

# Het beste merk batterijen

## Voorbeelden uit een leergang data en statistiek

Curriculum.nu stelt voor dat er ruimte moet komen in het curriculum voor data en statistiek. Frans van Galen en Koeno Gravemeijer hebben voor een Amerikaanse methode vier lessenseries gemaakt rond dit onderwerp. Aan de hand van lessen voor de bovenbouw lichten ze toe welke keuzes daarbij zijn gemaakt.

Frans van Galen is ontwikkelaar/onderzoeker. Hij heeft lang gewerkt aan het Freudenthal Instituut, Universiteit van Utrecht.

Koeno Gravemeijer is emeritus hoogleraar science- en techniek-educatie en voorzitter van de werkgroep Wiskunde voor Morgen.

Curriculum.nu noemt 'data en statistiek' een belangrijk onderwerp in het nieuwe curriculum. Een argument daarvoor is de moderne technologie, die maakt dat we kunnen beschikken over grote hoeveelheden gegevens. Met computers en andere apparaten kunnen zulke gegevens op allerlei manieren worden weergegeven en geanalyseerd.

Bij 'data en statistiek' in het basisonderwijs gaat het niet om zaken die helemaal nieuw zijn, want ook nu al wordt er aandacht besteed aan gegevensverwerking, met name aan het gebruik van grafieken. Bij het doornemen van de huidige methodes valt ons echter op dat leerlingen zelden gevraagd wordt om zelf een grafiek te maken; in de meeste lessen gaat om het interpreteren van kant en klare grafieken. Dat is jammer, want een open tekenopdracht is een rijke bron voor discussies over de onderliggende principes. Een meer fundamenteel punt is dat aan de onderwijsactiviteiten geen duidelijke leerlijn ten grondslag lijkt te liggen.

Voor de Amerikaanse reken-wiskundemethode

*Contexts for Learning Mathematics*<sup>1</sup> maakten we samen met Cathy Fosnot vier lessenseries voor grade 2 tot en met 5; in Nederland is dat groep 4 tot en met 7. Elke lessenserie biedt stof voor twee weken onderwijs. In dit artikel willen we aan de hand van een aantal lessen laten zien hoe de gekozen opbouw leerlingen helpt om zich stap voor stap belangrijke inzichten eigen te maken. De drie besproken lessen zijn de eerste lessen in de lessenserie<sup>2</sup> voor grade 5, onze groep 7. Het leerlingwerk komt uit een klas waar de lessen zijn uitgetoetst.

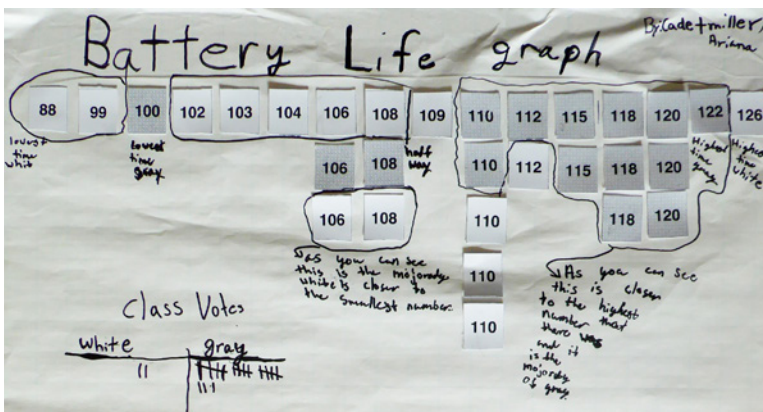
### Les 1: kaartjes ordenen

De eerste les begint met een gesprek over batterijen. Als je moet kiezen tussen AA-batterijen van een verschillend merk wil je natuurlijk weten hoeveel ze kosten, maar het gaat er ook om hoe lang een batterij het blijft doen. Hoe zou je uit kunnen zoeken wat hun 'levensduur' is, vraagt de leraar. De klas is het er al gauw over eens dat je een aantal batterijen moet testen, want een enkele losse 'slechte' of 'goede' batterij zegt niet zoveel. Bovendien moet je de batterijen in dezelfde situatie testen, want een LED-lampje gebruikt weinig stroom, maar een speelgoedauto heel veel.

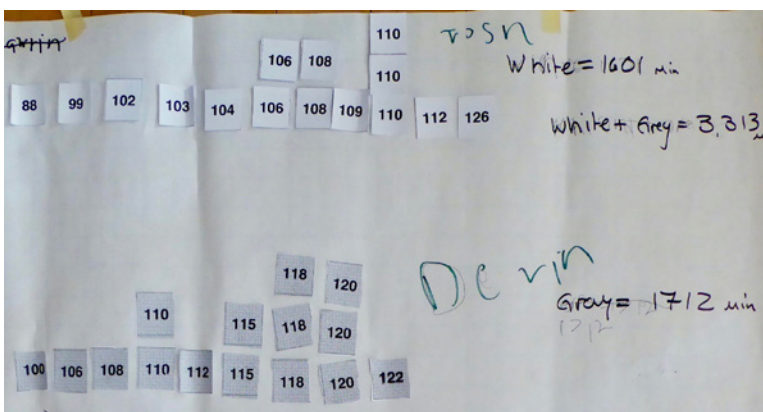
De leraar vertelt dat iemand 15 batterijen heeft getest van het merk 'Lite Energy' en 15 van het merk 'Gray Bird'. De leerlingen krijgen twee setjes van 15 kaartjes - respectievelijk wit en grijs gekleurd - waarop staat hoeveel minuten een bepaalde batterij het bleef doen. Ze gaan in twee- of drietallen uitzoeken wat zij het beste merk vinden. Na verloop van tijd blijkt dat alle leerlingen vinden dat de batterijen van de grijze kaartjes beter zijn dan die van de witte kaartjes, maar de manier waarop ze tot die conclusie zijn gekomen loopt erg uiteen.



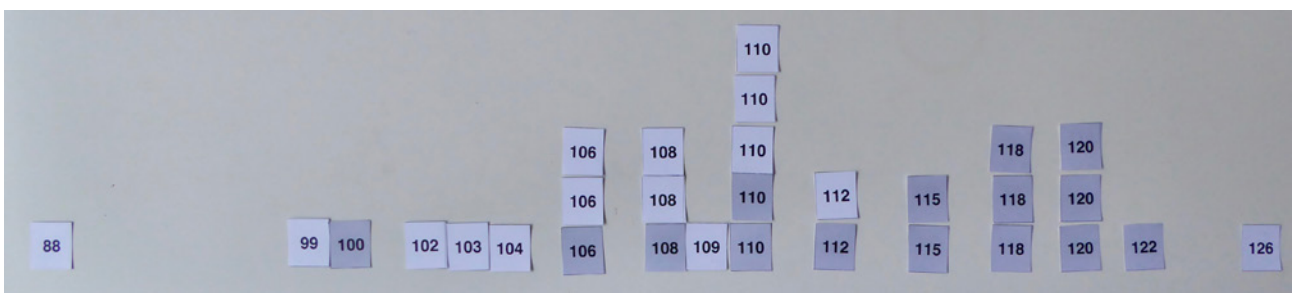
1. Grijze en witte kaartjes apart op volgorde



2. Grijze en witte kaartjes samen op volgorde



3. Hoeveel minuten samen?



4. Ruimte laten voor de tussenliggende getallen

Er zijn leerlingen die simpelweg de grijze en witte kaartjes op volgorde boven elkaar leggen, zie afbeelding 1. Alle grijze batterijen deden het beter dan de witte batterij van het kaartje er onder, op het allerlaatste paar na. Dat is voldoende om te mogen concluderen dat grijs het beter doet.

Je kunt ook de grijze en witte kaartjes samen nemen bij het op volgorde leggen, zoals Cade, Miller en Ariana doen in afbeelding 2. Kaartjes met hetzelfde getal hebben ze onder elkaar geplakt. Ze hebben uitgezocht waar de 'helft' ligt - evenveel kaartjes links als rechts - en ze constateren dat er rechts vooral grijze kaartjes liggen en links vooral witte kaartjes.

Twee andere leerlingen - Josh en Devin - hebben de kaartjes per kleur geordend, zie afbeelding 3. Zo kun je niet veel zeggen over het verschil tussen grijs en wit en daarom kozen ze ervoor om het totale aantal minuten per kleur te berekenen: 1601 voor wit en 1712 voor grijs. Dit ligt natuurlijk al dicht aan tegen het berekenen van de gemiddelde levensduur.

Opvallend is dat alle leerlingen in de proefklas de kaartjes in eerste instantie op volgorde legden zonder ruimte te laten voor de getallen die er nog tussen zouden kunnen passen. Bij deze data is dat ook niet nodig, want de verschillen zijn zo ook al duidelijk. Als je het echter wel doet, zoals in afbeelding 4, werkt dat verhelderend. Nu is goed te zien dat de witte batterij van 88 minuten een speciaal geval is, wat in het Engels een 'outlier' heet. Je kunt ook goed zien dat de gevonden waarden behoorlijk uiteenlopen, voor allebei de merken. Dankzij een aantal gerichte vragen van de leraar komt deze vorm van ordenen ook aan de orde.

### Les 2: twee soorten grafieken

De volgende dag wordt eerst teruggekeken op het werk in de eerste les. De leraar brengt het gesprek op de grote verschillen tussen de batterijen, ook bij hetzelfde merk. De witte batterij van 88 minuten deed het bijna een derde korter dan de beste witte batterij! Als de batterijen veel goedkoper zijn en je kunt ze makkelijk verwisselen zijn die verschillen misschien niet erg, maar er zijn ook situaties waarin het belangrijk

is dat je vooraf weet hoe lang een batterij mee zal gaan.

De leraar legt uit dat wiskundigen de variatie in gevonden waarden vaak zichtbaar maken door een grafiek te tekenen. De leerlingen krijgen de opdracht om dat ook te doen voor de witte en de grijze batterijen. Ze krijgen ruitjespapier en mogen zelf beslissen wat voor grafiek ze gaan maken.

Deze opdracht levert twee typen grafieken op. Het eerste waar leerlingen aan denken bij het woord 'grafiek' is een staafgrafiek. In dit geval betekent het dat ze de levensduur in minuten weergeven als een staaf. Wanneer de getallen op de verticale as op gelijke afstanden staan - in afbeelding 5 stappen van 10 per vakje - dan geeft de lengte van de staven de verhoudingen weer. Door de leerlingen die zo'n grafiek maken worden de staven op volgorde van grootte naast elkaar geplaatst, zoals in de grafiek voor de witte batterijen van afbeelding 5.

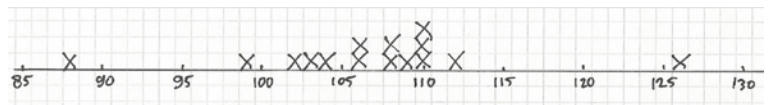
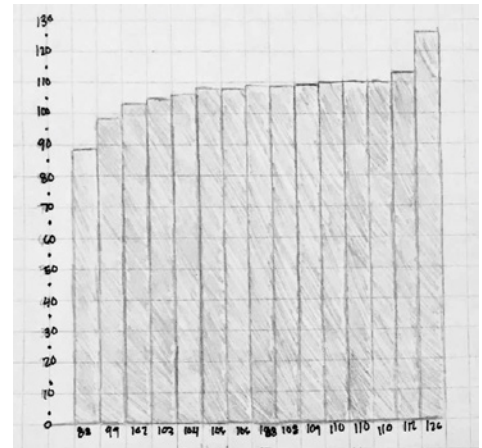
Het tweede type is een frequentie-grafiek, zoals die van afbeelding 6. Een dergelijke frequentiegrafiek lijkt erg op het ordenen van de kaartjes in de eerste les. Omdat de leraar benadrukt heeft dat het gaat om de variatie is het logisch dat leerlingen een horizontale as maken met alle mogelijke waarden, en niet een as met alleen de gevonden waarden.

Wanneer de leerlingen klaar zijn met hun grafiek hangen ze die op de wand en ze bekijken de grafieken die de andere leerlingen gemaakt hebben.

In het nagesprek komen een aantal belangrijke punten aan de orde.

- Je kunt de levensduur van de batterijen visualiseren, of het aantal batterijen dat dezelfde levensduur had. Daar horen verschillende namen bij: 'staafgrafiek' en 'frequentiegrafiek'. In het Engels heet zo'n laatste grafiek ook wel een 'line plot'.
- Als je de grootte van de verschillen wil laten zien moet je de getallen op de assen op regelmatige afstanden zetten. De afstanden op de as weerspiegelen dan de verhoudingen.
- Op de assen moet je een bepaalde schaal kiezen. Bij de staafgrafiek kun je bijvoorbeeld kiezen voor 10 minuten per vakje of voor 20 minuten per vakje. Bij 1 minuut per vakje past de grafiek niet op het papier.
- Eigenlijk visualiseer je in een frequentiegrafiek ook de levensduur, want de afstan-

► 5. Een staafgrafiek voor de witte batterijen



▲ 6. Een frequentie-grafiek

den op de horizontale as van afbeelding 6 maken ook de verschillen in levensduur zichtbaar.

- Beide typen grafieken leiden tot dezelfde conclusies: de levensduur van de batterijen verschilt nogal, en als je de grafieken voor grijs en wit naast elkaar legt kun je zien dat de grijze batterijen het beter doen.

### Les 3: van de ene grafiek naar de andere

In de derde les wordt een derde merk batterijen geïntroduceerd: Lastlong batterijen. Volgens de fabrikant is de levensduur van deze batterijen groter dan die van andere en de vraag is natuurlijk of dat klopt. De leerlingen krijgen een staafgrafiek die dit keer pas bij 90 minuten begint, zie afbeelding 7. De leraar vraagt om wat eerste reacties. Leerlingen merken op dat ook hier de levensduur van de batterijen nogal uiteenloopt, maar het lijkt erop dat ze het over het algemeen wel beter doen. Ze zijn eerst nog wat vaag in hun formuleringen; ze hebben het over 'de meeste batterijen', of over 'normale Lastlong batterijen'. De leraar daagt hen uit om hun ideeën meer precies te verwoorden. Dat levert formuleringen op als: 'de levensduur van de batterijen ligt rond de 120 minuten' en er zijn leerlingen die gaan uitzoeken wat precies de middelste batterij is. De leraar vraagt de leerlingen om op basis van de gegevens in de staafgrafiek een frequentiegrafiek te maken. Met opzet staan de getallen van de frequentiegrafiek precies onder de getallen van de staafgrafiek. Niet alle leerlingen maken daar direct gebruik van, maar op een gegeven moment merken ze het allemaal wel op. Met andere woorden: elk eindpunt van een staaf levert een kruisje op in de grafiek er recht onder. Dit helpt de leerlingen om in de nabespreking te formuleren wat de relatie is tussen die twee soorten grafieken.

In de krant, op televisie en internet komen we grafieken tegen in allerlei soorten en maten. Het is van belang dat we die goed leren lezen en interpreteren.



Wanneer de leerlingen al eens gehoord hebben over centrummaten als het *gemiddelde*, de *mediaan* en de *modus* - in de proefklas was dat het geval - dan kan een volgende stap zijn om leerlingen uit te laten zoeken of je met zulke maten ook de verschillen tussen de batterijmerken duidelijk kunt maken.

### Doel van de lessen

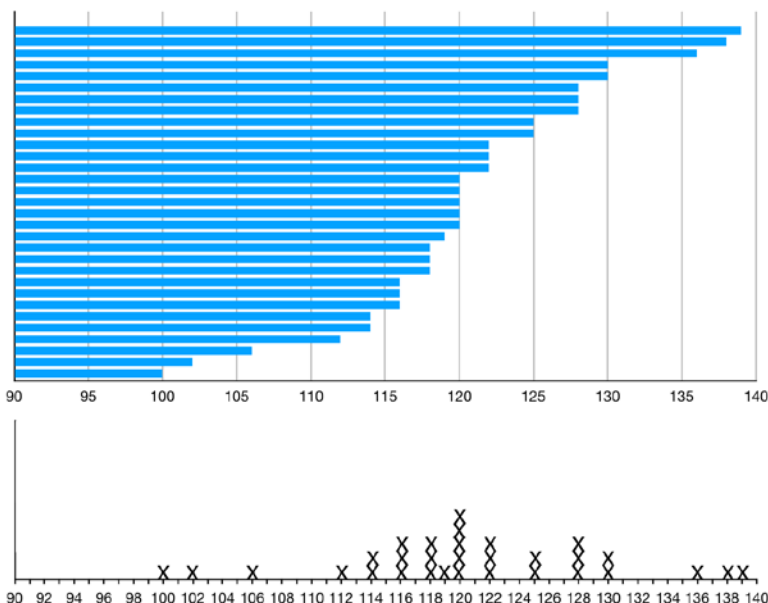
In de eerste les vergelijken de leerlingen de batterijen als het ware via het ordenen van de ruwe gegevens<sup>3</sup>. De volgende twee lessen gaan over de manier waarop je gegevens kunt representeren in een grafiek, waarbij het met name gaat om de relatie tussen een staafgrafiek en een frequentiegrafiek. Een achterliggend doel van de lessen is dat leerlingen leren redeneren over verdelingen. De gegevens van een bepaald merk batterij kunnen samen worden opgevat als een verdeling rondom een bepaalde waarde, met een bepaalde spreiding.

We gaan kort in op de grafieken die in het basisonderwijs aan de orde komen en op het redeneren over verdelingen.

### Soorten grafieken

In de krant, op televisie en internet komen we grafieken tegen in allerlei soorten en maten. Vaak zijn ze ook aangekleed met tekeningen: als het gaat over de groei van het aantal toeristen kunnen staven bijvoorbeeld zijn vormgegeven als stapels koffers. In de kern kunnen we echter drie hoofdtypen onderscheiden. Daarbij gaat het om datgene wat langs de assen wordt uitgezet.

▼ 7. Relaties tussen verschillende soorten grafieken



Bij een nominale staafgrafiek staan langs de as een aantal categorieën en de lengte van de staven geeft een grootte weer. Als het gaat om toerisme kunnen de categorieën bijvoorbeeld zijn waar toeristen vandaan komen: Azië, Noord-Amerika, Europa, enzovoort. De batterijen staan langs de as als een verzameling van afzonderlijke items.

Bij een frequentiegrafiek wordt op de ene as een grootte uitgezet en de andere as geeft aan hoe vaak een bepaalde waarde voorkomt. De batterijen met dezelfde levensduur worden nu bij elkaar genomen, wat zichtbaar maakt dat bepaalde waarden meer voorkomen dan andere. Op een vergelijkbare manier kun je de variatie in het geboortegewicht van baby's laten zien. In Nederland ligt het geboortegewicht na een normale zwangerschapsduur meestal rond de 3500 gram. Een geboortegewicht rond 2500 gram of 4500 gram komt ook voor, maar veel minder.

Een covariatie-grafiek laat zien hoe twee grootheden met elkaar samenhangen. Elk getallenpaar is dan een punt in de grafiek. Een voorbeeld is de groeicurve van kinderen, een lijngrafiek. Doorgaans staat op de horizontale as uitgezet hoe oud een kind is - de grootte is dus tijd - en op de andere as wat de lengte of het gewicht van een kind is. Soms wordt een staafgrafiek gebruikt om covariatie te laten zien, bijvoorbeeld als de lengte van een kind per leeftijd wordt weergegeven als een staaf.

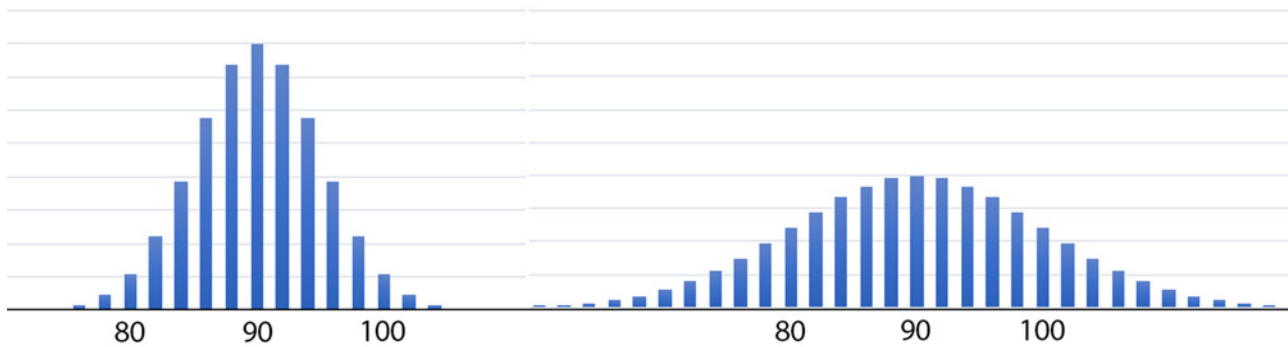
Bij deze indeling hebben we cirkeldiagrammen buiten beschouwing gelaten. Doorgaans gaat het daarbij ook om het vergelijken van categorieën, denk aan de nationaliteit van toeristen die naar Nederland komen.

In de beschreven lessen draait het om de relatie tussen de eerste twee soorten grafieken. In andere lessen komen covariatie-grafieken aan de orde, onder andere in activiteiten rond de groei van zonnebloemen, plantjes en pompoenen.

### Verdelingen

Een frequentiegrafiek is in zekere zin rijker dan een staafgrafiek, omdat zo'n grafiek heel direct de verdeling van de gevonden waarden weergeeft. We stimuleren de leerlingen om vanuit het idee van een verdeling te gaan denken, maar de term 'verdeling' wordt in deze lessen nog heel informeel gebruikt.

Een verdeling heeft een centrum en heeft een bepaalde spreiding. Afbeelding 8 geeft twee nette verdelingen weer; het zouden de gegevens kunnen zijn van twee soorten batterijen.



Beide verdelingen laten zien dat de gevonden waarden variëren rond de waarde 90 - het centrum van de verdeling - maar in de linker grafiek is de spreiding klein en in de rechter grafiek is de spreiding groot. Voor het bepalen van het centrum kunnen we het gemiddelde nemen, maar ook de mediaan of de modus. In het geval van zulke nette grafieken als die van afbeelding 8 - normaal verdeeld en symmetrisch - zullen ze alle drie uitkomen op hetzelfde getal, namelijk 90, maar als de verdeling minder regelmatig is gaan de waarden verschillen.

Het is jammer dat Nederlandse leerlingen op dit moment wel leren om een gemiddelde te berekenen, maar dat ze meestal niet leren wat een mediaan is. De mediaan is een simpele maat - je zoekt gewoon de middelste waarde op - en meestal liggen mediaan en gemiddelde heel dicht bij elkaar.

Denken in termen van verdelingen tilt het redeneren over data naar een hoger niveau. Het gaat nu niet langer om losse metingen, maar om eigenschappen van de verzameling van die metingen. Bij het vergelijken sets batterijen,

▲ 8. Verdelingen met een kleine en een grote spreiding

bijvoorbeeld, bepalen de uitschieters het beeld niet. Belangrijk is wat je normaal aan levensduur mag verwachten van een batterij en of de variatie tussen de batterijen klein is, of juist erg groot. Voor het eerste is het gemiddelde of de mediaan een goede maat. Maten voor de spreiding kunnen bewaard blijven voor het voortgezet onderwijs.

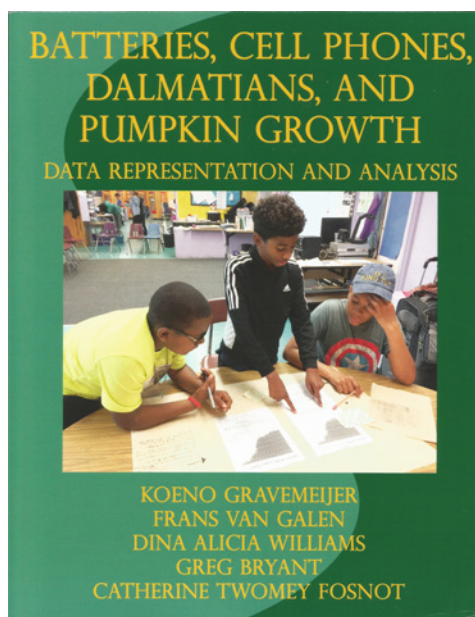
In de wereld buiten school dient een gemiddelde vaak als een vergelijkingsmaat, bijvoorbeeld het gemiddelde inkomen in Bangladesh ten opzichte van dat in Nederland, of het aantal auto's per inwoner in Amsterdam ten opzichte van het Nederlands gemiddelde. Vaak hoeft de vergelijking niet expliciet benoemd te worden, omdat de lezer die al vanzelf maakt. Als gezegd wordt dat tieners gemiddeld 3 uur en 20 minuten met hun mobieltje bezig zijn dan is onze reactie direct dat dat dan wel een flink stuk van de dag is.

Naar onze mening is het belangrijk dat in onderwijsactiviteiten het denken over verdelingen, centrummaten en spreiding steeds een functie moet hebben. De beschreven lessen beginnen met een duidelijk probleem, namelijk: 'Welke batterijen zijn beter?'. Eerst wordt nagedacht over *wat* je moet weten om deze vraag te kunnen beantwoorden en daarna wordt besproken hoe je de levensduur kunt meten. Vervolgens gaat het erom *hoe* je vanuit de verzamelde gegevens conclusies kunt trekken. Dit lijkt ons een betere aanpak dan dat leerlingen de procedure voor het berekenen van een gemiddelde geleerd wordt zonder dat er een aanleiding voor zo'n gemiddelde is.

#### **Probleemgericht onderwijs**

Statistiek en kans is een onderwerp dat niet kan worden vastgelegd in een aantal te leren procedures, het moet gaan om het ontwikkelen van inzicht. In de methode 'Contexts for Learning Mathematics' staat inzicht altijd voorop en dat heeft geleid tot keuzes die in een Nederlandse methode niet zo direct terug te vinden zijn.

Op de eerst plaats starten de kernlessen altijd vanuit een open, levensecht probleem en



◀ Voorpagina van de genoemde Amerikaanse reken-wiskundemethode Contexts for Learning Mathematics

daarbij wordt leerlingen veel tijd gegeven om dat probleem op hun eigen niveau op te lossen. De les rond het werken met de kaartjes zal 50 tot 60 minuten duren. De volgende twee dagen wordt aan hetzelfde probleem - met een wat aangepaste vraag - ook bijna de hele rekenles besteed.

Verder is de rol van de leraar in deze lessen meer die van een coach dan van een instructeur. De leraar geeft geen instructie, maar zorgt ervoor dat de ideeën die uit de verschillende groepjes komen ook door de andere leerlingen gehoord en begrepen worden. Natuurlijk stuurt de leraar de discussies, want net als elke coach houdt de leraar steeds voor ogen wat het leerdoel is en waar het denken van de leerlingen zich op moet richten. Daarbij zal de leraar op bepaalde ideeën veel meer ingaan dan op andere, met name als het ideeën zijn die tot een volgende stap kunnen leiden.

Het spreekt voor zich dat de rol van de leraar in zulke lessen niet eenvoudig is, want vooraf valt maar ten dele te voorspellen waar leerlingen mee zullen komen. Soms kan het

aanleiding zijn om ook iets nieuws aan de orde te stellen. Zo leidde in de proefklas het rekenwerk van Josh en Devin in de eerste les (afbeelding 3) tot een korte discussie over het gemiddelde, wat eigenlijk een onderwerp was voor latere lessen. Bij de grijze en witte kaartjes klopt het dat je alle minuten bij elkaar kunt tellen, maar, zo vroeg de leraar, wat als het aantal gegevens/het aantal kaartjes niet gelijk is?

Het achterliggende idee is dat de lessen zich richten op een gezamenlijk proces van ideeën-ontwikkeling, waarin alle leerlingen worden uitgedaagd om mee te denken. De leerlingen zullen vooral bezig zijn met het vinden van een handige oplossing voor een opgegeven probleem, maar de leraar houdt ook steeds de overkoepelende, wiskundige ideeën in het oog. Waar mogelijk zal de leraar de leerlingen aansporen tot reflectie: Weten jullie nog hoe we dat aanpakten? Wat hebben we daarvan geleerd? Misschien kan het nieuwe onderwerp 'data, statistiek en kans' een aanleiding zijn om ook op dit punt te zoeken naar veranderingen in het curriculum.

#### Noten

- <sup>1</sup> Contexts for Learning Mathematics. New London, USA: New Perspectives on Learning. De afbeeldingen in dit artikel zijn overgenomen met toestemming van de uitgever.
- <sup>2</sup> Gravemeijer, K., van Galen, F., Williams, D.A., Bryant, G. & Fosnot, C.T. (2019). *Batteries, cell phones, dalmatians, and pumpkin growth*. New London: New Perspectives on Learning.
- <sup>3</sup> Een vergelijkbare les met Nederlandse leerlingen wordt beschreven in van Galen, F. en van Eerde, D. (2017). Statistiek in het basisonderwijs. In: van Zanten, M. (red.) (2017). *Rekenen-wiskunde in de 21e eeuw; ideeën en achtergronden voor het primair onderwijs* (pp.43-52). Verwant is ook het onderzoek van Lyn English dat door Kees Hoogland besproken wordt in het vorige nummer (Volgens Bartjens 2019, 39-2, p. 33).



## Bewijs uit het gerijmde

Jaap van Lakerveld | Illustratie: Marjolijn Brouwer

## Statistiek voor beginners. Verzamelingenleer

Jaren hoorde ik als ventje bij de peuters,  
Maar nu ga ik naar school toe om te wennen,  
Een verzameling nieuwe kinderen leren kennen  
Bestaand uit elementen genaamd kleuters.

Ik weet nog dat ik bij de peuters kwam,  
De baby status ver achter mij liet,  
Iets wat zich elegant afbeelden liet,  
In wat men aanduidt als venndiagram.

Ik weet dat ik me op een grens bevind.  
Omdat ik nu alleen nog maar kom wennen,  
Een grens van twee systemen kom verkennen,  
Beschouw ik mij nu als een doorsnee-kind.

Van het beste van twee werelden ben ik deelgenoot  
Als peuter ben ik klein en als kleuter ben ik groot

