

Blik op de basis

Een literatuurstudie naar
basisvaardigheden rekenen-wiskunde



Colofon

© 2024 Expertisepunt Rekenen-Wiskunde <https://exprw.nl/>

Creative Commons licentie CC BY-NC-SA 4.0

Auteurs: Paul Drijvers (UU) & Anne Heemskerk (UU). Met medewerking van Peter Boon (UU), Johan Brons (SLO), Jaccoline Klein-van 't Noordende (SLO), Peter Kop (UL), Filip Moons (UU) en Marc van Zanten (SLO).

INHOUDSOPGAVE

Samenvatting	5
1 Probleemstelling en werkwijze	7
1.1 Wat is het probleem?	7
1.2 Werkwijze	7
2 Resultaten.....	9
2.1 Globale karakterisering van de literatuur	9
2.2 Basisvaardigheden als procedurele operaties.....	11
2.3 Basisvaardigheden van hogere orde	12
2.4 Basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis	15
2.5 Basisvaardigheden als gecijferdheid	17
3 Conclusies en aanbevelingen	21
3.1 Conclusies	21
3.2 Beleidsaanbevelingen.....	22
Referenties	23

SAMENVATTING

In Nederland leven er zorgen over de kwaliteit van het onderwijs als het gaat om de beheersing van basisvaardigheden. De resultaten van onze leerlingen in internationale vergelijkende studies en nationale peilingsonderzoeken laten te wensen over en lijken een dalende trend te vertonen. Daarom heeft het ministerie van OCW het masterplan basisvaardigheden in gang gezet, dat zich richt op taal, rekenen-wiskunde, burgerschap en digitale geletterdheid (OCW, 2022). Voor rekenen-wiskunde is echter niet duidelijk wat die basisvaardigheden precies inhouden. Daarom is de centrale vraag in dit rapport: Welke verschillende interpretaties van basisvaardigheden rekenen-wiskunde komen naar voren in de internationale onderzoeksliteratuur? Om deze vraag te onderzoeken is een literatuurstudie uitgevoerd. Deze resulteerde in een corpus van 49 artikelen, die zijn ingedeeld in vier perspectieven: basisvaardigheden als procedurele operaties, basisvaardigheden van hogere orde, basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis en basisvaardigheden als gecijferdheid.

Als eerste perspectief gaat het bij *Basisvaardigheden als procedurele operaties* om de kijk op basisvaardigheden als procedurele en geautomatiseerde basisbewerkingen. De resultaten van de literatuurstudie zijn dat er zeker recent weinig gepubliceerd is over basisvaardigheden in de zin van procedurele kennis. Kennelijk staat deze kijk op basisvaardigheden niet centraal in het huidige onderwijsonderzoek naar basisvaardigheden rekenen-wiskunde.

Het tweede perspectief, dat van *Basisvaardigheden van hogere orde* betreft de kijk op basisvaardigheden als hogere-orde vaardigheden zoals probleemoplossen, modelleren, interpreteren en redeneren, die belangrijker worden nu de procedurele basisvaardigheden in toenemende mate worden uitbesteed aan digitale technologie. In de literatuurstudie worden overstijgende competenties zoals probleemoplossen en modelleren veel genoemd. Aandacht hiervoor zien we terug in competentiemodellen zoals die van Kilpatrick et al. (2001) en Niss en Hojgaard (2019). Deze interpretatie van basisvaardigheden wijkt sterk af van de eerste kijk van basisoperaties en procedurele vlotheid.

Het derde perspectief betreft de kijk op *Basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis*, die elkaar nodig hebben en versterken. In de gevonden literatuur worden procedurele en conceptuele kennis en vaardigheden als twee kanten van de medaille van wiskundige competentie beschouwd. Star (2005) benadrukt dat de procedurele vaardigheid niet per se oppervlakkig is, zoals conceptuele kennis niet per definitie diep is. Over de beste didactische aanpak wat betreft de volgorde, *skills-first* of *concepts-first*, is geen consensus in de literatuur. Gepleit wordt voor een iteratieve aanpak, waarin beide vaardigheden elkaar afwisselen en waarin een conceptuele insteek het startpunt vormt (Rittle-Johnson, 2019).

Het vierde perspectief, dat van *Basisvaardigheden als gecijferdheid* (in het Engels *numeracy*), ook wel wiskundige geletterdheid (*mathematical literacy*) genoemd, betreft de wiskundige vaardigheden die voorwaardelijk zijn voor burgers om te functioneren in vervolgonderwijs, beroep en maatschappij. Gecijferdheid omvat de procedurele en conceptuele kennis die je nodig hebt voor functionele toepassing in situaties uit het leven. In de onderzoeksliteratuur blijkt dit de dominante

invulling te zijn van het begrip basisvaardigheid bij rekenen-wiskunde. Gecijferdheid heeft nauwe banden met burgerschap, statistische geletterdheid en digitale geletterdheid. De belangrijkste basisvaardigheid van reken-wiskundeonderwijs is in deze literatuur de gecijferdheid, die nodig is om leerlingen toe te rusten voor het functioneren in de maatschappij.

Een eerste conclusie die we uit deze literatuurstudie kunnen trekken is dat de vier perspectieven – basisvaardigheden als procedurele operaties, basisvaardigheden van hogere orde, basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis en basisvaardigheden als gecijferdheid – een goede weergave vormen van de gevonden literatuur. Deze perspectieven zijn alle vier van belang. Wel is de verdeling over de categorieën scheef: er zijn weinig publicaties die primair over procedurele operaties of over hogere-orde vaardigheden gaan en de accenten zijn in de loop van de tijd verschoven. Ten tweede zien we consensus over het feit dat basisvaardigheden een subtiel en gebalanceerd samenspel vormen tussen procedurele vlotheid, basisvaardigheden van hogere orde en conceptueel inzicht. De derde en belangrijkste conclusie is dat gecijferdheid – of wiskundige geletterdheid – verreweg de meeste aandacht krijgt in de onderzoeksliteratuur rond basisvaardigheden rekenen-wiskunde. Kennelijk wordt dit beschouwd als de belangrijkste basisvaardigheid bij rekenen-wiskunde. De taak voor het onderwijs in basisvaardigheden rekenen-wiskunde is dan ook om leerlijnen te ontwerpen die de gecijferdheid bevorderen van leerlingen van verschillende leeftijden en schooltypen als voorbereiding op vervolgonderwijs, beroep en functioneren in de samenleving.

Op basis van deze conclusies doen we de volgende beleidsaanbevelingen:

1. *Beperk de interpretatie van basisvaardigheden rekenen-wiskunde niet tot procedurele vaardigheden, maar stel de ontwikkeling van gecijferdheid centraal.*
Basisvaardigheden rekenen-wiskunde vormen een breed palet van kennis, vaardigheden en inzichten dat meer behelst dan procedurele vlotheid en die samenkomen in het begrip gecijferdheid. De concept-kerndoelen en examenprogramma's bieden goede aanknopingspunten voor deze interpretatie.
2. *Verbind basisvaardigheden rekenen-wiskunde met andere basisvaardigheden.*
Gecijferdheid richt zich op het functioneren in een maatschappij waarin technologie een steeds grotere rol speelt. Daarom is werken aan gecijferdheid ook werken aan basisvaardigheden zoals burgerschap en digitale geletterdheid. Tevens liggen er binnen andere schoolvakken mogelijkheden om aandacht te besteden aan gecijferdheid.
3. *Overweeg meer gedetailleerde invulling van curricula per jaarlaag en schooltype.*
Om te garanderen dat basisvaardigheden en gecijferdheid als leerdoelen voldoende aandacht krijgen, verdient het aanbeveling om behalve kerndoelen en examenprogramma's ook specifieke leerlijnen per leerjaar en per schooltype te ontwikkelen. Zo worden leerlingen goed voorbereid op vervolgonderwijs, beroep en burgerschap, en hebben docenten, toetsontwikkelaars en methodeauteurs houvast om aan de gestelde doelen te werken.
4. *Borg de onderwijstijd voor basisvaardigheden rekenen-wiskunde.*
Gelet op het belang van gecijferdheid als basisvaardigheid rekenen-wiskunde is het noodzakelijk om de onderwijstijd voor rekenen-wiskunde te borgen. Onvoldoende onderwijstijd leidt tot leerlingen die onvoldoende gecijferd zijn. Ook vraagt dit om ruimte voor de professionalisering voor docenten.

1 PROBLEEMSTELLING EN WERKWIJZE

1.1 Wat is het probleem?

In Nederland leven er zorgen over de kwaliteit van het onderwijs als het gaat om de beheersing van basisvaardigheden. De resultaten van onze leerlingen in internationale vergelijkende studies en nationale peilingsonderzoeken laten te wensen over en lijken een dalende trend te vertonen, terwijl beheersing van basisvaardigheden voorwaardelijk is voor het functioneren in het vervolgonderwijs, het beroep en de maatschappij. Daarom heeft het ministerie van OCW het zogeheten masterplan basisvaardigheden in gang gezet, dat zich richt op taal, rekenen-wiskunde, burgerschap en digitale geletterdheid (OCW, 2022). Voor rekenen-wiskunde is de vraag wat die basisvaardigheden precies inhouden waarop het onderwijs zich zou moeten richten. Deze kennis is voorwaardelijk voor de ontwikkeling van adequate leerlijnen (Kop, 2024).

Hoewel de vraag is in hoeverre de basisvaardigheden rekenen-wiskunde inderdaad een dalende trend vertonen (Buys, in druk; Hickendorff et al., 2018), verdient de beheersing van basisvaardigheden constante aandacht. Wat basisvaardigheden rekenen-wiskunde zijn is niet alleen in Nederland onderwerp van onderzoek. Daarom is de centrale vraag in dit rapport: Welke verschillende interpretaties van basisvaardigheden rekenen-wiskunde komen naar voren in de internationale onderzoeksliteratuur?

1.2 Werkwijze

Om de hierboven geformuleerde vraag te onderzoeken is eerst een oriënterende raadpleging van internationale experts uitgevoerd. Middels een online vragenlijst zijn 48 experts op het gebied van onderzoek van wiskundeonderwijs en curriculumontwikkeling benaderd, van wie 29 hebben gereageerd. De responses kwamen uit 17 verschillende landen en vormen interessante bronnen voor vergelijkend curriculumonderzoek. In dit rapport zijn de resultaten hiervan gebruikt om de terminologie voor het zoeken van literatuur te bepalen. Vervolgens is de zoekopdracht geformuleerd, waarin verschillende termen rond basisvaardigheden zijn opgenomen:

```
("basic skill*") OR ("basic compentenc*") OR ("numeracy") OR ("mathematical litera*") OR ("basic math*") OR ("basic litera*") OR ("math* skill*") OR ("math* fluen*") OR ("fundamental math*") OR ("math* proficien*") OR ("procedural know*")) AND (("math* education") OR ("math* teaching") OR ("math* learning"))
```

Met deze zoekopdracht zijn in het voorjaar van 2024 vier veelgebruikte literatuurdatabases doorzocht: Scopus, Web of Science, ERIC en PsycInfo. Daarbij is gefilterd op Engelse taal en zijn alleen peer-reviewed publicaties meegenomen. Na het verwijderen van doublures leidde dit tot 3279 publicaties.

Binnen dit literatuurcorpus hebben we publicaties geselecteerd met behulp van het AI-programma ASReview¹. Dit programma stelde op basis van een korte training steeds een artikel voor dat mogelijk relevant is. Op basis van titel en abstract bevestigden of verwierpen we die relevantie. Het inclusie criterium daarvoor was dat het abstract duidelijk maakt dat het artikel bij kan dragen aan

¹ <https://asreview.nl/>

het beantwoorden van onze vraag over de betekenis en invulling van basisvaardigheden bij rekenen-wiskunde. Exclusiecriteria waren bijvoorbeeld dat de publicatie volgens het abstract een specifiek onderwerp of doelgroep betrof, zoals toetsing, de lerarenopleiding of het volwassenenonderwijs. Na elke acceptatie of verwerping deed de software een nieuwe suggestie. Zodra we een serie van 100 artikelen voorgesteld kregen die we als niet relevant beoordeelden, is het selectieproces gestopt. Zo'n lange serie suggereert namelijk dat er geen relevante artikelen meer zijn. In totaal werden 427 artikelen voorgesteld, wat resulteerde in een corpus van 58 artikelen. Van deze 58 artikelen bleken er enkele onvindbaar te zijn of dubbel, waardoor uiteindelijk 49 artikelen zijn opgenomen in deze literatuurstudie.

Op basis van eerste lezing en van onze kennis van de literatuur hebben we deze artikelen ingedeeld in vier perspectieven:

1. Basisvaardigheden als procedurele operaties
Dit betreft de kijk op basisvaardigheden als procedurele en geautomatiseerde basisbewerkingen. Dit is de opvatting die van oudsher het denken over basisvaardigheden overheerst.
2. Basisvaardigheden van hogere orde
Dit betreft de kijk op basisvaardigheden als hogere-orde vaardigheden zoals probleemoplossen, modelleren, interpreteren en redeneren, ingegeven door het idee dat de tegenwoordige tijd vanwege de technologische ontwikkelingen beroep doet op een ander type basisvaardigheden.
3. Basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis
Dit betreft de kijk op basisvaardigheden als het samengaan van procedurele en conceptuele kennis, die elkaar nodig hebben en versterken. Daarmee verbindt dit perspectief de eerste twee categorieën met elkaar.
4. Basisvaardigheden als gecijferdheid
Dit betreft de kijk op basisvaardigheden als de vaardigheden die burgers nodig hebben om te functioneren in de maatschappij, in het vervolgonderwijs en in een beroep. Het gaat om procedurele en conceptuele kennis die voorbereidt op de concrete situaties waarin ze kunnen worden toegepast. Naast gecijferdheid wordt ook de term wiskundige geletterdheid gebruikt.

Deze indeling vormt de leidraad van de analyse en van deze rapportage. Natuurlijk zijn er veel publicaties die meer dan één categorie betreffen; in die gevallen is gekozen voor de categorie waarop het artikel de meeste nadruk legt. Vervolgens is de literatuur per categorie bestudeerd en samengevat in een narratieve synthese.

Deze aanpak kent enkele methodologische beperkingen. Op de eerste plaats zou de gehanteerde zoekopdracht, uitgevoerd in het voorjaar van 2024, nu al meer resultaten geven. Ook zou een iets anders geformuleerde zoekopdracht tot andere bronnen leiden. Belangrijker is dat voor een betrekkelijk smalle insteek is gekozen: termen met betrekking tot doelen van reken-wiskundeonderwijs, curriculumontwikkelingen en onderwijsbeleid zijn in de zoekopdracht niet meegenomen. Verder is het selectieproces met het AI-pakket ASReview gevoelig voor de trainingsartikelen en voor een eventuele bias bij de beoordelaars. Deze laatste risico's hebben we ondervangen door als trainingsartikelen alleen onomstreden en bekende bronnen te gebruiken en door het selectieproces met twee onderzoekers samen uit te voeren.

2 RESULTATEN

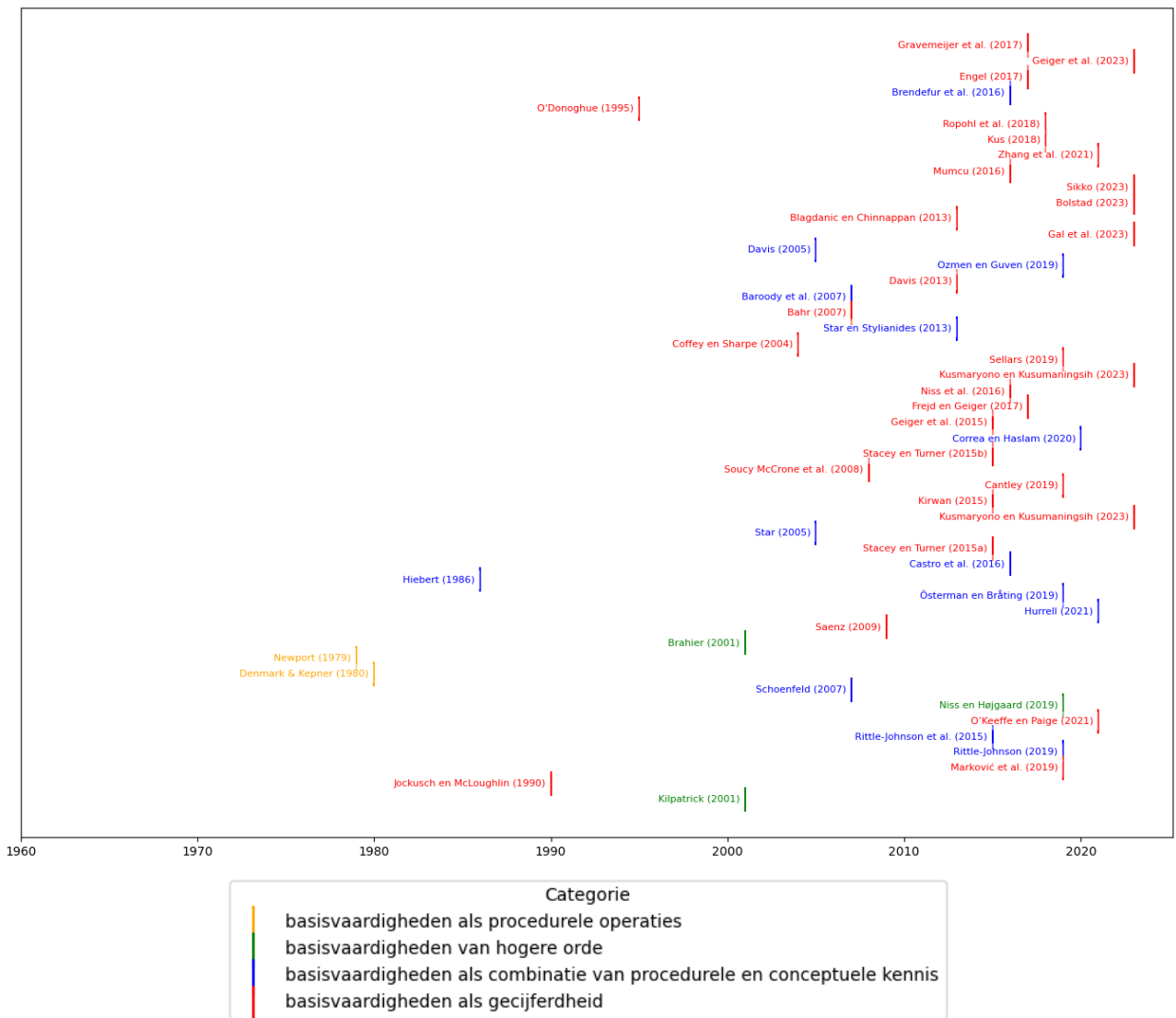
2.1 Globale karakterisering van de literatuur

De 49 publicaties uit deze studie hebben we ingedeeld in de vier genoemde perspectieven. Tabel 1 geeft de frequentieverdeling weer. Wat daarbij in het oog springt, is de scheve verdeling. Slechts enkele van de gevonden publicaties focussen op basisvaardigheden als procedurele operaties en hetzelfde geldt voor de basisvaardigheden van hogere orde. De nadruk in de gevonden literatuur ligt sterk op gecijferdheid als basisvaardigheid. Dit wordt mede veroorzaakt door de internationale vergelijkende PISA studies van OECD, die gecijferdheid nadrukkelijk tot uitgangspunt hebben genomen en waarover veel is gepubliceerd. Waarom er zo weinig literatuur gericht is op basisvaardigheden als procedurele kennis weten we niet. Het lijkt erop dat dit aspect van basisvaardigheden weinig belangstelling heeft in de onderzoeksgemeenschap. Ook hadden we meer publicaties verwacht rond de basisvaardigheden van hogere orde, die immers in internationale curriculumontwikkelingen sterk in de aandacht staan.

Tabel 1. Verdeling van de 49 publicaties over de vier categorieën

Perspectief	Frequentie
Basisvaardigheden als procedurele operaties	2
Basisvaardigheden van hogere orde	3
Basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis	14
Basisvaardigheden als gecijferdheid	30
Totaal	49

Ten tweede blijkt ons literatuurcorpus vrij divers te zijn. De publicatiejaren variëren van 1979 tot 2023 en de artikelen komen uit het hele bereik van hoogaangeschreven wetenschappelijke tijdschriften tot praktijkgeïntereerde tijdschriften voor leraren. De herkomst van de publicaties is divers – al zijn de VS sterk vertegenwoordigd. Figuur 1 laat zien dat de verdeling van de vier categorieën over de publicatiejaren ook scheef is: globaal gesproken zijn de bronnen over basisoperaties ouder dan die over hogere-orde vaardigheden en over de procedurele en conceptuele kennis. De publicaties over gecijferdheid zijn overwegend van recentere datum.



Figuur 1 Verdeling van de categorieën publicaties over de publicatiejaren

2.2 Basisvaardigheden als procedurele operaties

In dit eerste perspectief worden basisvaardigheden rekenen-wiskunde verstaan als de vaardigheden om basisbewerkingen zoals optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen te kunnen uitvoeren. Het idee is dat deze basisbewerkingen – en later in de leerlijn ook algebraïsche operaties zoals haakjes wegwerken en vergelijkingen oplossen – vlot, routinematig en geautomatiseerd met pen en papier of uit het hoofd worden uitgevoerd. Ook feitenkennis speelt een rol, bijvoorbeeld van de tafels voor vermenigvuldiging. In deze optiek zijn basisvaardigheden rekenen-wiskunde dus de vaardigheid om procedures uit te voeren en rekenfeiten te kennen, wat vraagt om de nodige oefening. In het model van Kilpatrick en collega's (2001) voor wiskundige bekwaamheid wordt hiervoor de term procedurele vlotheid gebruikt (*procedural fluency*, zie Figuur 2).

Wat zegt deze literatuurstudie over deze kijk op basisvaardigheden? Opvallend weinig: onze zoekopdracht en selectie heeft slechts twee artikelen opgeleverd waarin procedurele vaardigheid de hoofdrol speelt, die bovendien beide niet recent zijn. De eerste, de studie van Denmark en Kepner (1980), betreft een vragenlijstonderzoek onder ruim 1200 wiskundeleraren in de VS. De centrale vraag was wat deze docenten onder basisvaardigheden verstaan. Behalve elementaire rekenoperaties worden hier ook complexere operaties genoemd. Kennelijk was er ook toen al ruimte voor een bredere interpretatie van het begrip basisvaardigheid. Saillant detail is dat 53% van de respondenten stelt dat de leerlingen de basisvaardigheden minder goed beheersen dan vroeger. Dat geluid is dus niet uniek voor de huidige tijd.

Het tweede artikel over procedurele kennis (Newport, 1979) is eveneens sceptisch over het niveau van beheersing van basisvaardigheden, maar hanteert een beperkter perspectief. Het niveau zou lijden onder de veranderende onderwijspraktijken en gehanteerde didactiek, maar deze uitspraken worden niet onderzoeksmatig onderbouwd.

Er is meer literatuur over procedurele basisvaardigheden in samenhang met andere aspecten van basisvaardigheid rekenen-wiskunde. Star (2005) benadrukt bijvoorbeeld het belang van procedurele kennis en bestrijdt het beeld dat dat alleen maar oppervlakkige kennis zou zijn. Hij pleit voor aandacht voor diepe procedurele kennis, zoals het kiezen van een geschikte procedure. Meer hierover in de paragraaf over de verhouding tussen conceptuele en procedurele kennis.

Samengevat blijkt uit de literatuurstudie dat er weinig gepubliceerd is over basisvaardigheden in de zin van procedurele kennis. Naar de reden hiervan is het gissen: is dit onderwerp academisch gezien niet interessant? Weten we er al genoeg van af? Zijn andere aspecten van basisvaardigheid van groter belang? Mogelijk is de wereldwijde trend om basisvaardigheden in toenemende mate te zien als meeromvattend dan procedurele kennis hier debet aan. Daarom gaan we in de volgende paragraaf nader in op basisvaardigheden van hogere orde.

2.3 Basisvaardigheden van hogere orde

De vorige paragraaf betreft basisvaardigheden in de zin van procedurele kennis. Een tweede en meer recente kijk op basisvaardigheden is die van hogere orde. Uitgangspunt is dat functioneren in samenleving en beroep niet zozeer vraagt om procedurele vaardigheid, waarvoor we immers digitaal gereedschap hebben, maar eerder om weten wanneer en waarvoor je welke basisbewerkingen kunt gebruiken en wat de resultaten betekenen. Vanuit dit perspectief maken de technologische ontwikkelingen dat het doel van reken-wiskundeonderwijs het hogere-orde denken is. Denk aan vaardigheden zoals probleemoplossen, modelleren, toepassen en abstraheren. Het gaat om kennis die je flexibel kunt inzetten voor taken die het uitvoeren van procedures ontstijgen. In dit perspectief zijn de basisvaardigheden van morgen van hogere orde dan die van gisteren.

De term 'hogere orde' is gebaseerd op het 'higher-order thinking' zoals gebruikt in de taxonomie van Bloom (zie bijvoorbeeld Anderson & Krathwohl, 2001). We hanteren dit hier met enige reserve omdat het een hiërarchie suggereert, waar we in de volgende paragraaf zullen zien dat procedurele en conceptuele vaardigheden samengaan. Toch sluiten we hier bij de internationale terminologie aan.

In het literatuurcorpus van deze studie komen basisvaardigheden van hogere orde in een beperkt aantal artikelen expliciet aan de orde. Als eerste noemen we de bijdrage van Kilpatrick (2001) waarin een model van wiskundige bekwaamheid wordt beschreven dat vijf componenten omvat (zie ook Kilpatrick et al., 2001):

- *Conceptueel inzicht* – begrip van wiskundige concepten, operaties en relaties.
Een leerling ziet bijvoorbeeld meteen in dat je bij een korting van 20% de oude prijs door 5 moet delen om de korting te berekenen.
- *Procedurele vlotheid* – vaardigheid om procedures flexibel, accuraat, efficiënt en in geschikte situaties uit te voeren.
Een leerling kent bijvoorbeeld de tafels voor vermenigvuldigen uit het hoofd en kan een uitdrukking als $3x + 2y - x + 5y$ snel en foutloos herschrijven tot $2x + 7y$.
- *Strategisch vermogen* – competentie om problemen wiskundig te formuleren, te representeren en op te lossen.
Een leerling ziet bijvoorbeeld hoe een verhoudingstabel kan worden gebruikt om een recept voor vier personen aan te passen voor zeven personen.
- *Adaptief redeneren* – vermogen tot logisch denken, reflecteren, uitleggen en verantwoorden.
Een leerling krijgt 640 m^2 als antwoord bij het berekenen van de oppervlakte van een appartement en realiseert zich dat dat onwaarschijnlijk groot is. Dit is aanleiding om alles toch nog eens na te rekenen.
- *Productieve dispositie* – neiging om wiskunde te zien als betekenisvol, nuttig en waardevol, met een vertrouwen in volharding en eigen doeltreffendheid.
De leerling heeft bijvoorbeeld het gevoel dat vaardigheid in rekenen-wiskunde van pas komt en heeft het vertrouwen om een onbekende opgave aan te pakken.

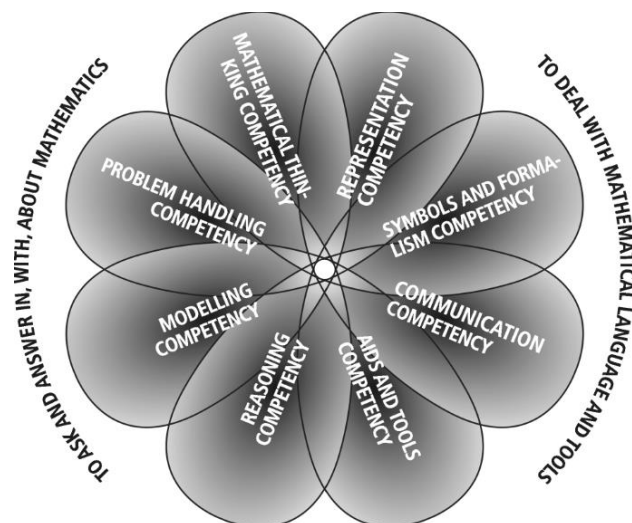
De procedurele basisvaardigheden die in de vorige paragraaf aan de orde zijn gekomen vallen in de tweede component. Nieuw is echter de nadruk op het wiskundig denken van hogere orde in de eerste, derde en vierde component. De vijfde component heeft betrekking op de attitude ten aanzien van rekenen-wiskunde. Kilpatrick en collega's benadrukken dat deze vijf niet op zichzelf

staan, maar sterk met elkaar verweven zijn. Ze vormen samen de ‘strengen van de kabel’ van wiskundige bekwaamheid (zie Figuur 2). In de nieuwe concept-kerndoelen en concept-examenprogramma’s in Nederland zien we de laatste drie strengen terug als denk-werkwijzen, wiskundige (denk)activiteiten en wiskundige attitude.



Figuur 2. Het model voor wiskundige bekwaamheid van Kilpatrick et al. (2001)

Een tweede artikel in deze categorie door Niss en Hojgaard (2019) bespreekt het model voor wiskundige competentie dat ten grondslag ligt aan de wiskundecurricula in Denemarken (zie ook Niss, 2003). Wiskundige competentie wordt opgevat als iets dat uitstijgt boven de specifieke wiskundige onderwerpen en dat gemeenschappelijk is in alle wiskunde die je doet. In het zogeheten KOM-model wordt wiskundige competentie weergegeven in de vorm van een bloem met acht blaadjes: wiskundig denken, probleemoplossen, modelleren, redeneren, tools gebruiken, communiceren, symbolen en formalismen gebruiken, en representeren (Figuur 3). Procedurele kennis zit in verschillende van de bloemblaadjes, zoals *problem handling competence* en *symbols and formalism competence*, maar heeft geen eigen aparte plaats in het model.



Figuur 3. Het Deense KOM-competentiemodel (Niss & Hojgaard, 2019)

Vergelijkbare competentiemodellen vinden we in andere landen, zoals de Common Core State Standards in de VS en het driedimensionale competentiemodel in Duitsland, bestaande uit (1) procescompetenties, zeg maar onze wiskundige denkactiviteiten of denk-werkwijzen, (2) inhoudscompetenties, zeg maar de gebruikelijke vakdomeinen, en (3) een taxonomie naar type

activiteit, bestaande uit reproductie, samenhang zien, en generaliseren/reflecteren (SSKKLBD, 2022). Deze modellen worden wellicht uitgebreider beschreven in curriculumdocumenten dan in de wetenschappelijke literatuur, wat zou verklaren waarom ze minder in ons literatuurcorpus voorkomen en meer in de oriënterende expertraadpleging die aan de literatuurstudie voorafging.

Ook in een aantal andere publicaties uit ons corpus wordt gepleit voor een hogere-orde interpretatie van basisvaardigheden bij rekenen-wiskunde. Zo benadrukken Osterman en Brating (2019) het belang van probleemoplossen en pleit Brahier (2001) voor inzicht, toepassing en betekenis. In de context van het onderwijs in *civic statistics*, zeg maar statistiek ten behoeve van kritisch burgerschap, noemen Gal et al. (2023) vaardigheden zoals kritisch denken, het vermogen om statistische bevindingen effectief te communiceren, het interpreteren van statistische informatie binnen de bredere wereldcontext en het kritisch evalueren van statistische informatie en argumenten.

Samengevat komt in de literatuurstudie een aantal bronnen naar voren die basisvaardigheden rekenen-wiskunde opvatten als overstijgende competenties van hogere orde, met probleemoplossen als meest genoemde voorbeeld. Aandacht voor deze competenties zien we in sterkere mate terug in curriculumdocumenten die we hebben verzameld via de expertraadpleging maar die geen deel uitmaken van het literatuurcorpus. Deze interpretatie van basisvaardigheden als overstijgende conceptuele competenties wijkt af van de eerder besproken interpretatie in termen van basisoperaties en procedurele vlotheid. In de volgende paragraaf gaan we in op de relatie tussen de procedurele en conceptuele blik.

2.4 Basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis

In de voorgaande paragrafen is de literatuur besproken vanuit twee invalshoeken: basisvaardigheden als procedurele basisoperaties en basisvaardigheden als hogere-orde basisvaardigheden zoals probleemoplossen. Het derde perspectief benadrukt de relatie tussen procedurele en conceptuele kennis en vaardigheid.

Een geschikt vertrekpunt is de veel geciteerde publicatie van Hiebert en Lefevre (1986). Deze auteurs omschrijven conceptuele kennis als kennis die rijk is aan verbindingen, aan relaties. Kennis wordt gezien als een netwerk, een web van connecties tussen losse stukjes informatie. Conceptuele kennis kan worden verworven door betekenisvol leren, wat door de auteurs wordt beschreven als het proces waarbij relaties worden gecreëerd tussen wat de leerling al weet en de nieuwe informatie die wordt aangeboden. Door connecties te maken met de voorkennis en context te bieden aan nieuwe begrippen, wordt nieuwe informatie effectief geïntegreerd in het kennisnetwerk van de leerling. Procedurele kennis is kennis van regels, procedures en algoritmes, en van het gebruik van de formele symbolen en wiskundetaal die daarbij komt kijken. Dit type kennis kan worden verworven door betekenisvol leren, maar ook door 'rote learning,' zeg maar door oefenen, herhalen, automatiseren en memoriseren. Hiebert en Lefevre stellen dat de twee soorten kennis met elkaar verweven zijn en niet zonder elkaar kunnen bestaan: procedures maken conceptuele kennis concreet en zonder kennis van de conceptuele achtergrond kun je procedures minder goed onthouden of flexibel gebruiken. Je kunt dus niet competent zijn in wiskunde als je niet beide tot op zekere hoogte beheerst. In lijn hiermee stelt Schoenfeld (2007) dat er een balans moet worden gezocht tussen procedurele vlotheid en probleemoplossende vaardigheid omdat wiskundige vaardigheid beide omvat. Correa en Haslam (2020) doen concrete voorstellen voor hoe dergelijke wiskundige vaardigheid getoetst zou kunnen worden.

De uitgangspunten van Hiebert en Lefevre hebben behalve waardering ook kritiek geoogst. Star (2005) benadrukt dat de terminologie niet helder is afgebakend. Hij stelt dat het onderscheid procedureel – conceptueel betrekking kan hebben op het type kennis maar ook op de kwaliteit van de kennis. In de discussie loopt dit vaak door elkaar. Als procedurele en conceptuele kennis gezien wordt als kwaliteit, dan wordt volgens Star vaak gesuggereerd dat procedurele kennis oppervlakkig is en conceptuele kennis diep. Mede door deze interpretatie of minstens connotatie krijgt procedurele kennis de laatste decennia weinig aandacht in de onderzoeksliteratuur (wat spoort met de opbrengst van deze literatuurstudie). Star (2005) – en later Star en Stylianides (2013) en Baroody et al. (2007) – stelt dat diepe procedurele kennis net zo goed bestaat als oppervlakkige conceptuele kennis. Het verstandig kiezen van een efficiënte strategie bij procedures zoals het oplossen van vergelijkingen is een voorbeeld van diepe procedurele kennis. Hij pleit dan ook voor meer aandacht voor en onderzoek naar diepe procedurele kennis.

Conceptuele en procedurele kennis zijn moeilijk te (onder)scheiden. Bijvoorbeeld verwijst Kieran (2013, niet in de literatuurselectie) naar twee voorbeelden afkomstig uit Rittle-Johnson en Star (2009, idem) waarin het ene wordt gelabeld als conceptuele kennis (Figuur 4 links) en het andere als procedurele (Figuur 4 rechts). In beide gevallen lijkt het echter te gaan om inzicht in de globale structuur van de vergelijkingen.

Conceptual Knowledge	Procedural Flexibility
Here are two equations: $98 = 21x$ $98 + 2(x + 1) = 21x + 2(x + 1)$ (a) Look at this pair of equations. Without solving the equations, decide if these equations are equivalent (have the same answer), (b) Explain your reasoning.	$5(x + 3) + 6 = 5(x + 3) + 2x$ $6 = 2x$ (a) What step did the student use to get from the first line to the second line? (b) Do you think that this is a good way to start this problem? (c) Explain your reasoning.

Figuur 4. Conceptuele en procedurele kennis kunnen veel op elkaar lijken (Kieran, 2013, p. 168)

Een belangrijke rol in het bereiken van consensus over de relatie tussen conceptuele en procedurele kennis speelt het werk van Rittle-Johnson (2019). In aansluiting op een eerdere publicatie (Rittle-Johnson et al., 2015) is het uitgangspunt dat conceptuele en procedurele kennis even belangrijk zijn en wederzijds afhankelijk zijn: conceptuele kennis kan helpen bij het bedenken, selecteren en correct uitvoeren van (probleemoplossende) procedures, terwijl het oefenen van procedures weer kan bijdragen aan de ontwikkeling en verdieping van begrip van concepten. De relatie tussen die twee is geen eenrichtingsverkeer; eerder gaat het om een tweezijdige en iteratieve relatie, omdat het een dus een beroep doet op het ander en andersom.

Wat betekent dit voor het onderwijs? Rittle-Johnson (2019) stelt dat er algemene consensus is dat instructie die alleen focust op procedurele kennis in plaats van ook op conceptuele kennis niet voldoende is, omdat veel studenten hierdoor niet genoeg conceptuele kennis ontwikkelen. Ze pleit voor een iteratieve benadering, die er op neerkomt dat een korte concept-gerichte insteek geschikt is om vooraf te gaan aan het ontwikkelen van procedurele vaardigheid, waarna de conceptuele kennis weer kan worden uitgebouwd. Er lijkt wat meer evidentie te zijn voor het nut van een korte 'concept first' insteek dan voor een 'eerst oefenen dan begrijpen' benadering. Het gevaar van *skills-first* is dat aan het conceptuele weinig meer wordt toegekomen en dat leerlingen hun motivatie voor het conceptuele verliezen doordat ze 'al weten hoe het moet' (Hurrell, 2021; Rittle-Johnson, 2019).

Sindsdien is een aantal studies gepubliceerd die deze ideeën uitwerken, bijvoorbeeld voor het geval van statistische kennis (Ozmen & Guven, 2019), in een historische context plaatsen (Osterman & Brating, 2019), samenvatten en concretiseren voor de onderwijspraktijk (Castro et al., 2016; Davis, 2005; Hurrell, 2021), of ingaan op het toetsen van conceptueel inzicht (Brendefur et al., 2016). Tot wezenlijk nieuwe inzichten hebben deze studies niet geleid.

Samengevat blijkt uit de gevonden literatuur dat procedurele en conceptuele kennis en vaardigheden twee kanten van de medaille van wiskundige competentie zijn die niet los van elkaar staan en wederzijds afhankelijk zijn. Het is dus niet *skills versus understanding* maar *skills and understanding*. Het idee dat procedurele vaardigheid oppervlakkig is en conceptuele kennis diep schiet te kort, omdat beide oppervlakkig en diep kunnen zijn. Over de beste didactische aanpak wat betreft de volgorde, *skills-first* of *concepts-first*, is er geen consensus in de literatuur. Gepleit wordt voor een iteratieve aanpak, waarin beide vaardigheden elkaar afwisselen en elkaar bevorderen en waarbij begonnen wordt met een conceptuele insteek.

2.5 Basisvaardigheden als gecijferdheid

Basisvaardigheden rekenen-wiskunde kunnen dus worden opgevat als procedurele operaties of als vaardigheden van hogere orde. Procedurele en conceptuele kennis gaan hand in hand en vormen samen de basis. De vierde kijk op basisvaardigheden, die van gecijferdheid of wiskundige geletterdheid, stelt deze procedurele en conceptuele kennis nadrukkelijk in dienst van het functioneren in de samenleving. In ons literatuurcorpus komt dit perspectief frequent voor: 30 van de 49 publicaties hebben gecijferdheid als thema, en met name in de recente jaren is deze interpretatie de gangbare. Een zeer actueel onderwerp dus in de onderzoeksliteratuur.

In dit rapport zien we gecijferdheid en wiskundige geletterdheid als synoniem. De term gecijferdheid heeft het nadeel dat ze de associatie kan oproepen met cijferen, wat de lading niet dekt. Wiskundige (of kwantitatieve) geletterdheid sluit goed aan bij statistische geletterdheid en digitale geletterdheid maar klinkt wat talig. In Nederland verwijst de term 'functioneel (gebruik van) rekenen' in het algemeen ook naar gecijferdheidsdoelen.

Uitgangspunt bij de opvatting van basisvaardigheid als gecijferdheid is dat wiskunde niet in isolement in een ivoren toren zit, maar dat de wereld waarin we leven rijk is aan kwantitatieve en andere wiskundige aspecten. Denk aan getallen en berekeningen, maar ook aan grafieken, diagrammen, statistische uitspraken, ruimtelijke oriëntatie en logische redeneringen. Daarmee hebben we te maken in dagelijks leven, vervolgonderwijs en beroepspraktijk. Gecijferdheid gaat dan ook om de kwantitatieve vaardigheden die een mens nodig heeft om in de samenleving te functioneren. Het omvat zowel procedurele als conceptuele kennis, maar beide worden geconcretiseerd voor functioneel gebruik in toepassingscontexten in het leven. Daarmee is het een basisvaardigheid die hoort bij de toerusting van burgers. In verschillende landen, zoals Australië en de Verenigde Staten, heeft gecijferdheid een grote plaats in curricula gekregen.

De term gecijferdheid (*numeracy* in het Engels) is in 1959 al voor het eerst gebruikt (Kus, 2018; O'Keeffe & Paige, 2021). In verschillende artikelen wordt de ontwikkeling van dit begrip sindsdien beschreven (Niss et al., 2016). Een algemeen erkende eensluidende definitie is er niet, maar een geschikte omschrijving van gecijferdheid is:

the knowledge and capabilities required to accommodate the mathematical demands of private and public life and to participate in society as informed, reflective, and contributing citizens (Geiger et al., 2015, p. 531)

Gecijferdheid wordt in veel publicaties breed opgevat. Het gaat niet alleen om cijfers en getallen, maar ook om het kritisch beoordelen van kwantitatieve informatie en data (Bolstad, 2023) en om wiskundig redeneren (Sikko, 2023). Sellars (2017) benadrukt dat gecijferdheid ook inhoudt dat de reken-wiskundige activiteit voor leerlingen betekenis heeft. De koppeling van rekenen-wiskunde aan het dagelijks leven is een belangrijk kenmerk (Mumcu, 2016). Gecijferdheid wordt gezien als aspect van burgerschap (Engel, 2017; Geiger et al., 2023), wat voor de Nederlandse context interessant is omdat burgerschap als een van de vier basisvaardigheden is aangemerkt. Een vergelijkbare connectie ligt er met digitale geletterdheid, waarvan computationeel denken een belangrijk onderdeel is dat goed aansluit bij wiskunde (Sikko, 2023). In de literatuur zien we verbanden met data science, statistische geletterdheid en *civic statistics* (Blagdanic & Chinnappan,

2013; Gal, 2023) en wordt er gepleit voor aandacht voor gecijferdheid in andere schoolvakken (Coffey & Sharpe, 2023).

Wiskundige geletterdheid (*mathematical literacy*) is sinds 2003 het centrale thema in de internationale vergelijkende PISA toetsen voor leerlingen van 15 jaar. De interpretatie van wiskundige geletterdheid binnen PISA is in de loop van de tijd wat verschoven (Stacey & Turner, 2015a, 2015b). In 2022 was de omschrijving:

Wiskundige geletterdheid is het vermogen van een individu om wiskundig te redeneren en door middel van formuleren, toepassen en interpreteren problemen op te lossen in een diversiteit van realistische contexten. Hieronder vallen concepten, procedures, feit en instrumenten om fenomenen te beschrijven, uit te leggen en te voorspellen. Dit vermogen helpt individuen de rol van wiskunde in de wereld te onderkennen en om goed doordachte oordelen te formuleren en beslissingen te nemen, die noodzakelijk zijn voor constructieve, betrokken en reflectieve burgers in de 21e eeuw. (Meelissen et al., 2023, p. 17)

In PISA-2022 werden vier wiskundige procesdomeinen onderscheiden: redeneren, formuleren, toepassen, en interpreteren en evalueren. Merk op dat het uitvoeren van basisbewerkingen en procedures hierin niet expliciet naar voren komt; dat valt binnen het toepassen.

De uitwerking van wiskundige geletterdheid binnen PISA is ook onderwerp van kritiek. Zo stellen Marković et al. (2019) dat PISA vooral gezond verstand en algemene vaardigheden toetst in plaats van specifieke wiskundige geletterdheid. Als voorbeeld geven ze een item over grafieken (zie Figuur 5). Naar ons idee doet dit item echter beroep op wiskundige geletterdheid en in het bijzonder op het vermogen om kritisch naar statistische grafieken te kijken. Het gaat hier met name om het inzicht dat de schaling van de verticale as grote invloed heeft op de indruk die het plaatje wekt.

Robberies
A TV reporter showed this graph and said: "The graph shows that there is a huge increase in the number of robberies from 1998 to 1999" (Figure 3).

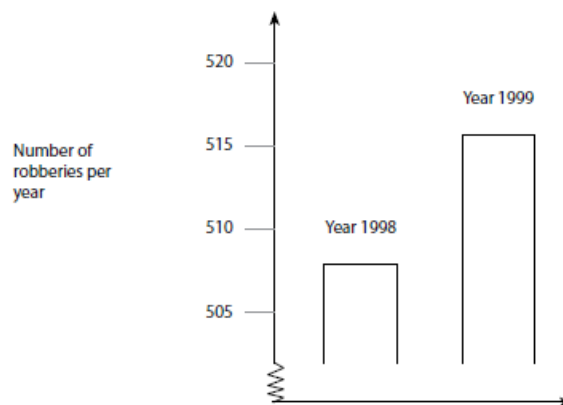


Figure 3. Robberies

Do you consider the reporter's statement to be a reasonable interpretation of the graph? Give an explanation of your answer.

Figuur 5. PISA item bekritiseerd in Marković et al. (2019)

In de literatuur wordt opgemerkt dat PISA niet zomaar een blauwdruk vormt voor nationale curricula. In sommige landen zijn pogingen daartoe niet succesvol gebleken (Cantley, 2019; Kirwan, 2015). Daarnaast zijn er ook twijfels aan het uitgangspunt dat onderwijsopbrengsten goed vergelijkbaar zijn tussen landen (Kusmaryono & Kusumaningsih, 2023) en aan de onderliggende psychometrische modellen (Cantley, 2019).

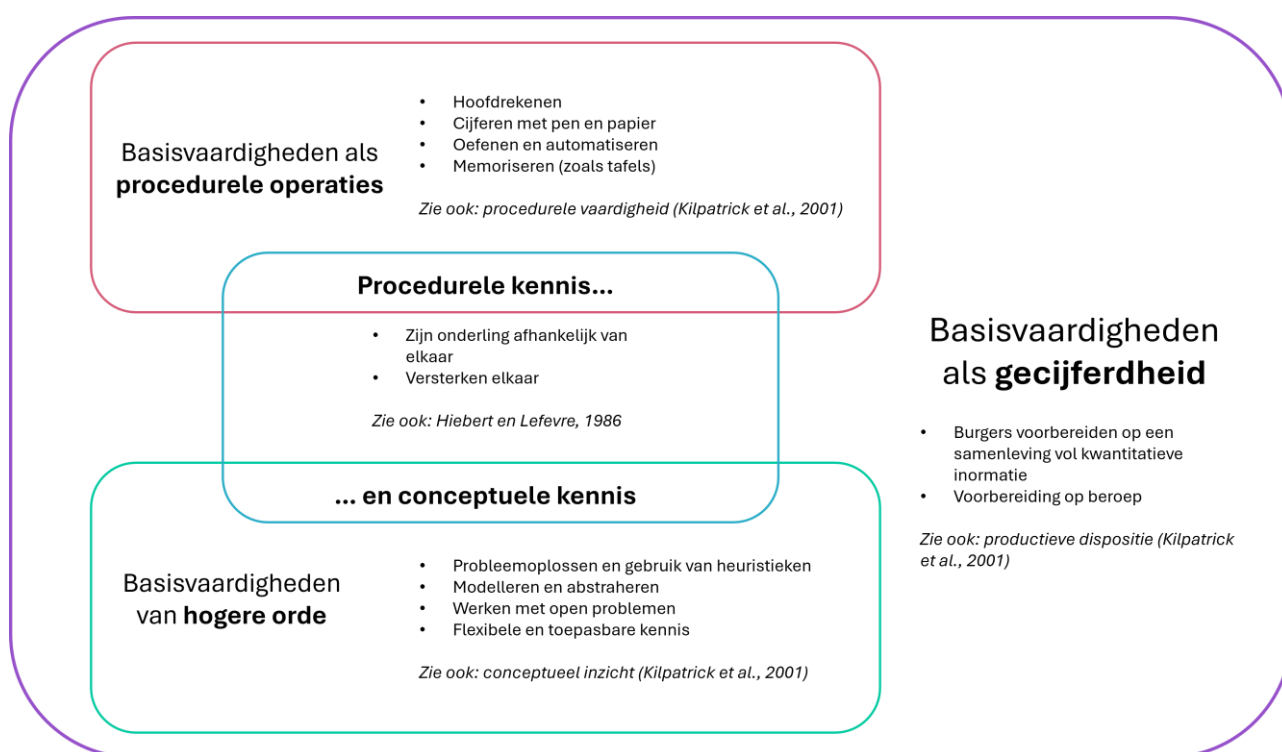
Een mogelijke verklaring voor deze kritiekpunten is dat gecijferdheid wel een relevant leerdoel is, maar niet eenvoudig te onderwijzen en te toetsen is. Kus (2018) wijst op de uitdagingen rond het effectief implementeren van *numeracy education*, met nog voortdurende discussies over de precieze betekenis en reikwijdte ervan. Frejd en Geiger (2017) signaleren de worsteling met het implementeren ervan in curriculumdocumenten en vergelijkbare commentaren worden gemaakt ten aanzien van lesmateriaal (Zhang et al., 2021) en concreet onderwijs (Davis, 2013). En ten slotte is het toetsen van een breed en moeilijk meetbaar concept als wiskundige geletterdheid niet eenvoudig (Bahr, 2007).

Samengevat zien we in de onderzoeksliteratuur een trend naar gecijferdheid of wiskundige geletterdheid als dominante invulling van basisvaardigheid rekenen-wiskunde. Het omvat de vaardigheden die je nodig hebt om te functioneren als burger in een samenleving die in toenemende mate doordrenkt is van wiskundige aspecten waartoe je je moet verhouden. Dit brede begrip van gecijferdheid heeft nauwe banden met andere vaardigheden waarover veel wordt gesproken zoals statistische geletterdheid en digitale geletterdheid. De toerusting op het functioneren in de maatschappij is een belangrijk doel waar het reken-wiskundeonderwijs zich op dient te richten, zo lijkt de strekking. Basisvaardigheid rekenen-wiskunde wordt vooral opgevat als gecijferdheid. In de literatuur komt nauwelijks of niet aan de orde hoe leerlijnen voor onderwijs in gecijferdheid eruitzien die recht doen aan factoren zoals de leeftijd van de leerlingen en het schooltype.

3 CONCLUSIES EN AANBEVELINGEN

3.1 Conclusies

De centrale vraag van deze internationale literatuurstudie is: Welke verschillende interpretaties van basisvaardigheden rekenen-wiskunde komen naar voren in de internationale onderzoeksliteratuur? Op basis van de in hoofdstuk 2 geschetste resultaten concluderen we ten eerste dat de perspectieven van basisvaardigheden als procedurele operaties, basisvaardigheden van hogere orde, basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis en basisvaardigheden als gecijferdheid alle vier naar voren komen in de gevonden literatuur. De verschillende perspectieven zijn alle vier van belang. Wel is de verdeling over deze categorieën scheef en zijn er weinig publicaties die primair over procedurele operaties of over hogere-orde vaardigheden gaan. Figuur 6 geeft de vier interpretaties weer.



Figuur 6 Overzicht van de verschillende interpretaties van basisvaardigheden rekenen-wiskunde. Ten tweede zien we consensus over het feit dat basisvaardigheden een subtiel en gebalanceerd samenspel zijn tussen procedurele vlotheid, basisvaardigheden van hogere orde en conceptueel inzicht. De derde en belangrijkste conclusie is dat gecijferdheid – of wiskundige geletterdheid – verreweg de meeste aandacht krijgt in de onderzoeksliteratuur rond basisvaardigheden rekenen-wiskunde. Kennelijk wordt dit beschouwd als de belangrijkste basisvaardigheid bij rekenen-wiskunde. De taak voor het onderwijs in basisvaardigheden rekenen-wiskunde is dan ook om leerlijnen te ontwerpen die de gecijferdheid bevorderen van leerlingen van verschillende leeftijden en schooltypen als voorbereiding op vervolgonderwijs, beroep en functioneren in de samenleving.

3.2 Beleidsaanbevelingen

Wat betekenen deze conclusies voor het beleid ten aanzien van basisvaardigheden rekenen-wiskunde? Op basis van de internationale onderzoeksliteratuur doen we de volgende beleidsaanbevelingen.

1. *Beperk de interpretatie van basisvaardigheden rekenen-wiskunde niet tot procedurele vaardigheden, maar stel de ontwikkeling van gecijferdheid centraal.*
Basisvaardigheden rekenen-wiskunde vormen een breed palet van kennis, vaardigheden en inzichten dat meer behelst dan procedurele vlotheid en die samenkomen in het begrip gecijferdheid. De concept-kerndoelen en examenprogramma's bieden goede aanknopingspunten voor deze interpretatie.
2. *Verbind basisvaardigheden rekenen-wiskunde met andere basisvaardigheden.*
Gecijferdheid richt zich op het functioneren in een maatschappij waarin technologie een steeds grotere rol speelt. Daarom is werken aan gecijferdheid ook werken aan basisvaardigheden zoals burgerschap en digitale geletterdheid. Tevens liggen er binnen andere schoolvakken mogelijkheden om aandacht te besteden aan gecijferdheid.
3. *Overweeg meer gedetailleerde invulling van curricula per jaarlaag en schooltype.*
Om te garanderen dat basisvaardigheden en gecijferdheid als leerdoelen voldoende aandacht krijgen, verdient het aanbeveling om behalve kerndoelen en examenprogramma's ook specifieke leerlijnen per leerjaar en per schooltype te ontwikkelen. Zo worden leerlingen goed voorbereid op vervolgonderwijs, beroep en burgerschap, en hebben docenten, toetsontwikkelaars en methodeauteurs houvast om aan de gestelde doelen te werken.
4. *Borg de onderwijstijd voor basisvaardigheden rekenen-wiskunde.*
Gelet op het belang van gecijferdheid als basisvaardigheid rekenen-wiskunde is het noodzakelijk om de onderwijstijd voor rekenen-wiskunde te borgen. Onvoldoende onderwijstijd leidt tot leerlingen die onvoldoende gecijferd zijn. Ook vraagt dit om ruimte voor de professionalisering voor docenten.

REFERENTIES

- Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching and assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Longman.
- Bahr, D. L. (2007). Creating mathematics performance assessments that address multiple student levels. *Australian Mathematics Teacher*, 63(1), 33–40. <https://eric.ed.gov/?id=EJ769974>
- Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 115–131. <https://doi.org/10.2307/30034952>
- Blagdanic, C., & Chinnappan, M. (2013). Supporting students to make judgements using real-life data. *Australian Mathematics Teacher*, 69(2), 4–11. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1093098>
- Bolstad, O. H. (2023). Lower secondary students' encounters with mathematical literacy. *Mathematics Education Research Journal*, 35(1), 237–253. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00386-7>
- Brahier, D. J. (2001). Understanding mathematics and basic skills. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7(1), 8–9. <https://www.jstor.org/stable/41181043>
- Brendefur, J. L., Strother, S., Rich, K., & Appleton, S. (2016). Assessing student understanding: A framework for testing and teaching. *Teaching Children Mathematics*, 23(3), 174–181. <https://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.23.3.0174>
- Buys, K. (in druk). Rekenprestaties in de afgelopen 15 jaar: Is er een neerwaartse tendens? *Volgens Bartjens - Ontwikkeling en Onderzoek*.
- Cantley, I. (2019). PISA and policy-borrowing: A philosophical perspective on their interplay in mathematics education. *Educational Philosophy and Theory*, 51(12), 1200–1215. <https://doi.org/10.1080/00131857.2018.1523005>
- Castro, A., Prat, M., & Gorgorió, N. (2016). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: Their development after decades of research. *Revista de Educación*(374), 42–66. <https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2016-374-325>
- Coffey, P., & Sharpe, R. (2023). An investigation into the teaching of numeracy in subjects other than mathematics across the curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(5), 860–887. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1978570>
- Correa, P. D., & Haslam, D. (2020). Mathematical proficiency as the basis for assessment: A literature review and its potentialities. *Mathematics Teaching Research Journal*, 12(4), 3–20. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1384844>
- Davis, J. (2013). Student understandings of numeracy problems: semantic alignment and analogical reasoning. *Australian Mathematics Teacher*, 69(2), 19–26. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1093105>
- Davis, J. D. (2005). Connecting procedural and conceptual knowledge of functions. *Mathematics Teacher*, 99(1), 36–39.
- Denmark, T., & Kepner, H. S., Jr. (1980). Basic skills in mathematics: A survey. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11(2), 104–123. <https://doi.org/10.2307/748903>
- Engel, J. (2017). Statistical literacy for active citizenship: A call for data science education. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 44–49. [https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ16\(1\)_Engel.pdf](https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ16(1)_Engel.pdf)
- Frejd, P., & Geiger, V. (2017). Exploring the notion of mathematical literacy in curricula documents. In *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 255–263). Springer Science and Business Media B.V. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_22

- Gal, I. (2023). Critical understanding of civic statistics: Engaging with important contexts, texts, and opinion questions. In J. Ridgway (Ed.), *Statistics for Empowerment and Social Engagement: Teaching Civic Statistics to Develop Informed Citizens* (pp. 323–343). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20748-8_13
- Geiger, V., Gal, I., & Graven, M. (2023). The connections between citizenship education and mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 55(5), 923–940. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01521-3>
- Geiger, V., Goos, M., & Forgasz, H. (2015). A rich interpretation of numeracy for the 21st century: A survey of the state of the field. *ZDM - Mathematics Education*, 47(4), 531–548. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0708-1>
- Hickendorff, M., Mostert, T. M. M., van Dijk, C. J., Jansen, L. L. M., van der Zee, L. L., & Fagginger Auer, M. M. (2018). Basiskwaliteit Nederlands rekenonderwijs is goed. *Basisschool Management*, 32(6), 4–7.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. (pp. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates, Inc. <https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9780203063538>
- Hurrell, D. (2021). Conceptual knowledge or procedural knowledge or conceptual knowledge AND Procedural Knowledge: Why the conjunction is important to teachers. *Australian Journal of Teacher Education*, 46(2), 57–71. <https://doi.org/10.14221/ajte.2021v46n2.4>
- Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: An example from algebra. In K. R. Leatham (Ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 153–171). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3_7
- Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics*, 47(1), 101–116. <https://doi.org/10.1023/A:1017973827514>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. National Academies Press.
- Kirwan, L. (2015). Mathematics curriculum in Ireland: The influence of PISA on the development of project maths. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 8(2), 317–332. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1085878.pdf>
- Kop, P. (2024). *Wat wordt bedoeld met basisvaardigheden?* <https://www.nvww.nl/wp-content/uploads/2024/10/Wat-wordt-bedoeld-met-basisvaardigheden.pdf>
- Kus, M. (2018). Numeracy. *Brock Education: A Journal of Educational Research and Practice*, 27(2), 58–62. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1179949>
- Kusmaryono, I., & Kusumaningsih, W. (2023). Evaluating the results of PISA assessment: Are there gaps between the teaching of mathematical literacy at schools and in PISA assessment? *European Journal of Educational Research*, 12(3), 1479–1493. <https://doi.org/10.12973/eu-er.12.3.1479>
- Marković, O., Pikula, M., & Zubac, M. (2019). A critical analysis of the PISA mathematics tasks. *Croatian Journal of Education*, 21(1), 233–274. <https://doi.org/10.15516/cje.v21i1.3245>
- Meelissen, M., Maassen, N., Gubbels, J., van Langen, A., Valk, J., Dood, C., Derks, I., In 't Zandt, M., & Wolbers, M. (2023). *Resultaten PISA-2022 in vogelvlucht*. University of Twente. <https://doi.org/10.3990/1.9789036559461>
- Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen (2022). *Kamerbrief Masterplan Basisvaardigheden*. <https://open.overheid.nl/documenten/ronl-87e80b67638eac706986d2467ba0dbc854000ea7/pdf>

- Mumcu, H. Y. (2016). Using mathematics, mathematical applications, mathematical modelling, and mathematical literacy: A theoretical study. *Journal of Education and Practice*, 7(36), 80–96. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1126496>
- Newport, J. F. (1979). Why the decline in student achievement of the basic skills? *School Science and Mathematics*, 79(2), 122–124. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1979.tb09461.x>
- Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:56501867>
- Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: Conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *ZDM - Mathematics Education*, 48(5), 611–632. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0799-3>
- Niss, M., & Hojgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. <https://dx.doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- O’Keeffe, L., & Paige, K. (2021). Re-highlighting the potential of critical numeracy. *Mathematics Education Research Journal*, 33(2), 285–299. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00297-8>
- Osterman, T., & Brating, K. (2019). Dewey and mathematical practice: Revisiting the distinction between procedural and conceptual knowledge. *Journal of Curriculum Studies*, 51(4), 457–470. <https://dx.doi.org/10.1080/00220272.2019.1594388>
- Ozmen, Z. M., & Guven, B. (2019). Evaluating students’ conceptual and procedural understanding of sampling distributions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(1), 25–45. <https://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2018.1467507>
- Rittle-Johnson, B. (2019). Iterative development of conceptual and procedural knowledge in mathematics learning and instruction. In J. Dunlosky & K. Rawson (Eds.), *The Cambridge Handbook of Cognition and Education* (pp. 124–147). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108235631.007>
- Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, 27(4), 587–597. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10648-015-9302-x>
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 529–544. <https://doi.org/10.1037/a0014224>
- Schoenfeld, A. H. (2007). *Assessing mathematical proficiency*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755378>
- Sellars, M. (2017). *Numeracy in authentic contexts: Making meaning across the curriculum*. Springer Singapore. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5736-6>
- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf
- Sikko, S. A. (2023). What can we learn from the different understandings of mathematical literacy? *Numeracy*, 16(1), Article 1. <https://doi.org/10.5038/1936-4660.16.1.1410>
- Stacey, K., & Turner, R. (2015a). *Assessing mathematical literacy: The PISA experience*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7>
- Stacey, K., & Turner, R. (2015b). The evolution and key concepts of the PISA mathematics frameworks. In *Assessing Mathematical Literacy: The PISA Experience* (pp. 5–33). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7_1

- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404–411.
- Star, J. R., & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 169–181.
<https://doi.org/10.1080/14926156.2013.784828>
- Zhang, J., Zhou, D., Wang, R., & Song, L. (2021). Core content selection and textbook design for high school mathematics. In *School Mathematics Textbooks in China: Comparative Studies and Beyond* (pp. 1–42). World Scientific Publishing Co.
https://doi.org/10.1142/9789814713955_0001