is vooral fnuikend voor de zwakste leerlingen.

Op alle scholen waar het onderzoek werd uitgevoerd wordt gewerkt met een realistische reken-wiskundemethode. Zowel inhoudelijk als didactisch gezien zijn er overeenkomsten tussen realistisch rekenonderwijs en het rekenrekprogramma. In beide wordt aandacht besteed aan meerdere oplossingsmethoden en is er sprake van een interactieve didactiek. Tijdens het onderzoek bleek op de meeste scholen echter het mechanistisch programma meer overeenkomst met het onderwijs in de klas te vertonen dan het rekenrekprogramma. Op de meeste scholen, althans op dat moment in het onderwijsleerproces, krijgt één bepaalde oplossingsmethode de meeste aandacht (die van het splitsen bij tien). Ook bleek dat voor de meeste leerlingen, tegen de verwachting in, interactief onderwijs iets geheel nieuws was. De totale onderwijstijd voor beide programma's was slechts

zes uur. Voor het rekenrekprogramma was dit te weinig. Bij het rekenrekprogramma wordt veel tijd besteed aan het leren van de getalbeelden en in relatie daarmee aan nieuwe oplossingsmethoden die met dit rek kunnen worden uitgevoerd. Met name het leren verwerven van nieuwe oplossingsstrategieën kostte veel meer tijd dan werd verondersteld.

Hierdoor is er in het rekenrekprogramma te weinig tijd voor het inslijpen van nieuwe vaardigheden. Nieuwe handelwijzen betekenen weliswaar op den duur een verkorting, maar ze zijn in het begin - voor kinderen die deze verkorte werkwijzen nog niet beheersen - nog erg onwennig. In situaties waarin kinderen gecontroleerd worden, zoals toetssituaties, vallen kinderen juist snel terug op conservatieve oplossingswijzen, waar ze op kunnen vertrouwen.

De gekozen toetsen doen onvoldoende recht aan de inhoud van het rekenrekprogramma. De onderzoekers hebben de indruk, gesteund door allerlei observaties, dat de leerlingen in de R-groep meer van het rekenrekprogramma hebben geleerd dan met de gekozen toetsen vastgesteld kon worden. Bijvoorbeeld op het gebied van het structureren van hoeveelheden en getallen, en het beschikken over verschillende oplossingsmethoden.

Uit de resultaten blijkt desondanks dat de leerlingen die extra onderwijs kregen met het rekenrek evenveel leerwinst boeken als de leerlingen die extra onderwijs kregen met het mechanistisch programma, dus evenveel profijt trekken uit het aanvullend onderwijs. Dit zou betekenen dat de prestaties van de rekenregroep relatief gezien beter zijn. Bovendien is het vermoeden gerechtvaardigd dat de rekenregroep meer van het programma geleerd heeft dan met de gebruikte toetsen gemeten kon worden.

Consequenties voor het rekenrekprogramma

Voor de uitvoering van remediërend onderwijs met het rekenrekprogramma dienen de randvoorwaarden op de volgende punten te worden bijgesteld.

Bij het inzetten van het rekenrekprogramma als remediëel middel voor het doorbreken van telstrategieën van kinderen, is het nodig om eerder met het programma te beginnen en niet te wachten tot de tweede helft van groep vier.

Zodra het programma wordt gebruikt voor remediële hulp moet dit in de klas ondersteund worden door: toepassing van nieuw verworven oplossingsmethoden zo nodig met behulp van een rekenrek, en flexibel gebruik van verschillende oplossingsmethoden. Tevens dient er aandacht besteed te worden aan de wijze waarop het kind te werk gaat om te voorkomen dat het kind in de klas toch weer telkens terugvalt op telstrategieën.

Er is meer tijd voor oefenen nodig. Dit kan ten dele tijdens de hulplesjes gebeuren maar ook op de hierboven beschreven wijze tijdens het onderwijs in de klas. Het

programma is geschikt voor groepjes leerlingen en voor individuele leerlingen. Als met groepjes wordt gewerkt moeten deze niet al te heterogeen zijn. Sommige kinderen zijn dan meer gebaat met individuele hulp.

Bij de uitvoering van het rekenrekprogramma moet steeds aangesloten worden bij individuele verschillen tussen leerlingen, uniformiteit van leerstof en tempo is uit den boze. Het programma dient flexibel te worden doorgewerkt, in die zin dat pas met een volgend onderwerp wordt doorgegaan als kinderen het voorafgaande begrijpen en kunnen toepassen. Daarnaast dienen aan het eind van het programma nog enige lessen te worden toegevoegd, omdat uit observaties in dit onderzoek bleek dat het programma voor de meeste kinderen wat te kort was.

Aanbevelingen

Bij het uitzetten van de koers voor verder onderzoek naar de waarde van het gebruik van de vijfstructuur, is het van belang in het oog te houden binnen welke context dit onderwijs plaatsvindt. De ontwikkeling van een leergang voor zwakke leerlingen, waarin gebruik van de vijfstructuur bij het structureren van hoeveelheden tot twintig centraal staat, is verder gevorderd dan ooit. Als nevenresultaat van dit onderzoek ligt er een concrete leergang waarop verder gebouwd kan worden. De resultaten van dit onderzoek geven duidelijke aanwijzingen voor inhoudelijke veranderingen die nodig zijn om zwakke leerlingen meer profijt te kunnen laten trekken van het rekenrekprogramma.

Als het gaat om het gebruik van de vijfstructuur binnen een remediële context, verdienen de omstandigheden waaronder dit plaatsvindt speciale aandacht. Deze omstandigheden kunnen op zich een thema van onderzoek zijn. We bepleiten evaluatie-onderzoek dat de oplossing van de problematiek van leerlingen en de condities waaronder die oplossing bereikt kan worden, centraal stelt. Het kan beter op tussentijdse haperingen in het onderwijsleerproces inspelen, dan onderzoek waarbij het onderwijs maar voortgaat op de tevoren vastgestelde weg en in het geplande tempo, ongeacht de tussentijdse resultaten die ermee geboekt worden. Met onderzoek in verschillende toepassingssituaties kan beter vastgesteld en gedocumenteerd worden wanneer en waar het te vlug gaat, wat ontbreekt en wanneer wat niet werkt. Kortom, goed kwalitatief onderzoek met veel voorbeelden van vorderingen van leerlingen en de omstandigheden waaronder deze al of niet bereikt worden.

Dergelijk onderzoek dient pas in laatste instantie gevolgd te worden door onderzoek waarbij de resultaten van leerlingen die met de vijfstructuur hebben leren rekenen, vergeleken worden met andere remediële programma's. Voor dergelijk onderzoek bepleiten we een evaluatie van de werkwijze van practici met deze programma's en de resultaten die daarmee behaald worden. Verder onderzoek is ook nodig naar de wijze van ge-

bruik door leerkrachten van materialen waarin het principe van de vijfstructuur is uitgewerkt voor het onderwijs aan de hele groep en de effectiviteit daarvan. Hierbij kan het gaan om complete leergangen die inmiddels in reken-wiskundemethoden verschenen zijn. Maar ook om programma's die in een bestaande methode ingevoegd worden. Dergelijk onderzoek kan aanwijzingen opleveren over de oorzaken en het moment van ontstaan van problemen bij het automatiseren en zo gebruikt worden voor een verhoging van de effectiviteit van het gebruik van remediëringsprogramma's door leerkrachten.

Noten

- 1 Summatieve evaluatie: evaluatie in een eindstadium van een vernieuwing met veel proefpersonen, een controlegroep, veel aandacht voor kwantitatieve toetsing van de afhankelijke variabele.
- 2 Formatieve evaluatie: evaluatie tijdens de eerste fasen van een vernieuwing met aandacht voor leergangontwikkeling in samenhang met theorie-ontwikkeling en intensieve onderzoeksmethoden.

Literatuur

- Berg, W. van den en H.A.A. van Eerde (1985). *Kwantiwijzer-instrumentarium, vijfde experimentele versie*. Rotterdam: Erasmus Universiteit.
- Berg, W. van den, H.A.A. van Eerde en S. Lit (1992a). *Kwantiwijzer voor Leerkrachten*. Tilburg: Zwijsen.
- Berg, W. van den en H.A.A. van Eerde (1992b). *Geef me de vijf. Een onderzoek naar de waarde van de vijfstructuur voor het leren automatiseren van de optel- en aftrekeftafels tot twintig*. Rotterdam: Erasmus Universiteit.
- Berg, W. van den en H.A.A. van Eerde (1992c). *Geef me de vijf. Bijlagen. Rekenrek-programma; hulpprogramma gebaseerd op vijfstructuur*. Rotterdam: Erasmus Universiteit.
- Buijs, K. en D. van Eerde (Red.), (1991). *Handleiding Module Tellen en rekenen tot twintig. Nascholing Zorgverbreding Speerpunt Rekenen*. 's Hertogenbosch: KPC.
- Carpenter, T.P. en J.M. Moser (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In: Lesh, R. en M. Landau (eds.). *Acquisition of mathematics concepts and Processes*. Orlando: Academic Press.
- Eerde, H.A.A. van en L.W.M. Verhoef (1978). Analyse van het optellen en aftrekken op de basisschool. *Pedagogische Studiën*, 55, 354-367.
- Erp, J.W.M. van (1989). *Het rekenmannetje. Afrekenen met problemen bij optellen en aftrekken*. Groningen: Wolters Noordhoff.
- Erp, J.W.M. van en C.F. van Parreren (1991). Een praktijkdienend onderzoek. *Tijdschrift voor orthopedagogiek*, 30(6), 305-309.
- Feijs, E. (1989/90). Ervaringen met het rekenrek. *Willem Bartjens*, 9(2), 94-100.
- Feys, R. (1990). Oerdegelijke kwadraatbeelden en modieuze rekenmannetjes. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(4), 3-19.
- Flexer, R.J. (1988). The Power of Five: the Step before the Power of Ten. *The Arithmetic Teacher*, 34(3), 5-10.
- Hatano, G. (1982). Learning to add and subtract: a Japanese perspective. In: Carpenter, T.P., J.M. Moser en T.A. Romberg (eds.). *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (1990). *Numberfacts en de rekenmethode*. Nijmegen: ORD (paper).
- Luit, J.E.H. van en C.W. Compagnie-Rietberg (1991). Afrekenen met problemen bij optellen en aftrekken: dankzij of ondanks de rekenman? *Tijdschrift voor Orthopedagogiek*, 30(1), 32-44.
- Luit, J.E.H. van en C.W. Compagnie-Rietberg (1992). De rekenman, een gestalt ter discussie. *Tijdschrift voor orthopedagogiek*, 31(1), 38-42.
- Nelissen, J.M.G. (1991). Getalbeelden als remediëring. *Tijdschrift voor orthopedagogiek*, 30(9), 369-376.
- Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills: a phenomenographic approach*. Göteborg: Acta Universitatis Goto-burgensis.
- Parreren, C.F. van (1987). Commentaar op de 'Proeve....'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 6(2), 9-14.
- Radatz, H. en W. Schipper (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.
- Siegler, R.S. en M. Robinson (1982). The development of numerical understandings. In: Reese, H.W. en L.P. Lipsitt. *Advances in child development and behavior*. New York: Academic Press.
- Slettenhaar, H.K. (1993). *Het ontwerpen en evalueren van een computerondersteunde leergang voor het automatiseren van de optel- en aftrekeftafels*. Enschede: Universiteit Twente.
- Span, B., I.M. Abbring en C.J.W. Meijer (1985). *De opvang van leerlingen met problemen in het regulier onderwijs*. 's Gravenhage: SVO.
- Thornton, C.A. (1990). Solution Strategies: Subtraction Number Facts. *Educational Studies in Mathematics*, 21(3), 241-265.
- Treffers, A. (1990/91). Rekenen tot twintig met het rekenrek. Beknopte schets van een onderwijsprogramma. *Willem Bartjens*, 10(1), 35-45.
- Treffers, A. en E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijsen.
- Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs (1987a). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (1). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 6(1), 7-28.
- Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs (1987b). Reactie op reactie. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 6(2), 21-23.
- Treffers A., E. de Moor en E. Feijs (1988/89). Het rekenrek. *Willem Bartjens*, 8(3), 151-153.
- Whitney, H. (1986/87). Verantwoord wiskundeonderwijs. *Willem Bartjens*, 6(2), 88-98.
- Wijnstra, J.H. (1988). *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool. Uitkomsten van de eerste rekenpeiling medio en einde basisonderwijs*. Arnhem: Cito.
- Yoshida, H. en K. Kuriyama (1991). Learning to count in Japanese. In: K. Durham en B. Shire (eds.). *Language in mathematical education, research and practice*. Open University Press.
- Zaslowsky, C. (1984). How Africans Count. In: Campbell, D.M. & J.C. Higgins (eds.). *Mathematics: People, Problems, Results*. Belmont: Wadsworth.