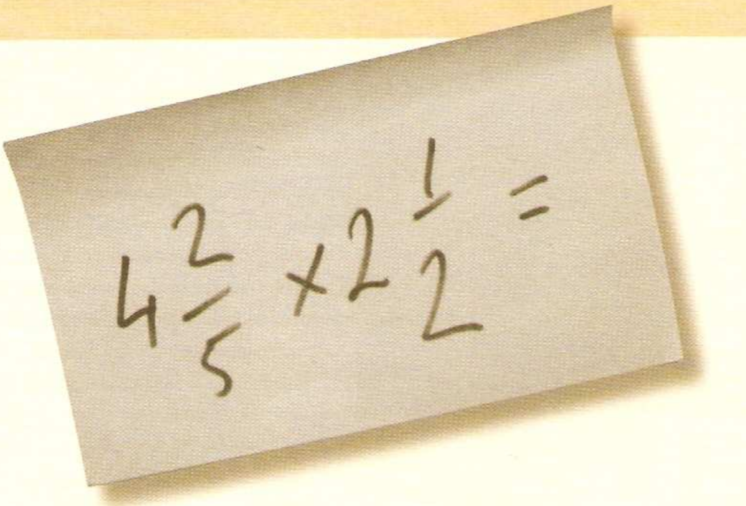
Waar cijfers weer getallen zijn...

[Maike den Houting]



figuur 1 Het 'sollicitatie-sommetje'

Doe het zelf

Jaren geleden opende een nieuwe 'Doe-het-zelf'-vestiging haar deuren en pronkte er een mooie Peugeot bij de ingang. Wie een aantal vragen goed beantwoordde en de slagzin invulde, kon deze auto winnen. Die is van mij, dacht ik meteen. Met een fiets en drie heel jonge kinderen was het knap lastig om overal te komen. Ik wenste me deze auto dus toe met alle kracht die ik had. En met succes. Met dit Peugeotje rijd ik begin juni 2005 richting de Saxion Hogescholen in Deventer, op weg naar een sollicitatiegesprek. Een maand eerder had ik in de krant de advertentie zien staan voor een docent rekendidactiek op de pabo. Die baan is van mij, dacht ik meteen.

Het addertje onder het gras

Rechts van mij zit de onderwijsmanager, links twee mensen van het cluster rekenen. Een pittig sollicitatiegesprek. We praten over werkvormen, interactie, pluriformiteit, competentiegericht leren en nog veel meer. Ik kan hier duidelijk mijn visie op onderwijs kwijt. Hierover mee kunnen denken en mee mogen praten was één van de vele redenen geweest om te reageren op de advertentie. Maar naast heerlijk is het ook spannend. Ik wil de baan zo ontzettend graag!
Ineens wordt er van links een klein geel papiertje over de tafel naar me toegeschoven met de vraag hoe ik dit zou oplossen. Ik bekijk het papiertje aandachtig: $4\frac{2}{5}\times 2\frac{1}{2}$. De getallen staren mij aan en ik de getallen (*zie figuur 1*) Ik slik even. Komen ze met breuken aan tijdens een sollicitatiegesprek. Dat heb ik nog niet eerder meegemaakt. Rekenen kan ik natuurlijk wel, maar dat zal iedereen wel kunnen die hier komt solliciteren. Wat is het addertje onder het gras? Mijn hersenen kraken, niet om de opgave op te lossen, maar om de rekendocenten te doorgronden die me deze vraag toeschuiven. Waar willen ze heen?
De spanning neemt toe. Ik ben op een pabo. Wat doen ze hier met zo'n opgave? Vast geen $\frac{22}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{110}{10}=11$, of de vijven tegen elkaar wegstrepen en 22 : 2 overhouden. Van rechts komt een hulpvraag: 'Wat is het ongeveer?' En daar valt het kwartje, letterlijk, want ik praat meteen over geld: Nou, het is iets meer dan tien, want vier keer twee euro vijftig is al tien euro. Een winnend antwoord. Lang leve die euro. Betekenis geven aan de opgave (hoe basaal ik dat op dit moment ook doe), dát is belangrijk.

De eerste les rekenen op de pabo

Het vak *Rekenen Eigen Vaardigheid* is een soort opfriscursus voor nieuwe pabostudenten. Er komen onderwerpen aan bod als handig rekenen, schattend rekenen, cijferen, verhoudingen, breuken, procenten, kommagetallen, meten, meetkunde, grafieken en toepassingen.
Ik schrijf 43782,536 op het bord, zet een pijl onder het derde cijfer van links en vraag wat er staat. Steevast is het eerste antwoord van de nieuwe lichting studenten: 7. Het tweede antwoord is gelukkig 700. De omschakeling wordt gemaakt.
Deze eerste les besteed ik altijd veel tijd aan het handig rekenen. Daar komen allerlei eigenschappen van bewerkingen aan bod. Ik start met de opgave $(3\frac{1}{3}\times 17)+(28\times 3\frac{1}{3})$ die ze met handig rekenen moeten oplossen. Er wordt flink gemopperd, bij elkaar gekeken en gecijferd in plaats van handig gerekend. Maar niemand van de 40 studenten komt er uit. Wat opvalt is, dat iedereen blind begonnen is met eerst uitrekenen wat tussen haakjes staat. Zo hebben ze het immers geleerd.
Ik laat ze na een hele poos stoppen met deze ellende. Slechts twee studenten hebben op dat moment een juist antwoord gevonden, maar wel volgens een heel ingewikkelde procedure. Ik vraag de studenten om eens goed te kijken naar de getallen die daar staan, zónder meteen te willen rekenen. O ja, hoor ik hier en daar. Ik vraag door. Een studente vertelt dat dit hetzelfde is als $45\times 3\frac{1}{3}$. Want, zo redeneert ze, je mag 17 en $3\frac{1}{3}$ omkeren. Voor sommige medestudenten gaat ze hier te snel. Ze vragen zich af waarom ze 17 en 28 bij elkaar optelt en dat niet doet met die $3\frac{1}{3}$. Wanneer ik vraag om het aan elkaar uit te leggen, merk ik dat hun dat niet lukt. Ze grijpen niet terug naar een context of naar een model om het elkaar te verduidelijken en blijven steken in redenaties als: 'zo heb ik het geleerd op de middelbare school' of 'dat weet ik gewoon'. Er komt wat meer inzicht wanneer ik een uitstapje maak naar 13 briefjes van 20 euro en nog eens 17 briefjes van 20 euro oftewel $(13\times 20)+(17\times 20)$. Dat zijn samen 30 briefjes van 20 euro en helaas niet van 40

figuur 2 Tijdens mijn eerste les Reken Eigen Vaardigheid

euro. Het idee dat $(3\frac{1}{3}\times 17)+(28\times 3\frac{1}{3})$ gelijk is aan $45\times 3\frac{1}{3}$ wordt uiteindelijk door de rest van de groep ondersteund. Maar opnieuw zitten ze vast. Hoe reken je $45\times 3\frac{1}{3}$ uit? Er is nog een uitstapje nodig naar de eigenschap 'vergroten en verkleinen'. Dat doe ik dan maar met zakjes knikkers (6×8 = zes zakjes met acht knikkers = twee zakjes met 24 knikkers = 2×24 enzovoorts) of met behulp van het oppervlaktemodel. Het is erg basaal, maar onmisbaar om weer te zien wat getallen en bewerkingen voor invloed op elkaar hebben en wat hun concrete betekenissen zijn.

We keren opnieuw terug naar $45\times 3\frac{1}{3}$. De studenten bedenken al snel om die $3\frac{1}{3}$ drie keer zo groot te maken. Dan wordt die 45 dus drie keer zo klein. Nu staat er 15×10 en iedereen is het met me eens dat dit veel eenvoudiger is dan het hopeloze gecijfer waarmee ze zelf eerst waren gestart. Er klinkt een zucht van opluchting door de groep, maar ook van verontwaardiging. Dit is totaal anders dan ze het ooit hebben geleerd. Als docent ben ik echter nog niet tevreden. Fijn dat het antwoord klopt, maar snappen ze nu écht wat ze doen met dat vergroten en verkleinen? Ik vraag daarom of iemand een verhaal bij deze breukensom kan bedenken. Dat blijkt te moeilijk. Ze proberen het met $3\frac{1}{3}$ euro, maar het klinkt ze niet mooi in de oren. Met wat hulp komen ze uiteindelijk tot het volgende.

In het magazijn staan potten verf waar $3\frac{1}{3}$ liter in zit. Ik ga roze verf maken door rood en wit te mengen. Ik koop 17 potten rode verf en 28 potten witte verf. Hoeveel liter roze verf heb ik in totaal? *Je hebt in totaal 45 potten van $3\frac{1}{3}$ liter. Wanneer je er groepjes van 3 potten van maakt, is elk groepje samen 10 liter. Je hebt 15 groepjes met 10 liter.*
Pieter verdient 17 euro per uur en zijn vriendin 28 euro per uur. Ze werken allebei $3\frac{1}{3}$ uur op zaterdagmiddag. Hoeveel geld hebben zij samen op één zaterdagmiddag verdiend? *Ze verdienen in totaal 45 euro per uur. Dus $3 \times 45 = 135$ euro voor 3 uur werken. En voor een derde deel van een uur verdien je een derde deel van 45 euro en dat is 15 euro.*

Eindelijk begint de opgave te leven, ze gaan het voor zich zien. Betekenis geven is belangrijk om te kunnen redeneren over de getallen. Je ziet hier overigens dat de keuze van de context een bepaalde strategie kan uitlokken. Bij het eerste voorbeeld maken ze er in gedachten 15 stapels van drie blikken verf van, terwijl de tweede context uitlokt om de verdeeleigenschap in te zetten: $3\times 45+\frac{1}{3}\times 45$.
Ik laat ze (hernieuwd) kennis maken met nog een aantal eigenschappen van getallen en bewerkingen. Vervolgens geef ik elk groepje van vier studenten een envelop met opgaven die ze samen met behulp van handig rekenen moeten aanpakken. Welkom bij *Rekenen Eigen Vaardigheid*!

Pabo-studenten kunnen niet rekenen?

Pabo-studenten moeten zich al langer verdedigen tegen de gezette gedachte dat ze niet kunnen rekenen. Dat is nog sterker geworden sinds de invoering van WISCAT-pabo, de digitale rekentoets van Cito waarmee pabo's vaststellen of instromende eerstejaars pabo-studenten voldoen aan een landelijk vastgestelde norm. Na drie mislukte pogingen moet de studie op de betreffende pabo immers worden afgebroken. Vaak leeft de hele familie mee, wanneer het toetsmoment is aangebroken. En eerlijk is eerlijk, ook mijn insteek als wiskundedocent was in eerste instantie: ik zal ze eens even gaan leren rekenen daar op de pabo, want blijkbaar kunnen ze dat nog niet. Ik was dus een vrouw met een missie, ik wilde het onderwijs aan mijn en andermans kinderen veilig stellen.
Nooit gedacht dat ik uiteindelijk tot een heel ander inzicht zou komen. Nooit gedacht dat ik voor deze missie totaal op de verkeerde plek ben gaan zitten. Als studenten niet kunnen rekenen bij de start van de pabo, dan is er daarvóór al iets heel ernstig misgegaan. Ik kan de redenering compleet anders maken door te zeggen dat studenten op de pabo pas ontdekken dat ze op de middelbare school het rekenen hebben afgeleerd. Ik kan chargeren met de uitspraak: wiskundedocenten leren kinderen het rekenen af. Ik zeg daarmee nog steeds dat pabo-studenten niet kunnen rekenen. Maar toch is er een duidelijk verschil.
Het voelt raar en vervelend. Hoe kan ik mezelf in mijn vorige beroep als wiskundedocent nou de schuld geven? Zo'n slechte docent was ik toch niet? Nu ik met een beschuldigend vingertje naar mijn vroegere ik wijs, komen er allemaal nieuwe vragen in me op:
Wat wist ik als wiskundedocent van het rekenonderwijs op de basisschool?
Wat deed ik fout met betrekking tot rekenen, en wat zou ik nu anders doen?
Waarom wist ik hier toen niets van?

Wat wist ik als wiskundedocent van het rekenonderwijs op de basisschool?

Zeven jaar heb ik als wiskundedocent gewerkt, enthousiast en bezeten van wiskundeonderwijs en didactiek. Af en toe merkte ik wel dat het rekenonderwijs op de basisschool anders was geworden. De kinderen begrepen bijvoorbeeld mijn staartdeling niet. Ik denk dat menig docent niet

weet wat er voor de ouderwetse staartdeling in de plaats is gekomen en hoe de kinderen dit noteren. Ik moest het zelf in ieder geval van mijn eersteklassers leren.
Op het St.-Ludgercollege werd een instaptoets rekenen ingevoerd. De aansluitingsproblematiek tussen basisonderwijs en voortgezet onderwijs had onze aandacht. Vooral op het gebied van breuken, procenten en metriek stelsel leek het wel alsof de leerlingen veel minder bagage hadden dan wij verwachtten. In dit kader werd een middagcursus geregeld op de pabo in Doetinchem, waar we als wiskundedocenten door Marian Steverink (pabo-docent rekenen) kort zijn ingewijd in het breukenonderwijs op de basisschool. Het was voor ieder van ons een regelrechte eye-opener. Het werd duidelijk dat we onze leerlingen sterk overschatten in hun kennis op dit domein. We bleken ook niet op de hoogte te zijn van modellen als de dubbele strook die op de basisschool gebruikt worden. Deze zouden de uitleg in onze lessen prima kunnen ondersteunen. In onze aansluiting op de voorkennis zaten natuurlijk veel meer lacunes, maar er was geen scholingsbudget om ook andere domeinen met Marian door te nemen. Op een vrije ochtend daarom naar een groep 8 getogen, gewoon om te kijken wat het rekenonderwijs in de praktijk nu inhoudt. Van de basisschool in mijn dorp heb ik de rekenmethode geleend van groep 3 tot en met 8 om eens door te snuffelen. Zo kon ik uiteindelijk een kind in klas 1 van het voortgezet onderwijs veel beter op waarde schatten. Wiskundedocenten en zeker auteurs van middelbareschoolmethodes zouden veel beter op de hoogte moeten zijn van de bagage die een leerling meekrijgt van de basisschool. Verschillende wiskundemethodes introduceren machientjesschema's of pijlenschema's als iets totaal nieuws, terwijl kinderen op de basisschool hier in groep 3 al mee hebben gewerkt. Aan de andere kant wordt verwacht dat kinderen in het voortgezet onderwijs heel snel op een formeel niveau met breuken kunnen gaan rekenen, terwijl dit gezien hun voorkennis vaak alleen maar kan uitdraaien op het laten inslijpen van vaste rekenprocedures zonder dieper inzicht. Het is duidelijk dat leraar en leerling elkaar gewoonweg niet voldoende kennen.

Wat deed ik fout en wat zou ik nu anders doen?

Rekenen op de pabo vinden veel studenten bijzonder pittig. Zij voelen daarbij dezelfde spanning als ik tijdens dat sollicitatiegesprek met die breukensom. Op een pabo moet je ineens 'anders' rekenen dan op een middelbare school, zo wordt dat ervaren. Het vak *Rekenen Eigen Vaardigheid* lijkt voor velen niet een opfriscursus te zijn, maar een module met veel nieuwe inhoud. Op een pabo moet je kennis hebben van getallen. Je moet de bewerkingen op verschillende niveaus beheersen en er juiste contexten of modellen bij kunnen vinden. En zo hebben de studenten, zo beweren ze, het nog nooit gedaan. Dat geloof ik best. Als docent wiskunde heb ik me daar mede schuldig aan gemaakt.
Er zijn een aantal zaken die ik nu anders zou aanpakken wanneer ik weer als wiskunde-docent in de klas zou staan.
Te beginnen met meer aandacht voor de getallen, de getalrelaties en hun betekenis. Verder zou ik er voor passen om van tevoren vastgelegde strategieën op de leerlingen over te brengen. Ik had destijds de neiging om ze meteen maar de meest handige (oftewel mijn) manier aan te bieden om tot de oplossing te komen. Ik zie nu dat je daarmee het denken van de leerling stopt. Ik was heel erg productgericht bezig. De trucjes, de vaste stappenplannen en de vooraf vastgelegde oplossingsprocedures overheersten, zoals
$4\frac{2}{5}\times 2\frac{1}{2}=\frac{22}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{110}{10}=11$
of 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde'. Niet alleen bij rekenonderdelen is dit zo, maar ook bij *meten* zag ik leerlingen snel naar vaste procedures grijpen (van m^3 naar dm^3 is drie nullen erbij – hier greep ik overigens zelf wel naar materialen om ze meer basis te geven). Zonder het te begrijpen maar met goed toepassen van de trucjes kom je tot de oplossingen; dus waarom zou je meer moeten weten? Om ze tot diepere inzichten te brengen, om ze écht te laten leren, moet de nadruk juist liggen op het proces, steeds maar weer opnieuw. In een schoolmethode wordt zo'n proces soms helemaal niet of in een hoog tempo een keertje doorlopen. Vervolgens acht men de leerling rijp om de dieper liggende concepten te hebben opgepikt en wordt overgegaan tot het inslijpen van de trucjes met oefensommen of met soortgelijke opdrachten in net een iets ander jasje (context). Hoe geestdodend! Ik denk dat ik als wiskundedocent veel te snel bepaalde belangrijke concepten gewoon als vaststaand feit op een dienblaadje heb gepresenteerd. Jammer. In het basisonderwijs vind je verschillende zeer sterke modellen, zoals de lege getallenlijn, de dubbele strook, enzovoorts. Het zijn modellen die het denken van het kind niet sturen, maar juist volgen. Waar zijn al die modellen gebleven in het voortgezet onderwijs?
Modellen en strategieën kun je overigens niet overbrengen, kinderen moeten ze zelf construeren. Daar kun je als leerkracht heel veel in betekenen. Eerst moet het rekenwerk weer *betekenis* krijgen, dat blijkt vaak een lastige en ook vergeten stap. Het ontwikkelen van algemene denkmodellen en handige strategieën gebeurt onder andere door het houden van klassengesprekken om reflectie op eigen (informele) oplossingsstrategieën te bevorderen. Op de basisschool is dit de normale gang van zaken, op de middelbare school is er toch vaak veel meer sturing door boek en leerkracht. Goed gekozen contexten kunnen leiden tot het

>

Correcties Somgetallen, ...

(Van der Waall & Hendrickx)

In *Euclides* 82(6), in deel 1 van het artikel:
- pagina 235, rechter kolom, regel 14 van onder: "g = 1" moet zijn "g = ½".

In *Euclides* 82(7), in deel 2 van het artikel:
- pagina 283, midden, regels 13 en 14 van onder: de zin "Merk op dat…" moet aangevuld worden met "of van zes termen.";
- pagina 283, midden, regel 9 van onder: in plaats van "juist omdat" moet er staan "juist wanneer";
- pagina 283, midden, regel 5 van onder: "1 en 45" moet vervangen worden door "1, 15 en 45 voor k";
- pagina 284, midden, regel 18 van boven: "$2n \cdot m$" moet zijn "$2^n \cdot m$".

ontdekken van (andere) strategieën en mooie getalrelaties. Ook kunnen ze bij een leerling de ontwikkeling van een bepaald (denk)model uitlokken. Hier ligt wat mij betreft nog een heel belangrijke taak voor auteurs van schoolmethodes.

Waarom wist ik hier toen niets van?

Een belangrijke vraag. Ik heb er lang over nagedacht. In het curriculum van de lerarenopleiding wiskunde zat voor mij geen module 'rekenen/wiskunde op de basisschool'. Dat is achteraf gezien een groot gemis geweest. Er zou een gedegen vak 'basisschoolwiskunde' moeten zijn, of het zou geïntegreerd in de verschillende vakken moeten terugkomen. Misschien is dit wel zo op andere hogescholen en inmiddels ook bij de opleiding waar ik mijn bevoegdheid heb gehaald. Ik hoop het van harte. Want zonder zo'n vak blijft er een kloof bestaan tussen basisschool en voortgezet onderwijs. In dat voortgezet onderwijs speelt daarnaast ook dat er voor de docent weinig ruimte is om zichzelf verder te ontwikkelen of te bekwamen. Het moet liefst allemaal in je eigen tijd gebeuren. Er zijn zoveel dingen die je aandacht nodig hebben, dat het gewoon toeval was dat ik me richtte op het basisonderwijs. Het had ook iets heel anders kunnen zijn. En zelfs met al die aandacht wist en begreep ik er toch nog veel te weinig van.

Tot slot

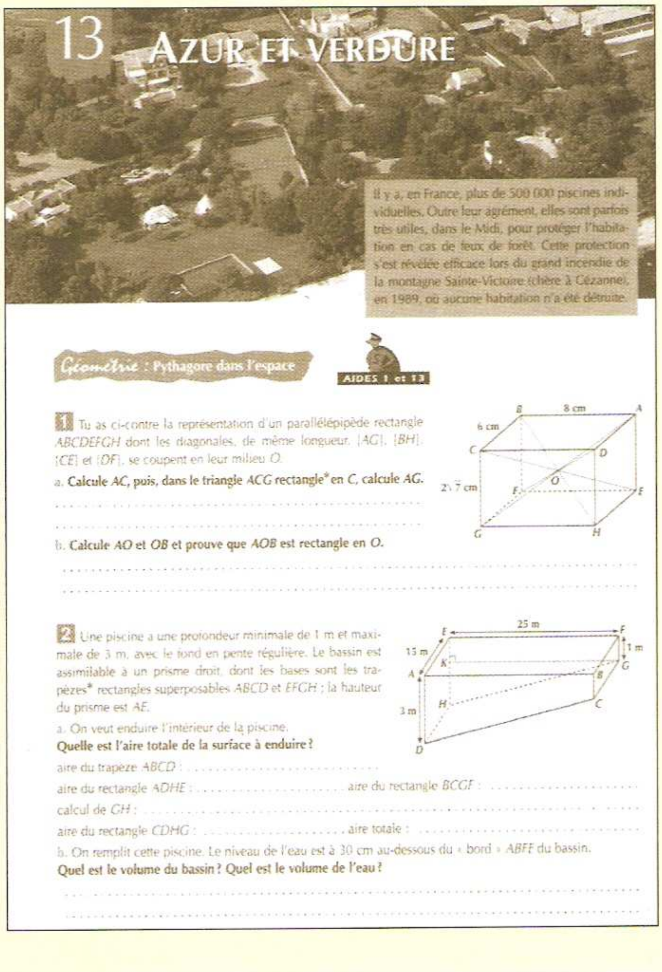
Er zijn vast meer wiskundedocenten die, net als ik, het handig rekenen moeten terugvinden en integreren in hun lessen, die moeten leren hun cijfers weer als getallen te gaan zien, die samen met de leerlingen aandacht moeten geven aan betekenisvol rekenen en die de leerlingen wat minder het eigen denken moeten ontnemen. Daarnaast is meer kennis nodig van de modellen die kinderen op de basisschool hebben uitgevonden, zodat daar op kan worden aangesloten. Meer aandacht van docent en methode voor het proces in plaats van het product is wenselijk. Dan kunnen onze toekomstige pabo-studenten straks gewoon bij de start van hun opleiding weer rekenen. Tijdens hun opleiding op de pabo leren ze hoe ze kinderen professioneel kunnen begeleiden bij hun ontdekkingstocht door de prachtige en uitdagende wereld die we wiskunde noemen. Daarbij is het niet wenselijk dat de leerkracht zelf zich vastklampt aan die ene rekenregel of die ene strategie die hij zelf beheerst of het liefst gebruikt. Of dat hij de kinderen direct vertelt 'hoe het moet'. Een 'doe-het-zelf'-pakket met een stap-voor-stap handleiding zorgt er misschien voor dat een apparaat uiteindelijk in elkaar kan worden gezet, maar het is voor de bouwer niet meer terug te vinden hoe en waarom het uiteindelijk werkt. Een zelf uitgevonden apparaat geeft de bouwer veel meer inzicht over de werking.
We moeten kinderen niet met een trukendoos leren rekenen, maar leren denken in modellen, structuren, getalrelaties en vooral betekenis.

Literatuurverwijzingen

- C.T. Fosnot, M.L.A.M. Dolk (2001): *Young mathematicians at work / Constructing Multiplication and Division.* Portsmouth (NH, USA): Heinemann; pp. 73-89.
- K.P.E. Gravemeijer: *Didactisch gebruik van de lege getallenlijn - een persoonlijk perspectief*. In: Panama-Post, tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 21(2); pp. 11-23.

Over de auteur

Maike den Houting is sinds augustus 2005 docent vakdidactiek rekenen/wiskunde op de pabo in Deventer (Saxion Hogescholen). Daarvoor was zij wiskundedocent, onder ander op het St.-Ludgercollege in Doetinchem. Een aantal jaren was ze auteur van de methode Netwerk. Op dit moment is ze als auteur betrokken bij de ontwikkeling van de nieuwe Wageningse Methode.
E-mailadres: *m.i.j.denhouting@saxion.nl*



13 AZUR ET VERDURE

Il y a, en France, plus de 500 000 piscines individuelles. Outre leur agrément, elles sont parfois très utiles, dans le Midi, pour protéger l'habitation en cas de feux de forêt. Cette protection s'est révélée efficace lors du grand incendie de la montagne Sainte-Victoire (chère à Cézanne), en 1989, où aucune habitation n'a été détruite.

Géométrie : Pythagore dans l'espace

AIDES 1 et 13

1 Tu as ci-contre la représentation d'un parallélépipède rectangle *ABCDEFGH* dont les diagonales, de même longueur, [*AG*], [*BH*], [*CE*] et [*DF*], se coupent en leur milieu *O*.

a. **Calcule *AC*, puis, dans le triangle *ACG* rectangle* en *C*, calcule *AG*.**

b. **Calcule *AO* et *OB* et prouve que *AOB* est rectangle en *O*.**

2 Une piscine a une profondeur minimale de 1 m et maximale de 3 m, avec le fond en pente régulière. Le bassin est assimilable à un prisme droit, dont les bases sont les trapèzes* rectangles superposables *ABCD* et *EFGH* ; la hauteur du prisme est *AE*.

a. On veut enduire l'intérieur de la piscine.
Quelle est l'aire totale de la surface à enduire ?

aire du trapèze *ABCD* : ...
aire du rectangle *ADHE* : ... aire du rectangle *BCGF* : ...
calcul de *GH* : ...
aire du rectangle *CDHG* : ... aire totale : ...

b. On remplit cette piscine. Le niveau de l'eau est à 30 cm au-dessous du « bord » *ABFE* du bassin.
Quel est le volume du bassin ? Quel est le volume de l'eau ?