

Hoogbegaafde leerlingen en wiskunde in de basisvorming

Een handreiking bij het maken van lesmateriaal

Voortgezet onderwijs



Hoogbegaafde leerlingen en wiskunde in de basisvorming

Een handreiking bij het maken van lesmateriaal

Voortgezet onderwijs

Jenneke Krüger
Pieter van der Zwaard

Enschede, november 2004
VO/2613.3/D/04-132



Verantwoording

© 2004 Stichting leerplanontwikkeling (SLO), Enschede

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier zonder voorafgaande toestemming van de uitgever.

Auteurs: Jenneke Krüger, Pieter van der Zwaard
met tekstbijdragen van Helge Bonset, Heleen Wientjes en Dirkje Ebbers
(uit *Nederlands verrijkt*, Perdix/SLO, 2003)

Vormgeving: Ellie Kristens

Productie: SLO

Besteladres

SLO, Stichting Leerplanontwikkeling
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 646

Inhoud

Voorwoord	5
1. Hoogbegaafde leerlingen	7
1.1 Wanneer noemen we een leerling hoogbegaafd?	7
1.2 Enkele mogelijke problemen	10
1.3 Wanneer is een leerling wiskundig begaafd?	11
2. Welke aanpak?	13
2.1 Enkele algemene scenario's	13
2.2 Specifieke mogelijkheden voor wiskunde	14
3. Criteria voor lesmateriaal voor hoogbegaafden	15
3.1 Algemene criteria en hun relevantie voor wiskunde	15
3.2 Een voorbeeld	17
4. Docent als begeleider van begaafde leerlingen	19
4.1 De docent	19
4.2 Relatie tussen docent en leerling	19
4.3 Praktische aspecten van begeleiding	21
4.4 De rol van een docent wiskunde	22
5. Het ontwerpen en begeleiden van een verrijkingstaak voor wiskunde	25
5.1 Het zoeken van onderwerpen	25
5.2 Het vaststellen van doelen	26
5.3 Het formuleren van de leerlingtaken	26
5.4 De uitvoering door de leerling en de daarbij behorende begeleiding	27
5.5 De beoordeling	28
6. Enkele voorbeelden	29
Bronnen	73
Bijlage 1 Eigenschappen van hoogbegaafde leerlingen	75

Voorwoord

Wiskundeopdrachten voor hoogbegaafde leerlingen schudden de meeste wiskundedocenten niet zomaar uit de mouw. Aan welk type opdrachten moet je denken, waar moeten ze aan voldoen, hoe krijg je een behoorlijke verzameling van zulke opdrachten bij elkaar? Met deze handreiking voor docenten van hoogbegaafde leerlingen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs willen we achtergrondinformatie geven, docenten op weg helpen en ideeën aanreiken voor een goed programma voor hoogbegaafde leerlingen in de wiskundeles.

De handreiking is ontstaan binnen het meerjarig project *Hoogbegaafden in de basisvorming* van SLO. Er is door twee auteurs aan gewerkt: de hoofdstukken 1 tot en met 4 zijn voornamelijk geschreven door Jenneke Krüger, de hoofdstukken 5 en 6 zijn voornamelijk geschreven door Pieter van der Zwaard.

Voor de hoofdstukken 1 tot en met 4 is dankbaar gebruik gemaakt van een eerdere publicatie van SLO/Perdix, *Nederlands verrijkt*.

In het eerste hoofdstuk kunt u iets lezen over wat men in het algemeen verstaat onder hoogbegaafdheid, enkele modellen worden kort besproken, evenals enkele vaak genoemde problemen. Tenslotte wordt iets gezegd over specifiek wiskundige begaafdheid.

In het tweede hoofdstuk worden enkele scenario's voor hoogbegaafde leerlingen in het voortgezet onderwijs behandeld en de specifieke mogelijkheden voor wiskunde.

Hoofdstuk 3 behandelt criteria voor lesmateriaal voor hoogbegaafde leerlingen, in het algemeen en voor wiskunde in het bijzonder. Dit hoofdstuk wordt afgesloten met een voorbeeld van een mogelijke opdracht.

Hoofdstuk 4 gaat uitgebreider in op de docent als begeleider van begaafde leerlingen, op praktische aspecten van de begeleiding en op de mogelijke rol van een docent wiskunde.

Hoofdstuk 5 behandelt het ontwerpen en begeleiden van een verrijkingstaak voor wiskunde.

Hoofdstuk 6 geeft enkele uitgewerkte voorbeelden van een verrijkingstaak, die tevens dienen als ondersteuning van de inhoud van hoofdstuk 5. Meer voorbeelden vindt u in de bijlagen.

Het wiskundemateriaal is ontwikkeld met en uitgetoetst door docenten in de onderbouw.

Wij wensen u veel plezier en succes bij het ontwerpen van materiaal voor hoogbegaafde leerlingen en het werken met deze leerlingen.

Jenneke Krüger

Pieter van der Zwaard

1. Hoogbegaafde leerlingen

1.1 Wanneer noemen we een leerling hoogbegaafd?

Over wat hoogbegaafdheid is, bestaan veel verschillende meningen. Verscheidene onderzoekers hebben getracht hoogbegaafdheid te definiëren of in een model te vatten. In deze paragraaf worden drie veelgebruikte modellen kort beschreven, achtereenvolgens dat van Renzulli (1981), van Mönks en Ypenburg (1995) en van Heller en Hany (2000).

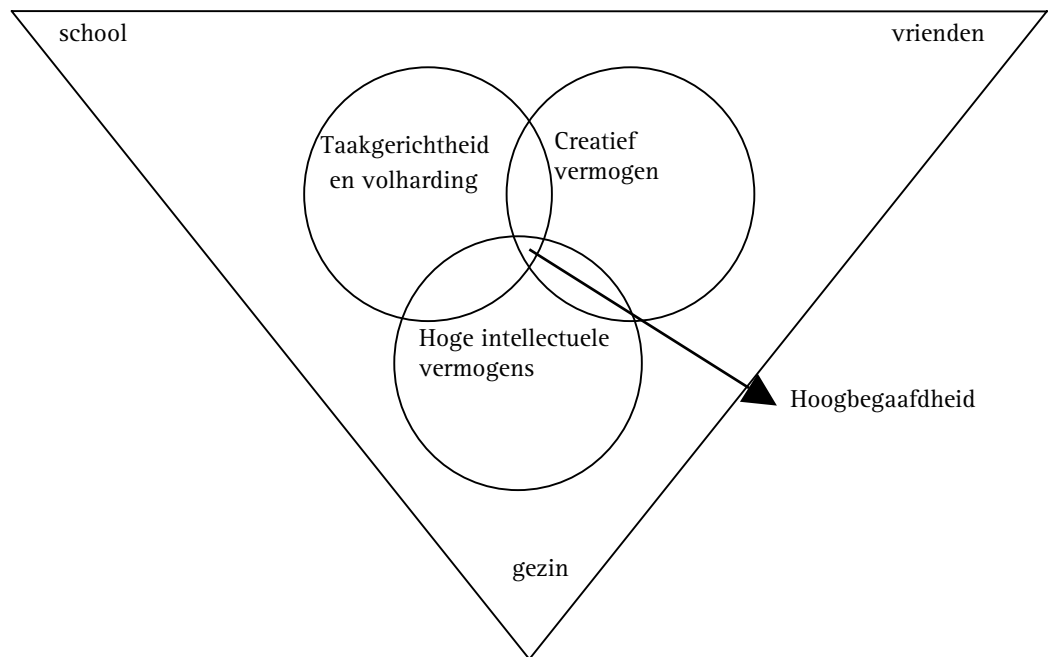
Stel, u hebt een of meer leerlingen in uw groep waarvan u zich afvraagt of er bij hen sprake is van hoogbegaafdheid. Misschien vanwege de opvallend goede prestaties, de interessante opmerkingen die de leerling maakt of juist omdat de prestaties tegenvallen en de ouders het vermoeden uiten dat hun kind een hoogbegaafde onderpresteerder is. Er zijn natuurlijk bureaus die dat kunnen testen, maar wat weet u zelf van dit onderwerp? En als zo'n leerling inderdaad het label hoogbegaafd krijgt, of misschien hoofdzakelijk wiskundig begaafd, wat zijn dan consequenties voor het werken met zo'n leerling? Wanneer spreken we van een begaafde leerling en wanneer van hoogbegaafdheid? Het antwoord op die laatste vraag hangt onder andere af van het gebruikte model.

De meest gebruikte omschrijving van hoogbegaafdheid is van Renzulli (1981). Deze beschrijving gaat ervan uit dat een hoogbegaafd kind moet beschikken over de volgende persoonlijkheidskenmerken:

- *Hoge intelligentie*
Meestal wordt er van hoogbegaafdheid gesproken bij een IQ van 130 of hoger.
- *Taakgerichtheid en motivatie*
Hiermee wordt het doorzettingsvermogen bedoeld om een taak te volbrengen. Taakgerichtheid en motivatie worden bevorderd door stimulering vanuit de directe omgeving, bijvoorbeeld door ouders en leerkrachten. Doorzettingsvermogen, eerezucht of ambitie, interesse en emotionele stabiliteit spelen een grote rol in het tot stand komen van deze houding.
- *Creatief vermogen*
Hiermee wordt het creatief zijn in het oplossen van problemen bedoeld. Creativiteit heeft onder andere te maken met divergent kunnen denken, originaliteit, fantasie, flexibiliteit en openstaan voor nieuwe ideeën.

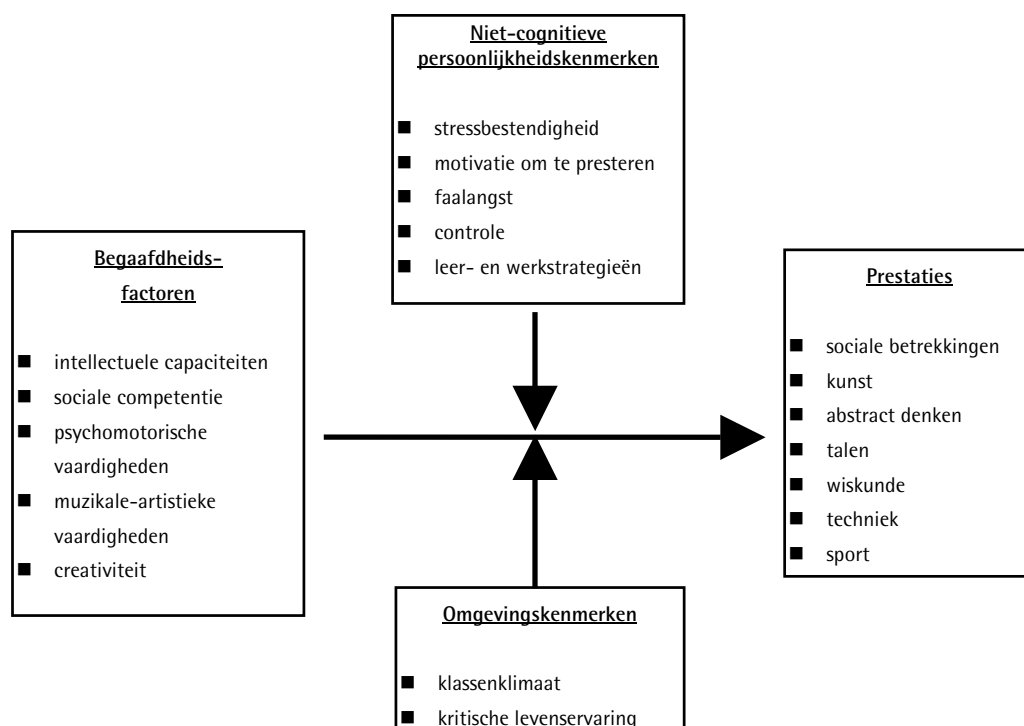
Deze kenmerken hebben betrekking op aanleg en gedrag. Alleen een hoog IQ is niet voldoende om iemand als hoogbegaafd te karakteriseren. Voordeel van dit model is dat het betrekkelijk eenvoudig is. Het beperkt zich tot enkele eigenschappen van een persoon, met name op cognitief gebied.

Mönks en Ypenburg (1995) hebben dit model aangevuld met drie omgevingsfactoren die een positieve invloed uitoefenen op het tot uiting komen van (hoog)begaafdheid. In het onderstaande figuur staat het totale model. School vormt in dit model dus een belangrijke factor.



Heller en Hany (2000) betrekken in het Munich Model of Giftedness and Talent met name aspecten van emotionele intelligentie in hun definitie van hoogbegaafdheid.¹ Ze benadrukken het belang van niet-cognitieve capaciteiten voor het tot uiting komen van hoogbegaafdheid. Dit is een model dat naast een hoog IQ nog vier talenten als begaafdheidsfactoren noemt (zie links in het schema). De opstellers van dit model gaan er van uit dat niet-cognitieve persoonlijkheidskenmerken medebepalend zijn voor zowel het niveau als het terrein waarop hoogbegaafdheid tot uiting komt. Ze onderscheiden verschillende terreinen van hoogbegaafdheid. De vier eerstgenoemde niet-cognitieve kenmerken worden tot het domein van emotionele intelligentie gerekend.

¹ zie [www.cps.nl >vo>onderwijs en begeleiding>landelijk informatiepunt hoogbegaafdheid](http://www.cps.nl/vo/onderwijs%20en%20begeleiding/landelijk_informatiepunt_hoogbegaafdheid)



Renzulli werkt met een bescheiden lijstje: drie kenmerken. Volgt u het model van Heller en Hany dan zult u vermoedelijk meer hoogbegaafden tegenkomen. U ziet dat door verschillende onderzoekers andere factoren in de definitie betrokken worden. Afhankelijk van de omschrijving kunt u dus meer of minder hoogbegaafde leerlingen in uw klas hebben. Bovendien hebben ook hoogbegaafde kinderen allerlei individuele karaktereigenschappen, bijvoorbeeld sociaal voelend of juist niet, muzikaal of niet, geïnteresseerd in wiskunde of juist niet. Men kan dus niet spreken over **de** hoogbegaafde leerling. Toch zijn er wel kenmerken waarover men het redelijk eens is. Een uitgebreid overzicht van kenmerken die hoogbegaafde kinderen vaak vertonen (maar niet noodzakelijk allemaal tegelijk) ziet u in het volgende langere lijstje.

Eigenschappen van hoogbegaafde leerlingen:

1. hoge intelligentie (IQ hoger dan 130)
2. vroege ontwikkeling
3. uitblinken in meerdere gebieden
4. gemakkelijk kunnen leren
5. goed leggen van (causale) verbanden
6. makkelijk kunnen analyseren van problemen
7. het maken van grote denksprongen
8. voorkeur voor abstractie
9. hoge mate van zelfstandigheid
10. brede of juist specifieke interesse/ hoge motivatie/ veel energie
11. creatief/ origineel
12. perfectionistisch
13. apart gevoel voor humor
14. hoge mate van concentratie.

Een toelichting op deze kenmerken vindt u in *bijlage 1*.

Nu zult u niet vaak een leerling treffen die aan alle 14 kenmerken voldoet. Leerlingen die aan een aantal kenmerken voldoen, zonder daar een getal bij te zetten, noemt men hoogbegaafd. Niet alle kenmerken zijn even noodzakelijk: een hoog IQ hoort volgens de meeste onderzoekers in ieder geval tot de kenmerkende eigenschappen, een apart gevoel voor humor niet noodzakelijk.

Maar u hebt ook wel eens te maken met:

- leerlingen die alleen of vooral in wiskunde uitblinken;
- leerlingen die veel in hun mars hebben, maar slechte cijfers halen;
- leerlingen die nauwelijks werken, voldoende halen en lessen regelmatig storen met hun gedrag;
- leerlingen die een hoog IQ hebben, maar nergens in geïnteresseerd lijken en ook niet veel bijzonders presteren;
- leerlingen die een hoog IQ hebben, maar nergens lang hun aandacht bij houden.

Kunnen we in deze gevallen ook van hoogbegaafdheid spreken? Deze lijst kan nog langer worden, vooral met probleemgevallen. Berichtgeving over hoogbegaafden lijkt soms te suggereren dat er alleen problemen zijn. In de volgende paragraaf worden kort enkele vaak genoemde problemen besproken, zonder daarbij te willen suggereren dat hoogbegaafdheid betekent dat er gedragsproblemen moeten ontstaan.

1.2 Enkele mogelijke problemen

Betts & Neihart (1988) beschrijven zes profielen voor hoogbegaafde leerlingen. Ze benadrukken dat dit een theoretisch model is, met als functie een beter begrip voor hoogbegaafde kinderen en met name de verschillen in karakter en ontwikkeling.

Profielen voor hoogbegaafde leerlingen:

- a. de succesvolle leerling;
- b. de uitdagende leerling;
- c. de onderduikende leerling;
- d. de drop-out;
- e. de leerling met leer- of gedragsproblemen;
- f. de zelfstandige leerling.

Het is duidelijk dat de leerlingen die profiel b, d of e hebben voor hun omgeving problematisch gedrag vertonen, of ze nu wel of niet hoogbegaafd zijn. Ook leerlingen met profiel c ondervinden vaak, met name in het voortgezet onderwijs, problemen.

Voor hoogbegaafde leerlingen noemt men nogal eens de volgende problemen die veroorzaakt worden door of te maken hebben met de omgeving.

Onderpresteren

Als een leerling langdurig onder zijn/haar niveau wordt aangesproken, kan dit tot gevolg hebben dat de leerling de motivatie om te leren verliest en zich niet langer inspant bij het uitvoeren van taken, met als gevolg onderpresteren. Onderpresteren is te omschrijven als een verschil tussen de schoolprestaties van de leerling en de betere prestaties die op grond van werkelijke capaciteiten verwacht mogen worden. Het onderwijsaanbod op de meeste scholen maakt dat (hoog)begaafde leerlingen eigenlijk voortdurend onder het eigen niveau worden aangesproken. Wanneer deze situatie lang voortduurt, kan dit ertoe leiden dat de leerlingen uiteindelijk zelfs onder het niveau van de groep gaan presteren. Ook de wens zich te conformeren aan de omgeving kan tot onderpresteren leiden.

Verveling

Doordat een leerling weinig te doen heeft en zich onvoldoende in hoeft te spannen ontstaat in veel gevallen verveling. Deze verveling kan vervolgens weer leiden tot

allerlei vormen van probleemgedrag. Zo'n leerling kan andere leerlingen van hun werk afhouden, vraagt overdreven veel aandacht of doet weinig tot niets meer.

Perfectionisme en faalangst

Dit lijkt nogal eens voor te komen onder (hoog)begaafde leerlingen. Deze leerlingen hebben vaak onvoldoende geleerd hoe het is om fouten te maken. Daardoor kan het voorkomen dat zo'n leerling te hoge eisen aan zichzelf stelt en bepaalde taken weigert, uit angst fouten te maken. Ook kan het gebeuren dat een leerling een taak bewust op een laag niveau uitvoert.

Sociale problemen

Ook in sociaal opzicht kunnen (hoog)begaafde leerlingen in de problemen komen. Doordat ze een wat andere ontwikkeling doormaken en andere interesses hebben dan hun leeftijdgenoten, krijgt zo'n leerling soms moeilijk aansluiting bij leeftijdsgenoten. Hierdoor kan een leerling sociaal geïsoleerd raken. Een deel van de problemen wordt veroorzaakt doordat (hoog)begaafdheid niet wordt opgemerkt door de omgeving of doordat er negatief op wordt gereageerd. Het is waarschijnlijk dat veel problemen voorkomen kunnen worden als we (hoog)begaafdheid bijtijds signaleren en adequaat reageren.

1.3 Wanneer is een leerling wiskundig begaafd?

Wanneer een leerling alleen voor wiskunde uitzonderlijk begaafd is, kunnen we strikt genomen niet van hoogbegaafdheid spreken. Echter, een leerling die wiskundige begaafdheid vertoont zal ook andere kenmerken vertonen. Vaak zal zo'n leerling tenminste ook goed zijn in het leggen van verbanden, het analyseren, abstraheren en het maken van grote denksprongen.

We zijn voor deze handreiking met name geïnteresseerd in leerlingen die begaafd zijn op het gebied van wiskunde. Ongeacht of dat nu hun enige talent is, of dat ze 'slechts' begaafd of hoogbegaafd zijn.

Als specifieke eigenschappen van wiskundig begaafde leerlingen noemen

Wieczerkowski e.a. (Wieczerkowski, W. e.a. 2000):

- interesse in wiskunde hebben;
- oog voor wiskundige structuren en patronen hebben;
- geneigd zijn tot visualisatie van wiskundige problemen;
- bijk geven van convergent en divergent denkvermogen.

Convergent denken betekent in dit geval: feiten kennen en regels kunnen toepassen, accuraat, snel en logisch kunnen werken.

Divergent denken: nieuwe mogelijkheden en oplossingen zien, bekende stof op een nieuwe manier gebruiken.

Stel dat u dergelijke leerlingen in uw groep hebt, hoe gaat u, als docent, daarmee om?

Als docent moet u in de eerste plaats de mogelijkheid bieden aan leerlingen om eventuele wiskundige begaafdheid te uiten. Bijvoorbeeld door een gevarieerd aanbod aan werkvormen, wiskundige opgaven buiten het boek om, een ladderwedstrijd, een wiskundeclub, et cetera. Meer daarover vindt u in hoofdstuk 4 en 5.

Maar waarom zou u vervolgens niet ook denken aan het stimuleren en begeleiden van een gerichte ontwikkeling op wiskundig gebied? Daarvoor is nog meer van belang dat ook ouders en school instemming en ondersteuning bieden. Het vraagt meer individuele begeleiding en goede wiskundige kennis.

2. Welke aanpak?

2.1 Enkele algemene scenario's

In de literatuur worden verschillende aanpakken beschreven en bij elke aanpak zijn scholen te vinden die op die manier werken. Hieronder volgt een korte bespreking van vier verschillende scenario's.

- Versnellen, gevolgd door verbreding of verdieping (een globale benaming)
- Compacten en verrijken (wordt relatief veel toegepast)
- Projectmatig onderwijs (niet alleen voor hoogbegaafden)
- Draaideurmodel (grote keuzevrijheid voor leerling).

Versnellen, gevolgd door verbreding of verdieping

Men gaat er in het algemeen van uit dat hoogbegaafde leerlingen de "basis" lesstof sneller doorwerken, waardoor er tijd vrijkomt voor andere uitdagende activiteiten. Het gaat in principe om activiteiten die niet van invloed zijn op het basisstoftraject van de volgende leerjaren: verbreding, verdieping of verrijking. Versnellen kan gebeuren door een leerling in haar/zijn eigen tempo te laten werken, door delen van de oefenstof over te laten slaan of door, bij wiskunde, de leerling met de opdrachten achter in het hoofdstuk te laten beginnen.

De termen verbreding en verdieping spreken voor zichzelf, onder verrijking wordt meestal verstaan een verdieping wat betreft inhoud, gekoppeld aan uitbreiding van metacognitie (hoe leert men). Bij wiskunde valt het generaliseren van een oplossingsmethode, abstraheren, ook onder verrijking.

Compacten en verrijken

Compacten betekent het indikken van de leerstof door al het voor (hoog)begaafde leerlingen overtollige weg te laten, een speciale vorm van versnellen dus. Onder andere de Stichting Perdix draagt bij aan de verspreiding van deze methode. Dat wat overblijft moet interessant en uitdagend genoeg voor deze leerlingen zijn. De vrijkomende tijd wordt besteed aan verrijkingstaken.

Projectmatig onderwijs

Projectonderwijs is vakdoorbrekend. Het komt voor in combinatie met versnellen of compacten. De vrijkomende tijd wordt door groepen leerlingen besteed aan een project, eventueel te kiezen uit een aantal projecten. Wiskunde kan hier een rol bij spelen.

Draaideurmodel

In dit scenario wordt versnellen gevolgd door verbreding in de vorm van individuele keuzeactiviteiten buiten het verband van de klas. De leerling kiest zelf onderwerp en presentatievorm. Aan de activiteit wordt meestal buiten de lessen gewerkt.

2.2 Specifieke mogelijkheden voor wiskunde

Als men specifiek gericht is op ontwikkeling van wiskundige capaciteit van een leerling zijn projectmatig onderwijs en het draaideurmodel meestal minder geschikt. Een vorm van versnellen, gecombineerd met verrijken, verdient de voorkeur. Welke vorm moet verrijking hebben?

Er zijn veel mogelijkheden bij wiskunde. Hieronder volgt een aantal ideeën.

- Een wiskundig onderwerp als verrijkingsstof nemen, bijvoorbeeld een onderwerp uit getaltheorie, Euclidische meetkunde of geschiedenis van de wiskunde.
- Een serie puzzelachtige opgaven over verschillende onderwerpen. Men spreekt ook wel van creativiteit bevorderende opgaven. Voorbeelden vindt u in hoofdstuk 6. Hierbij moet de docent zelf in het oog houden dat er structuur in het verrijkingsprogramma zit: het moet meer zijn dan alleen leuk bezighouden.
- Olympiadeachtige trainingen. Ook hierbij kunnen veel verschillende wiskunde-onderwerpen aan de orde komen, waarbij de wiskunde behoorlijk pittig is.
- Opdrachten waarbij wiskunde ingebed is in een realistische context en dus ondersteunend is voor de eigenlijke opdracht. Een voorbeeld hiervan is "Architect in spe" (hoofdstuk 6).

Mondiaal gezien kan men met enige goede wil twee richtingen onderscheiden wat betreft wiskundeonderwijs en (hoog)begaafdheid, zoals in de bovengenoemde mogelijkheden al zichtbaar is.

Eén stroming legt de nadruk op de ontwikkeling van wiskundige expertise: discipline, doorzettingsvermogen en het verder komen in 'klassieke' wiskunde staan op de voorgrond. Trainingen voor Olympiades kunnen hiertoe gerekend worden.

Een andere stroming legt meer nadruk op de sociaal-emotionele ontwikkeling van een hoogbegaafde persoonlijkheid. Wiskunde is een van de middelen daartoe, ontwikkeling van wiskundige begaafdheid is niet het voornaamste doel. Dat neemt niet weg dat ook in zo'n omgeving een leerling de wiskundige begaafdheid verder kan ontwikkelen.

In succesrijke ontwikkeling van talent onderscheidt men vaak drie stadia (Subotnik, R.F.; Miserandino & Olszewski-Kubilius, 1996).

- Het eerste stadium kan men de romantische periode noemen: kinderen ontdekken een bepaald onderwerp, bijvoorbeeld wiskunde en worden er als het ware verliefd op. Bekende voorbeelden van onderwerpen buiten wiskunde zijn: het heelal, dinosaurussen, paarden. De meeste kinderen komen niet verder dan zo'n eerste stadium, het gaat vanzelf weer over.
- In het tweede stadium vindt gerichte kennisvorming plaats, blootstelling aan technieken, aan bij dat gebied behorende regels. Het is een stadium waarin wat betreft wiskunde veel geoefend wordt, men doet ervaring op, breidt kennis uit. Het vraagt meer doorzettingsvermogen en discipline. In een groep werken kan hier heel stimulerend zijn, evenals het trainen voor wedstrijden (in een groep) en het meedoen aan wedstrijden. Inzet van ICT biedt ook hier voor een aantal onderwerpen veel mogelijkheden, als hulpmiddel bij explorerend bezig zijn met geschikte software of als makkelijk toegankelijke bron van informatie.
- Tijdens het derde stadium vindt verdieping en specialisatie plaats.
- In school komen leerlingen vaak niet verder dan het eerste stadium. Het vraagt meer langdurige en consequente begeleiding om het tweede stadium te bereiken en daarin verder te gaan. Het vraagt zeker ook wiskundige knowhow van de begeleider(s). Meer daarover in hoofdstuk 4.

3. Criteria voor lesmateriaal voor hoogbegaafden

3.1 Algemene criteria en hun relevantie voor wiskunde

Uit de rijke literatuur over hoogbegaafden valt een lijst op te stellen met algemene kenmerken, (voor alle vakken geldend).

Algemene criteria van lesmateriaal voor hoogbegaafde leerlingen:

1. hoge moeilijkheidsgraad
2. interessante en uitdagende onderwerpen
3. open opdrachten
4. 'echte' problemen
5. abstracte begrippen en generalisaties
6. nieuwe leerstof
7. onderzoekende houding
8. samenhang en verbanden
9. zelfstandigheid/ samenwerken
10. variatie wat betreft informatiebronnen
11. metacognitieve vaardigheden.

Zoals u waarschijnlijk al opgemerkt heeft zijn vele onderdelen van dit lijstje belangrijk voor goed onderwijs voor alle leerlingen.

Een toelichting volgt hieronder, zowel algemeen als enkele opmerkingen specifiek voor wiskunde.

1. Hoge moeilijkheidsgraad

Hoogbegaafde leerlingen kunnen lesstof aan met een hogere moeilijkheidsgraad dan wat voor hun leeftijd gebruikelijk is. Dit biedt gelegenheid tot reflectie en het ontwikkelen van metacognitieve vaardigheden. De taak moet liefst zo moeilijk zijn dat zij deze alleen met begeleiding en door samenwerking met anderen (leerling of docent) tot een goed eind kunnen brengen. Dit vraagt dus inzicht in het niveau van de leerling.

Wiskunde

Afhankelijk van het type opdracht kan de wiskundige moeilijkheidsgraad variëren. Met name bij opdrachten met een niet direct wiskundige context kan het voorkomen dat de moeilijkheidsgraad meer ligt in het op de juiste manier en plaats activeren van wiskundige kennis en in andere vaardigheden die niet direct met wiskunde te maken hebben dan in het wiskundig niveau. Dat is niet per definitie afkeurenswaardig, maar u moet het zich wel realiseren. Wat wilt u voor uw leerling? Een wiskundig hoge moeilijkheidsgraad betekent dat een leerling hard moet nadenken over wiskunde en eventueel extra wiskundige informatie moet krijgen.

2. Interessante en uitdagende onderwerpen

Het is uiteraard belangrijk dat het onderwerp van de opdracht de leerling interesseert, dat geldt in wezen voor alle onderwijs. Bij hoogbegaafde leerlingen denken we dat het lesmateriaal een beroep moet doen op creativiteit, zoals het zoeken van nieuwe oplossingen of gebruik maken van nieuwe situaties.

Wiskunde

Wiskunde biedt natuurlijk volop mogelijkheden ten aanzien van dit criterium.

3. Open opdrachten

Opdrachten zijn bij voorkeur open, dat wil zeggen dat men op meerdere manieren de opdracht tot een goed einde kan brengen. Op deze manier kunnen hoogbegaafde leerlingen verder denken en wordt onderzoek doen gestimuleerd. De leerlingen kunnen op deze manier zelf ideeën over de oplossing ontwikkelen en dit leidt meestal tot onverwachte vondsten en oplossingen.

Wiskunde

Dit kan betekenen dat meerdere antwoorden als oplossing mogelijk zijn; het kan ook zijn dat er maar één correct antwoord is, dat op verschillende manieren gevonden kan worden. Laat uw leerlingen uitleggen hoe ze tot hun oplossing komen. Uitleg kan geschreven, mondeling of via een tekstverwerker gegeven worden.

4. Echte problemen

Hoogbegaafde leerlingen hebben vaak sterke voorkeur voor leerstof die aansluit bij de alledaagse werkelijkheid of bij de belangstelling van de leerling. De leerstof moet zich richten op reële problemen.

Wiskunde

Dit kan voor wiskunde best een realistisch wiskundeprobleem zijn. Realistisch kan men hier in de meest brede zin opvatten. Een leerling moet met een serieus onderwerp aan de gang, dat hoeft niet een praktisch nut in het dagelijks leven te hebben.

5. Abstracte begrippen en generalisaties

De leerinhouden dienen gericht te zijn op abstracte begrippen en generalisaties. Concrete en feitelijke gegevens, zoals voorbeelden en tekeningen, kunnen worden weggelaten.

Wiskunde

Neem dit niet al te letterlijk. Bij veel wiskundige problemen maakt een wiskundig begaafd persoon graag krabbels, schetsjes, probeersels. Bekijk wat de leerling aan concrete gegevens nodig heeft van u en moedig haar/hem aan veel te proberen.

6. Nieuwe leerstof

Hoogbegaafde leerlingen zijn leergierig en snel in het opnemen van nieuwe kennis. Meer van hetzelfde aanbieden kan demotiverend werken voor deze leerlingen. Dus herhaling, gericht op memoriseren en inoefenen, is veelal van weinig belang. Het is belangrijk dat het onderwijsprogramma verrijkend is, en dus moet het gaan om nieuwe leerstof

Wiskunde

Ook dit criterium mag voor wiskunde geen enkel probleem zijn. 'Nieuw' betekent niet noodzakelijk een nieuw gebied. Het kan heel goed inhouden uitdiepen van een bekend wiskundig onderwerp. Denk bijvoorbeeld aan driehoeken in vlakke meetkunde.

7. Onderzoekende houding

Hoogbegaafde leerlingen vinden opdrachten die mogelijkheid geven tot nader onderzoek uitdagend.

Wiskunde

Denk ook voor wiskunde eens aan de mogelijkheden van internet om leerlingen meer informatie op te laten zoeken dan in school aanwezig is.

8. Samenhang en verbanden

Hoogbegaafde leerlingen zien sneller overeenkomsten tussen verschillende vakgebieden. Zij zullen kennis van het ene vakgebied gemakkelijk toepassen in een ander vakgebied. Bovendien zijn ze gemotiveerd om grenzen te overschrijden; daarom moeten de leerstof en de wijze waarop die aangeboden wordt mede gericht zijn op integratie van kennis tussen kennisdomeinen, met andere woorden de mogelijkheid moet worden geboden tot vakkenintegratie. Daarom zijn vakoverstijgende opdrachten vaak een goede aanpak.

Wiskunde

Een pleidooi voor docenten van verschillende vakgebieden om samen te werken in het bedenken en organiseren van opdrachten. Een redelijk makkelijk te realiseren vakoverschrijdende activiteit is een wiskundig onderwerp in het Engels te laten onderzoeken en presenteren. Zowel boeken als tijdschriften als internetsites geven veel mogelijkheden. Een voorbeeld van de combinatie wiskunde/aardrijkskunde is “Columbus ontdekt Amerika?” (hoofdstuk 6).

9. Zelfstandigheid/ samenwerken

Hoogbegaafde leerlingen geven er de voorkeur aan om zelf vorm en richting te geven aan het leerproces. Maar de leerlingen beleven soms ook veel plezier aan het samenwerken. Bovendien worden er bij samenwerken belangrijke vaardigheden ontwikkeld, zoals leren plannen en discussiëren.

Wiskunde

Ongetwijfeld is ook bij wiskunde samenwerken een goede zaak, bijvoorbeeld omdat leerlingen elkaar kunnen aanvullen, stimuleren of op nieuwe ideeën kunnen brengen. Voorwaarde is wel dat bij verrijkingsopdrachten die wiskundig pittig zijn, er samenwerking is met leerlingen van een vergelijkbaar wiskundig niveau.

10. Variatie informatiebronnen

Het is belangrijk oogbegaafde leerlingen voldoende informatiebronnen aan te bieden die ze kunnen raadplegen in hun zoektocht naar nieuwe kennis. Verder dient hierbij het selecteren en gebruiken van geschikte gespecialiseerde informatiebronnen, inclusief het gebruik van zoekmachines, te worden aangeleerd en te worden aangemoedigd.

Wiskunde

Naast het gebruik van internet kunt u denken aan oude schoolboekjes, Pythagoras en andere tijdschriften, boeken over speciale onderwerpen, zoals de boekjes van Vierkant of zebraboekjes voor leerlingen die al verder zijn.

11. Metacognitieve vaardigheden

Een belangrijk onderdeel van de opdrachten voor hoogbegaafde leerlingen is het onderdeel metacognitieve vaardigheden; dus onder andere het reflecteren op het eigen handelen. Deze vaardigheden bestaan uit verscheidene onderdelen: *oriëntatie*, *planning* en *reflectie*.

Wiskunde

U kunt deze vaardigheden bij puur wiskundige opdrachten stimuleren door de leerling te laten uitleggen hoe de oplossing gevonden is, een goed uitgangspunt voor reflectie. Bij meer projectachtige opdrachten is een planning zeker een goed idee. En de vraag: “hoe denk je dit probleem op te kunnen lossen?” is een goede start voor oriëntatie voor alle opdrachten, met name ook de puur wiskundige.

3.2 Een voorbeeld

Een voorbeeld van een onderwerp dat aan veel van bovenstaande criteria kan voldoen is Driehoeksgetallen. Een inleiding kan een artikel uit Pythagoras² zijn, gevolgd door een puzzelachtige opgave. Een voorbeeld is de volgende puzzel uit New Scientist (bewerkt)³.

² b.v. jaargang 36, nr. 5, zie www.pythagoras.nu

³ New Scientist 31 juli 2004, p.49

Driehoeksgetallen

Driehoeksgetallen kunnen berekend worden met de formule $\frac{1}{2}n(n+1)$. In de volgende Portugese telwoorden staan verschillende letters voor verschillende cijfers. UM, TRES, SEIS en DEZ zijn allemaal driehoeksgetallen. Geen getal begint met 0. Welke getallen staan hier?

Zodra leerlingen weten wat driehoeksgetallen zijn, kunnen ze hiermee aan de slag. Onderzoeken welke cijfers op het eind mogelijk zijn, welke driehoeksgetallen van 4 cijfers het eerste en laatste cijfer gelijk hebben, welke driehoeksgetallen van twee verschillende cijfers er zijn, enz. Uitstekend geschikt voor werk in een kleine groep, volop gelegenheid voor discussie en taakverdeling. Een rekenmachine kan voor onderzoek gebruikt worden. Afhankelijk van het niveau van de leerling kan een docent hints geven, leidende vragen stellen, aanmoedigen om zoveel mogelijk eigenschappen van driehoeksgetallen te vinden, vervolgens op internet laten zoeken om uit te vinden welke eigenschappen er nog meer gevonden zijn, laten zoeken op 'triangular numbers' om gebruik van Engels er bij te betrekken. Er zitten veel mogelijkheden in zo'n puzzel over een wiskundig onderwerp.

Aan welke van het eerder genoemde 11-tal criteria kan met deze opdracht voldaan worden?

4. Docent als begeleider van begaafde leerlingen

De tekst van dit hoofdstuk is een bewerking van hoofdstuk 4 uit *Nederlands verrijkt* (2003), hoofdstuk 4, van de hand van Heleen Wientjes. Naast de bewerking is het hoofdstuk uitgebreid aspecten die voor docenten wiskunde van belang zijn.

4.1 De docent

Ook het min of meer zelfstandig werken of leren van een (hoog)begaafde leerling vereist met enige regelmaat het oog van de meester. De docent zet de eigen expertise in met betrekking tot onder andere:

- de inhoud van het vak en de vakgebonden methode van werken;
- de meer algemene werkstrategieën;
- reflectie op het werk op zo'n manier dat de schijnbaar taakgebonden en incidentele strategie wordt vertaald naar een meer algemeen toepasbare strategie;
- begeleiden van en reflectie op het proces van samenwerken.

En dan is de docent ook nog degene die regelmatig de voortgang van het werk met de leerlingen bekijkt, hen zo nodig adviseert bij hobbels en kuilen in de weg, ziet wat ze presteren en naar behoefte hen van harte aanvuurt of oprecht complimenteert. Want ook voor begaafde leerlingen is het belangrijk om gezien, gewaardeerd en gestimuleerd te worden in wie ze zijn, wat ze kunnen én hoe ze aan het leren en ontwikkelen zijn.

4.2 Relatie tussen docent en leerling

Een erkend jong talent op het gebied van kunst of sport krijgt begeleiding van een leermeester of coach. even vanzelfsprekend moet de begeleiding zijn van een op intellectueel gebied jong talent. De school is een van de plekken waar deze leerling leermeesters en coaches kan vinden.

Het idee dat deze leerlingen zichzelf wel redden is de laatste jaren aan het verdwijnen, mede onder invloed van praktijkervaringen. Er komt – in ieder geval op papier – meer aandacht voor maatwerk voor individuele leerlingen. Duidelijk is dat het onderwijs ook deze leerlingen, die niet gebaat zijn bij "normale" lessen, iets wil en kan bieden. Een docent heeft ook hen iets te leren.

Er is niet één recept te geven dat altijd werkt, daarvoor zijn er te veel factoren die kunnen variëren. Het aantal (hoog)begaafde leerlingen, de relatie met de groep, de schoolcultuur, de organisatie, de aard van de leerling, het type en de doelstellingen van de verrijkingstaak en de aard en onderwijsstijl van de docent, om er een aantal te noemen.

Op een aantal van deze factoren gaan we nader in.

De leerling

In hoofdstuk 1 is een aantal kenmerken genoemd van hoogbegaafde leerlingen. Duidelijk is dat deze leerlingen vaak op een ongewone manier informatie opnemen en verwerken. In de begeleiding van de leerlingen is het belangrijk dat docenten daar rekening mee houden.

Tips

- Geef een leerling de kans om verbanden te zien en te expliciteren – vraag haar/hem ernaar.
- Geef een leerling de kans in abstracties te denken, maar laat haar/hem vervolgens ook concretiseren.
- Een opmerking die een docent helemaal niet kan plaatsen, zou te maken kunnen hebben met de grote gedachtesprongen van een hoogbegaafde; vraag hoe een leerling aan haar/zijn antwoord komt.
- Probeer niet de leerling te dwingen tot een manier van denken die de hare/zijne niet is.

Met enige regelmaat komt u bij de begeleiding voor dilemma's te staan.

Een eerste voorbeeld van een dilemma is de constatering dat er lacunes zijn in de kennis van (hoog)begaafde leerlingen – iets wat met enige regelmaat voorkomt. De docent merkt dat de leerling bepaalde zaken niet kent of kan die andere leerlingen wel kennen of kunnen. De neiging is groot om ook van een (hoog)begaafde leerling te verlangen dat zij/hij zich deze kennis eigen maakt voordat een leerling "verder mag". Het dilemma ligt in de vraag of die kennis of vaardigheid werkelijk essentieel is voor het bereiken van het vakinhoudelijk doel. En als dat zo is, op welke manier die kennis (vaardigheid) verworven kan worden. Is er een compromis te vinden waarmee zowel u als de leerling tevreden bent?

Dit geeft overigens een tweede voorbeeld van een dilemma. De manier waarop mensen leren is niet voor iedereen dezelfde, en met name een (hoog)begaafde leerling heeft vaak een letterlijk andere kijk op zaken dan we gewend zijn. Zij/hij denkt meer in grote gehelen, ziet een totaalbeeld voor zich, ziet verbanden (en daarmee ook problemen) waar anderen die niet zien. Ook deze leerlingen verwerven kennis vooral in zinvolle verbanden. Een verrijkingstaak kan een situatie zijn waarbinnen een (hoog)begaafde leerling de kans krijgt de eigen manier van werken en leren uit te leven en zich daardoor de noodzakelijk geachte kennis en vaardigheden te verwerven. Een derde voorbeeld van een dilemma heeft te maken met het gegeven dat elk (hoog)begaafd kind, net als alle mensen, ook minder sterke punten heeft. Leg je als school, als docent, de nadruk op het opvijzelen van de zwakkere punten of geef je een leerling de kans haar/zijn sterke kanten uit te buiten en te versterken?

Het stellen van deze vraag in een concreet geval en erover met de leerlingen in discussie gaan, is een voor alle partijen leerzame ervaring.

Tips

- Vraag je af wat essentieel is voor het vak en de doelstellingen ervan.
- Geef een begaafde leerling de ruimte om de bij haar/hem passende middelen te gebruiken. Zoek samen met de leerling naar passende wegen.
- Bespreek met de leerlingen de keuze tussen doen wat je al kunt of oefenen in wat je nog niet (goed) kunt, in relatie tot de eisen die leerling en docent stellen aan het eindproduct van een verrijkingstaak.

Wat wil je bereiken met de taak?

In de begeleiding kiest een docent telkens om op bepaalde zaken wel of juist niet de aandacht te vestigen, om wel of niet iets ter discussie te stellen, om wel of niet iets door leerlingen zelf te laten uitzoeken of vaststellen. Die keuze wordt bepaald door

wat docent en leerlingen willen bereiken in een taak: de doelstellingen op cognitief, metacognitief en affectief gebied.

De docent moet goed voor ogen hebben wat de doelstellingen van een taak zijn, de bepaling van die doelstellingen kan eventueel samen met een leerling plaatsvinden.

Tips

- Geef leerlingen inzicht in de verschillende doelen en recht van spreken bij het bepalen ervan.
- Bedenk een 'leerlingvolgsysteem' en geef de leerling zelf (een deel van) de verantwoordelijkheid om dat bij te houden.

Begeleiding en het niveau van de taakuitvoering: de leraar als onruststoker

Een verrijkingstaak nodigt uit tot verwerking op een hoog niveau: probleemoplossen, het toepassen en daardoor transformeren van kennis en genereren van nieuwe kennis. Soms is er ook sprake van "problem finding", als de leerling zelf komt met de vraag "hoe komt het eigenlijk, kunnen we dat eens uitzoeken?". Maar uitnodigen tot is geen garantie dat het ook gebeurt, dat iedere leerling leert van het uitvoeren van de taak. Het is onmogelijk om het gewenste niveau van de taakuitvoering van tevoren exact vast te leggen. Tijdens de uitvoering wordt soms pas duidelijk of een leerling aan de grenzen van haar of zijn kunnen werkt. En dat is nu precies het punt waarop de begeleiding van de docent van cruciaal belang is. De docent is degene die constateert of de leerlingen dat wat ze doen lastig of moeilijk vinden – en als dat niet zo is dan is de docent degene die zondig ervoor zorgt dat ze het lastig en moeilijk gáán vinden. Door vragen als "Waarom?", "Waarvoor?", "Hoe zou dat komen?". Door suggesties als "Kijk daar en daar eens naar.", "Ga eens na hoe het zit in een andere situatie." Dat kan een leerling frustreren: zij/hij wordt boos, geprikkeld, onrustig. Maar de docent manifesteert door dit gedrag ook dat er vertrouwen is in de mogelijkheden, de capaciteiten van zo'n leerling. Dat kan geruststellend werken. Er is uitdaging voor de leerling en vertrouwen.

4.3 Praktische aspecten van begeleiding

Organisatie in de tijd

Het is voor de leerlingen prettiger en voor het bereiken van de doelen efficiënter als leerlingen kunnen werken in blokken van meer dan een lesuur. Het kost tijd en concentratie om je weer in te stellen op de taak, informatie op te zoeken, te kijken of er ruimte, materiaal, een computer beschikbaar is. Het is jammer als dat iedere 45 minuten weer moet. Dit is uiteraard het gemakkelijkst te verwezenlijken in klassen met uitsluitend (hoog)begaafde leerlingen, maar probeer toch waar mogelijk blokuren te gebruiken voor het werken aan de verrijkingstaak. Scholen worden zich steeds meer bewust van de vrijheid die ze hebben om het onderwijs zelf in te richten, dat vergroot het aantal mogelijkheden om ook voor (hoog)begaafde leerlingen ruimte te scheppen.

De doelstellingen van de taak als structuur van de begeleiding

Het is belangrijk dat de docent duidelijk heeft waar het bij een bepaalde verrijkingstaak om gaat: de verschillende doelen op cognitief, metacognitief en affectief gebied. Sommige docenten vinden het handig om voor zichzelf een schema te maken waarin ze die doelen uitzetten, en samen met de leerlingen steeds aangeven hoever de leerlingen zijn.

Wat betreft de doelstellingen op metacognitief gebied is het belangrijk regelmatig boven water te krijgen wat de leerlingen op welke manier gedaan hebben.

Bewustwording van verschillende manieren van werken, van verschillende mogelijkheden voor probleemaanpak, is een belangrijke voorwaarde voor zelfstandig en zelfverantwoordelijk leren.

De beoordeling van een taak is een punt dat aandacht verdient en waar liefst schoolbreed goede afspraken over gemaakt moeten worden. Belangrijk uitgangspunt daarbij is dat duidelijk wordt wat de eigen voortgang van een leerling is en hoe ver deze leerling gevorderd is met betrekking tot de doelen die in de taak gesteld zijn. Dat kan bij een verrijkingstaak in ieder geval op twee momenten plaatsvinden:

1. De presentatie van het werk aan de klas, soms aan de hele school (via een tentoonstelling of een website), soms aan de ouders. Dat is erkenning en leerervaring tegelijk. Bij de presentatie van het werk aan de klas is het ook een manier voor leerlingen om bij elkaars werk betrokken te blijven.
2. De evaluatie met de docent aan het eind van het traject. Het moment waarop werk, leerling en voortgang zichtbaar worden.

Belangrijk is dat in een eindoordeel alle doelstellingen meegenomen worden en dat de waardering van groepsgenoten en andere medeleerlingen (op basis van de presentatie) onderdeel ervan kunnen zijn.

Of men een cijfer gebruikt om dat te formaliseren, is een keuze die de school moet maken.

Een andere mogelijkheid is om een waardering in woorden te maken van de verschillende onderdelen van de taak en deze waardering als inlegvel bij een cijferrapport te sluiten. Wie over de jaren heen als leerling en/of als school de voortgang naar zelfverantwoordelijk leren wil volgen, kan denken aan dossiervorming, een (al dan niet digitaal) portfolio.

Bijzondere aandacht is nog nodig voor de situatie dat maar een klein aantal leerlingen binnen een heterogeen samengestelde klas werkt aan een verrijkingstaak. De sfeer in de klas en op school bepaalt mee hoe leerlingen het werken aan de verrijkingstaak zien. Ze kunnen het zien als "extra", want "voor het gewone werk hebben we toch al goeie cijfers gehaald". Als het daarentegen normaal gevonden wordt dat op school iedereen iets te leren heeft, dan is het dus ook normaal dat de ene leerling een andere taak volbrengt dan de andere. Werken met verrijkingstaken kan bijdragen aan het leren accepteren van zulke verschillen en het toegroeien naar een situatie waarin gedifferentieerd onderwijs vanzelfsprekend is.

Tips

- Enthousiasme is een noodzakelijke maar niet voldoende voorwaarde. Hoe blijf je als docent enthousiast?
- Blijf niet in je eentje voortmodderen; zoek gelijkgestemden, ook buiten je eigen school (mailinglists, websites).
- Zorg dat je management je ideeën en werk ondersteunt en faciliteert.
- Maak gebruik van bestaand materiaal als basis, je kunt dat uitbreiden met eigen werk.

4.4 De rol van een docent wiskunde

In het denken over en onderzoek naar wiskundige begaafdheid is er veel aandacht voor het aspect *creativiteit* (zie hoofdstuk 1). Wiskundige creativiteit wordt op verschillende manieren omschreven. Twee omschrijvingen die een handvat bieden voor docenten zijn de volgende.

Creative thinking is a cognitive activity that results in one or more novel solutions for a problem (in: Krüger, J., april 2003).

Wiskundige kennis op een nieuwe manier gebruiken is een uiting van creativiteit en dus van wiskundige begaafdheid (in: Krüger, J., december 2003).

Beide uitspraken gaan over het onderkennen van wiskundige begaafdheid. Dit heeft slechts zin als vervolgens een leerling gestimuleerd wordt om zich verder wiskundig te ontwikkelen.

Elke goede wiskunde docent geeft leerlingen de kans om wiskundige creativiteit te tonen en te ontwikkelen. Dat geldt evenzeer voor het ontwikkelen van analytisch denken en het leggen van verbanden. Dat geldt niet alleen voor docenten van hoogbegaafde leerlingen. Dat houdt onder andere in het stellen van vragen die leerlingen in hun denken verder kunnen helpen en het geven van voldoende informatie op het juiste ogenblik. Die informatie kan bestaan uit aanwijzingen hoe een leerling verder kan komen, uit aanwijzingen over fouten in het proces of het kan inhoudelijke informatie zijn, nieuwe leerstof buiten het boek bijvoorbeeld.

Een docent moet in staat zijn om verschijnselen, anders dan hoge cijfers, die wijzen op wiskundige begaafdheid op te merken en daar adequaat mee om te gaan. Dit ongeacht het gedrag van de leerling: rustig of druk, onopvallend of een permanente aandachtvrager, een model leerling of lastig. Dat betekent bijvoorbeeld het opmerken en waarderen van ongewone antwoorden, van een andere manier van redeneren of zich afvragen waarom een leerling geen berekeningen opschrijft en bij zo'n leerling informeren naar het waarom.

Een docent moet geïnteresseerd zijn in en een behoorlijke kennis hebben van wiskunde. Bovendien moet een docent die kennis verder willen uitbouwen.

Een docent moet op de hoogte zijn en blijven van begeleidingsmogelijkheden voor hoogbegaafde leerlingen, zonodig buitenschools.

Een docent moet gerechtvaardigd zelfvertrouwen in leerlingen stimuleren. Dat betekent aanmoedigen, prijzen, uitdagen en ruimte geven, alles op zijn tijd.

Een docent moet voldoende wiskundig materiaal beschikbaar hebben om leerlingen verder te kunnen helpen.

Tips

- Leerlingen die geen uitwerkingen opschrijven zijn of lui of bijzonder slim of allebei; als docent moet je je steeds afvragen wat geldt voor jouw leerling(en) en hoe je tot je conclusie komt.
- Laat leerlingen hun redeneringen op hun eigen manier opschrijven, dat geeft veel informatie.
- Zorg voor een variatie aan werkwijzen en onderwerpen: raadsels, logische problemen, eenvoudige bewijzen, webquests, meetkundige problemen, getaltheorie. Gebruik van computers spreekt veel kinderen aan, maar niet alle.
- Rekenmachines en grafische rekenmachines bieden eigen mogelijkheden voor onderzoekachtige activiteiten, ook daar kun je gebruik van maken.
- Via internet is veel te vinden. Voorbeelden: het begeleiden van een wiskundeclub kan ondersteund worden door Vierkant; Pythagoras biedt artikeltjes over wiskunde en problemen voor vele leeftijden, wiskundeleren.nl is een vraagbaak voor leerlingen.

5. Het ontwerpen en begeleiden van een verrijkingstaak voor wiskunde

Bij het bedenken van opdrachten voor leerlingen die meer aankunnen dan het gewone boek komen de volgende aspecten aan de orde:

1. het zoeken van geschikte onderwerpen;
2. vaststellen van leerdoelen;
3. het formuleren van de leerling-taken;
4. de uitvoering door de leerling en de daarbij behorende begeleiding;
5. de beoordeling.

Hieronder volgt een beschrijving van die aspecten, die daarna worden geïllustreerd aan de hand van een aantal voorbeelden.

Enkele kanttekeningen vooraf.

De genoemde aspecten geven niet altijd een noodzakelijke volgorde waarin een opdracht wordt ontworpen, het is geen kookboekrecept. Zo kunnen ideeën over de uitvoering de formulering van de taak zeker beïnvloeden. Wel zal een ontwerp voor een opdracht meestal met het kiezen van een geschikt geacht onderwerp beginnen.

Veel is te leren door te kijken naar de opbouw en de details van bestaande ontwerpen. Een ervaring die te versterken is door zo'n opdracht door enkele geïnteresseerde leerlingen uit te laten voeren. Ook om deze reden is een aantal voorbeelden toegevoegd.

5.1 Het zoeken van onderwerpen

In boeken, op websites en in tijdschriften zijn vele ideeën te vinden die de basis kunnen vormen voor een opdracht die hoogbegaafde leerlingen aanspreekt en hen in staat stelt er ook echt iets van te leren.

Wie wil de leerlingen die dat aankunnen niet graag aan de slag hebben met de constructies van Escher, met fractalstructuren, met logische puzzels, of met eigenschappen van getallen. Maar ook allerlei andere situaties leveren mogelijkheden om begaafde leerlingen aan de slag te laten gaan op een wijze waar zij zich lekker bij voelen en veel van kunnen leren. Denk bij voorbeeld aan een ontwerpopdracht als architect, het kiezen van een verwarmingssysteem, het ontwerpen van een sierbestrating, of het vergelijken van modellen voor het bepalen van je gezonde gewicht. En dit natuurlijk steeds op basis van ontwerppeisen die het gebruik van wiskunde impliceren.

De site www.slo.nl/hoogbegaafd levert een groot aantal bronnen voor het zoeken naar onderwerpen. Waarschijnlijk zal uw eigen boekenplank ook het nodige aan bronnen bevatten, misschien zelfs wel zonder dat u dat beseft. Verder levert surfen op het internet soms heel mooie onderwerpen op. De site <http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/> over symmetriegroepen geïllustreerd met 'wallpapers' (behang) is hiervan een voorbeeld.

5.2 Het vaststellen van doelen

Verrijkingstaken zijn beslist niet alleen bedoeld om de betere leerling aan het werk te houden. De uitvoering van de taak zal altijd een achterliggend doel moeten dienen, bij de leerling bekend moeten zijn en een rol spelen in de beoordeling (zie ook §4.2 en §4.3).

Bij het formuleren van doelen hoort overigens een directe lijn naar de beoordeling. Als er eisen aan een ontwerp of een vooronderzoek worden gesteld, dan zal in de beoordeling bepaald moeten worden in hoeverre aan die eisen is voldaan.

Een goede strategie is bij het vaststellen van de doelen niet alleen uit te gaan van de opdracht, maar zeker ook de gewenste ontwikkeling van de betreffende leerling een rol te laten spelen. Als een leerling moeite heeft om zijn resultaten goed op een rijtje te zetten en over te brengen, kan een van de doelen van een verrijkingsopdracht zijn het maken van een betere eindpresentatie dan de vorige keer.

Andere, al eerder vastgestelde doelen van de opdracht, zoals het maken van een ontwerp dat een oplossing geeft voor de achterliggende probleemsituatie, blijven natuurlijk onverminderd staan.

5.3 Het formuleren van de leerlingtaken

Met een onderwerp ben je er natuurlijk niet. De feitelijke formulering en de eisen omtrent de uitvoering zullen voor een belangrijk deel bepalen in hoeverre de opdracht inderdaad een wiskundeopdracht mag worden genoemd, welke diepgang er wordt geëist, welke mogelijkheden de leerling heeft om een eigen invulling aan het geheel te geven, et cetera.

Zonder de pretentie te hebben daarmee volledig te zijn beschrijven wij hier twee typen opdrachten.

In *open ontwerpopdrachten* wordt leerlingen gevraagd een ontwerpvraag te beantwoorden binnen een levensechte situatie. Vooraf worden wel enkele kaders gesteld maar er is veel ruimte voor eigen inbreng van de leerling. Een voorbeeld daarvan is de opdracht 'Architect in spe' (hoofdstuk 6).

In een *wiskundig getinte opdracht* gaat de leerling aan de slag met een opdracht die past binnen een vooraf vastgestelde wiskundige dan wel logische structuur. Wij rekenen het voorbeeld 'Fractal Pop Ups' (hoofdstuk 6) tot dit type.

Open ontwerpopdrachten binnen een context kunnen uitstekend de basis vormen voor een opdracht voor leerlingen die meer aankunnen. Vakoverstijgende aspecten en het samenwerken met andere leerlingen kunnen hierbij expliciet aandacht krijgen. Bij zo'n open ontwerp opdracht wordt het creëren van de wiskundige diepgang deels overgelaten aan de leerling. De wiskunde functioneert hierbij vooral als hulpmiddel bij het maken van het ontwerp.

In 'Architect in spe' moet de leerling een ontwerp voor een gebouw maken. Pas na een stevig onderzoek van de voorwaarden waaronder kan worden gebouwd, kan een ontwerp worden geleverd dat aan realistische eisen voldoet, bij voorbeeld de arbo-eisen. Die eisen zijn in beginsel niet wiskundig van karakter, maar moeten wel worden vertaald naar oppervlakte, indeling, inhoud, et cetera van de kantoorruimtes. Een bruikbare 'truc' om een ontwerpopdracht meer diepgang te geven is om niet alleen te vragen naar een ontwerp. Geef een leerling de rol van beroepsbeoefenaar die het ontwerp in opdracht van een derde moet maken. De leerling moet zich dan verdiepen in die beroepsrol en moet bedenken hoe de oplossing aan de klant moet worden gepresenteerd, eventueel met enkele alternatieven.

Bij bestudering van een meer wiskundig getint onderwerp ontstaat de diepgang vanuit de wiskunde zelf. Goede taken bedenken, die ook de benodigde vrijheid van denken toestaan is echter niet gemakkelijk. Het gaat om taken die wiskundig denken en handelen uitlokken en dat eist een goed evenwicht tussen sturing in de opdracht en ruimte voor eigen keuzen van de leerling. Bij het zoeken naar taken die hieraan voldoen is het verstandig om uw wiskundecollega's te vragen mee te denken. 'Fractal Pop Ups' is een voorbeeld van een dergelijke opdracht.

De opsplitsing in open ontwerp opdrachten en meer wiskundig getinte opdrachten is geen absolute. De verdeling is vooral handig om enerzijds eisen aan het proces bij open opdrachten en anderzijds eisen aan wiskundige kwaliteit uit elkaar te leggen.

5.4 De uitvoering door de leerling en de daarbij behorende begeleiding

Bij open ontwerp opdrachten is een goede planning (wat ga ik allemaal doen, hoe doe ik het, wanneer doe ik het en met wie) een essentieel onderdeel van de opdracht. De voorbeelden 'Architect in spe' en 'Vervoer en transport' (hoofdstuk 6) geven aan hoe de bijbehorende instructie er uit kan zien.

Begaafde leerlingen kunnen vaak juist in planning en aanpak nog een heleboel bijleren. Essentieel is dan wel dat zij merken dat het uitvoeren van de opdracht beter gaat en de kwaliteit van het eindproduct verbetert als zij een goede aanpak en planning hanteren.

Naarmate leerlingen vaker dergelijke opdrachten hebben gemaakt kan de instructie rond de aanpak en de planning worden verminderd. De eisen die de docent aan de beschrijving en de uitvoering van de aanpak en de planning stelt zullen echter juist overeind moeten blijven.

Bij wiskundig getinte opdrachten wordt juist de inhoudelijke verdieping interessant. Neem nooit genoegen met alleen een oplossing. Bij wiskundige denken hoort altijd een manier van opschrijven die de oplossing van het probleem helder maakt voor anderen en waaraan je kunt zien hoe je aan die oplossing bent gekomen. Waar mogelijk is een generalisatie een standaard onderdeel van zo'n opdracht. Het voorbeeld 'De kool en de geit sparen' (hoofdstuk 6) over de wolf, de geit en de kool die door een veerman moeten worden overgezet, geeft aan hoe een notatie en een generalisatie gerealiseerd kunnen worden.

Het vooraf programmeren van enkele overlegmomenten met de leerling is onontbeerlijk, onafhankelijk van het type opdracht. Enkele onontbeerlijke overlegmomenten noemen wij hieronder.

Bij de open ontwerp opdrachten zal een eerste eis zijn, het maken van een planning. Het *eerste overlegmoment* is het bespreken van die planning. Al is het alleen al omdat bij het woord plannen veel, ook begaafde leerlingen eerder denken aan wanneer programmeer ik het uitvoeren van de opdracht in mijn lesrooster, dan aan het programmeren van de nodige activiteiten. De details van dit overleg zullen vooral gaan over de vraag of de planning reëel in de tijd is en of die redelijk dekt wat er gedaan moet worden.

Een *tweede overlegmoment* is als de leerling(en) een en ander aan informatie heeft ingewonnen, die nodig is voor het realiseren van de opdracht. Een eerste ontwerpschets is dan ook nuttig (in de planning opnemen!), dan kan namelijk getoetst worden of er voldoende informatie is om het ontwerp te maken.

Een *derde overlegmoment* kan zijn als het ontwerp (bijna) klaar is en de presentatie moet worden voorbereid. De vraag of het ontwerp voldoet, eisen aan de presentatie en eventuele alternatieven voor het ontwerp zijn hier aan de orde.

Wiskundige opdrachten starten vaak met een specifieke vraagstelling. Bij voorbeeld in de vorm van: vind een oplossing voor dit probleem, al dan niet in de vorm van een puzzel.

Een goed *eerste overlegmoment* is dan als de leerling een aanpak denkt te hebben. Bespreking hiervan en eventuele suggesties voor een alternatieve aanpak kunnen onderwerp van bespreking zijn.

Een *tweede overlegmoment* kan zijn als de leerling een oplossing gevonden heeft. Wat daarin aan de orde kan komen is de presentatie van die oplossing. Notatie en nauwkeurigheid zijn dan onderwerp van gesprek. Heeft de leerling daaraan voldaan, dan kan verdieping of generalisatie aan de orde komen, een aspect waarbij een goede leerling natuurlijk ook een eigen inbreng moet hebben.

Vooraf brainstormen met een of meer collega's wiskunde kan heel inspirerend zijn om zelf enig repertoire te hebben bij het bespreken van het werk van de leerling. De kunst is natuurlijk om het vervolg ook echt de verdieping of de generalisatie van de leerling te laten zijn. Te veel eigen inbreng van de docent kan worden voorkomen door het stellen van de juiste vragen aan de leerling.

De noodzaak van een *volgend overlegmoment* hangt af van de afspraken die in het eerste overleg zijn gemaakt. Bij voorbeeld als onderdeel van de opdracht is het maken van een lesje voor medeleerlingen, is een voorbespreking op zijn plaats voor uitvoering plaats vindt.

5.5 De beoordeling

Vooropgesteld moet worden dat een leerling die een opdracht heeft gemaakt altijd feedback verdient over de kwaliteit van het geleverde werk. Of dat in de vorm van een cijfer; een onvoldoende, voldoende, goed; of nog een andere vorm gebeurt zal vooral afhangen van hoe de school daar mee omgaat. Of deze beoordeling een onderdeel vormt van het cijfer voor wiskunde is ook een zaak die op school, dan wel sectie niveau dient te worden besloten.

Tussentijdse overlegmomenten kunnen ook worden gebruikt om een deelbeoordeling te geven.

Bij het bespreken van de opdracht 'Architect in spe' gaven leerlingen aan dat zij juist een waardering voor het tijdrovende informatie verzamelen hadden gemist. In dit geval was de beoordeling helemaal naar het eind geschoven.

En bij een wiskundige opdracht kan bij het eerste overlegmoment een goede verwoording van de aanpak al in de beoordeling worden opgenomen.

Heeft u nog geen enkele ervaring in het beoordelen van open opdrachten of werkstukken, dan is het volgende 'model' een startpunt dat recht doet aan het uitgangspunt dat de leerling nooit afgerekend mag worden op het leerproces van de docent:

Wie het werk niet af heeft, of er overduidelijk 'met de pet naar heeft gegooid':	onvoldoende	(4 of 5)
Is het werk af en voldoet het uiterlijk aan de vooraf gestelde eisen:	voldoende	(6 of 7)
Heeft de leerling daarboven de nodige eigen wiskundige inbreng:	goed	(8 of hoger)

Ervaring, overleg met collega's en inwinnen van informatie zal leiden tot de nodige verfijning van het hierboven voorgestelde 'model'.

Informatie over de wijze waarop praktische opdrachten en werkstukken kunnen worden beoordeeld vindt u op de

site: http://digimap.slo.nl>aanpakindeklas>beoordeling>Rubrics_of_Rubrieken.doc/

6. Enkele voorbeelden

Enkele van deze ontwerpen zijn gemaakt door docenten, waarbij een eerste ontwerp is voorzien van commentaar door de auteur van deze publicatie. Omdat wij menen dat u veel kunt leren van het ontwerpproces van anderen, hebben wij een vroege versie met het commentaar daarop bij de definitieve versie gevoegd.

Open ontwerp opdrachten

Columbus ontdekt Amerika?

Columbus ontdekt Amerika?: commentaar

Columbus ontdekt Amerika? (2^e versie)

Deze opdracht is ontworpen door Grieta de Vries en van commentaar voorzien door Pieter van der Zwaard.

Het commentaar gaf aanleiding tot een bijstelling van de opdracht. Echter bevatte het ook veel mogelijkheden om bij de start van de uitvoering en tussentijds, leerlingen te voorzien van specifieke eisen die aan het eindproduct worden gesteld.

Architect in spe; Vervoer en transport

Architect in spe; Vervoer en transport; docudentekst

Deze opdrachten zijn in 2000 ontworpen in opdracht van de SLO door vier studenten onderwijskunde, Chantal Gervedink Nijhuis, Elske Hooglugt, Aleida Sijsma en Lisette Vogels. Zij deden dit binnen een practicum binnen het vak onderwijskundig ontwerpen. De opdrachten zijn in de afgelopen tijd bijgesteld naar aanleiding van uitprobeervaringen en gesprekken met docenten en leerlingen.

Wiskundig getinte opdrachten

Fractal Pop Ups

De kool en de geit sparen

Dit is de eerste, nog niet uitgete probeerde, versie van deze twee ontwerpen. Zij zijn speciaal ontworpen als illustratie bij hoofdstuk 5.

Getallen

Deze opdracht is ontworpen door Marc van der Veen. De opdrachten zijn op het moment van schrijven nog niet becommentarieerd of uitgete probeerd.

De wiskundige creativiteitsmeter

Deze opdrachten zijn ontworpen aan de Universiteit van Leeds en in een samenwerkingsproject met de SLO vertaald. De opdrachten lenen zich uitstekend voor divers gebruik in de klas. Een docent gebruikt de opdrachten voor een laddercompetitie met aan het begin van iedere week steeds een nieuwe opdracht.

1492: Columbus ontdekt Amerika?

Inleiding

Jij bent de Genuese ontdekkingsreiziger Christopher Columbus (1451-1506) en je zoekt naar wegen om sneller in India te komen dan langs de bestaande weg, vol gevaren, langs Kaap de Goede Hoop bij Afrika.

Financieel gesteund door Isabella van Castilië ga je op 3 augustus 1492 op weg.

Als je in Amerika aankomt na een lange reis, denk je India gevonden te hebben. De mensen die in Amerika wonen geef je daarom de naam Indianen. Later, in je leven na de dood, kom je erachter dat je niet in India was aangekomen, maar in een tot dan toe in Europa onbekend continent.

Je gaat er in 2004 eens rustig voor zitten om je reis van 1492 naar die Nieuwe Wereld te evalueren.

- Waarom kwam je in Amerika aan en niet in India?
- Waarom had je niet door dat je op een ander continent was aangekomen?
- Welke kennis had je moeten hebben om wel in India te komen? En langs welke route zou je in de 21^e eeuw met een schip naar India zijn gegaan?

De taak

Maak een evaluatie van de reis die je gemaakt hebt en zoek een antwoord op de vragen die gesteld zijn in de inleiding.

Presenteer je evaluatie in de vorm van een verslag. Dit kan een schriftelijk verslag zijn of een informatiepagina voor de website van school met verschillende links of een demonstratie met behulp van PowerPoint.

Leerdoelen:

- Informatie zoeken
- Inzicht krijgen in de ontwikkeling van kaarten in de loop van de geschiedenis
- Kennis van verschillende projecties van de aarde om een kaart te maken.
- Ontdekken hoe wiskunde wordt gebruikt bij het maken van kaarten. Welke projectie is geschikt voor welke kaart?
- Kennis van de huidige technologie om de weg te vinden op de aardbol.

Werkwijze

Maak een plan van aanpak: wat moet je allemaal doen voor deze taak, hoeveel tijd kost dat per deeltaak, hoe ga je de tijd verdelen over de uren die je beschikbaart hebt: wanneer doe je wat. Bespreek het plan van aanpak met je docent(en).

Gebruik een logboek waarin je bijhoudt wat je gedaan hebt, welke problemen je tegenkwam en hoe je daar uit gekomen bent. Zorg dat je in je verslag ook je bronnen vermeld.

Commentaar op Columbus ontdekt Amerika

Eerste reactie:

Wat een leuk idee. Hopelijk worden de leerlingen er net zo door aangesproken als ik. Wel is het een verrijkingstaak voor wiskunde, aardrijkskunde en geschiedenis. Het wereldbeeld in Europa rond 1500 speelt een belangrijke rol in de opdracht.

Mijn tweede reactie is:

Bij het doorlezen van de inleiding van je opdracht heb ik het idee dat je een heel duidelijk beeld hebt van wat de leerling zou moeten leren. Dat zie je terug in de doelen. Echter voor het beantwoorden van de vragen die je stelt heb ik de kennis achter de leerdoelen helemaal niet nodig. Een globe en de nodige 'common sense' volstaat.

Ook de taak lokt niet noodzakelijk het bestuderen van kaarten en projecties uit.

Waar 'Columbus' misschien wel eens over na zou kunnen denken is het volgende:

- Wat wisten wij toen van de wereld (vooral op kaartniveau)?
- Wat weten de mensen nu van de wereld?
- Hoe heeft zich dat in de loop van de tijd ontwikkeld?

Hoe maakten wij toen kaarten? Hoe gebeurt dat nu, en wat zat daar tussen?

Deze laatste hoe-vraag splitst zich uit in twee richtingen:

De eerste richting is de wijze waarop informatie wordt ingewonnen; plaatsbepaling op aarde tijdens de waarneming (relatief ten opzichte van vorige waarnemingen en absoluut (zonschieten, die Engelsman die dat uurwerk uitvond dat nauwkeurig genoeg was om lengtegraden te kunnen bepalen) en deze eeuw zelfs satellietwaarneming.

De tweede richting is de wijze waarop de informatie wordt gepresenteerd, dan kom je op projecties terecht. En daarmee de vraag wat wil je aangeven met zo'n projectie. Denk aan die uitgerekte Unicef kaart die oppervlakte vasthield (bij de evenaar verticaal uitgerekt en nabij de polen verticaal ingekrompen).

Een mooie tussenvraag: zijn er zeekaarten die zo in elkaar zitten dat rechte lijnen de kortste weg op aarde tussen twee punten vertegenwoordigen?

Volgens mij heb ik hier meteen twee opdrachten geformuleerd.

Ik heb geen enkele waaromvraag gebruikt. Volgens mij roept een waarom vraag speculatief gedrag op en niet zozeer informatiebehoefte, zeker niet als je een specifieke informatieverweving van de leerlingen verwacht. Dan werken mijns inziens wat- en hoe-vragen beter.

Dan nog de werkwijze.

Daarbij kijk je volgens mij iets te veel vooruit.

Van een aantal zaken kan de leerling aan het begin nog niet voorzien hoeveel tijd dat zal gaan kosten.

(Hoeveel tijd heeft een leerling eigenlijk voor deze taak?)

Enkele stappen in het geheel zien er volgens mij als volgt uit:

Laat de leerling formuleren wat die naar aanleiding van deze case precies wilt gaan uitzoeken.

Met die formulering moet de docent akkoord gaan --> overlegmoment.

Stel in eerste instantie dan samen met de leerling een planning op, die mijns inziens in drieën uiteenvalt:

- bronnen zoeken;
- bronnen verwerken;
- presentatie maken.

Hier per onderdeel een maximum tijdbesteding op zetten lijkt mij dan verstandig.

Een simpel logboekje waarin de problemen worden genoemd die de leerlingen tegenkwamen, zoals je liet zien op de bijeenkomst lijkt mij ook verstandig. (Wat is de definitie van een probleem? Iets waar je niet uitkwam, of iets waar je langer over na moest denken, of)

1492: Columbus ontdekt Amerika?

Inleiding

Jij bent de Genuese ontdekkingsreiziger Christopher Columbus (1451-1506) en je zoekt naar wegen om sneller in India te komen dan langs de bestaande weg, vol gevaren, langs Kaap de Goede Hoop bij Afrika.

Financieel gesteund door Isabella van Castilië ga je op 3 augustus 1492 op weg.

Als je in Amerika aankomt na een lange reis, denk je India gevonden te hebben. De mensen die in Amerika wonen geef je daarom de naam Indianen. Later, in je leven na de dood, kom je erachter dat je niet in India was aangekomen, maar in een tot dan toe in Europa onbekend continent.

Je gaat er in 2004 eens rustig voor zitten om je reis van 1492 naar die Nieuwe Wereld te evalueren.

- Waarom kwam je in Amerika aan en niet in India? Wat wist je toen in de 15^e eeuw (niet) van (zee)kaarten?
- Waarom had je niet door dat je op een ander continent was aangekomen? Hoe bepaalde je anno 1492 eigenlijk waar je was op de aardbol? En nu, in 2004?
- Welke huidige kennis van kaarten had je in 1492 willen hebben om wel in India te komen? Zijn er nu (zee)kaarten die zo in elkaar zitten dat rechte lijnen de kortste weg op aarde aangeven?

En langs welke route zou je in de 21^e eeuw met een schip naar India zijn gegaan?

De taak

Maak een evaluatie van de reis die je gemaakt hebt en zoek een antwoord op de vragen die gesteld zijn in de inleiding.

Presenteer je evaluatie in de vorm van een verslag. Dit kan een schriftelijk verslag zijn of een informatiepagina voor de website van school met verschillende links of een demonstratie met behulp van PowerPoint.

Leerdoelen:

- Informatie zoeken
- Inzicht krijgen in de ontwikkeling van kaarten in de loop van de geschiedenis
- Kennis van verschillende projecties van de aarde om een kaart te maken.
- Ontdekken hoe wiskunde wordt gebruikt bij het maken van kaarten. Welke projectie is geschikt voor welke kaart?
- Kennis van de huidige technologie om de weg te vinden op de aardbol. Hoe vind je je weg op aarde met behulp van satellieten?

Werkwijze

Maak een plan van aanpak: formuleer specifiek wat je naar aanleiding van deze taak precies wilt gaan uitzoeken. Bespreek het plan van aanpak met je docent(en), die moeten akkoord gaan. Maak vervolgens een planning waarin je aangeeft hoeveel tijd je wilt besteden aan het zoeken naar informatie, hoeveel tijd aan de verwerking van die informatie en tot slot hoeveel tijd je

wilt besteden aan het maken van een presentatie. Overleg regelmatig met je docent(en) over de voortgang.

Gebruik een logboekformulier waarin je bijhoudt wat je gedaan hebt, welke problemen je tegenkwam en hoe je daar uit gekomen bent. Zorg dat je in je verslag ook je bronnen vermeld.

De bedenker van de opdracht stelt het zeer op prijs als je tot slot ook je mening geeft over deze verrijkingstaak, zodat een volgende versie verbeterd kan worden.



Met dank aan Pieter van de Zwaart, SLO

Architect in spe

Vervoer en transport

Twee opdrachten waarin veel wiskunde gebruikt kan worden

© SLO 2003

Beste leerling,

In dit boekje vind je twee opdrachten voor het vak wiskunde.

In beide opdrachten ben je iemand die een probleem oplost voor een opdrachtgever.

Opdracht 1, 'Architect in spe' gaat over het bouwen van een kantoor. Jij bekijk als architect hoe je het beste een kantoor op een stukje grond kunt zetten, zodat er voldoende parkeerruimte overblijft.

In opdracht 2, 'Vervoer en transport', ben je logistiek medewerker bij een transport bedrijf. De vraag is hoe je zo snel en goedkoop mogelijk een hoeveelheid goederen op een aantal adressen aflevert.

Maak gebruik van je wiskundekennis, redeneer slim en zoek waar nodig wat extra wiskunde in je wiskundeboek om een of meer zo goed mogelijk oplossingen voor het probleem kunt vinden.

Lees beide opdrachten door en maak je keuze.

Architect in spe

De situatie

Bij het architectenbureau waar je werkt is een opdracht binnen gekomen van het bedrijf Vos BV.

Het bedrijf heeft nabij het centrum van een stadje een stuk grond gekocht van 80 bij 120 meter.

Vos BV wil daar een kantoorgebouw plaatsen. In het gebouw moet een oppervlakte beschikbaar zijn van 2600 m².

In het gebouw zullen regelmatig bijeenkomsten met een groot aantal genodigden worden gehouden. Daarom wordt zoveel mogelijk grond gereserveerd voor parkeerruimte.

Wel moet er ruimte zijn voor wat groen, want het bedrijf wil haar gasten niet in een grote stenen massa ontvangen.

De gemeente heeft een belangrijke eis: Gebouwen in het centrum mogen niet hoger zijn dan 10 meter.



De opdracht

Maak een presentatie voor de opdrachtgever Vos BV.

In deze presentatie moet je verschillende oplossingen laten zien voor het probleem en een aanbeveling geven voor de beste oplossing.

Over een maand moet de presentatie af zijn.

De aanpak

Je start met een gesprek met je docent. Deze heeft ook de rol van jouw chef in het architectenbureau.

De docent geeft je enkele eisen waaraan de presentatie en het eindproduct moeten voldoen.

Maak een plan waarin staat hoe je dit probleem gaat aanpakken.

In dat plan neem je een aantal zaken op als:

- onderzoek hoe kantoren er uit zien, wat zijn standaard maten,
- onderzoek hoe parkeerplaatsen er uit zien,
- de vorm van je presentatie, computer (PowerPoint, 3D, ...), tekeningen, maquette, ...;
- het maken van een verslag;
- een tijdsplanning;
- ...

Extra mogelijkheid

Als je een plan hebt gemaakt, maak dan een afspraak met een architect.

In het gesprek met de architect vraag je onder andere naar de wiskunde die een architect gebruikt in zijn werk.

Bespreek met de architect de opdracht en vraag om suggesties voor de aanpak.

Stel na het gesprek eventueel je plan bij.

Het eindproduct

Dat is een dossier met daarin onder andere:

- de presentatie die je heb gemaakt;
- de planning;
- een verslag van het gesprek met de architect. (indien van toepassing);
- een beknopt verslag over de aparte onderdelen in je planning;
- een terugblik (ofwel een reflectie).

In die terugblik beschrijf je:

- waar je van je planning ben afgeweken en waarom;
- of je een vergelijkbare opdracht een volgende keer anders aan zou pakken, en zo ja hoe dan;
- (met andere woorden wat je er van hebt geleerd);
- wat je leuk vond aan de opdracht en wat minder leuk.

Vervoer en transport

De situatie

Het transportbedrijf V&T is gevestigd in Utrecht. Het heeft een nevenvestiging in Zutphen.

Jij bent leerling logistiek medewerker bij dit bedrijf. Een logistiek medewerker zoekt uit wat de meest efficiënte (snelste, voordeligste) manier is om goederen naar hun plaats van bestemming te transporteren.

Het bedrijf vervoert in opdracht van derden producten door heel Nederland en beschikt over een wagenpark van 40 vrachtwagens.

V&T krijgt de opdracht van Het bedrijf 'van IJzer tot Wiel' om producten van hun hoofdvestiging in Amersfoort te vervoeren naar hun filialen in Leiden, Den Haag, Nijmegen en Zwolle te vervoeren.

Van de hoofdvestiging moeten naar iedere nevenvestiging 1300 producten worden vervoerd.

De vrachtwagens van V&T kunnen ieder maximaal 500 producten per keer vervoeren.



De opdracht

Jij moet uitzoeken wat de handigste en voordeligste wijze is waarop jouw bedrijf deze vervoerstaak uit kan voeren.

Over een week moet je je chef hierover een advies geven in de vorm van een rapport.

De aanpak

Je start met een gesprek met je docent. Deze heeft ook de rol van jouw chef bij V&T. De docent geeft je enkele eisen waaraan het rapport en het eindproduct moeten voldoen.

Maak een plan waarin staat hoe je dit probleem gaat aanpakken.

In dat plan neem je een aantal zaken op als:

- hoeveel kost een vrachtwagen laten rijden eigenlijk (kilometer prijs, brandstofkosten, opstartkosten, salariskosten chauffeur,);
- hoe kom ik aan de handigste routes tussen de betreffende steden,;
- de vorm van je rapport, alleen verslag op papier, of ook een Excel worksheet, ... (vaak echter dat je dit pas later besluit);
- het maken van een verslag;
- een tijdsplanning;
- ...

Extra mogelijkheid

Als je een plan hebt gemaakt, maak dan een afspraak met een logistiek medewerker.

In het gesprek met deze persoon vraag je naar welke wiskunde een logistiek medewerker gebruikt in zijn werk.

Besprek met de medewerker de opdracht en vraag om suggesties voor de aanpak.

Stel na het gesprek eventueel je plan bij.

Het eindproduct

Dat is een dossier met daarin onder andere:

- (een beschrijving van) het verslag dat je heb gemaakt;
- de planning;
- een verslag van het gesprek met de architect (indien van toepassing);
- een beknopt verslag over de aparte onderdelen in je planning;
- een terugblik (ofwel een reflectie).

In die terugblik beschrijf je:

- waar je van je planning bent afgeweken en waarom;
- of je een vergelijkbare opdracht een volgende keer anders aan zou pakken, en zo ja hoe dan;
- (met andere woorden wat je er van hebt geleerd);
- wat je leuk vond aan de opdracht en wat minder leuk.

Architect in spe

Vervoer en transport

Documenttekst

Twee opdrachten waarin veel wiskunde gebruikt kan worden

© SLO 2003

Geachte docent,

Deze handleiding hoort bij de twee opdrachten 'Architect in spe' en 'Vervoer en transport' voor het vak wiskunde.

Deze opdrachten zijn ontworpen voor leerlingen die meer wiskunde aankunnen dan wat alleen de methode biedt.

Open opdrachten

Beide opdrachten zijn zeer open van karakter, de leerlingen krijgen een, weliswaar bedacht, probleem in een heel praktische situatie aangeboden, waarbij zij alle ruimte krijgen om met een geheel eigen oplossing te komen.

Om tot die oplossing te komen krijgen de leerlingen een aantal handreikingen.

In beide opdrachten is de leerling iemand die een probleem oplost voor een opdrachtgever.

Uit de leerlingentekst:

- Opdracht 1, 'Architect in spe' gaat over het bouwen van een kantoor. Jij bekijk als architect hoe je het beste een kantoor op een stukje grond kunt zetten, zodat er voldoende parkeerruimte overblijft.
- In opdracht 2, 'Vervoeren en transporteren', ben je logistiek medewerker bij een transport bedrijf. De vraag is hoe je zo efficiënt mogelijk een hoeveelheid goederen op een aantal adressen aflevert.

Rol van de docent

De belangrijkste rol van de docent zal is die van de chef in het bedrijf waar de leerling 'werkt'.

Uit de leerlingentekst:

- Je start met een gesprek met je docent. Deze heeft de rol van jouw chef in het architectenbureau. De docent geeft je enkele eisen waaraan de presentatie en het eindproduct moet voldoen.
- Je start met een gesprek met je docent. Deze heeft de rol van jouw chef bij V&T. De docent geeft je enkele eisen waaraan de presentatie en het eindproduct moet voldoen.

Dat vertaalt zich in het coachen van de leerlingen bij het hanteren van de handreikingen. Ook kunt u naar eigen inzicht de randvoorwaarden waarbinnen de opdracht moet worden uitgevoerd aanpassen.

- Maak een presentatie voor de opdrachtgever Vos BV. Zij willen verschillende oplossingen zien voor hun probleem en een aanbeveling voor de beste oplossing. Over een maand moet de presentatie af zijn.
- Jij moet uitzoeken wat de handigste en voordeligste wijze is waarop jouw bedrijf deze vervoerstaak uit kan voeren. Over een week moet je je chef hierover een advies geven in de vorm van een rapport.

Wij hechten groot belang aan de opdracht dat de leerling in een presentatie of in een rapport zijn of haar bevindingen en resultaten weergeeft. Juist het communiceren hiervan wil er bij begaafde leerlingen nog wel eens bij in schieten, terwijl zij vaak juist enige vaardigheid hierin wel kunnen gebruiken.

De planning

U kunt het tijdschema aanpassen aan de mogelijkheden van het rooster van de leerling.

De eisen aan het plan kunt u aanpassen, bijvoorbeeld de vraag of er wiskundehoofdstukken (ruimtemeetkunde in Architect, grafen in Vervoer en transport)

inderdaad moeten worden bestudeerd, hangt af of die al gedaan zijn door de leerling, of dat uw inschatting of de leerlingen dit al dan niet nodig zal hebben.

Als de leerling een plan heeft gemaakt is het een prima moment voor een coachingsgesprek. Daarin kunt u vragen of de leerling al bronnen heeft voor de benodigde informatie, een idee heeft hoeveel tijd er in ieder onderdeel wordt gestopt, of de materialen voor de presentatie beschikbaar zijn en of de leerling daar al eens mee heeft gewerkt. Bij een eerste keer zal voor u de coachingsrol enige onzekerheden bevatten, het kan daarom verstand zijn zeker bij een eerste keer regelmatig met de leerling te bespreken hoe het gaat en de leerling niet te veel uit te laten waaieren.

De extra opdracht

De vraag om een 'echte' beroepsbeoefenaar te interviewen komt bij de planning natuurlijk ook aan de orde. Een direct besluit daarover hoeft niet meteen te vallen, tenzij de leerling deze persoon perse wil gebruiken als bron. Een andere mogelijkheid is natuurlijk dat de leerling de eigen oplossing bespreekt met de beroepsbeoefenaar en het commentaar opneemt in het dossier.

U kunt de leerling vragen om het commentaar te verwerken. De ambitie van de leerling kunt u daarbij een rol laten spelen.

Het eindproduct

De leerling moet goed beseffen dat de presentatie of het verslag niet het eindproduct is. Ook het dossier met daarin de andere zaken die hij of zij heeft gedaan vinden daarin een plaats.

De presentatie/het verslag is wel het hoofdproduct. Daarmee geven wij al aan dat in het dossier beperkt tijd moet worden gestoken. Veel uit het dossier betreft zaken die de leerling onderweg al heeft gedaan en daarmee is de dossiervorming vooral een zaak van dingen bewaren.

Heel graag krijgen wij uw ervaringen te horen om deze docententekst daarmee waardevolle praktische aanvullingen te geven.

Fractal Pop Ups

1^e versie

Tarquin Publications geeft het boekje 'Fractal Cuts' (Engelstalig) uit. Daarin staat veel informatie over fractalstructuren en allerlei ideeën over het maken van pop-ups met een fractalstructuur.

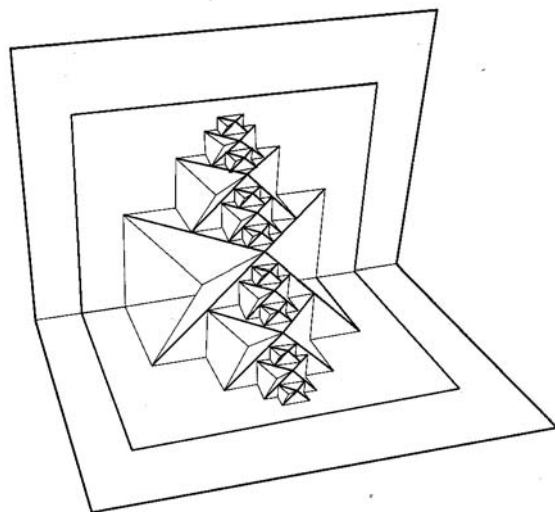
Een voorbeeld van zo'n pop-up is de Hanoi Arête:

Een fractal is nooit af er is altijd een volgende stap. Bij dit voorbeeld is men niet verder gegaan dan de vierde stap.

1. Hoe ziet de bouwplaat voor de vijfde stap er uit?

(De bouwplaat van de vierde stap is beschikbaar.)

Je ziet dat er iedere generatie de schaalgrootte verandert. De schaalgrootte halveert ofwel de schaalfactor is 1:2.



2. Ga in het boekje naar Card 8 Opposite Pyramids. Hier is men tot en met stap 2 gegaan.

Hoe zal hier de bouwplaat van de volgende stap er uit zien?

Hoe groot is hier de schaalfactor?

3. Je wordt nu in staat geacht een eigen ontwerp te maken voor een Fractal Pop Up. Kies vooraf een schaalfactor, of je ontwerp symmetrisch zal zijn of niet, selecteer op basis van het boek nog enkele andere eigenschappen die je aan je Fractal Pop Up mee wilt geven.

Bespreek je selectie aan voorwaarden wel eerst met docent voor je aan de slag gaat met het ontwerpen.

Voor de docent:

Natuurlijk zijn er beperkingen aan een opdracht als deze.

Voor sommige leerlingen kan het een beperking zijn dat het boekje in het Engels is. Helaas, de Nederlandse vertaling lag enkele jaren geleden bij De Slegte.

Een andere beperking is dat er (begaafde) leerlingen zijn, die je met geen mogelijkheid met een schaar en papier aan de gang krijgt

Wel is onze ervaring dat bijna iedere leerling wordt gefascineerd door de aanwezigheid van een Fractal Pop Up in de klas en daar dan ook wel iets mee wil doen. Dus zelf wat knippen en plakken kan helpen.

Eisen aan het ontwerp kunnen worden opgeschroefd door het vragen om alternering (sprong naar het spiegelbeeld) in de stappen, asymmetrie, of niet evenwijdige vouwlijnen.

De kool en de geit sparen

1^e versie

Een veerman moet een wolf een kool en een geit naar de overkant van de rivier brengen.

In zijn boot kan slechts een van de drie tegelijkertijd met hem meevaren.

Laat de veerman de wolf en de geit samen achter, dan zal de wolf de geit opeten, laat de veerman de geit en de kool samen achter dan zal de geit de kool opeten.

Hoe speelt de veerman het klaar om alle drie naar de andere oever te krijgen, zonder dat er zich problemen voordoen?

Uitbreiding:

Stel je voor er moet ook nog een jager over die, zonder bewaker onmiddellijk de wolf dood zal schieten.

Kan de veerman het dan nog met dezelfde boot af?

Wat is de minimale capaciteit van een bruikbare boot?

Hoe lost de veerman het probleem nu op?

Hoe ziet de puzzel er uit als de reeks die overgezet moet worden vijf lang is?

Stel je voor de reeks wordt nog langer.

Geef aan hoe de puzzel zich dan ontwikkelt. Geef een oplossing voor iedere mogelijke lengte van de reeks.



Verrijkingsopdracht wiskunde:

Getallen

π

Fibonacci: 1 1 2 3 5 ...

Mersenne

127

door Marc van der Veen

Inleiding

Bij deze verrijkingsopdracht ga je aan de slag met het boekje "Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen", geschreven door David Wells. In het boekje staan bij een groot aantal getallen bijzondere, leuke, interessante, grappige, maar ook moeilijke en ingewikkelde eigenschappen.

Blader voordat je begint aan de opdracht het woordenboekje eens door. Probeer na te gaan hoe het werkt. Hopelijk maakt het boekje je nieuwsgierig naar de opdracht.

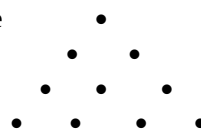
In deze opdracht moet je een aantal eigenschappen van getallen nagaan. Ook kom je een aantal nieuwe begrippen tegen waarvan je moet uitzoeken wat ze betekenen.

Maak alle opdrachten op ruitjespapier. Je herkent de opdrachten aan een vetgedrukt getal dat ervoor staat. De opdracht gaat dan over dat getal. Soms hoeft je alleen iets te lezen over een getal, soms moet je juist iets berekenen of nagaan van een getal. Schrijf alle uitwerkingen in een apart schrift of multomap, waar ook eventuele andere verrijkingsopdrachten voor wiskunde in kunnen.

Heel veel plezier met deze verrijkingsopdracht.

De opdrachten

- 0,5.** We beginnen met het getal 0,5. Op bladzijde 14 staan een aantal eigenschappen. Lees de eerste eigenschap (Er zijn twaalf ... de grootste). Van de 12 manieren om van de cijfers 1 t/m 9 een breuk met waarde $\frac{1}{2}$ op te schrijven, zijn er 2 gegeven. Probeer een derde manier te vinden (of misschien nog meer manieren)
- 1.** "Een priemgetal is alleen deelbaar door zichzelf en door 1". Een aantal priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, enz.
Waarom is 1 eigenlijk geen priemgetal? 1 is toch alleen deelbaar door zichzelf en door 1. Lees op blz. 24 vanaf de één na onderste regel (1 is in het bijzonder ... de lijst van priemgetallen). Je weet nu waarom is afgesproken waarom 1 geen priemgetal is.
- 3.** Op blz. 44 staat ongeveer halverwege dat 3 het eerste Mersennepriemgetal is. Zoek uit wat een Mersennegetal is en wat een Mersennepriemgetal is: kijk achter in het register bij Mersennegetal, kijk vervolgens bij welk getal dat wordt uitgelegd (het vetgedrukte getal).
- 3,1415926535897932384626433832795028841972... ofwel π .**
Je hebt inmiddels van π gehoord bij de omtrek en oppervlakte van een cirkel. Het getal π heeft oneindig veel decimalen. Het heeft nogal lang geduurd voordat men π in zoveel decimalen kon schrijven als wij nu kunnen. Lees blz 44, 45, 46 en 47 tot de helft (... verre overtreffend) over het ontdekken van steeds meer decimalen van π .
- 4.**
- ◆ In de eerste zin over het getal 4 staan 3 eigenschappen. Ga deze drie eigenschappen na door ze uit te schrijven.
 - ◆ Lees op blz. 55 "Het vierkleurenprobleem".
 - ◆ Op blz. 56 staat: "Een getal is deelbaar door 4 als het getal dat wordt gevormd door de laatste twee cijfers deelbaar is door 4." Probeer uit te leggen dat dit klopt.
 - ◆ Lees op blz 56 (Vorm, uitgaande van ... - 4 ...).
Ga deze reeks na.
- 5.** Lees op blz 59: "Tellen in groepen van vijf".
- 6.** Lees blz. 67 over het getal 6. Er staat dat 6 het eerste volkomen getal is. Zoek uit wat een volkomen getal is en ga vervolgens na dat 496 een volkomen getal is.
- 8.** Er staat dat 8 het zesde Fibonaccigetel is. Zoek uit wat dat is en leg uit hoe de rij van Fibonacci werkt.
- 9.** In de laatste zin op blz 74 staat dat 9 het vierde geluksgetal is. Zoek uit wat een geluksgetal is.
- 10.** Het getal 10 is het vierde driehoeksgetal. Probeer aan de hand van het plaatje hiernaast te beredeneren wat driehoeksgetallen zijn.
Kijk vervolgens bij '15' of je redenering klopt.



- 13.** Lees de eerste 10 regels over het getal 13. Er staat dat 13 het vijfde geluksgetal, het zesde priemgetal en het zevende Fibonaccigetel is. Zoek uit wat een geluksgetal is. Schrijf vervolgens de eerste 13 geluksgetallen op (dat is best een klus).

Eindopdracht

Geef een presentatie of een les voor je eigen klas over getallen. Je mag gebruiken wat je tijdens deze opdracht bent tegen gekomen, maar je mag natuurlijk ook ander materiaal gebruiken.

De wiskundige creativiteitsmeter

Instructies

- Je hebt 60 minuten om deze toets te maken.
- Je hebt pen of potlood en een liniaal nodig.
- Je mag een rekenmachine gebruiken.
-  = Hier schrijf je het antwoord op.
- Je kunt de hele bladzij gebruiken voor je berekeningen.
- Bij sommige opdrachten staat het volgende:



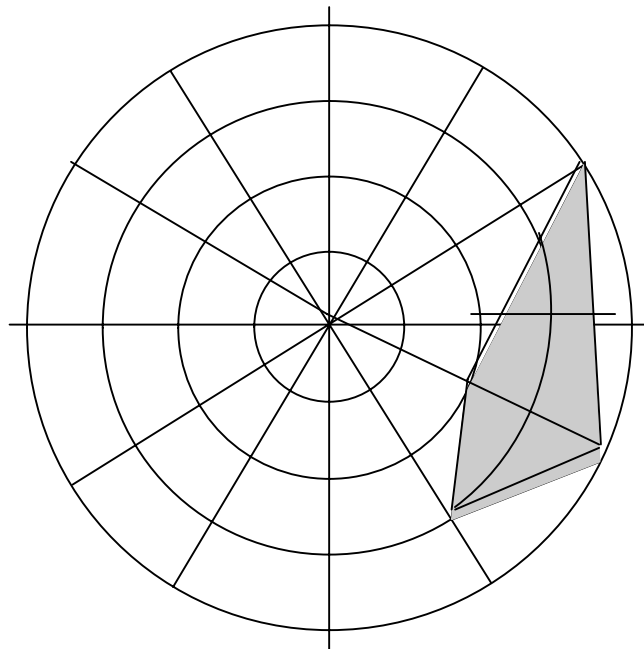
Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

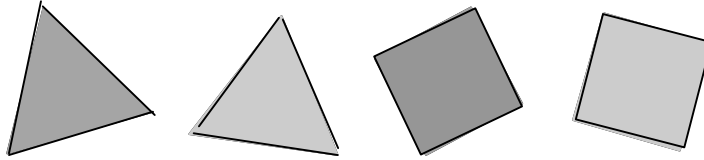
Hier kun je een punt krijgen wanneer je opschrijft hoe je aan je antwoord gekomen bent.

- Wanneer je niet uit een opdracht komt, ga je naar de volgende. Als je tijd over hebt, kun je die opdracht nog eens proberen.

Je ziet een cirkelvormig rooster met daarin een figuur.

Teken de plaats van de figuur nadat je die **geroteerd** hebt over **120°** , met de wijzers **van de klok mee** en rond het middelpunt van het rooster.





In een tas zitten

rode driehoeken

blauwe driehoeken

rode vierkanten

blauwe vierkanten

In totaal zitten er 13 gekleurde figuren in de tas.

Er zijn meer rode driehoeken dan blauwe driehoeken.

Er zijn meer blauwe vierkanten dan rode vierkanten.

Er zijn meer driehoeken dan vierkanten.

Er zijn meer rode dan blauwe figuren,

maar meer blauwe figuren dan rode driehoeken.

Hoeveel exemplaren zitten er van elke figuur in de tas?



rode driehoeken

rode vierkanten

blauwe driehoeken

blauwe vierkanten

3

De som van opeenvolgende getallen vertoont een regelmaat.

$$1 \times 2 = 3 \times 1$$

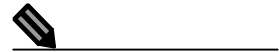
$$1 + 2 + 3 = 4 \times 1\frac{1}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 5 \times 2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 6 \times 2\frac{1}{2}$$

Deze regelmaat houdt aan.

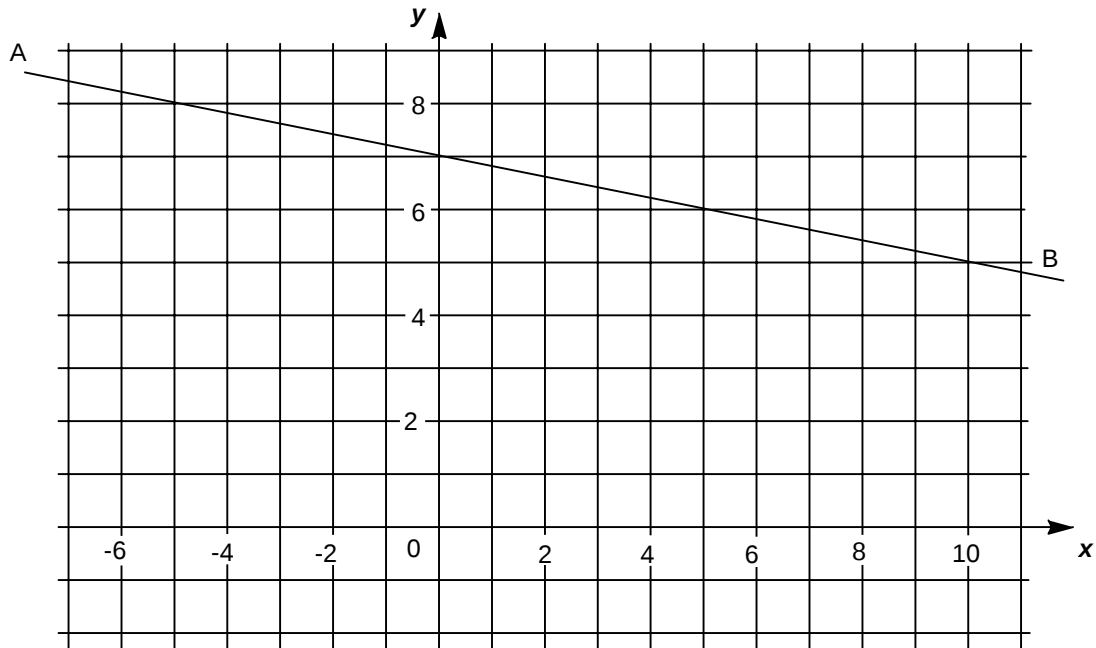
Wat is het kleinste aantal opeenvolgende getallen, te beginnen met 1, waarvan het antwoord **groter is dan 1000** als je ze bij elkaar optelt.



Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

3.1

3.2



De lijn AB snijdt de y -as in $(0,7)$.

De lijn wordt doorgetrokken tot hij de x -as snijdt.

Wat zijn de coördinaten van het punt waar AB de x -as snijdt?

 (,)



Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

4.1

4.2

Bepaal de waarde van x in de volgende vergelijking.

$$\frac{1}{2} (3x + 5) = \frac{1}{4} (7x - 2)$$

 $x =$ _____



Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

5.1

5.2

Bedenk drie hele getallen, groter dan 1, waarvan het antwoord na vermenigvuldiging 9889 is.

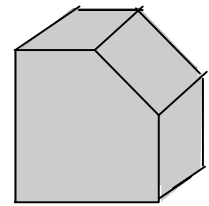
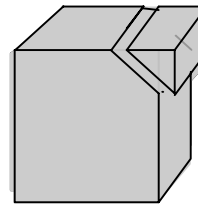
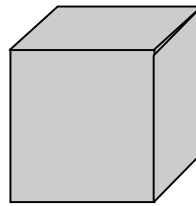


$$\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} = 9889$$

7

Van een kubus wordt een prisma afgehaald zodat een nieuwe vorm ontstaat.

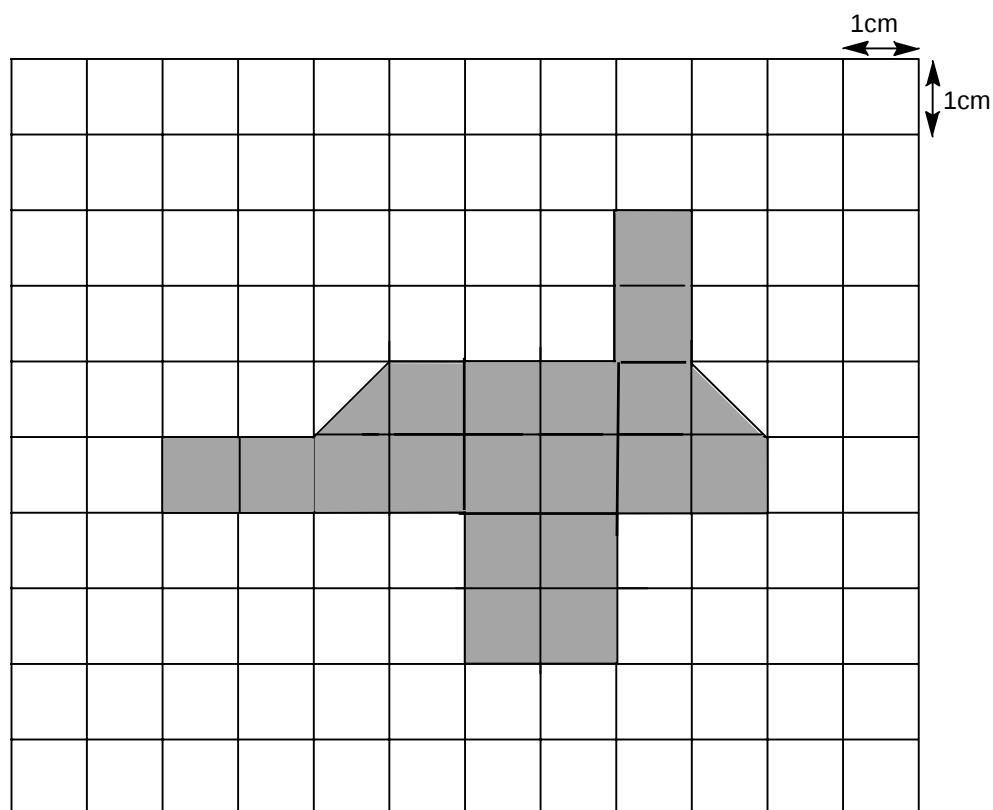
De nieuwe vorm heeft 7 zijvlakken.



In de tekening zie je een deel van de uitslag van deze nieuwe vorm.

Er mist één zijvlak.

Teken het ontbrekende vlak zo nauwkeurig mogelijk in het rooster.



De uitslag is getekend in een rooster met hokjes van 1x1 cm.

Bereken de **inhoud** van de nieuwe vorm.



cm³



Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

8

23 25 17 21 ? ?

Het gemiddelde van deze zes getallen is 22. Het verschil tussen het grootste en kleinste getal is 14.

Zoek de twee ontbrekende getallen.



_____ en _____



laat zien hoe je aan je antwoord komt.

8.1

8.2

Een grote milkshake kost 35 cent meer dan een kleine milkshake.

Hannah koopt 1 grote en
4 kleine milkshakes.



Jake koopt 3 grote milkshakes
en 1 kleine.



Ze betalen allebei **hetzelfde** bedrag.

Bereken de prijs van een **kleine** milkshake.



Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

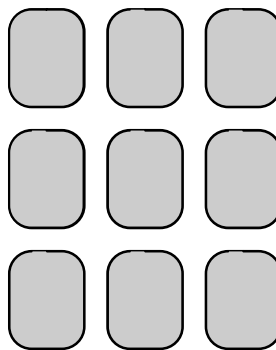
9.1

9.2

Een stel kaarten is genummerd
van **1 tot en met 9**.

De kaarten zijn geschud en
omgekeerd op tafel gelegd.

Je draait twee kaarten om.



Hoe groot is de kans dat **de som** van de twee kaarten **12** is?

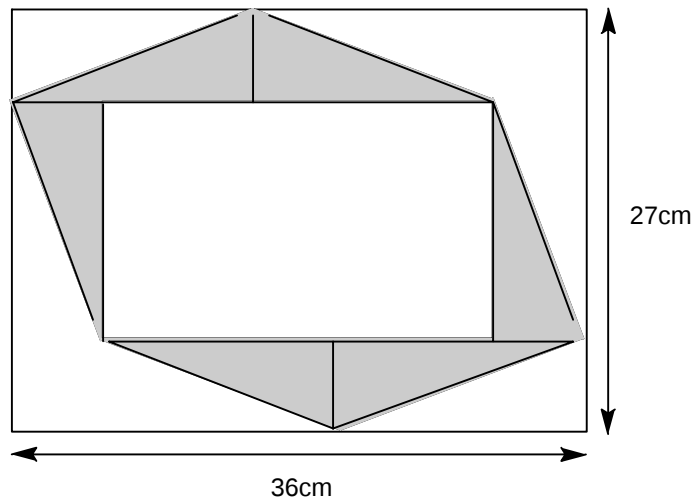


Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

10.1

10.2

Deze zeshoek bestaat uit 6 dezelfde driehoeken. De zeshoek is getekend binnen een rechthoek.



Bereken de oppervlakte van één van de driehoeken.

 _____ cm^2

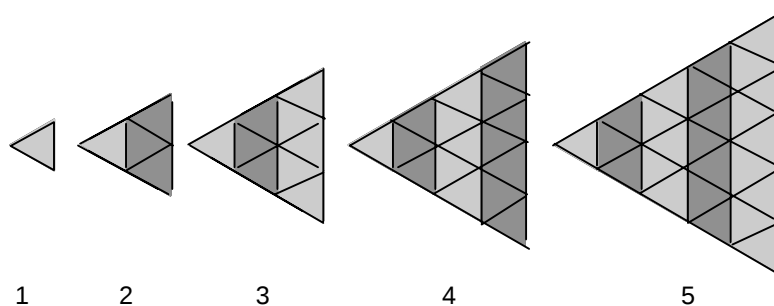


Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

11.1

11.2

Je ziet een reeks figuren, samengesteld uit licht- en donkergekleurde driehoeken.



nummer van figuur	1	2	3	4	5
aantal lichte driehoeken	1	1	6	6	15
aantal donkere driehoeken	0	3	3	10	10

De reeks zet zich voort.

Wat is het totale aantal licht- en donkergekleurde driehoeken in de
20^e figuur van de reeks?



Zijn er in de **50^e** figuur van de reeks meer **lichte** dan **donkere driehoeken**?



Ja / Nee



Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

Uit hoeveel **lichte** en **donkere driehoeken** bestaat de **35^e** figuur in deze reeks?



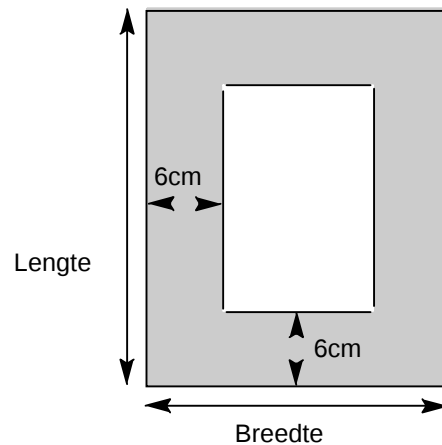
_____ lichte driehoeken

_____ donkere driehoeken



Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

Je ziet twee rechthoeken, de één binnen de ander.



niet op schaal

De verhouding van lengte en breedte van de grote rechthoek is 3 : 2

De verhouding van lengte en breedte van de kleine rechthoek is 2 : 1

De gearceerde strook is overal 6 cm breed.

Wat is de **lengte** van de **grootste** rechthoek?

 _____ cm



Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

Gebruik alle cijfers

1 2 3 4 5 6

om twee getallen **van drie cijfers** te maken die samen het grootste mogelijke
product leveren.

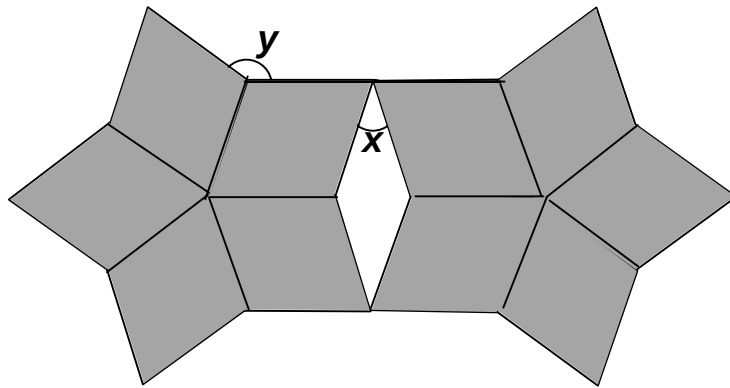


--	--	--

 X

--	--	--

Deze figuur bestaat uit tien dezelfde gearceerde ruiten.



Bereken hoek x .

 $\angle x =$ $^{\circ}$

15.1

Bereken hoek y .

 $\angle y =$ $^{\circ}$

15.2

Bronnen

Betts & Neihart (1988). 'Profiles of the gifted and talented'. In: *Gifted Child Quarterly* 32 (2), p.248-253.

Bonset, H., Ebberts, D. & Wientjes, H. (2003). *Nederlands verrijkt*. Enschede: SLO.

England, R. (2004). 'Enigma 1300'. In: *New Scientist*. 31 juli 2004, p.49.

Karp, A. (2003). 'Teaching to teach creatively.' In: *Proceedings of the third national conference on Creativity in Mathematics Education and the education of gifted students*. Rousse: Bulgaria.

Krüger, J. (2003). 'Creatief wiskundeonderwijs en onderwijs aan begaafde leerlingen'. In: *Euclides* 78 (6), p.270-274.

Krüger, J. (2003). 'Creativiteit testen'. In: *Euclides* 79 (3), p. 90-94.

Mönks & Ypenburg (1995). *Hoogbegaafde kinderen thuis en op school*. Alphen aan de Rijn: Samson.

Renzulli, J.S., Reis, S.M. & Smit, L.H. (1981). *The revolving door identification model*. Connecticut: Creative Learning Press.

Sheffield, L.J. (2003). 'Thinking like a mathematician: creating mathematically promising students'. In: *Proceedings of the third national conference on Creativity in Mathematics Education and the education of gifted students*. Rousse: Bulgaria.

Subotnik, R.F., Miserandino, A.D. & Olszewski-Kubilus, P. (1996). *Implications of the Olympiad Studies for the development of Mathematical Talent in Schools*. Paper at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. New York, april 1996.

Wieczerkowski, W., Cropley, A.J. & Prado, T.M. (2000). 'Nurturing talents/gifts in mathematics'. In: Heller, K.A. (ed.) *International Handbook of Giftedness and Talent*. Oxford: Elsevier.

Websites

www.vierkantvoorwiskunde.nl/wiskundeclubs/

www.slo.nl/hoogbegaafd

www.pythagoras.nu

www.cps.nl

www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/

digimap.slo.nl>aanpakindeklas>beoordeling>Rubrics_of_Rubrieken.doc/

Bijlage 1 Eigenschappen van hoogbegaafde leerlingen

1. *Hoge intelligentie*

Er wordt gesproken van hoogbegaafdheid als iemand een intelligentiequotiënt (IQ) heeft van 130 of hoger.

2. *Vroege ontwikkeling*

Hoogbegaafde kinderen zijn geestelijk vroegrijp en worden gekenmerkt door een ontwikkelingsvoorsprong. Zij kunnen meestal op vroege leeftijd al lezen, praten, schrijven en hebben een vroege ontwikkeling van getalbegrip. Hierdoor kunnen zij zich gemakkelijk leerstof uit hogere leerjaren eigen maken. Ook stellen zij op jonge leeftijd al levensbeschouwelijke vragen en denken zij al vroeg na over de zin van het leven.

3. *Uitblinken in meerdere gebieden*

Een bijzondere begaafdheid kan tot uitdrukking komen in motorische, sociale, artistieke en intellectuele vaardigheden. Vaak treden deze begaafdheidsvormen gecombineerd op en blinken hoogbegaafde leerlingen uit in meerdere gebieden, zoals bijvoorbeeld in taal en wiskunde. Hoogbegaafde leerlingen hebben op taalgebied een grote woordenschat en vertonen een zeer goed en adequaat woordgebruik.

4. *Gemakkelijk kunnen leren*

Hoogbegaafden hebben over het algemeen een zeer goed geheugen en kunnen hierdoor goed informatie onthouden en verwerken. Zij begrijpen nieuwe leerstof dan ook aanzienlijk sneller dan gemiddelde leerlingen en zijn daardoor sneller klaar met opdrachten en huiswerk. Hierdoor hebben zij vaak een leertempo dat twee tot vijf keer zo hoog ligt als van de gemiddelde leerling.

5. *Goed kunnen leggen van (causale)verbanden*

Hoogbegaafde leerlingen kunnen gemakkelijk (causale) verbanden leggen en hebben hierdoor een goed overzicht.

6. *Het makkelijk kunnen analyseren van problemen*

Hoogbegaafde leerlingen zijn snelle probleem-analyseerders. Zij kunnen snel vaststellen wat de aard van een probleem is. Daarnaast zijn hoogbegaafde leerlingen vaak vindingrijk in het ontwikkelen van eigen oplossingsmethoden. Dit kan soms problemen opleveren als zij zich een verkeerde oplossingsmethode hebben aangeleerd, omdat zij deze methode moeilijk weer los kunnen laten.

7. *Grote denksprongen*

Een begaafde leerling maakt grotere leerstappen en heeft daarom minder tijd nodig.

8. *Voorkeur voor abstractie*

Hoogbegaafde leerlingen kunnen goed abstract denken. Zij generaliseren gemakkelijker dan hun klasgenoten en hebben een goed overzicht van de

kennisgehalen. Zij hebben geen behoefte aan concretisering van de lesstof door het gebruik van voorbeelden.

9. Hoge mate van zelfstandigheid

Hoogbegaafde leerlingen willen liever niet geholpen worden en geven de voorkeur aan zelfstandig werken. Bij het werken in groepsverband vertoont de hoogbegaafde leerling veel initiatief en neemt vaak de leiding. Bovendien wil de leerling dingen graag op eigen wijze doen, bijvoorbeeld het zelf bedenken van een methode voor rekensommen.

10. Veel interesse/ motivatie/ energie

Het is belangrijk dat het onderwerp van de opdracht de leerling interesseert. Bij hoogbegaafde leerlingen is namelijk het kunnen een voorwaarde, maar het willen van even groot belang. Als het onderwerp aansluit bij de interesse van de leerling, dan is motivatie verzekerd. Er is aangetoond dat talent pas doorzet als de leerlingen plezier beleven aan de (leer)activiteiten. Een kenmerk van hoogbegaafde leerlingen is dat zij zeer leergierig zijn. Als een onderwerp de leerling interesseert, dan pluist hij het onderwerp vaak tot op de bodem uit. Maar het tegenovergestelde geldt ook: als een hoogbegaafde leerling geen interesse heeft voor een bepaald onderwerp, dan kan hij moeilijk de motivatie opbrengen om zich hierin te verdiepen.

11. Creatief/ origineel

In de opdrachten laten hoogbegaafde leerlingen vaak zien dat zij originele en creatieve ideeën en/of oplossingen hebben. Zij maken onverwachte zijsprongen en hebben grote verbeeldingskracht.

12. Perfectionistisch

Hoogbegaafde leerlingen zijn perfectionistisch aangelegd. Zij houden niet van half werk.

13. Apart gevoel voor humor

Hoogbegaafde leerlingen bezitten over het algemeen een apart gevoel voor humor.

14. Hoge mate van concentratie

Hoogbegaafde leerlingen kennen een hoge mate van concentratie en hebben daarbij een langere aandachtsspanne dan de gemiddelde leerling.

