

# Productief oefenen

*Julie Menne, Menne Instituut*

## Inleiding

Productief oefenen is een krachtig didactisch middel dat inzetbaar is door de gehele basisschool. Het combineert eigen producties van leerlingen met oefenen en bevordert zodoende het leren van basiskennis- en vaardigheden. Doordat leerlingen creatief nadenken over de leerstof, komen ze bovendien tot dieper inzicht. In dit artikel wordt per cluster van twee groepen een voorbeeld gegeven van een productieve oefening. Hiermee wordt duidelijk wat onder productief oefenen in het algemeen en het laten maken van eigen producties in het bijzonder wordt verstaan.

## Groep 1&2: Bekerbal

Om alvast even te oefenen voor de naderende sportdag heeft de leerkracht *Bekerbal* meegenomen. Dit bestaat uit zestig bekers in zes verschillende kleuren.<sup>1</sup> Ze laat tien bekers van eenzelfde kleur zien. Wie kan er een toren bouwen met deze bekers? Nadat kinderen spontaan de bekers zijn gaan tellen en in en op elkaar hebben gestapeld, vraagt de leerkracht of ze een toren volgens de principes van het halfsteensverband kunnen bouwen. Dat lukt (Afb. 1).

*Het is een driehoek geworden*, concludeert Simon. De leerkracht trekt met haar vinger langs de zijden en telt hardop: *Een, twee, drie, drie hoeken. Ja, de toren heeft de vorm van een driehoek.* De andere kinderen zien het nu ook. *Hoeveel bekers zitten er in de toren?, Als dit een rij is (wijst de onderste laag aan), hoeveel rijen telt de toren dan?, Hoeveel bekers staan er in elke rij?* Ze beweegt haar vinger van de onderste rij naar de bovenste rij. De kinderen tellen: *Vier, drie, twee, een.* Dan kondigt ze aan zogenaamd de bal te gaan gooien en dan moeten de kinderen zeggen hoeveel bekers er zijn omgegooid. Ze vraagt de kinderen de ogen te sluiten, hun hoofd op de knieën te leggen en te denken aan de driehoek. *Zie je de driehoek met vier rijen nog aan de binnenkant van je ogen? Dan is het goed.* Als niemand kijkt, haalt ze vier bekers weg en verstopt deze achter haar rug. *Hoeveel zijn er weg?* Tamara weet het: *Vier.* De leerkracht vraagt dan: *Hoeveel zijn er over?* Verschillende kinderen zeggen *Zes!* als antwoord. *Ja, want samen zijn het tien bekers,* vult de



*Afb. 1. Lisa bouwt een toren met tien bekers volgens halfsteensverband.*

<sup>1</sup> De bekers maken deel uit van de kist *Rekenmaterialen oefenlessen groep 1&2.*

leerkracht aan. Hiermee lijkt de kous af, maar de leerkracht vraagt: *Wijs eens aan waar jij denkt dat er bekers zijn weggehaald.* Volgens Tamara zijn de bekers van de onderste rij weggenomen (Afb. 2).



*de onderste rij weggenomen.*

Zij heeft goed aan de oorspronkelijk driehoek gedacht. De leerkracht verklapt dat ze de bekers niet van de onderste rij heeft afgehaald, maar van het trappetje. Om te laten zien wat ze bedoelt, voegt ze aan de zijkant van de toren van onder naar boven per laag een beker toe. Vervolgens herhaalt ze de oefening een paar keer. Bij de vraag hoeveel bekers er zogenaamd zijn omgegooid, brengt ze de oorspronkelijke vorm van de toren in herinnering. Door hieraan te denken kunnen kin-

deren eenvoudig achterhalen hoeveel er weg zijn. Ze tellen (verkort) wat er niet meer is. De leerkracht vraagt als er slechts een, twee of drie bekers blijven staan, hoe je makkelijk kunt bepalen hoeveel er zijn omgegooid. *Door terug te tellen kun je ook bepalen hoeveel er weg zijn.*

Vervolgens krijgen de bekers een plaats in de rekenhoek. Hier kunnen kinderen in groepjes de oefening naspelen. De leerkracht intervenueert daarbij door te vragen een toren te bouwen met twee verschillende kleuren bekers. Vervolgens stelt ze vragen over de opbouw. *Hoeveel blauwe, hoeveel roze bekers?, Welke opgaven passen daarbij?* (Afb. 3) ( $4 + 1 = 5$ ;  $3 + 2 = 5$ ;  $5 + 5 = 10$ ;  $10 - 5 = 5$ ; ...)



*Afb. 3. Welke opgaven passen erbij?*

Of ze vraagt bijvoorbeeld de toren groter te maken door het toevoegen van zogenaamde trappetjes. *Hoeveel bekertjes heb je voor elke volgende trap nodig?, Hoeveel bekertjes houd je over?*

### Productief versus reproductief

In deze voorbeeldles komen twee voorbeelden van productief oefenen naar voren. Zo is er sprake van een flexibele aanpak. De leerkracht gaat door op wat de kinderen inbrengen. Simon ziet er een driehoek in en de leerkracht brengt bij het bepalen van het aantal weggehaalde bekertjes het beeld van de driehoek in herinnering. Tamara meent dat de onderste rij is weggehaald en de leerkracht laat zien dat een trappetje weghalen evenveel bekertjes telt als het weghalen van de onderste rij. Door de kinderen te laten experimenteren met de bekertjes en de interventies daarbij, is deze oefening voortbrengend en scheppend, ook een kenmerk van productief oefenen. In onderstaand overzicht staan de belangrijkste verschillen tussen productief en reproductief oefenen in kernwoorden.



Afb. 4. De toren groter gemaakt.

Productief versus Reproductief oefenen	
Flexibele didactische aanpak	Strakke methodische regels
Voortbrengend	Nabootsend
Beoefenen	Inoefenen
Flexibiliseren	Automatiseren
Meersporig, gevarieerd rekenen	Eensporig, receptmatig rekenen
Uitprinten	Inprenten

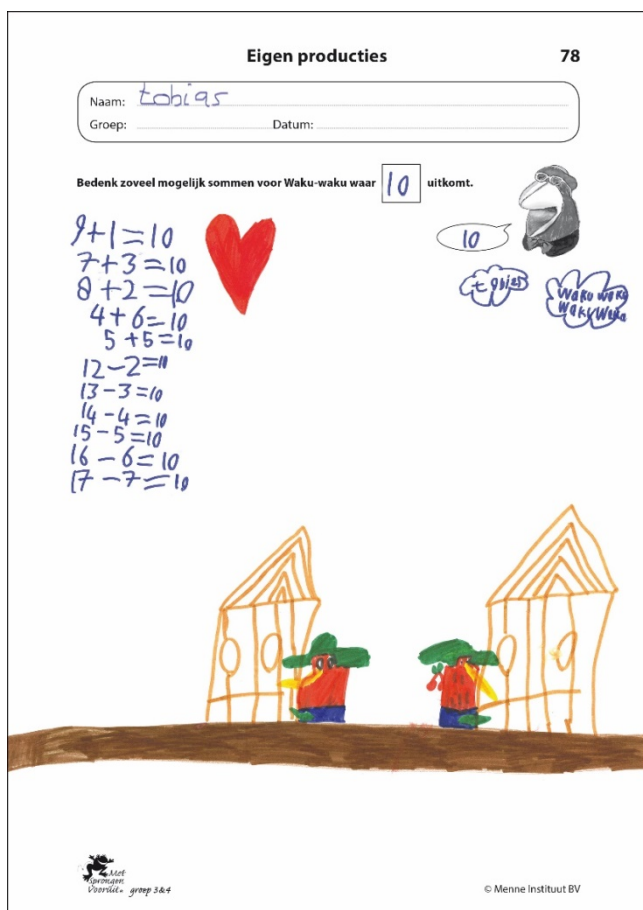
### Groep 3&4: Waku-waku zegt: Tien!

De kinderen kennen de verliefde harten uit hun hoofd en de leerkracht staat met een handpop aan haar hand voor de groep.<sup>2</sup> *Dit is Waku-waku en hij kan alleen maar tien zeggen. Om hem nu slim te laten lijken bedenk je zoveel mogelijk opgaven waar tien uitkomt.*<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Een verliefde hartenpaar bestaat uit twee hartjes die elk een getal bevatten en aan elkaar vastzitten. De twee hartjes zijn samen tien. Een hartenpaar kan open en dicht worden geklapt. Dus als een kind slechts één hart ziet, kan het bedenken wat op het andere hart staat. In totaal zijn er zes paren: 5 en 5; 6 en 4; 7 en 3; 8 en 2; 9 en 1; en 10 en 0. De verliefde harten maken deel uit van de kist *Rekenmaterialen oefenlessen groep 3&4*.

<sup>3</sup> Waku-waku maakt deel uit van de kist *Rekenmaterialen oefenlessen groep 3&4*.





Afb. 5. Werkblad 78: Waku-waku zegt: Tien!<sup>4</sup>

Wie alleen aan de verliefde harten denkt, is snel klaar. De leerkracht oefent daarom eerst mondeling. Ze laat Waku-waku ja knikken als de opgave al is gezegd en nee schudden als het antwoord geen tien is. Wellicht is er een kind dat aan opgaven als: *elf eraf één of twintig eraf tien* denkt. Op het rekenrek kan aan de rest van de kinderen worden getoond dat dit inderdaad tien is. Eraf-opgaven kunnen dus ook. *Als je aan eraf-opgaven denkt, zijn de mogelijkheden oneindig*, zegt de leerkracht. Ze noteert de opgave  $11 - 1$  op het bord. Vervolgens schrijven de kinderen zoveel mogelijk opgaven voor Waku-waku op (Afb. 5). De opgaven van de mondelinge bespreking laat ze op het bord staan. De zwakkere rekenaars zullen ze overschrijven en dit als aanmoediging ervaren.

Alle eigen gemaakte producties dienen als matras voor zijn bed in de klas. Hoe meer velletjes met opgaven, hoe zachter Waku-waku ligt en des te beter hij slaapt. En hoe meer uitgerust Waku-waku is, des te meer hij van de kinderen kan leren. In dit voorbeeld bevestigt de leerkracht een doosje met het getal 10 aan de muur. Ze maakt bovenin dit doosje een gleuf. Gedurende de week waarin de kinderen opgaven moeten maken waar tien uitkomt, kunnen ze hun producties in het doosje met 10 posten. Waku-waku houdt de wacht bij de producties. Er is voor een bed met een matras en een deken gezorgd. Na verloop van tijd breidt het aantal doosjes aan de muur zich uit. Waku-waku leert namelijk ook nog andere getallen zeggen (Afb 6).

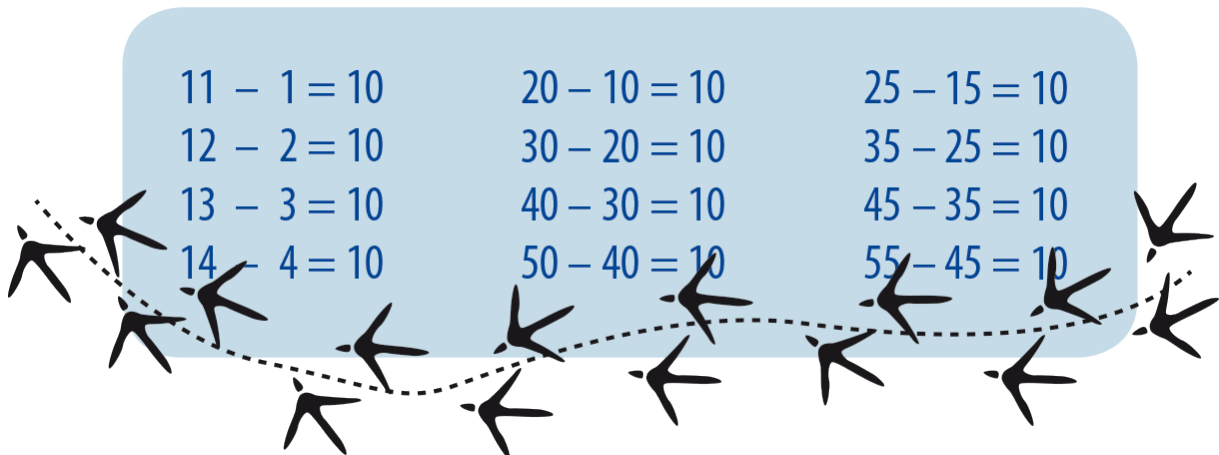


Afb. 6. Waku-waku leert steeds meer getallen.

<sup>4</sup> Dit werkblad zit in de werkbladenmap die deel uitmaakt van de kist *Rekenmaterialen vervolg groep 3&4*.

### Eigen producties generen weer nieuwe producties

Van tijd tot tijd analyseert de leerkracht het werk van de kinderen. Ze zet eigen producties van kinderen die volgens een bepaalde systematiek werken op het bord. Onder de rijtjes tekent ze de pootafdrukken van Waku-waku (Afb. 7). Hij heeft zogenaamd de rest van de rijtjes uitgeveegd. De kinderen krijgen de opdracht een rijtje te kiezen en deze zo lang te maken als ze kunnen.

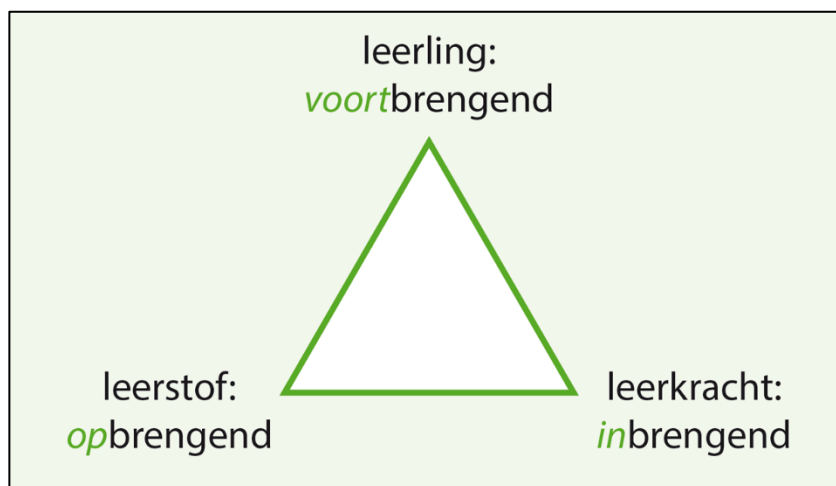


Afb. 7. Waku-waku heeft met zijn pootjes de rest van de rijtjes uitgeveegd. Kies een rijtje uit en maak hem zo lang je kunt.

De leerkracht verwoordt hoe je kunt weten wat de volgende opgave in een rijtje moet zijn: Elf eraf één is tien wordt gevolgd door twaalf eraf twee is tien en daarna komen dertien eraf drie is tien en veertien eraf vier is tien. Het aftrektal en de aftrekker worden allebei telkens met eentje opgehoogd. De volgende moet dus vijftien eraf vijf is tien zijn. Dat het verschil telkens tien blijft is ook logisch, want als je allebei op dezelfde dag een jaartje ouder wordt, blijft de een altijd hetzelfde aantal jaren ouder dan de ander.

### Eigen producties als didactisch middel

Met het laten maken van eigen producties heeft de leerkracht een didactisch middel in handen waarmee de essentie van het productief oefenen in de praktijk kan worden gebracht. Zij heeft een inbrennende rol en bedenkt dat Waku-waku bijvoorbeeld tien kan zeggen. De kinderen hebben een voortbrennende rol en produceren zoveel mogelijk opgaven waar tien uitkomt. Voor de leerstof is dit opbrennend. Kinderen ontdekken structuren in de telrij, eigenschappen van operaties, de relatie met andere operaties en strategieën voor het handig en verkort oplossen van opgaven. Ook raken ze vertrouwd met de formele opgaventaal en worden basisfeiten met behulp van eigen producties (verder) ingeslepen. Eigen producties bestaan hier hoofdzakelijk uit het bedenken van opgaven door de kinderen. De kern van het productieve oefenen – het zogenaamde productivisme – ziet er in de didactische driehoek als volgt uit (Afb. 8):



Afb. 8. Didactische driehoek van het productivisme.

### Groep 5&6: Vreemde eend in de bijt

De leerkracht kondigt aan dat het getal van de dag *ongeveer honderd* is. *Wie weet een opgave waar ongeveer honderd uitkomt? Schrijf maar op je wisbordje.*<sup>5</sup> Ze geeft als tip dat ze aan de vrienden van honderd kunnen denken en daar dan iets van af kunnen halen of bij kunnen doen. Gedacht kan dus worden aan  $50 + 51$  of  $38 + 60$ . *Wie weet een aftrekopgave waar ongeveer honderd uitkomt?* De kinderen houden hun wisbordje omhoog en ze noteert een aantal opgaven van de kinderen op het bord. Ze komen met opgaven als  $101 - 2$  en  $200 - 101$ . Dit doet haar besluiten ook naar aftrekopgaven met grotere getallen te vragen.  $1000 - 901$  en  $543 - 444$  zijn daar voorbeelden van. *Tussen welke getallen moet het antwoord liggen zodat we nog kunnen spreken van ongeveer 100?* De kinderen kiezen als ondergrens negentig, dus  $-10$ , dan moet de bovengrens  $+10$ , dus honderdtien zijn. Vervolgens krijgen ze de opdracht om opgaven met *ongeveer 100* als uitkomst te noteren op hun wisbordje. Dit mogen ook keer- en deelopgaven zijn. *Maar let wel, er moet één vreemde eend in de bijt tussen zitten. Deze hoort er niet bij.* Voorbeelden van opgaven met uitkomst ongeveer 100 en een vreemde eend in de bijt zijn:

$70 + 28$	$3 \times 33$	$1000 \div 11$
$9 \times 10\frac{1}{2}$	$295 - 97$	$2000 \div 22$
$145 - 54$	$66 + 33$	$601 - 499$

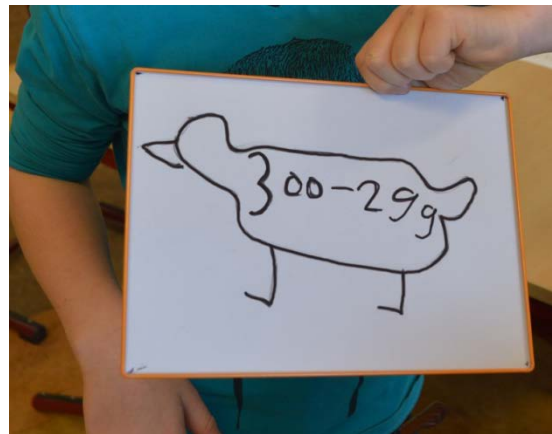
Afb. 9. '295 - 9' is de vreemde eend in de bijt, omdat hier niet 'ongeveer 100' uitkomt.

<sup>5</sup> De wisbordjes en stiften maken deel uit van de kisten *Rekenmaterialen oefenlessen groep 3&4, 5&6 en 7&8* en zijn ook los verkrijgbaar.

Wie de voorkant heeft volgeschreven, tekent op de achterkant van zijn wisbordje een eend en noteert daar de opgave in die op de voorkant als vreemde eend in de bijt geldt. Vervolgens zoeken de kinderen die klaar zijn bij elkaar de vreemde eend in de bijt. Dit gaat volgens de coöperatieve werkvorm *Mixen en fixen*: de kinderen lopen door het lokaal met hun wisbordje en een hand in de lucht ten teken dat ze vrij zijn. Als ze iemand tegenkomen die ook vrij is, begroeten ze elkaar met een *high five*. Vervolgens laten ze elkaar de voorkant van hun wisbordje zien en wijzen ze bij elkaar de vreemde eend in de bijt aan (Afb. 10, 11). Voordat ze de wisbordjes omdraaien leggen ze uit waarom ze dat denken. Tot slot bedanken ze elkaar met een *high five* en lopen allebei verder op zoek naar een ander vrij kind waarvan ze de vreemde eend nog niet hebben opgezocht. In de nabespreking stelt de leerkracht aan de orde hoe je de vreemde eend in de bijt kan vinden zonder van elke opgave het precieze antwoord te berekenen. In een volgende oefenles herhaalt ze deze oefening met andere mooie, ronde getallen zoals duizend en tweehonderdvijftig.



Afb. 10. Wie klaar is, loopt rond en zoekt bij een ander kind de vreemde eend in de bijt.



Afb. 11. Ter controle wordt het wisbordje omdraaid. De vreemde eend is zichtbaar.

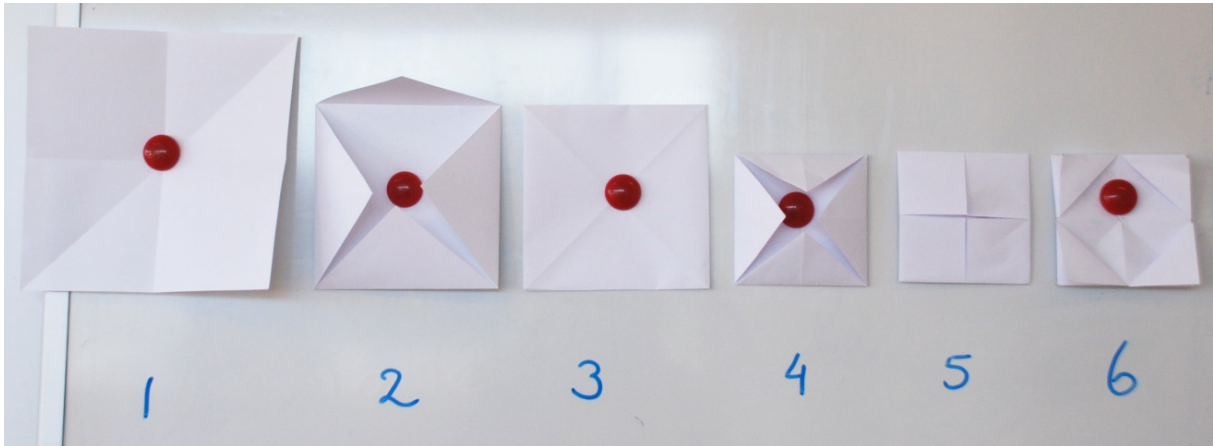
In deze productieve oefenles staat het gebruik maken van regels voor afronden bij bewerkingen centraal. Het algemene doel van schattend rekenen is dat kinderen eind groep 6 getallen tot 100.000 kunnen afronden volgens de standaardregel en ze kunnen van afgeronde getallen aangeven in welk gebied het oorspronkelijke getal gelegen heeft. Ook kunnen ze optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen in dit getallengebied waarbij ze afronden volgens de standaardprocedure. Het laten maken van eigen producties heeft hierbij een aantal belangrijke voordelen. Deze voordelen worden toegelicht aan de hand van de voorbeeldles voor groep 7&8: *Breukenhappen*.

## Groep 7&8: Breukenhappen

De kinderen hebben samen met de leerkracht een breukentafel ingericht en zodoende kennisgemaakt met uitspraak en notatie van breuken, een aantal aspecten van breuken (deling, maat en deel-geheel) en modelcontexten voor breuken (pizza, schaakbord, schaal tank, verzameling poppetjes). Ze zitten echter nog steeds in de



fase van de begripsvorming omtrent breuken en de leerkracht besluit het begrip verder te verdiepen aan de hand van het laten maken van een breukenhappertje. Van een vierkant vel papier vouwen de kinderen het happertje aan de hand van de vouwreeks (Afb. 12).



Afb. 12. Vouwreeks voor het happertje.

Het vouwsel verkregen bij stap 6 draaien ze om en vervolgens tekenen ze voor elk half driehoekje een opdracht. In totaal moeten er acht opdrachten worden getekend. De antwoorden worden achter de betreffende driehoekjes geschreven. De vraag moeten ze zelf onthouden. De leerkracht heeft een voorbeeld-happertje gemaakt waarop elk model (cirkel, rechthoek, strook en groep) vertegenwoordigd is. Ze bespreekt haar happertje voordat de kinderen aan de slag gaan. De vraag bij de vijf smileys (groepjesmodel) waarvan er vier lachen luidt: *Welk deel van de smileys lacht?* ( $\frac{4}{5}$ )

Als er een aantal kinderen klaar is kan het *Mixen en fixen* beginnen. Dit gaat zoals beschreven bij de oefenles: *Vreemde eend in de bijt*. Nieuw is dat een gevormd paar eerst de code kraakt en dan een opdracht kiest. Het ene kind noemt daartoe een breuk (met in de noemer minimaal 2 en maximaal 10), bijvoorbeeld  $\frac{1}{6}$ .



Afb. 13. Op het breukenhappertje tekenen de kinderen acht opdrachten. De antwoorden noteren ze achter de opdrachten.



Het andere kind vult tellend met breuken aan tot 1, in dit voorbeeld:

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6} \text{ en } \frac{5}{6}, \text{ (want } \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1).$$

Hij beweegt hierbij op elke tel met zijn duimen en wijsvingers in de daarvoor bedoelde driehoekjes het happertje van de ene stand (er zijn vier tekeningen te zien) naar de andere stand (er zijn vier andere tekeningen te zien). Op de laatste tel wordt gestopt en kiest het ene kind een opdracht van de vier opdrachten die nu te zien zijn. De ander stelt de vraag die hierbij hoort. Het antwoord wordt gecontroleerd door het happertje te openen. Hierna wisselen ze van rol.

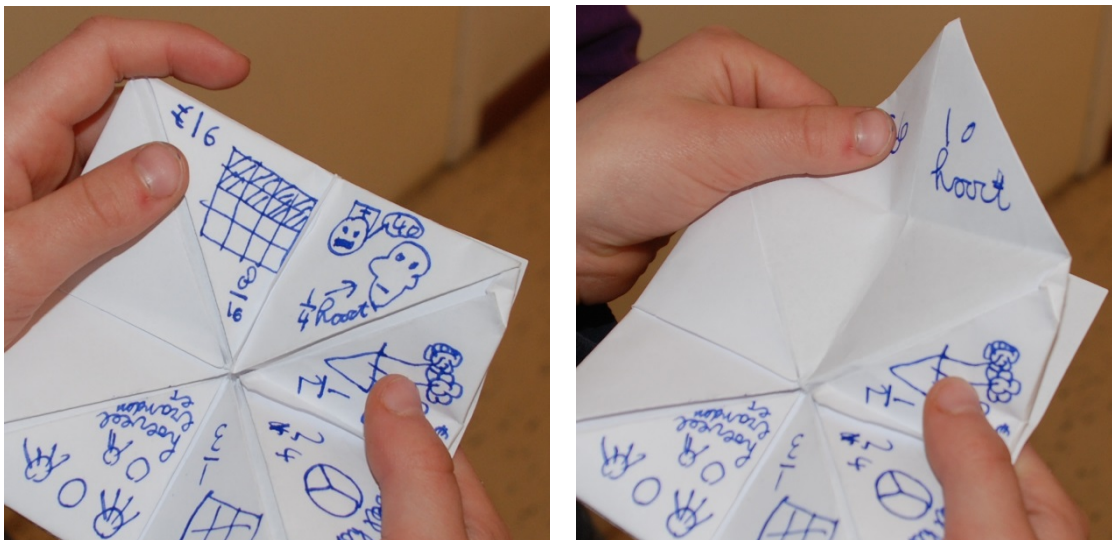
In de nabespreking worden opmerkelijke opdrachten interactief, klassikaal besproken. *Kijk nog eens naar de opdracht met de zes poppetjes waarvan er twee rood zijn en vier groen (Afb. 13). Welk deel is rood?*

Dat is  $\frac{2}{6}$ , maar ook  $\frac{1}{3}$ !

## Tot besluit: voordelen eigen producties

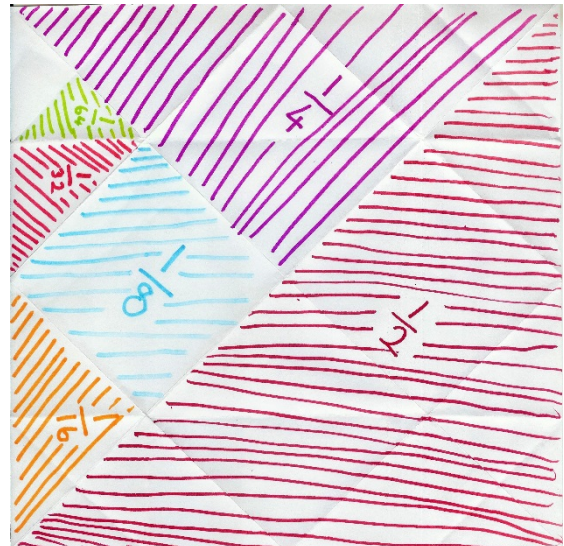
In reguliere methoden ontbreken productieve oefeningen en het laten maken van eigen producties veelal. Wat is nu het voordeel van zo'n les, vergeleken met een methodegebonden les? Het laten maken van eigen producties:

- Geeft inzicht in wat kinderen kunnen.  
Tekenen ze de voorbeelden alleen maar na? Of kunnen ze erop variëren? Lukt het om de opdracht erbij te verzinnen of hebben ze steun aan woorden op het bord zoals *Welk deel van ...?* Kunnen ze met kommagetallen, procenten en verhoudingen ook een happertje maken?
- Sluit aan op de zone van de naaste ontwikkeling.  
Gaat deze oefening goed dan kan er ook eens een breukenhappertje worden gemaakt waar de breuk als operator fungeert (Afb. 14). Als dit niet lukt, moet wellicht terug gestapt worden naar het maken van een happertje waarmee de tafels van vermenigvuldiging inge oefend kunnen worden.



Afb. 14. De dokter zegt: Veertig. De patiënt hoort voor één vierde deel en antwoordt: Tien!

- Biedt mogelijkheden om te differentiëren.  
Inhoudelijke differentiatie: Ieder bedenkt naar eigen kunnen een happertje. Voor kinderen die dat willen is er een voorbeeld-happertje.  
Organisatorische differentiatie: Als er zes à tien kinderen klaar zijn met het vullen van hun happertje kan het rondlopen en oplossen van elkaars happertje reeds beginnen. Niet iedereen hoeft acht opdrachten te bedenken. Als je in beide standen twee opdrachten hebt, valt er tijdens Mixen en fixen ook al wat te kiezen.
- Helpt kinderen sneller door de leerstof.  
Bij het maken van happertjes kruipen de kinderen in de rol van methodemakers. Dit betekent dat ze boven de leerstof uitstijgen. In korte tijd boeken ze meer leerrendement dan wanneer ze slechts volgen van wat iemand anders voor hen heeft bedacht.
- Maakt schrappen in de methode eenvoudiger.  
Alles is aan de orde geweest: soorten breuken, aspecten van breuken, modelcontexten / ondersteunende modellen.
- Werkt stimulerend en motiverend.  
Alleen al het vooruitzicht te mogen rondlopen als je happertje af is, zorgt voor enthousiasme en vlijt.
- Genereert weer nieuwe producties.  
Laat het happertje openvouwen en vraag :  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$  en:  $\frac{1}{64}$  op de achterkant te arceren (Afb. 15). Wat valt op? Tot hoever kun je doorgaan?



Afb. 15. Opgevouwen happertje met een voorbeeld van oplossing.

#### Menne Instituut

Onder de naam *Met Sprongen Vooruit* geeft het Menne Instituut gerichte cursussen in de rekenwiskundendidactiek. Er zijn cursussen voor leerkrachten in groep 1&2, 3&4, 5&6 en 7&8. Kenmerkend voor de cursussen is dat leerkrachten zich bekwamen in het geven van productieve oefenlessen. Deze oefenlessen geven ze al direct na de eerste bijeenkomst, drie keer per week, steeds gedurende een kwartier. De lessen passen in de leerlijnen en zijn dus inzetbaar naast elke rekenwiskundemethode. Doordat de lessen interactief van aard zijn en eigen producties de rode draad vormen, vervullen ze binnen de kortste keren zelfs een kartrekkersfunctie op reguliere rekenwiskundemethoden. Cursus- en rekenmaterialen ondersteunen de leerkracht hierbij. Ze dragen bij aan de benodigde vakdidactische kennis, vaardigheden, inzichten en attitude om goede productieve oefenlessen te kunnen geven. Meer informatie vindt u op <http://www.metsprongenvooruit.nl/>.

Menne, J. (2017). Productief oefenen. In: M. van Zanten (red.). *Rekenen-wiskunde in de 21<sup>e</sup> eeuw. Ideeën en achtergronden voor primair onderwijs* (pp. 91-100). Utrecht / Enschede: Panama, Universiteit Utrecht / NVORWO / SLO.