# Weg van het cijferen

## Rekenmethodes vanaf 1800 tot heden

Adri Treffers

# Weg van het cijferen

Tekstverzorging: Hannie van Dongen
Omslagfoto: Collectie Spaarnestad
Peike Reintjes
ISBN: 978909028793
NUR: 846
Drukwerk: Wilco, Amersfoort
Bestellingen à €30,- per boek
via uitgeverij Reni Casoli
e-mail: reni.casoli@gmail.com

Adri Treffers

# Weg van het cijferen

## Rekenmethodes vanaf 1800 tot heden

Universiteit Utrecht

Uitgave in het kader van het
Freudenthal project
Focusgebied
*Education for Learning Societies*

Universiteit Utrecht

# Inhoudsopgave

**7 Overzicht 1800-2010**



**APPENDIX**

**Balans van de vernieuwing 1985-2010**

Opgedragen aan de grondleggers
van Wiskobas (hfst. 5):

Edu Wijdeveld
Fred Goffree

# Voorwoord

In mijn lagere schooltijd jaren '40 kreeg ik les met 'Fundamenteel Rekenen' (Diels & Nauta). Hoofdrekenen kreeg daarin veel aandacht, maar er werd ook veel gecijferd – meer dan de methode aanbood. Dat kwam door de kolossale worteltreksommen waarop we iedere vrijdagmiddag zwoegden – een soort staartdelen, maar dan volgens een veel ingewikkelder rekenvoorschrift.
Ik kan me van destijds slechts één interessant rekenprobleem herinneren: de bekende paradox van 'Achilles en de schildpad', een vertelling die niet in het rekenboek maar in een hardopleesboek stond.
Toen in de jaren '70 dit probleem en andere klassieke rekenpuzzels op de ontwerpschool van het Wiskobas-project werden geïntroduceerd, moest ik aan dit voorval terugdenken, en vooral ook aan schoenmaker Breda, de vader van mijn vriendje. Het volgende voorbeeld van Wiskobas (Leen Streefland) had de schoenmaker ons destijds ook al verteld.

De erfenis van Anwar

> Een oude Arabier, Anwar genaamd, had in zijn testament bepaald dat zijn oudste zoon de helft, de tweede zoon een kwart en de derde zoon een vijfde van zijn kudde kamelen zou erven.
> Bij zijn dood liet Anwar 19 kamelen na. Wat nu te doen?
> Zijn zonen konden het niet eens worden en riepen daarom de hulp van de moefti in. Die spoedde zich tegen de avond op zijn witte kameel naar de redetwistende zonen, hoorde hun relaas nadenkend aan en loste het geschil als volgt eenvoudig op. Hij voegde zijn eigen kameel aan Anwars nalatenschap toe en stelde vervolgens voor iedere erfgenaam zijn rechtmatige erfdeel van die kudde van 20 (!) kamelen vast, te weten de

helft, een kwart en een vijfde, achtereenvolgens 10, 5 en 4 stuks vee. De overblijvende witte kameel wees de wijze uiteraard weer aan zichzelf toe. Hij zegende de zonen één voor één, en ging in vrede heen - de opkomende maan liep met hem mee.

Tot op de dag van vandaag wordt het verhaal van deze curieuze rechtspraak met bewondering en respect in Anwars familie verteld.

Ra, ra hoe kan dit?

Deze en soortgelijke rekenproblemen zijn goed bruikbaar om het leren opereren met breuken te introduceren. Zoek bijvoorbeeld bij $^2/_3 + {}^1/_5 = \ldots$ een passende kudde (van 15 kamelen). Daarna is eenvoudig te bepalen dat de uitkomst van deze optelling 10 + 3 = 13 kamelen is, ofwel $^{13}/_{15}$ deel van de kudde: $^2/_3 + {}^1/_5 = {}^{13}/_{15}$. De deling $^2/_3 : {}^1/_5 = \ldots$ wordt op deze wijze omgezet in $10 : 3 = 3^1/_3$. Algemeen geldt dat volgens deze methode voor het opereren met breuken eerst naar een geschikte 'maat' gezocht moet worden om de betreffende breuken te kunnen elimineren, dus te vervangen door hele getallen.

En dan nog de maan die met de moefti meeliep - een element dat later aan de vertelling werd toegevoegd.

Hoe is dat verschijnsel te verklaren? Deze vraag voert ons naar een totaal ander terrein van het reken-wiskundeonderwijs namelijk de meetkunde, of beter gezegd, de meetkundige wereldoriëntatie - een geheel nieuw leerdomein dat door de Wiskobasgroep veelzijdig werd uitgewerkt.

Wat je bij de maan ervaart wordt verklaard door de hoekverandering waaronder je objecten bij zijdelingse verplaatsing ziet, ofwel de mate waarin je het hoofd moet draaien om die objecten in het vizier te houden. Als die hoek niet of nauwelijks verandert, loopt het object met je mee en als dat wel gebeurt, blijft het achter of loopt het vooruit. Door het experiment werkelijk met de leerlingen uit te voeren, wordt het probleem opgelost. Ervaren-verklaren-verbinden, daar gaat het kort gezegd bij deze meetkundige wereldoriëntatie om.

De vertelling van Anwar en zijn kamelen heb ik destijds vaak in lezingen als het symbool van het nieuwe, realistische reken-wiskundeonderwijs gebruikt. Een ideaaltypisch voorbeeld, omdat daarin alle vier elementen aanwezig zijn die goed rekenonderwijs kenmerken.

1) De vertelling bevat problemen van de A-categorie.
2) Ze wekken verwondering.
3) Kunnen inzicht verschaffen.
4) En men kan er plezier aan beleven.

Arthur Koestler drukte deze indicatoren speels met letters uit:

A
AH
AHA
HAHA

De Wiskobasgroep waartoe ik behoorde, vroeg zich in de jaren '70 af of het in de nabije toekomst zou lukken het voornamelijk mechanistische rekenonderwijs een meer probleemgerichte wending te geven nu de overheersende invloed van de toelatingsexamens v.o. met zijn kolossale vorm- en denksommen geleidelijk was weggeëbd.
Zouden rijke problemen, thema's en vernieuwde leergangen in de nieuwe rekenmethodes worden opgenomen?
Zou de eigen inbreng van de kinderen meer gehonoreerd worden?
Zou er meer ruimte komen voor interactief- klassikaal onderwijs?
Tien jaar later bleek dat methodeschrijvers zich inderdaad door de Wiskobas-aanpak lieten inspireren.
Toen eind jaren '80 de nationale einddoelstellingen voor het rekenonderwijs op de basisschool werden samengesteld, kon de ingezette methodisch-didactische vernieuwing volop voortgang vinden – zij het niet zonder problemen, zoals in de historische analyse naar voren zal komen.

Deelname en distantie waren, zo blijkt uit het voorgaande, de posities van de auteur bij het schrijven van dit boek.
Hij was zelf actor op het terrein van de rekendidactische vernieuwing in de afgelopen tientallen jaren en moest bij de didactische analyse van de rekenmethodes uiteraard afstand van zijn eigen visie op het gewenste rekenonderwijs nemen. Moeilijk was dat echter niet, omdat de methodes zelf de weg traceerden. En dat niet alleen: in de laatste 25 jaar kwamen ook belangrijke onder-

zoeksresultaten van de periodieke Cito-peilingen over methodes beschikbaar waar men evenmin omheen kan.
Al deze relevante kwalitatieve en kwantitatieve gegevens zijn in deze didactische studie verwerkt. De historie blijkt een rijke bron aan didactische inzichten te bevatten die ook voor het onderwijs van vandaag nog van grote betekenis kan zijn.
Dit geleidelijk groeiende inzicht was een van de belangrijkste redenen om deze studie te schrijven.

Baarn, januari 2015

# Inleiding

De titel 'Weg van het cijferen' kan als 'gek op' en als 'met minder nadruk op' worden verstaan. Opgevat als slagzin verwijst hij daarmee naar de grote controverse in de geschiedenis van het rekenonderwijs. Achter deze tweedeling steekt namelijk het algemene onderscheid tussen werktuigelijk versus inzichtelijk rekenen, internationaal aangeduid als de procedurele en de conceptuele richtingen in het rekenonderwijs – een onderscheid dat voor de meeste methodes overigens niet zo scherp valt te maken omdat vele leergangen vaak elementen van beide bevatten.[1)]

De foto van 'Sien met de grote keersom' lokt als *eerste interpretatie* 'gek op het cijferen' uit. De geschiedenis van de rekenboeken laat zien dat deze hoge waardering in bepaalde perioden welhaast gemeengoed was. Sommige methodes uit de 20ste eeuw besteedden aan de procedures van het 'lange' optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met hele getallen en kommagetallen niet minder dan 400 lesuren, ofwel twee volle schooljaren. Ook in het grootste deel van de 19de eeuw stond het rekenen voornamelijk in het teken van het inslijpen van de standaardprocedures. Cijferen werd toen niet alleen gewaardeerd om zijn praktische betekenis maar het had, zo meende men, ook een zekere vormende waarde vanwege het beroep dat daarin op netheid, concentratievermogen en precisie wordt gedaan – burgerlijke deugden die naadloos aansloten op het hoofddoel van het onderwijs zoals vastgelegd in de eerste onderwijswet voor de volksschool van 1806.

De Moor haalt naar aanleiding van deze hooggestemde opvatting over cijferen, een versje van dr. Laurillard (1830-1903) aan waarin deze overtuiging op stichtelijke wijze wordt verwoord. [7]

Cijf'ren is een schone kunst
En die dit niet kan,
Heeft er, het gansche leven door,
Last en hinder van.
Maar de beste rekenaar, -
'
t Is met grond beweerd, -
Is de mensch, die, bij de rest,
Ook dit éěne leert:
Eigen fouten op te tellen,
fouten in verstand en zin.
En die reek'ning klaar te krijgen
zonder éěne fout er in.

In 1963, omstreeks de tijd dat de foto van Sien met de grote keersom werd gemaakt, karakteriseerde de Onderwijsinspectie in haar jaarverslag het rekenen als een stervend vak, onherstelbaar aangetast door het lastig te bestrijden cijfervirus. En 25 jaar eerder was de klacht eensluidend: [3]

Het rekenonderwijs is overgemechaniseerd,
de leerlingen zijn zo aan werktuigelijke arbeid gewend,
dat het hersenproces bij velen volkomen uitgeschakeld is.

Hiermee komt *de tweede interpretatie* van 'Weg van het cijferen' in zicht, namelijk die van een zekere distantie. Deze terughoudende stellingname kon men lang voordien al bij Pestalozzi en zijn volgelingen aantreffen, en meer recent bij tal van vermaarde rekendidactici en wiskundigen, plus in een aantal methodes uit de 19de en 20ste eeuw. In alle gevallen wensen de bestrijders van het overmatige cijferen meer aandacht voor flexibel (hoofd)rekenen op basis van inzicht in getallen, getalrelaties en toepasbaarheid. In het geval van de Sien-som zouden binnen deze opvatting over het rekenonderwijs vragen passen als: ' Kloppen de eerste en de laatste cijfers van de uitkomst?' en 'Is het aantal cijfers van de uitkomst correct?'. Of in een moderne setting: 'Hoe zou je de grote keersom met behulp van je rekenmachientje berekenen (dat maar acht posities heeft)?' Allemaal opdrachten die inzicht in het decimale positiesysteem en het algoritme vergen. [8, p.258-262]

De methodes verschillen nog op een ander belangrijk punt: de toepassingen. In de procedurele leergangen komen toepassingen in de vorm van tekstopgaven pas tegen het eind aan bod, terwijl ze in de conceptuele methodes veel eerder staan, soms zelfs helemaal aan het begin. In geval van cijferen leidt dit tot ver uiteenlopende leerwegen – 'leerweg', *de derde interpretatie* van 'Weg van het cijferen'.
Neem bijvoorbeeld het cijferende delen dat in de procedurele aanpak puur receptmatig naar het algoritme van de staartdeling voert. De inzichtelijke leergang daarentegen kan vanuit een concrete situatie starten waarin een bepaalde hoeveelheid wordt verdeeld of opgedeeld. Zernike noteerde honderd jaar geleden de onderscheiden delingen niet alleen verschillend maar berekende en controleerde ze eerst ook anders. [12]
De verhoudingsdeling ('Hoeveel weken zitten er in 364 dagen?') kreeg niet het gebruikelijke deelteken maar werd in de vorm van een staartdeling opgeschreven: 7 / 364 \ ...
Dan volgde een kolomsgewijze berekening met de bijbehorende vermenigvuldiging als proef op de som.

$$\begin{array}{rl}
7\,/\,364\,\backslash & \\
\underline{350} & 50\ \text{x} \\
14 & \\
\underline{14} & \underline{\;2}\ \text{x} \\
0 & 52\ \text{x}
\end{array}
\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
7 & \\
\underline{52} & \text{x} \\
14 & \\
\underline{350} & \\
364 &
\end{array}$$

De verdelingsdeling werd door hem wel met een deelteken aangegeven en op de verkorte manier van staartdelen berekend en met een wat andere proef op de som gecontroleerd.

$$\begin{array}{l}
364 : 7 = 52 \\
\underline{35} \\
\;\;14 \\
\;\;\underline{14} \\
\;\;\;0
\end{array}
\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
52 & \\
\underline{\;\;\;7} & \text{x} \\
364 &
\end{array}$$

Het eerlijk verdelen van een geldbedrag van 364 gulden onder 7 personen diende daarbij als concrete basis: de 36 dubbeltjes wor-

den verdeeld nadat het met de 3 gulden niet lukt, en dan volgen de resterende centen.
Pas veel later in de leergang worden deze twee wegen bij elkaar gebracht tot de klassieke staartdeling.
Ziehier hoe een conceptuele leergang van het cijferen, die uitgaat van een concrete situatie, eruit kán zien – met de nadruk op kan, want de geschiedenis van de methodes toont aan dat het nog anders mogelijk is. Algemeen geldt dat conceptueel rekenonderwijs op diverse manieren in methodes uitgewerkt kan worden. In de historische analyse van de leerboeken zullen we daarvan verschillende voorbeelden zien.
Ook de aard van de vraagstukken verschilt in de onderscheiden aanpakken. De procedurele methodes bevatten tekstsommen die in feite ingeklede rekensommen zijn waarbij de context van de situatie er in feite niet toe doet. De conceptuele methodes hebben echter ook opgaven waarin de context wel nadrukkelijk meespeelt.
Als oertype van zo'n contextopgave verschijnt het volgende voorbeeld van Boeser uit 1850 als grap:

> 'In eenen kersenboom zaten eens 40 spreeuwen en 25 musschen. Een man schoot daarvan 12 spreeuwen en 8 musschen dood.
> Kunt gij wel zeggen hoe veel vogels van iedere soort bleven zitten?'

Bij de rekenmethode van Versluys, de nestor van de Nederlandse rekendidactiek, staan in het deeltje voor het eerste leerjaar (1875) meteen al contextopgaven als:

> 1. Hier zijn 7 cent; hoeveel prenten van 2 cent het stuk kan men daar voor kopen?
> 2. Een aardappelkoopman moest met een kruiwagen 7 zakken aard-appels wegbrengen. Hij kon er maar 2 op dezen kruiwagen leggen. Hoe dikwijls moest rijden, om al de aardappels te bezorgen?

Dat kinderen dit soort sommen lastig vinden, blijkt uit het tweede peilingsonderzoek van het Cito uit 1992 toen de rekenmethodes in de bovenbouw nog voor het merendeel volgens het procedurele concept waren ingericht.

> Jolien bezit 326 vakantiefoto's. Er passen 12 foto's op een pagina.
> Hoeveel pagina's heeft Jolien nodig om al deze foto's op te plakken.

De goedscore van de contextopgave was aan het einde van de basisschool destijds 40 procent De vergelijkbare kale deling 326:12 werd door ruim 80 procent van de leerlingen goed opgelost. [10]

Welke methodes behaalden over de hele linie betere resultaten, de procedurele of de conceptuele? Welke methode komt als beste op een veelzijdig conceptueel onderwerp als procenten uit de bus?
In 1999 werden deze kernvragen met behulp van het grootschalige, periodieke peilingsonderzoek van het Cito beantwoord. Aan het eind van dit boek gaan we uitgebreid op deze belangwekkende uitslagen in. Maar we beginnen uiteraard met de didactische analyses van de methodes, de series van de rekenboeken voor de verschillende leerjaren, die vanaf 1800 werden uitgegeven, zij het aanvankelijk alleen voor de hoogste klassen.
De historisch-didactische reis eindigt in 'het heden' tussen 2010 en 2015 toen de eerste, conceptuele 'euro-methodes' op de meeste basisscholen geschiedenis werden. De invloed van de conceptuele denkbeelden over toepassingsgericht rekenwiskundeonderwijs manifesteerde zich onder meer in de invloedrijke PISA toets – een toets waarbij Nederland in 2012 van de 34 deelnemende OESO-landen bij 14-jarigen de tweede plaats bezet. [2] [5]

## Noot

1). Methode wordt in dit boek meestal gebruikt in de zin van leerboek, met als meervoud 'methodes'. Methode als systematische, doelgerichte aanpak krijgt het meervoud 'methoden'.
De invalshoek van waaruit de rekenmethodes worden beschouwd, is louter vakdidactisch bepaald. De historische context van de maatschappelijke en de sociaal-economische ontwikkelingen, de opleiding van de leraar en zo meer, buiten beschouwing – zie in dit verband Leen (1961) en Goffree (1979).

# Literatuur

1).Boeser, A.L. (1850). *Eerste rekenboekje: verzameling van voorstellen, ter toepassing van de hoofdregels met geheele, benoemde getallen.* Amsterdam: Hoogenboom.

2).De Lange, J. (1999). *PISA Mathematics Framework.* OECD: Paris.

3).Diels, P.A., & J. Nauta (1939): *Richtlijnen voor het rekenonderwijs op de lagere school.* Groningen: Wolters.

4).Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met Wiskobas.*(diss.) Utrecht: IOWO.

5).Kordes, J., e.a. (2013). *Resultaten PISA-2012. Praktische kennis en vaardigheden van 15-jarigen.* Arnhem: Cito.

6).Leen, A. (1961). *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19de en het begin van de 20ste eeuw (diss.).* Groningen: Wolters.

7).Moor, E. de (1999). Zedelijk cijferen. *Willem Bartjens,* 19, 1, p.37.

8).Veltman, A. & M. van den Heuvel-Panhuizen (2010). *Rekenen met hele getallen op de basisschool. Tussendoelen Annex Leerlijnen.* Groningen: Noordhoff.

9).Versluys, J. (1875): *Handleiding bij het Rekenonderwijs ten dienste van het huisgezin, de bewaarschool en de aanvangsklasse der lagere school.* (*Getallen 1-10.*) Groningen: Versluys.

10).Wijnstra, J. (red.) (1988). *Balans van het reken-wiskunde-onderwijs op de basisschool 1.* Arnhem: Cito.

11).Zernike, C. F. A. (1915/4). *Ons Rekenonderwijs. Handleiding.* Bussum: Akkeringa.

# 1 Mechanische methodiek 1800-1875

## Inleiding

In artikel 4 van de eerste Nederlandse Onderwijswet uit 1806 werd rekenen, naast lezen en schrijven, als een verplicht schoolvak aangemerkt.[1)]
De regering stelde in 1810 een officiële lijst met aanbevolen rekenboeken samen waarop onder meer de werken van Brunt en Anslijn voorkwamen. De 'Vernieuwde rekenkunst van Mr Willem Bartjens' stond er verrassenderwijs niet op. Dat kwam doordat daarin, zoals de bewerker Görlitz later formuleerde, 'eene methodike schikking of opklimming der voorstellen geheel ontbrak'. [5]
Toen in 1839 een meer stelselmatige bewerking van 'Bartjens' werd uitgegeven, hadden rekenboeken van Anslijn en Hemkes de onderwijsmarkt al grotendeels overgenomen.
Anslijns rekenboeken uit 1809 en 1816 worden straks als eerste besproken. Daarna brengen we de succesvolle 'tien cents reeks' van Hemkes (1835) in beeld, gevolgd door een bespreking van de rekenboekjes van Boeser en van Bouwman die na 1850 grote opgang maakten. Deze werken bevatten alle uitsluitend de leerstof van de hogere leerjaren. Voor de aanvangs- en middenklassen stonden destijds geen rekenboeken ter beschikking.
In 1847 bracht Brugsma een vertaling van Grube's handleiding over het rekenen tot twintig op de markt.
De vertaling van Hentschels 'Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen' door Prinsen, verscheen in 1865.
Beide handleidingen trokken omstreeks 1870 sterk de aandacht en hebben de ontwikkeling van complete rekenmethodes met handleiding in hoge mate bevorderd.

De voorlaatste paragraaf beschrijft deze stimulerende invloed. In de laatste paragraaf wordt de overgang van Bartjens via Hemkes naar Versluys aan de hand van een voorbeeld samengevat.
Versluys typeerde het rekenonderwijs van het tijdvak 1800-1875 als volgt:

> 'Het rekenonderwijs werd meest gegeven op mondelinge aanwijzing van het hoofd der school, die dikwijls met de meeste onderwijzers der school in één groot lokaal werkzaam was. In de eerste 2 jaar werd veelal aan het rekenonderwijs zeer weinig gedaan; tellen met onbenoemde getallen of aan het telraam was dan hoofdzaak. Het cijferen in het derde en vierde jaar bestond meestal in het oplossen van vraagstukken met onbenoemde getallen, door de onderwijzer op het schoolbord geschreven. In het vijfde schooljaar kregen de leerlingen voor het eerst een rekenboekje in handen, en dan rekende ieder voor zich. Als een leerling geacht werd een rekenboekje te kennen, kreeg hij een volgend. Het rekenonderwijs was dus in de hoogste klasse (hoogste twee leerjaren) niet klassikaal. Wie een som niet kon maken, riep de hulp in van den onderwijzer of van een medescholier.' [31, p.91]

Kellinga kenschetste deze periode, doelend op de eerste vier leerjaren, als het tijdperk van het mechanisch bordrekenen. [21, p.208]

## 1 Anslijn

Anslijn is een van de belangrijkste auteurs uit het begin van de 19de eeuw. Hij schreef in 1809 het succesvolle 'Rekenboek voor meisjes' en bewerkte Brunts 'Eerste beginselen der Rekenkunde, voorgesteld in vragen en antwoorden', later herzien met het oog op het nieuwe stelsel van maten, gewichten en munten dat in 1817 werd ingevoerd.
Het rekenkundeboek beoogt de basis voor het praktische rekenen te leggen.
Via een vraag- en antwoordspel worden de cijferprocedures van het rekenen met hele getallen en tiendelige breuken inzichtelijk verklaard.

Bij het delen komt via 5/7645\... als eerste de kolomdeling aan bod, gevolgd door de verkorting ervan tot de bekende staartdeling.

| | | |
|---|---|---|
| 5 / 7645 \ | | 5 / 7645 \ 1529 |
| 5000 | 1000 | 5... |
| 2645 | | 26 |
| 2500 | 500 | 25.. |
| 145 | | 14 |
| 100 | 20 | 10. |
| 45 | | 45 |
| 45 | 9 | 45 |
| 0 | 1529 | 0 |

Deze verkorting is in dialoogvorm verwoord.
Een fragment:

'*Waarin bestaat dan die korte wijze van deelen?*

> Dat men de nullen achter de getalmerken der duizendheden, honderdheden en tienheden, welke men tot uitkomsten verkrijgt, weglaat; en de getalmerken, welke men tot uitkomsten bekomt, naast elkander achter het deeltal schrijft. Als mede, dat men achter elk overschot een volgend getalmerk van het deeltal laat nederdalen, en zulks, om te weten, hoe verre men met de deeling gevorderd is, en om alle verwarring in dezelve voor te komen, door punten en streepjes aanwijst.' [3, p.51]

De cijferprocedures voor optellen, vermenigvuldigen en aftrekken met hele getallen en kommagetallen worden op soortgelijke wijze verklaard.
Voor welke leerlingen het door Anslijn bewerkte boek van Brunt bestemd is, blijft met de verwijzing 'ten dienste der scholen' onduidelijk. In ieder geval zouden de (hulp)onderwijzers er hun voordeel mee kunnen doen bij de bordlessen over het cijferen in de eerste vier leerjaren.

In deel 1 van zijn 'Rekenboek voor meisjes' richt de auteur zich eerst met een stichtelijk woord tot zijne jonge vriendin. Daarna gaat hij over op het hoofdstuk van de telling dat als volgt wordt ingeleid: 'Vraag, eer gij hieraan begint, uwen Onderwijzer om eenige onderrichting, en hebt gij die wel begrepen, beproef dan, of gij de volgende getallen uitspreken kunt.'

Ook aan het begin van het volgende hoofdstuk over de 'zamentelling' staat vooraf zo'n verwijzing naar de onderwijzer. Dan volgen 6 vraagstukken over het optellen van getallen tot tien, honderd en duizend, en 25 uitvoerige redactieopgaven over het optellen van geldbedragen. Een voorbeeld: [1, p.13]

> Een meisje had, door haar braaf gedrag, het zoo verre gebragt, dat zij, op den ouderdom van 18 jaren, tusschen de 80 en 100 gulden 's jaarlijks, benevens den kost enz., won. Hiervan gaf zij, dat zeer braaf was, aan hare moeder, gedurende zes jaren, het eerste jaar 60 gulden, het tweede jaar 70, het derde 65, het vierde 80, het vijfde 72 en het zesde 78 gulden: hoe veel bedroeg dit bij elkander? Zoudt gij zelve niet wenschen in de gelegenheid te zijn om uwe ouders wel te doen, opdat gij hierdoor den naam van een braaf kind met regt verdienen moogt?

Na de sommen over het tellen, optellen, vermenigvuldigen, aftrekken en delen komt er nog een paragraaf met 500 gemengde vraagstukken over hele getallen en tiendelige breuken. Van deze vraagstukken staan aan het eind van het boek de antwoorden.
Het eerste boekje eindigt met:

> 'Hebt gij, mijne lieve! nu alle voorstellen in dit boekje met oordeel beantwoord, dan moogt gij ook uwen Leermeester om het volgende stukje verzoeken, waarin gij de regelen, welke gij hierin behandelt hebt, nader zult leren toepassen.' [1, p. 82]

De toepassingen in het tweede boekje hebben voornamelijk betrekking op het omzetten van decimale maten van lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht en van munten.
Het derde boekje behandelt, na een inleiding over deelbaarheidskenmerken,

*de regel van drieën* ( $a : b = c : x \rightarrow a.x = b.c \rightarrow x = b.c : a$ )

die door Anslijn als volgt wordt omschreven: 'In alle meetkundige evenredigheden is het vermenigvuldigde der beide uiterste termen gelijk aan dat der beide middelste termen.'
De leerlingen krijgen om te beginnen tientallen tekstopgaven van het eenheidstype '1 : a = b : *x*', waarin a en b gegeven meetgetallen zijn:

> 1) Als 1 el geborduurd neteldoek 4 guld. kost, wat zal dan 8 el kosten?
>
> 2) Eene vrouw, die een kousenwinkel doet, verkoopt 12 paar kousen voor 1 guld. en 1 halve cent het paar. Zoudt gij kunnen uitrekenen hoe veel guld. zij ontvangen moet?

Ze noteren deze opgaven als $1 : 4 = 8 : x$ en $1 : 100\frac{1}{2} = 12 : x$ en passen ook op deze elementaire keersommen de genoemde regel van drieën toe!
Allengs worden de sommen moeilijker, zoals de laatste van de reeks (een el is een meter, en een palm is een decimeter):

> Vrouw M. heeft 24 el en 5 palmen linnen, dat zij aan hare vriendin voor katoen verruilen wil. Als nu vrouw M. voor 3 el en 5 palmen linnen zoo veel betaald heeft als 2 el katoen; en zij dus zamen overeenkomen, dat de vriendin van vrouw M. voor 3 el en 5 palmen linnen, 2 el katoen geven zal: hoe veel el katoen moet vrouw M. dan ontvangen?

Ook opgaven bij het onderwerp procenten worden met de regel van drieën opgelost:

> Hoe veel geld zal eene Juffrouw in een jaar aan interest ontvangen, van 800 gulden tegen 4 ten honderd s'jaars?

Het vierde boekje gaat over breuken, of beter gezegd over het herleiden van gewone breuken tot tiendelige breuken.
De inleiding van het boek zegt daarover:

> 'Bij het oude stelsel van maten, gewigten en munten, maakte het rekenen met gewone breuken een voornaam gedeelte der rekenkunde uit. Men moest dezelve leeren verkleinen, herleiden, zamentellen, vermenigvuldigen aftrekken en deelen. Bij het tegenwoordig stelsel, komen de gewone breuken minder te pas, en vooral bij hetgene in den kring der vrouwelijke bezigheden te berekenen valt. Wij zullen derhalve het rekenen met gewone breuken met stilzwijgen voorbijgaan; te meer, omdat de gewone breuken, die bij de opgave van oude maten, enz. zullen voorkomen, gemakkelijk in tiendeelige breuken te veranderen zijn. Hoe gij hierbij te werk moet gaan, zal de Onderwijzer u gaarne verklaren.' [2, p.13]

Dan volgt een tabel met omzettingen als ½ = 0,5 en ¼ = 0,25 en zo meer.

De 250 sommen van dit boekje hebben betrekking op het herleiden van oude lengtematen, inhoudsmaten, gewichten, munten en prijzen in de passende nieuwe maten.

Een voorbeeld (lees voor 1 oude pond 0,494 nieuwe pond):

> Eenen vrouw vraagt in eenen winkel 1 halfpond koffij, en bedoelt oud gewicht: hoe veel van het nieuwe pond moet de winkelier daarvoor geven?

In de rubriek 'Antwoorden' staat bij deze opgave een uitwerking zoals de kinderen die moeten noteren. [2, p. 61]

$$\begin{array}{lcccccc} & \text{O.pond} & & \text{N.pond} & & \text{O.pond} & \text{N.pond} \\ & 1 & : & 0{,}494 & = & 0{,}5 \quad : & x \\ & & & & \underline{0{,}5}\,\text{x} & & \\ \text{Antw} & & & x = 0{,}247 & \text{N. pond} & & \end{array}$$

Weer duikt 'de regel van drieën' op – de geest van Bartjens' boeken en de vele bewerkingen ervan, waart ook in Anslijns boeken nog steeds rond.

## 2 Hemkes

Hemkes handhaaft in zijn boekjes weliswaar de regel van drieën, maar de toepassing ervan op het eenheidstype van de hiervoor genoemde opgaven gaat hem veel te ver. In het voorwoord van zijn 'Rekenboek voor gevorderde leerlingen' (1836) schrijft hij daarover:

> 'Voorts wordt er in het rekenen veelal eenen omweg bewandeld, die in het dagelijksche leven, zelden als zoodanig wordt aangewend, en aan de duidelijkheid en eenvoudigheid van het onderwijs zeer veel nadeel toebrengt. Op die wijze wordt van de leer der evenredigheden, in derzelver toepassing op den regel van drieën een groot misbruik gemaakt; want naar aanleiding daar van wordt b.v. de waarde van 10 pond berekend, wanneer het pond 8 ct. kost, terwijl zeer jonge kinderen reeds duidelijk kunnen bevatten, dat, wanneer een pond 8 ct. kost, dat dan voor 10 pond tienmaal zoo veel geldt. Het is wel waar dat sommigen naderhand tot zoodanige bewerking

> overgaan; doch wij vinden volstrekt geene redenen om niet dadelijk dien gemakkelijken en natuurlijksten weg in te slaan, en dien te behouden.' [16]

In zijn 'tien cents rekenboekje' (deel 4) staat de volgende opgave in het hoofdstuk over deze regel van drieën, hoewel ook hier de gemakkelijke en natuurlijke weg weer rechtstreeks via een veelvoud zou kunnen lopen!

> Als men voor 3 KG. broodsuiker 5 gld moet betalen, hoeveel moet men dan voor 36 KG. besteden?

Maar laten we beginnen bij het begin: het eerste tien cents boekje 'De kleine rekenaar' (1835). Dit 'makkelijk rekenboekje voor eerstbeginnenden' kent voor iedere basisbewerking eenzelfde indeling: eerst sommen met onbenoemde getallen, dan toepassingen met benoemde getallen en tot slot herhalingsopgaven met gemengde vraagstukken van de operaties die tot dan toe behandeld zijn, en wel in de volgorde optellen, vermenigvuldigen, aftrekken en delen. Dan volgt nog een hoofdstuk 'Herhaling van al het voorgaande' met sommen in dezelfde trant – alles bij elkaar bijna 400 sommen.
Opmerkelijk is het grote verschil in moeilijkheidsgraad van de vraagstukken binnen een rubriek. Neem bijvoorbeeld de eerste en de laatste optelsom:

> 1) Tel te zamen: 3, 2, 8 en 9.
>
> 2) Hoeveel bedraagt de som van alle getallen, die gij met de cijfers 5, 6 en 9 maken kunt?

Voorts valt de vaak breedvoerige en informele stijl van de redactiesommen op.

> 3) Hans kon niet berekenen, hoe veel geld men voor 75 koeijen zou moeten betalen, wanneer eene koe 85 gulden kostte. Och help dien sukkel ook eens.

De overige tien cents boekjes, die achtereenvolgens gaan over decimale breuken - munten, maten en gewichten - de regel van drieën - en gewone breuken, zijn op dezelfde manier ingedeeld. Steeds wordt begonnen met onbenoemde getallen en dan komen tekstopgaven met benoemde getallen per operatie in de genoemde volgorde aan bod. Alleen het deeltje van de gewone breuken is

iets anders opgezet omdat Hemkes daar niet op eerder geleerde rekenprocedures in de middenklassen kan terugvallen. [17]
De tien cents boekjes vonden veel aftrek. Pas in de tweede helft van de 19de eeuw werden ze geleidelijk vervangen door de rekenboeken van Boeser en Bouwman.

## 3 Boeser en Bouwman

In het voorwoord van zijn 'Eerste Rekenboekje' uit 1850 beschrijft Boeser waarom hij dit boek met toepassingsopgaven ('voorstellen') over hele getallen heeft laten uitgeven:

> 'Mijns inziens toch, zijn sommige Rekenboekjes voor eerstbeginnenden te uitgebreid, te langwijlig; andere bevatten te weinig voorstellen aan de kinderwereld en het dagelijksch leven ontleend; terwijl de meeste (ik zeg mijne meening) aan het euvel van werktuigelijkheid mank gaan. Niet alleen treft men daarin eene reeks van dorre opgaven aan, die de kinderen reeds op het bord hebben uitgewerkt, maar behalve die ook een groot aantal voorstellen met de opschriften 'zamentelling', 'aftrekking' enz.; welke voorstellen worden opgelost, zonder dat het denkvermogen er door ontwikkeld of geoefend wordt.' [8]

Hier heeft Boeser een punt: als toepassingsopgaven in een bepaalde rubriek van bijvoorbeeld vermenigvuldigen zijn geplaatst, weten de leerlingen automatisch dat ze de oplossing ervan via vermenigvuldigen kunnen vinden. En ook: waarom zou een rekenboekje weer kale cijfersommen moeten bevatten indien ze die al eerder via klassikaal rekenen op het bord hebben ingeoefend? Vandaar, stelt Boeser, dat in zijn rekenboeken uitsluitend gemengde toepassingen staan.
Een voorbeeld van zo'n gemengde opgave:

> Een man werkte dagelijks 12 uren; besteedde 2 uren aan het eten en 3 uren aan uitspanning. Het overige van den tijd besteedde hij aan den slaap. Hoe veel weken maakte de tijd uit, dien hij in het jaar aan den slaap besteedde?

Een grapje kan er trouwens ook nog wel af – zie de inleiding:

> In eenen kersenboom zaten eens 40 spreeuwen en 25 musschen. Een man schoot daarvan 12 spreeuwen en 8 musschen dood. Kunt gij wel zeggen hoe veel vogels van iedere soort bleven zitten? (In 'Antwoorden' staat: 'Ik geloof geen één.')

Wat aan de redactiesommen van het 'Eerste Rekenboekje' opvalt, is dat ze, in tegenstelling tot die van Hemkes, kort en zakelijk geformuleerd zijn.
Dit geldt ook voor de vraagstukken in de vier volgende rekenboekjes over tiendelige breuken, gewone breuken, de regel van drieën, en de verdere toepassing van die regel bij procenten- en mengingrekening – alles bij elkaar ruim 1000 opgaven, die overigens niet of nauwelijks naar toenemende complexiteit geordend zijn.

Bouwman sluit zich met zijn rekenboekjes, die vanaf 1856 werden uitgegeven, bij Boesers opvatting over gemengde opgaven aan. Maar de kale cijfersommen wenst hij niet te weren, integendeel. Zodoende combineert hij de concepten van Hemkes en Boeser. Bouwmans 'Tweede Rekenboekje' over tiendelige breuken bevat eerst aan de hand van 50 vraagstukjes een herhaling en uitbreiding van wat in het eerste boekje over hele getallen is behandeld.
Na de benoeming en waardebepaling van de cijfers in de tientallige breuken, worden de cijferprocedures van optellen, vermenigvuldigen, aftrekken en delen via het rekenen met kale getallen aan de orde gesteld – iedere paragraaf bevat ongeveer 20 vraagstukjes.
In de laatste paragraaf 'herhaling en toepassing' verschijnen dan nog 30 eenvoudige toepassingen – betrekkelijk weinig vergeleken met voornoemde auteurs.

## 4 Grube

In 1847 publiceerde Brugsma een (licht bewerkt) onderdeel van Grube's 'Leitfaden für das Rechnen' (1842) over het rekenen tot tien onder de titel 'Allereerste oefeningen in het rekenen voor jonge kinderen'. Hierin wordt de zogenoemde monografische methode beschreven, die zich kenmerkt door een 'operatieve' behandeling van de getallen in opklimmende grootte.

> 'Stellen wij b.v., dat het getal 5 onder handen zal genomen worden; dan is het niet genoeg, dat men dit den leerling leert beschouwen en kennen als bestaande uit vijf éénen, maar dan moet men hem ook de verhouding leeren inzien waarin het staat tot 2, tot 3, tot 4; dan moet het gemeten worden met 2, met 3, met 4; het meer en minder tusschen deze en het gegevene moet worden aangewezen; de verhoudingen moeten worden besproken waarin ze in het dagelijksch leven kunnen voorkomen, en de cijfers worden geschreven, waarin het een en ander wordt uitgedrukt.' [10, p.7]

Steeds wordt ieder nieuw getal opgebouwd, uiteengelegd en 'gemeten' met de voorgaande getallen. Uit deze aanschouwelijk omklede activiteiten vloeien de hoofdbewerkingen van het rekenen op natuurlijke wijze voort. Zo gaan zuiver en toegepast rekenen, inzicht en vaardigheid, en zelf zoekend rekenen hand in hand, aldus de auteur(s).
Hoe belangrijk de monografische methode voor het (belangrijke) hoofdrekenen is, wordt met 14 x 25 toegelicht.

> 'Ziet zoo vele verschillende oplossingen zullen u de kinderen geven, wanneer zij op eene doelmatige wijze tot het rekenen uit het hoofd zijn ingeleid. En dat die velerlei scheiding, ontbinding en samenstelling bewijzen geven van zelfwerkzaamheid des geestes en van geoefendheid des oordeels, is ontwijfelbaar, evenzeer als dat ze niet kunnen plaats hebben, of de leerlingen moeten door eene alzijdige beschouwing van kleine getallen fiks in het wezen daarvan, afgescheiden van alle kunsttheorie, ingedrongen zijn.' [10, p.11]

De formele waarde van 'opscherping des oordeels en versterking der denkkracht' via het gevarieerde hoofdrekenen, wordt hoger ingeschat dan de praktische waarde van het cijferen die vooral op de bevoorrechte stand of een bepaald beroep van toepassing is. En voor laatstgenoemden is het lager onderwijs niet in de eerste plaats bedoeld.

> 'Zij is ingesteld voor de algemeene behoeften van het volk, voor de algemeene behoeften van het volksleven. En in het dagelijksch leven zullen de meeste menschen meer nodig hebben, vlug en met oordeel uit het hoofd te rekenen, dan wel

> naar den regel op de lei te cijferen. Voor groote getallen mag de lei of het papier te hulp worden geroepen; de huismoeder en de winkeldoende zullen er zeldzaam naar grijpen en dan nog altijd met verkortingen werken, die hun de ondervinding als richtig aan de hand geeft.'[10, p.13]

De nadruk op formele vorming doet aan het werk van Pestalozzi denken dat in 1820 deels door Prinsen werd vertaald. [23][25] Toch is het grote verschil hiermee dat het rekenonderwijs van Grube - Brugsma van meet af aan praktisch, toepassingsgericht is en dat van Pestalozzi juist niet.
Het laatste vraagstuk in Pestalozzi's elfde brief spreekt in dit opzicht voor zichzelf: [26, p. 173]

> '4 maal 2 geheelen en 3 maal het 4$^{de}$ deel van 2 geheelen: hoe veel geheelen zijn het?
> Antw. 9 maal 1 geheel en de helft van een geheel'
> Hoe weet gij dat?
> Antw. 4 maal 2 geheelen en 3 maal het 4$^{de}$ deel van 2 geheelen zijn 19 halven, en 19 halven zijn 9 geheelen en 1 half.'

Ook de 12 opgaven die Prinsen toevoegt, zijn niet erg praktisch.
De laatste daarvan luidt als volgt:

> Een boer gaat met zijn knecht een verdrag aan, om hem iederen dag, wanneer hij werkt, 9 stuivers te betalen; maar integendeel, wanneer hij niet werkt zal hij aan zijn meester voor kostgeld 5 stuivers geven. Na 15 dagen rekenen zij af, en de knecht ontvangt 79 stuivers. Vrage hoeveel dage hij gearbeid heeft en hoeveel niet?

Van Haarst en Reidsma (1917) stelden een rekenboekje met opgaven in de geest van Pestalozzi samen.
Hun laatste vraagstuk is een duizelingwekkende sliertsom:

> Indien men van 11 maal het 8ste deel van de helft van 4 maal 8, afneemt 7 maal het 10de deel van het 5de deel van 50, en daarbij een zeker getal voegt, zoodat de som beloopt op 2 maal 2 maal het derde deel van het 3de van 9 maal 9; hoeveel maal het 7de deel van 7 maal 7 bedraagt dan dit bijgevoegde getal?

Zowel het werk van Prinsen over de leerwijze van Pestalozzi als het rekenboekje van Van Haarst en Reidsma werden nooit herdrukt.
Het boekje van Grube-Brugsma moest 25 jaar op een herdruk wachten.
Beide vertaalde handleidingen voor het aanvangsonderwijs hebben geen invloed op de rekenboeken van de bovenbouw gehad.
Pas toen in 1865 het werk van Hentschel in het Nederlands verscheen, veranderde deze situatie ingrijpend.

## 5 Hentschel

Hentschels 'Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volkschulen' (1842) werd – licht bewerkt – in 1865 door Rijkens als 'Handleiding voor het rekenen uit het hoofd en het cijferen' gepubliceerd. Toen was Hentschel in Duitsland al zo vermaard dat men hem de erenaam 'vader van het nieuwe rekenen op de volksschool' had toegekend.
De grondstelling van Hentschel is in de Inleiding door Rijkens als volgt vertaald:

> 'De leerling moet denkend rekenen en rekenend denken leeren: dat is het eene; hij moet nevens het inzigt ook de vaardigheid krijgen, die het leven eischt: dat is het andere bij het rekenonderwijs. Het eerste vordert een geregeld opklimmenden leergang, aanschouwing en eene degelijke behandeling der leerstof; - de vaardigheid is echter alleen door veelvuldige oefening te verkrijgen. Deze eischen zijn overal in 't oog gehouden.' [20]

We gaan nu na hoe dit algemene principe voor het aftrekken tot honderd wordt uitgewerkt.
Het rekenen tot tien is semi-monografisch opgezet: in de volgorde van 1 tot 10 wordt elk getal eerst op alle mogelijke manieren in twee delen uiteengelegd en daarna wordt, omgekeerd, per getal ook zo'n deel afgesplitst. Of anders gezegd: splitsen, optellen en aftrekken worden van meet af aan met elkaar verbonden, vermenigvuldigen en delen volgen later. Eerst gebeurt een en ander aanschouwelijk met kuben of streepjes en daarna uit het hoofd aan de

hand van tekstopgaven met benoemde getallen en sommen met onbenoemde getallen.

Nadat de kinderen vervolgens met meer dan twee getallen hebben opgeteld en afgetrokken, worden de verschillende wijzen geoefend waarop deze operaties uitgedrukt kunnen worden. Hoeveel is 2 kleiner dan 6? Hoeveel is 6 groter dan 2? Hoeveel is het verschil van 6 en 2? Hoeveel moet je bij 2 doen om 6 te krijgen? ...
Als de kinderen de cijfers goed kunnen lezen en schrijven, komen de tekens voor optellen, aftrekken en is-gelijk aan bod. Ter herhaling maken ze nu de eerder aangeboden opgaven in rekentaal, zoals bij de sommen waarin 6 centraal staat:

| | | |
|---|---|---|
| 5 + 1 = | 4 + 2 = | 3 + 3 = |
| 1 + 5 = | 2 + 4 = | 6 – 3 = |
| 6 – 1 = | 6 – 2 = | |
| 6 – 5 = | 6 – 4 = | |

De tekstopgaven zijn zowel enkelvoudig als samengesteld:

1). Op 2 banken zitten te zamen 8 kinderen. Hoe kunnen die kinderen op de beide banken verdeeld zijn?

2). Hoeveel kost een stuivers broodje meer dan een twee cents bolletje?

3). Een boer had 1 bigge, 1 geit, 1 lam en 1 gans. Voor de bigge kreeg hij 4 gld., voor de geit 3 gld., voor het lam 2 gld. en voor de gans 1 gld. Hoeveel guldens had hij ontvangen? Van dat geld nam hij 6 gld. af voor bontgoed voor zijne dochter en 1 gld. om den apotheker te betalen. Hoeveel guldens nam hij eraf, en hoeveel hield hij over? Het overige geld deed hij in huis in een zakje, waarin reeds 5 gld. waren. Hoeveel guldens waren er nu in het zakje?

Bij het aftrekken tot twintig en tot honderd komen Hentschels principes van de geregeld opklimmende leergang, de aanschouwing, de degelijke behandeling van de leerstof en de veelvuldige oefening nog beter tot uitdrukking.

De geregeld opklimmende leergang is zichtbaar bij het splitsen van de moeilijkheden in de verzameling kale opgaven, die met de volgende reeks opgaven zichtbaar kan worden gemaakt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 – 3 = | 14 – 4 = | 14 – 8 = | 54 – 3 = | 54 – 4 = | 54 – 8 = |
| 50 – 30 = | 54 – 30 = | 54 – 33 = | 54 – 34 = | 50 – 34 = | 54 – 38 = |

Het principe van de aanschouwing blijkt uit het gebruik van het telraam:

> 'De 12 is op de ballenteller voorgesteld. De aftrekking van 1 en 2 wordt onmiddellijk gedaan. Moet 3 afgetrokken worden, dan neemt men eerst 2 eenen weg; nu moet er nog 1 af; daarom schuiven we van de tien eenen *een* op zijde. Rest 9. Om 8 van 12 af te trekken, verminderen we eerst 12 met 2, dan 10 met 6.' [20, p.28]

Vervolgens moeten deze handelingen zonder telraam worden uitgevoerd, eerst met verwoording en dan alleen met het antwoord. Later gebeurt dit ook schriftelijk in rekentaal, al dan niet met verwoording.
Bij 54 – 38 worden op het telraam om te beginnen de 3 tienen weggehaald, en dan bij het restant van 24 de 8 enen, gesplitst in 4 en 4. Deze handelingen worden vervolgens, zonder telraam erbij, verwoord als: '54 min 30 is 24; 24 min 4 is 20; 20 min 4 is 16; dus 54 min 38 is 16'. Of korter: '54 min 30 is 24; 24 min 8 is 16'.
Bij het schriftelijke rekenen noteren de kinderen de uitkomst op de lei en lichten het antwoord desgevraagd op de verkorte wijze toe.
De degelijke behandeling van de leerstof komt vooral tot uitdrukking in de zorgvuldige wijze waarop de vraagstukjes, zowel naar vorm als inhoud, zijn samengesteld.
Enkele voorbeelden waarin dit zichtbaar wordt:

> 1) Een stuk weiland werd in 1860 voor 52 gulden verhuurd, in 1861 echter voor 38 gulden; hoeveel bedraagt het verschil?
>
> 2) In de hoogste klasse zitten 76 kinderen en in de middelklasse 59; hoeveel in de hoogste klasse meer?
>
> 3) In eene klasse zitten 25 jongens en 36 meisjes. Eens waren er in 't geheel slechts 49 kinderen aanwezig. Hoeveel ontbraken er?
>
> 4) Iemand kocht 2 pond suiker, voor 6 stuiver het pond, en 1 boek papier voor 24 cent; hoeveel kreeg hij van een gulden terug?

Het algemene principe van het denkende rekenen komt niet alleen bij de gevarieerde toepassingen tot uitdrukking, maar evenzeer in de ruimte die de kinderen voor bijzondere wijzen van oplossen krijgen:

> 'Moet 37 met 18 verminderd worden, dan zullen zij misschien liever 18 van 38 aftrekken en de rest nog met 1 verminderen. Zulke en misschien nog andere oplossingen neme men met blijdschap aan als getuigen van leven en lust, geve zelfs eenige aanleiding daartoe. Men zorge echter, dat allen er deel aan kunnen hebben. Gaat het boven de krachten der meerderheid, dan worde de oplossing tot een hoogeren trap verschoven.' [20, p.31]

De grondige behandeling van het aftrekken tot tien en honderd is exemplarisch voor het totale handboek, dat uit de volgende zes 'trappen' bestaat.

1 Hoofdrekenen met de getallen één tot tien.
2 De getallen één tot honderd.
3 De hoofdregels met grootere getallen.
4 De hoofdrekenwijzen in benoemde en toegepaste getallen.
5 Regel van tweeën
6 Over de gewone breuken

De auteur is een tegenstander van de behandeling van de regel van drieën in de gewone lagere school.
In tegenstelling tot het werk van Grube, trok de vertaling van Hentschels handboek wel meteen de aandacht van de rekenboekauteurs.[2)]
Zo noemen Closse c.s. in het voorwoord van 'Rekenboek voor de volksschool' (1872) als eerste beginsel van hun methode:

> 'De wijze van 't *aanschouwelijk* rekenen voor eerstbeginnenden is aangewezen door den heer Brugsma in zijn werkje: 'Allereerste oefeningen in het rekenen voor jonge kinderen', en vindt men ook voor alle klassen in de voortreffelijke 'Handleiding voor 't rekenen uit het hoofd en het cijferen' door R.R. Rijkens.' [11]

Hier staat het: 'voor alle klassen'! Dat was nieuw en gaf de opmaat tot de ontwikkeling van complete rekenmethodes voor alle leerjaren, met leerboeken voor de kinderen en handleidingen voor de onderwijzer.[3)]

### 6 Overzicht en uitbreiding

De besproken rekenboekjes waren, zoals gezegd, bestemd voor de bovenbouw van de lagere school. Daaraan voorafgaand werden de basisvaardigheden en het cijferen via bordrekenen onderwezen. De leerboeken verschilden in de mate van de aandacht die aan kale rekensommen werd besteed. Ook de wijze waarop toepassingsopgaven werden samengesteld, gerubriceerd en geformuleerd, was niet eensluidend.

De vraag is of deze varianten voor de toepasbaarheid verschil zullen uitmaken indien de grondslag van het rekenen in de eerste vier schooljaren uitsluitend met kale getallen wordt gelegd.

De wiskundig begaafde Jan Versluys schreef – puttend uit eigen ervaringen van omstreeks 1855 – over bordrekenen:

> 'Ik herinner mij nog levendig, hoe de eerste rekenles van 't bord, die ik in de middelklasse ontving, bestond in het uitspreken van getallen tot over de miljoenen. En zoo ging het verder. In de geheele middelklasse heb ik van al het cijferen op het bord nooit iets begrepen. En alleen doordat de hulponderwijzer eens bij toeval bemerkte, dat ik niet deelen kon met groote getallen, moest ik een half of een heel jaar langer in de middelklasse zitten dan anders het geval zou geweest zijn.Dat alles viel voor in de tweede helft der 19de eeuw op een school, die beroemd was in een heel distrikt, en ik meen niet zonder reden.' [30, p.75]

Dan de kwaliteit van de rekenboekjes voor de hoogste klasse.

Kellinga had daar een uitgesproken mening over:

> 'Voor de hoogere leerjaren begonnen er allengs boekjes te verschijnen. Helaas! mocht men wel zuchten, want ze waren allemaal veel en veel te moeilijk. Ze gaven toepassingen van 't rekenen in zoogenaamde redactiesommen. Toen kwam het pas uit, hoe onvruchtbaar al het voorgaande zielloze gecijfer geweest was. Bij elke opgaaf moest de kinderen worden uitgelegd, dat er moest worden opgeteld, afgetrokken, vermenigvuldigd of gedeeld. Eischte één som verschillende bewer-

> kingen, dan wisten ze er volstrekt geen raad mee en moest de oplossing heelemaal worden voorgemaakt en zoowat van buiten geleerd. Ik zei, die boekjes gaven alleen toepassingen, het eigenlijke leeren van de bewerkingen werd geheel aan den onderwijzer overgelaten, zoodat die nu dubbel werk had.' [21, p. 212]

De handleidingen van Pestalozzi (Prinsen) en Grube (Rijkens) voor het aanvankelijke rekenen kregen geen methodisch vervolg. Dat was later wel het geval met het complete handboek van Hentschel dat een sterk methodisch karakter bezat.
Met de komst van de complete rekenboeken van Versluys (1875) – die zich voor een belangrijk deel op Grube en vooral Hentschel baseerde – kwam er methodisch bezien een einde aan het eeuwenoude rekenen volgens de methode van receptmatig voordoen - nadoen. Om deze reden kan het jaartal 1875 als het begin van een nieuw tijdvak in het Nederlandse rekenonderwijs worden aangemerkt.

## 7 Slotsom

In de voorgaande bespreking van rekenboeken dook bij herhaling de zogenoemde regel van drieën op.
Aan de hand van het volgende voorbeeld zal samenvattend worden toegelicht hoe de didactische inzichten in de periode 1800-1875 veranderden.

> Linnen kopen (1)
> Vier ellen linnen kosten negen gulden.
> Hoeveel kosten zestien ellen?

De rekenregel luidde destijds: 'vermenigvuldig het te meten getal (16) met het gegeven getal van de andere grootheid (9) , ofwel bereken 16 x 9, en deel de uitkomst daarvan door het andere gegeven getal: 144 : 4.'
In de laatste versie van 'Bartjens' (1834) werd deze regel van drieën in een schema geplaatst.

| 'ellen | gulden | ellen |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 16 |
| | | <u>9x</u> |
| | | 144 : 4 = 36 gulden.' |

In de loop van de19de eeuw nam de kritiek op dit rekenen volgens voorschrift toe.
Zo publiceerde Hemkes na zijn rekenboeken een studieboek voor kwekelingen 'Gronden der Rekenkunst' (1860) waarin voor het vinden van de vierde evenredige in toepassingssituaties drie methoden werden aangeboden.

Linnen kopen (2)
12 el kost 45 gulden
Wat kost 64 el?

Als eerste methode: de regel van drieën in een heldere notatie.

a) 12 : 64 = 45 : $a$ , dus 12 x $a$ = 45 x 64 $a$ = 240 gulden.

Vervolgens als tweede methode het terugrekenen naar 1 el.

b) Als 12 el 45 gulden kost, dan kost 1 el 45/12 gulden en 64 el dus 64 x 45/12 gulden = 240 gulden.

Ten slotte als derde methode het flexibele rekenen met verhoudingen in een schema genoteerd

c) 12 el = *f* 45
60 el = *f* 225
4 el = *f* 15 +
64 el = *f* 240

Hemkes sprak geen voorkeur voor één van deze methoden uit.
Versluys deed dat wel: hij verwierp de niet-inzichtelijke methode a) en achtte - afhankelijk van de getalrelaties in de verhoudingssituatie - zowel b) als c) geschikt. [29, p.56]
Mede door zijn invloed raakte vanaf 1875 de 'blinde' regel van drieën op de lagere school in onbruik.
Daarom kan het verdwijnen van dit rekenrecept mede als markeringspunt voor de opkomst van het inzichtelijke, zelfzoekende, heuristische rekenen fungeren en voor de neergang van de mechanistische methodiek.4)

## Noten

1) Artikel 22 van de Schoolwet van 1806 luidt:

'Alle schoolonderwijs zal zoodanig moeten worden ingericht, dat onder het aanleeren van gepaste en nuttige kundigheden,

> de verstandelijke vermogens der kinderen ontwikkeld, en zij zelven opgeleid worden tot alle maatschappelijke en christelijke deugden'.

2) Gerdessen Timmermans heeft een praktisch rekenboek samengesteld, gebaseerd op het destijds bekende rekenkundeboek van De Gelder, 'dewijl dezelve het handboek is geworden bij het theoretisch onderrigt in de gewone rekenkunde, van zoo niet de meeste, dan toch vele oordeelkundige Onderwijzers.' Aan de hand van 'de zamentelling in geheele getallen' is eenvoudig te zien hoe de auteur daarbij te werk gaat. Om te beginnen wordt de onderwijzer naar de betreffende tekst over optellen uit het boek van De Gelder verwezen. Op zich geen vreemde gedachte, omdat de Gelder daar een soort abacus introduceert waarmee de inwisselhandelingen van het cijferende optellen zichtbaar worden gemaakt. De 20 opgaven voor optellen hebben eerst betrekking op onbenoemde getallen (6) en dan op benoemde (14). De eerste som van de eerste serie is een optelling van enkele getallen onder de tien en de laatste van een reeks getallen met 9 (!) cijfers. Bij de benoemde getallen is het niet veel anders.
Som 10 luidt als volgt:

> 'In zekere school zijn drie onderwijzers en ... leerlingen. Wilt gij weten, lieve leerling! hoeveel kinderen er zijn? Geef dan acht! De hoofd-onderwijzer onderwijst de hoogste klasse, waarin hij 25 jongens en 20 meisjes telt; de ondermeester geeft de middelste klasse onderrigt, die wel zoo veel jongens, maar slechts de helft meisjes telt, en de kweekeling onderwijst in de laagste klas zoo veel kinderen, als er de hoofdonderwijzer en de ondermeester zamen hebben. Welnu! hoeveel leerlingen zijn er dan in die school?' [13, p.3]

Na de behandeling van de andere operaties komt optellen aan het eind van het gedeelte over hele getallen nog in gemengde opgaven voor die meestal zeer uitgebreid geformuleerd zijn.
Zie over de didactische opvattingen van De Gelder: Beckers. [6]

3) In 1872 verschijnt voor het eerst een boekenserie voor de klassen 2 tot 6: het 'Rekenboek voor de volksschool' van Closse, Kemper, Scheffer, Temmink, Tiemersma & Ufkes. En daarmee wordt

een geheel nieuwe ontwikkeling in gang gezet. Ze sluit in grote lijnen aan bij het concept dat Hemkes eerder hanteerde: eerst enkele sommen met onbenoemde getallen, dan toepassingen met benoemde getallen, en gemengde vraagstukken van de operaties die tot dan toe behandeld zijn, maar nu voor de leerstof vanaf klasse 2. In bijvoorbeeld het eerste deel van hun rekenboek over het rekenen tot honderd, staan eerst 'enkelvoudige' kale opgaven en toepassingen van optellen en aftrekken, gevolgd door sommen waarin beide basisbewerkingen voorkomen. Daarna gebeurt hetzelfde met vermenigvuldigen en delen. En tot slot wordt elk van deze operaties weer in gemengde opgaven met optellen en aftrekken gecombineerd.

4) M. Kool schreef over Nederlandstalige rekenboeken uit de 15de en 16de eeuw. [20] E. de Moor maakte een studie over, onder meer, de vormleer die tot 1889 op het programma van de basisschool stond. [23] Hij schreef 'Vroeger' (1999) waarin 40 historische columns over het rekenonderwijs zijn gebundeld die eerder in 'Willem Bartjens', het tijdschrift voor reken-wiskundedidactiek, werden gepubliceerd. Daarin staan onder meer lezenswaardige columns over Bartjens, Pestalozzi en Versluys.[25] Vanaf 2000 tot 2015 verschenen nog eens 65 bijdragen van zijn hand in 'Volgens Bartjens', zoals vanaf 2004 de opvolger van 'Willem Bartjens' heet. A. Leen bestudeerde de ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19de en het begin van de 20ste eeuw. Voor een overzicht van het Duitse rekenonderwijs in de 19de eeuw kan men Radatz & Schipper raadplegen. [27]
Tot slot wijzen we op een onderzoek van H. Smid over het wiskundeonderwijs op de Franse en Latijnse scholen. [28] Deze publicaties vormen een belangrijke aanvulling op het onderhavige hoofdstuk.

# 2 Opkomst van de heuristische rekenmethodes 1875-1900

## Inleiding

In de periode 1800-1875 werd weinig aandacht aan hoofdrekenen geschonken.
Cijferen bleef het onderwijs domineren, ook al hadden in het begin van de 19de eeuw Pestalozzi en in zijn spoor Prinsen voor een andere opzet gepleit.
Toepassingen kwamen pas in de rekenboekjes van de hoogste klassen aan bod.
Vanaf 1875 veranderde deze situatie ingrijpend: binnen korte tijd verschenen enkele compleet nieuwe rekenmethodes.
In het volgende worden drie van deze methodes besproken.
Maar eerst geven we een korte schets van vier algemene kenmerken van het nieuwe rekenonderwijs, na de methodebesprekingen gevolgd door vier andere.
Ze hebben achtereenvolgens betrekking op:

- het klassikale onderwijs
- de heuristische methode
- de concentrische opbouw
- de aanschouwelijke grondslag

- het veelvormige hoofdrekenen
- het inzichtelijke cijferen
- de aard en functie van de opgaven
- de stapsgewijze opbouw van de leergangen.

Het hoofdstuk wordt besloten met een overzicht van de handleidingen, het gevolgde leerstofprogramma en een samenvatting van het voorgaande aan de hand van een sprekend voorbeeld.

## 1) Kenmerken van de heuristische rekenmethodes (1)

*1) Klassikaal onderwijs*

De didactische omwenteling die zich tegen het einde van de 19de eeuw voltrekt, kenmerkt zich wat de vormgeving betreft door het feit dat het onderwijs geleidelijk meer klassikaal wordt ingericht. Zijlstra schetste destijds de voordelen van deze nieuwe opzet van de lessen ten opzichte van het tot dan gangbare hoofdelijke rekenonderwijs in de hoogste klassen, als volgt.

> 'Is dit een vooruitgang te achten? Ongetwijfeld. Immers al nemen we aan, dat de vroegere individueele hulp op de beste wijze verleend werd, dan zal het toch dikwijls voorgekomen zijn, dat de verschillende arbeid der rekenaars niet voldoende werd nagezien, terwijl nu de geheele klasse nut kan trekken van het inzicht en de opmerkingen der enkelen, die de onderwijzer, ieder op zijne beurt, door goed gestelde vragen tot denken noodzaakt. De onderwijzer kan nu beter de vorderingen der geheele klasse overzien en de leemten, die hij ontdekt, aanvullen; de ambitie der leerlingen is grooter, en het geheele rekenonderwijs verkrijgt meer levendigheid, dan wanneer ieder rekent,' waar hij aan toe is', en 'hulp vraagt', als hij niet voort kan. Natuurlijk mag ook hier het klassikaal onderwijs de inspanning van elk individu niet overbodig maken, en moeten de leerlingen nu en dan, geheel aan zich zelven overgelaten, hunne krachten aan het rekenwerk beproeven. Wie door het geven van eene toelichting of door het verwijzen naar een soortgelijk vraagstuk de leerlingen steeds op weg helpt, handelt niet verstandig, en ontneemt den leerlingen het genoegen, aan het zelf vinden van de oplossing.' [17, p.21]

Dat de klassikale aanpak steeds meer mogelijk werd, kwam mede door de beschikbaarheid van rekenboeken en handleidingen voor de verschillende leerjaren van de lagere school. Tot 1875 waren die namelijk nog niet voorhanden. De gangbare oudere rekenboeken van Hemkes (1835) en Boeser (1850) bevatten slechts gemengde opgaven voor de hogere leerjaren. Daarbij werd er vanuit gegaan dat de leerlingen de rekenprocedures met pure getallen al beheersten, zodat ze de sommenboeken zelfstandig konden doorwerken – een handleiding voor de onderwijzer ontbrak.

*2) Heuristische methode*

Het overwegend werktuigelijke rekenonderwijs maakt plaats voor op inzicht gerichte, zelfzoekende methoden onder strakke leiding van de onderwijzer.

Tot omstreeks 1880 was het rekenonderwijs overwegend machinaal opgezet. In de eerste leerjaren werd de nodige tafelkennis van de basisbewerkingen opgedaan ten einde de cijferprocedures te kunnen leren die in het derde en vierde leerjaar centraal staan.

Neem bijvoorbeeld het leren van de tafels. Dat gebeurde door ze rechttoe rechtaan te laten reciteren zonder dat er voorafgaand aandacht aan de vermenigvuldigoperatie werd besteed en zonder dat van allerlei handige relaties gebruik werd gemaakt.

Versluys daarentegen kiest nadrukkelijk voor een geleidelijke en inzichtelijke opbouw van de tafels. Na vermenigvuldigen als herhaald optellen, volgt verkorting via de 'natuurlijke' rekenwijzen van kinderen:

- halveren (5 x 7 is de helft van 10 x 7)
- benutten vijf- en tienstructuur (9 x 7 = 10 x 7 – 7; en 6 x 7 = 5 x 7 + 7)
- en van rekenstrategieën als verwisselen (5 x 7 = 7 x 5) en splitsen (7 x 6 = 7 x 5 + 7; en 7 x 6 = 6 x 6 + 6).

Ook bij hem is het einddoel dat de leerlingen de tafels uit het hoofd kennen. Op de weg daar naartoe hebben ze echter tal van eigenschappen leren inzien, die ze in het vervolg bij het hoofdrekenen kunnen inzetten.

Van Pelt verwoordt een dergelijke aanpak in zijn methode zo:

> 'Geen verstandig onderwijzer zal hier vragen, of de leerlingen op deze wijze *het vlugst* de tafel leeren. Hij zal begrijpen, dat het hoofddoel van ons onderwijs ontwikkeling moet zijn, ontwikkeling door doen en zelf zoeken. Hij zal spoedig opmerken, dat deze wijze van werken zoo'n invloed op de leerlingen heeft, dat ze later zelven, vooral bij het hoofdrekenen, dezen weg opgaan. (...) De schrijver van *de Rekencursus* drukt er zijn ergernis over uit, dat nog in dezen tijd zoo veelen de tafel leeren als geheugenwerk: ieder onderwijzer weet toch, dat het rekenonderwijs zuiver *heuristisch* moet zijn.' [8, p.15-17]

*3) Concentrische opbouw*

Hemkes behandelde in 'De kleine Rekenaar' iedere bewerking eerst met kleine en grotere hele getallen alvorens de volgende bewerking aan de orde te stellen, bij tellen, optellen, vermenigvuldigen, aftrekken en tot slot delen.

Versluys verdeelt de leerstof echter in kringen (of trappen) van achtereenvolgens de getallen tot 20, tot 100, tot 1000 en verder, en stelt daarin van meet af aan elke basisbewerking aan de orde.
In de eerste kring van de hele getallen tot 20 gaat hij zelfs nog een stap verder door ieder opeenvolgend getal via de vier basisoperaties te 'ontbinden' - de zogenoemde monografische aanpak die hij overnam van de Duitse rekendidacticus Grube.

> 'We hebben dus gezien, dat de aard der zaak ons gebiedt, niet tot een grootere hoeveelheid over te gaan, voordat alle voorafgaande van alle zijden beschouwd zijn. Hiermee is de volgorde van wat wij bij het aanschouwelijk rekenen te behandelen hebben, in hoofdzaak aangewezen. Niet eerst tellen van 1 tot 10, daarna optelling beneden 10, vervolgens aftrekking, enz., maar op iedere hoeveelheid achtereenvolgens alle bewerkingen toepassen, dat is de leergang, die ons door de natuur wordt aangewezen.' [11, p.7]

Neem bijvoorbeeld het getal 7.
In totaal worden daarover 85 sommen gegeven als:

> 1) Steekt uw 5 vingers van de linkerhand omhoog en één van de rechterhand. Hoeveel zijn er nu omhoog? Steekt nog een vinger van de rechterhand omhoog. Hoeveel zijn er nu omhoog? Gij hebt uw 5 vingers van de linkerhand omhoog; en hoeveel van de rechterhand? Hoeveel zijn dus vijf vingers en twee vingers? (In koor.)
>
> 2) Hier zijn een stuiver en 2 cent. Hoeveel centen zijn dat samen?
>
> 3) Als Hendrik 7 cent heeft, en koopt een prent van 2 cent, hoeveel houdt hij dan over? ( De onderwijzer legge hier 7 centen op tafel.)
>
> 4) Welke 3 geldstukken zijn samen even veel waard als 7 cent?

5) Hier zijn 7 cent; hoeveel prenten van 2 cent het stuk kan men daar voor kopen?

6) Een aardappelkoopman moest met een kruiwagen 7 zakken aardappels wegbrengen. Hij kon er maar 2 op dezen kruiwagen leggen. Hoe dikwijls moest hij rijden, om al de aardappels te bezorgen?

7) Wat blijft er over als men van 7 drie keer 2 wegneemt?

Alle basisoperaties worden erin betrokken.
Het is opvallend hoe vernuftig de tekstopgaven in de contexten met onbenoemde en benoemde getallen zijn samengesteld – let op 5), 6) en 7)!
Geen enkele opgave is bij het rekenen tot 10 aanvankelijk in de vorm van een pure cijfersom (7–3 x 2 = ...) gegeven.

Van Pelt betrekt bij de tweedeling van 7 cent in de context van het winkeltje spelen ook al direct de halve cent. Opvallend veel van de honderden tekstopgaven uit het aanvankelijke rekenonderwijs hebben in zijn methode betrekking op geldrekenen:

> 'Het winkeltje-spelen dient, om op aangename wijs de kleinen praktisch te ontwikkelen.' [12, p.25]

*4) Aanschouwelijke grondslag*

De grondslag van het rekenonderwijs dient aanschouwelijk te zijn.
In de voorbeelden die zojuist bij het getal zeven werden gegeven kan men aflezen dat ze achtereenvolgens betrekking hebben op:

- het rekenen met aanwezige voorwerpen
- het rekenen met afwezige voorwerpen
- het rekenen met onbenoemde getallen.

De aanschouwelijke grondslag wordt, wat de hele getallen betreft, vooral in het aanvankelijke rekenen gelegd. Daartoe worden allerlei objecten, afbeeldingen en rekenleermiddelen ingezet, zoals vingers, munten, dobbelstenen, dominostenen, getalbeelden, telramen, rekenkuben en –staafjes. Vanwege de eenzijdige nadruk op het groeperen van hoeveelheden ontbreekt bij de leermiddelen in deze periode de kralenketting met tienstructuur die later door Maria Montessori geïntroduceerd werd.
Zijlstra beschrijft de basisgedachte van het aanschouwelijke rekenen als volgt:

> 'Door het aanschouwelijk rekenen maakt men den overgang van het abstracte, van zinnelijk waarneembare tot het begrip, zoo geleidelijk mogelijk. Aanvankelijk wordt het kind bij zijn oordeelen telkens geleid door hetgeen het *ziet*; daarna wordt slechts de *naam* der eenheden bij de hoeveelheid gevoegd, opdat het kind zich een bepaald aantal *voorstelle*; eindelijk is ook dit hulpmiddel niet meer noodig, en denkt het kind met de begrippen der hoeveelheden.' [16, p.3]

Bij de breuken wordt de inhoudelijke basis met behulp van cirkels, vierkanten (rechthoeken) en lijnstukken gelegd. Versluys merkt daarover op:

> 'Een vierkant en vooral een cirkel heeft in elk geval het voordeel van beter dan een rechte lijn het denkbeeld eener eenheid, van een geheel, te vertegenwoordigen. Het vierkant is in dat opzicht ook verkieslijk boven den rechthoek. Bij het gebruik van een vierkant als eenheid kan men door trekken van staande en liggende lijnen (beter dan bij het gebruik van een rechte lijn als eenheid) doen in't oog vallen a) de beteekenis van breuken als 5/6, 3/8, 7/9, enz. b) de vereenvoudiging 4/6 = 2/3, en c) de verklaring van 3/5: 6 en 3/5 x 1/6.' [13, p. 70]

Bij het inzichtelijk maken van gelijkwaardige breuken en het vermenigvuldigen van breuken zet Versluys dus het vierkant in.

> 'Verder laat men weer gebruik maken van de bekorting dat 2 keer het derde deel van iets nemen = vermenigvuldigen met 2/3. Men schrijft op bord:
> 2 keer het derde deel van 5/8 is 2/3 x 5/8.
>
> Een vermenigvuldiging als deze wordt op de volgende wijze aanschouwelijk gemaakt. Men teekent een vierkant, dat als eenheid wordt beschouwd en verdeelt die door horizontale strepen in 8 gelijke deelen, waarvan men 5 neemt. Verdeelt men vervolgens de eenheid door verticale strepen in drie gelijke deelen, dan neemt men tevens het derde deel van 5/8, en dat derde deel kan men daarop twee maal nemen.
> Zoo zien de leerlingen, dat

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{2 \times 5}{3 \times 8}$$

Groote getallen zijn hier niet noodig.' [13, p.73-74]

Het aanschouwelijke rekenen vormt het fundament van:

- hoofdrekenen
- cijferen
- en het oplossen van vraagstukjes.

De didactische wending naar meer zelfzoekend, inzichtelijk rekenen volgens leergangen waarin de moeilijkheden zijn opgesplitst, is in de laatste decennia van de 19de eeuw op diverse wijzen in methodes uitgewerkt.

Als intermezzo wordt nu eerst beschreven hoe Versluys (1875), Van Pelt (1880) en Boswijk & Zijlstra (1883) deze onderwijsvisie gestalte geven.1)

Daarna wordt de algemene kenschets van de nieuwe rekenmethodes vervolgd.

## 2 Drie rekenmethodes: Versluys, Van Pelt en Boswijk & Zijlstra

### 2.1 De methode Versluys

Jan Versluys – de grondlegger van de Nederlandse rekendidactiek – schrijft in 'Methodiek van het rekenen' over hoofdrekenen en cijferen, zoals neergelegd in zijn methode 'Rekenonderwijs' uit 1875:

> 'Een groot verschil tusschen het hoofdrekenen en het cijferen bestaat hierin, dat men bij het cijferen gewoonlijk begint met de eenheden van den laagsten rang en bij het hoofdrekenen met de eenheden van den hoogsten rang. Bij de deeling begint men altijd met de eenheden van den hoogsten rang. Verder volgt men bij het cijferen meestal vaste regels, dat wil zeggen: men handelt bij getallen van dezelfde soort steeds op dezelfde wijze. Bij het hoofdrekenen daarentegen brengt men verschillende bekortingen aan, waartoe de getallen in veel speciale gevallen aanleiding geven.' [13, p.86]

Van elementair hoofdrekenen geeft hij de enkele voorbeelden:

28 + 24 = 30+ 22 = 52
39 + 58 = 40 + 60 – 3 = 97

65 - 38 = 67 - 40 = 27
66 - 27 = (67 - 27) - 1 = 40 - 1 = 39

En van handig vermenigvuldigen met uitkomsten boven de honderd:

6 x 49 = 6 x 50 - 6 = 300 - 6 = 294
97 x 14 = 100 x 14 - 3 x 14 = 1400 - 42 = 1358
14 x 65 = 7 x 130 = 910

Doordat bij delen altijd bij 'den hoogsten rang' wordt begonnen, valt het onderscheid tussen hoofdrekenen en cijferen hier weg: cijferend delen begint met de 'kolomsgewijze' berekening en notatie van het quotiënt.
Bij het afschatten hoeveel keer de deler van het deeltal afgehaald kan worden, mogen de kinderen aparte tussenberekeningen met keersommen maken.

'Zij gevraagd, hoe dikwijls 4 gulden kan afgenomen worden van 936 gulden.
Vooreerst zien we, dat *f* 4 van *f* 936 geen 1000 keer kan afgenomen worden maar wel 100 keer.
Nu is 100 keer 4 gulden *f* 400
200 keer 4 gulden *f* 800
300 keer 4 gulden *f* 1200, enz.
Ook schrijven we de berekening aanvankelijk in den volgende vorm:

| | | |
|---|---|---|
| 4 gulden / | 936 gulden \ | 200 keer |
| | - 800 „ | 30 |
| | 136 gulden | 4 |
| | 120 „ | 234 keer |
| | 16 gulden | |
| | 16 „ | |
| | 0 | |

Na eenige oefening op eenvoudige getallen, gaat men over tot moeilijker voorbeelden. Langzamerhand went men de leerlingen er aan, bij een deeler van 3 of meer cijfers aanvankelijk naar de voorste cijfers van deeler en deeltal te zien, als men een cijfer van 't quotient bepaalt.' [13, p.42]

Versluys begint bij het rekenen tot honderd naast het hoofdrekenen ook tegelijk met het cijferen. Dit gebeurt bij optellen en aftrekken eerst met munten – dubbeltjes en centen – dan met benoemde tienen en enen, en ten slotte volgens de standaardnotatie.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 1 |
| 45 | 4 dubbeltjes en 5 cent | 4t + 5e | 45 |
| 28+ | 2 dubbeltjes en 8 cent+ | 2t + 8e + | 28+ |
| | 6 dubbeltjes en 13 cent | 6t + 13e | 73 |

De leergang is strak systematisch opgezet volgens toenemende complexiteit: eerst tienen bij tienen; dan tienen en enen bij tienen en enen zodanig dat de enen samen minder dan tien zijn; dan tienen en enen met enen die samen tien of meer zijn; en ten slotte het bovenstaande geval. Bij de drie andere basisbewerkingen wordt bij het cijferen ook stapsgewijze opgebouwd. De concrete basis bestaat uit handelingen op het telraam en met munten.
Over het belang van hoofdrekenen en cijferen schrijft hij:

> 'Ongetwijfeld is het hoofdrekenen met het oog op het dagelijksch leven van groot gewicht, maar zeker is, dat ook het cijferen veel praktische waarde bezit. Is dit zoo, dan verdienen beide onderdelen ieder volgens zijn eigen aard behandeld te worden.' [13, p.87]

Bij zowel hoofdrekenen als cijferen worden de vraagstukjes vooral in de vorm van tekstopgaven met benoemde getallen verstrekt – in de eerste twee klassen al meer 2000!
Enkele voorbeelden van delen in het getallengebied tot 100 laten zien hoe hier kennis van de tafels veelzijdig, niet routinematig, ingezet dient te worden.

> 1) Hoeveel jassen kan een kleermaker maken uit een stuk laken van 35 meter, als hij voor elke jas 4 meter laken noodig heeft.
>
> 2) Hoeveel weken en dagen zijn 51 dagen?
>
> 3) Als 27 kinderen aan 6 banken moeten zitten, hoeveel moeten er dan aan elke bank zitten?
>
> 4) Vijf jongens en 4 meisjes moeten 72 kersen gelijkelijk deelen. Hoeveel kersen krijgt ieder?
>
> 5) Acht meisjes moeten 60 spelden deelen; hoeveel spelden kan ieder krijgen?

Naast dit toegepaste rekenen bevat de methode van Versluys tevens een beperkt aantal redeneersommen, of beter gezegd, sommen die beredeneerd opgelost dienen te worden.
Een voorbeeld uit klas twee:

> In een weide loopen koeien en ganzen, in't geheel 5 dieren. Als deze samen 14 pooten hebben, hoeveel koeien en hoeveel ganzen loopen er dan in die weide?

De redenering die in de hogere leerjaren wordt geëist, is in leerjaar twee nog niet nodig. De oplossing mag via gissen en missen.
Later dient de oplossing als volgt op schrift gesteld te worden:

> ' 5 ganzen hebben 10 pooten. Dus kom ik 4 pooten tekort. Die kan ik winnen door 2 ganzen voor 2 koeien in te ruilen. Dan houden we 3 ganzen en 2 koeien over: 3 x 2 + 2 x 4 = 14.'

Het streven naar inzicht op de domeinen van hoofdrekenen, cijferen en toegepast rekenen strookt met de waarde die Versluys aan het rekenonderwijs toekent. Een ruim citaat waaruit het voorgaande kan worden begrepen:

> 'Het nut van 't rekenen is tweeledig. Vooreerst brengt het kennis aan wat de ontbinding en samenstelling van hoeveelheden betreft; dit kan men de praktische waarde van het rekenen noemen. In de tweede plaats oefent het in 't oordelen; dit is de vormende waarde van het rekenen. Nergens is de leerling zoo zeker, dat de kennis inderdaad waar is. Met eigen oogen aanschouwt hij de ontbinding en samenstelling der hoeveelheden: met zijn eigen handen voert hij ze uit bij de kleinere hoeveelheden. Kennis, op deze wijze verkregen, heeft een eigenaardige beteekenis, een heilzamen invloed naast andere kennis, die door mededeeling wordt verkregen. Men heeft terecht opgemerkt, dat het geheele onderwijs, door te gewennen aan orde en regel, aan stiptheid en nauwkeurigheid, door het zoeken naar waarheid en door het verwekken van blijdschap in het vinden der waarheid, in het voldoen aan juistheid, een heilzamen invloed heeft op de zedelijke ontwikkeling. Maar dat alles geldt voor geen vak in hoogere mate dan voor het onderwijs in rekenen, waarbij de waarheid ten

> volle tot bewustzijn wordt gebracht, en waarbij een heuristische behandeling mogelijk is.' [13, p.92-93]

## 2.2 De methode Van Pelt

Van Pelt benadrukt vooral het praktische nut van het rekenonderwijs. Deze doelstelling leidt bij hem rechtstreeks naar het hoofdrekenen, waarbij berekeningen op de lei genoteerd mogen worden.

> 'Wanneer we hen, die op kantoren en in groote winkelmagazijnen werkzaam zijn, uitzonderen, is het onbetwistbaar, dat de menschen wel 20 - of 30 - maal uit het hoofd moeten rekenen tegen dat hun éénmaal vaardigheid in het werken volgens de regelen der Cijferkunst te pas komt. Hieruit volgt reeds, dat we in de school in de eerste plaats veel en goed onderwijs in het Hoofdrekenen moeten geven. (...) Wanneer de kinderen aldus door veel *doen* en *toepassen* goed de hoeveelheden tot *duizend* hebben leren overzien, vlug en vaardig de bewerkingen er mede verrichten volgens de regelen van het Hoofdrekenen, heeft men verkregen: *ten eerste* dat ze thuis en in de winkels zich zeer goed weten te helpen met rekenen, hetgeen de ambitie niet weinig versterkt; *ten tweede* dat ze nu zeer spoedig, en goed, de opvolgende gevallen der 4 hoofdbewerkingen volgens de regelen der Cijferkunst begrijpen; *ten derde* door de verkregen vaardigheid in het hoofdrekenen een middel verkregen hebben, om de bewerkingen volgens de Cijferkunst te controleeren en dadelijk te vatten, wanneer een antwoord 'onmogelijk' moet heeten en dus foutief is.' [8, p.13]

In het aanvankelijke (hoofd)rekenonderwijs worden alle hoofdbewerkingen herleid tot (herhaald) optellen. Daarbij wordt onder meer gebruik gemaakt van (ver)dubbelen en van de vijf- en tienstructuur.
Deze strategieën komen vooral ook bij het leren van de tafels van pas, waarover we eerder schreven.
Bij het aftrekken wordt de 'winkelmethode' van het aanvullende optellen gevolgd. Uitgangspunt is een concreet probleem.

> Marie heeft 65 cent (6 dubbeltjes en 5 cent) bij zich. Ze moet in den winkel 48 cent betalen. Hoeveel hield ze over?

De situatie wordt uitgespeeld. Marie betaalt met 5 dubbeltjes (50 cent). Ze krijgt 2 cent terug. En heeft dus alles bij elkaar nog 2 + 15 = 17 cent over.
Bij vermenigvuldigen komen verschillende strategieën aan bod.

1 el stof kost 16 cent. Hoeveel kost 8 el?

$$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{8}\ \text{x} \\ 80 \\ \underline{48} \\ 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \text{ x } 16 = 80 \\ 3 \text{ x } 16 = \underline{48} \\ 128 \end{array}$$

verdubbelen:
16 + 16 = 32
32 + 32 = 64
64 + 64 = 128

Voor hoofdrekenend delen wordt bij het zoeken van een quotiënt door opklimming, naast het verdubbelen ook gebruik gemaakt van tien- en vijfvouden. Pas eind klas drie begint Van Pelt met cijferen – leerjaar vier heet bij hem weliswaar het cijferjaar, maar het hoofdrekenen wordt ook in dit jaar en daarna goed onderhouden.
Samenvattend kan vastgesteld worden dat Van Pelt hoofdrekenen nog meer gewicht geeft dan Versluys.

Het praktische nut dat Van Pelt aan het rekenonderwijs toekent, manifesteert zich niet alleen bij het hoofdrekenen, maar vooral ook bij zijn keuze van de vraagstukjes. In lange volzinnen schetst de auteur hoe hij daarbij te werk is gegaan.
Enkele fragmenten uit zijn uitgebreide toelichting:

> 'We bedoelen de berekeningen voorkomende in de verschillende beroepen en bedrijven, op reis en in het verkeer, in sommige takken van dienst, in de keukenhuishouding, bij het berekenen en het betalen van belasting, bij het in- en uitvoeren van artikelen over de grens, bij het brievenvervoer en de telegrafie, bij postpakketten en Rijkspostspaarbank; bij het

> aanbesteden, verkoopen en het verhuren van vaste goederen, alsmede bij het nemen van hypotheek er op. (...) Gaande door de stad komt de auteur voorbij winkels die wegens liquidatie 10 of 20 % korting geven, voorbij een wisselkantoor of een assurantiekantoor, voorbij pakhuizen en magazijnen, ziet steeds naar de prijzen, vraagt inlichtingen om stof te vinden voor echt praktische vraagstukjes. En thuis volgt hij tal van mededeelingen in de verschillende rubrieken der courant om meer gegevens te vinden of luistert naar de berekeningen van vrouw en dochters en modiste of bladert in prijscouranten. Met de kleinen treedt hij de bazar in of volgt hen bij 't doen van boodschappen in de winkels, of ziet toe bij het knikkeren of het ganzenbordspel. Met de allerkleinsten gaat hij winkeltje spelen, laat één de koopvrouw voorstellen en geeft geld mee aan een zes-jarige, die bijv. voor 3 cent kersen mag koopen. (...) Van al het bovenstaande kan men natuurlijk niet zeggen, dat die onderwerpen niet reeds hier of daar bouwstof hadden geleverd voor enkele rekenkunstige opgaven en vraagstukjes, doch vóór het verschijnen van deze serie had niemand zoo stelselmatig en nauwgezet al de berekeningen van het praktische leven nagegaan, om gedurende den geheelen leertijd hierin de aanknoopingspunten te vinden voor het rekenonderwijs. Het groote nut van deze keuze der leerstof is voorzeker, dat de kinderen telkens begrijpen, dat hetgeen ze leeren en toepassen, een eisch is der samenleving, waardoor de belangstelling gaande wordt gehouden,' [8, p.9].

Ook op het punt van de praktische toepassingen zijn er dus accentverschillen met Versluys te zien, maar die zijn toch meer van kwantitatieve dan van kwalitatieve aard.
Van Pelt vat zijn didactische adagium als volgt samen:

> 'Ga uit van aanschouwing, splits de moeilijkheden, laat de leerlingen door doen heldere voorstellingen verkrijgen en houd rekening met de eischen van het praktische leven.'
> [8, p.76]

## 2.3 De methode Boswijk & Zijlstra

Het werk van Boswijk & Zijlstra (1883) behoort eveneens tot de heuristische rekenrichting. Maar de leergang van het (toegepaste) cijferen verschilt met die van Versluys en Van Pelt. Het volgende citaat precies geeft aan waaruit het onderscheid bestaat.

> 'Terwijl wij gaarne hulde brengen aan de verdiensten der genoemde rekenboekjes, die, als zij geregeld doorgewerkt worden, de leerlingen met helder inzicht zullen doen rekenen, is de vraag bij ons gerezen: worden bij het doorwerken van eene der beide seriën de scholieren genoeg in het *cijferen* geoefend, treedt het rekenen als zoodanig genoeg op den voorgrond? Ons antwoord luidt ontkennend; ons komt het voor, dat de cijferoefeningen meer op den voorgrond moeten treden, terwijl wij het schriftelijk beredeneerd rekenen veel later eene plaats in het leerplan wenschen aan te wijzen dan de schrijvers doen. Deze overweging heeft de heer *Boswijk* en schrijver dezes aanleiding gegeven tot het vervaardigen van een stel rekenboeken, waarvan de eerste vijf deeltjes uitsluitend getalbewerkingen bevatten.' [17, p.27]

Toch is er een duidelijk verschil met het cijferen uit de oude school. Net als bij Versluys en anderen, vormen ook bij Boswijk & Zijlstra eenvoudige vraagstukjes de grondslag om inzicht in zowel de bewerkingen als de cijferprocedures te verschaffen. Ze worden mondeling opgegeven en verklaard, maar al snel raken ze op de achtergrond en in de rekenboekjes krijgen de leerlingen aanvankelijk louter oefeningen met 'kale' getallen voorgeschoteld.
De leergangen zijn opgebouwd volgens het principe van toenemende complexiteit – de moeilijkheden worden gesplitst.
Bij cijferend vermenigvuldigen gaat dat als volgt:

1) het vermenigvuldigen van grotere getallen: 6 x 320; 6 x 324
2) het vermenigvuldigen van getallen met 10
3) het vermenigvuldigen van getallen met een veelvoud van 10
4) het vermenigvuldigen met 15, 24, 36, 49 enzovoort
5) het vermenigvuldigen van een getal met 100
6) het vermenigvuldigen met een veelvoud van 100
7) het vermenigvuldigen met 234; 350; 105; 866 enzovoort.
8) het vermenigvuldigen met 1000, 10000..., plus veelvouden
9) het vermenigvuldigen met 1234, 2345, 2006, 2080, 6800
10) het vermenigvuldigen van twee willekeurige getallen.

In alle genoemde rekenboeken wordt delen via toepassingsopgaven uiteengelegd in verhoudingsdelen en verdelingsdelen – in opdelen en verdelen.
Het aparte van Boswijk & Zijlstra is echter dat ze in de concrete opstart van de leergang twee soorten staartdelingen presenteren: de kolomsgewijze methode van Versluys bij de verhoudingsdeling (het opdelen in parten), en de bekende staartdeling van het 'aanhalen' bij de verdelingsdeling die wat later voor de kale sommen gangbaar wordt – dit alles bedoeld om meer inzicht te verschaffen.
Al met al is de stapsgewijze voortgang in de methode van Boswijk & Zijlstra niet essentieel anders dan bij Versluys en Van Pelt, maar het feit dat de aangeduide leergang in deze fase vrijwel alleen uit kale sommen bestaat, maakt dat hun methode een eigen signatuur krijgt.

Net als de genoemde auteurs besteden Boswijk & Zijlstra enige aandacht aan denksommen. Op welke wijze dat gebeurt, laat het volgende voorbeeld zien.

> A kan eene sloot graven in 3 dagen, B in 5 dagen; hoe gauw kunnen ze samen die sloot graven?

In zijn 'proeve van behandeling' leidt Zijlstra, als onderwijzer, de leerlingen van klas 6 (groep 8) vragenderwijs naar de oplossing. Daarbij wordt iedere valkuil omzichtig ontweken.
Zo komt de eerste ingeving met het antwoord '4 dagen' niet in het lesverslag voor. De onderwijzer vraagt meteen : 'Hein, we willen het antwoord benaderen; zal het grooter of kleiner dan 3 dagen moeten zijn?'.
Wat later volgt de kernvraag:

> Frits, A doet het werk in 3 dagen, welk deel doet hij in 1 dag?

Dat deze vraag gesteld moet worden, ligt voor de hand – vrijwel geen enkele leerling zal de oplossing in deze richting zoeken. Maar wat opvalt, is dat de leerling vervolgens weer bij de hand wordt genomen en in een rechte lijn naar de goede uitkomst wordt geleid – voor zelf zoeken is geen enkele ruimte.

> 'B doet het werk in 5 dagen; welk deel doet B dus in 1 dag?
> 'B doet in 1 dag 1/5 deel van 't werk.'
> Juist; welk deel doen A en B nu samen in 1 dag?

'A en B doen samen in 1 dag 1/3 w + 1/5 w, of: 5/15 w + 3/15 w = 8/15 deel.'
Hoe gauw doen ze dus samen 1/15 van het werk?
'A en B doen 1/15 werk in 1/8 dag.'
In hoeveel tijd doen ze dus samen het geheele werk, Piet?
'A en B doen dus 't geheele werk in 15 x 1/8 dag = 15/8 dag = 1 7/8 dag.'
Juist; nu moet ingevuld worden wat ik op het bord schrijf.
*Oplossing*. Ik weet, ...Ik weet ook, ... Ik weet niet, ...
Omdat A het geheele werk in ..., doet hij in 1 dag ...
Omdat B het geheele werk in ..., doet hij in 1 dag ...
A en B doen dus samen in 1 dag ... w + ... w = ... w.
Zij doen dus samen 1/15 van het werk in het deel van of dag.
Het geheele werk doen zij samen in .. x .. = ... dagen.'
[17, p.126]

We hebben dit 'socratische' klassegesprek zo uitvoerig geciteerd om de grenzen van de heuristische behandeling aan te geven. De slotopmerking van Zijlstra is in dit verband veelzeggend:

> 't Behoeft nauwelijks opgemerkt te worden, dat men dikwijls op deze bespreking moet terugkomen, door soortgelijke opgaven te doen bewerken. De geheele getallen in de opgave kunnen vervangen worden door breuken of gemengde getallen; men kan in plaats van twee, drie of meer personen laten werken; of berekenen, hoe gauw A en B het b.v. samen in 2 dagen kunnen verrichten; men kan een der werklieden, wegens ziekte b.v. een dag laten rusten enz. enz. doch wie het behandelde goed begrepen heeft, zal met het oplossen van gewijzigde gevallen weinig moeite hebben.' [17, p.129]

## 3 Kenmerken van de heuristische rekendidactiek (2)

### *5) Veelzijdig hoofdrekenen*

Hoofdrekenen wordt op twee manieren opgevat, namelijk als rekenen úit het hoofd in tegenstelling tot schriftelijk rekenen, en als rekenen mét het hoofd in tegenstelling tot het automatisch uitgevoerde cijferen. Versluys en Van Pelt delen de laatste opvatting, Zijlstra hangt de eerste aan. Bij Versluys trekken hoofdrekenen en

cijferen na het eerste leerjaar gelijk op, terwijl bij Van Pelt zelfs het derde leerjaar nog vrijwel uitsluitend voor hoofdrekenen gereserveerd is. Zijlstra neemt een tussenpositie in.
Deze drie auteurs schatten naast de praktische waarde vooral ook de formele, specifiek rekenkundige betekenis van het hoofdrekenen hoog in: de kinderen leren daarmee alle belangrijke eigenschappen van de basisbewerkingen kennen. Uit de eerder gegeven voorbeelden blijkt dat dit drietal het hoofdrekenen niet overdreven ver doorvoert naar zeer speciale gevallen.
Dit geldt echter niet in algemene zin voor het hoofdrekenen uit die tijd. Bok bijvoorbeeld gebruikt in zijn 'Handleiding bij het onderwijs in Hoofdrekenen' (1893) voor 24½ x 36 = ... de volgende twee manieren:

- de berekening via 25 x 36 (100 x 36 : 4) minus ½ x 36,
- of door gebruik te maken van de eigenschap dat 24 x 36 = 30 x 30 – 6 x 6.

In het zesde leerjaar moeten de leerlingen de laatste, ingewikkeld uitgelegde eigenschap (via 60 doosjes met 60 objecten) toepassen bij 8,9 x 9,1 en 5¾ x 6¼. Ook de speciale gevallen van 3 x 37 = 111 en 27 x 37 = 999 worden ingezet.
Bok besluit zijn handleiding in dit verband treffend als volgt:

> 'De deelingen door 999, 27 en 37 leveren hier nieuwe stof, evenals de deeling door 13½, 18½ enz. Deelingen als 63425 : 999; (125 x 135) : 999; 1436 : 27; 1436 : 37; 2407 : 13½ enz. zijn op deze trap niet te moeilijk en voor de praktijk zeer nuttig. Immers hoe meer bewerkingen uitgevoerd kunnen worden zonder becijferingen en hoe makkelijker men dit kan doen, des te meer nut zal men er van trekken.' [3, p.93]

Om te kunnen begrijpen hoe Bok er toe komt het hoofdrekenen zo ver door te voeren, moeten we naar de waarde kijken die hij aan deze rekenvorm toekent. maar ook hoe eerlijk en onschuldig kan de wedijver zijn.' [3, p.8]

> 'Ligt de waarde van het cijferen vooral in het belang voor de praktijk, het hoofdrekenen moeten we een groote formeele waarde toekennen. (...) Wel brengt het als het leesonderwijs geen grooten schat van kennis aan, maar het is een prettige en pittige gymnastiek voor den geest. (...)

Om de groote waarde verder aan te duiden, merken we op, hoe logisch men hier leert denken en spreken, veel beter dan bij eene taalles b.v. Hoe ingespannen zijn ze bezig, hoe rustig zijn de gedachten op één punt bepaald, hoe groot.'

Zijn waardering van het hoofdrekenen wijkt overigens nauwelijks af van de waarde die Versluys en Zijlstra aan het rekenonderwijs als geheel hechten.

De invloed van de eeuwenoude vermogenspsychologie is bij allen merkbaar, ook al worden de basisideeën daarvan verschillend uitgewerkt.

*6) Inzichtelijk cijferen*

Versluys is de grote vernieuwer van het inzichtelijk leren cijferen volgens een geleidelijke, trapsgewijze opbouw waarin niet rechtstreeks op de eindvorm wordt aangestuurd.

Aan de volgende voorbeelden kan men aflezen hoe de cijferleergang van vermenigvuldigen bij hem verloopt.

'Vier kinderen krijgen ieder 23 cent.
Hoeveel is dat samen?
Men merkt op, dat men, ook zonder de 23 cent vier keer op te schrijven, weet dat er bij de eenheden 4 keer 3 cent of 12 cent komt en bij de tienen 4 keer 2 dubbeltjes of 8 dubbeltjes, waarbij men het dubbeltje van de 12 cent voegt.'

| | |
|---|---|
| 23 cent | 23 cent |
| 23 .. | 4 x |
| 23 .. | 92 cent |
| 23 + | |
| 92 cent | |

De opgave '23 kinderen krijgen ieder 4 cent. Hoeveel is dat samen?', gaat zo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 |
| 23 x | 23 x | 23 x | 23 x |
| 80 | 12 | 12 cent | 12 enen |
| 12 | 80 | 8 dubb | 8 tienen |
| 92 | 92 | 92 cent | 92 |

'Bij het rekenen uit het hoofd volgt men de eerste van deze twee manieren. Bij het cijferen de laatste met weglating van de woorden eenen en tienen. Men moet met het weglaten van de nul of van de woorden eenen of tienen wachten tot de leerlingen reeds eenigszins geoefend zijn in berekeningen als de bovenstaande.' [12, p.112]

Vooral de eerder beschreven kolomsgewijze staartdeling vindt veel navolging. Maar zijn vroege introductie van het cijferen in het tweede leerjaar bij het rekenen tot honderd, wordt vaak niet overgenomen. De meeste auteurs zijn van mening dat voor een goed inzicht in het tientallige stelsel eerst het hoofdrekenen nog wat verder ontwikkeld dient te worden. Om die reden wordt het cijferen bij de meesten pas in het derde leerjaar op het programma gezet of zelfs tot klas 4 uitgesteld.

De extreme positie bij het cijferen manifesteert zich niet alleen in de sommen met zeer grote getallen, maar vooral ook in de 'rekenkunstige vormen' - kortweg lintwormvormen of vormsommen genoemd - waarin ook kommagetallen, breuken en meetgetallen van het metrieke – worden opgenomen.

$$19 \times \frac{6\frac{3}{4} - (5{,}79 - 3\frac{1}{2})}{31\frac{2}{3} : 10} + \frac{256 \times 19}{475} - \left(\frac{22{,}2}{1{,}2} - 0{,}46 \times 2\frac{4}{23}\right) : 0{,}5.$$

Met name in de rekenboekjes van de voorbereidingscholen wemelt het van dit type cijfersommen dat bedoeld is om het rekenen optimaal te mechaniseren en de kinderen accuraat te leren werken. Ook hier duikt dus de vormende waarde weer op.

*7) De aard en functie van vraagstukjes*

De aard, de functie en de omvang van de opgaven binnen het heuristische rekenonderwijs verschilt aanzienlijk met die van de mechanistische methode.

Allereerst fungeren ingeklede opgaven nu niet meer louter als 'toepassingen achteraf' van wat eerst via het maken van kale sommen is geleerd, maar ze staan eerst en vooral ook aan het begin van de verschillende leertrajecten voor hoofdrekenen, cijferen en het rekenen met meetgetallen.

Bij Van Pelt bepaalt de concrete grondslag van de winkelsommen de manier waarop de kinderen leren aftrekken, namelijk via aanvullend optellen. En bij Boswijk & Zijlstra leidt de opstart vanuit

verhoudings- en verdelingsdelingen naar twee vormen van staartdelen.
Daarnaast valt de grote hoeveelheid vraagstukjes op. Alleen al in de eerste twee leerjaren krijgen de leerlingen die met de methode van Versluys of van Van Pelt worden onderwezen, ongeveer 2000 tekstopgaven voorgeschoteld.
Kortom, vraagstukjes plaveien een groot deel van de rekenwegen.

Toch zijn er buiten de praktische opgaven uit de levenswerkelijkheid van de kinderen nog vraagstukjes die hun betekenis uitsluitend ontlenen aan de formele waarde die eraan wordt toegekend. Dit zijn de zogenoemde denksommen die (schriftelijk) beredeneerd opgelost moeten worden – we gaven eerder een voorbeeld.
Ook bij dit onderdeel worden weer extreme posities ingenomen. Wisselink bijvoorbeeld, wiens methode 'De Rekenschool' uit 1878 opvallend grote overeenkomsten met de drie jaar eerder verschenen methode van Versluys vertoonde, publiceerde ruim tien jaar later een vijfdelige reeks 'Verzameling van vraagstukken ter oefening in het practisch rekenen' met ruim duizend denksommen voor de knapste leerlingen van de lagere scholen.
Vijf voorbeelden uit zijn eerste verzameling van 300 opgaven:

1) Eenige knapen moeten appels deelen.
Waren er 18 appels meer, dan zou elke knaap er 7 kunnen krijgen.
Neemt elk er 5, dan blijven er 18 over.
Hoeveel appels waren er?

2) A en B bewegen zich in eene zelfde richting langs een cirkelomtrek.
B is bij 't begin der beweging A 1,75 M vooruit.
Hoe groot is de cirkelomtrek, als A voor 1$^{ste}$ maal B na 2 min., en voor de 2$^{de}$ maal na 7 min. inhaalt?

3) Men verkoopt 30 HL graan zoodanig, dat men 2-maal zooveel wint, als de inkoop van drie HL bedraagt.
Hoeveel maal is de winst op den verkoop begrepen?

4) Eene kamer van 7 M lengte en 4,5 M breedte zal worden belegd met een kleed van 75 cM breedte.

In welke richting moet dat kleed gelegd worden, en wat is de lengte van 't kleed?

5) Zeker werk kan door 15 arbeiders in tien dagen afgemaakt worden.
Nadat ze drie dagen gewerkt hebben, vertrekken 3 arbeiders en vijf dagen later nog 3 arbeiders.
Hoeveel zal 't werk nu langer dan tien dagen duren?

Denksommen werden Wisselink gerubriceerd.
Zo is de laatste opgave van het type: 'Den tijd te bepalen waarin een werk kan worden verricht als gelijksoortige krachten (oorzaken) samenwerken'. [15, p.12]

*8) Systematische opbouw van de leergangen*

Splitsing van moeilijkheden is een algemeen kenmerk van de nieuwe rekendidactiek die na 1875 werd ingezet. In dit opzicht verschilt deze systematiek van de kleine onderwijsstapjes, in tegenstelling tot de voorgaande zeven kenmerken, niet van de aloude mechanistische methodiek die bij het cijferen werd toegepast.
Behoudens hoofdrekenen, zijn de rekenleergangen gedetailleerd uitgestippeld en opgebouwd volgens toenemende complicering. De eerder gegeven voorbeelden van het rekenen tot twintig, het optellen onder honderd en het cijferend vermenigvuldigen en delen, laten zien hoe strak de betreffende leerlijnen zijn getrokken en hoe verregaand het uitsplitsen in deelgevallen is doorgevoerd.
Dat leertrajecten ook anders afgebakend kunnen worden, zal de geschiedenis van het rekenonderwijs in de tweede helft van de 20ste eeuw leren.

## 4 Handleidingen

De methodes van Versluys en Van Pelt hebben ieder bij hun rekenboekjes een uitgebreide handleiding en voor de serie als geheel een beknopte versie samengesteld.
De handleiding van Versluys voor het aanvangsonderwijs, 250 pagina's lang, is niet alleen zo uitgebreid vanwege de monografische behandeling van de opeenvolgende getallen 1-20, maar vooral ook omdat de onderwijsgang bij ieder getal op dezelfde uitvoerige wijze wordt beschreven.

Met behulp van wisselende hulpmiddelen en getalbeelden wordt daarbij achtereenvolgens gerekend met aanwezige en afwezige voorwerpen, dan met aanwezige en afwezige hoeveelheden, en ten slotte met onbenoemde hoeveelheden. In het laatste geval zijn de vragen eerst in spreektaal en daarna in rekentaal gesteld, toentertijd vaak cijferen genoemd.
In de hogere leerjaren volgen de handleidingen globaal het rekenboek en vormen als zodanig een duidelijk richtsnoer voor het onderwijs – in het voorgaande werden diverse fragmenten over verschillende onderwerpen geciteerd: hoofdrekenen, cijferen en vermenigvuldigen van breuken.

De handleidingen van Van Pelt zijn voor de eerste vier leerjaren onmisbaar, omdat de opbouw van zijn leergangen sterk afwijkt van wat destijds, en trouwens ook later, gangbaar was. De opgave 12 – 5 wordt bij Versluys zowel via afhalen als aanvullend optellen berekend en toegepast in tekstopgaven als:

> 'Kees had een dubbeltje en 2 centen is. Hij ging een mooien tol voor 5 cent koopen. Hoeveel houdt hij over?'

Van Pelt gebruikt dit vraagstuk echter als concrete basis om het aftrekken onder de twintig op een specifieke manier te laten berekenen. [9, p.77]
Dat gaat als volgt:

> 'Wat zou hij neerleggen op de toonbank?
> Het dubbeltje.
> Juist, hij legt het tiental neer. Streep door die tien. 1Ø 2
> Wat krijgt hij terug van dit tiental centen? 5
> Goed, zet die 5 er onder.
> Hoeveel geld houdt hij over?
> Die 5 en die 2 dus.
> Vul nu in: 12 - 5 = 7'

Bij het rekenen tot honderd wordt dezelfde rekenwijze toegepast bij een opgave als '52 – 35'. De leerling betaalt met 4 dubbeltjes en voegt de teruggegeven 5 cent bij de resterende 12.
Om het een en ander in de klas volgens het boekje te laten verlopen, is hiervoor uiteraard een uitgebreide handleiding vereist.

De handleidingen voor de hogere leerjaren van Van Pelt hebben globaal dezelfde vorm als die van Versluys, maar zijn beknopte overzicht van de 'Nieuwe Rekencursus' is minder didactisch, meer opsommend, dan die van laatstgenoemde.

Boswijk & Zijlstra beperken zich, in tegenstelling tot Versluys en Van Pelt, tot een beknopte handleiding voor kwekelingen en jonge onderwijzers. [17]
Zelfs het aanvankelijke rekenen is in hun methode al behoorlijk goed zonder handleiding te volgen, omdat de onderwijsgang ervan al grotendeels in de rekenboekjes is voorgetekend.
De zojuist genoemde aftreksom 12 – 5 bijvoorbeeld verschijnt bij de monografische behandeling van 'twaalf' in hun methode direct als 12 - 5 = 10 - .. = ...
Zo wordt meteen duidelijk dat aftrekken als afhalen wordt opgevat, en dat bij het uitrekenen de tien als scharnierpunt gaat fungeren. Onderaan de pagina staat vaak een verwijzing naar een rekensituatie die de onderwijzer of een leerling als referentie kan gebruiken om de opgave concreet voor te stellen zoals in het geval van de genoemde Kees-som.
Ook wordt in het leerlingenboek aangegeven of een sommenrij mondeling behandeld dient te worden.
In het begin van de paragraaf staan maar liefst vijf verschillende getalbeelden van 12 getekend, waaronder die van 'dubbelvijf en twee stippen', die de leerlingen bij het maken van de sommen kunnen benutten.
Iedere bladzijde heeft een kopje zodat de kinderen bij het maken van de kale sommen met vrucht aan benoemde getallen kunnen denken: griffels, guldens, centen, peren, pruimen en kersen.
Een belangrijk deel van de genoemde kenmerken van de heuristische methode hebben de auteurs op deze wijze in de rekenboekjes van de leerlingen zichtbaar en werkbaar gemaakt, zodat een uitgebreide handleiding hier minder noodzakelijk lijkt.

Overigens zijn er ook methodes zonder handleiding, zoals die van de eerder genoemde Closse e.a. welke volstaan met een verwijzing naar het handboek van Hentschel dat vaak al op de kweekscholen voor onderwijzers bestudeerd werd.

## 5 Leerstof

De leerstof die Versluys in zijn rekenmethode op het programma zet, blijft bijna honderd jaar de standaard. Alleen de volgorde en de wijze waarop zij wordt behandeld, varieert in de loop van de tijd.
Zoals gezegd, wordt de leerstof in kringen (of trappen) van achtereenvolgens de getallen tot 20, tot 100, tot 1000 en verder opgedeeld. Daarin komen stap voor stap de vier basisbewerkingen in de vorm van flexibel (hoofd)rekenen, cijferen en toegepast rekenen aan bod. Dit gebeurt in de eerste drie leerjaren met hele getallen.

In het *vierde* leerjaar staat op het programma:

- het optellen en aftrekken van gewone en tiendelige breuken
- begin met metrieke maten
- flexibel (hoofd)rekenen en cijferen plus het maken van toepassingen

In de *vijfde* klas:

- vermenigvuldigen en delen van gewone en tientallige breuken
- kenmerken van deelbaarheid van 2, 5, 9 en 3
- ontbinden in factoren, g.g.d. en k.g.v.
- meetkundig rekenen (lengte, omtrek, oppervlakte en inhoud)
- metriek stelsel
- flexibel (hoofd)rekenen, cijferen en toepassingen ervan.

Het *zesde* leerjaar bestaat uit het maken van toepassingen over:

- verhoudingen en procenten (interest en samengestelde interest) onder rubrieken als gezelschapsrekenen, werksommen, menging, ruiling en zo meer
- cijfersommen kunnen uitgebreid worden met vormsommen en het algoritme van de worteltrekking.
- en vreemde talstelsels eveneens als keuze-onderwerp.

Versluys wil de leerstof op de volgende onderdelen beknotten:

> 'Evenredigheden, samengestelde breuken, kettingbreuken, de ggd. van breuken, het kgv. van breuken, het bepalen van den ggd. van breuken en van 3 of meer getallen, onpraktische vraagstukken over winst- en verliesrekening zijn weggelaten,

> en aan de repeteerende breuken is een zeer bescheiden plaats ingeruimd, zóo dat men ze desverkiezende kan weglaten'. [13, p.90]

Over priemgetallen en de negenproef spreekt hij zich niet uit.
(Van Pelt behandelt de negenproef wel en laat ook de samengestelde breuken op het programma staan - onderdelen die vele methodes tientallen jaren daarna nog handhaven.)

## 6 Besluit

De geschetste kenmerken van de nieuwe rekendidactiek zijn voorbeeldig samen te vatten met het vermenigvuldigen in het getallengebied tot honderd, inclusief het leren van de tafels.
We sommen de kenmerken van de heuristische aanpak nog eens kort op.

1) Bij de (*monografische*) behandeling van de getallen tot twintig wordt van meet af aan het vermenigvuldigen in de ontbinding van getallen betrokken.
Het getal 12 bijvoorbeeld verschijnt dan als 2 x 6; 6 x 2; 3 x 4; 4 x 3; en 2 x 5 + 2. Met rechthoekige patronen worden de relaties op *aanschouwelijke wijze* inzichtelijk gemaakt.
Vraagstukjes in de trant van 'Als een briefkaart 3 cent kost, hoeveel kosten dan 4 briefkaarten?' en 'Hoe kan men met 2 dobbelstenen 12 oogen gooien?' verdiepen het inzicht.

2) In het tweede leerjaar worden de tafels van vermenigvuldiging volgens de *heuristische methode* van verdubbelen, omkeren en met steun van de vijf- en tienstructuur eerst gestructureerd en vervolgens geleidelijk ingeslepen.2)
De eigenschappen van de vermenigvuldigoperatie die hierbij aan de orde komen, zijn later bij het flexibele hoofdrekenen breed toepasbaar.
Ook hier is er weer veel aandacht voor toepassingen.

3) Via het toegepaste delen worden de tafels veelzijdig ingezet. De betreffende vraagstukjes zijn vooral bij Versluys bijzonder doordacht samengesteld – we gaven daar enkele voorbeelden van.

4) Met opgaven als 6 x 13 en 13 x 6 kan de aanzet tot kolomsgewijs *hoofdrekenen* en *inzichtelijk cijferen*, en de relatie ertussen, worden gegeven.
Dit gebeurt op basis van vraagstukjes over geld i.c. het betalen met dubbeltjes en centen.

Uit dit voorbeeld blijkt hoezeer de nieuwe, heuristische rekendidactiek zich van de oude, mechanistische rekenmethodiek onderscheidt.
Het eigenlijke leren van de bewerking vermenigvuldigen vond bij Hemkes en anderen plaats nadat de leerlingen eerst de tafels uit het hoofd hadden geleerd.
'Je krijgt pas inzicht in vermenigvuldigen als je kunt vermenigvuldigen', luidt dit methodische motto.
Terwijl Versluys, Van Pelt en anderen precies het omgekeerde beweren: 'Eerst kennen dan kunnen, eerst denken dan doen'.
Het schoolvoorbeeld van vermenigvuldigen laat ook meteen de kwetsbare kant van de nieuwe benaderingswijze zien waarop in het begin van de 20ste eeuw gewezen zal worden: te weinig aandacht voor (sprongsgewijs) tellen.
En wat te denken van de denksommen, de vragende en verklarende onderwijsstijl, en de systematiek van de kleine onderwijsstapjes?
Hoe het ook zij, de heuristische methodes hebben het vakdidactische denken ingeluid over hoe de verschillende rekenonderdelen het beste onderwezen kunnen worden.[3)]

## Noten

1) Op de methode 'De Rekenschool' van Wisselink zal in dit hoofdstuk niet verder worden ingegaan omdat die vrijwel identiek is aan 'Rekenboek voor de lagere school' van Versluys dat drie jaar eerder werd uitgegeven. Versluys merkt daarover op:

> 'Zoodra mijn rekenboekjes verschenen, heeft de heer Wisselink zich gehaast er een navolging van te geven.' [13, p.90]

2) De grote formele waarde die in het tijdvak 1875-1900 aan het rekenonderwijs werd toegekend, is goed te begrijpen vanuit de

*vermogenspsychologie* die leerde dat het verstand uit vermogens bestaat die door oefening gevormd worden. Flexibel hoofdrekenen en cijferend rekenen bevorderen niet alleen het accurate rekenen maar ook het accurate werken in algemene zin, en het leren oplossen van vraagstukken en denksommen is tevens bevorderlijk voor het logisch redeneren – zo luidde de basisopvatting van deze psychologische richting.

Pestalozzi bracht dit idee in verband met de natuurlijke ontwikkeling van jonge kinderen die begint met de elementaire vermogens van vorm en aantal van zichtbare objecten, en vervolgens met de benoeming ervan. Zijn grondgedachte om de aanschouwing tot uitgangspunt van het rekenonderwijs te nemen, vond brede navolging. En wel speciaal de uiterlijke aanschouwing, hoewel Pestalozzi toch vooral ook de innerlijke aanschouwing, de beleving, met dit begrip op het oog had.

De *voorstellingspsychologie* had geen grote invloed op de heuristische aanpak. Volgens de voorstellingspsychologie bestaan de elementaire krachten van de menselijke geest uit voorstellingen, en het krachtenspel van de voorstellingen bepaalt het verloop van de psychische verschijnselen. Zo is een begrip niets anders dan een algemene voorstelling die uit een samenstel van een aantal gelijksoortige voorstellingen is ontstaan. Verstandelijke kennis is tot zinnelijke voorstellingen te herleiden en ook gevoelens en begeerten vinden hun grond in aanschouwing en empirische ervaring. In het (reken)onderwijs moet het volgens deze leer dus gaan om het aanbrengen van heldere voorstellingen.

De leerling speelt daarbij een passieve rol, in het onderwijs komt de nadruk op de leerstof te liggen die volgens vaste 'leertrappen' aangeboden dient te worden. Het geheugen bewaart de voorstellingen en het is om die reden van bijzondere betekenis. Om het geheugen goed te laten functioneren dient er veel tijd aan herhaling besteed te worden.

Klaarheid, associatie, systeem en methode zijn de vier leertrappen die volgens Herbart (1776-1841) doorlopen moeten worden om tot ware kennis te komen.

Op de eerste trap moet een heldere voorstelling van ieder nieuw deel verzorgd worden. Op de tweede trap dienen de verschillende

delen van een methodische eenheid met elkaar verbonden te worden. Vervolgens moet dit samenstel in een systeem worden ingepast. En ten slotte dient het geheel door oefening voor de leerling eenvoudig toegankelijk te worden.
Voortbouwend op het werk van Herbart onderscheidde Ziller vijf leertrappen die door zijn volgelingen tot voorschrift bij het lesgeven werden verheven. Een voorbeeld daarvan zien we bij Bok. [3] Aan de hand van vermenigvuldigingen met 125 als factor laat hij zien hoe bij het hoofdrekenen de regel '1/8 x 1000' wordt gevonden, uitgebreid en toegepast.
Een citaat waarin de leertrappen van Ziller verschijnen:

> 'Eenige uitbreiding, waarbij om 62½ als de helft van 125 wordt heengewerkt, bevestigt den regel. Dit laatste is ook voldoende het geval, wanneer we nu voor 125 de getallen 375, 625 en 875 plaatsen en daarbij allerlei variaties aanbrengen.
> In dezen geest nu zijn hierachter de verschillende bewerkingen uitgevoerd en naar die eischen zijn ze gerangschikt. Nog eens, nu zijn we bij ons onderwerp gebleven en hielden we ons nu niet met dit en later met weer met heel wat anders op.
> Zoo wordt dus rustig verwijld bij een zelfde geval en krijgt de leerling veel beter inzicht in het samenstel onzer getallen.
> Men merke op, dat zoodoende geleerd wordt naar de formeele leertrappen:
> 1e de voorbereiding,
> 2e de aanbieding, n. l. de verschillende aanschouwingen en beredeneringen,
> 3e de samenvatting, n.l. de regel in korte bewoordingen,
> 4e de toepassing,
> 5e de herhaling.' [3, p.22]

Deze strakke methodiek werd in de destijds toonaangevende, heuristische rekenboeken niet nagevolgd. Versluys bijvoorbeeld noemt als een van de bezwaren dat de Herbartianen het rekenen met benoemde getallen uitstellen tot de 4e trap. Ook de passieve rol van de leerling strookt niet met zijn opvattingen. [14, p.130]

3) De Gast kiest een andere volgorde voor het leren van de tafels: 2, 5, 9, 3. 4, 6, 7 en 8. [4, p.26] De meeste methodes kiezen voor de opklimmende reeks 2, 3, 4, 5 ...

# 3 Pendelen tussen Bartjens en Versluys 1900- 1950

## Inleiding

De rekenmethodes uit het tijdvak 1900 – 1950 zijn alle op de lijn van de tegenpolen Bartjens en Versluys te plaatsen.
In deze periode vond geen fundamentele vernieuwing van het rekenonderwijs plaats. Wat overigens niet wil zeggen dat er niets veranderde.
Integendeel, iedere nieuwe methode bracht wel wat nieuws in. Maar al die veranderingen hadden betrekking op deelgebieden en niet op het rekendomein als geheel. Dit in tegenstelling tot de innovaties in het laatste kwart van de 19$^{de}$ eeuw en later, de tweede helft van de 20$^{ste}$ eeuw.
We bespreken achtereenvolgens:
1) het aanvankelijke rekenen
2) het hoofdrekenen
3) het cijferen
4) het oplossen van vraagstukjes
5) de handleidingen
6) de omvang van de leerstof.

## 1 Rekenen in het eerste leerjaar

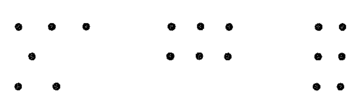
De tientallen methodes die in de eerste helft van de 20$^{ste}$ eeuw in gebruik waren, verschilden ten aanzien van het aanvankelijke rekenonderwijs in het getallengebied van 1 tot 20 voornamelijk door:
- de (monografische) behandeling van het rekenen tot tien of twintig
- via groeperen dan wel tellen

- en de voorrang van het rekenen met benoemde of juist onbenoemde getallen.

Hiermee hangt samen: het al dan niet gebruik maken van klassikaal of hoofdelijk structuurmateriaal en van getalbeelden, plus de mogelijk vroege verbinding met vraagstukjes en rekenverhalen.

## 1.1 Opkomst van de telmethodes

In het volgende citaat komt de omslag in het denken over tellen goed naar voren. Zernike, eerst sterk voorstander van de groepeermethode en meer bepaald de monografische aanpak, wijzigt in de loop van de tijd zijn afwijzende opvatting over tellen. In de handleiding van 'Ons Rekenonderwijs' (1894) rept hij er nog met geen woord over, maar in de vierde, herziene druk (1915) staat:

> 'Hoewel, naar wij meenen, in de Handleiding van J. Bok & M. H. Lem 'Door Tellen tot Rekenen' meer dan één goede gedachte door overdrijving geschaad wordt, zoo is het toch zonder twijfel juist, dat *tellen,* d.i. het bepalen van de grootte eener hoeveelheid, een nuttige oefening is, waaraan in den laatsten tijd, onder den invloed eener geheel verkeerde voorstelling omtrent de vorming van het getalbegrip, niet voldoende aandacht is geschonken. Inderdaad is de eenvoudigste manier, om het aantal van een groep eenheden te bepalen, ze te tellen. (...) Dat mechanisch tellen mag echter niet de eenige manier zijn om de grootte eener hoeveelheid te bepalen. Door groepeering van de eenheden kan het vinden van het aantal zeer vergemakkelijkt worden. Er is een tijd geweest, dat men hooge waarde hechtte aan 'rekenfiguren' en dat er strijd ontstond over de vraag, of die figuren *vast,* dan wel *veranderlijk* moesten zijn. Moet het getal 6, zoo luidde toen bijv. een strijdvraag, steeds voor dezelfde kinderen worden voorgesteld in één der volgende figuren:
>
> 
>
> Of zou men beurtelings elk dier voorstellingen mogen gebruiken? Als het twistpunt niet vergeten was, zouden wij voorstanders van het laatste gevoelen zijn.' [28, p.21]

De monografische behandeling van de getallen 1 tot 10 (20) raakt in het begin van de 20ste eeuw geleidelijk aan in onbruik. Zelfs een van de laatste heuristische methodes (Scholte, 1908) die veel aandacht aan het structureren van getallen besteedt, kiest voor een andere aanpak.[1)] Daarin vormen overzichtelijke hoeveelheden van één tot vier, met vijf als collectieve eenheid, de aanschouwelijke grondslag voor het opereren in het getallengebied tot twintig, zonder dat die getallen in oplopende volgorde worden behandeld.

Bok & Lem zijn de eerste auteurs die in de veelzeggende methode 'Door Tellen tot Rekenen' (z.j.) radicaal met de groepeermethode van het aanvankelijke rekenonderwijs breken. Zij leren de kinderen eerst tellen - een aanpak die Versluys en zijn navolgers, waaronder de genoemde Scholte, juist heftig kritiseerden.[2)] Na het kunnen opzeggen van de telrij komen bij Bok & Lem hoeveelheden tot 12 aan bod. Eerst wordt één appel op het bord getekend met het cijfer 1 eronder, dan nog een appel met de 2 erbij , en zo verder met steeds één appel meer. Op deze wijze ontstaat de genoteerde telrij tot 12. Bij elke toevoeging wordt het betreffende rijtje opnieuw geteld. Als de kinderen op een gegeven moment de cijfers kunnen lezen, worden ze los van de benoemde objecten gepresenteerd en allereerst gebruikt om getallen op een gedeeltelijk ingevulde telrij te plaatsen. Bijvoorbeeld: 'Welk getal komt op de eerste punt na de genoteerde 6; en welk getal op de punt ervoor?' En indien op de telrij bijvoorbeeld alleen 1, 6 en 12 zijn geplaatst, luidt de vraag op welk punt 9 komt te staan.
Optelsommen worden via doortellen berekend en aftrekkingen met terugtellen. Dit gebeurt eerst met opteller één dan volgt een serie met opteller twee, en zo verder. Aftrekken wordt op dezelfde stelselmatige manier aangepakt. Bij een en ander mogen de kinderen aanvankelijk de vingers als telmiddel hanteren. Maar op een gegeven moment moeten ze direct kunnen zeggen dat bijvoorbeeld 4 plus 3 gelijk is aan 7, en 6 plus 6 aan 12. Het laatste voorbeeld verschijnt eveneens als 2 x 6. Want de auteurs stellen bij het rekenen tot 12 ook direct vermenigvuldigen en delen aan de orde - vandaar dat ze de telrij aanvankelijk niet tot 10 maar tot 12 laten lopen. Naast het feit dat de kinderen al snel met onbenoemde

getallen moeten rekenen, valt op dat in deze rekenaanpak geen gebruik van leermiddelen en getalbeelden wordt gemaakt.
Ook in Bij de Ley & Postma (1913) worden geen hoofdelijke leermiddelen aanbevolen. Zij gebruiken bij en naast het tellen echter wel wisselende groeperingen en getalbeelden. Maar ze maken, opvallend genoeg, in de telrij wel een geleding bij tien maar niet bij vijf.

### 1.2 Bouman & Van Zelm

Na 1920 krijgen eenzijdige telmethodes duidelijk de overhand – eenzijdig, omdat het werken met getalbeelden ontbreekt en er ook geen aanschouwelijke structuur in de telrij wordt aangebracht. Het rekenen met onbenoemde getallen komt voorop te staan.[3)]
In de bekende methode van Bouman & Van Zelm (1918) staat:

> 'Door tellen komt de geest tot het denken van getallen. Getallen zijn als denkbaarheden geen bestaande zaken en niet voorhanden. Ze zijn dan ook niet gebonden aan een bepaalde figuur, waarom het afkeuring verdient, kinderen in de meening te brengen, dat ze b.v. bij het getal 5 aan een figuurtje als
>
> • •<br>•<br>• •
>
> moeten denken. Aanschouwing doet in het rekenonderwijs slechts mede, inzooverre het kind moet leeren beseffen, dat het 't getal van het aanschouwde heeft leeren te abstraheeren. (...) Zolang het in het begin nog te doen is om de namen der getallen, is er geen bezwaar, allerlei eenvoudige voorwerpen te laten tellen. Doch wordt er met getallen gerekend, dan gebruike men objecten als stippen, kringetjes enz., die als zoodanig voor het kind weinig belangwekkend zijn.' [7, p.82]

In de loop van het eerste leerjaar moeten de leerlingen de overstap maken van de (gedeeltelijke) stippennotatie naar het opschrijven met cijfers.

• • • • + • • = 6<br>4 + 2 = 6<br>o o o o ϕ ϕ<br>6 - 2 = 4

> 'De objecten behooren bijzaak, het denken der getallen hoofdzaak te zijn bij het rekenonderwijs. *Het rekenonderwijs heeft op het rekenen met onbenoemde getallen den nadruk te leggen.* Zijn de kinderen met verschillende bewerkingen vertrouwd geraakt, dan pas gevoelt ook het kind, dat de bewerkingen met benoemde getallen zich laten denken als toepassing van die met onbenoemde getallen. Is het kind zich bewust, dat 7 + 9 = 16, dan vindt het een vanzelfsprekendheid, dat 7 appels + 9 appels = 16 appels, 7 huizen + 9 huizen = 16 huizen, zonder de moeite te nemen om de appels en huizen zich inderdaad voor te stellen.' [7, p.13]

Gelet op het voorgaande, is het niet verrassend dat van de duizenden opgaven die de leerlingen in de eerste twee leerjaren over tellen, optellen en aftrekken maken, er slechts enkele tientallen op benoemde getallen betrekking hebben.
Ze staan alle in de volgende schematische vorm:

Jan heeft 13 knikkers
hij verliest <u>7</u> knikkers
over ... knikkers

De opgave 13 – 7 wordt aan het eind van het eerste leerjaar ( groep 3) uitgerekend via tien als steunpunt: 13 – 3 – 4 = .. Hetzelfde gebeurt daaraan voorafgaand met 6 + 7 = 6 + 4 + 3.
Om deze rekenwijzen vlot te kunnen uitvoeren, is het noodzakelijk dat de splitsingen van de getallen tot tien stelselmatig worden ingeoefend.
Even systematisch is vervolgens de werkwijze om de genoemde moeilijke optellingen en aftrekkingen via tien te oefenen en in te slijpen. Bij optellen wordt eerst 9 als eerste term genomen, dan 8 en zo verder. Bij het aftrekken wordt daarna vrijer te werk gegaan. Ook nu weer maken de leerlingen eerst stippenrijen, waarbij 10 stippen als een geheel in beeld komen. De opgave 9 + 4 = .. wordt eerst als volgt getekend

• • • • • • • • •|• • • •

en kort daarna zonder stippen uitgerekend. Een kralenketting met twee tienen van verschillende kleur, zoals in het Montessori mate-

riaal, zou hier zijn diensten kunnen bewijzen, maar wordt verrassenderwijs niet ingezet.
Wel verschijnt in het volgende leerjaar bij het rekenen tot honderd een telraam, dat overigens in het getallengebied tot twintig ook goed zou passen.

## 1.3 Kellinga

Kellinga (1926) gebruikt in zijn methode 'Noodig rekenen' naast de (gedeeltelijk) genummerde 'vakjesrij' van bordspelen, zoals het ganzenbord, ook een stippenreeks als ondergrond om opgaven tellend uit te rekenen. Daarin kan desgewenst ook de tiende stip genummerd worden.
Het schema voor opgaven van het type 6 + . = , ziet er dan als volgt uit:

• • • • • • • • • •
6 10

Kellinga is zich ervan bewust dat bij het vooruit- en terugtellen vaak verwarring ontstaat. Zie hoe hij dit algemeen voorkomende probleem oplost!

> 'Het getal waarvan men uitgaat, telt bij 't *optellen* niet mee, maar bij 't *aftrekken* wel. Als de onderwijzer daar nu niet tevoren op bedacht is, krijgt hij er getob mee, en de leerlingen raken zóó in de war, dat het hulpmiddel een hindernis wordt. Bij concrete dingen, b.v. bij appels, bestaat de moeilijkheid niet, en zal geen enkel kind het verkeerd doen. Daarom teekene men b.v. appels of moppen om de punten en getallen heen. De kinderen mogen ze er in 't begin ook nog omheen teekenen, later nog eromheen dénken, en nog later praat men er niet meer over.(...) Zo ziet men, dat het noodig is, bij den overgang naar 't abstracte goed uit te kijken en met omzichtigheid te werk te gaan.' [16, p.54]

De gestipte telrij wordt op deze wijze omgedacht tot een geordende hoeveelheid waar objecten aan toegevoegd of vanaf gehaald worden, precies zoals Bouman & Van Zelm dat doen. Met een streep is de rij met stippen om te vormen tot een gestipte getallenlijn waarop sprongsgewijs voor- en achteruit geteld kan worden, en later breuken en kommagetallen een passende plaats kunnen krijgen. Maar net als alle andere methodes uit dit tijdvak, laat ook 'Noodig rekenen ...' deze mogelijkheid lopen.

### 1.4 Diels & Nauta

In 'Fundamenteel Rekenen' van Diels & Nauta (1936) gaan tellen en groeperen wel hand in hand. Naast vingers worden aanvankelijk vooral stippatronen van dominostenen ingezet om het optellen en aftrekken in het getallengebied tot vijf en vervolgens tot tien te ondersteunen.

In de door Jetses geïllustreerde voorloper 'Van hoeveelheid tot getal' lenen de mooie plaatjes zich voor diverse rekenverhalen. Maar het Eerste Rekenboek is vrijwel volledig gevuld met een parade van 2500 kale rekensommen, opgesteld in rotten van vijf.

Bij het rekenen tot tien kunnen de leerlingen aanvankelijk nog gebruik maken van verschillende dominopatronen die bovenaan de bladzijden staan afgebeeld. Tekenend is dat daarbij de dubbele zes ontbreekt, want die dient wat later via het splitsen bij tien uitgerekend te worden!

In het getallengebied tot twintig staan opgaven over vooruit- en terugtellen met sprongen van respectievelijk 2, 3, 4, 5 en 6. De laatste paragrafen bevatten enkele tientallen vraagstukjes, die mondeling behandeld worden, van het type:

> Piet heeft 8 knikkers. Hij wint 5. Nu heeft Piet...
> Ik heb 15 c. Ik geef 7 c aan Lien. Nu heb ik...

Grazer (1933) wijst op een zeer krachtig getalbeeld dat tot dan toe niet in een leermiddel werd vervat, namelijk de 'handige' dubbele vijf.

o o o o o
o o o o o

Deze getalstructuur werd destijds in Duitsland onder invloed van de gezaghebbende rekendidacticus Kühnel veelvuldig benut, omdat daarmee zowel dubbelen als vijfpatronen uitgebeeld kunnen worden. Neem bijvoorbeeld het getal 8 op een denkbeeldig telraampje van dubbel-vijf.

| | | |
|---|---|---|
| o o o o o | | o o o o |
| o o o | 8 | o o o o |

Dat ook Diels & Nauta deze uitbeelding laten liggen, komt wellicht doordat 'Fundamenteel Rekenen' zich vooral op de Britse methode 'Fundamental Arithmetic' van Ballard baseert en zich nadrukkelijk distantieert van de Duitse rekendidactiek die naar hun idee geen positieve invloed op het Nederlandse rekenonderwijs had uitgeoefend.

### 1.5 Overzicht

Vergeleken met de aanpak van Zernike is het aanvankelijke rekenen in de loop van de 20ste eeuw als volgt gewijzigd.

1) De monografische behandeling van de getallen tot 10 (20) wordt verlaten en daarmee ook het vermenigvuldigen en delen in het eerste leerjaar.

2) De heuristische leergangopbouw volgens de trits a) aanschouwelijk rekenen, b) opereren met benoemde getallen via eenvoudige vraagstukjes en c) rekenen met onbenoemde getallen in 'kale' sommen, verandert geleidelijk in het paar a-c. of de drieslag a-c-b.

3) Het groeperen op basis van vaste of wisselende getalbeelden maakt plaats voor tellen en tellend rekenen.

## 2 Hoofdrekenen

### 2.1 Zernike

Rombouts ( 1933) merkt terecht op dat de opkomst van de telmethodes, vanaf de jaren'10, meestal gepaard ging met minder aandacht voor hoofdrekenen. Daarbij moet wel worden aangetekend dat, omgekeerd, niet alle heuristische groepeermethodes evenveel belang aan hoofdrekenen hechten.

Zernike (1913) bijvoorbeeld maakt onderscheid tussen hoofdrekenen volgens allerlei ingewikkelde kunstgrepen, en elementair hoofdrekenen waarop het cijferen steunt. Van de laatste vorm is hij een voorstander, van de eerste niet.

> 'Welke is de waarde van dat hoofdrekenen? Zoolang het zich tot de eenvoudigste gevallen blijft bepalen, is het zonder twijfel van eenig belang in de practijk des levens, maar zoodra het minstens even gemakkelijk is, den gewonen gang te volgen, is dat hoofdrekenen niets dan een kunstje, waarin enkelen met

> een sterk geheugen zullen uitmunten, terwijl anderen, met misschien helderder inzicht in de waarheden der rekenkunde, het er nooit ver in zullen brengen. Het is ook eene schromelijke overdrijving, te meenen, dat het in het dagelijksch leven zoo dikwijls voorkomt, dat men niets bij de hand heeft, om een paar getallen op te schrijven; het is integendeel waar, dat de meest practische mensen het minst uit het hoofd rekenen. Het hoofdrekenen beschikt niet over zooveel bruikbare kunstgrepen, dat het ook maar enigszins noodig zou zijn, daarvoor een afzonderlijken leergang te ontwerpen. Indien tusschen de gewonen rekenopgaven zoo hier en daar eene kleine reeks van opgaven geplaatst wordt, die uit het hoofd moeten opgelost worden, dan is aan dat onderdeel genoegzame aandacht geschonken.' [28, p.9]

Het aandeel van de opgaven over hoofdrekenen neemt in zijn acht rekenboeken geleidelijk af van 15 procent in deel 1 tot 0 procent in deel 8.

## 2.2 Scholte

Dit in tegenstelling tot de heuristische methode 'Hoeveel en waarom?' van Scholte (1907) die hoofdrekenen niet alleen in de eerste leerjaren op de voorgrond stelt, maar ook in de hogere leerjaren in elke rekenparagraaf sommen opneemt die uit het hoofd berekend moeten worden 'zoodat sleur en werktuiglijkheid onmogelijk is'.

> 'Er is geen scherpe scheiding gemaakt tusschen de twee manieren van rekenen: wat makkelijk uit het hoofd kan worden gevonden, wordt niet becijferd. Eigenaardige wijzen van oplossen en bekortingen worden overal toegepast, waar het kan geschieden.' [22, p.10]

Enkele voorbeelden van bekortingen die hij geeft:

$97 + 38 = 100 + 35 =$

$83 + 29 = 83 + 30 - 1 =$

$178 - 80 = 178 - 78 - 2 =$

$180 - 39 = 180 - 40 + 1 =$

$32 \times 75 = 16 \times 150 = 8 \times 300 =$

$1584 : 16 = ( 1600 - 16 ) : 16 =$

Naast dit flexibele hoofdrekenen staat het splitsende of kolomsgewijze hoofdrekenen dat bij Scholte net als bij Zernike mede als grondslag voor het cijferen fungeert. Neem bijvoorbeeld 7 x 24 = ... Het product kan flexibel via 7 x 25 - 7 x 1 = berekend worden. Maar ook splitsend als 7 x 20 + 7 x 4, of omgekeerd te beginnen met 7 x 4. Indien hierbij de tussenuitkomsten onder elkaar worden gezet, ligt de doorgang naar cijferend vermenigvuldigen open.

### 2.3 Bij de Ley & Postma

De grote telmethodes uit de eerste helft van de 20ste eeuw, te weten die van Bij de Ley & Postma (1913) en Bouman & Van Zelm (1918), besteden in de eerste versies weinig aandacht aan flexibel hoofdrekenen. Maar later hebben ze hun methodes in dit opzicht herzien.

In de 'Cursus voor het Schriftelijk Rekenen in de Lagere School' van de eerstgenoemden is de titel tevens een program: 'de overweging, dat men niet wel twee heeren tegelijk kan dienen is de oorzaak geworden, dat in dezen rekencursus geen afzonderlijke vraagstukjes voor het rekenen uit het hoofd voorkomen'. In het tweede leerjaar leren de kinderen bij het rekenen tot honderd al meteen cijferend optellen en aftrekken.

> 'Vaardigheid is bij het schriftelijk rekenen hoofdzaak en die wordt alleen verworven, wanneer de leerling bij de schriftelijke bewerking der vraagstukken steeds te werk gaat volgens de regelen der cijferkunde'. [2, p.5]

Het onderdeel hoofdrekenen verdient door de onderwijzer zelf behandeld te worden. De 'Cursus ...' geeft daar aanvankelijk geen aanwijzingen voor. Pas tien jaar na het uitkomen van de eerste druk verschijnt van dezelfde auteurs 'Leidraad voor het Hoofdrekenen in de Lagere School' met een gedetailleerde opgave van de cijfersommen en praktische vraagstukjes uit de 'Cursus ...' die geschikt zijn om uit het hoofd berekend te worden. Daarnaast geeft de Leidraad voor elk van de leerjaren 3 tot 7 een honderdtal specifieke hoofdrekensommen.

> 'Zij hebben de bedoeling: 1 de verschillende methoden bij het oplossen te beoefenen; 2 de merkwaardige getallen en producten vast te leggen, die steun verleenen bij het zoeken naar

> eenvoudige oplossingen en die voor leerlingen met een goed getallen-geheugen de meeste bekoring hebben.' [3, p.39]

Ze tekenen hier bij aan dat naast het schriftelijke rekenen in elke klas minstens één uur per week aan het hoofdrekenen besteed dient te worden. De auteurs hebben, voor zover mij bekend, hun ommezwaai in het denken over hoofdrekenen overigens nooit nader toegelicht.

## 2.4 Bouman & Van Zelm

Bouman & Van Zelm zijn eveneens op hun oorspronkelijke reserve ten aanzien van het hoofdrekenen teruggekomen. Maar in hun geval is duidelijk dat ze zich door de ervaringen met hun rekenmethode hebben laten leiden.

In de eerste drukken van deze methode werd hoofdrekenen voornamelijk als basale kennis ten dienste van het cijferen opgevat, later verschijnt het ook in de vorm van flexibel hoofdrekenen. Zo eindigt het oorspronkelijke vijfde onderwijzersboekje met een bespreking van cijferend aftrekken, terwijl een latere versie besluit met:

> 'Wil men de leerlingen nog eens flink laten oefenen in het uit het hoofd berekenen van eenvoudige bewerkingen met de getallen van 1 - 1000, dan bevelen we bijvoorbeeld de som: 800 - 350 ; : 5; x7 ; + 90 ; : 8 = aan.
>
> Men kan daarbij de leerlingen toestaan de verschillende uitkomsten op te schrijven. Bij de eerste som schrijven we : 800. 450. 90. 630. 720. 90.
>
> Men kan dergelijke sommen ook schriftelijk laten maken. De leerlingen schrijven dan:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 800 | - | 350 | = | 450 |
| 450 | : | 5 | = | 90 |
| 7 | x | 90 | = | 630 |
| 630 | + | 90 | = | 720 |
| 720 | : | 8 | = | 90 [8, p. 316] |

De eerste versies van het negende, tiende en elfde rekenboek bevatten geen hoofdrekensommen, maar latere drukken staan er vol mee. De auteurs lichten deze herziening als volgt in deel 9 toe:

'De voornaamste redenen, waarom wij aparte paragrafen voor het hoofdrekenen hebben opgenomen, zijn de volgende: In het practische leven komt het herhaaldelijk voor, dat men eenvoudige rekenopgaven moet kunnen oplossen. En voor den onderwijzer scheppen die paragrafen een welkome gelegenheid nog eens na te gaan, of het inzicht in de getalbewerkingen zoodanig tot ontwikkeling is gekomen, dat de leerling blijk geeft zich niet gebonden te weten door één bepaalde rekenwijze. In 't algemeen kan hier worden gezegd, dat de school zich, ook met betrekking tot het rekenonderwijs, heeft te hoeden voor eenzijdigheid. Een overladen leerplan b.v. werkt er allicht toe mede, dat het hoofdrekenen in 't gedrang komt. En aan scholen, bestemd als opleiding voor H.B.S., lyceum en gymnasium, zal het menigmaal voorkomen, dat de tijd, voor het rekenonderwijs bestemd, nauwelijks voldoende is om aan het hoofdrekenen de noodige aandacht te schenken. Nu kunnen deze nieuwe rekenboekjes aan het bezwaar dier eenzijdige oriënteering van het rekenonderwijs tegemoet komen.'
[8, p.13]

Enkele voorbeelden van opgaven uit een paragraaf over hoofdrekenen ( p.11):

1) Eén dozijn potloden kost *f* 1,50. Hoeveel kost 1 gros, 3 gros, 11 gros?
2) Bereken het jaarloon: A verdient per maand *f* 85. B *f* 125. C *f* 425.
3) Bereken de interest per jaar: *f* 2800 à 4½% ; *f* 15.400 à 3%
4) Bereken ¾ deel van 180 ; 60 ; 420 ; 720 ; 600 ; 1640 ; 300.

In deze nieuwe deeltjes voor de hoogste leerjaren bestaat ongeveer 10 procent van de opgaven uit hoofdrekensommen

## 2.5 Diels & Nauta

Van de elf richtlijnen behorende bij 'Fundamenteel Rekenen' luidt de zesde: 'Het hoofdrekenen neme in het rekenonderwijs een belangrijke plaats in.'
Vanaf het vierde rekenboek is in alle deeltjes na elke drie pagina's een paragraaf ingelast die uit drie onderdelen bestaat voor hoofd-

rekenen, rekendictee en cijferwerk. Het gedeelte van hoofdrekenen bevat altijd tien opgaven die steeds in de vorm van eenvoudige vraagstukjes zijn gesteld.
Enkele voorbeelden uit deeltje negen (1944).

1) Een vliegmachine bevindt zich op een hoogte van 3600 m en daalt plotseling 735 m. Hoeveel m is zij dan nog boven de aarde?
2) Een troep soldaten legt in 4 uur 23 km af. Nu moeten nog 11½ km afgelegd worden. Hoe lang duurt die tocht, als onderweg twee uur gerust wordt?
3) Michiel de Ruyter werd in 1607 geboren en stierf in 1676. Hoe oud is hij geworden? Hoeveel jaar is het geleden, dat hij stierf?
4) Een heer verliest een portefeuille met *f* 4000. Hij geeft den eerlijken vinder 2½ % beloning. Hoeveel zal deze dan krijgen?

Het rekendictee ('de onderwijzer(es) zegt de opgave, de leerlingen schrijven het antwoord op ') bestaat meestal uit kale sommen. Een voorbeeld:

'Welke sommetjes zijn fout?'

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,8 | + | 5,3 | = 8,1 | 4,3 | + | 0,7 | = 5 | 160 | + | 59 | = 209 |
| 2,7 | + | 6,4 | = 9,1 | 10 | x | 2,15 | = 215 | 12 | x | 4¾ | = 57 |
| 27 | : | 6 | = 4½ | 300 | x | ¼ | = 75 | 3,6 | : | 9 | = 0,04 |

De auteurs scharen zich dus volledig achter de Leidraad van de 3de Hoofdinspectie (1936) die luidt: 'Aan het hoofdrekenen dient een belangrijke plaats ingeruimd te worden; wanneer dit met kleine getallen gebeurt, heeft het niet alleen practische waarde, maar bevordert het ook het inzicht'.
In dit kader past ook hun opmerking over het schatten: 'Het zuiver mechanisch werken trachte men verder tegen te gaan door herhaaldelijk vóór het uitrekenen de uitkomst te laten 'schatten'.
Al met al kan vastgesteld worden dat van de grote methodes 'Fundamenteel Rekenen' veruit de meeste aandacht aan hoofdrekenen besteedt.

## 2.6 Overzicht

Het elementaire hoofdrekenen – de tafels en het splitsend rekenen tot 100 – heeft nooit ter discussie gestaan, het flexibele hoofdre-

kenen daarentegen wel. Tegelijk met de opkomst van de telmethodes in het aanvankelijke rekenonderwijs daalde daar de aandacht voor. Midden jaren'30 volgde echter een kentering, veroorzaakt door de herziene versie van Bouman & van Zelm en de introductie van Diels & Nauta – twee methodes met een groot marktaandeel.
De discussie over wat onder hoofdrekenen eigenlijk verstaan moest worden, ebde weg. Het werd nu opgevat als de flexibele tegenpool van cijferen, het rekenen volgens vaste procedures, en stond niet meer tegenover het schriftelijke rekenen zoals Zernike hoofdrekenen rond 1900 definieerde.

### 3 Cijferen

Cijferen kan, kort gezegd, worden geleerd via kolomsgewijs (hoofd)rekenen of door van meet af aan met positiecijfers te opereren. De gebruikte vorm van hoofdrekenen is het splitsende rekenen met eenheden, tientallen, honderdtallen en zo verder, die met de bijbehorende nullen onder elkaar genoteerd worden.
Bij de eenvoudige optelling 27 + 46 = ... gaat dat als volgt.

| | | |
|---|---|---|
| | | 1 |
| 2 7 | | 2 7 |
| 4 6 + | → | 4 6 + |
| 1 3 | | 7 3 |
| 6 0 | | |
| 7 3 | | |

In het pure cijferen worden de positiecijfers van meet af aan als decimaal 'benoemde' getallen behandeld: de uitkomst van bijvoorbeeld 20 + 40 = verschijnt nu niet als 60, maar als een 6 op de positie van de tienen . De 13 eenheden worden omgezet in 1 tien (en 3 enen) en gevoegd bij die 6 tienen.

| | | |
|---|---|---|
| **t e** | | 1 |
| 2 7 | | 2 7 |
| 4 6 + | → | 4 6 + |
| 6 13 | | 7 3 |

Voor de deling 364 : 7 = ... zien de onderscheiden aanpakken er zo uit. Het kolomsgewijze delen van a) kan desgewenst als opmaat voor de staartdeling van b) dienen die echter ook los daarvan te leren is.

| | | |
|---|---|---|
| 7 / 364 \ | | 7 / 364 \ 52 |
| 350 | 50 → | 35 |
| 14 | | 14 |
| 14 | 2 + | 14 |
| 0 | 52 | 0 |
| a) | | b) |

In het volgende zal aan de hand van de laatste opgave onderzocht worden hoe het cijferende delen in de belangrijkste methodes wordt onderwezen. Daarmee kunnen we tevens een algemene indruk van het cijferen in die rekenboeken krijgen.

### 3.1 De kolomsgewijze opstart van het staartdelen

Het tweede boekje van 'Ons Rekenonderwijs' van Zernike (1912/7) voor groep 5 is geheel gewijd aan de verhoudings- en de verdelingsdeling in het getallengebied tot duizend.
Het voorbeeld 364 : 7 = ... , opgevat als verhoudingsdeling, wordt door Zernike in de volgende vraagvormen gegoten:

- Hoeveel keer kan 7 van 364 worden afgenomen?
- Hoeveel keer is 7 begrepen op 364?
- 364 = . x 7. Welk getal moet op de stip staan?

In de talrijke vraagstukjes worden deze kale rekenvragen op diverse manieren met benoemde getallen aangekleed:

- Hoeveel keer moet je lopen om 364 stenen weg te brengen als je er 7 per keer wegdraagt?
- Hoeveel weken zitten er in een jaar?
- Als je 364 kinderen in rijen met 7 kinderen per rij plaatst, hoeveel rijen krijg je dan?

Hetzelfde voorbeeld als verdelingsdeling beschouwd, is in de uitgeklede vorm te interpreteren als:

- Hoeveel is het 7$^{de}$ deel van 364?
- 364 = 7 x . Welk getal moet op de stip staan?

De vraagstukjes hebben hier veelal betrekking op eerlijk (ver)delen:

- Als 7 mensen 364 centen eerlijk verdelen, hoeveel krijgt dan ieder?
- Als je een lijn van 364 cm in 7 gelijke stukken verdeelt, hoe lang is dan ieder stuk?

- Als je 364 kinderen in 7 rijen zet, hoeveel kinderen staan dan in elke rij?

In verband met deze tweedeling heeft Zernike twee ingrijpende beslissingen genomen. Ten eerste noteert hij de onderscheiden delingen anders, en ten tweede worden die aanvankelijk ook verschillend berekend en gecontroleerd.
De verhoudingsdeling krijgt niet het gebruikelijke deelteken maar wordt in de startvorm van de staartdeling opgeschreven: 7 / 364 \ ... De verdelingsdeling wordt wel met een deelteken aangegeven 364 : 7, en berekend op de verkorte manier van het staartdelen.
Het klimmende aantal cijfers van het quotiënt bepaalt bij Zernike de opbouw van de leergang en niet de grootte van deeltal of deler.
Bij de verdelingsdeling merkt de auteur op:

> 'Bestaat het quotiënt uit 3 cijfers, dan lijkt het ons wenschelijk, achter het eerste cijfer ervan twee stippen te plaatsen, om goed in het oog te doen vallen, dat het opgeschreven cijfer honderdtallen voorstelt. Vooral als er één of twee nullen in het quotiënt zullen komen, kan zulk een herinnering van veel nut zijn.' [28, p. 137]

Bij het rekenen boven duizend worden in de kolomsgewijze staartdeling de overtollige nullen geleidelijk weggelaten, waardoor de verkorte procedure ontstaat die eerder al bij de verdelingsdeling werd gebruikt. Nu pas krijgt ook de verhoudingsdeling het deelteken.
Hoezeer Zernike aan inzicht hecht, blijkt ook uit het feit dat hij de leerlingen stelselmatig vraagt hun rekenhandelingen nader te verklaren. Het volgende fragment uit een schets van een les over het delen van twee grote getallen geeft een fraaie illustratie van een socratisch gesprek.

> 'Hoe menigmaal is 1768 op 113297825 begrepen?
> O. Wat moeten wij hier uitrekenen?
> L. Hoe dikwijls 1768 van 113297825 kan afgenomen worden.
> O. Hoe zullen wij daartoe het deeltal verdeelen?
> L. 113297825=10000 x 11329 + 1000 x 7 + 100 x 8 +
> 10 x 2 + 5.
> O. Begin te deelen!
> L. 1768 gaat op 11329 6 maal. 6 x 1768 = 10608.

11329 - 10608 = 721.
O. Hoeveel malen hebt ge nu reeds 1768 van 113297825 afgenomen?
L. 60000 maal.
O. Leg dat eens uit!
L. Het deeltal bevat 10000 x 11329. Van elke 11329 heb ik hiervoor 6 x 1768 afgenomen; van de 10000 x 11329 dus 60000 maal.
O. Wat blijft er dan over?
L. Er blijft over: 7217825.
O. Leg dat eens uit!' [27, p. 160)
..........................................................................................

En zo gaat het nog vijftien keer met vraag en antwoord verder. Zernike stelt voor om gedurende drie maanden vier lessen per week volledig aan delen te besteden. Daarna moet het uiteraard nog goed worden onderhouden.

> 'Met de vermenigvuldiging verbonden, geeft de deeling eene voor den onderwijzer gemakkelijk te controleeren oefenstof.'

Hij wijst de onderwijzer daarbij op de formule $(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b$ om met weinig narekenwerk zelf sommen samen te stellen van het type:

$$\frac{76356 \times 76356 - 20987 \times 20987}{55369}$$

En dan moeten de kommagetallen – bijvoorbeeld via 365 : 7 – nog komen...
Alles bij elkaar genomen staan in 'Ons Rekenonderwijs' ongeveer 1500 opgaven over (staart)delen, waarvan 20 procent 'toegepaste vraagstukjes' zoals Zernike ze noemt. Slechts een tiental daarvan hebben overigens de omvang van het bovenstaande voorbeeld.

De leergang cijferend delen van Bouman & Van Zelm komt sterk overeen met die van Zernike. Ook zij maken verschil tussen de verhoudings- en verdelingsdeling, en brengen dit onderscheid in de notatie tot uitdrukking – althans in de latere versies van hun methode, want eerst gebruikten ze voor beide delingen het gangbare deelteken. In de wijze van berekenen brengen ze echter geen differentiatie aan: voor beide delingen hanteren ze in deeltje 5 de kolomsgewijze rekenaanpak en verkorten die in deeltje 6 tot de cijferende eindvorm. Ze rekenen van meet af aan met onbenoemde getallen. In de inleiding van hun methode schrijven ze:

> 'De meening, dat het rekenen met benoemde getallen voor het kind gemakkelijker zal zijn dan dat met onbenoemde getallen, komt nog tot uiting in sommiger streven om het kind bij eenheden, tientallen en honderdtallen te doen denken aan centen, dubbeltjes en guldens. Al vindt het tientallig stelsel zijn toepassing in het stelsel onzer munten, ononderscheidenheid is er in geenen deele. Brengt men het kind in den waan, dat het b.v. de gedachte heeft het tiental te vereenzelvigen met die van het dubbeltje, dan wordt het denken van het tiental en zijn toepasselijkheid er niet gemakkelijker door.' [6, p.13]

Op nog twee onderdelen onderscheidt hun methode zich van Zernike: er staan twee keer zoveel kale deelsommen in en veel minder toegepaste vraagstukjes. De deeltjes 5 en 6 bijvoorbeeld bevatten 2500 sommen in de vorm van '364 : 7' en '7 op 364', en slechts 50 toepassingen van opdelen en verdelen. Ook staan in Bouman & Van Zelm 50 samengestelde opgaven met zeer grote getallen waarmee verschillende (basis)operaties uitgevoerd moeten worden.

Indien we de tijd die Zernike voor het (staart)delen met hele getallen en kommagetallen reserveert globaal op 100 lesuren stellen, dan bedraagt die lestijd bij Bouman & Van Zelm ongeveer het dubbele.

### 3.2 Direct verkort staartdelen

Vanaf eind jaren '30 maakt de methode 'Fundamenteel Rekenen' van Diels & Nauta furore. Eén van haar richtlijnen luidt: 'Het mechanisch werken met grote getallen verduistert het inzicht in het getallen-systeem.'

> 'Door het werken met grote getallen wordt een techniek aangeleerd, die slechts als proeve van dressuur waardering kan vinden. Zou de lagere school zich nog niet veel te vaak laten leiden door het feit, dat de meeste middelbare scholen nogal verzot zijn op dergelijke dressuurproeven? (...) Bij een bij uitstek practisch vak als het rekenonderwijs moet het 'leven' zo

niet de norm aangeven dan toch een belangrijk woord meespreken. Welnu, dat leven eist vlugheid en vaardigheid in het werken met *kleine* getallen. Maar er is meer! Alleen het werken met kleine getallen maakt het voor de kinderen mogelijk een *goed inzicht* te verkrijgen in de getallen en in de getalverhoudingen. In een rekenmethode dienen bewerkingen met grote getallen in beperkte mate voor te komen als oefenstof. Ze zijn middel, geen doel. Het overmatig mechaniseren is tijd- en energieverspilling en werkt gedachteloosheid in de hand.' [10, p.10]

Maakt 'Fundamenteel Rekenen' waar wat ze hier als didactisch richtpunt neerzet?
Wat de hoeveelheid cijferopgaven betreft, is dat inderdaad het geval: de methode bevat slechts een kwart van het aantal deelsommen dat de kinderen in de methode van Bouman & Van Zelm voorgeschoteld krijgen.
Maar toegepaste vraagstukjes blijken volledig te ontbreken! De stelling dat 'het leven' een belangrijk woordje moet meespreken, wordt wat het cijferen betreft dus niet waargemaakt.
En ook het streven naar goed inzicht via het rekenen met kleine getallen komt bij het cijferende delen niet goed uit de verf. Neem weer het voorbeeld van 364 : 7 = ... In het vijfde rekenboekje wordt de verkorte cijferprocedure met 'aanhalen' zonder nadere toelichting verstrekt. Het kost maar enkele lessen om van 24 : 2 via 364 : 7 tot 6896 : 16 te komen. De leerlingen krijgen de aanwijzing dat ook de sommen in de vorm ' 7 op 364' als delingen opgelost dienen te worden.
Met deze puur mechanistische en vormelijke benadering van het cijferende delen, neemt 'Fundamenteel Rekenen' een extreme positie in. Ze legt niet alleen geen verbinding met het hoofdrekenen, waaraan ze zoveel aandacht besteedt, maar geeft ook geen inzichtelijke verklaring van de standaardprocedure, en laat praktische toepassingen links liggen. Met name dat laatste was in vele methodes die eerder verschenen nogal ongebruikelijk. Want de meeste leerboeken behandelden destijds de cijferprocedure in ieder geval bij de opstart inzichtelijk. Vaak gebeurde dat via het eerlijk verdelen van een in munten gegeven geldbedrag, dus met

een concrete verdelingsdeling.[5] Nadat de techniek van de staartdeling in voldoende mate was behandeld, kwamen dan ook de toepassingen in bepaalde mate aan bod.

Een voorbeeld van zo'n 'tussenmethode' is in dit opzicht 'Noodig Rekenen' van Kellinga (1926). Het gaat ook hierin allereerst om het stelselmatig aanleren van de techniek van het staartdelen, maar dan wel op basis van inzicht in de procedure bij eenvoudige (ver)delingen, gevolgd door het oefenen met onbenoemde getallen. Daarmee vermijdt hij het voor de leerlingen verwarrende onderscheid tussen de verhoudings- en verdelingsdeling.

> 'De groote moeilijkheid is nu maar, de kinderen allengs te doen voelen, op welke practische gevallen ze de bewerking 'deelen' kunnen toepassen. Daartoe dienen reeksen opgaafjes als 'Hoe dikwijls kan 78 afgetrokken worden van 3764?' 'Hoe dikwijls zit dit in dat?' Vooral in 't 5e leerjaar (8e deeltje) beginnen dergelijke practische opgaafjes veelvuldig voor te komen. Deze oefeningen, afgewisseld met het zoeken naar 't 'zooveelste deel van zekere hoeveelheid' brengen de kinderen allengs het besef bij, in welke gevallen ze door *deeling* de verlangde uitkomst kunnen becijferen.' [16, p.103]

Kellinga beperkt zich zowel bij de 'kale' sommen als bij de toepassingen tot relatief kleine getallen.

> - Een mand met 64 eieren gekocht voor 2 gld. en een dubbeltje.
> Dat is gemiddeld per ei ... cnt. ( Tot in tienden nauwkeurig!)
>
> - Een vliegmachine gaat van Amsterdam naar Rome met een snelheid van 2300 M per minuut. De afstand bedraagt 1370 KM.
> Hoeveel uren en minuten moet de machine vliegen?

Een aantal 'kleinere' methodes die na het heuristische tijdperk verschenen, volgden globaal de leergang die Kellinga beschrijft: starten met een korte inzichtelijke verklaring, dan het inoefenen van de opgaven volgens splitsing en opklimming van de moeilijkheden, en eindigen met gevarieerde toepassingen.

### 3.3 Overzicht

De grote verscheidenheid aan leergangen van cijferend delen kan niet voldoende begrepen worden met het zojuist geciteerde onderscheid in opvattingen over werktuigelijk en inzichtelijk rekenen. Want binnen deze tweedeling zijn, wat het staartdelen betreft, nog tal van varianten mogelijk met betrekking tot:

- de (voor)vorm van de staartdeling – kolomsgewijs dan wel meteen verkort
- het al dan niet onderscheiden van verhoudings- en verdelingsdelen
- de functie, de vorm en de frequentie van de vraagstukjes
- de opbouw van de leergang volgens de grootte van deler of quotiënt
- de grootte van de getallen waarmee uiteindelijk wordt gerekend
- en de bestede tijd aan puur en toegepast staartdelen.

Al deze didactische variabelen in beschouwing nemende, geeft het cijferende delen en het cijferen als geheel de grootste verschillen te zien tussen de methodes van Bouman & Van Zelm en van Diels & Nauta, welke rond 1950 het meest in gebruik waren.

## 4. Vraagstukjes

Met 'vraagstukjes' doelen we hier op de gangbare tekstopgaven, waarin met enkele zinnen een rekenprobleem wordt geformuleerd, of waarin de leerlingen zelf uit de gegevens een probleem moeten destilleren en vervolgens oplossen – de zogenoemde vraagloze redactiesommen. Ook de schematisch ingeklede sommen rekenen we hier tot de vraagstukjes. Meestal staan de opgaven op zichzelf, maar soms zijn ze in een groter verband van een levensecht thema of belangstellingscentrum geplaatst.
De aard en functie van vraagstukjes kan niet worden los gezien van de waarden die aan het rekenonderwijs worden toegekend. Naast de materiële of praktische betekenis is dat vaak ook de formele of verstandscholende waarde.
Hoe een en ander zich in de belangrijkste methodes manifesteert, zal aan de hand van voorbeeldopgaven over procentrekenen worden toegelicht.

## 4.1 Zernike en Thijssen

Zernike noemt als voorbeeld van een opgave die zowel materiële als formele betekenis heeft:

> A. betaalt voor een baal koffie *f* 160,38. Als hij 1% voor contante betaling en 10% tarra genoten heeft en 45 cents voor het halve K.G. heeft moeten betalen, hoeveel bedroeg dan het bruto-gewicht van die baal? [27, p.235]

We hebben hier weliswaar met een samengesteld, praktisch vraagstuk van doen, maar het is volgens hem tevens een denkoefening, omdat de gegevens niet in natuurlijke volgorde zijn opgesteld: de uitkomst is gegeven en de gegevens moeten gevonden worden. Staat een dergelijk 'terugrekenvraagstuk' in de gewone rekenvorm, uitgaande van het brutogewicht, dan is het een regelrechte toepassing van het geleerde en heeft het alleen praktische betekenis, aldus Zernike.
Omgekeerd kent hij de volgende procentensom uitsluitend formele waarde toe:

> Van een som gelds ontvangt A 50%. B krijgt 50% van de rest en C het overschietende. Indien nu A en B samen *f* 62 meer krijgen dan C, hoeveel krijgt dan elk van de drie?

Hij hecht veel waarde aan dergelijke opgaven:

> 'Van eene richtige behandeling dezer denkoefeningen verwachten wij veel goeds. De gedachten der leerlingen worden op één enkel punt geconcentreerd. Voortdurend worden vragen gesteld en beantwoord. Volkomen bekende voorstellingen worden naar haren inhoud verbonden. Werktuigelijkheid met al hare natuurlijke gevolgen van verstrooidheid en afdwaling der gedachten wordt krachtdadig tegengegaan. Behoedzaamheid en voorzichtigheid in het trekken der conclusies zijn hierbij zoo onmisbaar, dat zij, zooal niet aangekweekt er toch door aangewakkerd en versterkt moeten worden.' [28, p.236]

Rekenen als een cursus voor deductief denken, als gymnastiek voor de geest, maar ook als een praktische voorschool van het leven, dat zijn de bakens die de koers van 'Ons Rekenonderwijs' bepalen. Deze dubbele doelstelling komt duidelijk in de duizenden (!) tekstopgaven van deze methode tot uitdrukking.

Niet iedere rekenmethode wenste echter zo'n veelomvattende waarde aan het rekenonderwijs te geven en leerlingen zulke complexe opgaven voor te leggen – opgaven die niet alleen voor het overgrote deel van de leerlingen veel te moeilijk bleken, maar waarvan tevens de denkvormende waarde sterk werd betwist.
Thijssen bijvoorbeeld neemt in zijn vierdelige 'Sommenboek voor de Volksschool'( 1915/5), geen enkele denk- of omkeersom op.[6]
Een procentensom ziet er bij hem zo uit:

> Gekocht: 300 KG à *f* 0,52 per KG.
> Af voor verpakking: 3%.
> Hoeveel maar te betalen?

De eenvoudige redactie van dit vraagstuk is typerend voor de 1500 tekstopgaven van zijn bundel. De ruim honderd samengestelde cijfersommen uit dit 'Sommenboek ...' en de duizenden sommen uit zijn driedelige 'Cijferboek voor de Volksschool' doen daarentegen qua complexiteit niet veel voor die van Zernike onder.
Met zijn streven naar vereenvoudiging van de vraagstukjes, naar zowel vorm als inhoud, stond Thijssen niet alleen. Integendeel: na 1910 verschenen reeksen sommenboekjes voor de hogere leerjaren waarin tekstopgaven sterk vereenvoudigd waren en denksommen werden buitengesloten – Kellinga somt er een tiental op.

### 4.2 Bouman & Van Zelm

Met het verschijnen van Bouman & Van Zelm (1918) stokt die aanzet tot versobering. De titel van 'Een rekenmethode voor de lagere school als proeve van toegepaste logica' spreekt boekdelen: de formele waarde komt weer hoog in het vaandel te staan. De 2500 tekstopgaven van de deeltjes 9 tot 13 zijn dan ook voor een belangrijk deel terugreken- en denksommen waarmee de leerlingen grondig op de toelating tot het middelbaar onderwijs worden voorbereid. Een voorbeeld van zo'n complexe examensom over procenten uit deeltje 13:

> Iemand koopt een partij ongebrande koffieboonen, groot 1200 KG., voor 1400 gld. Hij laat ze branden, waardoor 1/12 deel aan gewicht verloren gaat. De gebrande boonen verkoopt hij, deels tegen 1,40 gld., deels tegen 1,50 gld. per KG. Als hij

> zoodoende 14 2/7 % wint, hoeveel heeft hij dan tegen *f* 1,50 per KG verkocht?

Hoe zit het met de leerlingen voor wie de lagere school eindonderwijs is? Wel, die kwamen meestal niet verder dan deeltje 9 – nota bene het eerste boekje met een groot percentage praktische toepassingen. Alleen bleek na verloop van tijd dat ook dit deeltje nog te lastig was. In 1934 verschijnen dan ook naast de oorspronkelijke reeks de nieuwe, vereenvoudigde deeltjes 9, 10 en 11. De gangbare procentensom uit het laatste boekje ziet er nu ineens heel anders uit:

> Boer Jansen brengt 1 Februari *f* 800 naar een spaarbank, die 3% 's jaars rente geeft. Den 1en December d.a.v. haalt hij het geld weer van de spaarbank af. [8, p. 20]

Niet alleen de eenvoudige inhoud is nieuw, maar ook de vraagloze vorm die 'de geestesactiviteit van het kind in belangrijke mate vermag te bevorderen'. In twee opzichten een belangrijke didactische koerswijziging naast en met de eerdergenoemde verandering ten aanzien van het hoofdrekenen.

### 4.3 Diels & Nauta

'Fundamenteel Rekenen' van Diels & Nauta volgt de omgekeerde weg. Eerst verschijnt de relatief eenvoudige versie en wat later de moeilijke versie voor de bovenbouw van opleidingsscholen. En hoewel de auteurs in hun richtlijnen schrijven dat denksommen uit het rekenprogramma geweerd dienen te worden, hebben ze die toch in het laatste boekje van de opleidingsreeks opgenomen.
De slotdeeltjes van de reguliere versie van 'Fundamenteel Rekenen', bestemd voor de scholen waarvan de leerlingen eindonderwijs ontvangen of naar het nijverheidsonderwijs gaan, bevatten veel praktische opgaven over een zogenoemd 'rekenkundig belangstellingscentrum', zoals een nota van de kruidenier, posttarief, een plattegrond, een jeugdherberg, een wegenkaart, vreemd geld, spoorwegen, luchtvaart en zo meer. Deze sommen uit 'het practische leven' staan niet alleen in tekstvorm, maar worden ook in schema's aangeboden.
Bij procenten ziet een dergelijk schema er als volgt uit:

| Kap | % | Tijd | Rente |
|---|---|---|---|
| *f* 3200 | 3 | 4 maanden | ? |
| *f* 1600 | 4 | ? | *f* 32 |
| *f* 1800 | ? | 1½ jaar | *f* 135 |
| *f* ? | 4½ | 8 maanden | *f* 75 |

Hieruit blijkt dat de methode van Diels & Nauta wel terugrekensommen bevat, maar dan in eenvoudige, schematische vorm gevat. In de opleidingsboekjes staan echter samengestelde opgaven in de tekstvorm die we eerder ook bij Zernike tegen kwamen.

## 4.4 Overzicht

Vraagstukjes vormen een integraal onderdeel van Zernikes methode 'Ons Rekenonderwijs'. Al in het eerste leerjaar krijgen de leerlingen naast en met de kale rekensommen ook tekstopgaven voorgelegd. Bij de grote methodes van Bouman & Van Zelm en later Diels & Nauta daarentegen bestaan de boekjes voor de lagere leerjaren en de middenbouw vrijwel uitsluitend uit rijtjes kale sommen en, omgekeerd, die van de hoogste leerjaren voornamelijk uit tekstopgaven. Met daarbij de kanttekening dat de laatstgenoemde methode in de paragrafen over hoofdrekenen wel veel aangeklede rekensommetjes heeft opgenomen. De moeilijkheidsgraad van de vraagstukjes in de verschillende methodes en in de verschillende versies van één methode, varieert vaak sterk – mede afhankelijk voor welke leerlingen ze bedoeld zijn. De zogenoemde opleidingsscholen voor leerlingen die opgaan voor het toelatingsexamen van het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs, gebruiken meer of andere rekenboekjes dan de leerlingen die naar het uitgebreid lager onderwijs of het nijverheidsonderwijs gaan, of waarvoor de lagere school eindonderwijs is. De zogenoemde terugreken- en denksommen waren vooral voor de opleidingsscholen bestemd, en de overige praktische vraagstukjes voor alle leerlingen. Maar dan is het natuurlijk wel zaak dat het overgrote deel van de leerlingen aan de hogere rekendeeltjes toekomt, wat met name in de oorspronkelijke versie van de meest gebruikte methode uit de eerste helft van de 20ste eeuw, Bouman & Van Zelm, vaak niet het geval blijkt te zijn.

## 5 Handleidingen

De drie invloedrijkste methodes uit de periode 1900-1950 van Zernike, van Bouman & Van Zelm en van Diels & Nauta hebben de handleidingen ieder op hun eigen wijze vormgegeven.
De handleiding van Zernike is een kloek boek van 266 pagina's waarin de leerstof van 'Ons Rekenonderwijs', ingedeeld in acht leertrappen, van achtergrondinformatie wordt voorzien.
De meeste aandacht krijgt het rekenen tot honderd van de eerste twee leertrappen. Bij het begin van de derde leertrap staat in de handleiding:

> 'De toelichting, die deze Handleiding geeft, kan van nu af aan beknopter zijn dan in het eerste gedeelte. Wij kunnen nu namelijk naar de rekenboekjes verwijzen, waaraan, om het overzicht te vergemakkelijken, telkens eene vrij uitvoerige inhoudsopgave is toegevoegd. [28, p.98]

In het voorgaande werden enkele fragmenten over hoofdrekenen, cijferen en procent-rekenen aangehaald. Hierbij valt op dat de handleiding voor een 'conceptueel' onderwerp als procenten nauwelijks enige steun aan de onderwijzer biedt. Na de tweezijdige introductie van procent als verhouding en breuk, volgen enkele voor de hand liggende suggesties hoe de gevraagde rente bij een gegeven kapitaal en percentage berekend kan worden. Maar juist als de lastige 'omgekeerde' opgaven aan de orde komen, laat de auteur het afweten:

> 'Nu wordt het tijd, de bewerking om te keeren en naar het kapitaal, of naar het percent te vragen. Is het voorafgaande goed begrepen, dan is deze terugwerking volstrekt niet moeilijk.'

En wat te denken van de volgende som uit deeltje 7 die teruggrijpt op de tweeledige opvatting van het begrip procent?

> 2,4 % van *f* 1225 is 2,4 x *f* 12,25. Hoe beredeneert gij dat?
> 2,4 % van *f* 1225 is 12,25 x *f* 2,4. Hoe beredeneert gij dat?

Deze voorbeelden illustreren dat Zernike niet alleen de leerling maar ook de onderwijzer hoog inschat.

Bouwman & Van Zelm hebben een handleiding van 300 pagina's, waarin de rekenboekjes vanaf klas 1 op de voet gevolgd worden. Ieder rekenboekje is in tientallen paragrafen verdeeld en bij iedere paragraaf staan in de handleiding aanwijzingen om de betreffende leerstof te behandelen. Neem bijvoorbeeld deeltje 9 waar in §12 en §13 het begrip 'percent' wordt geïntroduceerd. In de handleiding staan voorbereidende opgaven die de onderwijzer eerst op het bord en vervolgens op de lei kan laten maken. Daarbij komt uitgebreid ter sprake hoe de leerlingen de oplossingen zowel in de vorm van een schema als beredeneerd moeten noteren. Een voorbeeld uit de handleiding van deel 9 §25:

> 'Op het bord:
>
> De winst is 7%. De verkoop is *f* 21,40. Bereken inkoop en winst.
>
> De kinderen zijn zich bewust, dat zij 7% hebben te denken als 7/100 deel van den inkoop. De inkoop is weder te denken als geheel of als 100/100 deel van den inkoop of als 100% van den inkoop. De verkoop, als som van inkoop en winst, is te denken als 107% van den inkoop = *f* 21,40.
>
> De leerlingen schrijven nu schematisch op:
>
> | Inkoop | Winst | Verkoop |
> |---|---|---|
> | 100% v.d. ink. | 7% v.d. ink. | 107% v.d. ink. = *f* 21, 40 |
> | | | 1% v.d. ink. = *f* 0,20 |
> | Ink. = 100 x *f* 0,20 = *f* 20. | | Winst *f* 1,40 |
>
> Zij schrijven de beredeneerde oplossing op:
>
> De winst is 7% van den inkoop.<br>
> De verkoop is 107% van den inkoop = *f* 21,40.<br>
> 1% van den inkoop = *f* 0,20.<br>
> De inkoop is 100 x *f* 0,20 = *f* 20.<br>
> De winst = *f* 1,40.
>
> In geval winst of verlies eenige percenten bedraagt van den verkoop, is deze dus te denken als geheel of als 100% van den verkoop.'

Bouman & Van Zelm geven bij iedere sommen-paragraaf aan hoe de betreffende leerstof behandeld kan worden, tot aan het gebruik van bord en lei toe.

Ieder deeltje van de handleiding bestaat uit drie onderdelen: eerst komt de kern van de handleiding, dan volgt het rekenboekje waarnaar steeds verwezen wordt, en ten slotte het antwoordenboekje – al met al een overzichtelijke en handzame indeling. Zou het enorme succes van deze methode in de periode 1920 - 1950 mede aan de grote gebruiksvriendelijkheid ervan voor de onderwijzer te danken zijn?

Diels & Nauta gaven 'Richtlijnen voor het rekenonderwijs op de lagere school' uit waarvan in het voorgaande die over het cijferen, het hoofdrekenen en de denksommen al werden genoemd. Eén belangrijke bleef nog onbesproken:

> 'Bij het rekenonderwijs volge men een bepaald oefenrythme.
> Dit beginsel vindt men in de methode 'Fundamenteel Rekenen' op verschillende wijze in toepassing gebracht:
> a). Elke paragraaf in deze methode telt als regel 2 pagina's.
> Iedere paragraaf begint met de behandeling van een 'nieuw geval'. Een 2e som herhaalt de leerstof, die in de 1e som van de vorige paragraaf is behandeld; een 3e som herhaalt de rekenstof, die in de voor-vorige paragrafen is behandeld; enz.
> Zo wordt een *regelmatige herhaling* verkregen, maar wordt tevens bereikt, dat de 'herhalings'sommen zelfstandig gemaakt kunnen worden. Dat daardoor in concrete zin voldaan wordt aan de eis van *'zelfstandig werken'* behoeft verder geen betoog.
> b). Er dient gebroken te worden met een andere veel gevolgde manier: Eerst verscheiden pagina's niets dan optellen; daarna verscheiden pagina's niets dan aftrekken; enz.
> Doelbewust stellen wij vanaf het 3e leerjaar de hoofdbewerkingen *afwisselend* aan de orde; we grijpen daarbij steeds terug naar vorige 'gevallen', m.a.w. wij zorgen voor een voortdurende herhaling.
> Dit lijkt ons echter niet alleen noodzakelijk met het oog op een doeltreffende herhaling, maar ook om belangrijker reden:
> Wanneer b.v. behandeld is het geval 2200 + 600, dan behoort daar voor het verkrijgen van een juist inzicht in de opbouw der getallen onmiddellijk op te volgen: 2800 – 600. Op het geval 1800 + 600 volgt als vanzelfsprekend 2400 – 600; enz. (...)
> Deze werkwijze, onder a) en b) bedoeld, die wij in de praktijk als de juiste hebben geconstateerd, vindt zijn rechtvaardiging ook in de uitkomsten der experimentele psychologie en wel van dát deel, dat zich bezig houdt met de *'oefening'*. (...)

> Naar onze ervaring is dit oefeningsrythme van belang, zowel voor den onderwijzer als voor den leerling. De *voldoening*, een element in het leerproces, waarop Thorndike nadrukkelijk gewezen heeft, verhoogt de vreugde van den arbeid; elke paragraaf geeft naast de blijdschap over nieuw verworven inzicht de zekerheid tegen de taak opgewassen te zijn en komt tegemoet aan de behoefte van het kind: zelf-bezig te zijn.' [10, p. 13-15]

Diels & Nauta bieden met deze publicatie niet zozeer een handreiking voor de alledaagse onderwijspraktijk, maar veeleer een motivering en onderbouwing voor de opzet van hun methode als geheel, dat in algemene zin uiteraard ook tot steun voor de onderwijzer kan zijn.

Dat een handreiking voor de alledaagse onderwijspraktijk ook niet zo noodzakelijk is, blijkt als we een boekje van 'Fundamenteel Rekenen' nader bekijken. Neem bijvoorbeeld het 9de rekenboek over 'Procentrekening en Vraagstukjes'. Afgezien van de herhalingsparagrafen begint iedere paragraaf met een vetgedrukte voorbeeldopgave.

Deze is bij ieder nieuw geval gedeeltelijk van een oplossing voorzien: 1% van 250 = 2,50; 1/8 deel = 12½ %; *f* 100 à 2½ % geeft in 1 jaar *f* 2,50 rente; en zo meer, tot voorbeeldopgaven in schemavorm toe. Daarna wordt per geval een soortgelijke serie sommen opgegeven. In iedere paragraaf komen na de rijtjes met kale sommen de eenvoudige toepassingsvraagstukjes. En in de herhalingsparagrafen duiken onder de rubrieken van hoofdrekenen, rekendictee en cijferwerk nu ook procentsommen op.

Om de leergang van procent-rekenen te onderwijzen, is bij Diels & Nauta eigenlijk geen aparte handleiding nodig: de rekenboekjes markeren de route van het 'natuurlijke' leren, zoals zij hun methode kort typeren.

## 6 Leerstof

Bij de beschouwing van de rekenonderwerpen en de omvang ervan, dient onderscheid gemaakt te worden tussen het normale leerstofprogramma voor het lagere eindonderwijs ('de volks-

school') en het uitgebreide programma ter voorbereiding op het middelbaar onderwijs ('de opleidingsschool').
In hoeverre deze rekenprogramma's verschillen is te zien aan de eisen van toelating tot de 5-jarige H.B.S. uit het Koninklijk Besluit van 19 maart 1938. Daarin staat kort samengevat wat al decennia bij de examens gebruik was:

> 'Een schriftelijk en zo nodig mondeling onderzoek in zake:
> a). gewone en tiendelige breuken;
> b). kennis van wettelijke lengte-, oppervlakte-, inhoudsmaten, munten en gewichten, en van de procentrekening;
> c). de toepassing der getalbewerkingen in niet te ingewikkelde vormen en eenvoudige kenmerken van deelbaarheid, mede ter bepaling van het kleinste gemene veelvoud en de grootste gemene deler;
> d). het juist zien van de betrekkingen tussen de gegevens in eenvoudige denkvraagstukken blijkende uit de toepassing der voor de oplossing vereiste bewerkingen, waarbij het gebruik van de in de wiskunde gangbare verkorte schrijfwijze is toegestaan.' 7)

De onderwerpen van a) en b) behoren ook tot het reguliere programma, al kunnen de betreffende vraagstukken qua moeilijkheidsgraad zo variëren, dat ze ook geschikt zijn voor selectie.
De leerstof waarnaar in c) en d) wordt verwezen, was weliswaar voor het meer geavanceerde rekenonderwijs bestemd, maar de eerste uitgave van Bouman & Van Zelm bevatte in deeltje 9 toch ook al denkvraagstukken van het type:

> A kan een werk afmaken in 5 dagen en B in 6 dagen. In hoeveel dagen kunnen zij samen het werk afmaken? [7, p.343]

Pas na 15 jaar komen de auteurs aan de bezwaren tegen deze lastige en onpraktische sommen voor het lagere eindonderwijs tegemoet. [8, deel 9, p.6]

> 'Wij zouden onze verplichting ten opzichte van het rekenonderwijs in Nederland te kort schieten', als wij de geopperde – we kunnen ook zeggen: onvermijdelijke – bezwaren niet trachten te ondervangen. Het is inderdaad ongewenscht, dat de normen, die het middelbaar en gymnasiaal onderwijs aan

> de lagere school stelt en waaraan vele scholen wel wilden, maar niet kónden voldoen, den arbeid in de richting van vereenvoudiging nog langer beïnvloeden.'

De waarde van denksommen is door hen echter nooit ter discussie gesteld.

Diels & Nauta doen dat wel. Ze staan kritisch ten opzichte van de eisen die het middelbaar onderwijs aan het rekenonderwijs op de lagere school stelt en noemen speciaal de denksommen.

> 'Het wil ons voorkomen, dat de eisen, voor het Middelbaar Onderwijs, zoals het die stelt in de examenopgaven voor toelating, een veel te grote invloed gehad hebben op het rekenonderwijs op de lagere school. Het is o.i. de grote fout, dat wij als onderwijzers van het lager onderwijs ons bij het rekenonderwijs veel te veel hebben laten leiden door hetgeen de Leraren van het M.O. van ons - of liever gezegd: van onze leerlingen - vragen. In 1937 worden nog 'denksommen' opgegeven als de volgende:
> "A, B en C hebben een even grote som geld, maar A heeft alleen maar stuivers, B alleen dubbeltjes en C alleen kwartjes. Ze wisselen hun geld onderling, totdat de stuivers, dubbeltjes en kwartjes gelijk over hun drieën zijn verdeeld. A heeft daardoor 60 stuivers aan B en C afgestaan. Hoeveel stuivers, dubbeltjes en kwartjes had elk?" [10, p.5]

De auteurs vestigen hun hoop voor een verbetering op het genoemde Koninklijk Besluit, omdat daarin over 'eenvoudige denkvraagstukken' wordt gesproken. Dat die hoop ijdel bleek, laten de 60 toelatingsexamens uit 1947 (Polderman) zien: zowel genoemde vormsommen als de denksommen d) van het K. B., zijn nog net zo gecompliceerd als de honderden examenopgaven uit 1906 (Cramer) en later in het 13de deel van Bouman & Van Zelm staan.
Hoezeer de auteurs van de relatief vernieuwende methode 'Fundamenteel Rekenen' zich voor een voldongen feit gesteld voelden, blijkt uit het voorwoord van deeltje 11A voor opleidingsscholen:

> 'We willen hierbij opmerken, dat wij niet alle opgaven, die hierachter volgen, voor onze rekening nemen: er zijn er bij, die afwijken van het 'natuurlijke' rekenen, zoals wij dat in onze

> methode hebben gepropageerd. We noemen b.v. de 'weg'- en 'werk'sommen en 'omgekeerd evenredig'. De omstandigheden spreken echter een duchtig woordje mee en zolang de toelating nog opgaven als achterstaande eist, moet de opleidingsschool wel gedeeltelijk toegeven.' [12]

Een jaar na de uitgave van deze nieuwe boekjes, verschijnt het rapport Bolkestein (1935) waarin de denk- en vormsommen in de hoek worden gezet.

Dit rapport was kennelijk de aanleiding om in het K.B. van 1938 vrijblijvend over 'niet te ingewikkelde vormen' en 'eenvoudige denkvraagstukken' te spreken. Vrijblijvend, omdat de middelbare scholen zich kennelijk vrij voelden om alles bij het oude te laten.

Niet alleen de examens gaan op dezelfde voet door, ook de leerstof verandert in de eerste helft van de 20ste eeuw nauwelijks. De normale en uitgebreide rekenstof van Diels & Nauta bijvoorbeeld is nagenoeg dezelfde als die van Zernike: de genoemde onderwerpen onder a) en b) van het K.B. vormen het basisprogramma, en de onderwerpen c) en d) plus verhoudingen en evenredigheden het uitgebreide leerplan. Al moet daar aan worden toegevoegd dat de didactische behandeling ervan vaak aanzienlijk kan verschillen.

## 7 Besluit

In de periode 1900-1935 voltrok zich een vergaande mechanisering van het rekenonderwijs.[9)] Hoofdrekenen raakte op de achtergrond en het maken van kale cijfersommen kwam steeds meer centraal te staan. Het oplossen van vraagstukjes werd grotendeels naar de twee hoogste leerjaren verschoven.

Een Inspectieverslag uit 1936 concludeerde dan ook weinig verrassend: 'Het rekenonderwijs is overgemechaniseerd. De leerlingen zijn zo aan werktuiglijke arbeid gewend, dat het hersenproces bij velen volkomen uitgeschakeld is.[8)]

Zo kregen de leerlingen in de eerste versie van Bouman & Van Zelm voor ongeveer 400 lesuren aan cijfersommen voorgeschoteld – de rekenboekjes 4 tot en met 8 waren er grotendeels mee gevuld. Methodes als van Kellinga die de mechanisering een halt wilden toeroepen, vonden weinig aftrek. Pas met de introductie van Diels & Nauta, halverwege de jaren '30, veranderde daarin het

een en ander. Hoofdrekenen werd in ere hersteld, en cijferen kreeg hierin veel minder nadruk. Maar de achtergestelde positie van de toepassingen bleef, afgezien bij hoofdrekenen, tot de hoogste leerjaren gehandhaafd. De versobering en vereenvoudiging van de leerstof waarop mede de regionale hoofdinspecties voortdurend aandrongen, strandde op de eisen van het toelatingsexamen voor het middelbaar onderwijs.
Rond 1950 verscheen 'Geef Acht!' van Rombouts, dat voortbouwend op onder meer het werk van Kellinga en Diels & Nauta, een nog verdergaande inzichtelijke wending aan het rekenonderwijs gaf, de leerstof beknotte en praktische toepassingen al vanaf het eerste leerjaar in het rekenonderwijs betrok.
Zou deze methode de opmaat vormen tot een didactisch reveil na een halve eeuw gedurig pendelen tussen Bartjens en Versluys?

## Noten

1) De laatste heuristische methode is die van Bergmans e.a. [1]

2) Een veelzeggend citaat is in dit verband: 'Ik hoop dit te meer, daar ik dikwijls opgemerkt heb, dat moeders meenen, zich heel verdienstelijk te maken, wanneer zij haar kinderen van 4 of 5 jaar, werktuiglijk van 1 tot 10 leeren tellen; terwijl zij op die wijze het eerste rekenonderwijs in den grond bederven.' [26, p.3]

3) Bok & Lem en later Jager & Janse zijn ten aanzien van benoemde getallen dezelfde mening toegedaan. [4] [15]

4) Bij de Ley & Postma beginnen met het afhalen met happen van 10 of 20, en gaan dan over op de grootst mogelijke happen.

5) Bergmans e.a., en Scholte en Kellinga doen dit ook. Bij de Ley & Postma gaan van de verhoudingsdeling uit.

6) Het betreft hier de bekende pedagoog Theo Thijssen, auteur van 'Kees de jongen' en 'De gelukkige klas'. De andere bekende pedagoog uit die tijd, Jan Ligthart, stond net als Thijssen afwijzend tegenover de denksommen. *In de lente des levens* (1916) staat:

> 'In de leerkamer waren drie personen aanwezig: Aernoud, zijn meester, en een boer. Die trad uit een rekenboekje te voorschijn, en was dus maar een denkbeeldige boer, en toch had hij

> het meeste in te brengen. Hij kwam met twee manden eieren aanzetten, plaatste die op de markt en verkocht ze, de ene mand à 4 cent per stuk en de andere à 5 cent per stuk. Zoo ontving hij voor alle 300 eieren met elkaar ƒ 14,-. Dat was nu voor dien boer heel mooi, maar nou wou de man van het rekenboek weten hoeveel eieren de boer voor 4 cent verkocht en hoeveel voor 5 cent. [...] 'Nu de volgende,' zei de meester en hij deed weer zijn best, het nieuwe vraagstuk te doen begrijpen om te eindigen met Aernoud het maniertje te leren, hoe hij aan het antwoord kon komen. Maniertjes leren, daarin ontaardde, ondanks den meester, het 'ontwikkelend rekenonderwijs.' [18]

De kern van dergelijke denksommen zit hem in de verwijzing naar een volgend soortgelijk vraagstuk. Want als som-op-zich is zo' opgave geschikt voor het rekenonderwijs. Je maakt een inschatting en gaat de verdeling dan verstandig bijstellen – een algemeen toepasbare strategie. Maar zo ging men meestal niet te werk: de kinderen kregen een oplossingsmethode aangereikt die op soortgelijke sommen toegepast kon worden – althans indien men het betreffende somtype herkende ...

7) Ontleend aan Polderman. [19, p.8]

8) Geciteerd in Diels &Nauta. [10, p.10]

9) In tegenstelling tot de voorgaande periode krijgt de voorstellingspsychologie nu wel weer veel invloed op het rekenonderwijs. Eerst kunnen dan kennen, is het adagium. De leerstof staat hierbij centraal. Teneinde heldere voorstellingen en sterke verbindingen aan te leggen is het zaak om de leerstof nauwkeurig uit te lijnen, dat wil zeggen, te splitsen in moeilijkheden. Elk onderdeel wordt zodoende tot in de kleinste details uiteengelegd. In deze benadering speelt het geheugen een cruciale rol. Daarin worden de voorstellingen en de verbindingen tussen de elementen bewaard en wordt de opbouw van de begripsvorming geopend. Aan herhaling wordt veel aandacht geschonken.

# 4 Richtingen in het traditionele rekenen 1950 - 1985

## Inleiding

Het 'Onderwijsverslag van het jaar 1963' is al net zo somber over rekenen als het eerdergenoemde 'Inspectieverslag' uit 1936: het wordt doodgemoedereerd als een stervend vak omschreven, onherstelbaar aangetast door het kennelijk moeilijk te bestrijden cijfervirus.[1] De door 'Fundamenteel Rekenen' ingezette vernieuwing zette niet door. Zandvoort, die Diels na diens dood als auteur naast Nauta verving, staat model voor de restauratie van het weggecijferde rekenen. In de jaren '50 ontwikkelde hij 'Naar Zelfstandig Rekenen' - een puur procedurele (mechanistische) methode die in niets meer aan 'Fundamenteel Rekenen' deed denken, maar des te meer aan de nieuwe 'cijfermethodes' die weer veel aftrek vonden, zoals 'Naar aanleg en tempo' (1953), 'De Grondslag' (1955), 'Reken Maar' (1959) en 'Rekenen' (1960).

Tegelijk met de terugtrekkende beweging richting cijferen kwam de innovatieve tegenbeweging van het zogenoemde functionele rekenen op gang. 'Geef Acht!'(1948) waarmee het vorige deel werd besloten, is daar de eerste vertegenwoordiger van, gevolgd door 'Functioneel Rekenen'(1958) en nog wat later 'Uitkomst' (1967), 'Nieuw Rekenen' (1969) en 'Rekenen voor de basisschool' (1969).

In de procedurele methodes staat het opereren met hele en gebroken getallen volgens vaste procedures centraal. In de functionele methodes komt daarnaast het inzichtelijke, flexibele (hoofd)rekenen goed tot gelding. Ook de betekenis die aan toepassingen en de eigen inbreng van de leerlingen wordt toegekend, verschilt. Procedureel betekent in dit verband: overmatig veel kale sommen en een directieve rol van de leraar. En functioneel

houdt in: relatief veel tekstopgaven en een door de leraar (be)geleide, productieve inbreng van de leerling.
Zowel befaamde rekendidactici als vermaarde wiskundigen hebben zich in de loop van de tijd tegen de procedurele rekenmethodiek gekeerd. Daarover doen we eerst verslag. Dan volgen analyses van verschillende methodes uit de onderscheiden richtingen. Daarna komen onderzoeksgegevens over de leeropbrengst van het traditionele rekenonderwijs en van een enkele procedurele en functionele methode aan bod. En we eindigen met een schetsmatig overzicht van het veelvormige traditionele rekenonderwijs.

## 1 Pleitbezorgers van inzichtelijk rekenen

In 1977 ontving *Freudenthal* een eredoctoraat aan de Universiteit van Amsterdam. Bij deze feestelijke gelegenheid formuleerde hij zijn 'realistische' visie op het rekenonderwijs tegen de sterk contrasterende achtergrond van het procedurele rekenen dat destijds het onderwijs domineerde.

> 'Wanneer een kind de basisschool verlaat, heeft het tussen tien- en twintigduizend rekensommen verwerkt – voor hoeveel procent het erin is geslaagd, bepaalt zijn voortgezette opleiding en zijn levensweg, langs een soort beroepsonderwijs of een veelal nog gehomogeniseerde brugklas van avo. Maar vooral bepaalt dit feit van het leren rekenen en het hierbij al dan niet behaalde sukses de wiskundige (of veeleer antiwiskundige) attitude van de leerling – en, wat nog erger is – van de onderwijzer die dit onderwijs moet geven – een kijk op de mens, als ware hij een doelmatig te programmeren computer, terwijl hij nooit de, een computer typerende prestaties zou kunnen benaderen. Het onderwijs dat wij ontwikkelen is door een ander mensbeeld bepaald en tevens door een andere kijk op de wiskunde – niet als leerstof, maar als menselijke aktiviteit.
> Ik heb het eerder driewerf gekenmerkt als
> aan de realiteit geliëerd
> nabij de kinderen
> en maatschappelijk relevant.

> En ik vat deze kenmerken thans samen in één dat alle overkoepelt: menswaardig, de mens als lerende, als onderwijsgevende, als begeleider van onderwijs en als schepper van onderwijs waardig.' [6, p.337]

Deze basisopvatting van rekenen-wiskunde als menselijke activiteit houdt in dat die activiteiten op iedere leeftijd en op ieder niveau tot volwaardige reken-wiskundige denkprestaties en producten kunnen leiden.

Geheel nieuw was Freudenthals visie niet. De bekende rekendidacticus *Kühnel* bijvoorbeeld formuleerde zijn kijk op het vak via het cijferen ('das Normalverfahren') in soortgelijke bewoordingen.

> 'Das Normalverfahren sagt: So wird es gemacht, so ist es richtig! Damit verhindert es geradezu, in den Geist mathematischer Bildung einzudringen. Mit der festen Form wird der Geist in Fesseln geschlagen und zwar gerade dort, wo er sowohl in die Tiefe dringen, als auch den Ueberblick gewinnen sollte. ( ...) Ehe wir noch weitere Beispiele heranziehen, müssen wir kurz auf die Hauptsache eingehen. Sie besteht darin, dass das Lösungsverfahren von den Kindern selbst gefunden wird, und zwar nicht unter gewissenhafter Führung, nicht in ´streng logischer Entwicklung´ sondern frei, im freiem Versuch. Dabei werden Fehler und Umwege selbstverständlich nicht ausbleiben.' [23, p.2-4]

Vervolgens haalt hij als lichtend voorbeeld het hapsgewijze staartdelen aan dat door de kinderen zelf ontdekt en verder ontwikkeld kan worden. En hij besluit zijn betoog hier met de mededeling: 'Ins besondere halten wir abgekürzte Multiplikation und abgekürzte Division für völlig entbehrlich.' [23, p. 12]
In een andere publicatie schrijft Kühnel':

> 'Ein selbständiges Suchen, Finden und Verstehen mehrere Lösungswege, das müssen wir an die Stelle der alten Normalverfahren setzen; es ist wirklich ein Zauberstab, dies Wörtchen: Wer kann es anders?.' [32, p.96]

Vervolgens laat hij negen oplossingen zien die bij '38 + 45' gevonden (kunnen) worden.

*Wittmann en Müller* pakken driekwart eeuw later dezelfde opgave en laten daarbij de vier meest voorkomende rekenwijzen zien:

Addition

Zehner plus Zehner, Einer plus Einer

Beispiel: $\underline{38 + 45} = 70 + 13 = 83$

$30 + 40$

$8 + 5$

Zehner dazu, dann Einer dazu (oder umgekehrt)

Beispiel: $\underline{38 + 45} = 78 + 5 = 83$

$38 + 40 + 5$

$\underline{38 + 45} = 43 + 40 = 83$

$38 + 5 + 40$

Vereinfachen

Beispiel: $\underline{38 + 45} = 83$

$40 + 43$ [47, p.13].

De op inzicht gerichte opvatting over het leren rekenen was ook terug te vinden bij de gestaltpsycholoog *Wertheimer* die in zijn boek 'Productive thinking' (1945, 1966) de procedurele aanpak van *Thorndike* in ongemeen felle bewoordingen bestreed. Thorndike legt in zijn invloedrijke 'The psychology of arithmetic' bij de uitleg over het cijferen de nadruk op het memoriseren van de tafels ('ordinary bonds') die de basiskennis vormen voor het uitvoeren van de cijferhandelingen. De opbouw van de cijferleergangen geschiedt naar de mate van toenemende complexiteit ('organization and operation of bonds') leidend naar het standaardalgoritme. Het is niet noodzakelijk dat deze procedures inzichtelijk worden aangeleerd.

Wertheimer beklemtoont juist de noodzaak van een inzichtelijke aanpak ('understanding'), het begrijpen van de betekenis van de basisoperaties in toepassingssituaties en het kunnen toepassen van fundamentele rekenregels, zoals bijvoorbeeld de distributieve eigenschap ($3 \times 14 = 3 \times 10 + 3 \times 4$) en het gebruik van visuele middelen plus het belang van tussenvormen voorafgaand aan het eindalgoritme. Een citaat:

'If confronted with complicated tasks, like 27 x 34, sometimes a child will proceed this way:

> 20 x 30 + 20 x 4
> 7 x 30 + 7 x 4
>
> One faces a different task when one tries to get the child to use the shortcut, which demand, 'you must not do it in the old way, you must write the product (say, 3x27) directly. (...) In any case the best procedure seems to me to be *not to teach* the pupil the shortcut method without real understanding on his part, but to let him do the task, to let him find the necessary steps but in a reasonable way, by proceeding from structurally easy tasks to structurally more difficult ones - which does not mean that the tasks given also need to be easy in other respects. The process of thinking in such cases of course makes use of learned things. But the procedure is governed not by applying blindly what has been learned, as in the foolish cases of Thorndike's book.' [43, p.162-164]

Ook de vermaarde wiskundigen *Whitney* en *Hilton*, die zich net als Freudenthal met het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, dicht bij de kinderen, hebben bezig gehouden - wat onder academische wiskundigen nogal uitzonderlijk is - zijn van mening dat de standaardalgoritmen inzichtelijk aangeleerd (ontwikkeld) moeten worden. Ze leggen niet uitsluitend de nadruk op beheersing van de algoritmen maar ook en vooral op het proces van algoritmiseren:

> 'How absurd it is, then, that the traditional elementary syllabus puts such huge emphasis on computation, often virtually ignoring the most characteristic, *thinking* parts of mathematics. Children are asked to learn various dull arithmetical algorithms, but are seldom carefully instructed *why* these algorithms are important, *why* they work, *why* they were chosen and *how* they reflect natural processes.' [13, p.4]

Gevarieerd hoofdrekenen, schatten, het maken van eigen producties, het oplossen van weinig voorgestructureerde toepassingen, en oog hebben voor langlopende leerprocessen, dat zijn de accenten die Hilton en anderen in hun aanpak van het rekenwiskundeonderwijs voorstaan. [44] Whitney vat zijn zienswijze als volgt samen:

> 'A meaningful, holistic approach is advocated, rather than an emphasis on rules and procedures.' [44, p.129]

Eerder schreef de bekende wiskundige *Kline* in 'Why Johnny can't add' als reactie op het traditionele rekenonderwijs en de *new math*:

> 'One of the greatest difficulties that students encounter in mathematics is solving verbal problems. They do not know how to translate the verbal information into mathematical form. Under the usual presentations in the traditional and modern mathematics curricula this difficulty is to be expected.
> Mathematics is presented in and for itself, divorced from physical meaning, and then the students are called upon to relate this isolated, meaningless mathematics to real situations. Clearly they have no foundations on which to think about such situations. On the other hand, if the mathematics is drawn from real problems, the difficulty of translation is automatically disposed of. [20, p.184]

Nogmaals: geheel nieuw was Freudenthals visie dus niet, en zeker ook niet in Amsterdam waar hij destijds zijn rede hield. Want tientallen jaren eerder droeg de Amsterdamse denkpsychologische school onder Kohnstamms motto 'leren denken onder eigen verantwoordelijkheid' een enigszins vergelijkbare boodschap uit. In zijn 'Keur uit het didactisch werk van Prof. Dr. Ph. Kohnstamm' had *Kohnstamm* (1929 - 1930) zich duidelijk tegen het overheersende cijferende rekenen teweer gesteld: tegen de eindeloze rijen met kale sommen, de kolossale, samengestelde vormsommen met grote getallen die in methodes van Bij de Ley & Postma (1913), Vierman (z.j.) en Bouman & Van Zelm (1918 - 1960) de boventoon voerden.
Het rapport Bolkestein (1935) waaraan ook Kohnstamm meewerkte, richtte zich tegen de overmechanisatie door middel van het cijferen. In plaats van de uitgebreide vormsommen bepleitte dit rapport het vlug en vaardig toetsen van het rekenen-uit-het-hoofd voor kleine getallen, en schriftelijk voor niet overdreven grote getallen. Ook keerde Kohnstamm zich tegen de zogenoemde denksommen van het volgende type.

> Piet gaat om 9 uur per fiets met een snelheid van 10 km per uur van A naar B. Jan gaat, ook om 9 uur, hem per fiets uit B, met een snelheid van 12 km per uur tegemoet. Na de ontmoeting wandelen ze samen met de fiets aan de hand met een snelheid van 4 km per uur naar B, waar ze juist om 10 uur aankomen. Hoelang was de weg A-B?
> Maak eerst een tekeningetje.

De leerlingen leerden door die vraagstukken geen algemene maar specifieke oplossingsmethoden. De (denk)vormende waarde ervan was volgens hem een hersenspinsel.
Kohnstamm c.s. benadrukten het belang van het funderende hoofdrekenen, het inzichtelijke rekenen, het leren hanteren van algemene oplossingsmethoden door lees-rekenopgaven, het gebruikmaken van visuele modellen, en de gelaagdheid van het denken dat van het aanschouwelijke via het schematische naar het abstracte denken voortschrijdt. [22] [27]. En Prins wees in zijn proefschrift (1951) op de cruciale functie van het klassegesprek, waarin de leerlingen van anderen kunnen leren en leren nadenken over hun eigen oplossingen, en van het leergesprek op basis van de analyse van fouten. Tiemersma beklemtoonde in zijn methode 'Dit is rekenen' (1960) het belang van levensecht rekenen.
Bekende rekendidactici als Van Gelder (1959) en Goffree, Hiddink & Dijkshoorn (1966) deelden die kritiek op het werktuigelijke rekenen en kwamen tot soortgelijke suggesties voor een andere benaderingswijze.

## 2 Functioneel Rekenen

Met de methode 'Functioneel Rekenen' van Reijnders & Snijders (1958) kregen de denkpsychologische inzichten een gedeeltelijk onderwijspraktische invulling. In de in 1959 verschenen Handleiding van deze methode wordt de 'Amsterdamse' visie op het rekenen als volgt geschetst.

> 'In het voorafgaande is reeds herhaaldelijk gewezen op de betekenis van de denkpsychologische School van Selz ten aanzien van de didactiek. Denken zou volgens deze opvatting bestaan in het hanteren van oplossingsmethoden en leren denken zou zijn het leren hanteren van oplossingsmethoden. Het

moet van grote betekenis worden geacht, dat in de vorm van de actieve groepsdiscussie de verschillende oplossingsmethoden de revue passeren.

Men denke niet, dat dit slechts geldt voor de meer ingewikkelde vraagstukken, die de leerlingen der hoogste leerjaren ter oplossing voorgelegd worden. Reeds het jonge kind van de eerste of tweede klas dat met het aanleren van elementaire bewerkingen als het optellen onder de 100 bezig is, kan hierbij in een situatie komen, waarin verschillende oplossingsmethoden zich voordoen of gevonden kunnen worden. Als voorbeeld moge dienen de optelling van 26 en 38. Een analyse samen met de kinderen brengt verschillende oplossingsmethoden aan het licht. Immers het antwoord kan langs de volgende wegen (oplossingsmethoden) gevonden worden. Eerst 20 + 30, dan 6 + 8 en ten slotte 50 + 14, òf 26 + 30 en vervolgens 56 + 8, òf 26 + 40 - 2, of 30 + 38 - 4 enz. Het behoeft geen betoog, dat het naast elkaar zetten en vergelijken van deze oplossingsmethoden het inzicht in het optellen onder 100 bevordert.' [29, p.58]

In de Handleiding leggen de auteurs nadrukkelijk de verbinding tussen de titel van de methode en het didactische concept dat er aan ten grondslag ligt.

'De titel van de methode houdt een program in! In de eerste plaats blijkt uit de omschrijving van functioneel rekenen, dat – zoals reeds herhaaldelijk werd uiteengezet – door ons het accent gelegd wordt op het helpen bevorderen van de doorbraak van inzicht. Daarvoor is het noodzakelijk dat het eigenlijke rekenen wordt voorafgegaan door een voorbereidende fase, waarin de grondslagen gelegd worden voor het met inzicht noteren der getallen. Door de gehele methode heen is er naar gestreefd het mechanisch omgaan met de getallen – d.w.z. het toepassen van uit het hoofd geleerde kunstgrepen – zoveel mogelijk te vermijden. (...) Het zinvol functioneren leidt er toe aansluiting te zoeken bij het praktische leven. Het gaat er immers om dat de leerlingen de zinvolle samenhangen leren gebruiken in de dagelijkse praktijk van het leven.' [29, p.72-74]

Een van de vernieuwende en gezichtsbepalende aspecten van 'Functioneel Rekenen' is de aandacht voor de eigen producties van leerlingen bij gesloten, half-open en open vraagstukken, speciaal in de onderbouw. Al in deeltje 2, bestemd voor de tweede helft van leerjaar 1 (groep 3) krijgen leerlingen de opdracht zelf sommen bij een gegeven uitkomst te bedenken. In de volgende deeltjes voor groep 4 tot 8 worden daaraan nog andere typen van eigen producties toegevoegd.

> 'Het zelf bedenken van sommetjes over gegeven getallen, het zelfstandig opsporen van relaties tussen bepaalde gegevens en getallen, en het bedenken van vraagstukjes bij gegeven abstracties zijn functie-mogelijkheden van de intelligentie en het onderwijs dient ook deze functies zo goed mogelijk te laten functioneren.

De auteurs spreken in dit verband van 'verschillende richtingen uit kunnen denken': van kale som naar toepassingsprobleem en omgekeerd, van gegeven getallen en bewerkingen naar het antwoord en omgekeerd.
Als voorbeelden van een en ander noemen ze:

> - Zelf sommetjes bedenken bij een gegeven getal, zeg 72;
> - Een vraagstukje ontwerpen met 40 + 25, of 40 - 22, of 7 x 6, of 24 : 6 als oplossing;
> - Een vraag formuleren bij een opgave als 'Zus koopt in een fruitwinkel 6 appels van 5 c per stuk en 8 peren van 7 c per stuk; ze heeft 1 gulden'.
> - Het gevarieerd oplossen van een gesloten opgave als
>
> 'Moeder koopt bij de groenteboer:
> 1 bloemkool voor 4 dubbeltjes = c
> 2 kroppen sla van 1 kwartje = c
> Samen voor ... c
> Zij betaalt 1 gulden. Zij krijgt terug ... c
> Met welke geldstukken kan de winkelier dat teruggeven?'
>
> Hoeveel er teruggegeven wordt kan weer op verschillende manieren door aftrekken gevonden worden, maar van groot belang is het, wanneer men de werkelijke geldstukken erbij haalt en láát teruggeven, zoals een winkelier dat in de praktijk doet n.l. door optelling! Echt 'winkelen' dus!'

Ook vernieuwend is de inzet van visuele modellen zoals de getallenlijn, de (breuken)cirkel, het honderdveld, tabellen, stroken en grafieken – wat in de rekenmethodes uit de periode vóór 1950 slechts spaarzaam gebeurde. Het leren van oplossingsmethoden stimuleerde dit gebruik: aan modellen werd 'oplossingswaarde' toegekend.

Een relatief nieuw onderdeel van functioneel rekenen is het schatten als didactisch middel. Schattend rekenen als controlemiddel en als doel-op-zich werd in Nederland door 'Fundamenteel Rekenen' van Diels & Nauta geïntroduceerd. In de Richtlijnen bij deze methode schrijven de auteurs: 'Het zuiver mechanische trachtte men verder tegen te gaan door herhaaldelijk vóór het uitrekenen de uitkomst te laten 'schatten'. [5, p.11] Maar 'Functioneel Rekenen' stelt dit schatten ook in dienst van het precieze uitrekenen en dat was nog niet eerder vertoond. Een citaat:

> 'Naar onze mening is bij een som als 52 + 29 in eerste instantie het belangrijkste, dat het kind tot het inzicht komt, dat de uitkomst groter moet zijn dan 70 (n.l. 50 + 20) en kleiner moet zijn dan 90 (60 + 30). Na deze eerste *begrenzing van de uitkomst*, ga men het antwoord nader preciseren, waarbij verschillende wegen zijn te volgen b.v.:
> *Hoeveel* is het *meer* dan 70? Antw. 2 + 9 = 11 enz. òf met aanvulling tot 10 als tussenschakel wordt het 70 + (2 + 8) + 1 = 70 + 10 + 1 enz. òf 70 + (1 + 9) + 1 enz.
> Weer anders kan het worden als volgt:
> *Hoeveel* is het *minder* dan 90? Antw. 8 minder en 1 minder, dus 9 minder. Nog anders: 52 +30 - 1. Dergelijke oplossingsmethoden moeten bij de klassikale besprekingen of nabeschouwingen bij groepswerk steeds weer naar voren komen. Het hanteren der getallen geschiedt hier heel anders dan bij het cijferen.' [29, p.61]

Een van de belangrijke didactische principes van 'Functioneel Rekenen' luidt dan ook: 'Het zelf laten controleren en het zelf laten schatten van de uitkomsten zijn adequate oplossingsmethoden, die een mechanische werkwijze voorkomen.'

Vanaf het einde van de jaren '50 verscheen naast 'Functioneel Rekenen' ook nog 'Boeiend Rekenen' van Wanders & Böhncke

(1958), waarin evenals bij 'Functioneel Rekenen' aandacht was voor de eigen producties van leerlingen bij gesloten, half-open en open vraagstukken.

Als men deze schets van het aanvankelijke rekenonderwijs volgens de functionele aanpak vergelijkt met Freudenthals citaat dan kan men niet anders dan concluderen dat dit het rekenen als menselijke activiteit is, zoals hem dat voor ogen stond. Dat geldt echter niet voor cijferen, breuken, procenten en verhoudingen: het principe van inzichtelijk leren wordt hier slechts ten dele gehonoreerd! Wel bevat de methode ook in de bovenbouw veel toepassingen van onderscheiden vorm: vraagloze opgaven, vrije producties, gesloten vraagstukken waarin leerlingen de passende bewerkingen moeten ontdekken en uitvoeren plus eenvoudige hoofdrekensommen, kaal of in schemavorm.
In de jaren '70 werd vanuit het Wiskobasproject – waarover later meer – het volgende over de 'Amsterdamse' rekendidactiek geschreven:

> 'Vanaf het eind van de vijftiger jaren deed het denkpsychologisch georiënteerde rekenonderwijs zijn invloed gelden en kwam de nadruk vooral te liggen op het inzichtelijk rekenen, het hanteren van oplossingsmetoden en het gebruiken van ordeningsmiddelen als getallenlijn, honderdveld en verhoudingsstrook. Ook werd meer dan tot dan toe, getracht aan te knopen bij levensechte rekensituaties. (...) Alle genoemde veranderingen hebben het overheersende mechanistische element in het rekenonderwijs vanaf het derde leerjaar echter niet wezenlijk kunnen terugdringen, al was de aanzet daartoe soms duidelijk zichtbaar, zoals bij 'Functioneel Rekenen.' [37, p.21]

### 3 Geef Acht!

'Functioneel Rekenen' was echter niet het eerste functionele rekenboek. 'Geef Acht!' van Rombouts (1948) dat aanvankelijk door het R.K. Jongensweeshuis te Tilburg werd uitgebracht, verscheen al tien jaar eerder. En daarmee is zij de 'grote' vergeten methode uit de geschiedenis van het rekenonderwijs. Ook Leen (1961) vermeldt 'Geef Acht!' niet. In kringen rond het realistische reken-

onderwijs, te beginnen bij Wiskobas, bleef deze opmerkelijke methode eveneens enige tijd onopgemerkt.
Enkele fragmenten uit het algemene gedeelte van de Handleiding laten zien hoezeer dit rekenboek zich tegen de mechanistische rekenmethodiek keerde.

> 'We stoten hier op een brokje geschiedenis. Eenmaal in de dagen dat Pestalozzi ook ten onzent de methodiek beheerste, was het parool: 'Alles begrijpen'. Rekenen was volgens Zernike de leerschool der logica. Het ideaal bleek niet te verwezenlijken: het kinderverstand schoot te kort. En men verviel, zoals gewoonlijk, van het ene uiterste in het andere: álles begrijpen, niéts begrijpen. Het doet er niet toe of ze het snappen, werd de leuze, als ze het maar kunnen. (...) Van het verhoopte inzicht, het kennen, de overgang van machinaal naar begrijpend rekenen, kwam niets. Geen wonder ook. Het rekendenken van de leerlingen was stelselmatig, volgens beginsel, niet geschoold, zelfs niet gestimuleerd; eerder had men het onder een berg van werktuiglijkheid bedolven en het door de gekweekte mechanistische instelling een rem aangelegd. Hoe zou het dan op een mooie dag tot doorbraak kunnen komen? Maar ook het kunnen werd steriel, want het had geen wortels, zweefde in de ijle lucht. Het eigenlijke rekendoel, het vaardig oplossen van levensvraagstukken, werd hopeloos gemist. De bewerkingen werden aangeleerd als kunstjes in het luchtledige: de kinderen konden wel optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, maar als ze die manipulaties op concrete opgaven moesten toepassen, wisten ze geen raad, daar alle inzichten in het wezen der bewerkingen hun onthouden was.' [31, p.11-12]

In 'Geef Acht!' wordt veel tijd aan hoofdrekenen besteed. Iedere paragraaf van twee pagina's in de leerboekjes van de bovenbouw bestaat uit vier onderdelen – hoofdrekenen, cijferen, nieuwe stof en rekenkundig allerlei – die gelijkmatig over de les worden verdeeld. Dit betekent dat per les op zijn minst tien minuten voor hoofdrekenen wordt gereserveerd. Rombouts wijst op het belang van schatten. De cijferprocedures worden inzichtelijk aangeleerd, eerst via geldrekenen en dan rekenend met positiecijfers (enen, tienen, honderden). Aanvankelijk dienen concrete situaties als basis voor het uitvoeren van (voorbereidende) cijferhandelingen.

> 'Zodra de aldus vercijferden hun kunst moeten gebruiken voor een heus vraagstuk, als ze dus hun 'vormen' voor een 'inhoud' moeten aanwenden, weten ze niet, of ze optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen zullen. Het staat er immers niet bij! Daarom zeggen wij: Het vraagstuk, het echte rekenprobleem, sta aan het begin, sta insgelijks aan het einde. Men gaat er van uit om de becijfering inhoud te geven, en men keert er telkens naar terug, daar alles, ook voor de leerlingen een doel moet hebben. Niet eerst 'rekenen' leren en later 'toegepast rekenen', maar tezamen, verbonden. (...) De ondervinding leert twee dingen die ons dringend tot 'oppassen' manen: 1e de jeugd is van nature tot werktuiglijkheid geneigd, althans tot zo weinig mogelijk denken, en 2e hoe eerder de mechanisatie, de automatisering der hoofdbewerkingen intreedt, hoe minder kans, dat er ooit begrip, inzicht komt.' [31, p.29]

Rombouts vindt ook variatie in de vraagstukjes belangrijk.

> 'Het verdient sterke aanbeveling, niet alleen telkens van concrete gevallen uit te gaan en telkens weer tot zulke gevallen terug te keren, maar ook, naar aanleiding van een gegeven stof, de leerlingen zelf vraagstukjes te laten samenstellen. De nodige getallen en andere gegevens kunnen uit prijslijsten en dergelijke – die in de klas aanwezig moeten zijn – worden opgezocht. Sterk stimulerend tot denken, werken opgaafjes zoals Van Tricht die in 1928 reeds gaf in lagere klassen onder het opschrift: zie wat je kunt vinden.' [31, p.146]

Naast het eerste principe van 'Geef Acht!' – procedureel rekenonderwijs vervangen door conceptueel rekenonderwijs - staat het tweede principe: versobering, radicale besnoeiing van de traditionele leerstof. Rombouts schrapt:

- ontbinden in factoren, g.g.d. en k.g.v.
- repeterende en samengestelde breuken, en recepten voor het opereren van breuken
- grote vormsommen en denksommen

- beperkt het metrieke stelsel tot maten die werkelijk worden gebruikt en de relaties ertussen
- en wijst uitgebreid beredeneerd berekenen van redactiesommen af.

De realiteit als basis en bron, flexibel (hoofd)rekenen, schatten, praktische toepasbaarheid, eigen producties; kortom, verstandelijk rekenen en versobering van de leerstof, zijn trefwoorden waarmee de methode van Rombouts gekarakteriseerd kan worden.

### 4 Nieuw Rekenen

In het volgende gaan we kort in op de jongste functionele methode, te weten 'Nieuw Rekenen' (Bruinsma, 1969) die tot in de jaren '90 in gebruik was. Ook 'Nieuw Rekenen' hanteert de term functioneel rekenen. En precies zoals in de methode met die naam, wordt de term hoofdrekenen gebruikt als rekenen-mét-het-hoofd en niet zozeer als rekenen-úit-het-hoofd.
Tegenwoordig spreken we meestal van gevarieerd, flexibel of handig (hoofd)rekenen als fundering van het inzichtelijke rekenonderwijs – dit ter inleiding van het volgende citaat.

> 'Hoofdrekenen is altijd functioneel, inzichtelijk rekenen. Hoofdrekenen is niet: cijferen uit het hoofd, of het toepassen van foefjes. Hoofdrekenen vraagt altijd inzicht in de structuur van de getallen. Hoofdrekenen wil zeker niet zeggen, dat nooit papier mag worden gebruikt. Vaak is het gewenst vooral de kinderen met een minder sterk geheugen de gelegenheid te geven, een tussen-antwoord te noteren; dit bevordert dikwijls de rust en kan het zelfvertrouwen versterken. De praktijk van het leven vraagt het vlot kunnen uitvoeren van eenvoudig hoofdrekenwerk: het kind moet snel een relatie doorzien en weten welke bewerkingen het moet toepassen; hoofdrekenen verdiept het inzicht in het getallenstelsel en het bevordert het ontdekken van de vele mogelijkheden die tot het zelfde antwoord leiden.' [3, p.12]

Kortom, flexibel (hoofd)rekenen is niet alleen een doel op zich, maar fungeert tevens als didactisch middel om getalbegrip, inzichtelijk rekenen en toepasbaarheid te bevorderen. Vijfvoorbeelden uit deeltje 4b voor groep 6 over vermenigvuldigen, laten zien hoe dit basisconcept concreet gestalte krijgt.

1. Bereken:
   5 x 98 = 5 x 90 + 5 x 8 =
   maar ook 5 x 100 – 5 x 2 =
   en ook de helft van 10 x 98=
   Bereken op verschillende manieren.
   7 x 98    4 x 98    12 x 25
2. Bereken op de eenvoudigste manier.
   6 x 94    8 x 97    28 x 29
3. Maak zelf sommen.
   Om een weiland staat een hek.
   Het weiland is lang 120 m, breed 80 m.
4. Maak 5 vermenigvuldigingen.
   De uitkomst is steeds 450.
5. Eerst schatten!
   9 x *f* 3,75=    85 x *f* 0,97=. ..

Opgave 1 zet kinderen op het spoor van het handige rekenen dat in opgave 2 toegepast kan worden. In opgave 3 komt bij 28x29 het cijferen in beeld.

De overgang van splitsend en van kolomsgewijs naar cijferend rekenen zou volgens de Handleiding, in enkele lessen, bij vermenigvuldigen als volgt kunnen verlopen.

7 x 98 = 7 x 90 + 7 x 8 = 630 + 56 = 686.

| | | |
|---|---|---|
| | | 5 |
| 98 | 98 | 98 |
| 7 x | 7 x | 7 x |
| 630 | 56 | 686 |
| 56 | 630 | |
| 686 | 686 | |
| (a) | (b) | (c) |

In (a) en (b) wordt kolomsgewijs met positie*getallen* gerekend. In (c) wordt de overgang naar het rekenen met positie*cijfers* gemaakt, wat eerder ook al bij het optellen en aftrekken gebeurde. De posities worden van de enen, tienen en honderden eerst door munten (centen, dubbeltjes, guldens) voorgesteld.

De staartdeling wordt in 'Nieuw Rekenen' met een opgave als 72 : 3 ingeleid met de vraagstelling: 'In hoeveel groepjes van 3 kan ik 72 verdelen?'

```
3/ 72 \ 20+4          3/ 72 \ 2 .   3/ 72 \ 24          3/ 72\ 24
    60                   60             60                  6
    12                   12     →       12                  12
    12                                  12                  12
     0                                   0                   0
   (a)                          (b)                        (c)
```

Eerst mogen de leerlingen bij enkele opgaven schema (a) gebruiken, maar al snel moeten ze overstappen op (b). De verkorting in de notatie van '20 + .' naar '2 .' voltrekt zich dus in één les per deelgeval. Bij moeilijker opgaven wordt de overgang van (b) naar (c) gemaakt.
Ook wordt nog een andere mogelijkheid aangegeven om de deling trapsgewijs steeds korter te noteren.

```
        9              9
       30             30
      100            100
6/ 837 \139     6/ 837 \139     6/ 837 \139
    600            6               6
    237            23              23
    180            18              18
     57             57              57
     54             54              54
      3              3               3
    (a)            (b)             (c)
```

'Nieuw Rekenen' zet zich sterk af tegen het 'vermechaniseerde schematiserende rekenen': 'Steeds wordt naar middelen gezocht om het gevreesde 'vercijferen' te voorkomen.'
Eén van die middelen is het schattende rekenen via opgaven als: 45 x 0,36 = dat is meer dan 12, want ...; 45 x 0,36 = dat is minder dan 20, want ...'
Tot de tweede helft van groep 5 bestaan de rekenboekjes uitsluitend uit opgaven voor hoofdrekenen. Daarna volgen het cijferende optellen en aftrekken, en in groep 6 het cijferende vermenigvuldigen en delen. De auteurs voegen daar aan toe: 'Inzichtelijk reke-

nen, samen met levensecht rekenen zijn evenwel uitgangspunt en doel.' [3, p.13]
Vanaf groep 5 zijn de taken in A-, B- en C- rubrieken onderverdeeld, die bestemd zijn voor alle kinderen, zwakkere rekenaars en goede rekenaars.

Breuken, verhoudingen en procenten worden in die zin inzichtelijk onderwezen dat de leraar - de methode volgend - de betreffende begrippen en operaties zo duidelijk mogelijk met behulp van modellen en schema's uitlegt. 'Nieuw Rekenen' bevat vele en gevarieerde toepassingsopgaven, die soms in een thematische reeks staan, bijvoorbeeld over winkelen, kassabonnen, buitenlands geld, treinreizen, afstanden in Europa en zo meer.
Deze gesloten, half-open en open opdrachten passen in de leergangen die op dat moment aan de orde zijn: het zijn toepassingen van wat eerder puur getalsmatig is geleerd.
Maar de eigen producties van de leerlingen, die in het aanvankelijke rekenen zo'n prominente plaats innemen, verdwijnen nu naar de achtergrond.
Voor de goede orde dient nog vermeld te worden dat tegelijk met 'Nieuw Rekenen' ook de functionele methode 'Rekenen voor de basisschool' (Van Gerven, 1969) verscheen - een methode die het beste van de voorgaande functionele methodes in zich verenigde. Maar mede door de turbulente ontwikkelingen op de methodemarkt rond 1970- waarover later meer - bleef de oplage ervan dusdanig beperkt dat de uitgever haar al binnen tien jaar uit het fonds moest halen.[2)]

## 5 Naar Zelfstandig Rekenen

De hiervoor beschreven functionele methodes wijken sterk af van de methode 'Naar Zelfstandig Rekenen' (Zandvoort e.a., 1955, 1970; Kuipers & De Groot, 1978) die model kan staan voor de procedurele methodiek, en die zich evenals de methodes 'Naar Aanleg en Tempo' (Lugtmeijer, 1953) en 'De Grondslag' (Haack & Lieffering, 1955) in de jaren '50 en '60 afkeerden van het toepassingsgerichte, inzichtelijke rekenen. In de jaren '70 kwam daar ook nog de procedurele methode 'Niveaucursus Rekenen' (Vossen e.a., 1970) bij. Wat in deze methodes resteerde, waren de kale rekensommen die zich eenvoudig in het gelid van lange uniforme rijtjes lieten plaatsen, plus nog wat schaars aangeklede opgaven.

In het Voorbericht van de rekenboekjes van 'Naar Zelfstandig Rekenen' staan de volgende zes grondbeginselen van de methode:

1) Door aanschouwing en doorleving het kind brengen tot begrip.
2) Vanaf het vierde deeltje een toelichting voor de leerlingen bij de rekenstof geven, waardoor de begaafde leerling in zekere mate onafhankelijk van de leerkracht wordt, terwijl de minder begaafde er althans enige steun aan heeft.
3) De leerstof verdelen in taken, waardoor makkelijker minimum-opdrachten gegeven kunnen worden.
4) Vanaf het vijfde boekje de toelichting in het leerlingenboekje zodanig maken, dat de meeste leerlingen door kunnen werken en er als gevolg daarvan een losser klasseverband ontstaat.
5) De verantwoordelijkheid van het kind geleidelijk vergroten, waardoor het tot meer zelfstandigheid gebracht wordt.
6) De leerkracht door controleoefeningen in staat stellen, zich ervan te overtuigen, dat de gemaakte stof ook het geestelijk eigendom van de kinderen is geworden. [48]

Het eerste grondbeginsel is alleen op de eerste drie deeltjes 'Jong leren met getallen' van toepassing. Het zesde heeft in de laatste versie van de methode geresulteerd in gedifferentieerde weer- en meertaken voor na de controletoets. [24]

Enkele voorbeelden uit het rekenen tot duizend laten zien hoe deze basisprincipes concreet gestalte krijgen. De som 26 + 38 wordt in 'Naar Zelfstandig Rekenen' aanvankelijk opgelost met het recept 26 + 38 = (26 + 30) + 8 en daarna, verticaal genoteerd, volgens de standaardprocedure van het cijferen – steeds beginnend met kale getallen en rekenend volgens voorschrift.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 6 | 6 + 8 = 14 | 14 = 10 + 4 |
| 3 8 | We schrijven de 4 op en 1 *tien* bewaren we | |
| 4 | Nu optellen: 2 tienen en 3 tienen = 5 tienen | |
| | 5t + 1t = 6t, dus 2 6 | |
| | 3 8+ | |
| | 6 4 | [24, deeltje 5, p. 20] |

Eigen producties zal men in deze methode niet aantreffen en ook geen contextrijke winkelsom, zoals die uit 'Geef Acht!' of 'Functioneel Rekenen'.
Wel is duidelijk hoe hier bijvoorbeeld de kale som 100 - 86 uitgerekend moet worden.
Horizontaal geschreven zo: 100 – 86 = (100 - 80) – 6 = ...
Verticaal genoteerd gaat dat via cijferen als volgt:

| | | |
|---|---|---|
| 1 0 0 | 6 van de 0 gaat niet, lenen van de 0 ook niet. | |
| <u>8 6 –</u> | Lenen van de 1. Die 1 wordt dus 0. | |
| 0 10 | | |
| ~~1~~ 0 0 | 6 van de 0 gaat niet, lenen van de 10, | |
| <u>8 6 –</u> | die 10 wordt 9, dus zo: | |
| 9 10 | | |
| ~~1~~ 0 0 | 6 van de 10 = 4 | |
| <u>8 6 –</u> | 8 van de 9 = 1 | |
| 1 4 | 0 van de 0 = 0 | [24, deeltje 5, p. 92] |

In deeltje 5, bedoeld voor de eerste helft voor groep 6, staan 750 kale aftreksommen, waarvan 250 cijfersommen 'onder elkaar', en 10 tekstopgaven.
Ook de staartdeling wordt louter receptmatig geïntroduceerd. Dat gaat bij het voorbeeld 72 : 3 in de toelichting voor de leerling als volgt.

| | | |
|---|---|---|
| 3/ 72 \24 | We delen eerst 3 op de 7. Dat gaat 2x. | |
| <u>6</u> | Opschrijven 2. Dan blijft 7 – 6 = 1 over. | |
| 12 | We halen 2 bij. 3 op de 12 gaat 4 keer. | |
| <u>12</u> | Opschrijven 4. | [24, deeltje 6] |
| 0 | | |

Breuken, procenten en verhoudingen worden eveneens directief aangeboden.
Ten slotte nog enkele opmerkingen over toepassingen.
In de oudere versies van 'Naar Zelfstandig Rekenen' staan redactiesommen, waarvan de context zwak of irrelevant is.

> Zes potjes jam à *f* 1,75; hoeveel kosten die samen?
> Zeven potloden à 40 cent; hoeveel kosten die samen?
> Film: Ans koopt zeven kaartjes à 50 cent; zij betaalt ... cent.

De verwijzingen naar de winkel en de film doen in feite niet ter zake. Het gaat hierbij om 'open' termen die door andere vervangen kunnen worden zonder dat daarmee de structuur van de opgave wezenlijk verandert. De contexten fungeren als vernisje voor een rekensom. Aan de volgende opgave is dat te zien:

Willem van Oranje stierf in 1584.
Hij werd 51 jaar.
In welk jaar werd hij geboren?

Hierbij staat als antwoord 1584 - 51 = 1533.
Daaruit blijkt eens te meer dat dit vraagstuk slechts een aankleding is van een vooropgestelde rekensom: de geboortemaand wordt niet in het antwoord betrokken - de redactiesom is geen contextopgave. Een contextopgave, zoals de eerder genoemde winkelsom, wordt vanwege zijn centrale probleemstelling binnen het thema winkelen door de kinderen als zinvol ervaren. In 'Naar Zelfstandig Rekenen' ontbreken zulke opgaven.
In de laatste versie zijn bij de oude stof zogenoemde opstapjes bedacht in de vorm van thema's. Deze blijven echter geïsoleerd staan en hebben geen betekenis voor de verdere oefeningen en taken die hoofdzakelijk kale sommen bevatten.

### 6 Handleidingen en onderwijzersboekjes

Over de handleiding van 'Naar Zelfstandig Rekenen' kunnen we kort zijn: die ontbreekt. En ook boekjes met aanwijzingen voor de alledaagse onderwijspraktijk zal men tevergeefs zoeken.
Op zich niet verwonderlijk, want de rekenboekjes voor de leerlingen zijn zodanig opgezet dat zowel de leerling als de onderwijzer er steun aan kunnen ontlenen. Het straks genoemde voorbeeld over hoe 72 : 3 met een staartdeling opgelost wordt, staat niet in het onderwijzersboekje maar gewoon op de linker pagina van het rekenboekje voor de leerling als toelichting bij een serie rijtjes sommen van de rekentaak aan de rechter kant. De onderwijzer kan, indien nodig, het voorbeeld uiteraard nader toelichten, hoewel het primair bedoeld is om het zelfstandig rekenen van de leerling te bevorderen - de titel van de methode is een program!
De andere procedurele methodes zijn in dit opzicht minder kort van stof, maar veel meer dan een inleiding van enkele pagina's en

enkele aanwijzingen bij de taken plus de antwoorden bieden ook zij niet - de minutieus stapsgewijze opbouw van de leerstof met voorbeeldoplossingen van opgaven geeft voldoende houvast.

'Geef Acht!' is de tegenpool van dergelijke puur receptmatige methodes; in de boekjes voor de onderwijzer komt dit op niet mis te verstane wijze tot uitdrukking. Het is de enige methode uit de periode 1950-1990 die naast de onderwijzersboekjes een dikke algemene handleiding in twee delen heeft gepubliceerd met uitvoerige rekenkundig-didactische analyses van grote domeinen als getalbegrip, hoofdrekenen, cijferen, breuken, verhoudingen, procenten en metriek. Rombouts motiveert het belang van een veelomvattende handleiding als volgt:

> 'Wij hebben de reken-methodische problemen in deze handleiding enigszins uitvoerig en systematisch uiteengezet. De onderwijzer moet weten, wat hij doet en waaróm hij het doet. (...) De onderwijzer allereerst, moet zich rekenschap geven. Hij moet de mijlpalen en handwijzers langs de weg terdege kennen, omdat hij anderen te gidsen heeft.
> Meer nog dan een gids is hij een bouwmeester. Hij mag niet onkundig zijn van wat zijn voorganger deed, want daarop heeft hij voort te bouwen, en evenmin wat zijn opvolger te doen overblijft, want die zal op zijn werk in dezelfde stijl en naar hetzelfde plan moeten verder werken. Daarom gaven wij een doorlopende behandeling van de diverse grote onderdelen, zonder precies af te grenzen, wat in deze en wat in die klas aan de orde zou moeten komen: iedere leerkracht dient een heldere kijk te hebben op het geheel, moet de grote lijn zien die door alles heen loopt.' [31, p.155]

Aan procentrekening bijvoorbeeld worden niet minder dan 10 bladzijden besteed. Daarin zet de auteur uiteen dat het begrip procent tweeledig als breuk en als verhouding opgevat kan worden, en waarom hij de breukbenadering als ingang kiest. Daarna schetst hij de de totale leergang die over verschillende rekenboekjes verspreid is. Ook motiveert hij waarom zogenoemde terugrekensommen in de methode zijn opgenomen, hoe ze onderwezen en geleerd kunnen worden 'ter verdieping van het inzicht' en welke schema's en type tekstopgaven daarbij passen. 'Onmiddellijk

voelt een geroutineerde onderwijzer, dat bij zulke omkeringen weer het gevaar van de vormelijkheid dreigt, tenminste wanneer zij anders dan in concrete vorm worden aangeboden.' [31, p.132]
Naast de algemene inleiding bevat 'Geef Acht' onderwijzersboekjes met aanwijzingen voor de behandeling van de nieuwe stof uit iedere paragraaf van het leerlingenboekje die, zoals eerder aangegeven, een vaste indeling kent.

'Functioneel Rekenen' biedt in haar korte handleiding geen rekenkundig-didactische analyses van grote leerstofgebieden, maar beperkt zich tot een uitgebreide toelichting van de twintig psychologisch-didactische principes die aan de methode ten grondslag liggen - in het voorgaande werden er enkele genoemd.
In ieder onderwijzersboek is het bijbehorende rekenboekje opgenomen. Naast elke bladzijde met sommen staat een pagina met antwoorden en gevarieerde aanwijzingen voor het onderwijzen - een opzet die men in de meeste methodes uit die tijd tegenkomt, al kan de vorm waarin dit gebeurt enigszins verschillen.

De algemene handleiding van 'Nieuw Rekenen' is nog korter dan die van de voorgaande en vooral veel minder overzichtelijk: individuele verschillen, schijnresultaten, schatten, motivatie, analyseren van fouten, metriek stelsel, klassegesprekken en zo meer, passeren in 30 pagina's de revue. De auteurs hadden het voordeel dat ze naar enkele didactiekboeken konden verwijzen die nu voor het eerst in Nederland verschenen.[7] [9] De onderwijzersboekjes passen in het patroon van toelichtingen, korte aanwijzingen bij de sommenparagrafen en de vermelding van de antwoorden.

## 7 Leerstof

Vanaf 1960 verdwenen geleidelijk de zogenoemde denksommen over lopende kranen, samenwerkende arbeiders en elkaar tegemoet rijdende fietsers. Ook de kolossale cijfersommen - de vormsommen - raakten steeds meer in onbruik. De instelling van het Cito in 1968 en het massale gebruik van de rekentoetsen einde basisschool maakten de toelatingsexamens voor het voortgezet onderwijs, waaraan dit type opgaven hun bestaansrecht ontleende, minder urgent. Hetzelfde gold voor de gecompliceerde toepas-

singsopgaven over verhoudingen, evenredigheden, procentrekenen, en meten van omtrek, oppervlakte en inhoud.
Daar kwam nog bij dat omstreeks 1970 de discussie over de zogenoemde *new math* - de nieuwe wiskunde op de basisschool, met onderwerpen als logica, verzamelingen, relaties en transformaties - de aandacht naar andere leerstofdomeinen verlegde. Hoe het zij: wat dertig jaar eerder door Kohnstamm, Kellinga en anderen was bepleit, werd nu werkelijkheid. Maar daar bleef het niet bij - waarover in het volgende hoofdstuk meer.

## 8 Leerresultaten
## Naar Zelfstandig Rekenen en Nieuw Rekenen

Welke traditionele rekenrichting scoort het beste?
De zich almaar voortslepende controverse over de beste aanpak tussen de procedurele en functionele rekenrichtingen was tot eind jaren'80 niet aan de hand van empirisch onderzoek te beslechten, domweg omdat daarvoor de benodigde gegevens ontbraken.
De ironie van het lot wilde echter dat net toen de traditionele methodes uit de scholen verdwenen, de vergelijkende leereffecten wel degelijk ter beschikking kwamen. Met terugwerkende kracht kon toen worden vastgesteld welke aanpak het beste werkte.
'Naar Zelfstandig Rekenen' behield tot in de jaren '90 haar marktaandeel van 25 procent dat ze ook in de jaren '60 had. 'Nieuw Rekenen' deed met een wat lager gebruikspercentage eveneens tot in de jaren '90 dienst. Daardoor konden deze representatieve methodes van de genoemde richtingen in de eerste drie periodieke peilingen van het Cito uit het tijdvak 1987-1997 betrokken worden.
De psychologisch-didactische uitgangspunten van 'Naar Zelfstandig Rekenen' en 'Nieuw Rekenen' verschillen fundamenteel. De kernvraag is of het verschil in gerichtheid op inzicht en toepasbaarheid ook in de rekenprestaties van de leerlingen tot uitdrukking kwamen. Na de eerste drie peilingen kon deze vraag beantwoord worden. Het Cito had toen voldoende gegevens om tussen een aantal methodes verantwoorde vergelijkingen te maken.
Is de verwachting terecht dat de functionele methode bij 'getallen en bewerkingen' betere resultaten zal boeken?

'Nieuw Rekenen' blijkt op de 24 onderzochte rekenonderdelen gemiddeld 0,3 standaarddeviatie hoger te scoren dan 'Naar Zelfstandig Rekenen' - een duidelijk verschil. [16]
Op het gebied van het cijferen zijn de uitkomsten nagenoeg gelijk, dat wil zeggen, verwaarloosbaar klein in het voordeel van 'Nieuw Rekenen'. Maar op de overige onderdelen van 'getallen en bewerkingen' - basiskennis, hoofdrekenen, schatten(!) en het maken van toepassingen met behulp van de zakrekenmachine - komt 'Nieuw Rekenen' gemiddeld 0,5 sd hoger. Terwijl de verschillen bij breuken, procenten en verhoudingen 0,25 sd waren, alle weer ten voordele van 'Nieuw Rekenen'. Op geen enkele van de 27 onderdelen scoort 'Naar Zelfstandig Rekenen' hoger. Bij de mechanistische methode 'Niveau Cursus Rekenen' zien we hetzelfde. beeld

*Conclusie:* de functionele aanpak scoort duidelijk beter dan de procedurele methode. Wat eerder vakdeskundigen op grond van rationele analyses en observaties uit de onderwijspraktijk hadden vastgesteld, werd nu door empirisch onderzoek bevestigd.3)

## 9 Symbool van de rekenresultaten jaren'70

De uitkomst van één vraag, uit een grote toets, die in 1985 aan 312 tweedejaars Pabo studenten werd voorgelegd om commentaar op gegevens in een krantenknipsel te leveren, kan model staan voor de ontluisterende praktische opbrengst van het procedurele rekenen. [15] Deze studenten, met voornamelijk een havo- of vwo-diploma, hadden op de basisschool medio jaren'70 vrijwel allemaal een procedurele methode gehad. - 'Nieuw Rekenen' had toen nog maar een klein marktaandeel. [Volkskrant, 1984]

**EEN KRANTENKNIPSEL MET FOUTJES**

Het kost nogal wat rekenwerk. Laten we ons dus beperken tot Nederland. Dat heeft zo'n 14 miljoen inwoners, tegen de VS ruim 3 miljard 200 keer zoveel. De oppervlakte van Nederland is zo'n 40.000 vierkante meter, tegen de VS 33.000 vierkante kilometer, ongeveer 1000 keer zoveel.

Om te beginnen: 33 procent sloeg het vraagstuk over. De commentaren van de studenten die wel commentaar gaven, was veelzeggend. Ongeveer 10 procent merkte op dat 3 miljard niet 200 keer zoveel is als 14 miljoen en dat je niet kunt stellen dat 33.000 vierkante kilometer 1000 keer zoveel is als 40.000 vierkante meter. Daarentegen vond 5 procent van de studenten dat die berekeningen wel ongeveer kloppen. En 3 procent noteerde dat die 'ongeveer 1000 keer zoveel' bij de vergelijkingen van de oppervlakten fout is en 'een miljoen keer' moet zijn. Of de Verenigde Staten wel een miljoen keer zo groot als Nederland zou kunnen zijn, werd niet in overweging genomen. Nederland een paar voetbalvelden groot, de Verenigde Staten op het formaat van Nederland met een inwonertal van meer dan de helft van de wereldbevolking - dat alles werd volledig over het hoofd gezien.

Het procedurele rekenonderwijs heeft kennelijk de dwangmatige gerichtheid op de getalsmatige exactheid en het kale rekenen los van de werkelijkheid onbedoeld bij de leerlingen opgewekt en ervoor gezorgd dat getallen niet tot leven komen. Of en in welke mate dit gegeven doorwerkt in de prestaties van het schattende rekenen als geheel, zal in een volgend hoofdstuk duidelijk worden.

## 10 KNAW-rapport

In beschouwingen over het rekenonderwijs speelt het begrip 'traditioneel rekenen' een cruciale rol. In een KNAW-rapport (2009) wordt dit concept als volgt omschreven. [18, p.23-24]

> 'Onder traditioneel rekenen verstaat men rekenen waarbij de leraar de klas één efficiënte standaardmethode om een bepaald type opgave op te lossen aanreikt (in concreto: het standaardalgoritme) en uitlegt en door alle leerlingen intens laat inoefenen tot ze die beheersen. Men is ervan overtuigd dat leerlingen - en zeker de modale en de zwakke leerlingen - in verwarring worden gebracht wanneer er bij elke type van rekenbewerking allerlei verschillende strategieën of methoden door en naast elkaar worden gepresenteerd. (...) Per standaardrecept ziet het efficiënte traditionele onderwijsleerproces er in principe steeds hetzelfde uit. Centraal staat steeds het uitgebreid individueel en op papier inoefenen van de door de

> leraar gedemonstreerde en uitgelegde standaardaanpak voor de betreffende opgave. Men gaat ervan uit dat juist als gevolg van dat oefenen ook het begrip van en inzicht in de geleerde kennis en vaardigheden vanzelf ontstaan en toenemen. Voor concreet materiaal en (voorbeeld)contexten is er een beperkte plaats, namelijk in een korte oriënteringsfase. De leerlingen moeten daar in de daaropvolgende oefenfase zo snel mogelijk van loskomen en naar de kern van de opgaven gaan, het vlot leren uitvoeren van het recept. Tijdens dat oefenen – eerst met gemakkelijkere opgaven, daarna met moeilijkere – hebben contexten geen nut, omdat die afleiden van de essentie. Om diezelfde reden is er geen plaats voor gevarieerd en flexibel strategiegebruik. Als het niveau van vlotte beheersing van de standaardprocedure bereikt is, is er ruimte voor contexten, namelijk als toepassingen achteraf van het geleerde recept.'

Uit de didactische analyses is echter duidelijk dat deze laatste omschrijving van het traditionele rekenen wel van toepassing is op de procedurele methode 'Naar Zelfstandig Rekenen' maar niet op de functionele methode 'Nieuw Rekenen' die het flexibele, inzichtelijke rekenen vooropstelt en betrekkelijk laat, in groep 6, met de standaardprocedures start. Het is onjuist om de procedurele methodiek aan te duiden als de traditionele rekenrichting. Vergeten wordt dan dat de 'kleinere' functionele methodes ook deel uitmaken van onze traditie. Het feit dat de KNAW-commissie de twee richtingen in het traditionele rekenonderwijs onder één noemer plaatst, heeft grote gevolgen voor de uitkomst van het vergelijkende onderzoek dat zij verrichtte, waarover later meer.

## 11 Besluit

Hoe het traditionele rekenonderwijs zich sinds 1875 manifesteerde, is in het voorgaande onder meer beschreven aan de hand van flexibel (hoofd)rekenen en cijferen, plus de aard en plaats van toepassingen. De circa vijftig traditionele rekenmethodes die tussen 1875 en 1975 verschenen – en waarvan we de helft noemden en ongeveer een kwart uitvoeriger bespraken – kunnen gekenschetst worden op basis van de verschillende accenten die de drie genoemde onderwerpen krijgen. Daarbij moet worden aangetekend dat in de periode 1920 – 1970 de methodes met een sterk op cijferen gerichte, toepassingsarme aanpak verreweg de meeste aftrek vonden. Omstreeks 1970 kwamen niet minder dan tien nieuwe methodes op de markt, waarvan vier rekenwiskundemethodes – vertalingen en bewerkingen van buitenlandse *new math*-boeken. Nog nooit eerder in de geschiedenis van het onderwijs was de verwarring over het rekenonderwijs zo groot. Zelfs de naam van het schoolvak kwam ter discussie te staan: 'rekenen' zou 'rekenen-wiskunde' of zelfs kortweg 'wiskunde' moeten heten. Had de onderwijsinspectie, die het sterk gemechaniseerde rekenonderwijs tien jaar eerder als een stervend vak omschreef, het dan toch bij het rechte eind? Om deze vraag te kunnen beantwoorden, moeten we even het pad van de methodes verlaten en ons richten op de ontwikkelingen die in de periode 1970-1990 naar een nationaal rekenprogramma voerden.

## Noten

1) De Onderwijsinspectie heeft de kwalificatie van rekenen als 'een stervend vak' ontleend aan een publicatie van Smeelen uit 1923. Zijn hoofdstelling luidt dat de rekenkunde in haar tegenwoordige vorm geen voldoende reden van bestaan heeft voor het onderwijs aan de aanstaande onderwijzer en voor de hoofdacte, omdat zij geen inzicht geeft in wat later in de school onderwezen moet worden. Smeelen bedoelt met rekenkunde onderwerpen als g.g.d. en k.g.v., talstelsels, kenmerken van deelbaarheid voor exotische gevallen als 11,37,7,13 en de evenredigheden. Ook de denksommen hebben volgens hem in het onderwijs geen reden van bestaan. De reuzenvormen van het cijferen worden door hem eveneens afgewezen. 'Het cijferen wordt vooral op de lagere school onrustbarend overdreven.' [33, p.58]

2) Er waren uiteraard ook methodes die tussen de functionele en procedurele in stonden. Een voorbeeld daarvan is 'Boeiend Rekenen' van Wanders & Bohncke (1959). Daarin wordt niet alleen het staartdelen met kolomsgewijs rekenen aangeleerd, maar dat gebeurt ook met het cijferende vermenigvuldigen.

3) In de tabel zijn de leeropbrengsten van de functionele methode NR vergeleken met de traditionele NZR die op de 0-lijn staat.
Het verschil van 1,0 standaarddeviatie (sd) is, afhankelijk van het betreffende domein, om en nabij de 20 procentpunten.

| | | NR → NZR |
|---|---|---|
| **A** | 1. Basiskennis en begrip | + 0,4 |
| | 2. Basisoperaties | + 0,6 |
| | 3. Hoofdrekenen ( + , - ) | + 0,2 |
| | 4. Hoofdrekenen ( x , : ) | + 0,5 |
| | 5. Schattend rekenen | + 0,5 |
| | 6. Bewerkingen ( + , - ) | + 0,3 |
| | 7. Bewerkingen ( x , : ) | + 0,1 |
| | 8. Bewerkingen ( samengesteld ) | + 0,0 |
| | 9. Toepassingen ( m.b.v. rek. mach.) | + 0.5 |
| **B** | 10. Breuken - begrip | + 0,3 |
| | 11. Breuken ( + , - ) | + 0,1 |
| | 12. Breuken ( x , : ) | + 0,2 |
| | 13. Procenten - begrip | + 0,3 |
| | 14. Procenten - toepassingen | + 0,5 |
| | 15. Verhoudingen - begrip | + 0,2 |
| | 16. Verhoudingen - toepassingen | + 0,2 |
| **C** | 17. Lengte - omtrek | + 0,3 |
| | 18. Oppervlakte | + 0,2 |
| | 19. Inhoud | + 0,1 |
| | 20. Gewicht | + 0,4 |
| | 21. Meten - toepassingen | + 0,2 |
| | 22. Meetkunde | + 0,8 |
| | 23. Tijd | + 0,3 |

Conclusie: afgezien van het cijferen zijn de verschillen tussen NZR en NR gematigd groot in het voordeel van de laatstgenoemde.

# 5 Naar een nationaal rekenprogramma 1985-1990

## Inleiding

In 1971 stelde het project 'Wiskunde op de basisschool' (Wiskobas) zich ten doel een alternatief te ontwikkelen voor de formele *new math* waarvoor Nederlandse uitgeverijen eind jaren zestig veel belangstelling kregen.[1] Dit alternatief is het zogenoemde realistische rekenonderwijs dat meer dan het procedurele rekenonderwijs en de *new math* op de realiteit en de werkelijkheid van kinderen betrokken is.[2] [8]
In de periode 1971 - 1981 ontwikkelde het Wiskobasteam met en in het onderwijsveld eerst een grote verzameling rijke problemen en thema's, en vervolgens (aanzetten tot) nieuwe leergangen voor verschillende onderwerpen van rekenen, meten en meetkunde.
Vanaf het eind jaren '70 gingen Wiskobas-publicaties en ideeën over realistisch rekenonderwijs als inspiratiebron voor enkele nieuwe methodes fungeren. Eind jaren '80 werden de actuele rekendoelen voor het eerst in de vorm van nationale eindtermen gevat. Nieuwe leerstofgebieden van verhoudingen en meetkunde verwierven een officiële status, aloude onderwerpen als formeel breukrekenen en metriek verdwenen naar de achtergrond, en bestaande onderdelen over flexibel hoofdrekenen en cijferen kregen een ander accent. Inzichtelijk, flexibel en toepasbaar rekenen kwam hoog in het vaandel te staan.
Hoe is het mogelijk dat deze wending zich zo snel kon voltrekken? Het antwoord is simpel: door de grote onvrede met de procedurele aanpak die in de jaren '70 en '80 het overgrote deel van het tra-

ditionele rekenonderwijs beheerste, en door het wenkende perspectief van een nieuwe onderwijsaanpak.
In het volgende worden eerst aan de hand van een lesvoorbeeld de didactische basisprincipes van het realistische rekenonderwijs beschreven. Daarna doen we verslag van de raadpleging die medio jaren '80 onder bijna 300 rekendeskundigen over de kernonderdelen van een vernieuwd rekenleerplan werd gehouden. Dan wordt de 'Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool' besproken dat op de uitkomsten van deze consultatie gebaseerd is. Vervolgens plaatsen we de voorgestelde veranderingen in een breder, internationaal kader: in verschillende landen van de westerse wereld werden in de jaren '80 de rekenprogramma's bijgesteld. We besluiten dit intermezzo met een korte schets van de invloed die de Proeve op de officiële einddoelen heeft gehad.

## 1 Onderwijsprincipes van het realistische rekenen

De uitgangspunten van het realistische rekenen zijn destijds via voorbeeldopgaven en rekenlessen beschreven. Hier kiezen we voor een opgave waarin verschillende kernonderdelen van 'getallen en bewerkingen' zichtbaar zijn. In het realistische rekenonderwijs worden soms krantenknipsels gebruikt om rekenvragen te stellen.

**POLEN BEKEND ALS HARDE WERKERS**

Ieder jaar komen er tienduizenden Polen naar Nederland om maanden te gaan werken in de bloembollenteelt. Zygmunt is al voor de vierde keer in Nederland. Hij heeft in bollenvelden en in kassen gewerkt. Nu werkt hij op de transportafdeling van een bedrijf op de bloemenveiling. 'Ik laad meestal vrachtwagens in, dat is zwaar werk. Gemiddeld werk ik 220 uur in de week. Dat is goed, want zo verdien je,' aldus Zygmunt.

Hoe zullen de kinderen van groep 5/6 de vraag van dit knipsel beantwoorden?
Het hangt van de expertise en het invoelingsvermogen af in hoeverre men vooraf de oplossingen van de kinderen goed kan inschatten. Maar ook al ben je ervaren, dan nog blijken de kinderen ons steeds weer voor verrassingen te plaatsen.
Allereerst zijn er kinderen die niet (puur) redenerend rekenen.

> 'Nee, dat kan niet omdat mensen 36 of 40 uur per week werken en dit is veel teveel.'
> 'Ja, dat kan omdat het werk erg zwaar werk is en daarom duurt het ook vaak lang.'
> 'Nee, want mijn moeder werkt al 180 uur in de week. Als hij harder zou werken dan is hij de hele dag bezig, dat is wel een beetje veel.'
> 'Ja, omdat je vrachtwagens kan laden en tegelijk bollenvelden kan op laten groeien.'
> 'Dat kan niet, omdat een week maar 168 uur heeft.'

De berekeningen die tot de laatste conclusie leiden zijn echter zeer divers:

- herhaald optellen: 24, 48, 72 ... 168
- herhaald verdubbelen: 24, 48, 96, 192; 192 - 24 = 168
- splitsend vermenigvuldigen: 7 x 24 = 140 + 28 = 168
- cijferend vermenigvuldigen: 7 x 24 'onder elkaar' genoteerd
- handig vermenigvuldigen: 7 x 24 = 7 x 25 - 7 = 175 - 7 = 168
- idem, maar foutief: 7 x 24 = 7 x 25 - 1 = 175 - 1 = 174 (!)
- schattend rekenen: 10 volle werkdagen is 240 uur, dus 220 uur zou ruim 9 dagen zijn, een week heeft echter maar 7 dagen.

Zygmunt is een interessant probleem doordat het op het kruispunt van verschillende leergangen staat. Zowel splitsend rekenen, handig rekenen, cijferen als schattend rekenen kunnen erin betrokken worden. Duidelijk is dat door de verscheidenheid aan redeneringen en berekeningen de kinderen veel van elkaar kunnen leren. De eerste aandacht zal naar de verschillende berekeningen van 7 x 24 uitgaan, om te beginnen naar de betrekkelijk omslachtige aanpak van het herhaalde optellen. De methoden van splitsend en cijferend vermenigvuldigen bieden vervolgens de mogelijkheid om nog eens te laten zien dat het cijferalgoritme van het vermenigvuldigen in feite een verkorte procedure van de splitsmethode is.

| | | |
|---|---|---|
| | | 2 |
| 24 | 24 | 24 |
| 7 x | 7 x | 7 x |
| 140 | 28 | 168 |
| 28 | 140 | |
| 168 | 168 | |

Het handig uitrekenen van 7 x 24 via 7 x 25 vraagt om nadere uitleg. We weten dat 7 x 25 - 1 = 174 de verkeerde uitkomst oplevert.
Hoe kunnen we de juiste aanpak inzichtelijk maken?
De leraar heeft een model achter de hand om de correcte werkwijze te visualiseren: een stapel van 7 dozen (dagen), gevuld met 25 eenheden (uren), waarvan er één per doos, dus in totaal 7 weggehaald moeten worden: 175-7 = 168. Hoe zullen de leerlingen deze berekening elkaar concreet proberen uit te leggen?
Voorts kan uitgebreid aandacht worden besteed aan de prachtige stel-dat-redenering: je kunt uitgaan van 220 uur per week en laten zien dat je dan een onmogelijk aantal dagen per week krijgt, 220:24 ofwel ruim 9 dagen. Een andere mogelijkheid bij een dergelijke redenering is 220 door 7 te delen en zo op een etmaal van ruim 31 uur uit te komen. Laatstgenoemde redeneringen leiden vanzelf naar het schatten.
Aan het eind van de les rijst de vraag: 'Is die Zygmunt nu zo dom of heeft hij zich domweg versproken?'
Nadat de leerlingen in twee- of meertallen kort hebben overlegd, zal de groep tot de gemeenschappelijke slotsom kunnen komen dat Zygmunt zich kennelijk heeft vergist en 220 uur per máánd bedoelde. Dit betekent immers dat hij ongeveer 55 uur per week werkt, oftewel 11 uur per dag in een vijfdaagse werkweek of 9 uur zesdaags, en dat is inderdaad hard werken.

In het sterk op cijferen gerichte procedurele rekenen - de dominante stroming binnen het traditionele rekenonderwijs - verschijnt 7 x 24 in drie gedaanten:

- als keersom in horizontale vorm geschreven, wat betekent dat de som uitgerekend moet worden als 7 x 24 = 140 + 28 = 168;
- als keersom in verticale notatie, dat wil zeggen dat de leerling moet cijferen;
- en naar keuze te berekenen in de ingeklede versie 'Hoeveel uren zitten er in een week?'

Aan handig berekenen van 7 x 24 via 7 x 25 – 7 wordt al helemaal geen aandacht besteed.

Denkend aan de Zygmunt-les kunnen de volgende vijf principes van het realistische rekenonderwijs een concrete gestalte krijgen.

*1 Productie (p)*

Kinderen leveren een cruciale bijdrage aan zowel de vorm als de inhoud van het onderwijsleerproces. Hun eigen producties hebben niet alleen betrekking op de specifieke manieren waarop ze de leerstof verwerken, maar ook op het feit dat ze zelf opgaven bedenken en oplossen.

Deze productieve inbreng kan echter alleen gehonoreerd worden indien het startpunt van het onderwijs bij betekenisvolle, realistische problemen ligt.

Naarmate kennis, vaardigheden en inzichten toenemen, gaat echter ook de formele rekenwereld in toenemende mate tot de realiteit, de leefwereld van de kinderen behoren, en kunnen de eigen producties ook op het maken van formele rekenopgaven betrokken worden.

*2 Reflectie (r)*

Door die productieve inbreng kunnen de leerlingen aangezet worden om na te denken over hun eigen werkwijzen en deze te vergelijken met die van hun groepsgenoten.

Of anders gezegd: het onderwijs zou een reflectieve attitude bij de kinderen moeten opwekken, waardoor ze in staat gesteld worden hun eigen denkproces te controleren, kritisch te bezien en te reguleren. Zo bieden bijvoorbeeld de eigen producties van kale rekenopgaven en verhaaltjessommen een uitgelezen mogelijkheid om terug te blikken op de reeds afgelegde leerweg en zo mogelijk te anticiperen op wat voor hen ligt. Hetzelfde geldt voor het vergelijken van hun eigen redeneringen en berekeningen met die van de andere kinderen uit de groep.

*3 Interactie (i)*

Het rekenonderwijs vindt plaats in een modern klassikale onderwijssetting waarin naast zelfstandig werken ook gelegenheid is voor uitleg van de leraar en voor uitwisseling van ideeën tussen de leraar en de leerlingen, en tussen de leerlingen onderling. Interactieve uitleg, samenvatting, nabespreking en evaluatie van de verschillende oplossingsmethoden, waaronder die van de eigen aanpak, zijn kenmerkend voor deze didactische organisatie van de 'interstructie'. Overigens moet in deze onderwijssetting uiteraard ook de nodige ruimte gereserveerd worden voor het zelfstandige werken of voor het werken in tweetallen dan wel in kleine groepjes.

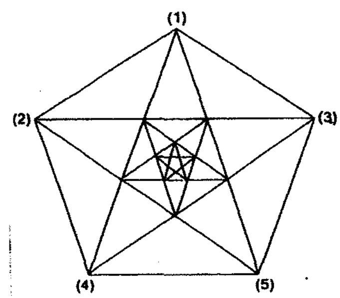
*4 Niveau (n)*

Productief betekent niet alleen 'voortbrengend', maar ook 'opbrengend'. Om de vastgestelde leerdoelen te kunnen bereiken moet, zoals net aangegeven, het leerproces (be)geleid worden. De leraar heeft oog voor de verschillende abstractieniveaus waarop de leerlingen opereren en probeert hen, waar nodig, met behulp van contexten, modellen, schema's, en methoden naar een hoger niveau te brengen. Deze cascade aan niveaus heeft niet alleen betrekking op het verloop van informeel-contextgebonden via modelondersteund naar formeel-vakmatig handelen. Want ook op het formele gebied zijn al vanaf het aanvankelijke rekenonderwijs bij de basisoperaties verschillende niveaus van denkend rekenen te onderscheiden. Denk in dit verband bijvoorbeeld aan het flexibel rekenen op basis van eigenschappen van de basisoperaties, zoals dat bij het leren van de tafels gebeurt, of aan het handig gebruik maken van de positiewaarden van getallen.

*5 Structuur (s)*

Het rekenonderwijs dient rijke welgeordende kennis, vaardigheden en inzichten te ontwikkelen, zowel ten aanzien van de puur vakmatige leerstof als van de verbindingen daarvan met toepassingssituaties. Dit houdt in dat de verschillende verwante leergangen met elkaar vervlochten dienen te worden en dat toepassingen ook in een projectmatige of thematische samenhang aan de orde kunnen komen. Goed gestructureerd en geïntegreerd onderwijs zorgt er evenwel voor dat er geen onontwarbare kenniskluwen kan ontstaan, want dat is even onwenselijk en ondoelmatig als een bestand van losse kenniseenheden.

Het totaal van deze vijf 'prins-principes' kan op grote, middelgrote en kleinere onderwijsblokken worden betrokken; op leergangen, lessenseries, lessen en lesonderdelen met betrekking tot het leren van reken-wiskundige begrippen, procedures, toepassingen en methoden – zie de krimpende vijfhoek.




In welk opzicht onderscheiden de principes van het beoogde realistische rekenonderwijs zich van de basisopvattingen uit de andere rekenrichtingen?
Dat de vijf principes, kort gezegd, niet op de procedurele methodiek en de *new math* van toepassing zijn, blijkt al meteen bij het basale productieprincipe: de leerlingen hebben door de eenzijdige nadruk op de standaardprocedures, weinig inbreng in het onderwijsproces en de opbouw van de leergangen. En daarmee kunnen vervolgens ook de andere principes onvoldoende tot gelding komen. In de functionele methodes is echter door de ruimte die de kinderen voor door henzelf ontwikkelde oplossingsmethoden krijgen, wel degelijk plaats voor dat fundamentele productieprincipe – de verschillen met de voorgestelde realistische aanpak zijn dan ook niet essentieel maar veeleer gradueel te noemen. [27]

## 2 Tien kernonderdelen van een nieuw rekenprogramma

De publicaties van Wiskobas fungeerden mede als inspiratiebron voor de nieuwe, realistische methodes die rond 1980 op de onderwijsmarkt verschenen.

Het gevolg daarvan was dat het methodebestand toen een (te) grote diversiteit ging vertonen.
Dit bracht de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) ertoe om in 1984 een onderzoek over de inhoud van een nieuw reken-wiskunde programma te laten uitvoeren.
Dit gebeurde op een conferentie met 290 deelnemers aan de hand van een document bestaande uit tien kernonderdelen uit het werk van Wiskobas en de eerste realistische methodes, getiteld 'Tien voor de basisvorming rekenen-wiskunde'.
Eerst volgt nu een samenvatting van die kernonderdelen en daarna de uitkomst van het betreffende onderzoek.[3)] [5 ] [26]

1 Meer aandacht voor toepasbaarheid.

Om de toepasbaarheid van de reken- en wiskundevaardigheden te waarborgen - een belangrijke algemene doelstelling - dienen contextproblemen in het hart van het onderwijs geplaatst te worden.
Ze kunnen de brugfunctie vervullen tussen het formele systeem en de realiteit waarop het van toepassing is, of beter, de werkelijkheid waaraan rekenen-wiskunde is ontsproten. En ze moeten daarom in alle fasen van de verschillende leergangen - ook in de beginfase - een belangrijke rol krijgen.
Men streeft er in contextrijk onderwijs uitdrukkelijk naar de vraagstellingen natuurlijk en aansprekend te laten zijn en niet louter een vernis van een vooropgestelde rekenopgave.

2 Heroriëntatie van het aanvangsonderwijs (4-7 jarigen).

Contextrijk aanvangsonderwijs legt de nadruk op activiteiten die nauw verbonden zijn met de echte of voorgestelde realiteit. Daarin is nauwelijks plaats voor wiskundig voorgestructureerde materialen waarmee nauwkeurig voorgeschreven handelingen van quasi wiskundige aard moeten worden uitgevoerd - bijvoorbeeld met logiblokken - voor werkzaamheden die op geïsoleerde begripsvorming van mathematische begrippen zijn gericht, en voor activiteiten via werkbladen waarin rekenvoorwaarden worden onderwezen en getoetst. [2] [3]
Voor het leren rekenen houdt contextrijk onderwijs in dat elementaire context-opgaven de ingang voor tellen, vergelijken en rekenend opereren bieden. En ook de aanvangsactiviteiten op het ge-

bied van het meten en de meetkunde blijven nauw met de realiteit van natuurlijke en aansprekende probleemstellingen verbonden.

3 Basiskennis en -vaardigheden van het rekenen.

Ten eerste: het is een vereiste dat de leerlingen de tafels van de vier hoofdbewerkingen memoriseren. Ten tweede dienen de kinderen elementaire rekenopgaven vlot en inzichtelijk te kunnen berekenen. Deze betreffen het optellen en aftrekken 'onder de honderd' (duizend), vermenigvuldigingen als voortzettingen en combinaties van de tafels ('7 x 13'), en het rekenen met 'nullen' (machten van 10). [16]

Het 'automatische' hoofdrekenen, met opgaven als 43 + 39; 85 - 58; 10 x 23; 7 x 12; 15 x 80; 100 x 28; 7 x 253 (via 1400 + 350 + 21); 350 : 10; 50 x 75 staat aan het einde van een proces van steeds verder verkorten van handig rekenen op basis van kennis van tafels, begrip van eigenschappen en van inzicht in het positiesysteem.

4 Minder tijd aan cijferen besteden
en de einddoelen aanpassen.

We stellen voor om de aloude cijfermethodiek te vervangen door een werkwijze die niet van meet af aan op de standaardprocedures afstevent, maar het leert langs de geleidelijke weg van schematisering en verkorting van kolomsgewijs rekenen. Voor zowel het cijferend vermenigvuldigen als het staartdelen is het van groot belang dat opgaven als 7 x 265= ... aan het eind van de leergang in groep 7 vlot, met direct inwisselen, uitgerekend kunnen worden. [4] [6]

5 Meer handig en schattend rekenen.

Naast het elementaire hoofdrekenen staat het handige rekenen – ook wel aangeduid als flexibel of gevarieerd rekenen – en het schattende rekenen.

Bij handig rekenen maken de kinderen gebruik van een scala aan eigenschappen. Het is echter niet de bedoeling dat ze een groot arsenaal aan verfijnde rekensnufjes leren.

Wel moeten de kinderen eigenschappen zoals die van het verwisselen (23 x 2 = 2 x 23), verdelen (8 x 42 = 8 x 40 + 8 x 2), verdubbelen, halveren, transformeren (16 x 48 = 8 x 96 = 8 x 100 – 8 x 4

= 768) en het rekenen met 'nullen' passend kunnen gebruiken. Dit handige rekenen kan speels en gevarieerd beoefend worden. [19] [17]
Bij schattend rekenen gaat het ten eerste om het ruwweg bepalen van de uitkomst van een berekening, ten tweede om het globaal controleren van de uitkomst van een berekening qua juiste orde van grootte, en ten derde om het schattend rekenen op grond van niet exact bepaalde of te bepalen gegevens, of om combinaties van die drie elementen. [9] Kortom: het betreft het passend omgaan met ervaringsgegevens, bewerkingen, benaderingen, afrondingen, (on)nauwkeurigheid en schattingen in allerlei alledaagse toepassingssituaties. Bijbrengen van 'feeling' voor getallen is een van de onderliggende algemene doelen van handig, redenerend en schattend rekenen.

6 Verhoudingen meer aandacht geven.

Verhoudingen is één van de meest verwaarloosde en verschraalde onderwerpen van het traditionele rekenonderwijs. Op zich is het verschijnsel verhoudingen echter belangwekkend: het is nauw verbonden met de realiteit, aansprekend voor kinderen, en wiskundig en maatschappelijk relevant.
Er zal veel meer aandacht aan geschonken moeten worden dan per traditie gebeurde, en ook de leerdoelen zullen dienovereenkomstig moeten worden aangepast.
Verhoudingen zijn er in de eerste plaats om situaties te vergelijken.
Om te beginnen biedt de waarnemingswerkelijkheid vele aangrijpingspunten – vergroten, verkleinen, (niet) verhoudingsgetrouwe afbeeldingen in tekeningen, kaarten op schaal – die in de onderbouw als kwalitatieve aanloop tot het kwantitatieve opereren met verhoudingen kunnen dienen. [10]
De overgang van het visuele naar het meer numerieke voltrekt zich geleidelijk vanaf de middenbouw van de basisschool.
Modellen en schema's, zoals de tweezijdige getallenlijn, de strook, de rechtlijnige grafiek en de verhoudingstabel, vergemakkelijken zowel het doorzien van de numerieke relaties als de getalsmatige verwerking ervan.

Verbanden tussen aantal en prijs, weg en duur, alsmede het samenstellen van recepten, mengsels worden nu onderzocht.
In de bovenbouw worden procenten geïntroduceerd; de verhoudingstabel speelt daarbij een kernrol met het doorrekenen van de gevolgen van het 'op honderd stellen'.

7 Breuk met verleden.

De traditionele onderwijsaanpak van breuken en kommagetallen was formeel en vrijwel van meet af aan gericht op het opereren volgens nauw omschreven regels. Deze didactiek faalt ten aanzien van het overgrote deel van de kinderen volledig. Ze dient gewijzigd te worden in een veelzijdige en niet formele werkwijze. Volgens deze werkwijze worden meerdere contextrijke toegangen (via meten, eerlijk delen, gelijkwaardigheid van verdelingen, mengsels e.d.) tot breuken en kommagetallen gekozen, en wordt het verstrekken van rekenrecepten zolang mogelijk uitgesteld. Vanaf het begin wordt met eenvoudige breuken geopereerd, maar dan informeel, niet routinematig en nog (vaak) niet volgens de meest verkorte notatiewijze. Aldus gaan begripsverwerving en informeel opereren hand in hand. Modellen die een brug slaan tussen de breuk als ordeningsmiddel en de formele bewerkingen ermee, zijn de getallenlijn, de strook, de cirkel, de rechthoek en de verhoudingstabel.
Om het breukkarakter van kommagetallen te benadrukken, worden ze vanuit het meten geïntroduceerd door middel van maatverandering (vergroting) van de eenheid. Bewerkingen met kommagetallen kunnen aangezet worden vanuit contextopgaven, bijvoorbeeld over geld. De regels van de basisbewerkingen dienen door de kinderen geleidelijk aan zelf ontdekt te worden. Trucs en regeltjes belemmeren de toepasbaarheid van het opereren met kommagetallen, die uitermate lastig blijkt te zijn. Bewustmaking van de kenmerken van het tientallige positiesysteem is daartoe een belangrijk middel. Ook schatten en verkorten dragen bij tot de regelontdekking. Bij een en ander kan de zakrekenmachine een didactische en controlerende functie vervullen.
De enorme complexiteit van breuken en kommagetallen laat geen snelle formalisering en algoritmisering toe: die leiden slechts tot

schijnresultaten met kale rekenopgaven. Het didactische roer moet hier radicaal om.

8 Meer meten, minder metriek.

Er dient in het rekenonderwijs meer aandacht dan voorheen aan meten besteed te worden. Dat houdt in: maatontwikkeling, instrumenteel en schattend meten, bepalen van passende eenheden bij bepaalde meetsituaties, rekenen met (afgeronde) grootheden, verwerking van meetgegevens in tabellen en grafieken – kortom aan het ontwikkelen van een 'gevoel' voor meten. En tevens betekent dit: niet starten met standaardmaten en formules, en geen regelgeleid operen in het metrieke stelsel, maar wel begripsmatige omgang met standaardmaten mede aan de hand van praktische meetsituaties. Met name ook de verwerking van numerieke gegevens in tabellen en grafieken (pictogram, staafdiagram, lijndiagram, histogram), plus omgekeerd het interpreteren van tabellen en grafieken (interpoleren, extrapoleren) vormen een belangrijk onderdeel van meten.

9 Meetkunde als nieuw programmaonderdeel.

Meetkunde is een rijke bron voor wiskundige activiteiten. Aanvankelijk gaat het bij het meetkundeonderwijs meer om kijken en proberen (kijkdoos, foto's, lokaliseren, licht en schaduw, blokkenbouwsels) dan om redeneren en rekenen, zoals bij aanzichten, verhoudingen, perspectief, uitslagen van ruimtefiguren en het maken van bouwsels.

Wellicht is er geen onderdeel dat naast het meten zozeer de vorming van een wiskundige attitude kan bevorderen als het meetkundeonderwijs. Startend bij de waarnemingswerkelijkheid en lokt het via motiverende probleemstellingen onderzoek uit, waarbij een grote veelzijdigheid van wiskundige aspecten aan de orde komt, zoals het visualiseren, het gebruiken van meetkundige modellen, het ruimtelijk oriënteren en redeneren, het reflecteren op het eigen handelen, het toepassen van meetkundige kennis en inzichten op praktische en puzzelachtige problemen, en dat alles in samenhang met vrijwel alle onderwerpen uit de gebieden van rekenen en meten.

10 Inpassing van de zakrekenmachine.

De onderwijskundige voordelen van de zakrekenmachine kunnen onder meer in de volgende punten herkend worden:

- Door het terugdringen van tijdrovend rekenwerk kan de nadruk meer verlegd worden naar toepassingen.
- Verstandig gebruik van de zakrekenmachine zal ook verstandig omgaan met getallen bevorderen. In het bijzonder kan gedacht worden aan het schattend rekenen, het werken met onnauwkeurigheden en het werken met 'grote' en 'kleine' getallen.
- De zakrekenmachine biedt nieuwe didactische mogelijkheden betreffende versterking van inzicht in het tientallig positiesysteem, versterking van inzicht in de samenhang van de basisoperaties, ondersteuning bij invoering van nieuwe begrippen (zoals kommagetallen) en versterking van getalinzicht.
- De zakrekenmachine kan een extra dimensie geven aan het gebied van het gevarieerd rekenen, zoals onderzoek van getalpatronen, delen met rest, rekenen met machten etc.

Intensief gebruik van de zakrekenmachine zal niet al te vroeg in het onderwijs moeten starten. (Wij denken thans als startpunt in groep 6 of 7.) Daarbij mag gebruik van de zakrekenmachine niet ten koste gaan van de elementaire vaardigheden. Vooral het getallengebied tot honderd zal eerst mentaal beheerst moeten worden. Kortom: er zal meer aandacht besteed moeten worden aan inzicht, aan vaardig uit het hoofd rekenen, maar vooral aan het leren bepalen wanneer je de rekenmachine wel of niet inschakelt (attitude).

## 3 Uitkomst van de veldraadpleging

De 290 respondenten – verdeeld in vier vrijwel even grote groepen van leraren basisonderwijs, begeleiders, opleiders en onderzoekers die zich voor de conferentie van de veldraadpleging inschreven – konden op een vierpuntschaal ('volledig eens - grotendeels eens - grotendeels oneens - volledig oneens') aangeven hoe ze de tien beschreven onderdelen waardeerden. [5]

Als we de gemiddelde score van 6 procent niet-reageerders per onderdeel buiten beschouwing laten, ziet de gemiddelde verdeling over de tien kern-onderdelen er als volgt uit:

- 3 procent 'neutraal tot volledig oneens'
- 32 procent 'grotendeels eens'
- 65 procent 'volledig eens'.

Kortom een positief instemmende score van 97 procent!
De laagste positieve score kreeg het tweede kernonderdeel over het aanvangsonderwijs, te weten 92 procent.
Het nieuwe onderdeel 'meetkunde' werd door 94 procent van de respondenten positief beoordeeld.
Positieve scores van 98 procent of hoger kregen zes onderdelen:

- basisvaardigheden
- handig en schattend rekenen
- verhoudingen
- breuken
- meten

Dit resultaat kwam op onderdelen overeen met de uitslag van een enquête onder ouders, leraren basisonderwijs en brugklascoördinatoren. Uit dit onderzoek van Inter/View bleek dat toegepast rekenen en hoofdrekenen belangrijker werden gevonden dan het cijferen, zij het met de aantekening dat de leraren uit het voortgezet onderwijs meer waarde aan cijferen hechtten dan de ouders en hun collega's van het basisonderwijs. Bij ouders bleken toegepast rekenen en hoofdrekenen hoog in het vaandel te staan. [1]

### 4 Proeve van een nationaal programma (deel 1)

De uitkomst van het opinieonderzoek was aanleiding om een ontwerp van een nieuw nationaal leerplan te ontwikkelen.
Eind 1989 verscheen de 'Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1. Overzicht einddoelen.', waaraan vele deskundigen hadden meegewerkt.4) Vanaf 1990 ging deze publicatie als officieus leerplan en baken voor methodeschrijvers en toetsontwikkelaars fungeren. In 1993 werd de in gang gezette vernieuwing via het 'Besluit kerndoelen basisonderwijs' van een overheidsstempel voorzien.
De Proeve bestaat uit drie delen.
Deel A geeft een beschrijving van de algemene doelen.
Deel B bevat de concrete doelen van de leergebieden.
Deel C bestaat uit honderd voorbeeldopgaven. [27]

Deel A

*De* 4 *algemene schooldoelen* hebben betrekking op:
- de persoonlijke waarde
- de voorbereidende waarde
- de maatschappelijke waarde
- de vakspecifieke waarde.

De *algemene leerdoelen* zijn als volgt samen te vatten.
Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat leerlingen:
- een goede wiskundige werkhouding ontwikkelen
- fundamentele vaardigheden verwerven
- praktische toepassingen leren kennen
- het vaksysteem en de realiteit verbinden
- wiskundetaal begrijpen en gebruiken
- relevante verbanden, regels, patronen en structuren opsporen
- onderzoek- en redeneerstrategieën gebruiken en verwoorden
- eigen producties maken en leren reflecteren op hun aanpakken.

Deel B

De 'Proeve' bevat 39 *concrete leerdoelen*, verdeeld over zes leerstofdomeinen:
- basisvaardigheden
- cijferen
- verhoudingen en procenten
- breuken en kommagetallen
- meten
- meetkunde.

De meest in het oog springende veranderingen ten opzichte van het gangbare traditionele rekenen op deze zes domeinen, sluiten aan bij wat in het voorgaande onderzoek over de kernonderdelen van een vernieuwd rekenprogramma is beschreven.

1. Bij de basisvaardigheden komt veel nadruk te liggen op inzicht in het positiesysteem, hoofdrekenen, schattend rekenen, toepasbaarheid van een en ander in contextsituaties en een passend gebruik van de rekenmachine.
2. Bij het cijferen wordt ruimte geboden om varianten van de gangbare procedures te leren zoals we die bijvoorbeeld in het historische onderzoek eerder bij de staartdeling tegen kwamen.

3. Verhoudingen worden vanwege het grote toepassingsbereik veel breder opgevat dan de formele evenredigheden van het traditionele rekenen. Praktisch procentrekenen krijgt eveneens veel aandacht – begrip van 'procent' staat voorop.
4. Breuken en kommagetallen, en de relaties ertussen, worden op verschillende manieren betekenis gegeven. De leerlingen moeten in eenvoudige toepassingssituaties breuken en kommagetallen kunnen vergelijken, ordenen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Rechtstreeks aansturen op beheersing van de rekenregels voor deze vier basisoperaties wordt afgewezen.
5. Aan meten, rekenen met gangbare maten en het verwerken van meetgegevens in schema's en grafieken wordt meer aandacht geschonken dan vroeger; minder aandacht krijgt het exerceren in het metrieke stelsel.
6. Meetkunde. De concrete leerdoelen van dit geheel nieuwe onderdeel zullen in het volgende nader worden toegelicht en beschreven. Eerst geven we een samenvatting van de domeinbeschrijving met tal van voorbeelden en aan het eind worden de betreffende leerdoelen van de meetkunde opgesomd.

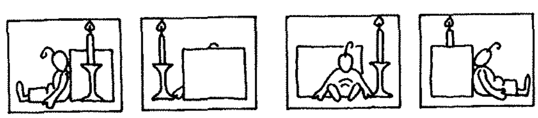
## Meetkunde

In 1889 werd meetkunde, of beter gezegd vormleer, uit het leerplan van de lagere school geschrapt. Men hechtte kennelijk geen geloof meer aan de vormende waarde die er door Pestalozzi en anderen aan werd toegedicht, zijnde 'het verstand der kinderen te ontwikkelen en hunnen geest aan geregeld trapsgewijze denken te gewennen'. De nieuwe meetkunde die exact honderd jaar later in de Proeve wordt beschreven, verschilt echter sterk van de oude vormleer waarin het classificeren van figuren vooropstond.5)
Nu wordt de leerinhoud: meetkunde als wiskundige wereldoriëntatie, als onderzoek van de ruimte waarin wij leven, als een wiskundige activiteit die allerlei natuurlijke fenomenen uit de waarnemingswerkelijkheid onderzoekt.[15]
In dit meetkundeonderwijs komen vragen aan de orde als:

> Waarom worden schaduwen langer als je van de lantaarnpaal wegloopt en. niet als je van de zon wegloopt?
> Hoe komt het dat de kerktoren achter de huizen wegzakt als je de stad nadert?

Waarom verspringt je duim die je vlak voor je ogen houdt, als je afwisselend het ene en het andere oog dichtknijpt?
Je ziet de zon niet als je op een zonnige dag uit het raam kijkt. Kun je toch ongeveer bepalen waar hij aan de hemel staat?

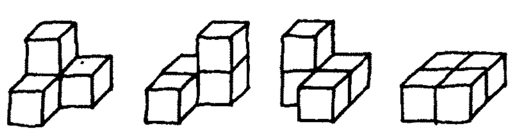
Op grond van ervaring, waarneming en onderzoek aan de hand van dergelijke problemen ontwikkelen zich begrippen als punt, lijn en hoek zonder dat deze vooraf gedefinieerd zijn. Eerst komt de ervaring, de waarneming. Daarna wordt het verschijnsel met behulp van een tekening verklaard, zoals in het geval van de lantaarnpaal, de kerktoren, de duim en de zon. [14]
Algemeen gesteld, geldt dat op grond van allerlei ruimtelijke ervaringen en onderzoek zich begrippen en inzichten ontwikkelen over ruimtelijk oriënteren, projecteren, plaats bepalen, construeren, spiegelen en zo meer. Probleemstellingen hebben betrekking op bijvoorbeeld foto's, spiegels, licht en schaduw, uitslagen van ruimtefiguren, aanzichten en bouwsels.



Kunnen dit foto's van een en dezelfde situatie zijn?

De laatste voorbeeldopgave uit de Proeve over meetkunde betreft het interessante 'vierkuberprobleem' van Wijdeveld dat in de jaren zeventig voor het basisonderwijs werd uitgewerkt en beproefd. [31]

Vierkubers



Bouw zoveel mogelijk van dit soort huisjes met vier kubussen.
Toon aan dat je alle mogelijke vierkubers hebt gevonden.
Teken en beschrijf de plattegronden van deze huisjes zodanig

> dat je ze nadat je ze hebt afgebroken, precies zo weer kunt opbouwen.
> Maak van iedere bovenstaande vierkuber een vooraanzicht en rechterzijaanzicht.

Eerst moeten de leerlingen nauwkeurig vaststellen wanneer twee vierkubers al dan niet dezelfde vorm hebben. Zijn bijvoorbeeld het tweede en derde bouwsel gelijk? Een leerling licht haar antwoord als volgt toe: 'Nee, bij het tweede huisje draai je aan de voorkant rechtsom de trap op en bij het derde linksom.'
Hoe zullen we die huisjes noemen?
'Spiegelhuisjes' gaan ze heten.
Aantonen dat je ze allemaal hebt, wordt via systematisch ordenen aangepakt, wat op verschillende manieren kan gebeuren.

Als belangrijkste algemene activiteiten van de wiskundige wereldoriëntatie worden genoemd: viseren en projecteren, oriënteren en lokaliseren, ruimtelijk redeneren, en construeren, transformeren en meten.
De Proeve-tekst over meetkunde wordt als volgt afgesloten:

> 'Wellicht is er geen onderdeel dat, naast het meten, zo de vorming van een wiskundige attitude kan bevorderen en zo aan de algemene leerdoelen appelleert als het meetkundeonderwijs. Dat komt met name door de zeer motiverende probleemstellingen en de grote veelzijdigheid van de wiskundige aspecten die in het meetkundeonderwijs worden aangesproken, zoals visualiseren, modelleren, redeneren, reflecteren en toepassen.'

De concrete leerdoelen van de meetkunde luiden:

1. Leerlingen beschikken over noties waarmee zij de ruimte meetkundig kunnen ordenen en beschrijven, zoals van plaats, richting, afstand, evenwijdigheid, patroon, vorm, grootte, schaal, spiegeling, symmetrie, coördinaat, plattegrond, vooraanzicht, zijaanzicht, bovenaanzicht, lengte, breedte, hoogte, omtrek, oppervlakte en inhoud.

2. Leerlingen kunnen ruimtelijk redeneren door zich in verschillende standpunten te verplaatsen en verbanden tussen gegevens

te leggen. Ze bedienen zich daarbij van bouwsels, plattegronden, kaarten, foto's en gegevens over plaats, richting, afstand en schaal.

3. Leerlingen kunnen schaduwbeelden verklaren, figuren samenstellen en bouwplaten van regelmatige objecten ontwerpen en identificeren.

4. Leerlingen kunnen de rekenproblemen, waar dat nodig is, visualiseren en schematiseren.

Deel C

Deel C van de Proeve bevat honderd *voorbeeldopgaven*. We kiezen vijf sommen uit deze verzameling.

1. Mirjam is jarig op 6 november.
Die datum valt dit jaar op vrijdag.
Op welke dag is Mirjam volgend jaar jarig?

2. Guus en Jack gaan de hele buitenkant van het huis schilderen.
Ze hebben zes potten verf nodig.
Iedere pot kost 16,55 gulden (euro)
Hebben ze aan 100, - gulden (euro) genoeg?

3. Vier repen chocolade worden onder zes kinderen verdeeld.
Hoeveel krijgt één kind?
Teken verschillende manieren om vier repen met z'n zessen te verdelen en schrijf de breuken erbij.

4. Een stok van 80 cm geeft een schaduw van 50 cm.
De schaduw van de toren is op dezelfde tijd 25 m.
Hoe hoog is de toren?

5. Vul steeds de goede maat in (na het getal):
In onze woonkamer ligt ongeveer 24 ... vloerbedekking.
De provincie Utrecht heeft een oppervlakte van 910 ...
De Nederlandse postzegel heeft een oppervlakte van 525 ...
De oppervlakte van je rekenboek is ongeveer 4,5 ....

Samen met de meetkundeopgaven geven deze voorbeelden al een behoorlijke indruk van de nieuwe elementen in het beoogde rekenprogramma.

## 5 Proeve van een nationaal programma (deel 2)

Inleiding.

De 'Proeve van een Nationaal Programma (deel 2). Basisvaardigheden en Cijferen' behandelt de grondslag van het reken-wiskundeonderwijs.

We citeren de inleiding van dit boek.

'Tot de basisvaardigheden van het rekenen worden gerekend: tellen, tafels, vaardig hoofdrekenen en schattend rekenen plus de elementaire toepassingen ervan. Over deze bekwaamheden is in de loop der tijden verschillend gedacht. Zo werd tot omstreeks 1960 betrekkelijk veel zorg besteed aan het inslijpen van de tafels. De aandacht voor het hoofdrekenen wisselde weliswaar per methode maar was toch meestal niet gering. Het schattend rekenen daarentegen kreeg bij benadering niet de aandacht die het verdiende en het toepassen evenmin.

Na 1960 kwam het rekenen steeds meer in de greep van het individuele, schriftelijke rekenen. Dit voerde soms sterk naar solitaire sommenmakerij. Zowel het uit het hoofd leren van de tafels als het hoofdrekenen kreeg daaronder te lijden, om over schatten en toepassen maar te zwijgen. Klassikaal uitgevoerde klaagzangen bij de tafels werden steeds minder gehoord. Allengs verdween ook het rekendictee waarin de onderwijsgevende opgaven voorleest en de leerlingen antwoorden noteert.

Met de schuchtere invoering van de rekenmachine aan het einde van de jaren zeventig werden zelfs de poten onder de rekentafels weggezaagd – zo althans meenden sommige onderwijsdeskundigen.

Waarom zouden de leerlingen al die rekenfeiten nog in het hoofd moeten stampen als zo'n rekenhulpje eenvoudig allerlei gecompliceerde berekeningen voor hen kan uitvoeren? 'Het schuiven met de abstracte cijfers moet zoveel mogelijk worden vervangen door de analyse en communicatie van ideeën – zo heet het in het krantenknipsel (...) met de kop 'Britten schaffen tafels en staartdelingen in het onderwijs af'. Buiten Brittannië denkt men daar in het algemeen toch wat anders over. Indien namelijk het 'domme' elementaire rekenwerk achterwege blijft, zullen niet alleen het hoofdrekenen en het schattende rekenen in het gedrang komen,

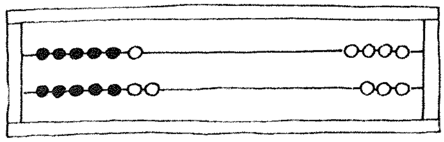
maar ook het inzicht in de rekenoperaties en de toepassingen ervan, aldus luidt de opinie van de meeste deskundigen.' [28, p.9-11]
Om een korte didactische impressie van Proeve (2) te geven, beperken we ons hier tot een samenvattende beschrijving van het rekenen tot honderd.

1) Tellen.

Er worden in Proeve (2) vier vormen van tellen onderscheiden: akoestisch, resultatief, verkort en structurerend tellen.
Akoestisch tellen richt zich in eerste instantie op het correct opzeggen van de telrij tot honderd.
Resultatief tellen begint met het tellen van geordende hoeveelheden of stappen op een bordspel, waarbij speciaal op het synchrone 'eerlijke' tellen wordt gelet.
Dan volgt het tellen van ongeordende hoeveelheden, deels onzichtbare hoeveelheden, bewegende objecten en alleen maar hoorbare fenomenen.
Verkort vooruit of terug tellen kan ingezet worden bij het samenvoegen, weghalen en splitsen van hoeveelheden.
En structurerend tellen ten slotte doet zich voor bij het turven, en het tellen met samengestelde 'sprongen' van tien, vijf en één.
Bij ieder van deze telvormen worden onderwijssuggesties voor telspelletjes, telliedjes en telsituaties gegeven.

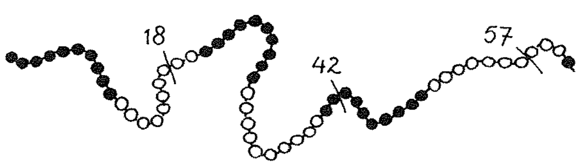
2) Optellen en aftrekken.

Om vlot te kunnen optellen en aftrekken tot honderd dienen de kinderen uiteraard de optel- en aftrektafels in het getallengebied tot twintig uit het hoofd te kennen.
Hoe kan bereikt worden dat de uitkomst van opgaven als 6 + 7, 13-7, 26 + 7 en 33 - 7 in groep 3/4 niet langer meer tellend wordt berekend, maar dat de kinderen het antwoord direct weten of vlot via splitsen bij tien of een tiental kunnen bepalen?
Bij het rekenen tot twintig zijn de methoden van tellen, dubbelen en rekenen via de vijfstructuur, die vaak spontaan door de kinderen worden toegepast, alle op één leermiddel te beoefenen, namelijk het zogenoemde *rekenrek.*
Het rekenrek is een breed telraam met twee staven waarop de twintig kralen volgens patronen van vijf in twee kleuren geordend zijn. [28, p.46]

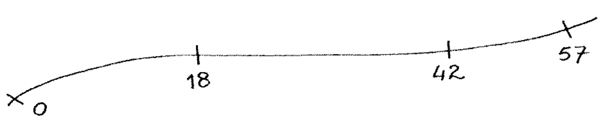


Op dit rek wordt gevarieerder gerekend dan op een telraam. Een opgave als 6 + 7 bijvoorbeeld hoeft niet per se 'doortellend' via tien opgelost te worden, zoals op een telraam gebeurt, maar kan ook met (bijna) verdubbelen worden berekend.
Voor het rekenen tot honderd geeft de Proeve drie hoofdmethoden:
- de rijgmethode
- de kolommethode
- de variamethode.

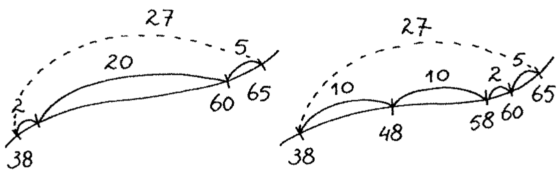
De rijgmethode kan met de *kralenketting* en de (lege) getallenlijn geconcretiseerd worden.[29, p.52]




Op een honderdketting kan men klemmetjes plaatsen, bijvoorbeeld na 18, 42 en 57 kralen.
De betreffende getallen wijzen er op dat er achtereenvolgend 18, 42 en 57 kralen vóór zitten. De klemmen kunnen vervolgens met de streepjes op de (vrijwel) lege getallenlijn in verband worden gebracht. [28, p.52]




Op zo'n *lege getallenlijn* kunnen opgaven als 38 + 27 en 65 - 27 op verschillende manieren en minder of meer verkort worden opgelost. Twee voorbeelden. [28, p.54]




De rijgmethode is een 'natuurlijke' methode: ze sluit namelijk aan bij het elementaire tellen in een vroegere fase, en kan als zodanig als een vorm van verkort tellen worden opgevat.
De kolommethode kan niet alleen bij optellen maar ook bij het aftrekken worden toegepast.

$$\begin{array}{r} 65 \\ \underline{27}\ - \\ 40 - 2 \\ 38 \end{array}$$

De verwoording van deze berekening luidt als volgt: '60 eraf 20 is 40; 5 eraf 7 dan kom ik 2 tekort, en moet die 2 nog van de 40 af, dus is de uitkomst 38.'
In plaats van dat we, zoals bij het cijferen, zeggen '5 eraf 7 dat gaat niet' zeggen we nu '5 eraf 7 dat is 2 te weinig of 2 tekort'. Dit tekort bepalen kunnen de meeste kinderen al in groep 3!
De belangrijkste varia-methoden bij de opgave 65 - 27 zijn:

- 65 - 27 = 68 - 30 = 38 (gelijkblijvend verschil)
- 65 - 27 = 65 – 30 + 3 = 38 (compenseren)
- 65 - 27 = 3 + 35 = 38 (aanvullend optellen)

Toepassingen: uiteraard moeten de kinderen de rekenprocedures ook bij praktische situaties in de vorm van contextopgaven kunnen toepassen. Sterker: dergelijke situaties kunnen vaak, als concrete oriënteringsbasis, model staan om inzicht in bepaalde rekenmethoden te krijgen! Een voorbeeld:

> Een boek bevat 65 bladzijden. Ik heb 27 bladzijden gelezen. Hoeveel bladzijden moet ik nog lezen voor het boek uit is?

In een dergelijke contextopgave tellen kinderen vaak door. Dat dit aanvullende optellen ook als aftrekken beschouwd kan worden, is in te zien door van het geheel (65) het eerste deel (27) af te halen.

Deze situatie kan op een getallenlijn worden uitgebeeld. Je haalt bij 65 - 27 die 27 van het begin van de 65-lijn af, en rekent het restant via aanvullend optellen uit, terwijl in de volgende opgave die 27 juist van het eind van de getallenlijn wordt afgehaald.

Er waren 65 mensen in de zaal. Toen gingen 27 mensen weg.
Hoeveel mensen zijn nu nog in de zaal?

Het is niet alleen belangrijk dat de kinderen van groep 4/5 in beide situaties een aftrekking leren herkennen, maar omgekeerd ook dat ze een kale aftreksom op de twee genoemde manieren handig leren berekenen – soms is 'afhalen' handig, een andere keer 'aanvullend optellen'.

Het probleemgerichte karakter staat model in de volgende rekentekensom.

Wim woont 5 kilometer van school en Saskia 2 kilometer.
Hoever wonen Wim en Saskia van elkaar?

De mogelijke antwoorden – 7; 3; en 'tussen 3 en 7' – worden klassikaal besproken en met tekeningen toegelicht.
Eigen producties leiden vaak tot verrassende en veelzeggende uitkomsten.

Maak optel- en aftreksommen waar 3 of 5 uitkomt.

Mark (groep 3), die eigenlijk nooit goed meedeed met rekenen, raakte nu wel geboeid en produceerde tientallen opgaven van 2 + 1 tot 27 - 24.
En Jon toonde dat hij veel meer kon dan de juf in de verste verten vermoedde: 8 - 3; 30 - 25; 100 - 95; 2000 - 1995; 10000 - 9995; ...
3 - 8 = min 5 (!)

3) Vermenigvuldigen en delen.

Scherp gesteld zijn er voor het leren van de tafels twee methoden: de reproductiemethode en de reconstructiemethode.
De reproductie-methodiek is vooral gericht op het direct kunnen reproduceren van de tafels die achtereenvolgens aan de orde worden gesteld. Per tafel is de volgorde steeds dezelfde. Starten met herhaald optellen en dit verbinden met vermenigvuldigen; inprenten van de tafel, in volgorde oplopend van 1x naar 10x via

sprongen in de telrij; en voortgaand inoefenen van de tafels 'door elkaar heen'.
Tegenover deze methodiek staat de reconstructie-didactiek die niet uitsluitend en direct op het kennen van de tafels aanstuurt, maar probeert dit doel te bereiken via steeds verdergaande verkorting van handig rekenen met als laatste stap het volledig inprenten van de tafelproducten door gericht inoefenen.
Memoriseren is zo bezien het resultaat van een gefaseerd onderwijsproces dat:
- start met de introductiefase van de begripsvorming, waarin de belangrijkste aspecten en eigenschappen van de vermenigvuldigoperatie aan bod komen die uitgebeeld kunnen worden met onder meer groepjes, stroken, sprongen op de getallenlijn en rechthoekpatronen;
- vervolgt met de reconstructiefase waarin de oriëntatiepunten 2x, 10x en 5x bij het memoriseren worden gebruikt, plus strategieën van 1x-meer, 1x-minder, verdubbelen en de omkeerregel (4 x 7 = 7 x 4), om zowel het handige rekenen als het memoriseren te bevorderen;
- voorlopig afsluit met de reproductiefase waarin alle tafels volledig worden ingeprent;
- en besluit met het consolideren van de tafelkennis en het uitbreiden van de toepassingen.

Toepassingen worden toegelicht met de volgende zes voorbeelden van delen.

1. Er worden 24 mensen met auto's vervoerd.
In iedere auto mogen 4 mensen. Hoeveel auto's zijn er nodig?

2. Van een touw van 24 meter worden stukken van 4 meter geknipt. Hoeveel van die stukken kunnen eruit geknipt worden?

3. Er worden 24 bananen eerlijk verdeeld over 4 groepen kinderen. Hoeveel bananen krijgt iedere groep?

4. Een wandelroute van 24 kilometer wordt in 4 gelijke etappes afgelegd. Hoe lang is ieder stuk?

5. Een rechthoekig patroon van 24 bomen heeft 4 bomen in iedere rij. Hoeveel rijen bevat de rechthoek?

6. Een rechthoekig terras heeft een oppervlakte van 24 $m^2$. De breedte is4 m. Hoe lang is het terras?

Opgave 1 en 2 hebben de structuur van een verhoudingsdeling, dus van delen als opdelen. Opgave 3 en 4 bevatten een verdelingsdeling, dat wil zeggen van delen als verdelen.
Dat deze klassieke tweedeling niet helemaal bevredigend is, blijkt uit de vijfde opgave. Op het eerste gezicht hebben we hier met een verhoudingsdeling van doen. De verdelingsdeling zou de volgende vorm hebben: 'Een rechthoekig patroon van 24 bomen heeft 4 rijen. Hoeveel bomen staan er in één rij?' Maar vanwege de symmetrie van het rechthoekpatroon is dit in feite hetzelfde probleem. Er is eigenlijk geen sprake van verdelen of opdelen maar van delen als omgekeerd vermenigvuldigen. In verband met de toepasbaarheid van de delingsoperatie is het van belang dat de aspecten van opdelen, verdelen en omgekeerd vermenigvuldigen een plaats in het onderwijs krijgen.
De grote invloed van de context op het rekenen blijkt als in de gestelde opgaven - uitgezonderd som 5 - het getal 24 wordt vervangen door 26. De antwoorden zijn afhankelijk van de genoemde delingsstructuur: 7; 6; 6½; en 6,5 - allemaal verschillend benoemde getallen.

Het hoofdstuk over de tafels wordt besloten met de beschrijving van een les van W. Uittenbogaard voor leerlingen van medio groep vijf die start met de volgende opgave. [30]

Op een ouderavond van de school komen 81 ouders.
Aan één tafel kunnen 6 ouders zitten.
Hoeveel tafels moeten er geplaatst worden?

$$\begin{array}{rl} 6\,/\,81\,\backslash & \\ \underline{60} & 10 \text{ tafels} \\ 21 & \\ \underline{18} & 3 \text{ tafels} \\ 3 & \\ \underline{3} & \underline{1} \text{ tafel} \\ & 14 \text{ tafels} \end{array}$$

Lang niet alle leerlingen blijken hun tafelkennis bij het oplossen van dit probleem in te zetten. De twee meest toegepaste oplos-

singsmethoden zijn die van het herhaalde optellen 6 + 6 + 6 ..., en van het verkorte rekenen via 10 x 6 = 60 om van daaruit verder te tellen met sprongen van 6 of opnieuw de tafels te gebruiken. In de nabespreking worden deze oplossingen besproken. De leerlingen stellen daarbij vast dat de 'tienmethode' het handigste is.
In het tweede deel van de les wordt een nieuw probleem gesteld.

> Hoeveel potten koffie moeten worden gezet?
> In een koffiepot zitten 7 kopjes, en ieder krijgt 1 kopje.

De stap-voor-stap-manier wordt nu nog maar door één leerling toegepast - eerder waren dat er zeven. En het werken met een hap van tien wordt nu door dertien leerlingen gedaan - eerder waren dat er zes. In deze sommen is de opening naar de kolomdeling zichtbaar die een jaar later op het programma staat.

Kennis, vaardigheden, begrip, inzicht en inventiviteit - al deze cognitieve bekwaamheden dienen in de visie van de Proeve van meet af aan in het rekenonderwijs betrokken te worden, zo blijkt uit deze samenvattende schets van de eerste drie hoofdstukken van Proeve (2) over het rekenen tot honderd.

## 6 Wijder verband

In veel landen van de westerse wereld werden in de jaren '80 de reken-wiskundeprogramma's vernieuwd. Tegenvallende opbrengsten van de *new math* methodes en de brede beschikbaarheid van rekenmachines waren belangrijke redenen om tot een herziening van de bestaande programma's over te gaan.
De richtingen waarin dit gebeurde verschilden nogal, maar op één punt stemden ze overeen: cijferen kreeg minder accent.
In de 'Standards for school mathematics' (NCTM, 1987) bijvoorbeeld - een soort nationaal programma voor de Verenigde Staten - wordt voorgesteld om de onderwijstijd van de cijferalgoritmen drastisch te beperken en meer aandacht aan hoofdrekenen en schattend rekenen te besteden.
Wat cijferen aangaat, hoeven de kinderen alleen getallen van drie cijfers te kunnen optellen en aftrekken. Vermenigvuldigen kan beperkt blijven tot getallenparen van één bij drie cijfers of twee bij twee cijfers. En staartdelen wordt slechts met getallen van hooguit drie cijfers gedeeld door één cijfergetal beoefend. Voor het overige

geldt: 'Calculators should be used for more complex computations'.[6)]

Dat hoofdrekenen inderdaad meer aandacht moest krijgen, laten de uitkomsten van een grootscheeps onderzoek betreffende hoofdrekenen onder 13-jarigen in de VS zien. [24]

Enkele voorbeelden van opgaven met een berekentijd van 12 seconden:

- 1250 - 400 wordt door 40 procent goed opgelost.
- 60 x 70 haalt een goedscore van 45 procent.
- 60 : 15 lukt 30 procent.
- 945 x 1000 wordt desgevraagd door 40 procent uit het hoofd berekend.
- 4 x 526 wordt cijferend door bijna 90 procent goed opgelost, maar als ze bij deze opgave schattend moeten kiezen uit 2000, 2100, 2400 en 3000 dan komt de goedscore op 33 procent uit.

De resultaten in Nederland liggen bij de eerste drie opgaven overigens zo'n 40 procent hoger, zo blijkt uit de periodieke rekenpeilingen vanaf 1987.

In Groot Brittannië ging men, zoals we zagen, nog aanzienlijk verder. De Britse minister van onderwijs stuurde in 1986 enkele honderden 'wiskundezendelingen' op pad om leerkrachten ervan te overtuigen dat de tafels van vermenigvuldiging en de staartdelingen tot het verleden behoorden. De kinderen moeten vooral met rekenmachines en microcomputers leren werken. Volgens de schoolinspectie moeten de leerlingen alleen nog eenvoudige sommen zonder rekenmachine kunnen maken.

Uit het voorgaande blijkt dat het voorstel van de Proeve een andere richting uitgaat. Kennis van de basisvaardigheden wordt juist met het oog op het hoofdrekenen, het schattende rekenen en het toegepaste rekenen uitermate belangrijk geacht. En de beperking van het cijferen louter in de grootte van de getallen zoeken, is discutabel omdat daarin niet zozeer de moeilijkheid van de standaardprocedures ligt: een optelling van twee getallen met drie cijfers bijvoorbeeld is in principe niet complexer dan een optelling met vier cijfers, al neemt de kans om fouten te maken dan uiteraard wel toe.

## 7 Besluit

In het eerdergenoemde OC&W rapport 'Besluit kerndoelen basisonderwijs' uit 1993 zijn er van de acht *algemene doelen* uit de Proeve slechts vijf geselecteerd, die in 1998 zelfs tot drie werden teruggebracht.

'De leerlingen leren:
- wiskundetaal gebruiken
- praktische en formele rekenproblemen oplossen
- aanpakken te onderbouwen en te beoordelen.'

Hiermee wordt het leren problemen op te lossen als hét algemene kerndoel van het rekenonderwijs aangemerkt: kinderen moeten leren dat bij het rekenen niet alleen routinematig toepassen maar vooral ook nadenken vaak nodig is om problemen uit het leven van alledag en formele opgaven te kunnen oplossen. Dit algemene kerndoel kan uiteraard alleen gerealiseerd worden met een positieve wiskundige attitude en via de concrete leerdoelen uit de rekendomeinen waartoe de basisvaardigheden, cijferen, verhoudingen en procenten, breuken en kommagetallen, en meten en meetkunde behoren.
De *concrete leerdoelen* van de Proeve zijn vrijwel in z'n geheel in het 'Besluit ...' van 1993 overgenomen; alleen is de indeling en formulering soms wat compacter. De herziening van dit document in 1998 liet deze rekendoelen onaangetast. Het gevolg van een en ander was dat methodeontwikkelaars, die al vanaf eind jaren '80 of zelfs al wat eerder, de vernieuwde en nieuwe programmaonderdelen in hun rekenboeken opnamen, de leerstof later niet meer hoefden bij te stellen.[7)]
In hoeverre zijn het didactische raamwerk van 'Tien voor de basisvorming rekenen-wiskunde' plus de eerste twee Proeve-publicaties, waarin die einddoelen in een didactische context zijn geplaatst, van invloed op de methodes geweest?
Het antwoord op deze vraag wordt in het volgende hoofdstuk gegeven waar de geschiedenis van de rekenmethodes weer wordt voortgezet.

## Noten

1) Wiskobas startte in 1968 onder de leiding van E. Wijdeveld en F. Goffree als een project van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Dit project had als doel de modernisering van het rekenonderwijs in gang te zetten via het onderwijs aan de pedagogische academies, waarbij zowel docenten rekendidactiek als pedagogiek betrokken werden.
In eerste instantie kwam van de innovatie weinig terecht: de voorgenomen taak was te zwaar voor het 'vrijwilligerswerk' waarmee het uitgevoerd moest worden. Daar kwam nog bij dat de hechte verbinding tussen de pedagogische academie en het bestaande rekenonderwijs op de basisschool weinig ruimte liet om te experimenteren. Dus resteerde slechts het klemmende advies aan de basisscholen om voorshands geen nieuwe *new math* methode aan te schaffen – een advies dat door de onderwijsinspectie nadrukkelijk werd ondersteund omdat anders het gangbare rekenleerplan op diverse wijzen en ongecoördineerd herzien zou worden.
De oproep bleek weerklank te vinden: de reken-wiskundeboeken die omstreeks 1970 op de markt kwamen, vonden vrijwel geen aftrek.
En ook de niet aflatende oproep van de Wiskobasgroep om het project een officiële status te geven, vond gehoor.
Vanaf medio 1971 kon het Wiskobasproject binnen het zojuist opgerichte Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskundeonderwijs (IOWO) gerealiseerd worden met E. Wijdeveld als algemeen directeur en met H. Freudenthal als hoogleraar-directeur. Zodoende kreeg Wiskobas de drieledige betekenis van beweging, project en afdeling van een instituut.
Wiskobas ontwikkelde en beproefde de nieuwe onderwijspakketten vanaf 1971 op een zogenoemde ontwerpschool, de Willem Dreesschool te Arnhem (directeur F. Frenay en rekencoördinator A. Dekker).
In 1976 werd een schoolwerkplan voor rekenen gepubliceerd dat als bron voor methodeontwerpers kon dienen (De Jong, 1975).

De inhoud van dit plan met de bijbehorende pakketten en materialen waren voornamelijk ontworpen door J. van den Brink, J. van Bruggen, J. de Gooijer-Quint, H. ter Heege en L. Streefland.
Een deel van de onderwijskaternen en de achterliggende ideeën verscheen in het Wiskobasbulletin dat in de periode 1971-1981 onder redactie van R. de Jong door het IOWO werd uitgegeven. Onderdelen ervan zijn vooral in het tweede deel van de Proeve over basisvaardigheden en cijferen, met de bijbehorende literatuurverwijzingen, terug te vinden. Zie bijvoorbeeld de volgende studies van deze ontwikkelgroep: Van den Brink (1989), Van Bruggen (1975), De Gooijer-Quint (1979), Ter Heege (1985) en Streefland (1988).

2) Inzicht verwerven in het positiesysteem waarop de decimale schrijfwijze van de getallen berust, is een basale doelstelling in het rekenonderwijs van alle tijden. Tellen, handig rekenen, schattend rekenen en cijferen zijn alle op dit inzicht geënt. Met name bij het cijferen krijgt het begrip plaatswaarde een cruciale rol. Uit de geschetste historie van het traditionele rekenonderwijs bleek dat de positiewaarde van enen, tienen en honderden soms met structuurmateriaal, geld of decimale maten aanschouwelijk werd gemaakt.
Schoonbrood ontwierp omstreeks 1900 de zogenoemde rekenlessenaar – een klassikaal leermiddel bestaande uit eenheden, tientallen en honderdtallen in de vorm van kuben, balkjes die door groeven in 10 kuben zijn verdeeld', en vierkante plakken van 100 kuben groot.
Op deze lessenaar worden getallen tot 1000 concreet voorgesteld en zijn de standaardprocedures van optellen en aftrekken inzichtelijk uit te beelden.
In de *new math* methodes die vanaf medio jaren '60 internationaal opgang maakten, werd bij het leren van de cijferprocedures veelvuldig van dergelijk structuurmateriaal gebruik gemaakt.
Op zich niet zo opmerkelijk, maar wel bijzonder was dat deze methodes vrijwel geen aandacht aan flexibel (hoofd)rekenen besteedden.

> Sally heeft een boek van 223 bladzijden.
> Ze heeft 157 pagina's gelezen.

Hoeveel bladzijden moet ze nog lezen?

Een dergelijk probleem werd met de genoemde rekenblokken als volgt opgelost. Eerst wordt 223 met 2 plakken, 2 staven en 3 lossen uitgelegd. Daarvan moeten 157, oftewel 1 plak, 5 staven en 7 lossen worden afgehaald. Dat gaat zomaar niet. Dus moet er eerst ingewisseld worden: om te beginnen 1 staaf voor 10 lossen. Van de dan beschikbare 13 lossen worden er 7 weggehaald, en blijven 5 lossen over. Vervolgens wordt 1 plak ingeruild voor 10 staven en herhaalt de procedure zich bij de tienen. Later vindt een en ander louter met positiecijfers plaats.

Omstreeks 1980 bleek uit grootscheepse internationale onderzoek in het Verenigd Koninkrijk en de Verenigde Staten - twee *new math* landen - dat twee van de drie elfjarigen dergelijke problemen niet cijferend oplossen, mede omdat ze daarin geen aftrekking herkennen. Wat ze wel doen, ligt in een dergelijke context voor de hand, namelijk de afstand van 157 tot 223 via aanvullend optellen handig proberen te overbruggen. En zo komen ze op het voor de *new math* betrekkelijk onontgonnen terrein van het flexibele rekenen. Conclusie: de *new math* methodes besteedden veel aandacht aan het inzichtelijke leren van het cijferen, maar schoten bij het inzicht en de toepasbaarheid van de basisoperaties tekort.

3) In 'Tien voor de basisvorming rekenen-wiskunde' werd ook aandacht gevraagd voor de opleiding, de nascholing en de begeleiding.

De stelling 'Om tot een verantwoorde opleiding voor het vak rekenen- wiskunde en didactiek' op de pabo te komen die past bij de hier geschetste opvattingen over het reken-wiskundeonderwijs, dient het aantal lesuren van de huidige minimumtabel (160 uur voor de hele opleiding) dan ook op zijn minst verdrievoudigd te worden.'

Ruim 93 procent van de 215 respondenten was het grotendeels tot volledig met deze stelling eens. Toen de enquete werd gehouden waren al twee van de drie delen van het gerenommeerde 'Wiskunde & Didactiek voor aanstaande leraren basisonderwijs' beschikbaar. (Goffree, 1982, 1983 en 1985).

Wat de nascholing betreft, werd voor de zogenoemde 6 x 2 cursussen gepleit, waarmee in de jaren '70 ruime ervaring was opgedaan.
Als een van de belangrijkste conclusies kwam daaruit naar voren dat deze korte cursussen van zes maal twee uur het meeste effect sorteerden. De Moor (2010) stelt in een terugblik vast dat van deze twee voorstellen vrijwel niets is terecht gekomen. Het aantal contacturen op de Pabo voor rekendidactiek is nog steeds bedroevend laag, en uit internationaal TIMMS-onderzoek blijkt dat Nederland op het punt van de nascholing het laagste van alle landen scoort!

4) Naast de vele honderden deskundigen die aan het onderzoek van ' Tien voor de basisvorming rekenen-wiskunde' deelnamen, hebben J. Bokhove en J. Janssen (Cito), K. Gravemeijer en L. Streefland (OW & OC), H. van Die en F. Goffree (SLO), en H. Jansen en W. Oonk (VALO) een belangrijke bijdrage aan de opzet en inhoud van Proeve 1 geleverd. (Treffers, De Moor & Feijs, 1989).

5) Zie voor een volledig beeld van de geschiedenis van het meetkundeonderwijs aan kinderen van 4 tot 14 jaar in Nederland gedurende de 19de en de 20ste eeuw het standaardwerk van E. de Moor 'Van Vormleer naar realistische meetkunde.' (1999).

6) Reys et.al. (1998, p.176) schatten voor de V.S. de tijdsverdeling die in 1975 aan rekenen ('computation') werd besteed als volgt:
80% van de tijd voor cijferen, 15% voor hoofdrekenen en 5% voor schattend rekenen.
Omstreeks 2000 is die onderlinge verhouding gewijzigd in respectievelijk 50%, 25% en 25%!

7) Hoe de lijn van de Proeve (1) naar de eindtermen en vervolgens de kerndoelen precies is gelopen, kan men lezen in een informatief artikel van H. van Die (2010). Vooral zijn verslag over hoe het domein van de meetkunde, ondanks het negatieve advies van onder meer de ARBO, toch in de kerndoelen gehandhaafd bleef, is bijzonder onthullend.
Eerder had De Moor (1999, p. 456-458) al over dit bijna-ongeluk geschreven. Zijn 'historische les' van de curieuze gang van zaken rond de meetkunde luidt als volgt: 'Het heeft dus weinig gescheeld

of meetkunde was wederom - net als precies (!) honderd jaar geleden - in 1989 door maatregelen van hogerhand van het basisschoolprogramma geschrapt. Indien we niet de beschikking hadden gehad over een aantal gegevens uit het informele circuit zouden de hiervoor beschreven feiten van de afgelopen tien jaar niet boven water gebracht zijn.'

# 6 De stille rekenrevolutie 1990-2010

## Inleiding

Vanaf 1990 vindt een spectaculaire verschuiving op de methodemarkt plaats. In tien jaar groeit het aandeel van de realistische methodes van twintig naar honderd procent.[1]
In het tijdvak 1990-2000 zijn tien methodes uit verschillende rekenrichtingen in gebruik. Vijf ervan, alle realistisch, verschijnen na 2000 in een euro-versie. Slechts twee methodes bestrijken de totale periode van 1990 tot 2010, te weten 'Wereld in Getallen' en 'Pluspunt'. Samen bedienen ze vanaf eind jaren '90 driekwart van de scholen.
Dit gegeven is de eerste reden om hier speciale aandacht aan deze twee methodes te besteden. De tweede reden is dat zij in de waaier van realistische methodes, zowel qua onderwijsvorm als inhoud, de uiterste posities bezetten. Om een goed beeld van het totale methodebestand uit de periode 2000-2010 te kunnen geven, voegen we aan het genoemde tweetal nog de analyse van een derde methode toe: 'Rekenrijk'. Het hoofdstuk wordt besloten met een overzicht van de onderzoekresultaten die de methodes behalen i.c. de invloed van de methode op de leerprestaties.
'Welke van de traditionele en moderne methodes komt als beste uit de bus?

## 1 Didactische organisatie en differentiatie

In de loop van de jaren '90 werd de kritiek van progressieve pedagogen op het klassikale onderwijs onder het vaandel van 'onderwijs op maat' in brede onderwijskring gedeeld.
Zo meldde het inspectierapport 'Onderwijs op maat' (1997):

> 'Het vermogen van scholen om instructie en verwerking af te stemmen op de verschillen tussen de leerlingen (differentia-

> tiecapaciteit), baart de inspectie grote zorgen. Op scholen met een 'matig of onvoldoende' differentiatiemodel is meestal sprake van een onderwijsmodel waarbinnen de leerlingen allen in meer of mindere mate dezelfde instructie ontvangen en op dezelfde wijze de leerstof verwerken (leerstofjaarklassensysteem).'

In hetzelfde jaar verscheen het TIMMS-rapport over onder meer een vergelijkend onderzoek van de rekenprestaties in 25 landen.
Hoe is het mogelijk dat juist de landen met een overwegend klassikaal systeem zoals Zuid-Korea, Japan en Nederland zo hoog scoorden, en Engeland bijvoorbeeld met zijn geïndividualiseerde systeem zo laag?
En hoe kwam het dat in een land met zo'n vermeend lage differentiatiecapaciteit als Nederland het niveau van de 25 procent zwakste leerlingen de op één na hoogste van de wereld was?
De problematiek van de differentiatie kan voorbeeldig inzichtelijk worden gemaakt aan de hand van de genoemde 'Zygmunt-som' over 7 x 24.
De variatie in de oplossingsmethoden van het probleem uit het betreffende krantenknipsel biedt goede aangrijpingspunten om de relaties tussen de verschillende berekeningen te laten zien en vooral ook om de handigste aanpakken klassikaal aan de orde te stellen.
Het leerstofjaarklassensysteem wordt via deze 'convergente' differentiatie niet doorbroken, de interactieve instructie blijft op de hele groep gericht. Differentiatie krijgt op deze manier echter een andere lading dan de pedagogen, de inspecteurs en beleidsmakers er destijds aan toekenden. Zij verbonden differentiatie voornamelijk met zelfstandig werken, waarbij iedere leerling of ieder groepje zijn eigen leertraject doorloopt.
Maar hoe moet dat in deze aanpak dan met de Zygmunt-som gebeuren? Hoe te handelen als de leerling niet zelf tot een verkorte berekening van 7 x 24 komt? Wordt de leraar dan gedwongen het flexibele en globaal schattende rekenen steeds opnieuw uit te leggen? De relatie tussen kolomsgewijs rekenen, cijferen, hoofdrekenen en schatten kan dan echter niet voldoende uit de verf komen, en daarmee doet men vooral de zwakke leerlingen ernstig tekort.

Van rekendidactische zijde werd destijds in verschillende publicaties op de nadelen van deze 'divergente' differentiatie voor de onderwijskwaliteit gewezen.

Rekenmethodes als 'Pluspunt', Rekenrijk' en 'Alles Telt', die na 1990 op de markt kwamen, zijn *semi-klassikaal* en kiezen voor een samenstel van beide differentiatievormen. Drie van de vijf lessen zijn voor zelfstandig werken gereserveerd en in de twee zogenoemde leerkrachtgebonden lessen wordt een groot deel van de opgaven door alle kinderen gemaakt en klassikaal besproken. De leerstof wordt opgedeeld in blokken van drie tot vijf weken. Na de toets volgt in de laatste week differentiatie in herhalings- en verrijkingsstof plaats, waarbij 'herhaling' ook diagnostisering en remediëring kan betekenen - het zogenoemde BHV-model van differentiëren. Het gewraakte leerstofjaarklassensysteem blijft zo weliswaar intact, maar het zelfstandige werken krijgt betrekkelijk veel tijd toebedeeld.

In *interactief-klassikale methodes* als 'Wereld in Getallen', 'Rekenen en Wiskunde' en zijn opvolger 'Wis en Reken' wordt echter in minstens vier van de vijf lessen een gemeenschappelijke opstart gemaakt. Ook in deze methodes wordt binnen de leerstofblokken het schema van basisstof - herhalingsstof - verrijkingsstof gevolgd. De ruimte voor interactief-klassikaal onderwijs is in deze methodes aanzienlijk groter.
In de periode 2000-2010 werken maar liefst twee van de drie scholen met een semi-klassikale methode.
In het volgende bespreken we de drie grootste methodes uit het tijdvak 2000-2010 samen met een marktaandeel van 90 procent: 'Pluspunt' (45%), 'Wereld in Getallen' (25%) en 'Rekenrijk' (15%).

## 2 Wereld in Getallen

In deze paragraaf typeren we 'Wereld in Getallen' (WiG) aan de hand van drie opgaven voor achtereenvolgens de onderbouw, de middenbouw en de bovenbouw, plus een vraagstuk uit een thema.[2] Daarbij zullen de traditionele methodes 'Naar Zelfstandig Rekenen' en 'Nieuw Rekenen' als contrasterende achtergrond dienen.

*1.Onderbouw/Middenbouw*

De Hans-som

Hans maakt een tocht van 75 km. Na 48 km pauzeert hij.

a. Hoeveel km moet hij daarna nog afleggen?

b. Hoe maakt hij die tocht: met de auto, per fiets of lopend?

c. Hoe lang heeft hij ongeveer over de hele tocht gedaan?

In de *procedurele* methode 'Naar Zelfstandig Rekenen' (NZR) treft men een type Hans-som niet aan – zelfs de eerste vraag ervan niet. Deze methode beperkt zich voornamelijk tot kale aftreksommen die aanvankelijk volgens een voorgeschreven procedure van stapsgewijs terugrekenen opgelost dienen te worden. Bij 75 - 48 is het 'horizontale' rekenrecept: 75 - 48 = 75 - 40 - 8 = 35 - 8 = 27. En als de som in 'verticale' vorm wordt aangeboden, dient er gecijferd te worden.
Tegenover de honderden kale sommen uit deeltje 5 voor de eerste helft van groep 5, staan slechts tien tekstopgaven. De meeste opgaven zijn van het type 'Aan een boom hangen 87 appels; er vallen 25 af: nu hangen er nog ... appels aan.' De Hans-som a) lokt echter aanvullend optellen uit. Aangezien deze rekenmanier niet bij de interpretatie van aftrekken als 'ervan afhalen' past, wordt een dergelijk vraagstuk niet als toepassing aangeboden.

De *functionele* methode 'Nieuw Rekenen' (NR) bevat wel tekstopgaven die naar aanvullend optellen leiden. Sterker: het type Hans-som a) wordt in deze methode tevens als vraagloos vraagstuk aangeboden. Dit houdt in dat de kinderen zelf de passende (eerste) vraag stellen en beantwoorden. Ze mogen de som op diverse manieren uitrekenen, zoals via 48 + 2 + 10 + 10 + 5, of 48 + 2 + 25, of 48 + 30 – 3. NR gebruikt een dergelijke opgave echter niet om de kinderen te laten (in)zien dat een kale aftreksom als 75 - 48 ook handig via aanvullend optellen uitgerekend kan worden. Vraag b) van de Hans-som, waarbij de kinderen zelf gegevens moeten inbrengen, zal men evenmin in deze functionele methode aantreffen.

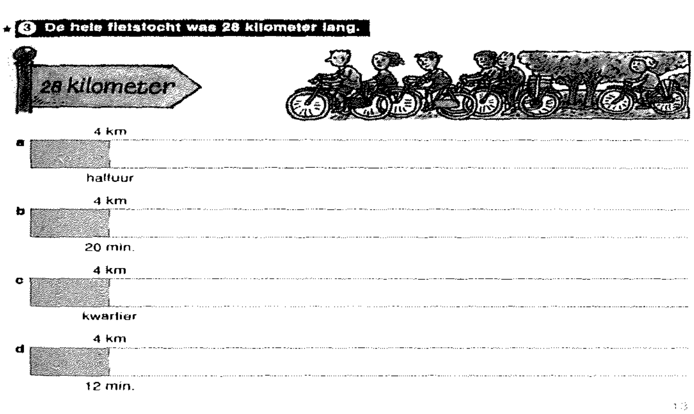
In de *realistische* methode WiG zou de complete Hans-som wel goed passen – bijvoorbeeld als toetsvraag bij het eerste thema 'De fietstocht' in deeltje 5a. In dit blok komt aftrekken tweezijdig als 'afhalen' en 'bijtellen' aan bod.

In het ene geval manifesteert het zich als het afhalen van het einde van de routelijn en in het andere geval van het begin.
Hetzelfde doet zich voor bij het rekenen met kale getallen: je kunt 75 - 48 = .. uitrekenen door 48 van het einde van de getallenlijn af te halen, dus volgens de gangbare methode van het terugrekenen, maar als je die 48 van het begin wegneemt, is de uitkomst via aanvullend optellen te vinden - een strategie die ook bij verschil bepalen toepasbaar is.
De Hans-som kan als concrete basis dienen om de gelijkwaardigheid van 48 + .. = 75 en 75 - 48 = .. te laten ontdekken.
Kale aftreksommen die handig met aanvullend optellen te berekenen zijn, heten in WiG 'bijna-verdwijnsommen' en staan in rijtjes van de rubriek 'Handig rekenen'. [10, 5a, p.16]

**1 Handig rekenen.**

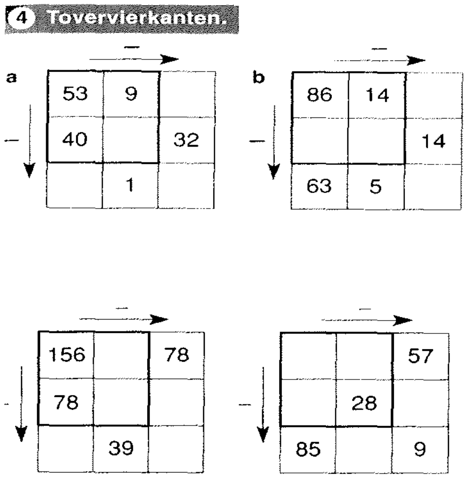
| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 + 2 + 7 + 8 = | 68 – 10 = | 20 – 17 = | 91 – 88 = |
| 26 + 8 + 4 + 2 = | 68 – 9 = | 50 – 48 = | 60 – 58 = |
| 17 + 9 + 11 + 3 = | 68 – 8 = | 70 – 65 = | 70 – 58 = |
| 12 + 24 + 8 + 6 = | 53 – 10 = | 41 – 39 = | 72 – 69 = |
| 15 + 5 + 15 + 5 = | 53 – 9 = | 42 – 39 = | 82 – 69 = |

In het thema 'fietstocht' wordt eveneens aandacht besteed aan maatkennis van de fietssnelheid.




De derde vraag van de Hans-som voert de leerlingen naar schattend rekenen en verhoudingen: 'Als je over 4 km 12 min doet, hoe lang doe je dan over 28 km?'. [10, 5a, p.13]

In 'De fietstocht' staan ook verschillende opgaven die speciaal op probleemoplossen zijn gericht. [10, 5a, p.31, en 5b, p. 37]
Een voorbeeld:




Vanaf groep 4 heeft WiG in vrijwel iedere taak een rubriek 'Vlug en goed' waarin de elementaire vaardigheden worden geoefend – om te beginnen het rekenen tot honderd en de tafels plus uitbreidingen ervan met 'nullen'.
In totaal bevat dit onderdeel 5000 sommen, die over ieder leerjaar ongeveer gelijk zijn verdeeld.

*2. Middenbouw*

De Lieke-som

Lieke wil 4 broden kopen van € 1,98.

Ze heeft een tientje. Is dat genoeg?

In de *procedurele* methode NZR zal men een dergelijke opgave niet aantreffen; aan schatten wordt daarin geen aandacht besteed.
Dit in tegenstelling tot de *functionele* methode NR die juist wel veel accent op handig rekenen en schatten plaatst.
Ook de *realistische* methode WiG bevat in ieder leerjaar talrijke opgaven van het type: 'Kun je dit betalen?' en 'Heb je wel voldoende geld?'

1)
$$\begin{array}{r} 198 \\ 198 \\ 198 \\ \underline{198}\,+ \\ 792 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 198 \\ \underline{4\,x} \\ 32 \\ 360 \\ \underline{400} \\ 792 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 33} \\ 198 \\ \underline{4\,x} \\ 792 \end{array}$$

4) 4 x 198

4 x 200 - 4 x 2 = 792

5) 4 x 198 is ongeveer 4 x 200 = 800

Deze variatie aan bewerkingen biedt goede aangrijpingspunten om de relaties tussen de verschillende berekeningen te laten zien en vooral ook om de handigste aanpakken klassikaal aan de orde te stellen.

Algemeen geldt dat leerlingen aan het einde van groep 8 in principe alle genoemde strategieën van flexibel hoofdrekenen, schatten, kolomrekenen en cijferen dienen te beheersen en in praktische situaties moeten kunnen toepassen.

De Lieke-som zou globaal rekenend opgelost dienen te worden en niet (hoofd)cijferend. Maar in een andere opgave zou het merendeel van de leerlingen, zo nodig, ook 4 x 198 cijferend moeten kunnen berekenen, bijvoorbeeld als deelproduct van een grote vermenigvuldiging.

Alle genoemde aspecten van deze opgave zijn verspreid in WiG terug te vinden. De eerder genoemde rubriek 'Handig rekenen' staat vanaf groep 5 in de taken. De interactief-klassikale onderwijssetting waarin deze methode is geplaatst, maakt het mogelijk

om de verschillende oplossingen met elkaar in verband te brengen.
Eén onderwerp behoeft echter een nadere toelichting en dat is het cijferende vermenigvuldigen.
Van de 1000 cijfersommen uit WiG over vermenigvuldigen, bestaat ruim de helft uit elementaire 'een-bij-drie' keersommen die voornamelijk in de tweede helft van groep 6 worden opgegeven. WiG stuurt daarbij via de uitgebreide oplossing van 2) aan op het verkorte eindalgoritme van 3). De problematiek van het inwisselen is dan al eerder bij het cijferende optellen met euromunten en eurobiljetten van tien en honderd inzichtelijk gemaakt, en op dit inzicht wordt bij het vermenigvuldigen voortgebouwd. Het splitsen van het vermenigvuldigtal is eerder in groep 5 uitgebreid aan bod gekomen. Voor eind groep 6 geldt als minimumdoel:

> 'Vermenigvuldigingen van de typen 4 x 67, 4 x 267 en 14 x 67 op de meest verkorte manier kunnen uitrekenen'.

De kinderen hebben dan in het exploratiespoor al kennis gemaakt met opgaven als 22 x 67, 33 x 67, 44 x 67 en zo meer. De bedoeling daarvan is dat de leerlingen ervaren en vervolgens verklaren dat 20 x 67 tien keer zoveel is als 2 x 67. Dat vermenigvuldigen met 10 een nul in het product oplevert, is vanaf groep 4 al herhaaldelijk aan de orde geweest en met de verwisseleigenschap verklaard: 10 x 67 = 67 x 10 = 670.
Begin groep 7 vindt uitbreiding plaats naar een opgave als 23 x 35 = ... aan de hand van het probleem:

> Een doos met busjes campinggas kost 35 euro. Hoeveel kost de hele stapel van 23 dozen.

In de Handleiding 7a staan daarbij de volgende suggesties:

> 'Als de kinderen dit hebben uitgerekend, houden we een nabespreking over de manier waarop ze het hebben aangepakt.
> We schrijven de vermenigvuldigopgave op het bord.

```
  35
  23 x
  ---
     3 x
 __20 x
```

> Laat de kinderen aangeven hoe ze aan de twee deelproducten komen.
> 3 x 35 mag geen problemen meer opleveren; dat wil zeggen dat ze (zonder hulp van een kladblaadje) 3 x 35 als volgt uitrekenen: 3 x 5 = 15; 5 (eenheden) opschrijven, één (tiental) onthouden; 3 x 3 (tientallen) is 9 (tientallen), plus één (tiental) is 10 (tientallen). 105 wordt dus in één keer op de goede plaats gezet. We streven ernaar de kinderen tijdens het werken aan de eerste twee blokken van dit deel zo ver te krijgen dat ze ook 20 x 35 in één keer uitrekenen en opschrijven.'
> [10, 7a, p.65]

In deel 7b wordt de leergang afgerond met enkele tientallen opgaven waarvan de factoren uit meer dan twee cijfers bestaan. Al met al hebben we hier met een klassiek inzichtelijke leergang voor cijferend vermenigvuldigen van doen.
Eerst worden de elementaire keersommen met een vermenigvuldiger van één cijfer ingeoefend voordat de samengestelde keersommen verschijnen - precies de aanpak die in Proeve (2) wordt aanbevolen.
In totaal bevat WiG 3000 cijfersommen: 1250 voor optellen en aftrekken, 1000 voor vermenigvuldigen en 750 voor delen. Deze aantallen komen overeen met die van de traditionele methodes, alleen zijn hier de getallen waarmee geopereerd wordt kleiner.

Tot slot: ook het flexibele, niet-cijferende vermenigvuldigen krijgt, zoals eerder vermeld, in WiG veel aandacht.
Vanaf groep 5 worden in ieder leerjaar meer dan 1000 sommen over handig rekenen en schatten gegeven.
De meeste rekenopdrachten zijn per leerjaar in acht thematische rekenblokken bij elkaar geplaatst.
In 'Het Openluchtmuseum' uit deeltje 7b bijvoorbeeld komt vermenigvuldigen in verschillende contexten aan bod, zoals bij het omrekenen van allerlei oude maten, het berekenen van toegangsprijzen en het schattend bepalen van oppervlakte en inhoud via tekeningen op schaal.
En dat alles gebeurt, zoals gezegd, in een interactief-klassikale onderwijssetting waarbinnen veel ruimte is voor oefenen en voor een productieve inbreng van de leerlingen.

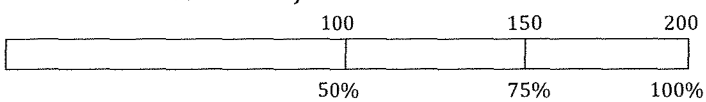
*3 Bovenbouw*

Een procenten-schatsom

Hoeveel procent is het ongeveer?

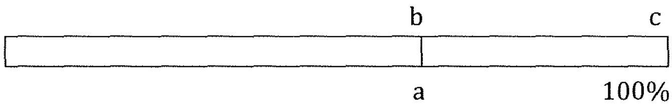
- 198 van de 802 auto's gingen op het verkeersplein naar het noorden. 12½% - 25% - 20%
- 19 van de 198 auto's werden afgekeurd. 20% - 5% - 10%
- 595 van de 800 politiezaken zijn opgelost. 60% - 50% - 75%

In Handleiding 7b van WiG staat bij de opgavenserie over procenten:

> 'Als introductie zetten we de volgende twee vraagstukjes op het bord en laten de kinderen deze uitrekenen. Er kan weer een procentenstrook bij worden gebruikt of een verhoudingstabel. Maar het is ook 'gewoon' hoofdrekenend op te lossen.
> • 42 van de 205 bekeuringen worden direct betaald.
> Hoeveel procent is dat ongeveer?
> Je kunt kiezen uit: 10%, 20% en 30%.
> Hoe hebben de kinderen gerekend? Hebben ze 205 gezien als ongeveer 200 en 42 als ongeveer 40? Daarna zijn er twee mogelijkheden: via 10% (10% → 1/10 deel is ongeveer 20; enzovoort) 40 is het 1/5 deel van 200; 1/5 deel is 20%.
> • 153 van de 206 mensen betalen hun belasting op tijd.
> Hoeveel procent is dat ongeveer?
> Hoe hebben de kinderen gerekend? Hebben ze hierbij afgerond op 150 en 200? De procentenstrook brengt mooi in beeld dat het 75% moet zijn.
>
> 
> 
>
> Hierna gaan de kinderen de opgaven uit het rekenboek zoveel mogelijk zelfstandig maken. Een aantal kinderen zal nog wel wat begeleiding nodig hebben. Bijvoorbeeld bij het afronden van de getallen en het noteren van de juiste gegevens in de strook.' [p.151]

Kenmerkend voor deze opgave is de verbinding die erin gelegd wordt tussen breuken, verhoudingen, procenten en schatten. Ook de verwijzing naar een bemiddelend model als de strook (die met

het cirkeldiagram ook bij breuken wordt ingezet) is typerend voor dit vraagstuk.
Aan zo'n strook zijn de elementaire opgaventypen over procenten af te lezen.




Op de plaatsen van a, b en c staan er twee met gegevens en één met een vraagteken voor de te berekenen getalwaarde. (Let wel: a en b kunnen ook rechts van de 100% staan!)
Alle drie typen opgaven worden onder meer behandeld bij de renteberekening van kapitaal, inkoop-verkoop, winst-verlies, maar ook uitsluitend op het bovenstaande model van de procentenstrook.
Drie voorbeelden van deze typen over korting, in volgorde van moeilijkheid binnen de leergang:

1) Een televisietoestel kostte eerst € 900. Je krijgt 15% korting. Hoeveel moet je er nu voor betalen?
2) Een televisietoestel kostte eerst € 900. Nu kan men hem kopen voor € 765. Hoeveel procent korting heb je gekregen?
3) Een televisietoestel kost na een korting van 15% nu € 765. Hoeveel kostte zo'n televisie eerst?

Bij gecompliceerde berekeningen mag de rekenmachine worden ingezet. Ook dan wordt weer vaak gevraagd om eerst een schatting te maken.

In zowel de *procedurele* methode NZR als de *functionele* NR wordt niet zo'n hechte verbinding tussen breuken, verhoudingen en procenten gelegd. Zonder passende opgaven en een duidelijke didactische handleiding voor de dagelijkse les, die in deze methodes grotendeels ontbreekt, valt dat ook moeilijk te realiseren.

### *4. Thematisch verband*

Veel rekenopgaven van WiG zijn in een thematische context geplaatst.
Het eerdergenoemde thema 'De fietstocht' van begin groep 5 bevat bijvoorbeeld een probleem waarin het optellen, aftrekken,

vermenigvuldigen en probleemoplossen in een natuurlijk verband zijn geplaatst.
De verkorte versie ervan (zonder prijslijst erbij) ziet er als volgt uit.

In de vergulde pannenkoek.

> Tijdens hun fietstocht bezoeken vader, moeder, Rosa en Jaap een pannenkoekenhuis.
> Op de menukaart staan de prijzen van 5 drankjes, 3 soorten pannenkoeken en 3 ijsjes.
> Een menu bestaat uit een drankje, een pannenkoek en een ijsje.
> Hoeveel verschillende menu's kun je maken?
> Hoeveel kosten de menu's die vader, moeder, Rosa en Jaap kozen?
> Moeder betaalt met een briefje van 50 euro. Hoeveel krijgt ze terug?

Om het complexe combinatie-probleem op te lossen, kan de leraar het beste eerst systematisch laten uitzoeken hoeveel verschillende drank-pannenkoek-combinaties (5x3) mogelijk zijn. Als daarvan de systematiek is ontdekt, kan vervolgens de combinatie met het aanbod van de ijsjes worden gemaakt.
Bij het afrekenen van de vier gegeven keuzes met 50 euro, kunnen zowel de methodes van het afhalen als de 'winkelmethode' van het aanvullende optellen worden ingezet. Op deze wijze worden probleemoplossen en oefenen met elkaar verbonden.

## *5 Handleiding*

Om de handleiding van WiG te kenschetsen nemen we de leergang van procenten als referentiekader.
In het begin van de handleiding staat daarvan een algemeen overzicht. Vervolgens wordt in ieder blok een meer gespecificeerde beschrijving gegeven van de taken over procenten. Bij elkaar ontstaat zo een didactisch tweeluik ten dienste van het onderwijs i.c. de leraar.
Van de concrete toelichtingen bij de lessen zijn in het voorgaande enkele voorbeelden gegeven. Daaruit is af te leiden dat de aanwij-

zingen voor de leraar *instructief* zijn, in de zin dat ze steun bij het onderwijzen bieden.
Om een impressie van een algemeen overzichtspaneel te geven, volgt nu de algemene beschrijving van deel 7b:

> 'De leergang 'Procenten' wordt in dit deel verder uitgebouwd. De strook gaat steeds meer als denkmodel functioneren. Het rekenwerk gebeurt, bij wat complexere situaties, los van de strook, bijvoorbeeld met behulp van een verhoudingstabel.
> Aan de orde komen de volgende zaken:
> • Korting. De nieuwe prijs berekenen. Bijvoorbeeld: een spijkerbroek kostte € 60; je krijgt 20% korting.
> • Het kortingspercentage berekenen. Bijvoorbeeld: een televisie kostte eerst € 750; de nieuwe prijs is € 600.
> • De relatie tussen breuken en procenten. Bij het procentrekenen wordt veel gebruik gemaakt van breuken. Wanneer 25% korting moet worden berekend wordt het ¼ deel genomen. De meest gebruikte breuken bij het procentrekenen worden met de kinderen verkend en regelmatig gebruikt.
> • Minder 'mooie' procenten. Via 10% en 5% wordt er naar 1% toegewerkt. Hierna kunnen alle percentages worden berekend. De strook gaat nu duidelijk als denkmodel dienen. Het rekenwerk gebeurt los van de strook.
> • Situaties waarbij sprake is van geheel plus deel. Bijvoorbeeld: tijdelijk 20% meer, prijsverhoging, rente. De strook moet dan worden verlengd. Bijvoorbeeld bij: 'Pak chips van 400 gram; tijdelijk gratis 20% extra'.
> • De relatie tussen verhoudingen en procenten. In krantenberichten worden breuken, procenten en verhoudingen vaak naast elkaar in een artikel gebruikt. Bijvoorbeeld: in een uitslag van een enquête kunnen we lezen, ¼ deel van de ondervraagden vond ..; 1 op de 3 ..; 20% ..
> Het meest voor de hand liggende rekenmodel bij verhoudingen is de verhoudingstabel. Bijvoorbeeld bij '2 op 5, hoeveel procent is dat?'

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 4 | 40 |
| 5 | 10 | 100 |

Hier wordt een beroep gedaan op het begrip dat de kinderen moeten hebben van procenten.' [p.18]

Deze algemene beschrijving sluit naadloos aan op de specifieke beschrijving van de eerder geciteerde procentenschatsom.

*6 Samenvatting WiG*

Uit deze exemplarische voorbeelden blijkt hoezeer de uitgangspunten van de *procedurele* NZR en de *realistische* WiG verschillen. De procedurele methode is directief en reproductief, en de realistische methode interactief en productief. De eerstgenoemde aanpak is regelgeleid en eenzijdig gericht op het leren van technische rekenroutines, de tweede besteedt daarnaast ook veel aandacht aan inzicht, toepasbaarheid, flexibel (hoofd)rekenen, schatten en probleemoplossen. De *functionele* methode NR neemt een tussenpositie in. De handleiding van WiG beslaat per leerjaar, los van de daarin opgenomen taken uit het leerlingenboek, ongeveer 500 pagina's tegenover 100 bladzijden van NR en 10 voor het antwoordenboekje van NZR – een wereld van verschil in getallen.

## 3 Pluspunt

De realistische methode 'Pluspunt' zal op haar beurt kort gekarakteriseerd worden tegen de achtergrond van 'Wereld in Getallen'. Daarbij gebruiken we weer de vier zojuist besproken opgaven als bakens en kijken, om niet in herhaling te vervallen, voornamelijk naar de punten waarop PP en WiG verschillen. Om te beginnen staan in PP meer tekstopgaven van onder meer het type Hans-som a) en wat minder kale sommen voor het oefenen van de basale rekenvaardigheden. Naast de tweezijdige benadering van het aftrekken via afhalen en aanvullend optellen, leren de kinderen van PP in groep 5 ook het splitsende rekenen met 'tekorten' (negatieve getallen) dat vanaf groep 6 overgaat in kolomsgewijs aftrekken.

*1 Cijferen*

Bij de opgave 75 – 48 zien splitsen en kolomrekenen er zo uit:

75 - 48 = 30 - 3 = 27.

```
  7 5
  4 8 -
| 30 | -3 |
   27
```

Met grotere getallen gaat het zo: [9, Lesboek 6, p. 69 ]


De kolomsgewijze methode fungeert tevens als vervanger van het traditionele cijferalgoritme van het aftrekken – een opvallend verschil met WiG die de klassieke cijferprocedure wel (inzichtelijk) laat onderwijzen!

Hoe staat het met het cijferend vermenigvuldigen dat bij de Liekesom besproken is?
Lesboek 7 van PP opent veelzeggend met het volgende voorbeeld:

$$\begin{array}{r} 62 \\ \underline{43}\ {\scriptstyle x} \\ 620 \\ 620 \\ 620 \\ 620 \\ 180 \\ \underline{6} \\ 2666 \end{array}$$

'Bij het kolomsgewijs vermenigvuldigen wordt de berekening met zogenaamde 'happen' opgebouwd. Dat wil zeggen dat eerst van de factor een kleiner getal wordt afgesplitst waarmee een eenvoudige vermenigvuldiging gemaakt kan worden. Vervolgens wordt het product herhaald opgeteld. Voor kinderen die moeite blijven houden met het kolomsgewijs vermenigvuldigen, kunt u het beste samen een eenduidige strategie zoeken en vastleggen. U bespreekt met de kinderen de manier die ze bij het kolomsgewijs rekenen begrijpen. Het is van wezenlijk belang dat de notatie de denkstappen van de kinderen weergeeft. Daarom let u erop of ze wat ze zeggen willen gebruiken. Daarbij laat u hen diverse stappen en notaties verwoorden.' [9,7a, p.63]

Aan het eind van groep 7 wordt bij de opgave 27 x 265 aangetekend:

'De kinderen maken de rekensommen die u op het bord hebt geschreven, op hun eigen manier in hun schrift. Hebben ze 27 x 265 opgelost via 10 x 265 + 10 x 265 + 5 x 265 + 2 x 265?' [9, 7b, p.114]

Bij de minimumdoelstellingen voor het eerste halfjaar van groep 8 staat over het vermenigvuldigen: [9, 8a, p.19]

'- kinderen kunnen op hun eigen wijze een heel getal met een kommagetal vermenigvuldigen;
- kinderen kunnen vermenigvuldigen op hun eigen wijze'.

Als één van de mogelijkheden om bijvoorbeeld 56 x 375 op te lossen wordt in groep 8, naast het hoofdrekenen, voor het eerst ook het cijferende vermenigvuldigen nadrukkelijk genoemd.

'De kinderen zullen niet allen dezelfde verkorting toepassen, maar dat is geen probleem. U stimuleert de kinderen wel om zo weinig mogelijk tussenstappen te maken. U laat hen vertellen hoe ze rekenen en op welke wijze ze tussenantwoorden opschrijven. Belangrijk is dat ze hun handelingen verwoorden. Een mogelijke oplossing kan zijn: 6 x 5 (eenheden) = 30; 0 opschrijven, 3 (tientallen) schrijven (eventueel boven de vermenigvuldiging schrijven). Dan 6 x7 (tientallen) = 42 tientallen en nog 3 tientallen erbij = 45 tientallen; 5 tientallen opschrijven en 4 (honderdtallen) onthouden. Vervolgens 6 x 3 (honderdtallen) = 18 (honderdtallen) en die 4 honderdtallen erbij = 22 honderdtallen. Ten slotte rekenen ze 50 x 375 uit. Dat kunnen veel kinderen ook in één keer uit het hoofd uitrekenen. Het kan ook zijn dat ze 6 x 375 direct uitrekenen en de antwoorden (6 x 5, 6 x 70 en 6 x 300) in elkaar schuiven. De meeste kinderen zullen hiermee geen problemen hebben, maar wellicht rekenen anderen het eerst apart uit.' [9, 8a, p.99]

Opmerkelijk is dat deze aanzet tot het aanleren van het cijferalgoritme niet aansluit bij het kolomsgewijs rekenen zoals dat begin groep 7 in de zojuist genoemde voorbeeldopgave werd gedemonstreerd. PP laat overigens de mogelijkheid open om de opgaven over grotere getallen met de rekenmachine uit te rekenen.

*2 Procentrekenen*

Ook ten aanzien van procentrekenen verschillen PP en WiG.
De leergang start in PP niet met breuken maar met verhoudingen. Eerst worden die met behulp van de verhoudingstabel op grootte vergeleken, zonder dat daarbij aanvankelijk sprake is van 'zoveel op honderd', zoals PP procenten benoemt. Ontwikkelen van het inzicht dat verhoudingen alleen goed vergeleken kunnen worden als ze met behulp van de verhoudingstabel op dezelfde 'maat' zijn gebracht – daar gaat het om.
Dit gebeurt begin groep 7 in blok 2 van het lesboek met opgaven als:

> 1) In groep 7 komen 10 van de 20 kinderen op de fiets naar school. In groep 8 zijn dat 7 van de 28 kinderen. In welke groep komen naar verhouding de meeste kinderen op de fiets?
> 2) In groep 3 hebben 8 van de 16 kinderen een zwemdiploma. In groep 4 zijn dat 20 van de 25 leerlingen. Welke groep heeft naar verhouding de meeste kinderen met een zwemdiploma?
> 3) Drie van de 12 meisjes uit groep 7 zitten op hockey. Drie van de 15 meisjes uit groep 8 zitten op hockey. In welke groep zitten naar verhouding de meeste meisjes op hockey?
> 4) 1/4 deel van de 12 meisjes uit groep 7 bespeelt een instrument. 1/5 deel van de 15 meisjes uit groep 8 bespeelt een instrument. In welke groep spelen naar verhouding de meeste meisjes een instrument?

Het ligt echter niet voor de hand om bij het oplossen van deze opgaven een verhoudingstabel te gebruiken: redeneren via eenvoudige breuken is in drie van de vier sommen veel natuurlijker.
En wat te denken van de volgende aantekening bij som 1 en 2?

> 'U laat hen eerst de informatie uit de tekst halen. Wat moet je met elkaar vergelijken? Mag je de gegeven getallen met elkaar vergelijken? U legt uit dat je de breuken die je van de gegeven getallen kunt maken, alleen met elkaar kunt vergelijken als de aantallen gelijk zijn. Dat wil zeggen, als je hetzelfde aantal kinderen in de groep hebt of hetzelfde aantal kinderen met een

> zwemdiploma. Na deze uitleg vullen de kinderen de verhoudingstabel in. Hoe kun je de gegeven verhouding kleiner maken?' (p. 88)

In het volgende blok wordt bij het vergelijken van de scoringspercentages bij basketbal naar de gelijke maat van 'zoveel op de honderd' toegewerkt.
Het procentteken % en de procentenstrook worden geïntroduceerd. Het aantal schoten met bijbehorende scores is eenvoudig 'op de honderd' te brengen en op de met tienen gemarkeerde stroken te tekenen: 20 van de 50; 12 van de 20; 5 van de 20; 20 van de 40 – en zo meer.
Over breuken wordt met geen woord gerept. Dat gebeurt pas in les 1 van blok 5 als onder meer het begrip korting ter sprake komt in verband met 'deel van geheel'.
In de handleiding staat de kernvraag: 'Zien de kinderen de parallel met de maat 'zoveel van de 100', die ze in blok 3 hebben ontdekt?' Een vraag waarop het antwoord ontkennend zal luiden. Want het aantal schoten uit het genoemde basketbal-voorbeeld verhoudingsgewijs op honderd brengen, is voor de kinderen iets heel anders en trouwens ook minder acceptabel dan dit aantal op 100 procent zetten en van daaruit met behulp van een procentenstrook het scoringspercentage vaststellen.
Dit is ook de reden, zoals we eerder zagen, dat vrijwel alle methodes in de geschiedenis van het rekenonderwijs voor de ingang van 'Stel het geheel op 100% en bepaal het deel.' kiezen en pas later op verhoudingen ingaan.
Ook WiG volgt deze lijn, zij het met hulp van een nieuw denkmodel, te weten de genoemde procentenstrook.
Dit model wordt halverwege groep 7 overigens ook door PP geïntroduceerd, waarna de leergang beter is te volgen.

### *3 Handleiding*

Het karakter van de PP-didactiek komt bij de handleiding tot uitdrukking in de vragende vorm waarin veel aanwijzingen voor de leraar zijn gevat – vragen over hoe kinderen rekenen, maar vaak zonder aanwijzingen hoe de leraar daarop het beste kan reageren, zoals de meer geleide WiG in de handleiding doet.

Neem bijvoorbeeld de volgende, aansprekende opgave over procenten:

> De gemiddelde temperatuur bepaalt je korting.
> Voorbeeld: 21°C → 21% korting.
> 1) Kan de korting 40% of 50% worden?
> 2) Susan koopt een computerspel voor € 80. Het is gemiddeld 25°C.
> Hoeveel moet ze betalen?
> 3) Lars betaalt € 153 voor een cd-speler. Deze kostte eerst € 180.
> Wat was de temperatuur die dag?
> 4) Bedenk zelf nog minstens twee van zulke vragen.

In de lesagenda is voor dit rekenrijke vraagstuk slechts 15 minuten uitgetrokken.
Bij opgave 3 – een lastig 'indirect' type dat voor het eerst in de methode opduikt – staat in de handleiding opgetekend:

> 'Hoe hebben de kinderen deze opdracht opgelost? Hebben ze met kortingsbedrag gerekend of hebben ze het anders aangepakt? U laat de kinderen met elkaar de oplossingswijzen bespreken. Kunnen ze beredeneren of de juiste berekening is toegepast? Ook enkele zelfbedachte opdrachten worden besproken en opgelost.' [9, p. 217]

Vragen en nog eens vragen: veel kijkwijzers maar betrekkelijk weinig richtingwijzers voor het onderwijzen. Vergeleken met de eerder besproken rekenmethodes uit de periodes voor 1990 is deze vorm van begeleiding nieuw – net zo nieuw trouwens als de didactiek die er aan ten grondslag ligt.

### *4 Algemene kenschets*

De opgaven uit de lesboeken van PP, die in twee van de vijf lessen per week van de leerkrachtgebonden lesuren worden gebruikt, staan vaak in een aansprekend thematisch verband. Het eerste blok 'Een dagje uit' van 15 lessen in groep 6 bijvoorbeeld, bevat contextproblemen, opgaven over handig rekenen, schatten en het bedenken van rekenverhaaltjes bij kale sommen. In het volgende blok 'Onderweg' verschijnen onder meer rekenschema's, vraagloze vraagstukjes en combinatorische problemen.

In de twee klassikale lessen per week wordt de basisstof behandeld, en in de overige drie lessen werken de kinderen zelfstandig op eigen niveau, en krijgen daarbij individueel, in kleine groepjes of soms in een nabespreking voor de hele groep passende hulp van de leraar.
De ruimte voor interactief-klassikaal onderwijs is dus beperkt. PP kan daarom in onderscheid met de *instructieve* WiG het beste als een *semi-instructieve* methode getypeerd worden.
Dit alles betekent, dat gemeten aan de vijf didactische 'prins-principes', het 'realistische' gehalte van PP kleiner is dan dat van WiG.
Weinig groepsgerichte communicatie over en weer betekent immers dat er minder gelegenheid is om de andere basale onderwijsprincipes en het algemene kerndoel van probleemoplossen goed tot gelding te laten komen.
Maar er is meer: ook belangrijke leergangen, zoals die van cijferen en procentrekenen, blijken sterk te verschillen. Zowel de talrijke opgaven van PP onder het kopje 'Reken uit op jouw manier', als de aanwijzingen in de handleidingen, zijn in dit semi-instructieve verband veelzeggend.

## 4 Rekenrijk

'Rekenrijk' (RR) is net als PP een semi-klassikale methode die qua uitlijning van de leergangen tussen de instructieve WiG en de semi-instructieve PP in staat. Maar het is toch eerst en vooral een methode met een eigen signatuur.

Zo onderscheidt RR zich van WiG en PP ten aanzien van de thema's, of beter gezegd, de afwezigheid van een thematisch verband waarin ieder rekenblok van 15 lessen is opgezet. De lessen uit het eerste blok van groep 7 bijvoorbeeld hebben betrekking op hoofdrekenen, kolomsgewijs rekenen, cijferen, een herhaling van het eerder geleerde over breuken en kommagetallen, en op grafieken en lengtemeting, zonder dat de betreffende activiteiten tegen de achtergrond van een of andere verschijningsvorm uit de realiteit (een knipsel, locatie, thema of project) zijn geplaatst.

Ook de cijferleergangen van RR verschillen met die van de twee grote methodes. De leergang van vermenigvuldigen bijvoorbeeld

volgt in groep 6 en 7 globaal de lijn van herhaald optellen via kolomsgewijs rekenen naar cijferen – dus anders dan in PP gebeurt.
Begin groep 7 wordt al met vermenigvuldigers van twee cijfers gerekend nog voordat de meest verkorte procedure met een vermenigvuldiger van een cijfer uitgebreid is (in)geoefend – een verschil met WiG.
De leergang van procenten loopt eveneens anders dan die van WiG en PP. Procenten worden vanuit breuken en verhoudingen benaderd. De verhoudingstabel en het cirkeldiagram spelen een belangrijke rol – de breuken- en procentenstrook, die in WiG zo'n prominente functie vervult, wordt hier niet benut.
Op de overige onderdelen van hoofdrekenen, schatten, het maken van contextopgaven, eigen producties en probleemoplossen verschillen de drie methodes weinig.
Neem bijvoorbeeld probleemoplossen: in deel 7a (p.85) staan opdrachten als 'Op hoeveel manieren kunnen er drie kinderen naast elkaar staan?' en 'Op hoeveel manieren vier kinderen?' die verwant zijn met soortgelijke problemen die in WiG en PP staan.

In tegenstelling tot voornoemde methodes is in de handleidingen niet iedere rekentaak van didactische aantekeningen voorzien. Uitsluitend de kernopdrachten van de leerkrachtgebonden lessen en de remediëring worden kort en bondig besproken. Zo is bijvoorbeeld in de tweede leerkrachtgebonden les over procenten, de relatie tussen breuken, verhoudingen en procenten in een schema samengevat, zonder dat het begripsmatige verband tussen 'breuk', 'deel van', 'zoveel van de zoveel', 'zoveel op de honderd' en ' zoveel procent' nader wordt toegelicht – iets wat bijvoorbeeld in de 'kleine' methode 'Wis en Reken' wel uitvoerig en grondig gebeurt, nog uitvoeriger dan in WiG en 'Alles Telt'.

Al met al is duidelijk dat realistische methodes verschillen ten aanzien van de organisatie van het onderwijs, de inbreng van de leraar, de al dan niet thematische inkleding van de opgaven, de uitlijning van de leergangen, plus de opzet en praktische uitwerking van de handleidingen.
Algemeen gesteld, gaat het daarbij primair om een verschil in de structurering van het onderwijs i.c. de mate waarin leraar en leerling houvast wordt geboden.

## 5 Samenvatting vier methodes via één vraagstuk

De grote keersom

Je hebt de cijfers 2, 4, 8 en 9.
Daarmee ga je vermenigvuldigen maken met twee getallen.
Ieder cijfer mag je één keer gebruiken, bijvoorbeeld zo:
4 x 892
48 x 92
a. Bepaal de vermenigvuldiging met de kleinste uitkomst.
b. Bepaal de vermenigvuldiging met de grootste uitkomst.
c. Hoeveel keersommen van het type 4 x 892 zijn mogelijk?
d. Reken ze allemaal uit. Welke kun je handig berekenen?
e. Bedenk een verhaaltjessom bij 4 x 2,98.

Inzichtelijk, productief, probleemgeoriënteerd, gericht op toepasbaarheid van basale rekenvaardigheden - al deze aspecten zijn in de samengestelde som te onderkennen. De verschillen tussen de grootste, gezichtsbepalende traditionele en moderne methodes kunnen met deze som worden toegelicht.
Geen enkel onderdeel van de opgave past bij de traditionele, procedurele methode NZR. Hoewel het cijferen in deze methode een centrale positie heeft, worden de betreffende sommen nooit in een probleemgerichte context geplaatst. Handig rekenen wordt in deze methode niet beoefend. Leerlingen krijgen evenmin gelegenheid om zelf opgaven te bedenken.
In de traditionele, functionele methode NR wordt wel aandacht aan het maken van eigen producties besteed. En ook handig rekenen krijgt in deze methode een belangrijke plaats toebedeeld. Maar probleemgericht rekenen als in de onderdelen a), b) en c) zal men in NR niet aantreffen, hoewel er voor het cijferen wel de nodige tijd wordt ingeruimd.
Over de instructief realistische methode WiG kunnen we kort zijn: alle genoemde aspecten passen erin. Los van het probleemoplossen is er voldoende ruimte voor het cijferen.
Dit laatste kan niet van PP worden gezegd. Sterker: het aanleren van de standaardalgoritmen wordt in deze methode geheel aan de leerkracht overgelaten. Wel is in PP aandacht voor handig rekenen en probleemoplossen.

## 6 Overzicht

Eerder zagen we dat in het traditionele rekenonderwijs van de periode 1950-1990 twee didactische stromingen te onderscheiden zijn, namelijk die van de procedurele en de functionele methodes.

De procedurele methode, waarvoor 'Naar Zelfstandig Rekenen' model kan staan, kenmerkt zich door een sterke gerichtheid op het aanleren van standaardprocedures voor het opereren met hele getallen, kommagetallen en breuken. Er wordt vrijwel geen tijd voor hoofdrekenen en schatten gereserveerd; toepassingen zijn eveneens schaars.

De functionele methode 'Nieuw Rekenen' zet zich tegen dit procedurele rekenen af. In de handleiding worden ter vergelijking van deze aanpakken – daar aangeduid als 'schematisch' en 'functioneel' – drie voorbeelden tegenover elkaar gezet.

| | |
|---|---|
| **a.** 399 + 865 = .. cijferend. | **a.** 399 + 865 = 400 + 864 = ... |
| **b.** 8 x 9,75 → 9,75 | **b.** 8 x 9,75 = 4 x 19,5 = 2 x 39 = 78. |
| <u>8 x</u> | 8 x 9,75 = 8 x 10 – 8 x 0,25 = 80 – 2 |
| ... | 8 x 9,75 = 8 x 9 + 8 x 0,75 = 72 + 6 |
| **c.** 79,2 : 5 → 5 / 79,2 \ ... | **c.** 79,2 : 5 = 2 x 7,92 |

> 'Steeds wordt naar middelen gezocht om het gevreesde 'vercijferen' te voorkomen.' [5, p.13]

Naast hoofdrekenen en schatten besteedt deze functionele methode ook de nodige aandacht aan cijferen. Maar de auteurs voegen daar aan toe: 'Inzichtelijk rekenen, samen met levensecht rekenen zijn evenwel uitgangspunt en doel.' [5, p.14].

In het moderne rekenonderwijs van de periode 1990-2010 zijn binnen het zogenoemde realistische rekenonderwijs eveneens twee varianten te vinden: de instructief realistische WiG en de semi-instructieve PP.

Hun gemeenschappelijke realistische karakter wordt, we herhalen ze, door de volgende vijf didactische 'prins'- principes' bepaald.

1) De productieve inbreng van de leerlingen in het onderwijsproces.

2) Het reflectieve karakter van het onderwijs – leerlingen laten nadenken over hun eigen denk- en rekenwijzen in vergelijking met die van anderen.
3) Het interactieve rekenonderwijs in een setting waarin naast zelfstandig werken gelegenheid is voor instructie en voor interactie tussen leraar en leerlingen, en tussen de leerlingen onderling.
4) De leraar heeft oog voor de diverse niveaus waarop de leerlingen opereren en probeert hen, zo nodig, met behulp van contexten, modellen, schema's en methoden naar een hoger abstractieniveau te brengen.
5) Structuur aanbrengen, betekent dat verwante leergangen met elkaar vervlochten worden en dat toepassingen ook in een projectmatige of thematische samenhang aan de orde kunnen komen.

In welk opzicht verschillen de genoemde varianten van het realistische rekenonderwijs, zoals die zich in de twee veelgebruikte methodes manifesteren?
Ten eerste verschillen deze moderne methodes in de organisatievorm van het onderwijs: WiG besteedt vier lessen per week (gedeeltelijk) aan klassikale instructie, en PP slechts twee.
Ten tweede, wat de inhoud betreft, stuurt WiG de leerlingen doelgerichter op de algoritmen en rekenregels af dan PP, die de teugels vaak met vrije opdrachten als 'doe het op jouw manier' laat vieren.
Dit zijn twee redenen om het onderscheid 'instructief' en 'semi-instructief' aan de genoemde realistische methodes te verbinden.
Beide methodes schenken veel aandacht aan hoofdrekenen en schatten. Toepassingen staan bij PP vanaf het aanvangsonderwijs in een aansprekend thematisch verband; bij WiG gebeurt dit pas vanaf groep 6.

## 7 Welk soort methodes boeken de beste resultaten?

Toen eind jaren'90 bekend werd dat na drie periodieke peilingen de resultaten van de traditionele en moderne methodes gepubliceerd zouden worden, hield de rekenwereld de adem in. Waar men vooral naar uitkeek, was hoe de scores van de procedurele "Naar Zelfstandig Rekenen'(NR) en de interactief-realistische 'Wereld in Getallen' (WiG) zich zouden verhouden – methodes die didactisch bezien tegenpolen zijn.

De periodieke peilingen van 1987 en 1992 konden nog geen vergelijkende gegevens over de resultaten van de oude en nieuwe methodes verschaffen doordat de steekproef van de aantallen leerlingen per methode in sommige gevallen te klein was, in 1997 kon dat wel.
De uitkomst van de drie periodieke rekenpeilingen is opmerkelijk. [11]

| | | | |
|---|---|---|---|
| • Traditionele methodes | Procedurele methode | NZR | 0-lijn |
| | Functionele methode | NR | + 0,31 sd |
| • Moderne methodes | Instructief real. methode | WiG | + 0,53 sd |
| | Semi-instruct. real. methode | PP | + 0.29 sd |

WiG scoort op vrijwel alle 24 onderdelen het hoogste. Wat echter vooral in het oog springt, is het positieve resultaat ten opzichte van de procedurele methode NZR. Buiten 'bewerkingen', waarop WiG maar een fractie beter scoort, zijn de verschillen bij de overige twintig onderdelen groot: de goedscores komen 10 tot 20 procentpunten hoger uit. Voor schattend rekenen is dit grote verschil, gelet op dit nieuwe leerdoel, wellicht niet zo verrassend. Maar ook bij getalinzicht, hoofdrekenen, breuken, verhoudingen, procenten, plus de toepassingen ervan zijn de verschillen aanzienlijk.3) De verschillen tussen WiG en de procedurele methode 'Niveaucursus Rekenen' zijn gemiddeld even groot.
Eerder zagen we dat de functionele methode 'Nieuw Rekenen' met gemiddeld 0,31 sd ook duidelijk boven de procedurele methodes uitkomt. Met deze onderzoeksgegevens is de vraag uit de Inleiding van dit boek over de procedurele versus de conceptuele methodes beantwoord: de laatstgenoemde behalen betere resultaten.
Bij elkaar genomen, zijn dit de meest opzienbarende onderzoeksresultaten uit de geschiedenis van het Nederlandse rekenonderwijs!

### 8 Invloed van de rekenmethode op de leerprestaties

De KNAW-Commissie 'Rekenonderwijs' stelt in haar onderzoeksrapport dat:

> '(1) de leraar de spil is in het onderwijsleerproces en dat de kwaliteit van de leraar direct effect op de leerprestaties heeft;
> (2) er geen verschil in effect is aangetoond tussen de traditionele en de realistische rekendidactiek; de verschillen binnen een methodetype (traditioneel of realistisch) zijn groter dan die tussen de methodetypen;
> (3) en dat er vraagtekens zijn te plaatsen bij de effectiviteit van niet-begeleid zelfstandig werken; sturing door en interactie met de leraar, en instructie, oefening en nabespreking zijn noodzakelijk.' [13, p.15]

De eerste conclusie kunnen we uiteraard onderschrijven.
De derde conclusie is niet in strijd met onderzoeksgegevens van de periodieke peilingen - integendeel: de interactief klassikale methode WiG scoort in de peilingen van 1997 en 2011 hoger dan de methodes die minder tijd voor klassikale instructie reserveren.
De tweede conclusie staat echter wel haaks op de gegevens van de eerste drie periodieke Cito-peilingen. Het traditionele rekenonderwijs is namelijk niet één didactische stroming, maar volgt twee richtingen - de procedurele en de functionele. Als men de procedurele methodes vergelijkt met de realistische methodetypen dan blijkt dat ze daar duidelijk bij achterblijven. En dat is ook precies het traditionele methodetype waar rekendidactici al vanaf omstreeks het midden van de vorige eeuw hun kritiek op hebben gericht - kritiek die later met de uitkomst van de periodieke Cito-peilingen empirisch verankerd werd.
Echter niet alleen uit de scores van de verschillende rekenmethodes komt naar voren dat de invloed van de methode op de leerprestaties aanzienlijk is, maar ook binnen de verschillende versies van één methode kan men die invloed vaststellen.
Neem voorbeeld de oudste realistische methode WiG. Daarvan verschenen in de periode 1980-2010 drie versies. De eerste versie werd op basis van wetenschappelijk onderzoek en van praktijkgegevens aanzienlijk bijgesteld. [5] De revisie had tot gevolg, dat de resultaten van WiG (2) in de eindpeiling van 1997 maar liefst 0,30

sd hoger uitkwamen dan die van WiG (1). [7] En in de medio-peiling van 2003 scoorden de leerlingen van WIG (2/3) eveneens 0,30 sd hoger dan WiG (1). [14]
Hieruit blijkt eens temeer dat de methode invloed op de leerprestaties heeft. Niet alleen de leraar maar ook de kwaliteit van de methode telt! – een mooiere slotsom van deze historische studie over rekenmethodes laat zich moeilijk denken ...

## Noten

1) In de loop van de jaren'70 verschenen twee methodes die voor een deel op het werk-in-uitvoering van Wiskobas gebaseerd waren: 'Getal in Beeld' en 'Taltaal'. Maar de verspreidingsgraad van deze semi-realistische methodes was heel laag. Dit in tegenstelling tot 'Operatoir Rekenen' dat in 1980 op de markt kwam en tot 2000 door een kwart van de scholen werd gebruikt. Tot groep 6 was het rekenonderwijs in deze methode realistisch, maar daarna stond het tussen de twee genoemde traditionele methodes NZR en NR in. De andere drie methodes die in de loop van de jaren '80 verschenen, te weten 'Wereld in Getallen', 'Rekenen en Wiskunde' en 'Rekenwerk', waren wel compleet realistisch opgezet. Ze hadden echter de handicap dat er toen nog geen duidelijkheid over de inhoud van leerstofprogramma bestond met betrekking tot breuken, verhoudingen, combinatoriek, kansrekening, meten en meetkunde. Toen 'Pluspunt' begin jaren '90 op de markt kwam, was die duidelijkheid er wel. Een uitgebreide analyse van de methodes uit 1960 -1985 biedt De Jong (1986).

2) Voor de bespreking van 'Wereld in Getallen' en 'Pluspunt' nemen we de euro-versies die na 2001 werden uitgegeven en weinig van de voorgaande versies verschillen. Voor een overzicht van de inbreng van deze methodes op verschillende leerstofdomeinen verwijs ik naar Goffree & Oonk (2004) en naar Veltman & Van den Heuvel-Panhuizen (2010). De genoemde methodes hebben samen een marktaandeel van 90%, met PP als grootste (45%), gevolgd door WiG (30%) en 'Rekenrijk' (15%). 'Alles Telt' kwam in de periode 2000-2010 uit op ruim 5%, net als 'Wis en Reken', de opvolger van 'Rekenen en Wiskunde'.

3) In de onderstaande tabel zijn de leerresultaten van de realistische methode WiG vergeleken met die van de procedurele NZR die op de 0-lijn is geplaatst. Het verschil van 1,0 standaarddeviatie (sd) is ongeveer 20 procentpunten. [11] [18]

| | | |
|---|---|---|
| **A** | 1. Basiskennis en begrip | + 0,5 sd |
| | 2. Basisoperaties | + 1,0 |
| | 3. Hoofdrekenen ( + , - ) | + 0,4 |
| | 4. Hoofdrekenen ( x , :) | + 0,5 |
| | 5. Schattend rekenen | + 1,0 |
| | 6. Bewerkingen ( + , -) | + 0,1 |
| | 7. Bewerkingen ( x , : ) | + 0,0 |
| | 8. Bewerkingen ( samengesteld ) | + 0,3 |
| | 9. Toepassingen ( m.b.v. rek. mach.) | + 0.8 |
| **B** | 10. Breuken – begrip | + 0,6 |
| | 11. Breuken ( + , - ) | + 0,6 |
| | 12. Breuken ( x , : ) | + 0,4 |
| | 13. Procenten – begrip | + 0,7 |
| | 14. Procenten – toepassingen | + 0,8 |
| | 15. Verhoudingen – begrip | + 0,4 |
| | 16. Verhoudingen – toepassingen | + 0,6 |
| **C** | 17. Lengte – omtrek | + 0,4 |
| | 18. Oppervlakte | + 0,6 |
| | 19. Inhoud | + 0,3 |
| | 20. Gewicht | + 0,4 |
| | 21. Meten – toepassingen | + 0,4 |
| | 22. Meetkunde | + 0,5 |
| | 23. Tijd | + 0,6 |
| | 24. Geld | + 0,5 |

# 7 Overzicht 1800-2010

## Inleiding

Al meteen in de eerste alinea van de Inleiding worden de twee tegenpolen van de procedurele en de conceptuele rekenmethodes opgevoerd. Daar is wel direct aan toegevoegd dat dit onderscheid voor bepaalde methodes niet zo scherp valt te maken, omdat verschillende leergangen vaak elementen van beide bevatten. De rekenboeken van deze tussencategorie noemen we hier duale methodes.

Eerst kunnen dan kennen, is het adagium van de *procedurele* rekenmethodes. De leerstof staat daarin centraal. Het is zaak om de rekenstof nauwkeurig uit te lijnen, dat wil zeggen, te splitsen in moeilijkheden; elk onderdeel wordt tot in de kleinste details uiteengerafeld. Aan herhaling wordt veel aandacht geschonken: oefening baart kunst en kunde. Aan inzicht als basis voor het inoefenen, zoals in het geval van de tafels bijvoorbeeld, wordt weinig waarde toegekend. Het gaat allereerst om het memoriseren van rekenfeiten, het automatiseren van bewerkingsschema's en het herkennen van som-typen bij het maken van toepassingen.

De procedurele aanpak is eensporig, regelgeleid en werkt zo snel mogelijk naar één efficiënte standaardmethode toe om een bepaald somtype op te lossen. Toepassingen komen pas aan het eind van de leergang aan bod, en dan nog maar in bescheiden mate. Handig, flexibel (hoofd)rekenen en schattend rekenen staan niet op het programma. De standaardrecepten van het cijferen voor de vier basisbewerkingen met gehele getallen, kommagetallen en breuken, worden achtereenvolgend na groep 4 ingeoefend. Daaraan voorafgaand worden voor het rekenen tot tien, twintig en honderd de bewerkingen eveneens volgens een vast voorschrift uitgevoerd, te beginnen bij het 'splitsen bij tien' voor het optellen onder de twintig.

De som 6 + 7 bijvoorbeeld dient via 6 + 4 + 3 berekend te worden en niet volgens 6 +6 + 1 of 5 +1 +5 + 2, alvorens een 'weetje' te worden. Ook in het aanvankelijke rekenen is er geen of weinig aandacht voor levensechte rekensituaties.

De *conceptuele* rekenmethodes verschillen op vrijwel alle genoemde aspecten van de procedurele methodes. De leerstofopbouw is niet zo sterk geatomiseerd. Aan inzicht wordt ook bij het aanleren van rekenfeiten en procedures veel waarde toegekend. Mede om deze reden komen niet meteen de meest verkorte vormen van de cijferalgoritmen aan bod. Toepassingen staan, als basis voor de begripsvorming, al aan het begin van de leergangen. Getalinzicht, flexibel (hoofd)rekenen en soms ook schattend rekenen krijgen, naast het cijferen, een centrale plaats. Kinderen worden in de gelegenheid gesteld om binnen het kader van welomschreven doelstellingen, zelf opgaven te ontwerpen, methoden te ontwikkelen en op hun eigen niveau te werken. En tot slot: de relaties tussen de vier basisoperaties en tussen de leerstofdomeinen van verhoudingen, breuken, procenten en meten worden hecht verankerd.

De genoemde driedeling procedureel-conceptueel-duaal is geschikt om de rekenmethodes uit de verschillende tijdvakken kort te typeren.
De indeling van de hoofdstukken is er in feite op gebaseerd. Alleen zijn de koppen aangepast aan de terminologie die in de betreffende periodes gangbaar was.
'Procedureel' heette 'mechanisch' of 'mechanistisch'. En voor 'conceptueel' waren indertijd de termen 'heuristisch', 'functioneel' en 'realistisch' gangbaar. De benaming 'duaal' bleef ongenoemd.
Het volgende biedt aan de hand van deze methodische indeling een overzicht van de onderscheiden periodes. Daarbij worden in ieder tijdvak enkele gezichtsbepalende methodes naar voren gehaald. De samenvattende bespreking ervan zal zich op flexibel rekenen, cijferen en de toepasbaarheid ervan concentreren - de onderscheiden visies op het rekenonderwijs manifesteren zich vooral in deze domeinen.

## 1 Het semi-methodische tijdvak 1800-1875

Het tijdvak 1800-1875 heet semi-methodisch omdat in deze periode nog geen complete methodes voor alle leerjaren van de lagere school ter beschikking stonden. Kellinga noemde dit het tijdperk van het mechanische bordrekenen. De hulponderwijzer schreef de cijfersommen op het bord die de leerlingen vervolgens op de lei moesten uitrekenen.
Daaraan voorafgaand werden de tafels van de vier basisoperaties ten dienste van het cijferen klassikaal ingeslepen. De aanpak van een en ander was zuiver procedureel - voor flexibel rekenen was binnen deze onderwijsomstandigheden geen ruimte.
Als een kind de standaardalgoritmen beheerste, kreeg het in de bovenbouw voor het eerst een rekenboekje, dat onder begeleiding van de onderwijzer, zelfstandig doorgewerkt moest worden. De meest gebruikte boekjes uit deze periode waren die van Hemkes en van Boeser.

In de zogenoemde 'tien cents' boekjes van Hemkes (1836) wordt steeds begonnen met onbenoemde getallen en dan komen tekstopgaven met benoemde getallen in de volgorde van optellen-vermenigvuldigen-aftrekken-delen en van samengestelde vraagstukken aan bod.
Het verschil in moeilijkheidsgraad van de opgaven binnen een rubriek is groot, de stijl breedvoerig en de toonzetting informeel. De leerstof van de verschillende boekjes heeft betrekking op hele getallen, breuken, meten, en evenredigheden ('de regel van drieën').

De boekjes van Boeser (1850) met gemengde toepassingen waren bijzonder in trek en werden tot in de 20ste eeuw herdrukt. In tegenstelling tot de boekjes van Hemkes zijn de redactiesommen kort en zakelijk geformuleerd. Een verschil is ook dat de opgaven van Boeser niet volgens opklimmende moeilijkheid geordend zijn. De leerstofonderwerpen van beide boeken komen wel overeen.

De overgang van het procedurele bordrekenen en het toegepaste cijferen naar het conceptuele rekenen aan de hand van een complete methode, werd in gang gezet door Rijkens' vertaling (1865) van een handboek van de vermaarde Duitse rekendidacticus Hentschel, 'de vader van het nieuwe rekenen op de volksschool'. Mede daardoor ontstond er hernieuwde belangstelling voor het werk van Grube over het aanvankelijke rekenen, dat al in 1847 door Brugsma was uitgebracht.

## 2 Het tijdvak van de heuristische methodes 1875-1900

Versluys, de grondlegger van de Nederlandse rekendidactiek, heeft zich bij het samenstellen van zijn boekenserie 'Rekenonderwijs ten dienste van de lagere school' (1875) door de genoemde Duitse rekendidactici laten inspireren. Hij typeerde zijn conceptuele methode als 'heuristisch', wat staat voor inzichtelijk, zelfzoekend rekenen onder klassikale leiding van de onderwijzer.
In zijn rekenboek voor het eerste leerjaar valt weinig te herkennen van wat vandaag de dag gebruik is. Dat komt door de monografische methode die hij in navolging van Grube hanteerde. Deze kenmerkt zich door de 'operatieve' behandeling van de getallen 1 tot 20: steeds wordt ieder nieuw getal opgebouwd, uiteengelegd en 'gemeten' met de voorgaande getallen. Dit betekent dat de vier basisoperaties van meet af aan in het rekenonderwijs betrokken worden. Maar dan wel eerst in de vorm van mondelinge opdrachten en tekstopgaven, en niet in pure sommentaal. Bij ieder getal onder tien staan in de handleiding van de onderwijzer ongeveer 100 vraagstukken over het rekenen met aanwezige voorwerpen, afwezige voorwerpen, aanwezige hoeveelheden, afwezige hoeveelheden en onbenoemde getallen. Bij de getallen van tien tot twintig wordt het aantal opgaven ruim gehalveerd.
De wijze waarop Versluys het rekenen tot honderd behandelt, is wel heel herkenbaar. Het optellen en aftrekken gebeurt in dit getallengebied niet op een voorgeschreven manier maar flexibel. De tafels van vermenigvuldiging (en deling) worden volgens de heuristische methode van verdubbelen, omkeren en met steun van de tien- en vijfproducten gestructureerd en *en passant* gericht ingeslepen. De eigenschappen van de vermenigvuldigoperatie die hierbij in het geding zijn, worden later bij het hoofdrekenen breed inzetbaar. Ook hier is er weer veel

aandacht voor toepassingen. Met opgaven als 9 x 13 en 13 x 9 wordt de aanzet gegeven tot flexibel (hoofd)rekenen, kolomsgewijs rekenen en inzichtelijk cijferen, plus de relaties ertussen. Bij een en ander fungeert de rechthoek als aanschouwelijke grondslag.

Het cijferend vermenigvuldigen is vernuftig opgezet. Met de opgave 4 x 23 ('4 kinderen krijgen ieder 23 cent') wordt de verbinding met herhaald optellen gelegd en daarmee met de verkorte cijfermethode die de kinderen eerder bij het optellen leerden.

Anderzijds leren ze via 23 x 4 ('23 kinderen krijgen ieder 4 cent') de 'nulregel' van het cijferalgoritme die bij vermenigvuldigers met meerdere cijfers wordt toegepast.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 |
| 23 x | 23 x | 23 x | 23 x |
| 80 | 12 | 12 cent | 12 enen |
| 12 | 80 | 8 . dubb | 8 . tienen |
| 92 | 92 | 92 cent | 92 |

Het algoritme van de verkorte (staart)deling wordt via kolomdelen aangeleerd. Daarbij dient weer een elementaire tekstopgave als concrete basis: 'Hoeveel keer kan 4 gulden van 936 gulden worden afgenomen?' Eerst wordt een hap van 200 keer afgenomen, dan van het restant een hap van 30 en tot slot nog een van 4; bij elkaar 234 keer.

Versluys kent aan flexibel hoofdrekenen en cijferen evenveel waarde toe. Beide onderdelen starten bij hem in het getallengebied tot honderd. Wat daarbij opvalt, is de grote hoeveelheid tekstopgaven en het betrekkelijk kleine aantal kale sommen – rekenen is bij hem in eerste instantie vooral toegepast rekenen. Pas in de hoogste leerjaren komt daar verandering in: dan verschijnen zelfs complexe cijfersommen, de zogenoemde vormsommen.

Van Pelt (1878) hanteert voor het rekenen tot twintig eveneens de monografische methode. Maar bij het rekenen tot honderd en duizend volgt hij een wat andere leerweg: er is bij hem in de eerste drie leerjaren geen plaats voor cijferen, het is alles hoofdrekenen wat de klok slaat. En ook de wijze waarop

hoofdrekenen wordt onderwezen, verschilt op onderdelen met die van Versluys. Bij vermenigvuldigen en delen tot honderd maakt Van Pelt veel gebruik van (ver)dubbelen, halveren en van de tien- en vijfstructuur En wat later bij het rekenen tot duizend staat naast het handige rekenen vooral het gestileerde, kolomsgewijze rekenen, dat in het vierde leerjaar de opmaat tot het inzichtelijk leren cijferen vormt. Indien men bij het hoofdrekenen ruim aandacht besteedt aan het inzichtelijk oplossen van sommen als 40 x 55 - via '40 el à 55 cent' - dan levert het leren van het cijferalgoritme bij 43 x 55 geen problemen op: je gaat eerst 3 x 55 en 40 x 55 apart uitrekenen en vervolgens de uitkomsten daarvan in elkaar schuiven, aldus Van Pelt.
Wat de praktische toepassingen betreft, bestaat er tussen Versluys en Van Pelt geen essentieel verschil: beide geven tekstopgaven een centrale plaats in de leergangen, en laten die al in het begin als concrete basis voor het aanleren van de formele rekenprocedures fungeren.

Het didactische adagium van de heuristische rekenmethodes luidt: 'Eerst kennen dan kunnen, eerst denken dan doen' - precies 't omgekeerde van het procedurele motto!
Nu kan deze slagzin gemakkelijk worden misverstaan. Want met kennen en denken wordt hier niet alleen op inzicht in de rekenregels en procedures gedoeld, maar ook op de toepasbaarheid ervan. En die kan volgens de heuristische opvatting alleen geborgd worden indien toepassingen van meet af aan in de leergang betrokken worden. Men gaat zelfs zover om de rekenprocedures aanvankelijk ten dienste van de toepasbaarheid aan te passen! Zo kan het gebeuren dat de leerlingen twee vormen van het delingsalgoritme leren: de kolomdeling voor de zogenoemde verhoudingsdeling en de staartdeling voor vraagstukjes waarin een verdelingsdeling besloten ligt - in het inleidende hoofdstuk zijn beide vormen al beschreven. Pas na verloop van tijd worden ze gelijkgeschakeld en verenigd tot de gangbare staartdeling. Ook de geleidelijke, kolomsgewijze aanzet tot de cijferalgoritmen van de andere basisoperaties wordt mede door het criterium van de toepasbaarheid ingegeven.

Uit het voorgaande kan men opmaken dat 'conceptueel' opvatten als 'eerst weten-waarom' en dan pas als' weten-hoe' niet juist is, omdat waarom en hoe hier juist met elkaar vervlochten zijn. Het leren van tafels, zoals Versluys en Van Pelt dat voorstaan, is daar een sprekend voorbeeld van.

## 3 Het tijdvak van de duale methodes 1900-1950

In de eerste twee decennia na 1900 werden de rekenboeken van Versluys en Van Pelt geleidelijk vervangen door de heuristische methodes van Zernike, Schoonbrood, Scholte en anderen, en door een reeks nieuwe leerboeken die nadrukkelijk afstand van de 'verstandscholende' rekenrichting namen.
Deze methodes kenmerkten zich onder meer door het feit dat ze:
- de monografische behandeling van de getallen tot twintig verlaten en daarmee ook het vermenigvuldigen en delen in het eerste leerjaar
- tellen in het aanvangsonderwijs in ere herstellen
- tekstopgaven niet meer vooropstellen, maar starten met kale getallen
- groter belang aan cijferen dan aan hoofdrekenen toekennen
- en meer nadruk op vaardigheden dan op inzichtelijk rekenen leggen.

Vanaf omstreeks 1920 maakte de methode van Bouman & Van Zelm grote opgang. In 1935 voegde zich daar Diels & Nauta bij – twee methodes die pas in de loop van de jaren '50 hun leidende marktposities verloren.

Vanuit het aanvankelijke rekenen beschouwd, is Bouman & Van Zelm (1918) een eenzijdige telmethode – eenzijdig, omdat daarin getalbeelden en allerlei aanschouwelijke middelen die tot groeperen leiden, worden geweerd. Getallen dienen onbenoemd te blijven: het zijn rekenkundige denkbaarheden en als zodanig niet aan objecten en figuren te binden.
In de handleiding staat cursief: '*Het rekenonderwijs heeft op het rekenen met onbenoemde getallen den nadruk te leggen.*' Wel is het toegestaan de kinderen bij het rekenen aanvankelijk stippen en rondjes 'op rij' te laten tekenen, want die hebben geen specifieke betekenis – aldus de auteurs.

Afgezien van het elementaire hoofdrekenen besteden ze buiten het getallengebied tot honderd geen aandacht aan flexibel hoofdrekenen. Pas in 1934 komen de auteurs in de sterk herziene versie van 'Rekenboek' op hun afwijzende standpunt terug – hier bepalen we ons tot de eerste versie.
De cijferalgoritmen worden via kolomsgewijs rekenen inzichtelijk aangeleerd. De auteurs blijven daarbij strikt in de leer: het gebruik concrete objecten en benoemde getallen als centen, dubbeltjes en guldens om de rekenprocedures binnen het decimale positiesysteem inzichtelijk te maken, wordt sterk ontraden. Het tiental gelijkstellen aan een dubbeltje bijvoorbeeld, maakt het begrip en de toepasbaarheid ervan niet gemakkelijker, volgens Bouman & Van Zelm. Curieus is echter dat ze zich aan die toepasbaarheid niet zoveel gelegen laten liggen. Neem de deling: in de deeltjes 5 en 6 staan tegenover 2500 kale opgaven slechts 50 toepassingen van opdelen en verdelen. Alles bij elkaar worden aan cijferen ongeveer 400 lesuren besteed, waarvan 200 aan kolom- en staartdelen. Toepassingen verschijnen pas veelvuldig vanaf deeltje 9, dus op het moment dat de leerlingen die niet naar het middelbaar onderwijs gaan, ongeveer stoppen.
Vanwege het verwaarlozen van het flexibele (hoofd)rekenen en de achterstelling van toegepaste cijferen in de onder- en middenbouw, staat de oorspronkelijke versie van de duale Bouman & Van Zelm dichter bij de procedurele dan bij de conceptuele methodes. De grote aandacht die deze methode aan complexe denksommen besteedt, doet aan deze conclusie niets af omdat het leren oplossen daarvan vooral een kwestie is van trainen op het herkennen van som-typen waar de oplossingsmethoden voor ingeoefend zijn. Heb je geen training gehad dan lukt het niet of met veel moeite dergelijke sommen correct op te lossen – denk in dit verband aan enkele 'vormende' procentopgaven die in paragraaf 4 van hoofdstuk 3 geciteerd werden.

> A betaalt voor een baal koffie *f* 160,38. Als hij 1% voor contante betaling en 10% tarra genoten heeft en 45 cents voor het halve K.G. heeft moeten betalen, hoeveel bedroeg dan het bruto gewicht van die baal?

Welke geoefende, kundige rekenaar kan vandaag de dag deze 'normale' denksom van weleer nog kraken?

Diels & Nauta hebben zich om deze reden heftig tegen dergelijke denksommen gekant. Maar doordat deze vraagstukken, ondanks verzet uit het lager onderwijs en de denkpsychologie, op het repertoire van de toelatingsexamens tot het middelbaar onderwijs bleven staan, moesten ze wel toegeven en complexe denksommen in hun rekenboekjes opnemen.
Echter niet alleen aan het einde doch ook aan het begin van het reken-onderwijs wijkt deze methode af van Bouman & Van Zelm (eerste versie). Naast tellen wordt het werken met getalbeelden in het rekenen tot twintig betrokken. Opgaven met benoemde getallen worden niet geweerd, al verschijnen ze pas mondjesmaat aan het einde van de leergang van het rekenen tot twintig.
Vanaf het tweede leerjaar wordt in iedere les veel tijd ingeruimd voor hoofdrekenen met ingeklede vraagstukjes en voor rekendictees met kale sommen. Daarmee scharen de auteurs zich volledig achter een leidraad van de schoolinspectie uit 1936 die luidt: 'Aan het hoofdrekenen dient een belangrijke plaats ingeruimd te worden; wanneer dit met kleine getallen gebeurt, heeft het niet alleen practische waarde, maar bevordert het ook het inzicht'.
'Fundamenteel Rekenen' is de eerste methode die het schatten op het onderwijsprogramma zet. Dit wordt als volgt gemotiveerd: 'Het zuiver mechanisch werken trachtte men verder tegen te gaan door herhaaldelijk vóór het uitrekenen de uitkomst te laten schatten.'
Tot zover beschouwd, is Diels & Nauta een puur conceptuele methode. Maar dit beeld verandert indien we het cijferen in beschouwing nemen. Zoals men al uit het citaat over het schatten kan opmaken, staan de auteurs kritisch, om niet te zeggen negatief, tegenover het cijferen. Ze spreken in dit verband over dresseren en mechaniseren wat gedachteloosheid in de hand werkt en inzicht in het getallensysteem zou verduisteren. Het aantal cijfersommen is dan ook aanzienlijk kleiner dan bij Bouman & Van Zelm – voor delen slechts een kwart. Wat voorts

opvalt, is dat de cijferprocedures, ook bij relatief kleine getallen als 364 : 7, niet inzichtelijk worden onderwezen, terwijl dat hier toch met kolomsgewijs delen voor de hand zou liggen. En dan de toepassingen van het cijferende rekenen met grote getallen en kommagetallen: die komen pas in de bovenbouw aan bod. Al met al een typisch procedurele aanpak.
Naast de vernieuwende, conceptuele elementen van het flexibele (hoofd)-rekenen, schatten en de toepassingen ervan, bevat Diels & Nauta dus ook leergangen die in de lijn van de procedurele methodes uit het eerste kwart van de 20ste eeuw staan. Vandaar dat deze veelgebruikte methode, net als die van Bouman & Van Zelm, als duaal aangemerkt moet worden, ook al staat zij dichter bij de conceptuele onderwijsaanpak dan laatstgenoemde.

## 4 Het tijdvak van de procedurele en functionele methodes 1950-1985

Getalsmatig bezien, domineren in dit tijdvak de *procedurele* methodes. Niet minder dan vijf rekenboeken wisten een substantieel marktaandeel te verwerven, met 'Naar Zelfstandig Rekenen' langjarig als grootste. Ze voldoet inhoudelijk volledig aan de algemene kenschets van de procedurele aanpak. Wat de methode speciaal maakt, is de praktische organisatie van het zelfstandige werken in losser klasseverband, mogelijk gemaakt door de bijzondere opzet van de rekenboekjes. Naast iedere sommenpagina staat een bladzijde met suggesties en uitgewerkte voorbeeldsommen die, waar nodig, door de leerkracht nader kunnen worden toegelicht. De leerstof is stelselmatig opgedeeld in kleine eenheden die zijn geordend naar toenemende complexiteit. Uitgaande van deze gegevens kan men niet anders dan vaststellen dat deze procedurele methode vakkundig is samengesteld: de door de leerstof bepaalde uitlijning is goed doordacht en de aanwijzingen voor de leerlingen zijn terzake. Mede daardoor is de methode in het onderwijs van alledag betrekkelijk eenvoudig te hanteren. De andere grote procedurele methode 'Niveaucursus Rekenen' heeft eveneens een losser klasseverband en komt inhoudelijk in hoge mate met 'Naar Zelfstandig Rekenen' overeen.

De ideeënvorming over het *functionele* rekenonderwijs en de methodische uitwerking ervan, waren in de tweede helft van de 20ste eeuw even vernieuwend als in de heuristische periode driekwart eeuw eerder. Vooral de inzichten van de Amsterdamse denkpsychologische school inspireerden verschillende methodeschrijvers om nieuwe (leer)wegen in te slaan. De bekendste waren Reijnders en Snijders die de methode 'Functioneel Rekenen' (1957) samenstelden. Maar Rombouts komt de eer toe om met zijn 'Geef Acht!' (1949) al wat eerder een nieuwe conceptuele methode ontwikkeld te hebben. De methode 'Nieuw Rekenen' (1969), die zich ook als een functionele methode afficheerde, had van deze drie methodes, getalsmatig bezien, het meeste succes.

'Functioneel Rekenen' legt veel nadruk op:

- het belang van het klassikaal (na)bespreken van de verschillende oplossingsmethoden voor kale sommen en ( levensechte) opgaven;
- het zelf produceren van sommen in gevarieerde vormen, zoals het bedenken van sommen bij een gegeven uitkomst, of een passend vraagstukje bij een gegeven kale som, of een vraag formuleren bij een vraagloos vraagstuk;
- de kracht van visuele modellen zoals de getallenlijn, tabellen en stroken, bij het oplossen van problemen;
- de waarde van het schattende rekenen voor het globaal bepalen of controleren van de uitkomst van een berekening, maar vooral ook als didactisch middel ten dienste van het precieze uitrekenen.

Het laatstgenoemde punt is een volstrekt nieuw idee dat met het voorbeeld 52 + 29 nader wordt toegelicht. Eerst wordt de uitkomst daarvan naar beneden (70) en naar boven (90) begrensd, en vervolgens langs verschillende wegen nader gepreciseerd via vragen als 'hoeveel meer dan 70?' en 'hoeveel minder dan 90?'. De toelichting wordt besloten met: 'Dergelijke oplossingsmethoden moeten bij de klassikale besprekingen of nabeschouwingen bij groepswerk steeds weer naar voren komen. Het hanteren der getallen geschiedt hier heel anders dan bij het cijferen.'

Over cijferen wordt opgemerkt: 'Door de hele methode heen is er naar gestreefd het mechanisch werken met getallen – d.w.z. het toepassen van uit het hoofd geleerde kunstgrepen – zoveel mogelijk te vermijden.'
Ofschoon de titel van de methode een program inhoudt – namelijk 'het helpen bevorderen van de doorbraak van inzicht' – wordt dit beginsel niet op het leren cijferen toegepast. Net als bij Diels & Nauta worden de standaardprocedures voor hele getallen, kommagetallen en breuken puur receptmatig aangeleerd. Wel bevat de methode ook in de bovenbouw toepassingen van onderscheiden vorm: vraagloze vraagstukken, vrije producties, gesloten vraagstukken waarin leerlingen de passende bewerkingen moeten ontdekken, plus elementaire hoofdreken- en schatsommen, kaal of in schemavorm.

'Nieuw Rekenen' maakt de inzichtelijke overgang van splitsend en kolomsgewijs rekenen naar cijferend rekenen in tegenstelling tot 'Functioneel Rekenen' wel.
De staartdeling wordt met een opgave als 72 : 3 ingeleid met de vraagstelling: 'In hoeveel groepjes van 3 kan ik 72 verdelen?'

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3/ 72 \20 + 4 | 3/ 72 \2 . | | 3/ 72 \24 | 3/ 72 \24 |
| $\underline{60}$ | $\underline{60}$ | | $\underline{60}$ | $\underline{6}$ |
| 12 | 12 | → | 12 | 12 |
| $\underline{12}$ | | | $\underline{12}$ | $\underline{12}$ |
| 0 | | | 0 | 0 |
| (a) | (b) | | | (c) |

Eerst mogen de leerlingen bij enkele opgaven schema (a) gebruiken, maar al snel moeten ze overstappen op (b). De verkorting in de notatie van '20 + .' naar '2 .' voltrekt zich in één les per geval. Bij moeilijker opgaven wordt de overgang van (b) naar (c) gemaakt.
Deze fasering sluit aan bij de 'heuristische' aanpak en bij Bouman & Van Zelm. Alleen voltrekt de overgang van (a) via (b) naar (c) zich bij 'Nieuw Rekenen' in enkele lessen en is kennelijk vooral bedoeld voor de onderwijsgevende die op deze wijze een inzichtelijke verklaring van de verkorte standaardprocedure kan geven. Ook breuken, verhoudingen en procenten worden in die zin inzichtelijk onderwezen dat de leraar, de

methode volgend, de betreffende begrippen en operaties zo duidelijk mogelijk met behulp van modellen en schema's uitlegt.
'Nieuw Rekenen' bevat vele en gevarieerde toepassingsopgaven, die soms in een thematische reeks staan, bijvoorbeeld over winkelen, kassabonnen, buitenlands geld, treinreizen en afstanden in Europa. De gesloten, half-open en open opdrachten passen in de leergangen die op dat moment aan de orde zijn: het zijn toepassingen van wat eerder puur getalsmatig is geleerd.

In dit opzicht onderscheidt 'Nieuw Rekenen' zich van Rombouts die in zijn 'Geef Acht!' (1969) stelt: 'Het vraagstuk, het echte rekenprobleem, sta aan het begin, sta insgelijks aan het einde. Men gaat er van uit om de becijfering inhoud te geven, en men keert er telkens naar terug, daar alles ook voor de leerlingen een doel moet hebben. Niet eerst 'rekenen' en later 'toegepast rekenen', maar tezamen, verbonden'. Deze methode kenmerkt zich voorts door de nadruk op flexibel hoofdrekenen, praktische toepasbaarheid, eigen producties en versobering van de leerstof. Dit laatste werd, wat de denksommen en metrieksommen betreft, pas definitief gerealiseerd toen begin jaren '70 de Cito-eindtoets de rol van het toelatingsexamen van het voortgezet onderwijs overnam.

### 5 Naar een nationaal rekenprogramma 1985-1990

Omstreeks die tijd ging ook het grootschalige Wiskobas-project van start. In de periode 1971 - 1981 ontwikkelde het Wiskobas-team met en in het onderwijsveld eerst een grote verzameling rijke problemen en thema's, en vervolgens (aanzetten tot) nieuwe leergangen voor verschillende onderwerpen van rekenen, meten en meetkunde.
De publicaties van Wiskobas fungeerden als inspiratiebron voor de nieuwe, realistische methodes die rond 1980 aarzelend op de onderwijsmarkt verschenen - aarzelend, omdat de inhoud ervan niet naadloos aansloot bij het gangbare rekenonderwijs en de Cito-eindtoets. Het gevolg van een en ander was dat het methodebestand een (te) grote diversiteit ging verto-

nen. De noodzaak van een (nieuw) nationaal rekencurriculum met expliciet geformuleerde einddoelen diende zich nadrukkelijk aan. Op initiatief van de 'Nederlandse Vereniging tot ontwikkeling van het rekenwiskundeonderwijs' (NVORWO) werd, na raadpleging van honderden betrokkenen uit het onderwijsveld, in 1987 de 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs' samengesteld. De einddoelen daarvan werden enkele jaren later officieel van een overheidsstempel voorzien en gingen als bakens voor methode-auteurs en toetsontwikkelaars fungeren.
De concrete leerdoelen van de Proeve hebben betrekking op de leerstofdomeinen van basisvaardigheden, cijferen, verhoudingen, breuken, procenten, meten en meetkunde.

1. Bij de basisvaardigheden komt veel nadruk te liggen op inzicht in het positiesysteem, hoofdrekenen, schattend rekenen, toepasbaarheid en een passend gebruik van de rekenmachine.
2. Bij het cijferen wordt ruimte geboden om varianten van de gangbare procedures te leren zoals we die bijvoorbeeld in het historische onderzoek eerder bij de staartdeling tegen kwamen.
3. Verhoudingen worden vanwege het grote toepassingsbereik veel breder opgevat dan de formele evenredigheden van het traditionele rekenen. Praktisch procentrekenen krijgt eveneens veel aandacht – begrip van 'procent' staat voorop.
4. Breuken en kommagetallen, en de relaties ertussen, worden op verschillende manieren betekenis gegeven. De leerlingen moeten in eenvoudige toepassingssituaties breuken en kommagetallen kunnen vergelijken, ordenen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Rechtstreeks aansturen op beheersing van de rekenregels voor deze vier basisoperaties wordt afgewezen.
5. Aan meten, rekenen met gangbare maten en het verwerken van meetgegevens in schema's en grafieken wordt meer aandacht geschonken dan vroeger; minder aandacht krijgt het exerceren in het metrieke stelsel.
6. Aanvankelijk gaat het bij meetkunde meer om kijken en proberen (kijkdoos, foto's, lokaliseren, licht en schaduw, blokkenbouwsels) dan om redeneren en rekenen, zoals bij aanzichten,

verhoudingen, perspectief, uitslagen van ruimtefiguren en het maken van bouwsels. Startend bij de waarnemingswerkelijkheid komt een grote veelzijdigheid van wiskundige aspecten aan de orde, zoals het visualiseren, het gebruiken van meetkundige modellen, het ruimtelijk oriënteren en redeneren, het reflecteren op het eigen handelen, het toepassen van meetkundige kennis en inzichten op praktische en puzzelachtige problemen, en dat alles in samenhang met onderwerpen uit de gebieden van rekenen en meten.

De Proeve beperkt zich niet tot de einddoelen van het rekenonderwijs maar doet ook uitspraken over de didactiek en geeft daarvan concrete beschrijvingen. Allereerst worden de algemene uitgangspunten geschetst, die zijn te herleiden tot vijf principes over eigen producties, reflectie, interactie, niveau en structuur. Deze worden naar realistisch gebruik vaak aan de hand van een illustratief voorbeeld uit de onderwijspraktijk of een methode toegelicht. Eerder gebeurde dit met een krantenknipsel bestemd voor groep 5/6 over de kwestie of iemand 220 uur per week kan werken. Het betreffende lesverslag laat zien waarin het realistische rekenonderwijs zich van het procedurele rekenonderwijs onderscheidt en tevens gradueel verschilt van de functionele aanpak die door de bank genomen niet zulke rijke problemen aanbiedt. Daarnaast bevat de Proeve beschrijvingen van verschillende leergangen, zoals van aanvankelijk rekenen, breuken, verhoudingen procenten en meten, die afwijken van wat tot dan toe gebruikelijk was. En tot besluit staan in het laatste deel 100 opgaven uit de genoemde leerstofdomeinen die laten zien wat probleemgericht rekenonderwijs kan inhouden. Al met al hebben de genoemde herzieningen van de leerstof en de einddoelen plus de didactische heroriëntatie hun invloed op de methodes niet gemist.

## 6 Realistische methodes en Cito-onderzoeken 1990-2010

De eindtermen sluiten aan bij leerstofdoelen van de functionele methodes waarin naast het cijferen met niet al te grote getallen, vooral ruime aandacht wordt besteed aan getalinzicht, flexibel (hoofd)rekenen en schattend rekenen, plus het uitsluitend rekenen met gangbare breuken en veel gebruikte metrieke maten. Nieuwe onderdelen van de realistische methodes betreffen het toegepaste rekenen met behulp van de rekenmachine en de meetkundige wereldoriëntatie. Ook ligt de didactische benadering van de nieuwe, realistische methodes globaal bezien in de lijn van de functionele aanpak – globaal, omdat de functionele aanpak voor de tweede helft van de basisschool te wensen overlaat. Dit is het eerste verschil met de realistische methodes die wel het totale rekenprogramma vernieuwen. Het tweede verschil zit in het meer probleemgerichte en (vaak) thematische karakter van de realistische aanpak. En het derde betreft de veelomvattende inzet van contexten en modellen, zoals het rekenrek, de (lege) getallenlijn, de (procenten)strook en allerhande diagrammen, schema's en tabellen.

De twee meest gebruikte methodes in de periode 1985-2010 zijn 'Wereld in Getallen' (WiG) en 'Pluspunt' (PP). Vanaf 2000 is hun gezamenlijke marktaandeel 70 procent. Andere realistische methodes met een substantiële verspreidingsgraad zijn 'Rekenrijk', 'Alles Telt' en in mindere mate 'Wis en Reken', de opvolger van een van de eerste realistische methodes 'Rekenen en Wiskunde'. Deze rekenboeken baseren zich op de vijf principes van het realistische rekenonderwijs waarin de leerlingen in een interactieve, (semi-) klassikale onderwijssetting een productieve inbreng krijgen.
In het geval van PP zelfs zoveel inbreng dat de sturende rol van de leraar binnen bepaalde leergangen soms in de knel komt. Deze methode reserveert drie van de vijf lessen per week voor zelfstandig werken. Mede om deze redenen is PP hier semi-instructief genoemd. Dit in tegenstelling tot de instructieve WiG die niet alleen vier van de vijf lessen klassikaal organiseert, maar ook meer (be)geleid onderwijs biedt. Het verschil tussen deze twee realistische methodes komt speciaal bij het cijferen tot uitdrukking.
Maar ook bij een leergang als procentrekenen bijvoorbeeld biedt PP minder aangrijpingspunten voor (be)geleid onderwijzen.

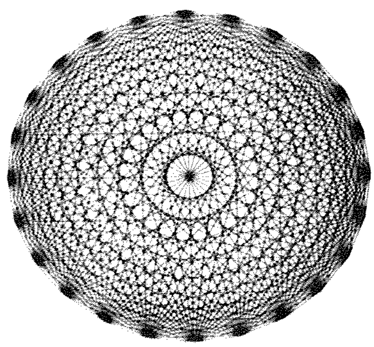
Naast de didactische organisatie maakt vooral de thematisch opzet PP tot een aansprekende methode die in de periode 2000-2010 een marktaandeel van 45 procent weet te verwerven, tegenover 25 procent voor WiG. Deze keuze werd niet ingegeven door de rekenprestaties, want die vallen bij de eerste drie grootschalige periodieke peilingen van het Cito (1987-1997) ten gunste van WiG uit.

Wat deze onderzoeken vooral ook laten zien, zijn de vergelijkende opbrengsten van de procedurele methodes ten opzichte van de functionele en realistische methodes.
Zowel 'Nieuw Rekenen' als 'Pluspunt' scoren op de 24 onderzochte onderdelen gemiddeld ruim 5 procentpunten hoger dan 'Naar Zelfstandig Rekenen' en 'Niveaucursus Rekenen'. En 'Wereld in Getallen' eindigt gemiddeld 10 procentpunten hoger dan de genoemde procedurele methodes, en bij basisoperaties, schattend rekenen, toegepast rekenen met behulp van de rekenmachine en procentrekenen loopt het verschil zelfs op tot ongeveer 20 procent!
Voor de didactische ideeënvorming is de uitkomst van deze Cito-onderzoeken over de onderscheiden methodes van blijvende betekenis: de leerlingen presteren met de genoemde conceptuele methodes beter dan met de procedurele methodes. Alleen bij het onderdeel 'bewerkingen' (cijferen) zijn de verschillen tussen de genoemde methodes in de eerste drie peilingen gering.

In 1999 is echter al wel duidelijk dat de goedscores van dit onderdeel ten opzichte van de eerste peiling uit 1987 dalen – een trend die zich in de vierde peiling van 2004 voortzet, maar in 2011 stopt. Daar staat tegenover dat, omgekeerd, de prestaties bij andere onderdelen stijgen: getalinzicht, hoofdrekenen (+, -), schattend rekenen, toegepast rekenen met behulp van een rekenmachine, procentrekenen en verbanden (grafieken) gaan gemiddeld 15 procentpunten vooruit – ongeveer evenveel als het cijferen daalt. (Zie voor meer gedetailleerde gegevens de Appendix.)

## 7 Tot besluit: methode en leraar

De waardering voor de leerprestaties, die in de periode 2000 - 2010 met de realistische rekenmethodes op de periodieke peilingen werden behaald, is, zoals gezegd, sterk afhankelijk van het gewicht dat men wenst toe te kennen aan de standaardprocedures van het cijferen ten opzichte van het hoofdrekenen, het schatten, het verstandig inzetten van de rekenmachine, het procentrekenen en het doorzien van verbanden en grafieken.
Maar evenzeer van belang is de waarde die aan de algemene doelstelling van probleemoplossen wordt toegekend, een waarde die niet of moeilijk met de periodieke peilingen valt te meten.
Neem bijvoorbeeld het probleem over een 'toverroos' met 24 punten die regelmatig over de omtrek van de cirkel zijn verdeeld - een opgave uit de instructief realistische methode 'Wis en Reken', een opgave ook die model kan staan voor alle toversommen, van 'het magische getallenvierkant' en 'de verdwenen wijnflessen' in de onderbouw, tot 'Achilles en de schildpad' en 'de graankorrels op het schaakbord' in de bovenbouw. [1][8]



Hoeveel verbindingslijnen heeft deze toverroos?

Bij het systematische tellen kunnen op zijn minst de volgende twee methoden worden gevolgd.

1) Kies een punt, zeg A. Vanuit dit punt kunnen 23 verbindingslijnen worden getrokken. Uit het naastliggende punt B vertrekken 22 lijnen en zo verder. Bij elkaar zijn dat 23 + 22 + 21 + ... + 3 + 2 + 1 verbindingen. Deze lange som kan handig worden bepaald door de uitersten in paren te sommeren 23 + 1; 22 + 2;

... en vervolgens 11½ x 24 (handig) te berekenen via bijvoorbeeld verdubbelen en halveren van de twee factoren.

2) Een abstractere aanpak gaat via het dubbel tellen van de verbindingen. Als je vanuit ieder punt 23 lijntjes zou trekken, tel je ieder lijntje dubbel, dus moet je 24 x 23 door 2 delen om het juiste totaal te vinden.

Deze twee methoden worden in de Handleiding beschreven. Maar dan moet er nog wel een interessante, leerzame les voor ontwikkeld worden.
Dat kan bijvoorbeeld door de kinderen eerst in tweetallen het probleem te laten verkennen aan de hand van de vraag hoe je de telling ordelijk zou kunnen verrichten. Daarna worden de aanpakken klassikaal geïnventariseerd, waarbij naar verwachting vooral de eerstgenoemde methode vaak gevolgd zal zijn. Na de berekening brengt de leraar de tweede manier naar voren via de vraag 'Stel nu eens dat je vanuit ieder punt steeds 23 lijntjes zou tellen; hoeveel heb je dan teveel geteld?'
Nadat de tweede methode is besproken, wordt de relatie tussen de vermenigvuldiging ½ x 24 x 23 en de lange optelling uit de eerste werkwijze aan de orde gesteld.
Het probleem kan echter zo sturend behandeld worden dat er voor de leerlingen maar weinig te ontdekken valt. Ook is het mogelijk dat de leraar de tweede aanpak onbesproken laat of juist als enige naar voren brengt. Dit voorbeeld laat nog eens zien hoe belangrijk, naast de methode, de rol van de leraar is. De leraar en het schoolteam kunnen door de keuze van een methode hun eigen invulling aan 'Weg van het cijferen' geven.[1)]

## Noot

1) Anno 2015 hebben vrijwel alle basisscholen, na de eerste euro-versies, weer een nieuwe rekenmethode gekozen. De marktaandelen van de grootste methodes uit de periode 2000-2010 zijn ingrijpend gewijzigd.
Het gebruik van 'Wereld in Getallen' is met 25 procentpunten tot 50 procent gestegen.[5] En daarmee is de oudste realistische methode van Huitema c.s. een van de meest succesvolle en invloedrijke uit de geschiedenis van het Nederlandse rekenon-

derwijs geworden. De nieuwste versie is zowel qua didactische organisatie als inhoud herzien. De leerlingen krijgen een weektaak voor zelfstandig werken, waaraan ze in het tweede gedeelte van iedere les, na de klassikale instructie, op een passend minimum-, basis- of plusniveau kunnen werken. Voorts zijn enkele leergangen van meten bijgesteld en is het onderdeel cijferen sterk ingekort en bij optellen, aftrekken en vermenigvuldigen meer op kolomsgewijs rekenen afgestemd.
Het marktaandeel van 'Pluspunt' is met 25 procentpunten tot 20 procent gedaald.[2] In tegenstelling tot de eerste euro-versie wordt nu veel tijd aan het cijferen besteed, veel meer dan 'Wereld in Getallen'. De didactische organisatie van het semi-klassikale systeem met drie lessen zelfstandig werken en twee instructielessen is niet gewijzigd. Wel worden net als bij 'Wereld in Getallen' nu drie differentiatie-niveaus aangeduid.
De eerdergenoemde methodes uit het tijdvak 2000-2010 zijn eveneens herzien en hun marktaandelen gewijzigd: 'Alles Telt' is gestegen en 'Rekenrijk' gedaald. [3] [6] Van 'Wis en Reken' is geen bijgestelde, nieuwe versie beschikbaar. De twee nieuwe rekenmethodes 'Wizwijs' en 'Reken Zeker' hebben geen substantieel marktaandeel weten te verwerven. [3] [7]
Al met al betekent dit dat de periode van 2015 tot omstreeks 2025 door realistische methodes gedomineerd zal blijven en dat het cijferen ook in het komende decennium geen overheersende positie in het rekenonderwijs op de basisschool zal innemen. (Zie voor onder meer de discussie over het rekenonderwijs: [7].)

## APPENDIX

# Balans van de vernieuwing 1990-2010

## Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken is de visie van het realistische rekenonderwijs beschreven en zijn enkele gezichtsbepalende moderne methodes geanalyseerd. De kernvraag van dit hoofdstuk luidt:
'Wat zijn de resultaten van de vernieuwing van het rekenonderwijs die zich in de periode 1990 - 2000 - 2010 heeft voltrokken?'
Om deze vraag te beantwoorden, maken we gebruik van nationale en internationale onderzoeksgegevens.
Eerst wordt ingegaan op de individuele peilingen van opgaven die zowel in 1987 als in 2004 zijn afgenomen. Deze vraagstukken hebben betrekking op alle rekenonderdelen uitgezonderd het cijferen. Niet alleen de goedscore maar ook de manier waarop kinderen de sommen oplossen wordt in de individuele peilingen geregistreerd.
Daarna worden de resultaten van de peilingen uit 2004 en 2010 vergeleken met die van 1987 en 1992 toen het rekenonderwijs nog hoofdzakelijk traditioneel was opgezet. Toepassingen krijgen speciaal de aandacht. In de paragraaf 'Getallen in de wereld' worden de Nederlandse rekenprestaties van verschillende internationale onderzoeken uit 2004, 2011 en 2012 besproken. Tot besluit komt de kwestie van de algemene rekendoelstelling van het probleemoplossen aan de orde. Bij de waardebepaling van het rekenonderwijs en van de kwaliteit van een rekenmethode dient meegewogen te worden of en hoe er aandacht is voor probleem- en onderzoeksgericht onderwijs, dat niet zonder meer in de opbrengsten van de nationale en internationale onderzoeken zichtbaar gemaakt kan worden.

## 1 Individuele peilingen 1987 - 2004

We beschikken over de scores van een aantal gemeenschappelijke opgaven van individuele, mondelinge toetsafnamen in de periodieke Cito-peilingen uit 1987 en 2004 die bij ongeveer 140 leerlingen zijn afgenomen.
De proefpersonen uit deze individuele peiling van 2004 zijn als volgt via een steekproef van een steekproef geselecteerd:

> 'Op ongeveer de helft van de 122 scholen vonden er in de namiddag bij enkele leerlingen (ongeveer zes per groep) individuele afnames van vijf of zes rekenopgaven plaats. De leerlingen werden op evenredige afstand uit een alfabetisch gerangschikte leerlingenlijst geselecteerd. De individuele afnames waren erop gericht enig inzicht te krijgen in en te kunnen rapporteren over de oplossingsprocedures die de leerlingen bij het maken van de opgaven gebruiken. [6, p.27]

De opgaven kunnen model staan voor het rekenonderdeel dat ze representeren. Ze hebben betrekking op getalinzicht, hoofdrekenen, schattend rekenen, breuken, verhoudingen en procenten.
Aangezien de steekproef van de individuele peiling te klein is, kan aan de goedscores van de betreffende opgaven geen absolute waarde worden toegekend. Maar een indicatie van de vergelijkende prestaties uit 1987 en 2004 geven ze wel. [14] [6]

De eerste vier opgaven van de individuele afnames dienen uit het hoofd berekend te worden, dus zonder gebruik te maken van uitrekenpapier, en zonder het noteren van tussenuitkomsten, zo luidt de instructie voor de leerlingen en de proefleiders.

---

| Acht ankersommen | **'87** | **'04** |
|---|---|---|
| 1.Wilma is 153,6 cm lang.<br>Vorig jaar was haar lengte 146,7 cm.<br>Hoeveel is Wilma sinds vorig jaar gegroeid? | 60% | 69% |
| 2.Twee kilo kuikenbouten kosten € 8,98.<br>De chef van het restaurant koopt 10 kilo in.<br>Hoeveel moet hij betalen? | 60% | 69% |

| | | |
|---|---|---|
| 3.Yvonne rekent uit op haar rekenmachine<br>715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091<br>Bij het opschrijven van het antwoord<br>is ze de komma vergeten.<br>Wat moet het antwoord zijn? | 27% | 71% |
| 4.In de prijzenpot zit € 6327,75.<br>Er zijn 8 winnaars die dit met<br>elkaar moeten delen<br>Hoeveel geld moet ieder dan<br>ongeveer krijgen?<br>Rond af op honderd euro. | 35% | 66% |
| 5.Hiemden heeft ruim 50.000 inwoners<br>Een ½% van die inwoners is ouder dan 80 jaar<br>Dat zijn ongeveer ...... mensen. | 41% | 58% |
| 6.Ongeveer ¾ deel van de leerlingen van de<br>Plerikschool komt lopend naar school.<br>Van de rest wordt de helft gebracht en<br>komt de helft op de fiets.<br>Welk deel van de leerlingen van deze school<br>komt op de fiets? | 43% | 75% |
| 7. De ijscoman heeft berekend dat hij<br>per 10 ijsjes het volgende verkoopt:<br>- 2 bekertjes<br>- 3 hoorntjes<br>- 5 waterijsjes<br>Hij bestelt 700 ijsjes.<br>Welke verdeling houdt hij aan?<br>.... Bekertjes<br>.... Hoorntjes<br>.... Waterijsjes | 56% | 76% |
| 8. Koptelefoons van € 60,- met 30% korting.<br>Hoeveel moet je voor een koptelefoon betalen? | 42% | 71% |

1) In 1987 loste 34% van de leerlingen de Wilma-som op via 'hoofdcijferen' en 44% via aanvullend optellen, waarbij soms ook de strategie 'plus 7 minus 0,1' werd gevolgd.
In 2004 wordt 10% minder gecijferd en 15% meer aangevuld, in beide gevallen met wat hogere goedscores – al met al geen opzienbarend verschil.

2) Hoewel de scores overeenkomen met de vorige som zijn de verschillen in oplossingsstrategieën bij de kuikenbouten-som groter. In 1987 rekende 37% via hoofdcijferen en 30% met handige rekenwijzen van 5 x 9 – 5 x 0,02 dan wel 89,90 : 2.
In 2004 cijfert 20% uit het hoofd en rekent 68% handig.

3) In 1987 gaf 36% van de leerlingen bij de Yvonne-som het antwoord 13,091 omdat de meeste getallen drie cijfers achter de komma hebben, en kwam 6% tot 0,0013091 door het aantal cijfers achter de komma bij elkaar op te tellen; 13% rekende globaal schattend volgens 700 + 600 om de komma goed te kunnen plaatsen.
In 2004 redeneert slechts één op de tien leerlingen vormelijk via het tellen van de cijfers achter de komma's; 55% van de kinderen rekent globaal met ronde getallen.
De Cito-onderzoekers noemen de toename van het percentage goede antwoorden 'opzienbarend'. Maar nog opmerkelijker is wellicht het hoge percentage komma-tellers dat zich in 1987 door irrelevante vormkenmerken liet (mis)leiden.

4) Ook de prijzenpot-som geeft een grote toename van de goedscore te zien. En weer springt de afname van het cijferend rekenen uit het hoofd en de toename van het globale rekenen in het oog. In 1987 rekende 27% van de leerlingen via 6400 : 8, terwijl in 2004 maar liefst 58% zo handig rekent. Hoofdcijferen neemt in deze periode af van 36% naar 16%.

De condities waaronder de volgende vier opgaven werden afgenomen, zijn dezelfde als bij het vorige viertal. Alleen hoefden de sommen nu niet uit het hoofd berekend te worden.

5) Het verschil in goedscores in de Hiemden-som is vrijwel volledig toe te schrijven aan het al dan niet opmerken dat ½ gekoppeld is aan 'procent' en dus niet op zichzelf staat. In 1987 zag 43% van de leerlingen dat ½ benoemd is en in 2004 ziet 58% dat. De overige leerlingen berekenen voor het merendeel de helft van 50 000 en komen zo op 25 000 hoogbejaarden uit!

6) In 1987 rekende 46% kort en goed volgens 'de rest is ¼ en daarvan is de helft 1/8. Van de leerlingen volstond 16% met de berekening van de rest en 11% gaf de helft als antwoord.
In 2004 volgt maar liefst 81% de eerste oplossingsprocedure, zij het in vele varianten waarbij gebruik wordt gemaakt van visualiseringen (cirkel en strook) en omzettingen naar procenten en kommagetallen. De forse stijging van de goedscore is hiermee te verklaren, want in bijna alle gevallen zijn de leerlingen daarbij succesvol.

7) De oplossing '700 ijsjes is 70 x 10 ijsjes, dus 2, 3 en 5 moeten ook met 10 vermenigvuldigd worden' werd in 1987 door 48% van de leerlingen gevolgd, en in 2004 doet 73% dat. De meest voorkomende verkeerde oplossing was die waarbij 2, 3 en 5 met 10 worden vermenigvuldigd en die kwam in 1987 vaker voor dan in 2004. Hetzelfde geldt voor 'geen antwoord'.

8) In 1987 rekende 7% van de leerlingen via '10% is € 6, dus 30% is € 18, dus ...' In 2004 volgt 65% deze werkwijze! Nu worden ook minder begripsfouten gemaakt als: '€ 60 - € 30' en '30% is 1/3 deel is € 20'.
In het Cito-rapport wordt het volgende over deze som opgemerkt:

> 'Op basis van deze resultaten kunnen we concluderen dat leerlingen meer inzicht in procenten hebben gekregen. Niet alleen maken veel meer leerlingen procentopgaven, zoals de hiervoor besproken individueel afgenomen opgaven, goed in 2004, maar ook veel meer leerlingen gebruiken in 2004 in vergelijking met 1987 oplossingsprocedures waarmee ze op een efficiëntere manier tot de oplossing komen. [6, p.157]

*Conclusie.* In de eerste vier voorbeelden van de individuele peiling valt op hoezeer het hoofdcijferen in de periode 1987-2004 daalt en het handige en globale rekenen toenemen, en daarmee ook de goedscores. De laatste vier opgaven laten zien dat de leerlingen in 2004 meer inzicht in verhoudingen, breuken en procenten hebben dan in 1987.

## 2 Individuele peilingen van het cijferen in 2004 en 2011

Voor het cijferen kunnen we bij de individuele, mondelinge peiling niet over gemeenschappelijke opgaven uit 1987 en 2004 beschikken. Maar in de individuele peiling van 2004 zijn bij 140 leerlingen wel drie cijfersommen over vermenigvuldigen en delen opgenomen. In het volgende beschrijven we de oplossingen en vermelden de goedscores van deze opgaven.

9) Een boekhandelaar verkocht het afgelopen jaar
704 boekenbonnen van 25 euro. Hoeveel euro is dat? 71%

In 2004 rekenen 2 van de 3 kinderen deze keersom cijferend uit met een goedscore van ruim 80%. Een kwart splitst 704 in 700 + 4, of 25 in 20 + 5 en gaat dan vermenigvuldigen – een omslachtige werkwijze die wellicht van de PP-leerlingen afkomstig is. Ruim de helft van deze berekeningen is correct.

10) De Meibloem heeft 32 nieuwe
geschiedenisboeken gekocht voor € 736,--
Hoeveel is de prijs per boek? 84%

Twee derde deel van de leerlingen gebruikt de kolomdeling en een kwart de staartdeling. De laatste aanpak met een successcore van 92% tegenover de eerste van 86%.

11) De handbalvereniging verzamelt iedere maand oud papier.
Vorig jaar verzamelde men 7849 kg.
Hoeveel kg is dat gemiddeld per maand?
Rond je uitkomst af op een heel getal. 60%

Dezelfde verdeling zien we bij deze opgave, alleen zijn de goedscores hier lager: 64% voor de kolomdeling en 73% voor de staartdeling die vaker door de sterke rekenaars wordt gebruikt zodat het verschil tussen de scores van deze aanpakken nog wat geringer is'

In de individuele peiling van 2011 is aan elke leerkracht van de onderzochte scholen gevraagd om een goede, een gemiddelde en een zwakke rekenaar te selecteren.
Per school hebben drie leerlingen en in totaal 329 leerlingen in het bijzijn van een testleider de volgende vijf opgaven gemaakt (bij elke opgave is het percentage goed vermeld).

1) 24 tennisballen voor € 36.
Hoeveel euro is dat per tennisbal? 72%

45 procent van de leerlingen losten deze som met een (kolomsgewijze) staartdeling op - goedscore bijna 80%. En 30 procent ging niet-algoritmisch tewerk - goedscore ruim 90%. Vele oplossingen bleken niet codeerbaar - goedscore 70%.

2) Jozien belt voor € 0,15 per minuut met haar mobiele telefoon.
De kosten van haar laatste gesprek zijn € 4,20.
Hoeveel minuten heeft ze gebeld? 74%

Ook deze som is door 45 procent van de leerlingen met behulp van een (kolomsgewijze) staartdeling opgelost - goedscore bijna 80%. Nu rekent 35 procent niet algoritmisch - goedscore 80%. De 5 procent niet codeerbare oplossingen halen een goedscore van 75 procent.

3) Drie kinderen verdelen € 23,70 eerlijk.
Hoeveel euro krijgt ieder? 76%

Ruim de helft van de kinderen lost deze opgave met een (kolomsgewijze) staartdeling op - goedscore 85%. Een derde deel hanteert de strategie van op-vermenigvuldigen: 7x plus 0,9x - goedscore ruim 80%. Tien procent rekent handig: '24 : 3 = 8, voor ieder 0,10 cent te veel; dus ieder 7,90' - goedscore 70%.

4) 24 x 19 = ... 73%

Deze pure keersom wordt op diverse manieren berekend: handig via 24x20, kolomsgewijs en cijferend - alle met een goedscore van

75% procent en hoger. Een derde deel van de leerlingen rekent splitsend en haalt een goedscore van 60%.

5) Een laptop kost € 749,50.
Juf Mirjam koopt voor school 5 laptops.
Hoeveel moet ze betalen? 82%

De verscheidenheid aan oplossingsmethoden is bij dit vraagstuk zelfs nog iets groter doordat 15 procent herhaald optelt - goedscore bijna 80%.
De cijferende oplossing die door 40 procent wordt gekozen haalt een goedscore van ruim 90%.
De handige aanpak via 5x750 komt met een goedscore van bijna 70% het laagste uit.

*Conclusie.* De goedscores van deze gevarieerde reeks opgaven laat nog eens duidelijk zien dat het onderdeel 'bewerkingen' van de PPON-leerstofindeling niet zonder meer gelijk gesteld mag worden met 'cijferen' De leerlingen blijken namelijk diverse andere rekenmethodes toe te passen - vaak afhankelijk van de context en van de specifieke aard van de getallen die daarin besloten liggen. Omdat in de mondelinge afname de kinderen moesten tonen hoe ze tot de uitkomst waren gekomen, konden ze niet met louter hoofdrekenen en het antwoord volstaan.
Hoe het zij, de goedscores geven een 'normaal' patroon te zien: in ieder geval zijn ze niet beduidend lager dan die met het traditionele rekenonderwijs behaald zouden zijn. [13, p.133-140]

## 3 Klassikale peilingen van 1987, 2004 en 2011

Vergelijking van de resultaten uit 1987 toen 65 procent van de scholen nog een procedurele methode gebruikte, met die van 1997 toen 80 procent een realistische methode had ingevoerd, laat zien dat er nog betrekkelijk weinig was gewijzigd.
Slechts op 3 van de 21 onderdelen stegen de uitkomsten ten opzichte van 1987 met 0,5 sd of meer, namelijk bij getalinzicht, hoofdrekenen (+, - ) en schattend rekenen.
Maar na 2000 veranderde dit toen alle scholen een realistische methode gingen gebruiken, waarvan 70 procent PP of WiG.

Van de 21 onderwerpen uit de rubrieken rekenen, meten en meetkunde geven we in het volgende alleen de vergelijkende scores als de verschillen meer dan 0,5 standaarddeviatie bedragen.

| | **1987 → 2004** |
|---|---|
| Getalinzicht | + 1,00 sd |
| Hoofdrekenen (+, -) | + 0,50 sd |
| Schattend rekenen | + 1,00 sd |
| Bewerkingen (+, -) | - 0,50 sd |
| Bewerkingen ( x, : ) | - 1,15 sd |
| Bewerkingen (algemeen) | - 0,80 sd |
| Procenten | + 0,50 sd |

De opbrengst van het domein 'getalinzicht' blijkt 1,00 sd groter te zijn. Hoofdrekenen (+,-) neemt met 0,50 sd toe, en schattend rekenen met 1,00 sd - een middelgrote tot grote stijging bij deze onderwerpen van zo'n 10 tot 20 procentpunten. Alleen bij hoofdrekenen (x,:) bestaat er nagenoeg geen verschil. De goedscores van 'bewerkingen' nemen sterk af.
De verschillen bij verhoudingen en breuken zijn slechts gering in positieve zin veranderd. Dit in tegenstelling tot die van 'procenten', waar de goedscore wel aanzienlijk is toegenomen

In de periode 2004-2011 is weinig veranderd. [13]

| | **1987 → 2011** | |
|---|---|---|
| Getalinzicht | + 0,80 sd | |
| Hoofdrekenen (+, -) | + 0,60 sd | |
| Schattend rekenen | + 1,25 sd | |
| Bewerkingen (+, -) | - 0,65 sd | |
| Bewerkingen ( x, : ) | - 1,15 sd | |
| Bewerkingen (algemeen) | - 0,65 sd | |
| Toepassingen (rek.mach.) | + 0,50 sd | (t.o.v. 1992) |
| Procenten | + 0,55 sd | |
| Verbanden | + 0,70 sd | (t.o.v. 1997) |

Alleen bij 'toepassingen m.b.v. de rekenmachine' en bij 'tabellen, grafieken en verbanden' zijn de toenames ten opzichte van 2004 tien procent en meer.
Hoe men de vergelijkende resultaten sinds 1987 op de verschillende domeinen waardeert, hangt in hoge mate af van de waarde die men aan 'bewerkingen' in vergelijking met getalinzicht, hoofdrekenen, schattend rekenen, procentrekenen en het kunnen maken van toepassingen met gebruik van de rekenmachine wenst toe te kennen.

### 4 Vergelijking individuele en klassikale peilingen

De grote verschillen van de laatste vier opgaven uit de eerder besproken individuele peilingen van 1987 en 20004 komen slechts in gedeeltelijk overeen met die van de klassikale peilingen. In 2004 zijn de scores bij breuken, verhoudingen en procenten achtereenvolgens 0,15 sd en 0,15 sd en 0,50 sd hoger dan die van 1987, dus variërend van zeer klein tot middelgroot, en in 2011 is dat ongeveer zo gebleven. Dit kleine positieve verschil is bij breuken en verhoudingen geringer dan men op grond van de eerder genoemde toenames zou verwachten. Voor breuken is de oorzaak daarvan eenvoudig te verklaren: optellen en aftrekken van kale breuken is in de methodes anno 2004 nog onvoldoende beoefend. Het denken in verhoudingen is, gelet op de score van opgave 2, wel verbeterd maar kennelijk nog te weinig om een significante vooruitgang in de standaardpeiling te bewerkstelligen. . [11, p.26].

> 'In de klassikale standaardpeilingen blijken de scores van 'bewerkingen' in 2004 en 2011 veel lager dan men op grond van de 'normale' resultaten uit de individuele peilingen zou verwachten. Opmerkelijk daarbij is dat een aanzienlijk deel van de leerlingen de opgaven uit het hoofd berekent. In de individuele peiling worden de leerlingen aangezet om de uitwerking op te schrijven, met als gevolg 30 procent hogere score.
> Ondersteuning voor de interpretatie dat vooral het maken van opgaven zonder uitwerking bepalend is voor de daling in prestaties, kan ook ontleend worden aan de resultaten van de individuele afnamen. Bij deze individuele afnamen maakten leerlingen de opgaven wél met behulp van het opschrijven van een

> uitwerking. De geleverde prestaties waren aanzienlijk beter, terwijl de strategieën afzonderlijk niet succesvoller waren. Het lijkt er dus op dat zodra de leerlingen een uitwerking opschrijven bij een oplossing van een deelopgave, waartoe ze goed in staat lijken te zijn, de prestaties vanzelf beter uitpakken '

Als schoolvoorbeeld van de daling bij 'bewerkingen' kan de goedscore van 99 x 99 = ... worden opgevoerd die op 43% uitkomt!
Dit voorbeeld toont tegelijk aan dat de daling niet zonder meer op de rekening van het cijferen gezet mag worden. Want indien 99 x 99 louter cijferend wordt opgelost, komt de goedscore ongeveer 30% hoger uit. Alleen heeft ruim de helft van de leerlingen de som niet cijferend maar 'handig' uit het hoofd berekend. Bij 42 x 52 zien we hetzelfde beeld.
Algemeen geldt dat in 2011 de jongens 40% van de vermenigvuldig- en deelopgaven uit het hoofd berekenen, terwijl de meisjes dit in 20 % van de gevallen doen. Het effect hiervan is groot: bij vermenigvuldigen geeft de algoritmische aanpak een gemiddelde goedscore van 68%, tegenover het hoofdrekenen 51%. Bij het delen zijn de scores achtereenvolgens 62% en 22%! [13, p. 162-163]
Dit alles betekent dat de resultaten van het cijferende rekenen sinds 1987 weliswaar zijn teruggelopen, maar dat die afname veel kleiner is dan de genoemde scores op 'bewerkingen' suggereren.
Daar komt nog bij dat ook de cijferresultaten uit 1987 gerelativeerd dienen te worden. Neem bijvoorbeeld het delen: 806 : 26 behaalde in 1987 een goedscore van 85%, maar bij 75,6 : 1,4 daalde het gemiddelde naar 60%. En bij contextopgaven zakte de goedscore vaak nog verder. Een voorbeeld.

> De toegangsprijs voor een toneelvoorstelling is *f* 7,50.
> Totaal wordt aan de kassa *f* 1860, - ontvangen.

Hoeveel kaartjes zijn er verkocht?

Ruim de helft van de leerlingen maakte dit vraagstuk in 1987 fout – waarschijnlijk heeft een deel van hen in deze tekstopgave geen deling onderkend. Algemeen geldt dat de beperkte toepasbaarheid van de basisoperaties een fundamenteel probleem is.[1]

## 5 Toepasbaarheid

Om dit te illustreren nemen we nog een andere contextopgave over delen.

> 25 kg voer voor de kippen kost € 19,50.
> Hoeveel kost dat voer per kilogram?

Hebben we hier met een eenvoudig vraagstuk van doen?
Uit veelgeciteerd onderzoek van Hart (1981) blijkt dat ongeveer de helft van de twaalfjarigen in Engeland vooral met toepassingen van vermenigvuldigen en delen veel moeite heeft, en dat bij een opgave als de bovenstaande het correcte antwoord zelfs onder 20% daalt!

> 'In a situation where calculators are readily available for computation, it is clear that the emphasis must change from algorithm-learning to understanding the structure of the operations themselves and how and when they should be applied. However with 10 per cent of children at the end of the first year of secondary school having little appreciation at all of multiplication and division, and another 40 per cent being shaky on these concepts even where only whole numbers are involved, there is little room for complacency. Secondary teachers may mistakenly take it for granted that such ideas are necessarily picked up at primary level. (...).Where decimals were included in the problems, children found it very much more difficult to select the correct expression, especially in some of the particularly awkward cases (e.g. multiplying by a number less than one, dividing a smaller by a larger number) where correct response rates dropped to under 20 per cent. In particularly hardly any 12yr olds and under 10 per cent of 15yr olds would consistently be able to press the buttons on their calculator in the correct order in solving simple division problems.' [4, p.44 ]

De kernvraag is vervolgens hoe het nodige inzicht in de structuur van de operaties en de toepasbaarheid ervan verworven kan worden.
In de procedurele aanpak wordt deze kwestie, zoals we zagen, volledig genegeerd: de leerlingen krijgen in de betreffende me-

thodes weinig of geen contextopgaven aangeboden. De achterliggende gedachte hiervan is dat een goede beheersing van de rekenprocedures automatisch naar inzicht en toepasbaarheid voert.
De functionele methodes besteden wel veel aandacht aan praktische toepassingen nadat de kinderen eerst de standaardprocedures met kale getallen hebben geleerd. Deze methodes sturen direct aan op de meest verkorte berekening: in ons voorbeeld is dat 19,50 : 25 = ...
De realistische methodes bevatten eveneens veel contextopgaven. Het verschil met de functionele methodes bestaat er echter in dat de leergang van het delen met kommagetallen zo is opgebouwd dat eerst ook minder verkorte rekenwijzen mogelijk zijn, zoals die via een tussenstap van' 100 kg kippenvoer kost 4 x 19,50 = 78 euro, dus 1 kg kost 0,78 euro.'

In 'Wereld in Getallen' bijvoorbeeld staat in de handleiding van deeltje 8b bij de volgende opgaven dat ze via tussenstappen opgelost kunnen worden.

Een fles wijn van 0,7 liter kost € 5,95.
Wat is de prijs per liter?

Een stuk kaas van 750 gram kost € 5,40.
Wat is de prijs per kg?

*Een pot honing van 450 gram kost € 4,05.
Wat is de prijs per kg?

De eerste som kan via 0,1 liter worden berekend.
De tweede door eerst naar 250 gram te gaan – informele oplossingen die aansluiten bij wat kinderen vaak spontaan doen.
De moeilijke som (met ster) echter kan via de tussenstap naar de berekening van 1 gram worden opgelost.
Maar dit houdt kennelijk niet in dat de gemiddelde leerling dergelijke sommen nu zonder problemen kan oplossen – zelfs niet als daarbij een rekenmachine mag worden gebruikt, zoals in het volgende vraagstuk.

Je betaalt voor 4,700 kg aardappelen € 1,41.
Hoeveel kosten deze aardappelen per kg?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | € 0,03 | C | € 3,33 |
| B | € 0,30 | D | € 6,63 |

De goedscore bij deze opgave is in de periodieke peiling van 2011 slechts 55 procent. Een aanzienlijk deel van de leerlingen deelt het grootste getal door het kleinste en komt zo tot antwoord C, terwijl de geoefende rekenaar hier schattend, schijnbaar zonder te rekenen, meteen voor B zal kiezen.
Hart noemt *re-teaching* de beste aanpak om het algemene toepassingsprobleem op te lossen.

> 'In secondary school we tend to believe that the child has a fund of knowledge on which we can build the abstract structure of mathematics. The child may have an amount of knowledge but it is seldom as great as we expect. The spiral curriculum in which it is intended that we year by year build the fundamentals of mathematics may in practice be reduced to continual reiteration of the same points. The teacher may not in fact be building but *re-teaching* and has to return time and again to what was thought to be already assimilated by the child.' [4, p.209]

Dit alles betekent overigens niet dat onze leerlingen internationaal slecht scoren – integendeel.

## 6 Getallen in de wereld

1.TIMSS-toets.[2)]

We beginnen met een voorbeeld van aftrekken in de vorm van aanvullend optellen:

> Ad wil graag weten hoeveel zijn kat weegt.
> Hij weegt eerst zichzelf en ziet dat de weegschaal 57 kg aangeeft.
> Daarna gaat hij samen met zijn kat op de weegschaal staan.
> Nu geeft de weegschaal 62 kg aan.
> Hoe zwaar is de kat?

Deze opgave is in het internationale TIMSS-onderzoek van 2008 aan leerlingen halverwege groep 6 opgegeven. [9] De Nederlandse kinderen behaalden op dit vraagstuk een goedscore van 85 procent. Geen opzienbarend resultaat zou je zeggen, omdat de kale som 57 + .. = 62 eigenlijk voor vrijwel geen leerling van groep 6 nog een probleem zou moeten opleveren. Maar vergeleken met de scores van de andere 35 landen uit dit onderzoek bleek het Nederlandse resultaat zo slecht nog niet. Het internationaal gemiddelde bedroeg 60 procent – exact de goedscore van de Verenigde Staten. De prestaties van de acht andere West-Europese landen varieerden van 80 procent voor Duitsland tot 63 procent voor Engeland. Alleen Taiwan, Singapore, Rusland en Hongkong kwamen net boven Nederland uit.

Het TIMSS-onderzoek uit 2011 waaraan 50 landen deelnamen, bestaat uit de onderdelen rekenen, meetkunde en gegevensweergave. [10] De scores op deze drie terreinen lopen bij de Nederlandse kinderen nogal uiteen en dus ook de posities die ze daarmee op de internationale ranglijst bezetten. Met rekenen eindigen ze in de top tien, bij meetkunde in de middenmoot en met gegevensweergave halen ze eveneens de top. Om deze variatie te kunnen verklaren, moet eerst iets worden gezegd over de zogenoemde dekkingsgraad, het percentage opgaven van de betreffende toets dat betrekking heeft op behandelde leerstof in het betreffende land.

Algemeen geldt dat de top tien landen een gemiddelde dekkingsgraad hebben die 25 procent boven die van Nederland ligt – 85 tegenover 60 procent. Alleen bij het domein 'gegevensweergave' heeft Nederland een gemiddelde dekkingsgraad en eindigt op dit domein als zesde, direct achter de vijf superieure Aziatische landen. Daarentegen heeft Nederland bij meetkunde de op twee na laagste dekkingsgraad en eindigt op dit onderdeel als achttiende.

En juist in het relatief zwakke meetkundedomein kan men de grote impact van de al dan niet behandelde leerstofonderwerpen op de prestaties zien. Met de 'passende' voorbeeldopgave die in het onderzoeksverslag over ruimtemeetkunde wordt gegeven, haalt Nederland het een na beste resultaat, terwijl de slecht passende voorbeeldopgave over vlakke meetkunde ons op de veertigste plaats brengt.

Alles overziende is het aannemelijk dat een verhoging van de dekkingsgraad tot hogere goedscores op de internationale rekentoets voor groep 6 zal leiden. Maar om dit te bereiken zou het bestaande curriculum ingrijpend gewijzigd moeten worden – cijferen een

jaar eerder laten beginnen, optellen en aftrekken van breuken vervroegen en het meetkundeprogramma radicaal veranderen.
Het zal echter duidelijk zijn dat men hier niet zomaar toe wil overgaan - de internationale TIMSS-toets is ten slotte niet de maat aller rekenzaken. Net zo min als men in naburige landen als Duitsland, Zweden, Noorwegen en Oostenrijk - allemaal landen met een betrekkelijk lage dekkingsgraad in groep 6 en trouwens alle met lagere scores dan Nederland - hun rekenprogramma door de TIMSS-toets laten bepalen.
Hoe zou Nederland het er vanaf brengen indien de rekenprestaties over het complete rekenprogramma gemeten zou worden?
Aan het TIMSS-onderzoek bij 14-jarigen nam Nederland voor het laatst in 2004 deel - een jaargang waarin alle leerlingen op de basisschool met een realistische rekenmethode waren onderwezen. Op het rekenonderdeel kwam Nederland toen als 'best of the west' uit de bus, namelijk als zesde na vijf Aziatische landen en stadstaatjes. [8]

2. PISA-toets.[3]

Kenmerkend voor de PISA-toetsen voor 14-jarigen is dat ze vooral de prestaties van het praktische, toepassingsgerichte rekenen meten. [7] De invloed van de Nederlandse denkbeelden op deze invloedrijke internationale toetsen is groot. [3]
Een voorbeeld van een PISA- opgave:

Vliegerschepen

> De vliegers hebben het voordeel dat ze zich op een hoogte van 150 m bevinden. Daar is de windsnelheid ongeveer 25% hoger dan op het dek van het schip.
> Met welke snelheid ongeveer blaast de wind in de vlieger als op het dek van het schip een windsnelheid van 24 km/u wordt gemeten?

A 6 km/u
B 18 km/u
C 25 km/u
D 30 km/u
E 49 km/u

De goedscore op één van de acht ankersommen uit de eerste paragraaf ('30% korting op een koptelefoon van € 60') liet zien dat een dergelijke som moeilijk is voor de leerlingen die zonder nadenken eerst 1% van 24 m gaan berekenen – een typisch procedurele aanpak welke de leerlingen, die een conceptuele methode gebruiken, veel minder vaak volgen.

Het zuinige commentaar bij de Nederlandse rekenscore van de PISA-toets (tweede van de 34 OESO-landen!) die in 65 landen (waaronder 4 Aziatische stadstaatjes en Chinese provincies) werd afgenomen, luidt als volgt:

> 'Ook bij het subdomein Hoeveelheid is de positie van Nederland, zeker binnen de OESO-ranglijst, niet slecht. In de lijst van OESO- en partnerlanden is Nederland 7e, van de OESO-landen is Nederland het 2e land. En ook hier kunnen we constateren dat het OESO-land (Zuid-Korea) dat boven Nederland in de ranglijst staat, niet significant afwijkt van Nederland. Nederland scoort een gemiddelde van 532. In 2003 nam Nederland de 6e positie in van de OESO-landen met een score van 528. Dit lijkt toch wel te duiden op een lichte stijging. Wellicht zien we hier het gevolg van de toegenomen nadruk die we in het voortgezet onderwijs in Nederland de laatste jaren constateerden ten aanzien van de duidelijk aan dit subdomein gerelateerde rekenvaardigheid.' [7, p.33]

In het internationale onderzoek van PIAAC (2012) behaalt de Nederlandse groep van 16-24 jarigen de eerste plaats voor rekenvaardigheid van de 24 OESO-landen.4) [2]

### 7 Algemene doelstelling op waarde schatten

De waardering voor de leerprestaties die in de periode 2000 - 2010 met de realistische rekenmethodes werden behaald, is sterk afhankelijk van het gewicht dat men wenst toe te kennen aan de standaardprocedures van het cijferen ten opzichte van het hoofdrekenen, het schatten, het inzetten van de rekenmachine en de toepasbaarheid van de rekenoperaties.
Maar evenzeer van belang is de waarde die aan de algemene doelstelling van probleemoplossen wordt toegekend, een waarde die

niet of moeilijk met periodieke peilingen en internationale toetsen valt te meten.
In het 'Overzicht' is deze stelling met een voorbeeld over ordenend tellen uit de methode 'Wis en Reken' toegelicht. [1] Ook klassieke rekenpuzzels en -vertellingen zijn geschikt om te laten zien en ervaren hoe rijk en toetsvrij een deel van het rekenonderwijs ingericht kan worden. In het voorwoord en de inhoudelijke tekst werden daarvan verschillende voorbeelden gegeven.

Hier volgt tot slot een probleem van een leerling dat haar leraar niet kan oplossen. Dan blijft er voor haar maar één uitweg: een rekendeskundige raadplegen, Hartmut Spiegel in dit geval.

De brief van Nicole

Ik heet Nicole, ben 11 jaar en zit in groep 8. In het rekenen vind ik iets onlogisch zitten. Namelijk dat de opgave 1:0 geen oplossing heeft, tenminste niet in groep 8. Later leer je dat de uitkomst oneindig is, vertelde de leraar. Maar ook dat vind ik onlogisch. Ik denk dat 1 : 0 = 1 want als ik een taart heb en mensen uitnodig en er komt niemand, dan hoeft de taart niet verdeeld te worden, dan blijft er 1 taart over. Wat vindt u daarvan? Graag zou ik een antwoord op mijn vragen krijgen.

Met vriendelijke groet,
Nicole

Wat is het antwoord op de driekeuzevraag van Nicoles brief?

1:0 = ...

a) 1 (ongedeeld)
b) $\infty$ (oneindig)
c) - (onmogelijk)

En hoe vertel je Nicole waarom dat het goede antwoord is?

De brief van Nicole is geschikt voor probleemgericht rekenonderwijs, zoals dat in de algemene doelstelling is verwoord. Vroeger werd deze kwestie procedureel afgedaan met het pakkende voorschrift 'delen door nul is flauwekul'. Of op z'n best met een korte uitleg van de leraar. Maar je kunt de kwestie ook door de klas laten onderzoeken en in de nabepreking een socratische samenspraak vertellen waarin Nicole meedenkend antwoord krijgt ... en haar leraar trouwens evenzeer.[5)]

# Noten

1) Een kijkje in een vmbo brugklas van N. Querelle uit 1984 geeft een impressie van de moeilijkheden die zwakke rekenaars bij het oplossen van toepassingsopgaven kunnen hebben – een kwestie die eerder door Rombouts en anderen werd aangesneden. Minette krijgt de volgende keuze-som voorgelegd. [16]

Postzegelsom

Het album bevat 56 bladzijden.
Er gaan 28 postzegels op iedere bladzijde.
Hoe reken je uit hoeveel postzegels in mijn album gaan?

| | | |
|---|---|---|
| 28 : 56 | 28 x 56 | 28 + 56 |
| 56 : 28 | 56 x 28 | 56 + 28 |

De gedachtewisseling tussen lerares Nanda Querelle en Minette verloopt als volgt:

" Ze kiest voor 56 : 28. Ik vraag of ze het wil uitrekenen.

Ze schrijft 56 / 28 \ .

' Nee kan niet, want het eerste is te groot.'

Nu kiest ze voor 28 : 56 en doet

28 / 56 \ 2
56
0

'Ja dit is goed', zegt ze.

Ik: 'Wat is nu die twee?'

'Nee, dat is veels te weinig, het zal wel 56 x 28 moeten zijn.'

'Waarom denk je dat?'

'Nou dan wordt het meer.'

Ik: 'En bij deze ( 56 + 28 )?'

'Ja ook, kan ook.'

Dan zegt ze uit zichzelf: 'Die ook (28 + 56) en die ook ( 28 x 56).'

Na enig nadenken: 'Ik denk toch 56 x 28, die andere is...ja...te weinig."

In het procedurele rekenonderwijs leren de kinderen eerst de rekenprocedures en als die voldoende worden beheerst, komen de elementaire toepassingen soms nog even in beeld. In het geval van de postzegelsom zullen vrijwel alle kinderen, onder wie Minette, de kale keeropgave correct kunnen berekenen. Dit betekent echter nog niet dat ze ook in staat zijn de passende rekenoperatie in een tekstopgave te onderkennen.
Kenmerkend voor het realistische rekenonderwijs is dat een eenvoudige versie van de postzegelsom ('6 bladzijden met ieder 28 postzegels') als startpunt kan fungeren om de min of meer verkorte standaardprocedure van het vermenigvuldigen te leren. Daarbij wordt om te beginnen de relatie tussen herhaald optellen en vermenigvuldigen gelegd, i.c. tussen enerzijds 28 + 28 + ... + 28 en anderzijds 6 x 28.

2) TIMSS staat voor 'Trends in International Mathematics and Science Study'. Dit internationale onderzoek betreft de rekenprestaties eind groep 6. Het vindt sinds 1995 vierjaarlijks in tientallen landen plaats. In 2011 namen in Nederland 7000 kinderen aan het onderzoek deel. [10]

3) PISA staat voor 'Programme for International Student Assessment'. Dit internationale onderzoek betreft de wiskundeprestaties van 15-jarigen. Het vindt sinds 2000 driejaarlijks in tientallen landen plaats. In 2012 namen in Nederland 4500 leerlingen aan het onderzoek deel. Eén van de vier domeinen had betrekking op het rekenen.

4) PIAAC staat voor 'Programme for the International Assessment of Adult Competencies'. [2] Dit internationale onderzoek betreft de kernvaardigheden van taal en rekenen voor werk en leven onder 16- tot 65-jarigen. In 2013 namen ruim 5000 (jong) volwassenen deel aan dit onderzoek dat in 24 OECD-landen werd afgenomen.

5) Zo'n samenvattend overzicht van een discussie kan er als volgt uitzien...
Het resultaat is in ieder geval niet 1 is. Want 1 : 1 = 1. Dus kan 1:0 niet ook 1 als antwoord hebben. Hetzelfde getal door verschillende getallen delen en dan dezelfde uitkomst krijgen, dat gaat niet;

bij optellen, aftrekken en vermenigvuldigen doet zich dat ook nooit voor.
Je kunt bij delen niet zozeer aan eerlijk vérdelen als wel aan ópdelen denken. Bijvoorbeeld 18 : 3 vertaalt zich bij opdelen concreet in hoeveel keer een stuk van 3 meter in 18 meter past.
Antwoord: 6 keer. Hoeveel keer past een stukje van 0 meter in 1 meter? Nou dat past er ontelbaar vaak in, je kunt namelijk maar doorgaan. Het antwoord van Nicole lijkt dus niet te kloppen, want het gaat niet 1 keer, maar ontelbaar keer meer: 1 : 0 = ∞. (?).
Je zou bij de berekening van 1 : 0 ook de staartdeling kunnen gebruiken. Eerst haal je 100 keer 0 van 1 af, daarna weer en zo verder. Als je zou stoppen is de rest van de staartdeling 1. Maar aangezien je nooit stopt doet die rest er niet toe, aldus deze redenering. (?).

Men kan ook bij oneindig uitkomen door met de deler steeds dichter tegen de nul aan te kruipen.

$$1 : 1/10 = 1$$
$$1 : 1/100 = 100$$
$$1 : 1/1000 = 1000$$
tot slot $1 : 0 = \infty$.

Voorlopige conclusie: blijkbaar zijn er vele wegen die naar oneindig leiden.
De eerste tegenwerping: als 1 : 0 = ∞ dan is 2 : 0 = ∞ en 1000 : 0 ook. Dat is vreemd!'
De tweede tegenwerping: neem weer het voorbeeld 18 : 3 = 6.
Die deling kun je omzetten in de vermenigvuldiging 6 x 3 = 18.
Als 1 : 0 = ∞, dan betekent dit dat ∞ x 0 gelijk is aan 1.
Dat is vreemd: je schrijft een oneindig lange rij op 0 + 0 + 0 + ... en de uitkomst daarvan zou dan 1 zijn.
Bovendien zou de uitkomst van 2 : 0 = ∞, leiden tot ∞ x 0 gelijk aan 2, en zo voort.
Eindconclusie: antwoord c) 'onmogelijk' is het goede antwoord.

Maar waar zat dan precies de fout in Nicole's redenering?
Wel, Nicole verdeelt eigenlijk niet eerlijk.

Bijvoorbeeld 1 : 2 = ½ betekent in deze situatie dat je de taart met z'n tweeën verdeelt en vervolgens vraagt: 'Hoeveel krijgt ieder?' In dat geval krijgt elk een halve taart.
En deze vraag moet je ook bij 1 : 0 stellen.
Alleen is dan de moeilijkheid dat er geen ieder is, nul, niemand.
Met het gevolg dat je deze opgave niet via eerlijk verdelen kunt beantwoorden.
Dus zul je de kwestie anders moeten aanpakken, bijvoorbeeld via het opdelen in stukken van nul ...

Het verloop van deze afwegingen weerspiegelt de rekenkundige geschiedenis van 1:0.
Na de uitvinding van het cijfer 'nul' als notatieteken bij het uitvoeren van rekenhandelingen, begonnen Indiase wiskundigen in de periode van 600 tot 1100 na te denken over hoe nul zich met andere getallen gedraagt, aan welke wetten hij onderworpen is. Hoe kunnen we met nul optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen?
Dit waren kwesties waarover men zich ging buigen en waar men wat de drie eerstgenoemde rekenoperaties betreft ook correcte oplossingen voor vond, in tegenstelling tot die van 1 : 0.
Omstreeks 800 stelde Mahavira vast: 'Een getal blijft onveranderd als het door nul wordt gedeeld.' Deze opvatting treft men ook in Nederlandse rekenboeken aan die rond 1600 in omloop waren. (Kool, 1999) Omstreeks 1100 bepaalde Bhaskara de uitkomst van 1:0 op oneindig.
Deze voorbeelden laten zien dat de brief van Nicole elementen van het denken over 1 : 0 bevat, die ook in de historische ideeënvorming een rol hebben gespeeld.

# Literatuur

## Hoofdstuk 1 1800-1875

1) Anslijn, N. (1829/7). *Rekenboek voor meisjes ten dienste der scholen (deel1).* Leyden: Du Mortier en Zoon.

2) Anslijn, N. (1825). *Rekenboek voor meisjes ten dienste der scholen (deel 4).*Leyden: Du Mortier en Zoon.

3) Anslijn, N. (1816/4). *J. Brunt's Eerste beginselen der rekenkunde, voorgesteld, in vragen en antwoorden, ten dienste der scholen.* Leyden: Du Mortier en Zoon.

4) Bartjens, W.(1816/2). *De vernieuwde rekenkunst van Mr. Willem Bartjens, uit welke men de voornaamste regelen dier wetenschap leeren kan: op nieuw ieder voorstel nagezien, en elke regel met eene definitie van dezelven vermeerderd.* Rotterdam: Hendriksen.

5) Bartjens, W. (1839/2). *Willem Bartjens Rekenkunst vervangen door eene andere, ingerigt naar het nieuwe maten- en gewigtenstelsel, en meer overeenkomstig de tegenwoordige behoefte van het lager onderwijs.* Rotterdam: Wijnhoven Hendriksen.

6) Beckers, D. (1996). Jacob de Gelder (1765-1848) en de didactiek van de wiskunde. *Euclides* 71, 8, p.268-262.

7) Beckers, D. & H. Smid (2003). *Grondbeginselen der Rekenkunde. Een rekenboek uit 1828 uit 1828, uitgegeven door het wiskundig genootschap 'Mathesis Scientiarium Genitrix' te Leiden.( Ingeleid door de auteurs.)* Hilversum: Verloren.

8) Boeser, A.L. (1850). *Eerste rekenboekje: verzameling van voorstellen, ter toepassing van de hoofdregels met geheele, benoemde getallen.* Amsterdam: Hoogenboom.

9) Bouwman, L. (1869/8). *Tweede rekenboekje (tiendelige breuken).* Groningen: Doesburg.

10) Brugsma, B. (1872). *Allereerste oefeningen in het rekenen voor jonge kinderen, in bewaarscholen en de eerste klasse van lagere scholen.* Groningen: Schierbeek.

11) Closse, J., J. Scheffer, J. Temmink, G. Tiemersma & A. Ufkes (1896). *Rekenboek voor de volksschool.* Groningen: Wolters

12) Gelder, J. de (1812). *Allereerste gronden der Cijferkunst.* 's Gravenhage: Gebroeders van Cleef.

13) Gerdessen Timmermans C. (1835). *Praktisch rekenboek, samengesteld volgens de allereerste gronden der cijferkunst van den hoogleeraar Jacob de Gelder.* Tiel: Van Wermeskerken.

14) Grube, A. (1842). *Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule, nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode.* Berlin: Enslin.

15) Hemkes, H. (1849/7). *De kleine rekenaar.* Groningen: Smit.

16) Hemkes, H. (1836). *Rekenboek voor gevorderde leerlingen.* Groningen: Oomkens.

17) Hemkes, H. (1856/5). *De liefhebber van het rekenen (gewone breuken).* Groningen: Smit.

18) Hemkes, H. (1860). *Gronden der rekenkunst.* Groningen: Smit.

19) Hentschel, E. (1901/16). *Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen.* Leipzig: Merseburger.

20) Hentschel, E. & R. Rijkens (1865). *Handleiding voor het rekenen uit het hoofd en het cijferen.* Groningen: Scholtens.

21) Kellinga, C. (1926): *Kort overzicht van de methode 'Noodig Rekenen op de Lagere School'. Gevolgd door een kort overzicht van de geschiedenis van het rekenonderwijs in Nederland.* Amsterdam: R.K. Boekcentrale.

22) Kool, M. (1999). *Die conste vanden getale. Een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen (diss.).* Hilversum: Verloren.

23) Leen, A. (1961). *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19de en het begin van de 20ste eeuw (diss.).* Groningen: Wolters.

24) Moor, E. de (1999). *Van Vormleer naar realistische meetkunde(diss.).* Utrecht: Freudenthal Instituut.

25) Moor, E. de (1999). *Vroeger. 40 historische columns over het rekenonderwijs.* Tilburg: Zwijsen.

26) Prinsen, P.(1820). *Pestalozzi's leerwijze in de kennis der getallen.* Leyden: Du Mortier en Zoon.

27) Radatz, H. & W. Schipper (1983): *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Hannover: Schroedel.

28) Smid, H. (1997). *Een ongekookte nieuwigheid? Invoering, omvang, inhoud en betekenis van het wiskundeonderwijs op de Franse en Latijnse scholen 1815-1863 (diss.).* Delft: Delft University Press.

29) Versluys, J. (1874). *Methoden bij het onderwijs in de wiskunde.* Groningen: Noordhof.

30) Versluys, J. (1887/2). *Handleiding bij het hoofdrekenen (deel 2).* Amsterdam: Versluys.

31) Versluys, J. (1889). *De methodiek van het rekenen (ten dienste van kweekelingen).* Amsterdam: Versluys.

32) Wisselink, W. (1912/17). *Eerste verzameling van vraagstukken ter oefening van het practische rekenen.* Groningen: Noordhoff.

## Hoofdstuk 2 1875-1900

1) Benthem, A. & T. Nijenhuis (1893). *Rekenkundige vraagstukken voor zooveel noodig naar typen gerangschikt.* (*Eerste verzameling.*) 's-Gravenhage: Joh. Ykema.

2) Boeser, A. (1865/13). *Eerste Rekenboekje.* Amsterdam: Hoogenboom.

3) Bok, J. (1893): *Handleiding bij het hoofdrekenen in de lagere school.* Purmerend: Muusses.

4) Boswijk, D. & J. G. Zijlstra (1893/3). *Het rekenen in de lagere school.(Tweede stukje. Getallen van 10 tot 20.)* Groningen: Wolters

5) Gast, S. de (1895/2). *Het rekenonderwijs op de Lagere School.* 's Gravenhage: Joh. Ykema.

6) Hemkes, H. (1885). *De kleine rekenaar.* Groningen: Smit.

7) Moor, E. de (1994). Jan Versluys en het ontstaan van de vakdidactiek. *Euclides,* 14, 1, p. 8-13.

8) Pelt, D. van (1903). *Overzicht der methode gevolgd in 'De Nieuwe Rekencursus'.* Tiel: Mijs.

9) Pelt, D. van (1896/2). *Handleiding bij De Nieuwe Rekencursus (eerste stukje).* Tiel: Mijs.

10) Versluys, J. (1875). *Handleiding bij het Rekenonderwijs ten dienste van het huisgezin, de bewaarschool en de aanvangsklasse der lagere school.* (*Getallen 1-10.*) Groningen: Versluys.

11) Versluys, J. (1879). *Handleiding bij het Hoofdrekenen.* (*Getallen van 1 tot 100.*) Groningen: Versluys.

12) Versluys, J. (1883). *Handleiding bij het Rekenonderwijs ten dienste van de lagere school.* (*Getallen 1-100.*) Amsterdam: Versluys.

13) Versluys, J. (1889). *De methodiek van het rekenen.* (*Ten dienste van kweekelingen.*) Amsterdam: W. Versluys.

14) Versluys, J. (1896/2). *Handleiding bij het rekenonderwijs. (deel 5)* Amsterdam: Versluys.

## Hoofdstuk 3 1900-1950

1) Bergmans, J.,T. Kiewiet & G. Legdeur (1917). *Toelichting bij 'De serie rekenboeken voor scholen met Gewoon Lager Onderwijs, met Uitgebreid Lager Onderwijs en Meer Uitgebreid Lager Onderwijs.* Utrecht: St.-Gregoriushuis.

2) Bij de Ley, L. & G.Postma (1913). *Cursus voor het Schriftelijk Rekenen in de lagere school.* Groningen: Wolters.

3) Bij de Ley, L. & G. Postma (1923/2). *Overzicht van den Cursus voor het Schriftelijk Rekenen in de lagere school.*
Groningen: Wolters.

4) Bok, J. & M. H. Lem (z. j.). *Door tellen tot rekenen.*
Purmerend: Muusses.

5) Bolkestein, G., G. van Veen, Ph. Kohnstamm & Th Verdenius (1935): *De aansluiting tussen lager en middelbaar onderwijs.*
Groningen: Wolters.

6) Bouman, P.J. & J. C. van Zelm (1918). *Een rekenmethode voor de lagere school – als proeve van toegepaste logica. (Eerste tot dertiende rekenboek.)* Amsterdam: Versluys.

7) Bouman, P.J. & J. C. van Zelm (1924/3). *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang met – als proeve van toegepaste logica – een rekenmethode voor de lagere school.*
Amsterdam: Versluys.

8) Bouman, P.J. & J. C. van Zelm (1934). *Een rekenmethode voor de lagere school – als proeve van toegepaste logica. (Onderwijzerboekjes bevattende de methodische behandeling der leerstof van het nieuwe negende, tiende en elfde rekenboek met antwoorden.)*
Amsterdam: Versluys.

9) Cramer, W. (1906/10). *De voorbereidingsklasse. Opgaven der laatste jaren van de admissie-examens voor Hoogere Burgerscholen en Gymnasiën.* Gorinchem: Duym.

10) Diels, P.A., & J. Nauta (1939): *Richtlijnen voor het rekenonderwijs op de lagere school.* Groningen: Wolters.

11) Diels, P.A., & J. Nauta (1944/6). *Fundamenteel Rekenen.* (Eerste tot twaalfde rekenboek.) Groningen: Wolters.

12) Diels, P.A. & J. Nauta (1946/7). *Fundamenteel Rekenen. (Negende, tiende en elfde rekenboek A voor opleidingsscholen.)*
Groningen: Wolters.

13) Goffree, F. (1983). *Wiskunde & Didactiek. Tweede deel.*

Groningen: Wolters-Noordhoff.

14) Grazer, G. (1933). *Rekendidactiek en moderne psychologie.* Tilburg: R.K. Jongensweeshuis.

15) Jager, A. & A. Janse (1924). *Eerst kunnen, dan kennen.* Utrecht: St Gregoriushuis.

16) Kellinga, C. (1926). *Kort* overzicht *van de methode 'Noodig Rekenen op de lagere school'.*Tilburg: R.K. Jongensweeshuis.

17).Leen, A. (1961). *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19e en het begin van de 20ste eeuw.* Groningen: Wolters.

18) Ligthart, J. (1916). *In de lente des levens.* Groningen: Wolters.

19) Polderman, A.M. (1947). *Naar Gymnasium, Lyceum en H.B.S.! Verzameling van opgaven bij toelatingsexames in 1947.* Groningen: Wolters.

20) Rombouts, S. (1933). *Katholieke pedagogiek.* Tilburg: R.K. Jongensweeshuis.

21) Rombouts, S. (1948). *Geef Acht! Nieuwe Rekencursus voor de L.S. Handleiding voor derde en volgende leerjaren.* Tilburg: R.K. Jongensweeshuis.

22) Scholte, H. (1913). *Overzicht van de rekenmethode 'Hoeveel en waarom?'* Groningen: Wolters.

23) Schoonbrood, M. (1898). *Het rekenonderwijs in de lagere school. Handleiding.* 's Gravenhage: Ykema.

24) Thijssen, Th.J. (1915/4). *Sommenboek voor de volksschool.* ( Vier delen.) Bussum: Van Dishoeck.

25) Thijssen, Th. J. & J. Soederhuijzen (1915/2). *Cijferboek voor de volksschool.* (Drie delen.) Bussum: Van Dishoeck.

26) Versluys, J. (1875): *Handleiding bij het Rekenonderwijs ten dienste van het huisgezin, de bewaarschool en de aanvangsklasse der lagere school.* (*Getallen 1-10.*) Groningen: Versluys.

27) Zernike, C. F. A. (1912/5). *Ons Rekenonderwijs.* (Acht delen.) Bussum: Akkeringa.

28) Zernike, C. F. A. (1915/4). *Ons Rekenonderwijs. Handleiding.* Bussum: Akkeringa.

## Hoofdstuk 4 1950-1985

1) Bolkestein, G., G. van Veen, Ph. Kohnstamm & Th. Verdenius (1935). *De aansluiting tussen lager en middelbaar onderwijs.* Groningen: Wolters.

2) Bouman, P. & J. van Zelm (1918). *De rekenkundige denkbaarheden in logische samenhang - als proeve van toegepaste logica - een rekenmethode voor de lagere school.* Amsterdam: Versluys.

3) Bruinsma, B. (red.) (1969). *Nieuw Rekenen. Algemene Inleiding.* Baarn: Bosch en Keuning.

4) Buijs, N. & F. Teunissen (1980). *Operatoir Rekenen (nieuw).* Tilburg: Zwijsen.

5) Diels, P. & J. Nauta (1939). *Richtlijnen voor het rekenonderwijs op de lagere school.* Groningen: Wolters.

6) Freudenthal, H. & F. Oort (1977). Erepromotie. *Euclides,* 52,9, p.337.

7) Gelder, L. van (1959). *Grondslagen van de rekendidactiek.* Groningen: Wolters.

8) Gerven, J. C. van (1969) *Rekenen voor de basisschool.* s'- Hertogenbosch: Malmberg.

9) Goffree, F., A. Hiddink & J. Dijkshoorn (1966). *Rekenen en didactiek.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

10) Haack, J. & L. Lieffering (1955). *De grondslag.* Zeist: Dijkstra.

11) Hart, K.M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: Murray.

12).Heuvel-Panhuizen, M. van den & F. Goffree (1988). *Zo rekent Nederland.* Enschede: SLO

13) Hilton, P. & J. Pedersen (1983). *Fear no more. An adult approach to mathematics.* Menlo Park: Addison-Wesley.

14) Huitema, S., A. van der Klis, M. Timmermans & L. Erich (1991/2). *De wereld in getallen*. Den Bosch: Malmberg.

15) Jacobs, C. (1986). *Rekenen op de Pabo.* Utrecht: OW&OC.

16) Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemkes & N. Verhelst (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3.* Arnhem: Cito.

17) Jong, R. de (1986).*Wiskobas in methoden (diss.).* Utrecht: IOWO.

18) KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool.* Amsterdam: KNAW

19) Klavier, C. ( 1967). *Uitkomst.* Zwijsen: Tilburg.

20) Kline, M. (1974). *Why Johnny can't add: the failure of the new math.* Vintage Books: New York.

21) Kohnstamm, Ph. A. (1952, eerder uitgegeven 1929-1930). *Keur uit het didactisch werk van Prof. Dr. Ph. Kohnstamm.* Wolters: Groningen.

22) Korthagen, F. (1998). *Leraren leren. Realistisch opleidingsonderwijs, geïnspireerd door Ph. A. Kohnstamm (oratie).* Amsterdam: Vossiuspers AUP.

23) Kühnel, J. (1925/5). *Neubau des Rechenunterricht.* Leipzig: Klinkhardt.

24) Kuipers, N. & E. de Groot (1978). *Naar Zelfstandig Rekenen (Nieuwe versie).* Groningen: Wolters-Noordhoff.

25) Leen, A. (1961). *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19e en het begin van de 20ste eeuw.* Groningen: Wolters Noordhoff.

26) Lugtmeijer, H. (red.) (1953, 1983). *Naar aanleg en tempo.* Zutphen: Thieme.

27) Nelissen, J. (2014). De 'aaneensluiting' – de psychologie van het leren denken ten tijde van Philip Kohnstamm. *Panama Post,* 33, 1, p.18-26.

28) Reijnders, J. & J. Snijders (1958). *Functioneel Rekenen.* Amsterdam: Versluys.

29) Reijnders, J. & J. Snijders (1959). *Functioneel Rekenen. Handleiding.* Amsterdam: Versluys.

30) Rombouts, S. (1948). *Geef Acht!* Tilburg: R.K. Jongensweeshuis.

31) Rombouts, S. (1959/4). *Geef Acht! Handleiding.(Deel 1 en 2)* Tilburg: Zwijsen.

32) Selter, Ch. (1997). *Schulpädagogik und Fachdidaktik: Aktualität des Werkes von Johannes Kühnel (1869-1928).*
Bochum: Universitätsverlag.

33) Smeelen, J. (1923). *Een stervend vak. Rekenkunde en practisch rekenen.* Opvoedkundige brochurenreeks,15.
Tilburg: R.K. Jongensweeshuis.

34) Streefland, L. (1987). Operatoir rekenen. In: E. Feijs, R. de Jong, E. de Moor, L. Streefland & A. Treffers. *Almanak rekenwiskundemethoden.* (p.31-44). Utrecht: OW&OC.

35) Thorndike, E. (1922). *The psychology of arithmetic.*
New York: MacMillan.

36) Tiemersma, D. (1960). *Dit is rekenen. Overzicht / inleiding en toelichting.* Groningen: Dijkstra.

37) Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht.* Utrecht: IOWO.

38) Treffers, A. (1985). Reken-wiskundedidactiek in historisch perspectief. In: E. de Moor (red.). *Panama Cursusboek 4* (p 9-16). Utrecht: SOL en OW&OC.

39) Verschaffel, L. (2009). Over het muurtje kijken. *Panama Post,* 28, 1, p.3-20.

40) Vierman, F. (z.j.). *Rekenen voor 't leven.* Tilburg: R.K. Jongensweeshuis.

41) Vossen, H. M. M. e.a. (1970). *Niveaucursus Rekenen.*
'S-Hertogenbosch: Malmberg.

42) Wanders, W. & S. Böhncke (1958). *Boeiend rekenen.*
'S-Hertogenbosch: Malmberg.

43) Wertheimer, M. (1966). *Productive Thinking (enlarged version).* London: Associated Book Publishers.

44) Whitney, H. (1986). Coming alive in schoolmath and beyond. *Journal of Mathematical Behaviour, 5*, 2, p.129-140.

45) Willoughby, S., C. Bereiter, P. Hilton & J. Rubinstein (1980). *Real Math.* La Salle: Open Court.

46) Wijnstra, J. (red.) (1988). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool 1.* Arnhem: Cito.

47) Wittmann, E. & Müller, G. (Eds.) (2000). *Das Zahlenbuch.* Leipzig: Ernst Klett.

48) Zandvoort, R.; H. Venekamp & N. Kuipers (1955/1970). *Naar Zelfstandig Rekenen.* Groningen: Wolters Noordhoff.

## Hoofdstuk 5 Nationaal Programma 1985-1990

1) Ahlers, J. (1987). Grote eensgezindheid over basisonderwijs. *School*, 15, 4, p. 4-10.

2) Brink, J. van den (1989). *Realistisch rekenen aan jonge kinderen.* (diss.). Utrecht: OW & OC.

3). Brink, J. van den (2010). Wiskobas - een start met gevolgen. *Panama-Post*, 29, 4, p. 34-40.

4) Bruggen, J. van (1975). *Leren cijferen bekeken door een leerpsychologische bril.* Utrecht: IOWO.

5) Cadot, J. & D. Vroegindeweij (1986). *Tien voor de basisvorming rekenen-wiskunde onderzocht.* Utrecht: OW & OC.

6) Dekker, A., H. ter Heege & A. Treffers (1981). *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas.* Utrecht: OW & OC.

7) Die, H. van (2010). De betekenis van de kerndoelen voor de vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs. *Panama Post*, 29, 4, p. 13-23.

8) Dienes, Z. (1970). *Wij bouwen wiskunde op.*
'S Hertogenbosch: Malmberg.

9) Freudenthal, H. (1983). Ga eens even schatten. *Willem Bartjens,* 2, 4, p. 186-191.

10) Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren – wiskunde en psychologie.* Apeldoorn: Van Walraven.

11) Goffree, F. (1982). *Wiskunde & Didactiek voor aanstaande leraren basisonderwijs. Deel 1.* Groningen: Wollters-Noordhoff.

12) Goffree, F. (1983). *Wiskunde & Didactiek voor aanstaande leraren basisonderwijs. Deel 2.* Groningen: Wolters-Noordhof.

13) Goffree, F. (1985). *Wiskunde & Didactiek voor aanstaande leraren basisonderwijs. Deel 3.* Groningen: Wolters-Noordhof.

14) Goffree, F. H. Jansen & J. Keijnemans (1977). *Kijken, doen, denken en zien, wiskunde en didactiek voor de PA.* Utrecht: IOWO.

15) Gravemeijer, K. & J-M. Kraemer (1984). *Met het oog op ruimte.* Tilburg: Zwijsen.

16) Gooijer-Quint, J. de (1979). *Onderwijssituaties voor 4-8 jarigen.* Utrecht: IOWO.

17) Jansen, H. (1973). Wat hoofdrekenen is, weet iedereen. *Wiskobas Bulletin,* 2/3, p.784-786.

18) Heege, H. ter (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educatonal Studies in Mathematics,* 16, p. 375-389.

19) Moor, E. de (1980). *Gevarieerd rekenen.* Wiskobas leerplanpublikatie 11. Utrecht: OW & OC.

20) Moor, E. de (1999). *Van vormleer tot realistische meetkunde. Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw. (diss.).*
Utrecht: Freudenthal Instituut.

21) Moor, E. de (2010). Vakdidactische nascholing: droom en werkelijkheid. *Panama Post,* 29, 4, p. 23-28.

22) NCTM (1987). *Standards for School Mathematics.*
NCTM: Reston.

23) Reys, R. (1985). Testing mental-computation skills. *The Arithmetic Teacher*, 33, 3, p.15.

24) Reys, R., M. Suydam, M. Lindquist & N. Smith (1999). *Helping children learn mathematics.* Allyn and Bacon: Boston.

25) Streefland, L.(1988). *Fractions in mathematics education. (diss.)* Dordrecht: Kluwer.

26) Treffers, A. & E. de Moor (1984). *Tien voor de basisvorming rekenen-wiskunde. Werkboek.* Utrecht: OW & OC.

27) Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1. Overzicht einddoelen.* Tilburg: Zwijsen.

28) Treffers, A.& E. de Moor ( 1990). *Proeve van een Nationaal Programma rekenen-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen.* Tilburg: Zwijsen.

29) Treffers, A. (1990). *Het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool. (oratie)* Utrecht: OW & OC.

30) Uittenbogaard, W. (1991). *De ouderavond.* (Nieuwe Media project). Utrecht: OW&OC.

31) Wijdeveld, E. (1977). *Vierkubers.* Leerplanpublicatie 5. Utrecht: IOWO.

## Hoofdstuk 6 1990-2010

1) Bergmans, N., e.a. (2001). *Wis en Reken.* Baarn: Bekadidact'.

2) Boerema, J., e.a. (2002). *Alles telt.* Utrecht: ThiemeMeulenhoff.

3) Bokhove, J., e.a. (2001). *Rekenrijk.* Groningen: Wolters Noordhoff.

4) Brinkman, T., e.a. (1975). *Getal in Beeld.* Den Bosch: Malmberg.

5) Bruinsma, B. (red.) (1969). *Nieuw Rekenen. Algemene inleiding.* Baarn: Bosch en Keuning.

6) Buijs, N., e.a. (1980). *Operatoir Rekenen.* Tilburg: Zwijsen.

7) Goffree, F. & W. Oonk (2004). *Reken Vaardig. Op weg naar professionele gecijferdheid.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

8) Gravemeijer, K., e.a. (1983). *Rekenen en Wiskunde.* Baarn: Bekadidact.

9) Groen, J., e.a. (2001). *Pluspunt.* Den Bosch: Malmberg.

10 Huitema, S., e.a. (2001). *De Wereld in Getallen.* Den Bosch: Malmberg.

11) Jansen, J., F. van der Schoot, B. Hemker & N. Verhelst. (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool (3).* Arnhem: Cito.

12) Jong, R. de (1986).*Wiskobas in methoden(diss.).* Utrecht: Vakgroep OW&OC.

13) KNAW-Commissie Rekenonderwijs basisschool (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool.* Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen.

14) Kraemer, J-M., J. Janssen, F. van der Schoot & B. Hemker. (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4.* Arnhem: Cito.

15) Molengraaf, F. van de, e.a. (1981). *De Wereld in Getallen.* Den Bosch: Malmberg.

16) Nelissen, J., e.a. (1985). *Rekenwerk.* Gorinchem: De Ruiter.

17) Postema, J., e.a. (1976). *Taltaal.* Zeist: Dijkstra.

18) Scheltens, F., B. Hemker & J. Vermeulen (2013). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 5.* Arnhem: Cito.

19) Veltman, A. & M. van den Heuvel-Panhuizen (2010). *Rekenen met hele getallen op de basisschool. Tussendoelen Annex Leerlijnen.* Groningen: Noordhoff.

## Overzicht 1800-2010

1) Bergmans, N., e.a. (2001). *Wis en Reken.* Baarn: Bekadidact.

2) Beusekom, N van, e.a. (2010). *Pluspunt.* Den Bosch: Malmberg.

3) Bokhove, J. e.a. (2010). *Rekenrijk.* Groningen: Noordhoff.

4) Groenestijn, M. van, e.a. (2009). *Wizwijs.* Tilburg: Zwijsen.

5) Huitema, S., e.a. (2010). *De Wereld in Getallen.* Den Bosch: Malmberg.

6) Molenaar, G. (2012). *Alles Telt methodewijzer.* Amersfoort: ThiemeMeulenhoff.

7) Kool, M. & E. de Moor (2009). *Rekenen is leuker (dan) als je denkt.* Amsterdam: Bert Bakker.

8) Terpstra, P. & A. de Vries (2009). *Reken Zeker.* Groningen: Noordhoff.

9) Treffers, A. (2010). *Het rekentheater.* Amsterdam: Atlas.

## Balans van de vernieuwing

1) Bergmans, N., N. Boswinkel, K. Buys, F. Moerlands & M. Torn (2001). *Wis en Reken. Varia Extra 2 groep 8.* Baarn: Bekadidact.

2) Buisman, M., e.a. (2013). *PIAAC: Kernvaardigheden voor werk en leven*. Maastricht: ROA.

3) De Lange, J. (1999). PISA Mathematics Framework. OECD: Paris.

4) Hart, K., ed. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16* London: John Murray.

5) Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemkes & N. Verhelst (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3.* Arnhem: Cito.

6) Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemkes (2006). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4.* Arnhem: Cito.

7) Kordes, J., e.a. (2013). *Resultaten PISA-2012. Praktische kennis en vaardigheden van 15-jarigen*. Arnhem: Cito.

8) Meelissen, M. & B. Doornekamp (2004). *TIMSS-2003. Nederland: leerprestaties in exacte vakken in het voortgezet onderwijs*

9) Meelissen, M & M. Drent (2008). *TIMSS-2007 Nederland.* Enschede: Universiteit Twente.

10) Meelissen, M., e.a. (2012). *PIRLS- en TIMSS-2012. Trends in leerprestaties in Lezen, Taal en Natuuronderwijs.*
Nijmegen:
Radboud Universiteit.

11) Putten, C. van & M. Hickendorff (2006). Strategieën van leerlingen bij deelopgaven. *Panama Post,* 25, 2, p. 16-26.

12) Querelle, N. (1985). LBO/MAVO-leerlingen en wiskunde. In: E. de Moor (red). *Panama Cursusboek 3* (p. 122-134).
Utrecht: SOL en OW & OC.

13) Scheltens, F., B. Hemker & J. Vermeulen (2013). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 5.*
Arnhem: Cito.

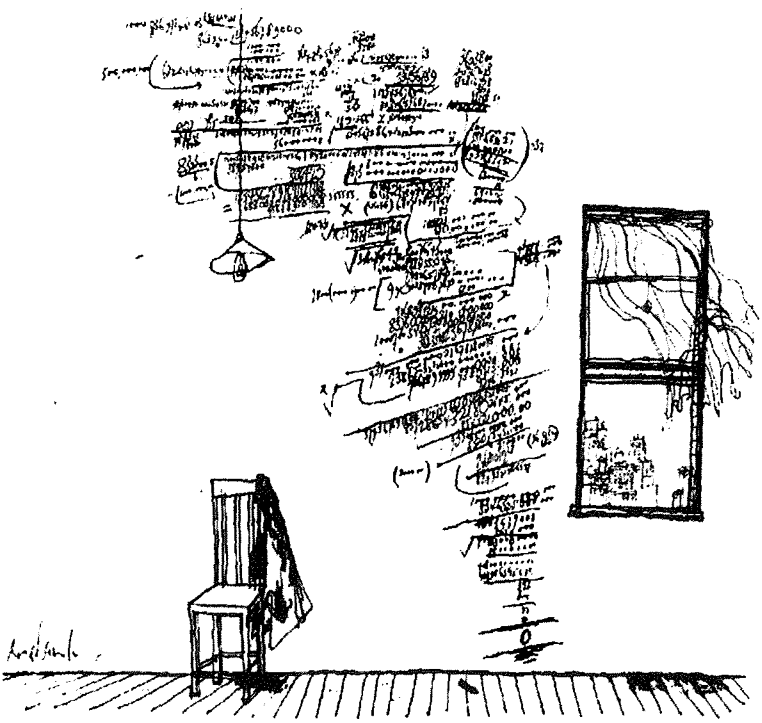
14) Wijnstra, J. (red.) (1988). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool 1.* Arnhem: Cito.

# Nawoord en nabeeld

Ik dank de kritische meelezers die me bij de didactische exploratie in het deels onontgonnen terrein van de rekengeschiedenis vergezelden, inspireerden, adviseerden en waar nodig corrigeerden. Vaak volgde ik hun suggesties, zoals bijvoorbeeld om meer aandacht te besteden aan de pre-methodische fase van 1800 tot 1875. Maar een enkele keer deed ik dat niet, bijvoorbeeld in het geval van de recente ontwikkelingen van het nieuwe examenvak rekenen in het voortgezet onderwijs. De reden om dit niet te doen, ligt eenvoudigweg in het feit dat anno 2015 nog volstrekt onduidelijk is hoe de grote meningsverschillen daar opgelost moeten worden over de inhoud van het rekenprogramma en de eisen die aan de leerlingen van de verschillende schoolsoorten gesteld dienen te worden. Curieus is dat in de proeftoetsen voor havo/vwo de aloude denksommen weer opduiken die vandaag de dag vrijwel niemand meer kan oplossen! Zal het in het v.o. die kant opgaan? *)

Mijn hartelijke dank gaat uit naar de meelezers: Fred Goffree, Marja van den Heuvel-Panhuizen, Rob de Jong, Ed de Moor, Jo Nelissen en Edu Wijdeveld - allen belangrijke spelers op het rekendidactische toneel van de afgelopen tientallen jaren.
Ook de vruchtbare samenwerking met Joop Bokhove, Kees Buys, Sylvia Eerhart, Erica de Goeij, Julie Menne, Willem Uittenbogaard en Ans Veltman bij andere onderzoeken wil ik hier noemen.
Nathalie Kuijpers dank ik voor het klaarmaken van de eindversie.
En Hannie van Dongen ten slotte - *hors catégorie* – voor de correcties en de vormgeving van dit boek.

*) Een voorbeeld:
De zilvervlootrekening was een spaarrekening voor jongeren waarbij er bovenop de rente van 3,5 procent per jaar aan het eind van de totale spaarperiode van minimaal 5 jaar nog een extra premie van 10% werd verstrekt. Janneke had na 6 jaar sparen € 430,32 op haar rekening staan. Ze wil nog een jaar doorgaan en dan al haar geld opnemen. Om in totaal € 600,- op te kunnen nemen, moet ze aan het begin van het zevende jaar extra geld op haar rekening zetten.
Hoeveel moet ze extra op haar rekening zetten? € ...



# Weg van het cijferen

*

De titel 'Weg van het cijferen' kan als 'gek op' en als 'met minder nadruk op' worden verstaan. Achter deze tweedeling steekt het algemene onderscheid tussen werktuigelijk versus inzichtelijk rekenen, internationaal aangeduid als de procedurele en de conceptuele richtingen in het rekenonderwijs – een onderscheid dat voor de meeste methodes overigens niet zo scherp valt te maken omdat vele leergangen vaak elementen van beide bevatten.

De geschiedenis van de rekenboeken laat zien dat de hoge waardering van het cijferen in bepaalde perioden welhaast gemeengoed was. Sommige methodes besteedden toen niet minder dan 400 lesuren, ofwel twee volle schooljaren, aan het leren cijferen.

De terughoudende stellingname ten opzichte van het cijferen kon men echter al bij Pestalozzi en zijn volgelingen aantreffen en bij tal van vermaarde rekendidactici en wiskundigen, plus in een aantal methodes uit de 19$^{de}$ en 20$^{ste}$ eeuw. In alle gevallen wensen de bestrijders van het overmatige cijferen meer aandacht voor flexibel (hoofd)rekenen op basis van inzicht in getallen, getalrelaties en toepasbaarheid.

De historisch-didactische analyse heeft betrekking op de rekenboeken die vanaf 1800 werden uitgegeven, zij het eerst uitsluitend voor de hoogste klassen van de basisschool. De didactische reis eindigt in 'het heden' tussen 2010 en 2015 toen de eerste versie van de euro-methodes op de meeste basisscholen historie werden. De speurtocht levert een schat aan didactische inzichten op die ook voor het huidige rekenonderwijs nog van grote betekenis zijn.

Adri Treffers studeerde wiskunde en onderwijskunde en was van 1959 tot 1969 wiskundeleraar. Vanaf 1969 was hij als ontwikkelaar, onderzoeker en na 1989 als hoogleraar werkzaam bij het Freudenthal Instituut en de Vakgroep Onderwijskunde van de Universiteit Utrecht. Hij was betrokken bij de ontwikkeling van de 'Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs' (1989) en de uitwerking daarvan op onder meer de gebieden van flexibel (hoofd)rekenen en cijferen.