

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (12) - verhoudingsmodellen -

A. Treffers, L. Streefland, E. de Moor
Vakgroep OW & OC, RU Utrecht

Functie en waarde van modellen

Moderne rekenmethoden maken bij het onderwerp 'verhoudingen' gebruik van modellen, zoals de tabel, de strook en de dubbele getallenlijn.

Deze dienen ertoe om de leerlingen te helpen de afstand te overbruggen tussen het informele, contextgebonden rekenen met verhoudingen en het formele, vakmatige opereren op dit terrein.

Daarbij gaat het, zoals Van den Heuvel-Panhuizen zo kort en beeldend uitdrukt¹, om:

- het vaststellen van de verhoudingsrelatie $? : ?$
- het vergelijken van verhoudingen $a : b ? c : d$
- het maken van gelijkwaardige verhoudingen $a : b = ? : ?$
- het bepalen van de vierde evenredige $a : b = c : ?$

De vraag is nu welk van de genoemde modellen het meeste perspectief biedt bij het denken en rekenen in het gebied van verhoudingen - zo er al van het best bruikbare model kan worden gesproken. En ook of er een soort didactische volgorde in het gebruik valt aan te brengen.

Als toetsstenen voor het beantwoorden van deze vragen fungeren de twee volgende overwegingen:

1. Veelzijdige modellen voor verhoudingen dienen zowel het denken over als het rekenen met verhoudingen te ondersteunen.
2. Krachtige modellen voor verhoudingen zijn in alle fasen van het onderwijs-leerproces inzetbaar, dus zowel in de eerste fase die op het informele, contextgebonden denken en rekenen aansluit, als in de laatste fase die dicht bij het formele, vakmatige opereren ligt, als ook op het brede gebied daartussen.

Laten we de belangrijkste gangbare modellen eens aan de hand van deze criteria doorlichten om daarna te beslissen welk model of welk samenstel van modellen de voorkeur verdient.

1. *Zelfbedachte modellen* en schema's van bepaalde contextsituaties van verhoudingen zijn uiteraard van cruciale betekenis, zeker bij de start van de leergang. Op termijn vormen enkele ervan ook de aangrijpingspunten voor de introductie van standaardmodellen als eerder genoemd: eerst zijn het dan 'modellen van', die later gaan fungeren als 'modellen voor'. Maar duidelijk is dat ze vanwege hun specifieke aard, zijnde contextgebonden schematiseringen over langere termijn gezien, noch veelzijdig noch krachtig genoemd kunnen worden. Ze zijn vaak te specifiek en zitten te dicht bij het informele, contextgebonden niveau om die kwalificaties te verdienen.
2. De *verhoudingstabel* neemt in alle moderne methoden en leergangen een centrale positie in. Is het een veelzijdig en krachtig model?

Over de veelzijdigheid ervan valt het volgende op te merken: de tabel is vooral een rekenmodel, hij functioneert uitsluitend op het formeel-symbolische niveau en is als zodanig in de eerste fase van het onderwijs minder geschikt als denkmodel, later daarentegen is het wel een zeer geschikt hulpmiddel.

Eén en ander blijkt uit onderzoek. Zwakkere leerlingen kunnen aanvankelijk nogal moeilijk de verbinding leggen tussen enerzijds de getallen uit de tabel en de betreffende getallen in de contextsituatie anderzijds. Met het gevolg dat die kinderen formalistisch met

symbolen uit de tabel gaan manipuleren en dan rekenregels overtreden, getallen op onjuiste wijze interpreteren, blind algoritmisch opereren en zo meer.

En wat de kracht van het model betreft: het kan inderdaad in verschillende fasen functioneren, juist omdat de tabel vele verkortingen en rekenwijzen mogelijk maakt.

Al met al kan van de verhoudingstabel dus worden vastgesteld dat het een belangrijk model is - krachtig maar wel tamelijk eenzijdig op het rekenen gericht en in de eerste fase van het onderwijs daarom minder geschikt.

3. De *strook* is als model daar sterk waar de tabel zwak is, en omgekeerd. Anders gezegd: de strook is vooral een denkmodel en niet zozeer een rekenmodel. Dat wil zeggen dat hij heel natuurlijk functioneert bij het voorstellen van de probleemsituatie, maar minder bij het ondersteunen van het technische rekenen. Nog anders gesteld: de strook helpt vaak heel goed bij het mentaal voorstellen van de probleemsituatie en het globaal schatten van de gevraagde relatie, verhouding of evenredige, maar niet bij het precieze berekenen ervan.

Ook hier luidt de slotsom: een belangrijk model - krachtig maar wel tamelijk eenzijdig op het globaal doordenken van de verhoudingsrelatie gericht.

4. De *dubbele getallenlijn* kan als een soort combinatie van de tabel en de strook worden beschouwd en heeft als zodanig dan ook de kenmerken van zowel denkmodel als rekenmodel. Kortom, het is in principe een veelzijdig model; eerst een 'model van' een specifieke contextsituatie, later een algemeen 'model voor' verhoudingen.

Het kan daarnaast ook een krachtig model zijn indien we de *lege variant* nemen. In de eerste fase vullen de leerlingen het model vrijwel volledig, later kunnen ze daarop alle mogelijke bekortingen aanbrengen - in principe dezelfde bekortingen als in het werken met de tabel, zij het dat deze nu wat duidelijker visueel worden ondersteund.

Kortom: in eerste instantie kan de lege dubbele getallenlijn als veelzijdig en krachtig didactisch model worden aanbevolen, en in tweede instantie kan, desgewenst, de verhoudingstabel in het onderwijs-leerproces worden betrokken. Contextgebonden schema's en modellen, maar vooral ook stroken kunnen voorafgaande aan de lege dubbele getallenlijn en ter introductie ervan worden benut. En later kan de dubbele getallenlijn als het ware worden opgeklapt tot een assenkruis waarmee de verhoudingsrelatie in een (lineaire) grafiek kan worden gezet.

Verkortingen bij lege dubbele getallenlijn

Gelet op het voorgaande zullen we ons in het volgende hoofdzakelijk tot de lege dubbele getallenlijn kunnen bepalen. Want de verkortingen op dit model gelden onverkort voor het rekenen in de verhoudingstabel en met het strokenmodel.

Eerst iets over het onverkort rekenen met verhoudingen. We bepalen ons daartoe tot het maken van (gelijkwaardige) verhoudingen ($a : b = ? : ?$) en het bepalen van de vierde evenredige ($a : b = c : ?$). Het vergelijken van verhoudingen ($a : b ? c : d$) stellen we later aan de orde als de verbinding tussen verhoudingen en breuken ter sprake komt. Onverkort rekenen met verhoudingen op de lege dubbele getallenlijn betekent dat de lege getallenlijn wordt gevuld. Dat wil zeggen, gevuld met getallenparen in het gebied tussen de gegeven en de gevraagde getallenparen, en soms ook daarbuiten, als het ware stap-voor-stap.



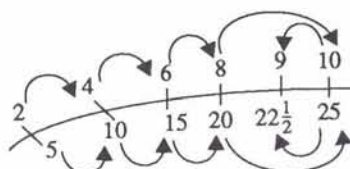
figuur 1

Verkorting vindt plaats indien grotere stappen genomen worden om van het gegeven naar het gevraagde te komen. Bijvoorbeeld door met dubbelen, halveringen, stappen van tien, tientallen en zo meer te rekenen, in combinatie met kleine begin- of eindstappen. Dergelijke ver-

kortingen kunnen in meerdere of mindere mate plaatsvinden. De beslissende verkorting bij het bepalen van de vierde evenredige is de toepassing van de zogeheten regel-van-drie. Stel men moet bij een verhouding $2 : 5 = 9 : ?$ berekenen wat er op de plaats van het vraagteken moet staan. Men zou dan met behulp van de lege dubbele getallenlijn op verschillende manieren te werk kunnen gaan (fig.1).

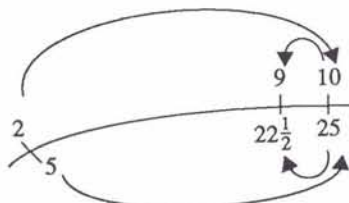
Even afgezien van de context, of beter gezegd in de puur rekenkundige setting van $2 : 5 = 9 : ?$, zou deze opgave opgelost kunnen worden:

- onverkort, dus met alle mogelijke tussenstappen via (fig.2):



figuur 2

- verkort als volgt (fig.3), of via varianten van deze rekenwijze:



figuur 3

- of met de regel van drie, volgens de redenering: ik krijg steeds het ‘onderste’ getal door het bijbehorende bovenste getal met $\frac{5}{2}$ (of $2\frac{1}{2}$) te vermenigvuldigen; dus is het gevraagde getal $\frac{5}{2} \times 9 = 22\frac{1}{2}$.

De laatstgenoemde methode is technisch gezien pas hanteerbaar indien leerlingen met breuken kunnen vermenigvuldigen, of in ieder geval een breuk maal een geheel getal kunnen uitrekenen. En ze is qua inzicht gebaseerd op het zien van de vermenigvuldigingsrelaties tussen en binnen de getallenparen. Het is duidelijk dat we met deze methode in de laatste fase van de leergang zitten, zowel qua denken als rekenen. De kinderen moeten, anders gezegd, het *machientje* kunnen vinden dat de betreffende verhoudingsgetallen produceert en vervolgens met dit machientje kunnen rekenen. Waarmee we tevens een nieuw model hebben opgespoord dat in de laatste fase van het onderwijs-leerproces kan functioneren in samenhang met de lege dubbele getallenlijn en vooral ook de verhoudingstabel.

Het vinden van het machine-voorschrift en het berekenen van een paargetal kan nu apart worden geoefend. Desgewenst kan men daarbij (nog formeler) ook gebruik maken van *pijldiagrammen*.

Maar bij het uitstippelen van de leergang zorgt men uiteraard dat aanvankelijk alleen maar eenvoudige relaties tussen gehele getallen aan de orde komen waarmee vooral het verkorten van de rekenwijzen beoefend en geoefend wordt, te beginnen bij de tafels.

Vervolgens kan men bij de wat moeilijker gevallen volstaan met het beredeneerd laten schatten van de uitkomst, waarbij verschillende verkortingsstrategieën gecombineerd kunnen worden. En pas dan duiken breuken op - eerst makkelijke redeneer- en rekengevallen en uitkomsten, en later moeilijkere.

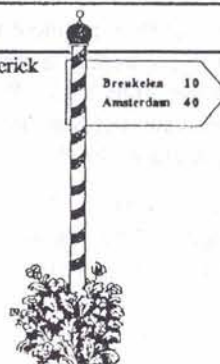
verhoudingsrelatie vaststellen

niet-numeriek



... hoeveel keer zo klein is de pen op de foto?

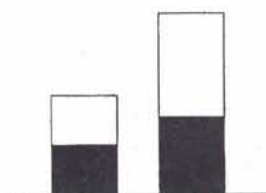
numeriek



... hoeveel keer zo ver is Amsterdam?

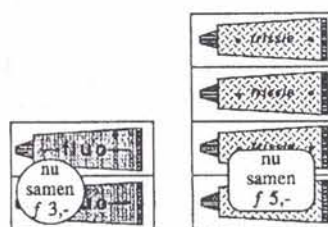
verhoudingen vergelijken

niet-numeriek



... welke limonade wordt het zoetst?

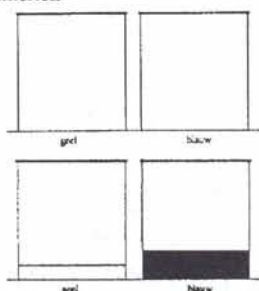
numeriek



... welke tandpasta kost het minst per tube?

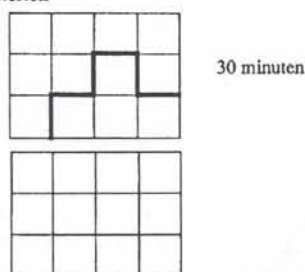
gelijkwaardige verhoudingen produceren

niet-numeriek



... maak nog veel meer van die groene verf?

numeriek



... teken een andere wandeling... hoe lang duurt die?

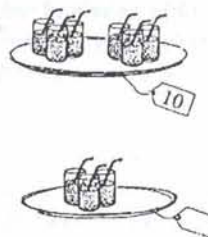
vierde evenredige vinden

niet-numeriek



... teken het lieveheersbeestje

numeriek



... wat kosten drie glazen limonade?

figuur 4: Voorbeelden (uit een interne publikatie van M. van den Heuvel-Panhuizen)

Zoals gezegd kan in al deze fasen de lege dubbele getallenlijn steun bieden vanwege het feit dat hij niet alleen getsymbolen maar ook grootheden (lengtes, afstanden) afbeeldt en uitbeeldt, wat de verhoudingstabel niet kan. Wel kan de verhoudingstabel 'ordelijk' worden ingevuld, zonder metriek weliswaar, maar met naar grootte geordende getallen, onderin en bovenin de tabel. En zo benutten de kinderen de tabel aanvankelijk ook: ze hebben daar blijkbaar behoefte aan. Welnu, de getallenlijn voldoet ook aan die behoefte en geeft daarenboven nog steun 'op maat'. Vandaar dat hij vooral ook in de eerste fase veel houvast biedt.

Nuancering omtrent modellen

In het voorgaande zijn visuele en formele modellen besproken. Maar wat op de achtergrond bleef waren de contextproblemen waarop ze betrokken zijn. En het is vooral de *combinatie* van zo'n contextprobleem als modelsituatie met het model van de lege dubbele getallenlijn, of de strook, of de verhoudingstabel, of het machientje die de leerling op den duur van het informele, contextgebonden niveau naar het niveau van het formele vakmatige rekenen met verhoudingen kan brengen.

In een vorige aflevering hebben we laten zien welke categorieën er zoal onderscheiden kunnen worden: zoveel-per-zoveel, inwisselen, mengen, grootheden samenstellen in vele contexten. Sommige ervan kan men als modelsituaties laten fungeren om het model van de lege dubbele getallenlijn (of een ander model) te introduceren - bijvoorbeeld afstand-tijdproblemen. Andere zullen voornamelijk in de sfeer van toepassingen worden gebruikt. En dan via wisselende aanbiedingsvormen, met wisselende moeilijkheidsgraad van getallen, in wisselende contexten, met verschillende vraagstellingen (vraagtekens) - ook daarover schreven we eerder (en zie ook het commentaar van Van den Heuvel-Panhuizen, (fig.4, pag.36).

Over wisseling gesproken: in de geschetste globale leerlijn met behulp van de lege dubbele getallenlijn zal vooral ook een enorme verscheidenheid aan oplossingswijzen binnen één groep naar voren komen. Het werken met de lege dubbele getallenlijn en trouwens ook de tabel laat die differentiatie niet alleen toe, maar lokt die zelfs uit. Wat met zich meebrengt dat binnen zekere grenzen volstaan kan worden met een gelijk onderwijsaanbod van opgaven die dan vervolgens op verschillende niveaus van schematisering en verkorting worden verwerkt - net zoals bij de leergang van de staartdeling bijvoorbeeld.

Verhoudingen in breder verband

Het vergelijken van verhoudingen hebben we tot nu toe nog laten liggen ($a : b ? c : d$). Men kan daartoe de lege dubbele getallenlijn gebruiken. Er wordt dan bijvoorbeeld nagegaan of men van het paar (a, b) naar het paar (c, d) kan komen. Lukt dat, dan zijn de betreffende verhoudingswaarden gelijk. Gaat het niet, dan zijn ze ongelijk; dat wil zeggen, dan is de ene waarde groter of kleiner dan de andere.

Toch is zo'n aanpak hier niet erg voor de hand liggend. Zeker niet indien de leerlingen dan al met breuken, kommagetallen en procenten kunnen rekenen. Ook zijn informele werkwijzen mogelijk, zoals bijvoorbeeld die van de maatverfijning of van de vergroting van de betreffende waarden. Wat betekent dat niet $a : b$ en $c : d$ worden vergeleken, maar bijvoorbeeld $1000a : b$ met $1000c : d$, iets wat vaak makkelijk gaat. Hoe het zij, net als bij het eerder besprokene blijkt dat er een nauwe verbinding bestaat tussen verhoudingen en onderwerpen als breuken, kommagetallen en procenten. Wat tot gevolg heeft dat met name bij het vergelijken van verhoudingen verschillende oplossingswegen bewandeld kunnen worden.

Later, bij de behandeling van procenten, zal blijken dat deze zowel via verhoudingen als via breuken benaderd kunnen worden. Dus ook daar is de samenhang met de genoemde leergang zonneklaar.

De kernvraag is nu of deze leergangen van meet af aan geïntegreerd zouden moeten worden of dat het didactisch wenselijker zou zijn ze eerst gescheiden te laten verlopen en de verbinding pas later te leggen.

We zullen hier geen goed gefundeerd antwoord op deze vraag geven. Maar zeker is wel dat op een gegeven moment de relaties nadrukkelijk gelegd zullen moeten worden, waarbij percentages als gestandaardiseerde verhoudingen in ieder geval wat later aan bod komen. En dat kan ook makkelijk, eenvoudigweg omdat elementaire contextproblemen op verschillende manieren worden opgelost. Neem bijvoorbeeld de volgende opgave:

‘Wie heeft er gelijk?

In de klas van Josien hebben 19 van de 30 kinderen een zwemdiploma. In de klas van Joost hebben 14 van de 21 kinderen een zwemdiploma. Josien vindt dat haar klas beter is in zwemmen dan de klas van Joost. Maar Joost is het daar niet mee eens.

Wie heeft er gelijk? Waarom?’

Deze opgave wordt op tientallen manieren (goed of fout) opgelost via:

- verhoudingen;
- procenten;
- breuken;
- kommagetallen.

Dat maakt het mogelijk om relaties te leggen tussen bijvoorbeeld breuken en kommagetallen, kommagetallen en procenten, procenten en verhoudingen. Duidelijk is in ieder geval dat in dit soort vraagstukken het rekenen met verhoudingen via de lege dubbele getallenlijn, en in mindere mate de verhoudingstabel, niet voor de hand ligt.

De oplossing met breuken (in de klas van Joost heeft tweederde deel een diploma en bij Josien is dat iets minder) of met een kommabreuk annex percentages ligt hier meer voor de hand, maar dit terzijde.

Afsluiting

Er zijn verschillende bruikbare modellen voor verhoudingen. In het begin van de leergang is het strokenmodel zeer geschikt en ook de lege dubbele getallenlijn; in het vervolg voldoet die getallenlijn evenzeer met daarnaast ook de verhoudingstabel en het machientje.

De lege dubbele getallenlijn is vooral goed inzetbaar bij:

- het vaststellen van (gelijkwaardige) verhoudingen;
- het schatten of berekenen van de vierde evenredige.

Dit model kan het inzicht in (gelijkwaardige) verhoudingen bevorderen, de structuur van het rekenen met verhoudingen verduidelijken, het technische rekenen bevorderen en daarmee ook de toepasbaarheid. Zoals gezegd kan de lege dubbele getallenlijn in verschillende fasen op verschillende niveaus worden gebruikt. De verhoudingstabel heeft deze kenmerken ook, maar dan in het wat verder gevorderde leerproces.

De genoemde modellen zijn modellen *voor* verhoudingen. Maar voordat ze als zodanig kunnen functioneren zullen ze eerst ontwikkeld moeten worden - ontwikkeld door de leerlingen zelf als modellen *van* een specifiek contextprobleem. Wat betekent dat zo’n startprobleem zo gekozen moet worden dat het op een natuurlijke wijze naar de gewenste modellering leidt. In het geval van de dubbele getallenlijn zal een dergelijke modelsituatie bijvoorbeeld betrekking kunnen hebben op een afstand-tijdprobleem. Waarbij de schematisering van de weg tot de getallenlijn leidt, die ‘dubbel’ wordt indien getallenparen bij punten worden genoteerd. Kortom, het model *van* zo’n situatie (een modelsituatie) wordt dan later, zoals gezegd, tot een algemeen model *voor* verhoudingen.

Maar toch niet zo algemeen dat alle soorten verhoudingsvraagstukken ermee opgelost zouden moeten (kunnen) worden. Met name voor het vergelijken van verhoudingswaarden ($a : b ? c : d$) zijn vaak andere strategieën geschikt, binnen of buiten het gebied van verhoudingen - dus bijvoorbeeld via breuken, kommagetallen of procenten, naast de verhoudings-aanpak.

In de leerlijn voor verhoudingen kunnen tal van variabelen over aanbiedingsvorm, vraagstelling, context en dergelijke worden betrokken. Lettend op de rekenkant zijn de grootte van de

getallen, hun onderlinge verhouding en het feit of er al dan geen breuken in het spel zijn van essentiële betekenis. En ook of het gaat om precies berekenen of schatten. De mate van verkorting van de berekening is een belangrijke procesvariabele. Eerst komen vooral de basisvaardigheden met gehele getallen en later pas de moeilijker gevallen met ongeveer-rekenen en precies rekenen middels breuken.

Ook bij het rekenen met procenten kan de lege dubbele getallenlijn een belangrijke functie vervullen. Uiteraard, want procenten kunnen als verhoudingen worden opgevat. Maar daarover een volgender keer.

Wat we nu van u vragen is te reageren op deze tamelijk algemene beschouwing waarin de lege dubbele getallenlijn centraal kwam te staan. We meenden van talrijke concrete illustraties te mogen afzien, ten eerste om het zicht op de kern niet onduidelijk te maken en ten tweede niet omdat in de voorgaande afleveringen talrijke voorbeelden werden aangeboden.² Ook de genoemde modellen kwamen eerder ter sprake, waardoor ook de toelichting ervan tot het uiterste bekort kon worden.

Noten

1. Heuvel-Panhuizen, M. van den: Lijn in verhoudingen, *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 9(2), pag.21-27.
2. Zie voorgaande afleveringen van het tijdschrift en wel de artikelen onder de kop van *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool*.