

Een wereld van verschil

Vakoverstijgend rekenen

Hoe komt het toch dat zoveel leerlingen op de middelbare school moeite hebben met rekenen? Waardoor is rekenen met procenten en verhoudingen voor leerlingen zo lastig? Er wordt uitgebreid mee geoefend bij economie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde. Bij dit hardnekkige probleem kan een gezamenlijke aanpak een wereld van verschil maken.

Inleiding

Een belangrijk probleem bij rekenen is dat elk vak zijn eigen tradities kent. Zo gebruiken basisscholen voor het rekenen met procenten een andere aanpak dan de meeste wiskundeboeken. En economie en natuurkunde hebben hiervoor weer ieder hun eigen aanpak.

Een ander probleem is dat er in het po en in de eerste jaren van het vo veel nadruk ligt op het automatiseren van rekvaardigheden. Daardoor kunnen de leerlingen die opgaven wel maken, maar ze begrijpen eigenlijk niet goed wat ze aan het doen zijn. Dan wordt het dubbel lastig om bij een ander vak een andere aanpak te moeten gebruiken voor hetzelfde rekenwerk.

Op enkele scholen is het gelukt om die verschillen tussen de vakken te overbruggen. Dan blijkt dat met een paar eenvoudige afspraken de kwaliteit van het rekenonderwijs een flinke sprong kan maken. Een sprong die zo groot is dat het effect goed zichtbaar is in examenresultaten. En het geeft meer leerlingen de kans om economie, scheikunde of natuurkunde te kiezen in hun pakket. Een wereld van verschil met een bescheiden inspanning.

Die afspraken gaan met name over rekenen met procenten en verhoudingen. Leerlingen zien al snel in dat die aanpak in veel meer situaties bruikbaar is. Bovendien is die aanpak overzichtelijk en verrassend eenvoudig. Leerlingen zeggen: "Nu snap ik wat ik aan het doen ben!"

Verhoudingstabel

De basis van die aanpak is de verhoudingstabel, maar dan wel een tabel waarbij de eenheden niet links van of boven de tabel staan. De eenheden staan juist achter elk getal. Dat heeft twee voordelen. Leerlingen overzien door die eenheden beter wat de getallen betekenen, en maken daardoor minder fouten. Daarnaast werkt een verhoudings-

tabel sneller en overzichtelijker bij het omrekenen van eenheden (van uur naar seconde of van liter naar kubieke centimeter). Dat leidt ook tot minder fouten.

Op de basisschool maken de meeste leerlingen al kennis met de verhoudingstabel. Die wordt daar gebruikt voor berekeningen met procenten. Als tussenstap wordt daarbij eerst omgerekend naar 1. In figuur 1 is een voorbeeld van zo'n berekening weergegeven. De vraag hierbij is: Een fles met een inhoud van 700 ml is gevuld met 322 ml limonade. Hoeveel procent van de fles is gevuld?

		$\div 700$	$\times 322$
volume	ml	700	1
percentage	%	100	?

figuur 1

Nadat de leerlingen deze getallen op de juiste plek in de tabel hebben geplaatst worden de getallen bij de pijlen berekend. De eerste pijl boven de tabel is steeds een deling, de tweede pijl een vermenigvuldiging. Dezelfde berekening moet worden toegepast op de onderste rij. Dit rekeninstrument werkt wel, maar alleen als de tabel met pijlen al gegeven is. Het is bovendien een berekening met veel stappen, ook omdat de 1 soms in de onderste rij en soms in de bovenste moet staan. Leerlingen begrijpen hierbij niet goed wat ze aan het doen zijn, ook omdat de eenheden 'uit beeld' zijn. Daardoor is dit meer een reken-truc dan een bruikbare rekenmethode.

Een goede vervolgstap zou kunnen zijn om de pijlen weg te laten en eenheden bij de getallen te plaatsen, zie figuur 2.

700 ml		322 ml
100 %		? %

figuur 2

Dit is dezelfde tabel, maar overzichtelijker. De eerste stap is nu het noteren van 1 ml als tussenstap. Daarna kunnen leerlingen zelf wel bedenken dat ze moeten delen door 700 en vermenigvuldigen met 322.

Op de middelbare school kan vervolgens het terugrekenen naar 1 vervangen worden door rekenen met een vermenigvuldigingsfactor. Het berekenen van zo'n vermenigvuldigingsfactor is dan de eerste stap in het rekenen met verhoudingen, zie figuur 3.

700 ml	322 ml
100 %	? %

figuur 3

Het gebruik van eenheden bij elk getal maakt dit instrument voor leerlingen overzichtelijker. Het helpt bij het ordenen van de getallen. Bij deze vraag is sneller duidelijk dat 700 ml gelijk is aan 100 %, en dat berekend moet worden hoeveel procent bij 322 ml hoort. Ten slotte kan de tabel gebruikt worden om te checken of het antwoord grofweg juist is.

Breed inzetbaar

Deze verhoudingstabel is bruikbaar bij veel andere onderwerpen, zoals dichtheid, prijs per kg, molariteit, verbrandingswarmte en rekenen met massaverhoudingen. Zodra er een eenheid met 'per' in het spel is kan de verhoudingstabel ingezet worden. Bij dichtheid is een tabel zelfs overzichtelijker dan de formule $\rho = \frac{m}{v}$.

Bij het voorbeeld in figuur 4 luidt de opgave: 'De massa van 0,75 l olijsolie is 690 gram. Bereken de dichtheid in kg/m^3 '. Na het noteren van deze twee gegevens in de tabel moet gebruikt worden dat de dichtheid gelijk is aan de massa van een kubieke meter. Door die stap krijgt het begrip dichtheid meer betekenis.

0,75 l	1 m ³
650 g	? kg

figuur 4

Vervolgens worden de eenheden omgerekend in de tabel, en kan het antwoord berekend worden, zie figuur 5.

0,75 l	1 m ³ = 1000 l
650 g = 0,65 kg	? kg

figuur 5

Het antwoord kan via de vermenigvuldigingsfactor, via terugrekenen naar 1 of zelfs via het kruisproduct gevonden worden. Daarin mag elke leerling zijn eigen aanpak kiezen. Een voordeel is dat de berekening steeds hetzelfde is.

De voordelen van een verhoudingstabel:

- Het helpt om de gegevens te ordenen.
- Het rekenwerk is steeds gelijk.
- Eenheden omrekenen is eenvoudiger.
- Het antwoord kan gecontroleerd worden.

Leerlingen die de verhoudingstabel gebruiken geven aan: 'Dit is zoveel overzichtelijker, nu snap ik wat ik doe.'

Er schuilt toch ook een klein gevaar in het gebruik van een verhoudingstabel. Sommige leerlingen passen de tabel bij elke berekening toe, en vullen getallen zonder eenheid in. Dan mist de leerling het overzicht over de berekening, en voor de docent is het lastig om te beoordelen of deze leerling de bijbehorende denkstap gezet heeft. Dan helpt het als leerlingen de eenheden bij de getallen noteren, en als de uiteindelijke berekening naast de tabel wordt genoteerd.

Tabel of formule?

Bij docenten bestaat soms weerstand tegen het gebruik van een verhoudingstabel. Zo vinden natuurkundedocenten veelal dat die tabel niet bij hun vak past. 'Natuurkunde gaat over formules, en die tabel is een trucje.'

Toch valt het te overwegen om in de onderbouw zowel de formule als de verhoudingstabel aan te bieden in situaties waar dat mogelijk is. Beide instrumenten zijn bijvoorbeeld bruikbaar bij het rekenen met snelheid en afstand.

In het voorbeeld van figuur 6 is de vraag: 'Op een sportdag loopt de snelste leerling de 100 m in een tijd van 14,5 s. Bereken de gemiddelde snelheid in km/h.'

100 m	? km
14,5 s	1 uur

figuur 6

Ook hier worden eerst de eenheden omgerekend en vervolgens het antwoord berekend.

$$\begin{array}{l|l} 100 \text{ m} = & \\ 0,1 \text{ km} & ? \text{ km} \\ \hline 14,5 \text{ s} & \begin{array}{l} 1 \text{ uur} = \\ 3600 \text{ s} \end{array} \end{array}$$

figuur 7

Het antwoord kan ook met de formule $s = v \cdot t$ gevonden worden, maar daar maken leerlingen vaak fouten bij het omrekenen van eenheden.

Door zowel de formule als de tabel aan te bieden krijgen leerlingen een keuze. Met name de wat minder sterke leerlingen kiezen dan eerder voor de tabel, want daar begrijpen ze beter wat ze aan het berekenen zijn.

Resultaten

Er is geen uitgebreid onderzoek gedaan naar de effectiviteit van vakoverstijgend rekenen, maar docenten en leerlingen zijn ronduit enthousiast. Leerlingen van leerjaar 3 halen hogere cijfers bij economie, natuurkunde en scheikunde. Daarnaast kiezen zij deze vakken vaker in hun pakket.

Docenten merken dat hun leerlingen vooruitgang boeken, en minder worstelen met rekenen. Er is een drempel weggehaald en daardoor is er meer ruimte voor de vakinhoud. Bij de examenresultaten valt op dat het percentage onvoldoendes lager ligt dan in het verleden, bij een hoger deelnamepercentage.

Nieuw lesmateriaal

In het afgelopen schooljaar is door drie Utrechtse scholen nieuw lesmateriaal ontwikkeld voor vakoverstijgend rekenen. Dit lesmateriaal bestaat uit vier deelgebieden (vergelijkingen, verhoudingstabellen, procenten en samengestelde rekenopgaven). Het lesmateriaal is ontwikkeld voor leerlingen van leerjaar 3, bij de vakken wiskunde, natuurkunde en economie. In een later stadium zal ook oefenmateriaal voor scheikunde ontwikkeld worden. Het lesmateriaal bestaat uit een leerlingbundel, een ppt-presentatie, video's, digitale opgaven en een docentenhandleiding. De drie vakken gebruiken voor de theorie dezelfde leerlingbundel en dezelfde presentatie. Voor het oefenen zijn er voor elk vak verschillende sets met digitale opgaven beschikbaar (quizen voor het platform Socrative). De afronding van het project bestaat uit een rekentoets niveau 3F. Zo'n rekentoets bestaat voor een groot deel uit

samengestelde rekenopgaven. Dat zijn opgaven waarbij meerdere rekenstappen gezet moeten worden, zoals bij examenopgaven vaak het geval is. Daarbij is een verhoudingstabel een handig hulpmiddel om de gegevens te ordenen en een eerste stap in de berekening te zetten. Dat maakt dit lesmateriaal ook geschikt voor examenkandidaten die dit rekenwerk (nog steeds) lastig vinden.

Gratis kennismaken

Het lesmateriaal uit de pilot is gratis beschikbaar voor scholen die kennis willen maken met vakoverstijgend rekenen.^[1] Inmiddels wordt ook gewerkt aan een meer professionele en digitale omgeving voor rekenonderwijs die via iedere leeromgeving (zoals Magister) toegankelijk is. De nieuwe omgeving biedt extra uitleg, oefenmogelijkheden en geeft overzicht in de vorderingen van leerlingen op alle deelgebieden.

Demonstratie en ondersteuning

Tijdens de pilotfase van het project zijn op enkele andere scholen demonstratielessen gegeven met het nieuwe lesmateriaal. Daarbij blijkt dat leerlingen in korte tijd grote vooruitgang kunnen boeken. Daarnaast ervaren docenten wat de meerwaarde van deze aanpak is, en hoeveel winst er geboekt kan worden door met meerdere vakken samen te werken bij rekenen. Dat werkt in de praktijk veel beter dan losse rekenlessen. Scholen die gebruik willen maken van vakoverstijgend rekenen kunnen daarbij ondersteuning krijgen van professionals. Die ondersteuning bestaat uit een kennismakingsbijeenkomst, een training voor docenten en het vaststellen van een invoeringstraject.

Naast trainingen voor docenten worden er ook trainingen voor (examen-)leerlingen ontwikkeld.^[1]

Gezamenlijke strategie

Den Haag pleit voor verbetering van het reken- en taalonderwijs.^[3] Het Ministerie maakt zich terecht grote zorgen over het dalend niveau, en wil dat binnen twee jaar het rekenonderwijs op elke school op niveau is. Dat is een ambitieus plan, maar met vakoverstijgend rekenonderwijs is dat niet onhaalbaar. Het is een effectieve interventie, waarbij met een bescheiden inspanning een groot resultaat geboekt kan worden. De inbedding in het vakonderwijs zorgt, samen met de professionele leeromgeving, voor verankering in het onderwijs.^[4]

Om hier ook daadwerkelijk de nodige ondersteuning en middelen voor te krijgen uit Den Haag is het van groot belang om met alle betrokken vakken een gezamenlijke strategie te ontwikkelen en samen op te trekken.

Hopelijk is deze bijdrage een aanzet tot een discussie binnen en tussen de vakverenigingen. Zij zijn immers een belangrijke speler in het onderwijsveld.

Het project Vakoverstijgend rekenen is een spin-off van het project SaLVO! van het Freudenthal Instituut, en is met steun van de gemeente Utrecht en de Willibrord Stichting verder ontwikkeld door het St. Bonifatiuscollege in Utrecht.

Naast het project Vakoverstijgend rekenen zijn er meer initiatieven in het land om rekenen in het vo een steviger (en geïntegreerde) basis te geven in de onderbouw van vmbo en havo/vwo. Het platform 'rekenbewust vak-onderwijs',^[2] richt zich op afstemming tussen de verschillende vakverenigingen die actief met dit onderwerp bezig zijn of er bij betrokken zijn. Het is belangrijk om een goed fundament voor rekenen te leggen bij zowel havo/vwo als vmbo. Wat betreft vmbo komen twee ontwikkelingen bij elkaar waardoor nieuwe kansen voor rekenen ontstaan: ontwikkeling van de nieuwe leerweg (combinatie van gl en tl) en de ontwikkeling van een nieuw examenprogramma wiskunde. De auteurs komen graag in contact met vmbo-scholen die actief met hun rekenbeleid bezig zijn en wellicht willen samenwerken (materiaalontwikkeling en praktijkgericht onderzoek).

Noten

- [1] Meer informatie hierover via een bericht naar k.hooyman@boni.nl.
- [2] Zie: elwier.nl/rbvo
- [3] Zie bijvoorbeeld: (2018). Een nieuw perspectief voor rekenen in het voortgezet onderwijs. Gesprekstafels rekenen vmbo en havo/vwo. https://elbd.sites.uu.nl/wp-content/uploads/sites/108/2019/01/2018_ocw_een-nieuw-perspectief-voor-rekenen-in-het-voortgezet-onderwijs.pdf
- [4] Zie bijvoorbeeld ook: Jonker, V. en Wijers, M. (2011). Rekenen in het vmbo. De aanpak van College Vos. *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 31(1), 29-32. https://www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/311/311september_jonker-wijers.pdf

Over de auteurs

Kees Hooyman is docent natuurkunde en rekencoördinator op het St. Bonifatiuscollege te Utrecht.

E-mailadres: khooyman@xs4all.nl

Vincent Jonker is medewerker van het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. E-mailadres: v.jonker@uu.nl

Wiskunde op straat

Hank Rozenhart



Alle leerlingen hebben een mobiele telefoon. Dus een leuke afspraak voor in de vakantie is om in een WhatsApp-groep elkaar foto's te sturen van wiskundige zaken die je tegenkomt. Het geeft vaak aardige resultaten.