

Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool (15)

breuken (deel 1)

A. Treffers, L. Streefland, E. de Moor
Freudenthal instituut, RU Utrecht

1 Het gebruik van modellen

Bij breuken zegt het gebruik van modellen veel over de opzet van de leergang. Vandaar dat we hier het onderwerp breuken allereerst vanuit het gezichtspunt van de gebruikte modellen willen beschouwen. In een volgend artikel zullen dan enkele leergangen meer in detail worden beschreven, wat een meer praktijkgerichte beschrijving zal opleveren dan de wat schematische in deze eerste aflevering!

De meest gangbare modellen in het breukenonderwijs door alle tijden heen zijn:

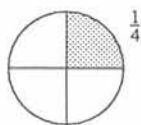
- de cirkel;
- de rechthoek;
- de strook (staaf, lijn).

We bepalen ons in deze bespreking tot de drie genoemde klassieke modellen en varianten ervan. De moeilijkheden en mogelijkheden bij het uitbeelden van breuken en het opereren ermee worden in het volgende kort uit de doeken gedaan. We doen dit in de vorm van een vraag- en antwoordspel.

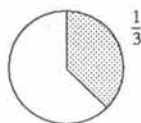
> *Wat is de waarde van de traditionele breukencirkel?*

De breukencirkel fungeert in het mechanistische rekenonderwijs als een structuurmodel van kale breuken. Breuken en cirkelsectoren worden al snel met elkaar geïdentificeerd:

$\frac{1}{4}$ is de volgende sector:



$\frac{1}{3}$ ziet er zo uit:



of eigenlijk sterker: dit is $\frac{1}{3}$.

Breuken zijn sectoren. En met die stukjes wordt vervolgens gerekend; ze staan als het ware voor de getallen die ze representeren, ze kunnen er voor ingewisseld worden. De breukencirkel is dus niet alleen een 'model van' formele breuken, maar het fungeert vervolgens ook als 'model voor' het opereren met formele breuken in het algemeen. Je gebruikt de cirkelbreuken voor het gelijknamig maken, ordenen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen - althans in aanzet daartoe. Over de problemen die zich daarbij voordoen komen we dadelijk te spreken. Maar eerst iets over de hechte verbinding tussen breuk en cirkel die uit deze methodiek voortvloeit.

Ten eerste is het gevolg daarvan dat een breuk niet zozeer met een getal als wel met een vorm van een cirkelsector wordt geassocieerd: een moedermodel waarin de eenheid steeds zichtbaar blijft. Met als consequentie dat kinderen, bijvoorbeeld bij het samenvoegen van sectoren waarvan het resultaat een wel omschreven nieuwe vorm oplevert, geen noodzaak voelen dit met een breuk te beschrijven.

Ten tweede, en daarmee samenhangend, is de 'rondheid' van de 'één' een volstrekt mysterie, althans vanuit de leerling gezien. Waarom kan in het 'gewone' rekenen die 'één' op van alles en nog wat duiden maar moet hij in de context van breuken altijd een cirkel zijn en bijgevolg een breuk steeds een cirkelsector? (Het argument van de mooie 'Gestalt' heeft alleen geldigheid voor de ontwikkelaar en de onderwijsgevende.)

Ten derde zal dit beperkte referentiekader van breuken de toepasbaarheid van breuken sterk beknootten. Want in veel situaties van eerlijk verdelen, opdelen, verhoudingsgewijs vergelijken, verkleinen en meten zal de context niet naar cirkels verwijzen. Laat staan dat de betreffende grootheden en aantallen in die situaties eenvoudigweg op het cirkelmodel zijn af te beelden of er door gerepresenteerd worden.

Kortom, het breukbegrip wordt met het cirkelmodel op zich te eenzijdig en te beperkt gevuld, hetgeen niet alleen het getalsaspect van de breuk schaadt, maar uiteraard ook de toepasbaarheid ervan.

Trouwens ook het opereren met breuken komt met de traditionele breukencirkel niet volledig tot z'n recht.

Neem bijvoorbeeld de opgaven:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}; \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{4}; \quad \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}; \quad \frac{2}{3} : \frac{1}{4}.$$

De breuk met noemer twaalf die bij de oplossing van dergelijke opgaven een cruciale rol vervult, wordt door het cirkelmodel niet eenvoudig gegenereerd. Althans niet indien de cirkel als pannekoek wordt geïnterpreteerd, wat in het traditionele rekenonderwijs het geval is. De waarde van dit pannekoekmodel is dan ook uitermate beperkt. Zoals we gezien hebben vloeit deze beperking voort uit (1) de zwakke begripsmatige vulling (2) de beperkte toepasbaarheid en (3) de wankelzinnige grondslag die het voor het opereren met breuken biedt.

In de praktijk van het mechanistische breukenonderwijs neemt dit *structuurmodel*, wat vaak ook het enige was, soms een dominante positie in. Dit onderwijs richt zich na de concrete introductie met pannekoeken echter meestal al snel op het aanleren van de rekenvoorschriften voor het opereren met kale breuken en gemengde getallen. Dit leidt vanwege de grote verscheidenheid aan algoritmen bij de verschillende operaties en vooral ook door de vele specifieke gevallen en getallen tot tal van problemen.

> *Is er plaats voor de breukencirkel in het realistische breukenonderwijs?*

In het voorgaande werd een nogal negatief beeld van de mogelijkheden van de breukencirkel geschetst. Voor het mechanistische rekenonderwijs klopte deze voorstelling van zaken, maar voor het meer realistisch gerichte rekenonderwijs beslist niet. Want het cirkelmodel kan niet alleen als pannekoek maar ook als klok fungeren. En dan openen zich ineens nieuwe vergezichten. Want de bepaling van $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, enzovoort, kan steun ondervinden van de uurverdeling op de klok (of de minutenverdeling).

Zo kunnen de vier zojuist gestelde opgaven met $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{4}$ via die ondermaat van twaalf als volgt inzichtelijk worden opgelost.

$$\left[\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}}{(8) + (3) = (11)} \right] \uparrow$$

en de andere ook zo!

$$\left[\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}}{(8) - (3) = (5)} \right] \uparrow$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \Rightarrow \left[\frac{\frac{2}{3} \text{ deel van } \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} \text{ deel van } (3) = (2)} \right] \uparrow$$

$$\left[\frac{\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = 2\frac{2}{3}}{(8) : (3) = 2\frac{2}{3}} \right] \uparrow$$

Het dominante objectkarakter van de breuken als cirkelsectoren wordt op deze manier via de verbinding met natuurlijke klokgetallen tegengegaan. Of positiever gefor-

muleerd: breuken krijgen op deze wijze niet alleen een visuele vulling maar ook een meer numerieke lading.

Toch blijven enkele eerder geuite bedenkingen tegen het cirkelmodel bestaan. Met name de beperking van breuken tot grootheden die 'rond' zijn, het eenzijdige referentiekader van de pannekoek en ook van de klok - eenzijdig gezien vanuit toepassingen wel te verstaan - en de beperking ten aanzien van het opereren met breuken (noemers) die niet mooi op twaalf of zestig passen.

Dit alles neemt echter niet weg dat het cirkelmodel ook in realistisch breukenonderwijs kan functioneren. Maar dan niet als moedermodel doch als *contextmodel* dat past bij een welomschreven set van opgaven betreffende 'ronde' grootheden als de pizza, de klok, het pleinparcours, de wielwenteling, enzovoort, die respectievelijk eerlijk verdeeld, opgedeeld, afgelegd, vergeleken en gemeten worden. Kortom: via veelzijdige probleemsituaties waarin breuken gegenereerd worden.

Indien bij voorbaat de klok in realistisch breukenonderwijs verschijnt, kan dit in de notatie van de betreffende breuken tot uitdrukking worden gebracht door die klok als zodanig te benoemen of eraan te refereren met een letter:

$$\frac{2}{3}k + \frac{1}{4}k; \frac{2}{3}k - \frac{1}{4}k; \frac{2}{3}k \times \frac{1}{4}k; \text{ (of eerst: } \frac{2}{3} \text{ deel van } \frac{1}{4}k); \frac{2}{3}k : \frac{1}{4}k \text{ (of eerst } \frac{2}{3}k \text{ opgedeeld in } \frac{1}{4}k).$$

Merk op dat op deze wijze ten eerste duidelijk wordt welke concrete breuken bedoeld worden en ten tweede hoe in deze notatie het specifieke karakter van $\frac{2}{3}$ in de verschillende operaties duidelijk tot uitdrukking komt, met name het verschil tussen optellen en vermenigvuldigen. De eerdere berekening van opgaven via ondermaten wordt daartoe nog duidelijker:

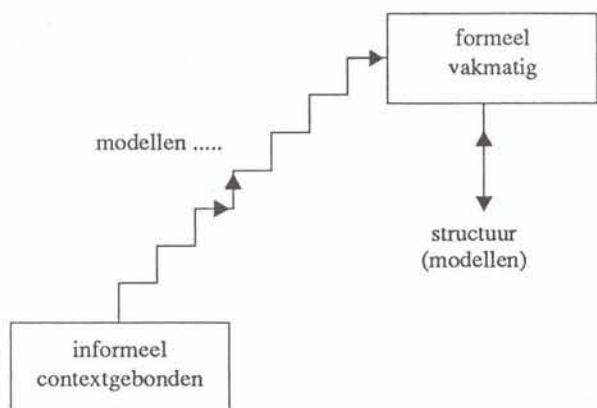
$$\left[\frac{\frac{2}{3}k + \frac{1}{4}k = \frac{11}{12}k}{(8) + (3) = (11)} \right] \uparrow$$

$$\left[\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}k = \frac{2}{12}k}{\frac{2}{3} \times (3) = (2)} \right] \uparrow$$

Maar ook als die k wordt weggelaten is dat uiteraard geen probleem indien de context (van de klok) en de betekenis van de operaties in dat verband maar duidelijk zijn.

> *Welke meer algemene elementen van de realistische breukendidactiek zijn bij de bespreking van het cirkelmodel naar voren gekomen?*

Bij de beantwoording van deze vraag kan het basisschema van het realistische reken-wiskundeonderwijs goede diensten bewijzen (fig.1).



figuur 1.: basisschema realistisch reken-wiskundeonderwijs

Realistisch reken-wiskundeonderwijs start met een breedsporige benadering van het begrip breuk. Dat wil zeggen dat leerlingen via contextproblemen met meerdere aspecten van het breukbegrip in aanraking worden gebracht - we noemden er in het voorgaande al enkele en we gaan er later nog dieper op in. Uit die contextproblemen worden vervolgens modelsituaties gekozen waaruit passende contextmodellen ontwikkeld kunnen worden ('modellen van') die als 'modellen voor' het opereren met breuken in het algemeen kunnen fungeren, plus uiteraard de toepassingen ervan. Deze contextmodellen vervullen dus de brugfunctie van het aanvankelijke, informele, contextgebonden rekenen, via verschillende tussenstadia, naar het formele, vakmatige opereren.

Wat nu uit het voorgaande duidelijk werd, is dat in de realistische didactiek geen modellen worden gebruikt die direct uit het formele systeem zijn afgeleid - de zogenoemde structuurmodellen. Maar wel modellen die uit een betekenisvolle context van probleemsituaties voortkomen, de zogenoemde contextmodellen. In het geval van het pannekoekmodel werd aangetoond welke beperkingen wiskundige structuurmodellen bezitten. Ze zijn eigenlijk alleen maar inzichtelijk voor degenen die al breukbegrip bezitten. Ook hebben we laten zien dat hetzelfde model in bepaalde toepassingssituaties weliswaar goed kan functioneren maar dan toch ook zekere beperkingen blijft houden.

Essentiële trekken van de realistische breukendidactiek kwamen al even naar voren bij:

- het benutten van ondermaten als bemiddeling tussen het breukrekenen en het rekenen met natuurlijke getallen;
- het werken met benoemde breuken, althans in een zodanige context opereren dat die benoeming helder is, waardoor breuken voor de kinderen concreter zijn en de specifieke aard van de verschillende operaties inzichtelijker wordt.

Maar over de modelsituaties en de bijbehorende contextmodellen (van en voor) die in de realistische didactiek een centrale positie innemen hebben we het nog niet gehad.

> Wat is de waarde van het traditionele rechthoeksmodel?

Het rechthoeksmodel fungeert ook in het traditionele rekenonderwijs. Maar dan meer in het didactisch vernieuwde rekenonderwijs dan in de mechanistische richting.

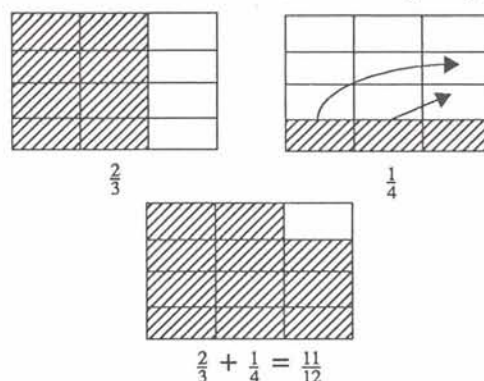
Dit model biedt wellicht meer dan de breukencirkel mogelijkheden om de basisoperaties inzichtelijk te onderbouwen; daar gaan we direct nader op in.

Toch kleven ook nadelen aan de rechthoek bij het representeren van breuken. Deze zijn van dezelfde orde als die bij de cirkel. Namelijk dat een breuk meer met een vorm (van een rechthoekje) wordt geassocieerd dan met een getal. Dat de eenheid bij breuken om één of andere mysterieuze reden rechthoekig moet zijn terwijl buiten die samenhang, dus bij het rekenen met 'gewone' getallen, zo'n rechthoekverbinding helemaal niet gelegd wordt. En dat die rechthoek een beperkt referentiekader voor breuken en toepassingssituaties biedt. Omdat daarin de werkzaamheden die breuken voortbrengen immers vaak niets met rechthoeken van doen hebben. Het is namelijk nogal lastig om breukproblemen van lineaire aard (tijd, afstand, openvolging) met een rechthoek te representeren, dus in een model te plaatsen dat niet bij de oorspronkelijke context past, er zelfs haaks op staat.

Met deze beperkende bepaling ten aanzien van het rechthoeksmodel geven we al aan dat het in de realistische didactiek niet als een moedermodel zal functioneren. Het model komt namelijk niet voort uit een breed gebied van toepassingsproblemen, het is geen dominant 'model van'. Of anders gezegd, het is te zeer aan de rechthoeksvorm gebonden en te weinig abstract getalsmatig te vatten om zo'n kernrol te kunnen vervullen. Al moet gezegd, dat het in dit opzicht toch meer mogelijkheden biedt dan de cirkel (die echter wat de herkenbaarheid van de eenheid onovertroffen is). En ook dat het ten opzichte daarvan meer te bieden heeft om de operaties inzichtelijk uit te beelden.

Het rechthoeksmodel mag dan geen moedermodel zijn, het is wel een uitermate belangrijk model, zeker ook met het oog op het voortgezette reken-wiskundeonderwijs.

We zullen het belang ervan met wat voorbeelden van de basisoperaties demonstreren. Om te beginnen maar eens met de eerder genoemde opgaven rondom $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{4}$:



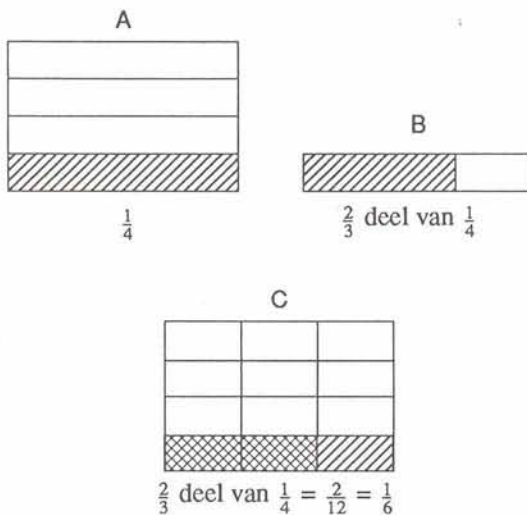
Indien $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{4}$ in één rechthoek geplaatst worden, kan dat het beste via een verticale verdeling in drieën en een horizontale in vieren. De onderverdeling van twaalf komt dan als vanzelf uit die kruising te voorschijn. Alleen moet vanwege de overlap van enkele delen wel wat herschikt worden voordat de juiste uitkomst kan worden afgelezen. Het is moeilijk die verplaatsing louter mentaal uit te voeren als de verdelingen alleen in gedachten gemaakt zijn.

Het is om die reden dat het noteren van de opgave van groot belang is: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$.

Het omzetten van de oorspronkelijke breuken in gelijkwaardige en gelijknamige wordt in het rechthoeksmodel duidelijk gevisualiseerd - dit is één van de sterke kanten van dit model. Ook bij het aftrekken bewijst het model op deze manier zijn diensten:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}.$$

Het vermenigvuldigen kan ook duidelijk worden uitgebeeld met de rechthoek, al dient gezegd dat kinderen er vaak toch veel moeite mee hebben.



Dat $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ is niet zo direct af te lezen.

Bij het delen kan de rechthoek ook enige ondersteuning bieden en de leerling naar de vraag leiden hoeveel keer drie stukjes in acht stukjes passen. Maar de hele aanloop daartoe via de verdeling van drie bij vier is niet zo vanzelfsprekend en doet misschien zelfs wat gezocht aan.

> Wat is de plaats van het rechthoeksmodel in het realistische rekenonderwijs?

Het fungeert daar niet als exclusief structuurmodel, als de concrete belichaming van abstracte breuken en het opereren ermee.

Dat wil zeggen dat het rechthoeksmodel in het realistische rekenonderwijs via contextproblemen c.q. toepassingssituaties verschijnt. Bijvoorbeeld als een reep (met ... stukjes) die eerlijk wordt verdeeld onder zoveel personen, of waarvan het zoveelste deel wordt afgehaald. Maar er zijn natuurlijk talloze andere interpretaties aan

de rechthoek te geven: schutting, grasveld, kratje, doosje, enzovoort. Men kan in zo'n rechthoek een onderverdeling (laten) maken, maar er bijvoorbeeld ook een prijskaartje aan hangen, wat het evenzeer mogelijk maakt om er via ondermaten mee te rekenen.

Eén en ander maakt het mogelijk om naast de eerder geschetste meetkundige verdeling ook een meer getalsmatig element aan de rechthoek toe te voegen. Daardoor geven we de kinderen de gelegenheid zich geleidelijk aan of zelfs abrupt los te maken van de visuele breukvoorstelling van de rechthoek.

Stel bijvoorbeeld dat de rechthoek (reep) zoveel stukjes heeft dat hij zowel in drieën als in vieren verdeeld kan worden, of zoveel kost dat deze verdelingen mooi uitkomen - we komen dan op twaalf - en krijgen:

$$\frac{\frac{2}{3}r + \frac{1}{4}r}{(8) + (3)} = \frac{\frac{11}{12}r}{(11)} \uparrow$$

(r verwijst naar rechthoek).

We krijgen dan hetzelfde verhaal als bij de klok, alleen biedt de rechthoek qua onderverdeling geen beperkingen.

We zouden bij de rechthoek gebruik willen maken van zowel de visuele component (de onderverdeling in stukjes die ontstaat) als van het getalsmatige aspect (de onderverdeling die er op geplakt wordt, of de prijs zonder daarbij het vormaspect nadrukkelijk te betrekken). De voordelen van die combinatie zijn duidelijk omdat de sterke punten van beide benaderingen gebruikt kunnen worden.

De benoeming van de breuken en het werken in ondermaten maakt het mogelijk om de formele notatiewijze via gelijknamige breuken aanvankelijk te omzeilen.

Al met al wordt er in de realistische aanpak nogal wat aan het gangbare werken met het rechthoeksmodel toegevoegd: de introductie van het model vanuit een passende contextsituatie, de toevoeging van een getal als ondermaat, het rekenen met breuken via ondermaten en niet direct via gelijkwaardige breuken, het benoemen van de breuken en het noteren ervan.

> Wat is de waarde van het lijnmodel (strook, staaf)?

De bezwaren die eerder tegen het overheersende visuele karakter van respectievelijk de cirkel en de rechthoek werden ingebracht - de identificatie van een breuk met een cirkelsector ofwel een rechthoekje - gelden niet voor het lijnmodel of strook of staaf. Immers deze modellen worden juist vanaf het aanvangsonderwijs met getallen geassocieerd. Denk bijvoorbeeld aan de Cuisenaire-staafjes, Colour-Factor-materiaal en de getallenlijn.

Beperken we ons tot de getallenlijn: het is niet meer dan logisch om de lege ruimte tussen de getallen met breuken op te vullen. Dus het breukgetal laat zich als vanzelf in dit model invoegen.

Aan de andere kant echter kan als bezwaar tegen de getallenlijn worden ingebracht dat dit model juist een duidelijk visueel objectkarakter mist: het is te homogeen, te weinig gedifferentieerd, te amorf. De sterke en zwakke punten liggen precies omgewisseld ten opzichte van de cirkel en de rechthoek (althans zoals die per traditie werden gebruikt). En aangezien het manuele en visuele element in het aanvankelijk rekenen (terecht) van overwegend belang worden geacht, verklaart dit het spaarzame gebruik van de getallenlijn in het traditionele breuken-onderwijs.

Met de breukendoos, bestaande uit een eenheidstaaf, twee halven, drie derden, vier vierden enzovoort, is inderdaad niet zo eenvoudig te zien dat bij een opgave als $\frac{2}{3}$ plus $\frac{1}{4}$, twaalfden gezocht moeten worden. En bij $\frac{1}{3}$ plus $\frac{1}{5}$ al helemaal niet, want de doos komt niet boven de twaalf uit. Toch biedt de beschrijving van staafjes in breukentaal, uitgaande van een (willekeurig) gekozen eenheid, goede onderwijsmogelijkheden. Maar, zoals gezegd, geeft het staaf- of strook- of lijnmodel weinig ondersteuning bij het opereren met breuken: de onderlinge relaties tussen de verschillende breuken zijn te weinig geleed, te ondoorzichtig.

Zeer recent echter is in de realistische breukendidactiek een nieuw lijnmodel geïntroduceerd, de zogenoemde dubbele lege getallenlijn als model voor de benoemde breuken waarmee met ondermaten gewerkt kan worden - we schreven er eerder over - en die getallenlijn heeft de genoemde nadelen niet.

De dubbele lege getallenlijn wordt op een natuurlijke manier geïntroduceerd als 'model-van' een contextprobleem en op een moment dat de kinderen al enigszins met breuken vertrouwd zijn via eerlijk verdelen, opdelen en meten van objecten, figuren en grootheden. Dus na een voorafgaande fase van begripsontwikkeling.

Die introductie gaat bijvoorbeeld als volgt:

'Karel heeft de weg naar school voor $\frac{2}{3}$ w deel afgelegd en zus Wil voor $\frac{3}{4}$ w deel. Wie is het dichtste bij de school? (De afstand naar school is twaalf km.)'



Deze opgave kan via de onderkant van de dubbele getallenlijn worden opgelost: $\frac{2}{3}w$ is acht km en $\frac{3}{4}w$ is negen km. Vervolgens kan het verschil worden bepaald - 1 km - wat later vertaald kan worden in een breuk $\frac{1}{12}w$. Gedifferentieerde werkwijzen worden opgeroepen: werken aan de bovenzijde met breuken (dus $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$ omzetten in $\frac{8}{12}$ en $\frac{9}{12}$), werken via de onderkant naar de bovenkant (dus met bemiddeling van km in dit geval) of uitsluitend aan de onderzijde, waardoor het antwoord in de ondermaat blijft staan.

Dit kan zich dus bij het ordenen, verschil bepalen en het optellen voordoen en later ook bij het vermenigvuldigen en delen, zoals eerder aangegeven bij de opgaven rondom $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{4}$.

Eerst worden de passende ondermaten gegeven, maar al snel dienen de leerlingen zelf een geschikte ondermaat te kiezen opdat de betreffende breuken mooi uitkomen, dus aan de onderzijde met natuurlijke getallen corresponderen. Dat gebeurt daarom al vlug, omdat bij het maken van eigen produkties oftewel het zelf bedenken van opgaven, de kinderen zelf ontdekken dat de breukdelen vaak niet mooi uitkomen.

Aanvankelijk sluit de context van de opgaven goed aan bij de lijnvoorstelling. En vervolgens gaat dit 'model-van' fungeren als 'model-voor' het opereren met breuken in het algemeen, dus zowel bij kale sommen als bij toepassingsopgaven. Dit is mogelijk omdat aan de bovenzijde van de dubbele lege getallenlijn een referentie naar de context van de benoemde getallen gemaakt wordt en aan de onderzijde louter op het getalsmatige aspect van de ondermaat wordt geduid. Met andere woorden: die modelfunctie kan vervuld worden omdat de dubbele lege getallenlijn in die zin abstract is dat het op het getalsmatige aspect mikt en minder op het visuele, objectmatige element.

De cirkel kan op zo'n lijn worden afgewikkeld, de stukjes van de rechthoek kunnen er achter elkaar op gezet worden, de resultaten van eerlijke verdelingen en opdelingen van grootheden en hoeveelheden kunnen erop geplaatst worden, alsmede resultaten van metingen - dat alles kan, omdat het om een getallenlijn gaat. Maar omdat het een dubbele getallenlijn is - met een 'natuurlijke' onderkant - verdwijnt het amorphe, homogene, ongedifferentieerde karakter van de traditionele strook, de staaf en de onbenoemde bovenzijde van het traditionele eenzijdige lijnmodel. Anders gezegd: door de benoeming, de ondermaat en het oorspronkelijke karakter van 'model-van een context' kan deze getallenlijn een belangrijke brugfunctie vervullen tussen het informele contextgebonden en het formele vakmatige opereren.

Dat het model van de dubbele lege getallenlijn voor alle basisoperaties kan worden ingezet, is na het voorgaande wel duidelijk - zie bijvoorbeeld wat er over de opgaven rondom $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{4}$ bij de klok werd gezegd. Daarbij moet echter speciaal wat vermenigvuldigen en delen met gemengde getallen (bijvoorbeeld $2\frac{1}{2}$) aangaat worden gezegd, dat de leerlingen naarmate de leergang vordert steeds meer aan de bovenzijde van de getallenlijn, dus met pure breuken, zullen gaan rekenen. Men kan daarbij geleidelijk aan op algemene regels aansturen. Maar het is ook mogelijk (en wat ons betreft zelfs gewenst) om het opereren inzichtelijk en visueel te blijven ondersteunen. Het schatten van de uitkomsten, zoals bijvoorbeeld $2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{3}$, is niet alleen een belangrijk doel maar ook een didactisch middel om inzichtelijk greep op gemengde getallen en breuken te houden.

Tot zover de globale aanduiding van een realistische breukenleergang.

Nu zullen nog wat detail-vragen over een dergelijke opzet worden beantwoord.

> *Bestaat niet het gevaar dat ook de dubbele lege getallenlijn als een formeel structuur-model gebruikt zal worden?*

Hij kan inderdaad als zodanig functioneren. Maar de benoeming van de grootheden zal in het algemeen toch wel een (zwakke) context-achtergrond oproepen om het opereren onder en boven de lijn betekenis te geven, want zonder die zingeving is een doelmatig gebruik van de dubbele lege getallenlijn nauwelijks mogelijk. Maar het is correct dat het model tamelijk éénsporig ingezet kan worden en dat het gebruik ervan geen realistische werkwijze hoeft te waarborgen. Doch het is evenzeer juist dat de dubbele lege getallenlijn het opereren met breuken in tal van toepassingssituaties kan ondersteunen - en zo is hij in het realistische rekenonderwijs bedoeld.

Daarin speelt hij overigens in de eerste fase van de begripsvorming en beschrijving geen overheersende rol. Integendeel, want aanvankelijk gaat het vooral om meer contextgebonden uitbeeldingen van (resultaten van) eerlijk verdelen (ook van dropveters!), opdelen, kleuren, meten ... Pas later bij het ordenen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken (kaal en in toepassingssituaties) gaat het moedermodel van de dubbele lege getallenlijn functioneren.

> *Waarom worden benoemde breuken met letters aangeduid. Geeft dat later geen problemen bij de algebra?*

Een benoemde breuk is concreter dan een onbenoemde, net zoals dat bij (on-)benoemde natuurlijke getallen het geval is in het aanvankelijk rekenonderwijs. Een breuk als $\frac{3}{4}$ roept bij kinderen de vraag op 'wat?' of 'het $\frac{3}{4}$ deel waarvan?' Aanvankelijk wordt een breuk vooral geassocieerd met 'iets breken', 'iets verdelen', 'een stuk van iets nemen'. Daarom ligt het voor de hand om dan te vragen wat gebroken, verdeeld, gemeten is of wordt, dus om de breuk te benoemen.

Die benoeming heeft tal van voordelen:

- men kan naar de betreffende grootte verwijzen, die eerst globaal in drie gelijke stukken wordt opgedeeld ($\frac{3}{3}$) waarvan er dan twee worden genomen ($\frac{2}{3}$) of in vijven verdeeld ($\frac{3}{5}$) waarvan we er vier nemen ($\frac{4}{5}$) en deze notatie steeds zo laten verwoorden;
- ook kan op dezelfde wijze een (onder-)maat van die grootte worden genomen;
- het terugvertalen van de uitkomst van het werken met ondermaten (of rechthoekstukjes en dergelijke) naar de oorspronkelijke eenheid, wordt door de benoemde notatie vergemakkelijkt. De bedoeling is duidelijker en de noodzaak om de uitkomst als breuk te noteren is helderder;
- de operaties worden doorzichtiger genoteerd, zoals bijvoorbeeld het verschil in de betekenis van $\frac{2}{3}$ bin-

nen ' $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ ' en ' $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$ ', wat niet te zien is, maar in ' $\frac{2}{3}j + \frac{1}{4}j$ ' en ' $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}j$ ' juist wel (j staat voor jaar bijvoorbeeld);

- via de benoeming kunnen de ondermaten zich op een natuurlijke wijze aanbieden:

$$\frac{2}{3}j + \frac{1}{4}j = 8 \text{ maanden} + 3 \text{ maanden} = 11 \text{ maanden} = \frac{11}{12}j; \text{ en } \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}j = \frac{2}{3} \times 3 \text{ maanden} = 1 \text{ maand} = \frac{1}{12}j.$$

Juist de verwijzing van de letters naar grootheden, die variabele ondermaten kunnen hebben, past heel goed in de algebraïsche benadering van het rekenen.

Davydov, Freudenthal en anderen hebben een dergelijk gebruik van letters in het rekenonderwijs - zij het in ander verband - gepropageerd.

Maar verwijzen de letters bij de benoemde breuken nu juist niet naar objecten in plaats van naar de hoegrootheden en hoeveelheden? Nee dat is niet het geval: ze refereren naar de hoegrootheden en de hoeveelheden van bepaalde objecten, in deze volgorde en niet omgekeerd. De toewijzing van de ondermaat, voor zover dat expliciet gebeurt, geeft die getalsmatige vulling ook uitdrukkelijk aan. Bij het zoeken naar een goed passende onderverdeling bij bepaalde breuken (bijvoorbeeld bij $\frac{2}{3}w$ plus $\frac{1}{4}w$, of $\frac{1}{3}w$ plus $\frac{2}{3}w$) krijgt de letter als variabele een concrete betekenis, terwijl bijvoorbeeld de j van jaar die hiervoor werd genoemd een standaardmaat benoemt. Verschillende gebruikswijzen van letters in de wiskunde passeren de revue.

> *Welke differentiatiemogelijkheden biedt het realistische breukenonderwijs?*

Eerst enkele opmerkingen over het traditionele breukenonderwijs. Daarin wordt vrijwel uitsluitend op doelstellingen van het formele breukrekenen gemikt. Voor meer dan de helft van de basisschoolleerlingen blijkt dit doel onhaalbaar te zijn. Voor hen is het onderwijs in breuken vrijwel zonder waarde.

Door te werken met benoemde breuken binnen context-situaties worden de differentiatie mogelijkheden sterk verruimd. In het voorgaande is daar al het één en ander over aangeduid:

- er zijn leerlingen die al snel uitsluitend 'boven de streep' werken, dus met formele breuken rekenen; anderen opereren alleen maar 'onder de streep' met ondermaten die via eenvoudig breukrekenen zijn verkregen, maar wat toch de orde van grootte van de uitkomst oplevert; weer anderen werken daar tussenin en kunnen de uitkomst van opgaven met breuken via 'corresponderen' vinden;
- er zijn leerlingen die al snel zelf passende ondermaten voor de verschillende bewerkingen zoeken, terwijl anderen wat langer met gegevens of natuurlijke onderverdelingen moeten rekenen;
- ook in de specifieke aard en de grootte van de getallen kan differentiatie worden aangebracht met name waar het gemengde getallen betreft;

- ook in toepassingsopgaven betreffende eerlijk verdelen, opdelen, vergelijken en meten kan een grote variatie worden aangebracht dat tot gedifferentieerde oplossingen, maar ook tot een gedifferentieerd onderwijsaanbod kan leiden;
- één en ander zal vooral tot uitdrukking komen in de gedifferentieerde eigen producties die kinderen maken, wat weer prachtige mogelijkheden biedt om zowel zicht op het leerproces als het onderwijsproces te krijgen;
- al met al zijn er vele mogelijkheden om kinderen op een zinvolle wijze met breuken te laten werken op aangepaste niveaus en om ze verschillende einddoelen te laten bereiken in het basisonderwijs (en later ook in het vervolgonderwijs). Dat geeft een nieuw perspectief aan het breukenonderwijs.

> Met welke andere onderwerpen dient de breukenleergang verbonden te worden?

Deze vraag is uiteraard moeilijk te beantwoorden na de slechts globale aanduiding van realistisch breukenonderwijs, maar toch kan wel enig zicht op belangrijke verbindingslijnen worden gegeven.

Allereerst de verbinding met schattend rekenen. In het voorgaande is daarom reeds opgemerkt dat schatten niet alleen een doel is maar ook een belangrijk middel om meer inzicht in het breukrekenen te geven. Om te beginnen bepalen de kinderen de breuken op de getallenlijn hoofdzakelijk schattend: $\frac{3}{5}$ van twintig, dan ga ik eerst het stuk in gedachten (hoofdknikkend) in rijen verdelen ($\frac{1}{5}$) en daarvan neem ik er drie ($\frac{3}{5}$), dus kom ik iets voorbij de helft. Berekening met ondermaten geeft vervolgens een goed checkpunt.

Daarnaast biedt het rekenen met breuken en vooral ook met gemengde getallen, vele mogelijkheden om zinvol te schatten, daarbij gebruikmakend van tal van referentiepunten en strategieën. Schatten dient daarbij mede om verkeerde rekenwijzen te bestrijden: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ kan dat $\frac{2}{5}$ zijn, dus minder dan $\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$ kan dat $6\frac{1}{4}$ zijn, als je weet dat $2 \times 3\frac{1}{2}$ al zeven 7 is; $4 : \frac{1}{2}$ kan dat twee zijn, als je je realiseert dat $\frac{1}{2}$ ook twee keer in één past?

De verbinding tussen gewone en decimale breuken kan via meten worden gelegd en wel met hetzelfde schema als de dubbele lege getallenlijn. Denk bijvoorbeeld bij de breuk $\frac{3}{4}$ eens aan $\frac{3}{4}$ m, dus benoem hem met een decimale maat.



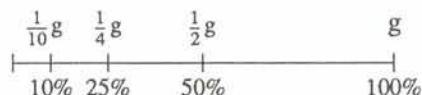
Neem als ondermaat centimeter: $\frac{3}{4}$ m = 75 cm. En vertaal dit antwoord terug naar meter, we krijgen dan 0,75 m (je kunt natuurlijk ook een ander grootheden nemen, bijvoor-

beeld geld - een gulden - of gewicht). Het opereren met breuken verloopt langs dezelfde lijnen.

$$\downarrow \quad \frac{3}{4}m + \frac{2}{5}m = 1,15m \quad \uparrow$$

$$\downarrow \quad 75cm + 40cm = 115cm \quad \uparrow$$

Eenzelfde gebruik van de dubbele getallenlijn met ondermaat honderd zien we overigens ook bij procenten.



De dubbele lege getallenlijn fungeert bij procenten als een soort procentenmeter (denk ook echt aan meter) als een elastiekje om percentages te schatten en te berekenen.

De verbinding met meten is in het voorgaande heel duidelijk naar voren gekomen. Door meten worden breuken gegenereerd en omgekeerd kunnen breuken door ze als meetgetallen op te vatten concreet worden gemaakt.

Ook de relatie met de algebra kwam reeds kort ter sprake: letters, verwijzend naar objecten in de vorm van grootheden en hoeveelheden, naar standaardmaten en naar variabele (onder-)maten.

De betrekkingen tussen breuken en verhoudingen komen op de dubbele lege getallenlijn tot uitdrukking. Toch kan het verband ertussen nog veel hechter worden gelegd - onder meer via eerlijk verdelen - dan tot nu toe beschreven is. Bij de nadere uitwerking van de verschillende leergangen, die in de volgende aflevering zal plaatsvinden, zal deze relatie uitdrukkelijk aan de orde komen bij zowel de instapfase als de toepassingen.

2 Samenvatting

De breukenproblematiek werd in het voorgaande gedemonstreerd aan de hand van een microwereld van breuken gecentreerd rond 'twaalf': de klok, een reep met twaalf stukjes, een weg van twaalf km, een route die in twaalf minuten wordt gelopen, een jaar. En wel met de opgaven $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$; $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$; $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$; $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$.

Als moedermodel fungeert de zogenoemde dubbele lege getallenlijn. De betreffende opgaven over breuken kregen daarop een benoemde plaats. We hebben laten zien dat het betrekkelijk eenvoudig is om deze opgaven via ondermaten in zo'n microwereld uit te rekenen.

Bijvoorbeeld: $\frac{2}{3}$ jaar + $\frac{1}{4}$ jaar via 8 maanden + 3 maanden naar $\frac{11}{12}$ jaar; of $\frac{2}{3}$ deel van $\frac{1}{4}$ jaar via $\frac{2}{3}$ van 3 maanden is 2 maanden is $\frac{2}{12}$ jaar ($\frac{1}{6}$ jaar); en $\frac{2}{3}$ jaar : $\frac{1}{4}$ jaar via 8 maanden : 3 maanden naar $2\frac{2}{3}$.

In de notatiewijze kan die omweg nadrukkelijk tot uitdrukking komen:



$$\left[\begin{array}{l} \frac{2}{3}j - \frac{1}{4}j = \frac{5}{12}j \\ (8) - (3) = (5) \end{array} \right. \uparrow$$

In de microwereld rondom twaalf kan de context wisselen, zoals aangeduid.

Het is echter ook van belang om uitgebreid aandacht te besteden aan het feit dat de betreffende breuken op verschillende wijzen ontstaan kunnen zijn. Zo kan bijvoorbeeld $\frac{2}{3}$ reep ontstaan zijn door twee repen eerlijk met z'n drieën te verdelen of door één reep op te delen in drie stukken en er daarvan twee te nemen of door $\frac{2}{3}$ te interpreteren als twee van de drie (stukken) of in de context van tijd als een meetgetal. Aan het opereren met breuken in de tweede fase gaat een onderwijsfase vooraf waarin het begrip breuk veelzijdig wordt gevuld, gevisualiseerd, gesymboliseerd en verwoord. Dat is de begripvormende fase.

Ná de microwereld rond bijvoorbeeld 'twaalf' dient de wereld van breuken verdergaand te worden verkend via nieuwe, passende ondermaten bij verschillende breuken, die al dan niet zijn gegeven, dan wel door de leerlingen zelf opgespoord moeten worden. Ten slotte leidt dit naar het opereren met onbenoemde breuken zonder ondermaten als hoogste einddoel (overigens slechts bereikbaar voor een deel van de leerlingen).

Tot zover de samenvatting gezien vanuit de microwereld rond 'twaalf'.

Ten slotte een overzicht van al het voorgaande over de realistische breukendidactiek met behulp van de belangrijkste steekwoorden:

- Veelsporige begripvulling van eerlijk verdelen, opdelen, verhoudingsgewijs vergelijken en meten in de eerste, begripvormende fase.
- Gebruik maken van contextgebonden visualiseringen, cirkels, rechthoeken, stroken en van de dubbele lege getallenlijn als moedermodel.
- Dit centrale contextmodel wordt geïntroduceerd als 'model-van' contextsituaties en gaat vervolgens fungeren als 'model-voor' het rekenen met kale breuken en met breuken in toepassingssituaties.
- Het basismodel met bijbehorende benoemingen en ondermaten laat gedifferentieerde werkwijzen en einddoelen toe die in meerdere of mindere mate (in-) formeel zijn.
- Er wordt aandacht besteed aan de breukentaal; de breuk wordt verwoord in termen van een verdeel-en-

neem-activiteit met betrekking tot een welomschreven grootte of hoeveelheid en als zodanig benoemd.

- Schatten en het maken van eigen produkties fungeren als belangrijke didactische middelen, maar ook als gewichtige doelen op zich.
- Mede door de benoeming en uitbeelding van de breuken op de dubbele lege getallenlijn kan nadrukkelijk de verbinding met meten, procenten, decimale breuken, verhoudingen en algebra worden gelegd.
- Al met al blijkt deze leergang in het basisschema voor realistisch reken-wiskundeonderwijs te passen (zie fig.1).

Alle aangestipte punten over structuurmodellen, contexten, modellen-'van'-'voor', symbolen, formeel opereren, toepassingen en relaties met andere gebieden passen in dit schema.

In de volgende aflevering zullen verschillende realistische leergangvarianten van breuken meer in chronologische onderwijsvolgorde worden besproken, waarbij met name dieper op de eerste fase van de begripvorming wordt ingegaan en op de derde fase van de uitloop van de leergangen. Hier kreeg de tussenfase wat meer accent teneinde de realistische benadering kort te kunnen karakteriseren.