



Trajectenboek wiskunde havo vwo onderbouw

versie juli 2009

Colofon

Auteurs

Truus Dekker

Monica Wijers

Met medewerking van

Sanne van Dooremalen, sg Kandinsky, Nijmegen

Wilma Bouhof, sg Bornego, Heerenveen

Eindredactie

Truus Dekker

Sieb Kemme

© cTWO, Utrecht , mei 2009

Inhoud

Trajectenboek wiskunde havo vwo onderbouw	1
Inhoud.....	2
Inleiding	4
Voorbereiding op havo of vwo en op wiskunde A en wiskunde B	4
Algemene wiskundige vaardigheden.....	5
Variatie	7
Inhoudsgebieden.....	7
Rekenen.....	9
Getallen	9
Getallen en getalrelaties.....	9
Voorbeelden bij <i>Getallen en getalrelaties</i>	10
Breuken en decimale getallen	11
Voorbeelden bij <i>Breuken en decimale getallen</i>	12
Negatieve getallen.....	14
Voorbeelden bij <i>Negatieve getallen</i>	15
Machten, wortels en wetenschappelijke notatie.....	16
Voorbeelden bij <i>Machten, wortels en wetenschappelijke notatie</i>	17
Verhoudingen.....	18
Verhoudingen, procenten en schaal	18
Voorbeelden bij <i>Verhoudingen, procenten en schaal</i>	19
Algebra	20
Verbanden.....	20
Grafieken, tabellen en formules.....	21
Voorbeelden bij <i>Grafieken en tabellen en formules</i>	23
Lineaire verbanden	25
Voorbeelden bij <i>Lineaire verbanden</i>	26
Exponentiële verbanden.....	28
Voorbeelden bij <i>Exponentiële verbanden</i>	29
Kwadratische verbanden.....	30
Voorbeelden bij <i>Kwadratische verbanden</i>	31
Rekenen met formules.....	32
Patronen en (woord)formules	32
Voorbeelden bij <i>Patronen en Formules</i>	33
Rekenen met formules en variabelen.....	35
Voorbeelden bij <i>Rekenen met formules en variabelen</i>	36
Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen	39

Voorbeelden bij <i>Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen</i>	40
Meten en Meetkunde	41
Vormen en figuren	42
Voorbeelden bij <i>Vormen en figuren</i>	44
Meten en rekenen in de meetkunde	46
Voorbeelden bij <i>Meten en rekenen in de meetkunde</i>	48
Figuren en formules	49
Voorbeelden bij <i>Figuren en formules</i>	50
Statistiek	51
Statistiek	51
Voorbeelden bij <i>Statistiek</i>	52
Bijlage: Het ‘herstel’ van het onderbouwprogramma voor wiskunde in havo en vwo	55
Het Leerplan wiskunde voor Rijksscholen (1968) in vergelijking met het Trajectenboek	56
Begrippenlijst Trajectenboek 2009 in vergelijking met het Leerplan 1968	58

Inleiding

Dit trajectenboek beschrijft de leerstof voor de onderbouw van havo en vwo tot en met klas 3. De basis hiervoor vormt het eindrapport van de programmacommissie onderbouw van cTWO. In dit eindrapport wordt dieper ingegaan op de keuzes die voor het onderbouwprogramma gemaakt zijn. Tevens is voortgebouwd op het werk van het project Rekenen en Algebra Leerlijnen (ReAL).

Daarnaast baseren we ons op de volgende bronnen:

- Kerndoelen

De onderbouw heeft een eigen opdracht, globaal aangegeven in de kerndoelen van 2006. Bij deze kerndoelen hoort een algemene karakteristiek waarin het vakgebied beschreven wordt. Er zijn drie kerndoelen die de wiskundige werkwijze in termen van algemene vaardigheden betreffen. In de paragraaf algemene vaardigheden gaan we daar nader op in. De overige 6 kerndoelen beschrijven inhouden. De SLO heeft deze kerndoelen geconcretiseerd. De kerndoelen vormen ook de grondslag voor de uitwerking in de wiskundemethoden. In het kader van dit trajectenboek hebben we ook de nieuwste edities van de meest gangbare wiskundemethoden bekeken.

- Bovenbouwprogramma's cTWO

Een van de functies van het onderbouwprogramma is de voorbereiding op de diverse programma's voor wiskunde (A, B,C, D) in de bovenbouw.

- Referentiekader doorlopende leerlijnen taal en rekenen

Het nieuwe referentiekader, geformuleerd door de expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen (commissie Meijerink), legt niveaus voor taal en rekenen voor alle onderwijssectoren vast. In klas 4 van havo/vwo wordt het in dit referentiekader beschreven niveau 2S bereikt.

- Concretisering van de referentieniveaus 2F en 2S door SLO (nog in bewerking).

Het rapport van de expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen (commissie Meijerink) gaat uitgebreid in op het belang van *consolideren*, *gebruiken* en *verdiepen*. Van leerlingen wordt verwacht dat ze een zeker fundament aan begrippen, (reken)feiten, automatismen en routines op het niveau van *paraat hebben* beheersen. Leerlingen in havo en vwo verschillen in de mate van *functioneel gebruiken* van de wiskunde en in *formeel opereren*. Om die reden is in de beschrijving van de verschillende referentieniveaus onderscheid gemaakt tussen Paraat hebben, Functioneel gebruiken en Weten waarom. Deze beschrijving en de concretisering van de referentieniveaus door de SLO vormen een aanvulling op de beschrijving van de leerstofinhouden in dit Trajectenboek.

Vorbereiding op havo of vwo en op wiskunde A en wiskunde B

Het cTWO rapport over de onderbouw bepleit in aanbeveling 2.6 een differentiatie tussen wiskunde A en B in leerjaar 3 havo met het oog op een betere aansluiting in leerjaar 4. In klas 3 havo moeten leerlingen kunnen ervaren welk niveau ze het beste aankunnen.

Docenten kunnen ervoor kiezen om voor de leerlingen die opteren voor het B of D niveau leerstof aan te bieden op het niveau van klas 3 vwo terwijl toekomstige A-leerlingen zich richten op voor hen belangrijke leerstofgebieden zoals statistiek en verder op consolidering van het geleerde.

Ook kunnen docenten ervoor kiezen, afhankelijk van de hoeveelheid tijd en de kwaliteit van de klas, om alle leerlingen het volledige programma of een gedeelte daarvan aan te bieden. Zodat alle leerlingen het verschil in karakter en niveau tussen wiskunde A,B en D kunnen ervaren en zo een verantwoorde keuze kunnen maken.

In leerjaar 3 moet ook het verschil tussen havo en vwo zichtbaar zijn. Veel scholen werken al met gesplitste groepen havo en vwo. We willen de mogelijkheid open laten dat de keuze voor havo of vwo en voor wiskunde A dan wel wiskunde B zo laat mogelijk gemaakt wordt. Daarom hebben we ervoor gekozen in havo en vwo dezelfde onderwerpen aan te bieden. De leerstofinhouden voor die twee schooltypen verschillen niet erg. Er zijn wel verschillen aan te brengen in de diepgang, het formaliseren, generaliseren en abstraheren, de mate van complexiteit en het beheersingsniveau. Leerstof die specifiek voor het vwo is geven we aan met een *.

Algemene wiskundige vaardigheden

In deze inleiding benadrukken we het belang van algemene wiskundige vaardigheden voor de onderbouw, zoals genoemd in de volgende drie kerndoelen (2006):

Kerndoel 19: Wiskundetaal ontwikkelen

Kerndoel 20: Wiskunde gebruiken in praktische situaties

Kerndoel 21: Wiskundig redeneren

In het rapport van de programmacommissie onderbouw worden ook noodzakelijke algemene vaardigheden benoemd. We geven dat hieronder kort weer:

Met de conceptuele netwerken zijn de (wiskundige) denkwijzen vervlochten waar ook te ontwikkelen gewoonten en denkwijzen onder vallen.

Een goede probleemaanpak kun je niet uit het schoolboek leren, het is de docent die het moet modelleren. Eerst wordt het probleem verkend om een beeld te krijgen van wat er aan de hand is. Die *analyse* is nodig om je (wiskundig) gereedschap te kunnen kiezen. Vervolgens is *overzicht* van dat gereedschap nodig om een nuttige keuze te maken. Nodig is zowel het *paraat hebben* van gereedschap, het *selecteren* en *toepassen* ervan en het *overzicht* van het relevante conceptuele netwerk.

Samengevat komen we tot de volgende vaardigheden:

- Relevante gegevens uit een beschreven situatie weergeven in een geschikte wiskundige representatie (Gebruiken van een wiskundig model).
- Zich bedienen van adequate wiskundetaal en (wiskundige) redeneringen.
- Onderzoeksvaardigheden (In verband met probleem oplossen, plan van aanpak bedenken, toepassingen).
- Resultaten kritisch beoordelen. (Ook: Terugvertalen van model naar situatie. Dat kan leiden tot afronden binnen de situatie maar kan ook leiden tot aanpassen van het model).
- Rekenmachine op een adequate manier inzetten.
- Instrumenten gebruiken zoals passer en liniaal.

De genoemde vaardigheden komen steeds gerelateerd aan de verschillende leerstofdomeinen voor. Het gaat om het toepassen van vaardigheden in onderlinge samenhang en in het kader van probleem oplossen. In onderstaande opgave zien we daar een voorbeeld van.

Voorbeeld

De opgave hoort bij het onderwerp: Meten en rekenen in de meetkunde, en daarbinnen specifiek bij de stelling van Pythagoras.

Een mast met een touw eraan.

Een touw zit aan de bovenkant vast aan een mast. Bij de grond maak je een knoop in het touw, als merkteken. Als je nu vijf meter bij de mast vandaan loopt en het touw strak trekt, is er onder de knoop precies een meter touw extra nodig om de grond te raken. Hoe lang is de mast?

Plan van aanpak

Maak eerst een schets van de situatie. Noteer de bekende gegevens in de tekening.

Gereedschap kiezen.

Welk wiskundig gereedschap heb je tot je beschikking om het probleem op te lossen? (Meten in de tekening? Stelling van Pythagoras?)

Selecteren geschikt gereedschap

Met de stelling van Pythagoras.

Geschikte variabelen kiezen: h is hoogte van de mast.

Formule opstellen: $h^2 + 25 = (h+1)^2$

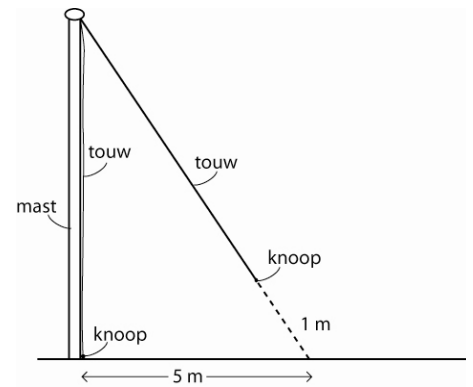
Probleem oplossen

$$h^2 + 25 = (h+1)^2 = h^2 + 2h + 1$$

$$2h + 1 = 25 \rightarrow h = 12$$

De mast is 12 m lang. Kan dat? (terugvertalen naar de situatie).

Ja, een mast van 12 m hoogte is mogelijk.



De algemene vaardigheden gelden voor alle leerjaren, hoewel er wel een zekere ontwikkeling in het niveau van de vaardigheden verwacht wordt die doorgaat tot het einde van de opleiding. Er zijn ook algemene vaardigheden die niet aan het vak gebonden zijn, zoals *ontwikkelen van vertrouwen in eigen kunnen* of *presenteren van onderzoeksresultaten*. Dergelijke vaardigheden blijven hier buiten beschouwing.

Omdat algemene wiskundige vaardigheden zoals gezegd niet los van de wiskundige inhoud aan bod komen nemen we geen apart subdomein algemene vaardigheden op in dit trajectenboek. We concretiseren de vaardigheden waar nodig en mogelijk in relatie tot de beschreven inhoud. Ook zullen we ze in de voorbeelden benadrukken.

Variatie

Het is in de onderbouw van belang dat leerlingen werken aan een variatie van typen problemen. Er is balans nodig: met alleen complexe opgaven wordt de gereedschapskist niet gevuld, zonder complexe opgaven ontwikkel je geen aanpakgedrag.

Voor het vaardig worden in probleemaanpak is werken aan grote, relatief ingewikkelde probleemsituaties nodig. De ene keer gaat het daarbij om praktische situaties die met behulp van wiskunde kunnen worden gestructureerd of opgelost (horizontaal mathematiseren). De andere keer gaat het om wiskundige probleemstellingen, om het structureren van een wiskundig gebied, het verkorten van een wiskundige werkwijze of het analyseren van een wiskundig object (verticaal mathematiseren).

Daarnaast pleiten we voor gevarieerd oefenen, daarbij hoort ook: duidelijk maken wat je daarvan moet leren en onthouden, wat je paraat moet hebben. Het gaat niet om geïsoleerde kennis, snel en afzonderlijk te trainen, maar om een *breed samenhangend repertoire*, dat leerlingen kunnen oproepen op het moment dat zij dat nodig hebben.

Inhoudsgebieden

Het trajectenboek beschrijft de inhoud in een aantal deelgebieden, verdeeld over de leerjaren. De indeling in domeinen en subdomeinen is als volgt:

- Rekenen
 - Getallen

Dit subdomein omvat kennis van getallen (geheel, decimaal, breuken, machten, wortels, bijzondere getallen, zoals π); bewerkingen ermee ($+$, $-$, $\times$, $\div$, machtsverheffen, worteltrekken) en toepassingen (functioneel gebruiken).
 - Verhoudingen

Dit subdomein omvat ook de procenten, breuken en decimale getallen wanneer ze zich als verhoudingen voordoen.
- Algebra
 - Verbanden

Dit gebied betreft de lineaire, kwadratische, exponentiële en diverse andere verbanden en hun voorstellingsvormen.
 - Rekenen met formules

Hier gaat het om de ‘kale’ algebra. De overgang van rekenen met getallen (zie: subdomein getallen) naar het werken met variabelen, expressies en (woord)formules wordt in dit deelgebied gemaakt. Er zijn drie deelgebieden: Patronen en (woord)formules, Rekenen met formules en variabelen en Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.

- Meten en meetkunde
 - Vormen en figuren
Dit gebied betreft de meetkunde van platte en ruimtelijke vormen, figuren en situaties. Hoeken, symmetrie en bijzondere lijnen in driehoeken vallen ook onder dit gebied.
 - Meten en rekenen in de meetkunde
Hierbinnen wordt aandacht besteed aan berekeningen van lengte (m.b.v. stelling van Pythagoras, goniometrische verhoudingen), oppervlakte en inhoud en het rekenen met hoeken en verhoudingen.
 - Figuren en formules
In dit deelgebied worden vormen en figuren beschreven in het coördinatensysteem. Hier vindt de voorbereiding plaats op het subdomein Analytische meetkunde in de bovenbouw.
- Statistiek
In dit domein staat het verwerken en analyseren van data centraal. Aandachtspunten zijn exploratieve data-analyse en fundamentele concepten uit de beschrijvende statistiek.

De verdeling over de leerjaren is enigszins willekeurig, andere keuzes zijn mogelijk. Per deelgebied zijn voorbeelden opgenomen. De voorbeelden zijn door de nummering gekoppeld aan de beschreven leerstof. Aan het eind van elk deelgebied geven we een overzicht van begrippen die leerlingen aan het eind van leerjaar 3 paraat moeten hebben. Dit betekent dat ze deze begrippen vaardig en vlot kunnen hanteren, niet dat ze ‘definities’ moeten kunnen geven.

Bij de invoering van de basisvorming in 1993 is uitgegaan van een wiskundeprogramma dat gebaseerd was op een urenadvies van 10 lessen per week, gespreid over drie jaar. Vanwege het streven van de basisvorming naar eenheid in programma en niveau, was dit programma voor havo en vwo aan de lichte kant en werden traditionele onderbouw onderwerpen doorgeschoven naar de bovenbouw. Daardoor is het uren aantal in de onderbouw in de loop der jaren sterk gereduceerd. Het is een belangrijke oorzaak van problemen in de bovenbouw en de aansluiting met het hoger onderwijs. In de nu voorgestelde opzet is sprake van een noodzakelijk inhoudelijk herstel van het onderbouwprogramma. In verhouding tot de basisvorming zowel door de uitbreiding van onderwerpen als in niveau. Van belang is, dat de vernieuwde onderbouwtrajecten ook daadwerkelijk worden gerealiseerd. Daarnaast is er een versterkte aandacht voor de rekenvaardigheden. Om die reden gaan we ervan uit dat tenminste 10 klokuren in de drie jaar onderbouw beschikbaar zijn.

Rekenen

Leerlingen die binnenkomen in havo/vwo-brugklassen verschillen in het bereikte rekenniveau van groep 8. Dit geldt zowel voor het paraat hebben van rekenprocedures als voor het vaardig kunnen uitvoeren van die procedures. Daarom wordt er in de onderbouw van havo en vwo systematisch aandacht besteed aan onderhoud en verdieping van het rekenen. Ook verdient het aanbeveling om de gebruikte methodes en technieken af te stemmen met wat in andere vakken gebruikelijk is.

Getallen

Getallen en getalrelaties

Dit onderdeel loopt als een rode draad door al het ‘rekenen’ heen. Het is niet zo zeer een losstaand deelgebied, dat in een aantal hoofdstukken kan worden afgewikkeld, veeleer zou het een continu aandachtspunt moeten zijn, dat regelmatig waar het past even expliciet ter sprake komt. In klas 1 worden de rekenregels gebruikt op het beheersingsniveau *paraat hebben*. In klas 3 ligt voor havo de nadruk meer op functioneel gebruiken van getallen en getalrelaties en bij vwo meer op de eigenschappen van getallen en rekenkundige relaties.

We beschrijven dit onderdeel hier apart, omdat het anders mogelijk onzichtbaar blijft. In de andere deelgebieden van het domein getallen worden specifieke doelen op het terrein van getallen en getalrelaties ook genoemd. Het gaat er in alle gevallen om dat leerlingen in een rijke omgeving met getallen blijven werken en leren redeneren, zonder dat ze meteen naar de rekenmachine grijpen. De rekenmachine kan ingezet worden om leerlingen lastig en onnodig rekenwerk uit handen te nemen. Daarbij kunnen leerlingen beoordelen wanneer ze een berekening uit het hoofd kunnen uitvoeren en wanneer het handig en zekerder is om een rekenmachine te gebruiken.

Voorop blijft staan dat getallen voor leerlingen *betekenis* krijgen op grond van hun intrinsieke eigenschappen, met inzet van een parate beheersing uit het hoofd van fundamentele rekenprocedures.

Klas 1 havo/vwo

1. Structuur en opbouw van het getalsysteem (tientallig stelsel, rationale getallen, uitbreiding met negatieve getallen kennen en gebruiken.
Zie Negatieve getallen.
2. Volgorde van bewerkingen (ook met haakjes en kwadraten) en rekenregels kennen. Deze vaardig kunnen gebruiken.
Zie Machten, wortels en wetenschappelijke notatie.
3. Efficiënt en vaardig rekenen (+, -, ×, :), gebruik makend van de eigenschappen van getallen en bewerkingen, met breuken, gemengde getallen, positieve en negatieve getallen, decimale getallen en met grote getallen.
4. Efficiënte hoofdrekenstrategieën gebaseerd op getalbegrip, ontwikkelen en gebruiken.
5. Eigenschappen van het getal 0 en van het getal 1 bij vermenigvuldigen en delen kennen en beredeneren.
6. Rekenmachine vaardig gebruiken en met beleid en begrip inzetten.
7. * Redeneren over en met eigenschappen van getallen en efficiënte hoofdrekenstrategieën.

Klas 2 havo/vwo

8. Redeneren over eigenschappen van bewerkingen.
9. Wortels interpreteren als getallen, ze kunnen ordenen en vergelijken en plaatsen in het getalsysteem (bijvoorbeeld op een getallenlijn).
Zie Machten, wortels en wetenschappelijke notatie.

Klas 3 havo en 3 vwo

10. Onderhoud en gebruik van bovenstaande en dit repertoire uitbreiden naar en toepassen op letterrekenen.
11. * Weten wat ontbinden van getallen in priemfactoren is en dit kunnen uitvoeren.
12. * Onderzoek doen naar bijzondere getallen zoals priemgetallen, volmaakte getallen, driehoeks- en vierkantsgetallen, klokrekenen (modulo 12),...

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Symbolen $+$, $-$, $\times$, $:$, $\sqrt{\quad}$, $(\quad)$, $<$, $>$
- Wortel, kwadraat
- Volgorde van bewerkingen
- Ontbinden
- Term, factor
- Deelbaar
- Negatieve getallen, *priemgetallen

Voorbeelden bij *Getallen en getalrelaties***Klas 1 havo/vwo.**

1. Leg uit wat er gebeurt als je vermenigvuldigt met of deelt door een veelvoud van 10, ook bij decimale getallen.
4. Bereken $12864 - 756 + 36$ uit je hoofd. Hoe doe je dat handig?
6. Voorbeelden kunnen geven van situaties die je handiger uit het hoofd kunt uitrekenen en van situaties die je beter met een rekenmachine kunt uitvoeren.
- 7.* Is dit waar: $24 \times 24 = (20 \times 20) + (4 \times 4)$? Licht toe en geef zonodig een correctie.

Klas 2 havo/vwo

8. Laat met een voorbeeld zien dat ‘vermenigvuldigen niet altijd groter maakt’ en ‘delen niet altijd kleiner’.
Kunnen benoemen dat je $26 + 117 + 74$ kun je handiger uitrekenen door de volgorde te verwisselen:
 $26 + 74 + 117 = 217$.
9. Geef zonder rekenmachine een schatting van $\sqrt{17}$ in één decimaal nauwkeurig.

Klas 3 havo en 3vwo

10. Je weet dat $\frac{5 \times 7}{5 \times 9} = \frac{7}{9}$ en dat $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$. Laat met een voorbeeld zien dat deze regel niet opgaat voor $\frac{a+b}{a+c}$.

11. * Schrijf 555660 als product van priemfactoren. Antwoord: $555660 = 2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7^3$

12. * Een vermenigvuldigtafel maken modulo 12 en modulo een priemgetal en deze met elkaar vergelijken.

Breuken en decimale getallen

Decimale getallen en breuken zijn in het basisonderwijs aan bod gekomen. In klas 1 vindt consolidatie van het geleerde plaats en wordt op dit gebied het beheersingsniveau *paraat hebben* bereikt. Dit deelgebied loopt door in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. De nadruk ligt hier op de structuur, opbouw en uitbreiding van het getalsysteem en voor de breuken op het formaliseren van de bewerkingen en de relatie met het ‘letterrekenen’ met breuken.

Klas 1 havo/vwo

1. Breuken en decimale getallen in elkaar kunnen omzetten, vergelijken, ordenen en plaatsen op een getallenlijn.
2. Taal en notatie rond breuken en decimale getallen kennen en vlot kunnen gebruiken.
3. Vaardig rekenen met breuken en decimale getallen, inclusief volgorde van bewerkingen en gebruik van haakjes. Met eenvoudige getallen ook zonder rekenmachine.
4. Regels voor afronden en afbreken kennen en gebruiken. Ook binnen een situatie.
5. Correctheid van rekenkundige beweringen over breuken en decimale getallen verifiëren.
6. * Beargumenteren waarom de regels voor de bewerkingen met breuken correct zijn.

Klas 2 havo/vwo

7. Vaardig rekenen met breuken en decimale getallen bij het werken met formules en vergelijkingen en in de meetkunde en statistiek.
8. Onderzoeken van het optreden van regelmaat bij het omzetten van breuken in de decimale notatie.
9. Bewerkingen met breukvormen met variabelen kunnen uitvoeren (‘letterrekenen met breuken’).
Zie Rekenen met formules.
10. Redeneren over eigenschappen van breukvormen met variabelen en de regels voor de bewerkingen ermee uitleggen.

Klas 3 havo en 3 vwo

11. Rekenen met breuken en decimale getallen onderhouden en gebruiken bij het werken met formules en vergelijkingen en in de meetkunde en statistiek.
12. Structuur en eigenschappen van ‘breukvormen met variabelen’ en *gebroken functies beredeneren en in verband brengen met eigenschappen van breuken (getallen).
Zie Rekenen met formules.
13. *Onderzoek doen naar eigenschappen van de decimale ontwikkeling van breuken, van decimale getallen en van irrationale getallen.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Breuk, teller, noemer, breukstreep
- Decimaal (getal)
- * Irrationaal getal
- Afronden op ...decimalen nauwkeurig, afbreken
- Schatten

Voorbeelden bij *Breuken en decimale getallen*

Klas 1 havo/vwo

3. $18,3 - (7,2 + 2,8) = 18,3 - 10 = 8,3$

$$\frac{2}{7} : 5 = \frac{10}{35} : 5 = \frac{2}{35}$$

4. Er wachten 23 mensen op de begane grond voor een lift. Per keer kunnen 7 mensen mee. Hoeveel keer moet de lift omhoog om iedereen op de goede plaats te krijgen?

Bron: p5 2_1hv1_GR

Maxime moet € 5,80 betalen voor een restant stof van 3,90 meter.

Met de rekenmachine berekent ze de prijs per meter : $5,8 : 3,9 = 1,487179487$
en schrijft het antwoord van de rekenmachine over.

Waarom is dat geen goed antwoord?

5. - Geef voorbeelden van situaties waarin je $\frac{3}{4}$ kunt interpreteren als $3 : 4$, $\frac{1}{4}$ van 3, als $3 \times \frac{1}{4}$ of 0,75 keer.
- Schrijf een regel op die je gebruikt om de volgende getallen met elkaar te vermenigvuldigen en geef van elk een voorbeeld van een situatie waarin je kunt zien waarom die regel werkt.

$$\frac{1}{7} \times 5 = \dots \qquad \frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \dots$$

6. * Waarom is $\frac{1}{8} > \frac{1}{9}$. Wat kun je nu zeggen van $\frac{1}{a}$ en $\frac{1}{a+1}$ (a is een positief, geheel getal)?

Klas 2 havo/vwo

8. Verklaar de regelmaat in de decimale ontwikkeling van een breuk met behulp van de eigenschappen van de staartdeling.

10. Vereenvoudigen van 'letterbreuken' zoals:

$$\frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}, \quad \frac{m+1}{2m+2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{5p}{20q} = \frac{p}{4q}$$

Geef de antwoorden:

$$\frac{2}{m} + \frac{3}{m} = \dots, \quad \frac{m}{2} - \frac{m}{3} = \dots, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \dots$$

11. Vergelijk de (letter)breuken. Met a wordt steeds een positief, geheel getal bedoeld.

Je mag de volgende symbolen gebruiken:

+ (optellen), - (aftrekken), $\times$ (vermenigvuldigen), $\div$ (delen), = (is gelijk aan), < (is kleiner dan) en > (is groter dan). Vul het juiste symbool in:

$$\frac{5}{8} \dots \frac{5}{9} = \frac{5}{72}, \quad \frac{1}{a} \dots \frac{1}{a} = \frac{2}{a}, \quad \frac{1}{8} \dots \frac{2}{9} = \frac{25}{72}, \quad \frac{a+1}{a+2} \dots \frac{1}{2}$$

Leg uit waarom het symbool dat je hebt ingevuld juist is.

Klas 3 havo en 3 vwo

13. *Het bewijs dat $\sqrt{2}$ irrationaal is.

* Welke van de volgende breuken kun je wel als eindig decimaal getal schrijven, welke niet:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$$

Hoe kun je direct aan de noemer zien of een breuk als eindig decimaal getal geschreven kan worden? Geef zelf voorbeelden.

Negatieve getallen

Leerlingen leren in leerjaar 1 negatieve getallen kennen vanuit situaties en als uitbreiding op het getalsysteem. Zij kennen de notatie, kunnen negatieve getallen plaatsen op de getallenlijn en deze gebruiken in een assenstelsel. Ze leren bewerkingen met negatieve getallen uitvoeren: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen. Daarbij kunnen ook haakjes voorkomen. Het rekenen met negatieve getallen wordt in klas 2 en 3 onderhouden doordat negatieve (komma)getallen voorkomen in de context van vergelijkingen, formules etc. Ook wordt er gerekend met negatieve breuken.

Klas 1 havo/vwo

1. De schrijfwijze van negatieve getallen kennen en deze gebruiken.
2. Weten hoe negatieve getallen een uitbreiding vormen van het getalsysteem en hierover redeneren (bijvoorbeeld bij ordenen, vergelijken).
3. Gehele getallen ordenen en plaatsen op een getallijn en in een assenstelsel.
4. Bewerkingen met negatieve (komma)getallen en eenvoudige negatieve breuken uitvoeren.
5. De voorrangsregels kennen en gebruiken, daarbij ook met haakjes werken (zowel plaatsen als 'wegwerken').
6. Redeneren over de eigenschappen van de bewerkingen met negatieve getallen en deze kunnen uitleggen.

Klas 2 havo/vwo

7. Vaardig rekenen met negatieve (komma)getallen in de context van het oplossen van vergelijkingen en bij berekeningen met formules.
8. Onderhouden en uitbreiden van het rekenen met negatieve breuken.

Klas 3 havo en 3 vwo

9. Rekenen met negatieve getallen onderhouden doordat negatieve (komma)getallen en breuken voorkomen in de context van vergelijkingen en formules.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Positief
- Negatief
- Twee betekenissen voor het 'mintekens' (voor de bewerking aftrekken, symbool voor negatief getal)
- Assenstelsel met negatieve assen
- Coördinaten

Voorbeelden bij *Negatieve getallen*

Klas 1 havo/vwo

2. en 4. Leg uit wat overeenkomst en verschil is tussen: $3 + -5$ en $3 - 5$.

Antwoord: beide berekeningen geven hetzelfde resultaat, maar het zijn verschillende bewerkingen namelijk optellen en aftrekken op verschillende getallen namelijk 3 en -5 en 3 en 5.

5. Bereken: $2 + -4(-1 - 7)$

Klas 2 havo/vwo

7. Los op $-\frac{1}{7}x + \frac{1}{5} = 1$

Machten, wortels en wetenschappelijke notatie

Vanuit het werken met kwadraten worden begrip en notatie van machten opgebouwd. Machten van tien worden gebruikt bij de wetenschappelijke notatie en op de rekenmachine, ze versterken inzicht in het getalsysteem. Wortels komen voort uit de omgekeerde bewerking bij kwadrateren. Wortels maken een uitbreiding op het getalsysteem noodzakelijk in de vorm van irrationale getallen.

Klas 1 havo/vwo

1. Kwadrateren en worteltrekken kennen en gebruiken als 'tegengestelde' bewerkingen.
2. Notatie van kwadrateren en machtsverheffen (met natuurlijke exponent), ook met haakjes bij negatieve getallen en eventueel bij breuken, en op de rekenmachine herkennen en kunnen gebruiken.
3. Terminologie van machtsverheffen (met natuurlijke exponent) kennen en kunnen gebruiken, onder andere: kwadraat, macht, grondtal, exponent.
4. (Series) berekeningen waarin (ook) sprake is van kwadrateren of machtsverheffen (met natuurlijke exponent) in de juiste volgorde en correct uitvoeren. Zie ook het onderdeel *Getallen en getalrelaties*.
5. Regel voor vermenigvuldigen van machten met gelijk grondtal toepassen en verklaren.
6. Beredeneren wat er gebeurt met machten van breuken.

Klas 2 havo/vwo

7. Rekenregels met wortels en machten (met natuurlijke getallen als exponent) kennen en vaardig gebruiken.
8. Notatie en terminologie van de wetenschappelijke notatie (exponenten zijn natuurlijke getallen) of standaardvorm kennen en kunnen gebruiken (ook die van de rekenmachine).
9. Getallen kunnen omzetten van en naar de wetenschappelijke notatie, daarbij correct kunnen afronden.
10. Redeneren over wetenschappelijke notatie in relatie tot tientallig stelsel en plaatswaarde.
11. Bewerkingen (+, -, $\times$, :) met wortels en wortelvormen uitvoeren.
12. Wortels kunnen ordenen, vergelijken en plaatsen op een getallenlijn.
Zie Getallen en getalrelaties.

Klas 3 havo en 3 vwo

13. Het rekenen met wortels en wortelvormen onderhouden en gebruiken bij algebra en meetkunde.
14. Het rekenen met machten onderhouden en gebruiken bij algebra en meetkunde (daar met name tweede- en derde machten).
15. * Worteltrekken als tegengestelde bewerking van machtsverheffen kunnen gebruiken bij eenvoudige herleidingen.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Kwadraat, wortel
- Macht, grondtal, exponent
- Wetenschappelijke notatie (ook die van de rekenmachine)

Voorbeelden bij Machten, wortels en wetenschappelijke notatie**Klas 1 havo/vwo**

2. Leg uit wat het verschil is tussen $(-3)^4$ en -3^4 en maak de berekeningen.

4. Bereken $(2^3 + 3)^2 = \dots$

Klas 2 havo/vwo

7. Bereken

$$(3\sqrt{6})^2 =$$

$$(-\sqrt{5})^2 - 5^2 =$$

9. Herschrijf de inwonertallen op twee decimalen nauwkeurig in de wetenschappelijke notatie.

China 1.330.044.605

Nederland 16.428.360

Monaco 32.796

Klas 3 havo en 3 vwo

$$15 * \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

Verhoudingen

Verhoudingen, procenten en schaal

Het oplossen van verhoudingsproblemen vraagt kennis, vaardigheden en inzicht op diverse terreinen van het rekenen. De belangrijkste aanpak in situaties met verhoudingen bestaat uit het systematisch weergeven van de gegevens en het gevraagde in een *verhoudingstabel* en daarin ‘verhoudingsgewijs rekenen’. Onderdeel daarvan kan zijn het zoeken van de *vermenigvuldigingsfactor* en het uitvoeren van berekeningen met die factor. Die vermenigvuldigingsfactor of groeifactor speelt ook een rol bij vergroten en verkleinen, bij berekeningen met schaal (domein Meten en Meetkunde). Het is een kernconcept in de domeinen verhoudingen en verbanden.

Klas 1 havo/vwo

1. Notaties en taal van verhoudingen kennen, begrijpen en gebruiken.
2. Rekenregels voor verhoudingen (bijvoorbeeld in de verhoudingstabel) kennen, gebruiken en beredeneren.
3. Verhoudingen in verband brengen met recht evenredig verband.
4. Procenten herkennen en gebruiken als bijzondere verhouding en berekeningen met procenten vaardig uitvoeren.
5. Rekenen met samengestelde grootheden (snelheid, dichtheid) en daarbij gebruik maken van het inzicht dat het om verhoudingen gaat.
6. Verhoudingsvraagstukken herkennen, structureren en oplossen met een adequate strategie bijvoorbeeld met behulp van een verhoudingstabel en met gebruikmaking van de relaties tussen verhoudingen, breuken, decimale getallen en procenten.

Klas 2 havo/vwo

7. Percentages (ook boven de 100) omzetten in een vermenigvuldigfactor en omgekeerd en daarmee vaardig rekenen, ook met percentages van percentages.
8. Verschil tussen ‘absoluut’ en ‘relatief’ kennen en kunnen gebruiken.
9. (Groei)factoren gebruiken bij vergroten en verkleinen in de meetkunde.
10. Vaardig rekenen en problemen oplossen in diverse situaties waarin verhoudingen of percentages voorkomen.

Klas 3 havo en 3 vwo

11. Vaardig kunnen rekenen met procentuele toe- en afname ook in meetkunde en statistiek.
12. (Wiskundig) redeneren in situaties waarin verhoudingen of percentages voorkomen. Hierbij geschikte rekenmodellen inzetten.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Relatief, absoluut
- Per, op de, van de, staat tot (notatie en terminologie)
- Schaal
- Verhoudingstabel
- Procent, percentage
- Vermenigvuldigfactor, groeifactor, vergrotingsfactor

Voorbeelden bij Verhoudingen, procenten en schaal

Klas 1 havo/vwo

1. 1 op 100000; per; 1 : 500; 'in verhouding toenemen'.

4. Een infuus geeft 20 druppels per minuut. Met de verhoudingstabel kun je uitrekenen hoeveel dat is per kwartier, half uur, 1 uur, 2 uur,...

tijd in minuten	1	2	4	16	15 (= 16 - 1)	30	60	120
druppels	20	40	80	320	320 - 20 = 300	600	1200	2400

5. Het gemiddelde brandstofverbruik van een auto wordt aangegeven met het aantal liters per 100 km. Oudere mensen zijn gewend om dit aan te geven met het aantal kilometers dat op 1 liter gereden kan worden. Van een auto wordt aangegeven dat die 15,5 liter verbruikt op 100 km. Hoeveel km is dat op één liter.

Klas 2 havo/vwo

7. Een auto van 22.000 euro wordt 20% goedkoper.

De nieuwe prijs wordt daarna nog eens met 10% verlaagd.

Hoe hoog is het percentage van de totale prijsverlaging?

De btw van 19% op een bedrag b kun je op twee manieren berekenen.

Manier 1: $b + \frac{19}{100} \times b$

Manier 2: $1,19 \times b$

Laat zien dat beide manieren dezelfde uitkomst geven.

8. Verschil tussen relatief en absoluut:

- 8** In de tabel hiernaast staat de verdeling van de leerlingen van een middelbare school over de diverse afdelingen in de jaren 2003 en 2004.
- a** Welke getallen in de tabel zijn absolute aantallen?
- b** En welke getallen zijn relatieve aantallen?
- c** Onderzoek voor elke afdeling de toename of afname van het aantal leerlingen in deze periode.

Bron: p93_3hA_MW

	2003	2004
onderbouw	40%	47%
bovenbouw vmbo	18%	14%
bovenbouw havo	21%	20%
bovenbouw vwo	21%	19%
totaal	1565	1731

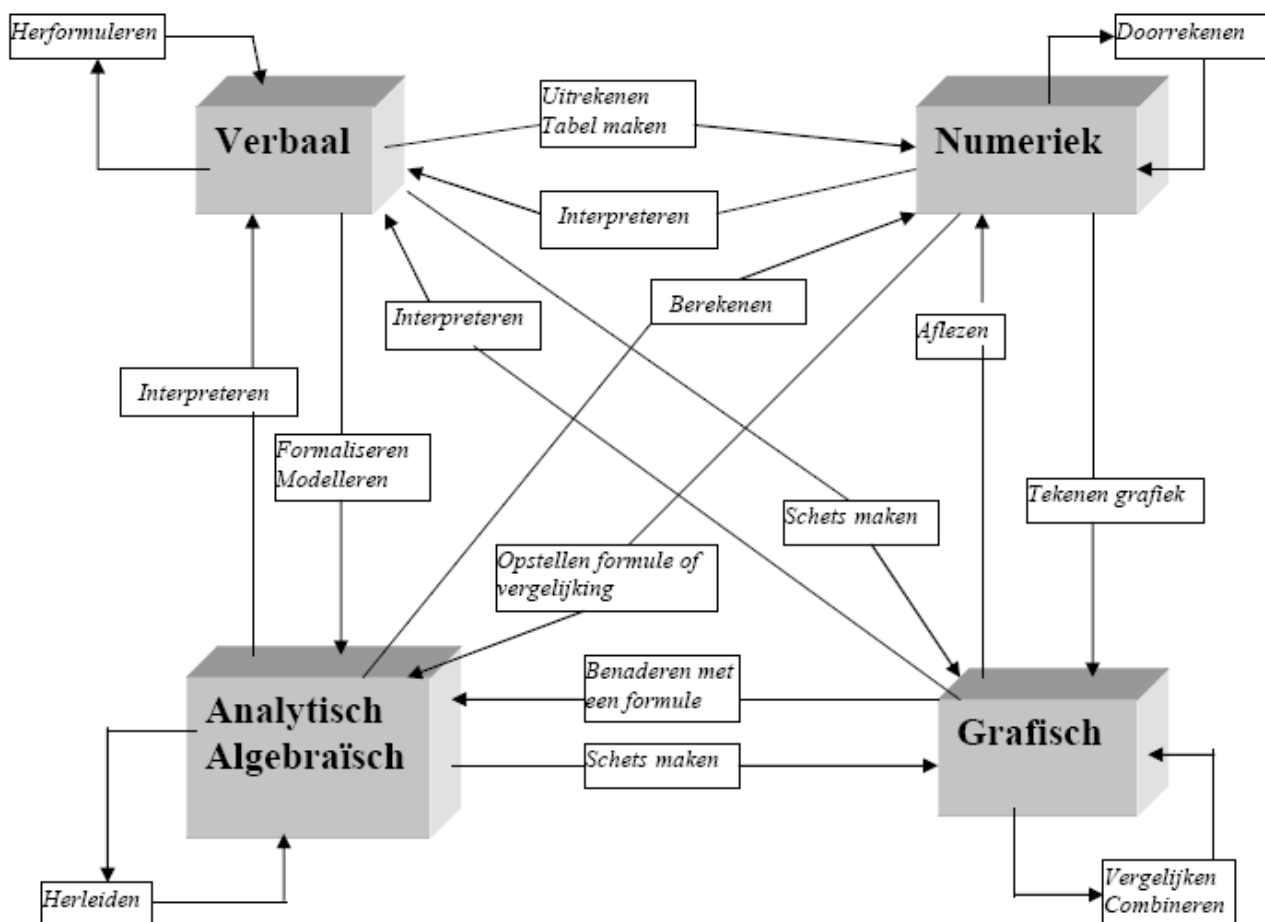
Klas 3 havo en 3 vwo

12. Carel koopt een nieuwe camera. Hij krijgt 20% korting, maar betaalt 19% btw over het aankoopbedrag. Carel beweert dat hij 1% korting overhoudt omdat van de 20% korting de 19% btw wordt afgetrokken. Klopt deze bewering? Leg uit.

Algebra

Verbanden

Aan de basis van het beheersen van dit subdomein ligt de kennis en vaardigheden om verbanden in verschillende representaties te herkennen en van de ene representatie te herformuleren naar de andere representatie.



Dit subdomein is onderverdeeld in de volgende deelgebieden

- Grafieken, tabellen en formules
- Lineaire verbanden
- Exponentiële verbanden
- Kwadratische verbanden

Het functiebegrip zal voor havo pas in klas 4 worden geïntroduceerd, voor vwo in klas 3. De leerlingen hoeven de functienotaties $f(x)$ en $f: x \rightarrow \dots$ in de onderbouw nog niet te gebruiken.

Grafieken, tabellen en formules

Grafieken vormen (net als tabel, formule en beschrijving) één van de vier verschijningsvormen van verbanden. Leerlingen leren in klas 1 eigenschappen van grafieken herkennen, benoemen en gebruiken. De tabel wordt gebruikt om van een situatie of formule tot een grafiek te komen en omgekeerd. Eenvoudige (woord)formules komen ook in klas 1 aan bod. Aan het eind van leerjaar 2 kunnen de leerlingen vlot de overgangen tussen de vier representaties van verbanden maken. Aan het eind van leerjaar 2 kunnen de leerlingen ook redeneren over de grafiek (en de tabel en de formule) als wiskundig object. In klas 3 kunnen leerlingen grafieken combineren tot nieuwe grafieken en omgaan met families van grafieken. In de onderbouw hoeft de term *parameter* nog niet te worden gekend.

Leerlingen kunnen aan het eind van klas 3 kenmerken van allerlei verbanden opsporen en gebruiken, met behulp van algemene werkmethoden, zoals het maken van een tabel, het tekenen van grafieken en het plotten eventueel met behulp van grafische software. Het gaat hierbij zowel om het adequaat kunnen gebruiken van de beschikbare methoden als om het paraat hebben van de eigenschappen van lineaire, exponentiële en kwadratische verbanden. Door het gebruik van grafische software (waaronder ook het gebruik van een grafische rekenmachine) bij het onderzoek naar allerlei verbanden, gevolgd door vragen over het verband en de eigenschappen van de grafiek leren de leerlingen deze relatie te interpreteren.

In leerjaar 1 gaat het om een oriëntatie en staat daarbij het werken met tabel en grafiek centraal, vanaf leerjaar 2 komt daar de formule bij. Het zwaartepunt van dit onderdeel ligt in leerjaar 3.

Typen verbanden die aandacht krijgen zijn: lineair, exponentieel, wortel, omgekeerd evenredig, periodiek en machtsverbanden.

In de hieronder volgende leerstofbeschrijving worden eerst algemene kenmerken beschreven en daarna volgen de specifieke beschrijvingen voor de standaardverbanden lineair, exponentieel en kwadratisch.

Klas 1 havo/vwo

1. Informatie uit een grafiek (zowel globaal als lokaal) aflezen, interpreteren en weergeven, ook in een tabel of met een beschrijving.
2. Terminologie rond grafieken begrijpen en gebruiken bijvoorbeeld om het verloop van een grafiek te beschrijven.
3. Interpoleren van tussenwaarden en extrapoleren door aflezen in een lijngrafiek die is ontstaan vanuit een tabel.
4. Twee grafieken vergelijken door aflezen (snijpunten, onderlinge positie).
5. Bij een situatiebeschrijving of tabel een passende grafiek tekenen.
Daarbij: variabelen kiezen, vaststellen wat bij de horizontale en wat bij de verticale as komt, assen indelen (stapgrootte), punten plotten (en kiezen voor al dan niet verbinden) of het verloop van grafiek schetsen.
6. Grafiek tekenen bij een eenvoudige (woord)formule, via de tabel.
7. Grafiek in verband brengen met tabel, (woord)formule en beschrijving in woorden, en omgekeerd.
8. Redeneren over sterke en zwakke punten van de grafiek als representatie van een verband in vergelijking tot een verbale beschrijving of een tabel.

Klas 2 havo/vwo

9. Op grond van de vorm en structuur van grafiek of tabel redeneren over het onderliggend verband (o.a. constant, evenredig, lineair, exponentieel, kwadratisch, periodiek).
10. Informatie uit een grafiek of tabel gebruiken om berekeningen uit te voeren en conclusies te trekken. Ook interpoleren en extrapoleren.
11. Beschrijven en *verklaren wat het effect is van een verandering van constanten op de grafiek (in ieder geval bij lineaire verbanden).
12. Twee verbanden vergelijken met behulp van grafiek en tabel.
13. Afhankelijk van het doel, de situatie en de toepassing een geschikte representatie voor een gegeven verband kunnen kiezen en deze keuze kunnen beargumenteren.

Klas 3 havo en 3vwo

14. Bij een (willekeurige) formule een grafiek tekenen met behulp van een tabel.
15. Som – en verschilgrafiek interpreteren en maken.
16. Grafieken vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en het effect op de formule aangeven.
17. Grafieken en vergelijkingen met elkaar in verband brengen, al dan niet via het gebruik van grafische software. *Voor vwo en havo-B ook voor eenvoudige parametervormen in formules.
18. Kenmerken van een periodiek verband, zoals periode, amplitude, evenwichtsstand kennen en kunnen gebruiken.
19. Allerlei verbanden, lineair, exponentieel, wortel, omgekeerd evenredig, periodiek en machtsverbanden herkennen door te redeneren op basis van de kenmerken zoals die blijken uit grafiek, tabel of formule.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Tabel, grafiek, (woord)formule
- Afhankelijke en onafhankelijke variabele
- Stijgen, dalen, constant, periodiek
- Steilheid, helling
- Snijden, snijpunt,
- Nulpunt
- Top, dal
- Assen(stelsel), coördinaten
- Verband, grootte, eenheid
- Somgrafiek, verschilgrafiek
- Verschillen tussen: lineair, exponentieel, kwadratisch, wortel, recht evenredig, omgekeerd evenredig, periodiek en machtsverband
- Periode, amplitude, evenwichtsstand

Voorbeelden bij Grafieken en tabellen en formules

Klas 1 havo/vwo

5. De temperatuur op de grond verandert sterk met de buitentemperatuur. Maar op een diepte van 7 meter is die invloed vrijwel verdwenen en heeft de aarde een temperatuur tussen de 10 en 12 °C. Ga je nog dieper dan wordt het steeds warmer. De regel is: elke kilometer dieper wordt het 30 °C warmer. De regel geldt zeker voor de eerste 10 kilometer.
- Maak een tabel voor de eerste 10 km. Ga uit van 10 °C voor de temperatuur op de grond.
 - Maak een formule bij deze regel. Kies de variabele T voor de temperatuur en d voor de diepte.
 - Teken een grafiek bij deze tabel. Zet de diepte horizontaal uit en de temperatuur verticaal.
 - Op welke diepte is de temperatuur 100 °C?
7. Welke van de volgende tabellen hoort niet bij een kwadratisch verband?

x	2	3	4	5	6	7
y	11	16	23	32	43	56

x	1	2	3	4	5	6
y	1	10	25	46	73	106

x	2	3	4	5	6	7
y	9	19	33	49	73	99

Klas 2 havo/vwo

9. Voorbeelden van redeneringen: ‘De grafiek is geen rechte lijn dus het verband is niet lineair.’
‘In de tabel zie je steeds een verdubbeling, dus het gaat om (procentuele) groei’.

Welke van de formules hieronder horen **niet** bij een kwadratisch verband?

$$y = x(x + 3)$$

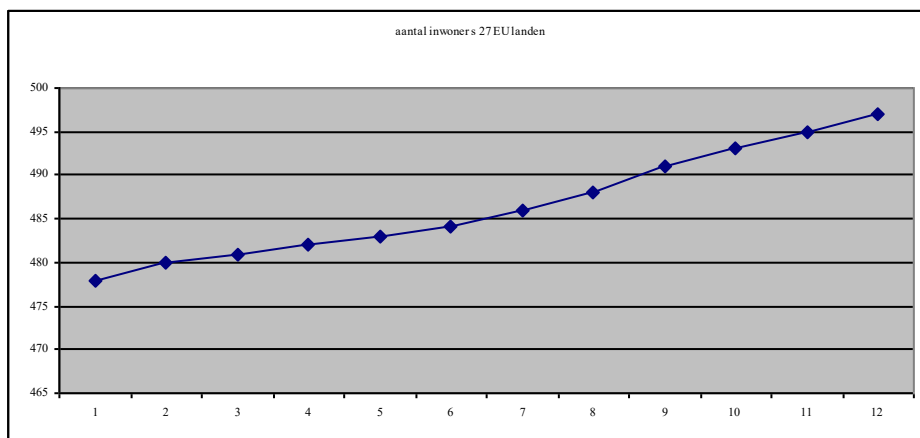
$$y = 2x^2(4x - 1)$$

$$y = x + (x - 3)$$

Eurostat, het statistisch onderzoeksinstituut van de Europese Unie, verzamelde de gegevens over het totale aantal inwoners in de 27 lidstaten sinds 1997.

De gegevens staan in de grafiek. Horizontaal is de tijd uitgezet in het aantal jaren sinds 1996.

Verticaal staat het aantal inwoners in miljoenen.



- Tot welk jaar is onderzocht?
- Vind grafisch een benaderend lineair verband.
- Geef een formule bij dit lineaire verband.
- Geef met deze formule een voorspelling over het aantal inwoners in 2020.

11. Aangeven hoe je de formule moet aanpassen om de grafiek te laten verschuiven of te draaien.

Klas 3 havo en 3 vwo

17. Wat is er anders en wat is hetzelfde aan alle

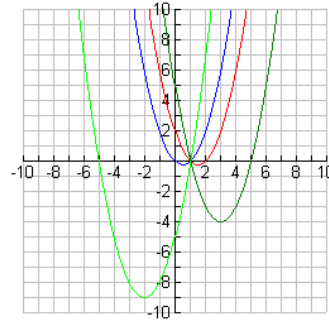
* Onderzoek de volgende verbanden en verandert aan de grafiek voor verschillende

$$y = a(x+1)(x-3)(x+5)$$

$$y = \sqrt{(x+a)}$$

$$y = x^2 - ax + 6$$

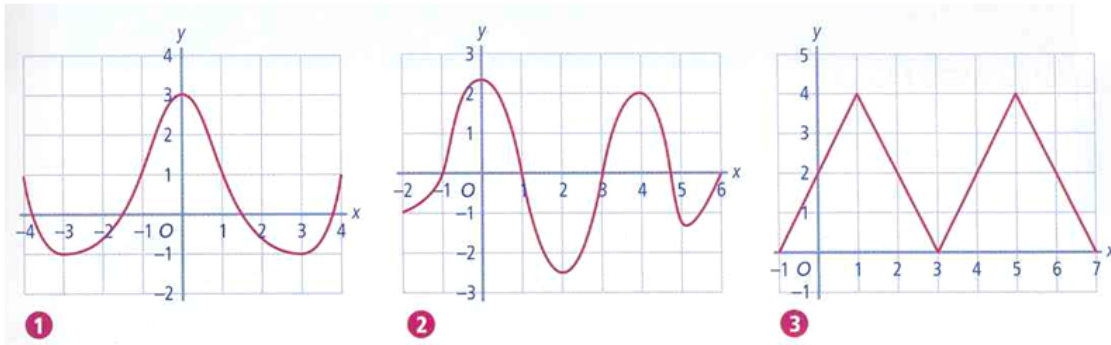
$$y = (x-2)(x+a)$$



grafieken ?

beschrijf wat er waarden van a

18. Kenmerken van een periodiek verband:



- Grafiek 1 stelt een deel voor van een verband met periode 8. Neem de grafiek over en teken nog een periode.
- Leg uit waarom grafiek 2 geen deel kan voorstellen van een verband met periode 4.
- Vind een periodieke uitbreiding voor grafiek 3 en geef de bijbehorende periode.

Bron: p83_3havoB_MW (aangepast)

19. Onderzoek de volgende verbanden, typeer ze en maak een schets.

$$y = 2(x+1)(x-3)(x+5)$$

$$y = \sqrt{(x-4)}$$

$$y = x^2 - 3x + 6$$

$$y = (x-2)(x+4).$$

Lineaire verbanden

Vanaf leerjaar 1 maken leerlingen kennis met lineaire verbanden. Aanvankelijk gebeurt dit met name gekoppeld aan een betekenisvolle situatie, later ook vanuit de andere representaties: tabel, grafiek en formule. Aan het eind van leerjaar 2 beheersen de leerlingen *vlot* alle overgangen tussen de verschillende representaties (verbaal, grafisch, numeriek en analytisch/algebraïsch) van een lineair verband in alle richtingen. In leerjaar 3 wordt dit onderhouden.

Klas 1 havo/vwo

1. In een veelheid aan typen - lineaire- contexten het ‘vaste deel’ en het ‘variabele deel’ benoemen en berekenen.
2. 'Vaste deel' en 'variabele deel' vertalen naar de grafiek en omgekeerd, herkennen dat die terug te vinden zijn in het snijpunt met de verticale as en de steilheid of richtingscoëfficiënt.
3. Een tabel opstellen en de grafiek tekenen bij een formule en bij een in een situatie beschreven lineair verband.
4. Kenmerk van een lineair verband onder woorden kunnen brengen
Bijvoorbeeld als: 'een vast ‘startgetal’ plus per eenheid een constante toename'.
5. Recht evenredigheid herkennen als een bijzonder lineair verband.
6. Een lineair verband aan de hand van de grafiek, situatie en tabel herkennen, beschrijven en kunnen onderscheiden van andere typen verbanden.

Klas 2 havo/vwo

7. Bij een formule van een lineair verband de grafiek schetsen en nauwkeurig tekenen.
8. Een formule in de vorm $y = ax + b$ opstellen bij een in situatie, tabel of grafiek gegeven lineair verband.
9. Lineair verband herkennen aan de formule in de gedaante $y = ax + b$.
10. Lineaire verbanden vergelijken met behulp van hun grafieken.
11. In een specifiek geval beschrijven wat het effect is van een verandering in de getallen a of b op de grafiek van $y = ax + b$ en omgekeerd.
12. Vlot alle overgangen tussen de verschillende representaties van een lineair verband in alle richtingen beheersen.

Klas 3 havo en 3 vwo

13. Grafieken van lineaire verbanden combineren bijvoorbeeld tot som- en verschilgrafiek.
14. *Onderzoeken van en redeneren over families van grafieken van lineaire verbanden, met behulp van grafische software.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Lineair (verband)
- Rechte lijn
- Vaste deel, 'variabele (veranderende) deel', startgetal
- Steilheid, richtingscoëfficiënt
- *Waaier, *bundel* parameter

Voorbeelden bij *Lineaire verbanden*

Klas 1 havo/vwo

3. Voorbeeld van de overgang van formule via tabel naar grafiek.

Vanaf 1 november 2007 geldt in heel Nederland een nieuwe wettelijke structuur voor de taxitarieven. Met de nieuwe tariefstructuur kun je vooraf berekenen hoeveel een taxirit maximaal gaat kosten.

Soort vervoer	Max. instaptarief inclusief eerste 2 km	Max. kilometertarief vanaf 3 ^e kilometer
Personenauto (max. 4 pers.)	€ 7.50	€ 2.20
Busje (max. 5-8 pers.)	€ 12.20	€ 2.52

bron: www.vertax.nl

Bij het tarief van een personenauto past de formule: $\text{tarief} = 7,50 + 2,20 \times (a - 3)$ waarbij a het aantal gereden kilometers is.

- a** Deze formule kun je pas gebruiken als $a \geq 3$. Waarom?
b Vul met behulp van de formule de volgende tabel in:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tarief											

- c** Teken een grafiek bij deze tabel. Bedenk vooraf welke variabele je uitzet op de horizontale as en welke op de verticale as. Bedenk ook vooraf hoe je de eenheden langs de as zult kiezen.
d Doe hetzelfde als bij **b** en **c** voor het maximale tarief van een busje.

Klas 2 havo/vwo

12 Voorbeelden van de overgangen tussen de verschillende representaties van een lineair verband.

Van Verbaal naar Numeriek

De monteurs van de firma's Power en Mega repareren wasmachines aan huis. Power rekent 50 euro voorrijkosten en 16 euro per kwartier voor de tijd die de klus vergt. Bij Mega rekenen ze met 75 euro voorrijkosten en 12 euro per kwartier.
Wanneer is Power duurder dan Mega?

Van Verbaal naar Analytisch

Jannes gaat met 5 euro en drie lege flessen (statiegeld 1 euro per fles) naar de supermarkt om 7Up te kopen. Een blikje 7Up kost 75 cent.

Met welke ongelijkheid kun je uitrekenen hoeveel blikjes Jannes kan kopen?

Van Analytisch naar Analytisch

Het taxibedrijf *Sneltax* berekent de tarieven met de formule $T = 5 + 2k$, terwijl taxibedrijf *Vitatax* de formule $T = 3k$ toepast. T is de prijs in euro's, k het aantal kilometers.

Stel een ongelijkheid op waarmee je kunt uitrekenen wanneer *Sneltax* goedkoper is dan *Vitatax* en bereken hiermee wanneer dat het geval is.

Klas 3 havo en 3 vwo

14. * Aangeven hoe de grafieken van $y = ax + 7$ voor verschillende waarden van a overeenkomsten dan wel verschillen vertonen. Bedenk eerst wat het geval kan zijn en controleer je antwoord met een tekening, eventueel met behulp van een computer.

Kun je een rechte lijn bedenken die wel door het 1^e en 2^e kwadrant gaat maar niet door het 3^e en 4^e? Als je 'ja' zegt, geef dan een formule, als je 'nee' zegt, leg uit waarom niet.

Kun je een rechte lijn bedenken die door de oorsprong gaat maar door geen andere roosterpunt? Als je 'ja' zegt, geef dan een formule, als je 'nee' zegt, leg uit waarom niet.

Exponentiële verbanden

Het gaat bij exponentiële verbanden vooral om allerlei overgangen van en naar een context. In klas 1 is er een informele kennismaking met exponentiële verbanden in situaties. Vanaf klas 2 komen de andere representatievormen erbij. Aan het eind van klas 3 kunnen de leerlingen een exponentieel verband uit een context in elk van de andere representaties weergeven. Ze kunnen deze representaties interpreteren in termen van de context en met de karakteristieken van het verband: beginhoeveelheid en groeifactor.

Klas 1 havo/vwo

1. Exponentiële groei in eenvoudige situaties (eventueel met daarin een tabel) beschrijven.
2. Verschil tussen exponentiële groei en lineaire groei binnen situaties onderscheiden en beschrijven, daarbij kan een tabel voorkomen.

Klas 2 havo/vwo

3. In contexten waarin groei is uitgedrukt in procenten, werken met de vermenigvuldigfactor.
4. Het kenmerk van exponentiële groei onder woorden brengen: de groeifactor per tijdseenheid is steeds dezelfde.
5. In tabellen die het verband tussen twee grootheden beschrijven, nagaan of er sprake is van exponentiële groei.

Klas 3 havo en 3 vwo

6. Systematisch waarden uitrekenen bij een exponentieel verband dat gegeven is in een situatie, tabel of formule.
7. Een exponentiële formule interpreteren en 'vertalen' in termen van de situatie.
8. Bij een exponentiële formule met behulp van een tabel de grafiek tekenen.
9. Vanuit een situatie de groeifactor en beginhoeveelheid bepalen en een passende exponentiële formule opstellen.
10. * Exponentiële vergelijkingen van de vorm $a^x = p$ oplossen door een numerieke benadering met behulp van bijvoorbeeld tabel en/of grafiek.
11. De invloed van de groeifactor als die kleiner of groter is dan 1 op het stijgende of dalende gedrag van de grafiek en op de waarden in de tabel, kennen en herkennen.
12. Eigenschappen van een exponentieel verband herkennen in tabel, formule en grafiek en deze kunnen gebruiken in redeneringen en om problemen op te lossen.
13. * Complexere problemen, waarin exponentiële verbanden een rol spelen, planmatig aanpakken en oplossen met behulp van de parate kennis en vaardigheden.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Exponentiële groei
- Groeifactor, vermenigvuldigingsfactor
- Beginhoeveelheid
- Procentuele toe- en afname

Voorbeelden bij *Exponentiële verbanden*

Klas 1 havo/vwo

1. De hoeveelheid verdubbelt elk jaar.
2. Het zakgeldprobleem: Wat wil je liever en waarom?
 - beginnen met 5 euro per week en daarna elke week steeds 5 euro meer.
 - beginnen met 1 eurocent per week en daarna elke week steeds het dubbele van de week ervoor

Klas 2 havo/vwo

3. Anja is 13 jaar en krijgt van haar grootouders €1000. Ze mag niet aan dat bedrag komen voor ze 21 is. De rente is elk jaar 2% en dat bedrag blijft ook op haar rekening staan. Bereken hoeveel geld Anja dan op haar 21^e op haar rekening heeft. Doe dat op een handige manier.

Klas 3 havo en klas 3 vwo

7. De energie E van geluid vermindert door absorptie van de omringende lucht. Er bestaat een exponentieel verband tussen deze energie en de afstand tot de voet van de geluidsbron. In een gegeven situatie zou dit verband er als volgt uit kunnen zien:

$$E = 0,83^a$$

Hierin is a de horizontale afstand tot de voet van de bron in hectometers.
Met hoeveel procent neemt het geluidsniveau per hectometer af?

- 13.* De groei van de wereldbevolking wordt geschat op gemiddeld 1,5% per jaar.
In de tweede helft van 1999 is de zesmiljardste geboren. In 2000 waren er dus 6 miljard mensen.
 - a Stel een formule op voor de wereldbevolking in miljarden als functie van de tijd in jaren.
 - b Gebruik deze formule om een schatting te geven van het jaartal waarin de wereldbevolking boven de 7 miljard zou komen.

Bron: p 142_3 vwo_Netwerk

Kwadratische verbanden

De kwadratische verbanden (tweedegraads functies) lenen zich goed voor het leren interpreteren van een formule in termen van eigenschappen van de bijbehorende grafiek. Bij kwadratische verbanden staan de algebraïsche en grafische representaties centraal, terwijl de numerieke representatie soms in de vorm van de tabel als tussenstap voorkomt. Het eventueel herleiden van een tweedegraads formule of vergelijking moet betekenis ontleen aan het doel van die herleiding, de informatie die je over de grafiek wilt verkrijgen. Kwadratische verbanden vormen een mooie wiskundige context.

Klas 1 havo/vwo

1. Kennismaken met kwadratische verbanden in context, bijvoorbeeld oppervlakte.

Klas 2 havo/vwo

2. Tabel maken bij een formule van een kwadratisch verband en de grafiek tekenen en omgekeerd, in een tabel een kwadratisch verband herkennen.
3. Terminologie rond grafieken van kwadratische verbanden kennen en kunnen gebruiken.
4. Beredeneren hoe grafieken bij verbanden met formules van de vorm $y = \pm x^2 + b$ en $y = ax^2$ eruit zien en hoe dit af te leiden is uit de vorm van $y = x^2$.
5. Beredeneren op grond van de formule wat de kenmerken zijn van de grafiek van $y = ax^2 + b$.

Klas 3 havo en 3 vwo

6. De grafische interpretatie van de vier typen kwadratische formules (zie de voorbeelden) paraat hebben en een schetsje kunnen maken van de betreffende grafiek.
7. Bij een gegeven grafiek (parabool) een formule voor het onderliggende kwadratisch verband kunnen opstellen op grond van de af te lezen kenmerken (top, nulpunten, symmetrie-as)
8. Bij een eenvoudig kwadratisch verband, gegeven in een formule, de kenmerken van de bijbehorende parabool opsporen met behulp van algebraïsche herleidingen en de grafiek tekenen.
* Voor vwo en havo-B ook bij complexer formules.
Zie: *Vergelijkingen en ongelijkheden* in het deelgebied *Rekenen met formules*.
9. Eigenschappen van kwadratisch verband herkennen in tabel, formule en grafiek en deze kunnen gebruiken in redeneringen en om problemen op te lossen.
10. Verschuiven van de grafiek van een kwadratisch verband en de invloed daarvan beschrijven met behulp van de formule.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Dalparabool, bergparabool
- Top
- Symmetrie-as
- Nulpunt
- Verschuiven

Voorbeelden bij Kwadratische verbanden

Klas 1 havo/vwo

Klas 2 havo/vwo

3. Gegeven is de formule $y = x^2 + 1$
Bedenk hoe de grafiek eruit ziet in vergelijking met de grafiek van $y = x^2$. Maak een schets.
4. Geef van de volgende formules aan of de grafiek een berg- of een dalparabool is en zet ze op volgorde van smalle naar brede parabool.
- $y = -\frac{2}{5}x^2$
 - $y = 1\frac{1}{5}x^2$
 - $y = -x^2$
 - $y = \frac{1}{4}x^2$

Klas 3 havo en 3 vwo

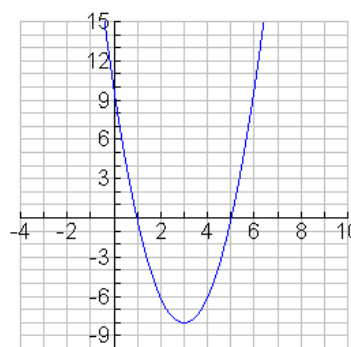
6. Vragen bij vier typen kwadratische verbanden.

Wat kun je zeggen over de grafiek van $y = 2x^2 - 12x + 10$?

Antw. De vorm $y = 2x^2 - 12x + 10$ toont direct dat het om een dalparabool gaat en geeft het snijpunt met de y -as $(0,10)$

Wat kun je zeggen over de grafiek van $y = 2(x - 5)(x - 1)$?

Antw: De vorm $y = 2(x - 5)(x - 1)$ toont direct dat het om een dalparabool gaat en geeft direct de nulpunten $(1,0)$ en $(5,0)$ daaruit volgen de symmetrie-as $x = 3$ en de top $(3, -8)$.



Wat kun je zeggen over de grafiek van $y = 2(x - 3)^2 - 8$?

Antw. De vorm $y = 2(x - 3)^2 - 8$ toont direct dat het om een dalparabool gaat en geeft direct de top $(3, -8)$.

Wat kun je zeggen over de grafiek van $y = 2x(x - 6) + 10$?

Antw: De vorm $y = 2x(x - 6) + 10$ toont direct dat het om een dalparabool gaat en geeft de punten $(0,10)$ en $(6, 10)$; daaruit volgt de symmetrie-as $x = 3$ en de top $(3, -8)$.

9. De parabool met de formule $y = (x - 2)^2 + 3$ heeft geen snijpunten met de x -as. Hoe kun je dat zeker weten zonder de grafiek te tekenen?
10. Verander de formule $y = (x - 2)^2 + 3$ zodat de grafiek twee snijpunten met de x -as heeft. En ook zodat de grafiek precies één snijpunt met de x -as heeft.

Rekenen met formules

In dit subdomein staat om te beginnen de overgang van het rekenen met getallen naar het werken met variabelen, expressies en (woord)formules centraal. Algebra als een generalisatie van (reken)bewerkingen. Een formule maken betekent het geven van een korte beschrijving van steeds dezelfde berekening of het beschrijven van de voortzetting van een (meetkundig) patroon.

Eigenschappen van rekenbewerkingen gelden ook voor bewerkingen met variabelen en expressies. Het gebruik van correcte wiskundige taal en het ‘vertalen’ van gebruikstaal naar wiskundetaal is belangrijk. Er is een verschil tussen een *formule* (die een verband beschrijft), een *expressie*, zoals $5(a + 3)$ en een *vergelijking*, die al dan niet een oplossing heeft. Mede om die reden zijn in dit subdomein de volgende deelgebieden gekozen:

- Patronen en (woord)formules
- Rekenen met formules en variabelen
- Vergelijkingen oplossen

Patronen en (woord)formules

In het basisonderwijs hoort de overgang naar de informele algebra, zoals het ontdekken en voortzetten van regelmaat in patronen van stippen of blokjes of van patronen in getallen, bij de leerstof voor de betere leerlingen. De onderbouw van het voortgezet onderwijs gaat hier mee verder.

In het algemeen gaat het hier om discrete verbanden en de grafiek zal in dat geval uit losse punten bestaan.

Een *vuistregel* is altijd een benadering van de werkelijkheid. De regel kan in woorden worden beschreven zoals: “Tel het aantal seconden tussen het zien van de bliksem en het horen van de donder. Deel dat aantal door 3 en je weet hoeveel kilometer de bui van je vandaan is.” Beschrijven met behulp van een formule kan ook. Meestal geldt een vuistregel slechts voor een beperkt domein. In klas 1 t/m 3 maken de leerlingen op deze manier informeel kennis met de begrippen *domein* en *bereik*, maar ze hoeven deze termen (nog) niet te kennen.

Klas 1 havo/vwo

1. Verschil tussen een vuistregel en een formule kennen en gebruiken.
2. Bij een eenvoudig verband of serie rekenbewerkingen zelf een (woord)formule opstellen.
3. Afhankelijkheid tussen variabelen in (een serie) rekenbewerking(en) in globale termen verwoorden.
4. De waarde van één of meer variabelen in een formule invullen en de waarde van de andere variabele berekenen.
5. Formules die hetzelfde verband beschrijven met elkaar vergelijken.
6. * Door een geschikt gekozen representatie van zelf opgestelde rekenacties of formules onderzoeken om welk soort verband het gaat.

Klas 2 havo/vwo

7. Een geschikte vorm kiezen om een probleem op te lossen (tabel maken, beschrijven in woorden, beschrijven door middel van een formule)
8. Patronen in getallenrijen en meetkundige patronen voortzetten en beschrijven.
9. Bij een gegeven formule een andere formule maken die hetzelfde verband beschrijft.
10. Eenvoudige kwadratische verbanden in patronen herkennen en beschrijven.

Klas 3 havo en 3 vwo

11. Kwadratische formules opstellen bij eenvoudige kwadratische patronen.
12. Nagaan of een gegeven patroon beschreven kan worden met een lineaire of een kwadratische formule of geen van deze twee.
13. Redeneren op basis van formules welk patroon sneller ‘groeit’.
*Voor vwo en havo-B ook met meer complexe formules.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Regelmaat
- (Woord)formule
- Vuistregel
- Volgorde van bewerkingen
- Substitueren
- Tabel (rij en kolom)
- Lineair verband
- Kwadratisch verband

Voorbeelden bij *Patronen en Formules*

Klas 1 havo/vwo

1. De formule *oppervlakte ruit* $= \frac{1}{2} \times \text{diagonaal}_1 \times \text{diagonaal}_2$ geldt altijd.
2. De volgende vuistregel geldt alleen voor volwassenen die niet (veel) te zwaar zijn.
Beschrijf de volgende vuistregel met een (woord)formule: “De hoeveelheid bloed die een volwassene heeft is ongeveer een dertiende van zijn lichaamsgewicht.”
Antwoord: *hoeveelheid* $= \frac{1}{13} \times \text{gewicht}$ met *hoeveelheid* in liters en *gewicht* in kilogrammen.
3. Voor de vuistregel *hoeveelheid* $= \frac{1}{13} \times \text{gewicht}$ geldt: Wie zwaarder is (of wordt) heeft meer bloed.
4. Bij een *gewicht* van 70 (kg) hoort een *hoeveelheid* bloed van $\frac{1}{13} \times 70 \approx 5,4$ (liter)

5. * $9C=5(F-32)$ omzetten naar $F = \frac{9}{5}C + 32$

6. * De getallen in het rijtje 2, 7, 12, 17, 22,..... nemen steeds toe met 5
De getallen in het rijtje 3, 10, 17, 24, 31,.... nemen steeds toe met 7
Het getal 17 komt in beide rijtjes voor.

Als beide rijtjes worden voortgezet, wat is dan het volgende getal dat in beide rijtjes staat?

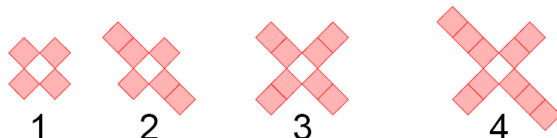
Klas 2 havo/vwo

8. Voorbeeld van het beschrijven van een getallenpatroon

Vul de ontbrekende getallen en expressies in. Gebruik het getal in elke rij, n begint met 0.

	8 ×	<table border="1"> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>7</td></tr> <tr><td>12</td></tr> <tr><td>17</td></tr> <tr><td>22</td></tr> <tr><td>27</td></tr> <tr><td>32</td></tr> </table>	2	7	12	17	22	27	32	+	3 ×	<table border="1"> <tr><td>10</td></tr> <tr><td>5</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>-5</td></tr> <tr><td>-10</td></tr> <tr><td>-15</td></tr> <tr><td>-20</td></tr> </table>	10	5	0	-5	-10	-15	-20	=	<table border="1"> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> </table>							
2																												
7																												
12																												
17																												
22																												
27																												
32																												
10																												
5																												
0																												
-5																												
-10																												
-15																												
-20																												
	8 ×		+	3 ×		=																						

Voorbeeld beschrijven van een meetkundig patroon:

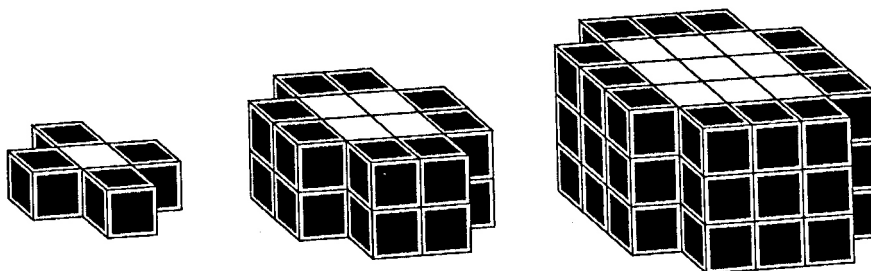


Hoe ziet patroon nummer 5 eruit? De rij patronen wordt voortgezet. Geef een formule die de patronen beschrijft, gebruik n als patroonnummer.

9. Laat zien waarom $2 \times (n - 1) + 4$ en $2n + 2$ hetzelfde verband beschrijven.

Klas 3 havo en 3vwo

11. en 13. Hieronder zie je drie figuren uit een rij die eindeloos kan worden voortgezet.
Welke formule hoort bij de aantallen witte blokjes? Bij de aantallen zwarte?
Welke van de twee aantallen 'groeit' sneller? Hoe kun je dat aan de formule zien?



Rekenen met formules en variabelen

Bij dit onderdeel gaat het om verwerven van algebraïsche vaardigheden. Door gevarieerd oefenen zullen de leerlingen deze vaardigheden met inzicht beheersen tot ‘paraat hebben’. De vaardigheden worden ingezet bij het analyseren van verbanden, het herleiden en vereenvoudigen van expressies en het oplossen van vergelijkingen.

De rekenbewerkingen met getallen worden geformaliseerd naar bewerkingen met ‘letters’. Leerlingen hoeven termen zoals *commutatieve eigenschap*, *distributieve eigenschap* etc. niet te kennen maar de betekenis ervan wel. Dat geldt ook voor het woord *equivalent* in de betekenis van ‘gelijkwaardig’.

Klas 1 havo/vwo

1. Verschillende schrijfwijzen van formules en expressies met elkaar vergelijken.
2. Gelijksortige termen samennemen of splitsen.
3. Met en zonder haakjes schrijven, ook eenvoudige expressies met letters.
4. Bewerkingen met ‘letterbreuken’ uitvoeren in analogie van bewerkingen met breuken.
5. Kennis óver bewerkingen hebben en gebruiken, zoals $a + b = b + a$ maar $a - b \neq b - a$.
6. Herhaald vermenigvuldigen met hetzelfde getal of letter schrijven als macht.

Klas 2 havo/vwo

7. Delen en vermenigvuldigen van eenvoudige expressies.
8. Regels voor bewerkingen met breuken gebruiken, waaronder ook ‘letterbreuken’.
9. Expressies herleiden tot gelijkwaardige expressies (haakjes wegwerken, in andere vorm schrijven).
10. Rekenregels voor het rekenen met machten gebruiken, ook met letters.

Klas 3 havo en 3vwo

11. Enkele merkwaardige producten herkennen en gebruiken.
12. Ontbinden in factoren met de product-som-methode.
13. Kwadraat afsplitsen.
14. Consolidëren, uitbreiden en gebruiken van het geleerde in klas 1 en 2. Eenvoudige vergelijkingen van het type $y = x^2 + bx + c$ kunnen ontbinden in factoren, in kwadraat afgesplitste vorm kunnen schrijven en daaruit relevante conclusies trekken, ook met betrekking tot de grafiek.
Zie *Verbanden* en binnen dat subdomein *Kwadratische verbanden*.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Term
- Factor
- Macht
- Herleiden
- Eigenschappen van (reken)bewerkingen
- Regels voor bewerkingen met breuken
- Equivalent, gelijkwaardig met
- Merkwaardig product
- Kwadraat afsplitsen

Voorbeelden bij *Rekenen met formules en variabelen*

Klas 1 havo/vwo

1. 'Een kwart van a ' schrijven als $\frac{1}{4}a$, $\frac{a}{4}$ of $a \div 4$

2. $\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b = 1\frac{1}{4}b$
 $3a$ kun je schrijven als $a + a + a$, als $3 \times a$ of als $3 \cdot a$

3. Gebruik van het oppervlaktemodel met getallen en met eenvoudige expressies
 $2(a - 7)$ vervangen door $2a - 14$ en omgekeerd
 $a(1,8 + 0,25) = 2,05a$

4. Vereenvoudigen van eenvoudige 'letterbreuken', zoals $\frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$; $\frac{5p}{20q} = \frac{p}{4q}$

Gebruik van de tekens $>$ en $<$ met simpele algebraïsche expressies, bijvoorbeeld:

als n een positief geheel getal is, dan is $\frac{1}{n+2}$ kleiner dan $\frac{1}{n}$ in analogie met $\frac{1}{9} < \frac{1}{7}$

Bewerkingen optellen en aftrekken met eenvoudige algebraïsche expressies:

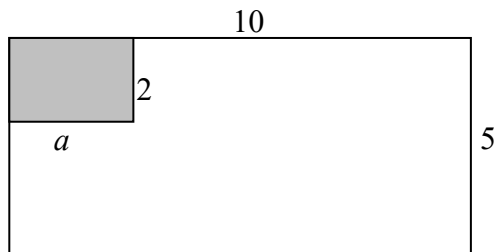
$$\frac{2}{a} + \frac{3}{a} = \dots\dots; \frac{a}{5} - \frac{a}{10} = \dots\dots, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \dots\dots$$

6. $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$; $a^2 = a \times a$

Klas 2 havo/vwo

7. $2a \cdot 3 = 6a$; $2a \cdot 3b = 6ab$; $6ab \div 2a = \frac{6ab}{2a} = 3b$

Vermenigvuldigen met eenvoudige algebraïsche expressies, zoals in onderstaande opgave voor vwo:



Uit deze rechthoek is het grijze stuk weggeknipt.

Geef een formule voor de oppervlakte van het overgebleven deel.

Of

Een aantal mogelijke antwoorden is: $50 - 2a$; $2(10 - a) + 30$; $3a + 5(10 - a)$

Hoe is iedere expressie tot stand gekomen?

Laat zien door algebraïsche bewerkingen dat alle expressies gelijkwaardig zijn.

8. Formaliseren van de bewerkingen, alleen simpele letterbreuken.

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \quad (x \neq 0; y \neq 0)$$

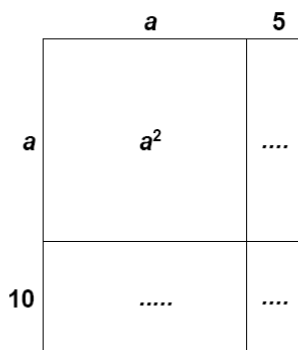
Voorbeeld van redeneren door rekenregels te gebruiken:

Welke van de onderstaande beweringen zijn juist voor alle waarden van x en y , voor bepaalde waarden van x en y , voor geen waarden van x en y ? Leg uit!

a $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x \cdot y}$	c $x + \frac{1}{y} = \frac{xy + 1}{y}$
b $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy}$	d $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$

9. $(a + b)(c + d)$ schrijven als $ac + ad + bc + bd$

Zie voorbeeld hieronder, oppervlaktemodel



$$(a + 5)(a + 10) = a^2 + \dots + \dots + \dots$$

10. $2m^3 \times 3m^2 = 2 \times 3 \times m^5 = 6m^5$

$2 \times m \times m \times m$

$3 \times m \times m$

Klas 3 havo en 3vwo

11. Merkwaardige producten van links naar rechts en van rechts naar links!

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

13 $4x^2 - 16x = 4(x - 2)^2 - 16$

14 Zijn onderstaande beweringen correct voor alle waarden van de variabelen?

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{x+y}{x} = 1 + y$$

$$(ab)^3 = a^3b^3$$

$$(2p)^3 = 2p^3$$

Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen

Vergelijkingen oplossen kan op veel manieren, afhankelijk van het type vergelijking: door een schatting to maken door naar het snijpunt van grafieken te kijken, door het vergelijken van tabellen of op een formeel algebraïsche manier. Leerlingen leren een keuze te maken voor het wiskundige gereedschap dat het meest geschikt is in een bepaald geval en dit met succes te hanteren.

Klas 1 havo/vwo

1. Inleiding op het oplossen van (eenvoudige) lineaire vergelijkingen. ‘Bordjesmethode’.
2. Allerlei vergelijkingen oplossen van het type ‘kan je zo zien’.

Klas 2 havo/vwo

3. Lineaire vergelijkingen oplossen. ‘Balansmethode’
4. Eenvoudige kwadratische vergelijkingen oplossen van het type $(x + a)(x + b) = 0$;
 $x^2 + ax = 0$; $x^2 = p^2$, $x^2 = q$.
5. Snijpunt van twee rechte lijnen berekenen door het bijbehorende stelsel vergelijkingen op te lossen.

Klas 3 havo en klas 3 vwo

6. Kwadratische vergelijkingen oplossen door inzetten van een geschikte strategie zoals direct aflezen, ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen, en de *abc*-formule.
7. Eenvoudige ongelijkheden oplossen, zowel formeel algebraïsch als in combinatie met grafische oplossingen.
8. Consolideren, uitbreiden en gebruiken van het geleerde in klas 1 en 2.
9. * Eenvoudige vergelijkingen met machten, wortels en breukvormen oplossen.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Vergelijking (lineair, kwadratisch, *anders)
- Oplossing van een vergelijking
- *abc*-formule
- Ongelijkheid

Voorbeelden bij Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen

Klas 1 havo/vwo

- Van 'stipsommen' zoals $5 + \bullet = 12$ naar simpele vergelijkingen waarbij de variabele op één plaats voorkomt; $5 + x = 12$; $x = 7$

Wiskundetaal gebruiken: Ik vermenigvuldig een *getal* met drie en de uitkomst is 45.

Welk *getal* heb ik gebruikt? Te schrijven als $3 \times \text{getal} = 45$ of $3 \times g = 45$ of $3 \times x = 45$

Bordjesmethode:

$$20 + 5x = 50$$

$$\frac{3}{a+1} = 1$$

$$20 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = 50 \quad \text{onder } \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \text{ is } 30$$

$$5x = 30$$

$$\frac{3}{a+1} = \frac{3}{3}$$

$$5 \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = 30 \quad \text{onder } \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \text{ is } 6$$

$$x = 6$$

$$\frac{3}{?} = \frac{3}{3} \quad \text{Op de plaats van ? moet 3 staan,}$$

$$\text{dus } a + 1 = 3, a = 2$$

- Voorbeeld 'kan je zo zien'

$$\frac{5}{x} = \frac{5}{8}$$

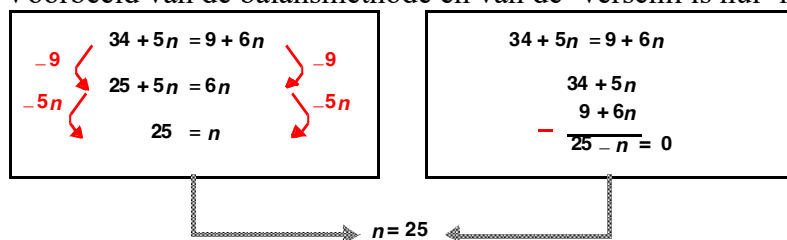
$$3p = 24$$

$$y^2 = 36$$

Klas 2 havo/vwo

- Vergelijkingen van de vorm $ax + b = cx + d$.

Voorbeeld van de balansmethode en van de 'verschil is nul' methode:



- Kwadratische vergelijkingen 'oplossen' van het type $x^2 = 36$; $(x - 5)^2 = 64$; $x^2 + 1 = 0$

Klas 3 havo en 3 vwo

- Allerlei oplossingsmethodes hanteren maar ook redeneren over vergelijkingen en ongelijkheden.

In de volgende beweringen zijn alle variabelen reële getallen. Zijn de beweringen waar, soms waar, nooit waar?.

Leg uit!

$$n + 5 = 11$$

$$q + 2 = q + 16$$

$$2n + 3 = 3 + 2n$$

$$2t - 3 = 3 - 2t$$

$$3 + 2y = 5y$$

$$p + 12 = s + 12$$

$$4p > 9 + p$$

$$n + 5 < 20$$

$$2(x + 3) = 2x + 3$$

$$2(3 + s) = 6 + 2s$$

Bron: Algebra om te begrijpen

- * Los op: $3s^4 = 24s$; $\sqrt{u^2 + 19} = 10$; $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{2x}$

Meten en Meetkunde

Uit het cTWO-onderbouw-rapport:

Vanouds werd de intrinsieke waarde van *Meetkunde* ontleend aan de mogelijkheid om met behulp van de Euclidische meetkunde te leren redeneren met eigenschappen van figuren, hieruit volgde het leren argumenteren en tenslotte het bewijzen. Sinds de nieuwe wiskundeprogramma's van 1968 (invoering havo-vwo) is dat aspect grotendeels uit de onderbouw verdwenen. Na het opnemen van de Euclidische meetkunde in het vak wiskunde B₁₂ bovenbouw vwo is er ook in de onderbouwboeken vwo weer een beperkt aanbod aan redeneren en bewijzen binnen de meetkunde opgenomen. Zodra de aandacht in de bovenbouw vwo voor het redeneren en bewijzen in de Euclidische meetkunde weer verflauwt, heeft dat zijn effecten op de onderbouw.

Onze analyse van het meetkundeprogramma is, dat er over het geheel weinig reden is om het op dit moment te wijzigen. Wel zijn we van mening dat gelet op de inhoud van de nieuwe wiskundevakken in de bovenbouw havo-vwo, met name voor de aansluiting op wiskunde B enkele meetkundemodulen voor 3 havo en 3 vwo moeten worden ontwikkeld om de leerlingen met voldoende aanleg en interesse meer uitdaging en betere ontwikkelingsmogelijkheden te bieden dan dat het huidige standaardprogramma biedt.

Figuren worden netjes en correct getekend. Waar nodig worden letters bij hoekpunten en dergelijke gebruikt en wiskundige symbolen voor het aangeven van gelijke lijnstukken. Wiskundige symbolen worden ook gebruikt als verkorte schrijfwijze voor evenwijdige lijnen, lijnen die loodrecht op elkaar staan, driehoek en dergelijke.

Bij dit domein hoort ook het gebruiken van *instrumenten* en *apparaten*, zoals:

- liniaal met schaalverdeling
- gradenboog of geodriehoek
- passer
- relevante computerprogramma's zoals voor 2D (bijvoorbeeld: Geogebra) als voor 3D (bijvoorbeeld: Doorzien)

Voorbeelden van het gebruik van instrumenten en apparaten

1. Tekenen van een cirkel met gegeven straal en middelpunt, met passer.
2. Meten en tekenen van een hoek, met geodriehoek.
3. Hoek doormidden delen, met geodriehoek en passer.
4. Twee lijnen loodrecht op elkaar tekenen, voor havo met geodriehoek, voor vwo ook met passer en liniaal.
5. Uitslagen en aanzichten laten tekenen met het computerprogramma Doorzien.

Vormen en figuren

In het basisonderwijs hebben de leerlingen al enkele wiskundige vormen leren kennen en benoemen. Deze kennis wordt in het voortgezet onderwijs geformaliseerd en uitgebreid. De *ruimte* wordt onderzocht aan de hand van dagelijkse ervaringen en leerlingen maken kennis met het verband tussen kijklijnen en rechte lijnen. Op soortgelijke wijze vindt de oriëntatie op het hoekbegrip en kijkhoeken plaats. Uit het cTWO-onderbouw-rapport:

Er is enige aandacht voor het tekenen van ruimtelijke vormen (perspectief) en aanvankelijk wordt er iets gedaan aan kijkmeetkunde.

.....

Met de passerconstructie als didactisch hulpmiddel classificeren we eerst de driehoeken op basis van de lengten van hun zijden. “Drie lengten van mogelijke zijden zijn gegeven, welke driehoek volgt daar uit?” Niet elk drietal lijnstukken levert een driehoek op, hieruit komt de driehoeksongelijkheid naar voren. Vervolgens gaan we naar de vierhoeken, te kenmerken door de lengten van hun zijden. De constructie op basis van vier lijnstukken is niet eenduidig, het vervormen ligt op tafel. We stappen over naar vouwen, dus onderzoek van de symmetrieassen, redeneren op basis van lengten (passerconstructies) en lijnsymmetrie (vouwen). Leerlingen moeten onderzoeken en beredeneren wat de relatie is tussen de classificatie op basis van lengten en die op basis van lijnsymmetrie. De noodzakelijke en voldoende voorwaarden (onze terminologie) rollen er vanzelf uit. De rechthoek en het vierkant komen nu tevoorschijn, zonder dat we nog met hoeken hebben gewerkt.

Vervolgens gaan we kijken naar de rol van de hoeken, weer met de passerconstructie als een goed didactisch hulpmiddel. Existentie, eenduidigheid, classificatie op basis van hoeken, de relatie tussen verschillende classificaties zijn boeiende opties. Combinaties als ZZH zijn een mooie aanleiding tot redeneren. Een verdieping naar gelijkvormigheid ligt in de lijn.

Klas 1 havo/vwo

1. Kijklijnen en kijkhoeken kennen en gebruiken.
2. 2D afbeeldingen van 3D situaties en omgekeerd interpreteren.
3. Ruimtelijke situaties in tekeningen weergeven, zonodig op schaal. Hierbij gebruik maken van aanzichten, uitslagen, doorsneden, plattegronden en kaarten.
Zie subdomein *Verhoudingen* bij *Getallen*.
4. Begrippen snijdende en kruisende lijnen kennen en gebruiken. Hetzelfde voor evenwijdige lijnen en lijnen die loodrecht op elkaar staan.
5. Benoemen van enkele wiskundige ruimtelijke en vlakke figuren.
6. Symmetrieën herkennen en beschrijven, spiegelsymmetrie, draaisymmetrie en puntsymmetrie.
7. Verschillende soorten hoeken kennen, herkennen, meten en tekenen.
8. Gebruiken van wiskundige symbolen zoals $\parallel$, $\perp$, $\angle$, Δ .

Klas 2 havo/vwo

9. Gebruiken van doorsneden van ruimtelijke figuren
10. Diagonaalvlak van een kubus of balk in ware vorm en op ware grootte (of op schaal) tekenen (Zie voor gebruik van schaal en schaallijn het subdomein *Verhoudingen*.)
11. *Evenwijdige doorsneden van hetzelfde object vergelijken op vorm en grootte
12. Figuren beschrijven en tekenen met behulp van begrippen als driehoek (gelijkbenig, gelijkzijdig, rechthoekig), parallellogram, rechthoek, vierkant, ruit en trapezium
13. Driehoeken tekenen bij gegeven zijden en/of hoeken
14. *Aangeven waarom een bepaalde figuur niet getekend kan worden bij onvoldoende of strijdige gegevens.
15. Eigenschappen van hoeken in driehoeken en in figuren met evenwijdige lijnen. Redeneren op basis van *F*-hoeken en *Z*-hoeken, overstaande hoeken.
16. De regel ‘de drie hoeken in een driehoek zijn samen 180° ’ kennen en gebruiken
17. Met betrekking tot een driehoek de begrippen middelloodlijn van een zijde, deellijn van een hoek, hoogtelijn, zwaartelijn en zwaartepunt kennen en gebruiken.
18. * Bij een driehoek: ingeschreven en omgeschreven cirkel in relatie tot deellijnen en middelloodlijnen.
19. Parallellogram, ruit, trapezium beschrijven aan de hand van hun eigenschappen.

Klas 3 havo en 3vwo

20. De begrippen gelijkvormigheid en congruentie kennen, herkennen.
21. Werken met en redeneren over gelijkvormigheid van figuren.
22. Centrale projectie en parallelprojectie herkennen en gebruiken.
23. Situaties beschrijven met behulp van woorden, meetkundige figuren, coördinaten.
Zowel 2D als 3D
24. Redeneren met constructies
25. * Eenvoudige meetkundige bewijzen.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Rechte hoek, stompe hoek, scherpe hoek, gestrekte hoek
- Vierkant, rechthoek, cirkel (straal, middelpunt, diameter, middellijn), driehoek (gelijkbenig, gelijkzijdig, rechthoekig)
- Kubus, balk, piramide, prisma, kegel, cilinder, bol
- Uitslag, zijvlak, ribbe, hoekpunt
- Symmetrie-as
- Loodrecht, loodlijn
- Evenwijdige lijnen, kruisende lijnen
- Draaisymmetrie, puntsymmetrie, draaihoek, draaipunt
- Diagonaal, diagonaalvlak
- Gelijkvormig en congruent
- Parallellogram, ruit, trapezium
- Middelloodlijn (van een zijde), deellijn (van een hoek), zwaartelijn, zwaartepunt, hoogtelijn in een driehoek
- * In- en omgeschreven cirkel van een driehoek

Voorbeelden bij *Vormen en figuren*

Klas 1 havo/vwo

1. Kijklijnen gebruiken in toepassingen, bijvoorbeeld:
 - geef aan in welke volgorde voorwerpen worden gezien vanuit verschillende standpunten;
 - vanuit welk standpunt is een voorwerp zichtbaar of onzichtbaar?
 - hoe verandert de kijkhoek wanneer iemand van standpunt verandert?
2. In een kaart of plattegrond aangeven waar een gegeven foto of afbeelding gemaakt is.
Een plattegrond tekenen bij een gegeven situatie.
3. Gebruik van termen zoals ‘bovenaanzicht’, ‘linker zijaanzicht’ etc.
Van enkele eenvoudige ruimtelijke figuren uitslagen maken en gebruiken, zoals kubus, balk en piramide.
Kubus en balk in parallelprojectie tekenen.
Waarom kun je van een bol geen uitslag maken?
4. Laat met een tekening zien dat diagonalen in een bovenvlak en in een ondervlak van een kubus kruisende lijnen zijn.

Evenwijdige lijnen en lijnen die loodrecht op elkaar staan correct kunnen tekenen.
5. In ieder geval namen van de ruimtelijke figuren: kubus, balk, piramide, kegel, prisma, bol, cilinder. Hierbij ook de begrippen *zijvlak*, *ribbe* en *hoekpunt* hanteren. Van de vlakke figuren: vierkant, rechthoek, cirkel (straal, middelpunt, diameter, middellijn), driehoek (gelijkbenig, gelijkzijdig, rechthoekig).
6. Maak een tekening van een logo dat wel draaisymmetrisch is maar niet lijnsymmetrisch.
7. In een gegeven figuur rechte hoek, stompe hoek, scherpe hoek en gestrekte hoek aan kunnen wijzen.

Klas 2 havo/vwo

9. Een doorsnede tekening van een hoogtelijnkaart geeft informatie over steilheid van de hellingen. Laat zien welke vormen de doorsnede van een gegeven ruimtelijke figuur kan hebben.
10. De maten in de tekening kunnen omrekenen naar schaal 1 : 20.
11. * Een kubus wordt evenwijdig aan een diagonaalvlak doorgesneden. Geef in een schets de verschillende vormen die het doorsnedevlak kan hebben, Is daar ook een regelmatige zeshoek bij? Zo ja, in welke stand?
12. De vorm van zijvlakken van een ruimtelijke figuur kunnen benoemen.
13. Je hebt twee staafjes van 4 cm en een staafje van 6 cm. Kun je daar een driehoek mee vormen?
14. Geef een voorbeeld van drie staafjes waar je geen driehoek van kunt vormen. Leg uit waarom dat zo is.
16. Bereken de som van de hoeken in een 5-hoek, in een 6 –hoek en in een 100- hoek.
17. Laat zien dat alle punten op de middelloodlijn van het lijnstuk AB liggen even ver van punt A als van punt B ; dat alle punten op de deellijn van hoek A liggen even ver van de benen van die hoek.
18. * Met behulp van het snijpunt van de middelloodlijnen de omgeschreven cirkel kunnen tekenen. Met behulp van het snijpunt van de deellijnen de ingeschreven cirkel kunnen tekenen.
19. Een vierhoek heeft twee paar gelijke zijden, de diagonalen delen elkaar doormidden en de vierhoek is niet symmetrisch. Welke vierhoek is dit?

Klas 3 havo en 3 vwo

20. Wanneer zijn twee vierhoeken gelijkvormig? Twee driehoeken?
Redeneren op basis van vergroten/verkleinen, bijvoorbeeld als de inhoud van een verpakking tweemaal zo groot wordt, worden niet alle maten tweemaal zo groot.
* Congruentie als speciaal geval, vergrotingsfactor 1.
21. Verschillen tussen beide projecties van een figuur kunnen aangeven.
22. Bij een foto van een gebouw kunnen beschrijven uit welke ruimtelijke vormen het gebouw is samengesteld.
23. De eigenschappen van een ruit gebruiken om een hoek door midden te delen.
24. * Hoeken in een cirkel, stelling van Thales, gelijkvormigheid en congruentie.

Meten en rekenen in de meetkunde

De berekeningen van lengte (onder andere met de stelling van Pythagoras en goniometrie), oppervlakte en inhoud en het rekenen met hoeken en met verhoudingen bij gelijkvormige figuren vormen de kern van dit subdomein. In het basisonderwijs wordt aan het subdomein *Metten* al de nodige aandacht besteed, met name aan het meten van lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht, gebruik makend van relevante maateenheden. In het voortgezet onderwijs wordt dit onderwerp onderhouden en uitgebreid.

Bij dit subdomein behoort ook het aflezen van de schaal van allerlei instrumenten (eventueel via foto's en tekeningen) zoals bijvoorbeeld een weegschaal, regenmeter, schuifmaat enz.



Leerlingen zijn zich ervan bewust dat een afgelezen waarde van 2,8 mm betekent dat de werkelijke waarde tussen 2,75 mm en 2,85 mm ligt. Afronden gebeurt binnen een situatie of volgens de afrondregels (zie ook subdomein *Getallen en getalrelaties*).

Klas 1 havo/vwo

1. Schatten van lengte, oppervlakte en inhoud met behulp van eigen maten en referentiepunten.
2. Gebruik van maten voor lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht. Omrekenen van deze maten in gelijkwaardige maten. Voor havo gangbare maateenheden zoals
 - meter, kilometer
 - vierkante centimeter cm^2 , vierkante decimeter dm^2 , vierkante meter m^2
 - kubieke centimeter cm^3 , kubieke decimeter dm^3 (overeenkomend met 1 liter), kubieke meter m^3
 - liter, deciliter

* Voor vwo het hele metrieke stelsel.
3. Kiezen van de juiste maateenheid bij een situatie of berekening.
4. Oppervlakte en omtrek berekenen van vierkant, rechthoek en figuren die daaruit zijn opgebouwd.

Klas 2 havo/vwo

5. Berekenen van de grootte van hoeken met behulp van de regel *som van de hoeken in een driehoek is 180°* en met *F*-hoeken, *Z*-hoeken, overstaande hoeken.
6. Getal π als verhouding van omtrek en diameter van een cirkel herkennen en het gebruiken in berekeningen.

7. Formules gebruiken bij het berekenen van omtrek, oppervlakte en inhoud:

$$\text{omtrek cirkel} = \pi \times \text{diameter}$$

$$\text{oppervlakte cirkel} = \pi \times \text{straal} \times \text{straal of}$$

$$\text{oppervlakte cirkel} = \frac{1}{4} \pi \times \text{diameter} \times \text{diameter}$$

$$\text{oppervlakte parallellogram} = \text{basis} \times \text{hoogte}$$

$$\text{oppervlakte driehoek} = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$$

$$\text{inhoud balk} = \text{lengte} \times \text{breedte} \times \text{hoogte}$$

$$\text{inhoud cilinder} = \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}$$

8. Oppervlakte en inhoud van objecten schatten door deze te benaderen met behulp van meetkundige figuren
9. Stelling van Pythagoras kennen en gebruiken, ook in kubus en balk.
- * Voor vwo ook in andere 3D-figuren
 - * Voor vwo ook omgekeerde van de stelling van Pythagoras.
- Een bewijs voor de stelling kennen.

Klas 3 havo en 3vwo

10. Omtrek, oppervlakte en inhoud berekenen met behulp van formules

$$\text{inhoud prisma} = \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}$$

$$\text{inhoud piramide} = \frac{1}{3} \times \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}$$

$$* \text{inhoud kegel} = \frac{1}{3} \times \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}$$

11. Grootte van hoeken en afstanden berekenen met behulp van de goniometrische verhoudingen sin, cos en tan. *Voor vwo ook 3D
12. Verband tussen hellingshoek en tangens herkennen en gebruiken.

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Omtrek, oppervlakte, inhoud
- Stelling van Pythagoras
- Goniometrische verhoudingen, sinus, cosinus, tangens
- Hellingshoek

Voorbeelden bij *Meten en rekenen in de meetkunde*

Klas 1 havo/vwo

1. Referentiepunten zijn bijvoorbeeld deurhoogte 2 m, inhoud van een melkpak van 1 liter, paslengte, een hectare is ongeveer twee voetbalvelden. Ook eigen referentiematen zoals: “Ik loop ongeveer 4 km/u.”
2. Ook: $1 \text{ cc} = 1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{1000} \text{ liter}$. Decimale structuur van het metriek stelsel.

Klas 2 havo/vwo

7. Ook redeneren met behulp van deze formules. Bijvoorbeeld, welke omtrek is mogelijk bij gelijkblijvende oppervlakte? Hoe verandert de oppervlakte van een parallellogram wanneer de omtrek gelijk blijft maar de hoogte verandert?

De huidoppervlakte van een mens schatten door deze te benaderen met behulp van twee cilinders met de hoogte van de persoon en de omtrek van een (dij)been.

- 9.* Voorbeeld waarin het omgekeerde van de stelling van Pythagoras gebruikt kan worden. Peter heeft een muurtje gemetseld dat loodrecht op de voorgevel van het huis staat. Zijn buurman beweert dat het muurtje scheef staat en dat daardoor de oppervlakte van zijn voortuin kleiner is geworden. Hoe kan Peter aantonen dat het muurtje wel degelijk recht staat?



Figuren en formules

Dit subdomein bereidt mede voor op het subdomein *Analytische meetkunde* in de bovenbouw van havo en vwo. Het is vooral bedoeld voor vwo- leerlingen en leerlingen die doorgaan naar havo wiskunde B. Het gebruiken van een coördinatensysteem begint met het verkennen van verschillende manieren waarop een plaats kan worden vastgelegd, met behulp van een beschrijving zoals (wind)richting en afstand, 5 km in noordelijke richting, of met behulp van een coördinatensysteem zoals in kaarten en roosters. Pas daarna wordt het coördinatensysteem ook gebruikt voor het weergeven van figuren, het oplossen van stelsels vergelijkingen of het aangeven van vlakdelen.

Een bijzondere rol is weggelegd voor de vergelijking in combinatie met de figuur als oplossingsverzameling van een vergelijking. In het voorgaande is $y = ax + b$ de *algemene formule* voor een rechte lijn, nu is $ax + by = c$ de *algemene vergelijking* van de rechte lijn.

Uit het cTWO-rapport:

In het huidige onderbouwprogramma is er een geringe verbinding tussen de algebra en de meetkunde. Een verbinding die vanouds door de algebraïsche of analytische meetkunde inhoud kreeg. In de voorgestelde nieuwe examenprogramma's voor de vakken wiskunde B in de bovenbouw havo-vwo heeft die analytische meetkunde weer een plaats gekregen, wat een argument is om te bekijken of er voor die specifieke doelgroep (dus voor de toekomstige wiskunde B- leerlingen) in de onderbouw een module Analytische Meetkunde kan worden ontwikkeld. In de onderbouw havo-vwo was voorheen eveneens een aanzet voor de analytische meetkunde opgenomen, die bestond uit:

- stelsels van 2 lineaire vergelijkingen met 2 onbekenden
- grafische weergave van die stelsels
- vlakdelen vastgelegd door een ongelijkheid met 2 onbekenden
- eenvoudige contexten over lineair programmeren
- snijden van lijnen en parabolen

Klas 1 havo/vwo

1. Een plaats bepalen met behulp van gegeven richting en afstand.
2. Coördinaten in een assenstelsel gebruiken.

Klas 2 havo/vwo

3. Vlakdelen beschrijven en interpreteren met behulp van ongelijkheden.
4. Snijpunt van rechte lijnen in een assenstelsel interpreteren als oplossing van een vergelijking.
5. Vergelijking opstellen bij gegeven rechte lijn, parabool. Figuren herkennen bij gegeven vergelijking.
6. Eenvoudig stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden, inclusief grafische weergave.
7. Vergelijking van een lijn opstellen door twee gegeven punten.
8. * Algemene gedaante van vergelijkingen bij een rechte lijn: $ax + by = c$ en parabool: $y = ax^2 + b$ kennen en kunnen gebruiken.

Klas 3 havo en 3vwo

9. *De vergelijking bij een cirkel: $x^2 + y^2 = r^2$
10. *Snijpunt(en) berekenen van lijn en cirkel, lijn en parabool, twee cirkels, twee parabolen.

11. *Verschuiven van cirkels en parabolen in een assenstelsel, vergelijking aanpassen

Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Richting, afstand
- Rooster, assenstelsel
- Coördinaten
- Snijpunt
- Vlakdelen
- Stelsel van vergelijkingen
- Rechte lijn, parabool

Voorbeelden bij *Figuren en formules*

Klas 1 havo/vwo

1. Hier hoort ook bij het beschrijven van een route in woorden en het bepalen van een punt op een kaart met behulp van een routebeschrijving in woorden.
2. Het gaat hier zowel om geografische coördinaten op een kaart als over het gebruik van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten. Schrijfwijze (5, 17) en (0,3; 4,9)

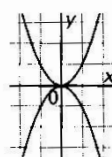
Klas 2 havo/vwo

3. Ligt het punt (3,17) boven, onder of op de lijn met vergelijking $y = 2x + 15$? Geef een voorbeeld van een punt in het assenstelsel waarvoor geldt $y < 2x + 15$

Voorbeeld van een mogelijke uitwerking uit cTWO-rapport

Aansluitend bij de aanwezige voorkennis kan het zwaartepunt liggen bij het berekenen van snijpunten van lijnen en parabolen. De substitutiemethode staat daarbij centraal, terwijl de berekening wordt gekoppeld aan en gecontroleerd door de grafische voorstelling van de situatie. De overgang naar ongelijkheden en vlakdelen tekenen ligt binnen bereik. Zie de volgende opgave uit een examen mavo D 1987.

Hiernaast zijn de parabolen $y = x^2$ en $y = -x^2$ getekend.
Arceer de verzameling van alle punten (x, y) waarvoor geldt $y \leq x^2 \wedge y \geq -x^2$.



4. Stelsel interpreteren als snijdende of evenwijdige lijnen. Stelsel oplossen door eliminatie of substitutie. Ook beredeneren wat het betekent wanneer de lijnen evenwijdig zijn.

Klas 3 havo en 3vwo

8. * Gegeven is een stelsel parabolen door de vergelijking $y = p(x^2 + 2x)$. Laat zien dat de toppen van deze parabolen voldoen aan de vergelijking $x = -1$.

Statistiek

Statistiek

Dit domein kan betekenisvol worden ingevuld door een intern samenhangend programma met als thema *Data Analyse*, daarbij inbegrepen de fundamentele concepten uit de beschrijvende statistiek die kenmerkend zijn voor een dataverzameling. Gebruik van technologie neemt daarbij een belangrijke plaats in. Er kan dan met grotere databestanden worden gewerkt waardoor zinvolle exploratieve data-analyse tot de mogelijkheden behoort. Dit mondt uit in de bekende grafische representaties, centrale maten en spreiding, gekoppeld aan een eerste begrip van (kans)verdelingen in een betekenisrijke context. In overeenstemming met het voorstel van de cTWO-programmacommissie zal een module voor een nieuwe opzet van het domein Statistiek worden uitgewerkt.

Klas 1 havo/vwo

1. Weergaven (tabel, spreadsheet, diverse diagrammen) van (grote) dataverzamelingen aflezen, interpreteren.
2. Begrippenkader ontwikkelen om dataverzamelingen te analyseren en te beschrijven. Begrippen als: spreiding, uitschieters, de meeste (modus), trend.
3. Kennismaken met diagrammen en maten uit de beschrijvende statistiek in het kader van (grote) dataverzamelingen: gemiddelde en spreiding, mediaan, modus, staafgrafiek, cirkeldiagram, puntenplot (op een as), puntenwolk.

Klas 2 havo/vwo

4. Grafische representaties interpreteren en erover redeneren.
5. Grafische representaties van data maken (ook met behulp van geschikte technologie): staafdiagram, cirkeldiagram, puntenplot (op as), lijngrafiek, boxplot, steel-bladdiagram, puntenwolk (bij gepaarde data of van twee kenmerken).
6. Voor het weergeven van een dataverzameling (die gegeven is in tabel of diagram) een geschikte (andere) grafische representatie kiezen.
7. Beargumenteerd geschikte maten kiezen voor het samenvatten van een dataverzameling

Klas 3 havo en 3vwo

8. Van een dataverzameling de onderliggende verdeling karakteriseren met termen als: scheef, symmetrisch (normaal), tweedelig.
9. Toeval als kenmerkende factor bij de uitkomst van een stochastisch proces, zoals bij het nemen van een steekproef.
10. Eigen statistisch onderzoek opzetten en uitvoeren en de gegevens verwerken en analyseren.

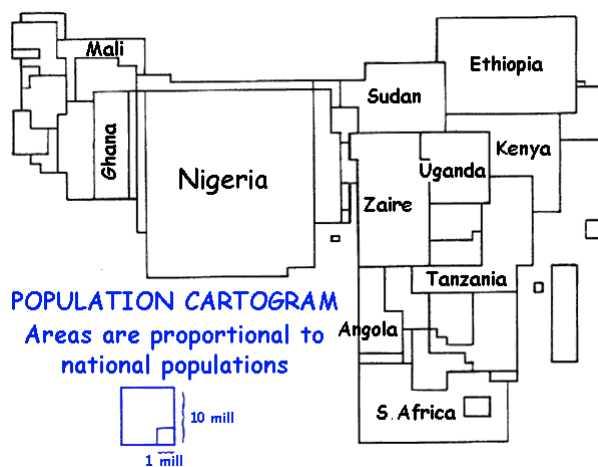
Begrippen (ook de wiskundige term wanneer deze genoemd wordt)

- Staafdiagram
- Cirkeldiagram
- Puntenplot (op as)
- Lijngrafiek
- Boxplot
- Steel-bladdiagram
- Puntenwolk
- Gemiddelde
- Modus
- Mediaan
- Spreiding
- Uitschieter
- Scheefheid
- Toeval

Voorbeelden bij *Statistiek*

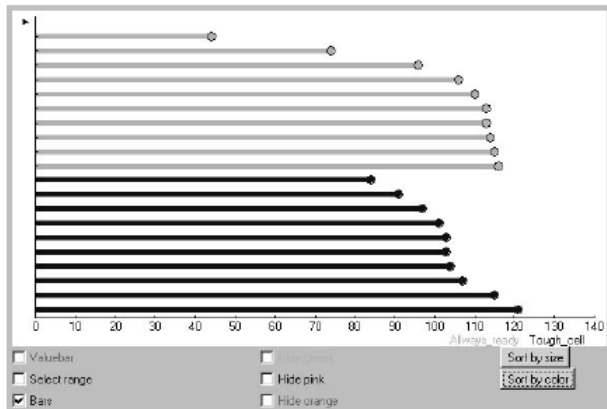
Klas 1 havo/vwo

1. Vergelijk het cartogram van de bevolking van Afrika met de kaart van Afrika. Wat kun je zeggen over het aantal inwoners op een vierkante kilometer van Nigeria in vergelijking met Zuid Afrika?.



Klas 2 havo/vwo

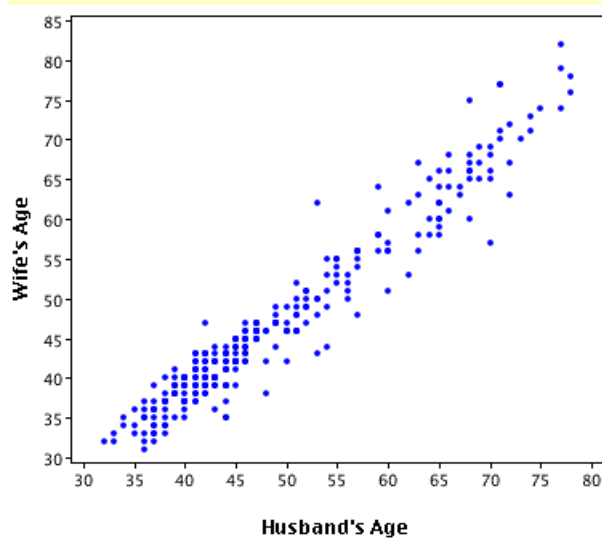
4. Voorbeeld van het interpreteren van een grafische representatie.



Figuur 1. Minitool 1. Batterij-dataverzameling van twee merken.

Schrijf een kort stukje waarin je de kwaliteit van beide merken batterijen vergelijkt. Welke raad je aan en waarom?

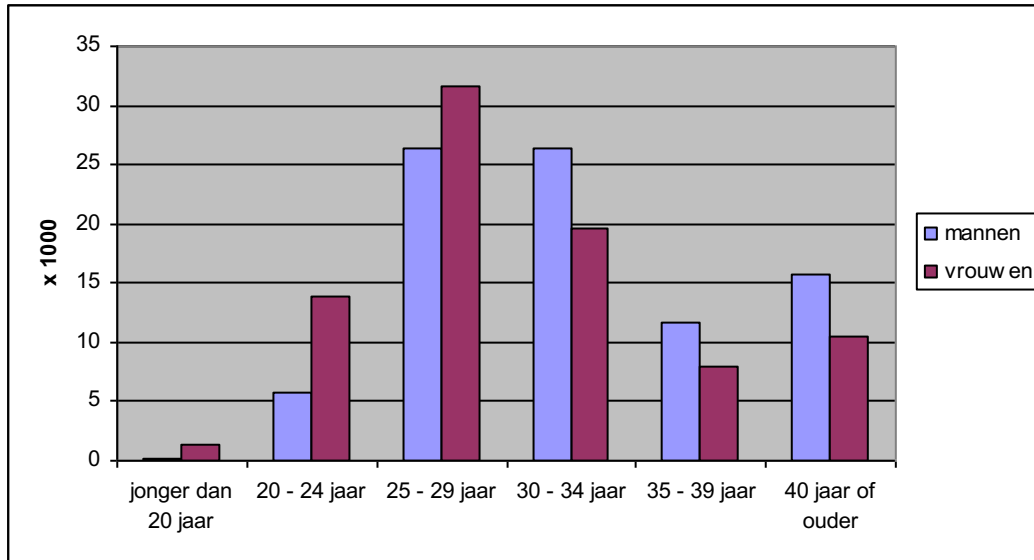
5. Voorbeeld van gebruik van een puntenwolk.



Wat kun je op grond van deze puntenwolk zeggen over de leeftijden van mannen en hun vrouwen?

Klas 3 havo en vwo

8. In de diagrammen kun je zien op welke leeftijd mannen en vrouwen trouwen. De grafiek laat een scheve verdeling zien. Bij vrouwen is dat sterker dan bij mannen. Wat betekent dit voor de 'trouwleeftijd' van mannen ten opzichte van vrouwen?



- 9 De ouders van Maartje spelen 's avonds graag een potje Rummikub. Haar vader beweert voortdurend dat hij de beste is, maar Maartje denkt daar anders over. Voor de grap heeft ze stiekem de stand van 10 spelletjes bij gehouden: 8 keer winst voor ma en 2 keer voor pa. Toeval of intelligentie? Ze redeneert zo: "Als deze uitkomst door zuiver toeval zou zijn ontstaan, dan zou elk een kans van een $\frac{1}{2}$ hebben om te winnen. Met een zuivere munt zou ik dus kunnen nagaan hoe vaak dan een dergelijke uitkomst zou voorkomen." Ga dit na hoe waarschijnlijk deze uitkomst is door en flink aantal keren te simuleren met kop of munt.

Bijlage: Het ‘herstel’ van het onderbouwprogramma voor wiskunde in havo en vwo

Vooraf

In de reactie op de nieuwe examenprogramma's havo en vwo van cTWO (juni 2008) stelt het ministerie van OCW dat er sprake moet zijn van een ‘herstel’ van de onderbouw met betrekking tot de kern en de binnenring (= de algebraïsche vaardigheden) van het wiskundeonderwijs. Sinds de invoering van de basisvorming zijn, volgens OCW, onderdelen hiervan verschoven naar de bovenbouw, hetgeen heeft geleid tot een aantasting van het eindniveau.

In aansluiting op het rapport van de Commissie Meijerink (*Over de drempels met rekenen*) heeft cTWO een *Trajectenboek* opgesteld voor de verdeling van de leerstof over de drie- jarige onderbouw van havo en vwo, met het oog te komen tot een versterking van het leerplan wiskunde in deze onderbouw.

In onderstaande tabellen is een vergelijking gemaakt, heen en weer, tussen het Leerplan 1968 van vóór de basisvorming enerzijds en het *Trajectenboek* anderzijds. Uit deze vergelijking mag blijken dat in het voorgestelde *Trajectenboek* alle essentiële elementen uit kern en binnenring van het Leerplan 1968 aanwezig zijn.

Opgemerkt moet worden dat het formele Leerplan 1968 dateert van de invoering van de Mammoetwet in 1968 en dat dit een globale beschrijving bevat van de onderwerpen die in ieder geval aan bod dienden te komen. Deze opsomming van onderwerpen (het formele leerplan) verschilde aanzienlijk van de feitelijke realisatie van het wiskundeonderwijs, zoals dit middels schoolmethodes gestalte kreeg (het feitelijke leerplan). Zo bevat het Leerplan 1968 vrijwel geen onderwerpen die verwijzen naar de algebraïsche vaardigheden, terwijl die in de schoolmethodes wel nadrukkelijk aan de orde werden gesteld.

Daarnaast zijn in de loop der jaren, en gebaseerd op ervaringen van docenten, onderwerpen van het Leerplan 1968 uit de schoolmethodes verdwenen, zonder dat daarbij dit Leerplan is aangepast. Dit geldt met name voor de verzamelingenleer als startpunt van het wiskundeonderwijs.

Op soortgelijke wijze is er in het huidige wiskundeonderwijs sprake van aanzienlijke verschillen tussen het formele leerplan Wiskunde 12-16 van 1993 en het feitelijke leerplan zoals dat is gerealiseerd in de meest recente wiskundemethodes. In de loop der jaren, ook weer op basis van ervaringen van docenten, is in de opeenvolgende edities van deze schoolmethodes steeds meer ruimte gereserveerd voor algebraïsche vaardigheden. De meeste onderwerpen uit het *Trajectenboek* zijn in deze schoolmethodes reeds aanwezig. In die zin is het *Trajectenboek* een formele vastlegging van het huidige feitelijke leerplan.

Daarnaast is het in het *Trajectenboek* vastgelegde leerplan een uitbreiding ten opzichte van het huidige feitelijke leerplan. De belangrijke verschillen zijn:

- een systematische en uitgebreide omschrijving van de rekenvaardigheden,
- een uitbreiding van de meetkunde met analytische meetkunde als toepassingsgebied van algebraïsche vaardigheden,
- een meer uitgebreide introductie van de beschrijvende statistiek.

Het Leerplan wiskunde voor Rijksscholen (1968) in vergelijking met het Trajectenboek

leerplan 1968 voor Rijksscholen Uit: J. van Dormolen, Didactiek van de wiskunde (1976)	Trajectenboek 2009			
	1	2	3	TF
Eerste leerjaar havo en vwo				
Verzamelingen.				
De verzameling van de natuurlijke getallen; de verzameling van de gehele getallen; de verzameling van de rationale getallen; getallenlijn, ordening.	×	×	×	
In elk van de genoemde verzamelingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen met gehele positieve exponenten.	×	×	×	
Eenvoudige eerstegraadsvergelijkingen en –ongelijkheden met één veranderlijke.	×	×	×	
De commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen; toepassen op enkele producten en ontbindingen.	×	×	×	
Inleiding in de meetkunde: kubus, rechthoekig blok, vlak, lijn, punt, hoek, afstand, driehoek, vierhoek, cirkel.	×	×	×	
Afbeeldingen: lijnspiegeling, puntspiegeling, translatie, rotatie.	×	×	×	
Evenwijdigheid van lijnen	×	×	×	
Congruentie van figuren			×	
Eigenschappen van driehoeken en van de vierhoeken: vlieger, parallelogram, ruit, rechthoek, vierkant	×	×	×	
Eenvoudige puntverzamelingen en hun doorsneden.				
Leerjaar 2,3 en 4 vwo				
Gebruik van de rekenliniaal.				
Verzamelingen in verband met elementaire logische operaties;				
toepassingen op eerste graadsvergelijkingen en –ongelijkheden en op puntverzamelingen	×	×	×	
De verzameling van reële getallen.			*	
Vierkantswortels; tweedegraadsvergelijkingen en –ongelijkheden.	×	×	×	
Samenstellen van twee spiegelingen en van twee relaties				
Vectoren; rekenen met vectoren; verband tussen vectorcomponenten en coördinaten van een punt				×
Vermenigvuldigen van figuren; zwaartepunt van een driehoek.			×	
Gelijkvormigheidsafbeelding; gelijkvormigheid van figuren; de enkele eigenschappen van rechthoekige driehoeken;			×	
goniometrische verhoudingen sin, cos en tan; sinusregel en cosinusregel			×	×
Berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte.			×	×
Relaties: de grafiek van een relatie; de relaties $\{(x,y) ax+by+c \leq 0\}$; twee vergelijkingen of ongelijkheden met twee veranderlijken;			×	×
reflexieve, symmetrische, transitieve relaties, equivalentierelaties.				
Functies; de grafiek van een functie.	×	×	×	×
eerstegraads en tweedegraadsfuncties.	×	×	×	×
absolute waarde.				×
projectie.			×	×
lengte , oppervlakte, inhoud.	×	×	×	×

rijen, rekenkundige rijen, meetkundige.				×
permutaties en combinaties.				×
inverse functie.				×
wortelfunctie;	×	×	×	×
samenstellen van functies.				×
machten met reële exponenten; logaritmen				×
Inleiding tot de differentiaalrekening.				×
Inleiding tot de beschrijvende statistiek	×	×	×	
In het vlak: vergelijkingen van lijn en cirkel; snijpunten en raaklijnen; inwendig product; hoeken en afstanden.		×	×	×
In de ruimte: vergelijkingen van vlak en bol, vectorvoorstellingen van lijn en vlak; inwendig product; hoeken en afstanden.				×
Puntverzamelingen en eenvoudige verzamelingen van lijnen			×	
Leerjaar 2 en 3 havo				
Gebruik van de rekenliniaal.				
Irrationale getallen				
Metriek: lengten, oppervlakten en inhoud; enkele eigenschappen van rechthoekige driehoeken.	×	×	×	
Eerstegraadsvergelijkingen en –ongelijkheden met één veranderlijke.	×	×	×	
Relaties; de grafiek van een eerstegraadsrelatie; twee eerstegraadsvergelijkingen met twee veranderlijken; eerstegraadsongelijkheden met twee veranderlijken.	×	×	×	
Puntverzamelingen in het vlak.				
Functies; de grafiek van een functie	×	×	×	×
Eerstegraads- en tweedegraadsfuncties; tweedegraadsvergelijkingen en –ongelijkheden.	×	×	×	×
Vectoren in het vlak:				×
vermenigvuldiging; gelijkvormigheid van figuren.	×	×	×	
Beginnelen van de beschrijvende statistiek.	×	×	×	
De goniometrische verhoudingen sin.cos en tan; sinus- en cosinusregel.	×	×	×	×
Eenvoudige berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte.		×	×	×

Om een vergelijking mogelijk te maken zijn enkele lemma's uit de het Rijksleerplan gesplitst in afzonderlijke lemma's..

Begrippenlijst Trajectenboek 2009 in vergelijking met het Leerplan 1968

Toelichting vooraf:

Het Leerplan voor Rijksscholen 1986 geeft een globale omschrijving van de leerstof. De uitwerking van dit programma in de schoolmethodes gaat in het algemeen verder dan het formele leerplan. Bijvoorbeeld: algebraïsche vaardigheden worden in het leerplan niet genoemd, terwijl deze wel in de schoolmethodes zijn opgenomen. De kruisjeslijst bij het Leerplan is gebaseerd op de feitelijke interpretatie van het leerplan zoals dit in de schoolmethodes is uitgewerkt.

Trajectenboek 2009	Leerplan 1968
Rekenen	
<i>Getallen: Getallen en getalrelaties</i>	
Symbolen zoals $<$, $>$	×
Wortel, kwadraat	×
Volgorde van bewerkingen	×
Ontbinden	×
Term, factor	×
Deelbaar	×
Negatieve getallen, *priemgetallen	×
<i>Getallen: Breuken en decimale getallen</i>	
Breuk teller, noemer, breukstreep	×
Decimaal (getal)	×
Afronden op ...decimalen nauwkeurig, afbreken	
Schatten	
<i>Getallen: Negatieve getallen</i>	
Positief	×
Negatief	×
Twee 'mintekens' (symbool voor aftrekken en negatief getal)	×
Assen(stelsel)	×
Coördinaten	×
<i>Getallen: Machten, wortels en wetenschappelijke notatie</i>	
Kwadraat, wortel	×
Macht, grondtal, exponent	×
Wetenschappelijke notatie (ook die van de rekenmachine)	
Rationaal getal, * irrationaal getal	×
<i>Verhoudingen: Verhoudingen, procenten en schaal</i>	
Relatief, absoluut	
Per, op de , van de, staat tot (notatie en terminologie)	
Schaal	
Verhoudingstabel	
Procent, percentage	
Vermenigvuldigfactor, groeifactor, vergrotingsfactor	×

Algebra	Leerplan 1968
<i>Verbanden: Grafieken, tabellen en formules</i>	
Tabel, grafiek, (woord)formule Variabele Stijgen, dalen, constant, periodiek Steilheid, helling Snijden, snijpunt, nulpunt Top, dal Assen(stelsel), coördinaten Verband, grootheid, eenheid Somgrafiek, verschilgrafiek Verschillen tussen: lineair, exponentieel, kwadratisch, wortel, omgekeerd evenredig, periodiek en machtsverband Periode, amplitude, evenwichtsstand	× × × ×
<i>Verbanden: Lineaire verbanden</i>	
Lineair (verband) Rechte lijn Vaste deel, 'variabele (veranderende) deel', startgetal Steilheid, richtingscoëfficiënt *Waaier, *bundel	× *
<i>Verbanden: Exponentiële verbanden</i>	
Exponentiële groei Groeifactor, vermenigvuldigingsfactor Beginhoeveelheid Procentuele toe- en afname	
<i>Verbanden: Kwadratische verbanden</i>	
Dalparabool, bergparabool Top Symmetrie-as Nulpunten Verschuiven	× × × × ×
<i>Rekenen met formules: Patronen en (woord)formules</i>	
Regelmaat (Woord)formule Vuistregel Volgorde van bewerkingen Substitueren Tabel (rij en kolom) Lineair verband Kwadratisch verband	× × × × ×

<i>Rekenen met formules: Rekenen met formules en variabelen</i>	
Term	
Factor	
Macht	×
Herleiden	×
Eigenschappen van (reken)bewerkingen	×
Regels voor bewerkingen met breuken	×
Equivalent, gelijkwaardig met	×
Merkwaardig product	×
Kwadraat afsplitsen	×
<i>Rekenen met formules: Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen</i>	
Vergelijking (lineair, kwadratisch, anders)	×
Oplossing van een vergelijking	×
<i>abc</i> -formule	×
Ongelijkheid	×
Meten en Meetkunde	
<i>Vormen en Figuren</i>	
Rechte hoek, stompe hoek, scherpe hoek, gestrekte hoek	×
Vierkant, rechthoek, cirkel (straal, middelpunt, diameter, middellijn), driehoek (gelijkbenig, gelijkzijdig, rechthoekig)	×
Kubus, balk, piramide, prisma, kegel, cilinder, bol	×
Uitslag, zijvlak, ribbe, hoekpunt	×
Symmetrie-as	×
Loodrecht, loodlijn	×
Evenwijdige lijnen, kruisende lijnen	×
Draaisymmetrie, puntsymmetrie, draaihoek, draaipunt	×
Diagonaal, diagonaalvlak	×
Parallellogram, ruit, trapezium	×
Middelloodlijn (van een zijde), deellijn (van een hoek), zwaartelijn, zwaartepunt, hoogtelijn in een driehoek	×
<i>Meten en rekenen in de meetkunde</i>	
Omtrek, oppervlakte, inhoud	×
Stelling van Pythagoras	×
Goniometrische verhoudingen, sinus, cosinus, tangens	×
Hellingshoek	×
<i>Figuren en formules</i>	
Richting, afstand	×
Rooster, assenstelsel	×
Coördinaten	×
Snijpunt	×
Vlakdelen	×
Stelsel van vergelijkingen	×
Rechte lijn, parabool	×

Statistiek	×
Staafdiagram Histogram Cirkeldiagram Puntenplot (op as) Lijngrafiek Boxplot Steel-bladdiagram Puntenwolk Gemiddelde Modus Mediaan Spreiding Uitschieter Scheefheid	