E.W.A. de Moor

VAN VORMLEER NAAR REALISTISCHE MEETKUNDE

Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkunde-onderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw

VAN VORMLEER NAAR REALISTISCHE MEETKUNDE

Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw

CIP-GEGEVENS KONINKLIJKE BIBLIOTHEEK, DEN HAAG

Moor, E.W.A. de

Van vormleer naar realistische meetkunde. Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw. Utrecht CD β Press, Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen, Freudenthal Instituut, Expertisecentrum Reken-Wiskundeonderwijs, Universiteit Utrecht (CD-β wetenschappelijke bibliotheek, nr. 33). - Met lit. opg. -

ISBN 90-73346-40-1
Trefw: geschiedenis van het meetkundeonderwijs
Cover: Brouwer Uithof Utrecht
Press: Wilco, Amersfoort
Copyright: Freudenthal Instituut, Utrecht, 1999

VAN VORMLEER NAAR REALISTISCHE MEETKUNDE

Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw

From 'Vormleer' to Realistic Geometry
A historical-didactic research into geometry teaching to children of four to fourteen years of age during the nineteenth and twentieth centuries in the Netherlands
(with a summary in English)

Proefschrift ter verkrijging van de graad van doctor aan de Universiteit Utrecht,
op gezag van de Rector Magnificus, Prof. Dr. H.O. Voorma,
ingevolge het besluit van het College voor Promoties
in het openbaar te verdedigen
op maandag 26 april 1999 des middags te 12.45 uur

door
Edouard Willem Adriaan de Moor
geboren op 3 januari 1933 te Amsterdam

Promotoren:

Prof. dr. A. Treffers	Faculteit Wiskunde en Informatica Universiteit Utrecht
Prof. dr. K. van Berkel	Faculteit der Letteren Rijksuniversiteit Groningen

Co-promotor

Dr. R.A. de Jong	Faculteit Sociale Wetenschappen Universiteit Utrecht

In herinnering aan mijn vader Eduard C. de Moor (1888-1951)
onderwijzer en opvoeder

Voor mijn zoons Daan en Bart

Voorwoord

Mijn vader moest als onderwijzer van de zesde klas elk jaar adviezen over zijn leerlingen geven voor het vervolgonderwijs. Ik zat niet op zijn school, maar mij stuurde hij naar het gymnasium 'omdat ik niet zoveel aanleg voor wiskunde had en later beter een alfa-vak kon gaan studeren'. Zo kwam ik op het Barlaeusgymnasium terecht en daar ben ik hem nog altijd dankbaar voor. Niet alleen vanwege het genoten onderwijs, maar vooral vanwege de 'peergroup', waarin ik verzeild raakte. Wiskunde heb ik gehad van verschillende leraren, waaronder H. Mooij en J.K. Timmer, die nog figureren in dit boek. Zeer goede herinneringen bewaar ik aan mevrouw C. Faber-Gouwentak, die liet zien dat wiskunde iets anders is dan sommenmakerij.

Voor analytische meetkunde hadden we het uitstekende boek van Schrek, waarin portretten stonden van Descartes en Fermat. Die plaatjes bekeek ik toen vaak en ik vroeg me af hoe deze geleerden tot hun schitterende vondsten waren gekomen.

Op de universiteit gaf Heyting de meetkundevakken. Dat waren voortreffelijke colleges, waarin hij af en toe ook de historische achtergronden belichtte. Mijn eerste echte baan was aan mijn eigen oude school, waar ik onder meer geschiedenis van de wiskunde mocht geven. Jammer genoeg is het met de wet van 1968 weer verdwenen.

De jaren zestig waren woelige jaren, ook in het wiskundeonderwijs. We raakten in de ban van de New Math en de nieuwe didactische ontwikkelingen. Ik merkte hoe discontinu de aansluiting tussen de lagere en de middelbare school was en vroeg me af waarom de wiskunde van de lagere school alleen maar uit rekenen bestond. Wiskunde is toch de wetenschap van getal én ruimte! Waarom dan wel met de kleuters de ruimte verkend, zoals ikzelf op de kleuterschool had ervaren met het heerlijke fröbelmateriaal, en geen eenvoudige meetkunde voor de zes- tot twaalfjarigen?

Eind jaren zestig kwam ik in aanraking met Edu Wijdeveld, Fred Goffree en Adri Treffers. Zij hadden grootse plannen met het basisonderwijs en ik had het geluk dat ik in 1971 als medewerker van Wiskobas op het IOWO mocht komen werken. Er ging een nieuwe wereld voor mij open: de didactiek van het rekenonderwijs bleek een rijkere traditie te hebben dan die van het wiskundeonderwijs. Het waren hectische jaren, waarin ik met bijzondere collega's heb samengewerkt: de al genoemde Wijdeveld, Goffree en Treffers, maar ook de helaas al overleden Leen Streefland en Louis Gilissen. Verder Hans ter Heege, met wie ik een jaar lang aan meetkunde heb gewerkt, Jan van den Brink, Johan van Bruggen, Abbes Dekker, Huub Jansen, Jeanne de Gooijer-Quint, Rob de Jong en Henk Meijer. Zeer bijzonder waren de ervaringen met Hans Freudenthal, die – toen al 65 jaar – zich eerder als een jonge dynamische medewerker opstelde dan als de 'Éminence grise' van het wiskundeonderwijs. Vaak wordt Freudenthal als de instigator van Wiskobas afgeschilderd, maar zelf noemde hij zich liever de grootvader dan de vader van Wiskobas, daarmee doelend op het élan van Wijdeveld, Goffree en Treffers. De tien jaar van deze Wiskobas-tijd zijn voor mijn didactische en persoonlijke ontwikkeling van groot belang geweest.

Adri Treffers had in de jaren zestig al onderzoek gedaan naar de geschiedenis van het meetkundeonderwijs. In 1973 hebben Treffers en ik hierover een eerste publicatie het licht doen zien. Pas in het begin van de jaren negentig heb ik de draad van het historische werk weer opgepakt. Het gesnuffel in bibliotheken naar oude schoolboeken en tijdschriften wekte een soms eufore stemming over het onbekende verleden. Ik werd me ervan bewust dat we bij vernieuwingspogingen keer op keer tegen dezelfde problemen oplopen. Ook was het verrassend te merken dat sommige ideeën, waarvan wij nu wel denken dat ze origineel en wereldvernieuwend zijn, vaak al eerder bedacht waren, maar door de tand des tijds onder het stof verdwenen.

De Bibliotheek van de Universiteit van Amsterdam bezit een fantastische collectie oude schoolboeken en pedagogische tijdschriften. Helaas is de collectie van het Nationaal Schoolmuseum, die zich daar ook bevindt, nog niet ontsloten. Dank zij de hulp van Roelof Jansma heb ik daar toch menig pareltje boven water gekregen. Ook heb ik enkele malen op de zolder van het Nationaal Schoolmuseum te Rotterdam mogen zoeken tussen eindeloze stellingen met oud onderwijsmateriaal. Hiervoor ben ik de conservator Tijs van Ruiten zeer erkentelijk. Met mijn broer Wim reisde ik naar het Fröbelmuseum in Bad Blankenburg. Hij hielp mij met het ontcijferen van Fröbels handschrift en bood mij vaker hulp als germanist.

Agnes Jonker wees mij de weg in de wereld van de historisch-pedagogen. Ook stuurde zij mij enkele interessante archiefvondsten. Over Jan Versluys ontving ik veel nuttige informatie van Jan Goedheer, een van de laatste directeuren van de eens bekende uitgeverij Versluys. Goedheer leerde ik kennen via Wim Versluys uit de Verenigde Staten, kleinzoon van de uitgever en achterkleinneef van Jan. Van Dirk Struik kreeg ik het eerste Nederlandse boek over geschiedenis van de wiskunde van de hand van Jan Versluys. Ben Schasfoort hielp mij met de literatuur over de geschiedenis van het tekenonderwijs.

De onderzoeken van Christina Leeb-Lundberg en Elmer-Bussen Wagemann zetten mij op het spoor van de wiskundige aspecten van het fröbelmateriaal. Ik had het genoegen Wagemann persoonlijk te leren kennen en met hem over Fröbel te corresponderen. Van de antiquare Hannie Kalf kreeg ik het prachtige methodiekboek van Wiertz van Coehoorn cadeau. Siegbert Schmidt richtte mijn denken over Diesterweg en Christoph Selter deed mij de grote Duitse pedagogen beter begrijpen. Anita Lek en Peter Landweer herinnerden mij aan het meetkundewerk van respectievelijk Montessori en de Vrije School.

Bij mijn zoektocht naar wiskundige bronnen binnen de Nieuwe Schoolbeweging in Nederland wees Ligthart-specialiste Barbara de Jong mij op het werk van Van der Ley en Poot uit het begin van de twintigste eeuw.

In 1990 begon ik met Klaas van Berkel te corresponderen over Dijksterhuis. Onze discussies over diens rol tijdens het interbellum hebben mijn inzicht in deze sleutelfiguur verdiept. Met Henk Klomp voerde ik levendige discussies over de invloed van de tijdgeest op wetenschap en onderwijs. Van Henk van Bommel, schoon-

zoon van mevrouw Ehrenfest, kreeg ik een meetkundeboek van Sjochor'-Trotskij, dat uit haar persoonlijk bezit kwam. Dit was een gouden geschenk. Rudolf Troelstra vertaalde de belangrijkste stukken van dit Russische boek en hielp mij zo bij de onthulling van de bronnen waarop mevrouw Ehrenfest haar intuïtieve meetkundeonderwijs baseerde. De wetenschapshistoricus Viktor Frenkel uit Petersburg heeft de historische feiten hierover nagetrokken. Tamara van Bommel stelde haar fotoarchief over haar grootmoeder mevrouw Ehrenfest ter inzage. Van Pierre van Hiele kreeg ik informatie, zowel over het ontstaan van zijn niveautheorie als over mevrouw Ehrenfest. Verschillende (oud-)collega's konden nog verhalen over de Wiskunde Werkgroep rond de Tweede Wereldoorlog. Van Rolf Nihom kreeg ik alle jaargangen van het *Mededelingenblad* van deze pioniersgroep, een bijzondere bron voor mijn onderzoek. Via mevrouw H. van der Zijpp-Van Albada heb ik het authentieke materiaal van haar vader Piet van Albada kunnen bestuderen.

Voor een terugblik op het IOWO-werk heb ik de al genoemde oud-collega's van Wiskobas schriftelijk en mondeling ondervraagd. Edu Wijdeveld en Fred Goffree stelden mij bovendien persoonlijke documenten ter beschikking, waardoor ik bepaalde aspecten van de Wiskobas-historie tot in detail heb kunnen analyseren.

Ook de Wiskivon-medewerkers van toen – Gert van Barneveld, Frederik van der Blij, Aad Goddijn, Ger Janssen, Martin Kindt, Wim Kremers, Jan de Lange, Chrit Leenders, Bert Nijdam, Nanda Querelle, Nol van 't Riet, George Schoemaker en Wim Sweers – beantwoordden een enquête.

De gesprekken met Aad Goddijn en Martin Kindt over meetkunde en haar historie waren en blijven een bron van inspiratie. Michiel Doorman stond mij vaak ter zijde bij de historische aspecten van de logica.

Frederik van der Blij hielp mij met de ontstaansgeschiedenis van de COW in de jaren negentig. Bram Donkers en Herman van Die waren behulpzaam om het werkelijke verhaal van de kerndoelen voor het basisonderwijs te onthullen.

Van Raf Feys, Bob Jeffery, Siegbert Schmidt en Jean-Marie Kraemer kreeg ik oude leerplannen uit respectievelijk België, Engeland, Duitsland en Frankrijk.

Hennie Uiterwijk van het Cito en Vincent Jonker van het Freudenthal Instituut schiepen de voorwaarden voor een samenwerkingsproject over meetkunde op de basisschool. Samen met de toetsdeskundige Jan Janssen en de toets- en meetkundespecialist Jean-Marie Kraemer is het Pimbo-project uitgevoerd en beschreven. Verschillende collega's hebben hierbij weer geadviseerd, maar het meest praktisch was de proeftest-fase van deze toets met Jop van Galen, destijds twaalf jaar oud. Toen het materiaal statistisch bewerkt moest worden, was daar plotseling Julie Menne, die op haar beurt Marja van den Heuvel-Panhuizen en de statisticus en oud-collega Bert Nijdam inschakelde.

Voor het samenstellen van de enquêtes onder de schoolbegeleiders en PABO-docenten kreeg ik nuttige adviezen van Willem Faes, Ronald Keijzer en Wil Oonk. De niet bij naam bekende inzenders op de enquêtes leverden een grote respons.

Op mijn programmavoorstel kreeg ik reacties van Jan van den Brink, Kees Buijs, Herman van Die, Willem Faes, Els Feijs, Fred Goffree, Hans ter Heege, Sjoerd Huitema, Alda Kolste, Anita Lek, Frans Moerlands, Jo Nelissen, Anneke Noteboom, Hein van der Straaten, Wim Sweers, Ans Veltman en Johan Winnubst.

Dank zij de steun en faciliteiten van het Freudenthal Instituut heb ik het onderzoek niet alleen praktisch gaande kunnen houden, maar ook naar buiten kunnen brengen. Steun kreeg ik hierbij van Sylvia Eerhart, Ank van der Heijden, Betty Heijman, Han Hermsen, Bas Holleman, Vincent Jonker, John Rief en Ada Ritzer. Speciaal wil ik Ellen Hanepen noemen voor haar nauwgezette correctiewerk. Zeer in het bijzonder dank ik Marianne Moonen voor haar deskundigheid en enthousiaste inzet om dit boek in de eindfase te redigeren en vorm te geven.

Door de Historische Kring leerde ik Danny Beckers, Harm Jan Smid, Jan van Maanen, Dédé de Haan en Hessel Pot (opnieuw) kennen. Onze gemeenschappelijke interesse in de cultuur-historische aspecten van de wiskunde en het onderwijs bevorderde uitwisseling van gedachten en materialen. In Marjolein Kool vond ik niet alleen een motiverende studiegenoot, maar ook een hartelijke vriendin.

Maar ook uit een andere hoek kreeg ik adviezen, steun en belangstelling, met name van mijn zoon Bart, mijn zwager Quirijn Langelaan en van mijn oude vrienden en collega's: Joost van Gelder, die de laatste correctieronde minutieus uitvoerde, Johan Vink, Hans van den Bergh, Jan van Mierlo en de helaas al overleden Wim van Lakwijk. In de aanvangsfase kreeg ik nog raad van de onderwijshistoricus Nan Dodde. Michel Hofman van het Nederlands Instituut voor Hersenonderzoek gaf mij informatie over de actuele stand van het onderzoek van de cognitieve hersenfuncties. Els Feijs, Rosemary en Bob Jeffery checkten de vertaling van de summary.

Adri Treffers en Rob de Jong brachten mij op het idee een dissertatie-onderzoek te beginnen. Adri Treffers liet mij vrij in de wijze van onderzoek, maar hield op kritische wijze wel steeds de grote lijn, de structuur en de doelen in het oog. Dat hij – na bijna dertig jaar van samenwerking en vriendschap – nu mijn promotor is geeft een diepe voldoening. Rob de Jongs serieuze interesse, continu praktische begeleiding en vriendschap hielden het plezier in het werk gaande. Klaas van Berkel kritiseerde op subtiele en inspirerende wijze het werk vanuit een ander standpunt, waardoor vakidiotisme en zelfverheerlijking hopelijk voorkomen zijn. Ik ervaar het als een grote eer dat ik door een zo deskundig, multidisciplinair 'promotieteam' ben begeleid.

De hoogleraren P. Th. F. M. Boekholt, H.J.M. Bos, F. Goffree, D. Siersma en L. Verschaffel ben ik erkentelijk voor hun bereidwilligheid om dit proefschrift te beoordelen.

Al meer dan veertig jaar houd ik mij met hart en ziel met wiskunde en het onderwijs bezig; de laatste jaren vooral met de historie en dat aspect bevalt mij het meest. Misschien had mijn vader toch gelijk.

Ruscha, het boek is klaar, ik dank je voor je liefdevolle geduld.

Inhoudsopgave

Algemene inleiding 1

deel A 100 jaar vormleer: een mislukking

A0 Inleiding op deel A 13
A1 Anschauung und Form 17
A2 Herkomst en ontstaan van de vormleer 25
A3 Vormleer in Nederland (1817-1857) 33
A4 Verspreiding en acceptatie 51
A5 Wettelijke invoering (1857) 61
A6 Nieuwe impulsen 67
A7 Boeken van de Bouman-periode (1858-1875) 73
A8 Opleiding en examens 91
A9 Schoolpraktijk (na 1858) 99
A10 Discussies (1858-1878) 105
A11 Wetswijziging 1878 113
A12 Jan Versluys en het ontstaan van de vakdidactiek 119
A13 De vormleer van Versluys en zijn tijdgenoten (1875-1889) 127
A14 Tekenen en vormleer 143
A15 Stille onttakeling van de vormleer (1878-1889) 153
A16 Wettelijke afschaffing, maar ... 163
A17 Samenvatting en analyse van deel A 169
Bijlagen deel A 177
Noten deel A 183

deel B Van Fröbel tot Freudenthal, didactische denkers en doeners

B0 Inleiding op deel B 203
B1 Fröbel en het allereerste meetkundeonderwijs 207
B2 Opkomst van het empirisme, leren door doen 231
B3 Intuïtief of logisch-deductief? 255
B4 Opmaat tot grote veranderingen 281
B5 Vormende waarde, een historische constante 313
B6 Samenvattingen en analyse van deel B 341
Noten deel B 353

deel C Ontstaan van de realistische meetkunde

C0 Inleiding op deel C 371
C1 Internationale revolutie, nationale reactie 375
C2 De meetkunde van Wiskobas 389
C2.1 Meetkundige exploratie van Wiskobas (1971-1973) 391
C2.2 De realistische meetkunde van Wiskobas (1973-1975) 401

C2.3 Opvattingen over realistisch meetkundeonderwijs (1975) 408
C2.4 Meetkunde in het kleuteronderwijs (1976-1983) 417

C3 Didactisch onderzoek en traditionele onderwerpen 427
C3.1 Ontwikkeling van een leerlijn oppervlakte 429
C3.2 Blokjes bouwen als meetkunde voor de basisschool 437

C4 Implementatie 441
C4.1 Nieuwe methoden voor de basisschool (1975-1985) 443
C4.2 Voortgezet ontwikkelingswerk 445
C4.3 Effecten op leer- en studieboeken (1980-1995) 449
C4.4 Ontstaan van de kerndoelen 454

C5 De meetkunde van Wiskivon en haar effecten 459
C5.1 Het meetkundewerk van Wiskivon (1971-1980) 460
C5.2 Meetkunde in het voortgezet onderwijs (1980-1995) 467
C5.3 Meetkunde in *Mathematics in Context* 476

C6 Samenvattende conclusies, verificatie, analyse (1970-1995) 481
Bijlagen deel C 489
Noten deel C 503

deel D Staat van het meetkundeonderwijs op de basischool anno 1995
D0 Inleiding op deel D 515
D1 Proeftoets meetkunde op de basisschool 1995 519
D2 Inhoudelijk-kwalitatieve analyse van de proeftoets meetkunde 531
D3 Betekenis van meetkunde voor de basisschool 547
D4 Noodzaak van consensus 565
D5 Conclusies en discussie over de staat van het meetkundeonderwijs op de basisschool anno 1995 573
Bijlagen deel D 578
Noten deel D 581

deel E Slotbeschouwingen
E1 Historische opbrengsten 589
E2 Aanbevelingen 609
E3 Epiloog 617

Literatuur en bronnen 625
Register van personen 671
Summary 681
Over de auteur 693

Drie tijdbalken (los bijgevoegd)

Algemene inleiding

Dit proefschrift gaat over het meetkundeonderwijs in Nederland gedurende de negentiende en de twintigste eeuw. Het is de geschiedenis van een zoektocht naar een elementaire leergang meetkunde voor kinderen in het primair onderwijs en de eerste klassen van het secundair onderwijs ter voorbereiding op de meer formele meetkunde.

In de eerste plaats beschrijft het de geschiedenis van de *ontwikkeling van een schoolvak*, dat sinds zijn ontstaan aan het begin van de negentiende eeuw een aantal diepgaande veranderingen heeft ondergaan. In de tweede plaats geeft de studie een beeld van de *huidige stand van zaken* van het meetkundeonderwijs op de basisschool. Hiervan uitgaande worden ten slotte *mogelijke ontwikkelingen voor de toekomst* geschetst.

De samenhang tussen de eerste twee hoofddoelen van het onderzoek komt tot uiting in wat gewoonlijk 'historisch besef' wordt genoemd. Hiermee wordt bedoeld dat vrijwel alles waarmee wij ons vandaag bezighouden zijn wortels in het verleden heeft: een aspect, dat bij de ontwikkeling van een schoolvak vaak minder belangrijk wordt geacht.

De aanleidingen tot de veranderingen binnen het schoolvak meetkunde waren vaak complexen van gebeurtenissen en ontwikkelingen die zich binnen de Nederlandse en meer in het algemeen in de West-Europese samenleving en cultuur hebben voltrokken. Het onderhavige onderzoek moet derhalve begrepen worden in samenhang met de nationale en internationale wetenschappelijke, maatschappelijke en onderwijskundige ontwikkelingen. Schubring (1978) heeft in zijn historische studie over het 'genetische principe in de wiskundedidactiek' met nadruk op deze samenhang van *wetenschap, maatschappij en school* gewezen.[1]

Omdat het hier onmogelijk is de historische ontwikkelingen op alle drie gebieden diepgaand in kaart te brengen, zijn deze verbanden uitsluitend onderzocht waar ze van betekenis zijn voor het specifieke onderwerp van deze studie. Onderzoek en analyse, gebaseerd op deze werkwijze, maken het mogelijk een aantal historisch-didactische ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs te verklaren. Het behoeft geen betoog dat zich gedurende de laatste tweehonderd jaar op alle drie gebieden belangrijke nieuwe ontwikkelingen hebben voltrokken en dat deze zich steeds opnieuw aandienen.

Op het wetenschappelijk vlak zijn het de wiskunde zelf, in het bijzonder de meetkunde, maar vooral de pedagogiek en de psychologie, die als dynamische ontwikkelingssystemen het onderwijs beïnvloed hebben en dat blijven doen.

De omwentelingen in de maatschappij zijn in diezelfde periode gigantisch geweest. Vooral de industriële revolutie in de negentiende eeuw en de democratisering van de maatschappij in de twintigste eeuw zijn van niet geringe betekenis gebleken voor de ontwikkelingen in het onderwijs.

Ten slotte is in samenhang met die maatschappelijke en politieke veranderingen het onderwijs zelf uitgegroeid tot een instituut dat een sleutelrol in onze maatschappij vervult. Door de grotere deelname aan het onderwijs, door de toenemende differentiatie van onderwijssoorten en -vormen en door de steeds langere opleidingsduur worden aan de specifieke vakken nieuwe eisen gesteld ten aanzien van *motivering, leerplanontwikkeling, doelbeschrijving, methodiek en didactiek.*

Deze vier thema's van het meetkundeonderwijs aan vier- tot veertienjarigen gedurende de laatste tweehonderd jaar vormen de kernpunten van dit onderzoek en bepalen de afgrenzing van het onderzoeksgebied en de formulering van de onderzoeksvragen.

Vormleer en meetkunde

De titel van dit boek geeft al aan dat *vormleer* (Formenlehre) enige verwantschap heeft met meetkunde. Vormleer was in de negentiende eeuw een nieuw onderwijsvak, waarmee men de vermogens, vooral de geestelijke, van jonge kinderen (soms reeds vóór hun vierde jaar) wilde ontwikkelen. Het vak had een duidelijk meetkundig aspect omdat het vormbegrip centraal stond. *Meetkunde* kende door de *Elementen* van Euclides al een eeuwenlange traditie en had binnen het onderwijs het logisch leren redeneren als belangrijkste doel. Veel vormleerboeken eindigden met de behandeling van de belangrijkste stellingen uit de euclidische meetkunde. De wijzen waarop dit werd uitgewerkt, verschilden echter sterk. Voor sommige boekenschrijvers was vormleer meer dan een 'leer der vormen', zodat afhankelijk van de auteur ook de doelen verschilden. Daardoor heerste er van meet af aan onduidelijkheid over inhoud, doel en plaats van het vak. Een duidelijke omschrijving van vormleer is dus vooraf niet te geven. Ook al omdat de vormleer gedurende de negentiende eeuw tot *aanschouwelijke meetkunde* evolueerde, waardoor weer de basis werd gelegd voor nieuwe didactische ontwikkelingen van het aanvankelijk meetkundeonderwijs.

Kader van het onderzoek

De studie is beperkt tot het onderwijs aan leerlingen van vier tot veertien jaar, maar dit verschilt per deel van de studie. Voor het gehele onderzoek ligt de nadruk vooral op de leeftijdsgroep van zes tot twaalf jaar.

Voor de negentiende eeuw richt het onderzoek zich alleen op het allereerste onderwijs en wordt afgezien van allerlei soorten van vervolgonderwijs, die toen voorkwamen. We noemen dit de lagere school en voor de allerjongsten de bewaarschool. De kinderen verbleven daar zeer onregelmatig en soms ook maar tot een bepaalde leeftijd, zodat dus bij lagere school, zeker tot het midden van die eeuw, niet gedacht kan worden aan het vaste leeftijdsniveau van zes tot twaalf jaar. Maar in die leeftijdsgroep werd (en wordt) de basis voor kennis en vaardigheden van de meest elementaire vakken gelegd. Tot deze vakken behoren van oudsher lezen, schrijven en

(aanvankelijk in mindere mate) rekenen. En in de loop van de negentiende eeuw werd ook vormleer onder de basisvakken van de lagere school geschaard. Het is de merkwaardige geschiedenis van de vormleer, die de problematiek van het vak meetkunde voor de kinderen op de lagere school direct blootlegt. De verschijning van dit vak verklaart de keuze van het aanvangspunt van de onderzochte periode. Maar ook het feit dat vanaf het begin van de negentiende eeuw het onderwijs in Nederland een meer georganiseerd karakter kreeg, was een goede reden om dit tijdstip als startpunt te nemen.

Het eindpunt van de onderzoeksperiode is rond het jaar 2000, waardoor ook de jongste geschiedenis van het aanvankelijk meetkundeonderwijs in het onderzoek betrokken wordt. In deze recente geschiedenis liggen de vertrekpunten voor de beschouwingen voor de toekomst.

De afgrenzing van het onderwerp van onderzoek wordt bepaald door de historische ontwikkeling van de vakinhouden van de schoolmeetkunde voor de genoemde leeftijdsgroepen, maar vooral door die van de methodische en didactische aspecten ervan.

Vierdeling

In verband met de voor deze studie grote tijdsspanne, door de vele onderwijskundige en maatschappelijke veranderingen, maar vooral in verband met de zich steeds wijzigende opvattingen over meetkunde als schoolvak tijdens de laatste twee eeuwen, is het boek in vier inhoudelijke delen opgesplitst. De eerste drie delen (A, B en C) volgen de historie min of meer chronologisch, het vierde deel D is van andere aard en geeft een beeld van de staat van het vak meetkunde op de basisschool anno 1995. Aldus valt de studie uiteen in de volgende perioden en onderwerpen:

deel A (1800-1890)	:	100 jaar vormleer: een mislukking.
deel B (1890-1970)	:	Van Fröbel tot Freudenthal.
deel C (1970-heden)	:	Ontstaan van de realistische meetkunde.
deel D	:	Staat van het meetkundeonderwijs op de basisschool anno 1995.

Deel A beschrijft de geschiedenis van de vormleer, een kortstondig fenomeen in de onderwijsgeschiedenis van de negentiende eeuw. In dit deel ligt de nadruk op het lager onderwijs en in iets mindere mate op het bewaarschoolonderwijs.[2] Het meetkundeonderwijs op de Franse scholen, Latijnse scholen, Gymnasia en de HBS wordt buiten beschouwing gelaten. Ten eerste omdat dit deels al onderzocht en beschreven is (Smid, 1997), maar vooral omdat zich op dat gebied geen didactische ontwikkelingen hebben voltrokken die van belang waren voor de onderzoeksdoelen van de onderhavige studie.

In deel B komt de periode aan bod waarin meetkunde geen onderwijsvak meer was op de lagere school. Er hebben zich in die tijd echter belangwekkende ontwikkelingen en discussies over aard en doel van het aanvankelijk meetkundeonderwijs voltrokken. Deze beschrijving is chronologisch geordend en gecentreerd rond de belangrijkste 'didactische denkers en doeners' van dat tijdsgewricht: Reindersma, Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa, Dijksterhuis, het echtpaar Van Hiele, en Freudenthal. Hoewel deze kopstukken zich hoofdzakelijk met het allereerste meetkundeonderwijs van het voortgezet onderwijs hebben beziggehouden, zijn hun bijdragen ook van invloed geweest op de latere ontwikkelingen in de basisschool. Een apart hoofdstuk in deel B is gewijd aan het meetkundige werk van Friedrich Fröbel, omdat dit vanaf het einde van de negentiende eeuw grote invloed heeft gehad op het *Nederlandse kleuteronderwijs*.

De delen A en B vormen de historische grondslag voor deel C dat de jongste geschiedenis van dit vak beschrijft, waarbij vooral het meetkundewerk van het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO) uit de jaren zeventig geanalyseerd wordt.

Deel D behandelt de resultaten van een viertal empirische onderzoeken, die in 1995 door de auteur van deze studie in samenwerking met andere onderzoekers van het Freudenthal Instituut en het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling (Cito) zijn uitgevoerd.[3] Deze worden aangevuld met de opbrengsten van een enquête onder een aantal deskundigen over een programmavoorstel voor meetkunde op de basisschool uit 1997.

Aard en werkwijze van het onderzoek

De historische delen A, B en C vormen een *ideeëngeschiedenis* van de wijze waarop het vak meetkunde als leervak voor kinderen van vier tot veertien jaar is gemotiveerd en hoe getracht is dit uit te werken in leerboeken, handleidingen en studieboeken. Het zwaartepunt ligt daarbij op de vraag naar de historische ontwikkelingslijn van de didactiek. Het gemeenschappelijke in de delen A, B en C is de historische draad, maar toch verschillen deze delen onderling van aard, hetgeen mede in de gevolgde methoden van onderzoek en beschrijvingswijzen tot uiting komt.

In deel A ligt de nadruk op het ontstaan van het nieuwe vak vormleer op de lagere school. Een belangrijk onderzoekspunt is de beïnvloeding die voor dit vak is uitgegaan van het Duitse taalgebied. Hiervoor is gebruik gemaakt van een aantal oorspronkelijke bronnen. Voor de Nederlandse situatie is deze ontwikkelingsgeschiedenis door middel van getalsmatige gegevens over schoolboeken en examens ook op meer kwantitatieve wijze onderbouwd. Er is gebruik gemaakt van *primaire bronnen* als leerboeken, handleidingen, onderwijstijdschriften, archiefstukken, algemene onderwijsverslagen van de regering en van de verslagen van de algemeen hoofdinspecteur Wijnbeek.

Deel B kan in zekere zin als een intermezzo tussen de delen A en C worden opgevat. De ontwikkelingen in de pedagogiek en psychologie aan het eind van de negentiende en aan het begin van de twintigste eeuw trokken de aandacht van de didactici die het wiskundeonderwijs vanaf toen op een meer wetenschappelijke manier gingen benaderen. Deze ontwikkelingen voltrokken zich, zeker wat het basisonderwijs betreft, op een zekere afstand van het feitelijke onderwijs. De discussies over deze ontwikkelingen die door een aantal belangrijke Nederlandse didactici en denkers over het wiskundeonderwijs werden gevoerd, worden gehistoriseerd, vergeleken met internationale en nationale ontwikkelingen en in verband gebracht met de latere ontwikkelingen van de jaren zeventig. Deel B is voornamelijk gebaseerd op literatuuronderzoek, omdat het in deze periode vooral om de ideeënontwikkeling gaat.

Deel C over de jongste geschiedenis van het aanvankelijk meetkundeonderwijs berust op literatuur- en archiefonderzoek en op persoonlijke ervaringen van de auteur. Tevens worden hierin de resultaten betrokken van een tweetal *enquêtes* uit 1996 onder de *medewerkers* van het IOWO, die in de jaren zeventig het leerplanontwikkelingswerk voor meetkunde hebben uitgevoerd.

Voor de eerste maal in de geschiedenis van het reken-wiskundeonderwijs is in 1995 door middel van een grootschalige test het niveau van het meetkundeonderwijs aan het einde van de basisschool gepeild. In deel D wordt verslag gedaan van de ontwikkeling van dit *empirische onderzoek*, waarbij de opbrengsten aan een kwantitatieve en kwalitatieve analyse worden onderworpen. Verder is door middel van een drietal enquêtes onder leraren basisonderwijs, opleiders en schoolbegeleiders een onderzoek gedaan naar de acceptatie en plaats van meetkunde op de basisschool, dat sinds 1993 ook voor dit schoolniveau een officiële status heeft verworven. Ten slotte wordt in deel D naar aanleiding van een actueel programmavoorstel een *enquête* onder een aantal *deskundigen* geanalyseerd.

De verschillende geaardheid van de onderscheiden delen is allereerst gelegen in het feit dat het onderwerp van studie zowel verschillende niveaus van het onderwijs – kleuterschool, lagere school en voortgezet onderwijs – bestrijkt als in het gegeven dat meetkunde niet steeds als verplicht vak voorkwam. Bovendien heeft het onderzoek een multidisciplinair karakter: het hoofdthema is de reken-wiskundedidactiek, maar er dienden ook algemeen-historische, onderwijskundig- en pedagogisch-historische aspecten in beschouwing genomen te worden. Dit bracht methoden van onderzoek en beschrijving mee, die voor elk van de historische delen A, B en C het meest geëigend waren. Hiervan wordt per deel verantwoording afgelegd. Bovendien vereiste het empirische onderzoek van deel D een methodologie, die uiteraard van geheel andere aard is dan die van de historische delen. Toch bepaalt het leidende thema van het meetkundeonderwijs aan jonge kinderen de rode draad van het totale boek, hetgeen ook in de *slotbeschouwingen* van deel E tot uiting komt. Om die draad niet kwijt te raken, zijn af en toe recapitulaties, verwijzingen en explicaties over het

vervolg van het betoog noodzakelijk. Om deze reden is ook veel secundaire informatie, waaronder biografische gegevens, in de noten opgenomen.

Historisch-didactisch onderzoek

Onderzoek naar de historische ontwikkelingen van specifieke leervakken is in Nederland een tamelijk onontgonnen onderzoeksgebied.[4] Er bestaat in dit domein nog nauwelijks een traditie, laat staan een theoretisch kader voor hetgeen in deze studie als historisch-didactisch onderzoek wordt bestempeld.

Wolthuis (1985) heeft in een verkennende studie over de theorievorming voor de Nederlandse onderwijsgeschiedenis het werk van een aantal onderzoekers geanalyseerd en gekritiseerd.[5] Daarbij hanteerde hij een achttal criteria waaraan een theoretisch onderzoeksmodel zou moeten voldoen. Deze criteria zijn toegesneden op de algemene onderwijsgeschiedenis, waarbij het begrip 'onderwijsstrijd' centraal staat. Het betreft periodisering en een samenhangende analyse van maatschappelijke en onderwijsstructurele invloeden en belangen. Eén criterium springt in verband met het onderhavige onderzoeksgebied in het oog, namelijk waar Wolthuis wijst op de noodzaak van 'analyse van onderwijsinhouden'.

> 'Naast veranderingen in de systeemaspecten van het onderwijs dienen ook veranderingen in onderwijsinhouden te worden beschreven en verklaard. Hiertoe dienen zowel de kennisinhouden, als de didactische en school-organisatorische uitgangspunten te worden gerekend. Verandering van onderwijsinhouden kan een direct oogmerk zijn van onderwijsbelangengroepen, maar ook een (onbedoeld) neveneffect van veranderingen in het onderwijssysteem.' (Wolthuis, 1985, p. 246)

Ook dit criterium blijkt bij Wolthuis in dienst te staan van onderzoek naar algemene onderwijsveranderingen. In de onderhavige studie echter is nu juist de onderwijsinhoud zelf als object van onderzoek gekozen. Het gaat hierbij om het traceren van de veranderingen van de aard en functie van het vak meetkunde en haar didactiek. Weliswaar spelen de andere door Wolthuis genoemde criteria daarbij ook een rol, maar waar deze bij onderzoek in de algemene onderwijsgeschiedenis een hoofdrol vervullen, zijn ze voor vakspecifiek historisch onderzoek van ondergeschikte betekenis.

We staan derhalve in de Nederlandse situatie voor de opgave zelf een wetenschappelijk kader ten behoeve van het historisch-didactisch onderzoek te scheppen.[6] Het werk van Schubring biedt aanknopingspunten die vergelijkbaar zijn met de algemene criteria van Wolthuis betreffende de samenhang van maatschappelijke en onderwijsstructurele factoren. Omdat in historisch-didactisch onderzoek het vak en de bijbehorende didactiek centraal staan, is in eerste instantie gekozen voor bestudering van de meest directe bronnen: de school- en studieboeken en de onderwijstijdschriften.[7]

De genoemde samenhang van de ontwikkeling van het schoolvak in relatie tot de wetenschappelijke en maatschappelijke ontwikkelingen vormt aldus het onder-

zoekskader van het historisch-didactisch onderzoek in kwestie. Dit vereist tevens algemeen-historisch, sociaaleconomisch-historisch, pedagogisch- en onderwijs-historisch (literatuur)onderzoek. Wat betreft het onderwijs-historische aspect zijn een aantal studies over de Nederlandse situatie voorhanden, die een degelijk kader bieden, zoals het werk van Dodde (1983), Boekholt en De Booy (1987), Lenders (1988) en Mandemakers (1996). Voor de meer algemeen-historische achtergronden en sociaal-economische geschiedenis is onder meer gebruik gemaakt van Brugmans (1961), Kossmann (1986) en Boogman (1988).

Onderzoeksvragen

Zoals gezegd staan twee hoofddoelen centraal. Het eerste is de feitelijke historiografie van het aanvankelijk meetkundeonderwijs in Nederland, die tevens beschouwd dient te worden in het perspectief van het tweede hoofddoel: een bijdrage tot analyse van de huidige situatie en tot verdere ontwikkeling van dit leervak. Daartoe zijn vijf centrale onderzoeksvragen van historisch-didactische aard geformuleerd. De zesde onderzoeksvraag heeft een actueel karakter en betreft de opbrengsten van het empirische gedeelte van deze studie.

1 *Welke constanten en veranderingen zijn waarneembaar in deze historie in de aard en inhoud van het meetkundeonderwijs?*

Getracht zal worden antwoorden te geven op de vragen over het ontstaan van de vormleer in de negentiende eeuw en de werking van de invloedssferen, zowel nationaal als internationaal. De betekenis van de vormleer voor de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs in het voortgezet onderwijs zal onderzocht worden. Hoe kwamen in de twintigste eeuw de ideeën voor een minder formeel en meer realistisch meetkundeonderwijs tot stand? Welke onderwijsvisies lagen daaraan ten grondslag en in welke mate hebben de wetenschappelijke ontwikkelingen van toen dit proces beïnvloed?

2 *Welke constanten en veranderingen zijn waarneembaar in deze historie in de didactiek?*

In het bijzonder zal aandacht besteed worden aan de volgende belangrijke didactische kwesties: de rol van het genetische principe, van de heuristische leerwijze en van het aanschouwelijkheidsprincipe.

3 *Welke constanten en welke veranderingen zijn waarneembaar in deze historie in de doelstellingen?*

Hoe kwamen de doelstellingen tot stand en hoe werden ze gelegitimeerd? In het bijzonder zal het vraagstuk van de vormende en de praktische waarde in zijn historische context beschouwd worden.

4 *Hoe zijn de processen verlopen die tot officiële invoering c.q. afschaffing van de vormleer/meetkunde hebben geleid?*

Wie waren hierin de toonaangevende instituties en/of personen? Hoe vonden de discussies plaats? Welke waren de argumenten bij de ingenomen standpunten? Welke was en is de rol van de overheid hierbij?

5 *Welke betekenis kan het onderhavige historische onderzoek hebben voor het heden?*

Kan uit het historisch-didactische onderzoek lering getrokken worden voor de programmatische invulling, de leerplanontwikkeling en de ontwikkeling van de didactiek van meetkunde op de basisschool van nu en van de toekomst?

6 *Wat zijn de opbrengsten van de empirische onderzoeken anno 1995 en 1997?*

Welke aanbevelingen zijn te doen op grond van dit onderzoek naar de huidige stand van zaken van het meetkundeonderwijs op de basisschool?

Structuur van het boek

De vierdeling van deze studie en de geformuleerde onderzoeksvragen stellen bepaalde eisen aan de structuur van het boek als geheel. Aan het eind van elk van de historische delen A, B, en C zijn per deel samenvattende conclusies en analyses gegeven. Omdat deze drie delen als zelfstandige perioden opgevat kunnen worden, zijn de betreffende bijlagen en noten van elk deel direct daarachter opgenomen.

Deel D is als een op zichzelf staand onderzoek te beschouwen. Leidraad is hier de zesde onderzoeksvraag, die op de actuele situatie van het meetkundeonderwijs op de basisschool gebaseerd is. Omdat deze kwestie tamelijk los staat van de historische vragen, vindt de beantwoording direct aan het eind van deel D plaats en dus voorafgaand aan de beantwoording van de vragen 1 tot en met 5. Net als bij de voorgaande delen zijn ook hier de bijlagen en noten direct achter de gehele tekst opgenomen.

Het slotdeel E bestaat uit: E1, E2 en E3. Met de bespreking van de eerste vijf onderzoeksvragen levert hoofdstuk E1 de historische opbrengsten op, waarmee tevens een algemene terugblik op het historische onderzoek in zijn totaliteit wordt gegeven. In E2 wordt, op grond van zowel het historische als het actueel-empirische onderzoek, een reeks aanbevelingen gedaan waarmee de historische en actuele opbrengsten van het onderzoek met elkaar in verband worden gebracht. In E3 volgt een korte epiloog.

De literatuurlijst is geordend naar de verschillende categorieën van bronnen die voor dit onderzoek zijn benut. Een verantwoording van de ordening gaat aan deze lijst vooraf.

In drie tijdbalken, die los zijn bijgevoegd, zijn de historische ontwikkelingen

globaal gevisualiseerd. Deze bieden de mogelijkheid om praktische informatie over specifieke onderdelen snel te traceren. Ook het register van personen kan daarbij van dienst zijn.

Noten

1 Het genetische principe wordt op twee manieren gebruikt. Onder het 'historisch-genetische' principe wordt een didactiek verstaan, waarbij de historische ontwikkeling van het vak in 'versneld' tempo doorlopen wordt. Bij het 'psychologisch-genetische' principe dient de didactiek zo ingericht te zijn dat rekening gehouden wordt met de ontwikkelingsfasen van het lerende kind. Zie Schubring (1978).

2 Van dit deel A zijn twee samenvattende artikelen verschenen:
- Moor, Ed. W. A. de (1995). 'Vormleer- an innovation that failed'. *Paedagogica Historica, New Series XXXI* (1), pp. 103-123.
- Moor, Ed. W. A. de (1996). '100 jaar vormleer: een mislukking'. *De Negentiende Eeuw. XX* (2) pp. 113-127.

3 De resultaten van deze onderzoeken zijn reeds gepubliceerd via een drietal artikelen in het *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* (1996-1997) *15*(2,3,4). De auteurs zijn E. de Moor, J. Janssen, J-M. Kraemer en J. Menne.

4 A.J.E.M. Smeur promoveerde in 1960 bij Dijksterhuis op *De Zestiende-eeuwse Rekenboeken.* Er bestaan tot nu toe twee dissertaties, die zich specifiek en systematisch tot het onderwijs in rekenen en wiskunde bepalen: een over de geschiedenis van het rekenonderwijs in de negentiende en de twintigste eeuw van A. Leen (1961) en een over het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw van H.J. Smid (1997) (zie literatuurlijst). Het proefschrift van M. Kool (1999) *Die conste vanden getale* handelt over de Nederlandse rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw en bevat ook hoofdstukken over het rekenonderwijs en de didactiek.
S. La Bastide-van Gemert (Groningen) heeft een promotie-onderzoek onder handen naar het didactische werk van Freudenthal. D. Beckers (Nijmegen) heeft een proefschrift in voorbereiding over wiskundebeoefening en wiskundeonderwijs in Nederland gedurende de periode 1750-1850. B.A. van Amerom bereidt een dissertatie over het aanvankelijk algebraonderwijs voor waarin ook de historische ontwikkeling een rol speelt.
In voorbereiding is een boek over het wiskundeonderwijs in de twintigste eeuw, dat in 2000 zal verschijnen ter gelegenheid van het 75-jarig bestaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Verder wordt in de tijdschriften *Euclides*, *Nieuwe Wiskrant*, *Willem Bartjens*, *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* en *Pythagoras* met enige regelmaat aandacht aan historische aspecten besteed.
Ook het boek van Goffree (1985) *Ik was wiskundeleraar* biedt aanknopingspunten voor historisch-didactisch onderzoek.
Buiten het reken- en wiskundeonderwijs zijn ons twee onderzoeken op het gebied van het tekenonderwijs bekend (Van Rheeden, 1988 en Asselbergs, 1989) (zie literatuurlijst). Verder een studie naar de schrijfvaardigheid in de negentiende en twintigste eeuw (Geel, 1989) en een historisch-didactisch onderzoek van het leervak Duits (Kuiper, 1961).

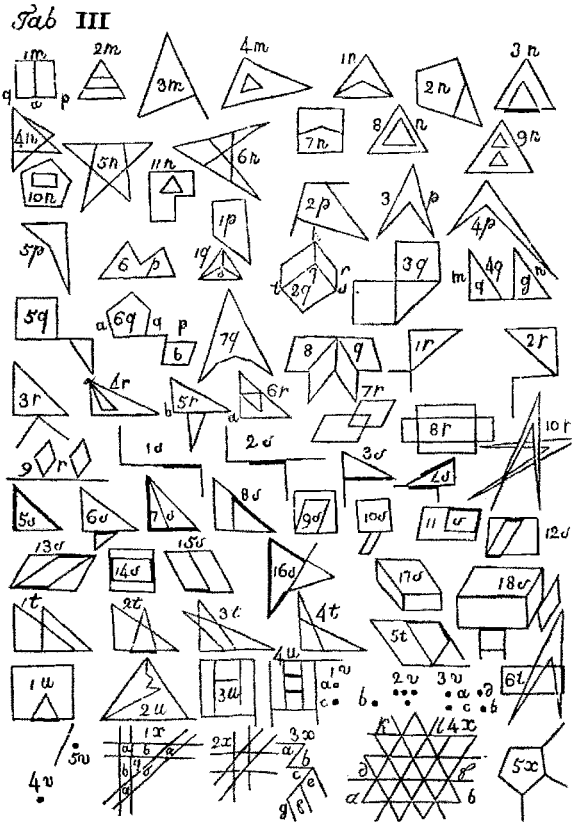
5 Het betreft het werk van Idenburg, Matthijssen, Dodde, Archer en Stuurman.

6 Ook de in noot 4 genoemde historisch-didactische onderzoeken besteden geen aandacht aan een historisch-theoretische inkadering.

7 In verband met de beoogde beschrijving van de ideeënontwikkeling is archiefonderzoek tot het meest noodzakelijke beperkt. Hierdoor zijn detailkwesties, zoals de precieze gang van zaken rond de afschaffing van de vormleer in 1889, niet diepgaand onderzocht.

DEEL A

100 jaar vormleer: een mislukking



eene gymnastiek voor den geest
(Tweede Kamer, 1857)

A0 Inleiding op deel A

De negentiende eeuw, de periode waarin deel A zich afspeelt, is een dynamische en boeiende episode geweest, zowel in de wetenschap als in de maatschappij als in het schoolwezen. Voor de wetenschappelijke meetkunde wordt deze tijd wel de gouden eeuw genoemd, de pedagogiek en de psychologie begonnen zich systematisch en empirisch-wetenschappelijk te ontwikkelen, in maatschappelijk opzicht vond een doorbraak plaats naar een humaner en democratischer vorm, de industriële revolutie legde de basis voor een geheel nieuw wereldbeeld en het onderwijs kreeg een erkende en formele plaats in onze maatschappij, waardoor het een hefboomfunctie voor de volksontwikkeling ging vervullen. In het bijzonder ontwikkelde zich in West-Europa de volksschool en daarmee ook de didactiek van de verschillende leervakken.

Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1826) is een van de pedagogen die gedurende het eerste deel van de negentiende eeuw grote invloed heeft uitgeoefend op het ontstaan en de inrichting van de volksschool. Hij was een romantische idealist, die een kindgerichte pedagogiek nastreefde, maar tevens ook praktische methoden voor het onderwijs ontwikkelde. De vormleer, die in dit deel A centraal staat, is één van zijn scheppingen.

In Nederland ontstonden ten tijde van de Bataafse Republiek de eerste onderwijswetten (1801, 1803 en 1806). Vanaf toen begon de nationale overheid, onder leiding van Jan Hendrik van der Palm (1763-1840), de Agent van Nationale Opvoeding (minister) van 1799 tot 1806, deel te nemen aan de onderwijsbemoeienissen. Niet alleen met voorwaarden tot inrichting en uitvoering, maar ook nadrukkelijk met vorm en inhoud van het onderwijs. Vanaf toen werden er door de centrale overheid eisen gesteld ten aanzien van het onderwijs. Het schooltoezicht (inspectie) werd ingesteld en geregeld (Dodde, 1968). Er werd een begin gemaakt met het oprichten van rijkskweekscholen voor onderwijzers (Turksma, 1961), bij wet kwamen er bekwaamheidseisen voor onderwijzers en de diplomering werd gereglementeerd. Vanaf 1800 liet de overheid een maandelijks tijdschrift verschijnen, dat tot 1877 onder verschillende benamingen (*Bijdragen, Nieuwe Bijdragen*) heeft gefunctioneerd. Zo heeft Adriaan van den Ende (1768-1846), aanvankelijk als 'amanuensis' bij Van der Palm, later als inspecteur-generaal van het onderwijs, getracht een zekere uniformering tot stand te brengen. Een directe beïnvloeding van vorm en inhoud van het onderwijs vinden we bijvoorbeeld in diens *Handboek voor onderwijzers* (1803) en een verplichte *Algemeene Boekenlijst*.[2]

Dit streven naar volksverheffing had zijn wortels in het denken van de Verlichting, waarbij in Nederland sprake was van een algemeen christelijke oriëntatie, hetgeen wil zeggen dat 'rede en geloof hand in hand gingen' (Lenders, 1988). Deze beweging had in de achttiende eeuw reeds de stoot gegeven tot de oprichting van de 'Maatschappij tot Nut van 't Algemeen' (ook wel 't Nut genoemd), welke vereni-

ging zo veel belangrijke bijdragen tot de verbetering van het Nederlandse onderwijs heeft geleverd.

Volgens het *Handboek* van Van den Ende moest een geheel nieuwe leermethode ingevoerd worden, waarbij het tot dan toe geldende systeem van hoofdelijk (individueel) onderwijs vervangen diende te worden door het klassikale systeem. Als doelen voor het onderwijs werden gepostuleerd: de ontwikkeling van de verstandelijke, morele en fysieke vermogens: het hoofd, het hart en het lichaam. Het eerste valt uiteen in het leren lezen, schrijven en rekenen als vakspecifieke doelen en tevens in een meer algemene doelstelling, die omschreven wordt als 'de vermogens van het verstand te ontwikkelen, hetzelve op te scherpen en met zulke kundigheden te verrijken, als in iederen stand onontbeerlijk zijn' (*Handboek*, p. 19). De gedachten tot deze volksverlichting hebben kans gekregen ook werkelijk wortel te schieten doordat deze ideologie niet radicaal was en er niet op gericht was 'de standenstructuur op te heffen, maar om haar te dynamiseren' (Lenders, 1988, p. 62). Door een hechte samenwerking van het particuliere initiatief van 't Nut en de centrale overheid heeft deze hervorming op verschillende punten doorgang gevonden.

De rationele en humane opvattingen stelden het kind, niet de stof, als uitgangspunt van het onderwijs. Het kind diende veelzijdig ontwikkeld te worden en opgevoed tot een zelfstandig denkende persoonlijkheid. Het onderwijs moest minder verbaal worden, men diende meer van aanschouwelijke middelen en visualiseringen gebruik te maken. Aldus zou het onderwijs een meer inzichtelijk karakter kunnen krijgen. Daar allerwegen de opvatting bestond dat de mens maakbaar was, ook ten aanzien van de ontwikkeling van de verstandelijke vermogens, lag het voor de hand naar een discipline te zoeken, waarbij zulks methodisch ter hand genomen zou kunnen worden. Hiertoe leek de vormleer van Pestalozzi één van de geëigende middelen.

De eerste verspreider van Pestalozzi's ideeën was Pieter Johannes Prinsen (1777-1854), onderwijzer en later directeur van de eerste Rijkskweekschool te Haarlem. In 1809 gaf hij de *Leerwijze van* Pestalozzi uit. Ook zorgde hij voor een Nederlandse vertaling van Pestalozzi's verzameld werk. Andere voor ons belangrijke Nederlandse pestalozzianen zijn Berend Brugsma (1797-1868) en Roelf Gerrit Rijkens (1795-1868).[3] Door toedoen van deze toonaangevende onderwijsmannen zijn de kernpunten van de pestalozziaanse pedagogiek en didactiek het Nederlandse onderwijs gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw gaan beheersen.[1] Ook met het aanschouwingsonderwijs en de vormleer zijn de namen van deze Nederlandse navolgers onverbrekelijk verbonden. Voor de vormleer was dit echter vooral Dirk van Dapperen (1791-1822), die persoonlijk bij Pestalozzi's instituut in Yverdun in de leer ging, een belangrijk vormleerboek schreef en daarmee dit nieuwe vak in Nederland introduceerde.

De verschijning van dit boek stelde ons voor een aantal vragen: Hoe is dit nieuwe

vak ontstaan? Waaraan werd de inhoud ontleend? Welke doelen werden aan de vormleer toegekend? In welke relatie stond het tot de euclidische meetkunde? Wat voor uitwerkingen gaf men er aan? Welke invloed had het op het gehele onderwijs? Vragen die onderzoek uitlokten naar oorspronkelijke bronnen, maar vooral ook naar de discussies die het fenomeen van de vormleer opriepen bij onderwijshervormers, didactici en beleidsmakers van die tijd.

In de hoofdstukken A1 tot en met A5 gaan we hier op in en laten zien hoe het mogelijk was dat de vormleer in 1857 een verplicht hoofdvak voor de lagere school werd. Met name is het opmerkelijk hoe een specifieke vakdeskundige als Daniël Steyn Parvé (1825-1883), ambtenaar en rechterhand van Thorbecke bij het totstandbrengen van de Hogere Burger School (HBS), zich voor de vormleer heeft ingezet.

Met de veranderingen in de maatschappij rond het midden van de negentiende eeuw wijzigden zich ook de doelen van de vormleer. Het vak moest een meer praktisch oogmerk krijgen, iets waarvoor met name de volgende twee onderwijsmannen uit de tweede helft van de negentiende eeuw zich hebben ingespannen: Herman Bouman (1822-1899) en Jan Versluys (1845-1920). Vooral de laatstgenoemde trachtte het vak een duidelijk doel toe te dichten als aanschouwelijke praktische meetkunde voor de lagere school. Ondanks hun voortreffelijke bijdragen zou tegen het einde van deze eeuw de vormleer toch het tij tegen krijgen, onder meer door de opkomst van het tekenonderwijs. Deze geschiedenis komt aan de orde in de hoofdstukken A6 tot en met A15. In dat gedeelte van ons onderzoek worden niet alleen de schoolboeken en de discussies geanalyseerd, maar tevens wordt onderzocht in hoeverre de opleidingen en de examens een rol in de ontwikkeling en de acceptatie hebben gespeeld. Duidelijk zal worden dat de feitelijke beslissingen steeds op het politieke vlak plaatsvonden en dat maatschappelijke pressiegroepen hierbij een belangrijke rol konden spelen.

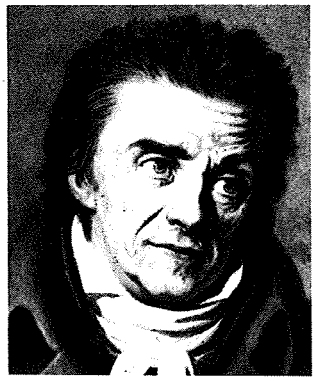
Uiteindelijk verdween de vormleer in 1889 van het programma. Toch zouden een aantal didactische principes, zoals de aanschouwelijkheid en de heuristische werkwijze, die juist in de vormleer tot ontwikkeling gebracht waren, enige doorwerking hebben, vooral op de schoolboeken van het MULO- en ambachtsonderwijs. Al met al een mislukt experiment, waaruit echter zowel voor de didactiek van het meetkundeonderwijs als voor methoden van implementatie historische lering getrokken kan worden. Dat in de twintigste eeuw de discussies over het genetische principe vrijwel geheel overgedaan zouden moeten worden, zal blijken in deel B.

Aan het eind van de negentiende eeuw blijken de maatschappij en in het bijzonder het schoolwezen aanzienlijke verbeteringen te hebben ondergaan. Alleen al het feit dat rond 1900 ongeveer 90 procent van de kinderen naar school gaat, waar dit rond 1800 nog op circa 50 procent lag, is hiervoor een bewijs (Knippenberg, 1986). Ook is redelijk objectief vast te stellen dat de kwaliteit van de onderwijzer in deze honderd jaar enorm verbeterd is. De wetenschappelijke pedagogiek en de psycholo-

gie waren echter nog maar nauwelijks op gang gekomen. Onderzoek naar het psychologisch-genetische principe in verband met het meetkundeonderwijs bestond nog niet. De ontwikkelingen van de sociale wetenschappen en de wiskundedidactiek liepen in feite uit de pas. Dit is één van de kwesties die in de gehele historische ontwikkeling van het aanvankelijk meetkundeonderwijs problematisch zal blijken te zijn.

A1 Anschauung und Form

Anschauung bij Pestalozzi



Johann Pestalozzi

In 1801 schreef Pestalozzi veertien brieven aan zijn vriend en uitgever Heinrich Geßner in Zürich, die tezamen bekend staan als het pedagogische standaardwerk *Wie Gertrud ihre Kinder lehrt.*[1] In dit boek heeft Pestalozzi zijn belangrijkste pedagogische en didactische ideeën in een zekere samenhang wereldkundig gemaakt.[2] In de zesde brief treffen we zijn beroemde uitspraak aan dat 'alle unsere Erkenntnis von Zahl, Form und Wort ausgehe' (Pestalozzi, 1801, p. 69). Dit inzicht voert ons direct tot het onderwerp van ons onderzoek. 'Zahl' en 'Wort' verwijzen naar het belang van rekenen en taal. Met het begrip 'Form' wordt echter niet zonder meer het leren van meetkunde bedoeld. 'Form' staat in de pestalozziaanse leer in nauwe relatie met 'Anschauung', een activiteit die voor Pestalozzi een kernrol in het onderwijs speelde. Om het ontstaan en de betekenis van de negentiende-eeuwse vormleer te kunnen begrijpen zullen we eerst – in het kort en zover van belang voor het onderwijs – Pestalozzi's ideeën over 'Anschauung' bespreken.

Globaal heeft het pestalozziaanse Anschauungs-begrip drie betekenissen en functies:

- de *zintuiglijke* betekenis, ook wel 'äußere Anschauung' genoemd; dit betreft het empirische waarnemen en het 'natuurgetrouw' afbeelden van vormen
- de *intellectuele* betekenis of 'innere Anschauung', waarbij we tegenwoordig het mentale beeld van een vorm bedoelen, maar waaronder ook het mentaal handelen met dergelijke beelden wordt verstaan
- de *psychologische* betekenis, waaronder al die betekenissen verstaan moeten worden waarbij een meta-inzicht of een persoonlijk inzicht optreedt; dit laatste kan te maken hebben met begrippen als waarheid, goedheid, schoonheid en andere filosofische begrippen.

Zo vanzelfsprekend als de eerste associatie met het begrip 'Anschauung' lijkt te zijn, zo duister en multi-interpretabel is het door Pestalozzi omschreven en toegepast. Terecht merkt de Pestalozzi-kenner Delekat op: 'Pestalozzi ist mühsam zu lesen' (1968, p. 64). Soms is slechts uit de context te bevroeden wat hij eigenlijk bedoelde. Maar af en toe treffen we ook kernachtige uitspraken aan die voor de dag van vandaag nog betekenis kunnen hebben. Veelvuldig spreekt Pestalozzi over het belang

van het zintuiglijke waarnemen als startpunt voor het ontwikkelen van geest en verstand. Uitdrukkelijk stelt hij dat de natuur met het 'bloßen vor den Sinnen Stehen der äußeren Gegenstände allen Unterricht anfängt' (geciteerd bij Delekat, 1968, p. 301). Maar met Delekat zijn wij van mening dat Pestalozzi de 'äußere Anschauung' (Darstellung) niet van de 'innere Anschauung' (Vorstellung) onderscheidde en dat zijn 'Begriff der Anschauung (...) sehr umfassend' is.[3] 'Äußere Anschauung' had niet alleen te maken met het menselijk oog, maar ook het gehoor, het fysieke gevoel, de reuk en de smaak speelden, al naar gelang de situatie, een rol in het Anschauungsproces. 'Die Welt (...) liegt uns als ein ineinanderfließendes Meer verwirrter Anschauungen vor Augen' stelt Pestalozzi in zijn zesde brief – overigens een voorbeeld van een van de vele betekenissen, die hij aan het begrip toekende (Pestalozzi, 1801, p. 67). Maar het was nu de taak van de 'Elementarbildung' om een zodanige 'Anschauungs*kunst*' te ontwikkelen dat het lerende kind zelf van 'verwirrte' Anschauungen tot 'klare' begrippen kon komen. Wanneer Pestalozzi ten slotte ook nog van 'analogische Anschauungserkenntnis' spreekt, waardoor een begrip niet door directe 'Anschauung' tot stand komt, maar indirect van andere wel direct 'angeschaute' begrippen wordt afgeleid, dan heeft hij daarmee een theoretische basis – hoe men daar ook over denken wil – voor zijn 'leerpsychologie' gelegd.

Wij laten de door ons genoemde psychologische betekenis verder buiten beschouwing en beperken ons tot de eerste twee betekenissen van Anschauung volgens Pestalozzi, omdat alleen deze voor ons onderzoek naar de vormleer van belang zijn. Dat dit verantwoord is, blijkt duidelijk in de zevende brief, wanneer Pestalozzi op het begrip Form ingaat.

Form bij Pestalozzi

Bij het meten (Meßkunst) en het tekenen (Zeichenkunst) – vakken die Pestalozzi van groot belang achtte voor zijn 'Elementarbildung' – wordt de betekenis van het vormbegrip in samenhang met de 'Anschauung' duidelijk. Het gaat erom dat de leerlingen vlakke meetkundige vormen in de goede verhouding leren zien. Als voorwaarde daartoe ziet Pestalozzi – we stellen het in moderne termen – het verwerven van verhoudingsconstantie van lijnstukken (Maßverhältniß), waarbij impliciet het kiezen van een natuurlijke maat (er wordt niet uitgegaan van gestandaardiseerde maten) gehanteerd wordt. Zo begint Pestalozzi met het lijnstuk, voorzien van een natuurlijke maat, als de meest elementaire vorm. Het vierkant (gleichseitiges Viereck) was voor Pestalozzi de tweedimensionale oervorm. Aan deze figuur werden begrippen als horizontale, verticale en schuine lijn afgeleid, maar ook de rechte, scherpe en stompe hoek. Met behulp van de ingeschreven cirkel van het vierkant werden begrippen als rond en halfrond ingevoerd.[4] Omdat dit alles aan het vierkant en/of delen daarvan werd uitgevoerd en de rechte hoek of delen daarvan als natuurlijke gegevens werden geaccepteerd, kon voorbijgegaan worden aan de noodzakelijkheid van de constantie

der hoeken bij een gelijkvormige afbeelding. Met deze systematische ordening van elementaire vormen werd het *ABC der Anschauung* bedoeld. Het doel was – en daar moest reeds op zeer jonge leeftijd mee begonnen worden – dat de kinderen een aantal elementaire begrippen leerden en een vlakke meetkundige vorm leerden analyseren en synthetiseren.

Tekenen had volgens Pestalozzi als doel om een door de zintuiglijke aanschouwing verkregen beeld van een vorm getrouw af te beelden. De bij het meten geleerde vaardigheden stonden daarbij in dienst van het tekenen, het meten was dus ondergeschikt aan het tekenen. De hiërarchische ordening van deze vaardigheden blijkt echter nog verder te gaan als Pestalozzi in zijn zevende brief het schrijven (Schreibkunst) bespreekt. 'Die Natur selber unterordnet diese Kunst (het schrijven, EdM) dem Zeichnen (...) also wesentlich und vorzüglich der Meßkunst' (Pestalozzi, 1801, p. 102). Letters zijn ook vormen en zijn te herleiden tot de meest elementaire vormen, zoals hierboven genoemd, hetgeen goed aansloot bij het algemene uitgangspunt voor het onderwijs: 'Zahl, Form und Wort'.

Aanvankelijk stonden dus 'Anschauung' en 'Form' voornamelijk in het teken van het leren van de meest elementaire vaardigheden. Het meten werd beheerst door het verhoudingsgetal, het tekenen diende daarvan gebruik te maken om ten slotte goed te leren schrijven, eerst met de griffel, daarna op papier. Van meetkunde, zowel in klassieke als in meer moderne zin, was dus geen sprake. Niettemin zal uit het volgende blijken dat het betrekken van meetkundige vormen als elementair onderzoeksgebied in het onderwijs een gedachte is geweest die door Pestalozzi, zijn leerlingen en andere navolgers als onderwerp op zich verder is uitgewerkt. Over het belang en de effecten van zijn *ABC der Anschauung* was Pestalozzi, op grond van eigen onderwijservaringen en die van zijn medewerkers, volledig overtuigd. 'Es ist unaussprechlich, zu welchen Resultaten diese entwickelte Kraft (bedoeld is de Anschauungskraft, EdM) jedes, auch das schwächere Kind, emporhebt' (Pestalozzi, 1801, p. 101). Om zijn theoretische ideeën ook in de praktijk van de opvoeding en het onderwijs gestalte te geven, sprak Pestalozzi over de 'Methode', waarover nu een enkele opmerking.

Pestalozzi's Methode

Net als Rousseau ging Pestalozzi uit van de aangeboren goedheid van ieder mens. Deze zou volgens een 'organisch-genetische' methode verder gewekt en ontwikkeld moeten worden. Vóór alles was Pestalozzi een romantische idealist en een maatschappijhervormer: hij streefde een betere wereld na, waarin het kind, waarvoor hij een onuitsprekelijke liefde koesterde, grotere kansen tot zelfontplooiing zou krijgen. De hervorming diende plaats te vinden door een volledig nieuwe totaalopvoeding. Aan het onderwijs was daarbij een sleutelrol toegedacht. Hij onderscheidde de morele of zedelijke opvoeding, gebaseerd op het geloof, verder de lichamelijke ontwik-

keling en opvoeding en de ontwikkeling van de geestelijke en intellectuele vermogens, die zich in een harmonische samenhang dienden te voltrekken.

Naast de aangeboren goedheid zou het kind ook begiftigd zijn met aangeboren geestelijke en intellectuele mogelijkheden. Een kernpunt van de Methode was dat zowel de opvoeder als de onderwijzer slechts het in de kiem aanwezig goede in het kind moest helpen ontwikkelen, hij diende de bevorderaar van de zelfontwikkeling van het individu te zijn.

Het totale opvoedings- en vormingsproces werd onderscheiden naar drie kringen. De eerste kring (tot zes jaar) was het domein der moeders, de tweede betrof de school (zes tot veertien jaar) en de derde die van het beroep of ambacht. De praktische uitvoering van de nieuwe opvoeding en onderwijsmethode diende te beginnen bij de wieg en in eerste instantie tot uitvoering gebracht te worden door de moeder, aan wie binnen het gezin een centrale rol voor de eerste ontwikkeling en opvoeding was toegedacht. Voor deze 'huiselijke vorming' stelden Pestalozzi en zijn medewerkers handleidingen samen, de 'Elementarbücher': *Das Buch der Mütter* en het *ABC der Anschauung*.[5] In het eerstgenoemde boek gaat het om het leren van begrippen. Daarbij staan de zintuiglijke waarnemingen (horen, zien, voelen, ruiken en proeven) centraal. Uitgaande van het eigen lichaam moet bijvoorbeeld als volgt het begrip 'geel' geleerd worden:

> 'Theile des Körpers, welche gelb sind'
> Das Ohrenschmalz is gelb. Bey gewissen Krankheiten werden die Augen, die Nägel, die Zunge und die ganze Haut gelb. Wenn man die Zähne nicht besorgt, so werden sie gelb. (Pestalozzi, 1803c, p. 64)

Ook komt in dit boek het aanvankelijke tellen aan de orde. Uiteraard hadden ook de zedelijke en fysieke vorming een belangrijke rol in deze eerste opvoedingskring. In verband met het specifieke karakter van ons onderzoek beperken wij ons tot de ontwikkeling van de 'geestelijke en verstandelijke vermogens'.

ABC der Anschauung

In 1803 liet Pestalozzi het *ABC der Anschauung* verschijnen. Hiermee wilde hij de moeders een handreiking voor de vormleer bieden. Aan één voorbeeld wordt duidelijk welke didactiek Pestalozzi en zijn medewerkers voor ogen hadden. Bij een afgebeeld vierkant hoort de volgende tekst:

> 'Dieses Viereck ist durch 4 Linien gebildet
> Jede dieser 4 Linien ist eine Seite von diesem Viereck
> Zwey von diesen 4 Linien sind wagrecht
> Zwey von diesen 4 Linien sind senkrecht
> Die wagrechten Linien sind die wagrechten Seiten dieses Vierecks
> Die senkrechten Linien.....'

daarna volgen nog twintig omschrijvingen voor elke zijde, elke hoek, elk hoekpunt,

... om ten slotte te eindigen met: 'Weil die Linien dieses Vierecks gleich lang sind, heißt es Quadrat' (Pestalozzi, 1803a, p. 19-21). Niet alleen zien we aan dit voorbeeld de eerder genoemde functie van het vierkant, maar tevens wordt duidelijk dat de didactiek gericht was op een vergaand stapsgewijze opbouw van de stof. Dit gevoegd bij Pestalozzi's methodiek van het in koor naspreken van de genoemde volzinnen geeft een indruk van het beoogde onderwijs.

Herbarts *ABC der Anschauung*

Johann Friedrich Herbart (1776-1841) staat als opvolger van Immanuel Kant in de traditie van de grote Duitse filosofen. Hij wordt wel beschouwd als de grondlegger van de wetenschappelijke pedagogiek. Zijn bemoeienissen met het elementaire wiskundeonderwijs zijn ook voor ons onderzoek van belang, reden waarom we er kort op ingaan.[6] Wagemann heeft Herbarts opvattingen over het Anschauungs-begrip nauwgezet onderzocht (Wagemann, 1956).

Herbart had in persoonlijke gesprekken met Pestalozzi kennisgenomen van diens opvattingen over de 'Anschauung' en de elementaire vormleer. Op grond hiervan publiceerde hij in 1802 *Pestalozzis ABC der Anschauung, untersucht und wissenschaftlich ausgeführt.* In dit werk sprak Herbart zich in positieve zin uit voor de ideeën van Pestalozzi, maar leverde tevens kritiek op diens uitwerking van de bijbehorende methode en op de wijze waarop met de elementaire meetkunde begonnen kon worden.

Herbarts opvattingen over 'Anschauung' beperken zich tot de zintuiglijke aanschouwing; vage omschrijvingen zoals bij Pestalozzi komen niet voor. Weliswaar is ook Herbarts stijl breedsprakig, maar de inhoud bevat geen tegenstrijdigheden en is van een aangename helderheid. Zijn uitgangspunt voor het ook door hem zo noodzakelijk geachte 'Anschauen' ligt in de wiskunde die hij, zoals uit zijn 'ABC' blijkt, goed beheerst, wat we van Pestalozzi niet kunnen zeggen. Hij brengt de inleiding tot het 'Anschauen' terug tot het goed leren waarnemen van vlakke vormen. Terecht merkt hij op dat – in hedendaagse termen gesteld – een gelijkvormige afbeelding van een vlakke rechtlijnige figuur bepaald wordt door de constantie van de hoeken en de constantie van de interne lengteverhoudingen. 'Die Proportionen der Längen sind Begriffe, und manchmal so schwierige Begriffe, die ohne die Wissenschaft gar nicht verstanden werden können; aber die Winkel sind Anschauungen; durch die wird unmittelbar die Gestalt wahrgenommen' (Herbart, 1804, p. 85).[7]

De kern van zijn boek is dat voor de aanvankelijke aanschouwingsoefeningen niet het vierkant van Pestalozzi, maar de driehoek de fundamentele figuur voor het leren 'Anschauen' zou moeten zijn. De eerste 'Gestalt', die zich aandient als tweedimensionale vorm, is die welke door drie (niet collineaire) punten wordt gevormd. Elke vlakke rechtlijnige figuur is op te bouwen uit driehoeken (tripels van punten). Van jongs af aan zou volgens Herbart geoefend moeten worden op het zien van ver-

schillendsoortige driehoeken. Als het kind nog in zijn wiegje ligt, zou een donkerbruin bord opgesteld kunnen worden, tegen welke achtergrond allerlei kleurige vormen (een sinaasappel, bladeren, een kopje) door het kind bekeken kunnen worden.

> 'Aber neben jenen Gegenständen können an der Tafel wohl noch einige gelbe Nägel Platz finden; die durch ihren metallischen Glanz das Auge besonders für sich gewinnen werden. Ihrer drey, weit auseinander eingeschlagen, sind genug; das Dreieck was sie bilden kann man täglich verändern, – so können unsre Elementar-Formen die früheste Bekanntschaft des Kindes werden.' (Herbart, 1804, p. 76)

Het is een wetenschappelijke, op de wiskunde gebaseerde theorie, die Herbart in zijn betoog tentoonspreidt. Meer dan de helft van dit boek gaat over wiskunde, waarvan hij de vormende waarde – in de zin van leren denken – telkens aanprijst.[8] Het zien van alle driehoeken uit een verzameling van punten leidt tot enige combinatoriek. Het hoofdbestanddeel valt te omschrijven als een inleiding in de trigonometrie. Onder de driehoeken ziet hij de rechthoekige als de meest fundamentele. Hiermee kunnen immers de hoeken door middel van goniometrische verhoudingen vastgelegd worden. Op deze manier wordt een verbinding gelegd tussen meetkunde, meten en rekenen. Deze leergang is heel methodisch en minutieus opgezet.[9]

Herbart had zijn ABC van 1802 bedoeld als een verbetering en aanvulling op de pestalozziaanse aanschouwingsoefeningen. In het ABC van Pestalozzi van 1803 is echter niets van deze kritiek te vinden, hetgeen voor Herbart een reden was om een nieuwe uitgave van zijn eigen ABC te maken. Deze verscheen in 1804 onder de titel Pestalozzi*'s Idee eines ABC der Anschauung als ein Cyklus von Vorübungen im Auffassen der Gestalten wissenschaftlich ausgeführt*. In een nawoord gaat Herbart in op het feit dat Pestalozzi niet naar zijn voorstellen tot verbetering heeft geluisterd en stelt daarmee zijn werk als een zelfstandige methode voor. Dit werk is wiskundig van een hoger niveau dan dat van Pestalozzi. Terecht stelt Wagemann dan ook 'daß Herbarts ABC-Lehrgang wesentlich höhere Anforderungen an den Zögling stellt' (Wagemann, 1956, p. 144).

Veel invloed heeft Herbart overigens niet gehad op de ontwikkeling van de vormleer. Pestalozzi en de zijnen zouden dit vak verder ontwikkelen. Wat de strijd om het primaat van vierkant en driehoek betreft, volstaan we met Pestalozzi's ironische opmerking: 'Herbarts Dreieck ist das Viereck der vornehmen Leute'.[10]

Aanschouwelijkheid en aanschouwingsonderwijs

De 'ontdekking' van de 'Anschauung' voor het onderwijs wordt meestal in verband gebracht met Pestalozzi, maar eerder was dit principe in algemene zin al gepropageerd door Vives en Bacon in de zestiende, Comenius en Locke in de zeventiende, en Rousseau in de achttiende eeuw. Het principe van de 'Anschauung' als didactisch middel voor het onderwijs heeft vooral in de negentiende eeuw een grote vlucht genomen. Het was in eerste instantie een reactie op het tot dan toe veelal verbalistische

en levensvreemde onderwijs. Het doel van de vernieuwers was dat het onderwijs een meer visueel karakter diende te krijgen. De leerlingen moesten leren aanschouwen, de leerstof moest aanschouwelijk aangeboden worden. Voor het rekenen voerde Pestalozzi de zogenaamde tabel der eenheden in, waarin de getallen geschreven werden als losse streepjes, opdat het kind kon zien dat bijvoorbeeld het getal 4 uit vier eenheden is opgebouwd. Een ander voorbeeld was dat breuken als maatverhoudingen van lijnstukken werden opgevat.

Om de activiteit van het aanschouwen zelf te benadrukken, werd zelfs een apart vak in het leven geroepen: het zogenaamde *aanschouwingsonderwijs*, dat tot aan het begin van de twintigste eeuw op het Nederlandse leerplan stond. Binnen dit 'vak' speelde ook de vormleer een rol. Brugsma omschreef het aanschouwingsonderwijs als volgt: 'Het bestaat daarin, dat men aanschouwelijke dingen voor de zinnen der kinderen brengt, en deze door hen beschouwen en benoemen laat. *Opmerken*, *denken* en *spreken*, ziedaar drie zaken, die vooreerst in aanmerking komen' (Brugsma, 1839, p. 4).

Hiertoe hoorde ook het aanschouwen van concrete objecten. Door ervaring en bespreking van vorm, aard en specifieke eigenschappen moest de leerling zich langzamerhand een voorstelling (mentaal beeld) van het object vormen. Wanneer ten slotte de leerling in staat was gelijksoortige objecten op te vatten als een klasse, waaraan een naam (woord) werd toegedacht, had het begrip zich gevormd. Daarbij werden oefeningen aanbevolen die we tegenwoordig zouden omschrijven als ordenen en klassificeren. Bijvoorbeeld naar vorm, kleur, grootte en dergelijke. Tevens werden de ruimtelijke relaties als 'voor-achter', 'boven-onder' et cetera aangeleerd.

Als ander belangrijk onderdeel van dit onderricht komt uit alle handleidingen het correcte taalgebruik (spreken in volzinnen) door de kinderen naar voren. Naast deze cognitieve aspecten waren ook de esthetische vorming ('ontwikkeling van een goeden smaak'), de muzikale vorming en de zedelijke vorming doelen van het aanschouwingsonderwijs. Er werd in de praktijk van dit onderricht veelvuldig gebruik gemaakt van afbeeldingen, zoals de bekende schoolplaten, die rond het midden van de negentiende eeuw in zwang kwamen.[11]

Zoals gezegd zullen we ons in dit onderzoek beperken tot de 'Anschauung' in zintuiglijke en intellectuele betekenis, hetgeen we in het volgende verder als *aanschouwelijkheid* omschrijven en gebruiken.

Valse start?

In dit hoofdstuk hebben we getracht in kort bestek de essentie van het Anschauungsbegrip, zoals door Pestalozzi en Herbart als belangrijke voorwaarde voor het onderwijs geformuleerd en gepostuleerd, weer te geven. Ook zijn we ingegaan op de opvattingen van deze beide pedagogen aangaande de meetkunde (Form). We beperken ons in deel A in eerste instantie alleen tot de 'Formenlehre' (vormleer), het vak dat

door Pestalozzi en zijn leerling Schmid onder meer ontworpen werd om het aanschouwen te oefenen.

Hoe is dat nieuwe vak ontstaan? Het roept natuurlijk de associatie met meetkunde op. In ieder geval werkte Pestalozzi's leerling Joseph Schmid de vormleer op die basis uit. Maar gebeurde dat ook volgens Pestalozzi's bedoelingen? In de meetkunde stond van oudsher het leren denken als doel voorop. Gold dit doel voor de vormleer ook? Of moest het als een voorbereiding op het tekenen en schrijven gezien worden? Zeker is dat Pestalozzi en zijn leerlingen voor het eerst hebben getracht het aanschouwelijkheidsprincipe ook praktisch toe te passen. De vraag is echter of Pestalozzi met zijn multi-interpretabele opvattingen over de 'Anschauung' niet zelf heeft bijgedragen aan de later weinig consistente uitwerkingen van de vormleer. Vragen die een nadere analyse vereisen. Eerst zullen we in A2 het ontstaansproces aan de hand van de oorspronkelijke bron onderzoeken. Daarna bepalen we ons hoofdzakelijk tot de Nederlandse situatie, die een directe beïnvloeding vanuit de pestalozziaanse school heeft ondergaan.

A2 Herkomst en ontstaan van de vormleer

Pestalozzi en Schmid

Net als bij de 'Elementarbücher' zijn het vooral Pestalozzi's medewerkers op het instituut te Yverdun geweest die zijn onderwijsideeën in handleidingen en schoolboeken hebben omgezet. Voor de vormleer was dit Joseph Schmid (1785-1851), van wiens hand tussen 1809 en 1811 *Die Elemente der Form und Größe (gewöhnlich Geometrie genannt)* in drie delen verscheen, verder te noemen *Die Elemente.*[1] Aan de titel is nog toegevoegd 'nach Pestalozzi's Grundsätzen bearbeitet'. Schmid begint het eerste deel met een opdracht aan 'Vater Pestalozzi': 'Von meinem ersten Eintritt in sein Haus sah und fühlte ich mich bey ihm und unter seiner Leitung als das Kind seines Hauses, als sein Kind. Er war mein Vater; er war (...) was ich beym zweyeten Schritt meiner Entwicklung und Bildung nöthig hatte' (Schmid, 1809a, p. III). Dan geeft hij even verder aan hoezeer Pestalozzi in staat was zijn leerlingen te stimuleren: 'Meyn zweiter Vater kann sogar andern geben was er nicht einmal selbst hat; er ist nichts weniger als Mathematiker, aber er erweckt die mathematische Kraft, wo sie ist' (Schmid, 1809a, p. IV).

De waardering en liefde kwam echter niet uitsluitend van één kant. In 1814 schreef Pestalozzi in een getuigschrift over Schmid: 'Er stand bald als Lehrer der mathematischen Elementarmittel diesem Fach mit soviel Einsicht, Selbständigkeit, Kraft und Eifer vor, daß ich ihn die ganze Zeit als die erste Stütze meines Hauses ansah, ehrte und liebte. Er war, so lange er in meinem Hause war meine Lust, meine Freude und mein Stolz.'[2] Misschien dat de soms chaotisch denkende Pestalozzi een systematicus als Schmid nodig had om het feitelijke onderwijs in de vormleer, het rekenen en de wiskunde gestalte te geven.

Aanleiding tot de *Elemente* van Schmid

Uit het voorwoord 'An die Leser' wordt iets duidelijk over de aanleiding tot dit levenswerk, zoals Schmid zijn *Elemente* noemt. Hij vertelt daarin over zijn eigen leerervaringen met de euclidische meetkunde. Hij begreep als leerling wel wat de leraar voordeed, maar zelf kon hij de logische volgorde van de meetkundige stellingen niet reproduceren. Ook kon hij zelfstandig geen vraagstukken maken op grond van eerdere opgaven. Toen probeerde hij de opgaven naar 'Form' of 'Größe' te scheiden, maar ook dat bood geen soelaas. Een eerste idee voor zijn eigen methode kreeg hij van een 'Mathematiker X', die dit tijdens een reis weer van een andere wiskundige had gehoord: 'Man solle nämlich in der Mathematik zuerst alles was man mit einer geraden Linie, hernach, was man mit zweyen u.s.w. machen könne, vornehmen' (Schmid, 1809a, p. XXIII).

Dit gevoegd bij het gevoel dat 'was (er) von der Geometrie schon wußte' hem alleen maar tot last was, bracht hem tot het plan de elementaire meetkunde geheel

opnieuw volgens het volgende uitgangspunt op te bouwen: 'Das Gesetz, nach dem ich baute, ist nicht ein willkürliches Hinschleudern von Aufgaben, sondern die Aufgaben sind nothwendige Resultate der Idee von der man ausgegangen ist' (Schmid, 1809a, p. XXIV). Als voorbeeld van dit laatste geeft Schmid dat men niet moet stoppen bij de stelling van de som van de hoeken van een driehoek die men vergelijkt met de rechte hoek, maar dat men de vergelijking 'aller Winkel in allen Formen mit dem rechten' uit moet voeren; in hedendaagse terminologie: er moet gegeneraliseerd worden. Zijn kritiek op de traditionele euclidische methode voor het onderwijs is niet mis: 'das Wesen der Geometrie hatte, so alt es war, als Bildungsmittel der Menschennatur kein Verdienst' (Schmid, 1809a, p. XX). 'die gewöhnliche Geometrie ist nicht auf die Entfaltung der menschlichen Anlagen berechnet; sie setzt voraus, der Mensch sey schon entwickelt und gebildet' (Schmid, 1809a, p. XXVIII).

Schmid voert verder aan dat Euclides zijn *Elementen* ook niet zelf heeft geschreven, dat de logische ordening van stellingen pas achteraf plaats heeft gevonden en dat dat de reden is dat de leerlingen niet in staat zijn zelf nieuwe inzichten te verwerven. Het benadrukken van vanzelfsprekende 'algemene inzichten' (axioma's) is zinloos.[3]

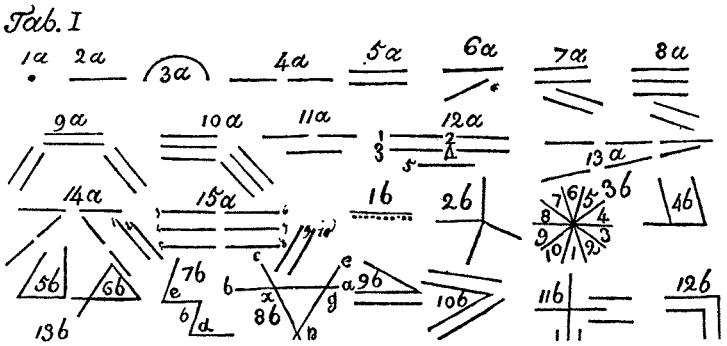
Duidelijk worden zijn opvattingen vooral wanneer hij het over het definiëren heeft: 'Mein Gang führt zu den Definitionen, aber er geht ihnen nicht voraus' (Schmid, 1809a, p. XXV). De autodidact Schmid dekt zich op voorhand in tegen de echte Mathematiker, die hem zijn verwerping van de euclidische methode zouden kunnen verwijten, hetgeen in latere kritieken op zijn werk ook herhaaldelijk gebeurde.[4]

Met deze inleiding stelde Schmid de kern van het probleem van de didactiek van het aanvankelijk meetkundeonderwijs aan de orde, zoals we die in het vorige hoofdstuk al formuleerden. Er bestond behoefte aan een elementaire leergang meetkunde voor de lagere school, die een inleiding zou zijn op de meer formele meetkunde. Deze kwestie was overigens al eens eerder aangesneden. Het was de Franse wiskundige A.C. Clairaut (1713-1765), die in het midden van de achttiende eeuw een interessante aanschouwelijke inleiding op de meetkunde schreef. Maar zijn *Eléments de Géométrie* was voor de wat oudere leerling bedoeld en volgens het historisch-genetische principe opgezet. Het is onwaarschijnlijk dat Schmid dit werk gekend heeft. Schmid was zo beïnvloed door Pestalozzi, dat de filosofie van diens *ABC der Anschauung* als vertrekpunt van zijn ontwikkelingen gezien moet worden. Dat betekende: vergaande atomisering van de stof, trapsgewijze opbouw, nadruk op memoriseren en gebruik van het aanschouwelijk nabije. Zijn ontwikkelingswijze kan psychologisch-genetisch genoemd worden. Hoe Schmid dit alles uitgewerkt heeft, zullen we nu kort bespreken.

Impressie van inhoud en didactiek van Schmids *Formenlehre*

De omvang van de drie delen van de *Elemente* bedraagt meer dan 750 pagina's.[5] Voor ons onderzoek is in feite alleen het eerste hoofdstuk 'Anschauungslehre der

Form und ihrer Verhältnisse' (159 pagina's) van belang. Hieruit wordt namelijk de aard van Schmids vormleer duidelijk.[6] Tevens is juist dit stuk bepalend geweest voor de verdere ontwikkeling van de vormleer in West Europa, in het bijzonder in Nederland.



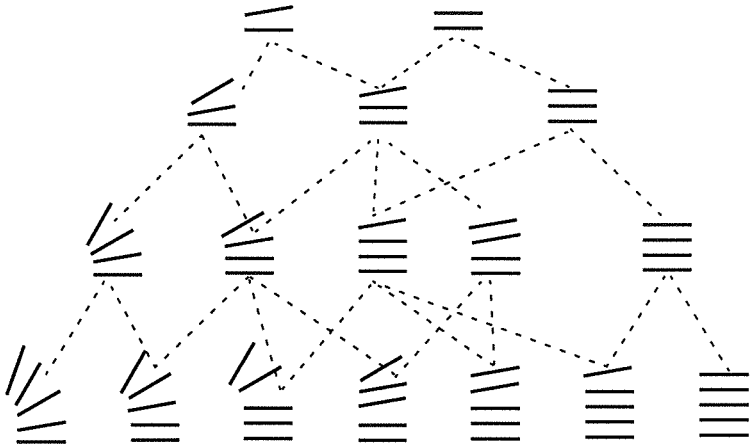
figuur A2.1: Gedeelte van figuren-tabel I uit Schmids *Elemente* (1809)

Schmid begint met de beschouwing van 'lijnen', waarmee lijnstukken worden bedoeld. Twee of meer 'lijnen' kunnen 'gleichlaufend' (evenwijdig), 'ungleichlaufend' (niet-evenwijdig) of 'in einer Richtung' (in elkaars verlengde liggend) zijn. De kern van dit gedeelte van de leergang is dat steeds voor een aantal (2,3,4,5,...) 'lijnen' onder toepassing van deze relaties het volledige aantal mogelijkheden (combinaties) gevonden moet worden. 'Seht wie viel von 5, 6, 7, 8, 9, 10 Linien u.s.w. gleichlaufend und ungleichlaufend seyn können?' (Schmid, 1809a, p. 8). In figuur A2.2a hebben wij de originele oplossing voor vijf 'lijnen' opgenomen.[7] Omdat een systematiek ontbreekt, is in figuur A2.2b een visueel-schematische werkwijze weergegeven. Schmid telde de gevallen 'alle vijf (un)gleichlaufend' niet mee.

Lhr. Seht wie viel von 5, 6, 7, 8, 9, 10 Linien
ꝛc. gleichlaufend und ungleichlaufend seyn können?
Antw.

Linien.	Gleichlaufend.	Ungleichlaufend.	Zeichnung.
5	4	1	
	3	2	
	2	3	
	2 u. 3 und unter einander ungleich- laufend.		8 a.
	2 u. 2	1	

figuur A2.2a: Mogelijkheden voor vijf 'gleichlaufende' en 'ungleichlaufende Linien' volgens Schmid (1809)



figuur A2.2b: Systematische visualisering van het probleem van figuur A2.2a

De vorm van de tekst is steeds dezelfde: een vraag van de leraar, gevolgd door het antwoord. Af en toe korte samenvattingen voor de leraar. Naast genoemde oefeningen worden soortgelijke oefeningen over 'Vereinigung der Linien', 'Winkel', 'Scheitelpunkte', 'Formen' en zo meer, ook onder verschillende voorwaarden, besproken. De leergang leidt ten slotte tot voor de lagere school pittige opgaven als 'Wie viele und was für Figuren lassen sich höchstens mit 60 und 72 gleichlaufende Linien machen?' (Schmid, 1809a , p. 151)[8] of 'Welches ist die höchste Anzahl Figuren, welche man mit 99 Linien machen kann?' (Schmid, 1809, p. 154).

Bij de oplossingen maakt Schmid gebruik van inductief redeneren. Duidelijk zien we zijn uitgangspunt van het 'n op $(n + 1)$'-principe. De stapsgewijze opbouw van de leerstof is goed herkenbaar. De didactische uitwerking is echter primitief. Dit wordt vooral duidelijk als we het door hem nagestreefde generaliseren beschouwen. Dit blijft steken in 'uitputtend opsommen' zonder tot een algemene methode te komen, zoals in het door ons opgestelde visuele schema. Zijn methode leidt vaak tot talloze bladzijden boekhouderij, waaraan nu juist het systematische element ontbreekt. Hetzelfde zien we bij de primitieve optelmethode van rekenkundige rijen, iets dat in zijn werkwijze bij combinatorische problemen herhaaldelijk voorkomt.

Het aanschouwelijke aspect blijft beperkt tot het waarnemen van de vormen, i.c. de 'lijnen'. Typisch voor de vormleer van Schmid is het uitgangspunt van de begrensde 'lijnen' en hun relaties. Het gaat daardoor in wezen niet om meetkundige fenomenen, maar om systematiseren en ordenen van elementen die weliswaar een meetkundig aspect hebben, maar dat had net zo goed met iets anders kunnen plaatsvinden. Door de lijnstuk-opvatting worden fundamenteel meetkundige 'Anschauungen' geblokkeerd, zoals het belangrijke en specifiek meetkundige aspect van de

rechte lijn: haar oneindigheid.

Nu is deze kritiek gemakkelijk geuit vanuit een hedendaags standpunt. Voor die tijd was deze 'meetkunde' echter volledig nieuw. Zeker is dat Schmid een geheel andere weg dan de gebruikelijk euclidische had ingeslagen. Wij hebben deze kwestie direct scherp willen stellen, omdat de invloed van Schmid op de vormleerboeken toentertijd heel groot is geweest.

Pestalozzi's opvatting over de vormleer

In hoeverre Pestalozzi ook zelf heeft bijgedragen aan de praktische realisatie van de leerboeken is moeilijk na te gaan. Wel hebben we kunnen constateren dat de doelen, didactiek en methodiek van de boeken overeenstemmen met zijn algemene onderwijsopvattingen, zoals hij die in verschillende geschriften had neergelegd. In het voorwoord van het vijftiende deel van zijn *Sämmtliche Schrifte* schrijft hij in 1826 dat het belang van het rekenen op dat moment wel erkend werd, maar dat dit met de vormleer nog steeds niet het geval was. Daarom heeft hij getracht doel en inhoud van dit vak in een uitgebreid en van vele voorbeelden voorzien referaat – 'Die Form als Typus der geistigen Entwicklung des Kindes durch die Schule' – nog eens te verduidelijken. De beoogde doelen, de didactiek en de methodiek komen uit het volgende citaat kernachtig naar voren:

> 'Es kommt in der Formenlehre als Schulbildungsmittel wesentlich darauf an, durch die Unendlichkeit der Form und ihrer Größe in naturgemäßem Stufengange dem Kind den Blick in die sinnliche Welt sicher zu stellen, seine Anschauungskraft so weit zu üben und zu stärken, daß die Abstraktion eine nothwendige Folge vielseitiger Anschauungen und Erfahrungen wird. Das Denkvermögen muß als eine weitere und nothwendige Folge dieser Anschauung, Erfahrung und Abstraktion, den Schüler auf eine gesicherte Weise zu selbsterzeugten richtigen Denkformen führen.' (Pestalozzi, 1826b, pp. 3-4)

In de daaropvolgende tekst worden deze doelen door Pestalozzi nader geëxpliciteerd:

- ontwikkelen van het *aanschouwingsvermogen* (verwerven van een mentaal beeld)
- ontwikkeling van de *denkkracht* (begrippen, relaties en leren formuleren)
- leren *ordenen* en *systematisch werken*
- ontwikkeling van de *kunstkracht* (esthetische ontwikkeling).

Daarna bespreekt hij allerlei vormleeropgaven, zoals die ook bij Schmid voorkomen. Nieuwe inhoudelijke, methodische of didactische inzichten treffen we niet aan. Het geheel is veel minder systematisch en zorgvuldig beschreven dan in Schmids *Elemente*.

Interessanter zijn Pestalozzi's opvattingen in verband met de aanvankelijke vorming door de moeders, vooral omdat Schmid hier geen aandacht aan besteed heeft. In het veertiende deel van de *Sämmtliche Schriften* vinden we onder de 'Praktische Elementarübungen' een stuk over 'Zahl- und Formlehre', dat specifiek op deze kwestie ingaat. Via de aanvankelijke vormleer dienden de kleuters al kennis te maken met een aantal meetkundige begrippen, relaties en vaardigheden, maar wel op een informele manier:

> 'In der Anschauung des Tisches, der Bank, des Hügels, des Berges andere Gegenstände, liegt das Fundament, an das der Begriff von gerad, krumm, hoch, tief, lang, kurz, hohl, erhaben usw im Kind angereiht und angeknüpft werden muß.'
> (Pestalozzi, 1826a, p. 37)

Aan de hand van een rechthoekige tafel moest men de kleuters volgens Pestalozzi zelfs al allerlei meer formele begrippen bijbrengen:

> 'gleichlaufende Linien, die Arten der Winkel, als rechte, spitze und stumpfe, die Vierecke und zwar die Quadrate, Rechtecke, Rauten, oder Parallelogramme, Trapeze usw anschaulich machen.' (Pestalozzi, 1826a, p. 39)

Maar ook kromlijnige figuren als 'het rond, het ovaal, de schroeflijn, de tweehoek, de driehoek, de boog, de kwart- en halve boog ...' zouden de kleuters al gepresenteerd kunnen worden. Ten slotte komen ook nog ruimtelijke begrippen als vlak, tweevlakshoek en ruimtelijke lichamen aan de orde.

Ook relaties, zoals 'ligt op', 'gaat door' en 'is evenwijdig met', worden in dit stuk impliciet aan de orde gesteld. In de regel door middel van concreet handelende activiteiten: 'Hat das Kind einige geradlinichte Stäbe in den Händen, mit denen es spielt, so läßt die Mutter dasselbe versuchen, ob es ebenfalls mit zwey solcher Stäben einen, zwey, drey oder vier Winkel machen könne (Pestalozzi, 1826a, p. 43). Als vaardigheden noemt Pestalozzi het kunnen benoemen van begrippen in volzinnen. Tevens wordt een begin gemaakt met het leren tekenen van de voorstellingen.

In feite is deze aanvankelijke vormleer-leergang voor de huiselijke vorming een aftreksel van wat er in de hogere leerjaren aan de orde gesteld zou moeten worden.

Praktische en didactische uitwerking

De volgende didactische principes zijn als constant te bestempelen in het werk van Pestalozzi door de jaren heen:

- ten behoeve van begripsvorming dient concreet handelen en ervaren vooraf te gaan aan visualisering en abstracte voorstelling
- leren mag nooit routinematig of zinloos zijn; voor het leren van een hoger begrip moet eerst het lagere begrip volledig verworven zijn
- op grond hiervan moet de leerstof stapsgewijs opgebouwd worden en wel op een aanschouwelijke wijze

- bij het onderwijs moet uitgegaan worden van het kind en zijn omgeving, niet van de stof
- de ontwikkeling van het leren van het kind moet een natuurlijk verloop hebben, de leermethode moet zelfontdekkend zijn.

Allereerst valt op hoe modern deze principes aandoen. Maar op grond van Pestalozzi's eigen beschrijvingen van inhoud en didactiek van de vormleer en op grond van de boeken van Schmid kunnen we ons echter afvragen of de ideële doelen en de feitelijke vormgeving van de leermiddelen niet tenminste op een aantal punten strijdig raken. Er is immers een zekere tegenspraak te signaleren tussen het principe van de natuurlijke ontwikkeling en zelfontdekking enerzijds en het feitelijke onderwijs anderzijds, zoals dat bijvoorbeeld in de 'Elementarbücher' opgeroepen wordt. Het routinematige element kan toch gauw in de vormleer sluipen door de herhalingen van dezelfde principes. Wordt er wel van het kind uitgegaan als er met formeel meetkundige begrippen al op zo jonge leeftijd begonnen wordt? Waar vinden we de mogelijkheid van het zelf ontdekken, wanneer de boeken het in koor nadreunen in de hand werken?

We hebben hiermee de herkomst van de vormleer kunnen traceren. Duidelijk is ook wat Schmid met vormleer bedoelde. Maar tevens is geconstateerd dat Pestalozzi zelf bepaald niet ondubbelzinnig was over de bedoeling van het vak. Dit kwam onder meer voort uit het feit dat hij zijn oorspronkelijke ideeën in de loop van zo'n vijfentwintig jaar wellicht gewijzigd had, maar vooral omdat hij doel en inhoud niet duidelijk onderscheidde. Vanuit een algemeen standpunt bezien, dienden zich rond 1800 weliswaar belangrijke didactische vernieuwingen aan, maar we moeten toch vraagtekens plaatsen bij de praktische uitvoerbaarheid ervan. In de verdere ontwikkeling van de vormleer zou dit zijn gevolgen krijgen. Het vormleerboek van Schmid is in ieder geval van belang geweest voor het boek van Van Dapperen, dat we in het volgende hoofdstuk aan de orde zullen stellen.

A3 Vormleer in Nederland (1817-1857)

Nederland naar Yverdun

De vermaardheid van Pestalozzi's instituut lokte vele pedagogen uit Europa en zelfs daarbuiten naar Yverdun. Ook regeringsleiders ontging zijn faam niet.[1] In Nederland was in die tijd Van den Ende de hoogste inspecteur van het onderwijs. Naar aanleiding van een gesprek met een van Pestalozzi's medewerkers, W. von Türk, maar waarschijnlijk ook door zijn connecties met Prinsen, stelde Van den Ende in 1808 aan de Minister van Binnenlandse Zaken voor om twee talentvolle jonge onderwijzers voor de duur van drie jaren naar Yverdun te sturen om 'in de Leerwijze van Pestalozzi grondig (te worden) ingeleid'. Dit waren Dirk van Dapperen (1791-1822) uit Haarlem en H. Scholten uit Rotterdam. Zij zijn niet drie jaar weggebleven, maar in verband met de inlijving van Nederland bij Frankrijk na achttien maanden in 1810 weer teruggeroepen (Lammerts, 1950). Zo werd in 1809 Van Dapperen, die op de kweekschool van P.J. Prinsen 'een meer dan gewone aanleg' bleek te hebben, op rijkskosten naar Pestalozzi in Yverdun gezonden. Na zijn terugkeer publiceerde hij in 1820 een boek over vormleer.[2] Hoewel een paar jaar eerder enkele andere Nederlandse publicaties over vormleer het licht hadden gezien, moet de verschijning van het boek van Van Dapperen toch als het feitelijke startpunt van de geschiedenis van de *zuivere vormleer* in Nederland worden beschouwd.[3]

Bestand van leerboeken

Er zijn door ons voor de periode 1817-1857 elf Nederlandse leerboeken gevonden die tot de vormleer kunnen worden gerekend. Boeken die de traditionele euclidische meetkundestof behandelden, zijn buiten beschouwing gelaten.[4] We sommen ze op in volgorde van verschijning, alleen onder vermelding van titel, jaar van uitgifte en 'auteur(s)'. Voor uitgebreide bibliografische gegevens, zoals het aantal drukken, verwijzen we naar de literatuurlijst.

1. *Handleiding tot de Vormleer, voor Moeders en Onderwijzers* (1817). Hoofdbestuur der Onderwijzers Gezelschappen in het VIIIste schooldistrict in Vriesland.
2. *Oefeningen met den Cubus* (1817). Hoofdbestuur der Onderwijzers Gezelschappen in het VIIIe schooldistrict in Vriesland.
3. *Handleiding voor onderwijzers* (1820). Meestal genoemd: *Vormleer*, eerste stukje. D. van Dapperen.
4. *Verzameling van zamengestelde figuren, naar de vormleer van Pestalozzi* (1823). A.H. Hemmenga.
5. *Handleiding voor onderwijzers* (1824). *Vormleer,* tweede stukje. P.J. Prinsen.
6. *Praktische handleiding tot onderwijs in de eerste beginselen der vormleer*, eerste stukje (1826). H.M. Reidsma.
7. *Praktische handleiding voor de beoefening der vormleer* (1830). R.G. Rijkens.
8. *Onderwijs in de Vormleer* (1837). F.A.W. Diesterweg.
9. *Onderwijs in de Vormleer, Aanwijzing tot het gebruik van de Handleiding* (1839). F.A.W. Diesterweg.

10. *Practische Handleiding tot het Elementair Teekenen* (1839). P. Leupen.
11. *Ruimteleer of Meetkunst voor de lagere scholen* (1849-1851). J.G. Graßmann.

Verwijzingen in deze boeken leverden geen nieuwe titels op. Het bestand van vormleerboeken voor deze periode lijkt hiermee volledig.[5]

Eerste ordening

Het verschil in omvang, inhoud, methodische uitwerking en doelstellingen tussen deze boeken is enorm. We maken een eerste indeling om greep te kunnen krijgen op het onoverzichtelijke gebied van de vormleer.

aanvankelijke vormleer
De boekjes 1 en 2 waren bedoeld als een praktische handreiking voor de moeders om de huiselijke vorming aan de allerjongste kinderen volgens de ideeën van Pestalozzi gestalte te geven. Dit noemen we aanvankelijke vormleer.

aanschouwing en tekenen
Eerder hebben we gezien dat Pestalozzi grote waarde toekende aan het leren tekenen. Dit was voor een aantal auteurs, Hemmenga (4), Reidsma (6) en Leupen (10), een aanleiding tot het samenstellen van tekenmethoden met een vormleerachtig karakter. De methode van Rijkens (7) lijkt het meest op oefeningen voor het aanschouwingsonderwijs met nadruk op het tekenen. De vormleer is er slechts een klein onderdeel van.

zuivere vormleer
Het boek van Van Dapperen (3) is een volledige methode voor de lagere school. Het hoofddoel is het leren denken door middel van ordenen en systematisch werken met meetkundige vormen, zoals dat ook in de boeken van Schmid aan de orde kwam. Passend voor die tijd geldt de vormende waarde van de wiskunde als belangrijk punt van argumentatie. Het tweede deel van dit werk (5), uitgebracht door Prinsen, is voor de ontwikkeling van de vormleer van geen belang geweest.

meetkundige vormleer
De vertaalde werken van Diesterweg (8 en 9) zijn systematischer van aard en liggen dichter tegen de meetkunde als systeem aan. Het betreft hier een nieuwe, niet op Pestalozzi geënte aanpak van de vormleer, die ook op de Nederlandse ontwikkelingen haar invloed zou krijgen. Ook bij Diesterweg is de vormende waarde het belangrijkste argument voor dit vak, in het bijzonder voor de wiskunde in het algemeen. Hij beschouwt de vormleer als de 'aanschouwelijke' opstap naar de 'wetenschappelijke' meetkunde.

combinatorische meetkunde

Het werk van Graßmann (11) wijkt in meerdere opzichten af van de vorige werkjes en werken. Het is geen typisch vormleerboek, maar een inleiding tot de combinatoriek van elementaire meetkundige begrippen. Meetkundige combinatoriek zou ook een omschrijving kunnen zijn. Het is rond 1850 als vertaling van een herontdekt Duits leerboek uit 1817 via de *Nieuwe Bijdragen* openbaar gemaakt. Hoewel dit werk geen invloed op de Nederlandse ontwikkelingen heeft gehad, besteden we toch enige aandacht aan dit curiosum. Ten eerste omdat het een bijdrage levert tot beter begrip van de historische ontwikkeling van de vormleer, maar ook omdat de Duitse tekst een aantal interessante didactische opmerkingen bevat.

Aanvankelijke vormleer

De *Handleiding tot de vormleer* (1) en de *Oefeningen met den Cubus* (2) zijn tot stand gekomen op instigatie van de ijverige en bevlogen dominee en schoolopziener H.W.C.A. Visser (1773-1826) te Ysbrechtum.[6] Ze waren aangekondigd als de eerste twee deeltjes van een reeks, die waarschijnlijk nooit voltooid is, maar kennelijk bedoeld was als de Nederlandse 'Elementarbücher'. De *Handleiding* is een bewerking van een artikel uit het *Wochenschrift für Menschenbildung*. Uit de typisch pestalozziaanse voorrede tot de moeders wordt de kern van de aanvankelijke vorming duidelijk: 'datgeen, wat de natuur en God door U aan uw kind doen, de grondslag voor de ware opvoedingswijze zij' (*Handleiding tot de Vormleer*, 1817, p. X). De moeder diende dus de opwekster te zijn van de aanvankelijke vorming, waarvan de door God gegeven elementen al in de natuur vervat liggen. De leerstof bestaat uit het benoemen, tekenen en samenstellen van de elementaire begrippen als punt, lijn, hoek, vlakke figuren, zowel met rechte als kromme lijnen. Ook komen reeds maatverhoudingen voor. Terecht wijst Van Dapperen in zijn *Vormleer* op de mathematische fouten in dit werkje (Van Dapperen, 1820, p.VII). De volgende tekst moet heel verwarrend geweest zijn, zeker voor de kleuters van vier à vijf jaar.

> 'Een vierhoek met twee paar gelijklopende zijden, of een regthoek, noemt men ook een parallelogram.
> Maakt ieder een, twee, drie, enzovoort parallelogrammen.
> Maakt een regthoekig parallelogram.
> Maakt een met scherpe en stompe hoeken.
> (Teeken 5.) Zulk een noemt men een scheefhoekig parallelogram.
> Maakt ieder vier scheefhoekige parallelogrammen.
> Maakt een quadraat, een rechthoekig en scheefhoekig parallelogram, enzovoort.
> Een scheefhoekig parallelogram noemt men een ruit.
> Maakt twee ruiten.' (*Handleiding tot de Vormleer*, 1817, pp. 24-25)

Tot slot van dit werkje wordt naast de vormende strekking van de vormleer ook nog eens het zedelijke en morele aspect van de huiselijke vorming benadrukt, waarmee het dieperliggende doel geëxpliciteerd wordt. Door het nieuwe onderwijs en de nieu-

we opvoeding zou de laagste volksklasse zich beter kunnen ontwikkelen, waardoor het zich aan haar onmenswaardige bestaan zou kunnen ontworstelen. Groot was het vertrouwen van de pestalozzianen in de capaciteiten van de huismoeders hiertoe.[7] Even na het verschijnen van dit eerste boekje kwam het tweede deeltje van de aangekondigde reeks *Oefeningen met den Cubus* uit. Dit werkje was bedoeld voor de eerste klas van de lagere school, die toen overigens naar niveau in drie klassen verdeeld was. Het stelt als hoofddoel 'een hulpmiddel te geven voor oefeningen in aanschouwen'.

De denkbeelden van *voor*, *achter*, *regts*, *links*, *boven*, *onder*, *liggende* en *staande* worden door middel van den cubus aanschouwelijk voorgesteld, alsmede de denkbeelden van *vlakken*, *lijnen*, *hoeken* en *punten*, waarna men twee, drie en meerder denkbeelden zamenstelt' (*Oefeningen met den Cubus*, 1817, p. II). Zo worden bijvoorbeeld in de vierde oefening alle 24 (rechte) hoeken die zich aan een kubusmodel bevinden, systematisch omschreven:

'Dit is de regter voor bovenliggende hoek.
Dit is de linker voor bovenliggende hoek.
Dit is de regter achter bovenliggende hoek.
Dit is de linker achter bovenliggende hoek.'
(*Oefeningen met den Cubus*, 1817, p. 9)

Daarna moeten ze opgezegd en gememoriseerd worden. Met dit voorbeeld zijn eigenlijk alle 38 oefeningen gekarakteriseerd. Voorafgaand aan de oefeningen worden twaalf punten gepostuleerd die als aanwijzingen voor uitvoering in de praktijk bedoeld zijn. Zoals: duidelijk voorspreken, aanwijzen, gezamenlijk nazeggen, herhalen en inprenten, opklimmende moeilijkheidsgraad en toetsing van het niveau. Opmerkelijk in dit verband is nummer IX:

'Men moet dus wel zorgen, dat de kinderen niets onder het onderwijs gedachteloos napraten. Zijt daartoe in dit onderwijs vlug, matig vrolijk en belangstellend; druk u kort en zakelijk uit, met inachtneming van het doel, hetwelk Pestalozzi op het oog heeft; dan verwerft gij daardoor vlugheid, juistheid en levendigheid bij de leerlingen, welke noodzakelijk bij de leerwijze vereischt worden.' (*Oefeningen met den Cubus*, 1817, p. V)

Gezien het gegeven voorbeeld en de overige aanwijzingen, zoals voorspreken en nazeggen, kunnen wij ons nauwelijks voorstellen dat aan punt IX in het onderwijs recht gedaan zou zijn. Een sterieler voorbeeld en een starder onderwijsmethodiek is nauwelijks voorstelbaar. Vanzelfsprekend dringt zich dan ook de vraag op of en hoe de vormleer op de scholen gestalte kreeg. Hierover zijn weinig gegevens bekend, maar we komen er in het volgende hoofdstuk (A4) op terug.

Aanschouwing en tekenen

Het boekje van Reidsma (6), die tot de groep van Visser behoorde, was bedoeld voor de eerste klasse van de lagere school. Als belangrijkste doelen stelt Reidsma 'oefe-

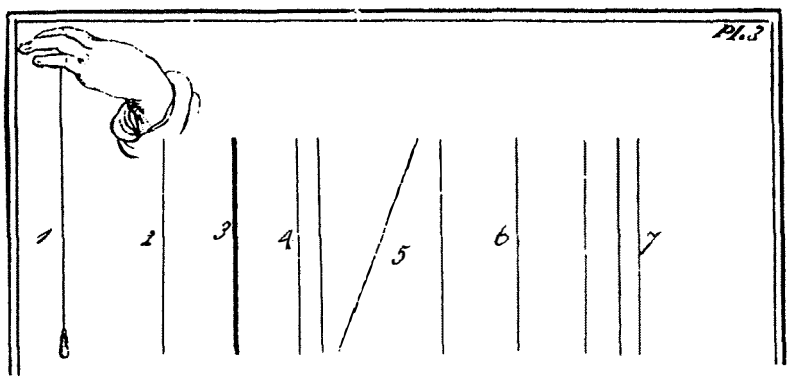
ning van het oog', 'oefening van de hand (tekenen)' en 'ontwikkeling van esthetiek'. Praktisch betekent dit: het leren tekenen van allerlei soorten lijnen en het samenstellen van deze elementen tot ornamentachtige figuren. Steeds komen ordeningsbegrippen als 'boven, onder, linksonder, rechtsboven' en dergelijke in combinatie met deze tekenoefeningen aan de orde. Het tweede stukje van dit boek is onvindbaar gebleken.

Het werkje van Hemmenga (4) is een verzameling voorbeelden om symmetrische figuren samen te stellen uit punten, rechte en kromme lijnstukken. Het boekje van Leupen (10) is een bewerking van een Duitse tekenmethode, waarbij van vierkantenroosters gebruik gemaakt wordt.

Het boek van Rijkens (7) legt ook sterke nadruk op het leren tekenen. Hij zou er het liefst een hoofddoel van maken: 'En waarlijk, indien het ook mogelijk ware, dat men op eene school de *Vormleer* als eene inleiding tot de meetkunde doelmatig *konde* beoefenen, ik zoude die strekking verwisselen en derzelve alleen bevorderlijk doen zijn tot het aanleeren der schoone Teekenkunst' (Rijkens, 1830, p. V). Daarnaast wijst hij in een nogal omstandige theoretische inleiding op de verdere mogelijkheden van de vormleer: ontwikkelen van het voorstellingsvermogen, leren schatten, ontwikkelen van esthetisch gevoel, leren schrijven, praktische toepassingen, recreatief bezig zijn, leren denken, opstellen maken, rekenen, natekenen, leren lezen. Eigenlijk goed voor alles. Bovendien is de vormleer bevorderlijk om 'de stilte in de scholen te bevorderen' (Rijkens, 1830, p. VI). De uitwerking bestaat uit zo'n twintig platen die elk telkens een aantal tekenvoorbeelden bevatten. De onderwijzer tekent deze op het bord voor, waarna de kinderen ze moeten natekenen. Naar aanleiding van deze tekeningen dienen vragen gesteld te worden, waarvoor de begeleidende tekst aanwijzingen geeft. De kern betreft vrijwel steeds het benoemen van elementaire meetkundige begrippen. In figuur A3.1 zien we een gedeelte van zo'n plaat, waarbij de volgende tekst hoort:

> 'Daar hebben we eene loodlijn. Eene loodlijn is eene lijn, die even zoo regt loopt als een touwtje waaraan een stukje lood hangt [1]. Hier is er eene [2]. Nu willen wij eens eene maken die regt dik en vet is [3]. Wijst mij eens eenige loodlijnen in de school. Vindt gij er ook aan de deur? aan het bord? (...) Twee loodlijnen kunnen ook gelijkloopend zijn. Welaan! laat ons die eens teekenen: ik ga u voor, volgt mij. Zegt nu: *twee loodlijnen kunnen gelijkloopend zijn* [4]. Twee loodlijnen kunnen ook ongelijkloopend voorkomen [5]. Zij kunnen ook in dezelfde rigting voorkomen [6]. Wijst mij eens twee aan het raam, die aldus voorkomen. – Op *twee* lijnen volgen *drie* lijnen; zij kunnen gelijkloopend zijn [7].' (Rijkens, 1830, pp. 6-7)

Rijkens was een vooraanstaand onderwijsvernieuwer en Pestalozzi-aanhanger. Naast het hier beschreven boek heeft hij zich ook met de andere vakken van het lager onderwijs beziggehouden. In het boek dat Rijkens in 1847 voor de bewaarschool schreef, besteedt hij ook aandacht aan de vormleer, zoals we later zullen zien.

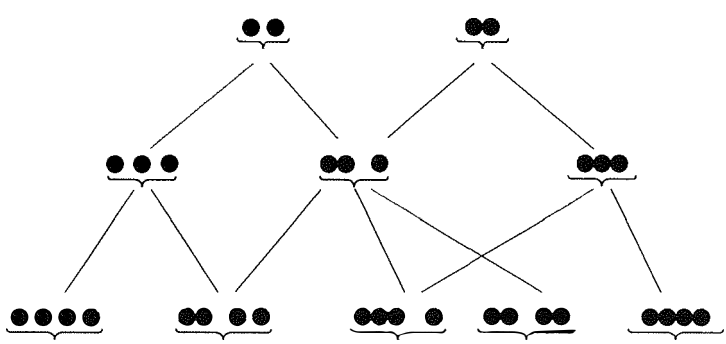


figuur A3.1: Vormleer volgens Rijkens (1830)

Zuivere vormleer

Met het boek van Van Dapperen uit 1820 is de vormleer in haar meest zuivere vorm in Nederland bekend geworden. De officiële titel luidt: *Handleiding voor Onderwijzers om volgens eenen geregelden gang, kinderen te leeren opmerken, denken en spreken, toegepast op de zamenstelling der eenvoudigste voorwerpen uit de meetkunde, bekend onder den naam Vormleer*. De feitelijke vormleer-leergang lijkt sterk op het werk van Schmid. Alleen waar Schmid met de 'lijn' begon, vangt deze leergang aan met het 'punt', maar opgevat als een concrete 'stip'. De aard van de leergang is echter dezelfde als in de *Elemente* van Schmid.

Twee punten kunnen samenvallen of niet. Met drie punten neemt het aantal mogelijkheden toe, zoals in het schema van figuur A3.2 is weergegeven.[8] Van Dapperen wil nu dat de hele klas de verschillende mogelijkheden in koor zal opzeggen (zie figuur A3.3). Hierna zouden de kinderen zelf de mogelijkheden voor vier, vijf punten, enzovoort wel kunnen vinden, zo stelt van Dapperen.



figuur A3.2: Samenvallende en niet-samenvallende mogelijkheden voor 2, 3 en 4 punten.

a. Drie puntĕn kunnĕn vĕreenigd zijn.
b. Drie puntĕn kunnĕn onvĕreenigd zijn.
c. Van drie puntĕn kunnĕn twee vĕreenigd en een onvĕreenigd zijn.

figuur A3.3: Opmerken, denken en spreken. D. van Dapperen (1820)

Doordat de kinderen eerst de door de onderwijzer op het bord getoonde voorbeelden hadden *aanschouwd*, daarna hadden *beredeneerd* dat alle mogelijkheden gevonden waren en dit ten slotte hadden *verwoord*, zouden zo alle doelen van de vormleer, zoals ze in titel verwoord zijn, aan bod geweest zijn. Na eindeloze rijen van dergelijke oefeningen waarbij alleen punten gebruikt worden, volgen analoge oefeningen met lijnen, zoals we die ook bij Schmid hebben leren kennen. Het boek is vooral interessant omdat de vormleer nader toegelicht wordt en in de Nederlandse situatie wordt geplaatst. Dit gebeurt in de eerste vier paragrafen:

'– De ontwikkeling van de verstandelijke vermogens, aan de gewone manier van onderwijzen getoetst.
– Algemeen overzigt der Pestalozzische leerwijze.
– Overzigt van den staat van het onderwijs in de Nederlanden.
– Aanmerkingen en ophelderingen over hetgene in dit werk behandeld wordt.'

In deze tekst legt Van Dapperen Pestalozzi's leer aan de Nederlandse onderwijzer uit. We zouden enige vraagtekens kunnen plaatsen bij de wijze waarop Van Dapperen zijn absolute vertrouwen in diens aanpak stelt, wat soms iets van een goddelijke verering krijgt: 'De denkbeelden van Pestalozzi, over het onderwijs en de ontwikkeling van de verstandelijke vermogens des menschen zijn zuivere waarheden, ...' (Van Dapperen, 1820, p. IV).

Hij beroept zich bij voortduring op het feit dat zowel Pestalozzi – Schmid noemt hij nergens – als hijzelf door eigen ervaring de bruikbaarheid, uitvoerbaarheid en effectiviteit van de leermethode bewezen hebben gezien. Deze paragrafen over de algemene doelen van Pestalozzi's leermethode zijn veel praktischer, helderder en toegankelijker geschreven dan hetgeen Van Dapperens leermeester Prinsen in zijn *Leerwijze van H.* Pestalozzi (1809) daarover uiteenzette. Ook als we de methode vergelijken met de andere toen beschikbare boeken over vormleer – het boek van

Diesterweg uitgezonderd – moeten we constateren dat Van Dapperens *Vormleer* daar met kop en schouders boven uitsteekt.

We kunnen de doelen van de vormleer, zoals door Van Dapperen beschreven, als volgt samenvatten:

- goed leren aanschouwen
- leren denken en redeneren
- systematisch werken
- voorbereiding op het tekenen
- voorbereiding op dé meetkunde
- het ontwikkelen van het esthetische gevoel.

De eerste drie punten dekken hetgeen in de titel van Van Dapperens boek staat. Het zijn doelen die vaak genoemd worden in het kader van de formele scholing, waarvan de kern is dat de intellectuele vermogens van de kinderen ontwikkeld worden. Het laatstgenoemde punt (6) kan ook als een formeel doel opgevat worden, maar dan meer als geestelijke ontwikkeling. In de twee resterende doelen (4 en 5) herkennen we de praktische doelen die ook aan de vormleer werden toegekend, namelijk als voorbereiding op het leren tekenen en de wetenschappelijke meetkunde.

Het argument van de vormende waarde van de vormleer krijgt nog een extra dimensie omdat de vormleer ook wordt aanbevolen als voorbereiding op de echte meetkunde, die in die tijd louter om haar vormende waarde werd bedreven. Maar ook van het systematisch werken meent hij dat het een positieve transfer zal hebben, wanneer hij daarover opmerkt: 'eene werkzaamheid onzer geest (is), welke ons door geheel ons leven bijblijft, een werkzaamheid, welke hierom nooit te vroeg begonnen kan worden' (Van Dapperen, 1820, p. 33). Thans zouden wij kunnen denken aan andere dan combinatorische onderwerpen om een dergelijke leergang op te zetten. Van Dapperen koos voor de meetkundige ingang om de volgende eenvoudige reden: 'Maar waarom juist mathematische figuren? zal misschien iemand vragen. Gaarne zou ik mij van voorwerpen uit het dagelijksche leven bedienen, indien mij een enig bekend ware' (Van Dapperen, 1820, p. 33).

Tot 1865 is dit boek herdrukt, in totaal vier drukken. Door latere auteurs over vormleer en meetkunde in de tweede helft van de negentiende eeuw wordt het vaak geciteerd. Zelfs is een duidelijke invloed aanwijsbaar. Helaas heeft Van Dapperen deze 'erkenning' zelf niet mogen meemaken. Hij overleed reeds op dertigjarige leeftijd (1822). Het 'tweede stukje' is in 1824 door Prinsen gepubliceerd. Het is een euclidisch meetkundeboek, dat met de feitelijke vormleer voor de lagere school geen verband heeft.

Diesterweg

Adolph Diesterweg

Om twee redenen besteden wij nu eerst opnieuw aandacht aan een buitenlander: Friederich Adolph Wilhelm Diesterweg (1790-1866), een wiskundige en pedagoog, een van de belangrijkste Duitse onderwijsvernieuwers van de negentiende eeuw.[9] Ten eerste treffen we bij Diesterweg enkele belangrijke voor die tijd nieuwe mathematisch-didactische principes aan. Ten tweede zijn z'n opvattingen en werk over de vormleer van beslissende betekenis voor de ontwikkeling van dit vak, in het bijzonder voor Nederland, geweest.

Het streven naar 'Volksglück' en 'Menschenwohl' door middel van 'allgemeine Volksbildung' had Diesterweg met Pestalozzi gemeen, reden waarom hij wel de Duitse Pestalozzi werd genoemd. Maar alleen al de door hem op Pestalozzi geuite kritiek op diens mechanistische en formalistische onderwijsaanpak – in het bijzonder op die van de 'Afterpestalozzianer', zoals Schmid – maakt duidelijk dat genoemde titel slechts één aspect van Diesterwegs persoonlijkheid belicht. Diesterweg behoorde niet tot een specifieke school; hij werkte zijn gedachten uit tot een eigen pedagogiek, didactiek en methodiek. Hij benadrukte bij voortduring het belang van de praktijk en hij achtte de leraar de spil van het onderwijsleerproces, wanneer hij deze 'die personifizierte Lehrmethode, des Unterrichts - und Erziehungsprinzip selbst' noemt (H. Scherer, 1904, p. 225).[10]

Pedagogisch-didactische principes van Diesterweg

Diesterweg gaat ervan uit dat het kind van nature onbedorven is en voorzien van bepaalde 'Anlagen', die het uit zichzelf wil ontwikkelen. Daartoe zijn wel 'Anregungen' van buitenaf nodig. Niet ieder kind bezit alle 'Anlagen' en per kind zullen deze ook verschillen. In het onderwijs moet hiermee rekening gehouden worden. Bij de ontwikkeling gelden volgens hem de volgende pedagogisch-didactische principes:

- uitgaan van het individu en zijn persoonlijke aanleg in samenhang met zijn omgeving
- opwekken tot 'Selbsttätigkeit'
- formele en materiële ontwikkeling in harmonisch evenwicht
- aanschouwelijk onderwijs volgens een analytische aanpak
- begripsvorming volgens 'Anschauung – Vorstellung – Begriff'

en ten slotte een punt van meer methodische aard:

- stapsgewijze leerstofopbouw.

Er is veel overeenkomstigs aan te wijzen tussen het bovenstaande en de pestalozziaanse principes. Sommige principes hebben zelfs een zekere eeuwigheidswaarde. Maar hoe werden die principes in een methode voor het onderwijs uitgewerkt? Daaraan kan het beste de werkelijke betekenis van dergelijke principes worden afgemeten.[11] Om de betekenis van Diesterwegs opvattingen beter op waarde te kunnen schatten, volgen we eerst zijn opvattingen over wiskunde en vormleer, zoals neergelegd in zijn eigen vormleerboek uit 1822.

Diesterwegs opvattingen over wiskunde en wiskundeonderwijs anno 1822

> 'Mathematik ist ein von Ort, Zeit und Empirie ganz unabhängiges, reines Produkt geistiger Thätigkeit' (...) 'So gewiß die Grundanlage des menschlichen Geistes in allen Menschen die Eine und Gleiche ist, so gewiß ein jedes menschliche Individuum, das denken kann, Erkenntnißvermögen besitzt, so gewiß ist Mathematik für alle Menschen, so gewiß sind alle Schüler für Mathematik. Wo nicht, so liegt die Schuld nicht in der Sache'. (Diesterweg, 1822, p. 111)

Hiermee zijn op stellige en bondige wijze Diesterwegs opvattingen over wiskunde en haar leerbaarheid weergegeven. Dit schreef hij in 1822 in het slotwoord van zijn *Formen- Größen - und räumliche Verbindungslehre oder Vorübungen zur Geometrie*. Zijn opvatting over de wiskunde als wetenschap was dus een platonische. De noodzakelijkheid van wiskunde als vak van onderwijs voor alle leerlingen achtte hij evident, de onderwijsbaarheid diende een zaak van de leraar te zijn. Diesterweg verwijst voor zijn stellingname naar zijn eigen onderwijservaringen.Waar hij zich ook nog over het universeel vormende aspect van de wiskunde uitspreekt, wordt zijn geloof in de vormende waarde van dit vak overduidelijk. Met de wiskundige vorming moet al op de lagere scholen begonnen worden. Niet echter via 'die rationelle Geometrie', omdat dit in de 'Volksschule' niet haalbaar is; het meetkundeonderwijs moet daar meer een 'Vorschule (...) für den künftigen wissenschaftlichen Vortrag der Geometrie' zijn (Diesterweg, 1822, p. 4).

Ten aanzien van de begripsvorming neemt Diesterweg anno 1822 een geheel eigen en soms verwarrend standpunt in. Hij meent dat 'Mathematische Erkenntnisse (...) auf Anschauungen und Begriffen zugleich (beruhen)' (Diesterweg, 1822, p. 9). Hij erkent weliswaar het belang van 'intuitive Anschauung' en 'intuitive Erkenntnis', maar stelt dat het een 'Irrthum' is dat men 'von sinnlicher Beschauung zu geistiger Anschauung und zu allgemeinen Begriffen' in de meetkunde kan komen: 'Die geometrischen Wahrheiten müssen erst gedacht werden, bevor man ein sinnliches Bild des gedachten entwirft' (Diesterweg, 1822, p. 12).

We zien bij Diesterweg in 1822 dus een heel andere opvatting over de psychologisch-didactische betekenis van de Anschauung dan bij Pestalozzi en Schmid, wier boeken hij overigens prees. Maar later zou hij een ander standpunt innemen, waarop we in hoofdstuk A6 terugkomen.

De stof

De inhoudsopgave van het onderhavige boek weerspiegelt iets van het bovenstaande. Er zijn 37 paragrafen, waarvan we er enkele noemen: Raum und Körper (1), Fläche (2), Linie (3), Punkt (4) (...) Bewegung (6), Zeit (7), Richtung und Lage (8) (...) Figur (12), Figuren zu lesen und zu bezeichnen (13), Das Diktiren der Figuren (14), Aehnlichkeit, Gleichheit und Kongruenz (15) (...) Begriffe (Logisch-Mathematische Uebungen) (19, 20), Mathematische Grundsätze, Definitionen u.s.w. (21) (...) Urtheile (23), Schlüsse (24), (...).

De kinderen moeten dus van meet af aan – Diesterweg vindt dit leerstof voor negen- tot veertienjarigen – leren denken in de traditie van een zuiver wiskundige onderwijsopvatting, eerst het abstracte, dan het bijzondere. In verband hiermee is te begrijpen dat Diesterweg ook belang hechtte aan de logica. Hoewel volgens Diesterweg 'Anschauung' en 'Begriff' tegelijk opgeroepen moeten worden – hij gebruikt ook wel de termen 'äußerliche' respectievelijk 'innerliche Anschauung' – om tot kennis te komen, wordt in de uitwerking van zijn leerboek toch de nadruk gelegd op de zuiver wiskundige benadering. Duidelijk wordt dit getypeerd door de eerste tien opgaven van dit leerboek:

'1. Nenne Gegenstände oder körperliche Dinge die zunächst um dich her sind!
2. Wo befinden sich diese Gegenstände?
3. Du sagst in diesem Zimmer, im Raume dieses Zimmers. Liegen die in diesem Zimmer befindlichen Gegenstände a n – n e b e n- i n oder a u ß e r einander?
4. Wie liegen also die in oder außerhalb des Raumes dieses Zimmers vorhandenen Dinge?
5. Wo ist Raum? Wo ist nicht Raum?
6. Wie groß ist also der Raum?
7. Was ist der Raum dieses Zimmers von dem ganzen Raum?
8. In wie viele Theile denkst du dir den ganzen, den Welt-Raum eingetheilt? Oder wie viele Theile zusammen machen den unendlichen Raum aus?
9. Stellen wir uns den unendlichen Raum aus Theilen zusammengesetzt vor, oder nur die Theile i n ihm? Sind die Theile des Raums durch den Welt-Raum oder letzterer durch erstern?
10. Wird also die Vorstellung dadurch, daß wir Theilvorstellungen zusammen fassen und zu einer Gesammt-Darstellung verbinden – oder ist der Raum eine unmittelbare Vorstellung? Mit andern Worten: Ist der Raum ein Begriff oder eine Anschauung?' (Diesterweg, 1822, p. 20)

Na één (!) vraag, waarbij de omringende concrete ruimte en enkele concrete ruimtefiguren aan de orde gesteld worden, volgen direct een aantal diepgaande vragen die culmineren in de vraag naar het wezen van het abstracte begrip ruimte. Bedoeld wordt overigens dat ruimte als een 'unmittelbare Vorstellung', een niet gedefiniëerd grondbegrip, wordt erkend. Hiermee komt één van de belangrijkste verschillen tussen Pestalozzi en Diesterweg aan het licht. Pestalozzi, de pedagoog, gaat uit van zintuiglijke aanschouwing, van concrete voorwerpen en van het bijzondere naar het algemene en vertrekt zeker niet vanuit de zuivere wiskunde. De wiskundige Diester-

weg bewandelt in 1822 juist de omgekeerde weg. Zijn opvatting daarover is echter niet constant en consequent.

Alvorens in te gaan op Diesterwegs invloed op de ontwikkeling van de vormleer in Nederland, bespreken we eerst de Nederlandse vertaling van dit leerboek.

Meetkundige vormleer

In 1837 verschijnt de *Handleiding bij het Onderwijs in de Vormleer* van Diesterweg (8), vertaald door de wiskundeleraar J. Blouw. In 1839 wordt deze gevolgd door een *Aanwijzing tot het gebruik van de Handleiding* (9), verder te noemen de *Handleiding* en de *Aanwijzing*. De *Handleiding* is het leerboek, een vertaling van de derde druk van het hiervoor besproken boek van Diesterweg. De inhoud van deze Nederlandse versie verschilt slechts in één opzicht. Daarin ontbreekt namelijk de oorspronkelijke paragraaf over de 'Methode der Geometrie'. Verder is het Nederlandse boek een letterlijke vertaling van de eerste Duitse versie.[12] Passend bij de opvatting van Diesterweg dat het onderwijs gebaseerd moet zijn op zelfwerkzaamheid, bestaat de *Handleiding* (dit is het boek voor de leerling) alleen uit vragen en opgaven.

Met de start van de *Handleiding* maakten we hiervoor al kennis, toen we de oorspronkelijke Duitse editie beschouwden. De Nederlandse editie wijkt daar niet vanaf. Interessant is dat in de paragrafen 6 en 7 'beweging' en 'tijd' aan de orde gesteld worden. Door het begrip beweging mede als uitgangspunt te kiezen voor een meetkundig systeem, kan volgens Diesterweg veel meer nadruk gelegd worden op 'das Werden und die Art des Werdens geometrischer Objecte' (Diesterweg, 1822, p. 8). Met dit 'Werden' wordt het maken, construeren van figuren bedoeld. Dit is ook belangrijk voor de taal: 'Een gelijkbeenige driehoek is zulk een, welke twee gelijke zijden heeft' en 'Een figuur, welke ontstaat door de beide even lange beenen van eenen hoek door eene regte lijn te verbinden, heet gelijkbeenige driehoek' (Diesterweg, 1854, p. 52). De eerste noemt hij een 'woordverklaring', de tweede, door hem veel belangrijker geacht, een 'zaakverklaring'. Hiermee buit Diesterweg het scheppende, actieve element van de meetkunde als een didactisch principe uit.

De eerste vijftien paragrafen behandelen de stof over hoeken, figuren, vormverbindingen door lijnen, gelijkheid, gelijkvormigheid en congruentie, zoals we dit ook bij Pestalozzi en Van Dapperen hebben aangetroffen. Echter in een veel compacter vorm, goed geformuleerd, strakker opgebouwd, mathematisch correct en nauwelijks aandacht voor de kromlijnige hoeken en figuren. Ook bij Diesterweg aandacht voor de combinatorische opgaven, maar ook in dit opzicht helderder en gestructureerder dan bij de eerder besproken auteurs. Wat vooral opvalt is dat Diesterweg steeds aandringt op het ontdekken van een algemene regel, waarmee hij een kenmerkend principe van de wiskunde – het generaliseren – benadrukt: 'Stel u 4, 5, 6, 7, 8, enzovoort punten voor (...) en bepaal het grootste aantal regte lijnen, dat tusschen deze punten mogelijk is. Zoek den algemeenen regel voor de voorgaande opgave' (Diesterweg,

1854, p. 14). En in de 'Aanwijzing' worden dan inderdaad twee duidelijke verklaringen gegeven, die tot de bekende formule $\frac{1}{2}n(n-1)$ leiden.

Na de paragrafen over 'Meting', 'Figuur-getallen' en 'Beschouwing van de grondslagen der Driehoeksmeting' volgen dan acht paragrafen over wat Diesterweg 'logisch-mathematische oefeningen' noemt. Hij beschouwt deze oefeningen als een basiscursus voorafgaande aan het wiskunde leren: een cursus aristotelische logica. Ruime aandacht wordt besteed aan het definiëren door middel van het toekennen van bijzondere eigenschappen (differentiae specificae) aan een algemener, hoger begrip (genus proximum). De methode hierbij is het terugwerken tot de ongedefinieerde grondbegrippen. Geoefend wordt dit door middel van het klassificeren van driehoeken, vierhoeken, hoeken et cetera. Dan volgt een onderdeel waarbij de axiomatisering voor een deductief systeem wordt belicht. Het gaat om de axioma's – bij Aristoteles de algemene inzichten genoemd – die de gelijkheids- en orderelaties vastleggen. Diesterweg noemt er negen, zoals 'Deel is kleiner dan het geheel'. Verder de transitiviteitsregels (zoals $a > b, b > c \rightarrow a > c$) en de bewerkingsregels voor de gelijkheidsrelaties (zoals $a = b \rightarrow a + p = b + p$). Hiermee moeten als oefening weer nieuwe stellingen afgeleid worden.[13] Het onderdeel wordt afgesloten met een aantal oefeningen over 'waar' of 'valsch' zijn van (meetkundige) oordelen. In de paragraaf over 'Oordelen' worden enkele grondregels van het trekken van conclusies uit gegeven premissen aan de orde gesteld, zoals:

> 'Wanneer deze figuur een driehoek is, dan liggen er 2 scherpe hoeken in dezelve.
> Deze figuur is geen driehoek.'
> ——————————————————————— (Diesterweg, 1854, p. 58)

De bedoeling is een conclusie uit beide beweringen te trekken die onder de streep genoteerd moet worden. Erg systematisch is dit onderdeel niet.[14]

Als afsluiting van de 'Handleiding' volgen tien paragrafen over ruimtemeetkunde, waarin punten, lijnen, vlakken en hun relaties onderzocht worden, alsmede enkele bekende ruimtefiguren als het prisma, de piramide, de bol, cilinder en kegel en in het bijzonder de regelmatige veelvlakken. Opmerkelijk is nu de veel concretere aanpak dan bij de vlakke vormleer. Veel meer wordt nu ook gebruik gemaakt van de aanschouwelijkheid, zoals uit de oplossingen in de 'Aanwijzing' blijkt. Hieraan wordt onze omschrijving van Diesterwegs werk als 'meetkundige vormleer' het best duidelijk. Als voorbeeld twee opgaven, één over de bol en één over de regelmatige veelvlakken:

> 'Hoe vele groote cirkels kunnen elkander regthoekig doorsnijden, zoodat elk deel loodregt op elk der overige deelen staat?' (Diesterweg, 1854, p. 74)
> 'Zoudt gij den grond kunnen vinden, waarom er juist 4 gelijkzijdige driehoeken tot de vorming van den regelmatigen ligchamelijken vierhoek vereischt worden? Waarom 6 quadraten tot den cubus, 8 regelmatige driehoeken tot het octaëdrum; waarom 12 vijfhoeken tot het dodecaëdrum, en waarom 20 driehoeken tot het icosaëdrum?' (Diesterweg, 1854, p. 76)

Brugsma's bemoeienis

Diesterwegs vormleer 'is op aanbeveling van een paar bekwame Wiskundigen in het Nederlandsch overgebragt', zo schreef Brugsma in 1837 in de voorrede van het onderhavige boek.[15] Hij stelt 'dat het niet voor jonge kinderen is' en vooral nuttig is 'voor jonge lieden, die tot onderwijzers der jeugd worden opgeleid'. Dit is in overeenstemming met wat Siegbert Schmidt (1991) meedeelt in zijn onderzoek naar de programma's van de 'Rheinische Lehrerseminare' in de negentiende eeuw. Wellicht dat het boek ook in Nederland als een studieboek voor (aanstaande) onderwijzers is opgevat.

De genoemde voorrede is daarom zo interessant, omdat nu uiteengezet wordt wat onder vormleer verstaan moet worden en welke argumenten er bestaan het als vak op de lagere school te onderwijzen. De Vormleer wordt met de Meetkunde vergeleken, waarbij het onderscheid niet in de leerstof, maar in de vorm van de behandeling gelegen is. Het gaat dus kennelijk om dezelfde inhoud, maar de methode zal anders moeten zijn:

> 'Voor de Vormleer is zij (de methode, EdM) *aanschouwelijk*, voor de Meetkunde *wetenschappelijk*. In de Vormleer heerst de aanschouwing, in de Meetkunde het begrip. Door de eerste verkrijgt men waarheden, die onmiddellijk uit de waarnemingen der zinnen, uit de werking van het aanschouwingsvermogen spruiten; door de laatste komt men tot resultaten, die een gevolg zijn van afgetrokkene begrippen en van meer samengestelde werkzaamheden van het denkvermogen.' (Diesterweg, 1854, p. VIII)

Nauwkeurige vergelijking van een opstel over vormleer door Diesterweg, uit de eerste druk (1835) van diens *Wegweiser* met Brugsma's voorrede, leert dat Brugsma zich op dat artikel van Diesterweg gebaseerd had, overigens zonder het te noemen. Zij het met één verschil: Brugsma besteedt namelijk geen aandacht aan het argument van de toepasbaarheid van de vormleer, iets waarop Diesterweg in dat artikel van 1835 overigens pas in de tweede plaats wijst.[16] Datgene wat Brugsma in de voorrede uiteenzet, zijn dus de opvattingen van Diesterweg over vormleer, zoals de laatste deze zo'n vijftien jaar na zijn eerste boek over vormleer formuleerde. Zou in de Nederlandse vertaling het voorwoord, dat Diesterweg bij zijn eigen (Duitse) editie had geschreven, mee vertaald zijn, dan zou een ander beeld van de vormleer en de doelen van dit vak opgeroepen zijn. Reeds hiervoor lieten wij zien dat Diesterweg toen (1822) bijzondere nadruk legde op de formele waarde van de wiskunde en van de vormleer in het bijzonder. Ook zijn gedachten over het ontstaan van begrippen en de rol van de Anschauung daarbij waren toen anders dan in het artikel uit de *Wegweiser*, waarop Brugsma zich baseert.

In het 'Duitse voorwoord' ligt de nadruk op de formele waarde, op het werken van het algemene naar het bijzondere, op de ontwikkeling van mentale begrippen gelijktijdig met hun aanschouwelijkheid. In het 'Nederlandse voorwoord' wordt de aanschouwelijkheid als basis voor de ontwikkeling van het begrip gekozen, en gaat

het meer om de methode dan om de (wiskundige) inhoud.

Wat beide voorwoorden gemeenschappelijk hebben, is dat de vormleer beschouwd wordt als een opstap naar de 'wetenschappelijke', formele meetkunde. Maar beide voorwoorden gaan vooraf aan dezelfde cursusinhoud, die we hiervoor beschreven hebben. Diesterweg laat dezelfde vormleer door Brugsma in 1837 dus geheel anders aanprijzen dan hijzelf in 1822 had gedaan. Kennelijk had Diesterwegs denken over aanschouwelijkheid en intuïtie ten aanzien van de meetkunde in die vijftien jaar een wending ondergaan. Maar desondanks blijven zijn opvattingen over wiskunde als zuivere wetenschap uiteindelijk toch ook zijn opvattingen over het aanvankelijk meetkundeonderwijs sturen. Aanschouwelijkheid akkoord, maar zo snel mogelijk gericht op het formele wiskundige systeem.

Samenvattend constateren we dat Diesterwegs boek om twee redenen van belang is geweest voor de ontwikkeling van de vormleer in Nederland tijdens de negentiende eeuw. Ten eerste biedt het boek inhoudelijk een rijke bron voor latere ontwikkelingen; met name wordt de stof duidelijk afgeperkt. Ten tweede is het door Brugsma opgestelde voorwoord indirect van groot belang geweest voor de argumentatie tot de officiële invoering van dit vak in 1857.

Meetkundige combinatoriek

Tussen 1849 en 1852 verschenen in de *Nieuwe Bijdragen* in de rubriek 'Mengelwerk' twaalf artikelen over 'Ruimteleer en Meetkunde voor de lagere scholen'. De anonieme inzender van deze stukken, waarschijnlijk een schoolopziener, beveelt deze artikelen in een noot aan 'in verband met, of als voortzetting van de oefeningen in de vormleer'. Uit genoemde noot blijkt dat de betreffende artikelen een vertaling zijn van 'een werkje van den bekwamen J.G. Graszmann.'[17] Hoewel deze artikelen niet tot een schoolboek gebundeld zijn, hebben wij deze twaalf 'lesbrieven' toch in het schoolboekenbestand opgenomen. Vooral omdat in feite alle boeken voor de onderwijzer bedoeld waren. Het totaal van 93 pagina's tekst blijkt een letterlijke vertaling te zijn van een gedeelte van Graßmanns *Raumlehre für Volksschulen* uit 1817. De Nederlandse vertaling wordt opgesplitst in de volgende vier delen:

a 'Algemene voorafgaande oefeningen'.
b 'Eerste Afdeeling: Teruggang van het lichgaam tot het punt.'
c 'Tweede Afdeeling: Rigting.'
d 'Het verbinden van regte lijnen in betrekking op het getal en de ligging der daardoor ontstaande snijpunten en hoeken.'

ad a) Dit lijkt op een soort massa-gymnastiek- en kooroefeningen. Het aangeven van vlakken en lijnen gebeurt vanuit het kind zelf, met behulp van bewegingen van de armen. Daartoe wordt eerst de algemene methodiek uiteengezet, welke door het vol-

gende voorbeeld duidelijk wordt:

'O. Regter hand om hoog! –R. –W.– Kn.d.
O. Wat hebt gij gedaan? –R. –W.– Kn.a.
Wij hébben de régter hand in de hóógte gerigt.
(R: rust, W: Wenk, Kn.d: kinderen doen. Kn.a: kinderen antwoorden)'
(Nieuwe Bijdragen, 1849, p. 716)

ad b) 'Teruggang van het ligchaam tot het punt' (Rückgang vom Körper zum Puncte) maakt duidelijk dat uitgegaan wordt van ruimtelijke lichamen (modellen), waarmee achtereenvolgens de begrippen vlak, lijn en punt worden omschreven. Een lijn is de doorsnijding van twee vlakken, het punt is het einde van een lijn(stuk). Tevens wordt het tweedimensionale karakter van het platte vlak, de ééndimensionaliteit van de rechte lijn en de dimensieloosheid van het punt besproken. En wel door middel van de begrippen lengte, breedte en/of dikte.
ad c) Door middel van handbewegingen worden de begrippen rechte, kromme lijn en richting opgebouwd. Op analoge wijze de drie hoofdvlakken in de ruimte volgens de onder a genoemde methodiek. Ten slotte volgt de toepassing op het tekenen van lijnen, niet alleen op de lei, maar ook 'in de lucht'. Interessant is dat lijnen als oneindig voortlopend worden opgevat.
ad d) In dit deel, dat in de oorspronkelijke Duitse tekst als hoofdtitel 'Ebene räumliche Verbindungslehre' draagt, komt de kern van de leergang naar voren. De Duitse titel geeft ook precies aan waar het om gaat, namelijk combinatoriek aan de hand van de elementaire meetkundige begrippen lijn, punt en hoek. Dit nu is heel systematisch en op heldere wijze opgezet. De nadruk ligt met name op het vinden en begrijpen van de oplossing van een probleem en op het generaliseren van de oplossingswijze, overigens zonder op formules over te gaan. Ook het zoeken van meerdere oplossingen wordt gestimuleerd.

De Nederlandse versie van deze leerlijn eindigt met vraagstukken als: 'Wanneer van vier rechte lijnen twee gelijkloopend zijn, en drie door hetzelfde punt gaan, hoeveel ongedeelde hoeken maken zij dan?' (oplossing veertien). Waarom de vertaling bij dit onderdeel eindigt, is onduidelijk. Verdere vergelijking levert echter nog enkele interessante gegevens op. Ten eerste gaat juist op het punt van het afbreken van de Nederlandse tekst de oorspronkelijke tekst over op zogenoemde 'Uebungen im Kopfe', waarbij de kinderen zich een mentaal beeld moeten trachten te vormen van bepaalde figuren. Verder onderscheidt Graßmann in zijn inleiding 'die innere Construction' van 'die äußere Construction'. Bij de laatste doelt hij op het maken van een tekening met behulp waarvan het aantal combinaties geteld kan worden. Maar een veel krachtiger middel acht hij het denken van de constructie (innere Construction). Daarbij speelt de feitelijke ligging van de meetkundige objecten geen rol meer, maar wordt de constructie teruggebracht tot het zoeken van de kenmerkende relaties. Inderdaad een belangwekkend mathematisch-didactisch inzicht, dat wellicht toen-

tertijd te weinig aandacht heeft gekregen. Om dit laatste nog eens met zijn eigen woorden te zeggen: 'Die Kraft der innern Construction zu wecken und zu beleben ist der Hauptzweck alles Mathematischen Unterrichts, und es kann damit nicht früh genug begonnen werden' (Graßmann, 1817, p. X).

Graßmann had deze leergang ontworpen voor zeven à achtjarige kinderen (!). Zelfs voor de 'Ärmenschule' en hij heeft succes geboekt volgens zijn 'Vorrede'. Al deze interessante gegevens zijn in de Nederlandse vertaling, die ruim dertig jaar na eerste publicatie tot stand is gekomen, niet vermeld. Waarschijnlijk hebben deze lesbrieven weinig directe toepassing gekend in het onderwijs (de *Nieuwe Bijdragen* had maar een klein aantal abonnees), maar het is niet onmogelijk dat het stuk z'n betekenis heeft gehad voor de latere boekenschrijvers.

Vergelijkend overzicht

We hebben gezien dat de aanvankelijke vormleerboekjes van Visser en anderen vooral bedoeld waren om de pestalozziaanse huiselijke vorming door de moeders te propageren. Kennelijk sprak het leren aanschouwen en tekenen zo aan dat ook hiervoor enige boekjes werden ontworpen. Met het werk van Rijkens werd in ieder geval de richting van het aanschouwingsonderwijs ingeslagen. Al deze publicaties kunnen slechts als eerste schuchtere pogingen tot invoering van de vormleer gezien worden en wel voornamelijk voor de aanvangsklassen van het lager onderwijs. Gezien het aantal drukken, de verwijzingen en het regionale karakter van de uitgaven zal de invloed op het onderwijs waarschijnlijk vrij gering geweest zijn.

Anders ligt dit bij het werk van Van Dapperen. Zijn boek omvat leerstof voor de gehele lagere school. Hij geeft duidelijk de doelen van het vak aan en legt verantwoording voor de pestalozziaanse aanpak af. Met zijn werk wordt de trend gezet voor de vormleer in Nederland, zeker voor de eerste helft van de negentiende eeuw.

De vormleer van Diesterweg is meer wiskundig geöriënteerd en minder pestalozziaans. In vergelijking met de 'Nederlandse werken' munt het uit door beknoptheid, helderheid en wiskundige correctheid. Diesterweg beschouwt de vormleer als de 'aanschouwelijke' opstap naar de 'wetenschappelijke' meetkunde. Het niveau is hoog, maar vooral bedoeld voor die leerlingen die onderwijzer willen worden. De betekenis van Diesterwegs werk ligt vooral in het feit dat het een nieuw vertrekpunt kon worden voor de verdere ontwikkelingen.[17]

Alleen al op grond van de analyse van de leerboeken die tussen 1817 en 1857 verschenen, kunnen we stellen dat de voorwaarden voor een geslaagde implementatie van de vormleer bepaald niet gunstig waren. Echter ook het niveau van het feitelijke onderwijs was in het algemeen nog te gering voor de innovatie van dit nieuwe leervak. Er waren nog te weinig mogelijkheden tot scholing en bijscholing. Konden de pleitbezorgers de verbreiding en acceptatie van de vormleer wel bewerkstelligen?

A4 Verspreiding en acceptatie

Niveau van het onderwijs

Het niveau van de onderwijzer aan het eind van de achttiende en het begin van de negentiende eeuw moet erbarmelijk geweest zijn, zo is het vrijwel unanieme oordeel van de onderwijsgeschiedschrijvers over deze kwestie.[1] Maar vanaf de invoering van de derde schoolwet in 1806 zou hierin gestage verbetering gaan optreden. Vanaf toen mocht een onderwijzer zijn functie niet meer onbevoegd uitoefenen. Er werden vier rangen ingevoerd die de onderwijzer tot studie dwongen om carrière te kunnen maken.[2]

De inspectie werd vanaf dat moment geregeld (Dodde, 1968). De schoolopzieners werden belast met het afnemen van de examens voor de genoemde rangen. Bovendien werd vanaf 1812 bij een vacature een vergelijkend examen afgenomen. Hoger dan de tweede rang kwamen de meeste onderwijzers echter niet, vooral omdat de minister meende dat de eerste rang niet dan 'hoogst zeldzaam' moest worden uitgereikt. Verder ging het onderwijs ook 'inwendig' snel vooruit 'doordat men op de meeste plaatsen betere schoolboeken invoerde' (Versluys, 1881, pp. 171-172).

In de wet van 1806 was echter niets geregeld over de opleiding van de onderwijzer. Voor de meeste onderwijzers was de lagere school zelf tevens de leerschool (opleiding). Goede leerlingen werden door de hoofdonderwijzers aangemoedigd ook na hun twaalfde jaar op school te blijven, als hulpje en kwekeling om zo op hun zestiende jaar de vierde rang te kunnen behalen. Daarnaast werden ook op de zogenoemde Normaalscholen, meestal opgericht door de Departementen van de 'Maatschappij tot Nut van 't Algemeen', onderwijzers opgeleid. Ook dit waren leerscholen, maar beter toegerust en vooral uitgekozen om hun goede hoofdonderwijzers. Aan sommige van deze Normaalscholen werden Kweekscholen verbonden, aparte instituten waar de kwekelingen theoretisch gevormd werden. Dan waren er nog particuliere initiatieven van enthousiaste en bevlogen schoolopzieners, die persoonlijk en 'opzettelijk onderrigt' gaven aan aanstaande onderwijzers. Ten slotte bestond er sinds 1816 dé Rijkskweekschool te Haarlem, welke onder leiding van de Pestalozzi-aanhanger Prinsen tot een befaamd opleidingsinstituut uitgroeide. 'Uit deze School zijn vele bekwame Onderwijzers voortgekomen' (Görlitz, 1849, Turksma, 1961).

Het aantal onderwijzeressen was gering. Een hoofdonderwijzeres moest in het bezit zijn van de zogenoemde Acte van Toelating.[3]

Vanaf 1827 ging de overheid zich ook voor het bewaarschoolonderwijs inzetten. Er ontstonden partiële opleidingsmogelijkheden voor bewaarschoolonderwijzeressen via vormscholen of normaallessen, welke opleidingen aan goede bewaarscholen waren verbonden. De eerste kweekschool voor bewaarschoolonderwijzeressen ontstond in 1844 in Rotterdam onder leiding van M. Gouka. Algemene ontwikkeling stond daar centraal, waarbij ook getal- en vormleer op het rooster stond.

Prinsen, Brugsma, Wijnbeek en Görlitz.

Op het opleidingsinstituut van Prinsen, die ervoor gezorgd had dat Van Dapperen bij Pestalozzi zelve in de leer ging, werd de vormleer onderwezen. Dit blijkt uit de verslagen van algemeen hoofdinspecteur Wijnbeek, die de Rijkskweekschool te Haarlem 'een drie keer per jaar bezocht' (Reinsma, z.j., p. 67). Wijnbeeks rapporten gedurende 1833-1844 over deze kweekschool zijn vrijwel zonder uitzondering gunstig, ja zelfs lovend. De onderwijzers, die van de kweekschool van Prinsen kwamen, zwermden uit over het hele land. Zij oefenden vaak weer invloed uit op de onderwijzersgezelschappen in het land. In totaal betrof dit aantal zo'n vierhonderd onderwijzers (Leen, 1961).

Een ander belangrijk opleidingscentrum was de kweekschool in Groningen, die reeds in 1797 was opgericht door het Departement van de 'Maatschappij tot het Nut van 't Algemeen'. Hier stond Brugsma aan het hoofd, die ook een fervent, maar tevens kritisch Pestalozzi-vertolker was. In het door hem geschreven handboek, dat acht drukken beleefde, wordt de vormleer samen met de 'meetkunst- en het teekenen' besproken. Brugsma wees bij de vormleer niet alleen op haar vormende waarde, maar ook op haar praktische nut. Hij achtte het vak geschikt voor alle kinderen in de 'lagere volksschool', maar voegde eraan toe: 'Intusschen wachte men zich de synthetische behandeling der vormleer zoo verre uit te strekken, als dit in de pestalozzische school door Jozef Schmidt en anderen gedaan is' (Brugsma, 1869, p. 259).[6] Hij beval zowel het boek van Van Dapperen als dat van Diesterweg aan: 'Wordt in beide werken ook al het een en ander gevonden, tot welker behandeling men in de meeste gewone lagere scholen, uit hoofde van den beperkten schooltijd der kinderen, niet kan overgaan, zoo behoort toch ieder onderwijzer het leervak in zijn omvang te kennen' (Brugsma, 1869, p. 266). Brugsma eiste dus dat de onderwijzer het vak behoorlijk beheerste. Zijn opvatting neigde meer naar het pragmatische aspect en hij legde minder nadruk op de vormende waarde. Hij zal via zijn opleidingsschool ongetwijfeld een zekere invloed gehad hebben op de verbreiding van het vak.

Het is moeilijk na te gaan of ook andere opleidingen in die tijd vormleer in het onderwijsprogramma voerden. In de gevallen dat de onderwijzer in spe zijn opleiding direct in de praktijk ontving, zal daar in de meeste gevallen weinig van terecht gekomen zijn, omdat vormleer nog maar op heel weinig scholen onderwezen werd.[7]

In Rotterdam zal P.K. Görlitz (1785-1861), die aan het eind van zijn leven nog enige jaren directeur van de kweekschool aldaar was, wellicht enige invloed gehad hebben. Görlitz is vooral bekend om zijn in 1849 door het Nut bekroonde *Geschiedkundig overzigt van het Lager Onderwijs*, waarin hij de vormleer samen met het tekenen aanprijst 'als eene der degelijkste en heilzaamste vruchten, welke de Pestalozzische school heeft opgeleverd' (Görlitz, 1849, p. 95). Wij hebben echter geen aanwijzingen gevonden, dat de vormleer vóór 1857 op het rooster van de Rotterdamse

lagere scholen stond. Voor de bewaarscholen was dit anders.

De al eerder genoemde Mr. Henricus Wijnbeek (1772-1866) werd in 1833 als opvolger van Van den Ende tot algemeen hoofdinspecteur van het gehele Nederlandse onderwijs benoemd. Deze functie, die hij op zijn zestigste aanving, oefende hij zeventien jaar uit. Zijn inzet en ijver moeten ongetwijfeld bijgedragen hebben tot een zekere kwaliteitsverbetering van het onderwijs. Omdat Wijnbeek in zijn unieke inspectieverslagen de vormleer bij herhaling noemt als belangrijk middel om het onderwijs een meer inzichtelijke basis te verschaffen, moet ook hij als een pleitbezorger voor de vormleer aangemerkt worden. Merkwaardig is dat hij het vak niet opsomt bij de kundigheden en vaardigheden die hij een goed onderwijzer toedacht (Reinsma, z.j., pp. 47-48).

Van den Ende en Wijnbeek wilden via na- en bijscholing het onderwijs vernieuwen en verbeteren. Zij bevorderden derhalve de activiteiten van de onderwijzersgezelschappen. En waar sinds de achttiende eeuw het onderwijstijdschrift al de belangrijkste spreekbuis van vernieuwers bleek te zijn, zagen zij ook hierin een geschikt innovatiemiddel, hetgeen natuurlijk ook voor de vormleer gold.

Onderwijstijdschriften

De (Nieuwe) Bijdragen

Het is dan ook niet verwonderlijk dat de overheid sinds 1801 het al eerder geciteerde tijdschrift *Bijdragen*, later *Nieuwe Bijdragen*, deed uitgeven. Hoewel bedoeld voor de onderwijzers, is het waarschijnlijk van meer betekenis geweest 'voor de uitwisseling van ervaringen onder inspecteurs dan als instrument tot vorming en bijscholing van onderwijzers' (De Wolf en de Jong, z.j., p. 44). Analyse van de jaargangen 1801-1857 leverde het volgende over de vormleer op.

In 1817 is er een korte beoordeling van Vissers *Vormleerboek* en in 1821 een aankondiging en beoordeling van Van Dapperens boek. Deze beoordelingen bestaan voor 95% uit citaten uit de besproken boeken. Overigens stonden er in iedere jaargang wel honderd van zulke boekrecensies. Een inhoudelijk artikel over vormleer wordt in deze beginjaren echter niet aangetroffen. Wel verscheen tussen 1820 en 1830 een aantal artikelen, vrijwel alle naar het Duits, over 'verstandsontwikkeling' en 'leren denken' (1823, 1826, 1827, 1828). De kern van deze artikelen is steeds dat het onderwijs minder werktuiglijk diende te worden en meer begripsmatig, waarbij de begripsvorming dient aan te vangen met uiterlijke aanschouwing. Het zijn tamelijk wijdlopige, theoretische stukken, verstoken van concrete onderwijsvoorbeelden. In de jaargang van 1833 staat een artikel over een interessant meetkundeboek van Baudet uit 1824, dat ook voor de kweekschool bedoeld was. Maar aan vormleer werd ook in de periode 1830-1840 geen specifieke aandacht besteed.

Pas vanaf 1840 verschijnen regelmatig stukken over vormleer in de *Nieuwe Bijdragen* (1840, 1841, 1842, 1847, 1849, 1851, 1852). Deze artikelen waren hoofdza-

kelijk van inhoudelijke aard en hadden als doel de onderwijzer lesmateriaal te verschaffen. Zo treffen we de behandeling van de paragrafen 10 en 30 uit het boek van Diesterweg door J. Blouw aan (*Nieuwe Bijdragen*, 1840, pp. 760-787 en 1842, pp. 15-33). Verder de eerder geciteerde vertaling van het werk van Graßmann (*Nieuwe Bijdragen*, 1849, pp. 712-727, 890-895, 958-968, 1060-1065; 1851, pp. 780-784, 972-976; 1852, pp. 234-242, 286-298, 754-761, 867-874, 1023-1029). Aan de inzending van Blouw in 1840 gaat een brief van Brugsma vooraf, waarin hij net als in zijn voorwoord bij het werk van Diesterweg een lans breekt voor de vormleer (*Nieuwe Bijdragen*, 1840, pp. 757-776). In 1841 houdt de onderwijzer W. Baar uit Lienden, die in Wijnbeeks inspectieverslagen hogelijk geprezen wordt, een pleidooi voor de vormleer als 'schoon vormingsmiddel' (*Nieuwe Bijdragen*, 1841, pp. 125-134). In 1847 een anoniem pleidooi voor de vormleer onder de titel: 'In hoeverre is de vormleer voor alle scholen al of niet belangrijk; – welk gebruik zou men er over het algemeen van kunnen maken?; – en welke voordeelen daarvan mogen verwachten?' (*Nieuwe Bijdragen*, 1847, pp. 603-607). Ten slotte noemen we nog een artikelenserie in de *Nieuwe Bijdragen* van 1848 onder de titel 'Over het onderwijs in de Wiskunde in scholen voor lager en middelbaar onderwijs', ondertekend door S.P., vrijwel zeker de initialen van Steyn Parvé, die later nog een belangrijke rol in onze vormleerhistorie zal spelen. Het is een vertaling/bewerking van stukken uit *Die Idee der Realschule* van Dr. Chr.H. Nagel. Hierin vinden we ook een pleidooi voor een aanschouwelijke meetkundecursus voor kinderen op de lagere school (*Nieuwe Bijdragen*, 1848, pp. 209-248, 309-327, 508-519).

Overige onderwijstijdschriften

In het rapport *Pedagogische tijdschriften in Noord-Nederland 1795-1830* van De Wolf en De Jong (z.j.) treffen we 22 titels aan. Bovendien is een lijst van onderwerpen en vindplaatsen opgenomen. Het vak vormleer komt niet eenmaal voor. Voor de latere periode is een gelijksoortig overzicht van de Pedagogische tijdschriften in Nederland van 1830 tot 1857 voorhanden (Van de Walle en De Wolf, 1981). Hierin worden 33 tijdschriften vermeld. In vijf daarvan komt vormleer aan de orde: *De Volksschool* (1849), *De Oefenschool* (1853, 1856), *De Leerschool* (1848), *Tijdschrift voor aankomende onderwijzers* (1838, 1839) en het *Tijdschrift voor Onderwijzers* (1841). Vrijwel al deze periodieken hadden de aankomende onderwijzers of kwekelingen als doelgroep.

In 1848 een kort artikel 'Is de vormleer ook nuttig en waarin?', dat over de doelstellingen in het voorwoord van het boek Van Dapperen gaat. Enkele zinnen zijn letterlijk daaruit overgenomen (*De Leerschool*, 1848, pp. 12-14).

Naar aanleiding van het artikel van Brugsma en Blouw in de *Nieuwe Bijdragen* van 1840, verscheen in het *Tijdschrift voor Onderwijzers* van 1841 (pp. 37-55) het artikel 'Aanvankelijk onderwijs in de vormleer, steunende op de beschouwing van

eenige mathematische ligchamen'. Omdat het werk van Blouw voor dertien à veertienjarigen was bedoeld, wil dit stuk een inhoudelijke bijdrage geven voor 'kinderen van acht tot tien jaren, ja soms nog jonger'. De oefeningen zijn overgenomen uit Diesterwegs *Klein-Kinderschule*. Ze zijn bedoeld om enkele elementaire meetkundige begrippen en relaties aan te leren aan de hand van de volgende modellen: 'teerling, regelmatige vierhoekige- en driehoekige ruit, regelmatige driehoekige piramide, de rol (cilinder), de kegel, het regelmatige vier-, acht-, twaalf- en twintigvlak, en de kogel'.

In *De Volksschool* van 1849 (pp. 124-128) vinden we een met P. ondertekend opstel, dat een pleidooi voor de zuivere vormleer volgens Van Dapperen is. P. pleit met name voor het systematisch werken, zoals bijvoorbeeld het uitzoeken van alle 'onderscheidene afwisselingen' van een aantal punten. Daarmee zou niet bij vier, vijf of zes punten gestopt moeten worden, maar juist voortgezet moeten worden tot twaalf of dertien punten. 'Niet door te zoeken, maar door voorafgaande redenering', omdat 'vormleer, verstandsoefening is, en dus reeds in de laagste klassen te huis behoort'.

Ten slotte een stuk getiteld 'De vormleer en hare belangrijkheid' in *De Oefenschool* van 1856 (pp. 1-5). Dit werkstuk van het onderwijzersgezelschap 'Onderlinge Oefening' te R. is de zoveelste opsomming van alle nuttigheden en oogmerken van de vormleer: ontwikkeling van het aanschouwings- en voorstellingsvermogen, verbeeldingskracht en het verstand.

Ook onderzochten wij nog het *Magazijn voor de Rekenkunst* (vanaf 1828), dat het meest op een puzzelblad voor liefhebbers lijkt.[8] Er wordt echter met geen woord over vormleer gerept, wat een indicatie moge zijn voor de (des-)interesse die er voor dit vak in het praktische onderwijs van toen bestond.

Het in 1842 opgerichte Nederlandsch Onderwijzers-Genootschap (NOG) gaf vanaf 1850 een *Maandblad* uit *ter bevordering van Volksopvoeding en Onderwijs*. Dit blad heeft meer het karakter van een vakbondsblad dan van een onderwijskundig tijdschrift. Onderzoek van de jaargangen tot 1857 levert dan ook geen inhoudelijke artikelen over vormleer. Interessant is echter een stuk uit de jaargang van 1853, waarin een lijst van honderdvijftig vragen voorkomt, die als onderwerpen van studie konden dienen voor de onderwijzersgezelschappen. Slechts één vraag (nummer 69) betreft de vormleer: 'Wat is vormleer? Welke voordelen levert hare gepaste beoefeningen op in eene lagere school? op welke wijze moet zij beoefend worden, om de gewenschte voordelen te krijgen?' (*Maandblad NOG*, 1853, p. 192).

Hiermee hebben we de inhoudelijke en onderwijskundige bijdragen aan de vormleer die via de tijdschriften tot 1857 verschenen, gecategoriseerd en geanalyseerd. Onze conclusie moet zijn dat er tot 1840 via de tijdschriften nauwelijks een bijdrage geleverd is aan de verbreiding van de vormleer. Daarna komt de interesse enigermate op gang, vooral in de *Nieuwe Bijdragen*.

Vormleer in de praktijk

> 'Zouden de oude en tot hier toe deugdelijk bevondene school- en leerorde moeten plaatsmaken voor het *Pestalozzi's* aanschouwelijk en met bewustzijn rekenen, de vormleer, de onmiddellijke spraakvorming, het teekenen, de natuurkunde, geschiedenis, aardrijkskunde en ander dwaas tuig, dat volstrekt ongeschikt is voor het gemeen? Lezen, schrijven en katechismus, naar de gewone manier behandeld – dat is toereikend voor het volk; wat meer is, dat is uit den boozen.' (N., 1821, p. 28)

Uit dit citaat van ene N. uit het *Algemeen Magazijn voor Onderwijs en Opvoeding* wordt duidelijk dat bepaald niet elke onderwijzer stond te dringen de 'nieuwigheden in het lagere schoolwezen' te omarmen; een overigens door alle tijden heen bekend verschijnsel bij onderwijsvernieuwingen.

Geschiedschrijving over de feitelijke gang van zaken in het onderwijs is nauwelijks voorhanden.[9] Inspectieverslagen zouden een bron voor meer kwantitatieve gegevens kunnen zijn. Maar een dergelijke aanpak zou ons onderzoek afleiden van de aard van haar opzet, namelijk een ideeëngeschiedenis. Bovendien blijken veel van deze verslagen opgeruimd te zijn.[10] Uit de algemene regionale inspectieverslagen werd, op enkele uitzonderingen na, telkenjare een algemeen verslag 'wegens den staat der Lagere scholen' samengesteld en in de *Nieuwe Bijdragen* gepubliceerd. Wij hebben deze verslagen van 1817 tot 1857 bestudeerd. De toon van deze verslagen maakt duidelijk dat er sprake is van een 'gestadige voortgang en verbetering'. Wat de inhoud van het onderwijs betreft, wordt duidelijk dat de nadruk ligt op lezen, schrijven en rekenen. Het laatstgenoemde vak komt er tamelijk slecht af, waarbij wordt opgemerkt dat aan het 'verstandscherpend' hoofdrekenen nog te weinig wordt gedaan.

Vormleer wordt in al die veertig jaar niet eenmaal genoemd in verband met het onderwijs op de lagere school. Een enkele maal duikt het op bij de betere onderwijzersopleidingen. Hoge prioriteit zal de vormleer in deze periode dus niet gehad hebben. Dit blijkt ook uit de rapporten die Wijnbeek naar aanleiding van zijn inspectiereizen tussen 1833 en 1850 opstelde.[11] In deze boeiende verslagen van de meer dan duizend door hem bezochte scholen wordt van de vormleer nog geen vijftig keer gewag gemaakt. Wijnbeeks opmerkingen over de vormleer in de bedoelde verslagen hebben een incidenteel karakter. Kennelijk nam hij er soms iets over op als hij het op een bepaalde school bij toeval signaleerde. Een zekere subjectiviteit kan hem niet ontzegd worden. In vrijwel alle gevallen dat hij een leerling van Prinsen aan het werk zag, was zijn oordeel gunstig. Over de roosters (tafels der werkzaamheden), die hij overigens van groot belang achtte, wordt in de verslagen nauwelijks gerept. Mogelijk zijn ze in vele gevallen niet eens aanwezig geweest. Wij zullen ons daarom beperken tot de algemene bevindingen van Wijnbeek per provincie.

Wijnbeeks rapporten

Het onderwijs in Noord-Brabant (1843) wordt als het meest achterlijke gekenschetst en kan 'in 't algemeen geenszins wedijveren met dat der anderen provincien, ja, staat veelal ver beneden hetzelve' (RA;172 B 37, p. 318).[12] Vormleer wordt niet eenmaal genoemd. In Zeeland (1838) merkt hij bij Oud-Vossemeer op: 'Getal- en vormleer (...), welke in de Zeeuwsche scholen weinig bekend zijn, werden hier tot opscherping van het verstand gepast beoefend' (RA;172 B 37, p. 260). In Drente (1836) is 'getal- en vormleer nog weinig ingevoerd' (RA;172 B 37, p. 166). Tijdens zijn tocht in 1833 naar Overijssel treft hij het vak 'in eenige scholen' van het tweede district aan, in 1841 wordt het niet vermeld. Ook Gelderland (1835 en 1842) blijkt geen grote vindplaats te zijn. In Drumpt noteert Wijnbeek: 'Op een groot bord stonden alle de figuren der vormleer afgeteekend, doch met de vormleer zelve hield hij zich weinig bezig. Die figuren moesten slechts uit het hoofd geschreven worden. Op de ondoelmatigheid hiervan heb ik den onderwijzer trachten opmerkzaam te maken. Het bleek dat hij de vormleer niet verstond' (RA;172 B 37, p. 62). In Friesland (1837 en 1845) wordt her en der vormleer gegeven, waarschijnlijk onder invloed van de schoolopziener Visser. Zuid-Holland (1838) levert weinig vindplaatsen op. In Rotterdam wordt het geen enkele maal genoemd door Wijnbeek.[13] Over Groningen (1836) merkt Wijnbeek op: 'De getal- en vormleer van Pestalozzi vond ik er, óf in het geheel niet, óf, met eenige uitzonderingen, onvolledig toegepast' (RA;172 B 37, p. 150). Dit laatste is een wat merkwaardig gegeven, daar juist de kweekschool van Brugsma een belangrijk centrum van ontwikkeling voor de vormleer was. Over Utrecht (1836 en 1842) is Wijnbeek erg enthousiast omdat er zoveel leerlingen van Prinsen werkzaam zijn: bij zeven van de ongeveer vijftig scholen vermeldt hij de vormleer. Noord-Holland wordt in 1839 bezocht. Wijnbeek is in het algemeen somber over de Amsterdamse onderwijssituatie, waar van vormleer in het geheel geen sprake was (zie ook noot 7 van A4). Over de rest van de provincie is hij vaker tevreden. Niet te verwonderen, daar Prinsens invloed zich hier met name in het tweede district, waar hij schoolopziener is, doet gevoelen. Wat Wijnbeek zich bij de verstandsontwikkeling van de vormleer precies voorstelde, leren wij uit zijn verslag over Velzen:

> 'Den besten dorpsonderwijzer van dit district vond ik te Velzen, in den persoon van W. de Vries. In al de scholen van hetzelve wordt wel Prinsens leerwijze gevolgd, doch in geen derzelve zoo volledig als hier (...). Bij beide, getal- en vormleer, moesten eerst de leerlingen eener klasse elk op zijne beurt eene vraag beantwoorden, daarna werd telkens het antwoord, als het goed was, in koor, op de maat, door al die leerlingen herhaald.' (RA;172 B 37, p. 283)

Limburg ontbreekt in de verslagen. Wel werd in 1835 Maastricht bezocht, waar de vormleer ook genoemd wordt.

Vormleer op de bewaarschool

Hoewel het bewaarschoolonderwijs nog maar in een beginstadium verkeerde, bleek toch ook daar de vormleer de aandacht te trekken. Jonker is in haar onderzoek over de lagere scholen in Rotterdam vóór 1857 géén vormleer tegengekomen (Dodde e.a., 1991). Daarentegen blijkt vormleer wel in een leerplan voor het bewaarschoolonderwijs voor te komen (GAR-Bib XXVII F 351, 1840). De leerstof werd in vijftien onderdelen opgesplitst, waaronder getalleer, oefeningen in vormen en kleuren, oefeningen in de oogmaat en de vormleer, waarbij het boek en de methode van Van Dapperen als 'veelzijdig belangrijk' aanbevolen werden.

Visser deed al in 1823 een handleiding het licht zien, waarin hij de houderessen van 'kleine kinderscholen' op het nut van de vormleer wees in verband met het leren schrijven. In 1838 verscheen een dergelijke handleiding van S. van Delden Pz.

Het meest uitvoerige boek voor de bewaarschool is van de hand van Rijkens (1847b). Hierin staat een veel helderder artikel over vormleer dan in zijn boek uit 1830. Rijkens herhaalt de argumenten voor de vormleer, die hij toen te berde bracht en voegt eraan toe: 'Redenen, voldoende genoeg, om de vormleer als een afzonderlijk vak op de Bewaarscholen in te voeren' (Rijkens, 1847b, p. 273).

Tot slot gaan wij nog kort in op het werk van de eerder genoemde Gouka, 'deskundige onderwijzer en publicist over het bewaarschoolonderwijs' (Van Essen, 1990, p. 59). In zijn boek *De Kweekschool* (z.j.), bedoeld voor zijn opleiding voor bewaarschoolonderwijzeressen, ruimt hij een relatief ruime plaats voor de vormleer in. De aanpak is meetkundig; begonnen wordt met ruimtelijke vormen op de manier van Diesterweg. Naar diens werk wordt ook verwezen. In zijn voorbeeldrooster van werkzaamheden staat vormleer expliciet vermeld. Of een dergelijk rooster ook werkelijk geëffectueerd werd op de bewaarscholen, weten wij niet.

Stand van zaken rond 1857

Het tijdperk 1820-1857 samenvattend kunnen we het volgende stellen:

- Uit de verslagen van Wijnbeek komt voor de onderzochte periode een niet zo positief beeld over de praktijk van de vormleer naar voren. Voor het merendeel van de Nederlandse onderwijzers leefde de vormleer niet. Mogelijk dat dit beeld voor de bewaarscholen iets gunstiger was.
- De onderwijzersgezelschappen en dus ook de schoolopzieners hebben, op een enkele uitzondering na, slechts een geringe bijdrage geleverd tot de verspreiding van de vormleer.
- Het aantal publicaties over vormleer in de pedagogische tijdschriften is relatief klein.
- Er werd vormleer onderwezen aan de te goeder naam bekendstaande kweekscholen van Prinsen te Haarlem en van Brugsma te Groningen. Dit leverde per jaar tenminste een tiental onderwijzers op, die bekend waren met de vormleer.

- De eigenlijke bekendmaking werd gedragen door een klein aantal protagonisten, waarvan Prinsen, Visser, Rijkens en Brugsma de bekendste waren.[14]
- De overheid had voorwaarden geschapen tot bekendmaking en verbreiding van de vormleer. Ook stond zij welwillend tegenover de invoering van dit nieuwe vak.
- De boekenschrijvers waren degenen die het feitelijke onderwijsmateriaal voor de innovatie leverden.

Op grond van de gevonden gevalsbeschrijvingen kunnen we hooguit stellen dat in de periode 1820-1857 *vormleer een zekere, zij het bescheiden, plaats op het leerplan van een aantal lagere scholen in Nederland innam.* Wellicht dat het op een aantal bewaarscholen een ruimere plaats had.

De vraag waar wij ons nu nog voor gesteld zien, is hoe en waarom dit vak in 1857 toch officieel op het leerplan werd geplaatst. Hiervoor zullen wij in hoofdstuk A5 ons onderzoek moeten uitbreiden naar de beleidsmatige en politieke bemoeienissen aangaande de vormleer.

A5 Wettelijke invoering (1857)

Het hoofddoel van het volksonderwijs volgens de wet van 1806 luidde:

> 'alle schoolonderwijs zal zodanig moeten worden ingerigt, dat, onder het aanleren van gepaste en nuttige kundigheden, de verstandelijke vermogens der kinderen ontwikkeld, en zij zelve opgeleid worden tot alle maatschappelijke en Christelijke deugden.' (Reglement voor het Lager Schoolwezen, art. 22)

Lezen, schrijven, rekenen en Nederlandse taal waren 'verplicht', terwijl ook wel iets van geschiedenis, aardrijkskunde en kennis der natuur behandeld werd. Met het 'ontwikkelen van de verstandelijke vermogens' werd bedoeld dat het begripsmatige leren nagestreefd diende te worden in plaats van het tot dan toe veel voorkomende 'werktuigelijk leren': 'de opmerkzaamheid, het verstand, het oordeel, het geheugen, (...), alsmede den goeden smaak, zin voor het welstandige, schoone diende opgepakt te worden' (Görlitz, 1849, p. 60).

De wettelijke veranderingen van 1806 hebben ongetwijfeld een eerste verbetering van het onderwijs bewerkstelligd. Maar uit de inspectieverslagen blijkt dat zelfs de basisvakken niet overal in extenso aan de orde kwamen. Met name het rekenen liet veel te wensen over.

Een noodzakelijk uitvloeisel van de grondwet van Thorbecke in 1848 was dat er ook een nieuwe wet op het onderwijs moest komen. Dit is niet eenvoudig gegaan, voornamelijk doordat voldoende ruimte geschapen diende te worden voor de vrijheid van inrichting van onderwijs. Maar uiteraard ontstond nu ook de kans de inhoud van het onderwijs opnieuw aan de orde te stellen. Hiertoe beperken wij ons en wel in het bijzonder tot de kwestie van de vormleer.

Op 3 september 1849 bood de toenmalige minister van Binnenlandse Zaken, Mr. J.M. de Kempenaer, een eerste ontwerp van wet aan de Tweede Kamer aan. Artikel 1 van dit ontwerp luidde:

> 'Het lager onderwijs omvat het lezen, schrijven, rekenen en de Nederlandsche taal. Voorts de beginselen van de navolgende leervakken: geschiedenis, aardrijkskunde, zingen, levende talen, stel- en meetkunde, teekenen, natuurlijke geschiedenis, landbouw en gymnastiek.' (*Bijlagen VHTK*, 1849, p. 257)[1]

De Memorie van Toelichting leert ons daarover nog: 'Het schijnt onnodig omtrent die vakken in bijzonderheden te treden: alle behooren ongetwijfeld tot het lager onderwijs, en worden nu reeds op vele lagere scholen behandeld' (*Bijlagen VHTK*, 1849, p. 260). Uit het volgende zal blijken dat dit kennelijk een iets te luchthartige opmerking was. Er zouden namelijk ook over de gewenste inhoud van het onderwijs nog heel wat noten gekraakt worden. Met name betreffende het zingen, de levende talen, de wiskunde (stel- en meetkunde), het tekenen, de landbouw en de gymnastiek. Wij beperken ons tot de discussies over de vormleer, die in dit ontwerp overigens niet eens genoemd wordt. Wel is wiskunde opgenomen. Dit wetsontwerp werd

overigens wegens aftreden van De Kempenaer niet eens in behandeling genomen (Hemkes, 1858, p. 3).

Omdat Mr. J.R. Thorbecke, de volgende minister van Binnenlandse Zaken, eind 1849 een circulaire uitvaardigde 'waarbij de besturen uitgenoodigd werden, om de meest mogelijke vrijgevigheid, met het oog op de grondwet, in acht te nemen, wat de oprigting van bijzondere scholen betreft', leek er voorlopig minder belangstelling voor een nieuwe onderwijswet (Hemkes, 1858, p. 3). Het duurde dan ook tot 22 september 1854 tot er een nieuw ontwerp voor het lager en middelbaar onderwijs bij de Tweede Kamer binnenkwam. Dit ontwerp werd ingediend door minister Mr. G.C.J. van Reenen. Artikel 1 was sterk gewijzigd:

> 'Het lager onderwijs omvat het lezen, schrijven, rekenen, de Nederlandsche taal, de beginselen der aardrijkskunde, de geschiedenis en der natuurkunde, het zingen, de vormleer en het regtlijnig teekenen.' (*Bijlagen VHTK*, 1854-1855, p. 46)

In de Memorie van Toelichting worden dit de 'kundigheden, die voor een ieder onmisbaar zijn' genoemd en hiertoe 'behooren naar het oordeel van deskundigen te komen de zang, de vormleer en het regtlijnig teekenen' (*Bijlagen VHTK*, 1854-1855, p. 49). Wie deze deskundigen waren, blijft te raden over. Een commissie, samengesteld uit leden van de Tweede Kamer, ging nu dit ontwerp bestuderen en raadpleegde daartoe 52 kamerleden.[2] Op 24 mei 1855 werd een voorlopig verslag uitgebracht, waaruit wij citeren:

> 'De vormleer en het regtlijnig teekenen. Vooral omdat hier niet van de beginselen der beide vakken, maar van die vakken zelve sprake is, kwam de opneming daarvan aan velen bedenkelijk voor. Onderwijs in de vormleer is zeker hoogst nuttig, maar mag toch voor de leerlingen eener lagere school niet ver worden uitgestrekt. En wat is onderwijs in het regtlijnig teekenen? Verstaat men daardoor, dat de onderwijzer eenige lijnen, eenige weinig zamengestelde figuren op het bord teekent, en die dan door de leerlingen op hunne leijen of op papier laat namaken; waar ligt het onderscheid tusschen zoodanig regtlijnig teekenen en vormleer? Het te ver voortzetten van het teekenen op de lagere scholen is ook daarom niet mogelijk, omdat van de leerlingen aldaar niet te vergen is, dat zij zich van de eigenlijke teekenbehoeften voorzien'.
> (*Bijlagen VHTK* 1854-1855, p. 735)

Hier zien we voor het eerst officieel de vraag naar de relatie van tekenen en vormleer rijzen; een kwestie die in het verloop van de vormleergeschiedenis van belang zal blijken te zijn. Vooralsnog merken we op dat aan het tekenen in de negentiende eeuw een belangrijke betekenis werd toegekend.[3] Wat de vormleer en het rechtlijnig tekenen betreft was men, getuige het citaat, weinig enthousiast. Het gehele ontwerp werd afgekeurd, maar niet alleen op deze grond.

Het is daarom niet verwonderlijk dat een nieuw ontwerp voor het lager onderwijs van 30 december 1855, ingediend door Van Reenen, geen vormleer vermeldde. Ook hierop volgde weer een voorlopig verslag, dat op 29 april 1856 werd uitgebracht.[4]

Maar nu meldden de rapporteurs van deze commissie het volgende:

> 'Eén vak is er, wat men vrij algemeen nog onder de overal verpligte vakken wenscht te zien opgenomen, namelijk de elementaire vormleer. De Regering toonde zich vroeger voor het denkbeeld gestemd, dat vormleer tot het lager onderwijs behoort. Op zeer vele lagere scholen maakt zij thans reeds een deel van het onderrigt uit. Deskundigen stellen op behoud van dit leervak prijs. Het onderrigt daarin is, mits men niet te ver uitstrekke en hier wordt niets meer dan de beginselen bedoeld – een gepast middel om het oog der kinderen te oefenen, de verstandsontwikkeling te bevorderen en hen te leeren vormelijke voorstellingen met juistheid uit te drukken. Met de woorden: elementaire vormleer of beginselen der vormleer zou dus, naar dit gevoelen de optelling van art. 1 moeten worden aangevuld;' (*Bijlagen VHTK*, 1855-1856, pp. 718-719)

Verder werden ook nog het 'regtlijnig teekenen' en de 'beginselen der wiskunde' in overweging gegeven. Enigszins verbazend is deze ommezwaai wel. Binnen één jaar was men kennelijk van gedachten veranderd. Op grond van genoemd verslag werd het ontwerp bijgesteld en verscheen op 21 februari 1857, onder het ministerschap van Dr. G. Simons, een gewijzigd voorstel van wet. In dit ontwerp nu waren in art. 1 de 'beginselen der wiskunde en der vormleer' opgenomen (*Bijlagen VHTK*, 1856-1857, p. 553). De minister had de opmerkingen van de commissie Thorbecke kennelijk ter harte genomen. Voor de motivering van de 'beginselen der wiskunde' werd in de Memorie van Toelichting verwezen naar het verslag over de wet van 21 augustus 1816. Andere vakken, zoals het 'regtlijnig teekenen', het zingen, de gymnastiek, de landbouwkunde en het handwerken wilde de regering niet opnemen, omdat deze 'niet wel onder het lager onderwijs' gebracht konden worden.

Weer ging een Commissie van Rapporteurs aan de gang, die, op één wijziging na, uit dezelfde personen bestond als de vorige.[5] Op 6 april 1857 was het rapport reeds klaar en wonderlijkerwijs twijfelde men nu weer over de vormleer:

> 'Beginselen der vormleer: ofschoon dit vak op een van de zijde der kamer geuit verlangen in het artikel is opgenomen, blijft bij eenige leden twijfel bestaan, of het daar wel ene plaats behoort te vinden. De vormleer schijnt hun meer eene methode van onderwijs, eene manier om de aandacht bezig te houden, eene gymnastiek voor den geest, dan een vak van kennis of wetenschap.' (*Bijlagen VHTK*, 1856-1857, p. 654)

Hoewel er sprake was van een minderheidsstandpunt, wilde de commissie kennelijk toch aan die opvattingen en gevoelens recht doen. Namelijk dat sommigen vormleer niet als een echt schoolvak, waar je iets concreets van kon leren, opvatten. Enerzijds werd het door deze heren beschouwd als een middel om orde te houden, anderzijds als een soort hersengymnastiek. Minister Mr. W.L.F.C. Ridder Van Rappard, inmiddels de opvolger van Simons, kwam op 25 juni 1857 dan ook met een gewijzigd wetsvoorstel dat geen wiskunde meer bevatte voor de lagere school, maar wel de 'beginselen van de vormleer'. In dit ontwerp werd voor het eerst ook het 'meer uitgebreid lager onderwijs' (MULO) genoemd. Artikel 1 omvatte nu: voor het *gewoon lager onderwijs*: a) lezen b) schrijven c) rekenen d) beginselen der vormleer e) der

Nederlandsche taal f) der aardrijkskunde g) der geschiedenis h) der kennis der natuur i) het zingen en voor het *m.u.l.o.:* k) beginselen der wiskunde l) der landbouwkunde m) gymnastiek n) teekenen o) handwerken voor meisjes (*Bijlagen VHTK*, 1856-1857, p. 984). In de Memorie van Beantwoording op het rapport van de laatstgenoemde Commissie van Rapporteurs van 16 juni 1857 drukte de minister zich als volgt uit:

> 'Schoon de opmerking van enkele leden, dat de vormleer meer ene methode van onderwijs is, eene manier om de aandacht bezig te houden en eene gymnastiek voor den geest, dan een vak van kennis en wetenschap, welligt niet ongegrond is acht de Regering het toch, in overeenstemming met den bij het Voorlopig Verslag van 1856 vrij algemeen kenbaar gemaakten wensch raadzaam, de beginselen der vormleer in art. 1 te behouden, zowel omdat deze nu reeds in vele scholen onderwezen worden, als ook en vooral om het verband der vormleer met het thans onder de vakken van het lager onderwijs opgenomen teekenen.' (*Bijlagen VHTK*, 1856-1857, p. 984)

De minister hield dus vast aan invoering van de vormleer. Zijn argument dat dit vak reeds op 'vele scholen' onderwezen werd, lijkt niet in overeenstemming met onze constatering dat vormleer slechts op een gering deel van de school ingang had gevonden. Het compromis met het vak tekenen gaf voor hem mogelijk de doorslag. Hij voerde tekenen voor het MULO in en bood tegelijk de mogelijkheid hierop met de vormleer in het lager onderwijs voor te bereiden.

Echte kennis van zaken leek bij de beleidsmakers niet aanwezig. Van een consensus over wat het vak nu eigenlijk behelsde, kan niet gesproken worden. Ook over het doel werd verschillend geoordeeld, zo concluderen wij uit het voorgaande. Hoe ambivalent de houding van de overheid ten aanzien van de vormleer was, wordt nog eens duidelijk wanneer we de verschillende wetsvoorstellen, zoals hiervoor besproken, nog eens in een overzicht samenvatten:

ontwerpwet	**vormleer in artikel 1**
03 - 09 - 1849	geen vormleer, wel stel- en meetkunde
22 - 09 - 1854	vormleer en regtlijnig teekenen
30 - 12 - 1855	geen vormleer
21 - 02 - 1857	beginselen der wiskunde en der vormleer
25 - 06 - 1857	beginselen van de vormleer

Daarna voltrok de geschiedenis zich verder snel. Op 3 juli 1857 werd artikel 1 van de ontwerpwet in de Tweede Kamer behandeld. De discussies betroffen voornamelijk de toevoeging van de levende talen voor het MULO. Alleen Jhr. Mr. P.J. Elout van Soeterwoude ging in op de vormleer:

> 'Ik wenschte der Regering te vragen of het, volgens haar oordeel, noodig blijft, in de Wet onder de vakken van onderwijs ook de beginselen der vormleer op te nemen? Voor de examina der onderwijzers kan het nuttig zijn, omdat de vormleer eene me-

> thode van onderwijs is en voor hen nuttig kan werken; maar het nut voor kinderen is minder duidelijk. Ik heb mij gevoegd bij die leden, die in het Voorlopig Verslag hebben gezegd, dat, ofschoon dit vak op verlangen, van de zijde der Kamer geuit, in het artikel is opgenomen, echter bij hen de twijfel is blijven bestaan of het daarin wel zijne plaats behoort te vinden. Ik wensch de Regering, welke zelve die bewering niet ongegrond acht, dus te vragen, of het dan ook niet rationeler zou zijn, dat men zich alleen bepale, dat vak op te nemen in de examina der onderwijzers en althans niet onder de vakken van het gewoon lager onderwijs?' (*Bijlagen VHTK*, 1856-1857, p. 1018)

Hier zien we dus een van de wederstrevers aan het woord; het was een laatste poging om het vak uit de wet te houden. Minister Van Rappard antwoordde direct en zei dat hijzelf ook 'niet zo gehecht was aan opneming van dat vak', maar verder ook:

> 'ik heb evenwel gemeend, vooreerst in verband met de reeds bestaande bepalingen en ten andere in verband met den wensch, die daar omtrent in het Voorlopig Verslag van 1856 is uitgedrukt, waar op pag. 18 een zeer uitvoerig betoog voorkomt over de wenschelijkheid van het behoud der vormleer, dat vak onder die van het lager onderwijs te moeten opnemen. Ik geloof dat de vormleer wel daaronder mag worden behouden, daar zij, wel behandeld, altijd nuttig is tot opscherping van het verstand der kinderen en ook in verband zal kunnen worden gebragt met het onderwijs in de teekenkunde.' (*Bijlagen VHTK*, 1856-1857, p. 1021)

De minister deed nu in zijn antwoord voorkomen of er reeds bepalingen bestonden. Tevens spreekt hij over behoud van de vormleer, alsof dit vak reeds een vaste plaats in het onderwijs zou hebben. Zoals wij al eerder opmerkten lijkt dit – voorzichtig uitgedrukt – nogal overtrokken. Het is zeer de vraag of de minister hier wel goed ingelicht was. Al met al maakt de gehele procedure op het punt van de vormleer een nogal zwakke indruk. De pro- en contra-argumentaties zijn nauwelijks onderbouwd. Veelal werd er een beroep gedaan op deskundigen die voor ons onbekend blijven. De uiteindelijke beslissing voor invoering was – zo komt het ons thans voor – zwak gefundeerd en lijkt op grond van compromissen tot stand gekomen te zijn.[6]

Op 20 juli 1857 werd het wetsvoorstel in de Tweede Kamer met 47 stemmen vóór en 13 tegen in zijn geheel aangenomen. De eerste Kamer volgde op 12 augustus 1857, met slechts één stem tegen. De schoolwet van 1857 werd daarmee een feit en diende op 1 januari 1858 in werking te treden. Vanaf toen was de vormleer voor de lagere school een verplicht vak.

A6 Nieuwe impulsen

Bouman en Steyn Parvé

De wetswijziging van 1857 stelde het onderwijs voor nieuwe opdrachten. Weliswaar had de overheid via de wet eisen ten aanzien van inhoud, inrichting en doel van het onderwijs geformuleerd, maar de feitelijke invulling en vormgeving werd overgelaten aan de onderwijsgevenden zelf. Het gegeven dat de vormleer van toen af tot de verplichte hoofdvakken van het lager onderwijs behoorde, maakte een herbezinning op aard en doel van dit vak nodig.

Een belangrijke rol in dit vernieuwingsproces heeft Herman Bouman (1822-1899) gespeeld.[1] Zijn kennis omtrent de vormleer had hij in eerste instantie bij zijn leermeester Brugsma verworven, die weer sterk door Diesterweg was beïnvloed.

De tweede hoofdpersoon voor deze periode ontmoeten we in de wiskundige Daniël Jan Steyn Parvé (1825-1883), die in de onderwijsgeschiedenis vooral bekend is geworden vanwege zijn inspanningen als ambtenaar op het ministerie voor de totstandkoming van de HBS.[2] Maar naast zijn bestuurlijke werk hield Steyn Parvé zich ook op wetenschappelijk, vakinhoudelijk – hij schreef een leerboek voor natuurkunde – en onderwijskundig gebied bezig. Voor ons zijn vooral zijn artikelen over het wiskundeonderwijs en de vormleer van belang.[3] Hoewel Steyn Parvé's bemoeiingen voornamelijk het voortgezet onderwijs betroffen, liet hij geen gelegenheid voorbijgaan om ook zijn oordeel over het lager onderwijs, in het bijzonder over de vormleer, te uiten:

> 'De meetkunde toch heeft dit voor, dat zij op aanschouwing gegrond is, en daardoor is zij juist voor het jeugdig verstand bij uitnemendheid geschikt. (...) Het is in dit opzigt eene zaak van veel belang, of op de lagere school de zoogenaamde vormleer is behandeld, waardoor het aanschouwingsvermogen geoefend wordt.'
> (Steyn Parvé, 1850, p. 49)

Ook was Steyn Parvé goed op de hoogte van het werk van Diesterweg, dat zeer herkenbaar in zijn opvattingen en publicaties tot uiting komt.

Diesterwegs *Wegweiser*-artikel in de *Nieuwe Bijdragen*

In de *Nieuwe Bijdragen* verscheen in 1858 het artikel 'Het onderwijs in vormleer en ruimteleer', dat een vertaling van een stuk uit Diesterwegs *Wegweiser zur Bildung für Deutsche Lehrer* uit 1835 is.[4] Drieëntwintig jaar nadat Diesterweg dit stuk over vormleer publiceerde, werd het voor het eerst, maar wel op het moment dat de vormleer verplicht was geworden, onder de aandacht van de Nederlandse onderwijzer gebracht. Het is mede van belang, omdat Diesterweg op dat moment, vooral over aanschouwelijkheid en het verwerven van begrippen, een ander standpunt innam dan in zijn vormleerboek uit 1822 (zie A3).

Eerst wordt een *omschrijving* van het vak gegeven, daarna worden de *inhoud* en

de *plaats* in het onderwijs besproken, gevolgd door een bespreking van de *methode* om te eindigen met iets over de *leerstofsequentie*.

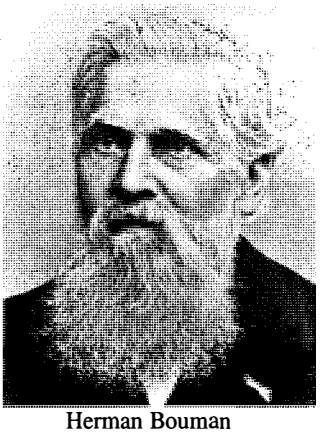
Diesterwegs omschrijving van de vormleer komt neer op elementaire meetkunde volgens de methode van de aanschouwing. Voor de inhoud kunnen we verwijzen naar de analyse van zijn boeken in A3. Alleen stond Diesterweg nu anders tegenover de combinatorische vraagstukken, die hij nu meer als een uitbreiding van de vormleer wilde beschouwen. Verder benadrukte hij nu ook het toepasbare aspect van de vormleer in het 'praktische leven'. Maar hiermee bedoelde hij vooral de interne toepassingen van de meetkunde, getuige het volgende citaat:

> 'Daartoe behooren de stellingen over de gelijkheid der figuren, over hare verdeeling in bepaalde reden, over de bepaling van hare grootte en haren vlakte-inhoud, over de verhouding tusschen de middellijn en den omtrek van een cirkel, en dergelijke stellingen. Deze nemen we dus op in het gebied van de vormleer, behandelen ze op eene aanschouwelijke wijze.' (Diesterweg, 1858, p. 965)

Met tekenen en schrijven zag Diesterweg geen structurele samenhang. Overigens beval hij wel aan 'in eene jongensschool, in de middelste en bovenste klasse' zowel aan tekenen als aan vormleer 'wekelijks twee uren' te besteden. Over de methode (didactiek) is hij in dit stuk veel duidelijker dan in zijn vormleerboek uit 1822. Deze moest een aanschouwelijk karakter hebben en leiden tot zelfwerkzaamheid. De leraar moest de centrale figuur in het onderwijsleerproces zijn. De beste methode van lesgeven is die van 'vragen stellen'. Diesterweg noemt zijn op de socratische methode gelijkend vraaggesprek de 'genetisch-entwickelnde Dialog'. Het 'heuristische' principe, dat sinds Pestalozzi opgang maakte, wordt door hem kritisch besproken. Opdrachten, waarbij de kinderen nieuwe problemen geheel zelfstandig zouden moeten oplossen, vergelijkt hij met een situatie, waarin men iemand die niets van zeevaart weet, in een bootje de zee op stuurt om een verre haven te zoeken. Wel zou de leerling tot een zodanig niveau gebracht moeten worden dat hij in staat is zelfstandig problemen op te lossen, maar 'de leerlingen (moeten) de middelen leeren kennen, door wier gebruik het doel kan bereikt worden' (Diesterweg, 1858, p. 973). In feite lijkt zijn didactiek het meest op wat tegenwoordig als 'geleide (her)ontdekking' omschreven wordt. Verder pleitte hij voor onderricht in methoden, die we tegenwoordig 'problem solving' noemen. Tot slot wordt in het artikel kort iets over de leerstofsequentie opgemerkt en het gebruik van hulpmiddelen als liniaal, passer en dergelijke.

Het moment van publicatie van dit stuk in de *Nieuwe Bijdragen* kan – gezien de zojuist van kracht geworden wet van 1857, waarin de vormleer als hoofdvak was opgenomen – nauwelijks als een toevalligheid gezien worden. Veel onderwijzers wisten met deze nieuwe opdracht nauwelijks raad. Het is niet onmogelijk dat Wijnbeek, die de *Nieuwe Bijdragen* toen nog redigeerde, gemeend heeft dat een dergelijke publicatie tenminste enige hulp aan de onderwijzer zou kunnen bieden.

Het pragmatische standpunt van Bouman


Herman Bouman

Er gebeurde echter meer in 1858. In dat jaar publiceerde Bouman in het *Nieuw Nederlandsch Tijdschrift voor Onderwijs en Opvoeding* een omvangrijk artikel over 'Het onderwijs in de vormleer in de lagere school'. Gezien de stijl moet dit stuk de schriftelijke weergave geweest zijn van een lezing voor een onderwijzersgezelschap of een afdeling van de Bond voor Onderwijzers. Het artikel valt in twee delen uiteen: een historische terugblik op de ontwikkeling van de vormleer gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw en een beschrijving van de leerstof met nieuwe argumenten voor de 'hernieuwde invoering' van dit vak, 'dat in den laatsten tijd aan onze volksschool bijna geheel vreemd is geworden' (Bouman, 1858, p. 169). Hieruit blijkt opnieuw dat de feitelijke aandacht voor de vormleer in het onderwijs gering was. Bouman schetst in zijn stuk het grote belang van Pestalozzi's denkbeelden over aanschouwing, in het bijzonder in verband met de vormleer, zij het dat er nu enige afstand is genomen na een halve eeuw ontwikkeling:

> 'De praktijk heeft met ijverige belangstelling, met de geestdrift der schoonste verwachtingen de nieuwe beginselen in toepassing gebragt. Hoe meer zij dat deed, hoe meer men van hare degelijkheid en juistheid overtuigd werd, des te duidelijker bleek het, dat zij waarlijk in den ontwikkelingsgang van het menschelijk denkvermogen gegrond zijn, zelfs nog meer in ruimen zin en algemeenen zin, dan Pestalozzi vermoedde. Maar des te meer bleek ook, dat zijne toepassing er van eensdeels te beperkt, anderdeels te omslagtig en ondoelmatig was, en niet voortbragt, wat men er van verwachtte.' (Bouman, 1858, p. 169)

Bouman achtte de vormleer van belang in verband met de ontwikkeling van het denkvermogen. Maar ook zien we voor het eerst in de didactische literatuur een wat kritischer standpunt ten aanzien van het zogenaamde 'universeel middel voor de ontwikkeling van de menschelijke geestvermogens', dat aan de vormleer zou kleven. Bouman stelt namelijk in zijn opstel, dat er 'vele klassen van voorstellingen, begrippen en gedachtereeksen zijn (...), die met vorm en getal niets te maken hebben' (Bouman, 1858, p. 170) en trekt daarna als conclusie: 'De beoefening van de getal- en vormleer kan dus geen universeel middel tot de ontwikkeling van den menschelijken geest wezen' (Bouman, 1858, p. 170).

Zowel in de aanschouwingsoefeningen zelf als bij de toepassingen daarvan in de getallenleer als in de vormleer ging Pestalozzi 'zeker te ver', zo stelt Bouman. In het bijzonder verwijst hij hierbij naar de geatomiseerde uitwerkingen van onder meer J. Schmidt(!).[5] Debet aan de geringe acceptatie van de vormleer in het onderwijs

achtte Bouman het voorbijzien aan het toepasbare, het nut van dit vak. Met het tekenen ziet hij slechts een zijdelings verband, hoofdzakelijk als een voorbereiding op het 'meetkundig teekenen'. In A5 hebben we uit de politieke discussies kunnen concluderen dat het vak voornamelijk om haar vermeende vormende waarde in het leerplan was opgenomen. Bouman gaat hier deels in mee, maar wil toch vooral het *praktische aspect van de vormleer* meer op de voorgrond stellen of zoals hij het zelf stelt: 'het vormende met het stoffelijke doel naauw (...) vereenigen' (Bouman, 1858, p. 174).

In het tweede deel van zijn stuk gaat Bouman uitvoerig in op het nuttigheidsaspect van de vormleer:

> 'Het meetkundig rekenen, voor zooverre het in de lagere school te pas komt en voor 't dagelijksch leven behoefte is, kan evenzeer als de kennis der gewone rekenkunde op inzigt en overtuiging steunen; het kan dit zelfs nog beter, omdat het zich uitsluitend tot eigenschappen en waarheden bepaalt, die altijd onder het bereik der onmiddellijke aanschouwing vallen. (...) Grijpt het van zijne praktisch nuttige zijde aan.(...) De rigting van onzen tijd, de eischen der maatschappelijke behoeften vorderen dringend, dat wij thans hare andere zijde in het licht stellen, en toonen, dat zij ook iets nuttigs en bruikbaars voor het leven kan uitwerken.' (Bouman, 1858, p. 177)

Hier wordt dus voor het eerst officieel echt gepleit voor meer pragmatisme in de vormleer. In verband met de gevreesde overlading van de leerstof pleit Bouman voor beperking tot de kern en tot concentratie van leervakken welk beginsel herbartiaans aandoet. Een praktische uitwerking hiervoor geeft hij niet. Bouman stelt een tweedeling van de leerstof voor. Een inleiding voor de kinderen van acht à tien jaar van de middenklasse van de dorpsscholen (eventueel voor kinderen van zes à tien jaar op de betere scholen) via het formele aanschouwingsonderwijs, waarbij vooral de oefeningen in het leren herkennen van vormen en figuren en hun relaties aan de orde komen en wel naar aanleiding van de directe omgeving, zoals het klaslokaal. Het tweede, meer systematische gedeelte, is voor de oudere leerlingen (tien à veertien jaar) en omvat het meetkundige deel van de vormleer. Dit nu zou een onderdeel van het rekenonderwijs moeten zijn. Het eerste deel noemt hij het aanschouwelijke, het tweede het praktische deel. De praktische uitwerking van deze ideeën gaf hij vorm via een leerboek, dat we nog zullen bespreken.

Het belang van Boumans artikel is vooral gelegen in de duidelijke omschrijving van de vormleer als vak en het door hem als nieuwe doelstelling omschreven praktische nut. Net als bij Brugsma is de invloed van Diesterweg evident.[6] Nieuw is dat hij zijn standpunt vooral onderbouwde met argumenten die ontleend werden aan de nieuwe maatschappelijke ontwikkelingen.

Inhoudelijke overheidsbemoeiing

Vlak nadat Steyn Parvé in 1858 op het departement was gaan werken, schreef hij twee artikelen over vormleer. Het eerste verscheen in de *Nieuwe Bijdragen* van 1859

en behelsde de beoordelingen van zeven leerboeken. Het veertig pagina's tellende stuk geeft naast de heldere en zeer kritische beoordelingen tevens een beschrijving van de vormleer, waarbij verwezen wordt naar de opvattingen van Diesterweg en Bouman.[7] In het volgende hoofdstuk A7 zullen wij, waar dit mogelijk is, Steyn Parvé's boekbeoordelingen betrekken in onze eigen analyses.

Spoedig na dit artikel verscheen er in het januarinummer van 1860 van *De Gids* een opstel van Parvé's hand onder de titel: 'Het onderwijs in de vormleer op de lagere school'. Hoewel dit stuk inhoudelijk een sterke overeenkomst vertoont met zijn essay in de *Nieuwe Bijdragen*, is het toch van een andere aard. Het doel van dit artikel was een algemene beschouwing te geven over het belang van vormleer als leervak voor het lager onderwijs.

Allereerst schetst Steyn Parvé een korte historische achtergrond, waarbij hij met name Pestalozzi en Diesterweg veel eer toezwaait, vooral in verband met het didactische belang van de aanschouwelijkheid. Dat het onderwijs in de vormleer tot dan toe nooit goed van de grond is gekomen, wijt hij aan de verkeerde uitwerking van Josef Schmidt (!).[8] Hij maakt een verwijt aan de onderwijzers in hun slaafse navolging hiervan: 'De vormleer ontaardde in hunne handen in eene toegepaste combinatie-leer (...) in een eenzijdig en droog verstandsspel (...) Waartoe toch kunnen zoodanige oefeningen anders leiden dan tot verveling en tegenzin? In plaats van geestontwikkelend zoude ik ze liever geest-doodend noemen' (Steyn Parvé, 1860, p. 73).

Steyn Parvé zag dus weinig in de uitgebreide combinatorische oefeningen van de zuivere vormleer. Het hoofddoel van de vormleer was, volgens hem, dat wat het woord letterlijk betekent, namelijk 'de leer van de (meetkundige) vormen' en wel op een aanschouwelijke manier onderwezen. Het mocht echter geen formele meetkunde worden. Meetkundige waarheden waren of vanzelfsprekend of dienden op aanschouwelijke wijze duidelijk gemaakt te worden. De 'analytische' aanpak, waarbij van het geheel wordt uitgegaan – als voorbeeld noemde hij de kubus – werd door Parvé superieur beschouwd aan de 'synthetische' werkwijze, waarbij men met punten begint, daarna de lijnen enzovoort, om zo te eindigen bij de lichamen'. Tevens zou het 'formeel nuttige' met het 'praktisch nuttige (...) op eene doelmatige wijze' verbonden dienen te worden, waardoor er 'weldra een einde zal komen aan de zoo menigmaal herhaalde klagt, dat de vormleer een nutteloos leervak en de meetkunde eene drooge studie is' (Steyn Parvé, 1860, p. 69).

Het artikel eindigt met een afwijzing van de vormleer als hulpmiddel voor het tekenonderwijs, maar met een pleidooi voor de oefening van het oog in plaats van het natekenen. Hiervoor verwijst hij naar de methode van F. Dupuis, waarop wij in hoofdstuk A14 in zullen gaan.

Het nieuwe standpunt

Tot dit tijdstip van onze historische beschrijving vonden wij in de Nederlandse onderwijskundige literatuur nog niet een zo duidelijke en beknopte omschrijving van aard, doel, plaats en didactiek van de vormleer. Dat het in die tijd mogelijk was dat een overheidsfunctionaris zich zo direct, overtuigend en met verstand van zaken met de praktijk van het onderwijs kon en wilde bemoeien, is bijzonder. Dat dit ook van invloed is geweest op de richting waarin het vak zich ontwikkelde, zal onder meer blijken uit het volgende hoofdstuk A7. Er ontstonden immers door de wettelijke invoering van de vormleer en door de nieuwe doelstellingsbeschrijving ook nieuwe boeken. Boumans boek zette de trend voor de herinterpretatie van het vak, maar er meldden zich ook andere auteurs op de boekenmarkt. In 1860 werd in het Paleis voor Volksvlijt te Amsterdam de eerste onderwijstentoonstelling georganiseerd. Hierover is in 1861 een boek uitgegeven, waarin een artikel van H.W. Bloem over vormleer is opgenomen. Hieruit blijkt opnieuw de algemene onvrede met het oude pestalozziaanse ideaal van de vorming van de geest door middel van onder meer de vormleer, welke 'door de eischen des maatschappelijken levens als onpraktisch wordt gewraakt, een luchtballon, die ver boven huizen en torens zweeft' (Bloem, 1861, p. 113).

Net als Bouman wijst ook Bloem op de betekenis van de maatschappelijke veranderingen, namelijk 'dat het onderwijs de kennis en oefening moet aanbrengen, die het leven eischt' (Bloem, 1861, p. 113). Ook worden nog wel de aspecten van formele en esthetische waarde genoemd, maar het nut voert toch de boventoon. Passend bij de aard van de beschreven gebeurtenis (het ging om een onderwijstentoonstelling) werden verschillende hulpmiddelen als modellen en wandplaten met figuren van verschillende uitgevers besproken. Merkwaardig is dat er slechts enkele leerboeken, namelijk die van Hemkes, Stratemeijer en De Boer, aanwezig waren. Dit is des te opmerkelijker omdat in het mei-nummer van de *Nieuwe Bijdragen* van 1859 de uitgebreide recensie van Steyn Parvé van zeven leerboeken over vormleer had gestaan.

Er kwam echter in de periode 1857-1875 een flink aantal nieuwe vormleerboeken op de markt, die wij in het volgende hoofdstuk A7 zullen analyseren.

A7 Boeken van de Bouman-periode (1858-1875)

Afbakening

In dit hoofdstuk bespreken we de generatie leerboeken, handleidingen en vraagstukkenverzamelingen over vormleer, die als gevolg van de wet van 1857 op de markt kwamen en tussen 1858 en 1875 hun eerste druk hebben gekend. Sommige daarvan waren nog in de stijl van Van Dapperen, andere meer in de trant van het werk van Diesterweg. In het bijzonder springt de handleiding van Bouman in het oog, wiens voortrekkersrol tot een herinterpretatie van de vormleer in A6 is beschreven . Dit is de reden waarom we de periode 1858-1875 de *Bouman-periode* hebben genoemd. Een enkel boek van dit bestand zal ook nog na 1875 betekenis hebben. Rond 1875 vangt weer een nieuwe periode in de ontwikkeling van de vormleer aan, waaraan de naam van Jan Versluys verbonden moet worden. Het is echter niet alleen om deze reden dat de periodisering zo gekozen is. Ook vanwege de opnieuw groeiende weerstand tegen de vormleer tijdens de jaren zeventig van de negentiende eeuw, die opnieuw de discussies aanwakkerde over de waarde van dit leervak tijdens de totstandkoming van de onderwijswet van 1878, zullen we het tijdperk 1875-1890 aan een apart onderzoek onderwerpen.

Bestand van leerboeken en handleidingen

We sommen eerst de door ons gevonden titels op naar alfabetische volgorde van de auteursnamen.[1] De met één sterretje (*) gemerkte titels zijn handleidingen voor de onderwijzer, die met twee sterretjes (**) zijn leerlingboeken. Het aantal drukken is bepaald naar eigen waarneming of op grond van *Brinkman's Cumulatieve Catalogus 1850-1882* (BCC) en is aangeduid met een vet gedrukt getal.[2] Uitgebreidere bibliografische gegevens zijn in de literatuurlijst opgenomen.

1. H. Bakkes (1865). *De vormleer, methodisch en praktisch bewerkt voor de lagere school.* */** **1** (BCC)
2. D. Bierens de Haan (1858). *Leiddraad bij het onderwijs in de vormleer op de lagere scholen.* */** **3**
3. H. de Boer (1864[2]). *Oefeningen in de vormleer, voor de scholen ten dienste van de leerlingen.* */** **2** (?)
4. H. Bouman (1858). *De vormleer in de lagere school. Eene handleiding bij het onderwijs en tot zelfoefening voor aankomende onderwijzers.* * **9** [3]
5. H. Bouman (1864). *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen voor de verschillende klassen der lagere school. Eerste reeks voor de laagste klassen.* ** **2** [4]
6. H. Bouman (1865). *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen voor de verschillende klassen der lagere school. Tweede reeks* ** **2** [5]
7. L. Bouwman (z.j.) *Meetkundig rekenboek voor lagere scholen.*** **3**
8. L. Bouwman (1863) *Vormleer. Een rekenboek voor de lagere scholen.* ** **1** (BCC)
9. S.L. Brug (1863). *Meetkundig rekenboek, overeenkomstig de behoeften van onzen tijd; voor scholen en ter bevordering der nijverheid.*** **1** (BCC)
10. J.A. Crüts (1865). *Vragen en opgaven bij het onderwijs in de vormleer ten dienste van*

kweekelingen of aankomende onderwijzers. * **1** (BCC)

11. F. Dijkstra (1858). *Korte handleiding bij het onderwijs in de beginselen der vormleer op de lagere scholen.* * **1** (BCC)
12. D. de Groot (1864). *Praktische leergang voor het onderwijs in de vormleer in de lagere school.* * **2**
13. H. Hemkes (1858).*Vormleer voor de school en het leven, ter ontwikkeling van verstand, bevordering van goeden smaak en aankweeking van gepaste vormen.* * **1** (BCC)
14. H. Hemkes (1861). *Vormleer, een leesboekje voor de scholen.* ** **3** (BCC)
15. D. C. Hetterschy (1867). *Meetkundig leer- en rekenboekje ten dienste der leerlingen van de hoogste klasse eener lagere school, en inzonderheid van avond- en herhalingsscholen.* ** **1** (BCC)
16. W.G. Meulevelt (1865). *Vormleer voor de leerlingen der lagere scholen.* ** **2** (?)
17. J. Meurs (1866). *Vormleer, verzameling van vragen en opgaven ter herhaling en toepassing tot gebruik voor de lagere school.* ** **1** (?)
18. J.D.R. Moll (1862). *Vormleer dienstig voor onderwijzers-kweekelingen, strekkende tevens tot handleiding voor den onderwijzer bij het onderwijs van de vormleer in de scholen. Eerste deel.* * **4**
19. J.D.R. Moll (1873?). *Vormleer dienstig voor onderwijzers-kweekelingen, strekkende tevens tot handleiding voor den onderwijzer bij het onderwijs van de vormleer in de scholen. Tweede deel; over den Cirkel en de Lichamen.* * **3** (BCC)
20. J.D.R. Moll (1873?) *Ruim vierhonderd opgaven over rechte lijnen en vlakken, behoorende bij het eerste deel der vormleer.* * **3** (BCC)
21. J.D.R. Moll (1865). *Ruim zeshonderd vragen en opgaven over den cirkel behoorende bij het tweede deel der vormleer.* * **2** (BCC)
22. J.D.R. Moll (1872). *Vormleer voor het lager onderwijs.* ** **1** (BCC)
23. G.C. Mulder (1858). *Handleiding bij het onderwijs in de vormleer, ten dienste van aankomende onderwijzers.* */** **1** (BCC)
24. A. van Otterloo (1868). *Vormleer of aanschouwelijke meetkunst.* */** **1** (BCC)
25. J.G.W. Postel (1861). *Vraagstukken over de vormleer.* * **1**(?)
26. B. Semmelink (1858). *Beginselen der vormleer en volksmeetkunde, vraag- en werkstukken ter toepassing, ten gebruike bij het gewone en meer uitgebreide lager onderwijs.* ** **1**
27. J.H. Stratemeijer (1858). *Handleiding bij het onderwijs in de vormleer op de lagere scholen.* * **4** (BCC)
28. R. Swartwolt (1862). *Oefeningen en vraagstukken ter toepassing bij het onderwijs in de vormleer voor de middelste klasse eener lagere school.* ** **4** (BCC)
29. R. Swartwolt (1862). *Oefeningen en vraagstukken ter toepassing bij het onderwijs in de vormleer voor de hoogste klasse eener lagere school.* ** **3** (BCC)
30. H. Vernimmen (1873). *Meetkundig Leer- en Rekenboek of Handleiding in de Vormleer.* */** **2**
31. Wilk, L.J. van der (1858). *Hoe men vormleer kan onderwijzen. Iets voor de lagere scholen.* * **1** (BCC)
32. J. de Witte van Citters (1861). *Handleiding tot het aanvankelijk onderrigt in het regtlijnig teekenen en tot het zamenstellen van symmetrische figuren, met toepassing op de vormleer.* * **4** (BCC)

Tot slot noemen we nog:

J.D.R. Moll: *Figuren-spel, tot oefening in de vormleer.* Dit boekje behandelt het bekende oude Chinese Tangram-mozaiek. *

Ordening en werkwijze

Voor een inhoudelijke en didactische analyse hebben we dit bestand in zes categorieën ingedeeld. Hoewel wij bij eerste onderzoek van alle boeken een vrij uitgebreide analyse hadden gemaakt, moeten wij ons beperken tot typeringen van soms enkele regels per boek. Alleen op de belangrijkste boeken gaan we dieper in. De categorieën luiden:

- *zuivere vormleer*; hiertoe behoren die boeken, die als een voortvloeisel gezien kunnen worden van het werk van Van Dapperen
- *(formele) meetkunde*; dit zijn die boeken, die eigenlijk de traditionele meetkunde behandelen. In onze indeling in hoofdstuk A3 noemden we deze categorie *meetkundige vormleer*
- *tekenen*; in deze boeken ligt de nadruk op het (technische) tekenen
- *meetkundig rekenen*; hiertoe behoren de boeken, waarin het rekenaspect van de meetkunde centraal staat, in het bijzonder het rekenen met het metriek stelsel
- *praktische vormleer;* hierbij gaat het om de boeken, waarin de vormleer een nieuwe wending krijgt naar een meer informele meetkunde op aanschouwelijke basis
- *mengvormen* en *curiosa*: een restcategorie.

Bij de zeven door Steyn Parvé in 1859 gerecenseerde boeken zullen we steeds zijn oordeel vergelijken met onze analyse.

Zuivere vormleerboeken

Tot de zuivere vormleer behoren de boeken van Mulder (23), Hemkes (13), Bierens de Haan (2), De Boer (3) en Dijkstra (11), alle van 1858 als jaar van eerste uitgifte. Hoewel de twee voorlaatste auteurs stellen dat hun boeken ook als leerlingenboeken gebruikt kunnen worden, menen wij toch in alle gevallen met handleidingen van doen te hebben.

Mulder (23) vermeldt in de inleiding driemaal dat de vormleer slechts een formeel doel heeft. Van enige praktische betekenis wordt niet gerept. Voor de hoogste klas (de laatste twee jaren) worden als doelstellingen het leren 'zuiver teekenen' en de 'opwekking van het schoonheidsgevoel' opgevoerd. De stof wordt voor het overgrote deel bepaald door vraagstukken, waarbij alle mogelijke gevallen van ligging van lijnen en punten ten opzichte van elkaar moeten worden opgezocht. Aanwijzingen voor een systematiek ontbreken. Van gerichte aanschouwelijkheid wordt ternauwernood gebruik gemaakt. Het boek past geheel in de Van Dapperen-traditie. Verschil zien we in de nadruk op het tekenen van lijnstukken van een bepaalde maat. Van enige didactische vooruitgang ten opzichte van Van Dapperen kan niet gesproken worden. De omvang is beperkt.

Steyn Parvé wijdt een deel van zijn kritiek aan de doelstelling van Mulder om ook het esthetische gevoel te ontwikkelen, waartoe hij de vormleer ongeschikt acht. Zijn eindoordeel spreekt voor zich: 'Ons kon (de handleiding van Mulder) volstrekt niet bevredigen' (Steyn Parvé, 1859, p. 436).

De Boer (3) schrijft in zijn voorwoord: 'Een vierjarig verblijf aan 's Rijks Kweekschool voor Onderwijzers, te Haarlem, heeft mij in staat gesteld om dezen tak van onderwijs grondig te leeren kennen.' Het hoofddoel is 'een middel tot verstandsontwikkeling, en voornamelijk van het oordeel'. De inhoud komt ongeveer overeen met het boek van Mulder, maar het is compacter geschreven. Wel begint het geheel in de stijl van Van Dapperen met de onderlinge ligging van punten. Er zijn twee uitgaven van het boekje: één met platen voor de onderwijzer en één zonder platen, dat volgens de auteur 'tot zelfonderrigt' aan de kinderen gegeven kan worden.

Steyn Parvé's kritiek op dit boek is scherp. Met name wijst hij er nog eens op 'dat dit onderwijs (in de combinatoriek, EdM) zoo weinig vruchten droeg' (Steyn Parvé, 1859, p. 444).

De *Leiddraad* van Bierens de Haan (2) is zeer beknopt. De feitelijke tekst beslaat nauwelijks dertien pagina's en lijkt meer een kort overzicht voor de onderwijzer dan een boekje, dat 'des noods ook aan de kinderen in handen konde gegeven worden'. De auteur maakt zich in zijn voorwoord als aanhanger van Diesterweg bekend, maar acht diens boek meer een inleiding op de meetkunde en ongeschikt voor kinderen van zes tot tien jaar. Weliswaar begint de 'leergang' met het lichaam en het vlak, maar daarna volgen toch de bekende oefeningen in de trant van de zuivere vormleer. Er wordt geen doelstelling en geen 'methodiek' omschreven.

Steyn Parvé is in zijn oordeel over dit boekje van zijn vakgenoot kort en tamelijk lankmoedig: 'Wij houden het voor zeer bruikbaar, maar niet voor voldoende;' (Steyn Parvé, 1859, p. 443).[6]

Hemkes' (13) boek heet vormleer 'voor de school en het leven'.[7] Een duidelijke doelstelling ontbreekt, maar het gaat er weer om 'de vormleer vooral ook aan de verstandelijke ontwikkeling dienstbaar te maken'. We constateren sterke overeenkomsten met Van Dapperen, vooral waar het om het systematisch en uitputtend opzoeken van verschillende samenstellingen van figuren gaat. Er wordt daarbij gebruik gemaakt van systematische technieken (tabellen), waaraan het bij Van Dapperen nog al eens schortte. Maar net als bij Schmid leiden deze methoden tot pagina's vol boekhouderij. Een frappante overeenkomst met Van Dapperens methode is het belang, dat Hemkes hecht aan het klassikaal opdreunen van de antwoorden van dergelijke opgaven. Ook aan de vraagstukken over 'kromme lijnen' wordt veel aandacht besteed. Het boek is duidelijker gestructureerd dan dat van Van Dapperen. Wel probeert de schrijver de introductie van nieuwe begrippen te ondersteunen met voorbeelden uit het dagelijks leven. Tegen het einde van het boek komen enkele ruimtefiguren aan bod. Verrassenderwijs eindigt het boek met meer dan tweehonderd vra-

gen, die een geheel andere, frisse geest ademen. Het zijn voor een groot deel vragen over ruimtelijke oriëntatie en over meetkundige begrippen, die ontleend zijn aan het dagelijks leven en de realiteit. Hier volgen enkele voorbeelden:

79. Staan de sterren naast elkander?
80. Staan de sterren naast de maan?
94. Wat noemt gij aan een' bal boven?
95. Wat noemt gij aan een ei onder?
101. Hoe spant gij eene draad loodregt?
108. Hoeveel regte en hoeveel kromme lijnen vertoonen de doorsneden, als men een' appel aan vieren snijdt?
111. Als eenige dingen op eene rij staan, hoe kan men dan weten of die rij regt is?
135. Deel door vouwen een strookje papier in 2, 4, 8, 3, 6, enz. gelijke delen.

Dijkstra (11) omschrijft geen doelstelling, maar wijst op het verplichtende karakter van de vormleer volgens de nieuwe wet. Het gaat om het leren van begrippen, beginnend met punten en eindigend met kromlijnige figuren; alles zeer summier beschreven. Daarnaast enkele vragen en tekenopgaven. Combinatorische vragen komen niet voor.

(Formele) meetkundeboeken

Tot de categorie (formele) meetkunde rekenen we de boeken van Semmelink (26), Van Otterloo (24), Moll (18 - 22) en Vernimmen (30). In al deze boeken wordt weinig aandacht aan de zuivere vormleer besteed. De leerstof is geënt is op de traditionele euclidische opbouw.

Semmelink (26) wil met zijn *Beginselen der vormleer en volksmeetkunde* 'den jongen mensch tot een zelf denkend en zelf handelend wezen (...) vormen', maar tevens meent hij dat de maatschappelijke ontwikkelingen, waar ook om praktische meetkundekennis gevraagd wordt, een reden zijn om aandacht aan de volksmeetkunde te besteden. Het boek is zo ingericht dat het zowel in de lagere school als in het MULO gebruikt kan worden. Voor de lagere school zijn de opgaven eenvoudig gehouden en betreffen enkele begrippen en eigenschappen, die op empirische wijze worden gepresenteerd. De bekende constructies met passer en liniaal nemen een belangrijke plaats in. Omdat zo'n 90 procent van de stof voor het MULO bedoeld is, zou het boek ons inziens voor die tijd als een geschikte voorbereiding op de meetkunde van het voortgezet onderwijs gezien mogen worden.

Steyn Parvé maakt in zijn recensie bezwaar tegen de empirische aanpak. Verder had volgens hem een beter gebruik van aanschouwelijkheid gemaakt kunnen worden. Hierom acht hij het geen vormleerboek. Toch stelt hij: 'Het werkje van de Heer SEMMELINK is niet zonder verdienste, als men het beschouwt als eene handleiding voor het onderwijs in de meetkunde, op eene school, waar dit aan jongens van 11 tot 14 jaar gegeven wordt' (Steyn Parvé, 1859, p. 440).

Van Otterloo (24) meent dat de vormleer alleen dan haar waarde kan behouden

'als zij een zekere kennis aanbrengt, als zij iets reëels geeft, en niet enkel als methode, als ontwikkelingsmiddel moet dienen.' De onderwerpen worden steeds als volgt aangeboden: eerst een opsomming van een aantal stellingen, daarna de oefeningen. De stellingen worden niet bewezen; ze zijn bedoeld voor de onderwijzer als achtergrondkennis, waarvoor naar de boeken van Bouman wordt verwezen. Bij de oefeningen komen de eerdergenoemde stellingen vaak als vragen terug, maar zouden dan door de leerling op aanschouwelijke wijze aangetoond moeten worden. Ook worden bij herhaling algebraïsche hulpmiddelen ingezet. Het niveau lijkt ons veel te hoog voor de lagere school.

De handleidingen van Moll (18 en 19) zijn van een voor de vormleer veel te hoog niveau (deductieve redeneringen, projectiestelling, machtsstelling, raaklijnen- en koordenvierhoeken). Doelstellingen zijn niet omschreven. De samensteller gaat ervan uit dat de onderwijzer uit de handleidingen zelf zijn lessen kan samenstellen. Later komt Moll daarop terug, want in 1872 brengt hij een leerlingenboek (22) op de markt. Dit is echter niets anders dan een 'eenvoudige' samenvatting van zijn handleiding. Wat voor merkwaardig boek dit is, blijkt uit een half-algebraïsche afleiding van de stelling van Pythagoras, terwijl de auteur in het voorwoord stelt: 'Het was mijn doel den leerling met geen lastige formules bezig te houden, maar hem door eenvoudige bewijzen de waarheden eigen te maken.' De twee oefenboeken (20 en 21) zijn bedoeld voor de (aankomende) onderwijzer, die ook weer van een stevig niveau zijn. Moll schreef zijn boeken vanuit een zuiver mathematisch oogpunt.[8]

Het boek van Vernimmen (30) is ook een MULO-boek, bedoeld voor de hoogste klassen van de lagere school. Het bevat de bekende planimetrische stof tot aan de stelling van Pythagoras.[9]

Tekenen

Het is Pestalozzi zelf geweest, die de samenhang van tekenen en vormleer heeft benadrukt. Vooral Rijkens heeft getracht aan dit aspect vorm te geven (zie A3). Ook na het midden van de negentiende eeuw bleef dit punt in discussie. Belangrijke protagonisten van deze richting waren in deze periode J. de Witte van Citters (1817-1876) en H. Bakkes.[10]

De Witte van Citters (32) stelde een handleiding samen voor het 'regtlijnig teekenen' (...) 'met toepassing op de vormleer'. De inleiding begint als volgt: 'Deze bladen bevatten eene proeve van toepassing van de leerwijze van Fröbel, ingerigt voor de behoeften van bewaarscholen en lagere scholen met klassen van een groot aantal kinderen' (De Witte van Citters, 1867, p. I). Het gaat om het natekenen van regelmatige patronen, die afgebeeld zijn op een vierkantenrooster. De doelstellingen zijn ontwikkeling van het schoonheidsgevoel, leren waarnemen en afbeelden, voorbereiding op de wiskunde, bevordering van gevoel voor regelmaat, netheid en leren zelfstandig te werken. De handleiding is zeer gedetailleerd en geeft stapje voor stapje

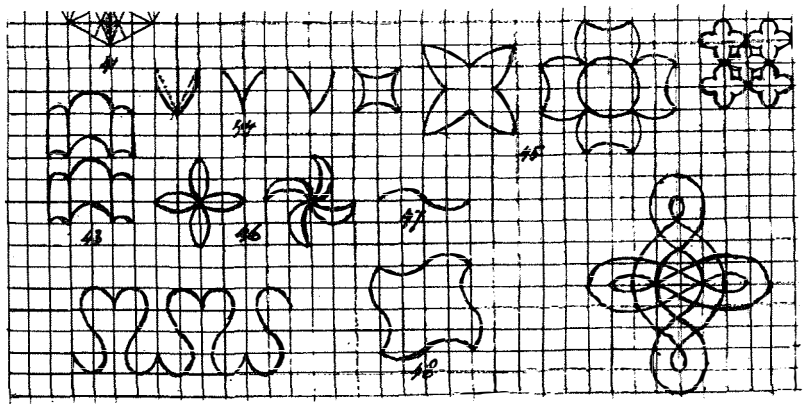
aan hoe er met de gehele klas gewerkt moet worden. Er wordt aangenomen dat de onderwijzer op de hoogte is van de vormleer en dat deze oefeningen hierop een aanvulling kunnen zijn.

Het vormleerboek van Bakkes (1) verdient om meerdere redenen bijzondere aandacht. Het 'voorberigt' begint met een herinnering van de schrijver aan zijn bezoek aan de onderwijstentoonstelling te Amsterdam in 1860, alwaar hij de toen op de markt gebrachte modellen voor de vormleer zag. De onderwijzers werden aangemoedigd om daarmee het onderwijs in de vormleer een nieuwe wending te geven. Bakkes was het daarmee eens, maar zag ook in dat er toch wat meer nodig was. Dit was blijkbaar een reden voor Bakkes om zelf een cursus te ontwerpen. De auteur zegt 'voorgelicht' te zijn door en gebruik gemaakt te hebben van 'hetgeen H.H. Hemkes, Bouman, Stratemeijer, Bierens de Haan, de Witte van Citters, Moll, Swartwolt, de Boer en anderen over dit onderwerp geleverd hadden' (Bakkes, 1865, p.I). Wij treffen hier echter een heel andere opzet en inhoud aan dan het werk van de aangehaalde auteurs, met uitzondering voor De Witte van Citters. Bakkes omschrijft als belangrijkste doelstelling van de vormleer het 'leeren zien' en meer in detail de doelen als volgt:

> '1. Het kind leert *bepaald zien* en het schoone in de regelmaat der vormen opmerken;
> 2. Het verkrijgt ongemerkt eenige *meetkundige kennis*, die in het leven, of bij verdere of latere beoefening der wetenschap voorzeker niet schaden zal, en
> 3. Oefent het zich in 't *lijnteekenen*, dat mede niet zonder voordelige gevolgen zal zijn.' (Bakkes, 1865, p. 3)

De leergang heeft een analytisch-synthetische opzet. Er wordt gestart met ruimtelijke en vlakke vormen en met de algemene oriëntatiebegrippen, waarna een synthetisch-systematische cursus volgt (punt, lijn, figuur, enzovoort). De leervorm moet 'heuretisch' (!) zijn, zo stelt de auteur 'doch onder leiding van den onderwijzer'. De totale cursus bestaat uit drie delen: de laagste, de middelste en de hoogste klas. Voor de laagste klas gaat de stof tot en met de hoeken. Er komt in dit deel geen combinatoriek voor. In de middelste klas wordt het samenstellen van lijnen tot figuren behandeld. Deze figuren hebben vaak een reële, aan het dagelijks leven ontleende betekenis, maar ook worden ze wel louter op hun esthetische waarde beschouwd. Ook komen nu op beperkte en zinvolle wijze combinatorische vraagstukken voor. Als voorbeeld verwijzen we naar figuur A7.1, waar een deel van plaat X is afgebeeld. Er wordt steeds op ruitjespapier gewerkt.[11]

Verder komen in de middelste klas nog de cirkel, de oppervlakte van een rechthoek en het lijnspiegelen aan de orde. Het deel voor de hoogste klas beslaat bijna de helft van het totale boek. Nu wordt de aandacht gericht op de verschillende veelhoeken, maar vooral op hun meetkundige eigenschappen zoals symmetrie, mogelijke verdelingen en mogelijkheden tot het maken van vlakvullingen. Combinatorische vraagstukken worden ook in verband gebracht met de regelmatige figuren. De be-



figuur A7.1: Meetkunde en Tekenen (Bakkes, 1865)

langrijkste algemene combinatorische formules zijn in noten voor de onderwijzer toegevoegd. Oppervlakteberekeningen komen beperkt voor, alleen voor de inhoud van een driehoek komt een formule ter sprake. Bij de cirkel wordt het verschijnsel van de zonne-eclips besproken, zoals telkens praktische voorbeelden aangehaald worden. Dit geldt ook voor het laatste deel van het boek, waarin de bekende ruimtelichamen bestudeerd worden. Geen trucmatige formules voor de inhouden, maar aanwijzingen voor manieren om door het overgieten van water een idee van het begrip inhoud te ontwikkelen. We besluiten de bespreking van dit bijzondere boek, dat ons inziens ook vandaag de dag nog de moeite van het bestuderen waard zou zijn, met een aantal voorbeelden:

'– Waar zou een lantaren geplaatst moeten worden, om 3 huizen *even sterk* te verlichten? (p. 76)
– Op een ijsveld stonden, in de rondte, 5 tenten. Als 't nu gesneeuwd heeft en er overal van tent tot tent eene baan geveegd wordt, hoeveel banen heeft men dan? Hoe zou men daar de geheelen middag kunnen rijden, zonder eene enkele tent aan te doen? (p. 76)
– Teekent een gelijkbeenigen, rechthoekigen driehoek. Maakt 2 symmetrische helften. Van de helft weder 2 symmetrische helften; enz. Zegt nu, hoe dikwijls dat zou kunnen herhaald worden. (Tot in het oneindige). Wij willen de stukken eens opschrijven. Zie hier: 1/2 + 1/4 + 1/8 +1/16 + 1/32 enz. enz. Hoeveel is dat alles te zamen? (Eén) (p. 79).
– Snijdt de bol eens midden door. Doet dat ook met den eikel en het ei in de lengte. Welke doorsnijdingsvlakken ziet gij daar?' (p. 105)[12]

Meetkundig rekenen

In 1824 bekroonde de Maatschappij tot Nut van 't Algemeen het boek *Volks-Meetkunde* van J.W. Karsten met een Gouden Medaille en tien Gouden Dukaten. Zij beoordeelde dit boek als de beste inzending op een door haar uitgeschreven prijsvraag voor

een populair leerboek over dit onderwerp. Het boek van Karsten, een hoofdingenieur van Waterstaat, bestaat uit vijfentwintig samenspraken tussen een 'heer en zijn tuinman'. Het behandelt het nieuwe metrieke matenstelsel, het rekenen met decimale breuken en een aantal landmeetkundige problemen, waarbij louter van aanschouwelijkheid en enige meetinstrumenten gebruik gemaakt wordt. Ook voor de lagere scholen bestonden er in die tijd reeds zogenoemde 'meetkundige rekenboeken'.[13]

Onder invloed van het feit dat de vormleer een meer praktische wending diende te krijgen, verschijnen er vanaf 1858 een aantal 'nieuwe' meetkundige rekenboeken – al of niet verbonden met het woord vormleer – op de markt. Hiertoe rekenen we de boeken van Postel (25), Brug (9), Hetterschy (15) en Bouwman (7 en 8). Het boekje van Postel behandelt alleen vlakmeetkundige, de andere ook ruimtelijke berekeningen. De inhoud is hoofdzakelijk gericht op het toepassen van formules en het rekenen met metrieke maten. De afleiding van de formules is ondergeschikt aan het toepassen. Een verklaring voor de formule van de oppervlakte van de cirkel wordt alleen gegeven in het boek van Brug. Bouwman schrijft in het 'voorberigt' van zijn vormleerboek dat volgens een bespreking in de *Nieuwe Bijdragen* zijn meetkundig rekenboek geschikt zou zijn om de vormleer toe te passen. De boeken van Brug en Hetterschy zijn volgens de naamgeving en voorwoorden vooral gericht op de MULO- en herhalingsscholen in verband met de volgens de auteurs toenemende vraag uit de maatschappij en de nijverheid om de leerlingen ook enige praktische kennis bij te brengen. Er bestonden in die tijd nog meer van dergelijke meetkundige rekenboeken. We hebben ons beperkt tot deze enkele voorbeelden, omdat het louter toepassen van oppervlakte- en inhoudsformules niet vereenzelvigd kan worden met wat onder vormleer nu eigenlijk verstaan diende te worden, namelijk aanschouwelijke meetkunde, waarvan het meetkundige rekenen weliswaar ook een onderdeel zou dienen te zijn.

Praktische vormleer

De categorie praktische vormleer wordt gekarakteriseerd door de volgende kenmerken:

- start met ruimtelijke figuren
- beperkte combinatoriek, waarbij begrip centraal staat
- eigenschappen en relaties worden aanschouwelijk aangetoond
- aandacht voor meetkundig rekenen, waarbij de 'formules' inzichtelijk aangeleerd worden
- eenvoudige constructies
- gebruik van concreet materiaal
- geen formele deductieve redeneringen
- voorbereiding op de meer formele meetkunde.

Onder deze categorie rangschikken wij de boeken van Bouman (4-6), Stratemeijer (27) en De Groot (12). Bouman heeft een handleiding en een leerlingenboek geschreven, de andere twee auteurs alleen handleidingen. Hoewel de auteurs de doelstellingen niet systematisch beschrijven – meestal wordt er in de loop van de inleiding aandacht aan besteed – kunnen we in het algemeen voor deze categorie boeken toch de volgende materiële en formele doelen herkennen:

- leren kennen van ruimtelijke en vlakke vormen en eenvoudige eigenschappen daarvan
- kunnen toepassen van deze eigenschappen bij meetkundige redeneringen, constructies en
- berekeningen
- voorbereiding op de meer formele meetkunde
- ontwikkeling van de intellectuele vermogens (vormende waarde).

Nauwelijks of niet expliciet worden de esthetische waarde, de samenhang met het tekenonderwijs en het leren logisch denken door deze auteurs genoemd.

Van de handleiding (4) van Bouman zijn in totaal negen drukken verschenen. De laatste is van het jaar 1886. In dit hoofdstuk behandelen we de drukken 1 tot en met 6, die tussen 1858 en 1874 verschenen. De overige komen in het hoofdstuk over Versluys aan de orde.

In het uitgebreide voorbericht van de eerste druk begint Bouman met een verwijzing naar zijn eerdere artikel in het *Nieuw Nederlandsch Tijdschrift voor Opvoeding*, dat we in A6 beschreven hebben. Tevens releveerden we daar zijn tweedeling van de vormleer, namelijk een inleiding voor de kinderen van acht à tien jaar en een meer systematisch gedeelte voor de groep van tien à veertien jaar. In de handleiding blijkt de leerstof in drie delen verdeeld:

- eerste afdeling: voorbereidende oefeningen (acht à tien jaar)
- tweede afdeling: bijzondere eigenschappen van de grenzen der ruimte (tien à veertien jaar)
- derde afdeling: de eenvoudigste meetkundige lichamen (tien à veertien jaar).

Bij de voorbereidende oefeningen wordt uitgegaan van het schoollokaal en dienen in mondelinge lessen de bekende oriëntatiebegrippen geleerd te worden, maar tevens begrippen als hoogte, lengte en breedte en een aantal meetkundige begrippen als 'kantlijn (rib), hoekpunt, drievlakshoek, tweevlakshoek, vlakke hoek' en dergelijke. Deze begrippen worden daarna vergeleken met een balk, die als het ware als een schaalmodel van het schoolvertrek wordt opgevat. Hierbij komen ook al eenvoudige telproblemen voor, zoals het berekenen van het aantal ribben van een kubus op grond van het aantal zijvlakken.

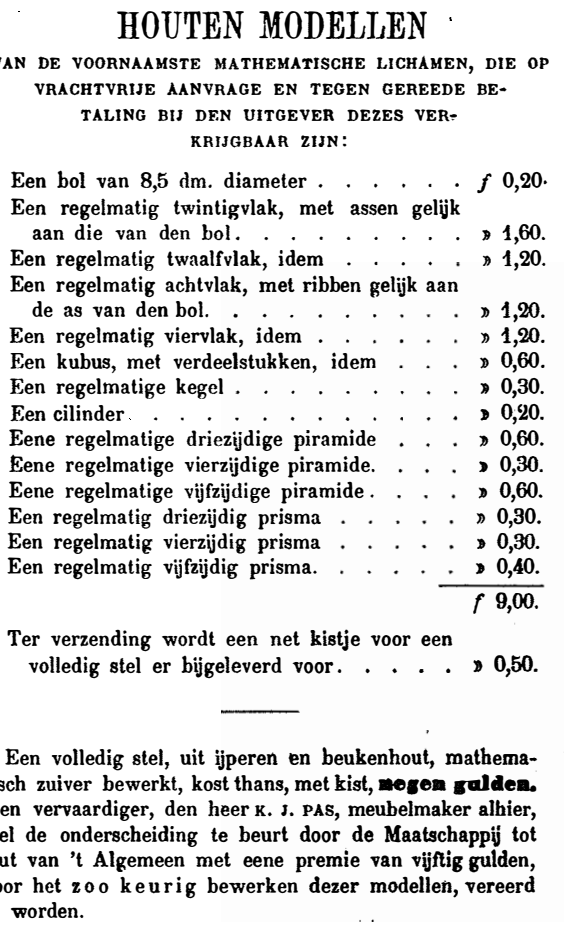
Wordt in de eerste afdeling uitgegaan van de omringende ruimte, in de tweede afdeling wordt zuiver planimetrisch gewerkt. Bouman noemt zijn aanpak in het eerste geval analytisch, in het tweede synthetisch. De lijn (lijnstuk) is het uitgangspunt. De verschillende liggingen en samenstellingen van deze 'uitgebreidheid' worden op systematische wijze behandeld. Dit leidt onder meer tot de bekende combinatorische opgaven, maar wel beperkt en inzichtelijk. Dan volgen de eigenschappen van hoeken, driehoeken, verhoudingen, lengteberekeningen (zelfs de projectiestelling), constructies, oppervlakte en cirkeleigenschappen. In feite een leergang elementaire planimetrie. Bouman stelt in de inleiding op deze afdeling: 'De voorbereiding tot de beoefening der elementaire meetkunde toch is het meer praktische doel der Vormleer:' (Bouman, 1858, p. 30), waarmee duidelijk wordt wat Bouman met het door hem zo vaak genoemde 'praktisch nuttige' van de vormleer bedoelt. Dat is vooral het kunnen toepassen in de meetkunde zelf. Hij stelt bij herhaling dat er geen formele meetkunde bedreven kan en mag worden in de lagere school en dat alle eigenschappen op een aanschouwelijke manier dienen te worden onderwezen. Maar meerdere malen wordt van algebraïsche methoden gebruik gemaakt, zoals bijvoorbeeld bij het bewijs van de stelling van Pythagoras.[14] Toepassingen uit de praktijk van alledag, hoewel door Bouman als een belangrijk doel genoemd, komen in deze handleiding niet voor.

De derde afdeling behandelt de bekendste meetkundige ruimtefiguren. Door Bouman 'In vele opzigten (...) het meest belangrijke en vruchtbare gedeelte van de Vormleer' genoemd (Bouman, 1858, p. 106). Het gaat om de zuilen (prisma's), de naalden (piramiden), de regelmatige veelvlakken, de cilinder, kegel en bol. Van deze ruimtelichamen worden de omschrijvingen, enkele specifieke eigenschappen, hun classificatie, het afbeelden en constructiemogelijkheden (netwerken) behandeld. Aan het begrip inhoud wordt enige aandacht besteed, maar formele inhoudsberekeningen komen niet aan de orde. Veel aandacht is er voor het afleiden van het aantal hoekpunten, ribben en vlakken uit de gegevens van de soort van het lichaam en een bekend aantal van één van de drie genoemde variabelen. Hierbij kon gebruik gemaakt worden van concrete modellen (zie figuur A7.2). Uit het 'Berigt voor den derden druk' wordt duidelijk dat de handleiding van Bouman door het Hoofdbestuur van 't Nut werd bekroond.

Een groot gedeelte van Steyn Parvé 's recensies was gewijd aan deze handleiding en aan het in A6 beschreven artikel van Bouman. Als belangrijkste kritiek op diens werk brengt Steyn Parvé de volgende twee punten naar voren. Allereerst wijst hij er op dat Bouman te gemakkelijk aanneemt dat 'met het streven naar dit praktische doel (...) het andere, de ontwikkeling van den geest, tevens bereikt (wordt)' (Steyn Parvé, 1859, p. 419). Zijn tweede kritiekpunt komt overeen met hetgeen wij hiervoor aanmerkten, namelijk de soms te formele aanpak en het voorbijgaan aan aan-

schouwelijke hulpmiddelen, waar dit eenvoudig mogelijk was geweest. Ook Steyn Parvé noemt hierbij als voorbeeld het Theorema van Pythagoras. Ten slotte waarschuwt Steyn Parvé tegen de overdrijving bij de combinatorische problemen. Maar verder is de kritiek lovend. De eerste afdeling noemt hij 'voortreffelijk uitgevoerd'. De tweede afdeling wellicht iets te uitgebreid en de derde afdeling 'is zeer goed behandeld'. Het eindoordeel spreekt voor zich:

> 'Wij aarzelen, op grond van het voorgaande, niet om de handleiding van de Heer Bouman ten sterkste aan te bevelen aan alle onderwijzers, zoowel voor eigen studie als tot handleiding bij hun onderwijs; tot schoolboek, dat de leerlingen in handen wordt gegeven is het niet geschikt, en blijkbaar heeft de Schrijver het ook niet met zoodanig doel zamengesteld. Jongelieden, die zich voor het examen als hulponderwijzer voorbereiden, kunnen er zeer veel uit leren.' (Steyn Parvé, 1859, p. 430)



HOUTEN MODELLEN

VAN DE VOORNAAMSTE MATHEMATISCHE LICHAMEN, DIE OP VRACHTVRIJE AANVRAGE EN TEGEN GEREEDE BETALING BIJ DEN UITGEVER DEZES VERKRIJGBAAR ZIJN:

Een bol van 8,5 dm. diameter	*f* 0,20.
Een regelmatig twintigvlak, met assen gelijk aan die van den bol.	» 1,60.
Een regelmatig twaalfvlak, idem	» 1,20.
Een regelmatig achtvlak, met ribben gelijk aan de as van den bol.	» 1,20.
Een regelmatig viervlak, idem	» 1,20.
Een kubus, met verdeelstukken, idem . . .	» 0,60.
Een regelmatige kegel	» 0,30.
Een cilinder	» 0,20.
Eene regelmatige driezijdige piramide . . .	» 0,60.
Eene regelmatige vierzijdige piramide. . . .	» 0,30.
Eene regelmatige vijfzijdige piramide. . . .	» 0,60.
Een regelmatig driezijdig prisma	» 0,30.
Een regelmatig vierzijdig prisma	» 0,30.
Een regelmatig vijfzijdig prisma.	» 0,40.
	f 9,00.
Ter verzending wordt een net kistje voor een volledig stel er bijgeleverd voor.	» 0,50.

Een volledig stel, uit ijperen en beukenhout, mathematisch zuiver bewerkt, kost thans, met kist, **negen gulden.** Den vervaardiger, den heer K. J. PAS, meubelmaker alhier, viel de onderscheiding te beurt door de Maatschappij tot Nut van 't Algemeen met eene premie van vijftig gulden, voor het zoo keurig bewerken dezer modellen, vereerd te worden.

figuur A7.2: Een advertentie voor vormleer-modellen van uitgever J.B. Wolters (1865)

Hiermee is het doel en de doelgroep van deze handleiding nog eens duidelijk getypeerd. Overigens had Bouman reeds bij de tweede druk in 1860 van deze kritiek gebruik gemaakt. Dit boek moet, gezien het aantal verbeterde herdrukken, voor de opleiding van de onderwijzers van groot belang geweest zijn. In hoeverre het ook doorgewerkt heeft naar de praktijk van de lagere school is moeilijk vast te stellen.

Bouman had voor de praktijk van de lagere school een aparte leergang ontworpen. Dit zijn de oefeningenreeksen 'De Vormleer (5 en 6), die in 1864 en 1865 voor het eerst uitkomen. Deze boeken hebben veel minder succes gehad dan zijn handleiding. Er waren maar twee oplagen. Toch geven ze een veel beter beeld van wat Bouman nu precies als leerstof voor de lagere school op het oog had. Er zijn twee 'reeksen' (boekjes). De eerste voor de 'hoogste afdeling der aanvangsklasse' of 'de middelklasse eener matig bezochte volksschool' en wel voor 'één uur in de week'. De inhoud van deze reeks betreft de reeds genoemde voorbereidende oefeningen, het meten van lijnen, richting van lijnen en opgaven over hoeken. Vergeleken met dat wat Bouman in de handleiding schrijft, is de omvang van deze leerstof beperkt en het niveau zeer eenvoudig. Het eindniveau kan gekarakteriseerd worden met de eigenschap van de som van de hoeken van een driehoek. Behalve enkele vragen over hoeken in verband met de klok, komen opgaven over de realiteit niet voor. Uit zijn opmerking dat dit programma voor 'scholen met zeer beperkte behoeften' voldoende zou zijn, geeft de status aan die Bouman voor de eenvoudige volksscholen aan het vak toedacht. De vraag dringt zich dan ook op in welke mate de leerlingen toekwamen aan het hogere niveau, dat in de tweede reeks van Boumans oefeningen wordt gepresenteerd.

Deze tweede reeks bestaat uit twee delen: vlakke en ruimtelijke figuren. De inhoud is te karakteriseren als aanschouwelijke elementaire meetkunde. Eigenschappen van vlakke figuren, gelijkvormigheid, oppervlaktebepalingen, tekenen en construeren. Alles steeds op aanschouwelijke grondslag zonder formele bewijzen. Geen formules, geen lengteberekeningen via Pythagoras, geen eigenschappen van de cirkel. De opgaven zijn helder gesteld, ook enkele meer realistische toepassingen, zoals de bepaling van de hoogte van een toren via schaduwmeting. Maar de meeste opgaven zijn interne toepassingen van de meetkunde, zoals: 'Kan een regthoekige driehoek ook evenveel inhoud hebben als een regthoek? Teeken een regth. driehoek en een regthoek, die evenveel inhoud heeft' (Bouman, 1865, p. 27). Didactische aanwijzingen ontbreken. Het boek is louter een opgavenverzameling.

De derde afdeling betreffende de ruimtefiguren bevat hoofdzakelijk vragen over de kenmerken van de verschillende lichamen. Het afbeelden (tekenen) of het maken van uitslagen komt niet voor. Er komen veel telopgaven voor over de samenhang tussen de aantallen vlakken, ribben en hoekpunten van veelvlakken.

Stratemeijer (27) spreekt in zijn handleiding over 'eene leer der vormen'. Hij noemt zowel het formele als het praktische nut als belangrijkste doelen. Onder het

eerste rekent hij 'het nauwkeurig aanschouwen, het vormen van duidelijke begrippen, vergelijking en rangschikking der begrippen en juiste mondelinge uitdrukking'. Ook vermeldt hij nog de waarde van de combinatorische vraagstukken. Het praktische nut moet vooral gevonden worden in het meetkundig rekenen. De aanpak is echter afwijkend van de zuivere vormleerboeken. Met name omdat in de eerste afdeling gestart wordt met de beschouwing van de bekende ruimtefiguren. De lessen zijn in de vorm van een leergesprek tussen onderwijzer en leerling, waarbij het de bedoeling is van concrete modellen gebruik te maken.

In het tweede deel ligt de nadruk vooral op vlakke figuren en op lijnen en hun onderlinge ligging. Bij de ruimtefiguren komen redenaties voor bij het tellen van hoekpunten, ribben en vlakken.

In het derde deel treffen we wat eenvoudige combinatoriek aan, verder de eigenschappen van de driehoek, alsook het hoekbegrip en iets over de cirkel:

> 'Hier heb ik een' driehoek uit papier gesneden. Ik vouw het papier zoodanig, dat het toppunt aan de bazis raakt, en de vouwlijn evenwijdig met de bazis loopt; vervolgens maak ik nog twee vouwen zóó, dat de beide andere hoekpunten aan het eerste raken. De drie hoeken liggen nu naast elkaar en zijn dus, zoo als wij vroeger reeds besproken hebben, te zamen gelijk aan 2 regte hoeken.' (Stratemeijer, 1860, p. 59)

Het vierde deel betreft de oppervlakte- en inhoudsberekeningen. In die gevallen waar de afleidingen van deze formules niet zonder formele middelen kunnen worden gevonden, worden deze soms zonder meer meegedeeld of aan een bijzonder geval verklaard. Er schijnt nog een apart rekenboekje, behorende bij deze handleiding, te hebben bestaan. De handleiding moest binnen één maand na verschijning van de eerste druk al herdrukt worden.

Steyn Parvé was in zijn recensie zeer positief over deze handleiding, vooral omdat hij meende dat ook het formele doel van de vormleer gediend werd en omdat de methode analytisch-synthetisch is. Hij beval het vooral voor plattelandsscholen aan. Mogelijk dat zijn bespreking aan de aanvankelijke populariteit van dit werkje heeft bijgedragen. In 1861 verscheen al een volgende lovende recensie op de tweede herziene druk, mogelijk ook van de hand van Steyn Parvé (*Nieuwe Bijdragen*, 1862, pp. 131-134). In 1862 volgt nogmaals een bespreking (*Nieuwe Bijdragen*, 1862, pp. 1021-1023). Ook de latere drukken werden op positieve wijze gesignaleerd.

Tot slot in deze categorie het boek van De Groot.(12). Deze auteur releveert in zijn inleiding het fiasco van de pestalozziaanse denkoefeningen, die tot een 'bloot formalisme' hebben geleid. Hij meent dat de aanschouwing de grondslag van het onderwijs moet zijn, maar dat voor de verschillende leervakken er zowel naar een goede inhoud als naar een goede leergang gezocht moet worden, hetgeen voor de vormleer nog steeds niet gelukt was. De Groot was door Brugsma opmerkzaam gemaakt op een Duits leerboek van Rückbeil, dat aansloot bij de door hemzelf ontworpen methodiek.[15] Het leerboek lijkt het meest op een leergang elementaire meetkunde op

aanschouwelijke grondslag. Combinatorische en redeneer-telvraagstukken over ruimtelichamen komen niet voor. Wel meten, tekenen, construeren, symmetrie en het zelf maken van modellen. Voor bepaalde onderdelen wordt verwezen naar andere auteurs, zoals De Witte van Citters en Bouman. Soms wordt van empirische methoden gebruik gemaakt. Maar de grondslag van het werk blijft dat de oplossingen via aanschouwelijkheid uitgevoerd moeten kunnen worden, zoals: 'Verander een rechthoekig parallelogram in een driehoek met denzelfden inhoud. Doe hetzelfde met een scheefhoekig parallelogram' (De Groot, 1864, p. 59). Het boek is bestemd voor de middenklas en de hoogste klas van de lagere school. Het schijnt een functie te hebben gehad op een Leerschool die aan de Rijkskweekschool van Groningen verbonden was. In de laagste klas werden daar vooroefeningen gedaan op de vormleer 'naar aanleiding van de Fröbelsche speelgaven'. Hierbij werd ook gebruik gemaakt van de handleiding van De Witte van Citters. De Groot sluit zijn verantwoording af met een pleidooi voor het zelfstandig handelen van de kinderen in de geest van Fröbel, hetgeen voor hem 'nadoen, wat is voorgedaan' betekende. Van dit boek is in 1864 een niet ongunstige bespreking verschenen in de *Nieuwe Bijdragen* van 1864 (pp. 850-854).

Restcategorie

Tot de restcategorie behoren de boeken van Crüts (10), Meurs (17), Swartwolt (28, 29), Meulevelt (16), Hemkes (14), Van der Wilk (31) en het figurenspel van Moll. De eerste drie uitgaven zijn alle opgavenverzamelingen, die van alles wat bieden.[16]

Hemkes (14) heeft naast zijn handleiding een 'leesboekje' over vormleer voor de leerlingen het licht doen zien. Hij stelt in zijn inleiding onder de aanhef 'Lieve Kinderen' het volgende: 'Voor het onderwijs in alle andere vakken bestaan er leer- en leesboeken, maar voor het onderwijs in de vormleer nog niet. Die stof is voor de kinderen nog niet bearbeid. Zoodanig boekje over de vormleer heb ik voor u vervaardigd, en dat bied ik u nu aan. Zult u er een goed gebruik van maken?' (Hemkes, 1861, p. 6). Maar zoals we gezien hebben, waren er in 1858 al andere auteurs, die hun boekjes ook als leerlingenmateriaal bedoeld hadden. Nadere beschouwing leert dat deze uitgave toch meer op een handleiding lijkt dan op een leerboekje voor de kinderen. Er komt geen enkele figuur in voor. Achter in het boek wordt aanbevolen om gebruik te maken van ruimtelijke modellen. En zo is ook de tekst, die met de kubus begint: 'Zij staat hier voor u. Of ik haar onderste boven keer, of haar omdraai, altijd komt zij op dezelfde wijze voor. Hare gedaante is en blijft dezelfde. Dat is niet met alle voorwerpen zo' (Hemkes, 1861, p. 8). Zijn argumentatie voor het vak grijpt terug op: leren opmerken, scherping van het oordeel en een goede hulp voor lezen, schrijven en rekenen, waarmee we weer terug zijn bij de pestalozziaanse trits vorm, woord en getal. Wat dit betreft komt het boekje in zekere zin overeen met zijn eerder besproken handleiding (13).[17]

Het boekje van Van der Wilk (31) is het meest curieuze dat wij op het gebied van de vormleer gevonden hebben. Het behandelt achtereenvolgens: de kleuren, kalender en klok, windrichtingen en iets over punten en lijnen. In de inleiding vertelt de Meester dat hij een 'verblijdende tijding' voor de kinderen heeft, waarover hij met hen praten wil. Waarom dat praten nodig is, beantwoordt hij als volgt: 'Ik zal het u maar zeggen, onthoudt het dan goed! Ons praten heeft ten doel uwe vermogens te vormen en heet daarom *Vormleer*' (Van der Wilk, 1858, p. 6). Er volgen nog enkele stichtelijke woorden over goed en kwaad, waarna genoemde onderwerpen uiterst summier behandeld worden.

Steyn Parvé's oordeel over dit werkje is vernietigend. Hij wijdt er nog vier pagina's aan om de onderwijzer te waarschuwen. De laatste woorden van zijn recensie luiden: 'De Schrijver heeft het getiteld: "Hoe men vormleer *kan* onderwijzen." Dat behoorde te zijn: "Hoe men *vormleer niet moet* onderwijzen," of nog liever, daar het daarin voorkomende eigenlijk geen vormleer is, "Hoe men *niet moet* onderwijzen" ' (Steyn Parvé, 1859, p. 415).

Tot slot nog een enkele opmerking over het 'figuren-spel' dat in 1868 door Moll uit Duitsland, waar het nogal populair was, naar Nederland gehaald werd. Het betreft de aloude Tangram-puzzel.[18] Moll zegt dat dit geen leergang voor de vormleer is, maar er wel bij gebruikt kan worden. Hiermee zouden verstandsontwikkeling en de esthetische ontwikkeling gebaat zijn. Tevens achtte hij het spel een nuttige verstrooiing.

Vergelijkend overzicht

De besproken boeken vormen een zo brede waaier van uitgangspunten, doelstellingen, doelgroepen, niveau, omvang en uitvoering dat een generale vergelijking onmogelijk is.

Bekijken we ze per categorie, dan valt bij de *zuivere vormleer* alleen de slotverzameling vragen in het boek van Hemkes op als een vernieuwend element voor die tijd. Gezien het geringe aantal drukken dat deze boeken haalden, menen we te moeten concluderen dat ze van gering belang geweest zijn.

De *(formele) meetkunde*boeken waren ongeschikt voor de lagere school. De boeken van Semmelink en Moll lijken bruikbaar als voorbereiding op de meetkunde van het middelbaar onderwijs van die tijd. Ook zullen de boeken van Moll, waarbij omvangrijke vraagstukkenverzamelingen behoorden, betekenis voor de studie van de (aankomende) onderwijzer gehad hebben. Voorzover wij hebben kunnen vaststellen, hebben in deze categorie alleen de boeken van Moll een zekere marktpositie gekregen.

Boeken over *meetkundig rekenen* hadden al een zeker marktaandeel. Vanwege de trend de vormleer meer praktisch te maken, zagen verschillende auteurs kennelijk mogelijkheden om dergelijke boeken onder de vlag van de vormleer te laten ver-

schijnen. De meeste van deze boeken waren vraagstukkenverzamelingen, gericht op het kunnen toepassen van vaste methodieken en formules. Tevens werd veel op het metriek stelsel geoefend. Enige didactische vernieuwing op het gebied van het meten hebben wij niet geconstateerd.

Sterk afwijkend waren de boeken in de categorie van het *tekenen*. Het boek van De Witte van Citters was voor die tijd een novum. Maar het behelsde slechts één aspect van de vormleer en het had een sterk methodisch karakter. Mogelijk heeft het zijn invloed op andere auteurs gehad. Bepaald bijzonder was het boek van Bakkes. Hierin werd een sterke nadruk op het esthetische aspect gelegd, maar op elegante wijze werden ook andere aspecten van de vormleer aan de orde gesteld. Het week ook in die zin van de nieuwere trend af dat de stof synthetisch opgebouwd werd. Het boek kan met recht een methode genoemd worden, vanwege zijn strakke indeling en sterk voorschrijvende karakter, waarbij het gebruik van roosterpapier een wat dwingend karakter had. Het boek heeft waarschijnlijk geen grote erkenning gekregen. Misschien dat de prijs (*f* 5,80) daaraan bijgedragen heeft.

Uit de bespreking van de werken uit de *restcategorie* moge duidelijk geworden zijn dat deze boeken ternauwernood van belang waren voor de ontwikkeling van het vak. Zelfs de Tangram-puzzel schijnt niet aangeslagen te zijn.

Van de boeken uit de categorie *praktische vormleer* is dat van Bouman tot hét vormleerboek van de onderzochte periode uitgegroeid. Het geeft de beste verantwoording, een duidelijke opbouw, richt zich op het intern 'praktisch nuttige' en maakt ruim gebruik van aanschouwelijke middelen. De handleiding biedt een brede achtergrond voor de onderwijzer. Ook de boeken voor de leerlingen maken een gedegen indruk. Door de laatstgenoemde boeken werd in zekere zin de omvang voor het vak op de lagere school omschreven. Iets waaraan het in de meeste 'leergangen' ontbrak. De cursus van Stratemeijer maakt een veel minder doorwrochte indruk. De cursus van de Groot lijkt meer op een elementair meetkundeboek voor (aanstaande) onderwijzers dan op een vormleerboek. Alle drie boeken moeten ons inziens hun betekenis en nut gehad hebben in de besproken periode.

De praktische vormleer werd de toonaangevende richting. Door Bouman waren de doelen goed geformuleerd en werd impliciet een voorstel voor de leerstofinhoud bepaald. Hoe dit voor de praktijk van het lager onderwijs heeft uitgepakt, zullen wij in A9 nader onderzoeken, maar eerst gaan we in A8 op de betekenis van de vormleer op de opleidingen in. In het bijzonder zullen we daarbij nagaan in hoeverre daardoor inhoud en didactiek van de lagere school beïnvloed werden.

A8 Opleiding en examens

De wet van 1857: formele veranderingen

Bij de wet van 1857 verdwenen de vier onderwijzersrangen. Daarvoor kwamen in de plaats twee aktes: die van hoofd- en van hulponderwijzer(es).[1] De inspectie diende tweemaal per jaar in iedere provincie de gelegenheid te geven tot het afleggen van de betreffende examens. In de wet werd nu ook een en ander geregeld over de opleiding. De overheid moest tenminste twee *Rijkskweekscholen* oprichten en onderhouden. Daarnaast werden aan een aantal 'der meest voortreffelijke scholen' de zogenoemde *rijksnormaallessen* ingericht. Ten slotte bleef voor geselecteerde schoolhoofden de mogelijkheid bestaan om ook in de praktijk kwekelingen op te leiden; dit waren de zogenoemde *opleidingsklassen*.[2] De eisen voor de akten waren beknopt in de wet beschreven. In 1865 werden bij Koninklijk Besluit 'programmata' vastgesteld, waarvan de inhoud de wettelijke leerstof voor het lager onderwijs dekte onder toevoeging van een pedagogisch-didactische component.[3]

De grootte van de klassen kon teruggebracht worden door het aanstellen van kwekelingen en hulponderwijzers. Aan de inspectie, welke nader geregeld werd, werd de eis gesteld de kwaliteit van het onderwijs nauwgezet te bewaken.

Vormleer in de opleiding

Op alle drie Rijksopleidingen, te Haarlem, Groningen en 's-Hertogenbosch, stond in 1861 vormleer voor alle studiejaren op het rooster. In Haarlem en Den Bosch voor één uur per week in alle studiejaren, in Groningen voor twee uur per week in het eerste en tweede studiejaar (het vierde studiejaar was nog niet gestart). In Den Bosch werd vanaf het tweede jaar twee uur per week 'meetkunst' gegeven, in Haarlem stond dit vak voor één uur in het derde jaar op het rooster en in Groningen vanaf het derde jaar voor twee uur per week.[4] In het programma van 1872 te Haarlem had vormleer een heel bescheiden rol: één lesuur per twee weken, alleen gedurende het eerste studiejaar. Voor meetkunde daarentegen stonden respectievelijk één, twee, anderhalf en anderhalf uur voor de opvolgende studiejaren gepland (*De Wekker* 1872, *29*(44)). Op de boekenlijst komt geen vormleerboek voor, wel een aantal in die tijd veelgebruikte leerboeken voor meetkunde, waaronder zelfs de *Beginselen der nieuwere meetkunde* van J. Versluys.[5] Al direct bij de start van de nieuwe rijksopleidingen constateren we een groot verschil in het onderwijsaanbod voor vormleer en meetkunde. Van rijkswege waren er geen uniforme programma's vastgesteld, iets wat men voor de in 1863 gestarte HBS wel gedaan had. Dit gemis aan een duidelijke richtlijn heeft waarschijnlijk tot nogal divergente opvattingen geleid over de vormleer in de opleiding. We geven hiervan nog enkele voorbeelden.

Bij de normaalopleidingen in Groningen dienden de kwekelingen eerst een voorbereidende cursus in vormleer te volgen alvorens tot de verdere opleiding te kunnen

worden toegelaten. Deze cursus sloot nauw aan bij het vormleeronderwijs van de hoogste klas van de lagere school. Daarna werd pas de meetkunde aan de orde gesteld. Hierin zien we de hand van een aantal Groningse voorstanders van de vormleer: De Groot, Brugsma en Gleuns (*Weekblad* 1865, *4*(15)).[6]

Het lesrooster van de Kweekschool van Onderwijzeressen te Arnhem telde voor de cursus 1871-1872 één wekelijks lesuur voor vormleer gedurende alle studiejaren.[7]

In Utrecht vermeldde het lesrooster van de 'Leerschool voor aankomende Onderwijzers' voor de cursus 1876-1877 drie wekelijkse uren 'Rekenen en Vormleer' voor het eerste en het tweede studiejaar, twee uren en één wekelijks uur respectievelijk voor het derde en het vierde studiejaar.

Vormleer op de akte-examens

We bepalen ons nu tot de akte-examens voor de onderwijzers in deze periode om een indruk te krijgen van omvang, aard en diepgang van de vormleer in de opleiding.[8] Ten aanzien van de eisen voor de onderwijzer stond in de wet slechts dat 'beginselen van de vormleer' werden gevorderd (artikel 44, Wet van 1857). In de programmata voor de examens van onderwijzers van 1858 vinden we als toelichting hierop: 'Kennis der regte lijnen en der regtlijnige vlakke figuren, gepaard met bedrevenheid in het mededeelen dezer kennis aan kinderen'. Aan de hand van een aantal verslagen van de provinciale aktenexamens uit het jaar 1864 zullen we nu onderzoeken hoe deze eis op de examens geëffectueerd werd. Van de tien gevonden verslagen geven vijf een negatief tot zeer negatief beeld (Groningen, Friesland, Noord-Holland, Utrecht en Limburg), twee zijn aarzelend van toon (Zuid-Holland en Zeeland) en drie wat optimistischer over de resultaten (Overijssel, Drente en Zeeland).[9] In Drente was de vormleer gebruikt om over breuken te vragen en over derdemachtswortel-trekking, hetgeen 'naar wensch uitgevallen' was. In Overijssel werd geconstateerd dat er meer 'van Aanschouwing' uitgegaan werd. In Zeeland werd ook verbetering vermeld, maar 'Sommigen (...) verloren – wat bij de vormleer de hoofdzaak is – orde en regelmaat uit het oog'. In Gelderland klaagde de commissie dat de kandidaten tekort schoten in 'de noodige vaardigheid om de vlakke en ligchamelijke figuren op het zwarte bord te tekenen'. De commissie van Zuid-Holland noemde het examen in de vormleer 'ditmaal vrij bevredigend', maar het was nog niet mogelijk 'die mate van kennis van de candidaten te vorderen, die eigenlijk vereischt moet worden'. In Limburg werd geklaagd dat het merendeel der kandidaten zich 'uitsluitend met de ligchamen onledig gehouden' had. Noord-Holland: 'meestal onvoldoende kennis' (...) 'geen juist begrip van het doel der vormleer' (...) 'onjuiste definitiën' (...) en onkunde over het 'aantal diagonalen in de veelhoeken', 'berekenen der kantlijnen' en 'inhouden der vlakken en ligchamen'. Friesland klaagde over onbegrip van 'aard en het doel van dit leervak'. Het verslag van Groningen laat zien dat er zowel schrifte-

lijk als mondeling werd geexamineerd. De schriftelijke opgaven voor de adspirant-hoofdonderwijzers aldaar luidden:

> 'Onder welke algemeene hoofdgroepen zoudt gij de verschillende vlakke en ligchamelijke figuren rangschikken? Als van een cubus de zijde gegeven is =a, hoe vindt men dan de oppervlakte en de inhoud? Hoe drukt men de zijde en de inhoud uit, als de oppervlakte =a is? Hoe de zijde en de oppervlakte, als de inhoud =a is gegeven?' (*De Wekker* 1865, *22*(9))

De adspirant-hulponderwijzers moesten 'een overzigt geven van de verschillende vormen waaronder de vierhoeken kunnen voorkomen en van de wijze waarop men ze gewoon is te verdeelen, een regelmatigen zeshoek tekenen en daarin de verschillende diagonalen, en zeggen in welke figuren daardoor de zeshoek verdeeld wordt' (*De Wekker* 1865, *22*(9)). In het verslag werd gesteld: 'Men heeft bepalingen van buiten geleerd, zonder de zaken behoorlijk te kunnen vergelijken en onderscheiden (...). Velen schijnen naar het gevoelen der commissie, den aard en het doel der vormleer nog niet regt te vatten (...). De vormleer moet (...) eene eenvoudige en aanschouwelijke meetkunde zijn' (*De Wekker* 1865, *22*(9)).

Het verslag van Utrecht begint als volgt: 'Dit vak, voor zoo ver het een vak heeten mag, levert van alle het minst bemoedigend resultaat op. Bij het groote verschil van opvatting, dat omtrent de beteekenis van het woord *vormleer* bestaat, werd aan de candidaten doorgaans gevraagd, welke handleiding zij gebruikt hadden, die dan in de regel bleek het werkje van Stratemeijer of dat van Bouman te zijn.' Ondanks het feit dat men binnen de stof van de exameneisen en van deze boeken bleef, waren de resultaten slecht, aldus het verslag. 'Voor eenvoudige vragen, als bij voorbeeld: wat is een regte hoek? Hoe kan die met een blad papier gevouwen worden? Wat is een ruit? Waarom wordt een parallelogram door een diagonaal in twee gelijke en gelijkvormige driehoeken verdeeld? stonden de meesten stil' (...). 'In geen vak is zoo weinig vooruitgang merkbaar als in dit' (*De Wekker* 1865, *22*(2)).

Deze verslagen over de aktenexamens uit 1864 maken in ieder geval duidelijk hoe de examinatoren over de vormleer dachten. Ook hier weer onduidelijkheid, immers enkele commissies gaven weliswaar een omschrijving van aard en doel van het vak, maar deze waren niet eensluidend. Dat de boeken van Bouman en Stratemeijer toonaangevend waren, wordt hier bevestigd.

Hoewel aard en soort van de vragen nogal uiteenlopen, kan uit de opgaven wel iets over het niveau afgeleid worden. Dit was, gezien de moeilijkheid van de gestelde problemen, bepaald niet hoog. Het is lastig vast te stellen in hoeverre er ook didactisch-methodische vragen aan de orde kwamen. Hoe het ook zij, de resultaten van de kandidaten waren zwak.

In het *Weekblad* verschenen in diezelfde tijd ook een aantal van deze verslagen. De redactie van dat blad publiceerde een 'nalezing' van deze verslagen, waarbij zij tot een aantal analoge conclusies komt:

> 'Zoo er een der vakken van lager onderwijs is, over welks juiste beteekenis men het alles behalve eens is, dan is het zonder twijfel de vormleer. De verschillende verslagen dragen de duidelijkste sporen daarvan. (...) 't is ook duidelijk op te maken, dat de eischen niet dezelfde zijn. (...) gewenscht (is) òf wijziging van het programma òf openbaarmaking van een algemeen aangenomen maatstaf.' (*Weekblad* 1865, *4*(10))

Opnieuw kwam er in 1865 een wijziging in de 'programmata' van 1858, waarbij nu ten aanzien van de vormleer voor de hulponderwijzer(es) de volgende exameneisen geformuleerd werden: 'Kennis der eenvoudigste meetkundige ligchamen en der regtlijnige figuren, gepaard met de bedrevenheid in het mededelen van deze kennis aan kinderen'. Deze eisen golden vanaf toen ook voor de hoofdonderwijzeres, terwijl van de hoofdonderwijzer geëist werd: 'Kennis van meetkundige ligchamen en van de regt- en kromlijnige figuren, gepaard met bedrevenheid in het mededelen van die kennis aan kinderen' (*De Wekker* 1865, *22*(40)). Het verschil in eisen voor de beide akten was strikt genomen miniem. Interessant is echter de vraag hoe dergelijke algemene omschrijvingen in de praktijk van de examens hun beslag kregen.

Vergelijkende examens en vormleerkarakteristieken

De opgaven van de zogenoemde vergelijkende examens, waaraan de sollicitanten voor een betrekking deel dienden te nemen, bieden de mogelijkheid om hier enig zicht op te krijgen. Onderzoek van het tijdschrift *De Wekker* tussen 1858 tot 1875 leverde in totaal 164 van dergelijke examens op, waarvan er 116 schriftelijke vormleeropgaven bevatten, al met al ruim tweehonderd vraagstukken (zie bijlage A-I).[10] Deze examens leken ons daarom ook zo interessant, omdat verwacht zou kunnen worden dat daarbij ook naar de didactiek en opvattingen over vormleer gevraagd zou worden.

De examens zijn zeer ongelijk, zowel wat de moeilijkheid, de omvang, de stof als de aard van de opgaven betreft. Om enige greep op de aard van de opgaven te kunnen krijgen, hebben we de opgaven geanalyseerd naar de volgende karakteristieken:

combinatoriek (**co**); aanschouwelijke meetkunde (**am**); didactiek/methodiek (**dm**); oppervlakteveranderingen (**ov**); inhouds/oppervlakteformules (**io**); technisch rekenen (**tr**); construeren en tekenen (**ct**); metriek (**me**); formele meetkunde (**fm**); redeneren (**re**) en natuurkunde (**na**).

Van de *combinatoriek* hebben we in het voorgaande al veel voorbeelden gezien. Onder de *oppervlakteveranderingen* verstaan we vraagstukken waarbij een vlakke figuur omgezet dient te worden in een andere onder behoud van oppervlakte, een bekend onderdeel van de traditionele planimetrie. Het *technische rekenen* betreft het (algebraïsch) kunnen manipuleren met formules en komt meestal voor in samenhang

met inhouds- en oppervlakteberekeningen en met formele meetkunde. *Construeren en tekenen* komt vooral tot uiting bij het tekenen van netwerken van ruimtefiguren. *Metriek* betekent het kunnen rekenen met het metrieke stelsel. *Redeneren* komt bijvoorbeeld aan bod bij het bepalen van het aantal ribben van een ruimtelichaam op grond van de gegevens over de zijvlakken. Formeel logische redeneringen komen niet voor. Onder *aanschouwelijke meetkunde* verstaan we het oplossen van meetkundige problemen op grond van aanschouwelijke evidenties. *Formele meetkunde* vinden we in die opgaven, waarbij gebruik gemaakt wordt van de stellingen uit een systematische (euclidische) opbouw van de planimetrie en stereometrie. De verschillende opvattingen over vormleer werden zo op zich weer tot examenstof verheven. Ook natuurkundevraagstukjes over soortelijk gewicht en de stelling van Archimedes werden wel onder het hoofdstuk vormleer geplaatst.[11]

Meer formele meetkunde

De procentuele aandelen van de verschillende karakteristieken over deze periode (1858-1875) zijn:

na	co	ov	re	dm	me	ct	am	tr	fm	io
3%	5%	5%	5%	7%	7%	10%	10%	15%	16%	17%

De karakteristieken fm (16%), io (17%), tr (15%) en ov (5%) hebben alle de kenmerken van een formele meetkundeaanpak.[12] Typische vormleerkarakteristieken zijn re (5%), ct (10%), en am (10%). We constateren in deze examens dus een duidelijk overwicht van de meer formele kanten van de vormleer.

De lijst is echter nog veel sprekender wanneer we bepaalde karakteristieken door de tijd heen beschouwen. Rond het midden van de jaren zestig zijn de combinatorische opgaven vrijwel geheel verdwenen uit de examens. Verder valt het geringe aantal methodisch/didactische vragen op. Wij hebben geen inzicht kunnen krijgen of en in hoeverre dit aspect op de mondelinge examens aan de orde gesteld werd. Een opvallend gegeven is dat vanaf de jaren zeventig het beeld van de vormleerexamens vrijwel geheel door de formele meetkundeopgaven (fm, io, ov en tr) beheerst wordt. Het construeren en tekenen, een typische vormleerkarakteristiek, is rond de jaren zeventig tamelijk in zwang, maar krijgt daarna weer minder aandacht. Het aanschouwelijke element (am) wordt wel regelmatig gesignaleerd, maar is toch gering in vergelijking met de formele meetkundeaanpak.

Bovendien blijken deze examens vaak in hun totaliteit een bepaalde richting te vertegenwoordigen. Wanneer er aanschouwelijke meetkundeopgaven voorkomen, dan is vrijwel altijd het gehele examen van zodanige aard. Ook worden dan opgaven met een ct- en/of re-karakteristiek aangetroffen. Tellen we voor de periode 1870-

1875 de karakteristieken, dan vinden we: fm (25%), tr (22%), io (20%) en ov (4%). Voor de karakteristieken am, re en ct wordt dan slechts 15% gevonden.

De lijst vertoont nogal wat witte vlekken, zowel in geografische spreiding als naar spreiding in de tijd. Desondanks menen wij een bevestiging te zien van wat vermoed kon worden: *de opgaven over vormleer voor de vergelijkende examens in de periode van 1858 tot 1875 tenderen steeds meer naar formele meetkundeopgaven.* Het argument van Bouman, dat vormleer een praktisch vak moest worden, werd kennelijk vertaald in het kunnen toepassen van inhouds- en oppervlakteformules en het maken van formele planimetrieopgaven. Hiermee werd de vormleer echter gedegradeerd tot een routinematige sommenmakerij. De vraag naar meer toepasbaarheid leidde tot opgaven waarbij vaardigheid in het metriek stelsel werd vereist.

Een verdere verklaring van deze wending zou gezocht kunnen worden in het feit dat het ontwerpen van opgaven over aanschouwelijke meetkunde en haar toepassingen niet zo'n eenvoudige zaak was. De bestaande leerboeken boden op dit punt weinig houvast. Werd er al aanschouwelijke meetkunde gevraagd, dan viel men veelal op enkele geijkte onderwerpen terug. Meerdere malen komen we de vraag tegen om de stelling van Pythagoras op aanschouwelijke wijze te bewijzen. Werkelijk realistische opdrachten zijn wij in deze verzameling niet tegengekomen.

De tendens van deze examens heeft weer haar invloed gehad op de opvattingen van de onderwijzers over vormleer als leervak voor de lagere school. Dit wordt bevestigd door menig auteur uit die tijd, die zich in de discussies over de vormleer mengde.

Invloed examens op het schoolprogramma

In het uiterst serieuze tijdschrift voor Volksopvoeding en Volksonderwijs *De Schoolbode* verscheen in 1872 een artikel van ene 'S.' uit Amsterdam onder de titel 'Hoe moet het onderwijs in de beginselen der vormleer op de lagere school worden opgevat?' Op dit belangwekkende artikel komen we in hoofdstuk A9 nog terug. Nu citeren we uit de slotfrasen van 'S', die verwijst naar een vergelijkend examen te Zwolle:

> 'Het is den onderwijzer, die, om in vormleer aan de eischen der examineerende commissie te voldoen, stereometrische vraagstukken moet oplossen, niet euvel te duiden, indien hij op zijne beurt de bij het examen als het ware geoctroyeerde valsche begrippen op de school bij zijne leerlingen in practijk brengt.' ('S',1872, p. 313)

De redactie van het tijdschrift, waarin onder meer Bouman, Gleuns en De Groot zitting hebben, beaamt dit in een kort naschrift. Het door 'S.' bedoelde vergelijkende examen te Zwolle zou dat van 1870 geweest kunnen zijn, dat door ons gekarakteriseerd is met io, tr en fm.[13]

Voor de periode 1871-1876 hebben wij van de aktenexamens voor hoofd- en hulponderwijzers in de provincie Overijssel 42 opgaven over vormleer gevonden.

Het zijn alle typen zoals hiervoor geciteerd. De moeilijkheidsgraad voor hulp- of hoofdonderwijzer verschilt nauwelijks.

Ook uit andere hoek blijkt de trend naar formele meetkunde. Onder de schriftelijke opgaven voor rekenkunde voor het hoofdonderwijzersexamen in Zuid-Holland (april 1872) komt het volgende vraagstuk voor: 'Van een afgekn. rechten kegel is de hoogte 12 c.M., de lijn die de meest verwijderde punten van grond- en bovenvlak vereenigt 20 c. M. en de schuine zijde 13 c.M. Bereken den inhoud.' Ene 'B.' geeft in een ingezonden brief in *De Wekker* een verhelderend commentaar op dit vraagstuk. Allereerst verbaast hij zich over het feit dat dit zogenaamde vormleervraagstuk onder rekenkunde wordt geplaatst. Dan vervolgt hij met zijn opvatting over dit vak:

> 'Ik ben verscheidene jaren bij het l.o. werkzaam en o.a. ook in de vormleer geëxamineerd; ('t was nog al zonderlinge *vorm*leer, dat herinner ik me) maar ik ben nog niet zoover gekomen dat ik weet wat het is. Ik schaam me er ook niet voor; want te oordeelen naar 't geen ik zoo al eens hoorde bij 't afnemen der examens in dat vak, zijn er zelfs examinatoren die er geen raad mee weten. Meestal houdt men het, dat is mijne ondervinding althans, voor zoo'n *beetje meetkunde*, waarbij het op grondigheid niet zooveel aankomt.' ('B' in *De Wekker* 1872, *29*(37))

Daarna zegt 'B.' dat er volgens de wet geen stereometrie van de kandidaat-hoofdonderwijzer gevraagd mag worden. Letterlijk genomen heeft hij daar wellicht gelijk in, maar de programma-omschrijving spreekt wel over 'kennis der eenvoudigste ligchamen'. Hoe nuttig en nodig hij de studie van de wiskunde voor de onderwijzer ook acht, toch meent hij dat men de onderwijzer op 'een geheel verkeerden weg' brengt door hem 'van buiten (te laten) leeren in plaats van begrijpen'. En in zijn slotwoord stelt hij:

> 'Het ware te wenschen dat men spoedig algemeen wist, waaraan men zich met die vormleer te houden had. 't Is nu m.i. een rommeltje. (Passez-moi le mot). 't Wijste zou wel zijn, dat men er de beginselen van meet- en stelkunde voor in de plaats bracht.' ('B' in *De Wekker* 1872, *29*(37))

Uit het voorgaande is duidelijk geworden dat de opleidingen geen beslissende rol hebben kunnen spelen in een mogelijke verankering van de vormleer in het onderwijs. Wel blijkt dat de exameneisen, zowel voor de rangexamens als de vergelijkende examens, geen nieuw licht wierpen op dit vak, mogelijk zelfs het idee versterkt hebben dat het maar 'zo'n beetje meetkunde' was. Dit had natuurlijk weer zijn doorwerking op de opvattingen van inhoud en doel van de vormleer op de lagere school.

Hoe de voortgaande discussie zich in deze periode verder voltrok, zullen we in A10 aan de orde stellen. Eerst echter willen we in A9 globaal de praktijk van het onderwijs in de vormleer op de lagere school voor deze periode aan een onderzoek onderwerpen.

A9 Schoolpraktijk (na 1858)

Kwaliteit van het lager onderwijs

Over de kwaliteit van het onderwijs werd in de jaren na 1857 (misschien is dit wel een constant gegeven) veel geklaagd. In ieder geval was er in die jaren een groot gebrek aan hulponderwijzers, waardoor er veel kwekelingen voor de vaak nog te grote klassen stonden, hetgeen de kwaliteit niet bevorderde.[1]

In verband met de klachten over de kwaliteit van het onderwijs had het Nederlandsch Onderwijzers Genootschap (NOG) in 1865 een onderzoek uitgevoerd. In het bijzonder wilde men weten in hoeverre er leemten en problemen zaten in de wet van 1857. De uitslag van deze enquête werd onder de titel 'Paedagogisch Verslag aangaande den toestand van het Onderwijs' in het maandblad van het NOG van 1866 gepubliceerd. De uitkomsten waren bepaald niet rooskleurig.

Tijdens de debatten in de Tweede Kamer in 1871 over de Staatsbegroting gaf Antony Moens (1827-1899) enkele saillante voorbeelden van het 'gemis van de allereerste kundigheden welke op de school worden onderwezen'.[2] Ook in *De Wekker* treffen we bij herhaling artikelen over deze kwestie aan (Hemkes, 1871; Van Everdingen, 1874).

Deze pessimistische waarderingen werden door degenen die voor verdere verbeteringen streden wellicht wat overtrokken. Immers, er tekenden zich in die tijd ook ontwikkelingen af die iets afspiegelen van de 'langzame vooruitgang', zoals jaar na jaar door de overheid werd geformuleerd in haar algemene *Regeringsverslagen over de Staat van het Onderwijs*. Een voorbeeld daarvan vinden we in het verbeterend alfabetisme. Zo bleek in Amsterdam in 1860 8% van de mannen en 20% van de vrouwen nog analfabeet, terwijl deze cijfers in 1871 respectievelijk 4% en 7% waren.[3] Uiteraard waren ook economische en maatschappelijke factoren van invloed op de verbetering van het onderwijs. Zelfs de befaamde schoolstrijd heeft hierbij een positieve invloed gehad.[4]

Vanuit een huidig standpunt bezien, is het onbegrijpelijk dat de overheid met de wet van 1857 in één klap zowel een aantal organisatorische als inhoudelijke veranderingen wilde doorvoeren. Tot dan toe was de inhoud van het onderwijs hoofdzakelijk beperkt tot de elementaire vaardigheden als lezen, schrijven en rekenen. Naast 'de beginselen der vormleer', dat als een hoofdvak voor de lagere school gedecreteerd werd, moesten nu ook aardrijkskunde, geschiedenis, kennis der natuur en zingen tot het minimumpakket gerekend worden. Bedenken we dat later in deze periode ook nog eens de spellingshervorming van De Vries en Te Winkel aan de orde kwam, dan kan de zorg om de kwaliteitsverbetering wel begrepen worden.

Omvang en opvattingen

Met de verplichtstelling van de vormleer kregen nu ook veel jongere onderwijzers te maken, die dit vak noch uit hun eigen schooltijd noch van hun opleiding kenden.

De oudere onderwijzers moesten zich opnieuw oriënteren op de nieuwe inzichten en de aangeboden leerboeken. De overheid nam geen enkel initiatief om een dergelijke innovatieve actie te ondersteunen of te begeleiden. Ook over de omvang en de diepgang van het vak was niets in de wet geregeld. Er werd kennelijk vertrouwd op de inspecteurs en de hun toevertrouwde onderwijzersgezelschappen.[5] Het was echter wel een verschil of men onder de inspectie van De Witte van Citters of onder die van Gleuns viel, beiden voorstanders van de vormleer, maar met sterk verschillende opvattingen. De meeste inspecteurs waren echter geen vakmensen op dit gebied en moesten hun kennis afleiden uit de literatuur.

Uit de enquête van het NOG blijkt dat van het gemiddelde aantal van 25 lesuren per week er 15 aan lezen, schrijven en rekenen worden besteed, $2\frac{1}{2}$ aan taalkunde, 2 aan aardrijkskunde en geschiedenis ieder, en aan kennis der natuur, vormleer en zang elk één uur. Uit dit onderzoek komt ook naar voren dat de didactisch-methodische problemen voor de basisvakken lezen, schrijven en rekenen nog zeer groot en voor de onderwijzer veel urgenter waren dan invoering van het vak vormleer. Op de vraag welke leervakken bijzondere moeilijkheden opriepen, werd unaniem de vormleer genoemd (Bloem, 1866, p. 95). Kortom, de omstandigheden voor een succesvolle innovatie van de vormleer waren in feite miserabel.

Laten we een gerenommeerd onderwijzer en opleider uit die tijd als A.L. Boeser (1821-1885) eens aan het woord laten.[6] In *De Nederlandsche Paedagoog* haalt Boeser in 1858 al fel uit naar de vormleer. Hij noemt dit nieuwe vak samen met de zinsontleding van Roorda 'de rustverstoorders van onze aankomende onderwijzers' (Boeser, 1858, p. 217). Hij wijst op de overlading van het programma voor de lagere school, maar tevens op het feit dat de 'quantiteit en qualiteit' van de vormleer niet voorgeschreven zijn. Hij adviseert alleen in de laagste klasse iets van vormleer op te nemen en wel onder de aanschouwingsoefeningen. In 1875 komt Boeser nog eens terug op deze kwestie in een artikel, waarbij hij middelen aan de hand doet om de kwaliteit van het onderwijs te verhogen. Zijn standpunt betreffende de vormleer, die hij nu als de 'cauchemar' van veel onderwijzers omschrijft, is ongewijzigd gebleven.

Vormleer diende echter op de 'tabel der werkzaamheden' te staan. Daarmee had een inspecteur in ieder geval een criterium ter beoordeling van het onderwijsaanbod. Een voorbeeld van een proeve van een lesrooster uit 1878 maakt duidelijk dat er voor de middelste klasse en voor de hoogste klasse beide tweemaal een half uur voor vormleer werd uitgetrokken. In de laagste klasse stond vormleer niet op het rooster en aan meisjes werd gedurende de vormleeruren handwerken gegeven (Magielse, 1878).

Men had kennelijk veel vrijheid ten aanzien van de omvang van het vak. Maar vooral inhoudelijk kon men er alle kanten mee op. Zo verhaalt Boeser in het eerder geciteerde artikel dat 'een achtingwaardig onderwijzer' in de vormleerlessen toegekomen was aan de behandeling van het geluid. En dat hij elk onderwerp kon kiezen

binnen dit vak als het maar aanleiding gaf tot *vormen* of *ontwikkelen*; in het woord 'vormleer' lag het doel immers vervat (!). Uiteraard zal niet overal een dergelijk vrije interpretatie gehanteerd zijn, maar de aanwijzingen dat men zowel het vrije tekenen als ene uiterste als formele meetkunde als andere uiterste onder de vormleervlag behandelde, zijn legio. Dat er ook serieus en strikt met de verplichtstelling werd omgegaan, moge blijken uit het studieprogramma dat T.H. de Beer, later één van de hoofdmedewerkers van *Het Schoolblad*, in 1865 bij de organisatiebeschrijving van zijn school voegt. Het is een voorbeeld van een rooster dat de vormleer in alle jaren een plaats toekent, zij het dat de eisen in vergelijking met de overige vakken miniem zijn.[7]

Regeringsverslagen

Om een nadere indruk te krijgen van de kwaliteit van het lager onderwijs en in het bijzonder van de vormleer, hebben wij alle regeringsverslagen over de periode 1858-1878 bestudeerd. Weliswaar zijn deze verslagen extracten van extracten – ze werden samengesteld op grond van rapportages van de inspecteurs in de provincie, waaruit weer de provinciale verslagen werden opgesteld – toch hebben we hiermee over deze periode van twintig jaar een uniform toetsingsmiddel in handen. Door de eenvormigheid van de verslagen zijn we in staat een globale vergelijking te maken met de pro-of regressie voor de basisvakken taal en rekenen en vormleer. Tot 1863 zijn deze verslagen nog gespecificeerd per provincie. Deze verslagen hebben we per jaar en per provincie vergeleken op de onderdelen lezen, schrijven, rekenen, hoofdrekenen, vormleer en Nederlandse taal (spelling, ontleden en stellen), waarvan de resultaten zijn opgenomen in bijlage A-II.[8]

Vanaf 1863 heeft het regeringsverslag een vaste beschrijvingswijze. Voor de vakken lezen, schrijven, rekenen, Nederlandse taal en vormleer hebben wij daarvan een tabel gemaakt (zie figuur A9.1).

In het merendeel der beoordelingen worden zowel positieve als negatieve punten over het betreffende vak genoemd; deze hebben we met ± aangeduid. Meestal worden dan een aantal voorbeelden van scholen genoemd waar volledig tegengestelde resultaten worden gescoord. Zo lezen we in het verslag van 1870:

> 'Aan sommige scholen werd de vormleer met veel lust en ijver beoefend en bleek dit leervak een zeer geschikt middel tot ontwikkeling van het denkvermogen der leerlingen; aan vele andere scholen werd het echter nog op minder doelmatige wijze behandeld en droeg het dan ook weinig vruchten. Dit laatste viel inzonderheid op te merken waar het eigenlijk doel der vormleer, als leervak der school, door den onderwijzer minder juist werd begrepen en daardoor nog niet de regte methode gevolgd.'
> (Regeringsverslag, 1870)

Hoewel slechts *sommige* scholen er goed afkomen tegen *vele* slecht, hebben wij deze kwalificatie toch met ± gehonoreerd, daar er een positieve opwekking in doorklinkt.

	Le	Sc	Re	Nt	Vo	Opm Vormleer
1863	±	+	±	–	±	onk. ond./div.opv.
1864	±	±	±	±	±	onk. ond./gebr. modellen
1965	±	±	–	±	–	onk. ond./verzet ouders
1866	±	±	–	±	±	onk. ond./bijz. scholen slechter
1867	±	–	+		–	misnoegen leerll.
1868	±	±	±	+	±	relatie met rekenen
1869	±	+	+	+	±	te lastige leerstof
1870	+	+	±	±	±	onk. ond.
1871	+	±	+	+	±	onk. ond.
1872	+	+	±	+	–	elem. mtk./ mech. ond.
1873	±	+	±	±	±	onk. ond./ meer int.
1874	±	±	±	±	–	tijdgebrek/ mech. ond.
1875	–	±	+	+	–	div. opv./hoofddoel: waarn. en weerg.
1876	±	±	±	±	–	mech. ond.
1877	±	±	±	±	–	hoofddoel: eenv. red. en rek.

figuur A9.1: Regeringsverslagen: beoordeling niveau van het onderwijs

Ook in die gevallen waar men naar de situatie van een jaar eerder verwijst (geen verandering) is ± genoteerd. In geval van een negatieve beoordeling in zijn totaliteit hebben we een 'min (–)' toegekend en slechts wanneer de beoordeling in alle opzichten 'positief' luidt, is een + genoteerd. Een positieve beoordeling betekent in feite een (kleine) verbetering ten opzichte van de bestaande situatie. De tabel overziend, constateren we voor lezen, schrijven, rekenen en Nederlandse taal een voortdurende 'langzame verbetering'. De beoordelingen voor de vormleer worden echter in de loop der tijd steeds slechter.

Onder de 'opmerkingen over de vormleer' in de laatste kolom staan telkens de meest saillante opmerkingen uit het betreffende verslag. Hieruit wordt duidelijk dat de *onkunde van de onderwijzer* (onk. ond.) als belangrijkste oorzaak van de falende innovatie wordt aangewezen. Hiermee samenhangend wordt ook de *diversiteit van*

opvattingen (div. opv.) genoemd. Aanvankelijk zijn deze opmerkingen min of meer constaterend, later meer normatief wanneer in de verslagen van 1875 en 1877 naar het hoofddoel wordt verwezen. In 1875 luidt dit 'juist zien en onderscheiden en nauwkeurig weergeven', terwijl het in 1877 gaat om 'eenvoudige redeneringen en juiste berekeningen'. In de jaren 1858-1862 heette het doel voornamelijk 'ontwikkelend' te zijn. De overheid zelf was dus ook bepaald niet consistent in haar opvatting over de vormleer. Maar dat kan ook haast niet anders, als we aan de verschillende zienswijzen van sommige inspecteurs denken.

Verder worden het verzet van de ouders, het misnoegen van de leerlingen, tijdgebrek, gebrek aan en/of verkeerd gebruik van de meetkundige modellen en een verkeerde methodiek (mechanisme) als remmende factoren voor een goede invoering te berde gebracht. Wat het laatste betreft: herhaaldelijk komt in de algemene, maar ook in de meer nabije verslagen de kritiek naar voren dat de vormleer blijft steken in het opzeggen van van buiten geleerde definities en/of stellingen. Interessant is ten slotte dat in de regeringsverslagen de boeken van Bouman en Stratemeijer als de meest gebruikte worden genoemd. De beschikbaarheid van goede handleidingen en boeken gaf kennelijk geen garantie voor een geslaagde implementatie.

A10 Discussies (1858-1878)

Tijdschriften

De discussies over vormleer gedurende de periode 1858-1878 vonden voornamelijk plaats in de volgende tijdschriften: *De Wekker*, *Het Schoolblad*, het *Weekblad*, de *Nieuwe Bijdragen*, *De Schoolbode*, *De Nederlandsche Paedagoog*, *De Oefenschool* en het *Maandblad van het NOG*. Hiervan waren *De Wekker* en *Het Schoolblad* algemene onderwijsweekbladen (vanaf een bepaald moment zelfs tweemaal per week), beide vooral gericht op het lager onderwijs. Het *Weekblad* was vooral voor het middelbaar en hoger onderwijs bedoeld. Met name in de twee eerstgenoemde bladen zijn een aantal voor ons belangrijke artikelen over de vormleer verschenen. Het aloude maandblad *Nieuwe Bijdragen*, dat in 1877 opging in *De Wekker*, bleek al eerder een interessante bron voor ons onderzoek.[1] In *De Schoolbode*, waarvan H. Bouman redacteur was, verschenen ook enkele belangrijke artikelen over de vormleer. Van iets minder belang zijn de overige genoemde bladen.[2]

Wat, waarom, hoe?

De kernvragen in de vaak verwarrende discussie over de vormleer waren door de tijden heen eigenlijk steeds dezelfde: 'wat, waarom en hoe?'.

- *Wat* diende eigenlijk onder vormleer verstaan te worden? Een vraag, die vooral door de onderwijzers gesteld werd, maar waarvan het antwoord ook voor opleiders, boekenschrijvers, inspecteurs, politici en beleidsmakers van groot belang was.
- *Hoe* moest het vak gegeven worden? Moest de nadruk op het vormende of op het materiële aspect liggen? Moest de omvang zich beperken tot de laagste klassen, alleen tot de hoogste of voor de hele lagere school gelden? Was het een vak alleen voor jongens of zouden ook meisjes er profijt van kunnen trekken?
- *Waarom* eigenlijk dit nieuwe vak? Kon de vormende waarde van taal of hoofdrekenen niet minstens even groot zijn? Was het niet veel belangrijker de kinderen allereerst te leren lezen en schrijven? Waarom vormleer als voorbereiding op de meetkunde van het middelbaar onderwijs als nog maar enkele leerlingen daartoe uitverkoren waren?

Zeker is dat de weerzin bij de leerlingen, de ouders en veel onderwijzers groot was. Daarbij werden omschrijvingen van de vormleer als een 'rommeltje, nachtmerrie, bête noir, watersoep en onzin' gebezigd. De groep van tegenstanders zonder meer – de 'afschaffers' – was overigens tamelijk obscuur en ontleende haar betekenis vooral aan ingezonden brieven. Echt duidelijk onderbouwde artikelen tegen de vormleer zijn nauwelijks te vinden.[3] Er was echter ook een groep gematigden – 'veranderaars' – die

het vak facultatief wilden stellen of geïntegreerd met andere vakken, met name met het (lijn)tekenen, wilden maken.

Conservatieven

De veelschrijver Boeser kritiseerde in 1857 Diesterwegs opvattingen op grond van de voorrede van diens vertaalde boek, zonder te vermelden dat die van Brugsma was. Dit voorwoord gaf echter, zoals we in A3 hebben gezien, een verkeerde voorstelling van zaken. Boeser beweerde dat er 'over de Vormleer als leervak op de lagere scholen nog niet in 't openbaar gesproken' was en dat 'de Vormleer volgens 't leerboek van Diesterweg (...) voor onze lagere scholen onbruikbaar' en te 'hoog gegrepen' was. Kennelijk had hij toen nog geen kennis genomen van de in A6 besproken lezing van Bouman. Boeser beval de oude methode van Van Dapperen weer aan, maar alleen voor de laagste klasse met als hoofddoel: 'zelfwerkzaamheid, zelfzoeken, beproeven en oefenen van eigen krachten (...) oefening van oog en hand, het teekenen van lijnen en figuren', het laatste als een voorbereiding op schrijven en tekenen (Boeser, 1858, p. 221). Voor de hogere klassen zag hij geen plaats voor de vormleer. Het vormende aspect achtte hij ook bereikbaar via andere vakken als lezen, schrijven, rekenen en taalkunde, waaraan hij vooral praktische waarde toedacht. De vormleer beschouwde hij als volkomen onpraktisch. Zijn stukken in *De Wekker* van 1872 en 1875 zijn van dezelfde strekking. Zijn stuk van 1857 is in feite het enige contra-artikel, dat vlak na de verplichtstelling in 1857 naar voren is gebracht.[4]

Het NOG houdt zich in 1860 nog op de vlakte met een artikel over vormleer waarmee men alle kanten op kon (*Maandblad NOG*, 1860, pp. 5-16). In hetzelfde blad verschijnt in 1862 een stuk van Roodhuijzen, die nog steiler in de leer is dan Van Dapperen zelf (*Maandblad NOG*, 1862, pp. 17-25). Ook een artikel dat doel, inhoud en grenzen van de vormleer moet bepalen, komt niet verder dan de gebruikelijke argumenten over stoffelijke en vormende waarde en een opsomming van onderwerpen (*Maandblad NOG*, 1863, pp. 75-78).

Gematigden

Onder de 'veranderaars', die vaak een gematigd standpunt innamen, herinneren we ons allereerst De Witte van Citters en Bakkes, die de vormleer met het tekenen wilden verbinden (zie A3). Het leek soms wel 'zoveel hoofden, zoveel zinnen', zoals bijvoorbeeld blijkt uit een verslag van de verzamelde inspecteurs der verschillende provincies op 13 mei 1863.[5] Het waren echter vooral de pleitbezorgers voor het tekenen als leervak op de lagere school, die als veranderaars moeten worden aangemerkt. Zij begonnen zich in deze tijd te manifesteren en betrokken ook de vormleer daarbij.

Tussen 1860 en 1870 bleef de discussie nog tamelijk gematigd. In *De Oefenschool* verschenen af en toe wel vragen als 'Wat is vormleer, en welke gang komt u

daarbij voor de lagere school het geschiktste voor?', die bedoeld waren als oefenstof voor akte- of vergelijkende examens (*De Oefenschool* 1859, *21*, p. 31). De bijgeleverde antwoorden in de vorm van een klein opstel zijn echter clichématig en vertonen geen nieuwe gezichtspunten. Wel verscheen er in dit blad in 1870 een artikel van Tj. Hoekstra over opvattingen, die er in Duitsland bestonden over vormleer en 'meetkunstig teekenen'. De strekking is dat de vormleer in dienst gesteld zou moeten worden van een soort receptmatig lijntekenen, waaraan ook meisjes iets zouden kunnen hebben (*De Oefenschool* 1871, *31*, pp. 161-171).

In 1864 komen we in de *Nieuwe Bijdragen* een pleidooi tegen voor de tekenmethode van Dupuis, die volgens ene 'B' goed verbonden zou kunnen worden met de vormleer (*Nieuwe Bijdragen* 1864, pp. 46-53).

Een gefundeerd standpunt hierover werd vertolkt door M. Valk, die uitging van de natuurlijke drang van de kinderen tot tekenen. Omdat hij als een der belangrijkste doelen van het vormleeronderwijs het 'leeren opnemen en teruggeven van vormen' zag, diende het tekenen van geometrische vormen en modellen als uitgangspunt voor de vormleer gekozen te worden. Behalve op de intrinsieke motivatie wees Valk ook op het praktische nut voor die leerlingen die later een beroep of een scholing ten behoeve van de zich ontwikkelende nijverheid zouden krijgen. Als studieboek noemt hij Braet von Überfeldt en Bings *Handleiding tot het teekenen naar de natuur en de doorzigtkunde*, uitgegeven door ''t Nut' (*Nieuwe Bijdragen* 1871, pp. 330-343). Op de betekenis van Dupuis en het tekenonderwijs gaan we in A14 nog nader in.

In de *Nieuwe Bijdragen*, dat zich in de voorgaande jaren nogal sterk had gemaakt voor de bekendmaking van de vormleer, bestond tussen 1860 en 1870 niet bijster veel aandacht voor vormleer.[6]

Wiskundige vernieuwers

Naast deze gematigde vernieuwers, vooral in de richting van het tekenen, bestond ook een groep die zich juist meer op het wiskundige in de vormleer concentreerde. De ons reeds bekende Moll (zie A3) liet zich in 1864 duidelijk horen. Naar aanleiding van een gedeeltelijk verslag van een vergadering van de Gewestelijke Vereeniging Overijssel van het NOG, waarbij de vormleer werd besproken, schreef Moll een stuk in *De Wekker*. Hij wijst erop dat de vormleer zich tussen twee 'noodlottige uitersten' beweegt; enerzijds de oude aanpak van Van Dapperen met de nadruk op de vormende waarde, anderzijds de nieuwe opvatting van vormleer als 'aanschouwelijke meetkunde':

> 'Misschien is er geen vak van onderwijs, dat bij alle standen der Maatschappij meer zijne toepassing vindt, dan de Meetkunst; (...) Ik wil dus in de Vormleer zien, eene reeks oefeningen, die een welgesloten geheel vormen, die op aanschouwing rusten en gevolgelijk eenvoudig zijn te bevatten, en die tot het doel leiden om den leerling zoo veel kennis van de Meetkunst aan te brengen, als voor elken stand in de tegenwoordige Maatschappij een noodzakelijk vereischte is.' (Moll, 1864)

Dit standpunt licht hij toe met een aantal voorbeelden die niet alle even gelukkig gekozen zijn, omdat hij soms van empirie uitgaat, dan weer van aanschouwelijke evidenties en ook een soort inductieve redeneringen toepast. Moll, die we eerder een meer formele opvatting hadden toegedacht, lijkt nu meer naar het aanschouwelijke standpunt over te hellen. In ieder geval werden nu de twee uiterste opvattingen: *denkoefeningen* versus *aanschouwelijke meetkunde* duidelijk onderscheiden. Ook geeft Moll, net als een aantal andere auteurs, een behoorlijke omschrijving van het vak. We zien in hem een representant van de groep die we de 'wiskundige vernieuwers' noemen. Deze groep zal in de periode tussen 1870 en 1878 nog een belangrijke rol gaan spelen.

Maar in feite waren we nog bij de 'veranderaars', zoals Bakkes, die pas in 1865 met zijn boek en opvattingen naar voren trad. Een lovende recensie van het werk van Bakkes treffen we aan in *De Wekker* van 1867. Ene G. beschrijft als doel van de vormleer 'Zien, goed leeren zien' en hij wijst zowel het strikt meetkundige karakter als het vormende aspect (dorre combinatoriek) af (*De Wekker* 1876, *24*(42)). Hoewel ook door diegenen die het tekenen met de vormleer wilden verbinden de doelen duidelijk omschreven worden, bleven de onderwijzer, de opleider, de inspecteur en de overheid met het dilemma zitten wat dan wel de ware weg zou zijn. De discussie tussen 'afschaffers', 'veranderaars' en '(wiskundige) vernieuwers' zette zich dan ook voort.

Bouman en aanschouwelijke meetkunde

In het in A8 genoemde artikel in *De Schoolbode* beweerde ene 'S' kort en bondig dat de vormleer geen leervak diende te zijn, maar 'een middel tot zintuigsontwikkeling, een middel om te leeren zien, de alpha van het aanschouwelijk onderwijs, zooals lezen en schrijven middelen zijn om kennis te verkrijgen, en door die kennis het verstand en de geest te ontwikkelen' ('S.', 1872, p. 312). De onderwijzer is vrij in keuze en omvang van de leerstof; vormleer zou vooraf moeten gaan aan lezen en schrijven en derhalve alleen in de laagste klasse thuishoren, aldus deze 'S'. Dit was voor Bouman aanleiding om vijftien jaar na zijn belangrijke artikel (zie A6) opnieuw in de pen te klimmen en opnieuw zijn geloofsbelijdenis over de vormleer af te leggen. Er verschijnen dan in *De Schoolbode* twee artikelen van zijn hand. Het eerste is hoofdzakelijk een herhaling van zijn vroegere stuk. Onder verwijzing naar dat stuk doet hij de hele geschiedenis van de vormleer tot dat moment nog eens uit de doeken (Bouman, 1872, pp. 410-418). Ook het tweede stuk bevat veel van zijn vroegere standpunten, maar hij gaat iets specifieker in op het standpunt van 'S'. Hoewel er bij de aanschouwingsoefeningen in de laagste klasse, die hij als algemene voorbereidende oefeningen beschouwt, ook meetkundige vormen ter sprake komen, kan daar zijns inziens toch niet van vormleer gesproken worden. Net als in zijn artikel van 1858 en als in zijn boeken beweert hij opnieuw dat de vormleer een 'practisch

doel' dient te hebben

> 'dat voor alle leerlingen der lagereschool bereikbaar en wenschelijk is. Dat doel is niets anders dan de heldere opvatting van *de eerste beginselen* der Meetkunde en de practische toepassing van de wetten, die de aanschouwing reeds leert kennen omtrent het bepalen van de afmeting der verschillende soorten van ruimte-uitgebreidheid.' (Bouman, 1872, p. 459)

Ook Bouman bedoelt dus nu met de vormleer *elementaire aanschouwelijke meetkunde* en wel als een leervak voor alle kinderen. Het is volgens hem een misvatting dat 'voor het aanleeren der wiskunde in 't algemeen en van de meetkunde in 't bijzonder een eigenaardige aanleg wordt vereischt (...) De voorstellingen, waarmede zich de elementaire Meetkunde bezighoudt, liggen onder 't bereik van ieder kind' (Bouman, 1872, p. 461). Hij herhaalt zijn methodische driedeling van de leerstof. Dat er slechte resultaten geboekt worden, geeft Bouman toe, maar hij meent in de regeringsverslagen ook vooruitgang te lezen. Bovendien denkt hij dat de onderwijzers steeds beter in dit vak opgeleid zullen worden. Het advies van J. Versluys dat de onderwijzers gewoon planimetrie en stereometrie zouden moeten bestuderen als eigen achtergrondkennis voor de vormleer, acht hij 'niet onvoorwaardelijk op te volgen'. In hoeverre hier een persoonlijk element meespeelde, is niet goed te beoordelen, maar het oordeel van Versluys over Boumans boeken was niet zo gunstig. Versluys vond diens boeken namelijk veel te weinig systematisch als studieboek voor de onderwijzer. Hun opvattingen over vormleer als aanschouwelijke meetkunde komen echter in grote trekken overeen (Versluys, 1872).

Het NOG, 't Nut en Volksonderwijs als tegenstanders

Tijdens de Algemene Vergadering van het Nederlandsch Onderwijzers Genootschap (NOG) in 1873 te Arnhem was een commissie benoemd die moest onderzoeken op welke punten de wet van 1857 verbeterd kon worden. Deze commissie had hiervoor de afdelingen van het NOG geconsulteerd. Op grond van 31 binnengekomen rapporten heeft de commissie toen haar voorstellen aan het hoofdbestuur voorgelegd.

Eén van de voorstellen betrof de afschaffing van de vormleer als verplicht leervak en daarvoor het tekenen in de plaats te stellen. Dit voorstel kwam op de algemene jaarvergadering, die van 29 tot 31 juli 1874 in Groningen gehouden werd, aan de orde. Het zag er voor de groep van 'wiskundige vernieuwers' op dat moment dus niet erg rooskleurig uit. Maar het weerhield een aantal voorstanders van de vormleer er echter niet van de discussie nog eens stevig aan te gaan.

Vlak voor de genoemde vergadering van het NOG liet Gleuns een omvangrijk stuk verschijnen in *De Schoolbode* (Gleuns, 1874, pp. 257-275). Ook Gleuns komt, zij het met veel omhaal van woorden, tot een definitie van vormleer als 'aanvankelijke of aanschouwelijke meetkunde', waar hij nog aan toe voegt dat het beslist geen

'vervormde meetkunde' is. Als motivering noemt hij alweer de verstandsontwikkeling, waarbij hij, in huidige termen geformuleerd, naar activiteiten als ordenen en klassificeren verwijst. Ook wordt de praktische waarde weer opgevoerd, maar echt nieuwe gezichtspunten levert dit artikel niet op. Wat het tekenen betreft, meent Gleuns dat dit ook een belangrijke (hulp)vaardigheid is; echter er zou daarvoor niet een apart leervak gecreëerd hoeven te worden, daar het vanzelf bij andere vakken als aardrijkskunde, natuurkunde en vormleer beoefend kan worden. Dit artikel van Gleuns veroorzaakte direct een aantal belangwekkende reacties.

Het begint met een stuk van F. Gediking in de twee opvolgende nummers van *De Wekker*. Deze stelt zich als een duidelijk tegenstander van handhaving van de vormleer op. Hij beweert dat er bij de onderwijzers veel weerstand – hij spreekt van haat en geringschatting – tegen het vak bestaat en dat in de afdeling 's Gravenhage alle leden, op De Witte van Citters na, voor het voorstel tot afschaffing hebben gestemd. De kern van zijn betoog is dat de vormleer te zeer de kant van de (formele) meetkunde uitgaat. Hij wil of kan geen onderscheid maken met een op evidenties gebaseerde aanschouwelijke meetkunde. Dat wat nodig is aan het leren van vormen kan zijns inziens bij het aanvankelijk aanschouwingsonderwijs ondergebracht worden. Hij is een voorstander van het verplicht stellen van het tekenen (Gediking, 1874). Gleuns reageert in hetzelfde blad, nog net voor de vergadering in Groningen. Hij erkent dat zijn stuk niet op alle punten even helder was, maar blijft bij zijn standpunt: vormleer verplicht, omdat het anders 'door velen geheel ter zijde zal worden geschoven' (Gleuns, 1874b).

In dat nummer begint ook Bakkes een trilogie onder de titel 'Zijn of niet zijn?'. Het eerste historische deel mondt uit in het door hem als hoogst gestelde doel 'goed leeren zien'. Bakkes releveert dat dit in feite ook Pestalozzi's doel was: aanschouwing als een eerste voorwaarde voor werkelijk begrip. Bakkes' opvattingen over de vormleer hebben wij al leren kennen bij de bespreking van zijn boek (zie A3). In zijn artikel draagt hij zijn zienswijze op bescheiden, maar heldere wijze, voor het eerst zelf uit. Niet in algemene termen, maar via sprekende voorbeelden laat hij zien welke eigen opvatting hij over de vormleer had ontwikkeld. Het gaat om kijken, waarbij uitgegaan wordt van de omringende ruimte en de daarin aanwezige vormen, om waarnemen en afbeelden, meten, symmetrieën, eenvoudige redeneringen.[7] Zoals eerder beschreven, speelt het esthetische element van de meetkunde daarin een voorname rol. Het derde en laatste deel van zijn artikel gaat over het tekenen. Hij maakt onderscheid tussen rechtlijnig tekenen (passer en liniaal), handtekenen en ornamenttekenen. Al deze vormen van tekenen acht hij van groot belang, maar hij zou ze toch het liefst bij de vormleer onderbrengen, zoals blijkt uit het slot van dit artikel:

> 'Als we voor de Vormleer twee vakken in de plaats moesten stellen, zou 't zijn: allereerste beginselen van Meetkunde en beginselen van het Teekenen. Maar blijven ze samen dat misschien beter is, dan hapert het enkel aan een titel, die beter die combinatie uitdrukt dan het woord Vormleer. Wie zal onze taal en onze lagere school dan ver-

> plichten, om door een helder woord die twee begrippen als onder één hoed te vangen? Misschien waren alle partijen dan wel voldaan. De discussie er over en de tijd zal het leeren. Wij hopen er het beste van.' (Bakkes, 1874)

Ondanks het verzet tijdens de vergadering in Groningen door middel van een amendement van de plaatselijke afdeling van het NOG, dat onder meer door Versluys verdedigd werd, wordt het voorstel tot afschaffing van de vormleer toch door de algemene ledenvergadering van het NOG aangenomen. Opgemerkt zij dat deze afdeling toen bemand werd door onder meer Bouman, Gleuns, De Groot en Versluys.

Wanneer nu blijkt dat de Maatschappij tot Nut van het Algemeen en de Vereniging voor Volksonderwijs ook voor afschaffing van de vormleer als verplicht leervak voor de lagere school zijn, dan lijkt het doodvonnis wel haast getekend. Van de 'afschaffers' horen we in de jaren na 1874 dan ook niet veel meer. Af en toe verschijnen wel artikelen over het belang van het tekenen als verplicht leervak, waarbij sommige auteurs de relatie met de vormleer leggen. De groep van 'wiskundige vernieuwers' blijft echter hameren op het belang van een apart leervak, dat steeds meer aangeprezen wordt onder de naam van *aanschouwelijke* of *elementaire meetkunde*.

Vanaf het begin van het decennium 1870-1880, begint nu ook J. Versluys zich op dit gebied te roeren. Er verschijnen boeken van zijn hand, die lovend besproken worden. In 1877 breekt J. Zijlstra bij zo'n recensie van een boek van Versluys nog eens een lans voor de vormleer en wel in de zin van aanschouwelijke meetkunde (Zijlstra, 1877). Op de aard en betekenis van het werk van Versluys komen we nog terug in A12 en A13, echter één simpel argument vóór de vormleer, dat Versluys van meet af aan aandroeg, willen we nu reeds naar voren brengen. Net zoals men aanschouwelijk rekenen vooraf laat gaan aan de meer wetenschappelijke getalleer van de middelbare school, zo achtte Versluys ook *aanschouwelijke meetkunde* een nuttige *voorloper* op de meer *formele meetkunde* van het vervolgonderwijs. In de door ons onderzochte onderwijsbladen verschenen tot 1878 nog een aantal boekrecensies, waarbij de auteurs zich de kans niet lieten ontgaan om het belang van de vormleer uit te dragen. Zo ook laten de redactie van *De Schoolbode* in 1877 en enkele anonymi in het *Weekblad* in 1878, vlak voor de totstandkoming van de wet van 1878, zich niet onbetuigd voor het behoud van het vak.

Een wat bizar stuk van ene R. van der Bruyn treffen we aan in een nummer van de laatste jaargang van de *Nieuwe Bijdragen*. Onder de titel 'Een Doodvonnis?' wordt de vormleer aan de lezer voorgesteld als een dame 'van verdachte reputatie (...) Een fraaie dame, die zich jaren achtereen schuldig maakte aan valschheid in velerlei geschriften (...) een oude matrone', waar vooral de jonge onderwijzers een hekel aan kregen door de lastige vragen, die zij op de examens voorgeschoteld kregen. Deze dame, die het nog het best deed aan de arm van De Witte van Citters, zal nu volgens de auteur voor het gerecht gedaagd worden en haar pleegvader (de minister?) is haar beschuldiger. De olijkerd eindigt aldus:

> 'Ongelukkige Vormleer! Die U redden wil, zal over veel talenten moeten beschikken. Gij hebt reden om voor uwe toekomst te vreezen; want als de wet naar welke gij beoordeeld staat te worden, niet *zelf* veroordeeld wordt, dan zult gij, vrees ik, eer wij een jaar verder zijn, niet veel anders te wachten hebben dan van uwe weinige aanbidders een traan op uw graf.' (Van der Bruyn, 1877)

Alles ziet er op dat moment dus naar uit dat de vormleer geschrapt zal worden, maar laten we tot slot van deze periode in A11 eens bezien hoe de wet van 1878 tot stand komt en hoe de vormleer er daarbij vanaf komt.

A11 Wetswijziging 1878

Voortgaand streven naar verbetering

Mede door de vele kritiek op het niveau van het onderwijs werd vanaf het midden van de negentiende eeuw het streven naar een inhoudelijke en organisatorische verbetering van het onderwijs steeds pregnanter. Er werd door alle betrokkenen – onderwijzersorganisaties, inspectie en politici – geijverd voor terugdringing van het schoolverzuim, verbetering van de financiële positie van de onderwijzers, verbetering van de opleiding, verkleining van de klassen en uniformiteit bij de examens. In vrijwel al deze opzichten werden gedurende de periode 1865-1880 resultaten geboekt. We noemen allereerst het beroemde 'kinderwetje van Van Houten' uit 1874, dat kinderen beneden de twaalf jaar uit de fabriek kon houden. Het was een eerste stap op weg naar de leerplicht. Het waren vooral de jong-liberalen die zich inzetten voor een door de overheid gesubsidieerde openbare school.

Onder leiding van de opvolger van Thorbecke, J. Kappeyne van de Coppello (1822-1895), kwam de onderwijswet van 1878 tot stand. Deze wet, die weliswaar veel weerstand opriep bij de confessionelen, bracht voor het lager onderwijs echter talrijke verbeteringen. Het 'hoofd eener school' moest voortaan de hoofdonderwijzersakte bezitten en ging tenminste *f* 700 per jaar verdienen. De hulponderwijzer heette voortaan onderwijzer en ontving een salaris van minimaal *f* 600. Per veertig leerlingen was er tenminste één onderwijzer. Het hoofd van de school moest een leerplan opstellen, schooltijden en vakanties regelen, boeken en leermiddelen aanwijzen. De leerplicht werd nog niet ingevoerd. Maar de wet bevatte een hoofdstuk 'Van de bevordering van het schoolbezoek' dat hoofdzakelijk indirecte maatregelen kende, zoals het niet toekennen van ondersteuning aan armlastigen, indien deze hun kinderen niet naar school stuurden.

De omstreden vergelijkende examens bleven bestaan, maar voor de akte van hoofdonderwijzer, waarop men nu niet meer hoefde te wachten tot de leeftijd van 23 jaar, werd op het examen ook vereist: 'beginselen van de algemene geschiedenis, de wiskunde en het handtekenen'. Voor mannelijke en vrouwelijke kandidaten golden dezelfde eisen, behalve dat de dames ook examen moesten afleggen in nuttige handwerken, dat aan de verplichte vakken was toegevoegd. Het MULO was niet meer opgenomen in de wet. De inspectie werd weer opnieuw gereorganiseerd via de hiërarchie: provincie, district en arrondissement. De mogelijkheden tot het oprichten van kweekscholen werden verruimd. De onderwijzer won aan status en erkenning. We zullen nu in het bijzonder bekijken hoe het vak vormleer in deze wet terechtkwam of beter gezegd, behouden bleef.

Aanvankelijke pogingen tot wijziging van de wet van 1857

Aan de totstandkoming van de wet van 1878 gingen vier pogingen vooraf. De eerste was die van het kamerlid W. M. de Brauw, die in 1867 een aantal wetswijzigingen voorstelde die voornamelijk tot doel hadden om het bijzonder onderwijs tegemoet te komen in haar streven naar gelijkberechtiging in subsidie met het openbare onderwijs. Dit louter politieke voorstel, dat geen inhoudelijke veranderingen nastreefde, werd ongunstig ontvangen en daarna ingetrokken (*Bijlagen HTK*, 1866-1867, pp. 921-925).[1] Kort daarna, op 28 april 1868, zond de toenmalige minister van Binnenlandse Zaken J. Heemskerk Azn. een wetsontwerp tot wijziging van de wet van 1857 naar de Tweede Kamer. Ook dit ontwerp wilde maatregelen treffen die 'zullen kunnen leiden tot bevrediging van billijke wenschen van de voorstanders van het bijzonder onderwijs'. En passant werd de vormleer uit het rijtje van verplichte vakken voor het gewone lagere onderwijs geschrapt en werd het vak nuttige handwerken voor meisjes toegevoegd. Bij de vakken voor het meer uitgebreid lager onderwijs (MULO) stonden zowel de beginselen van de vormleer als die van de wiskunde genoemd. In de Memorie van Toelichting ging de minister, zich baserend op de regeringsverslagen over het onderwijs, uitvoerig in op dit voorstel:

> 'Intusschen heeft de ondervinding gedurende het tienjarig bestaan der wet verkregen doen zien, dat de goede verwachtingen (...) niet zijn verwezenlijkt. (...) heeft dit vak dusverre geen noemenswaardige vruchten opgeleverd en wordt het door de meeste leeraren en leerlingen met weerzin behandeld. (...) Zoo op deze gronden als omdat het aantal verpligte vakken toch reeds vrij talrijk is, schijnt het raadzaam, de vormleer naar de niet verpligte vakken te doen overgaan.'
> (*Bijlagen HTK*, 1866-1867, pp. 453-463)

Deze niet mis te verstane uitspraak strookt met datgene wat wij op grond van verschillende bronnen hebben geconstateerd. Maar dezelfde minister zou dit wetsontwerp tijdens de zitting van 11 juni 1868 bij missive intrekken. De discussies verflauwden toen weer wat om in de jaren vanaf 1872 tot een hoogtepunt te geraken. De voorbereidende acties op herziening van de wet van 1857 waren op alle fronten gaande. In 1873 verscheen een *Ontwerp eener nieuwe wet op het lager onderwijs door een schoolopziener*, waarin een volledig voorstel van 86 artikelen plus begroting gepresenteerd werd. Deze particuliere onderneming opende met een buitengewoon sombere kijk op de toestand van het onderwijs:

> 'Van natuurwetenschap, geen spoor; zingen, een mythe; vaderlandsche geschiedenis, hier en daar een vertelseltje; aardrijkskunde, doode namen; teekenen, onbekende grootheid; ja, zelfs lezen, schrijven en rekenen (...) het wezen der zaak ontbreekt. Honderd duizenden zouden er in ons land te vinden zijn, die, ofschoon den naam dragende in hunne jeugd de school bezocht te hebben, niet in staat zijn het eenvoudigste boek te verstaan, een brief over hunne eigen aangelegenheden te schrijven.' [2]

De reden van deze zorgelijke situatie was volgens de ons onbekende schrijver voor-

namelijk gelegen in het ontbreken van de leerplicht, waarmee zijn wetsontwerp ook aanvangt. De ontwerper differentieert scholen en onderwijzers naar drie klassen, gebaseerd op het aantal leerlingen. Scholen van de derde klasse zijn die met minder dan zeventig leerlingen, waarvoor een minimumprogramma moest gelden, waarin de vormleer wordt omschreven als 'practische meetkunst'.[3]

Voorstellen van Moens en Heemskerk

Zowel van confessionele als van de zijde van het openbaar onderwijs werd op wetsherziening aangedrongen, zij het om verschillende redenen. Het kamerlid Moens, die ook in de Vereniging voor Volksonderwijs een rol speelde en in opdracht van deze vereniging al mee had gewerkt aan een nieuw wetsvoorstel, bood op 22 februari 1876 zelf een voorstel tot wetswijziging aan. Hij wenste een zo spoedig mogelijke vervulling van een aantal voorwaardelijke eisen, zoals een voldoend aantal goed geschoolde onderwijzers, die een redelijk salaris zouden verdienen. Het voorlopig verslag der rapporteurs stemde in vele opzichten met Moens in, maar wijst ook op de onvolledigheid, met name ten aanzien van de leerinhouden.[4] Zo had de commissie graag gezien dat de vormleer geschrapt werd. Kort daarop kwam Moens met zijn memorie van beantwoording, waarin hij ook op de vormleer ingaat. Hij zegt dat deze kwestie nog steeds in discussie is en dat hij het onderwijspakket het liefst nog verder zou uitbreiden met gymnastiek, tekenen en handwerken. Tevens voegde hij een bijgesteld herzieningsvoorstel bij (*Bijlagen HTK*, 1875-1876, 137/ pp. 1-32). Er was echter geen tijd meer in deze termijn om het voorstel van Moens nog in behandeling te nemen. Moens had Heemskerk wellicht geprikkeld, want kort daarna, op 20 december 1876, kwam de minister zelf met een volgende (vierde) poging. Hierin werden concessies zowel aan het bijzonder als aan het openbaar onderwijs gedaan, maar het ontwerp werd ongunstig ontvangen. Het betrof een volledig ontwerp, zodat de inhoud van het onderwijs ook ter sprake werd gesteld. Heemskerk liet de vormleer vallen en voegde gymnastiek, handtekenen en nuttige handwerken voor de meisjes toe. Hij onderbouwde zijn voorstel tot afschaffing van de vormleer aldus:

> 'De ondervinding heeft geleerd dat het zeer algemeen met weinig ingenomenheid gegeven en ontvangen wordt, en in plaats van de beoefening der elementaire wiskunde gemakkelijk te maken, veelal tot min duidelijke begrippen omtrent wiskundige waarheden aanleiding geeft.' (*Bijlagen HTK*, 1876-1877, 120.3/ p. 11)

Dit is een nieuw argument tegen de vormleer, dat afkomstig lijkt uit de kringen van het middelbaar onderwijs. Heemskerk ging bij de voorbereiding niet over één nacht ijs. Hij voegde bij het wetsontwerp een lijst met 34 vragen, waaronder de vraag of de vormleer gemist kon worden. Naar aanleiding van deze vragenlijst werd onder leiding van of namens hem tienmaal vergaderd met de elf provinciale inspecteurs, waaronder Moens, die toen inspecteur in Utrecht was. Over de vormleer bleken de meningen verdeeld. Bij de stemming voor een pre-advies luidde de uitslag: 7 vóór

en 4 tegen de vormleer (*Bijlagen HTK*, 1876-1877, 120.6/ p. 43). Ook het voorlopig verslag der Commissie van Rapporteurs spreekt van 'groot verschil van gevoelen'. De voorstanders wijzen op het bestaan van goede handboeken.[5] Maar de minister hield vast, zoals uit zijn memorie van beantwoording blijkt:

> 'de ondervinding heeft geleerd dat een goed en vruchtdragend onderwijs in de vormleer tot de zeldzaamheden moet gerekend worden. (...) Naar hetgeen de Regering omtrent dit punt bekend is, behouden de leerlingen die later geen wiskunde leeren, van de vormleer niets, terwijl zij, die tot beoefening der wiskunde overgaan, het meeste, wat hun als vormleer is ingeprent, weder moeten afleeren.'
> (*Bijlagen HTK*, 1876-1877, 120.9/ p. 104)

Het is hetzelfde argument dat eerder werd gebruikt, maar nu nog eens onderstreept met het feit dat leerlingen die niet verder in de wiskunde gaan, er niets van onthouden. Men kan zich afvragen op welke 'ondervinding' dit was gestoeld. Weliswaar voegde Heemskerk nog een nota van wijzigingen aan zijn ontwerp toe – overigens geen ten aanzien van de vormleer – maar aangezien hij op 2 november 1877 af moest treden, werd dit wetsvoorstel nooit in openbare behandeling genomen.[6]

Kappeyne van de Coppello en de vormleer

Het nu aangetreden liberale kabinet onder leiding van Kappeyne van de Coppello begon vrij snel met de onderwijskwestie. Het nieuwe ontwerp, dat reeds op 11 maart 1878 werd ingediend, wordt sterk gedomineerd door de eerder genoemde voorwaarden tot verbetering voor het onderwijs. Het openbaar onderwijs trok het meeste profijt, hetgeen na de aanneming door de beide kamers van confessionele zijde leidde tot het beroemde smeekschrift aan de koning op 3 augustus 1878, dat overigens geen effect heeft gehad.

Hoe verliep het nu met artikel 2, dat de inhoud bepaalde? Allereerst merken we op dat de omvang van de debatten over dit gedeelte van het ontwerp gering is in vergelijking met de meer principiële kwesties. In het ontwerp kwam de 'beginselen van de vormleer' weer voor onder de verplichte vakken. Tevens werd het nuttige handwerken voor meisjes daaronder gesteld. Onder de facultatieve vakken vielen de beginselen van Frans, Duits, Engels, algemene geschiedenis, wiskunde, handtekenen, beginselen van de landbouwkunde, de gymnastiek en de fraaie handwerken voor meisjes. In de memorie van toelichting definieert Kappeyne de vormleer door *aanschouwingsoefeningen* en argumenteerde hij als volgt: 'In handen van een geschikten leeraar kan dit vak veel tot de algemeene ontwikkeling der leerlingen bijdragen' (*Bijlagen HTK*, 1877-1878, 130.3/ p. 13). Al werd er hier en daar weinig aan vormleer gedaan, misschien zelfs wat tijd verspild, dat mocht toch geen reden zijn volgens Kappeyne 'om eene schrede achterwaarts te doen en niet te beproeven, of niet van lieverlede het misverstand zal wijken'. Met deze omschrijving en onderbouwing zijn we, zo lijkt het, weer terug bij de pestalozzianen. Niets van het praktische nut,

waarop Bouman voortdurend hamerde.

Uit het voorlopig Verslag der Commissie van Rapporteurs blijkt dat de oude strijd voort blijft gaan.[7] Zelfs de tegenstanders konden met het idee van de aanschouwingsoefeningen wel leven. Maar tevens lezen we dat 'de Minister door zijne definitie aan het vak onregt deed. De vormleer was veel meer dan hij zich scheen voor te stellen. Zij kon met sommigen eene *aanschouwelijke meetkunde* worden genoemd, een middel om de leerlingen goed te leeren zien en eenig begrip te geven van vorm, maat en uitgebreidheid' (*Bijlagen HTK*, 1877-1878, 130.3/ p. 34). De nuttigheid werd opnieuw genoemd. Als geschikte handleidingen werden die van Bouman en Versluys aanbevolen. In de discussies werden telkenmale het tekenen en de gymnastiek aangevoerd als net zo belangrijk als of zelfs belangrijker dan de vormleer.

In zijn antwoord op dit verslag ging Kappeyne niet in op de vormleer en wees handtekenen en gymnastiek als verplichte vakken af vanwege te grote uitbreiding van het vakkenpakket. Op artikel 2 werden dan ook geen wijzigingen aangebracht. In een marathonreeks van zittingen van de Tweede Kamer werd nu het wetsontwerp behandeld.

Amendement tegen de vormleer

Op 27 juni 1878 kwam artikel 2 aan de orde. Er was één amendement van de antirevolutionair Van den Berch van Heemstede tegen opneming van de vormleer. Hij beriep zich op de schoolopziener M.J. de Goeije, die een brochure had laten verschijnen met aanmerkingen op het wetsontwerp, hoofdzakelijk met het doel de salarissen van de onderwijzers te verbeteren. De Goeije ging in zijn brochure ook in op Kappeynes omschrijving van de vormleer als aanschouwingsoefeningen, wat zijns inziens iets geheel anders was. Tevens beweerde hij dat de meeste onderwijzers niet weten wat vormleer is en dat hijzelf dienaangaande uit de boeken van Pestalozzi, Van Dapperen, Bierens de Haan, Bouman en Stratemeijer niet veel wijzer was geworden:

> 'In verscheidene scholen in mijn district wordt thans in het uur van vormleer geteekend. Nu vind ik dat de wetgever òf het vak niet moet voorschrijven, òf eens voor altijd bepalen wat het dan eigenlijk is. Zal dit de bepaling van de Mem. van Toel. zijn, dan heb ik er niets op tegen, maar vind ik 't ook volmaakt overbodig, daar op geen goede school dergelijke oefeningen ontbreken.' (De Goeije, 1878, p. 184)

Dit citaat en dat wat er aan voorafging, voerde Van den Berch van Heemstede aan tegen de opneming van de vormleer. Daarmee werd de motivering van Kappeyne precies op haar zwakke plek aangepakt. Moens, die direct hierna het woord voerde, greep de gelegenheid aan om nog eens uit te leggen wat vormleer hoorde te zijn, namelijk aanschouwelijke meetkunde. Van den Berch wees hij op de geschriften van Bouman en Versluys. Meteen ook pakte hij dit punt aan om over de nodige verbetering van de opleiding van de onderwijzer te spreken. Maar Moens had het woord gekregen voor zijn amendement om namelijk ook 'het handteekenen' en 'de vooroefe-

ningen der gymnastiek' bij de verplichte vakken te plaatsen. Kappeyne antwoordde op diplomatieke wijze aan Van den Berch van Heemstede:

> 'Ik kom tot de vormleer. Dat is een ontzaggelijk moeielijk onderwerp (...). Nu zal de heer Van den Berch wel niet verlangen dat ik hem onderwijs geve in de vormleer, maar dit staat vast, dat er, gelijk de heer Moens zeide, zeer geschikte handleidingen bestaan (...). De vormleer bevordert een systematisch aanschouwelijk onderwijs (...) Welnu men zal met verstand te werk gaan en niet overdrijven en dus ten opzigte van de vormleer geen overdreven eischen stellen, maar het geheel te doen verdwijnen zou, bij vergelijking met het buitenland, een achteruitgang zijn, en dus mag ik daartoe niet adviseren.' (*Bijlagen HTK*, 1877-1878, p. 1097)

Voor het eerst werd nu voor de motivering van de vormleer naar het buitenland verwezen, waarmee waarschijnlijk op Duitsland gedoeld werd. Het amendement van Van den Berch werd verworpen met 43 tegen 31 stemmen. Daarmee bleef de vormleer dus onder de verplichte vakken. Het lijkt overigens niet een wezenlijk punt geweest te zijn. De amendementen van Moens over het verplicht stellen van het tekenen en de gymnastiek werden met een grotere meerderheid verworpen.[8]

Samenvatting

We vatten de verschillende wetsvoorstellen van deze tien jaar nog eens samen:

jaar	indiener	vormleer	resultaat
1867	De Brauw	ja	voorstel ingetrokken
1868	Heemskerk	neen	voorstel ingetrokken
1876	Moens	ja	niet behandeld
1877	Heemskerk	neen	niet behandeld
1878	Kappeyne	ja	aangenomen

Op 18 juli 1878 werd het wetsontwerp in zijn geheel door de Tweede Kamer aangenomen met 52 tegen 30 stemmen.[9] De Eerste Kamer volgde op 17 augustus. De wet trad officieel pas op 1 november 1880 in werking.

Het kan zijn dat de vormleer als verplicht vak in het totaal van het politieke spel rondom de gelijkberechtiging van openbaar en bijzonder onderwijs van ondergeschikt belang werd geacht en wellicht als politiek wisselgeld gefungeerd heeft, maar ons komt het vooralsnog uiterst merkwaardig voor dat bij zoveel weerstand tegen de vormleer en bij een dergelijk zwakke onderbouwing van het voorstel om het vak te behouden, dit voorstel zo gemakkelijk door de debatten werd geloodst. We mogen niet vergeten dat Moens en Kappeyne beiden tot de liberalen behoorden, zodat Kappeyne wellicht sterk geadviseerd was door Moens.

Misschien dat de onderwijzers blij waren met de verbetering van de materiële voorwaarden en dat zij die 'lastige vormleer' voorlopig maar op de koop toe namen.

A12 Jan Versluys en het ontstaan van de vakdidactiek

Jan Versluys

Wij onderbreken met dit hoofdstuk de chronologische beschrijving van ons onderwerp van onderzoek om aandacht te besteden aan het werk van Jan Versluys, die gedurende het laatste kwart van de negentiende eeuw in Nederland van eminent belang is geweest voor de vooruitgang van de vakdidactiek voor rekenen en wiskunde. In het bijzonder gaan we in op zijn *Methoden bij het onderwijs in de wiskunde en bij de wetenschappelijke behandeling van dat vak* van 1874, dat wij van zodanige importantie achten, dat wij 1874 als het jaar van het ontstaan van vakdidactiek in Nederland willen bestempelen.[1] Uiteraard zijn hieraan voorafgaande continue ontwikkelingen aan te wijzen, maar met het verschijnen van dit werk zien wij voor het eerst een zodanige poging om de didactiek van een zekere systematiek en theoretische basis te voorzien dat er van een plotselinge vooruitgang in het didactische denken gesproken kan worden.

Aandacht voor didactiek

De term didactiek werd in de negentiende eeuw in Nederland niet of nauwelijks gebruikt.[2] De wet sprak van het 'mededeelen' van de leerstof aan de leerlingen. Wel kwamen in de onderwijskundige literatuur de begrippen leerplan, leergang en leervorm voor. De leervorm werd meestal weer onderscheiden naar de 'meedeelende' en de 'opwekkende' soort. Tot de eerste behoorden enerzijds het doceren en anderzijds het aanschouwelijke onderwijs, tot de tweede enerzijds de vraag- en antwoord- of 'socratische' methode en anderzijds de zelfzoekende of 'heuristische' methode. Het zijn inderdaad methoden van lesgeven; begrippen, die we thans onder de algemene didactiek stellen. Diesterweg maakte het volgende onderscheid tussen 'Methodik' en 'Didaktik':

> 'Wenn wir im weitern Sinne unter Didaktik die Wissenschaft der Gesetze und Regeln für den gesammten Unterricht verstehen, so ist die Methodik als die Lehre von den Gesetzen und Regeln der Unterweisung einzelnen Fächern unter der Didaktik begriffen und ein Teil, nämlich der angewanndte Teil derselben.'
> (Diesterwegs Wegweiser, 1854, p. 67)

De toenmalige Duitse begrippen 'Didaktik' en 'Methodik' zijn te vergelijken met onze tegenwoordige omschrijvingen algemene didactiek en vakdidactiek. Dit is wellicht de verklaring dat toen meestal over 'methodiek' werd gesproken waar we tegenwoordig de term vakdidactiek zouden gebruiken. Tegenwoordig verstaan we onder methodiek veelal de organisatie en uitvoering van het onderwijsleerproces. Me-

thodiek kan hierbij een negatieve betekenis krijgen wanneer de bijbehorende didactiek een star, regelgeleid en voorschrijvend karakter krijgt.

Tot ver in de negentiende eeuw beperkten de meeste Nederlandse auteurs van reken- en wiskundeboeken zich voor wat de didactiek betreft tot een omschrijving en structurering van de leerstof en een formulering van de doelstellingen. Aanwijzingen voor de onderwijsgevende tot inrichting van het onderwijsleerproces in vakspecifieke zin komen we nauwelijks tegen.

Een uitzondering moeten we maken voor de Leidse hoogleraar Jacob de Gelder (1765-1848), die enkele toonaangevende leerboeken voor de wiskunde schreef. In zijn *Verhandeling over het Verband en den Zamenhang der natuurlijke en zedelijke Wetenschappen* uit 1826 wijdt hij een hoofdstuk aan de 'methodus docendi' in verband met de wiskunde. Daarin wijst hij op de 'zelfstudie', het 'van buiten leeren', en de 'voorstellingskracht' als aandachtspunten voor de leerling. Voor de leraar beveelt hij de 'Socratische leerwijze', de 'analytische methode' als de 'eenige natuurlijke weg der uitvinders', 'van het eenvoudige naar het meer verhevene' en 'de innerlijke overtuiging van de waarheid' (begrip) aan.

Beckers heeft gewezen op De Gelders voor die tijd nieuwe aandachtspunten: betrokkenheid op de didactiek, zijn nieuwe opzet van de schoolboeken en de organisatie van het wiskundeonderwijs op de Latijnse scholen in het begin van de negentiende eeuw (Beckers, 1993,1996).

Smid stelt dat de achtergrond van De Gelders pedagogische en didactische opvattingen 'denkbeelden (waren) zoals die door Diesterweg waren geformuleerd' (Smid, 1997, p. 231).[3]

De principes van de Anschauung, waaronder 'vom Einfachen zum Zusammen gesetzten', 'vom Bekannten zum Unbekannten', 'vom Leichtern zum Schweren' waren aan het begin van de negentiende eeuw onder invloed van Pestalozzi al gemeengoed in de pedagogisch-didactische discussies.[4] Mogelijk dat ook De Gelder hierdoor beïnvloed was. Hij was echter meer een mathematicus dan een pedagoog; anders dan Diesterweg, die – overigens ook een wiskundige – zich als pedagogisch denker heeft onderscheiden (zie A3).

Jan Versluys

Wat Diesterweg voor Duitsland betekende, is Jan Versluys (1845-1920) voor Nederland geweest.[5] Net als Diesterweg was Versluys wiskundige en een op algemene levensvragen betrokken kritisch pedagoog. Van oorsprong was Versluys onderwijzer, maar hij ontwikkelde zich zelf snel in zowel de wiskunde als in de pedagogiek. Hij had grote interesse voor de didactiek van verschillende vakken van het lager onderwijs, ontwikkelde daarvoor in praktische zin, maar publiceerde ook op het theoretische vlak. Als auteur van schoolboeken voor rekenen en wiskunde is zijn invloed tot ver in de twintigste eeuw merkbaar geweest. Het is hier niet de plaats om diepgaand

op het leven en werk van de hoofdpersoon van ons onderzoek van het eind van de negentiende eeuw in te gaan. We beperken ons tot de betekenis van zijn werk voor de ontwikkeling van de vakdidactiek, in het bijzonder voor de vormleer.

Startpunt vakdidactiek (1874)

In 1874 publiceerde Jan Versluys zijn *Methoden bij het onderwijs in de wiskunde en bij de wetenschappelijke behandeling van dat vak*, verder te noemen *Methoden*. In dit boek wordt voor het eerst systematisch aandacht besteed aan de vakspecifieke aspecten van het onderwijzen en leren van rekenen en wiskunde. Alleen al het feit dat rekenen en wiskunde onder dezelfde noemer geplaatst worden, is een uniek feit.

Dat het leren van wiskunde een activiteit van de leerling zelf zou kunnen zijn, waarvoor de 'leermeester' de condities zou dienen te scheppen, werd weliswaar aanbevolen bij de heuristische leervorm, maar de vakspecifieke problematiek was een nog onbekend terrein. Er werd in de inleidingen van sommige leerboeken gepleit voor de heuristische methode, maar hoe dat in de praktijk gerealiseerd zou kunnen worden, bleef in het ongewisse. Ook stond het idee van de aanschouwelijkheid hoog in het vaandel als algemeen didactisch principe, maar het bleef in vrijwel alle gevallen steken in generale uitspraken, waarvoor de onderwijsgevende zelf maar een vorm moest zien te vinden. Dat aan de wiskunde, het rekenen en de meetkunde in het bijzonder, vakspecifieke didactische problemen verbonden zijn, kón nog niet onderkend worden, omdat microdidactische processen nog geen aandachtsgebied waren.

Van de algemene tendensen die een meer methodische aanpak van het onderwijs voorstonden, was die van de neo-herbartianen de meest toonaangevende in het Nederlandse onderwijs tegen het eind van de negentiende eeuw. Deze methode was met name in Duitsland voor verschillende leervakken minutieus uitgewerkt. Het neo-herbartiaanse onderwijs was gebaseerd op de volgorde der 'formele leertrappen', die als een universele methode geschikt zou zijn voor alle vakken.[6] Hiervan uitgaande zou de leerstof slechts gestructureerd hoeven te worden, om daarna in partjes aan de leerlingen meegedeeld te worden. Het dwingend methodische karakter, behorend bij dit soort onderwijs, stond lijnrecht tegenover de essentie van het principe van het *zelf ontdekken en zelf verwerven van de wiskundige leerstof*, dat juist door de *heuristici* werd nagestreefd. Versluys was bepaald geen aanhanger van de neo-herbartiaanse school.

Ook Versluys bezigde de term didactiek nog niet, maar sprak over de 'leermethode' of volgens de Duitse traditie over 'methodiek'. Overigens bedoelde Versluys met een leermethode eerst en vooral de 'kunst van het onderwijzen'. De *Methoden* is het eerste boek dat door een vakleraar, i.c. een wiskundeleraar, voor zijn vakbroeders was geschreven. Het behandelt het onderwijs in het rekenen en de wiskunde op een gelijkwaardige manier, voornamelijk vanuit een vakmatig vertrekpunt. De schrijver blijkt zich terdege op de hoogte gesteld te hebben van de toenmalige ont-

wikkelingen in Frankrijk, Duitsland en Engeland en van de historische ontwikkelingen in Nederland. Zo spreekt Versluys in positieve zin over Jacob de Gelder. Vanuit een huidig standpunt bezien zou er heel wat aan te merken zijn op de *Methoden*, met name op de structurering van de onderwerpen, de volledigheid, het verschil van niveau van de verschillende artikelen, het eclectische karakter van de verschillende onderwerpen en de weinig systematische opzet.

Er wordt weliswaar met tamelijk algemene beschouwingen gestart, maar deze krijgen alras een concrete betekenis voor het onderwijs in de wiskunde. Zo volgen na een uiteenzetting over de deductieve en de inductieve werkwijzen in de wetenschap direct de toepassingen hiervan in het wiskundeonderwijs. Ook de bekende algemene leervormen, zoals hiervoor genoemd – een geliefd onderwerp van de pedagogen in die tijd – worden behandeld, maar deze staan meteen in de context van het reken- en wiskundeonderwijs. Steeds worden voorbeelden uit de leerboeken en de schoolpraktijk aangehaald, alsook stukken vertaalde tekst van buitenlandse, meest Franse en Duitse deskundigen. Van het Engelse wiskundeonderwijs had Versluys geen hoge dunk.

Vijf principes

Na de bespreking van de genoemde algemene leermethoden maakt Versluys zijn onderwijs-credo kenbaar: het reken- en wiskundeonderwijs dient een heuristische vorm te hebben (*eerste principe*). Hij stelt deze leervorm tegenover de 'dogmatische' leervorm van voordragen en voordoen. 'Heuristisch beteekent zelf-vindend. Onderwijs is *heuristisch*, als de leerling er toe geleid wordt zelf de gevolgen te trekken' (Versluys, 1874, p. 24).

Uit een nadere toelichting en voorbeelden blijkt dat Versluys bij dit zelfontdekkende leerproces een belangrijke rol voor de leraar weggelegd ziet, die door middel van vragen en een goede voorstructurering van het probleem de weg voor de leerling dient te plaveien. We kunnen dit principe ook onder het idee van de 'genetische ontwikkeling' plaatsen. Tegenwoordig zouden we eerder van 'geleide herontdekking' of 'reinvention' spreken. Hij beroept zich daarbij op het werk van de Franse auteur J.M.C. Duhamel en op een meetkundecursus van Karl Snell, die volgens Versluys 'het eerste leerboek der vlakke meetkunde (is), dat consequent den heuristischen vorm bezit' (Versluys, 1874 p. 31).[7] Ook verwijst hij nog naar het werk van O. Schlömilch, dat in Nederland een zekere bekendheid genoot, maar dat hij echter minder aanschouwelijk achtte. Tevens geeft Versluys een historisch overzicht van het gebruik van de heuristische methode in het wiskundeonderwijs in Nederland.

Een *tweede principe* voor goed reken- en wiskundeonderwijs ligt volgens Versluys besloten in de idee dat voorafgaande aan een systematische oplossing c.q. cursus eerst een periode van oriëntatie behoort vooraf te gaan. In deze oriëntatiefase dient het aanschouwelijkheidsprincipe een kernrol te spelen. Daarna dient pas als af-

sluiting de verwerking (enige oefenvraagstukken) te volgen. Hoewel hij aan dit principe geen aparte aandacht wijdt, zijn veel opstellen in dit boek doortrokken van deze opvatting. Een sprekend voorbeeld van dit principe vinden we in het feit dat Versluys de vormleer, op de lagere school onderwezen als aanschouwelijke meetkunde, als een goede oriëntatie voor de meer formele meetkunde van de middelbare school beschouwt.

Versluys' *derde principe* heeft een anti-vorm. Hij spreekt zich in het algemeen uit tegen dogmatisme en stelselzucht. Passend hierbinnen is zijn oppositie tegen het harnas van de neo-herbartiaanse pedagogiek. Zijns inziens bestaan er geen algemeen pedagogisch-didactische wetten voor het onderwijs in de specifieke vakken. Zelfs binnen het rekenen en de wiskunde zal het per domein of specifieke vraagstelling ervan afhangen hoe de leerstof en het onderwijs gestructureerd en voorbereid zullen moeten worden. Zo bestrijdt hij in een opstel in zijn *Methoden* de algemene geldigheid van de in die tijd gulden regel: 'In het algemeen moet men van het eenvoudige tot het samengestelde overgaan' (Versluys, 1874 pp. 94-98). In zijn in 1878 verschenen boek over de methoden voor het oplossen van meetkundige vraagstukken geeft hij geheel andersoortige didactische adviezen dan in zijn methodiekboeken voor algebra en voor rekenen. Dit 'anti-dogma' principe, dat door Versluys overigens niet expliciet geformuleerd wordt, is tekenend voor het ontstaan van een specifieke vakdidactiek voor rekenen en wiskunde.

Als *vierde principe* van Versluys noemen we de eisen die hij stelt aan de wetenschappelijkheid van enige wiskundeleergang. Dit is een belangrijk punt in zijn opvattingen over de methodische opbouw van schoolboeken. Voor alles eist hij dat een wiskundeleergang mathematisch correct is. Dit is niet in tegenspraak met zijn tweede principe dat een oriënterende en aanschouwelijke fase aan een systematische opbouw vooraf dient te gaan, daar hij dit criterium met name eist voor de leerboeken van de HBS en het Gymnasium. Overigens mag dit voor Versluys nooit betekenen dat mathematische fouten op welk niveau dan ook terwille van de didactiek toegestaan waren.

Zo belanden we bij het *vijfde principe*, dat samenhangt met zijn opvattingen over de waarde van de wiskunde binnen het onderwijs, die hij in eerste instantie toekent aan het vormende aspect, waarvan hij echter niet het alleenrecht voor de wiskunde opeist. Overigens dient opgemerkt te worden dat Versluys ook het praktische nut van de wiskunde hoog aanslaat. Het hangt echter van de doelgroep af waar de accenten gelegd dienen te worden en hoever men met de stof zal gaan. We zouden dit het principe van 'wiskunde naar menselijke maat' kunnen noemen. Vooral als we bedenken dat hij een ijverig bevorderaar was van vereenvoudiging en beperking van de stof. Voor alles diende begripsvol onderwijzen en leren te staan boven een werktuiglijke aanpak die aan de dogmatische methode kleefde. Samenvattend luidden de vijf didactische principes van Versluys:

1 geleide herontdekking
2 oriëntatie – systematische behandeling – verwerking
3 didactische aanpak afhankelijk van het probleem
4 wiskundige correctheid en systematische samenhang
5 beperking van de leerstof; doel afhankelijk van doelgroep.

Als voorwaarde voor uitvoering van deze principes diende volgens Versluys de onderwijsgevende de beschikking te hebben over een goede methode. De onderwijsgevende moest verder inhoudelijk en didactisch goed onderlegd zijn. De klassikale lessen moesten afgewisseld worden met hoofdelijk onderwijs. Van de onderwijsgevende hoopte hij dat deze een enthousiasmerende houding ten aanzien van het vak zou uitdragen.

Nadere beschouwing

Bezien we de genoemde didactische principes nader, dan valt allereerst op dat het principe van de heuristische aanpak door vele anderen vóór Versluys ook gepropageerd is. Het nieuwe in de aanpak van Versluys ligt in de toevoeging van de rol die de leraar hierin speelt en het aangeven van specifieke problemen voor rekenen en wiskunde. Ook het tweede punt zijn we eerder tegengekomen, onder meer bij Diesterweg in verband met de meetkunde. Het derde punt van de specifieke aanpak, afhankelijk van het probleem(gebied), komt ons voor als een nieuw en door Versluys ontdekt principe. Op het vierde principe hebben ook enige voorgangers van Versluys gewezen, maar niet bijvoorbeeld voor de algebra en het rekenen. Versluys heeft dit principe voor het eerst in didactische zin onderzocht voor het totaal van het reken-wiskundeonderwijs.

Het interessante nu is dat we een aantal van deze principes in de volgende honderd jaar van de geschiedenis van de reken- en wiskundedidactiek telkens zullen zien terugkeren.

Het principe van de specifieke aanpak per probleem(gebied) heeft over het algemeen weinig aandacht gekend en moet – we zeiden het al – als een opmerkelijke vondst of nevenopbrengst van het werk van Versluys gezien worden. Ook de laatste twee principes zijn in latere tijden vaak naar voren gebracht, echter bij het verschijnen van de *Methoden* is het de eerste keer dat deze onderwerpen in één geschrift samen werden gebracht. Weliswaar nog niet als een werkelijk samenhangend geheel, maar toch menen we in de *Methoden* voor het eerst in de geschiedenis een echt didactiekboek voor het reken-wiskundeonderwijs te herkennen.[8]

Versluys had dit boek bedoeld voor hen die zich wilden voorbereiden op de zogenaamde akte Q, waarmee de wetgever in 1863 eisen had gesteld inzake de kennis van de theorie van onderwijs en opvoeding. Dit was de didactische aantekening bij een MO-akte, die tot in de jaren vijftig van deze eeuw dienst heeft gedaan, maar nooit

veel aanzien heeft gekend. Het eerste boek over didactiek is overigens geen commercieel succes geweest. Het beleefde slechts twee drukken.

Werkwijze en bronnen van Versluys

We merkten al op dat Versluys een grote kennis had van de actuele ontwikkelingen op het gebied van het onderwijs in het buitenland. Met name was hij goed op de hoogte van de ontwikkelingen in Duitsland en Frankrijk, maar ook kende hij de Nederlandse situatie zeer goed. Hoe hij zich van deze informatie voorzag, is moeilijk na te gaan, maar zijn posities als hoofdredacteur van een aantal onderwijstijdschriften en zijn directe relatie met de uitgeverij van zijn broer W. Versluys kunnen hieraan bijgedragen hebben. Hij zag er geen probleem in om hetgeen hij in het buitenland vond en geschikt achtte voor de Nederlandse situatie direct te vertalen of te bewerken.[9]

Voor zijn rekenboeken vond hij zijn inspiratie in het Duitse taalgebied.[10] De algebra en de rekenkunde achtte Versluys veel geschikter onderwerpen dan de meetkunde om inzicht te krijgen in een wetenschappelijk systeem. Hiermee nam hij een afwijkend standpunt in over de hooggeprezen vormende waarde van de meetkunde, waarover men bij de algebra nooit sprak.[11]

Voor zijn meetkundig werk heeft Versluys zich sterk laten beïnvloeden door de Franse school. Wansink heeft laten zien, dat Versluys als eerste voor het axiomastelsel van J. Houël heeft gekozen, een uitgangspunt dat in Nederland bijna een eeuw standgehouden heeft (Wansink, 1973 pp. 107-110).[12] In zijn *Leerboek der vlakke meetkunde* verwijst Versluys in verband met de grondslagen van de meetkunde naar publicaties van onder meer Lobatschewsky. Versluys hield zich redelijk op de hoogte van de nieuwste ontwikkelingen in de wetenschap, zoals die van de ontdekking van de niet-euclidische meetkunden en de uitwerkingen daarvan op het onderwijs. In de voorrede van zijn *Methoden* stelt hij dat zijn werk sterk verschilt van Duhamels *Méthodes dans les sciences de raisonnement*, maar wij hebben stukken tekst gevonden, die vrijwel letterlijke vertalingen zijn van het werk van Duhamel.[13] Het eerste boek, dat Versluys in 1868 publiceerde, *Beginselen der nieuwere meetkunde*, blijkt een bewerking te zijn van een stuk uit de *Traité de géométrie* van E. Rouché en Ch. de Comberousse uit 1865. Sommige gedeelten blijken letterlijke vertalingen te zijn; ook tekeningen daaruit zijn overgenomen. Verwijzingen zijn nergens te vinden. Overigens moet gezegd dat deze 'bewerking' heel kundig geschied is.[14]

Ook zijn interessante boek *Over methoden bij het oplossen van meetkundige vraagstukken* is gebaseerd op het werk van Duhamel en van Rouché en Comberousse. Versluys, die zelf graag anderen op een 'faux pas' betrapte, had hierin op zijn minst iets prudenter te werk mogen gaan.[15]

Invloed

Het is een bekend en constant verschijnsel dat de effecten van vernieuwende ideeën pas op termijn zichtbaar worden. In eerste instantie zijn het de opleiders, boekenauteurs en theoretici die een innovatie verder beïnvloeden en gestalte geven. Het was ook nu niet zo dat de opvattingen van Versluys een direct effect hadden op het praktisch-didactische handelen van de onderwijsgevende.

Wel heeft Versluys via zijn leerboeken een belangrijke bijdrage geleverd aan de verdere ontwikkeling van het reken- en wiskundeonderwijs en zijn op die indirecte wijze zijn didactische opvattingen verspreid. Vooral doordat hij op een heldere en compacte wijze zijn ideeën formuleerde, bood hij met zijn handleidingen structuur als houvast voor de onderwijzer en de leraar. Hoewel hij solistisch opereerde en nauwelijks school gemaakt heeft, is zijn invloed op de schoolboeken van die tijd onmiskenbaar geweest.

Maar wij wezen er al op dat de in dit hoofdstuk aan de orde gestelde didactische principes van fundamentele betekenis zijn geweest voor de verdere ontwikkeling van de wiskundedidactiek.

Maar wat is nu in feite de rol van Versluys in de geschiedenis van het vormleeronderwijs geweest? Daarvoor keren we terug naar de kern van deze studie en zullen we in het volgende hoofdstuk zijn rol bij de verdere ontwikkeling en de implementatie van de vormleer aan de orde stellen.

A13 De vormleer van Versluys en zijn tijdgenoten (1875-1889)

De vormleerboeken van Versluys leiden een nieuwe fase van onze historie in. Daarom stellen we zijn opvattingen in dit hoofdstuk eerst aan de orde, maar onder vergelijking met de 'gewijzigde' opvattingen van Bouman. In hun kielzog stond een fiks aantal andere auteurs op. Van deze groep bespreken we kort die werken, die van historische betekenis en/of didactisch interessant zijn. In de literatuurlijst is een bij dit hoofdstuk behorend gecodeerd bestand van deze boeken opgenomen, waarvan we de nummers in de tekst gebruiken.

Aanschouwelijke meetkunde

In 1876 verscheen de *Handleiding bij het onderwijs in de vormleer* van Jan Versluys (A13;11a). De inleiding is slechts twee pagina's, maar maakt op bondige wijze duidelijk wat men onder vormleer dient te verstaan:

> 'Het onderwerp der vormleer is (...) hetzelfde als van de meetkunde. (...) Het groote verschil tusschen vormleer en meetkunde is gelegen in de wijze van behandeling. In de vormleer (...) aanschouwing, in de meetkunde (...) redeneeringen, met sluitredenen. Hiermee hangt samen, dat de leerstof niet in beide gevallen dezelfde is. In de meetkunde kiest men uit den grooten voorraad van eigenschappen een aantal, die samen een wetenschappelijk geheel vormen, een stelsel. In de vormleer wordt vooral datgene genomen wat gemakkelijk onder de aanschouwing valt en voor het dagelijksch leven praktische waarde bezit. (Versluys, 1879a. p. 3)[1]

De leergang moet geheel aanschouwelijk zijn, waarbij 'geen afgetrokken redeneeringen voorkomen.' Het doel is 'een stevigen en onmisbaren grondslag voor wetenschappelijk onderwijs in de meetkunde.' De leerwijze zal 'zelfzoekend' (heuristisch) moeten zijn, waarbij de leerling niet alleen zoveel mogelijk 'zelf zal moeten zien', maar ook 'zelf doen'. Het tekenen dient een hulpvak te zijn: 'Een verbinding of samensmelting van de beide leervakken levert geen enkel voordeel op' (Versluys, 1879a, p. 3). Ook Diesterweg, Bouman en Moll stelden zich wel op een dergelijk standpunt, maar in hun methodische uitwerkingen vonden we steevast residuen van de vroegere combinatieleer en uitweidingen naar de formele meetkunde (zie A3 en A7).

Versluys nu stelde orde op zaken en maakte een methode, die voldeed aan haar eigen uitgangspunten. Dit was mogelijk doordat Versluys de door hem voorgestane leergang beperkte tot de drie hoogste klassen van de lagere school (negen tot twaalf jaar). Wel meende hij dat er op de bewaarschool een gunstige invloed van het werken met fröbelmateriaal kon uitgaan en ook was hij een voorstander van de aanschouwingsoefeningen zoals die in die tijd min of meer ingang gevonden hadden in de laagste leerjaren van de lagere school. Hij adviseerde om circa vijf à zes mondelinge en/of schriftelijke lesuren per week aan vormleer te besteden in de drie hoogste leerjaren. 'Dat is zeker niet te veel, als men let op het betrekkelijk groot belang van

de vormleer (...)', zo stelt Versluys in zijn handleiding (Versluys, 1879a, p. 4). Een duidelijk standpunt, verwoord in klare taal, zoals we van Versluys gewend zijn. We zullen aan de beschrijving en analyse van zijn methode zien dat hij deze uitgangspunten ook gestand doet.

De methode

De vormleermethode van Versluys bestaat uit een handleiding en twee vraagstukkenboekjes voor de leerlingen. Het vertrekpunt is de ruimte (kubus, blok, schoollokaal). Daarna volgen evenwijdige lijnen en hoeken, meten, oppervlakte van de rechthoek, som van de hoeken van een driehoek, cirkel, parallellogram en trapezium, oppervlakte van de driehoek, symmetrische figuren (ruit), inhoud van rechte en scheve zuil, gelijkvormigheid, raaklijn aan de cirkel, veelhoeken in de cirkel, oppervlakte van de cirkel, ruimtefiguren en inhouden, vierkantsworteltrekking, Pythagoras, regelmatige ruimtefiguren, afgeknotte ruimtefiguren en iets over combinatoriek. Steeds komen toepassingen voor, ontleend aan de landmeetkunde. Aan het eind van de handleiding is een geschiedkundig overzicht van de vormleer opgenomen. Dit historische aspect is iets waaraan Versluys in bijna al zijn werk aandacht besteedde. Tevens zijn nog een aantal vraagstukken opgenomen van vergelijkende examens, waardoor het lijkt dat dit boek niet alleen als handleiding, maar ook als boek voor de normaalscholen en kweekscholen bedoeld was.

We zien aan de inhoudsopsomming al dat de stof is afgeleid uit de euclidische ruimte- en vlakke meetkunde. Nadere analyse leert echter dat al het gebodene op aanschouwelijke wijze wordt aangeboden en afgeleid. Ook geldt dit voor de twee kernstellingen van de euclidische meetkunde ten behoeve van de metriek, namelijk

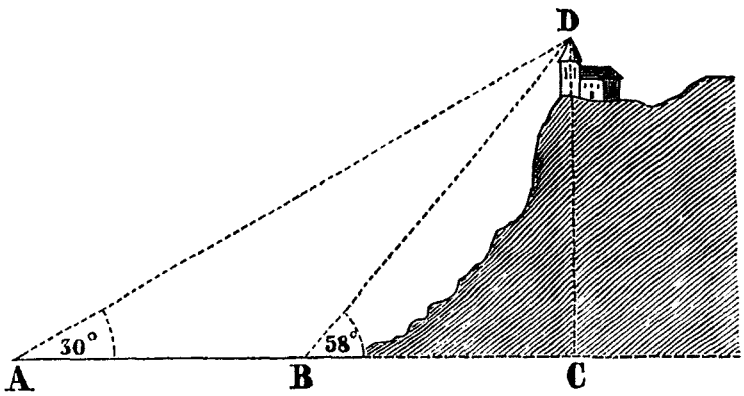
- van twee willekeurige lijnen, die gesneden worden door een aantal evenwijdige lijnen, zijn de afgesneden stukken evenredig en
- de stelling van Pythagoras.

Vooral de eerste stelling is van oudsher een problematisch geval, indien hierbij ook irrationale grootheden betrokken worden. Dit omzeilt Versluys door zich te beperken tot een stelsel van equidistante lijnen en een verkapte congruentieredenering toe te passen (Versluys, 1879a, p. 61). Overigens werden dergelijke redeneringen in de zogenaamd wetenschappelijke cursussen ook vaak toegepast met een uitbreiding naar de irrationale grootheden, waarbij gebruik gemaakt werd van het permanentieprincipe.

De stelling van Pythagoras wordt gebracht als het legpuzzelbewijs, dat in die tijd in Nederland door Multatuli werd opgeëist.[2] Verder is er aandacht voor de basisconstructies met passer en liniaal. Ook beveelt Versluys het maken van 'modellen' aan, waarbij hij verwijst naar Fröbel en het zogenoemde 'staafjes-steken', dat in Duits-

land bij de 'Formenarbeiten' werd beoefend. Dit is het maken van modellen met behulp van stokjes en erwten (Versluys, 1879a, p. 77). Bij de cursus was een omvangrijke set draadmodellen en houten modellen leverbaar, waarmee allerhand eigenschappen gevisualiseerd konden worden.

De vraagstukkenverzamelingen voor de lagere school (A13;11b/c) vormen een afspiegeling van de stof in de handleiding. In het algemeen zijn het eenvoudige opgaven, althans als men ze beschouwt vanuit het standpunt der elementaire meetkunde. Veel aandacht is er bij deze vraagstukken voor oppervlakte- en inhoudsberekeningen met eenvoudige metrieke maten. Verder teken- en constructieopgaven en enkele toepassingen van landmeetkundige aard, waarvan we in figuur A13.1 een voorbeeld geven.



figuur A13.1: Een toepassing bij Versluys (1876)

Vier jaar na het verschijnen van deze handleiding, liet Versluys een boek verschijnen met vraagstukken over vormleer 'vooral ten dienste van normaalscholen en kweekscholen' (A13;11d). In het voorbericht zegt hij dat deze verzameling aansluit bij zijn handleiding, maar dat er moeilijker vraagstukken in staan dan in zijn 'twee rekenboekjes over de vormleer'. Dit klopt, maar de vraag is hoe dit te rijmen viel met Versluys' opvatting uit 1872 dat er eerst een systematische meetkundecursus door de kwekelingen gevolgd zou moeten worden. Indien aan een dergelijke voorwaarde voldaan zou zijn, dan is niet duidelijk wat de kwekeling hieruit nog voor specifieks over de vormleer zou hebben kunnen leren. Waarschijnlijk wilde Versluys, gezien de opleidingssituatie aan de normaalscholen, een handreiking geven aan de kwekelingen aldaar, om hen in ieder geval de stof van zijn vormleer bij te brengen.

Een werkelijk didactische handleiding voor de vormleer bestaat er echter niet, ook niet van Versluys. Men moet het doen met de omschrijving van de vormleer als een voorbereidende activiteit voor de latere wetenschappelijke meetkunde, waarbij de leerlingen enkele meetkundige figuren, eenvoudige eigenschappen en relaties le-

ren kennen, enige constructies maken en vooral ook leren rekenen aan deze meetkundige figuren. De combinatorische vraagstukken à la Van Dapperen zijn vrijwel geheel verdwenen.

De eerder vaak zo geroemde vormende waarde van de zuivere vormleer wordt door Versluys in verband met de vormleer niet genoemd. Hiermee was vooral een duidelijke afbakening van doel en inhoud van het vak bereikt. Of dit alles ook haalbaar was voor de lagere school zullen we nader bespreken. De ontvangst van Versluys' vormleerboeken was uitermate gunstig. In de voorrede van de tweede druk van zijn handleiding in 1879, schrijft Versluys: 'Mijn beknopt leerboek der vlakke meetkunde met de daarnaast geplaatste toelichting, uitgezonderd, is geen mijner pennevruchten van den beginne af zoo van alle zijden gunstig ontvangen als dit' (Versluys, 1879a, voorbericht).

Onderwerpen we zijn cursus aan zijn eigen vakdidactische principes, dan constateren we het volgende. Volledig voldaan wordt aan principe 2 (oriëntatie – systematische behandeling – verwerking); men zou zelfs kunnen zeggen dat de vormleer volgens Versluys hiervan een schoolvoorbeeld is. Aan principe 4 (wiskundige correctheid – systematische samenhang) wordt ook voldaan, mits men de aanschouwing als bewijsgrond wil aanvaarden. Principe 5 (beperking van de leerstof: doel afhankelijk van de doelgroep) wordt in zoverre herkend, dat Versluys in ieder geval het aantal onderdelen van de leerstof voor de kinderen beperkte ten opzichte van andere auteurs. Tevens beperkte hij de stof in de tijd (alleen de hoogste drie leerjaren). Of aan de principes 1 (geleide herontdekking) en 3 (didactische aanpak afhankelijk van het probleem) voldaan is, is niet vast te stellen omdat het leerkrachtafhankelijke factoren zijn. In ieder geval biedt de handleiding hiertoe wel de ruimte.

Bouman en Versluys

In de hoofdstukken A6 en A7 hebben wij aandacht besteed aan de opvattingen en de methode van H. Bouman, die wij ook geschaard hebben onder degenen, die de vormleer vooral als een aanschouwelijke voorbereiding op de 'wetenschappelijke meetkunde' wilden beschouwen. Hij sprak ook steeds van het 'praktisch nuttige', maar bedoelde daarmee vooral op de interne toepassingen van het vak. Zijn boeken hebben we geanalyseerd en wel tot en met de zesde druk, die van 1874 was. Het is nu zaak dat wij ook de laatste drukken, de zevende, achtste en negende, van zijn methode bestuderen. Niet omdat Bouman inhoudelijk de boeken zo enorm veranderd had, integendeel, maar met name omdat hij de titels van de boeken veranderde en omdat hij aan de zevende druk een omvangrijk hoofdstuk van 32 pagina's toevoegde, dat we als een herziene beginselverklaring moeten opvatten.

De zevende druk van Boumans vormleermethode heette vanaf toen: *De vormleer der meetkunde in de lagereschool* (A13;1a). Het eerste hoofdstuk draagt als titel: 'Methode voor het onderwijs in de beginselen der meetkunde', wat al dadelijk de bedoeling

duidelijk maakt. Het is een wat omstandig opstel, dat de volgende paragrafen kent:

§1. De vormleer in de lagereschool
§2. Oorsprong en wezen van de vormleer
§3. Geschiedenis van de vormleer
§4. De voorbereiding tot het onderwijs in de meetkunde
§5. Methodische opvatting van de leer der meetkundige vormen
§6. Onderscheidene gevoelens over de waarde van de vormleer
§7. Verschillende toepassingen van de vormleer

In de eerste paragraaf vraagt Bouman vraagt zich af hoe het mogelijk is dat er in tegenstelling tot het rekenen zo weinig aandacht voor meetkunde op de lagere school bestaat. In feite valt hij Versluys bij in diens standpunt dat de verhouding tussen rekenen en rekenkunde dezelfde is als die tussen vormleer en meetkunde. In beide gevallen is het eerste een aanschouwelijke inleiding en het tweede een meer wetenschappelijke verhandeling. Hij verwijst naar de opvatting van wiskundigen (wie dat zijn, zegt hij niet) om de vormleer te motiveren voor de lagere school:

> 'Van de meest bevoegde zijde is altijd het denkbeeld verdedigd, dat het geometrisch onderwijs vroegtijdig kan en moet beginnen, niet met eene streng wetenschappelijke opvatting, maar met eene eenvoudige en doelmatige voorbereiding, berekend naar de begaafdheid en de ontwikkeling van den leerling. De ervaring heeft geleerd, dat zulk eene voorbereiding de grondslag legt voor eene gelukkige beoefening der Meetkunde.' (Bouman, 1879, p. 2)

In de paragrafen 2 en 3 wordt Pestalozzi nog eens naar voren gehaald als ontdekker van het aanschouwelijkheidsprincipe voor het onderwijs en als grondlegger van de vierslag: 'aanschouwing – voorstelling – begrip – abstractie'. Tevens een korte historie over het wel en wee van de vormleer in Nederland tot dat moment. Paragraaf 4 is een langdradig betoog om aan te tonen dat de term 'aanschouwelijke meetkunde' niet voldoet, 'vormleer' te beladen is vanwege de frustraties in vorige tijden, waarna de introductie van de term 'vormleer der meetkunde' volgt. In deze omschrijving zou het voorbereidende karakter op de meetkunde het best tot uiting komen. Van groot belang is de vijfde paragraaf, omdat nu duidelijk wordt dat Bouman zijn stof zo wilde herschikken, dat binnen zijn eerder gekozen driedeling van de stof het voorbereidende en praktische gedeelte in de laagste en middelste afdeling van de lagere school aan de orde komt, zodat daarna in de derde leerkring (de hoogste klassen) een meer methodische behandeling kon volgen. Deze zou vooral bedoeld zijn voor die leerlingen, die eventueel met de wetenschappelijke aanpak te maken zouden krijgen. Voor deze laatste groep zouden ook 'eigenschappen van de ruimte en hare afmetingen (...) ook door eenvoudige redeneering (...) worden afgeleid'. In paragraaf 6 zet Bouman zijn opvattingen kracht bij door middel van een aantal uitspraken van Steyn

Parvé (viermaal), Noordewier, Gouka, Versluys, Schmid en Gleuns.[3] In de laatste paragraaf bespreekt hij de raakpunten met andere vakken, maar spreekt zich toch uit voor de vormleer als een zelfstandig vak. Opvallend is dat hij nergens de werkelijke toepassingen noemt.

Bekijken we de herschikking van de stof, dan blijkt deze minimaal te zijn. Zo is bijvoorbeeld de oppervlakte van de cirkel naar het meer methodische deel verschoven. Behalve de verandering van de titel, de toevoeging van de besproken inleiding en wat kleine veranderingen of toevoegingen, zien we hier precies hetzelfde boek voor ons als dat van de voorgaande zes drukken. Ook de zin in het voorbericht dat 'thans de tijd is gekomen, om de Vormleer te ontdoen van alle vreemde bestanddeelen' doet meer vermoeden dan de schrijver in feite waarmaakt. Het is gewoon de oude leergang onder een andere titel. Met de laatste en negende druk in 1886 van dit goed verkochte boek wordt alleen de titel nog eens veranderd in *Vormleer, meetkunde in de lagere school.*

Uit dit alles blijkt dat Bouman als het ware een nieuwe onderbouwing wilde geven van zijn vormleer, kiezende voor de toen heersende ideeën van de vormleer als 'aanschouwelijke meetkunde', maar dat hij daarbij geen consequenties wilde (of kon) zien voor zijn eerder gepubliceerde werk. Immers veel in dat werk vertoont nog sporen van de wat formelere aanpak à la Diesterweg en is bepaald niet zo eenvoudig voor de lagere school. De herschikking van de stof maakt het probleem niet makkelijker. Immers, wat Bouman toen voorstelde voor de eerste vier klassen van de lagere school is nog omvangrijker dan wat Versluys voorstelde voor de twee hoogste klassen. Verder neemt hij niet echt duidelijk stelling tegen degenen, die de vormleer verdedigden om haar vormende waarde, ook niet tegenover de aanhangers van het tekenen, kortom hij zwalkt zo'n beetje mee met de nieuwe richting en doet voorkomen of hij dit altijd al bedoeld had. Bovendien heeft hij geen enkele oplossing aangedragen voor de reële toepasbaarheid van het vak.

Versluys en Bouman wilden beiden de vormleer als een aanschouwelijke inleiding tot de meetkunde beschouwen, maar Versluys had een veel duidelijker en praktischer standpunt dan Bouman. Versluys was niet zo ingenomen met de methode van Bouman, waarin hij vooral het methodische element miste (Versluys, 1879a, pp. 128-129). Dat Bouman dit nu juist naar voren bracht als de belangrijkste wijziging van zijn methode doet vermoeden dat hij zich deze kritiek heeft aangetrokken. Ook Boumans overstap naar de aanschouwelijke meetkunde – zij het met enige terughoudendheid, zoals zijn gedraai over de benaming – sterkt het vermoeden dat Versluys invloed heeft uitgeoefend op de opvattingen van Bouman.

De vaagheid over de vormende waarde van de vormleer was nu voorbij en er stond een nieuwe generatie schoolboekauteurs op die vrijwel allen in de geest van de aanschouwelijke meetkunde gingen werken. Versluys heeft hiervoor dé aanzet gegeven. Deze generatie vormleerboeken nemen we nu onder de loep.

Boekenbestand van de Versluys-periode

Het onderzoek naar de boeken over vormleer uit de periode van 1875 tot 1889 heeft een bestand opgeleverd, dat apart in de literatuurlijst is opgenomen onder de nummers A13;1a tot en met A13;16c. Het zijn eerste drukken, voorzover die te achterhalen waren, maar ook de laatste drukken van Boumans boeken zijn hierin betrokken. De lijst is alfabetisch gerangschikt naar auteursnaam en voorzien van enige feitelijke informatie. Het aantal drukken is bepaald naar eigen waarneming of op grond van de uitgave van *Brinkmans Cumulatieve Catalogus* (BBC) van 1882-1891. Gebleken is dat deze gegevens niet zonder meer betrouwbaar zijn. We onderscheiden handleidingen (hl), leerlingboeken (llb) en studieboeken/materiaal (sm). De laatste categorie omvat boeken voor zelfstudie en vraagstukkenverzamelingen. Van zestien auteurs uit de periode 1875-1889 zijn de vormleerboeken gevonden. Alleen Bouman en Versluys schreven voor alle drie de categorieën. Een aantal bleek onvindbaar.[4] In de tabel van figuur A13.2 zien we dat het hoofdzakelijk om leerlingboeken gaat.

	hl(*)	llb(**)	sm(***)
Bouman	•	•	(•)
Donck			•
Koenen & Brogtrop		•	•
Koonings		•	
Molema		•	(•)
Mulder	•		
Raadersma		•	•
Van Roekel			(•)
Tiemersma		•	•
Veenstra		•	(•)
Versluys	•	•	•
Van Wamel & Werdes		•	
Weersma		•	
Welker		•	
Woltering			•
IJkema	•	•	

figuur A13.2: Vormleerboeken van 1875 tot 1889

Vergelijking van dit bestand (1875-1889) met het voorgaande (1857-1875) leert dat er geen boeken over *zuivere vormleer* (combinatoriek) meer voorkomen. Alleen bij Bouman en Veenstra vinden we daar nog residuen van. Ook zijn geen *formele meetkunde*boeken meer te ontdekken. De nieuwe boeken, die zich op het *tekenen* richten, zijn beperkt tot het technisch tekenen en construeren; het *esthetische aspect* krijgt geen aandacht meer. Ook de restcategorie van *mengvormen* en *curiosa* is verdwenen. Van de zes categorieën, die we in A7 onderscheidden, zijn er dus drie verdwenen. De overige categorieën (*meetkundig rekenen, tekenen* en *praktische vormleer* of *aanschouwelijke meetkunde*) kunnen, gezien de uitwerkingen in de boeken, tot één teruggebracht worden.[5] Vanaf 1875 dient vormleer dus als aanschouwelijke meetkunde opgevat te worden.

Analyse handleidingen 1875-1889

De handleiding van Bouman (A13;1a) is al uitvoerig besproken in A7. Naast een motivering van het vak geeft het boek hoofdzakelijk inhoudelijke informatie. Microdidactische aanwijzingen ontbreken.

Ook de hiervoor besproken handleiding van Versluys (A13;11a) is voornamelijk op inhoudelijke achtergrond gericht. Een exposé over het gebruik van het fröbelmateriaal is een didactische toevoeging. Ook het consequente gebruik van het aanschouwelijkheidsprincipe, zoals het bepalen van de oppervlaktes van rechtlijnige figuren door middel van omstructureren, is te beschouwen als een didactische handreiking. Bovendien kon men in die tijd eventueel ook gebruik maken van Versluys' *Methoden bij het onderwijs in de wiskunde* (zie A12). Nieuw in de handleiding zijn een stuk over 'Meten op het land' en een 'Geschiedkundig overzicht' van de vormleer.

Mulders handleiding (A13;6) is een overdruk van een niet erg systematisch opgezet artikel uit de *Gids voor den Onderwijzer*. Het is een pleidooi voor een empirische aanpak en concrete zelfwerkwerkzaamheid.

IJkema (A13;16a) legt de nadruk op heuristiek en zelfwerkzaamheid, ook op het concrete niveau (tekenen, knippen, vouwen), maar toch geeft deze methode een geheel eigen interpretatie van de vormleer. De opvattingen van Versluys zijn duidelijk herkenbaar. Toch geeft IJkema een geheel eigen interpretatie van de vormleer. Nadere bestudering van de handleiding in samenhang met de leerlingboekjes brengt een aantal opmerkelijke mathematisch-didactische vondsten aan het licht.

Samenvattend: de vier *handleidingen* zijn zeer verschillend en in het algemeen nog tamelijk primitief. Maar hoe kon men ook anders verwachten bij de toenmalige stand van de vakdidactiek? Desondanks boden ze voor die tijd in ieder geval de mogelijkheid om een nieuwe visie op de vormleer te ontwikkelen. Vooral Versluys heeft in dit opzicht een belangrijke bijdrage aan de vernieuwing geleverd. Het meest praktisch voor het onderwijs was ongetwijfeld de handleiding van IJkema, waarover dadelijk meer.

Analyse leerlingboeken 1875-1889

De tabel en toelichting van figuur A13.3, waarin een totaaloverzicht van de leerlingboeken van de onderhavige periode wordt gegeven, levert een eerste indruk van de omvang van de aard en moeilijkheidsgraad van de verschillende methoden.

De dertien gevonden *leerlingboeken* zijn weliswaar alle gebaseerd op het idee van de aanschouwelijke meetkunde, maar de uitwerkingen waren geenszins uniform. Slechts van een enkele auteur zien we een werkelijk nieuwe didactische inbreng.

Het meest beperkt is het boekje van Koonings (A13;4), dat alleen oppervlakte en inhoud behandelt. Drie methoden, die van Bouman (A13;1b,c), Tiemersma (A13;9a/b) en Veenstra (A13;10) zijn van een veel te hoog niveau voor de lagere school. Over drie methoden, die van Molema (A13;5a,b,c)[6], Weersma (A13;13) en Welker (A13;14)[7] is nauwelijks een oordeel te geven. Over het eerste en het laatste vooral om hun afwijkende aanpak.

Van de resterende zes methoden is die van Raadersma (13A;7a,b,c,d) het minst evenwichtig. Toch hebben zijn boeken commercieel succes gehad. In 1912 verscheen nog een tiende druk. De uitgaven onder de naam *Vormleer* en *Meten, teekenen en rekenen* zijn vrijwel identiek. Kenmerkend is de uitgebreide aandacht voor de bepaald niet zo eenvoudige problematiek van de oppervlakteveranderingen en het ontbreken van de stelling van Pythagoras. Het tweede deeltje is veel meer een aanschouwelijke meetkundecursus dan het eerste. In 1895 verschijnt van deze auteur nog *Voor het leven. Meet, teeken en reken.* (13A;7e) als een vereenvoudiging, maar nu gaat het vooral om het werken met metrieke maten.

Beknopt, maar zeer goed haalbaar voor de lagere school was de methode van Van Wamel en Werdes (A13;12a,b).

Interessant is de methode van Mulder (A13;6), waarin op zinvolle wijze de handenarbeid, die in die tijd ook ter sprake werd gebracht als leervak voor de lagere school, aan de vormleer wordt gekoppeld. Mulder houdt een pleidooi voor de zelfwerkzaamheid: tekenen, knippen, vouwen en plakken. Er worden zinvolle wiskundige problemen aan de orde gesteld, maar het blijft meestal in empirisme steken. Een goed voorbeeld zien we in figuur A13.4, waarin het probleem van figuren met constante oppervlakte, maar verschillende omtrek, aan de orde komt.

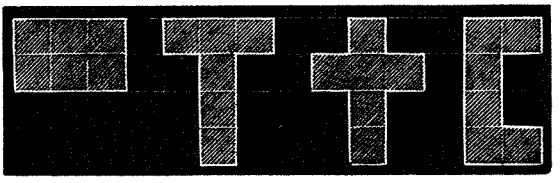
De onderwerpen behelzen metriek stelsel, oppervlakte van vlakke figuren, eigenschappen van driehoek en vierhoek, hoeken, cirkel, Pythagoras, kubus, balk, prisma, cilinder en kegel, alles steeds door middel van het vervaardigen van modellen uit karton. Een systematiek ontbreekt, maar Mulder verwijst daarvoor veelvuldig naar het werk van IJkema.

	mf	nw	eh	co	op	in	vv	ev	py	lj	gn	opm
BOU	!	o	!	o	+	+	o	+	o	1-6	!	nog veel comb
K&B	!	+	+	+	+	?	+	o	+	4-6	+	instrumenteel
KOO	o	o	o	o	+	+	o	o	o	5-6	+	beperkt
MOL	+	o	?	?	?	o	?	?	?	4-6	?	dwingend rooster
MUL	+	+	+	o	+	+	o	o	+	5-6	+	handenarbeid
RAA	+	+	o	+	+	?	!	!	o	4-6	+	onevenwichtig
TIE	+	+	o	o	+	?	!	o	!	4-6	!	weinig systematiek
VEE	?	o	?	+	?	o	o	?	!	4-6	!	sommenboek
VER	+	?	!	+	+	+	+	+	+	4-6	+	system./toepassingen
WAM	+	o	+	+	+	+	o	o	o	4-6	+	simpel en beknopt
WEE	?	o	?	?	+	o	?	?	?	4-6	?	zeer beknopt
WEL	+	o	o	?	+	?	o	o	o	2-6	?	technocratisch
IJKE	+	+	o	+	+	+	+	o	o	4-6	+	didactisch nieuw

Verklaring tabel:
mf: meetkundige figuren; begrip, benoeming en eigenschappen
nw: netwerken uitslagen van ruimtelijke figuren maken en lezen
eh: evenwijdige lijnen en hoeken; begrippen en eigenschappen
co: constructies meten/tekenen en passer- en liniaalconstructies
op: oppervlakteberekeningen: afleiding driehoek, parallellogram, cirkel (trapezium)
in: inhoudsberekeningen, verklaring van formules: kubus, blok, piramide, cilinder, kegel, bol
vv: vormverandering van vlakke figuren onder behoud van oppervlakte
ev: evenredigheden: berekeningen op grond van gelijkvormigheid
py: pythagoras, afleiding van de formule, toepassing van de formule
o: ontbreekt
+: passend niveau
!: (te) hoog niveau voor lagere school
?: te weinig gegevens om een oordeel te geven
lj: leerjaren, waarvoor de methode bedoeld is
gn: geschatte niveau van moeilijkheid van de totale methode.

figuur A13.3: Aard en niveau van de leerlingboeken vormleer 1875-1889

Knipt uit uw ruitwerk stukken van verschillenden vorm, doch alle 6 centimeter-vierkanten groot, b.v.:



Telkens bespreken van omtrek en het aantal centimeter-vierkanten in de onderscheiden rijen.

figuur A13.4: Empirisch onderzoek (Mulder,1885)

De methode van Koenen en Brogtrop (A13;3a/3b) is goed gestructureerd en van een passend, eenvoudig niveau, waardoor aan de onderwijzer een redelijk houvast werd geboden. Deze boeken hebben veel succes gehad. Het eerste deel is zeker tot 1912 herdrukt (10-de druk). De titel *Meten en Teekenen* geeft de inhoud goed weer. De opdrachten hebben echter zelden iets uitdagends. Alles over gelijkvormigheid is weggelaten. Het doel is (aanschouwelijke) overdracht van (instrumentele) kennis, zoals we bijvoorbeeld zien in de volgende opgave:

> 'Teeken eenen cirkel met eenen straal van 5 cM. Leg een draadje of touwtje om dien cirkel, en meet zoo den omtrek. Bepaal met uw maatstokje de lengte van het draadje of het touwtje, dat juist om den cirkel past.
> VRAGEN. Hoe lang is de middellijn? Vindt ge voor den omtrek niet 3,14 dM?
> OPMERKING. Van elken cirkel is de omtrek 3,14 maal zo groot als de middellijn. 3,14 of 3 14/100 is nagenoeg 3 14/98 of 3 1/7, d.i. 22/7. De omtrek eens cirkels is dus nagenoeg gelijk aan 22/7-maal de lengte der middellijn'.
> (Koenen en Brogtrop, 1889, p. 32)

Men kan zich voorstellen dat verschillende wiskundeleraren van het middelbaar onderwijs bezwaren maakten tegen dergelijke kennisoverdracht.

In de boeken van Versluys (A13; 11b,c), die hiervoor al zijn besproken, worden de meeste onderwerpen aangesneden, maar wel op een eenvoudig, passend niveau.

Bijzonder is de methode van IJkema (A14;16b,c) vanwege diens nieuwe didactische vondsten. De twee leerlingboeken staan in het teken van het leren van begrippen, het tekenen van figuren, het vervaardigen van ruimtefiguren uit karton en het berekenen van oppervlaktes en inhouden. Daarbij worden de verschillende figuren systematisch afgewerkt. We geven een voorbeeld:

> '1. Teeken een rechthoekig trapezium, waarvan de evenwijdige zijden 8 en 5 cM. en de hoogte 4 cM. is.
> 2. Een rechthoekig trapezium teekenen, waarvan de evenwijdige zijden 8 en 5 cM. zijn, en de schuine zijde 7 cM. is.
> 3. Een gelijkbenig trapezium teekenen, waarvan de evenwijdige zijden elk 10 en 7 cM. en de schuine zijden elk 5 cM. zijn.' (IJkema, 1886, p. 17)

Uit de handleiding blijkt dat achter deze vraagstukken een voor die tijd bijzondere didactiek schuilgaat. Het trapezium wordt als volgt geïntroduceerd. Eerst wordt een rechthoek getekend en uitgeknipt. Daarna worden door afknippen van driehoeken het rechthoekige en het gelijkbenige trapezium geknipt. Van het laatste laat men door vouwen de symmetrieas ontdekken. Ook wordt zo het ongelijkbenige trapezium gemaakt. Kennen de kinderen deze figuren, dan wordt door verder verknippen de figuur ontleed in de bekende vierhoeken en driehoeken. Zo kan het gelijkbenige trapezium ontleed worden in een rechthoek en twee rechthoekige driehoeken of in een parallellogram en een gelijkbenige driehoek. Op grond van dergelijke kennis dienen de bovenstaande constructies gevonden te worden. In het tweede vraagstuk zal het nodig zijn een rechthoekige driehoek te construeren waarvan een rechthoekszijde en de hypotenusa bekend zijn. Hierbij wordt geen passer gebruikt, maar wordt de hypotenusa met een behulp van een 'meetstokje' afgepast. Op deze wijze worden tal van dergelijke teken-, knip- en meetconstructies aan de orde gesteld. De gehele leergang blijft in feite op dit concrete constructieniveau. Eigenschappen over de hoeken, evenwijdigheid, berekeningen en dergelijke blijven buiten beschouwing. Ook met de ruimtelichamen wordt zeer concreet te werk gegaan. Het is een bijzondere leergang, die het tot het eind van de negentiende eeuw met vijf drukken zijn betekenis heeft gehouden.

Maar naast deze 'nieuwe' boeken werd ook nog het verstofte *Rekenboek voor jongens, tweede deeltje, over de meetkunde* van de bekende Hemkes gebruikt, getuige de achtste druk van dit boekje in 1884.

Al met al een verzameling boeken die, op het boek van Hemkes na, de nieuwe richting van aanschouwelijke meetkunde onderschreef, maar waarvan toch gesteld moet worden dat de bontheid van het aanbod geen vast richtsnoer voor de onderwijzer kon zijn.

Acceptatie

Aan de hand van het aantal drukken krijgen we een indruk van de acceptatie. Wanneer een methode uit meerdere deeltjes bestond, is steeds het hoogste aantal drukken van enig deeltje opgegeven: Bou (2), K&B (10), Koo (6), Mol (2), Mul (?), Raa (10), Tie (3), Vee (1), Ver (6), Wam (2), Wee (1), Wel (1), IJke (5). De grootste verspreiding hebben de boeken van Koenen en Brogtrop en Raadersma met elk tien drukken gehad, terwijl ook die van Versluys (zes drukken) en IJkema (vijf drukken) redelijke oplagen hebben gekend. De kwaliteit van de methoden van Koenen en Brogtrop, Versluys en IJkema stroken met deze cijfers. Dat de kwalitatief wat mindere methode van Raadersma met tien drukken ook een grote verspreiding heeft gekend, komt waarschijnlijk doordat het ook als studieboek op de normaalopleidingen werd gebruikt. Van Wamel en Werdes waren met hun uitgave kennelijk te laat. De door ons als minder geschikt geachte methoden hebben het kennelijk niet kunnen redden. Ook

de methode van Welker, die het technische tekenen centraal stelde, heeft geen invloed gehad.

Analyse studieboeken 1875-1889

Het *Practisch-Meetkundig Handboek op aanschouwelijke grondslagen voor zelfonderricht* van J.J.C. Donck (A13;2) was bedoeld 'voor die aankomende onderwijzers, welke geen mathematische opleiding genieten'. Voor dit geschrift is geput uit een boek van Kehr, *Practische Geometrie für Volksschulen*, dat wij niet hebben kunnen achterhalen. Hierdoor is een voor die tijd afwijkend studieboek ontstaan. Praktische voorbereidingen voor de meetkunde, zoals we die in de andere aanschouwelijke meetkundeboeken tegenkomen, missen we hier node. Het boek heeft ons inziens weinig invloed gehad, behalve dan dat onderwijzers van de Haarlemse Kweekschool, waar Donck van 1862 tot 1883 leraar is geweest, misschien een wat merkwaardige inleiding in de meetkunde hebben genoten. [8]

De boeken van Koenen en Brogtrop (A13; 3c,d,e,f) zijn bestsellers geweest. De verklaring hiervoor vinden we in de aanvangszin van het voorbericht van de eerste druk uit 1879: 'Deze Aanschouwlijke Meetkunde is geschreven met het oog op Art. 60 en 61c der Schoolwet van 17 Aug. 1878.' Het artikel 60 bepaalde dat op het onderwijzersexamen in de 'beginselen van de vormleer' geëxamineerd diende te worden, terwijl artikel 61-c inhield dat voor het hoofdakte-examen ook de wiskunde verplicht was. Er was dus behoefte aan een meetkundeboek voor de opleiding en daarin konden Koenen en Brogtrop kennelijk voorzien. In 1885 moest al de vijfde druk opgelegd worden, terwijl een jaar eerder nog een gestripte versie van het boek uitkwam onder de titel *Beknopte Aanschouwlijke Meetkunde* (A13;3c/d), bedoeld voor de eerste klassen van het voortgezet lager onderwijs en de eerste klassen van de normaalscholen. De methode pretendeert geen wetenschappelijke behandeling van de meetkunde te zijn, maar er worden wel zoveel mogelijk onderwerpen van de vlakke- en ruimtemeetkunde gepresenteerd. Dit laatste leidt tot het mededelen van stellingen en formules, waarvoor geen aanschouwelijke verklaring gegeven kan worden, zoals: de bissectrices van een driehoek gaan door één punt, de formule van Heron, de formule van Euler en de inhoudsformules van een aantal ruimtelichamen. Buiten beschouwing blijft in de planimetrie alles wat enigszins zou kunnen lijken op logisch redeneren. Kennelijk zat men nog zo vast aan de methode van de euclidische meetkunde als paradigma voor logisch redeneren, dat elke schijn dat er 'echte meetkunde' werd bedreven, vermeden werd. Dan blijkt wel dat, als men vasthoudt aan de inhoud van de traditionele meetkunde, er grenzen zijn aan wat men als stof kan kiezen. De boeken lijken ook bedoeld als voorbereiding op de vergelijkende examens.

Studieboeken als die van Koenen en Brogtrop waren noch een vormleercursus op hoger niveau, vooral omdat het didactische element ontbrak, noch konden ze voor een werkelijk aanschouwelijke meetkundecursus doorgaan. Hoe dit ook zij, kenne-

lijk voldeden deze boeken in de praktijk aan het doel waartoe ze geschreven waren, namelijk voorbereiding op de onderwijzersexamens. We kunnen ons echter voorstellen dat voor Versluys de onnauwkeurigheden in deze boeken een doorn in het oog waren; reden waarom hij telkens weer naar voren bracht dat de onderwijzers, alvorens zich met de vormleer bezig te gaan houden, eerst een systematische meetkundecursus gevolgd zouden moeten hebben.

Met de opvattingen van Molema (A13; 5c) hebben we al kennisgemaakt. Alleen het derde deel ziet de auteur als geschikt voor de normaallessen. Het behandelt kort enkele planimetrische eigenschappen, de stelling van Pythagoras, enkele landmeetkundige toepassingen en de bekende vormveranderingen van figuren.

De boeken van Van Roekel (A13;8), Tiemersma (A13; 9a) en Woltering (A13; 15) zijn het best te typeren als vraagstukkenverzamelingen, vaak ontleend aan examens voor onderwijzers, die voor de hoofdakte studeerden.

Tot slot komen we weer bij Versluys uit, wiens handleiding al is besproken. Zijn vraagstukkenverzameling voor de kwekeling (A13;11d) is een boek om boven de stof te komen te staan. Hij probeerde telkens maar weer interesse voor de vormleer te wekken. In 1879 startte Versluys een tijdschrift voor vormleer, rekenkunde en de beginselen der wiskunde. Het openingsartikel heet 'Vormleer en wiskunde. Volgens de wet van 1878.' In dit stuk geeft hij opnieuw zijn mening over de wijze, waarop men aan de kwekelingen de vormleer zou dienen te onderwijzen.

> 'Terwijl de jongelui 13, 14 en 15 jaar zijn, behandelen zij de beginselen der wiskunde en wel een beknopt leerboek der vlakke meetkunde, een beknopt leerboek der stereometrie en de algebra tot de vierkantsvergelijkingen. Het vele en moeilijke vraagstukken maken kan daarbij achterwege blijven. Terwijl de leerlingen 16 en 17 jaar zijn, kunnen zij met vrucht de vormleer beoefenen en zich een goeden leergang voor de lagere school eigen maken.' (Versluys, 1879c, p. 8)

Voor de hoofdakte hoopte Versluys op een steviger examen in de wiskunde, daar de hoofdonderwijzer formeel ook een bevoegdheid kreeg om de wiskunde te onderwijzen. We hebben gezien dat dit in de praktijk van de examens geheel anders is uitgepakt (zie A8). In 1887 laat Versluys nog een aanvulling op zijn handleiding verschijnen: *Vormleer voor meergevorderden* (A13; 11g). Dit boek bevat moeilijker vraagstukken, meer diepgaande theoretische beschouwingen, waardoor het her en der op een formeel meetkundeboek begint te lijken. Maar ook voegt hij dan allerlei onderwerpen uit het tekenen toe, zoals vlakvullingen en ornament-tekenen. Niet verwonderlijk als we bedenken dat Versluys sinds 1881 wiskundeleraar was aan de Rijks Normaalschool voor Teekenleraren te Amsterdam. Tevens vinden we in het boek de enkele artikelen over vormleer, die Versluys publiceerde in zijn hierboven genoemde tijdschrift. Hoe armzalig het eigenlijk stond met de didactiek van het vak blijkt uit het feit dat aan dit boek ook een paragraaf met 'Opgaven over methodiek van vergelijkende examens' is toegevoegd, dat slechts tien opgaven bevat.

Samenvattend concluderen we dat de gevonden *studieboeken* tot 1889 alle, op dat van Versluys na, een wat tweeslachtig karakter vertonen: enerzijds uitgaand van aanschouwelijkheid, anderzijds uitstapjes makend naar de formele meetkunde. Sommige van deze boeken zijn niet anders dan vraagstukkenverzamelingen. Ook in deze categorie hebben de boeken van Koenen en Brogtrop het grootste commerciële succes gehad. Aan een didactisch studieboek ontbrak het in feite.

De onderhavige periode werd gekenmerkt door een breuk met de zuivere vormleer en een toewending naar de aanschouwelijke meetkunde, waarbij het praktische nut en de voorbereidende waarde voorop kwamen te staan. De vormleer leek door de nieuwe boeken een gunstige toekomst beschoren, maar we zullen in de volgende twee hoofdstukken zien hoe deze ontwikkelingen andermaal gefrustreerd werden.

A14 Tekenen en vormleer

Om de verdere ontwikkelingen vanaf 1875 te kunnen begrijpen, moeten we de geschiedenis van het tekenonderwijs kort onder ogen zien. Voor de historische feitelijkheden van het ontstaan van het tekenonderwijs baseren wij ons op het werk van Lako (1899), Koevoets en Van Rheeden (1980), Van Rheeden (1988) en Asselbergs-Neessen (1989). Vooral is van belang in hoeverre de ontwikkelingen van de vormleer en het tekenen elkaar beïnvloed hebben en hoe het mogelijk is geweest dat uiteindelijk de vormleer voor het tekenen op de lagere school is ingewisseld.

Opinieleiders

Net als bij de vormleer wierp zich ook voor het tekenen een klein aantal mannen als voorvechters op. Voor de eerste helft van de negentiende eeuw was dat de pestalozziaan R.G. Rijkens. Steyn Parvé bracht tegen het midden van die eeuw de tekenmethode van de gebroeders Dupuis naar Nederland en voerde die op het Atheneum te Maastricht in. In het laatste kwart van deze eeuw traden drie personen naar voren die een beslissende rol zouden spelen in de acceptatie van tekenen als leervak voor de lagere school en als zelfstandige discipline voor de opleiding. Dit zijn de tekenleraren W.B.G. Molkenboer[1], D. Lako[2] en de ambtenaar Victor E.L. de Stuers, van wie de laatste misschien wel de belangrijkste is geweest.

De Stuers, die een fel strijder voor het behoud van culturele waarden was, bekleedde sinds 1875 de post van chef-referendaris van de afdeling Kunsten en Wetenschappen van het Ministerie van Binnenlandse Zaken. Uit de geschiedschrijvingen blijkt dat de drie genoemde heren goede contacten onderhielden, waardoor er dus directe lijnen naar de overheid waren.

Ook moeten we nog Jan Versluys noemen, die in dit deel van onze historie ook een zekere rol vervulde. Maar, gezien zijn docentschap aan de Rijks Normaalschool voor Teekenleraren, waar hij vanaf de oprichting in 1881 de wiskundige vakken voor zijn rekening nam, gezien zijn wiskundige achtergrond en zijn bemoeiingen met de vormleer en het tekenen op de lagere school, moet ook hij als een van de belangrijke figuren in deze periode aangemerkt worden.

Doelen van het tekenonderwijs

Het afbeelden van de werkelijkheid op een plat vlak wordt van oudsher als een van de belangrijkste doelen van het tekenonderwijs beschouwd. Het is niet verwonderlijk dat Comenius, Rousseau, Locke en Pestalozzi als voorstanders van het aanschouwelijk maken van de leerstof ook de vaardigheid van het afbeelden zelf belangrijk achtten voor het onderwijs. Pestalozzi meende tevens dat de ontwikkeling van de kunstzin en creativiteit een essentieel element van het onderwijs en de opvoeding diende te zijn, maar het leren tekenen zou vooral in dienst horen te staan van de

vorming van de moraal. Joseph Schmid verwoordde deze opvatting in zijn handboek voor het tekenonderwijs zelfs als volgt: 'Der Mensch soll durch die Kunst ein höherer edlerer Mensch werden' (Schmid, 1809b, p. XII). Hoewel veel van de tekenoefeningen van Schmid dezelfde zijn als die bij de vormleer, namelijk het samenstellen van figuren onder bepaalde voorwaarden, werd het vak tekenen toch als een aparte discipline beschouwd.

Naast deze hooggestemde doelen werd door de pestalozzianen ook een concreet doel voor de volksschool nagestreefd: het kunnen tekenen van eenvoudige figuren naar de werkelijkheid. Zoals we reeds in A2 zagen, stond in de pestalozziaanse zienswijze bij de vormleer de ontwikkeling van de verstandelijke vermogens voorop; bij het tekenen streefde men ook formele waarden na, maar dan meer in morele zin. In Nederland was het Rijkens, die in 1829 een tekenmethode in de pestalozziaanse trant deed verschijnen. In A3 wezen we er al op dat Rijkens het tekenen een belangrijker schoolvak dan de vormleer vond, dat hij dan ook in dienst van het tekenen wilde stellen.

Net als bij andere vakken van onderwijs gingen vanaf het midden van de negentiende eeuw de maatschappelijke, economische en technische ontwikkelingen het onderwijs in al zijn facetten beïnvloeden. We zagen al eerder de omslag naar het meer praktische aspect voor de vormleer. Dit nu gold ook voor het tekenonderwijs. In 1851, bij de eerste wereldtentoonstelling in Parijs, schijnen de producten van Nederland een armzalige indruk gemaakt te hebben. Bovendien werd er in het algemeen geklaagd over gebrek aan cultuurbesef en gebrek aan goede smaak, zowel in historisch als in actueel opzicht. Op sprekende wijze werd dit naar voren gebracht door De Stuers, die in 1874 in *De Gids* de overheid opriep hierin een actiever beleid te voeren.[3]

Nadat in 1877 in het Paleis voor Volksvlijt te Amsterdam een Tentoonstelling van Kunst toegepast op Nijverheid was gehouden en er 'In allerlei week- en dagbladen werd gejeremieerd over de slechte indruk die onze kunstnijverheid maakte in vergelijking met die van andere landen' (Koevoets en Van Rheeden, 1980, p. 18), was dit koren op de molen van de voorstanders van de invoering van het tekenonderwijs. Enerzijds ontstond er een streven naar de ontwikkeling van het tekenen als vak van 'schone kunsten', anderzijds werd aangedrongen op beter tekenonderwijs ten behoeve van de kunstnijverheid. Voor het laatste wilde men in Nederland opleidingen naar Engels voorbeeld, die specifiek op het ontwerpen en het produceren van kwaliteitsvolle massaprodukten toegesneden waren.

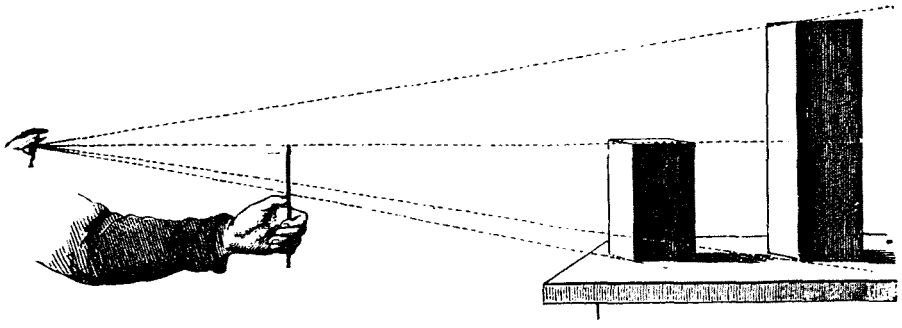
Werd in de eerste helft van de negentiende eeuw het tekenen vooral vanwege zijn formele waarden, zoals ontwikkeling van schoonheidszin, goede smaak, creativiteit en moraliteit, gemotiveerd, in de tweede helft was het de materiële waarde (nuttigheid), die vooropstond. Hoe deze omslag naar het meer praktische aspect ook de ontwikkeling van de didactiek van het tekenen zou beïnvloeden, zullen we nu eerst kort

bespreken. Dit is van belang, omdat juist de didactische uitwerking van het tekenen in nauw verband staat met de vormleer en het aanvankelijk meetkundeonderwijs.

Onderwijskundige en didactische ontwikkelingen

Het tekenen heeft zeker gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw niet veel betekend in het lager onderwijs. Op zijn best werd er iets aan het natekenen van voorbeelden gedaan. Tevens gaf de vormleer soms aanleiding om te tekenen. Wel bestonden er al vanaf het begin van de negentiende eeuw zogenaamde tekenscholen, waar vooral het technische tekenen ten behoeve van de ambachten een belangrijk programma-onderdeel was. Op deze scholen werd ook elementaire meetkunde, waaronder construeren, en perspectief onderwezen.[4]

Steyn Parvé schreef enkele opwekkende artikelen in de *Nieuwe Bijdragen* over de methode van de Franse gebroeders Dupuis, die in de jaren dertig van de negentiende eeuw de methode van het zogenoemde 'natuurtekenen' hadden ontworpen.[5] In deze methode werd gebroken met het 'kopiëren' en werd nagestreefd om direct naar de natuur – bedoeld werd de werkelijkheid – te tekenen. De methode bestond uit twee delen, waarvan de eerste van Ferdinand Dupuis een sterk geometrisch karakter had. Eerst werden vlakke draadfiguren nagetekend, daarna ruimtelijke modellen, dan volgden blokken en andere ruimtelijke lichamen waarvan de achterkanten dus onzichtbaar zijn. Ten slotte sloot het perspectief-tekenen dit cursusgedeelte af. Er werd geen meetkundige kennis voorondersteld of toegepast, maar op empirische wijze werden enkele elementaire eigenschappen van de centrale projectie opgebouwd. Een bekend hulpmiddel van het vergelijkend meten zien we in figuur A14.1. Pas wanneer de leerlingen de geometrische cursus doorlopen hadden, volgde de meer artistieke cursus van Alexandre Dupuis.



figuur A14.1: Centrale projectie (Braet von Überfeldt en Bing, 1863)

Wij beperken ons tot het eerste gedeelte van de cursus, die de meeste invloed in Frankrijk, Duitsland, Engeland en Nederland heeft gehad. Geheel in de stijl van die tijd was de cursus opgezet volgens de klassikale methode. Naar aanleiding van een

door de Maatschappij tot Nut van 't Algemeen uitgeschreven prijsvraag werd in 1860 een handleiding voor het tekenonderwijs uitgegeven, die geënt was op de Dupuis-methode. Hierbij werd eveneens een collectie modellen beschikbaar gesteld. Uit het voorwoord citeren we het volgende:

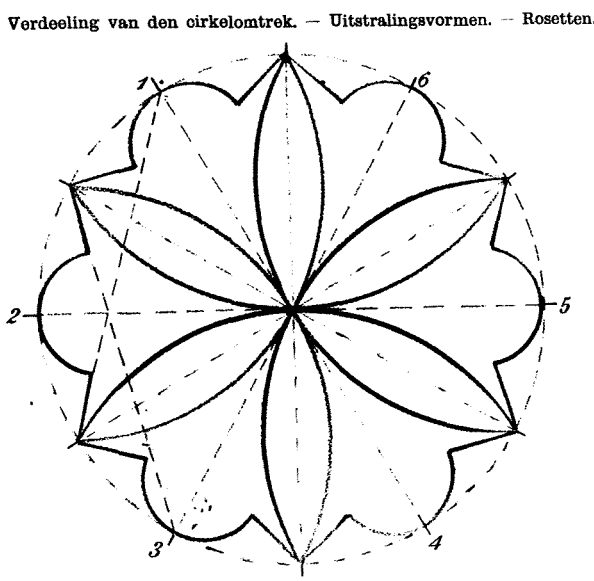
> 'Zij ('t Nut, EdM) begeerde deze Handleiding ingerigt naar de bekende leerwijze van de Gebroeders DUPUIS. De hoofdgedachte althans dier Methode, als voortzetting van de Vormleer, scheen meer dan eenig andere in het leerplan en in de inrigting onzer Scholen voor Volksonderwijs te passen.'

Ook 't Nut streefde dus tekenen voor de volksscholen na, maar opgezet volgens Dupuis én als voortzetting van de vormleer. Dit betekende dat men de vormleer onder meer als een voorbereiding beschouwde voor het tekenen in het voortgezet onderwijs, i.c. het (M)ULO. In 1863 volgde een wat verder uitgewerkte handleiding van Braet von Überfeldt en V. Bing. In 1866 werd deze gevolgd door een handleiding over perspectief-tekenen.[6] De stof kon volgens de schrijvers 'door kinderen van tien of elf jaren zeer goed begrepen (...) worden.' Duidelijk waren de auteurs echter niet over het niveau, ze gebruikten deze cursus ook om 'kweekelingen in de teekenkunst' op te leiden.[7] In zekere zin bleef het kopiëren ook in deze methode het startpunt van het onderwijs, zij het dat dit louter geometrische figuren betrof.

Er ontstonden in die tijd nog allerlei andere methoden, zoals het dictaat-tekenen, het geheugen-tekenen, het net-tekenen en de stigmografische methode. Met name de laatste twee methoden hebben in Nederland opgang gemaakt. Bij het net-tekenen wordt gebruik gemaakt van vierkantenroosterpapier, waarop voorbeelden overgenomen dienen te worden. Iets dat ook door Fröbel werd gepropageerd en waarmee we al kennis gemaakt hebben via het werk van De Witte van Citters en Bakkes (zie A3). De stigmografische methode of het tekenen op stippenvellen of met behulp van een aantal stippen was eigenlijk een vervolg op het net-tekenen. Deze aanpak is in de jaren tachtig door Jan Versluys in zijn tekenmethode voor het lager onderwijs gebruikt.

Het feit dat er zoveel moeite gedaan werd om de meest elementaire vaardigheden, zoals het behoorlijk tekenen van rechte lijnen en eenvoudige figuren, aan te leren, geeft aan met wat voor immense problemen men toen in het onderwijs kampte. Daar deze kwesties bij de vormleer ook een rol speelden, is het dus niet verwonderlijk dat een aantal auteurs – we verwijzen naar De Witte van Citters en Bakkes – de beide vakken wilden integreren.

Ten slotte wijzen we nog op het zogenaamde ornament-tekenen, dat ook al door de ontwikkelingen in de kunstnijverheid in het laatste kwart van de negentiende eeuw een grote vlucht nam.[8] Het tekenen en ontwerpen van ornamenten en vlakversieringen had ook al weer een sterk geometrisch karakter, hetgeen direct duidelijk wordt als we naar de afbeelding van figuur A15.2 kijken, gekozen uit een bekend leerboek uit 1879.



figuur A14.2: Ornament-tekenen (K. Bes, 1879)

In 1878 pleitte Molkenboer voor de verplichte invoering van tekenen op de lagere school, waarbij hij zowel het nuttigheids- als het vormende aspect naar voren bracht: 'Vooral met het oog op de behoeften van den werkman kan de invoering van het teekenen groote voordelen afwerpen. (...) Maar ook reeds op de volksschool (...) moest de grondslag voor k u n s t s m a a k worden gelegd' (Molkenboer, 1878, pp. 11-12).[9] Hij wenste dan ook tekenonderwijs voor kinderen van acht tot twaalf jaar, drie of vier uur per week, op de volgende basis:

> 'Vooreerst moet het onderwijs op geometrischen grondslag worden ingericht, en de motieven daarvoor ontleenen wij aan de vlakke meetkunde met uitbreiding tot symmetrische figuren. (...) In de eerste twee jaren zouden wij ons willen bepalen tot de reeds genoemde geometrische figuren. Eerst daarna kan het teekenen n a a r d e n a t u u r in aanmerking komen.' (Molkenboer, 1878, pp. 24-25)

Later zou blijken dat deze geometrische principes het tekenen in het leerplan voor de lagere school zouden gaan beheersen.

Streven naar wettelijke invoering

In de wet van 1806 kwam tekenen als vak niet voor. Bij de wet van 1857 werd het opgenomen als vak voor de (M)ULO. Toch werd er op sommige lagere scholen al tekenonderwijs gegeven. Overigens sprak men in de Kamer toen ook al over tekenen 'als middel ter vorming van den smaak', 'als eerste trap eener goede opleiding voor

de handwerksnijverheid', maar ook als middel 'om de schoolkinderen in tusschenuren aangenaam en nuttig bezig te houden' (Diephuis, 1859, pp. 18-19). Voor het hulp- of het hoofdonderwijzersexamen was tekenen niet verplicht. Wel bestond de mogelijkheid een aparte akte voor tekenen te halen. De invoering van tekenen als verplicht vak op de HBS in 1863 versterkte opnieuw de positie van de voorstanders van tekenen als verplicht vak, ook voor het lager onderwijs. Ook daar heeft Steyn Parvé weer de hand in gehad.

Tijdens de debatten over de wetswijzigingen van 1878 werd door Moens, die we ook al als aanhanger van de vormleer hebben leren kennen, een amendement ingediend tot de verplichtstelling van tekenen op de lagere school. Dit amendement werd met 43 tegen 31 stemmen verworpen. Minister Kappeyne van de Coppello voelde er wel voor, maar zag problemen met de uitvoerbaarheid in verband met een te gering aantal geschikte onderwijzers, gebrek aan tekenlokalen en de moeilijkheid van differentiatie van het aanbod. Zijns inziens was tekenen alleen een vak voor jongens in de steden. Hoewel het MULO toen officieel uit de wet verdween, bleef het tekenen wel op de lijst van facultatieve vakken voor het lager onderwijs staan. In Amsterdam bijvoorbeeld werd op de gemeentescholen ook daadwerkelijk tekenonderwijs gegeven. Tevens werd bij het hoofdakte-examen vanaf 1878 net als de wiskunde het tekenen als verplicht vak opgenomen.

We zien dus in de jaren zeventig op politiek en op beleidsniveau een verhoogde interesse voor het tekenen ontstaan. Naar aanleiding van de slechte Nederlandse resultaten op de tentoonstelling voor Nijverheid in 1877 was een Rijkscommissie ingesteld, die een onderzoek moest instellen 'naar den toestand der Nederlandsche kunstnijverheid'. Dit rapport verscheen al op 28 mei 1878. Hoewel ook daarin staat 'Degelijk en methodisch (teeken)onderwijs worde zoo spoedig mogelijk opgenomen in de lagere school als verplicht leervak', heeft dit de wetgevers niet kunnen beïnvloeden (geciteerd bij Lako, 1899, p. 136). Wel werd na de aanname van de wet van 1878 door de regering aan De Stuers en Salverda opgedragen 'een onderzoek in te stellen naar en een verslag uit te brengen aangaande de inrichting van buitenlandse teekenscholen, bepaaldelijk ten behoeve van de verbetering van het teekenonderwijs.' In hun rapport werd met name gepleit voor een betere opleiding. Ten slotte ging Molkenboer nog naar België om zich op de hoogte te stellen van de opleiding aldaar.

Als uitvloeisel van deze activiteiten werd er in 1880 in Amsterdam een normaalcursus voor tekenleraren gehouden, waarvan Molkenboer een van de leidende figuren was. Ook Jan Versluys trad als docent op tijdens deze cursus ten behoeve van de wiskundige aspecten van het tekenen. Een belangrijke gebeurtenis was dat tijdens deze cursus de Nederlandsche Vereeniging voor Teekenonderwijs werd opgericht. Het maandblad van deze vereniging had als ondertitel: 'gewijd aan de belangen van het teekenonderwijs en de kunstnijverheid in Nederland'. Als gevolg van al deze ac-

tiviteiten ontstond de Rijks Normaalschool voor Teekenleraren, aanvankelijk gevestigd in het zojuist voltooide Rijksmuseum te Amsterdam.

Er was dus in vrij korte tijd door de voorstanders van het tekenen als leervak heel wat bereikt, zij het dat het nog steeds niet verplicht was voor de lagere school. Toen ook maatschappelijke en bedrijfsorganisaties zich met de verplichting gingen bemoeien, werd duidelijk dat de externe druk tot verplichting steeds pregnanter werd.[10]

Tekenen versus vormleer?

In 1881 bracht Jan Versluys zijn tekenmethode voor de lagere school op de markt. De negen deeltjes voor de kinderen van acht tot tien jaar zijn – aanvankelijk volgens de stigmografische methode – als volgt opgezet:

1 staande en liggende lijnen, vierkant, rechthoek, lijnen onder een hoek van 45°
2 regelmatige achthoek, lijnen in verschillende richtingen
3 regelmatige driehoek en zeshoek
4 vervolg en cirkel
5 regelmatige vijfhoek, ellips, eirond, eenvoudige kromme lijnen, vaasvormen
6 eenvoudige rozetten, spiralen, palmetvormen
7 palmetten en gestileerde bladen
8 herhaling, voortzetting.

Daarna volgt het tekenen naar de natuur à la Dupuis: kubus, blok en piramide, waarbij de staande ribben steeds evenwijdig aan het tafereel geplaatst worden. Het einddoel wordt alsvolgt omschreven: 'Het moet ons streven zijn, den leerling in staat te stellen, eenvoudige voorwerpen, die hij in de school kan waarnemen, en grootere lichamen of groepen van voorwerpen, zooals men ze alleen buiten de school vindt, door een schetsteekening weer te geven' (Versluys, 1881, p. 121). Dit schreef Versluys negen jaar vóór de wettelijke invoering van het tekenen op de lagere school.

In de zomer van 1890 werden op 43 plaatsen in Nederland conferenties gehouden om 'aan de onderwijzers den weg te wijzen, om dat onderwijs volgens een goede methode te geven en vruchten te doen afwerpen' (Lako, 1899, p. 175). Deze cursussen stonden onder leiding van Molkenboer en een aantal andere prominenten uit de tekenwereld. Er namen zo'n vijfduizend onderwijzers aan deel. Het verslag van deze conferenties maakte in dertig punten duidelijk dat de ingeslagen weg – een tekenonderwijs op meetkundige grondslag – voortgezet en nader uitgewerkt werd (Lako, 1899, pp. 176-182). De basis hiervoor was echter al in de voorafgaande decennia gelegd.

Het is niet verwonderlijk dat – althans voor een oppervlakkige beschouwer – de noodzaak van vormleer of aanschouwelijke meetkunde op de lagere school nu min-

der dringend leek. De kinderen leerden bij het tekenen immers iets van meetkundige figuren, zowel vlak als ruimtelijk, en iets van het afbeelden van ruimtelijke lichamen volgens een meetkundige methode. Voor de hoogste klassen werd het gebruik van passer en liniaal aanbevolen als voorbereiding op het rechtlijnig tekenen in het voortgezet onderwijs. Ook in de opleiding ging men op systematische wijze het tekenen op een meetkundige grondslag onderwijzen. De veel gebruikte boeken van Laagland en Jansen maken niet alleen dit feit duidelijk, maar ook dat de geometrische grondslag van het tekenonderwijs tot ver in de twintigste eeuw zou doorwerken.

Wel ontstond tegen het einde van de negentiende eeuw, nationaal en internationaal, weer een tegenbeweging, later uitmondend in de Reformbeweging van het op het vrije, op creativiteit gerichte tekenen, waarop wij in het kader van deze studie niet in kunnen gaan.[11]

Men zou kunnen denken dat de belanghebbenden van het tekenonderwijs argumenten contra de vormleer hadden ontwikkeld om te trachten aldus ruimte voor tekenen in het programma te scheppen. Maar we hebben in Steyn Parvé, Moens en Versluys al voorstanders van beide leervakken leren kennen. En ook de 'tekenaars' zelf waren bepaald niet contra de vormleer, althans wij hebben in de jaargangen tot 1890 van het *Maandblad van de Nederlandsche Vereeniging voor Teekenonderwijs* en in de overige door ons bestudeerde onderwijsbladen niets van dien aard kunnen ontdekken. Lako nam de vormleer serieus, toen hij in genoemd blad in 1885 een artikel over het tekenonderwijs op de lagere school liet verschijnen. De Stuers en Salverda schreven in hun verslaggeving over hun buitenlandse onderzoekingen zelfs het volgende:

> 'Nogtans meenen wij, dat van de vormleer op de lagere school een hoogst nuttig gebruik kan worden gemaakt (...) oefeningen die, in handen van een intelligenten onderwijzer, zonder bezwaar tot een elementair teekenonderwijs kunnen worden uitgebreid, waarvan voor verder voortgezette teekenoefeningen grootelijks partij zou zijn te trekken.' (geciteerd bij Lako, 1899, p. 141)

Dit was in feite hetzelfde standpunt als 't Nut reeds in 1860 naar voren had gebracht. Ook de maatschappelijke inmenging in de verplichtstelling van het tekenen heeft geen openlijk gebruik gemaakt van de zwakke positie van de vormleer. Ten slotte was er ook van de zijde van de voorstanders der vormleer geen sprake van een negatieve instelling ten aanzien van het tekenen. Wel hebben wij de voorstanders van integratie van de beide vakken leren kennen. Van een concurrentiepositie tussen tekenen en vormleer was dus geen sprake.

Al eerder werd vastgesteld dat de nagestreefde doelstellingen voor het tekenonderwijs en die voor de vormleer van geheel andere aard waren. Voor de vormleer stelde men vanuit vakdidactisch oogpunt in de jaren tachtig vooral het voorbereidende en

praktische nut op de voorgrond. De formele waarde was toen van veel minder gewicht. Ook voor het tekenonderwijs werden de praktische en voorbereidende waarde als argumenten aangedragen. Bij de vormleer stond echter het praktische aspect vooral in dienst van het vak zelf, terwijl dat voor het tekenen een meer realistische betekenis had met het oog op een toekomstig beroep. Ten aanzien van de voorbereidende waarde van de beide vakken kan hetzelfde opgemerkt worden. De formele waarde van het tekenen werd met name gezocht in de ontwikkeling van esthetisch gevoel en creativiteit. Globaal gezegd: voor het tekenen ging het vooral om de ontwikkeling van 'hand en hart', terwijl voor de vormleer de meeste nadruk op het 'hoofd' lag. Waar de 'tekenaars' zelf hun doelen en idealen op rationele en gepaste wijze naar voren brachten, lieten de maatschappelijke groeperingen geen middel ongebruikt om de noodzaak van het tekenen te onderstrepen, getuige een citaat uit het adres dat de directeuren der Nederlandsche Maatschappij ter Bevordering van de Nijverheid in 1885 aan de regering richtten:

> 'De groote menigte is nog ver van de bewustheid, dat het teekenen, niets minder dan het lezen en het schrijven, een der krachtigste middelen is tot ontwikkeling van algemeene beschaving, een middel tot vorming van begrip en gemoed, tot verstandelijke en zedelijke voorbereiding, begeerlijk zoowel voor de vrouw als voor den man, voor den welopgevoede als voor den minder bedeelde; een onmisbare oefening van die beide heerlijke organen, het oog en de hand, waardoor wij leeren zien, opmerken, denken en oordelen, in staat gesteld worden om onze gedachten te kunnen mededelen door vormen en beelden; (...) Een zedelijke kracht bovendien, tot ontginning van dat edeler beginsel in den mensch, dat naar het behagelijke en het schoone zoekt in plaats van het plat-alledaagsche en leelijke: (...) en hoe het teekenen tevens een alles behalve te versmaden invloed heeft op orde, netheid en leerzaamheid.'
> (Maandblad teekenonderwijs, 1886, 2-8, pp. 68-70)

Daarna werden nog aangevoerd: de nationale trots, het economische landsbelang, en het feit dat de 'knaap uit de volksklasse een meer of minder sober brood kan verdienen'.

Van Dapperen sprak in 1820 in verband met de vormleer over 'leeren opmerken, denken en spreken' en gaf ook hoog op van de morele waarden van de vormleer. We zien dus dat op het leren spreken na, in 1885 de Maatschappij ter Bevordering van de Nijverheid dezelfde effecten van het tekenen verwachtte als die welke men zo'n tachtig jaar eerder aan de vormleer toedichtte. Hoewel deze uitspraken geen enkele staving kenden, kwamen ze wel onder de aandacht van de belanghebbende beleidsmakers en politici, terwijl dergelijke acties voor de vormleer op dat moment niet ondernomen werden.

Tekenen verplicht, vormleer afgeschaft

In 1889 werd tekenen als verplicht leervak op de lagere school ingevoerd. Hiervoor hebben we beschreven hoe door culturele, onderwijskundige, economische en maatschappelijke ontwikkelingen de politieke beslissing beïnvloed werd. Dat dit besluit

mogelijk gemaakt werd door gelijktijdige afschaffing van de vormleer, was toentertijd een onverwacht en voor een aantal leidende onderwijsmannen onaangenaam neveneffect. Hoe deze inruil op politiek niveau verlopen is, zullen we in A16 beschrijven. Maar eerst wordt in het volgende hoofdstuk A15 een nadere analyse gemaakt van de stille onttakeling van de vormleer op de lagere school.

A15 Stille onttakeling van de vormleer (1878-1889)

Niveau van het onderwijs

De wet van 1878 had, ondanks de overschaduwing van de voortdurende schoolstrijd, een aantal belangrijke voorwaarden voor de verdere verbetering van het lager onderwijs geschapen: betere salariëring, verbetering van de pensioenregeling, strengere voorwaarden voor de lokaliteiten, mogelijkheden voor de gemeenten om met rijkssteun kweekscholen op te richten en de verlaging van het aantal leerlingen per onderwijzer. Onderwijskundige verbeteringen waren de verplichting een leerplan op te stellen, de verplichting tot een hoofdakte voor het hoofd der school en bij grotere scholen (vier onderwijzers) was ook een hoofdakte verplicht voor een andere onderwijzer. Een gunstige wending lijkt ook dat het onderwijs in de lagere klassen bij voorkeur aan onderwijzeressen diende te worden opgedragen. Van groot belang was het ontstaan van erkende en gesubsidieerde normaalscholen, waar nieuwe onderwijzers opgeleid werden. Weer werd de inspectie gereorganiseerd. De examens werden verbeterd, hoewel de resultaten voor de hoofdakte slecht bleven. Het allerbelangrijkste lijkt echter dat de status van de onderwijzer vooruitging, waardoor deze op meer erkenning en waardering kon rekenen zowel van de overheid als van de maatschappij. Tevens ontstonden er voor de onderwijzer allengs meer carrièremogelijkheden doordat ook het voortgezet onderwijs ging groeien.

Net als in de voorgaande periode geven de algemene onderwijsverslagen van de regering een globale indruk van het niveau van het praktische onderwijs.[1] Gunstig werd geoordeeld over de toename en het niveau van de normaalopleidingen, die konden voorzien in het gebrek aan hulponderwijzers. Volgens het verslag van 1885 telde men bij het openbaar onderwijs één onderwijzer op 44 leerlingen, terwijl bij het bijzonder onderwijs deze verhouding 1 op 46 was (inclusief het hoofd der school). In ditzelfde verslag treffen we de volgende passage aan: 'Bij eene doelmatige inrichting van de school en het onderwijs, kan, zonder overmatige inspanning of overlading, door de leerlingen, omstreeks hun twaalfde levensjaar, zooveel kennis en ontwikkeling zijn verkregen, als vereischt wordt voor alle standen' (*Algemeen Onderwijsverslag* 1885, p. 482). Een optimistischer geluid dan dit hebben we niet eerder aangetroffen. Dat dit echter ten dele een theoretische uitspraak was, moge blijken uit de genoemde voorwaarden van 'doelmatige inrichting van de school en onderwijs'. Met name in enkele grote steden schijnt aan de vervulling van deze voorwaarden met verve gewerkt te zijn.

Tussen 1880 en 1900 groeide de deelname aan het lager onderwijs van circa 73 procent tot 90 procent (Knippenberg, 1986, p. 230). Tussen 1850 en 1900 namen de overheidsuitgaven per leerling toe van *f* 3,- tot *f* 23,- (Knippenberg, 1986, p. 232). In het algemeen kan gesteld worden dat de staat een belangrijke rol gespeeld heeft in de groeiende deelname aan het onderwijs gedurende de laatste decennia van de

negentiende eeuw en heeft bijgedragen aan de ontwikkeling van de Nederlandse burger.

In 1885 slaat het regeringsverslag voor het eerst over vele vakken een optimistische toon aan. Er wordt gewezen op de vooruitgang van het aanvankelijk lezen door de betere methoden, zoals die van Bouman. Over het rekenen is het verslag het meest lovend:

> 'Het werktuigelijke cijferen, het sommen maken van weleer, is, voor zeker gedeelte, ter zijde gedrongen, door (...) practische vraagstukken, aan het dagelijksch leven ontleend.(...) Daartoe dragen veel bij de uitmuntende werken, die in den laatsten tijd verschenen zijn, zowel voor de studie der onderwijzers als voor het gebruik der leerlingen. Het rekenen uit het hoofd wordt op zeer veel scholen ijverig en met goeden uitslag behartigd.' (*Algemeen Onderwijsverslag* 1885, p. 183)

De beschikking van visuele hulpmiddelen, zoals platen en kaarten bij aardrijkskunde, geschiedenis en kennis der natuur, wordt positief gewaardeerd. Het zingen en de nuttige handwerken voor meisjes krijgen een voldoende. Opvallend is dat er nogal wat opmerkingen over handtekenen worden geregistreerd, terwijl dit nog tot de facultatieve vakken behoorde. Uiteenlopend zijn de rapporten over de gymnastiek. Op deze wijze probeerde de inspectie bij te dragen aan de verbetering van het onderwijs. Als voorwaarden van het slagen van innovaties als bijvoorbeeld bij aardrijkskunde worden goede leermiddelen genoemd, maar vooral wordt de deskundigheid van de onderwijzer onderstreept. Naast het gemis aan goede onderwijzers, wordt ook een te grote ratio leerling – onderwijzer als remmend element voor innovaties genoemd. Hoewel deze verslagen zeer globaal zijn, steekt de optimistische toon toch opvallend af tegen de vroegere, vaak negatieve rapporten. Het is duidelijk dat het onderwijs door betere boeken, betere onderwijzers en betere voorwaarden werkelijk aan kwaliteit wint.

Noch *Het Schoolblad* noch *De Wekker* noch *Het Nieuwe Schoolblad* bevatten in de periode 1880-1890 ook maar één artikel waarin geklaagd wordt over het niveau van het onderwijs. Wel werd in deze bladen veel aandacht besteed aan de onderwijzersopleidingen en examens. De aard en inhoud van de examens waren in die tijd een voortdurende bron van zorg en discussie.

Kunnen we dus van een algemene niveauverbetering spreken, over de vormleer was men nog immer niet te spreken. Dit blijkt zowel uit de algemene onderwijsverslagen als uit de verslagen van de onderwijzersexamens. Omdat tijdens de opleiding de basis voor dit vak gelegd zou moeten worden, gaan we eerst daar op in.

Programma en examens voor vormleer

De eisen voor vormleer voor het hulp- en hoofdonderwijzersexamen volgens de wet van 1878 waren precies dezelfde als reeds in de 'programmata' van 1858 waren vastgesteld, respectievelijk: 'Kennis der eenvoudigste meetkundige ligchamen en

der regtlijnige figuren, gepaard met de bedrevenheid in het mededeelen van deze kennis aan de kinderen.' en 'Kennis van de meetkundige ligchamen en van de regt- en kromlijnige figuren, gepaard met de bedrevenheid in het mededeelen van die kennis aan kinderen' (zie A8). Opvallend is dat alleen bij vormleer een aparte didactische eis werd gesteld. Bij het hoofdonderwijzersexamen werden bij het onderdeel 'Onderwijs en opvoeding' (pedagogiek) wel 'duidelijke begrippen' geëist 'van de verschillende leerwijzen in het algemeen' en 'van de meest gebruikelijke leerwijzen van voor elk leervak in 't bijzonder' (Blaupot ten Cate en Van Milligen, 1880, p. 124). Het inhoudelijke verschil tussen de twee examens was dat voor de hoofdonderwijzer ook vraagstukken over de cirkel en bol voorkwamen en dat de vraagstukken moeilijker konden zijn. In de praktijk kwamen op de hoofdonderwijzersexamens hoofdzakelijk stereometrische vraagstukken aan de orde. In A7 hebben we de studieboeken van dit decennium besproken en al enige voorbeelden van examenvraagstukken gegeven.

Vormleer stond bij alle kweekscholen en normaalscholen op het programma. Bij de opleiding voor hoofdonderwijzer was het aantal uren vormleer ten opzichte van de wiskunde gering. De aanstaande hulponderwijzers kregen geen wiskunde en slechts twee uren vormleer bij een totale studielast van 53 wekelijkse lessen over vier jaar.[2] Mogelijk dat in deze uren de stof van de lagere school aan de orde gesteld werd. Waar en hoe de didactiek van de vormleer aan de orde kwam, is onduidelijk. De daarover gevonden examenvragen zijn in het algemeen steeds van hetzelfde type: 'Hoe kan je de vormleer behandelen?', wat neerkwam op de kennis zoals die in de boeken van Bouman en Versluys voorkwam. Het hoofdonderwijzersexamen van 1883 te Groningen bevatte de volgende opgaven over vormleer:

> '1. Als men in een gelijkbenig trapezium de beide diagonalen trekt, ontstaan er 4 driehoeken. Twee daarvan zijn gelijk en gelijkvormig. Toon dit aan.
> 2. De heer Versluys zegt: 'De verhouding tusschen vormleer en meetkunde is volkomen dezelfde als die tusschen het rekenen van de lagere school en de wetenschappelijke rekenkunde van het gymnasium, de hoogere burgerschool of de kweekschool voor onderwijzers. Wat zou de schrijver daarmee bedoelen?'

Het is jammer dat wij niet kunnen nagaan hoe men de beantwoording van deze vragen heeft beoordeeld. Stel dat een kandidaat op de tweede vraag het kennelijk gewenste antwoord ('vormleer is aanschouwelijke meetkunde....') gaf en tegelijkertijd de eerste opgave formeel met behulp van de congruentie oploste, zou dat eerste vraagstuk dan goed gerekend zijn? Zo ja, en dat vermoeden we, dan heeft dat vraagstuk weinig met de opvatting van vormleer als aanschouwelijke meetkunde te maken. Aan verschillende vormleeropgaven voor de examens zien we, zoals eerder gesignaleerd, dat de opstellers steeds terugvielen op de geijkte planimetrie- en stereometrie-opgaven.

Deze kwestie werd in 1885 scherp geanalyseerd door Van Leeuwen in *Het Nieu-*

we Schoolblad. Hij gaat vooral in op de wettelijke omschrijving van de 'bedrevenheid in het mededeelen van die kennis (van de vormleer, EdM) aan kinderen'. Eerst toont hij aan dat in de vormleerboeken voor de lagere school onderwerpen voorkomen die tot de gewone formele meetkunde behoren. Dan laat hij zien dat veel zogenaamde vormleeropgaven op de examens stereometrieopgaven zijn, die natuurlijk niets te maken hebben met de in de wet genoemde methodische (didactische) eis. Hij meent dat juist door de examenopgaven van formele aard de verwarring over de aard van de vormleer bleef bestaan, namelijk de identificatie van vormleer met meetkunde:

> 'De examinatoren, die de kennis der Vormleer moeten onderzoeken, zijn niet gehouden aan bepaalde vragen en daarom zou het goed zijn, indien de heeren, die gewoonlijk tot examinatoren in het vak benoemd worden, overlegden, hoe geëxamineerd moet worden, opdat bij 't examen blijke, hoe groot *de kennis der methode bij het onderwijs in de Vormleer* van den candidaat is.' (Van Leeuwen, 1885)

Dit was een regelrecht pleidooi voor een ondervraging op de examens naar de didactiek van de vormleer als aanschouwelijke meetkunde voor de lagere school of zoals hij het zelf onder woorden bracht: 'Hier komt op de methode toch alles aan.' Het probleem was echter dat er in feite nog nauwelijks iets over de specifieke didactiek van de vormleer ontwikkeld was. Wat konden de examinatoren dus anders vragen dan iets over de bekende algemene standpunten van Versluys en Bouman?

Resultaten van de examens

Beschouwing van de verslagen van de commissies voor de hoofdakte-examens gedurende het decennium 1880-1890 bevestigt het eerder geschetste negatieve beeld over de kandidaten. In het bijzonder hebben wij de opmerkingen over vormleer bestudeerd. Voortdurend terugkerende klachten over dit vak betreffen de 'desinteresse' van de kandidaten, de 'verwaarlozing' sinds het hulpakte-examen, en het gebrek aan 'ruimtelijk voorstellingsvermogen', zoals bijvoorbeeld blijkt uit het verslag van de examencommissie te Zwolle in 1885:

> 'Duidelijk bleek, dat velen vormleer en meetkunde als één en hetzelfde vak hadden beschouwd. Voor zover het examen dan ook liep over constructies, vormveranderingen en berekeningen, liet het bij het meerendeel der candidaten weinig te wenschen over. De kennis der lichamen was daarentegen dikwijls beneden peil en het construeeren van netwerken dientengevolge slecht. Over het aanschouwelijk maken van verschillende zaken uit de vormleer was weinig nagedacht.'
> (*Het Nieuwe Schoolblad*, 1885, 3 (46))

Uit het verslag over 1883 te 's-Gravenhage geven we in figuur A15.1 als voorbeeld een tabel met toegekende waarderingen (*Het Nieuwe Schoolblad*, 11-1-1884).

VAKKEN	Aantal examens	Aantal malen, dat toegekend werd het cijfer:											Gem. cijfer	Volstr. onvold.
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Het schrijven	128	-	-	-	-	6	40	42	26	13	1	-	6,0	5%
Nederlandsche taal	119	-	-	5	10	34	26	17	16	8	3	-	5,1	41%
Vormleer	132	-	-	3	6	22	43	26	16	14	1	1	5,7	23%
Rekenen	128	-	-	2	7	24	34	32	21	8	-	-	5,0	26%
Aardrijkskunde	123	-	-	-	3	20	41	36	15	8	-	-	5,5	19%
Geschiedenis	124	-	-	1	10	14	29	26	31	12	1	-	5,7	20%
Kennis der Natuur	138	-	3	13	16	20	32	31	16	6	1	-	4,9	38%
Wiskunde	76	1	2	3	9	10	19	16	10	6	-	-	5,1	33%
Handteekenen	97	-	-	-	3	24	46	30	4	-	-	-	5,6	28%
Opvoeding en onderwijs	134	-	-	3	14	28	58	24	5	2	-	-	4,7	34%

figuur A15.1: Cijferlijst hoofdakte-examen te 's Gravenhage in 1883

Aan deze lijst hebben we twee kolommen toegevoegd met 'gemiddelde cijfer' en 'percentage volstrekt onvoldoende'. Volstrekt onvoldoende betekende '4 of minder', de waardering 5 heette 'even voldoende'.[3] Voor vormleer viel in feite zowel het gemiddelde cijfer (5,7) als het afwijzingspercentage (23%) nog mee. De betreffende voorzitter (Moens) gaat in zijn uitgebreide analyse van de resultaten echter niet in op specifieke onderdelen. Een globale analyse van enkele andere verslagen laat een overeenkomstig beeld zien. De problemen met de vormleer lagen dan ook minder in de eisen op de examens dan in de betekenis die men aan het vak op de basisschool toekende.

Vormleer op de lagere school

Volgens artikel 21 van de wet van 1878 waren de scholen verplicht een leerplan op te stellen waarin ook de vormleer een plaats diende te hebben. Voor sommige onderwijzersgezelschappen betekende dit een uitdaging, maar dit leverde meestal niet meer op dan een rooster van werkzaamheden. Een voorbeeld van een leerplan voor plattelandsscholen vinden we in een van de nummers van *De Wekker* (1880 *37*(83)).[4] Voor vormleer zag het leerplan er als volgt uit:

Klasse A ($5^1/_2$ tot $7^1/_2$ jaar). Vormleer wordt niet expliciet genoemd. Wel 'Aanschouwingsoefeningen':

'1. De school en daarin aanwezige voorwerpen.
2. Het kind, zijne lichaamsdeelen, kleederen, enz.
3. Voorwerpen, die men gemakkelijk in de school kan brengen.
4. Platen.'

Bij de schrijfoefeningen komt 'Vorming der hand door teekenoefeningen' voor.
Klasse B ($7^1/_2$ tot $9^1/_2$ jaar). Vormleer wordt niet expliciet genoemd.

'1. Onderscheiding der voorwerpen naar den vorm.
2. Beschouwing van de school en andere bekende voorwerpen.
3. Afbeelding van het beschouwde. (Hierbij dient aansluiting gezocht te worden met het tekenen).'

Klasse C ($9^1/_2$ tot $11^1/_2$ jaar).

'Vormleer: Lichamen, vlakken, lijnen, hoeken, vlakke figuren en hare vormveranderingen.'

Klasse D ($11^1/_2$ tot $13^1/_2$ jaar).
Vormleer: Verdere beschouwing der lichamen, vooral tot ontwikkeling van het voorstellingsvermogen.

'1. Netwerk.
2. Snijding der lichamen.
3. Omwentelingen.
4. Berekeningen.'

Een ander voorbeeld vonden we in het Leerplan voor de Openbare Lagere Scholen der eerste en tweede klasse te Amsterdam, dat in 1881 door B&W werd vastgesteld (*De Wekker*, 1881 *38*(68)). Hier onderscheidde men acht klassen, waarvoor een schoolweek van $26^1/_2$ uur gold. Tussen haakjes staat het aantal uren per week voor het betreffende vak.

'Klas 1: Aanschouwingsonderwijs, naar aanleiding van voorwerpen en platen (6) Practische oefening van oog en hand (4).
Klas 2: Aanschouwingsoefeningen. Voortzetting (5). Practische oefening van oog en hand. Voortzetting (4)
Klas 3: Aanschouwingsoefeningen. Voortzetting ($3\frac{1}{2}$). Teekenen. Oefeningen in verband met het aanschouwingsonderwijs ($2\frac{1}{2}$).
Klas 4: Aanschouwingsoefeningen. Voortzetting (3). Teekenen. Voortzetting (1).
Klas 5: Teekenen naar voorbeelden op 't bord (1).
Klas 6: Vormleer. Kennis der eenvoudigste mathematische lichamen en hunne begrenzing (1). Teekenen. (1)
Klas 7: Vormleer. Beschouwing der lichamen met platte vlakken (1). Teekenen. Voortzetting. Draadfiguren (4), alleen voor de jongens in de avonduren.
Klas 8: Vormleer. Herhaling. Beschouwing der lichamen met gebogen vlakken (1). Teekenen. Voortzetting gesloten lichamen en pleistermodellen (4), alleen voor de jongens in de avonduren.'

Opvallend in beide opzetten is het belang van het aanschouwingsonderwijs voor de jongste kinderen en het ontbreken van de vormleer. Deze opvatting staat dicht bij de opvattingen van bijvoorbeeld Rijkens in het begin van de negentiende eeuw, maar past overigens geheel in die tijd, waarin het aanschouwingsonderwijs zijn hoogte-

punt kende. Duidelijk is in beide leerplannen de bescheiden plaats voor vormleer en wel alleen voor de hoogste klassen. Tevens, zoals in Amsterdam, wordt de verbinding met het tekenen ook officieel beschreven. Over de werkelijke omvang en inhoud is nauwelijks iets te zeggen, daar de omschrijvingen erg globaal zijn en geen methoden – dit gebeurde bij andere vakken vaak wel – genoemd worden.

Hoewel deze twee voorbeelden natuurlijk niet als maatgevend voor het gehele onderwijs genomen kunnen worden, menen we toch dat de door ons reeds gesignaleerde trend 'aanschouwingsonderwijs voor de jongste kinderen en vormleer, eventueel in verbinding met tekenen voor de oudere leerlingen', zich hier duidelijk aftekent. Dit blijkt ook uit voorbeelden van enkele andere leerplannen.[5]

De enige maal dat in de algemene regeringsverslagen tussen 1880 en 1890 nog aandacht aan de kwaliteit van het vormleeronderwijs werd geschonken, is in het verslag van 1885. Ondanks de licht optimistische toon, blijft de teneur negatief: 'Vele onderwijzers verkeeren (...) in de onzekerheid, hoe zij het onderwijs in dit leervak moeten opvatten, en vooral hoe zij het moeten onderwijzen. Aan de vormleer wordt dan ook door vele onderwijzers weinig waarde gehecht' (*Algemeen Onderwijsverslag*, 1885, p. 183).

Gemis aan discussie 1880-1890

Het is de voorstanders van de vormleer nooit gelukt deze teneur teniet te doen. In de jaren 1870-1880 was er nog sprake van enig élan, maar in de jaren 1880-1890 leek de belangstelling, ook bij de voorstanders, geheel vervlakt. Bestudering van de toonaangevende onderwijsbladen uit die tijd levert nauwelijks een nieuw of verfrissend denkbeeld over de vormleer op.

In *De Wekker* is, op enkele korte boekbesprekingen na, geen artikel van belang te vinden. In *Het Schoolblad* van 1880 staat een stuk van de ons bekende Molema, dat een pleidooi is voor de verbinding van vormleer en tekenen via het zogenaamde net-tekenen (Molema, 1880).[6] Pas weer in 1885 verscheen een lezenswaard artikel van de hand van D. Harberts, die op de goede handleiding van IJkema wees (Harberts, 1885). De neo-herbartiaan J. Geluk schreef in 1888 in dit blad nog een lovende recensie over een vormleerboek van Disselkoen en Van der Schuyt. Daarbij verwijst hij naar Herbarts ideeën over waarnemen en denken uit het begin van de negentiende eeuw. Behalve de kritiek op de plotselinge afschaffing van de vormleer en het artikel van de eerder genoemde Van Leeuwen in 1885, droeg ook *Het Nieuwe Schoolblad* niets bij aan een mogelijke verdere implementatie van de vormleer. En dat terwijl Versluys aan het roer van dit blad stond. In *De Christelijke Schoolbode* verscheen in de veertiende jaargang (1888) een omstandig artikel in twee delen, waarin het onderscheid tussen meetkunde en vormleer werd besproken en dat tot de constatering leidde dat vormleer niets anders diende te zijn dan aanschouwelijke meetkunde: een te late bijdrage aan dit voor het behoud van de vormleer zo belangrijke standpunt.

Het studieblad voor de onderwijzer *School en Studie* besteedde in verhouding met de wiskunde weinig aandacht aan de vormleer. Ook hier stond een voorstander van de vormleer, Koenen, aan het hoofd van de redactie. Verder dan een gunstige bespreking van het boek van Koenen en Brogtrop en een artikel met enige aanwijzingen om bepaalde stellingen op louter aanschouwelijke gronden aan te tonen, kwam men niet in de eerste elf jaargangen (J.H.St., 1883). Het Christelijke tijdschrift *Paedagogische Bijdragen*, dat vooral artikelen van zedelijke aard bevatte, besteedde ook aandacht aan vakinhoudelijke kwesties, voornamelijk in de vorm van boekbesprekingen. In de zeventien jaargangen van dit blad (1873 tot 1889) troffen we in die van 1881 een welwillende recensie van de boeken van Weersma en IJkema aan. Opmerkelijk is de opening van dit stuk: 'Hoewel de wet van 1878 in art. 54 zegt: 'Aan bijzondere lagere scholen *kan* onderwijs gegeven worden in dezelfde vakken als aan de openbare, en wij, onderwijzers van Christelijke scholen alzoo niet verplicht zijn, onderwijs in de vormleer te geven, zoo achten nochthans velen onzer de opname van dit leervak alleszins gewenscht' (J.S., 1881). Behalve enkele regels in 1886 over het vraagstukkenboek van Van Roekel werd ook in dit tijdschrift geen aandacht aan vormleer besteed. Vanaf 1881 verscheen de *Gids voor den Onderwijzer, practisch en theoretisch tijdschrift voor het lager onderwijs*. In dit voor die tijd uitstekende blad werd veel aandacht aan pedagogiek en aan 'kennis der natuur in haar geheelen omvang' besteed. J. Geluk leverde aan dit tijdschrift verscheidene bijdragen. Het waren voornamelijk vakinhoudelijke, maar weinig didactische stukken voor de studerende onderwijzer. Over de vormleer echter wordt tussen 1881 en 1889 in dit blad niets aangetroffen. De specifieke vakbladen uit de periode 1870-1880, het *Tijdschrift voor Reken-, Stel- en Meetkunde* en het *Tijdschrift voor Rekenkunde ten behoeve van aankomende onderwijzers en onderwijzeressen* bevatten nimmer een opmerking over vormleer.[7]

In 1879 echter begon Jan Versluys een periodiek onder de veelbelovende titel: *Tijdschrift voor vormleer, rekenkunde en de beginselen der wiskunde*, dat van geheel andere aard was dan de hiervoor genoemde. Naast vakinhoudelijke bijdragen treffen we nu ook artikelen aan over didactische kwesties. Meestal zijn ze van de hand van Versluys zelf, maar ook Koenen, Brogtrop, De Gast en Gravelaar leverden bijdragen. Het openingsartikel luidde 'Vormleer en Wiskunde, volgens de wet van 1878'. In dit stuk beschrijft Versluys het verloop van de kamerdiscussies en steekt een pluim op de hoed van Moens: 'We mogen dus zeggen, dat de duidelijke omschrijving van den heer Moens beaamd is door den Minister, en niemand zal mogen beweren, dat we voortaan ten opzichte der vormleer rondtasten in den blinde' (Versluys, 1879, p. 7). Dat Moens bij die kamerdebatten juist het werk van Versluys aanhaalde in verband met de duidelijkheid omtrent de vormleer, laat Versluys (bescheiden) achterwege. Vrij kort daarna volgde nog een stuk over de nomenclatuur in de vormleer. Verder staan in de eerste jaargang nog twee stukken over Fröbel,

waarvan er één ook enige opmerkingen over de vormleer bevat. Dit laatste zal nog ter sprake gebracht worden in hoofdstuk B1. In de tweede jaargang een bijdrage over vormverandering van figuren in verband met de vormleer. Maar geen van deze stukken kan beschouwd worden als een ondersteuning voor de noodzakelijke innovatie van de vormleer. De feitelijke teksten over vormleer bedragen tezamen veertien pagina's in vier jaargangen van meer dan duizend pagina's. Aan het eind van de vierde jaargang (1882) werd dit tijdschrift, dat 450 abonnees telde, alweer opgeheven. Het werd vervangen door *Het Nieuwe Schoolblad*, dat een meer algemeen nieuwsbrengend karakter had, maar waar ook 'stukken van methodischen aard' een plaats in zouden krijgen, zo schreef Versluys in het laatste nummer van het *Tijdschrift voor vormleer* (Versluys, 1882, p. 245).

Gemiste kansen

Zoals bekend werd Jan Versluys hoofdredacteur van *Het Nieuwe Schoolblad*. De didactische bijdragen ten behoeve van het rekenonderwijs in het nieuwe blad zijn echter dun gezaaid, voor de vormleer geldt dat in het bijzonder. Versluys heeft hierbij een kans voor de innovatie van de vormleer, die hijzelf met zijn heldere afbakening en praktische boeken ingezet had, laten liggen. Het is kenmerkend voor de periode 1880-1890, waarin de aandacht veel meer opgeëist werd door het opkomende tekenonderwijs. Of het gegeven dat Versluys vanaf 1881 leraar wiskunde aan de Rijksnormaalschool voor Tekenleraren was geworden en zich toen ook ging inzetten voor het tekenonderwijs op de lagere school hierin meegespeeld heeft, weten we niet.

Een glasheldere omschrijving van betekenis, aard en doel van de vormleer is in 1882 nog eens door J. Geluk geformuleerd in zijn *Woordenboek voor Opvoeding en Onderwijs*. Allereerst wees hij erop dat juist toen het evenwicht tussen het formele en het praktische nut gevonden is:

> 'Eerst in den laatsten tijd heeft men beide richtingen doelmatig weten te vereenigen. Die de handleidingen van Bouman, Versluijs en Koenen en Brogtrop slechts even inziet, zal bemerken, dat *men langs aanschouwelijken weg die waarheden en eigenschappen der uitgebreidheden wil leeren kennen, welke voor praktische toepassing het meest geschikt zijn.* Terecht heeft men aan dit leervak in den laatsten tijd den naam van aanschouwelijke meetkunde gegeven, een naam veel gepaster dan de naam *vormleer*, die alleen door conventie kan beteekenen, wat men er mee wil te kennen geven.' (Geluk, 1882, p. 424)

Geluk meende dat het mislukken van de innovatie niet in de moeilijkheid van de leerstof lag, maar dat de 'methode' (didactiek) gefaald had. In de trant van het historisch-genetische principe stelt hij 'De geschiedenis eener wetenschap is haar methode', waarmee hij dus pleitte voor een inductieve, aanschouwelijke en praktische inleiding in de meetkunde op de lagere school (Geluk, 1882, p. 425). Zoeken we in dit encyclopedische werk de term vormleer op, dan wordt verwezen naar meetkun-

de. Geluk nam dus vrijwel hetzelfde standpunt in als Versluys, maar nog niet eerder werd zo duidelijk gepleit voor naamsverandering van het vak. Ook Bouman deed zulks, maar minder overtuigend.

Wellicht dat een dergelijke eenvoudige ingreep nog een bijdrage tot redding van het vak had kunnen zijn. Maar eigenlijk had zich na de wetswijziging van 1878 al een proces van stille onttakeling van de vormleer ingezet. Het ontbrak aan vuur bij de voorstanders om, juist nu er goede boeken waren en de kwaliteit van het onderwijs toenam, enthousiasme te wekken in het onderwijs zelf. Ook het gemis aan een goede infrastructuur, iets dat de voorstanders van het tekenen wel hadden georganiseerd, heeft de sluipende desinteresse in de hand gewerkt. Het einde van de vormleer naderde: de genadeslag werd ten slotte door de politiek toegebracht.

A16 Wettelijke afschaffing, maar ...

Kamerdiscussie

Op vrijdag 30 augustus 1889 kwam in de Tweede Kamer het wetsontwerp tot gedeeltelijke herziening van de wet van 1878 tot regeling van het lager onderwijs aan de orde. Direct werd begonnen met de behandeling van het vakkenpakket (artikel 2 van artikel 1). Het voorstel bevatte alleen een wijziging om gymnastiek van de facultatieve vakken naar de verplichte over te hevelen. Kort voor de vergadering bleek er echter een amendement ingediend te zijn om ook de 'eerste oefeningen van het handteekenen' onder de verplichte vakken te brengen in plaats van de vormleer.[1]

Als eerste kreeg Dr. P.J.F. Vermeulen uit Helmond het woord, die lid van de Commissie van Voorbereiding was geweest, maar tot 29 augustus niets van dit amendement wist. Toch was hij medeondertekenaar. Hij begon zich achter het voorstel te stellen en vervolgde met een aanval op de vormleer, die hij 'eene kwelling voor de onderwijzers en onderwijzeressen op de examens' noemde: 'een vak, voor hetwelk schier niemand van hen liefde of belangstelling koestert en welks invloed om die reden alleen reeds hoogst problematisch moet geacht worden op onze lagere scholen' (*Verslag van de Handelingen der Tweede Kamer der Staten Generaal*, 1888-1889, p. 1410).[2] Hij noemde de vormleer zelfs een misvormde stereometrie en stelde dat de verstandelijke vermogens bij het tekenonderwijs net zo goed ontwikkeld konden worden. Hij wees op het belang van het tekenen voor het ambachtsonderwijs, daarbij een rapport van de Maatschappij tot Bevordering der Bouwkunst aanhalend. Verder beriep hij zich op Molkenboer, kortom al hetgeen in A14 uiteengezet is, werd aangedragen om de vormleer in te ruilen voor het tekenen.

Dr. J. Zaaijer uit Leeuwarden, die daarna aan het woord kwam, was het niet eens met de opmerkingen van Vermeulen. Hij wees op het feit dat er goede boeken voor vormleer voorhanden waren, in het bijzonder noemde hij het werk van Versluys, die had laten zien dat vormleer een aanschouwelijke meetkunde is en dat de vormleer wel degelijk een vormende en een praktische waarde heeft. Toch stelde hij zich achter de voorgestelde ruil, omdat uit het schoolverslag 1886-1887 gebleken zou zijn 'dat over het algemeen het onderwijs in de vormleer geen goede resultaten oplevert'. Verder meende deze afgevaardigde dat, nu ook de wiskunde weer uit het hoofdakteexamen zou verdwijnen, er bij de onderwijzers een te geringe basis voor het geven van de vormleer gelegd zou worden. Ook stelde hij zich achter het ingediende amendement, omdat het tekenen zowel een vormende als een praktische waarde zou hebben en omdat reeds aan 24,2 (!) procent van de schoolbevolking tekenen werd gegeven (*VHTK*,1888-1889, pp. 1411-1412).

Ook het kamerlid Th. Heemskerk was heel kort over de vormleer, waarvan hij zei 'dat het (hem) nooit recht duidelijk is geweest, wat de vormleer anders is dan

misvormde wiskunde' (*VHTK*, 1888-1889, p. 1412). Vrijwel alle sprekers waren voor de ruil 'tekenen voor vormleer'.

Alleen J. Roëll brak nog een lans voor de vormleer, met name met het oog op het onderwijs op de plattelandsscholen, waar volgens hem 'de beginselen der vormleer niet minder nuttig zijn dan die van het handteekenen, ter bepaling b.v. van maat, grootte en afstand' (*VHTK*, 1888-1889, p. 1414).

Minister A. Mackay ging in zijn repliek niet in op de kwestie van de vormleer en beperkte zich tot de verplichtstelling van de gymnastiek, welke tegelijkertijd werd behandeld. Toen het amendement met 81 tegen 9 stemmen was aangenomen, was dus binnen enkele uren een einde gekomen aan circa tachtig jaar vormleer.

De argumenten gewogen

De argumenten van de 'geachte afgevaardigden' zijn ons inziens niet erg overtuigend. Zo strookt de opmerking van Vermeulen over de kwelling op de onderwijzersexamens niet met wat wij gevonden hebben over het niveau van de opgaven op de examens en niet met de feitelijke opbrengsten van deze examens (zie A15).

Zaaijer maakte het helemaal bont. Allereerst zei hij te citeren uit het schoolverslag van 86-87, maar de door hem gebezigde aanhalingen komen uit het verslag van 85-86, het jaar dat nog een keer een inhoudelijke analyse van het onderwijs was gepubliceerd. Daarin werd in feite niet eens zo negatief over de vormleer gerapporteerd, vooral gezien de laatste zin van het door Zaaijer aangehaalde deel: 'Dat overigens ten deze, in het algemeen, vooruitgang wordt waargenomen, is onmiskenbaar' (*Algemeen Schoolverslag*, 1885 pp. 183-184). Niettemin meende hij te moeten concluderen, dat 'het onderwijs in de vormleer geen goede resultaten oplevert'. Zijn argument over het wegvallen van de wiskunde is een merkwaardige verwisseling van voorwaarde en uitvoering.

Het argument van de plotseling ontdekte vormende waarde van het tekenen lijkt ontleend aan de rapporten van de maatschappelijke pressiegroepen, zoals de 'Maatschappij ter Bevordering van de Nijverheid' (zie A14). Dit argument had ons inziens geen enkele wetenschappelijke basis net zo min als de vormleer-voorstanders een objectieve maat hadden voor de vormende waarde van dat vak. Achteraf bezien komt het toch merkwaardig voor dat van het tekenen een sterk intellectuele ontwikkeling zou uitgaan. Wellicht dat men zo onder de indruk was van de mathematische grondslag van het tekenen van die tijd, dat dit de opvatting van de vormende waarde van het tekenen benadrukt heeft. Maar de echte mathematische aspecten van het tekenen kwamen op de lagere school niet of nauwelijks voor.

Het niveau van deze kamerdiscussie lijkt ons wat de inhoudelijke kennis ten aanzien van deze vakken betreft dan ook niet erg hoog. De argumenten 'pro tekenen' lijken her en der weggeplukt uit de toen actuele rapporten over het tekenonderwijs. De argumenten 'anti vormleer' waren door de jaren heen dezelfde gebleven en ge-

baseerd op de algemene onderwijsverslagen, die zoals we in het voorgaande gezien hebben, een bij voortduring negatieve teneur vertoonden.

Raadselachtige beslissing

Het blijft een raadsel hoe van de ene op de andere dag de beslissing tot afschaffing van de vormleer tot stand is gekomen. Het zou kunnen zijn dat op het laatste moment pressie is uitgeoefend door de voorstanders van het tekenen. Partij-politieke belangen schijnen – te oordelen naar de latere reacties – niet gespeeld te hebben. Mogelijk dat het voor de vormleeraanhangers ontbroken heeft aan een deskundige en invloedrijke connectie. Deze rol was ten tijde van de wetswijziging van 1878 weggelegd voor A. Moens.

Wiskunde uit de hoofdakte

Het was een slechte tijd voor de wiskunde. Tegelijk met de afschaffing van de vormleer werd ook de wiskunde van het programma voor de hoofdakte verwijderd. Roëll, die in de commissie van voorbereiding had gezeten, bracht nu een minderheidsstandpunt naar voren. Hij wees erop dat nu zowel de vormleer als de wiskunde voor de onderwijzersexamens vervallen waren, de opleiding wel een erg eenzijdig rekenkundig karakter kon krijgen. In verband hiermee vroeg hij de minister of niet iets gevorderd moest worden 'van een daarmee verwant vak, b.v. van de beginselen der stel- en meetkunde'. Roëll kreeg steun van enkele andere kamerleden, die weer '*niet* de beginselen der stel- en meetkunde, maar wel eenige kennis van de algemeene eigenschappen van de wiskundige figuren en lichamen' zouden willen eisen.

De minister, in de mening dat de opvattingen van de verschillende sprekers en de regering 'tamelijk wel' overeenstemden, oordeelde dat 'de hulponderwijzer niet geheel verstoken mag blijven van de kennis der vlakke figuren en lichamen, omdat (...) de kennis van de eerste beginselen daarvan voor hen noodig geacht mag worden in verband met andere in het programma opgenomen vakken.' 'Daarom (...) zal ik bij de herziening van het programma gaarne gebruik maken van de thans gemaakte opmerkingen, en dus overwegen, op welke wijze in dit programma kan worden opgenomen de kennis van vlakke figuren en lichamen. Ik voeg er al dadelijk bij: dat dit eene zeer elementaire kennis zal zijn, en zeer zeker zal gewaakt moeten worden, dat wij niet weder vervallen in de vroegere kwaal van het stellen van te hooge eischen' (Blaupot ten Cate en Moens, 1890, pp. 333-334).

Op deze manier bleef er toch wat eenvoudige meetkunde in het programma van de opleiding, maar niet als examenvak. In feite was dit de enige positieve opbrengst van de jarenlange strijd om de vormleer.

Reacties op de afschaffing

In de *Christelijke Schoolbode* werd verontwaardigd gereageerd over het feit dat de Kamer deze abrupte beslissing zonder consultatie van deskundigen, inspectie en de schoolbonden had genomen:

> 'Niemand vermoedde een zo snel uiteinde. Gesmoord zonder vorm van proces. Rechters en scherprechters in één college. Pleitbezorgers niet toegelaten. Vreemd toch. (...) Die schoolmeesterende Staat doet vreemde dingen. Hij schrijft zichzelf eene akte van onbetrouwbaarheid, onbevoegdheid en wispelturigheid.'
> (*Christelijke Schoolbode*, 1889, 15-45)

Jan Versluys gaf in zijn blad op de volgende wijze uiting aan zijn onvrede: 'eindelijk zijn we in het bezit van een personeel, dat het vak goed kan onderwijzen; en daar wordt het op eens, niet op het verzoek van schoolmannen, maar op eigen initiatief van de Tweede Kamer, geschrapt. En het zonderlingste is, dat men de vormleer schrapt, om plaats te maken voor een vak, waarvan het een onmisbaren steun vormt. Men is het er over eens, dat de grondslag van goed teekenonderwijs wordt gevormd door een aanschouwelijke behandeling van de eenvoudigste en regelmatigste figuren, dat is van de grondvormen der meetkunde' (Versluys, 1889, *7*(36)). Hij sprak echter de hoop en het vertrouwen uit dat elementen van de vormleer toch behouden zouden blijven. Immers zijns inziens kon het tekenen niet zonder de vormleer en diende vooral het meetkundige rekenen, ook al vanwege het belang van het metrieke stelsel, gehandhaafd te blijven.

Ook in *De Wekker* werd verontwaardigd gereageerd op het besluit van de Tweede Kamer: 'Zooals te denken is, was de beslissing hierover volstrekt geene partijquaestie. (...)'t Is jammer, dat men in ons land nog zoo bitter weinig voor het eigenlijke vakonderwijs doet. Die heerlijke akker wordt nog niet bewerkt' (*De Wekker*, 1889 *46*(36))

Ten slotte liet ook *Het Schoolblad* zich niet onbetuigd. De schrijver daar meende dat delen van de vormleer nog behouden konden en moesten blijven binnen het rekenonderwijs: 'de waarde van ons onderwijs wordt verhoogd, indien wij er in slagen het tevens rechtstreeks dienstbaar te maken aan de eischen der practijk en dat is bij de berekeningen uit onze werkjes voor de vormleer veel gemakkelijker dan bij de opgaven uit de meeste onzer rekenboekjes' (De Ruyter, 1889).

Afgaande op deze reacties, constateren we dat de verbazing bij de 'leidende schoolmannen' groot was over deze donderslag bij heldere hemel, maar het was allemaal mosterd na de maaltijd. Door ons zijn geen redenen gevonden om aan manipulatie of politiek belang te denken. De meest voor de hand liggende verklaring voor de plotselinge verwijdering van de vormleer uit het basisschoolprogramma lijkt ons gelegen in de angst voor overlading van het programma. Zoals vaker in dergelijke situaties lag aan de feitelijke aanleiding ook hier een complex van voorafgaande oorzaken ten grondslag. Zeker is dat gymnastiek en tekenen als vakken voor het lager

onderwijs een hogere prioriteit genoten dan de vormleer, waarmee door de jaren heen van alles mis geweest was. De innovatie van het vak vormleer, later aanschouwelijke meetkunde, op de lagere school was op een mislukking uitgelopen.

Nawerking van de vormleer: boeken van 1889-1910

Weliswaar verdween de vormleer in 1889 van het programma van de lagere school en werd wiskunde van het programma voor het hoofdakte-examen afgevoerd, in de opleiding verdween de wiskunde als vak niet. In de regeling voor de Rijksnormaallessen voor het A-programma werd voor de klassen 2, 3, en 4 twee uur wiskunde voorgeschreven (*Staatsblad*, KB 97, 1890). Daarom bleef er ook na 1889 nog een markt voor aanschouwelijke meetkundeboeken voor de opleiding bestaan. Maar ook voor de leerlingen verschenen nog allerhand meetkundige boeken. De door ons gevonden boeken zijn ook nu weer in een apart bestand bij de literatuur en gecodeerd van A16;17a tot A16;26b opgenomen.[3]

Voor de *opleiding* na 1889 waren dat bijvoorbeeld de boeken van De Gast (A16; 18a,b), die van 1865 tot 1869 leerling was van de Rijkskweekschool te Haarlem. Er is enige overeenkomst met de boeken van Koenen en Brogtrop, die ook nog gebruikt werden, maar de opbouw is beter en er staan geen fouten in. Deze cursus heeft zeer lang, tot in de jaren twintig van de twintigste eeuw, standgehouden. Ook de cursus van Wisselink (A16;25a,b,c,d) was geschreven voor de Rijksnormaallessen. Deze methode vertoont veel meer de trekken van een logisch-deductieve aanpak, alleen al door de bekende 'gegeven, te bewijzen, bewijs'-stijl. De stof is uitgebreider dan bij De Gast, zoals de projectiestelling bij de planimetrie en enige ruimteconstructies bij de stereometrie. Beide auteurs meenden dat hun methode ook geschikt was voor de MULO, de herhalingsklassen en de middelbare meisjesscholen, waarmee ook het wiskundeniveau voor de toenmalige opleiding voor de onderwijzer aangegeven wordt. Beide auteurs hebben voortgewerkt in de traditie van Jan Versluys, maar qua aanschouwelijkheid steekt de methode van De Gast uit boven die van Wisselink. Zoals altijd waren er ook oefenboeken voor de opleiding, zoals van Van der Hout en Disselkoen (A16;21a,b).

De *leerlingboeken* van na 1889 blijken in het verlengde te liggen van de ontwikkelingen van het vormleeronderwijs. Soms lijken ze een voorbereiding op het voortgezet onderwijs, zoals die van Couvée. Heel veel nadruk werd er nu op het meetkundige rekenen en tekenen gelegd, voor het metriek stelsel vaak op het overdrevene af. Alleen al de titels van de boeken van Landsman, De Rooy, Rosier en De Vries en Zijlstra maken dit duidelijk (zie literatuurlijst schoolboeken bij A16). Ook Versluys had na de afschaffing van de vormleer zijn hoop gesteld op het meetkundige rekenen. Maar erg veel moeite heeft hij zich niet meer getroost, want zijn methode is in feite een gestripte versie van zijn vroegere vormleerboekje voor de lagere school.[4]

Interessant is het voorbericht in de boeken van Zijlstra (A16; 25a,b). Hij meent,

ondanks de afschaffing van de vormleer, toch nog een specifiek vormleerboek op de markt te kunnen brengen. Zijn argumenten zijn dat het metriek stelsel zonder enig meetkundig inzicht niet begrepen kan worden; dat het een praktisch nuttig vak is en dat het een voorbereidende waarde heeft. Ook voert hij weer de vormende waarde op en eindigt met de woorden: 'Ten slotte meen ik niet tegen den geest der Wet te handelen, met het geschrapte leervak door een achterdeurtje weer binnen te smokkelen: immers hoewel de Vormleer verdween uit de rij der leervakken, eischt de Wet van den kandidaat-onderwijzer: de berekening van de grootte en de vormveranderingen van eenvoudige vlakke figuren, en de berekening van de inhouden der eenvoudigste lichamen' (Zijlstra, 1893, voorbericht). Inderdaad geeft dit laatste ook ongeveer de inhoud van zijn *Meetkundig Rekenboek* aan, dat zo'n 300 vormleeropgaven bevat. Het was bestemd voor de hoogste klassen van de volksschool, ambachtsschool en het voortgezet onderwijs, maar ook Zijlstra hield met zijn twee drukken tot rond 1900 die achterdeur niet open.

Het was gewoon gedaan met de vormleer. De luttele pogingen om na de afschaffing van de vormleer in 1889 nog iets van meetkunde op de lagere school te behouden, werden vooral omgezet in het begrijpen van en het rekenen in het metriek stelsel, gecombineerd met oppervlakte- en inhoudsberekeningen van de geijkte meetkundige figuren. Toch zou de geest van de didactische opvattingen, zoals door Versluys en anderen in gang was gezet, doorwerken, althans bij een aantal vernieuwers en vooral ten aanzien van het voortgezet onderwijs, maar dit alles komt in deel B uitgebreid aan de orde.

A17 Samenvatting en analyse van deel A

Pestalozzi's vormleer 1800

Pestalozzi's ideeën over onderwijzen en leren zijn ten nauwste verbonden met zijn theorie over de 'Anschauung'. Met zijn grondstelling 'daß, alle Erkenntnis von Zahl, Form und Wort ausgehe' heeft hij deze drie begrippen tot de 'a priori' elementen gemaakt van het aanschouwelijke onderwijs dat in de negentiende eeuw opgang maakte. 'Zahl' en 'Wort' hadden betrekking op de traditionele vakken rekenen en taal. Het idee dat aan begrippen ook 'Form' toegedacht kan worden, bracht Pestalozzi tot de schepping van een nieuw vak voor kinderen van vier tot veertien jaar: 'Formenlehre'. Het hoofddoel hiervan was de kinderen op te voeden tot 'Anschauer' in de meest ruime zin. In deze studie hebben wij ons beperkt tot het meetkundige element van de 'Anschauung'.

Voor het allereerste onderwijs waren daartoe door Pestalozzi's medewerkers 'Elementarbücher' samengesteld. Eerst dienden de meest elementaire meetkundige begrippen aangeleerd te worden. Dit gebeurde voornamelijk aan de hand van het vierkant, dat als oervorm werd beschouwd. De didactische uitgangspunten – concreet/schematisch/abstract, zinvolle stof, stapsgewijze opbouw van de leerlijn, uitgaan van het kind, zelfontdekkende werkwijze – deden modern aan, maar uit de feitelijke vormgeving van het onderwijs kwam een mechanistisch onderwijsleerproces naar voren.

Een van Pestalozzi's medewerkers, Joseph Schmid, werkte diens ideeën over meetkunde voor de wat oudere leerlingen uit in *Die Elemente der Form und Größe*. De auteur zette zich af tegen de euclidische traditie en streefde een genetisch-psychologische opbouw na. Het is een volstrekt afwijkende meetkundeleergang, synthetisch opgezet, met grote nadruk op het systematiseren en ordenen van allerlei configuraties van meetkundige begrippen. Met deze boeken legde Schmid de basis voor de zuivere vormleer. De inhoud van dat boek en de daarbij behorende didactiek hebben gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw niet alleen invloed gehad op de ontwikkelingen in het Duitstalige gebied, maar ook in Nederland.

Zuivere vormleer in Nederland 1817-1857

Dirk van Dapperen, die bij Pestalozzi in de leer was geweest, schreef voor de Nederlandse situatie een leerboek over vormleer in de stijl van Schmid. Hierin was het meetkundige aspect niet het hoofddoel. Van Dapperen bedoelde met de vormleer vooral een methode om te leren 'opmerken, denken en spreken' aan de hand van combinatorische vraagstukken. Daarnaast golden volgens Van Dapperen ook systematisch werken, voorbereiding op het tekenen, voorbereiding op de formele meetkunde en het ontwikkelen van het esthetische gevoel als doelen van de vormleer voor de lagere school. Deze doelen waren sterk gericht op de formele vorming.

Ons onderzoek heeft voor de eerste helft van de negentiende eeuw elf Nederlandse leerboeken opgeleverd. Enkele daarvan vertonen een andere interpretatie van de vormleer dan die van de zuivere vormleer. Deze afwijkende methoden benadrukten vooral het aanschouwen van reële objecten waardoor de leerlingen eenvoudige meetkundige begrippen, zoals een rechthoek en een vierkant, zouden leren kennen. Tegelijkertijd zouden de kinderen ook enige ervaring in het tekenen van deze figuren kunnen krijgen. Vooral Rijkens benadrukte dit tekenaspect. Deze methoden hebben toen overigens weinig opgang gemaakt.

In de onderwijswet van 1806 werd vormleer niet wettelijk verankerd, maar verschillende inspecteurs en enkele vooraanstaande pedagogen – Prinsen, Rijkens en Brugsma – adviseerden de scholen om het vak wel te onderwijzen. Bij de onderwijzers, die geen scholing in dit vak hadden gehad en vooral de doelen niet begrepen, was de vormleer niet bepaald populair. Tot het einde van de jaren vijftig van de negentiende eeuw heeft de vormleer in Nederland een marginale betekenis gehad. In die tijd werd het vak op hooguit 10 procent van de lagere scholen onderwezen.

Veranderende opvatting

In Duitsland ontstonden al aan het begin van de negentiende eeuw bezwaren tegen de mechanistische manier van onderwijzen, tegen de onduidelijkheid van de doelen en het gemis aan praktische waarde van de vormleer. Diesterweg publiceerde een uitgebreide handleiding, die een geheel andere kijk gaf op het inleidende meetkundeonderwijs aan jonge kinderen. Hij brak met Schmids synthetische aanpak, begon meer analytisch en van meet af aan driedimensionaal. In theorie bepleitte hij het genetisch-historische principe. Hoewel deze cursus aanschouwelijk begon, vond de omslag naar het formele toch tamelijk snel plaats. De combinatoriek van de zuivere vormleer werd sterk beknot, nadruk kwam op het leren generaliseren en ontdekken van structuren. Diesterwegs boek was bedoeld voor leerlingen van twaalf tot veertien jaar, die onderwijzer wilde worden. De leergang was opgezet volgens de heuristische methode, waarmee dit leerboek zijn tijd ver vooruit was. Brugsma zorgde ervoor dat deze handleiding in 1837 in het Nederlands werd vertaald.

Omslag naar praktische waarde

Ondanks het verzet van de Nederlandse onderwijzers, werd de vormleer via de onderwijswet van 1857 verplicht gesteld, zelfs als hoofdvak. Dat dit toen kon gebeuren, ondanks het feit dat ook heel wat kamerleden niet veel met dit vak op hadden, heeft mogelijkerwijs aan de invloedrijke ambtenaar Steyn Parvé gelegen. Deze publiceerde, terwijl hij op het ministerie werkte, een uitgebreide recensie in *De Gids* over een aantal vormleerboeken, die ten tijde van de nieuwe wet op de markt waren gekomen. Hij gaf een duidelijke omschrijving van vormleer, die volgens hem voor de lagere school aanschouwelijke meetkunde hoorde te zijn. Een excellente beoor-

deling kende Steyn Parvé aan het leerboek van Bouman toe. Diens opvattingen waren duidelijk geënt op een geschrift van Diesterweg uit 1835, waarin de vormleer als aanschouwelijke meetkunde opgevat werd en waarin ook op de praktische waarde en de toepasbaarheid van de meetkunde gewezen werd. Het boek van Bouman heeft met zijn negen drukken tussen 1858 en 1886 vooral succes gehad door de duidelijk gestructureerde handleiding. Volgens hedenhaagse maatstaven zou de inhoud zeker niet in alle opzichten als aanschouwelijke meetkunde aangemerkt worden. Ook het didactische element ontbrak nog. De toepassingen waren van interne aard, bedoeld als oefeningen van het eerder geleerde en niet als toepassingen uit de realiteit. Toch moet deze handleiding in die tijd een verademing geweest zijn, met name voor de opleiding. Hoewel dit boek toen bijgedragen heeft tot een beter begrip van de vormleer, hielden de discussies en het gelamenteer niet op.

Verschillende interpretaties na 1857

Na de wetswijziging van 1857 ging een nieuwe periode voor de vormleer in, die afgesloten werd met een nieuwe wetswijziging in 1878. De verplichtstelling betekende een injectie voor de boekenmarkt: er verschenen in die periode bijna veertig leerboeken (leerlingboeken, handleidingen en studieboeken), waarvan we 32 titels hebben getraceerd.

Analyse van deze boeken en onderzoek van de artikelen uit de onderwijsbladen leren dat de zuivere vormleer vrijwel afgedaan had, maar tevens dat het idee van het toepassen op nogal verschillende wijzen werd uitgewerkt. De leergangen verschilden enorm, niet alleen naar opvatting maar ook naar inhoud, omvang en niveau. Er vielen nu zes hoofdrichtingen te onderscheiden: zuivere vormleer, (formele) meetkunde, (technisch) tekenen, meetkundig rekenen, praktische vormleer en mengvormen. Duidelijk is dat het idee van vormleer als aanschouwelijke meetkunde veld begon te winnen.

Invloed van het tekenen

Als gevolg van de industrialisering ontstond in Nederland de vraag naar beter opgeleide handwerkslieden die constructietekeningen konden lezen en maken. Dit nu beïnvloedde het streven om ook het tekenonderwijs verplicht te stellen op de lagere school. Bij sommigen versterkte dit een oude gedachte om vormleer en tekenen in één vak onder te brengen. Er verschenen hierover verscheidene artikelen, onder andere van Bakkes. Deze publiceerde in 1865 tevens een interessant boek waarin zowel het esthetische aspect alsook de wiskundige kanten van de vormleer op een elegante manier uitgebuit werden. Dit boek bleef overigens tamelijk obscuur. Toen in 1878 weer een nieuwe onderwijswet werd aangenomen, bleef tekenen toch nog buiten het leerplan. Ondanks het verzet van de onderwijzers tegen de vormleer behield het ook nu zijn plaats in het leerplan.

Opmerkelijk is dat zelfs de meest uitgesproken voorstanders van de vormleer, zoals Steyn Parvé, Bouman en Versluys, van mening waren dat ook het tekenen een belangrijk onderwerp was. Zij maakten echter een duidelijk onderscheid tussen deze twee vakken. Volgens hen was vormleer een wiskundig onderwerp, waarvan de waarde vooral formeel en in die zin praktisch was als activiteit van het verstand, terwijl tekenen meer als praktisch vak van het gevoel en de handen opgevat werd, waarbij ook het esthetische element meespeelde.

Jan Versluys en de vormleer 1875

Het laatste decennium van het bestaan van de vormleer zou naar Jan Versluys genoemd kunnen worden. Hij kan als de eerste Nederlandse reken-wiskundedidacticus beschouwd worden. Zijn bijdragen aan de vormleer waren zowel van praktische als van meer theoretische aard. Ook voor hem was vormleer aanschouwelijke meetkunde, maar slechts bedoeld voor leerlingen van negen tot twaalf jaar. Voor de leeftijd van vier tot negen jaar verwees hij naar de activiteiten van Fröbel. Naast de aanschouwelijke meetkundige activiteiten benadrukte hij het belang van het meetkundige rekenen, maar hij beperkte dit tot de grenzen van de kinderlijke mogelijkheden. Ten slotte slaagde Versluys er als eerste in om een aantal echte toepassingen aan de vormleer toe te voegen. Zijn opvattingen over de voorbereiding van de onderwijzer getuigden ook in dit opzicht van praktisch inzicht en van een pragmatische kijk op het onderwijs.

Vanaf het midden van de jaren zeventig leken dus redelijke voorwaarden geschapen om de vormleer een werkelijke kans als lagere schoolvak te geven. Zowel inhoud, aard als doelen waren duidelijker beschreven dan ooit. Vrijwel alle andere 'nieuwe' boeken over vormleer, die tussen 1875 en 1890 verschenen – we hebben zo'n vijftien titels gevonden – volgden de lijn van Versluys, hetgeen betekende dat vormleer als aanschouwelijke meetkunde opgevat werd, terwijl er ook aandacht was voor het meetkundig rekenen. Na de periode van zuivere vormleer van Van Dapperen (1820-1860) en na de Bouman-periode (1860-1875), leek mede door het werk van Versluys eindelijk de weg tot volledige implementatie gevonden.

Plotselinge afschaffing 1889

Tussen 1880 en 1890 verscheen er over deze kwestie geen enkel artikel van belang meer, noch vóór noch tégen. Vormleer stond op elk schoolrooster. Voor de onderwijzers was vormleer een verplicht examenvak. Echter, de stilte over de vormleer zou later een periode van rust blijken te zijn die roest op het vak bracht.

Op ongeveer 25 procent van alle scholen werd tekenen als apart vak vermeld. Het streven om dit tot een verplicht vak te maken bleef in die jaren gaande, waarbij de voorstanders van het tekenen overigens nooit tegen de vormleer opponeerden en het zelfs als een voorbereidend en aanvullend element van het tekenen beschouwden.

De stille onttakeling zou uiteindelijk nog een onverwachte en plotselinge afloop krijgen. Op 30 augustus 1889 was opnieuw een wetswijziging aan de orde. De dag ervoor was onverwacht een amendement ingediend om vormleer te vervangen door tekenen. De argumenten tijdens het korte debat waren in feite dezelfde als die uit de kamerdebatten over de wetsvoorstellen van 1857 en 1878: onduidelijkheid over het doel en een kwelling voor de onderwijzers. Het meest opmerkelijke was dat men nu voor het tekenen dezelfde argumenten hanteerde als indertijd voor de vormleer, namelijk de formele en de praktische waarde. Als bij een donderslag aan heldere hemel werd – zonder enig overleg met onderwijzers, inspecteurs, opleiders of het onderwijzersgenootschap – nog op die dag een einde aan de vormleer gemaakt. Tekenen kwam in de plaats hiervan in het leerplan van de lagere school. De pogingen om meetkunde een plaats in het Nederlandse lager onderwijs te geven, waren hiermee – na een ongeveer tachtig jaar lange strijd – voorgoed mislukt.

Analyse

De redenen voor deze mislukte innovatie zijn lastig te traceren. Het hiervoor beschreven onderzoek van schoolboeken, handleidingen, inspectierapporten, jaarverslagen van de regering aangaande het onderwijs, maar vooral van onderwijskundige tijdschriften en Kamerverslagen, kan ons toch een aantal mogelijkheden tot verklaring van deze mislukking verschaffen. Vanwege de complexiteit is het niet goed mogelijk om in (directe) oorzaak-gevolg-termen te spreken. We volstaan met het onderscheid tussen factoren van meer interne (a) en externe (b) aard, die van invloed zijn geweest op de mislukking van de vormleer in de negentiende eeuw:

a1: de wiskundige inhoud van de leerstof
a2: de didactiek en de methodiek
a3: de inbedding in en samenhang met het totale onderwijs

b1: infrastructurele voorwaarden
b2: beschikbaarheid van onderwijsleermaterialen
b3: condities voor de opleiding en nascholing
b4: maatschappelijke veranderingen
b5: politieke beslissingen

We lichten deze factoren nu via een aantal steekwoorden en omschrijvingen nader toe.

Starheid

Vanuit een wiskundig standpunt gezien was de zuivere vormleer met zijn vaak ingewikkelde combinatorische problemen zonder twijfel een te lastig onderwerp voor de lagere school (a1). Dit was vooral daarom zo moeilijk, omdat er nog geen vakdidactiek bestond en de beschreven methodiek zo star was, dat deze in strijd kwam met het idee dat de kinderen zelf hun intellectuele vermogens door middel van deze vormleeropgaven konden ontwikkelen (a2). Bovendien kon op geen enkele wijze aangetoond worden dat de zo zeer geroemde vormende waarde ook werkelijk door het onderwijs in de vormleer gegarandeerd werd (a3). Mogelijkheden om dit nieuwe vak ook door middel van wetenschappelijk en praktisch onderzoek te ontwikkelen, bestonden niet (b1).

Moeilijkheidsgraad

De omslag naar een meer praktische en aanschouwelijke meetkunde vanaf de tweede helft van de negentiende eeuw leidde uiteindelijk toch weer tot een methode, die afgeleid was uit de traditionele euclidische meetkunde. Hierdoor werd de inhoud van de meeste schoolboeken te lastig voor de lagere school (a1). Hoewel de meeste methoden wel adviseerden om het onderwijs in de vormleer te beginnen met mondelinge aanschouwingslessen, moet toch geconstateerd worden dat er in didactisch opzicht nog weinig vooruitgang was geboekt ten opzichte van de eerste helft van de negentiende eeuw (a2). Bovendien ging de totale omvang van de stof vaak ver boven het totale niveau van de lagere school uit (a3).

Onduidelijkheid

Ondanks de duidelijke omschrijvingen die Steyn Parvé en Bouman in het midden van de negentiende eeuw voor de vormleer geformuleerd hadden, namelijk als aanschouwelijke, informele meetkunde, bereikte deze boodschap de onderwijzers niet (b1). Eén van de redenen hiervoor was ongetwijfeld dat nascholing toen nog niet aan de orde was (b3). Bovendien werden de onderwijzers voor 1880 tijdens hun opleiding in het algemeen niet behoorlijk voorbereid op dit nieuwe vak (b2, b3). De opgaven over vormleer op de onderwijzersexamens en de vergelijkende examens weerspiegelden niet de bedoeling van de vormleer als vak voor de lagere school, met name het didactische element ontbrak (b1, b3). De aard van deze opgaven versterkte het beeld van vormleer als formele meetkunde (a2, a3). Ook al werd door de bijdragen van Jan Versluys rond 1875 opheldering gegeven over aard, omvang en doel van de vormleer, toch scheen het toen al te laat om de onderwijzers hiervan nog bewust te maken (a3). Bovendien werden de onderwijzers na de wetswijziging van 1857 ook nog met andere nieuwe vakken belast. Toen werd het leerplan namelijk uitgebreid met geschiedenis, aardrijkskunde, natuurlijke historie en zingen. Ook werd rond die tijd nog een nieuwe spelling afgekondigd en diende het metriek stelsel on-

derwezen te worden – allemaal onderwerpen, die van veel directer praktisch belang waren dan de vormleer (a3).

Tekenonderwijs
De schijnbare overeenkomsten tussen vormleer en tekenen veroorzaakten een nog grotere verwarring; niet alleen bij de onderwijzers, maar ook bij de opleiders, de inspecteurs en de politici (a1). De voorvechters van het tekenen als verplicht vak op de lagere school slaagden erin een infrastructuur op te zetten door goede contacten met het departement, een eigen vereniging en een eigen blad, terwijl het de (reken)onderwijzers daaraan ontbrak (b1). Toen rond 1870 ook nog grote maatschappelijke veranderingen optraden, onder meer ten gevolge van de industriële revolutie, ging de overheid zich steeds intensiever bezighouden met de voorwaarden ter verbetering van het vakmanschap van de handwerkslieden. Onder invloed van het bedrijfsleven, maar ook vanuit het onderwijs zelf ontstond een zekere consensus dat tekenen een praktischer vak was dan vormleer. Wij veronderstellen dat dit één van de belangrijkste redenen voor de politieke ruil van tekenen en vormleer is geweest. Hierbij kan het argument van overlading van het programma, indien vormleer was gehandhaafd, mede een rol gespeeld hebben (alle: b4).

Traditie
Een gunstige conditie voor het welslagen van een innovatie is het kunnen voortbouwen op grond van enige traditie. Hieraan ontbrak het voor het nieuwe vak vormleer (b1). Het feit dat veranderingen, weliswaar voorbereid en gegroeid in het onderwijsveld, uiteindelijk gestalte krijgen door formele, wettelijke beslissingen komt uit de geschiedenis van de vormleer duidelijk naar voren (b5). Het gemis aan een organisatie, die zich specifiek voor het elementaire wiskundeonderwijs (rekenen en meetkunde) in had kunnen zetten, kan de plotselinge omslag in 1889 mede verklaren (b1, b5).

Tot slot

De geschiedenis van de vormleer in de negentiende eeuw is een curieuze affaire. De ontwikkeling van het vak was in feite op niets anders gestoeld dan op een aantal vage gedachten van een paar bevlogen pedagogen. Van enig onderwijsexperiment, waarbij het nieuwe vak in de praktijk werd uitgeprobeerd, was geen sprake. Aan een gerichte implementatie werd in het geheel niet gedacht; er werd eenvoudigweg van hogerhand over de invoering beslist. Het was dan ook niet verwonderlijk dat een dergelijk novum in het praktische onderwijsveld grote weerstand opriep.

Tevens constateren we dat het kennelijk zeer lastig was om de op zichzelf juiste gedachte van Pestalozzi dat 'rekenen en wiskunde' meer is dan de leer van het getal, op een zodanige wijze te interpreteren dat ook aan het 'begrijpen van de ruimte' in

het praktische onderwijs vorm gegeven kon worden. Anders gezegd: hoe kon men los van de euclidische traditie een informele meetkundeleergang voor de lagere school ontwerpen?

Uit het voorgaande is gebleken dat zulks ook niet gelukt is, hoewel sommige ontwerpers, zoals Jan Versluys, toch aardig in de richting waren gekomen. Maar er is meer nodig dan alleen de beschikbaarheid van goede materialen.

Hoewel de vormleer afgeschaft was, heeft haar ontwikkeling toch sporen nagelaten in de aanschouwelijke meetkundeboeken voor het MULO en het ambachtsonderwijs van het begin van de twintigste eeuw. Dit zal in deel B nog aan de orde komen.

De ontwikkelingen van het fröbelonderwijs, dat tegen het einde van de negentiende eeuw ook in Nederland opgang maakte, hebben we buiten deel A gelaten. Maar daarop gaan we in deel B nader in. Het fröbelmateriaal, dat hoofdzakelijk voor de kleuters was ontworpen, bevat zulk een rijkdom aan informele meetkunde dat het eigenlijk merkwaardig is dat men zich – op een enkeling na – voor de vormleer daaraan niet gespiegeld heeft.

Het heeft bijna honderd jaar moeten duren voor de meetkunde als vak voor het lager onderwijs opnieuw ter hand genomen werd. Vandaag de dag omvatten de kerndoelen voor het basisonderwijs inderdaad informele meetkunde. Hierop zullen we in delen C en D van dit boek nog uitgebreid ingaan.

Bijlage A-I

Vormleeropgaven in vergelijkende examens voor (hulp)onderwijzer, gepubliceerd in *De Wekker* (1858-1875).

Karakteristieken: combinatoriek (co); aanschouwelijke meetkunde (am); didactiek/methodiek (dm); oppervlakteveranderingen (ov); inhouds/oppervlakteformules (io); technisch rekenen (tr); construeren en tekenen (ct); metriek (me); natuurkunde (na); redeneren (re); formele meetkunde (fm).

plaats	jaar	aant. opg	karakteristieken
Bedum (Gr)	1856	1	dm
Terheijden (N Br)	1858	1	co
Ellemeet (Ze)	1858	2	dm; co
Capelle aan den IJssel	1858	1	co
Wester-Emden	1858	2	co; am
Ter Apel	1858	2	co
Buitenpost	1858	1	co
Heiligerlee	1858	1	am
Bergum	1858	1	am
Enschede	1859	1	co
Meeuwen (N Br)	1859	3	dm; co
Hoogwoud	1859	1	dm
Nieuwe Schans	1859	1	am
Termunte	1859	1	am
Bovenknijpe	1860	1	dm
Delfshaven	1860	2	am; ct
Rozenburg	1860	1	am
Boven-Hardinxveld	1860	1	dm
Sleeuwijk (N Br)	1861	3	am; io; re
Oostermeer (Fr)	1862	2	dm; ov
Hoogvliet	1862	1	ov
Hoogezand	1863	1	am; re
Ouddorp	1863	3	ov; io; ct; me
's Gravenhage	1863	2	io; am; re
Soesterberg	1863	3	ct; me; io
Hekelingen	1864	4	co; am; me; ct
Nieuwerkerk a/d IJssel	1864	6	am; co; ct; re
Wildervank	1864	4	ov; ct
Papendrecht	1865	3	io; me; fm; tr
Haarlem	1865	1	io; me; na; tr
Meeuwen (N Br)	1865	3	me; na; dm
Schoondijke	1865	7	co; ct; io; ov; am; re; tr
Gouda	1866	1	io; tr; ct
Oostvoorne	1866	2	io; tr; ct
Kollum	1866	4	co; am
Haarlem	1867	1	dm; co; re; am; io

Charlois	1867	5	am; re ;ct; io; dm
's Hertogenbosch	1868	1	dm; io; am; re; co
Drachten	1868	1	ct
Uitgeest	1868	1	dm
Voorburg	1868	1	ct
Arnhem	1868	1	dm
Veenendaal	1868	1	io; tr; me
Finsterwold	1868	2	ov; tr
Haringvliet	1868	2	io; fm; ct; me
Oostwold	1868	1	am; re
's Gravenhage	1869	1	io; ct
Groote Lindt	1869	3	co; fm; ct; io; tr
Meeden	1869	1	am; io
Midwold	1869	1	ct; re; am
Lier	1869	3	am; re; dm; ct
Nieuwerkerk aan den Ijssel	1869	2	fm; am; io; tr
Overlangbroek	1870	4	ov; am; re; fm
Hienden(Ge)	1870	2	am; tr; fm
Haarlemmmermeer	1870	1	fm; io; tr
Zwolle	1870	2	io; tr; fm
Oldenboorn	1870	2	am; fm; tr
Delfshaven	1870	1	io; me; tr
Droogendijk (Ge)	1871	1	am; io; tr
Amerongen	1871	4	ct; io; fm; ov
Veenendaal	1872	4	am; ct; fm; io; me; tr
Tuil	1872	2	ct; io;na; tr
Monnikendam	1872	2	fm; tr
Alkmaar	1872	2	fm; tr; ct
Ijzendijke	1872	4	fm
Brielle	1872	4	fm
Graauw	1872	5	ov; fm; ct
Wolfaartsdijk	1872	1	fm
Charlois	1872	1	dm
Harlingen	1872	1	ct; io; fm; tr
Waardenburg	1872	1	ct
Vlagtwedde	1872	1	ct
Brunnepe	1873	2	fm; me; io; tr
Haarlemmermeer	1873	2	dm
Steenwijkerwold	1873	2	na; me; io; ov
Baardwijk	1873	1	io; fm; tr
Doniaga (Fr)	1873	1	io; fm; tr
Deinum (Fr)	1873	1	fm
Veendam	1873	1	io; fm; na; tr
Zwolle	1873	2	fm; io; tr
Amsterdam	1873	1	io; fm; tr
Maassluis	1873	1	io; tr; na
Rotterdam	1873	1	io; me; tr
Rijswijk (n Br)	1873	1	io; me; tr

Emmikhoven	1873	1	am; io; fm; tr
Diepenheim	1873	1	ct; io;fm;tr
Oud Alblas	1873	1	io; me; tr
Bunnik	1873	1	ct;cfm; tr
Den Burg (Texel)	1873	2	ov; io; na; tr
Breda	1873	1	fm; dm
Wiene en Zelden	1873	2	fm; me
Krimpen a/d Lek	1874	2	ov; fm; am; ct
Schagerbrug	1874	2	fm; tr
Leiden	1874	1	fm
Lekkerkerk	1874	2	am
Lent (Ge)	1874	1	io; me; na; tr
Wier	1874	1	io; fm; tr
Tzummarum (Fr)	1874	1	dm
Leeuwarden	1874	2	io; fm;tr
Rotterdam	1874	1	io; fm; tr; ct
Goudriaan	1874	1	io; fm; tr; me;
Zutfen	1874	2	am
Colmschate	1874	1	fm
Capelle a/d Ijsel	1874	1	fm
Kralinge	1874	1	io; fm; tr; ct
Waddinxveen	1874	1	ov
Rotterdam	1875	1	io; fm; tr
Achterberg	1875	1	ov
Opmeer	1875	1	fm; io; tr
Dordrecht	1875	1	co
Ritthem	1875	1	io; fm; tr
Wassenaar	1875	1	na; io
Tiel	1875	2	io; fm; tr
Hellendoorn	1875	1	io; me; tr
Biervliet	1875	5	co; re; fm
Utrecht	1875	2	ct; io; fm; tr

In totaal zijn 164 examens gesignaleerd. In 48 daarvan kwamen schriftelijke vormleeropgaven niet voor.

Bijlage A-II

Overzicht van de kwaliteit van lezen (Le), Schrijven(Sc), Rekenen (Re), Hoofdrekenen (Hr), Taal (Ta) en Vormleer (Vo) op de lagere school in de jaren 1858-1862, per provincie, naar aanleiding van de algemene regeringsverslagen betreffende de staat van het onderwijs. verbetering (+); positieve en negatieve beoordelingen (±); negatieve beoordeling (–); geen gegevens (o).

1858

	Le	Sc	Re	Hr	Ta	Vo
NB	–	+	–	o	+	+
GE	–	–	–	–	o	–
ZH	+	±	+	±	–	–
NH	+	+	–	–	–	–
ZE	±	+	o	o	o	o
UT	+	+	±	o	±	–
FR	+	+	±	±	±	±
OV	o	o	o	o	o	o
GR	+	+	+	o	–	–
DR	+	+	+	o	–	–
LI	–	+	+	o	±	–

1859

	Le	Sc	Re	Hr	Ta	Vo
NB	+	±	–	–	–	+
GE	+	+	±	o	±	–
ZH	o	±	±	o	–	+
NH	o	o	o	o	o	±
ZE	±	+	–	+	–	+
UT	o	o	o	o	o	+
FR	o	o	o	o	o	±
OV	–	+	±	o	–	+
GR	±	+	+	+	–	–
DR	+	o	–	–	o	+
LI	+	+	+	o	±	+

1860

	Le	Sc	Re	Hr	Ta	Vo
NB	+	+	±	+	–	+
GE	o	o	o	o	o	o
ZH	–	+	o	o	+	+
NH	o	o	o	o	o	±
ZE	–	+	±	o	+	±
UT	±	±	±	±	–	+
FR	o	o	o	o	o	o
OV	±	o	±	o	–	±
GR	o	o	o	o	o	+
DR	o	o	o	o	o	±
LI	+	+	+	o	+	±

1861

	Le	Sc	Re	Hr	Ta	Vo
NB	+	+	+	o	–	+
GE	+	o	o	o	o	o
ZH	+	o	±	o	o	o
NH	–	+	±	–	–	o
ZE	±	±	±	–	–	±
UT	+	–	±	o	o	±
FR	+	+	±	±	o	±
OV	o	o	o	o	o	o
GR	±	±	±	±	±	±
DR	+	+	+	o	o	±
LI	+	o	±	o	o	±

1862

	Le	Sc	Re	Hr	Ta	Vo
NB	–	+	±	o	±	±
GE	+	+	±	+	±	±
ZH	+	o	o	o	o	–
NH	–	+	+	–	+	–
ZE	±	±	±	±	±	±
UT	±	±	±	±	±	±
FR	±	+	±	o	±	o
OV	–	±	+	o	+	–
GR	±	±	±	±	±	±
DR	o	o	o	o	o	o
LI	±	+	+	+	–	±

Noten deel A

Noten A0

1 Toch stelde Van Eck in 1927: 'Pestalozzi's invloed op 't terrein van de nederlandse pedagogiek meer onbewust is ondergaan, dan bewust doorleefd' (Van Eck,1927, p. 52). Rond het midden van de negentiende eeuw ontstond er in Nederland ernstige kritiek op het pestalozziaanse rekenonderwijs (zie bijvoorbeeld Brugsma, 1869, p. 241).
2 Deze *Algemeene Boekenlijst* is gepubliceerd in de *Bijdragen* van 1810. Deze lijst is door Van den Ende in samenwerking met P.J. Prinsen samengesteld. In 1815 is de lijst aangevuld en herdrukt. Of er ook daadwerkelijk rekening mee gehouden werd in het onderwijs is ons onbekend.
3 R. G. Rijkens was onderwijzer en auteur van een aantal schoolboekjes. B. Brugsma was achtereenvolgens onderwijzer, schoolopziener en directeur van de Rijkskweekschool te Groningen. Tevens auteur van leerboeken en pedagogische artikelen. Hij werd wel 'de Pestalozzi van Nederland' genoemd.

Noten A1

1 Verwijzingen naar *Wie Gertrud ihre Kinder lehrt* zijn gebaseerd op een heruitgave van de oorspronkelijke tekst, die in 1920 verzorgd en van commentaar is voorzien door E. Abb.
2 Wij gaan niet in op de betekenis die Pestalozzi heeft gehad voor het ontstaan van het volksonderwijs. Deze is bekend en meermalen onderwerp van onderzoek geweest. Zie bijvoorbeeld Lenders (1988). Ook zijn antropologische en psychologische opvattingen behoren niet tot het onderwerp van deze studie. Zie hiervoor bijvoorbeeld Delekat (1968) en Noordam (1964).
3 Noordam (1964, p. 236) noemt als verschillende betekenissen van Anschauung bij Pestalozzi: 'kijken naar; aanschouwelijkheid, indruk, observatie, beschouwing, perceptie, apperceptie, innerlijk gevoel, beleving, intuïtie'.
4 Een uitgebreide analyse van deze problematiek vinden we in de dissertatie van Elmar Bussen Wagemann (1956).
5 Het *ABC der Anschauung* bestaat uit twee delen, waarvan het tweede *Anschauungslehre der Zahlverhältnisse* heet. Ook heeft er nog een vierde 'Elementarbuch' bestaan: *Griffel und Federvorschriften.* Het *ABC der Anschauung* is volgens Wagemann geschreven door Pestalozzi's medewerker Krüsi.
6 In hoofdstuk A12 komen we nog eens terug op Herbart, vooral in verband met het zogenoemde neo-herbartianisme.
7 Geciteerd uit de tweede editie van 1804 van Herbarts *ABC der Anschauung.*
8 Herbart was in die tijd volledig overtuigd van de algemeen vormende waarde van de wiskunde: 'Gymnastik der Denkkraft'. Zo'n dertig jaar later wijst hij dit echter volledig af (Wagemann, 1956, p. 133). Op de betekenis van de vormende waarde gaan we nader in in hoofdstuk B5.
9 Herbart gebruikte om didactische redenen alleen de functies tangens en secans. Dit is uitvoerig geanalyseerd door Wagemann.
10 Deze opmerking vonden we bij Israel (1970, I, p. 194).
11 Ten behoeve van het aanschouwingsonderwijs kwamen er handleidingen voor de bewaarscholen en de laagste klassen van de lagere school op de markt. De bekendste hiervan waren die van Brugsma (1839), Rijkens (1847a) en Van Lummel (1867). Zie hiervoor de literatuurlijst.

Noten A2

1 In 1805 had J. F. Schmidt te Berlijn al een boek gepubliceerd met de titel: *Pestalozzi's Größenlehre als Fundament der Arithmetik und Geometrie.* Dit boek is een minutieuze uitwerking van Pestalozzi's tweede deel van zijn *ABC der Anschauung*, dat over de 'Maßverhältnisse' gaat; het is geen vormleerboek. Deze J. F. Schmidt werd en wordt in de literatuur vaak verward met 'onze' J. Schmid; zelfs in de grote Israel bibliografie wordt de 'vormleer-Schmid' soms als Schmidt aangeduid. Pestalozzi heeft J. F. Schmidt in 1805 een brief geschreven, waarin hij hem dankt voor zijn boek en waarin hij hem tevens op het werk van Joseph Schmid wijst (Israel, 1970, II, p. 116).

2 Geciteerd uit een brief van Pestalozzi aan Schmid van 3 juni 1814, zoals opgenomen in de bibliografie van Israel (1970, II, p. 224). Schmid had, na moeilijkheden met een andere medewerker (Niederer), het instituut in Yverdun verlaten. Later is hij teruggekeerd. Hij is tot aan de dood van Pestalozzi een trouwe navolger en vriend gebleven. Zie bijvoorbeeld: Cornaz-Besson, 1977, p. 88.

3 Bedoeld worden de Aristotelische 'algemene inzichten', zoals die in de *Elementen* van Euclides gehanteerd worden. Bijvoorbeeld: 'Als men aan gelijke dingen gelijke dingen toevoegt dan zijn de sommen ook gelijk'.

4 In de Pestalozzi-bibliografie van Israel (1970) treffen we naast enkele positieve beoordelingen ook scherpe kritiek op Schmids uitwerking van de vormleer aan. 'Zu weitschweifig' en 'zu weitschichtig' wordt het werk van Schmid, alias 'Karlchen Mießnik', genoemd (Israel, 1970, III, p. 158). Enige malen wordt naar zijn 'sonderbare Urteile über Euklid' verwezen. Overduidelijk is de recensent van de Heidelberger Jahrbücher: 'Die Sprache und die Beweise sind oft untauglich, Strenge und Bestimmtheit der Ausdrücke fehlt' (Israel, 1970, III, p. 155). Dit laatste is in overeenstemming met wat wij constateerden in Pestalozzi's eigen geschriften. Tevens wordt dit bevestigd in een geschrift uit 1887 van Rebhuhn, dat: 'Zeigt, wie gewisse Irrtümer über den Einfluß Pestalozzis und seiner Schule auf den geometrischen Unterricht von einem Buche auf das andre, von einer auf die andre forterben' (Israel, 1970, III, p. 163).

5 Dit voor het onderhavige onderzoek belangrijke werk is in Nederland onvindbaar. Wij hebben ons bediend van het exemplaar, dat zich in de bibliotheek van de Technische Hochschule te Aken bevindt. Deel I valt uiteen in de door ons besproken 'Anschauungslehre' en de 'Grössen-Lehre der formellen Anschauung'. In het laatstgenoemde hoofdstuk komen een aantal bekende euclidische stellingen van de vlakke meetkunde aan bod, zoals de 'som van de hoeken van een driehoek' en de stelling van Pythagoras. Deel II gaat over de cirkel en passer en liniaal-constructies. Verder hierin een merkwaardig stuk meetkunde over kromlijnige figuren, dat analogie vertoont met het eerste stuk van deel I. Deel III gaat over gelijkvormigheden en de toepassingen op berekeningen en constructies en de oppervlakte van de cirkel. Achterin de boeken bevinden zich in totaal 15 uitklapbladen met honderden figuren. Aan het eind van deel II volgt nog een religieus-filosofische bespiegeling over de wiskunde zelf.

6 Schmids algemene opvatting over de wiskunde was een formele, zoals uit het voorwoord van deel III blijkt: 'Freilich steht die mathematische Geistesentwicklung erhaben über alle Anwendung da; sie ist dann aber nur eine Tätigkeit und Kraftübung der Seele' (Israel, 1970, III, p.154).

7 Na deze combinatie 'gleichlaufend' met 'ungleichlaufend' wordt alleen nog de combinatie 'eine Richtung' met 'ungleichlaufend' onderzocht. In feite hadden alle combinaties van de drie relaties aan de orde gesteld kunnen worden.

8 De oplossing wordt als volgt beschreven: er is 1 tussenruimte tussen 2 evenwijdige lijnen, 2 tussen 3, ..., 59 tussen 60 lijnen. Deze evenwijdige lijnen worden door het andere stelsel evenwijdige lijnen gesneden, waarbij 71 tussenruimtes ontstaan. Zo ontstaan $71 \times 59 = 4189$ parallellogrammen. Impliciet wordt aangenomen, dat figuren los van elkaar onderscheiden moeten kunnen worden.

Noten A3

1 Een lijst van bezoekers in Yverdun is te vinden in Cornaz-Besson (1977).
2 Naast het werk over vormleer schreef Van Dapperen nog drie boeken over zang- en muziekonderwijs.
3 In zijn *'Beknopte geschiedenis van de opvoeding en het onderwijs'* schrijft J. Versluys op p. 153 "de 'zuivere vormleer' is bij ons bekend gemaakt door Van Dapperen, die in 1817 het eerste deel van een handleiding liet verschijnen". Een dergelijke druk is niet gevonden door ons.
4 Een voorbeeld van zo'n meetkundeboek voor de lagere school was van J. Waltman (1851^2): *Handleiding voor het Onderwijs in de Meetkunde op de Volksscholen.* Het was bedoeld 'als een zekere meetkundige kennis voor ambachtslieden'.
5 De verwijzing van Van Dapperen naar het werk van het 8ste Schooldistrict in Vriesland vermeldt als jaar van uitgave 1807(!). Wellicht is dit een drukfout net als één foute voorletter van de uitgever.
6 Aanvankelijk had Visser nog bedenkingen tegen de vormleer, maar naar aanleiding van een bezoek aan de school van Prinsen zegt hij overtuigd te zijn van het belang van de vormleer (H.W.C.A. Visser, 1820). En wel vooral met het oog op het leren schrijven in de eerste leerjaren en het leren tekenen in de middenklasse. Voor de hoogste leerjaren acht hij de vormleer van minder belang. Tevens ziet hij in de vormleer een mogelijkheid om 'orde en stilte te bevorderen' (H.W.C.A. Visser, 1824).
7 Aan het begin van de negentiende eeuw kon ongeveer tweederde deel van de Nederlandse bevolking lezen. Voor alle vrouwen was dit 60%. Interregionaal waren de verschillen aanzienlijk. Relatief gunstig springen onder meer de provincies Groningen (80%) en Friesland (77%) hier uit (Knippenberg, 1986). We kunnen ons dus afvragen in hoeverre door de moeders aan de huiselijke vorming voldaan kon worden. Zelfs voor Friesland (70% alfabetisme voor de vrouwen) moeten we hierbij toch vraagtekens plaatsen, zeker als we de sociale omstandigheden mede in ogenschouw nemen. Echter, Visser liet niet na het belang van de huiselijke vorming (taal, rekenen en vormleer) te blijven benadrukken.
8 De opgave van Schmid in hoofdstuk A2 van 'gleichlaufende en ungleichlaufende Linien' is isomorf met dit Van Dapperen-vraagstuk van de 'vereenigde en onvereenigde punten'. Derhalve zijn ook de schema's van de figuur A2.2b en figuur A3.2 isomorf. De schema's geven een algemene systematiek voor het vinden van de oplossingen van dit soort vraagstukken. In dit geval gaat het om het vinden van het aantal partities van een natuurlijk getal. Dit soort inzichten werd echter niet ter sprake gebracht in de zuivere vormleer. We vragen ons af of de ontwerpers wel beseften van welk een hoog niveau de door hen aangesneden problematiek in feite was.
9 Diesterweg studeerde Naturwissenschaften (wiskunde, natuurkunde en sterrenkunde) en promoveerde in 1817 op een wiskundig onderwerp. Hij werkte enige tijd als leraar, werd in 1820 directeur van het Lehrerseminar te Moers en in 1832 directeur van het 'Seminar für Stadtschulen' in Berlijn. Vanaf 1820 hield hij zich uitsluitend bezig met de 'Volksschule'. In 1847 werd hij om politieke redenen van zijn ambt ontheven. Hij was oprichter van de *Rheinischen Blätter für Erziehung und Unterricht, mit besonderer Berücksichtigung des Volksschulwesens*, medeoprichter van de 'Pedagogische Gesellschaft' te Berlijn, oprichter van de ' Pestalozzi-Stiftung' en van lerarenverenigingen. Talrijk zijn zijn leerboeken en pedagogische geschriften, waaronder het bekende handboek *Wegweiser zur Bildung für Lehrer* (Scherer, 1904, pp. 215-230). Zie ook Siegbert Schmidt (1991).
10 Op Diesterwegs culturele, maatschappelijke en politieke opvattingen en de 'Wirkung' daarvan op de negentiende en twintigste-eeuwse pedagogiek gaan we hier niet in. Deze 'Wirkungsgeschichte' is door Wolfgang Schröder beschreven (1978).
11 Een hemelsbreed verschil zien we bij de uitwerkingen voor het rekenonderwijs van Diesterweg en van Pestalozzi. Waar Pestalozzi en de zijnen vooral de formele waarde benadrukten en vervielen in eindeloze formele opgaven, maakte Diesterweg geen onderscheid

tussen hoofdrekenen en cijferen en stelde het rekenen vooral in dienst van de praktische toepasbaarheid.

12 Wij hebben de Nederlandse *Handleiding* van 1854 gebruikt. De oorspronkelijke Duitse versie van de 'Aanwijzing' hebben wij niet kunnen bestuderen.

13 Een voorbeeld van zo'n oefening is de volgende opgave, die door middel van een indirect bewijs opgelost moest worden: 'Indien a > b en c = d, dan is a + c > b + d' (Diesterweg, 1854, p. 50).

14 De beoefening van de logica was in die tijd nog steeds gebaseerd op het werk van Aristoteles. Alleen Leibniz (1646-1716) had sinsdien enige bijdragen aan de wetenschappelijke ontwikkeling van deze discipline geleverd.

15 Mogelijk dat één van deze wiskundigen Jacob de Gelder is geweest, die betrekkingen met Diesterweg onderhield (Beckers, 1993, p. 139).

16 Het bedoelde opstel van Diesterweg uit 1835 is later (in 1858) in vertaling in de *Nieuwe Bijdragen* verschenen. Dit stuk is overigens van groot belang voor ons onderzoek (zie ook A6).

17 Mogelijk dat deze J.G. Graßmann uit Stettin de vader was van H. Graßmann (1809-1877), die de grondlegger is geweest van de meerdimensionale meetkunde. De interessante artikelen van Graßmann hebben geen invloed gehad. Wel lijken zijn artikelen een voorbode te zijn voor het gebeuren dat aan het eind van de vijftiger jaren van de negentiende eeuw aan de vormleer een officiële plaats zal toegewezen worden in het leerplan.

Noten A4

1 Zie hiertoe bijvoorbeeld P.K. Görlitz (1849) of R. Turksma (1961).

2 De eisen voor deze rangen luidden:
4e rang, minimum leeftijd 16 jaar, kunnen lezen, schrijven en rekenen en 'eenigen aanleg' voor het geven van onderwijs. 3e rang, minimumleeftijd 18 jaar, 'wel ervaren' in de vakken van de vierde rang plus kennis van de beginselen der Nederlandse taal en de onderwijskunde. 2e rang, minimumleeftijd 22 jaar, dezelfde vakken als bij de derde rang, maar nog betere en verdere beheersing plus enig begrip van Aardrijkskunde en Geschiedenis en 'oordeelkundig onderwijs' kunnen geven. 1e rang, minimumleeftijd 25 jaar, boven het voorgaande wordt nog Natuur- en Wiskunde geëist en men moet uitblinken in beschaafdheid en verstand (*Bijdragen*,1806, pp. 32-33).

3 Voor een hulponderwijzeres was de Acte van Toelating niet vereist. Deze Acte voor onderwijzeressen, die overigens nauwelijks omschreven was, gold zowel voor vrouwen die een bewaarschool wilden beginnen als voor een Franse meisjesschool (Van Essen, 1990).

4 In 1850, zo'n kleine vijftig jaar na de inwerkingtreding van de wet van 1806, zag de verdeling van 5808 onderwijzers in functie naar rang er als volgt uit: eerste rang (42), tweede rang (2372), derde rang (1871), vierde rang (563), geen rang (184), kwekelingen (776).

5 In 1815 waren er 27 onderwijzersgezelschappen in de Noordelijke Nederlanden. Toen de regering vanaf 1820 de gezelschappen ging subsidiëren, steeg het aantal snel. In 1830 waren er al 215 in de Noordelijke Nederlanden (De Vroede, 1970). In 1860: 247 met een totaal van 3780 leden (Spapens, 1991). Naast subsidiëring stuurde de regering de gezelschappen ook telkens een aflevering van Pestalozzi's volledige werken in vertaling toe.

6 Schmidt is foutief gespeld; dit moet zijn Schmid.

7 Zo vermeldt Wijnbeek naar aanleiding van zijn inspectie te Amsterdam dat er op de twaalf stadsarmenscholen die hij bezocht 'noch getal-, noch vormleer werd aangewend'. Vrijwel alle ondermeesters en kwekelingen op deze scholen ontvingen hun opleiding weer van de 'Eerste leermeesters' en wel 'in de vakken van het lager onderwijs'. Geen vormleer dus (Reinsma, z.j., pp. 63-64). Een steekproefsgewijze controle van enkele jaarverslagen over de toestand van het onderwijs in Amsterdam bevestigt deze constatering.

8 Het *Magazijn voor de Rekenkunst* verscheen tussen 1828 en 1835 met uitzondering van

het jaar 1832. Vanaf 1834 is het opgegaan in het *Magazijn voor Reken-, Stel-, en Meetkunst.*

9 Een voor ons interessant archiefonderzoek is een studie van Beem en Muijlaert (1977), waarin de praktijk van het onderwijs, naar aanleiding van de wet van 1806 in de plaatsen Linschoten, Jutphaas, Montfoort en Ysselstein wordt onderzocht. In deze studie worden per school steeds het vakkenpakket, de klankmethode, de hulpmiddelen, de klassikale verdeling, de regeling der werkzaamheden, het onderwijs in verband met het begripsvermogen en de examens en prijsuitreikingen besproken. In Linschoten wordt de vormleer na 1828 vermeld. Te Jutphaas werd reeds in de jaren twintig vormleer gegeven. In Montfoort wordt vormleer niet vermeld. In Ysselstein blijkt dat in de tweede helft van de jaren twintig getal- en vormleer nog volslagen onbekend is, maar dat de vormleer daar in de jaren dertig ingevoerd wordt. Op de lijsten van hulpmiddelen, waaronder ook handleidingen voor de onderwijzer, wordt echter geen enkele maal een boek over vormleer genoemd.

10 De schoolopzieners dienden volgens de reglementen elke school tweemaal per jaar te bezoeken. Driemaal per jaar kwamen zij in hun provinciehoofdstad bijeen om als Provinciale Commissie hiervan schriftelijk verslag te geven. Elk jaar werd door deze commissies aan de minister een rapport over elke provincie gestuurd, plus de rapporten van elke schoolopziener over zijn district, plus de jaarlijkse rapporten van de commissies van Plaatselijk Toezicht. Dit zou dus 'voor elk jaar 10.000 verslagen van scholen zijn, 140 districtsverslagen en 70 algemene'. Reinsma heeft vastgesteld dat voor het jaar 1841 geen enkel schoolopzienerverslag in het Rijksarchief aanwezig is (Reinsma, z.j., p. 10).

11 Een transcriptie van deze rapporten bevindt zich in het Rijks Archief in Den Haag: nr. 172 B 37. Voor onze verwijzingen gebruiken we: RA;172 B 37, gevolgd door het paginanummer.

12 In 1835 had Wijnbeek Noord-Brabant ook bezocht. Dit verslag is niet in het RA-stuk opgenomen.

13 Dit klopt met de gegevens van Jonker (1991). Zie Dodde (1991).

14 Aan het eind van deze periode moet daar ook nog Bouman aan toegevoegd worden, maar diens betekenis is vooral voor de periode van na 1857 van belang.

Noten A5

1 Waar verwezen wordt naar 'Bijlagen VHTK' worden de 'kamerverslagen' bedoeld: *Bijlagen tot het Verslag der Handelingen van de Tweede Kamer der Staten Generaal.* Op grond van deze verslagen hebben wij de politieke ontwikkelingen rond de vormleer geanalyseerd.

2 De bedoelde commissie bestond uit: Prof. J. Bosscha, Mr. J.M. de Kempenaer, Mr. W. Baron Van Lynden, S. Blaupot ten Cate en Mr. J.R. Thorbecke.

3 Reeds vanaf het begin van de negentiende eeuw ontstaan in de marge van het reguliere onderwijs overal in Nederland tekenscholen (Goudswaard, 1981).

4 De commissie bestond nu uit: Mr. J.R. Thorbecke, S. Blaupot ten Cate, Prof. J. Bosscha, Mr. J.D. van der Poel en Mr. J. Heemskerk.

5 Deze commissie bestond uit: Jhr. J.A.C.A. van Nispen van Sevenaar, S. Blaupot ten Cate, Mr. J. Heemskerk, Mr. J.R. Thorbecke en Prof. J. Bosscha.

6 De motiveringen voor invoering van de vormleer in 1857 blijven onduidelijk. Dit wordt in 1858 in een belangrijk artikel nog eens bevestigd door H. Bouman: 't is zeker moeilijk te bepalen, waarom juist nu de *vormleer* door de wetgever onder de verpligte vakken van lager onderwijs is opgenomen'.

Noten A6

1 Herman Bouman (1822-1899) was 'een der meest verdienstelijke onderwijzers van ons land'. Van 1846 tot 1876 was hij hoofdonderwijzer te Beerta. Aan zijn school werden vanaf 1859 de eerste normaallessen in Groningen gegeven, die door de inspecteur van Drente ter navolging werden aangeprezen. Bouman behaalde talrijke akten, waaronder die voor wiskunde en tekenen. Ook behaalde hij de eerste rang volgens de wet van 1806. In 1876 werd hij benoemd tot directeur van de zojuist opgerichte gemeentelijke kweekschool te Amsterdam. Het meest bekend is hij geworden met zijn leesmethode, die een verbetering was van Prinsens klankmethode (*Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek, deel I*, 1911, kol. 441-442).

2 Daniël Jan Steyn Parvé (1825-1883) was in 1847 te Groningen summa cum laude in de wis- en natuurkunde gepromoveerd. Van 1848 tot 1858 was hij professor in de wiskunde aan het Koninklijk Atheneum te Maastricht. Daarna werd hij benoemd tot commies op het departement van Binnenlandse Zaken, afdeling Onderwijs. Hij is de rechterhand van Thorbecke geweest bij de voorbereiding van diens Wet op het Middelbaar Onderwijs van 1863, waarmee de HBS een feit werd. In 1863 werd hij een der eerste inspecteurs van het middelbaar onderwijs. 'Door zijn breede ontwikkeling, grondige kennis van de nieuwe wet, practischen blik, administratieve kundigheden en zeldzamen tact in den omgang' moet Steyn Parvé voor de verschillende ministers, waaronder hij diende, een buitengewoon competente beleidsadviseur en medewerker zijn geweest (*Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek, deel 7*, 1927, kol. 943-945).

3 In hoofdstuk A4 wezen wij al op een omvangrijk artikel van Steyn Parvé in de *Nieuwe Bijdragen* van 1848 over het wiskundeonderwijs, zijnde een vertaling van Nagels *Idee der Realschule*. In 1850 verschijnt van zijn hand een brochure getiteld *Het wiskundig onderwijs in Nederland*, waarin hij een pleidooi houdt voor het belang van wiskunde op de Latijnse scholen, waarvoor, net als in wetenschappelijke kringen, weinig achting bestond. We zien hier Steyn Parvé's vooruitziende blik betreffende de noodzaak van een middelbaar onderwijs dat tegemoet kon komen aan de eisen van een meer geïndustrialiseerde maatschappij en aan een gedegener voorbereiding op de exacte richtingen aan de hogescholen en universiteiten. In gelijke mate releveert hij de 'formeele' en de 'materieele waarde' van de wiskunde, bij het laatste aspect vooral verwijzend naar de natuurwetenschappen en de medicijnenstudie. De didactiek moet anti-werktuigelijk en pro-inzichtelijk zijn. Hij stelt vertrouwen in een leraar die vooral de 'methode' goed verstaat én een gedegen achtergrondkennis heeft, die echter niet op het niveau van een afgestudeerd academicus (doctor) hoeft te staan. Net als Diesterweg acht hij een goede leraar belangrijker dan een goed leerboek.

4 Het voorwoord dat Brugsma bij de vertaalde vormleerboek uit 1837 schreef, was ook op het Wegweiser-artikel uit 1835 gebaseerd, zoals al in hoofdstuk A3 uiteengezet is. De overeenkomsten zijn zo sterk, dat we tegenwoordig van plagiaat zouden spreken.

5 Ook Bouman schrijft Schmidt in plaats van Schmid.

6 Opvallend is trouwens dat Bouman in genoemd artikel noch verwijst naar Brugsma noch naar Diesterweg. Het is niet onmogelijk dat hij toen reeds op de hoogte was van de ontwikkelingen in Duitsland, waar de opvattingen over de vormleer als schoolvak al weer geëvolueerd waren. Het artikel van Diesterweg, dat hierboven besproken werd, kwam uit de eerste druk van de *Wegweiser* uit 1835. In de derde druk van de *Wegweiser* wordt de vormleer in het geheel niet behandeld en in de vijfde druk van 1877 wordt niet van vormleer, maar van 'Elementarunterricht in der Geometrie' gesproken. Dit laatste stuk van C. Sondhaus maakt duidelijk dat ook in Duitsland weerzin was ontstaan tegen de bewerking van de pestolozziaanse vormleer door Schmid. Maar tevens maakt Sondhaus gewag van Diesterwegs verdiensten om het vak weer op het juiste spoor te brengen en van het feit dat men in 1872 in de grootste Duitse staat, Pruisen, de 'Geometrie' weer op het leerplan van de Volksschulen heeft geplaatst. Hij meent dat daarmee ook aan de vroegere auteurs en

pleitbezorgers van de Formenlehre tegemoet is gekomen. Duidelijk wordt dat er vanaf dan niet meer gedacht wordt aan de formele pestalozziaanse denkoefeningen, maar aan elementaire meetkunde om 'die Gestaltung- und Constructionskraft der Schüler zu üben' (Sondhaus, 1877, p. 259). We zien ook in dit opzicht een sterke overeenkomst met de Nederlandse situatie, waar de vormleer zich ook meer in de richting van elementaire meetkunde zou gaan ontwikkelen.

7 Het artikel is niet ondertekend, maar dat het van de hand van Steyn Parvé is, blijkt uit het 'Berigt voor de tweeden druk' dat H. Bouman aan zijn handleiding van 1860 toevoegde. Hierin bedankt hij Steyn Parvé voor 'zijne allezins volledige, degelijke en daardoor hoogst billijke beoordeling van mijn boekje' in de *Nieuwe Bijdragen* van 1858. Versluys bevestigt dit in het geschiedkundige overzicht van de vormleer in zijn handleiding van 1879. Overigens maakt Steyn Parvé ook in dit stuk van de gelegenheid gebruik om nog eens een lans te breken voor de wiskunde als leervak, ook op een elementair niveau zoals bij de vormleer. Hij haalt hierbij fel uit naar Dr. J.A. Lamping, die in het januarinummer van 1859 van *De Gids* betoogde dat het onderwijs in de klassieke talen als alleenzaligmakende voorbereiding op het hoger onderwijs gold en dat de wiskunde inferieur voor een dergelijk doel wordt geacht. Daarin maakte Lamping ook duidelijk dat hij niks zag in de vormleer, wanneer hij stelt, dat '(...) in het lager onderwijs de vormleer een volslagen dood leervak (is)' (Lamping, 1859, p. 12.). Steyn Parvé stelt daar onder meer tegenover: 'Het ware te wenschen geweest, dat de Heer LAMPING, alvorens op deze wijze den staf te breken over een leervak, dat hij blijkbaar niet kent en niet begrijpt, getracht had zich beter op de hoogte der zaak te stellen. De redenen, die hem de wiskunde doen veroordeelen gelden niet bij de vormleer; deze is niet abstract, daargelaten of de studie der wiskunde zelve wel dien naam verdient; begrijpt een leerling het doel en de beteekenis niet van het onderwijs in vormleer, men wijte zulks niet aan de leerstof, maar alleen aan de wijze van behandeling' (Steyn Parvé, 1859, p. 407).

8 Ook Steyn Parvé schrijft Schmidt in plaats van Schmid.

Noten A7

1 Naast deze 32 titels kwamen wij via BCC, advertenties en verwijzingen nog de volgende titels tegen, waarvan wij geen exemplaar hebben kunnen vinden: *Practische vormleer* van L. van Langeraad. *Vademecum geschiedenis en vormleer* van J.P. Quant. *Praktische handleiding bij het onderwijs der Vormleer, ten dienste van kweekelingen en hulponderwijzers* van H. Sluijters. *Ziet, telt en meet, Eene practische vormleer* van G. van Stappen en *De kern der vormleer* van J. Waltman.

2 Gebleken is dat de gegevens van BCC niet zonder meer betrouwbaar zijn.

3 Vanaf de zevende druk (1879) is de titel gewijzigd in *De vormleer der meetkunde in de lagere school* en de negende druk (1886) luidt *Vormleer, meetkunde in de lagere school.*

4 Tweede en laatste druk in 1879 onder de titel: *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen als voorbereiding tot de beoefening der meetkunde.*

5 Tweede en laatste druk: 1879 onder de titel: *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen als voorbereiding tot de beoefening der meetkunde.*

6 Dr. D. Bierens de Haan (1822-1895) was hoogleraar in de wiskunde te Leiden. Van 1857 tot 1863 was hij schoolopziener te Deventer. In verband met deze functie is wellicht zijn belangstelling voor de vormleer te verklaren.

7 Hemke Hemkes Kzn. (1807-1889) was een vooraanstaand onderwijzer van de eerste rang. Hij werd bekend zowel door zijn organisatorisch-politieke kwaliteiten als door zijn enorme productie leerboeken (Van der Plaats in *Paedagogisch Woordenboek*, 1905, pp. 426-430). Van zijn hand zijn tientallen boeken voor rekenen, taal, geschiedenis en aardrijkskunde verschenen. Vooral zijn rekenboekjes hebben een enorme aftrek gehad. Ook publiceerde Hemkes twee boeken over vormleer.

8 Een aanbeveling krijgt het eerste deel van de handleiding in *De Wekker 19*, 12-9-1862. In

1873 laat Versluys van deze boeken nog een welwillende bespreking het licht zien.

9 De eerste uitgave van dit boek heette *Handleiding in de Vormleer* en is van 1873. Er is geen auteur vermeld. Volgens het gedenkboek van Zwijsen (1996) is de auteur frater Hyacinthus Vernimmen.

10 Jhr. Mr. J. de Witte van Citters zette zich naast zijn praktische en wetenschappelijk juridische werk ook in voor het onderwijs. Zo was hij jarenlang lid van de schoolcommissie te 's-Gravenhage en van 1855 tot 1865 was hij schoolopziener in het eerste district van Zuid-Holland.
H. Bakkes was onderwijzer te Pernis.

11 Het werken op roosterpapier hoort tot de methode van Fröbel. Het heeft voordelen, maar het kan ook verstarrend en blokkerend werken.

12 Het boek van Bakkes is aanvankelijk onopgemerkt gebleven. In 1866 verschijnt er in *De Wekker* een aanbeveling van een oud-inspecteur. Het wordt daarbij 'een gelukkige combinatie van de denkbeelden van Stratemeijer, Fröbel en de Witte van Citters' genoemd (*De Wekker*, 1866, *23*(22). Een jaar daarna volgt in hetzelfde blad nog eens een lovende bespreking (*De Wekker* 1867, *24*(42)).

13 Een bekend boekje was dat van H^S Kremer, dat van 1824 tot 1867 zeven drukken beleefde. Dit boekje heeft als doel het leren berekenen van oppervlaktes van rechtlijnige figuren en oppervlaktes en inhouden van ruimtefiguren. In verband hiermee worden ook algoritmen voor tweede- en derdemachtsworteltrekking behandeld. Voor de meetkundige achtergronden wordt naar het boek van Karsten verwezen.

14 Bedoelde stelling is in kleine letter gedrukt, hetgeen betekent dat het als studiemateriaal voor de onderwijzer bedoeld is.

15 Het genoemde boek van Rückbeil hebben wij niet kunnen traceren.

16 Het doel van Crüts is 'om door middel van de heuristische, akroamatische, dokimastische en repetitorische leervormen het verstand te ontwikkelen en op te scherpen'. Het bevat vraagstukken over zuivere vormleer, elementaire meetkunde en meetkundig rekenen. Het boekje van Meurs is ook een vragen- en vraagstukkenverzameling, gerangschikt naar niveau met nadruk op meetkundig rekenen, bedoeld voor de lagere school. Het krijgt goede kritieken in 1866 en 1869 (*De Wekker,* 1869, *26*(3)). Swartwolt bedoelde zijn boekje als aanvullende vraagstukkenverzameling bij 'de gunstig bekende Handleiding bij het Onderwijs in de Vormleer van den Heer Stratemeijer'. Dit wordt ook in een aanbevelende recensie in 1862 gesteld (*Nieuwe Bijdragen*, 1862, p. 1023). Het boekje van Meulevelt omvat slechts 19 pagina's tekst, heet voor de leerlingen te zijn, maar lijkt meer op een overzicht van begrippen en formules of vademecum voor de onderwijzer.

17 De derde druk in 1876 wordt in een recensie als 'vrij nutteloos' afgedaan (*De Wekker*, 1876, *33*(66)). Volgens Brinkmans Cumulatieve Catalogus zou er nog een tweede deeltje bestaan hebben.

18 Zie bijvoorbeeld het boek van J. Elffers (1974): *Het oude Chinese vormenspel, Tangram.*

Noten A8

1 De wet van 1857 had onder meer de volgende gevolgen: De minimumleeftijd voor toelating tot het examen van hulponderwijzer werd 18 jaar, voor hoofdonderwijzer 23 jaar. Voor het laatste examen moest men in het bezit zijn van de akte van hulponderwijzer. Tevens werd het begrip 'kweekeling' in artikel 5 van de wet van 1857 omschreven: 'Kweekelingen zijn zij, die den ouderdom nog niet bereikt hebbende waarop zij tot het examen als hulponderwijzer of als hulponderwijzeres kunnen worden toegelaten, bij het schoolonderwijs behulpzaam zijn.' Aan alle onderwijzers in het bezit van een eerste of tweede rang volgens de wet van 1806 werden dezelfde rechten als die van de hoofdonderwijzersakte toegekend, aan die van de derde rang die van hulponderwijzer. Die onderwijzers die een vierde rang bezaten, moesten opnieuw examen voor hulponderwijzer afleggen. Schoolhouderessen in de zin van de wet van 1806 kregen dezelfde rechten als de

hoofdonderwijzers, maar deze waren slechts geldig binnen de provincie of de gemeente, waarin de akte was afgegeven.

2 De verbetering van de opleiding is vooral aan de inzet van enkele Tweede-Kamerleden te danken geweest, zoals de Friese schoolopziener Van Beyma thoe Kingma en de Hervormde predikant en inspecteur Antony Moens (1827-1899). De Rijkskweekscholen leverden veruit de beste onderwijzers af (Turksma, 1961), maar hun aantal was te klein om het benodigde contingent aan te vullen. Doordat nu ook aan de onderwijzers (de opleiders) van de rijksnormaalopleidingen en aan de kwekelingen (van buiten de gemeente) toelagen verstrekt werden, kreeg ook deze vorm van opleiding een professioneler karakter. De kwekelingen werkten in de praktijk en kregen theoretische lessen, gedeeltelijk overdag maar ook wel in de avonduren en op zaterdag. In feite waren deze normaalscholen eenvoudige kweekscholen. Het aantal leerlingen op deze normaalscholen steeg fiks: van 184 in 1859 tot 881 in 1862. Na 1878, toen er al weer een nieuwe onderwijswet van kracht was geworden, richtte het rijk steeds meer van deze normaalscholen op. Het aantal adspirant-onderwijzers steeg van ruim 1000 in 1878 tot meer dan 4000 in 1884 (Turksma, 1961, p. 101). Het verschil tussen de rijksnormaalscholen en de opleidingsklassen, waarvan er in 1861 58 waren, bestond hierin dat de laatste éénmansopleidingen waren. De kwekelingen werkten op de school van de opleider en kregen van hem in de avond en op zaterdag hun theoretische vorming. Deze schoolhoofden werden door de minister van Binnenlandse Zaken aangewezen en ontvingen voor hun werk een vergoeding. Deze driedeling van opleiding tot onderwijsgevende heeft tot 1920 bestaan.

3 Van de eisen voor de onderwijzersexamens kan niet gezegd worden dat ze onredelijk of zelfs te hoog waren. Hoewel het aantal geslaagde hulponderwijzers tussen 1864-1878 landelijk toeneemt – van ruim 40% naar circa 60% – is het aantal afgewezenen op deze examens nog altijd vrij hoog.Voor de hoofdonderwijzers was dit nog slechter. Rond het midden van de jaren zestig bedroeg het percentage geslaagde hoofdonderwijzers ruim 30. Dit loopt op tot ongeveer 40% voor het midden van de jaren zeventig van de negentiende eeuw. Voor de onderwijzeressen waren de resultaten beduidend beter.
De examencommissies uitten in hun verslagen vaak een vernietigende kritiek op het peil van de kandidaten. Deze kritiek betreft vooral het gebrek aan ontwikkeling en beschaving, aan gebrek aan inzicht en aan te veel van buiten geleerde kennis (*Weekblad* 1865, *4*(1)). Er ontstond van de zijde van de kandidaten veel kritiek op de commissies en hun werkwijzen. De redactie van *De Wekker* nodigde de onderwijzers uit om deze kritiek in haar blad openbaar te maken, hetgeen ook weer reacties van leden van de commissies en andere deskundigen opriep. Het resultaat was dat deze kwestie in ieder geval onder de voortdurende aandacht bleef van de opleiders, inspectie, beleidsmakers en politici. Een verklaring die ons niet onmogelijk lijkt, was die van de vooraanstaande Hemkes, die meende dat de onderwijzersopleiders van de opleidingsklassen hieraan debet waren (*De Wekker* 1868, *25*(33)). Inderdaad blijken volgens verschillende verslagen de resultaten van de kandidaten van de rijks- en normaalscholen, die zelf ook weer examens afnemen alvorens de kandidaten aan de provinciale akte-examens mogen deelnemen, aanzienlijk beter te zijn dan die van de éénmansopleidingen (opleidingsklassen). Overigens verschilden de resultaten per provincie sterk. In 1868 zijn de aantallen geslaagden voor hoofdonderwijzer in Noordholland en in Groningen respectievelijk 15% en 80%.

4 De programma's van de drie Rijkskweekscholen in Haarlem,'s Hertogenbosch en Groningen omvatten voor de cursus 1861-1862 vijftien vakken. Het aantal uren voor Nederlandse taal was het grootst (gemiddeld zeven uur per week), daarna kwam rekenen met ongeveer de helft. Het programma van de opleiding in Haarlem omvatte in 1872 dertig vakken, waarvan een aantal telkens specificaties waren van één hoofdvak. Als opvallende uitbreidingen ten opzichte van het programma van 1861 noemen we Frans, Duits, algebra en meetkunde; vakken waarin voor de akten van hulp- en hoofdonderwijzer geen examen afgelegd hoefde te worden.

5 Dit boek van Versluys maakt een begin met de projectieve meetkunde.

6 Voor Brugsma: zie A1, noot 13. D. de Groot was eerste onderwijzer aan de Rijkskweekschool te Groningen en auteur van een leerboek over 'praktische' vormleer. W. Gleuns Jr. (1808-1881) behaalde in 1837 het doctoraat in de wiskunde en in 1847 nog de eerste onderwijzersrang. Hij was leraar wiskunde aan de Rijkskweekschool en later leraar wiskunde aan de HBS te Groningen. Sedert 1857 tevens inspecteur voor het lager onderwijs (*Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek*, deel II, 1912, kol. 481-482).

7 Voor de cursus van 1876-1877 was dit hetzelfde (*De Wekker* 1872, *26*(70) en 1877, *34* (89)).

8 Voor de vakken Nederlandse taal, aardrijkskunde, geschiedenis, natuurkennis en pedagogie kan de verzameling 'Acte-examens' (S. de Jong Jz., 1879) een indruk van het niveau voor de schriftelijke examens geven. Bij het rekenen valt op dat de opgaven voor de hoofdonderwijzers en de hulponderwijzers elkaar in moeilijkheid nauwelijks ontlopen. Vanuit een huidig standpunt bezien zou men de vraagstukken voor de hulponderwijzers als zeer lastig kunnen ervaren, maar de opgaven zijn in een aantal stereotypen in te delen, waarop apart geoefend kan worden. Als voorbeeld geven we hier enkele examenopgaven voor hulponderwijzer te Groningen van april 1872:
1. Breng 23,4, geschreven in het achttallig stelsel, in het tientallig- en uit het tientallig in het viertallig stelsel over.
2. Een rentenier ontvangt jaarlijks van twee kapitalen, te zamen groot f. 12000, f 575 interest. 't Eene kapitaal staat uit tegen 4 3/4 en 't andere tegen 5 pCt. Hoe groot is ieder kapitaal?
3. A heeft 1 1/4 flesch wijn en B 1 1/2 flesch. C. drinkt mee en betaalt daarvoor f. 1,10. Wat komt A en B daarvan toe? (*De Wekker* 1872, *29*(32)).

9 Deze verslagen zijn gepubliceerd in de 22-ste jaargang van *De Wekker* (1865).

10 Of er bij die examens, waarbij geen schriftelijke vormleeropgaven gevonden zijn, wel mondeling in dit vak geëxamineerd is, kunnen we niet vaststellen. Slechts een enkele maal werd ook van mondeling onderzoek en praktijkwerk (proefles) in vormleer gewag gemaakt

11 Enkele voorbeelden van de karakteristieken:
am: Hoe zoudt gij aanschouwelijk maken, dat van driehoeken, die gelijken omtrek hebben, de gelijkzijdige, en van vierhoeken van gelijken omtrek, het vierkant den grootsten inhoud heeft? (Oostwold, 1868)
fm, io, tr: Een rechth. trapezium, waarvan de evenwijdige zijden zijn 2 en 6 en de hoogte 3 dM., wentelt om de zijde tusschen de rechthoeken. Men vraagt het oppervlak en den inhoud van dit omwentelingslichaam. (Tiel, 1875)
ct: Teeken het symmetrisch net van eene vierzijdige pyramide. (Voorburg,1868)
ov: Een' willekeurigen 4hoek in een paralelogram te veranderen. (Ouddorp, 1863)
me: Maak voor leerlingen duidelijk, dat 1 wisse 1000 kub. palm heeft. (Hekelingen, 1864)
In een bak lang 2,5 M. - breed 1,5 M. - is 46,875 H.L. water. Hoe hoog staat het water? (Veenendaal, 1872)
am, tr: Toon mij door figuren aan dat $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.
re: In zeker figuur werden 170 diagonalen getrokken. Door hoeveel zijden wordt dit vlak begrensd? (Nieuwerkerk a/d Ijssel, 1864)
dm: Welke werken hebt gij over de vormleer bestudeerd of gelezen? Welk onderscheid hebt gij opgemerkt in leerplan, leergang en leerwijze, door verschillende schrijvers dier werken gevolgd? Aan welke wijze van onderrigt zoudt *gij* de voorkeur geven en waarom? (Hoogwoud, 1859)

12 Strikt genomen hadden we de categorieën ov, io, en tr alle met fm kunnen scoren, maar daarmee zouden we informatie over de aard van de opgaven verloren hebben.

13 Dit vergelijkende examen (tijd 1 uur) omvatte twee vraagstukken:
1. In een bol is de grootst mogelijke kubus geplaatst. Hoe verhoudt zich de inhoud van den kubus tot dien van den bol?
2. Van een stuk land in de gedaante van een driehoek, wordt door een sloot een stuk af-

gesneden, dat 1/3 is van het geheel. Hoe lang is die sloot, indien AB=14, BC=13, AC=15 en AD=7 H.M. is? (Hierbij was een tekening gegeven van driehoek ABC met D op AB en E op AC, EdM) *(De Wekker 27*(49)1870).

Noten A9

1 De Friese schoolopziener Van Beyma thoe Kingma, bekend voorvechter van de openbare volksschool, richtte zich in 1872 via een open adres tot de politiek. In zijn geschrift laat hij aan de hand van de gegevens van een groot aantal scholen zien hoe ongunstig de situatie van de volksscholen ten aanzien van hulponderwijzers en schoolverzuim is en hoe karig de salariëring van de onderwijzers is.

2 De Hervormde predikant Antony Moens (1827- 1899) is een belangrijk ijveraar voor de verbetering van het onderwijs geweest. In 1866 werd hij als progressieve liberaal gekozen tot lid van de Tweede Kamer. In die hoedanigheid werkte hij krachtig mee aan de herziening van de Wet van 1878. Tevens was hij een van de oprichters van de 'Vereniging Volksonderwijs'. In 1873 werd hij inspecteur van het lager onderwijs in de provincie Utrecht en in 1880, na wijziging van het inspectieapparaat, inspecteur van de tweede inspectie, omvattende de provincies Noord- en Zuid-Holland, Zeeland en Utrecht (*Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek*, 1912, kol. 928-929). Hij noemde enkele resultaten van het toelatingsexamen voor de burger dag- en avondscholen (dit is uitgebreid lager onderwijs) in Den Bosch, waar 'aan (...) eenvoudige eischen 1/3 der jongens niet (kon) voldoen' (*De Wekker*, 1871, *28* (52)). Twee jaar later, tijdens de debatten over de begroting van 1874, zei Moens zelfs: 'Meer dan een onderwijzer daar (bedoeld wordt op het platteland, EdM.) verzekert, en wederom de beste onder hen, dat van de 100 leerlingen die ter school komen, naauwelijks 5 pCt de school verlaten, die *behoorlijk* kunnen lezen zoo dat ze met gemak en met lust daarvan gebruik kunnen maken' (*De Wekker,* 1873, *30* (104)).

3 Het criterium voor alfabeet was of men een handtekening onder de huwelijksakte kon plaatsen. Knippenberg en De Pater (1988) noemen voor het analfabetisme de volgende cijfers voor het gehele land: 1850 (26,1%); 1875 (13,5%); 1900 (2,8%). Deze cijfers stemmen redelijk overeen met de gegevens van Verrijn Stuart (1913). Hoewel de trend van afnemend analfabetisme gedurende de tweede helft van de negentiende eeuw duidelijk is, geven de specificaties in de verslagen over de gekeurde miliciëns toch aan dat de beheersingsgraad van lezen en schrijven in vele gevallen nog te wensen overliet.

4 Het bedrijfsleven had in het laatste kwart van de negentiende eeuw behoefte aan beter opgeleide mensen. De arbeidersklasse besefte dat scholing een belangrijk hulpmiddel was bij haar strijd voor een menswaardiger bestaan. Er ontstonden verenigingen met tegengestelde doelen: openbaar versus bijzonder onderwijs. Juist deze schoolstrijd lijkt een katalysator in het verbeteringsproces van het onderwijs: 'Deze strijd is in de eerste plaats van invloed geweest op de omvang en vooral op de aard en de kwaliteit van het onderwijsaanbod. In de tweede plaats heeft deze strijd een grotere bewustwording te weeg gebracht van het belang van het (lager) onderwijs en daarmee de behoefte aan scholing versterkt' (Knippenberg, 1986, p. 95).

5 De onderwijzersgezelschappen en de inspecteurs beschikten over het algemeen wel over onderwijstijdschriften. Het spreekt vanzelf dat echter veel afhankelijk was van de inzet en kennis van de betreffende inspecteur.

6 Boeser is vooral bekend geworden om zijn rekenboeken, waarvan sommige drukken tot meer dan dertig beliepen.

7 Uit het rooster van De Beer blijken de volgende eisen. Om van de laagste klasse tot de tweede afdeling der middelste klasse over te kunnen gaan, wordt van de leerlingen naast vlot lezen, rekenen met gehele getallen, leesbaar schrijven op dictaat, spellen, aardrijkskunde van Noord-Holland ook vereist 'kennis van de *namen* der meest voorkomende

ligch. en vl. fig. uit de lagere meetkunde'. Voor overgang van de eerste afdeling der middelste klasse naar de hoogste klasse gelden de volgende eisen: 'natuurlijk lezen, duidelijk en net schrijven op dictaat en in opstel zonder grove taalfouten, kennis van de hoofdregels van de geheele getallen en tiendeelige breuken, ook in toepassing, verklaring van de eenvoudigste natuurverschijnselen, aardrijkskunde van Nederland' en de 'eerste beginselen der vormleer, ook in toepassing' (De Beer, 1865, p. 276).

8 Uit de tabellen blijkt dat er nog al wat informatie ontbreekt. Tevens hebben we de indruk dat de verslagen zeker niet volgens een bepaalde standaard zijn opgesteld. Zo zijn bijvoorbeeld de verslagen uit Limburg over het algemeen vrij gunstig, terwijl andere bronnen aangeven dat het onderwijs daar bepaald niet best was.

Noten A10

1 Op 26 juli 1877 verandert het jaargangnr. 34 van *De Wekker* in 36. Hierdoor begint de jaargangnummering van *De Wekker*, na overname door de *Nieuwe Bijdragen*, in 1878 met 37.

2 Ook hebben wij nog de volgende vakbladen onderzocht: *Tijdschrift voor Reken-, Stel- en Meetkunde* (1859-1877); dit blad bevat alleen vraagstukken en oplossingen over lagere wiskunde. Het *Tijdschrift voor Stel-, en Meetkunde ten behoeve van aankomende onderwijzers en onderwijzeressen* (1875), *De Beoefenaar der Wiskunde* (1865-1870), het *Tijdschrift voor Rekenkunde ten behoeve van aankomende onderwijzers* (1872-1886) en de *Beoefenaar der rekenkunde (1876-1897)*. Geen van deze periodieken bevat een didactisch onderwerp of iets over vormleer.

3 Een representant van deze groep herkennen we in ene 'Jan Pruttel', die in 1866 in het Weekblad een soort feuilleton over tal van grieven over het onderwijs schreef. Hij noemt daarin de vormleer 'eene soort van nachtmerrie', 'het nut der tegenspoeden' en vindt de omschrijving 'vague' en 'geheel onbestemd'. Het stuk blijft echter bij louter klachten en draagt geen voorstel tot oplossing aan (*Weekblad 5*(4), 1866).

4 In hetzelfde blad verschijnt een jaar later een bespreking van het boek van Stratemeijer door ene JN, dat van harte aanbevolen wordt. Wel wordt ook in dat stuk Diesterweg als een 'Duistere weg' afgedaan (*De Nederlandsche Paedagoog* 1859, pp. 313-315).

5 Daarbij beveelt de inspecteur van Utrecht een Zwitserse methode van ene Hug aan (*Nieuwe Bijdragen*, 1863, pp. 850-862)

6 Wel verscheen in 1862 nog een stuk van S. Talsma dat een pleidooi voor de boeken van Bouman en Stratemeijer is en de vormleer als 'aanschouwelijke meetkunst' omschrijft (*Nieuwe Bijdragen*, 1862, pp. 1142-1160).

7 Bakkes' ideeën vertonen verrassenderwijs enige gelijkenis met de intuïtieve inleiding in de meetkunde, zoals mevrouw Ehrenfest deze propageerde in het begin van de twintigste eeuw. Hierop zullen we in deel B nader ingaan.

Noten A11

1 *Bijlagen bij de Handelingen der Tweede Kamer* is afgekort tot *Bijlagen HTK*.

2 *Een Ontwerp eener nieuwe wet op het lager onderwijs* (1873) door een Schoolopziener. p. 3.

3 Het minimumprogramma betrof lezen, schrijven, rekenen, de beginselen der praktische meetkunst (vormleer), der Nederlansche taal, der kennis van de natuur, tekenen of vrouwelijke handwerken, zingen en gymnastiek. Voor scholen der tweede klasse komen daar nog bij aardrijkskunde van Nederland, Vaderlandse geschiedenis en de beginselen van dubbel boekhouden, terwijl op de scholen der eerste klasse ook nog algemeene kennis van de aarde en de algemeene geschiedenis, en de beginselen der wiskunde verplicht worden.

4 Deze commissie bestond uit: W. Wintgens, J. Kappeyne van de Coppello, H.A. van Rappard, J.J. Teding van Berkhout en W.J.A. Jonckbloet.

5 Deze commissie bestond uit: R.P. Mees Az., A. Kuyper, J. Kappeyne van de Coppello, W.J.A. Jonckbloet en J. Messchert van Vollenhoven.
6 Dit aftreden was veroorzaakt door de liberalen, die tijdens de verkiezingen van 1877 48 van de 80 stemmen hadden verworven en met het onderwijs als aangrijpingspunt het zittende kabinet ten val hadden gebracht.
7 Deze commissie bestond uit: A. van Delden, J.L. de Bruyn Kops, A. Moens, L.E. Lenting en C. Geertsema.
8 Interessant in verband met ons onderzoek is het feit dat in het wetsvoorstel als eisen voor de hoofdakte nu ook examen afgelegd moest worden in de algemene geschiedenis, de wiskunde en het handtekenen (art. 61, wet 1878). Dit leidde tot een amendement om de wiskunde te laten vervallen voor de onderwijzers en de onderwijzeressen, en het tekenen voor de onderwijzeressen. Er werd aangevoerd dat gedurende de periode 1872-1876 van de meer dan duizend kandidaten voor het akte-examen wiskunde bijna de helft gezakt was. In zijn antwoord zei de minister dat 'de onderwijzer, die het onderwijs in het rekenen moet regelen, maar in de eerste beginselen van de wiskunde – meer zal niet gevergd worden – niet bedreven is' (zijns inziens) 'niet berekend is voor zijn taak' (Hoppe en Bosman, 1878, p. 69). Het zou daarbij niet om een speciale akte in de wiskunde gaan. Ook dit amendement werd verworpen, zij het met een kleine meerderheid. De gedachte achter deze verzwaring van de examen-eisen was dat hierdoor de kwaliteit van het onderwijs zou toenemen. Dit schijnt een punt van ernstige discussie geweest te zijn, zo begrijpen wij uit een studie van R.W. Feikema uit 1929. In dit onderzoek wordt de totstandkoming van de schoolwet van 1878 geanalyseerd. Opvallend is dat in dit onderzoek aan het voor ons zo belangrijke artikel 2 geen aandacht wordt besteed, zodat we over de achterliggende gedachten bij de politici om de vormleer toch te handhaven geen nadere informatie hebben kunnen vinden.
9 Het ledental van de Tweede Kamer was inmiddels van 80 op 86 gebracht.

Noten A12

1 Eerder (1994) is dit hoofdstuk in een iets andere vorm als artikel verschenen in de *Nieuwe Wiskrant 14*(1) pp. 8-13.
2 Zelfs in het *Paedagogisch Woordenboek* van Zernike uit 1905 komt de term didactiek niet voor.
3 Smid lijkt te suggereren dat De Gelder zijn didactische ideeën aan Diesterweg heeft ontleend. De verwijzing naar een brief van Diesterweg aan De Gelder levert hiervoor geen bewijs, daar de genoemde brief – voor zover door Beckers (1993, p. 139) geciteerd – niet over didactiek gaat. Verder verwijst hij in dit verband naar Diesterwegs Wegweiser, maar daarvan is de eerste uitgave pas van 1834, terwijl De Gelder *Verhandeling...*, waarin hij de 'methodus docendi' beschrijft, van 1826 is.
4 Zie hiervoor het diepgaande werk over Diesterweg van Siegbert Schmidt (1991, p. 163).
5 Jan Versluys (1845-1920) was afkomstig uit Oostburg (Zeeuws Vlaanderen). In 1864 behaalde hij aan de Rijkskweekschool te Haarlem de hoofdonderwijzersakte. Terwijl hij bij het lager onderwijs werkzaam was, legde hij op 21-jarige leeftijd met succes het examen voor de middelbare akte wiskunde K-V af. Van 1866 tot 1878 was hij leraar wiskunde aan de Rijks HBS te Groningen. Vanaf 1881 tot waarschijnlijk 1910 was hij leraar wiskunde aan de Rijks Normaalschool voor Tekenleraren te Amsterdam.
Hij bekleedde allerhand bestuurlijke functies, zoals voorzitter van het Wiskundig Genootschap, van de Nederlandsche Vereniging voor Paedagogiek en in de Vereniging van Leraren. Verder was hij lid van de Commissie van middelbare Akten en van allerlei onderwijscommissies. Hij was de eerste hoofdredacteur van *Het Schoolblad* en later van *Het Nieuwe Schoolblad.*
Vanaf 1875 tot 1896 liet Jan Versluys al zijn publicaties via de uitgeverij van zijn broer W. Versluys (1851-1937) verschijnen. Jan Versluys had drie zoons, van wie de oudste

W.A. Versluys (1870-1946) hoogleraar in de wiskunde te Delft is geweest.

6 Het herbartianisme trachtte de volgende drie principes uit Herbarts *Lehre vom Unterricht* te operationaliseren. Ten eerste diende het onderwijs volgens het 'Kulturstufenunterricht' ingericht te zijn. Dit betekende dat, aangepast aan het ontwikkelingsniveau, de kinderen als het ware de gehele evolutie van de mens moeten doorlopen ('historisch-genetische' principe). Dit leidde tot het tweede principe van de 'concentratiepunten', hetgeen betekende dat alle leerstof rond een thema diende te worden opgebouwd. Het derde principe betrof de vijf 'leertrappen': *Vorbereitung, Darbietung, Verknüpfung, Zusammenfassung* en *Anwendung*. Dit leidde tot een strakke methodiek, welke de garantie moest scheppen voor de 'apperceptie' van nieuwe begrippen. In Duitsland zijn volledige leerplannen op grond van deze principes opgesteld (Ziller, Rein, Pickel, Scheller). Strakke toepassing van de genoemde drie principes zouden niet alleen karakter- en moreel-bevorderend zijn, maar ook zou de vorming van het denkvermogen verzekerd zijn. De meest bekende navolger van het herbertianisme in Nederland was H. de Raaf (1840-1921). Anderen, zoals Douma en Lem, wensten echter een geheel andere uitwerking van de herbartiaanse principes en wel volgens het zaakonderwijs. Versluys, die twee publicaties aan dit fenomeen wijdde, stond negatief tegenover de herbartiaanse opvattingen. De invloed van Herbart en zijn navolgers op het object van ons onderzoek is van geringe, zo van geen betekenis geweest. De vormleer was in de tweede helft van de negentiende eeuw zo zeer in handen van vakdeskundigen gekomen, dat de ontwikkeling meer door mathematisch-didactische opvattingen dan door algemeen-pedagogische gestuurd werd.

7 Het bedoelde werk van K. Snell *Lehrbuch der gradlinigten Planimetrie*, Jena (1841), hebben wij niet kunnen traceren.

8 De wiskundedidacticus J.W. Wansink (1894-1985) noemt dit boek uit 1874 in 1976 'in zekere zin een eersteling op didactisch gebied'. Hij wijst op 'de betekenis, die Versluys' totale oeuvre voor ons Nederlands onderwijs ongetwijfeld heeft gehad' en stelt zelfs: 'Voor iedere wiskundeleraar met belangstelling voor de historische ontwikkeling van zijn vak heeft het werk van Versluys uit 1874 ook nu nog enige betekenis' (Wansink (1976), *Euclides 51*(6) pp. 230-236).

9 Het oeuvre van Jan Versluys is omvangrijk en gevarieerd. Hij schreef voor het lager onderwijs volledige methoden voor rekenen, vormleer, lezen, schrijven en tekenen. Voor het middelbaar onderwijs leergangen voor algebra, planimetrie, stereometrie, goniometrie, analytische meetkunde, projectieve meetkunde, beschrijvende meetkunde en boldriehoeksmeting. Voor de opleiding studieboeken over hogere algebra, getaltheorie, perspectief en axonometrie. Zijn schoolboeken hebben meestal enorme oplagen gekend. In 1948 verscheen bij de uitgeverij P. Noordhoff nog de twintigste druk van zijn boek *Vlakke Driehoeksmeting*. De recensies op zijn schoolboeken waren bijna zonder uitzondering lovend. Verder schreef hij een aantal wiskundig-wetenschappelijke verhandelingen, die opgenomen zijn in het *Archief van het Wiskundig Genootschap*, *Grunerts Archiv der Mathematik und Physik* en *Hoffmann's Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*. Hij werd vijfmaal bekroond bij prijsvragen van het Wiskundig Genootschap. Ook op andere terreinen liet hij zijn stem horen: Multatuli, de Eerste Wereldoorlog, het belang van de studie in de vreemde talen, financiële rekenkunde, het internationale geldstelsel, vertalingen van het werk van de filosofen J.S. Mill en H. Spencer, geschiedenis van de wiskunde, geschiedenis van het onderwijs, de plaats van de onderwijzer in de maatschappij en een *Proeve van een nieuwere levensbeschouwing*.

10 Volgens Leen (1961) zijn het de didactici A.W. Grube en E. Hentschel geweest die Versluys hebben geïnspireerd. Leen stelt: 'Met de uitgave van zijn Handleiding in 1875 bracht Versluis (Leen schrijft consequent Versluis, EdM) het rekenonderwijs op een keerpunt. Men heeft hem wel de baanbreker voor een nieuw rekenonderwijs genoemd'. In zijn handleiding wijst Versluys zelf op deze bron. De methode van Grube werd heuristisch genoemd. Het nieuwe in de rekenmethode van Versluys bestaat vooral in een goede structurering van de stof, het beperken van de stof (Versluys wilde de 'regel van drieën af-

schaffen'), het geven van eenvoudige contexten (ook voor het aanvankelijk rekenen) en het afschaffen van ingewikkelde redactiesommen. We menen dat in zekere zin alle vijf didactische principes in de rekendidactiek van Versluys zijn aan te wijzen.

11 Versluys sloot zich aan bij die Franse en Duitse auteurs (Duhamel en J.C.V. Hoffmann), die de feilen van de toen actuele algebraboeken aanwezen. Hij meende dat het rekenkundige en het algebraïsche systeem veel vanzelfsprekender geordend en gesystematiseerd konden worden dan in de meeste boeken het geval was. Hij doelde daarbij op de uitbreiding van de getalsystemen onder behoud van de fundamentele wetten. Zo beriep hij zich bij de invoering van de negatieve getallen op het permanentieprincipe van H. Hankel (1839-1873). Hieruit blijkt dat hij ook in de didactiek voor praktische oplossingen koos, zoals hij ook in de schoolalgebra de stof sterk wilde vereenvoudigen en beknotten. Naast zijn *Theorie van de algebra*, gaf hij ook nog een boek, getiteld *Het oplossen van algebraïsche vraagstukken* uit, waarmee hij bijna in strijd met zijn eigen principes allerhand methodieken voor typen vraagstukken behandelt (Versluys, 1887). Iets dergelijks heeft hij ook voor het rekenen gedaan (Versluys, 1896).Versluys heeft zich daarbij niet van zijn sterkste kant laten zien.

12 De vier axioma's volgens Houël luiden:
I. Een of twee punten zijn in 't algemeen onvoldoende om de stand van een meetkundige figuur vast te stellen.
II. Door elke twee punten kan men altijd één en niet meer dan één lijn laten gaan, die zich naar twee kanten onbepaald ver kan uitstrekken, en waarvan geen enkel punt van plaats verandert, als men de lijn om die twee punten laat wentelen. Die lijn noemt men rechte lijn.
III. Er bestaat een vlak, hetwelk de eigenschap bezit, dat elke rechte lijn die er twee punten mee gemeen heeft, er geheel in valt.
IV. Door een punt buiten een lijn kan maar één lijn getrokken worden, die met de eerste evenwijdig is (zie Wansink, 1973).

13 Als voorbeeld hiervan verwijzen we naar de stukken *Méthode analytique pour la démonstration des théorèmes* van Duhamel en de 'Analytische methode bij het bewijzen van eigenschappen' in het boek van Versluys.

14 Het betreft de *Appendice du Livre III* van het eerste deel van de *Traité de géométrie* van Rouché en Comberousse. Wij hebben de vijfde druk uit 1883 bestudeerd, maar de eerste druk is waarschijnlijk van 1865. In een ingezonden brief in het Bijvoegsel van het *Weekblad 11*(12),1872) beschuldigt J.Th. Cattie Versluys van plagiaat inzake zijn *Beginselen van de nieuwere meetkunde*, verwijzend naar deze Appendice.

15 Het boek *Over methoden bij het oplossen van meetkundige vraagstukken* is ons inziens ook nu nog de moeite waard om te bestuderen. Het komt qua idee het dichtst bij *How to solve it?* van George Polya, dat na 1945 ten onzent opgang maakte.

Noten A13

1 Geciteerd is uit de tweede druk van 1879. Deze verschilt ternauwernood van de eerste druk uit 1876.

2 Zie *Ideeën van Multatuli, deel II*, Amsterdam 1958, idee nr. 259.

3 Met Schmidt wordt weer Josef Schmid bedoeld. Steyn Parvé, Gouka, Versluys en Gleuns zijn bekende namen in verband met de vormleer. Van Noordewier hebben wij geen bijdragen tot de ontwikkeling en verspreiding van de vormleer gevonden.

4 De volgende titels bleken onvindbaar: L. Bouwman, *Vormleer*. 1887; J.V. Disselkoen en W. van der Schuyt, *Vormleer*. 1887; S. de Jong Jz., *Vormleer* . ca 1875; L. van Langeraad, *Practische vormleer*; J.P. Quant, *Vademecum geschiedenis en vormleer;* K. Snell, *Gradlinigten Geometrie*. ca 1860; E.K. Slijper, *Vormleer of Meetkunde voor de volksschool*; G. van Stappen, *Ziet, telt en meet, Eene practische vormleer;* S. Talsma, *De*

vormleer in de lagere school. 1863; J. Waltman, *De kern der vormleer*; Franz Wiedemann, *Tausend Figuren.* ca 1870; J.F.W. Winterberg, *Beknopte handleiding bij het onderwijs in de Vormleer*; L. van Zanten en G.A. Scholten, *Leerboek der meetkunde.*

5 Wellicht had nog een aparte stroming voor *handenarbeid* onderscheiden kunnen worden, maar deze is van geringe betekenis geweest.

6 De boeken van Molema zijn gebaseerd op Franz Wiedemanns *Tausend Figuren* (een boek dat wij niet hebben kunnen achterhalen). In de eerste twee boekjes zijn alle figuren op vierkanten-roosterpapier getekend. Dit blokkeert de mogelijkheden tot generaliseren van eigenschappen en leidt soms zelfs tot aanvechtbare redenaties.

7 De methode van Welker lijkt het meest op een technocratische cursus technisch tekenen voor jongens, wat wel paste bij de toenmalige maatschappelijke wensen, maar aftrek heeft deze cursus niet gehad.

8 Donck had zijn boek aanvankelijk 'Vormleerstudie' willen noemen, maar heeft daar van afgezien in verband met de strijd over de wenselijkheid van de vormleer in die tijd. Er is heel wat aan te merken op de inhoud: foute constructie van de ellips naast een correcte definitie, onzorgvuldige toepassingen van inductieve werkwijzen, zoals bij de 'afleiding' van de formule van Euler voor veelvlakken en een merkwaardige vermenging van het gebruik van landmeetinstrumenten met de formele wiskunde, gebruik van formules, zoals die van de oppervlakte van een driehoek volgens Heron, zonder enige toelichting of inleiding. Af en toe ook nog doorspekt met combinatoriek uit de school van de zuivere vormleer.

Noten A14

1 W.B.G. Molkenboer kan met recht de nestor van het Nederlandse tekenonderwijs genoemd worden. Hij was aanvankelijk tekenleraar aan de Rijks HBS te Leeuwarden, later de eerste directeur van de Rijks Normaalschool voor Teekenleraren te Amsterdam, die in 1881 geopend werd.

2 D. Lako was tekenleraar te Zwolle en de eerste secretaris van de in 1880 opgerichte 'Nederlansche Vereeniging voor Teekenonderwijs'.

3 'Holland op zijn smalst' heette het artikel dat De Stuers (1843-1916) in het novembernummer van *De Gids* van 1874 publiceerde.

4 Dit tekenonderwijs, dat volgde op het lager onderwijs, was sterk afhankelijk van de plaatselijke situatie. 'Van een bepaalde organisatie van het teekenonderwijs aan de verschillende teekenscholen, van een subsidiëring dier scholen in verband met het volgen van het hierboven gegeven of eenig ander rationeel beginsel berustend leerplan, bemerken we niets. Zelfs de groote ommekeer in de richting van het teekenonderwijs na 1830 (Peter Schmid in Duitschland, de Gebr. Dupuis in Frankrijk bleef hier in de eerstvolgende 20 jaren zonder invloed' (Lako, 1899, p. 61).

5 In de *Nieuwe Bijdragen* van 1849 (pp. 115-126 en pp. 232-247) verscheen 'De Methode van Teekenonderwijs van de Gebroeders Ferdinand en Alexandre Dupuis' van A.F. Herbold, in een vertaling van Steyn Parvé. In de *Nieuwe Bijdragen* van 1852 (pp. 34-68 en pp. 112-141) liet Steyn Parvé 'De Methode van Teekenonderwijs van de Gebroeders F. en A. Dupuis' verschijnen, welk artikel grotendeels een vertaling is van een Duits artikel van Dr. Klöden.
Er bestond ook nog een Duitse variant van het natuurtekenen van P. Schmid.
Uit dit alles blijkt dat de weg van de methode Dupuis naar Nederland toch weer via Duitsland is gegaan.

6 Hoewel het werk van Braet von Überfeldt en Bing de eerste boeken waren waarmee men een andere weg met het tekenonderwijs kon inslaan, noemde Versluys het perspectiefdeel in zijn *Handleiding bij het eerste teekenonderwijs* 'een onbeduidend boekje' (Versluys,1881, p. 153).

7 J. Braet von Überfeldt was de eerste tekenleraar van Piet Mondriaan. H. van Rheeden

wijst in zijn dissertatie (1988) op de grote invloed die het schoolse tekenonderwijs op de moderne kunst (Cézanne en Mondriaan) heeft gehad.

8 We verwijzen hiervoor naar de dissertatie van M. Simon-Thomas *De Leer van het Ornament* (1996).

9 Molkenboer stelde dit in zijn geschrift *Wat is nodig, nuttig en uitvoerbaar bij het lager en voortgezet onderwijs om den kunstsmaak te vormen en de kunstvaardigheid te vermeerderen?* Dit was een inzending op een door 't Nut uitgeschreven prijsvraag.

10 In de jaren tachtig richtten de Nederlandsche Maatschappij tot Bevordering van Nijverheid (1885), de Maatschappij tot Bevordering der Bouwkunst (1886 en 1889) en de Vereeniging voor Fabrieks- en Handwerksnijverheid (1889) adressen aan de regering tot verplichting van het tekenen. Daarnaast stuurde ook de vakvereniging voor het tekenonderwijs nog twee adressen (1886 en 1889).

11 We verwijzen hiervoor naar de dissertatie van Asselbergs-Neessen (1989).

Noten A15

1 Omdat de verslagen van de periode 1863 tot 1877 een eenvormig karakter hadden, hebben we in A9 het niveau voor lezen, schrijven, rekenen, Nederlandse taal en vormleer voor die periode volgens bepaalde criteria kunnen onderzoeken. Vanaf 1880 verandert echter deze per leervak gespecificeerde beschrijvingswijze, omdat de inspecteurs menen dat 'het onmogelijk (is) den toestand van het lager onderwijs in het algemeen te schetsen' (*Algemeen Onderwijsverslag* 1883, p. 190). Wij moeten ons dus nu beperken tot een globale beschouwing voor de periode 1880 tot 1891.

2 Het algemeen reglement voor de rijks-normaallessen geeft in artikel 4 de lestabellen voor de hoofdakte (A)- en de hulpakte (B)-opleiding. Bij de A-opleiding (vier leerjaren) stond vormleer alleen voor de eerste twee leerjaren voor 1 uur op het rooster, wiskunde in het tweede, derde en vierde leerjaar voor 2 uur, rekenkunde 2 uur voor alle leerjaren. Bij een totale studielast van 73 wekelijkse lesuren over vier jaren waren er 16 voor de wiskundige vakken. Voor Nederlands, lezen en schrijven waren dat er 14. Bij de B-opleiding (vier leerjaren) geen wiskunde, maar verder dezelfde aantallen uren als bij de A-opleiding bij een totale studielast van 53 wekelijkse lesuren, dus 2 uur vormleer op het totaal van 53 (Van Renesse, 1883, p. 51).

3 Volgens het reglement werd men toen bij volstrekt onvoldoende in één der drie hoofdvakken (Nederlandse taal, rekenen en pedagogiek) reeds afgewezen, maar ook bij twee volstrekte onvoldoenden in twee bijvakken. De verschillen in de aantallen examens komen voort uit terugtrekking en het bezit van een akte (wiskunde en/of tekenen).

4 Dit leerplan was bedoeld voor een school van 200 leerlingen, verdeeld over vier klassen. De klassen waren weer gesplitst in twee afdelingen. Naast de hoofdonderwijzer, die geen vaste klas had, moesten er vier hulponderwijzers zijn. De totale leertijd werd geschat op acht jaar (leeftijd $5^1/_2$ tot $13^1/_2$ jaar).

5 Van de gemeente Tilburg laten de volledige roosters van vier openbare scholen in 1881 het volgende beeld zien. Eén school had vormleer niet op het rooster vermeld, twee scholen voor het 5-de en 6-de leerjaar 1 uur per week, één een half uur in het 6-de leerjaar. Alle scholen besteedden in de eerste twee leerjaren 2 à 3 uur aan aanschouwingsonderwijs. De grootste nadruk lag op lezen, schrijven en rekenen (meer dan driekwart van de totale lestijd). In de leerplannen werden ook de gebruikte leerboeken opgegeven. Voor de vormleer worden genoemd de boeken van Stratemeijer, Raadersma en Van Stappen. Deze gegevens zijn ons verstrekt door A.E.M. Jonker, die ze ontleende aan het Archief Gemeentesecretarie Tilburg 1810-1937.

6 Molema beval daarbij het werk van Franz Wiedemann aan, dat hij in 1884 zou gebruiken voor zijn eigen vormleermethode.

7 Het eerstgenoemde blad werd in 1881 opgeheven en ook van het tweede hebben we na 1880 geen uitgave meer kunnen traceren.

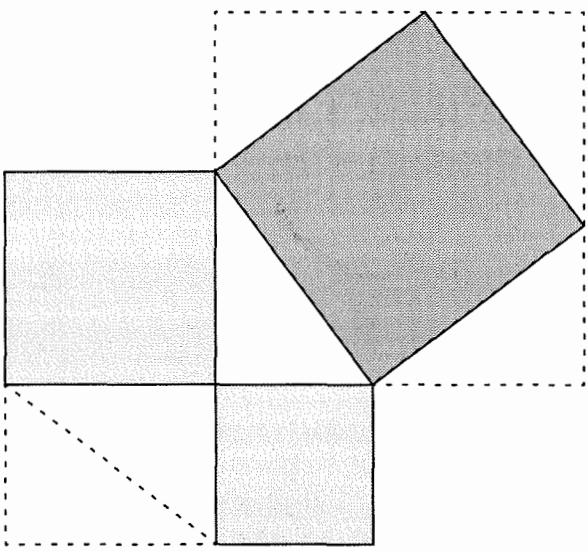
Noten A16

1 Dit amendement was ingediend door H. Goeman Borgesius, J.C. Fabius, A.F.K. Hartogh, A. Kerdijk en P.J.F. Vermeulen.
2 Verwijzing naar het kamerverslag wordt verder afgekort als *VHTK*.
3 De bestanden van vormleerboeken bij A13 en A16 kunnen ook als een geheel opgevat worden, omdat sommige uitgaven tot beide perioden gerekend kunnen worden. Om deze reden begint de nummering bij A16 met A16;17a .
Niet gevonden boeken:
S. Mantel, *Handleiding voor het onderwijs in de vormleer*, 1899; J.C. Röhner, *Meetkundig rekenboek*, 1905; B. Rosier en L. de Vries, *Teekenen, meten en rekenen I-IV*, Groningen 1897, deel 2 en 3; H. Scholte, *Meetkundig rekenschrift*, 1910; K. Snell, *Gradlinigten Geometrie*, ca 1860; E.K. Slijper, *Vormleer of Meetkunde voor de volksschool;* H. Sluijters, *Meetkundig rekenboek*, 1907.
4 Van deze uitgave van Versluys (A16;24a/b) is alleen het tweede deel gevonden.

DEEL B

Van Fröbel tot Freudenthal

didactische denkers en doeners



So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an,
geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen

(Immanuel Kant)

B0 Inleiding op deel B

Deel B van dit boek is nogal anders van aard dan deel A. Deel A bevatte een logische en chronologische beschrijving van ontstaan en ondergang van de vormleer in de negentiende eeuw. In het nu voorliggende deel wordt zowel de chronologie als de wijze van onderzoek doorbroken. Hierdoor kan de opzet bij eerste beschouwing wat hybride lijken, maar dit is inherent aan de veelzijdigheid van het onderwerp van ons onderzoek, waarin de zoektocht naar een informele leergang meetkunde voor kinderen van vier tot veertien jaar het centrale thema is. Omdat dit proces enige malen in de totale geschiedenis onderbroken is geweest, kan er geen sprake zijn van een doorgaande historische beschrijving. Zo werd het vormleeronderwijs voor het basisonderwijs aan het eind van de negentiende eeuw afgeschaft en werden de ontwikkelingen voor meetkunde op de basisschool pas weer in de jaren zeventig van de twintigste eeuw opgevat. En juist toen de vormleer verdween, begonnen de vernieuwingspogingen voor het wiskundeonderwijs voor de leerlingen vanaf twaalf jaar pas goed op gang te komen. Bovendien hebben de ontwikkelingen voor de verschillende leeftijdsgroepen – kleuterschool, lagere school en voortgezet onderwijs – zich in feite onafhankelijk van elkaar voltrokken. Dit moge een eerste verklaring zijn voor het verschil tussen de delen A en B.

Er zijn echter meerdere redenen voor een andere periodisering, een andere methodologie en andere accenten bij de beschrijving van de volgende vijf hoofdstukken. Zo brak aan het eind van de negentiende eeuw een periode van maatschappelijke bewustwording aan die, ondersteund door wetenschappelijke vooruitgang, tot nieuwe inzichten over het kind en de school leidden. Binnen deze internationale Reformbeweging ontstonden ook nieuwe gedachten over de inhoud en didactiek van de wiskunde, die voor de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs in Nederland van groot belang zijn geweest. Hoewel de groep vernieuwers klein was en men nogal individueel werkte, waren het echter sterke persoonlijkheden die het voortouw namen in deze vernieuwingspogingen. Het is daarom dat we in onze beschrijvingen in de hoofdstukken B2, B3 en B4 het denken en doen van een aantal van deze didactische vernieuwers centraal stellen. De belangrijkste daarvan zijn Reindersma, Ehrenfest-Afanassjewa en Dijksterhuis in de periode tot circa 1950; daarna Van Hiele-Geldof, Van Hiele en Freudenthal. De beschrijvingen en analyses zijn hoofdzakelijk gebaseerd op de discussies, die zich met name in de vakbladen voor het middelbaar onderwijs afspeelden. Uitgebreide analyses van de schoolboeken, zoals we in deel A hebben gedaan, komen nu niet voor. Onder meer, omdat in het feitelijke onderwijs van de voorgestane vernieuwingen nauwelijks iets te vinden was. Het meetkundeonderwijs van alledag werd beheerst door de euclidische traditie en werd uitgevoerd met doorsneeboeken op dit gebied. Het belang van deze historisch-didactische analyses zal vooral tegen het einde van dit deel B blijken, omdat pas op termijn de ef-

fecten van de discussies gedurende de eerste helft van de twintigste eeuw duidelijk werden.

De hoofdstukken B2 tot en met B4 spelen zich globaal af tussen 1900 en 1970, waarmee de chronologische volgorde van de totale geschiedenis gehandhaafd blijft. Echter, de aandacht is nu hoofdzakelijk op het meetkundeonderwijs in de eerste klas van het voortgezet onderwijs gericht. Het lager onderwijs komt slechts marginaal aan de orde, omdat meetkunde in die periode niet meer verplicht was. De nieuwe gedachten over het meetkundeonderwijs voor de leerlingen van twaalf, dertien jaar zouden echter in de jaren zeventig en ook daarna, van wezenlijk belang blijken voor het basisonderwijs. Ziehier een nadere verklaring van opzet, werkwijze en inhouden van deel B, althans wat B2 tot en met B4 betreft.

Alle pogingen ten spijt om de vormleer ook een zekere voorbereiding op de meetkunde van het vervolgonderwijs te laten zijn, is dit vak, zoals we gezien hebben in deel A, toch niet aangeslagen. Het ontbrak nu eenmaal aan wat wij thans een samenhangende en longitudinale wijze van leerplanontwikkeling zouden noemen. Iets analoogs gold voor het kleuteronderwijs, dat vanaf het midden van de negentiende eeuw een ontwikkelingsgang heeft doorgemaakt, die volledig losstond van datgene wat zich in het lager onderwijs voltrok. Aanvankelijk had Pestalozzi zich nog ingespannen om ook voor de allerjongsten de vormleer in te voeren, maar dit is voor het praktische onderwijs nauwelijks van betekenis geweest.

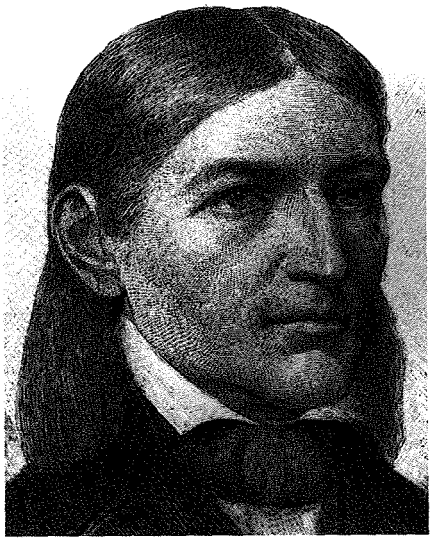
Pas toen Fröbel met zijn Kindergarten begon, groeiden de ideeën voor een meer systematisch opgezet kleuteronderwijs. In de traditie van Pestalozzi's filosofie, dat in het onderwijs van meet af aan ook het meetkundige element een plaats dient te hebben, begon Fröbel zijn beroemde speelleermaterialen te ontwikkelen. Alleen al om de meetkundige aspecten van verschillende van deze materialen willen we er in deze studie aandacht aan besteden. Maar er is meer: in het ontstaan van dit materiaal ontdekken wij een belangrijke bron voor latere ontwikkelingen in het kleuteronderwijs. Tevens is gebleken dat Fröbels Kindergarten over de gehele wereld ingang heeft gevonden en dat deze vorm van kleuteronderwijs in Nederland onder leiding van Haanstra een enorme betekenis heeft gehad.

Daarom beginnen we met een hoofdstuk over Fröbel (B1). Hoewel zijn invloed reeds vanaf het midden van de negentiende eeuw merkbaar was, is dit stuk toch in de periode 1890-1970 geplaatst. Allereerst, omdat het hoogtepunt van het Nederlandse fröbelonderwijs in de eerste helft van de twintigste eeuw viel. Ten tweede, omdat de inhoudelijke en didactische aspecten van het meetkundige fröbelmateriaal veel beter passen bij de latere ontwikkelingen voor een informeel meetkundeprogramma voor de jongste kinderen dan bij de negentiende-eeuwse vormleer. Moge ons onderzoek over Fröbel wellicht wat afwijkend lijken in de totaliteit van deel B, het is niet alleen vanwege de historische waarde dat we nu op Fröbels betekenis ingaan. In deel C zullen we namelijk zien van welke fundamentele waarde zijn werk

is geweest voor de latere ontwikkelingen in het kleuteronderwijs.

De afsluiting van deel B wordt gevormd door het hoofdstuk B5, dat ingaat op de discussies over de vormende waarde van het wiskunde- en meetkundeonderwijs. De vormende waarde is door de tijden heen bij voortduring als een van de belangrijkste motiveringen voor het traditionele meetkundeonderwijs aangevoerd. In dit hoofdstuk worden de voor ons onderzoek belangrijkste onderzoeksgegevens over de vormende waarde in een historisch kader geplaatst. Tevens gaan we in op de opvattingen van een aantal wetenschappers die op dit terrein van zich hebben doen spreken.

In de algemene inleiding hebben we deel B een intermezzo tussen de delen A en C genoemd. In deel C zal namelijk de draad van het meetkundeonderwijs op de basisschool weer opgevat worden. We kunnen die ontwikkelingen uit deel C echter niet verklaren als we niet de geschiedenis van de periode 1890-1970 kennen. Het is de langzame groei naar een ander standpunt over het aanvankelijk meetkundeonderwijs, die het nodig maakt de periode *Van Fröbel tot Freudenthal* in het volgende aan een grondig onderzoek te onderwerpen.



Friedrich Fröbel

B1 Fröbel en het allereerste meetkundeonderwijs

Inleiding

Studenten, maar ook docenten, staan er soms van te kijken dat het werkwoord 'fröbelen' verbonden is aan de naam van een van de grootste pedagogen en onderwijsontwikkelaars van de negentiende eeuw: Friedrich Wilhelm August Fröbel (1782-1852). Toch is deze thans wat vergeten figuur de grondlegger geweest van het kleuterschoolonderwijs waarin voor het eerst de cognitieve, sociale en emotionele ontwikkeling van het jonge kind centraal stonden. Fröbel beleed zijn opvattingen echter niet alleen in woorden, maar werkte ze zelf ook praktisch uit en stelde zelfs een systematisch leerplan op. Het is echter niet hierom dat wij Fröbel in dit hoofdstuk centraal stellen.

Onze aandacht gaat uit naar Fröbel als uitvinder van de meetkundige speelleermaterialen voor het jonge kind. Wij zullen de historische herkomst en ontstaanswijze van deze materialen schetsen. Meer in het algemeen willen we in dit hoofdstuk de betekenis van Fröbels werk voor het allereerste meetkundeonderwijs onderzoeken.

In het bijzonder gaan we in op Fröbels invloed in Nederland. Het is aan Elise van Calcar (1822-1904), de eerste inspectrice voor het bewaarschoolonderwijs, te danken dat Fröbels denkbeelden vanaf het midden van de negentiende eeuw in Nederland bekend werden.[1] De namen van Louise Hardenberg (1844-1898) en Wybrandus Haanstra (1841-1925) zijn verbonden aan de Leidse Kweekschool voor Onderwijzeressen, die de bakermat is geweest voor de ontwikkeling en innovatie van het fröbelonderwijs in Nederland. Aan Haanstra, die belangrijke verdiensten voor het Nederlandse fröbelonderwijs heeft gehad, zullen we aparte aandacht besteden. Later hebben ook J.H. Gunning Wzn. en J.M. Telders bijgedragen aan de acceptatie van het fröbelonderwijs, dat tegen het midden van de twintigste eeuw in Nederland gemeengoed was geworden. Ten slotte duikt in dit hoofdstuk ook weer Jan Versluys op, die zich op zijn eigen wijze sterk gemaakt heeft voor het praktische gebruik van de fröbelmaterialen.

De nadruk van onze beschouwingen ligt op de mathematisch-didactische aspecten van het fröbelmateriaal. Dit is in het kader van deze studie daarom van zo groot belang, omdat het enige meetkundeonderwijs voor het jongere kind, na de afschaffing van de vormleer in 1889, zich in de fröbelscholen voltrok.

Maar we zullen, om Fröbel beter te kunnen begrijpen, eerst enige aandacht moeten besteden aan diens algemene filosofische opvattingen, die ten grondslag lagen aan zijn visie op de speelleermaterialen en het wiskundeonderwijs.

Met de titel van deel B, *Van Fröbel tot Freudenthal*, is de te beschrijven periode aangegeven, maar toevalligerwijs lijkt het ook wel een verwijzing naar Freudenthals interesse en waardering voor het werk van Fröbel. Hij bracht dit in de jaren zeventig

onder de aandacht van de auteur van deze studie door onder meer te wijzen op het werk van Kristina Leeb-Lundberg, dat in dit hoofdstuk ook ter sprake komt.

Bij onderwijsleermaterialen wordt bijna altijd direct aan Maria Montessori (1870-1952) gedacht. Omdat haar bijdragen op het gebied van het wiskundeonderwijs slechts marginaal waren, wordt hierop slechts kort ingegaan. Tevens besteden we kort aandacht aan de meetkundige opvattingen van de Vrije School Beweging, die meer in de traditie van Fröbel staat.

Fröbel en de Romantiek

Fröbel was een exponent van de Duitse Romantiek, die in zekere zin een reactie op het Verlichtingsdenken was. In de Romantiek werden de paden van het rationele redeneren weer enigermate verlaten en kwam het denken in een meer holistische betekenis te staan. Gevoel, intuïtie, religieuze beleving, liefde voor de natuur, de betekenis van God en de waarheid, geloof in het absolute, geloof in één grote samenhang van alle stoffelijke en geestelijke zaken, hang naar het mystieke en bovennatuurlijke, schoonheidsbeleving en, vooral in Duitsland, een sterk nationalistisch besef, zie hier een aantal steekwoorden van de Romantische achtergrond van Fröbels denken en arbeid.[2]

Fröbels leven bestond uit studie, zoeken en onderwijzen, en op latere leeftijd vooral het zoeken naar de ideale onderwijsvorm voor de kleuters. Heel zijn werk stond in het teken van dit ideaal. Al vroeg kwam hij onder de indruk van het werk van de vroeg-romanticus Novalis en de mystieke filosofen Schelling en Fichte. Vooral de filosofie van Fichte (Duits-nationale opvoeding, zelfwerkzaamheid, bevordering van een krachtige wil) paste goed bij Fröbels pedagogische gedachten. Zijn studies aan de universiteiten van Jena (1797-1799), Göttingen (1811) en Berlijn (1812) stonden in het teken van de natuurwetenschappen, wiskunde en mineralogie. In het laatste vak was hij in 1815 assistent in Berlijn bij C.S. Weiß (1780-1856), die daar hoogleraar was in de kristallografie. Ondanks zijn brede filosofische en natuurwetenschappelijke interesses, blijkt al vroeg dat zijn eigenlijke roeping die van onderwijzer is. Het is de Pestalozzi-adept G.A. Gruner geweest, die hem hiertoe aanspoorde en hem in aanraking met Pestalozzi bracht. Van 1808 tot 1810 verbleef hij als student en leraar op het Pestalozzi-instituut te Yverdun. Daar leerde hij ook de wiskundeleraar Joseph Schmid, de schrijver van het bekende vormleerboek, kennen (zie A2).

Pas vanaf 1830 ging hij zich volledig wijden aan het onderwijs en de opvoeding van het jongste kind. Vanaf toen werkte hij gestaag aan de ontwikkeling van de pedagogiek van het kleuteronderwijs en vanaf het midden van de jaren dertig tevens aan de ontwikkeling van de zogenaamde speelgaven.

Das sphärische Gesetz

Fröbels hoofdwerk *Die Menschenerziehung* begint als volgt:

> 'In allem ruht, wirkt und herrscht ein ewiges Gesetz; es sprach und spricht sich im Äußeren, in der Natur, wie im Innern, in dem Geiste, und in dem beides Einenden, in dem Leben immer gleich klar und gleich bestimmt (...) Diesem allwaltenden Gesetze liegt notwendig eine allwirkende, sich selbst klare, lebendige, sich selbst wissende, darum ewig seiende Einheit zugrunde (...) Diese Einheit ist Gott.' (Fröbel, 1826, p. 29)[3]

Met deze eerste 'zin' – we hebben getracht de kern uit de omstandige verklaring weer te geven – legt Fröbel direct zijn 'sferische wet' of 'wet van de eenheid' op tafel. 'Das Äußere' is het beeld van de natuur – de mens en zijn realiteit – 'das Innere' heeft betrekking op de geest, als metafoor van de goddelijke kracht. 'Das Einende' staat voor het 'éénmaken', het streven naar evenwicht, naar het doen samenvallen van 'das Äußere' en 'das Innere'. 'Das ewige Gesetz' is de kern van heel zijn denken, het is God, die als oerkracht gezien wordt, waaruit alles voortvloeit, maar waarin tevens ook alles samenvloeit. In alles zou deze oerkracht aanwezig zijn, samengebald in een centrum en in alle richtingen werkend en wel zodanig dat twee tegengestelde krachten steeds in grootte gelijk zijn, waardoor het beeld van een bol ontstaat. Door de verschillende grootten van de krachten zelfs een stelsel van concentrische bollen. Door elk paar tegengestelde krachten zouden polariteiten ontstaan, die zich weer trachten op te heffen.

De historicus en Fröbel-deskundige Heiland noemt dit 'fichtisch gedacht' en vat de sferische wet als volgt samen, waarbij hij de nadruk legt op het geheel als eenheid en tegelijk als veelvuldigheid der delen: 'Alles Seiende, alle Dinge, alles Lebende ist, hat ein Sein. Dieses Sein ist sfärisch. Jedes Lebewesen, jeder Gegenstand zeigt sich als ein Ganzes von Einheit und Mannigfaltigkeit und dieses Erscheinen der Einheit des Einzelnen in seiner Mannigfaltigkeit verdeutlicht Fröbel im Bild der Sphära, der Kugel' (Heiland, 1995, p. 42).

Veel andere Fröbel-onderzoekers, zoals Spranger (1952), hebben getracht de kern van de 'sferische wet' te duiden en te verklaren. Voor ons zijn vooral de opvattingen van Wagemann (1956) en Leeb-Lundberg (1972) hierover van belang, omdat zij zich tot de mathematische aspecten van Fröbels werk hebben bepaald. Wagemann brengt de wet in verband met de natuurkundige begrippen potentiële energie (het centrum) en kinetische energie (de uitstralende krachten). Maar welke rationele theorie men hier ook op toepast, het blijft ons inziens een mystiek speculatieve denkwijze, die een gedegen wetenschappelijke basis mist. Toch was deze wijze van denken kenmerkend voor de romantische natuurfilosofie van het begin van de negentiende eeuw. Het oneindige en het eindige, macrokosmos en microkosmos, chaos en structuur, materie en geest zijn een aantal van de dualiteiten die daarin veelvuldig optreden. Met name huldigde men binnen de romantische natuurfilosofie de opvatting dat de materie uit twee tegengesteld werkende grondkrachten was samenge-

steld. Dit laatste zou vooral voor Fröbel een belangrijk 'bewijs' zijn geweest voor zijn sferische wet. Ook stelde Fröbel in zijn denken veelvuldig tegengestelde begrippenparen tegenover elkaar, zoals 'Einheit-Mannigfaltigkeit', 'Ruhe-Bewegung', heel in het algemeen het 'universele' tegenover het 'individuele'. Enerzijds ontstonden deze dualiteiten uit de oerkracht (God), anderzijds zouden ze er weer naar streven in harmonie te geraken. Hoe merkwaardig deze grondwet van Fröbel thans misschien kan lijken, bezien in de context van de Duits-romantische natuurfilosofie van de negentiende eeuw is deze opvatting heel wel verklaarbaar.[4]

Fröbels mensopvatting

Fröbel zag de mens als een zich continu ontwikkelend, productief en creatief wezen, dat in principe goed ter wereld is gekomen met een analytisch-constructief vermogen. Wanneer in de mens deze eigenschappen niet herkenbaar waren, moest dat aan de opvoeding en het onderwijs gelegen hebben. In de opvoeding kwam het aan op zelfontplooiing, ontwikkeling van verantwoordelijkheid, saamhorigheid en een kritische houding, gevoel voor de natuur en schoonheid. Bij het onderwijs lag de nadruk op het zelfontdekkende in het leerproces, op betekenis en structuur van de leerstof, die aan de realiteit gebonden diende te zijn. Voor het jonge kind diende het spelelement het uitgangspunt te zijn. Natuurlijk was ook Fröbels pedagogiek op de sferische wet gebaseerd. De geest van de mens en dus van het kind moest opgewekt worden om zijn 'sferische natuur' te laten ontwikkelen tot de echte 'sfeer' (het centrum). In alles blijkt dit terug te keren, zoals in de verhouding van kind en onderwijzer: 'Beide, Erzieher wie Zögling, sind der Sphäre verpflichtet, haben gemeinsam Unterrichtsklima, Schulleben und Erziehungsatmossphäre zu entwickeln und zu verantworten' (Heiland, 1995, p. 77).

Leerplan

In zijn *Menschenerziehung* beschrijft Fröbel zijn leerplan voor kinderen van vier tot veertien jaar. Ook hieraan ligt de sferische wet ten grondslag. Het onderwijs moest aanvangen met het meest regelmatige, dat ontleend wordt aan de kristalwereld. Hierbij werd uitgegaan van de bol als 'Urgestalt'. Daarna de wereld van de planten, die al iets minder vast gestructureerd is en zo verder naar het complexere en meer bewegelijke. Het uitgangspunt van de kristallografie is vooral voor Fröbels meetkundige opvattingen en ontwikkelingen van essentieel belang geweest.

Met de klassieke kristallografie is de wiskunde verbonden door een aantal oerwetten aangaande symmetrie. Voor de romantische natuurfilosofen waren de kristallografie en de wiskunde de structurerende elementen in hun mystieke denken. Hierin vonden zij als het ware de unificerende wetten voor hun filosofie. Ook voor Fröbel vormden beide disciplines de basis van zijn wetenschappelijke denken. Om Fröbels opvattingen over de betekenis van de kristallografie voor de ontwikkeling

van zijn speelleermaterialen beter te kunnen begrijpen, maken we nu even een uitstapje in de historie van dit vak.

Atomisme en dynamiek

> 'Die Dynamisten, zu denen unter den Philosophen Immanuel Kant und Friedrich Wilhelm Schelling gehörten, leugneten die Existenz der Atome. Sie vertraten die Auffassung, nicht die Materie sei primär, sondern "reine Kräfte", eine "reine Bewegung".' (Fabian, 1986, p. 155)

Met dit citaat van Fabian wordt kernachtig de omslag van de 'atomistische' naar de 'dynamische' opvatting over de bouw van de vaste stoffen weergegeven. Tot aan het begin van de negentiende eeuw had men het idee aangehangen dat de vaste stoffen uit 'molécules integrantes' in de vorm van parallellepipeda bestonden. Maar de 'dynamist' C.S. Weiß verklaarde het ontstaan van kristallen uit de werking van twee tegengestelde krachten.[5] Door hem is de methode ontwikkeld om kristallen te beschrijven en te klassificeren.[6] Wagemann omschrijft het wetenschappelijk werk van Weiß 'für die damalige Zeit' als 'erstaunlich-nüchtern, exakt-wissenschaftlich' (Wagemann, 1956, p. 155). Er zijn geen aanwijzingen dat Weiß enige mystieke of metafysische speculaties in zijn theorieën legde.[7] Als assistent van deze vooraanstaande geleerde heeft Fröbel zich dus wetenschappelijk geschoold in de kristallografie en kregen zijn gedachten over de sferische wet verdere voeding.[8]

Fröbel en de kristallografie

In de *Menschenerziehung*, waarin Fröbel een didactische uiteenzetting geeft over de 'Festgestalten', volgt hij in grote lijnen de classificatietheorie van Weiß, maar hij interpreteert diens werk op een zodanige wijze, dat dit past bij zijn 'sphärische Gesetz', zoals door Wagemann kernachtig is verwoord:

> 'In der Regelmäßigkeit der kristallinischen Welt sieht Fröbel die "Bestätigung" seines sphärischen Gesetzes. Von diesem sphärischen Gesetz her erhält umgekehrt der Weißsche Aufbau durch Fröbel in mehrfacher Hinsicht eine völlige Umgestaltung. Überall, wo Weiß in seiner Kristallformenkunde nur irgend die Möglichkeit dazu gibt, wird die Entwicklungsgedanke hineingetragen. Ganz bewußt setzt sich Fröbel von der nüchternen, "beschreibenden" Methode ab.' (Wagemann, 1956, p. 185)

Met het begrip 'Entwicklungsgedanke' wordt bedoeld dat Fröbel meende dat alle kristalvormen uit de kubus waren af te leiden. In feite streefden alle kristallen onder invloed van de centrale oerkracht naar de ideale vorm: de bol. Deze komt niet voor in de kristallografie, maar gelukkig noemde Weiß zijn kubische stelsel ook wel het sferoëdrische stelsel. Een voorbeeld van een 'Umwandlung' van een vorm naar een andere is de metamorfose van een kubus tot het duale achtvlak door, uitgaande van de kubus, de hoekpunten steeds verder af te knotten. Waar echter Weiß deze werkwijze louter als een beschrijvingsmiddel bedoelde, legde Fröbel er zijn mystieke

krachtentheorie in.

In zijn beschouwingen over de zogenoemde 'Kunde der Festgestalten' legt Fröbel zijn filosofische uitgangspunten neer over de meetkunde en de bijbehorende didactiek: het principe van de 'Umwandlung', de kubus als eenheid en de bol als het volmaakte. Nadat Fröbel de bol allereerst in verband brengt met de 'sferische wet', vervolgens verwijst naar de analogie van micro- en macrokosmos, komt hij ten slotte tot de bol als 'Urgestalt':

> 'Die Kugelgestalt erscheint bei aller Mannigfaltigkeit und bei der scheinbar unvereinbarsten Verschiedenheit der irdischen und Naturformen als die Urgestalt, die Einheit aller irdischen und Naturgestalten und Formen; daher ist auch schon die räumliche und körperliche Kugel keiner der andern Naturgestalten gleich und trägt sie doch alle dem Wesen, der Bedingung und dem Gesetz (de sferische wet, EdM) nach in sich. Sie ist das Gestaltlose, das Gestalteste.' (Fröbel, 1826, pp. 193-194)

De bol tot 'Urgestalt' verheven kan in fysische zin begrepen worden, maar voor Fröbel had dit ook een metafysische betekenis. De bol was voor Fröbel zowel het eerste (de goddelijke kracht) als het laatste, datgene waar al het aardse uiteindelijk naar streeft. Doordat de bol juist ook een symbolische betekenis had en doordat Fröbel als eerste speelgave de wollen bal had bedacht, wordt vaak gedacht dat dit ook in de meetkundige opbouw zo zou moeten zijn: 'der B-all (...) ein Bild vom **All**' (Lange, 1874, p. 25).

Juist de vele activiteiten met de kubus maken echter duidelijk dat voor het praktische onderwijs aan de kubus het primaat moest worden toegekend. Ook nu voerde Fröbel weer zijn interpretatie van de kristallografische krachtentheorie op. We volgen weer zijn gedachten zoals neergelegd in zijn *Menschenerziehung*, nog steeds het deel over 'Naturkunde' en 'Mathematik'. Na de behandeling van de bol volgen de 'vaste' ruimtelijke lichamen. Zijn uitspraak: 'Das Festgestaltete, Kristalinische, ist die erste Erscheinung der irdischen Gestaltung' maakt duidelijk dat het aardse, het concrete, gezocht moet worden in de kristallen (Fröbel, 1826, p. 197). Fröbel herhaalt de sferische werking van de krachten in het kristal en stelt dan: 'wegen des in der Kraft selbst liegenden Messenden werden innerhalb der Summe aller je drei rechtwinkligen Doppelrichtungen, ausschließend drei als überwiegend und vorherschend und ganz unabhängig von allen andern hervortreten' (Fröbel, 1826, pp. 199-200).

In moderne bewoordingen lezen we hier dat het sferische krachtenstelsel ook opgevat kan worden als een driedimensionaal, orthogonaal stelsel van wederzijds gelijke krachten. De conclusie dat uit een dergelijk systeem alleen de kubus voortgebracht kan worden, is nu snel getrokken: 'es kann nur ein Würfel, äußerlich-innerlich bezeichnet, ein reiner Sechsflächer sein' (Fröbel, 1826, p. 200). Daarna worden nog een aantal andere veelvlakken met behulp van deze krachtentheorie uit de kubus afgeleid.[9] Via deze theorie heeft hij de kubus tot het meest aardse, de eerste mate-

riële vorm verheven. De kubus is het symbool, de ideale eenheid van het materiële geworden, de bol dat van het volmaakte, het geestelijke.

Samenvattend: Fröbels sferische wet, voortgekomen uit en verankerd in de kristallografie, heeft de keuze bepaald voor de bol en de kubus als centrale meetkundige vormen.

Fröbels opvatting over wiskunde

In hetzelfde stuk uit de *Menschenerziehung*, dat wij zojuist als uitgangspunt namen, verwoordt Fröbel tevens zijn gedachten over de betekenis van de wiskunde. Ook nu weer wordt het relaas bepaald door zijn grondgedachten over de 'Innen- en Außenwelt', die in harmonie gebracht ('geeinigt') dienen te worden. Enerzijds lezen wij uit zijn teksten dat hij de wiskunde als een door God gegeven universeel iets beschouwt, anderzijds beklemtoont hij ook het dynamische karakter van de wiskunde, dat door de mens uitgebuit kan worden.

> 'Sie ist als Erscheinung dem Menschen und der Natur gleich angehörig; als hervorgehend aus dem reinen Geiste, aus den reinen Denkgesetzen desselben ein sichtbarer Ausdruck derselben (van de natuur, EdM) und des Denkens an sich, findet sie dadurch notwendig bedingten Erscheinungen, Verknüpfungen, Formen und Gestalten außer sich, in der Außenwelt, schon vor (...) Der Mensch findet so die Natur in der Mannigfaltigkeit ihrer Formen und Gestalten, die außer ihm und unabhängig von ihm sich in der Außenwelt der Natur gestalteten, in seinem Innern, seinem Geiste, den Gesetzen seines Geistes und seines Denkens wieder; die Mathemathik erscheint so als Mensch und Natur, Innen- und Außenwelt, Denken und Wahrnehmen Einendes, Vermittelndes.' (Fröbel, 1826, 240-241)

'Vermittlung' is een typisch fröbeliaans begrip, dat hij pas later ging gebruiken. Het heeft zowel in zijn pedagogiek als didactiek een betekenis. In samenhang met de 'sferische wet' kan 'das Vermittlungsgesetz' de tegenstellingen tot een eenheid brengen, de 'Umwandlungen vermitteln'.

Wiskunde bestaat dus volgens Fröbel als een gegeven in de mens, waarmee hem de mogelijkheid gegeven wordt de natuur te begrijpen; een opvatting over wiskunde die zich in de historie telkens weer manifesteert. Tevens ziet Fröbel de wiskunde als dé bemiddelende (vermittelnde) wetenschap om de tegenpolen (geest en materie) in harmonie te brengen (zu einigen). Het is van belang deze filosofische opvattingen te kennen, omdat Fröbel deze gedachten later als uitgangspunt heeft genomen voor de ontwikkeling van zijn speelgaven. Daarin zal hij ook tot uiting laten komen dat wiskunde geen dood, afgesloten systeem is, of zoals hij het zelf onder woorden brengt: 'sie (de wiskunde, EdM) ist ein lebendiges ununterbrochen sich neu wieder aus sich selbst gestaltendes, sich mit der Entwicklung des Denkens und des menschlichen Geistes in Hinsicht auf Einheit und Mannigfaltigkeit und Erkennen und Anschauen in einzelnsten fortentwickelndes Ganzes: (...)' (Fröbel, 1826, p. 242). Hiermee stelt Fröbel zich dus op het standpunt dat de wiskunde ook als een dynamisch systeem

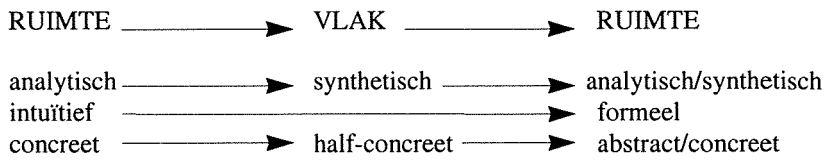
opgevat dient te worden. Aan het begin van dit stuk uit de *Menschenerziehung* noemt Fröbel de wiskunde 'einen sicheren Leiter zur Erkenntnis des inneren Zusammenhangs aller Mannigfaltigkeiten der Natur' (Fröbel, 1826, p. 240). Hij erkent dus ook de toepasbaarheid van de wiskunde, en wel om de natuur te leren begrijpen en dichter te kunnen komen tot 'het wezen aller dingen'. Aan het slot van zijn beschouwing over de wiskunde stelt hij zelfs: 'Menschengeist und Mathematik sind so unzertrennlich, als Menschengemüt und Religion'.

Uiteraard kent Fröbel aan de wiskunde een belangrijke plaats toe in het onderwijs: 'Menschenerziehung ohne Mathematik und wenigstens ohne gründliche Zahlenkunde (...) ist ein haltloses Stück- und Flickwerk (...)' (Fröbel, 1826, p. 245). Voor de jongste leerlingen beval hij aan de 'Zahlenkunde' volgens Pestalozzi aan de meetkunde vooraf te laten gaan. Zijn opvattingen over de betekenis van het wiskundeonderwijs in het algemeen zouden door Herbart beïnvloed zijn (Fröbel, 1826, p. 472).

Meetkundeonderwijs

Bij Fröbel dient volgens Wagemann (1956) onderscheid gemaakt te worden tussen 'darstellende' en 'betrachtende' Formenkunde. Bij het 'darstellen' moeten we aan zodanige meetkundige activiteiten denken die met het 'zelf maken' van figuren van doen hebben, zoals het tekenen op roosters en het bouwen met blokjes. Het is gebonden aan het concrete, we zouden het in huidige termen onder het constructie-aspect van de meetkunde stellen. Het 'betrachten' kan als typisch fröbeliaanse tegenstelling van het 'darstellen' opgevat worden en behelst de meer analytische aanpak van de meetkunde, waarbij uitgaand van het geheel de figuur in zijn totaliteit beschouwd en begrepen wordt; het betreft de meer abstract-theoretische zijde van de meetkunde. In vergelijking met de huidige terminologieën komt het 'betrachtende' het meest overeen met het aspect van het redeneren.

Het uitgangspunt van Fröbel is de omringende ruimte: 'Mit wirklichen, konkreten Gegenständen aus der Umwelt des Kindes muß der Eingang in die Formenwelt gewonnen werden' (Wagemann, 1956, p. 155). Uit de ruimtelijke lichamen, zoals de kubus, dienen de eerste noties van meetkundige begrippen (punt, lijn,...) en hun relaties te ontstaan, om pas daarna als zuiver meetkundige begrippen te worden behandeld. Na een eerste globale analyse van de ruimte, waarbij de vorm als geheel (Gestalt) vooropstaat, volgt de synthetische, stap voor stap geleide opbouw in het platte vlak ('Formenlehre'). Wanneer ten slotte weer op het samenstellen van de vlakmeetkundige begrippen wordt overgegaan, worden de meetkundige activiteiten ook weer ruimtelijk opgevat. 'Den Höhepunkt (...) bildet das Verfertigen von Kantenmodellen der geometrischen Körper' (Wagemann, 1956, p. 158). Hiermee wordt gedoeld op de 'Erbsenarbeiten': het maken van draadmodellen met behulp van stokjes en natte erwten. We vatten de globale structuur van Fröbels opvattingen over het leren en onderwijzen van meetkunde als volgt samen:



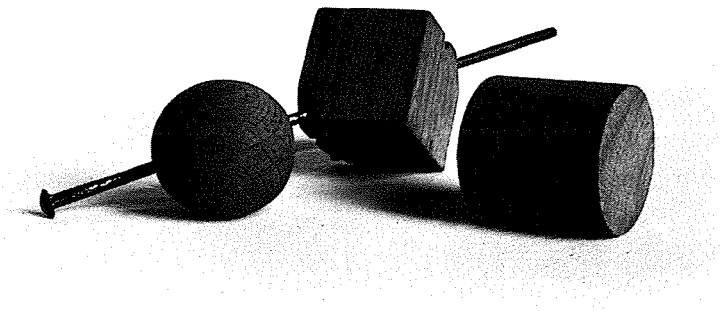
We zien hier een essentieel verschil met de vormleer van Schmid, die een strikt synthetische opbouw, beginnend in het platte vlak, voorstond (zie A2). Tevens dienden bij Schmid naast het formele doel ook een aantal operationele doelen gerealiseerd te worden. Bij Fröbel staat het inzicht in de structuren van de ruimte centraal. Wel heeft Fröbel het idee van de 'Anschauung' van Pestalozzi, zoals bedoeld voor het meetkundeonderwijs, terdege begrepen en opgepakt.[10] Maar hij heeft dit op een geheel eigen wijze uitgewerkt, waarbij vooral het ruimtelijke startpunt met de concrete speelgaven als een unieke vondst beschouwd dient te worden. Zoals we eerder gezien hebben, was de ruimtelijke start een standpunt dat ook door Diesterweg ingenomen werd (zie A3). Diesterweg heeft zich op latere leeftijd zeer lovend over Fröbel uitgelaten. Met de ontwikkeling van zijn speelgaven heeft Fröbel een doorbraak in het onderwijs bewerkstelligd die zijn weerga niet kent. Aan deze materialen besteden we nu aparte aandacht.

Fröbels speelleermaterialen en werkjes

Fröbel noemde zijn concrete materialen 'Gaben'. Ze waren bedoeld als een persoonlijk geschenk; een daad, waarmee hij zijn hoogachting voor het kind wilde uiten. Naast de gaven (Engels: gift) bestaan er 'werkjes' of 'bezigheden'. De speelleermaterialen en werkjes zijn in acht groepen te verdelen, elk weer met een onderverdeling en sequentie.[11]

A: De ongedeelde lichamen: Gaven I en II (bol, kubus en cilinder)
B: De gedeelde lichamen: Gaven III tot en met VIII (bouwdozen met kubussen, rechthoekige blokken en rechte driezijdige prisma's)
C: De mozaïekspellen met vlakke figuren (vierkanten, rechthoeken, driehoeken)
D: 'Lijn'-spellen (stokjes, vouwstokjes, ringen, stroken, draden)
E: 'Punt'-spellen (kralen e.d. als representanten van punten)
F: 'Verknüpfende' spellen (prikken, borduren, tekenen, vouwen, vlechten, bouwplaten, 'Erbsenarbeiten' en dergelijke)
G: 'Umwandlungs'-spellen (klei-werk, vouwen, verknippen van figuren, transformeren van ruimtefiguren)
H: 'Ergänzung' (de 14 'Festgestalten' van Fröbel)

Deze indeling maakt direct de analytisch-synthetische volgorde duidelijk: uit de ruimte wordt afgedaald naar de vlakke figuren, dan de lijnen, ten slotte de punten. Daarna wordt de weg terug gevolgd: vanuit de punten via de lijnen en vlakke figuren naar de ruimtelijke vormen. De categorieën A tot en met F hebben vooral het latere fröbelleerplan bepaald. Om een indruk te geven van het materiaal bespreken we kort enkele gaven en bezigheden of werkjes.[12] Bij de illustraties maken we gebruik van afbeeldingen uit verschillende perioden waarin het fröbelmateriaal gebruikt is.



figuur B1.1: De tweede gave van Fröbel (foto Bart de Moor)

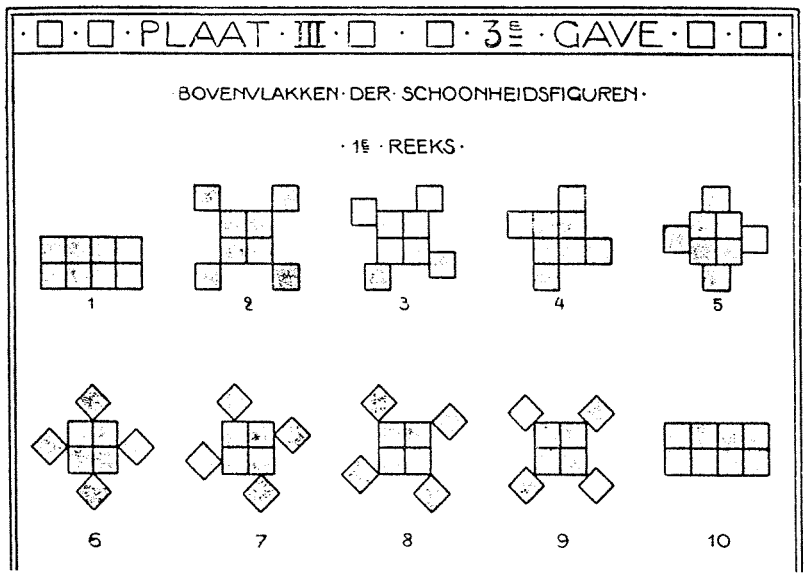
Na de eerste gave (zes gekleurde wollen ballen) kwam de beroemde tweede gave aan de orde: de houten bol, de kubus en de cilinder (zie figuur B1.1). Hiermee werden de bol en de kubus als absolute tegenstellingen gepresenteerd met de cilinder (of rol) als 'bemiddelend' lichaam. Naast het wekken van een eerste notie (Ahnung) van dit hogere doel, konden bij de kinderen ook eerste noties van meetkundige begrippen gewekt worden, zoals de aard van de verschillende vormen, hun overeenkomsten en verschillen. De onbeweeglijkheid van een staande kubus, de alom-beweeglijkheid van de bol en de lineaire beweeglijkheid van de cilinder benadrukten het dynamische karakter van de meetkundige verkenning. Dit werd ook bevorderd door de kubus om de houten spil te laten draaien volgens drie verschillende symmetrieassen: vlak-vlak, ribbe-ribbe en hoekpunt-hoekpunt. Dergelijke 'bewegingsspelletjes' waren toen iets geheel nieuws. Na de tweede gave verdween de bol uit het programma en werd de kubus het kernelement voor de verdere opbouw.

De derde gave werd ook als een belangrijke stap in het leerproces beschouwd. Het is een in achten verdeelde kubus. De kinderen moesten door tweemaal voorzich-

tig kantelen – een bijna heilig ritueel – de gehele kubus voorzichtig uit zijn doos halen, waarna het uiteen nemen in halven, kwarten en achtsten volgde. Ten slotte dienden de delen weer teruggebouwd tot de oorspronkelijke eenheid. Deze oefening geeft de door Fröbel bedoelde diepere betekenis van de 'Ganzgliedigkeit' (eenheid binnen een eenheid) goed weer.[13] Afgezien van deze mystieke bedoelingen waren allerlei meer aardse oefeningen met de blokjes mogelijk. De meetkundige activiteiten dienden onderscheiden te worden naar het maken van

- Lebens- of Bauformen (levens - of bouwvormen)
- Schönheits- of Bildformen (schoonheidsvormen)
- Erkenntnis- of Lernformen (wiskundige kennis- of vormleerkundige figuren)

De 'bouwvormen' waren bedoeld voor het vrije bouwen met de blokken om 'realistische' lichamen te maken. De 'schoonheidsfiguren' werden sterk bepaald door gebruikmaking van symmetrieën (zie figuur B1.2). De 'kennisfiguren' betroffen meer abstract wiskundige kennis.



figuur B1.2: Analyse-synthese door middel van symmetrische transformaties (Wierts van Coehoorn-Stout, 1914)

Met de mozaïekstukken, die via verschillende dozen werden aangeboden, zijn vlakke vormen te maken, die ook weer naar levens-, schoonheids- en kenniscategorieën onderscheiden werden.[14] Vooral het maken van mooie symmetrische figuren en vlakvullingen was (en is) een bekende activiteit. Ook werd het combinatorische

aspect hierbij wel uitgebuit (bijvoorbeeld: alle drie- en vierhoeken maken met vier halve vierkanten). Deze legpuzzelactiviteiten kunnen in mathematische zin het best gekarakteriseerd worden door vorm, getal en orde. De vormaspecten betreffen het vergelijken en benoemen van de figuren, met name van de verschillende symmetrieën. Het getalsmatige zien we in het tellen van zijden en hoekpunten, maar ook in het meten van de onderlinge zijden en in het omstructureren van de figuren onder behoud van oppervlakte. Het ordenen betreft het maken van verschillende combinaties, maar ook het klassificeren van figuren.

Met de legstokjes, de ringen en halve ringen, de borduurkaarten, de papierstroken en het vouwstokje konden allerhand analoge oefeningen uitgevoerd worden, waarbij het lineaire aspect van deze materialen op de voorgrond staat. Ook het tekenen op roosterpapier kan hiertoe gerekend worden.

Het papiervouwen en de erwtenwerkjes, waarmee ruimtelijke modellen gemaakt worden, hebben uiteraard een duidelijk meetkundig karakter en bieden de mogelijkheden om tal van meetkundige begrippen en relaties te exploreren. Vele daarvan zijn van een hoog niveau en niet geschikt voor de kleuterschool.

Wiskundige betekenis van het materiaal

Wagemann (1956) heeft het fröbelmateriaal, dat gebaseerd was op de toenmalige krachtentheorie van de kristallografie, in verband gebracht met vectoren (zie noot 9). Bij Fröbel zelf werd alles steeds teruggevoerd op zijn kristallografische krachtentheorie en het idee van de 'Umwandlungen'. Ongetwijfeld heeft de bij Weiß opgedane kennis op dit gebied Fröbel beïnvloed bij de ontwikkeling van het speelleermateriaal. De gebonden opdrachten, zoals bij de mozaïekspellen, zijn doortrokken van de principes van de vlak-, lijn- en puntsymmetrieën en van de rotaties, die ook in de kristallografie een rol spelen. Dit bracht Wagemann ertoe om op de relatie met de transformatiemeetkunde te wijzen. Zo ligt het ook voor de hand de activiteiten met papiervouwen in relatie te zien met de principes van het lijnspiegelen. Fröbel gebruikte dit papiervouwen onder meer om zogenaamde 'Anschauungswahrheiten', die hij onderscheidde van 'Wahrheitssätze durch Schluß', te introduceren. Al deze theoretische beschouwingen van Wagemann dienden om de stelling te versterken dat de wiskunde van Fröbel een dynamisch karakter heeft. Overigens relativeert Wagemann zelf zijn uitweidingen over de mathematische aspecten van het speelleermateriaal weer enigermate, wanneer hij stelt: 'Die Frage, wie groß die Bedeutung des Mathematischen bei Fröbels Werk ist, wird außerordentlich schwer zu beantworten sein (...)' (Wagemann, 1956, p. 252).

Leeb-Lundberg (1972) besteedt in haar onderzoek ook aandacht aan Fröbels opvattingen over wiskunde en aan de mathematische aspecten van het fröbelmateriaal. Evenals Wagemann wijst zij op het dynamische karakter dat Fröbel aan de wiskunde toekende. Zij komt tot de conclusie dat Fröbel in die zin zijn tijd ver vooruit was.

Hoewel zij de benaming van de New Math-stroming van de jaren zestig van deze eeuw niet noemt, is het duidelijk dat zij een sterke overeenkomst ziet met bepaalde elementen van deze structuralistische opvattingen, waaronder de transformatiemeetkunde. Maar dit vak was ten tijde van Fröbel nog niet gesystematiseerd en wij weten niet hoe ver Fröbels eigen kennis van de wiskunde eigenlijk strekte. Zelfs verwijst Leeb-Lundberg naar verwantschap met niet-euclidische meetkunden en de topologie (Leeb-Lundberg, 1972, pp. 81-82).[15]

Vast staat dat Fröbel gebruik heeft gemaakt van de fundamentele symmetrie-eigenschappen van de meetkunde, zoals die in het dagelijks leven, in de natuur, in het bijzonder in de kristallografie voorkomen. Daarmee was hij inderdaad zijn tijd vooruit, maar dat hij dit alles voorzien zou hebben en dat dit in verband met de wetenschappelijke ontwikkelingen van die tijd zou hebben gestaan, zijn speculaties. Veeleer denken wij dat Fröbel een goed intuïtief gevoel had voor enkele fundamentele begrippen van de meetkunde, maar vooral dat hij zag dat dit ook op een eenvoudig niveau uit te voeren was.

Leer- en ontwikkelingspsychologie avant la lettre

Fröbel wordt algemeen erkend als de eerste opvoeder die het principe van het vrije en het gebonden spel voor de kleuter heeft gesystematiseerd. Fröbels schoolsysteem van de Kindergarten, waarvan de eerste onder zijn leiding in 1840 in Bad Blankenburg in Duitsland gestalte kreeg, heeft wereldwijde navolging gekregen. Daarmee werden de principes van 'zelfontdekkend leren' en 'leren door doen' voor de kleuterleeftijd voor het eerst op systematische wijze gefundeerd. Leeb-Lundberg (1971) maakt in dit opzicht vergelijkingen met de latere ontwikkelingen in de leer- en ontwikkelingspsychologie. Zij wijst, in verband met Fröbels opvattingen over het leren van begrippen vanuit 'het geheel', op de overeenkomst met het werk van de Gestaltpsychologie uit het begin van de twintigste eeuw. Ook brengt zij naar aanleiding van Fröbels opvattingen over de wiskunde Jerome Bruners bekende gezegde uit de jaren zestig ter sprake: 'any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development' (geciteerd door Leeb-Lundberg, 1972, p. 142). Laten we haar zelf hierover aan het woord, dan maakt het volgende citaat duidelijk welke betekenis wij volgens deze auteur aan Fröbel als 'leerpsycholoog avant la lettre' zouden moeten toekennen:

> 'Regarding Fröbel's lack of explicity, it should be remembered that he did not formulate a scientific learning theory. As in so many other areas, when Fröbel shed light on childhood, he seems to have intuitively approached the modern articulated stages for young children's learning of mathematical concepts. At these stages, which in this century have been called by Jean Piaget the pre-operational and concrete-operational, the children were to learn mathematics, not only by handling objects, but also, in the occupation part of the sequence, by creating objects themselves.'
> (Leeb-Lundberg, 1972, pp. 143-144)

Inderdaad, ook in dit opzicht ging Fröbel intuïtief te werk, hetgeen zijn unieke betekenis, vooral voor het kleuteronderwijs nog eens onderstreept. Wij zullen hem echter vooral herinneren als ontdekker van het concrete speel-leermateriaal of zoals Leeb-Lundberg het uitdrukte: 'In his development of particular manipulative materials for the Kindergarten, Fröbel can finally be seen as an educator without parallel and without influence from any other educational reformer' (Leeb-Lundberg, 1972, p. 102).

Haanstra en de Leidsche Kweekschool

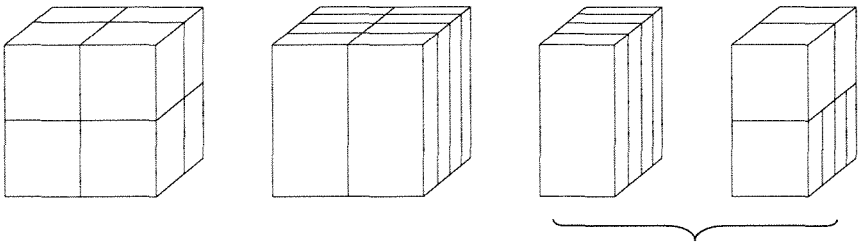
Was Elise van Calcar de eerste instigator van Fröbels ideeën in Nederland, het is vooral via de Leidsche Kweekschool voor Onderwijzeressen geweest dat het praktische fröbelonderwijs in Nederland verder ontwikkeld en verbreid is.

Vanaf 1882 treffen we hier Haanstra aan. Samen met Louise Hardenberg had hij de leiding van deze school. Lize de Haan noemt hem 'de hervormer van de oude bewaarschool tot een kindertuin' en 'de meest opmerkelijke Vernieuwer van zijn tijd' (De Haan, 1952, pp. 51-52). Van Horrik lauwert hem zelfs als 'der holländische Fröbel' (Van Horrik, 1928, p. 38). Zijn bijdragen aan het praktische onderwijs betreffen het voorbereidend rekenen, het voorbereidend taalonderwijs en het werk met de speelgaven van Fröbel. Vanaf 1885 tot 1916 werd door de Leidse Kweekschool onder redactie van Hardenberg en Haanstra het *Maandblad voor het Onderwijs* uitgegeven.[16] Hoewel de meeste artikelen in dit blad, vooral in de beginjaren, niet op naam stonden, lijkt het aannemelijk dat vele daarvan van Haanstra's hand waren. Zijn grondidee voor het onderwijs aan de kweekschool was een afspiegeling van wat hij met de kleuters voorstond: 'zelfwerkzaamheid, zelfontwikkeling door arbeid met hoofd en hart en hand, arbeidsvreugde wekken' (De Haan, 1952, p. 52).

Ontwikkeling van nieuw materiaal

Haanstra is vooral bekend geworden door de ontwikkeling van een aantal 'tussengaven' bij de oorspronkelijke gaven van Fröbel. Haanstra en Hardenberg hadden een hele leergang met tussengaven voor de bouwdozen van het fröbelprogramma ontworpen.[17] We zien hier de invloed van het toen heersende neo-herbartianisme, waarbij gestreefd werd naar een niet te discontinue opklimming in moeilijkheid van de leerstof.

Een belangrijk doel was om de equivalentie tussen de verschillende blokken aan te leren. Bij de oorspronkelijke derde en vierde gave diende de gelijkheid in 'grootte' van een 'kube' en een 'bouwsteen' aangetoond te worden (zie figuur B1.3). Omdat dit voor drie- en vierjarige kinderen te lastig was, voerde Haanstra een tussengave in, die uit twee 'kuben', vier 'bouwstenen' en vier 'tegels' bestond. Kennelijk met de idee van de volgende redenering: Eén kube is gelijkwaardig met twee tegels, twee tegels zijn gelijkwaardig met één bouwsteen, dus één kube is gelijkwaardig met één bouwsteen.



Fröbel III (8 blokken) | Fröbel IV (8 stenen) | Haanstra (4 stenen, 4 tegels, 2 blokken)

figuur B1.3: Fröbelgaven III en IV en Haanstra's tussengave

Of een dergelijke transitiviteitsredenering op die leeftijd al gemaakt kan worden, is twijfelachtig. Hierop gaat Haanstra niet in. Ook maakt hij niet expliciet wat met 'gelijk' of 'even groot' eigenlijk bedoeld wordt. Zou dit daadwerkelijk 'begrepen' zijn, dan kunnen we spreken van begrip van conservatie van volume. Haanstra gaat aan dergelijke theoretische beschouwingen voorbij, wat ook onmogelijk was bij de toenmalige stand van de psychologie.[18]

Zijn opstellen omvatten vooral de methodiek van het bouwen met de verschillende dozen, zowel van de kennis- als van de levens- en schoonheidsvormen. Wat betreft de kennisvormen werden soms alle mogelijke combinaties met twee of meerdere elementen opgesomd, zonder dat daar overigens een systematiek aan ten grondslag lag. Wij gaan hier nu niet nader op in, maar we zien aan het gegeven voorbeeld welk een fundamenteel wiskundige leerstappen al in een vroeg stadium van het fröbelse leerproces op impliciete wijze kunnen opduiken. Ook bij de mozaïeken en de meetstokjes constateren we analoge mathematische begrippen en relaties.

In strijd met de toen heersende opvattingen over aanschouwingsonderwijs, waarbij bij voorkeur met concrete objecten begonnen werd, voerde Haanstra weer platen in ten behoeve van het bouwen met de blokken. 'De plaat eischt *vinding*; het bouwtafeltje is enkel berekend op voor- en nadoen. De bewaarschool kan op den duur het stelsel van *voor- en nabouwen, bouwen en meebouwen, dicteeren en meebouwen*, en *vrijbouwen* toch niet *blijven* handhaven tegenover critische oogen, gelijk er al zijn' (*Maandblad voor het Onderwijs 18*(11), 1902). Enerzijds werd dus een groter beroep op het eigen vindingsvermogen van de kinderen gedaan, anderzijds heeft de ontwikkeling van de tussengaven ons inziens mede invloed gehad op de latere vermethodieking van het fröbelonderwijs.

Een bijzondere plaats in de Nederlandse fröbelliteratuur neemt het zogenaamde papierbouwen van Haanstra in. Beroemd was de startactiviteit om de kleuters zelf de zogenaamde 'lichaamshoek' (een rechte drievlakshoek) uit papier te laten vinden. Dit was vooral bedoeld om van het tweedimensionale vlak tot de driedimensionale ruimte te geraken.[19] Later kon dit verder uitgebreid worden tot het maken van een

open doosje en een doosje met een deksel (kubus). Uiteindelijk konden grotere voorgeschreven of fantasiebouwsels uit papier of karton gemaakt worden. In huidige termen zouden we zeggen dat de kinderen een bouwplaatje moeten maken van de genoemde ruimtefiguren. Op zich zijn dit interessante, maar voor bedoelde leeftijdsgroep bepaald niet eenvoudige meetkundige opgaven.

Ook het werken met de mozaïekdozen kan beschouwd worden als een eerste verkenning van een aantal elementaire begrippen en relaties van de vlakke meetkunde. Herkennen en benoemen van vormen, het maken van vlakvullingen en kennismaking met de grondprincipes van symmetrie zijn hiervan de belangrijkste. Tevens zijn, vanuit een huidig standpunt bezien, impliciet enkele belangrijke algemenere principes van het reken-wiskundeonderwijs aan te wijzen, zoals het omstructureren en completeren van figuren, de transitiviteitsrelatie, het kiezen van een eenheid bij het meten en zelfs de grondbeginselen van de meetkundige transformaties. Op de betekenis hiervan binnen het door Haanstra en Hardenberg voorgestane curriculum voor de kleuterschool zullen we in onze slotbeschouwing terugkomen.

Versluys en het fröbelonderwijs

In hetzelfde jaar (1879) dat Elise van Calcar een boek over Fröbel aan het Nederlandsch Onderwijzersgenootschap opdroeg, liet Jan Versluys ook een boek over Fröbel verschijnen. Zoals we gewend zijn van Versluys, is ook dit boek in beknopte en heldere stijl geschreven. Het begint met 'Het spelen der kinderen', dat Versluys als een belangrijke voorwaarde voor de ontwikkeling van het jonge kind erkent. Tevens behandelt hij in dit deel de eisen, die Fröbel aan de 'speelmiddelen' stelde, als volgt met enkele steekwoorden weergegeven:

- eenvoudig, goedkoop, stevig, esthetisch en multifunctioneel
- functioneel ten behoeve van ontwikkeling van zintuigen en lichaam
- passend bij de fase der ontwikkeling
- aansprekend en uitdagend, zowel voor kinderen als volwassenen (ouders)
- aanschouwelijke basis voor het verdere onderwijs
- in dienst van het ware, schone en goede
- gericht op innerlijke samenhang van de stoffelijke en geestelijke wereld.

Daarna volgt een opstel over Fröbels 'wereldbeschouwing', dat ernstige kritiek bevat op Fröbels filosofie van de speelleermiddelen. Op zich acht hij het een uitstekend principe om de kinderen begrippen via tegenstellingen te laten ontdekken (bol en kubus), maar met de achterliggende betekenis van de 'wet der bemiddeling' (Vermittlung) kan hij zich niet verenigen, zoals het volgende citaat duidelijk maakt:

> 'aangezien Fröbel het begrip overeenkomst of gelijkheid niet zeer scherp nam en het toch als een middel bezigde om overal verwantschap of verband aan te wijzen, is in dit opzicht zijn wereldbeschouwing het tegendeel van helder. Het komt mij voor, dat

> ten slotte in zijn hoofd alles als een chaos dooreen woelde en hij dezen chaos als een ordelijke eenheid beschouwde.' (Versluys, 1879d, p. 13)

Ook uit Versluys' kritiek op de 'overdreven beteekenis' die Fröbel aan de leer der mineralen toekende, in het bijzonder dat eenieder die Fröbels methode wilde begrijpen kennis van de mineralogie diende te hebben. Hij noemt zelfs 'de geheele mening (...) onjuist' (Versluys, 1879d, p. 11). In een artikel in zijn eigen *Tijdschrift voor Vormleer en Rekenkunde* onderbouwt hij het laatste, waar hij over de sferische wet – zonder deze term te gebruiken – het volgende schrijft: 'Nu behoeft men slechts een weinig aan mechanika gedaan te hebben, om te weten, dat hier (Versluys bedoelt de oorspronkelijke tekst van Fröbel, EdM) in elken volzin onjuistheden staan. Een kracht werkt slechts in 1 richting, maar Fröbel heeft wel eens gehoord van werking en terugwerking, en dit brengt hem hier in de war' (Versluys, 1879e).

Versluys vangt zijn boek aan met Fröbel 'een der grootste opvoedkundigen van Duitschland' te noemen, maar de rationalist en pragmaticus Versluys kan de mystieke wegen en duistere taal niet duiden. Zo zegt hij in zijn voorrede:

> 'Fröbel heeft zijn wezenlijk goede denkbeelden samengeweven met een wereldbeschouwing, die hoogst onduidelijk wordt weergegeven en volgens de meest welwillende opvatting geen voldoende grond heeft. Ook was Fröbel ten aanzien der opvoeding in hooge mate eenzijdig. Geen opvoedkundige wet bijna van enige beteekenis of hij zondigt er tegen. Over vormleer, rekenen en lezen kan niet gesproken worden, of er worden fouten begaan. Dit geldt ook voor zijn aanhangers.'
> (Versluys, 1879d, pp. 3-4)

Het lijkt merkwaardig dat een boek dat zo begint, verder een zeer positieve interpretatie geeft van de eigenlijke inhoud van de onderwijsideeën. Dat komt volgens Versluys omdat deze onderwijsideeën los van de achterliggende filosofie in de schoolpraktijk gebruikt konden worden. Dit gold echter geenszins voor vele volgelingen van Fröbel, zoals Hardenberg en Haanstra. In het bovengenoemde artikel trekt Versluys fel van leer tegen deze beide pedagogen. Niet alleen in verband met hun opvattingen over rekenen en vormleer, maar vooral over hun in zijn ogen elitaire opvattingen over de achtergrond van Fröbels methode.

Bezien we de behandeling van de gaven in het boek van Versluys, dan is deze over het algemeen van een zeer positieve toon. Opvallend is het dat Versluys in dit boek weinig directe verbanden met de vormleer legt. Wel waarschuwt hij herhaaldelijk tegen overdrijving van de systematische behandeling van begrippen. Vooral aan het vrije exploreren wenst hij ruim baan te geven. Impliciet menen wij te constateren dat Versluys het werken met de gaven en activiteiten volgens Fröbel als een intuïtieve voorbereiding op de vormleer beschouwde. Wij mogen niet uit het oog verliezen dat Versluys met de publicatie van een dergelijk boek ook commerciële belangen had. Achter in het boek staat een grote advertentie over de leermiddelen van Fröbel, die bij de uitgeverij van zijn broer Willem Versluys verkrijgbaar waren.

Wiskundige aspecten van de opleiding.

Haanstra schrijft in een 'programma van een eindexamen' van de Leidse Kweekschool: 'Wij geven (...) *een beetje Meetkunde*, maar dat beetje alweer grondig – geen vormleer – en *zoveel als noodig is tot recht verstand der speelgaven van Fröbel.*' (Haanstra, 1885, p. 13). Als voorbeeld geeft hij het volgende examenvraagstuk: 'Als bij de mozaïek de zijden van den gelijkzijdigen driehoek even lang zijn, als die van het quadraat, hoe verhoudt zich dan de lange zijde van den stomphoekige driehoekigen driehoek tot een der zijden van het quadraat?'[20] Hieruit blijkt dat Haanstra in ieder geval tot de stelling van Pythagoras wilde gaan. Ook staat rekenen op het programma en wat algebra, zij het dat het laatste vak niet geëxamineerd werd. In het genoemde *Maandblad voor het Onderwijs* komen enkele artikelen over informele meetkunde voor, maar een systematische handleiding is door ons niet gevonden. Mogelijk dat men van de boeken van Wisselink gebruik maakte. Een meer systematisch onderzoek van de eindexamens van de Leidse Kweekschool zou wellicht duidelijk kunnen maken in hoeverre wiskunde ook een serieus onderdeel van het programma was. De latere ontwikkelingen, vooral elders in het land, maken duidelijk dat wiskunde nooit een vak in de opleiding voor kleuteronderwijzeressen is geworden. Dit is te constateren door raadpleging van het *Correspondentieblad van den Bond van Onderwijzeressen bij het Fröbelonderwijs* (1904-1940), waarin regelmatig examenopgaven en examenprogramma's gepubliceerd werden. Geen daarvan bevatte meetkunde.[21]

Methodiekboeken

Haanstra is waarschijnlijk pas na de dood van Louise Hardenberg in 1898 zijn eigen en Hardenbergs geschriften gaan bundelen. De uitgeverij van de Leidse Kweekschool, die onder meer de tussengaven op de markt bracht, kwam toen op naam van Marie de Bock-Hardenberg en Haanstra. Onder de naam van die uitgeverij hebben wij een serie boekjes gevonden, getiteld *De Methode van Fröbel voor de Jonge Jeugd*. Elise van Calcar had waarschijnlijk reeds eerder een boekje over vlechten, vouwen, prikken en knippen het licht doen zien. Verder noemen wij uit de tijd rond de eeuwwisseling een handleiding van Brouwer en Bakker (1900), een pleidooi voor aanschouwingsonderwijs in de Fröbelbewaarscholen van Sophie Fischer (1909) en het eerste systematische methodiekboek van Wierts van Coehoorn-Stout (1904). Van de latere boeken zijn met name de publicaties van Telders (1930) en De Haan (1937) van belang. Lize de Haan besteedt in haar *Leidraad* ook enige aandacht aan de opleiding van kleuterleidsters, maar in haar schema voor het opleidingscurriculum komt wiskunde noch rekenen voor.

Een bijzondere plaats tussen deze uitgaven neemt het lijvige werk van Wierts van Coehoorn in. Het bevat een levensschets van Fröbel, een pleidooi voor het oprichten van fröbelscholen, de noodzaak van een professionele opleiding, een moti-

vering voor een leerplan, de inrichting van een kindertuin, de samenhang van opvoeding en onderwijs, het belang van gezondheid en hygiëne, de betekenis van (vrij) spel in samenhang met de intellectuele ontwikkeling, kortom een goed overzicht van de problematiek van het opkomende 'voorbereidende onderwijs', zoals het kleuteronderwijs in die tijd wel genoemd werd. Het leeuwendeel van dit meer dan vijfhonderd pagina's tellende boek behelst echter tot in detail beschreven lesjes en activiteiten. De verschillende groepen van leermiddelen komen hierbij aan bod, waarmee vooral door de illustraties een praktische handleiding voorhanden was. Onder de leermiddelen zijn ook die, welke Haanstra en anderen aan de oorspronkelijke gaven hadden toegevoegd. Er ligt nogal wat nadruk op intellectuele bezigheden en op kennisoverdracht (vormleerfiguren), wat door de beschrijvingen en illustraties een zekere vermethodieking van de fröbelmethode in de hand heeft kunnen werken.

Opmars van het fröbelonderwijs

In 1880 waren er in Nederland ruim 900 bewaarscholen. Veertig jaar later in 1920 werden er circa 1350 geteld met in totaal circa 140.000 leerlingen, in 1940 was dit aantal gegroeid tot circa 2700 met circa 220.000 leerlingen (CBS, 1942). Het merendeel hiervan waren bijzondere scholen. Voor kinderen tussen vier en zeven jaar bestond tot 1984 geen schoolplicht. In 1930 ging ongeveer de helft van de kinderen naar de kleuterschool, maar in 1950 was dat al tweederde deel en in 1960 90 procent (Idenburg, 1964, p. 509). Pas in 1956 is de eerste wet op het kleuteronderwijs in werking getreden, waarvan artikel 1 als algemeen doel voor het kleuteronderwijs stelde: 'algemene vorming van het kind in schoolverband, welke aan het gewoon lager onderwijs voorafgaat' (Idenburg, 1964, p. 326). De betekenis van het kleuteronderwijs als voorbereiding op het lager onderwijs werd daarmee ook officieel erkend. Toch waren er tot ver na 1945, vooral op het platteland, nog veel ongediplomeerde leidsters in het kleuteronderwijs in functie. In 1956 werd op 83 procent van de kleuterscholen uitsluitend fröbelmateriaal gebruikt, 4 procent gebruikte uitsluitend montessorimateriaal, 5 procent gebruikte beide en 8 procent ander materiaal (Idenburg, 1964, p. 327). Deze cijfers maken duidelijk welk een invloed de fröbelmethode, althans in naam, in Nederland heeft gekend.

Theoretische beschouwing

De conclusie van Leeb-Lundberg dat Fröbel intuïtief reeds de weg naar een moderne beschouwing van het leren van wiskundige begrippen en structuren heeft gewezen, was zeker van toepassing op de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs van de jaren zestig van deze eeuw. Beschouwen wij deze in het licht van deze tijd, dan menen wij dat ook ten aanzien van de huidige ontwikkelingen op het gebied van de didactiek van het reken-wiskundeonderwijs een aantal van de door haar gesignaleerde fröbelprincipes geldig zijn. We zullen deze thans naar de opvattingen van de realis-

tische reken-wiskundedidactiek en in de daarbij behorende terminologie samenvatten. Reeds de beperkte analyse van een deel van het speelleermateriaal, zoals hiervoor gedaan, maakt duidelijk welke opvattingen over het leren van wiskunde, die ook heden ten dage opgeld doen, in het onderwijs met het fröbelmateriaal liggen opgesloten.

Allereerst sommen we een aantal algemene kenmerken (A1 tot A6) voor het inzichtelijk leren van wiskunde op, daarna volgen de meer specifiek mathematisch-didactische kenmerken, die in het bijzonder betrokken zijn op de meetkunde (M1 tot M9):

A1: Vrije oriëntatie van begrippen door middel van activiteiten.
A2: Van concreet handelen via schematisering naar abstractie.
A3: Globaal inzicht in structuren als uitgangspunt voor verdere begripsvorming.
A4: Veelzijdige inbedding van het leren van begrippen en relaties.
A5: Historische ontwikkeling als uitgangspunt voor de individuele ontwikkeling (genetisch principe).
A6: Gelijktijdige ontwikkeling van intellectuele en affectieve faculteiten.

M1: Aanschouwelijkheid als grondslag.
M2: Start in de driedimensionale ruimte.
M3: Vorming van intuïtieve noties van meetkundige begrippen aan concrete objecten.
M4: Gebruikmaking van bewegingsmeetkunde (verschuiven, draaien en dergelijke).
M5: Uitbuiting van natuurlijke symmetrieën.
M6: Ordenen en klassificeren als natuurlijk verschijnsel.
M7: Zelf construeren van patronen, bouwsels en figuren.
M8: Omstructureren van bouwsels en vlakke figuren.
M9: Eenvoudige redeneringen en 'bewijzen'.

Met name de kenmerken M1 tot M9 vertonen een frappante gelijkenis met een aantal hedendaagse opvattingen over het leren en onderwijzen van de eerste meetkundige onderwerpen. We mogen echter niet uit het oog verliezen dat deze zaken door Fröbel niet zo expliciet gesteld waren. Belangrijk is te beseffen dat de activiteiten met het speelleermateriaal van Fröbel een sterk structuralistisch karakter vertoonden. Dit wil zeggen dat die activiteiten op zich een formeel mathematische grondslag hadden, nauwelijks gerelateerd waren aan de realiteit en geen toepassingskarakter hadden. Bovendien stegen de eigenlijke doelstellingen van Fröbel met dit materiaal uit boven de door ons geanalyseerde 'prozaïsche' kenmerken. Het lijdt ons inziens echter geen twijfel dat een deel van het fröbelmateriaal vanuit mathematisch-didactisch standpunt gezien nog altijd een zinvolle bijdrage kan leveren aan de eerste ontwikkeling van de

ruimtelijke oriëntatie. De effecten van Fröbels werk op dit gebied zijn thans in veel concreet leermateriaal (Montessori, Cuisenaire, MAB van Dienes) terug te vinden.

Betekenis voor het onderwijs

In hoeverre Haanstra ook overtuigd was van het belang van pure meetkundige activiteiten voor de kinderen is ons onbekend. Volgens Nijkamp ging het hem vooral om de 'vreugde van de arbeid zelf' (Nijkamp, 1976, p. 127). In de *Maandbladen* van de Leidsche Kweekschool hebben wij nergens een systematisch opgezette mathematische achtergrond voor de activiteiten gevonden. Een enkele maal werd een artikel over elementaire meetkunde aangetroffen, waarbij ook wel van papiervouwen gebruik gemaakt werd, maar deze artikelen stonden uiteindelijk toch weer in dienst van kennisoverdracht van de elementaire euclidische meetkunde ten behoeve van de opleiding. Ook specifiek mathematisch-didactische aspecten ontbraken. De bedoelde stukken waren vrijwel steeds bedoeld voor de praktijk (methodiek) van het onderwijs.

De bij de speelgaven behorende leerstof werd eigenlijk op gezag aangenomen. Fröbel had, gezien zijn geloof in de vormende waarde van de wiskunde, vooral als doelen de ontwikkeling van geest en verstand voor ogen, meer algemeen de ontwikkeling tot een zelfstandig en harmonieus mens.

Doordat de opleiding van Haanstra en Hardenberg sterke nadruk legde op het principe van 'zelf doen' en 'zelf ontdekken', werd veel aandacht besteed aan het concrete handelen als bouwen, knippen, plakken, vouwen, enzovoort. Hiermee zou wel eens de kiem gelegd kunnen zijn voor wat later wel eens denigrerend het 'fröbelen' genoemd werd. Betrekken we hierbij ook nog het belang dat gehecht werd aan netheid, orde en esthetiek, dan is te begrijpen dat in de methodiekboeken ook hieraan ruime aandacht besteed werd, zelfs tot in de kleinste details, zoals het netjes plakken en precies vouwen.

Haanstra was, zoals we gezien hebben, nog voorstander van wat wiskunde in de opleiding, maar in de latere programma's kwam dit niet meer voor. Al met al betekende dit dat zowel het mathematische element als de mathematisch-didactische aspecten geen betekenis meer konden hebben voor de kleuterleidsters. Daarmee was het fröbelprogramma, althans wat de meetkundige gaven en activiteiten betreft, teruggebracht tot een opzichzelfstaand onderdeel. Waar ook de lagere school niet aansloot op de meetkundige activiteiten, werd dit in wezen rijke onderdeel van de fröbelmethode nog slechts opgevat als een algemeen ontwikkelingsprogramma voor de kleuters. Leeb-Lundberg komt in haar studie tot de conclusie dat het wiskundige deel van het fröbelprogramma in de Verenigde Staten uiteindelijk mislukt is door de vermethodiekte aanpak en door het gebrek aan wiskundige kennis bij de onderwijzers. Ook in Nederland kreeg het methodische aspect in vele gevallen de overhand, maar anderzijds werd er ook op een meer vrije wijze met het materiaal omgegaan.[22]

In ieder geval werd er vanaf 1889, nadat de vormleer van de lagere school ver-

wijderd was, in het fröbelonderwijs nog enige aandacht, vooral in empirische zin, aan meetkundige activiteiten geschonken. Gezien de stand van zaken der beginnende leerpsychologie en van de nog maar prille vakdidactiek, is het begrijpelijk dat men rond de eeuwwisseling niet het volle belang van dit voorbereidende meetkundeonderwijs heeft onderkend. Zo zijn het kleuteronderwijs en het lager onderwijs elk hun eigen weg gegaan. Mede daardoor vond geen uitwisseling van gedachten op dit gebied plaats.

Een belangrijke vraag is of het noodzakelijk is een mathematisch-didactische fundering onder een kleuterprogramma te leggen. In het bijzonder: is het gewenst reeds in de kleuterleeftijd met een systematische meetkundige leerlijn aan te vangen? Of kan men volstaan met het aanbieden van activiteiten die de mogelijkheid bieden om op intuïtieve en informele wijze de elementaire meetkundige begrippen en relaties te verkennen? Met beide aanpakken is bijna een eeuw later enige ervaring opgedaan. Hierop komen we in deel C en aan het eind van dit boek nog terug.

Omdat de montessorischolen en de Vrije Scholen de enige vormen van onderwijs in Nederland zijn geweest die steeds een volledig meetkundeprogramma voor de lagere school hebben gehanteerd, maken we hier enkele korte opmerkingen over.

Montessori

Vanaf 1914 ontstond er in Nederland belangstelling voor het montessorionderwijs, dat zich in zekere zin afzette tegen de toen heersende fröbelcultuur. Drie belangrijke kenmerken van de opvattingen van Maria Montessori (1870-1952) in verband met het (meetkunde)onderwijs zijn:

- de zelfwerkzaamheid van de kinderen naar niveau
- de leerstof en methodiek in dienst van de verstandelijke ontwikkeling van het kind
- het gebruik van het specifieke montessorimateriaal.

In verband met het eerste punt merken we op dat in tegenstelling met de fröbelmethode er weinig mogelijkheid tot interactie bestaat, althans volgens de orthodoxe montessori-opvatting. Het tweede punt stelt – alweer in orthodoxe zin – restricties aan het vrije spelen en fantaseren volgens de fröbelmethode. Het derde punt hangt samen met het verwerven van inzicht vanuit concrete situaties.

In *De methode Montessori* (1919) wordt voor de kleuters aandacht aan vormen besteed, waarbij, net als bij Fröbel, gebruik gemaakt wordt van tegenstellingen om die vormen te leren onderscheiden. Montessori maakte daarbij ook gebruik van de ruimtelijke vormen van Fröbel. Bekende montessorileermiddelen zijn de inlegplaatjes (cirkel, vierkant, rechthoek,...), die op gevoel en/of gezicht in hun bijbehorende vorm gepast moeten worden. Bij de door Montessori genoemde activiteiten behoren

ook alledaagse handelingen als tafeldekken en dergelijke, waarbij allerlei meetkundige begrippen ter sprake gebracht worden. De oefeningen met de inlegfiguren staan aanvankelijk in het teken van de ontwikkeling der zintuigen en hebben slechts in tweede instantie een betekenis voor de meetkunde.

Ook voor de lagere school vormen de inlegfiguren de kern van de leerstof van de vlakke meetkunde. (We gaan hier niet in op de breukcirkels, die oorspronkelijk ook onder de meetkunde behandeld werden.) De inlegdozen omvatten een serie van vormen, van het vierkant tot regelmatige veelhoeken. De kern van de activiteiten bestaat uit het omstructureren van figuren onder behoud van oppervlakte. Montessori noemt ze 'gelijkwaardige' figuren. Het hoogtepunt van de leergang is het bewijs van de stelling van Pythagoras, waarbij het bewijs uit de *Elementen* van Euclides als legpuzzel wordt gehanteerd.[23]

Ook noemt Montessori als activiteit het meetkundige tekenen, waarbij gebruik gemaakt wordt van passer, liniaal en gradenboog. Ten slotte worden de inlegfiguren ook aanbevolen als omtrekmallen ter vervaardiging van esthetische figuren.

De ruimtemeetkunde is eveneens gecentreerd rond het gebruik van het materiaal, dat bestaat uit een groot aantal houten modellen. Ten behoeve van de ontwikkeling van het inhoudsbegrip worden modellen, waarmee overgegoten kan worden, gebruikt. Ten behoeve van het begrip van machten van getallen worden blokkenbouwsels gebruikt. Dit gaat tot de ontwikkeling van $(a + b)^3$ via een ruimtelijk aanschouwelijk model.

Er komen geen toepassingen voor. De stof is ontleend aan de klassieke euclidische meetkunde. Het belangrijkste doel is voorbereiding op de meetkunde van het voortgezet onderwijs.

Aldus had Montessori in eerste instantie haar ideeën over meetkunde in *De Methode* naar voren gebracht. In 1934 heeft Montessori een apart boek *Psico-geometría* gewijd aan de geometrie, zoals de meetkunde door de montessorianen genoemd wordt. Hiervan is in 1988 een Nederlandse vertaling gemaakt, die het uitgangspunt is geweest voor het samenstellen van het *Werkboek Geometrie* (1991). Hierin treffen we enkele vertaalde fragmenten van het oorspronkelijke werk aan. Met name is aandacht besteed aan 'De bestudering van geometrie op basis van de psychologie van het kind'. Hierbij is vooral aandacht besteed aan de 'gevoelige perioden', waarin de natuurlijke interesse van het kind voor het leren van bepaalde zaken volgens Montessori het meest gunstig is: 'De *interesse* die de spontane activiteit stuurt, is de ware psychologische sleutel'. Deze interesse kan door het materiaal via de 'periferie' (de zintuigen, de motoriek) opgewekt worden. Ook wordt hier nog eens duidelijk welk doel de geometrie op de lagere school volgens Montessori dient te hebben:

> 'wat we hier bespreken geen betrekking heeft op de manier om geometrie systematisch te laten bestuderen. Het is alleen hersengymnastiek om de geometrie heen. Deze gymnastiek bereidt de geest meer voor op *handelen* dan op *ontvangen* en vervult haar met interesse die altijd stimulerend is.' (Projectgroep Montessori, 1992, p. 4)

Meetkunde wordt dus bij Montessori bestudeerd om haar formele en haar voorbereidende waarde.[24]

Opmerkelijk is het feit dat men zich binnen de montessoriwereld binnen een tijdsbestek van meer dan een halve eeuw nauwelijks of niet georiënteerd heeft op de ontwikkelingen die zich elders voltrokken hebben. Een uitzondering moet gemaakt worden voor het werk van Van Albada, die na de Tweede Wereldoorlog een intuïtieve meetkundecursus voor de eerste klas van het voortgezet montessorionderwijs ontwikkelde, waarop we in B3 van dit deel nog terugkomen.

Vrije School Beweging

In het leerplan van de Vrije School neemt meetkunde een ruime plaats in. Vanuit het zogenoemde vormtekenen komt men in de hogere leerjaren tot een meetkundig programma, dat zowel praktische als formele elementen kent. In de zevende en achtste klassen komt zelfs de projectieve meetkunde aan bod. Het is vooral het esthetische aspect van de meetkunde dat sterk naar voren komt:

> 'In de Vrije School staat (...) al het onderwijs en zeker de wiskunde in dienst van de vorming van de gehele mens. Kennisinhouden en denkvaardigheid, ingebed in het grote geheel, geven de mens de mogelijkheid het denkend handelen te toetsen aan Goedheid, Schoonheid en Waarheid'. In het bijzonder in de meetkundelessen wordt dit zichtbaar.' (Rekenwerkgroep, 1994, p. 265)

Hiermee is in een notendop de betekenis van de wiskunde voor de Vrije School gekarakteriseerd. Uit dit citaat is ook te lezen dat men in de Vrije School van een specifiek mensbeeld uitgaat.

Bezien we het leven en werk van Rudolf Steiner (1861-1925), grondlegger van de antroposofie en stichter van de eerste Vrije School, dan springt zijn interesse voor het natuurwetenschappelijke werk van Goethe in het oog. En daarmee zijn we weer terug bij de Duits-Romantische natuurfilosofie van de negentiende eeuw, waarin ook het werk van Fröbel zijn wortels heeft. Er bestaan inderdaad opvallende overeenkomsten tussen de meetkundige inhoud van het Vrije Schoolprogramma en de fröbelmeetkunde. Het begrip symmetrie, het ontwerpen van patronen en de kristallografische lichamen spelen onder meer in beide onderwijsopvattingen over meetkunde een belangrijke rol.

Noch het gedachtegoed van de Vrije School noch dat van de montessoribeweging hebben in de didactische discussies over het aanvankelijk meetkundeonderwijs in de lagere school een rol gespeeld. De vraag hoe dit eigenlijk mogelijk is geweest, kan thans niet aan de orde komen. Wel merken we op dat de ontwikkelingen, zoals we die in het volgende zullen bespreken, steeds gericht waren op veranderingspogingen via de reguliere kanalen.

(Voor de samenvattende conclusies van B1: zie B6.)

B2 Opkomst van het empirisme, leren door doen
de tijd van Reindersma (1900-1925)

Inleiding

Waren *aanschouwelijkheid* en de *heuristische werkwijze* de nieuwe ontwikkelingspunten in de didactiek van de negentiende eeuw, tegen het begin van de twintigste eeuw wordt hier het *activiteitsprincipe* aan toegevoegd. In de internationale Nieuwe Schoolbeweging (Reformbeweging), die dan ontluikt, zijn in de verschillende uitwerkingen twee belangrijke gemeenschappelijke uitgangspunten te ontdekken: het *kind* dient *centraal* te staan in het onderwijsleerproces en het kind moet zelf actief zijn, zowel concreet handelend als mentaal, het kind zal moeten *leren door doen.*

Welke effecten hebben deze pedagogische wendingen gehad op de ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs, in het bijzonder op de doelstellingen en de didactiek van het meetkundeonderwijs, in de eerste klassen van het voortgezet onderwijs? Dat is een van de kernvragen van dit hoofdstuk. In verband hiermee zullen we kennis maken met Willem Reindersma (1877-1946), de belangrijkste vertegenwoordiger van het nieuwe denken voor de wis- en natuurkunde en daarom de hoofdpersoon van deze periode. Maar we zullen ook aandacht besteden aan andere voortrekkers van de meetkundedidactiek, wier werk (vrijwel) vergeten is. We doen dit, omdat dit het moeizame karakter van het vernieuwingsproces blootlegt, omdat er zich een aantal interessante inhoudelijke elementen manifesteerden en omdat het de rode draad van de historische ontwikkeling weergeeft. De in dit hoofdstuk genoemde schoolboeken zijn in een aparte lijst bij de literatuur opgenomen.

Het lager onderwijs komt slechts daar aan de orde, waar pogingen zijn gedaan om binnen het zogenoemde zaakonderwijs nog enige meetkunde in te voegen, maar zoals bekend, kwam vormleer of meetkunde niet meer voor op de lagere school. De didactische ontwikkelingen voltrokken zich in het voortgezet onderwijs.

Maar allereerst zullen we een en ander releveren uit de ontwikkelingsgeschiedenis van de wetenschappelijke meetkunde tijdens de negentiende eeuw, waarbij het vooral om de betekenis daarvan voor het onderwijs gaat en waarin de befaamde wiskundige Felix Klein (1849-1925) een belangrijke rol heeft gespeeld.

Meetkundig-wetenschappelijke ontwikkelingen in de negentiende eeuw

De negentiende eeuw wordt wel de Gouden Eeuw voor de meetkunde genoemd.[1] De projectieve meetkunde werd gesystematiseerd op een synthetische wijze, gebruik makend van hoofdzakelijk meetkundige eigenschappen. Maar tegelijkertijd gebeurde dit ook via analytische werkwijzen met behulp van algebraïsche hulpmiddelen.[2] De niet-euclidische meetkunden werden ontdekt en de differentiaalmeetkunde ontwikkeld, waarbij ook in meerdimensionale ruimten gewerkt werd. De groepentheorie, toegepast op de transformatiemeetkunde, bracht Klein tot zijn beroemde 'Erlan-

ger Programm', waarmee hij eenheid in de diversiteit van de verschillende ontdekkingen wilde brengen. Klein bracht zijn denkbeelden naar voren in 1872 ter gelegenheid van zijn inaugurele rede als hoogleraar aan de universiteit van Erlangen. Deze *Systematik und Grundlegung der Geometrie* heeft Klein ten behoeve van het onderwijs neergelegd in zijn lezingen over *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Klein, 1925, pp. 140-170). In dit werk leren we Klein kennen als vernieuwer van het wiskundeonderwijs.

Vooral de ontdekking van de niet-euclidische meetkunden betekende een nieuwe uitdaging om de axiomatische grondslagen, in het bijzonder van de euclidische meetkunde, te vervolmaken. Het is Moritz Pasch (1843-1930) geweest, die er als eerste in geslaagd is de meetkunde van een zodanig axiomatische basis te voorzien, dat het deductieve systeem volledig sluitend werd.[3] Toch was men daarmee de kantiaanse opvattingen over de ruimte nog niet ontstegen. David Hilbert (1862-1943) deed één jaar voor het einde van de negentiende eeuw zijn *Grundlagen der Geometrie* het licht zien, waarmee de meetkunde uiteindelijk ontdaan werd van intuïtief-empirische ervaringen en modellen. In wetenschappelijke kringen werd de meetkunde nu door sommigen als 'af' beschouwd.[4] Hilbert werd de leidende figuur van de axiomatische school, die vanaf toen de wiskunde zou gaan beheersen.[5] Verzamelingentheorie, de daarbij behorende ordeningsaxioma's en afbeeldingen (functies) deden hun intrede in de meetkunde.

Al deze wetenschappelijke ontwikkelingen zouden ook een zekere uitstraling op het onderwijs krijgen, zelfs tot ver in de twintigste eeuw. Hadden tot dan toe in Duitsland en Nederland veelal de leraren, met name de opleiders, hun stempel op de ontwikkelingen in het onderwijs gezet, nu kwamen deze veelal in handen van de universitaire wiskundigen.

De internationale situatie rondom 1900, de CIEM

Tijdens het vierde Internationale Congres van Wiskundigen in 1908 te Rome werd het volgende besluit genomen:

> 'Le Congres ayant reconnu l'importance d'un examen comparé des méthodes et des plans d'étude de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires des différentes nations, confie à MM. Klein, Greenhill et Fehr le mandat de constituer une Commission internationale qui étudiera ces questions et présentera un rapport d'ensemble au prochain Congrès.' (Schrek, 1922, pp. 109-110)[6]

Hiermee was de Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM) geboren, waarvan Klein voorzitter werd. Het waren dus wiskundigen, die zich met het wiskundeonderwijs gingen bemoeien.[7] Alles was sterk Frans georiënteerd, reden waarom ook het al sinds 1899 bestaande tijdschrift *l'Enseignement Mathématique* als orgaan werd gekozen. De taak die men zich gesteld had, was niet gering; men wilde namelijk een soort encyclopedie van het wiskundeonderwijs opstel-

len. De commissie vatte haar taak echter veel breder op.[8] Van meet af aan stond een aantal kernvragen van de didactiek der wiskunde centraal, die we hier uit een verslag van de wiskundeleraar Schrek over de werkzaamheden van de eerste twaalf jaren van de CIEM citeren:

'– In hoeverre mag men zich bij het onderwijs in de wiskunde op de intuïtie beroepen?
– Kan men den logischen opbouw doen voorafgaan door een intuïtieve of misschien empirische behandeling?
– In welke mate is het gewenscht de verschillende, veelal scherp gescheiden onderdeelen der elementaire wiskunde tot één geheel te versmelten?'
(Schrek, 1922, p. 111)

De genoemde vragen raken de kern van het meetkundeonderwijs en zijn juist ook voor dit deel van ons onderzoek centrale punten. Sprak men eerst van aanschouwelijk of informeel, nu werden de termen *intuïtief* en *empirisch* de sleutelwoorden in de discussie. De bekende Duitse wiskundedidacticus W. Lietzmann had ten behoeve van het eerste CIEM-congres van 1911 te Milaan een indeling gemaakt van programma's naar 'graad van strengheid':

'A. De grondslagen worden in hun volle strengheid door de axioma's gelegd en het systeem wordt langs zuiver deductieven weg opgebouwd.
B. De grondslagen zijn empirisch, zonder hulp van axioma's; op een zeker ogenblik gaat men over tot het streng bewijzen der stellingen.
C. Intuïtieve beschouwingen wisselen af met de deductieve methode in de verschillende deelen van het onderwijs.
D. De methode der deductie wordt niet gebruikt; de wiskunde wordt gebaseerd uitsluitend op proefneming en intuïtie.' (Schrek, 1922, p. 114)

A en D kwamen in geen van de deelnemende landen voor. De Duits-sprekende landen zaten vooral in de C-categorie, de Fransen en Italianen behoorden meer tot de B-categorie. Ook het Engelse meetkundeonderwijs bleek in de categorie B te vallen. Op de situatie in Nederland komen we nog terug. Een zuiver axiomatische aanpak voor het aanvankelijk onderwijs werd over het algemeen niet mogelijk geacht.[9] De Amerikaan J.W.A. Young drukte dit in een memorandum aan een van de subcommissies van de CIEM als volgt uit:

'Les récentes recherches sur les axiomes condamnent, une fois pour toutes, tout espoir d'enseigner à l'enfant une géométrie logiquement parfaite dans laquelle tous les résultats sont déduits d'un ensemble de principes fondamentaux irréductibles, et avec cet espoir disparaît la raison d'adhérer plus longtemps à cet apparence d'un tel système déductif rigoureux.' (Young, 1911, p. 476)

Kennelijk is dit een verwijzing naar Hilberts *Grundlagen*. Young beval een intuïtieve werkwijze voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs aan, waarbij gebruik gemaakt mocht worden van parallelverschuivingen, draaiingen, verplaatsingen en

puntspiegelingen en waarbij axioma's als vanzelfsprekendheden gegeven zijn. Ook onafhankelijkheid van het axiomastelsel was volgens hem van ondergeschikt belang.

Frankrijk, Engeland en Duitsland

In het tweede deel van Kleins *Elementarmathematik*, dat aan de meetkunde is gewijd, vinden we een historisch-geografisch overzicht in een aantal Europese landen. De euclidische aanpak heeft in Engeland een lange traditie gekend, welke ook in 1925 nog niet doorbroken was. Wel maakt Klein gewag van de pogingen van John Perry om deze traditionele opvatting te doorbreken door middel van een meer empirische aanpak (gebruik van instrumenten, tekenen, construeren,...), maar dit streven schijnt weinig effect gehad te hebben op het feitelijke onderwijs; mogelijk vanwege de centralistische aanpak van de examens. Uit de CIEM-rapportage wordt echter duidelijk dat op de lagere school wel enige aandacht aan praktische meetkunde werd besteed (*l'Enseignement Mathématique 15*(11), p. 154). De Engelse inspecteur Benchara Branford liet in 1908 een boek over de genetische aanpak van het wiskundeonderwijs verschijnen, waarin een vooruitstrevend stuk over het meetkundeonderwijs voorkomt.[10]

Frankrijk wordt door Klein beschreven als een land met een rijke meetkundige traditie. Hij verwijst onder meer naar het werk van Clairaut, van Legendre, wiens meetkundecursus vele herdrukken heeft gekend, en van Rouché en de Comberousse, dat ook voor Versluys een belangrijke bron is geweest. Hij roemt de Franse flexibiliteit en fantasie ten aanzien van het onderwerp, ook betreffende het onderwijs.[11]

Merkwaardig, misschien van valse bescheidenheid getuigend, is het feit dat Klein over de Duitse situatie tamelijk negatief is. Hij wijst op de geringe eenheid in de programma's.[12] Verder maakt hij gewag van de invloed van Pestalozzi en Herbart op het Duitse onderwijs, waarbij hij met name ingaat op de noodzaak van een aanvankelijk aanschouwelijk meetkundeonderwijs. Aan het begin van de twintigste eeuw ontstonden de zogenoemde Meraner-voorstellen voor het onderwijs in de natuurwetenschappen en wiskunde aan het Gymnasium en de Realschule, waarbij nadruk gelegd werd op het praktische nut en de verbetering van de didactiek (Schimmack, 1911).

Overigens bleek rond 1920 dat in alle landen die aan de eerste wereldoorlog hadden deelgenomen, de waardering voor de wiskunde en de natuurwetenschappen in het onderwijs afnam. Klein duidde deze 'der Mathematik und den Naturwissenschaften feindliche Bewegung' als een vermoeidheidsverschijnsel.

Felix Klein en het meetkundeonderwijs

Hoewel Kleins naam meestal met het structuurkarakter van de meetkunde in verband wordt gebracht, was hij in feite een universeel en pragmatisch wiskundige, wat ook in zijn opvattingen over het onderwijs tot uiting kwam. Wel hebben zijn ideeën zich in het laatste kwart van de negentiende eeuw geëvolueerd. De centrale punten

van de 'Reform' dienden 'die Stärkung des Anschauungsvermögens' en 'die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens' te zijn (Klein, 1907, p. 6).[13] In verband met het laatste heeft hij ook voortdurend op het toepassingskarakter van de wiskunde gewezen (Schubring, 1989).

Klein was een voorstander van introductie van de meetkunde via aanschouwelijkheid: 'auf der Schule stets zuerst an die lebhafte konkrete Anschauung anknüpfen', zoals hij reeds in 1908 stelde (Klein, 1925, p. 227). Dit was geenszins in tegenspraak met zijn opvattingen over de nieuwere meetkunde, waarin hij van aanvang af 'die Idee der Beweglichkeit einer jeden Figur' centraal wilde stellen. Ook herkennen we bij hem het belang van de genetische werkwijze.[14] Over het gehele meetkundeonderwijs zijn Kleins opvattingen als volgt kort te beschrijven:

- streven om de meetkunde van het euclidische harnas te ontdoen
- aanschouwing als grondslag voor het allereerste meetkundeonderwijs
- vervlechting van planimetrie en stereometrie
- langzaam vervlechten met (eenvoudige) logische redeneringen
- toepassing van het genetische principe
- belang van toegepaste (land)meetkunde
- gebruik van transformatiemeetkunde
- eenheid van de meetkunde door middel van de groepentheorie.

Veelal wordt het laatste punt als Kleins belangrijkste bijdrage aan de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs gezien, iets dat in de jaren zestig van deze eeuw opnieuw opgeld deed. En inderdaad stelt hij in zijn *Elementarmathematik* het volgende: 'Ich wollte einen *Gesamtrahmen der Geometrie* aufrichten, in dem gleichförmig Platz für *alle* ihrer Teile ist, und der einen Überblick über sie alle und ihre wechselseitige Beziehungen gestattet' (Klein, 1925, p. 260). Maar dit wilde geenszins zeggen dat een dergelijke 'Überblick' van meet af aan het aanvankelijke meetkundeonderwijs zou moeten beheersen. Klein stond een geleidelijke genetische werkwijze in het meetkundeonderwijs voor. Bovendien heeft hij ook verschillende malen gewezen op het belang van differentiatie, zowel naar schoolaard als in individuele zin.

Internationaal streven naar een andere didactiek

In feite was men het er in de kringen van de CIEM rond 1910 al redelijk over eens dat er nu eindelijk eens afgerekend moest worden met de euclidische opzet van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Maar ook de 'modernere' methoden, die in verschillende landen op de markt kwamen, verschilden onderling sterk. Zeker wat de uiteindelijke doelen van het meetkundeonderwijs betrof: een axiomatische cursus of een informele uitwerking. In hoeverre deze internationale uitwisselingen ook daadwerkelijk directe betekenis gehad hebben voor de verdere ontwikkelingen in de onder-

scheiden landen, is moeilijk vast te stellen. Onze indruk is dat de effecten in eerste instantie gering zijn geweest, hetgeen onder meer te maken heeft met de totale inrichting en organisatie van het onderwijs in de verschillende landen, maar vooral de traditie van Euclides heeft sterk remmend gewerkt. In 1908 verzuchtte Klein: 'In der Tat krankt der geometrische Unterricht heute geradezu an der Last der Überlieferung' (Klein, 1925, p. 226), maar ook bijna twintig jaar daarna leek de feitelijke situatie nog niet erg veranderd. De genoemde ontwikkelingen hadden met name voor de voortrekkers van de vernieuwingen een bron van inspiratie kunnen zijn; iets waarvan in ieder geval in Nederland weinig gebruik gemaakt is.

Reformpedagogiek en de Nieuwe Schoolbeweging

In verband met enkele algemene didactische principes, die ook voor de ontwikkeling van het aanvankelijk meetkundeonderwijs van belang zijn geweest, wijden we nu enkele woorden aan de internationale Nieuwe Schoolbeweging rond de eeuwwisseling.[15]

Men kan niet spreken van dé Nieuwe Schoolbeweging, gezien de talloze uitwerkingen die er toentertijd ontstonden. De negentiende-eeuwse klassikale school was een erfenis van Pestalozzi, waar onder invloed van het latere herbartianisme de nadruk vooral lag op het vormende aspect. De aard van het onderwijs was in het algemeen mechanistisch. Allereerst ontstond nu vanuit het reformpedagogische denken meer aandacht voor het individuele kind ('vom Kind aus'), maar tevens werd het activiteitsprincipe als het ware 'ontdekt'. Dewey (1859-1952) begon in de Verenigde Staten zijn 'learning by doing'-principe in praktijk te brengen, waarbij voor het lerende kind de structuren zich allengs uit de activiteiten zouden moeten ontwikkelen.[16] We herkennen hier het genetische principe, zowel in historische als psychologische betekenis.

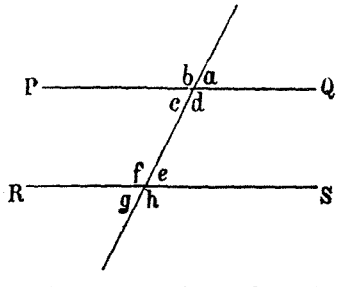
Tevens kwam de zogenaamde 'arbeidsschool' op, waaraan onder meer de naam van Kerschensteiner (1854-1932) is verbonden. Deze wilde, vooral in het voortgezet onderwijs, het toekomstige beroep centraal stellen. Aan de exacte vakken diende een centrale plaats toegekend te worden, maar dan vooral in praktische zin, terwijl ook het tekenen als een belangrijk schoolvak werd beschouwd.[17]

In Nederland wees J.H. Gunning in 1898 in een artikel in *De Gids* de weg tot mogelijke hervormingen naar Duits voorbeeld. Hij meende dat 'kinderen van twaalf tot vijftien jaar (...) een soort onderwijs krijgen, dat niet voor hen deugt' en dat 'het leerplan van de eerste drie jaren van gymnasium en h.b. school volkomen gelijk gemaakt' zou moeten worden (Gunning, 1898, p. 208 en p. 228). Jan Ligthart (1859-1916) zou grote bekendheid krijgen met zijn hartenpedagogiek en nieuwe methodiek in zijn lagere school in Den Haag.[18] De lyceumgedachte van Gunning kreeg in 1909 haar beslag door de oprichting van het Nederlandsch Lyceum in Den Haag, waaraan Reindersma verbonden is geweest.

Het Nederlandse meetkundeonderwijs rond 1900

Het feit dat Schrek pas in 1922 verslag deed van de hiervoor geschetste buitenlandse ontwikkelingen, geeft al aan hoe weinig de vernieuwing van het meetkundeonderwijs voor de direct belanghebbenden in Nederland leefde.[19] Jan Versluys ging wel voort met het op de markt brengen van boeken, maar zijn rol op het innovatieve vlak leek aan het begin van de twintigste eeuw toch uitgespeeld. Na zijn didactiekboek de *Methoden...* heeft hij geen essentieel nieuwe bijdragen aan de didactiek toegevoegd (zie A10). De periode van 1890 tot 1925 was er een van zekere rust, misschien zelfs gezapigheid, wat het wiskundeonderwijs betreft. Weliswaar werden op de lagere school nog enkele vormleerachtige boeken gebruikt, maar het 'wiskundeonderwijs' was toch hoofdzakelijk rekenen.

In A16 hebben we laten zien welke invloed de vormleer in de periode 1890-1910 heeft gehad op een aantal meetkundeboeken, die voor de onderwijzersopleiding, de MULO en de ambachtsscholen bedoeld waren. De belangrijkste hiervan waren die van De Gast en Wisselink. Een boek dat een sterk aanschouwelijke basis had, was dat van Van Zanten.[20] Op de Gymnasia en HBS'en werd meetkunde gegeven volgens de scheiding eerst planimetrie, daarna stereometrie, waarbij een min of meer axiomatisch opgezette cursus gevolgd werd. Bekende leerboeken uit die tijd waren die van Versluys, Smits en Derksen en De Laive.



1°. Onderstelde: $\angle a = \angle e$. Gestelde: $PQ \parallel RS$.
Bewijs. Daar volgens het onderstelde $\angle a = \angle e$, en bovendien $\angle a = \angle c$, en $\angle e = \angle g$ is, zoo zijn de vier hoeken, a, c, e en g onderling gelijk. Snijdt men nu de figuur langs de snijlijn door, en laat men het deel links van die lijn in het vlak eene draaiing ondergaan, die $\angle g$ doet samenvallen met $\angle a$, dan zullen de twee deelen der figuur elkaar volkomen bedekken. — Indien dus de lijnen PQ en RS aan den eenen kant der snijlijn in een punt samenkwamen, dan zouden zij dit ook aan den anderen kant dier lijn moeten doen. Dan zouden zij echter elkander in twee punten ontmoeten, hetgeen onmogelijk is. Derhalve kunnen de lijnen PQ en RS elkander niet ontmoeten, en zijn zij evenwijdig.

figuur B2.1: Een evenwijdigheidsbewijs (Smits, 1910)

Het best krijgen we een indruk van de start van deze meetkundeboeken door eens te kijken hoe de hoekstellingen bij twee evenwijdige lijnen, gesneden door een derde,

behandeld werden. We nemen als voorbeeld: 'Twee lijnen, die door een derde gesneden worden, zijn evenwijdig als twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn'. Dit komt uit de zesde druk van het *Leerboek der vlakke meetkunde* van Smits uit 1910, dat zijn eerste druk in 1894 kende en tot na de Tweede Wereldoorlog stand heeft gehouden. In figuur B2.1 is het bewijs afgebeeld.

Door middel van een indirecte redenering én van een aanschouwelijke (!) puntspiegeling, wordt aangetoond dat als de twee lijnen één punt gemeen hebben, ze nog een punt gemeen hebben. Aangezien door een eerder axioma was bepaald dat er door twee punten maar één rechte lijn gaat, is de veronderstelling van snijding dus onjuist. Dit soort logica stond aan de basis van de gebruikelijke meetkundecursus voor twaalfjarigen. Afgezien van de degelijkheid van de redenering, moeten we ons met de vooraanstaande didactici van die tijd afvragen of de redenatie door de leerlingen ook zelfs maar gereproduceerd kon worden.

Op de MULO- en de ambachtsscholen werden meetkundeboeken gebruikt die nog een vleug van de vormleer hadden. Het merendeel der scholen liep mee in de pas van de traditionele methoden en opvattingen.

Voor het eind van de negentiende eeuw zijn in Nederland eigenlijk geen nieuwe namen op het gebied van de didactiek van de wiskunde te noemen. De eerste die een nieuw geluid liet horen, was Kleefstra. Het is dan 1909. Er verscheen wel een aantal meetkundeboeken met een zekere vernieuwende tendens, waarvan dat van Wolda (1921) heel interessant is. Reindersma schreef een belangrijk meetkundeboek, maar zette pas in 1926 zijn opvattingen over het inleidend meetkundeonderwijs in een redevoering uiteen. Tevens zou al vanaf 1915 mevrouw Ehrenfest zich gaan roeren, maar zij zou pas later haar rol in onze historie opeisen. Hierop gaan we in het volgende hoofdstuk B3 uitgebreid in. Voordat we op de ideeën van Reindersma ingaan, besteden we eerst enige aandacht aan Kleefstra en Wolda.

Kleefstra, een didactische eenling

In de Nieuwe Schoolbeweging in Nederland neemt Jentje Johan Kleefstra (1860-1929) een eigen plaats in. Kleefstra kwam voort uit het lager onderwijs, studeerde wiskunde (waarschijnlijk een middelbare akte) en stichtte in 1897 in Hilversum de Brinioschool, een klein particulier internaat voor jongens van twaalf tot zestien jaar, dat sterke overeenkomsten vertoonde met de Engelse kostscholen en de Landeserziehungsheime in Duitsland. Volgens Kleefstra moest de beroeps- en studiekeuze uitgesteld worden tot de leeftijd van zestien à zeventien jaar.[21] Hij noemde zichzelf een actiepedagoog en beriep zich in zijn geschriften, die van een onomwonden stijl en doorspekt met allerlei persoonlijke ervaringen waren, vaak op de adhesiebetuigingen die hij van J.H. Gunning Wzn. ontving.[22]

Kleefstra kreeg enige bekendheid met zijn opvoedkundige idealen, maar hij was ook actief op het gebied van het wiskundeonderwijs. In 1909 publiceerde hij de bro-

chure *Over het onderwijs in de wiskunde*. De aanleiding hiertoe lag in de slechte resultaten bij de wiskunde op de HBS en het Gymnasium. Als eerste reden voor dit euvel poneerde Kleefstra dat de wiskunde op de middelbare school 'de voorbereiding van de ouderwetsche vormleer' miste.[23] Verder meende hij dat de schoolboeken voor wiskunde te veel naar het 'akademisch model' waren 'gekapt'. Liever gebruikte hij de lagereschoolmethoden met hun aanschouwelijkheid en eenvoud van taal. Zijn betoogtrant komt soms wat simplistisch over en enig populisme was hem niet vreemd:

> 'Wie de rationeele methode (Kleefstra bedoelt hier logisch-deductief mee, EdM) verwerpt, kan met een dankbaar hart de heele reeks philosophische abstracties in de eerste hoofdstukken van de planimetrie en de stereometrie schrappen, in de rustige overtuiging, dat hij daarmee geen schepsel eenig nadeel berokkent, maar de jeugd een onverteerbaar gedeelte van de wetenschap spaart.' (Kleefstra, 1909, pp. 22-23)

Hoewel het genoemde geschrift geen methode voor het meetkundeonderwijs pretendeerde te zijn, maar wel een aantal losse ideeën gaf, wordt de strekking van Kleefstra's methodisch-didactische opvattingen duidelijk. Hij stond een analytische benadering van de aanvankelijke meetkunde voor en pleitte voor een heel andere leerstofsequentie dan in de gebruikelijke meetkundeboeken. De grondbegrippen wilde hij afleiden uit de rechthoek en het vierkant. Hij stelde voor alle andere eigenschappen van het parallellogram en driehoek uit de rechthoek af te leiden onder gebruikmaking van aanschouwelijkheid. Belangrijk vond hij de inzichtelijke oppervlakteberekeningen door middel van omstructureringen. Dit onderwerp liet hij overigens voorafgaan aan de congruentiegevallen. Ook hechtte hij veel belang aan het zelf in concreto construeren van draadmodellen van ruimtelijke figuren.

Vanaf circa 1910 schreef hij een aantal leerboeken over vlakke meetkunde, stereometrie, analytische meetkunde, goniometrie en boldriehoeksmeting. Zijn *Leerboek der Meetkunde*, dat uit drie delen (*Kennis der figuren*, *Berekening van merkwaardige lijnen* en *Constructie Meetkunde*) bestond, is onvindbaar gebleken. Wel hebben wij zijn *Leerboek der vlakke meetkunde* uit 1920 kunnen bestuderen. We herkennen in dit boek dezelfde methodische opbouw en een aantal van de genoemde didactische principes. Dit wordt bevestigd in een geschrift over methodische vondsten (Kleefstra, 1921). Ook heeft Kleefstra het principe der zelfwerkzaamheid 'als onmisbare factor' in zijn boeken willen toepassen door op sommige plaatsen open ruimtes te laten, waar de leerlingen zelf figuren en berekeningen konden maken: 'Wat de leerling zelf uitvindt, wordt hem eigen; de figuur, die hijzelf ontwerpt wordt hem kláár' (Kleefstra, 1920, p. 6). Nadere analyse van dit boek laat echter zien dat Kleefstra zijn principes niet echt gestand bleef. Van het concrete handelen zien we geen spoor. De inleiding bevat nota bene een uiteenzetting over bepalingen, stellingen en axioma's.[24] Mogelijk dat de auteur met deze inleiding iets over het bestaan van een axiomatische opbouw heeft willen zeggen en tevens de traditio-

nalisten in het middelbaar onderwijs tevreden heeft willen stellen. We weten echter niet hoe dit in zijn eerdere meetkundeboek was gerealiseerd. Kleefstra beschouwde de wiskunde als hét leervak om logisch te leren denken, maar beval voor de praktijk de aanschouwelijke methode, gebaseerd op het tekenen, aan:

> 'het orgaan van het logisch denken ontwikkelt zich bij den mensch eerst in de laatste jeugdjaren en wordt eerst rijp na den schoolleeftijd. Het onderwijs kan er dus niet over beschikken, het onderwijs moet er op gericht zijn, de windselen van het gezond oordeel los te maken. De wiskunde is daartoe dienstig. Het methodische middel is dan aanschouwelijk **onderzoek**.' (Kleefstra, 1921, pp. 6-7)

Het boek is verder een afwisseling van aanschouwelijkheid en strengheid. In zijn totaliteit maakt het Kleefstra's opvattingen, zoals neergelegd in diens didactische uitgangspunten, niet volledig waar. Mogelijk dat de vormgeving van het boek en Kleefstra's eigen praktische onderwijs nogal verschild hebben.

Reindersma beval in 1926 nog het opstel van Kleefstra uit 1909 aan. Ook Treffers en De Moor stelden naar aanleiding van dat stuk dat Kleefstra's beschouwingen voor die tijd 'uiterst modern' aandeden (Treffers en De Moor, 1974, p. 3). Zij kenden toen echter nog niet de thans onderzochte literatuur. Eerder wees Treffers er al op dat deze pogingen, afgemeten aan de leerboeken, vrijwel geen neerslag in de onderwijspraktijk hebben gehad (Treffers, 1969, p. 40). Door onze nieuwe analyse van Kleefstra's didactische opvattingen betreffende het meetkundeonderwijs hebben wij een vollediger beeld van zijn opvattingen verkregen. Kleefstra's aanpak van het meetkundeonderwijs was niet zuiver empiristisch en kan het best als globaal-analytisch en aanschouwelijk omschreven worden. Een duidelijke samenhang met de opvattingen van de *Nieuwe Schoolbeweging* valt in zijn mathematisch-didactische werk niet te ontdekken. Ons inziens werkte hij niet met anderen samen, noch heeft hij anderen direct beïnvloed. Uit zijn *Nieuwe vondsten...* spreekt enige verbittering, dat men in onderwijsland niet heeft willen luisteren naar zijn voorstellen om studenten in de wiskunde, die zich voorbereidden op het leraarsambt, ook een pedagogische scholing te laten geven door een man uit de praktijk. Ons komt Kleefstra – in ieder geval wat het wiskundeonderwijs betreft – voor als een merkwaardige eenling rond de eeuwwisseling.[25]

Het activiteitsprincipe, enige betekenissen

In alle uitwerkingen van de Nieuwe Schoolbeweging, hoe zeer deze ook naar aard en inhoud konden verschillen, was in ieder geval één constant kenmerk aanwijsbaar: de eigen activiteit van de leerlingen. Of we nu de school van Dewey, Kerschensteiner, Parkhurst (Daltonplan), Maria Montessori, Freinet of Ligthart beschouwen, in al deze onderwijsopvattingen staat de eigen activiteit van de leerling centraal. Rousseau wordt in het algemeen als de aanjager van het activiteitsprincipe beschouwd en na hem heeft eigenlijk elke pedagoog, filosoof of onderwijsman van belang het prin-

cipe omarmd. We wijzen met name op Pestalozzi, Diesterweg, Fröbel en Versluys, wier onderwijstheorieën wij in het voorgaande hebben leren kennen. Toch kwam er in de praktijk van de negentiende-eeuwse school weinig terecht van die eigen activiteit. De redenen daartoe lagen ondermeer in de grote klassen en het klassikale systeem.

Niet alleen wordt het activiteitsprincipe op verschillende manieren opgevat, het heeft volgens verschillende onderwijsopvattingen ook een verschillende intentie. Allereerst merken we het verschil op in fysieke en mentale activiteiten. In de arbeidsschool van Kerschensteiner stond het concrete handelen (het leren van een beroep) in dienst van het formele leren. De theorie zou dienen te ontstaan uit het 'laboratoriumwerk'. Hier stonden dus zichtbare (fysieke) activiteiten en onzichtbare (mentale) activiteiten in nauwe relatie tot elkaar.

Dewey en Ligthart pasten beiden, onafhankelijk van elkaar, het principe van 'leren door doen' toe. Bij hen diende het zogenoemde 'concentratiebeginsel', waarmee verschillende disciplines en verschijnselen met elkaar in verband gebracht konden worden, als uitgangspunt van een soort totaliteitsonderwijs, dat kon leiden tot een samengaan van natuurkennis, aardrijkskunde, geschiedenis, rekenen, meten, tekenen en handenarbeid. Uiteraard met een grote nadruk op eigen arbeid en onderzoek van de kinderen. Dergelijk ervaringsleren had voornamelijk als doel de kinderen voor te bereiden op het echte leven. De vorming had meer een sociale dan een formele betekenis. Hoe sympathiek dergelijke uitgangspunten ook zijn, het is de vraag of het op grond van deze principes ook mogelijk is de meer formele vorming, zoals bijvoorbeeld in de wiskunde, veilig te stellen. Overigens was Ligthart pragmaticus genoeg om slechts een klein deel van zijn rooster (één dagdeel in de eerste drie leerjaren) hiervoor te reserveren. Voor het overige werd er in zijn school meer systematisch aan de verschillende leervakken gewerkt (Barbara de Jong, 1996).

Bij Montessori heeft het activiteitsprincipe weer een geheel ander karakter. Alle handelen met het specifieke materiaal staat in dienst van vooropgezette leeractiviteiten. De rekenleermiddelen bijvoorbeeld zijn bedoeld voor het verwerven van formeel inzicht in het getalsysteem en de daarbij behorende operaties. Toepassingen komen pas achteraf. De leeractiviteiten zijn door dit materiaal sterk voorgestructureerd. Activiteit is hier een intellectuele bezigheid, waarbij aan eigen creativiteit weinig ruimte wordt geboden. Hetzelfde kan gezegd worden van haar meetkundemateriaal (zie ook B1).

Bij projectonderwijs bepaalt de gemeenschappelijkheid (samen onderzoeken, analyseren en rapporteren) de aard van de activiteiten. In het handenarbeid- en tekenonderwijs zijn de kinderen zichtbaar actief, maar de aard van de leeractiviteiten is ons inziens toch een geheel andere dan bijvoorbeeld bij het natuurkundeonderwijs. Ten slotte zijn de leerlingen ook actief bij het individueel doorwerken van gegeven taken, zoals bij allerlei vormen van tempo- en niveaudifferentiatie het geval is.

In alle gevallen herkennen we vormen van zichtbare activiteit: de leerlingen arbeiden met de handen, schrijven, tekenen, rapporteren, voeren taken uit en zo meer. We dienen echter te beseffen dat men ook louter mentaal actief kan zijn.

Het 'leren door doen' is sinds de Nieuwe Schoolbeweging in bijna elk programma van een vernieuwingspoging in het wiskundeonderwijs een gegeven uitgangspunt. Dat het activiteitsprincipe ook voor het leren van wiskunde een belangrijke voorwaarde is, lijkt ons evident. De vraag die voor het onderhavige onderzoek van belang is, is in welke mate de activiteit op zich een bijdrage levert aan het inzicht in het betreffende leerstofonderdeel van de meetkunde. En in welke mate de activiteit de mogelijkheid biedt tot een verdere (formele) opbouw van het betreffende leerstofonderdeel, door Treffers verticale mathematisering genoemd. Kortom: welke mathematisch-didactische betekenis kunnen we aan de verschillende vormen van het activiteitsprincipe toekennen?

Meetkundeboeken met een empirisch karakter

Door Kleefstra werd slechts in theorie het concrete handelen genoemd. Wel trachtte hij de kinderen zelf te laten werken, maar in hoeverre dit ook werkelijk werd uitgevoerd, is onbekend. Er zijn nog enkele andere pogingen in die tijd ondernomen, namelijk door Hoestra (1907), Voerman (1913), Vellenga (1910), Wolda (1921) en Reindersma.

Voerman schreef zijn boek *Meten en Teekenen* naar aanleiding van deelname aan het 'collegium practicum van prof. Alois Wienecke te Stuttgart'.[26] Het boek was bedoeld voor 'de hoogste klasse van een goede lagere school, of (...) de laagste klasse van Middelbare scholen (...)'. Het diende een werkboek te zijn, dat de onderwijzer 'met de kinderen leest, terwijl ieder kind een lei of cahier en de onmisbare instrumentjes bij de hand heeft, om nauwkeurig uit te voeren, wat de tekst aangeeft' (Voerman, 1913, voorwoord). De stof is traditioneel met nadruk op constructies met de 'instrumentjes' (passer, gradenboog, liniaal, tekendriehoek). Dit bedoelde Voerman kennelijk met zelfwerkzaamheid. Bepaald geen revolutionair boek in vergelijking met de vormleerachtige Nederlandse meetkundeboeken van die tijd.

In deze tijd begon zich ook enige invloed uit het Engelse taalgebied aan te dienen. Hoestra bewerkte in 1907 de *Elementary Geometry* van Godfrey en Siddons, een boek dat Klein in zijn *Elementar Mathematik* als een 'beträchtliche Fortschritt' aanmerkte. In Engeland werd dit boek als een 'empirische' propedeuse op de theoretische cursus beschouwd. Voor Nederland moest het onder de naam *Inleiding tot de Meetkunde* onder meer dezelfde functie hebben. In het voorwoord wordt namelijk verwezen naar de aansluitingsmoeilijkheden tussen lagere school en HBS en Gymnasium. Het boek is dan ook bedoeld voor het ULO, ambachtsscholen en de laagste klasse van de HBS. Omdat veel kinderen die naar het middelbaar onderwijs gingen nog een extra jaar op de lagere school bleven, kon het boek daar een functie hebben.

Vouwen, knippen, meten, tekenen, zowel met vlakke als ruimtelijke figuren, vormen het hoofdbestanddeel van de cursus; ruime aandacht voor symmetrieën. Interessant zijn de praktische toepassingen, die vooral aan de landmeetkunde ontleend zijn. In de tweede druk is een hoofdstuk over meetkundige plaatsen toegevoegd, waarbij een niet-formele, construerende aanpak wordt gevolgd. Dit, voor die tijd verfrissende, boek vertolkt veel beter de empirische aanpak dan het 'Duitse' boek van Voerman. Het heeft twee drukken gehaald (BCC). Toch past ook dit boek bij de stijl en filosofie van de vormleeropvattingen van Versluys. Het lijkt wel of men twintig jaar na de afschaffing van de vormleer (als aanschouwelijke meetkunde) de principes hiervan opnieuw moest ontdekken. Toen lag de nadruk op de 'aanschouwelijkheid', nu meer op het 'concrete handelen'. Maar die activiteiten hadden een duidelijk voorbereidend karakter.

J. Vellenga stelt in zijn *Inleiding tot de Meetkunde* in 1910 zelfs dat hij 'de doos met vormleerlichamen weer in haar eere hersteld' had. Ook dit boek past bij de empirische aanpak, benadrukt het zelf doen, maar tevens geldt ook voor dit leerboek dat het sterke vormleertrekken heeft. Veel verder was men eigenlijk nog niet gekomen. Dit maakt opnieuw duidelijk hoe langzaam de veranderingen aansloegen, vooral als we daarbij nog bedenken dat deze boeken weinig invloed hebben gehad. Dat geldt ook voor het werk van Wolda, maar dit behoeft om zijn bijzondere aard een nadere bespreking.

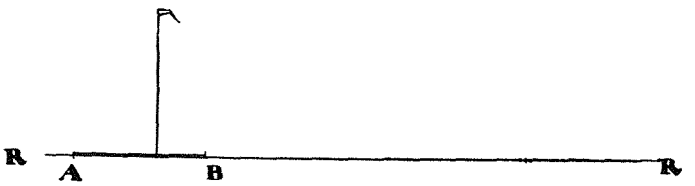
Een bijzonder boek van Wolda

De meetkundecursus van G. Wolda is het eerste leerboek voor het voortgezet onderwijs dat volledig breekt met de euclidische traditie.[27] 'De wiskunde dreigt haar goeden naam te verliezen en we gelooven, dat zijn zuiver klassieke methode daarvan de oorzaak is' (Wolda, 1921, p. 3). Het heeft geen zin de leerling, aldus Wolda, streng wetenschappelijke bewijzen, 'die naar zijn inzicht absoluut geen bewijs van noode hebben', op te dringen. Wolda wil de leerling zelf laten exploreren door proberen en tekenen, waarbij hij zijn voorwetenschappelijke kennis kan uitbuiten. De leerling dient zelf tot een analyse van een gesteld probleem te komen om het daarmee scherp tot bewustzijn te brengen. Pas indien hier aan voldaan is 'kan hij iets gaan voelen voor de arbeid, die noodig was om tot strengere definities te komen, die het einde – niet het begin – der wetenschap zijn' (Wolda, 1921, p. 4). Voor dit exploreren gebruikte Wolda problemen die niet alleen tot de meetkunde behoren. Ze hebben vaak een realistisch karakter en zijn ontleend aan de natuurkunde, de mechanica, de aardrijkskunde of de kosmografie. Enkele voorbeelden staan afgebeeld in figuur B2.2.

De totale methode *Meetkunde (Theorie en Vraagstukken)* bestaat uit drie delen. I: Congruentie; II: Evenredigheid en berekeningen; III: De cirkel. Bij deel I hoort een leidraad, die niet achterhaald is. De titels van de boeken moeten voor die tijd misleidend zijn geweest. Het eerste deel gaat ternauwernood over congruentie in de

§ 33. 1. Precies in het midden van een vierkant, donker vertrek, staat een brandende kaars, en daarom heen beweegt zich — op dezelfde hoogte als de vlam — een vlieg in een cirkelvormige baan. Wat is de weg, dien haar schaduw op de wanden beschrijft ?

§ 44. 1. A B is een schip, dat zich over de rivier R R in de richting van het pijltje voortbeweegt met een eenparige snelheid .——a——. per sec. Een jongen klimt met eenparige snelheid .–b–. per sec. in den mast. Construeer den weg, dien de jongen door de ruimte beschrijft.



Schets ongeveer den weg, als de jongen sneller gaat klimmen ; of als het schip sneller gaat. Ook die, welke hij beschrijft als hij halverwege 3 seconden blijft rusten. Welken weg beschrijft de jongen als hij in 't geheel niet klimt, of als hij wel klimt maar het schip stil ligt ?

figuur B2.2: Opgaven uit Wolda's meetkundecursus (1921)

traditionele betekenis. Het is een brede oriëntatie op een aantal meetkundige begrippen en relaties: regelmaat, symmetrie, draaien, verschuiven, spiegelen en verzamelingen (meetkundige plaatsen). Nergens wordt het indirecte bewijs toegepast. Tekenen en construeren zijn belangrijke activiteiten. Bewijzen steunen op de constructies. Om dit accent op de constructie van een figuur nog eens te benadrukken, wordt niet gesproken over het 'gegeven', maar over 'wat gedaan is'. Pas tegen het einde van het eerste deel wordt de eis dat een constructie vooraf dient te gaan aan het bewijs losgelaten. Ook het begrip evenwijdigheid ontstaat uit een praktische constructie (tekendriehoek langs een liniaal verschuiven), waaruit op een vanzelfsprekende manier de bekende hoekstellingen voortkomen.

In deel II worden gelijkvormigheid, oppervlakte en berekeningen 'streng' behandeld. Echter, voorafgegaan door een meer 'vormleerachtige' inleiding, die bedoeld is om 'de wiskundige intuïtie te ontwikkelen'. Daarbij wordt gebruik gemaakt van praktische vergrotingen en verkleiningen van figuren en van landmeetkundige problemen, later gevolgd door de vermenigvuldigingstransformaties. Zoals de titel van

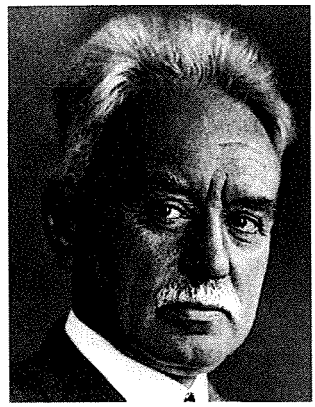
dit deel aangeeft, komen in het laatste stuk van dit deel de bekende traditionele berekeningen tot en met de stelling van Stewart aan de orde.

Deel III is het meest formele gedeelte van de methode. Nu pas komt bijvoorbeeld het bewijs van de concurrentie van de bissectrices van een driehoek aan de orde, maar dan ook meteen heel algemeen in verband met de in- en aangeschreven cirkels. Merkwaardig grote aandacht bestaat voor de constructie van lijnstukken als 'algebraïsche vormen', een typisch onderwerp van het meetkundeonderwijs uit die tijd.

Er is geen scherpe scheiding tussen theorie en vraagstukken. Soms zijn de vraagstukken opzettelijk onvolledig, waardoor er meerdere oplossingen mogelijk zijn. Het aantal vraagstukken per onderwerp is beperkt, er komen steeds weer andere onderwerpen aan de orde. Pas aan het eind van de gehele cursus volgt een overzicht.

We hebben in het werk van Wolda een totaal afwijkend, zeer origineel meetkundeleerboek gevonden, dat zijn tijd ver vooruit was. Het kende slechts één druk (BCC), waaruit blijkt dat ook dit boek voor de onderwijsvernieuwing weinig praktische betekenis heeft gehad. Zelfs vragen wij ons af of andere didactici als Reindersma en mevrouw Ehrenfest het werk wel gekend hebben.

Reindersma als onderwijsman



Willem Reindersma

Reindersma is alweer zo'n voorbeeld van een onderwijsman pur sang. Net als de meeste andere hoofdpersonen uit deze historie, kwam ook hij voort uit het lager onderwijs. Hij wist zich door zelfstudie verder te ontwikkelen tot een wis- en natuurkundeleraar, die ook de didactiek ter harte ging.[28] Samen met de pedagoog R. Casimir heeft hij zich ingespannen voor het lyceum als nieuwe schoolsoort. Van het Nederlandsch Lyceum te Den Haag, dat in 1909 startte, was Casimir de eerste rector en Reindersma de eerste directeur van de HBS-afdeling.[29]

Uit het boek van Casimir, dat hij ter gelegenheid van het 25-jarig jubileum van het Nederlandsch Lyceum schreef, krijgen wij al enige indruk van Reindersma's veelzijdige kwaliteiten. In 1913 werd de natuurkundige Paul Ehrenfest door de Groningse hoogleraar Heymans bij Casimir geïntroduceerd.[30] Hierdoor kwam Rein-dersma ook met Ehrenfests vrouw Tatiana Afanassjewa in contact. De Ehrenfesten zouden door het zogenoemde didactisch wiskundig colloquium van mevrouw Ehrenfest een belangrijke invloed uitoefenen op de didactische vernieuwingen in de exacte vakken op het Nederlandsch Lyceum. In B3 gaan we nader op mevrouw Ehrenfest in.

Tot beter begrip van Reindersma als vernieuwend didacticus, besteden we eerst enige aandacht aan zijn inspanningen op het gebied van het natuurkundeonderwijs.

Reindersma moet gecharmeerd geweest zijn van Kerschensteiners ideeën over een technisch gymnasium. Zo meende hij, dat er al in de eerste klas van de middelbare school natuurkunde gegeven moest worden, en wel als een experimenteel vak. Dit werd ook gerealiseerd op zijn school. Volgens de klassieke opvatting van empirisch onderzoek moest naar aanleiding van een experiment een vermoeden over een natuurkundig verschijnsel geformuleerd worden, dat daarna door redenatie geverifieerd diende te worden. Het was een novum in die tijd om op zo vroege leeftijd al met natuurkunde te starten en zeker op de voorgestelde wijze.

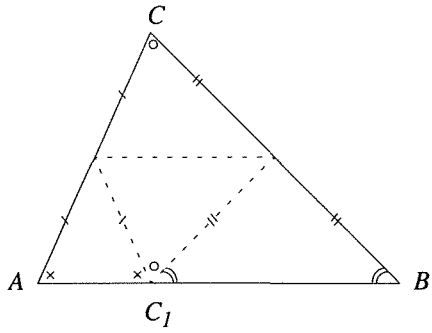
Naast de oude talen, beschouwde Reindersma ook de bètavakken als een probaat middel tot logisch leren denken. Maar tevens wees hij op het grote praktische nut van de natuurkunde, niet alleen voor degenen die later een natuurwetenschappelijk of technisch beroep zouden kiezen. Zelfs meende hij dat het natuurwetenschappelijke onderwijs ook een bijdrage zou kunnen leveren aan de 'zedelijke en aesthetische opvoeding'. Dit alles had hij in 1915 neergelegd in een artikel in *School en Leven*, waarin hij echter tevens wijst op de onzekerheid van de 'overdracht' (transfer), die de vormende waarde zou inhouden (Reindersma, 1915).[31] Zijn opvattingen werden ook uitgewerkt in een bekend natuurkundeleerboek. Tevens werd onder zijn voorzitterschap – in opdracht van de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging – een tweedelige handleiding voor de inrichting van het natuurkundepracticum op de middelbare school uitgebracht. Hoezeer Casimir Reindersma hierin waardeerde, blijkt uit de ruime aandacht die hij aan hem besteedde in het gedenkboek uit 1934. Verhelderend zijn Casimirs opmerkingen over de accentwijzigingen in de didactiek: 'Dat zelfwerkzaamheid iets meer moet beteekenen dan lichamelijke arbeid, dat werkelijke innerlijke activiteit, het zoeken van relaties en het oplossen van problemen de wezenlijke arbeid is, is duidelijk. (...) In de kwarteeuw, die het Lyceum bestaat, is het accent van de aanschouwelijkheid verschoven naar de activeering' (Casimir, 1934, p. 220).

Reindersma's meetkundecursus

In 1912 verschijnt het eerste deel van Reindersma's meetkundecursus.[32] De leerstof wijkt niet wezenlijk af van wat in een traditioneel planimetrieboek voor de eerste klasse van de middelbare school aan de orde komt. De didactische aanpak is echter een totaal andere dan die van de leerboeken in de euclidische traditie. Het is een empirische inleiding in de wereld der vlakke figuren, waarbij niet alleen de figuren worden verkend, maar ook al eenvoudige eigenschappen. Er worden geen definities gegeven, maar er wordt uitgegaan van begrippen, zoals die uit het leven van alledag bekend geacht kunnen worden (loodrecht, evenwijdig en dergelijke), soms met een nadere aanschouwelijke toelichting. Wel blijven de eigenschappen beperkt tot de bekende stellingen van de gebruikelijke aanvankelijke meetkundecursus.

Er wordt veel gebruik gemaakt van schatten, meten, vouwen, knippen, plakken, tekenen (ook op doorzichtig papier), vloeien (symmetrie), schuiven, draaien en con-

strueren om eigenschappen te ontdekken en opdrachten uit te voeren. Die opdrachten (vraagstukken) staan in het teken van het vinden van de theorie. Het vinden van de eigenschap dat de basishoeken van een gelijkbenige driehoek gelijk zijn, wordt zowel door meten vastgesteld als door vouwen om de symmetrieas. Daarna kan dit, onder gebruikmaking van het vouwen om de middenparallel, toegepast worden bij het bewijs voor de stelling dat de drie hoeken van een driehoek samen 180° zijn (zie figuur B2.3).



figuur B2.3: Vouwbewijs voor de som van de hoeken van een driehoek

Knippen, plakken en verschuiven komt ook te pas bij de oppervlaktebepalingen door middel van omstructureringen. Centraal staat daarbij de 'afschuifstelling', die een lange traditie kent in het meetkundeonderwijs. Ook bij congruentie wordt van empirische methoden (knippen, plakken) gebruik gemaakt en bij de spiegelcongruentie van vloeipapier en vouwen. Congruentie wordt bijna niet gebruikt om eigenschappen af te leiden. Daarentegen wordt het principe van de lijnsymmetrie zoveel mogelijk uitgebuit. Met name voor de constructies die gebaseerd zijn op de eigenschappen van de ruit. Hieraan is de cirkel voorafgegaan als meetkundige plaats. De cursus eindigt met de oppervlakteformule van de cirkel door middel van de bekende sectorverknipping en benadering door middel van een rechthoek. Het slot wordt gevormd met een eenvoudig legpuzzelbewijs van Pythagoras. Het boek is in eenvoudige taal gesteld. Er wordt van de leerlingen verwacht dat ze hun vondsten exact formuleren.

Dit boek had een tweeledig doel: het wilde een systematische inleiding geven voor die schooltypen (MULO en MMS), die een overzicht van de voornaamste waarheden der vlakke meetkunde behoefden, zonder dat aan de bewijzen een of andere graad van gestrengheid werd gesteld. Maar tevens beoogde het boek een propedeuse te zijn op een meer formele aanpak.

Dat laatste gebeurt in het tweede deel van Reindersma's leergang. Er wordt dan vrijwel van voren af aan gestart (concentrische leergang), maar nu formeler. Uitgaande van dertien axioma's wordt het gebruikelijke stellingencomplex opgebouwd, waarbij echter opgemerkt dient te worden, dat de schrijver alle moeite doet om de

misverstanden, die een dergelijke inleidingsprocedure met zich mee kan brengen, uit de weg te ruimen en wel door de bewijzen in de eerste hoofdstukken van dit tweede deel in een onderhoudende, weinig schematische stijl weer te geven.[33]

Reindersma heeft met het eerste deel van zijn vlakke meetkundecursus (er waren in totaal drie delen) voor die tijd een werkelijke bijdrage geleverd aan de vernieuwing van het aanvankelijk meetkundeonderwijs.[34] Of zijn empirische propedeuse ook werkelijk landelijke bekendheid heeft gekregen, is een vraag. Vanaf het begin der jaren twintig heet zijn meetkundecursus *Beknopt leerboek der vlakke meetkunde*. In deze uitgave heeft hij de empirische inleiding achterwege gelaten, maar in het voorbericht beveelt hij zijn vroegere inleidende cursus wel aan. Zijn boeken zijn meer dan veertig jaar meegegaan.

Nadere analyse leert dat Reindersma's inleidende cursus veel overeenkomsten met de vroegere vormleeraanpak van Versluys vertoont, zoals we ook bij het werk van Hoestra opmerkten. Zowel Versluys als Reindersma kozen voor een informele start van de meetkunde, die gevolgd diende te worden door een meer systematische cursus. Beiden hebben dit ook praktisch uitgewerkt. Versluys wilde echter reeds op de lagere school beginnen en heeft getracht ook praktische toepassingen in zijn werk te vlechten, die bij Reindersma ontbreken. Versluys begon ruimtelijk, Reindersma bepaalde zich weer tot de oude volgorde: eerst vlak, daarna ruimtelijk. Hoewel ook Versluys het praktische handelen benadrukte, werd zijn werk toch bestempeld als 'aanschouwelijk', iets waar hij zelf niet het minst aan heeft bijgedragen. Reindersma gebruikt de term 'aanschouwelijk' niet of nauwelijks, bij hem staat het 'empirische aspect' op de voorgrond. In die zin zijn deze beide didactici exponenten van hun tijd: de negentiende eeuw met zijn aanschouwing, het eerste kwart van de twintigste eeuw met het 'leren door doen'.

Reindersma als theoreticus

Dat ook Reindersma een product van zijn tijd was, moge blijken uit zijn didactische geloofsbrief, die hij in 1926 afgaf. Toen hield hij een rede voor de vereniging van leraren in de wis- en natuurkunde aan gymnasia en lycea (Liwenagel) over het inleidend onderwijs in de meetkunde. Uit deze voordracht blijkt dat Reindersma redelijk op de hoogte was van de internationale en nationale ontwikkelingen aan het begin van deze eeuw, zowel betreffende het wiskundeonderwijs zelf als de meer algemeen onderwijskundige vernieuwingen. Net als in zijn artikel over het natuurkundeonderwijs besteedde hij ook nu weer ruime aandacht aan het 'leren logisch denken' en aan het fenomeen van de daarbij vaak veronderstelde 'transfer', waarover hij nu een ietwat ander standpunt inneemt dan tien jaar eerder:

> 'Wanneer nu dus de kwestie van de overdracht is 'veilig gesteld', kunnen we dus blijven gelooven in de *vormende waarde* der wiskunde. En als eerste en voornaamste waarde mogen we blijven beschouwen: de *ontwikkeling van het logische denken*. Tusschen haakjes zij opgemerkt (...) dat de praktische waarde van de wiskunde meer naar

voren behoort geschoven te worden dan gewoonlijk gebeurt.'
(Reindersma, 1926, p. 17)

Reindersma baseerde de 'veiligstelling' onder meer op een rapport van J.W.A. Young uit 1918 betreffende een aantal psychologische experimenten omtrent het bestaan van 'transfer of training'. Het resultaat was dat 'in de oorspronkelijke publicatie's naar de transfer of training niets gevonden wordt, wat erop zou wijzen, dat experimenteel psychologisch het niet-bestaan van de overdracht zou zijn bewezen' (Reindersma, 1926, p. 15). Op grond van deze informatie wilde Reindersma dus 'blijven gelooven', wat wij voor een mathematicus toch wel wat vreemd vinden. Kennelijk was Reindersma op dat moment nog niet op de hoogte van het werk van Thorndike uit 1924, die de vormende waarde van de wiskunde juist weer in twijfel trok: 'The notion that reasoning ability is improved by the study of mathematics has been pretty much discredited. An investigation of 13500 high school seniors (Thorndike, 1924) found that those who had taken courses in mathematics and language tested somewhat higher in reasoning ability than those who had taken cooking and stenography. The difference was slight, however, and was readily explained by the fact that the students who chose the more abstract courses were brighter to begin with' (Hilgard en Atkinson, 1976, pp. 343-344).

Hoe het zij, voor Reindersma was de vormende waarde van de wiskunde, net als eigenlijk voor alle didactici van die tijd, een bijna heilig gegeven. Wat dat betreft leek er nog weinig veranderd ten opzichte van de ideeën zoals die bij de negentiende eeuwse didactici leefden. In de praktijk van het onderwijs ging het er vooral om of en in hoeverre het principe der gestrengheid in het aanvangsonderwijs verlaten mocht worden ten behoeve van een betere didactiek. Op deze strijd tussen de 'practici' en 'logici' gaan we in B3 nader in. In ieder geval zal nu reeds duidelijk zijn dat Reindersma tot het kamp der practici gerekend diende te worden. Voor het denken en leren denken verwijst Reindersma naar Dewey en haalt ongeveer dezelfde stadia aan als hij in zijn eerdere artikel over het natuurkundeonderwijs deed:

'– het probleem wordt aangevoeld (probleembewustzijn)
– het probleem wordt nader gepreciseerd (probleemformulering)
– er volgt op intuïtieve wijze een mogelijke verklaring (hypothese)
– de hypothese wordt kritisch onderzocht
– ten slotte volgt de conclusie' (Dewey, 1909, p. 72)

Reindersma legt nu meer nadruk op het element van de intuïtie, hetgeen mogelijk weer de invloed van Kerschensteiner (1920) is, die zeer hartenswaardige opmerkingen over het leren denken heeft gemaakt. Ten slotte gaat zijn pleidooi weer in de richting van een aanpak waarbij 'de methode, de gestrengheid met de ontwikkeling van den leerling hoort te groeien' (het genetische principe), zoals hijzelf in zijn meetkundeleergang had neergelegd. Een sterk argument dat hij daarbij aanvoert, zijn de statistische gegevens over het aantal onvoldoendes voor wiskunde in de eer-

ste klassen der gymnasia in Nederland over zes cursusjaren, waaruit bleek, 'dat minstens 1/3 der leerlingen niet in staat is ons wiskundig onderwijs in de 1ste klasse te volgen' (Reindersma, 1926, p. 24).

Hij voegt nog een flinke literatuurlijst aan zijn lezing toe, die ons inziens voor de toehoorders en lezers (hoeveel zouden het er geweest zijn?) van buitengewoon nut geweest kan zijn. In hoeverre zijn pleidooi ook direct effect heeft gehad op de verdere ontwikkelingen, is moeilijk vast te stellen. Wel menen wij in de persoon van Reindersma een belangrijke schakel gevonden te hebben in de ontwikkelingen van de vormleer naar een meer informele aanpak van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Mogelijk dat door zijn toedoen het pad voor verdere ontwikkelingen enigszins gebaand werd.

Nawerking van de vormleer in het lager onderwijs

De pedagoog H. Douma verdeelde in zijn boek *Het Leerplan* de leerstof voor het lager onderwijs in drie groepen:

'– het *zaak*-gebied, alles wat betrekking heeft op sociale en empirische ervaring (geschiedenis, aardrijkskunde en natuurkennis)
– het gebied der *vormen* (rekenen, vormleer, tekenen, en handenarbeid) en
– hiertussen als essentiële verbinding het *taal-onderwijs* (spreken, spellen, grammatica, lezen en schrijven).' (Douma, 1899, pp. 108-109).

Deze indeling toont de invloed van het neo-herbartiaanse 'concentratie'-beginsel en van het toen opkomende 'zaak-onderwijs' duidelijk aan. Men trachtte de leerstof uit de verschillende schoolvakken tot een meer organische eenheid te smeden. Tevens werd gestreefd naar een groter realiteitsgehalte van het onderwijs door dit te verbinden met ervaringen die buiten de school werden opgedaan. Douma geeft van zijn indeling ook een globale uitwerking, waarbij hij ook nog een kans voor de vormleer ziet, althans bij het rekenen of het tekenen: 'Dat we niet afzonderlijk over het onderwijs in *vormleer* spreken, komt allerminst hiervan, dat dit "leervak" niet meer telt (...) wij hebben nu gelegenheid alles, wat er goeds school in dit leervak, "onder te brengen" in hoofdzaak bij een der vakken; teekenen en rekenen' (Douma, 1899, p. 134).

En inderdaad, in het meer gedetailleerde leerplan wordt op verschillende plaatsen aandacht aan meetkundige figuren en activiteiten besteed, niet alleen bij de genoemde vakken, maar ook en vooral bij de handenarbeid. Ook bij de kennis der natuur en de aardrijkskunde zien we activiteiten die onder een elementaire meetkunde gerangschikt zouden kunnen worden. Maar in zijn *Methodiek der Leervakken* wijdt Douma in 1911 geen woord meer aan de vormleer. Uit zijn bespreking van een aantal rekenmethoden uit die tijd blijkt dat er alleen enig meetkundig rekenen in de hoogste klassen voorkomt. In het algemeen wordt wel iets over de 'leer der vormen' gezegd in verband met het tekenonderwijs. Ook worden de verschillende methoden voor het

aparte aanschouwingsonderwijs in de laagste klassen besproken. Een bekend voorbeeld was de methode van Rauwerda, die van het leren waarnemen een apart gesystematiseerd schoolvak wilde maken. Samen met L.A. den Hollander had Douma, onder het pseudoniem Critas Jr., zich in 1907 al tegen de overdreven vormen van dit aanschouwingsonderwijs verzet: 'Het stelselmatige aanschouwingsonderwijs heeft op vele scholen reeds afgedaan. De ondervinding heeft menigeen reeds geleerd, dat het dwaasheid is in de aanvangsklasse een paar maanden zoek te brengen met de zoogenaamde vooroefeningen voor het aanvankelijk leesonderwijs' (Critas Jr., 1907, pp. 20-21). Het geschrift waaruit geciteerd is, was überhaupt een pleidooi voor wat we tegenwoordig een 'no nonsense'-aanpak zouden noemen, waarmee een zekere anti-pedagogiek uitgedragen werd: een beweging waarvan onder meer Theo Thijssen de woordvoerder was. Wel meende Critas dat in een onderwijs, dat op het praktische leven voorbereidt, aandacht diende te zijn voor de oude vormleer:

> 'De vormleer moest van de baan maar werd door een achterdeurtje weer binnengehaald. Zijn vierkanten, rechthoeken, kuben en balken soms voor den ambachtsman van meer belang dan driehoeken of cirkels? Waarom toch het een wel en het ander niet onderwezen? Ieder ambachtsman heeft aan alles behoefte. Dat kan tenminste voor den een of ander nuttige, noodige kennis worden; de denksommetjes zijn het voor geen mensch.' (Critas Jr., 1907, p. 12)

Beschouwen we enkele van de meest gebruikte rekenmethoden uit het begin van de twintigste eeuw (Douma, Boswijk en Zijlstra, Versluys en Van Pelt), dan zien we opnieuw dat de vormleer of aanschouwelijke meetkunde binnen het rekenen heeft afgedaan. Wel komt in deze methoden het berekenen van oppervlakte en inhoud van enkele eenvoudige figuren en lichamen aan de orde. De oefeningen staan echter in het teken van het leren beheersen van het metriek stelsel. Of de aparte boekjes over meetkundig rekenen van Versluys en Zijlstra (zie A16) ook nog gebruikt werden, weten we niet. Van Pelt besteedt in zijn methode de meeste aandacht aan meetkunde, waarbij hij zelfs de verhouding van oppervlakten van gelijkvormige figuren, c.q. voor inhouden van gelijkvormige ruimtefiguren behandelt. Critas geeft een aparte handleiding voor het metriek stelsel uit. Naast de vormleerachtige meetkundeboeken, zoals genoemd in A16, hebben we nog enkele van dit soort boeken gevonden van Van Pelt (1912) en Mout (1914), die waarschijnlijk dienst deden bij het vervolg- en herhalingsonderwijs.

Wanneer in 1918 Bouman en Van Zelm hun rekenmethode laten verschijnen, welke zij lanceren als een 'proeve van toegepaste logica', wordt het rekenonderwijs meer en meer teruggeworpen op het kale rekenen en het mechanisch aanleren van rekenvaardigheden en trucmatige toepassingen. In deze methode, die lange tijd grote invloed op het onderwijs zou krijgen, is het kleine beetje meetkunde dat nog over was gebleven als meetkundig rekenen, geheel en al verworden tot puur getalsmatig werken met standaardvraagstukjes over omtrek en oppervlakte van de rechthoek.

Toch verscheen ook in deze tijd nog een artikel van K. ter Beeke (1921), die voor een praktische en aanschouwelijke aanpak van het reken- en wiskundeonderwijs pleitte, maar dit soort geschriften had weinig invloed op de dagelijkse gang van zaken in het onderwijs. Ze werden misschien gelezen door de voortrekkers als Ligthart en Poot, aan wie we nu enige aandacht besteden.

De meetkundige handenarbeid van Poot

Op de school van Jan Ligthart ondervond het zaakonderwijs een serieuze belangstelling.[35] In gebruik was daar de methode van P. Poot: *Handelend Aanschouwen*, die als ondertitel 'Methode voor het onderwijs in handenarbeid, meetkundig rekenen en teekenen in alle klassen der lagere school' (1893) had.[36] Poot zag de handenarbeid niet als doel op zich, maar 'als machtig middel ter veraanschouwelijking der andere leervakken, als de incarnatie der zelfwerkzaamheid, der handelende aanschouwing. (...) Een kind, dat bezig is eigenhandig iets te vervaardigen, geeft zichzelf daarbij beter aanschouwingsonderwijs, dan het mooiste "plaatvertellen" kan verschaffen. Het past, meet, schat, vergelijkt (...) Deze oefeningen zijn tevens de eerste pogingen om de teekening te leren gebruiken als voertuig der gedachte' (Poot, 1893, pp. 8-9). Dat deze methode ook wilde bijdragen aan een praktisch meetkundeonderwijs, moge blijken uit het volgende citaat:

> 'Met deze methode hoop ik de leerlingen steeds handelend en langs practischen weg te brengen tot de kennis der eenvoudigste meetkundige eigenschappen, en terwijl het onderwerp stof geeft voor meer doelmatige rekenopgaven dan men nu veelal aan kinderen pleegt voor te leggen, te komen tot het opmeten van afstanden en hoogten, het berekenen en teekenen van doorsneden, het bepalen van inhouden en oppervlakten, het ontwikkelen van oppervlakken, het vervaardigen van teekeningen naar verschillende gegevens, enz.' (Poot, 1893, pp. 11)

We zouden ons kunnen voorstellen dat de voorstanders van de oude vormleer of aanschouwelijke meetkunde ingenomen geweest zouden zijn met Poots opvatting van de handenarbeid, die in dienst van de meetkunde gesteld werd. Bestudering van de methode maakt duidelijk dat de auteur zijn doelstellingen serieus neemt en inderdaad de verschillende activiteiten steeds afsluit met een bespreking van de meetkundige eigenschappen, die impliciet aan de orde zijn geweest. Stelselmatig komen alle bekende elementaire meetkundige eigenschappen, zoals we die bij de vormleer hebben leren kennen, aan de orde. De methode maakt gebruik van vouwen, knippen, plakken, omstructureren, meten en tekenen. In het feitelijke handenarbeidwerk komen de esthetische en de praktische waarden naar voren. De twee vraagstukkenboekjes bij de methode bevatten een grote reeks eenvoudige meetkundevraagstukken.

Het realisme van Van der Ley

Een bijzondere uitwerking van het activiteitsprincipe, waarin ook veel meetkunde voorkomt, is door P.H. van der Ley (1841-1927) uitgevoerd. Deze was vanaf de oprichting aan de Rijkskweekschool te Haarlem verbonden, eerst als onderwijzer aan de leerschool, daarna als leraar in de wis-en natuurkunde, plantkunde en dierkunde en ten slotte vanaf 1888 als directeur. In 1884 liet Van der Ley een volledige methode voor het onderwijs in de 'kennis der levenlooze natuur' verschijnen. In 1896 werkte hij deze methode om tot een handleiding voor 'het meten, wegen en de natuurkunde'. Bekijken we het leerplan in figuur B2.4, waarmee dit boek begint, dan valt direct het realistische, bijna revolutionaire karakter op.

Dit leerplan staat in het teken van het 'volle leven', zoals dat toen door vernieuwers als Ligthart genoemd werd. Als uitgangspunt dienden de materialen en activiteiten van Fröbel. In de nadere uitwerking is vooral in de aanvangsjaren het meetkundige element sterk aanwezig, met nadruk op het concrete handelen, tekenen en aanschouwen. Heel ver gaat deze methode in op het (natuurkundige) meten, wat voor die tijd zeer progressief geweest moet zijn. Volgens Barbara de Jong (1996) hebben Van der Ley's opvattingen vooral op de school van Ligthart hun uitwerking gekend.

Hoewel de methoden van Poot en van Van der Ley waarschijnlijk slechts een geringe directe betekenis hebben gehad voor de toenmalige ontwikkeling van het lager onderwijs, zijn ze toch een goede afspiegeling van wat men onder het 'leren door doen' wilde verstaan.

Het vervolg

Het principe 'leren door doen', opgevat als concreet handelen en experimenteren, heeft in het eerste kwart van de negentiende eeuw in het wiskundeonderwijs geen voet aan de grond gekregen. Uit het vervolg zal blijken dat men in het wiskundeonderwijs het 'knippen en plakken', om het concrete activiteitsprincipe zo maar eens te omschrijven, altijd met enige minachting is blijven beschouwen. Maar de aard van de discussies over het aanvankelijk meetkundeonderwijs zou in de nu volgende periode nog complexer worden, daar nu ook vragen over de doelstellingen en de betekenis van de psychologie in het geding kwamen. Het begrip 'intuïtie' begon zich te manifesteren en dit veroorzaakte een diepgaande discussie tussen twee belangrijke denkers over het meetkundeonderwijs: mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis. Rond deze figuren is het volgende hoofdstuk gecentreerd.

(Samenvattende conclusies van B2: zie B6.)

LEERPLAN

voor eene lagere school van zes leerjaren.

VERDEELING DER UREN.

Eerste leerjaar.

Arbeid: bouwen	2	halve	uren	per	week
papier vouwen en scheuren	4	„	„	„	„
kleiarbeid	2	„	„	„	„
teekenen en schrijven	4	„	„	„	„
gymnastiek en spel	6	„	„	„	„
samen per week	18	halve	uren		
Kennis der omgeving: (voorwerpen, de woonplaats, planten, dieren, bedrijven der menschen)	8	„	„		
Tellen en *meten:*	8	„	„		
Taal (lezen, vertellen, zingen)	18	„	„		
In het geheel per week	52	halve	uren.		

Tweede leerjaar.

Arbeid: vouwen, plakken, knippen of snijden	4	halve	uren
kleiarbeid	4	„	„
teekenen en schrijven	6	„	„
gymnastiek en spel	6	„	„
samen per week	20	halve	uren.
Per transport	20	halve	uren.
Kennis der omgeving: (voorwerpen, de plaats der inwoning zelve, planten, dieren, bedrijven der menschen)	8	„	„
Rekenen en *meten:*	8	„	„
Taal (lezen, vertellen, zingen)	16	„	„
In het geheel per week	52	halve	uren.

Derde en vierde leerjaar.

Arbeid: kartonarbeid	per	week	2	uren	
kleiarbeid	„	„	1	„	
teekenen	„	„	2	„	
gymnastiek en spel	„	„	2	„	
samen per week			7	uren	
Zaakonderwijs: (aardrijkskunde, geschiedenis, planten, dieren, bedrijven der menschen, levenlooze natuur)	per	week	7	uren	
Meten en *rekenen*	„	„	4	„	
Taal (lezen, stijl, taal, vertellen, schrijven, zingen)	„	„	8	„	
In het geheel per week			26	uren.	

Vijfde en zesde leerjaar.

Kartonarbeid	per	week	1	uur
kleiarbeid	„	„	1	„
teekenen	„	„	3	uren
gymnastiek en spel	„	„	2	„
tuinarbeid, plantkunde, dierkunde, bedrijven der menschen	„	„	3	„
kennis der levenlooze natuur	„	„	2	„
aardrijkskunde	„	„	2	„
geschiedenis	„	„	2	„
meten en rekenen	„	„	6	„
lezen, taal, stijl, schrijven en zingen	„	„	10	„
In het geheel per week			32	uren.

figuur B2.4: Leerplan van Van der Ley (1896)

B3 Intuïtief of logisch-deductief?
de tijd van Dijksterhuis en mevrouw Ehrenfest (1920-1945)

Inleiding

In dit hoofdstuk stellen we het ontstaan van de zogenoemde 'intuïtieve stroming' in het aanvankelijk meetkundeonderwijs aan de orde. Hieraan is de naam van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa (1876-1964) – verder te noemen mevrouw Ehrenfest – verbonden. Deze intuïtieve aanpak was aanvankelijk van geringe praktische betekenis voor het onderwijs, maar de verschijning lokte in de jaren twintig een belangrijke discussie uit tussen mevrouw Ehrenfest en Eduard Jan Dijksterhuis (1892-1965), die zich bij de klassieke 'logisch-deductieve' inleiding wilde houden. Dit dispuut is van groot belang geweest voor de ontwikkeling van de vakdidactiek en het ontstaan van het vakdidactische blad *Euclides*.

De kern van dit hoofdstuk wordt dan ook gevormd door de 'strijd' tussen mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis over een 'intuïtieve' of een 'logisch-deductieve' inleiding van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Deze kwestie is al vaker beschreven, en wel in chronologische volgorde door Treffers (1969), Van Berkel (1992), De Moor (1993), Van Berkel (1996) en Klomp (1997). Van Berkel heeft dit dispuut vooral vanuit de persoon van Dijksterhuis en diens opvattingen als wetenschapper belicht. Klomp heeft de kwestie geanalyseerd in het perspectief van de maatschappelijke democratisering, waaraan ook de grote natuurwetenschappelijke ontwikkelingen in het interbellum hebben bijgedragen. Treffers en De Moor hebben zich in hun analyses steeds bepaald tot de ontwikkeling van de didactiek van het meetkundeonderwijs. Dit laatste staat ook in dit hoofdstuk weer centraal.

Het lager onderwijs speelt in dit hoofdstuk geen rol. We moeten echter bedenken dat de kern van mevrouw Ehrenfests werk in feite voor leerlingen van tien tot twaalf jaar bedoeld was. Dit is een van de redenen waarom juist haar werk in onze gehele studie een voorname plaats inneemt.

Ontstaan van drie stromingen

We hebben in B2 gezien hoe Reindersma het 'leren door doen' in het aanvankelijk meetkundeonderwijs heeft willen integreren. Reindersma bleef met zijn empirische aanpak echter wel uitgaan van de traditionele meetkundestof voor de eerste klas van het voortgezet onderwijs. Hoewel ook Wolda bij de traditionele stof bleef, vertonen zijn pogingen impliciet de trekken van een meer intuïtieve aanpak. Dit komt tot uiting doordat hij aansluit bij de natuurlijke meetkundige begrippen en verschijnselen in de ons omringende ruimte. Mevrouw Ehrenfest gebruikte later de term intuïtief voor een propedeutische cursus en bracht op eigen wijze de intuïtieve aanpak in enkele geschriften officieel naar buiten. Hierop gaan we in het volgende nader in. Zowel de empirische als de intuïtieve aanpak was een reactie op de bestaande traditio-

nele stroming, waarin men de meetkunde bleef opvatten in de zin van het bouwwerk van Euclides en die wij als de logisch-deductieve stroming omschrijven. Er zijn dus voor die tijd in Nederland globaal drie stromingen te onderscheiden:

- *logisch-deductieve aanpak*
  hierbij wordt uitgegaan van de traditionele stof; variërend van schijn-axiomatische, (half) aanschouwelijke werkwijze tot een streng-axiomatische, streng-logisch-deductieve opzet
- *empirische aanpak*
  ook hier wordt uitgegaan van de traditionele stof; aandacht voor concreet handelen en experimenteren; uiteindelijk al of niet axiomatische opzet, leidend tot logisch-deductieve opzet
- *intuïtieve aanpak*
  er wordt uitgegaan van de realiteit; informele propedeuse als inleiding; geleidelijke overgang naar formeel logische opzet.

Deze ideaal-typische indeling is gebaseerd op enerzijds de verantwoording en uitvoering van de schoolboeken, anderzijds op de opvattingen van de vernieuwers van die tijd. De eerste categorie bepaalde eigenlijk het feitelijke onderwijs en wordt door ons soms ook wel *traditioneel* genoemd, dus werkend in de traditie van Euclides. Dat kon in schijn gebeuren (de axiomatiek werd genegeerd en met de logica werd niet al te streng omgegaan). Maar er was ook een groep die juist de strengheid van het systeem wilde respecteren en dit didactisch wilde verantwoorden. Van deze puristen was onder meer Dijksterhuis met zijn *epistemische didactiek* de pleitbezorger.

In de praktijk werd niet volgens deze strikte stromingen onderwezen. Het modale onderwijs stond vooral in het teken van 'veel sommen maken' en 'begrip achteraf'. Deze 'algoritmische uitvoering' kon zowel bij de eerste als de tweede stroming voorkomen. De intuïtieve stroming had in feite nog maar één 'ideële' vorm, want er was in die tijd nog geen leergang die volgens deze stroming was uitgewerkt.

Wij zullen ons in het volgende van de genoemde driedeling bedienen, omdat daardoor de discussies geanalyseerd kunnen worden en omdat juist de intuïtieve aanpak in het verdere verloop van de historie haar betekenis zal krijgen.

Logisch-deductieve stroming

de gematigde traditionelen

Uit een studie van Treffers uit 1969 blijkt dat de meest succesvolle meetkundeleerboeken voor het eerste leerjaar van het voortgezet onderwijs in de periode 1920-1940 het karakter hadden van een gemiddeld leerboek uit de logisch-deductieve stroming. Dit betekende een traditionele opzet volgens het axiomastelsel, zoals bij Versluys beschreven (zie A12). Ze bevatten de bekende leerstof: evenwijdigheid,

congruentie, meetkundige plaatsen, constructies, bijzondere vierhoeken. Gemiddeld zo'n vijftigtal stellingen en hun bewijzen vormden de theorie, daarna ongeveer 250 vraagstukken als toepassingen. Er waren gradaties van logische strengheid aan te wijzen; ook in methodische opzet, zoals in een aantal boeken die een aanpak voorstonden waarin meer nadruk op het constructie-aspect werd gelegd. Ook de inleidingen konden afwijkend zijn, maar in leerstof en methodische vorm ('gegeven – te bewijzen – bewijs') verschilden de boeken uiteindelijk weinig.[1] Met deze boeken bepaalden de 'gematigd traditionelen' het modale onderwijs.

de puristische traditionelen

De vernieuwers binnen de logisch-deductieve richting stonden een meer wetenschappelijke aanpak voor. Waar de gematigden berustten in de gang van zaken van alledag, waarbij het met de grondslagen en wiskundige strengheid niet zo nauw genomen werd, wilden de 'puristische traditionelen' het meetkundeonderwijs juist zo zuiver mogelijk opzetten.

De meest extreme vorm van een streng axiomatische opzet vinden we in het werk van Schogt. Deze meetkundecursus omvat 18 axioma's, 5 postulaten, 266 stellingen, 24 werkstukken en bijna 1500 vraagstukken. In de inleiding van het vraagstukkenboek stelt de auteur dat hij 'formeel-logische quaesties (omkeering, contrapositie)' reeds vroeg ter sprake brengt, omdat hij ondervonden had 'dat deze onderwerpen den leerlingen opmerkelijk weinig moeilijkheden' gaven. Hoe formeel en anti-aanschouwelijk deze aanpak was, illustreren wij met het volgende voorbeeld:

> 'Helften van congruente lijnstukken zijn congruent.
> Onderstelde: AB = A′B′, PQ is de helft van AB, P′Q′ is de helft van A′B′.
> Gestelde: PQ = P′Q′
> Bewijs: Er zijn drie gevallen denkbaar: PQ > P′Q′, P′Q′ > PQ en PQ = P′Q′.
> Was PQ > P′Q′, dan was volgens stelling 7 PQ + PQ > P′Q′ + P′Q′ en daar P′Q′ + P′Q′ = A′B′, volgens stelling 4 AB > A′B′. Dit is in strijd met het onderstelde, dat AB = A′B′, dus kan het geval, dat PQ > P′Q′ is, zich niet voordoen. Evenzo bewijst men, dat P′Q′ > PQ zich niet kan voordoen, omdat daaruit zou volgen, dat A′B′ > AB, hetgeen ook in strijd is met het onderstelde. Dus moet PQ = P′Q′ zijn.
> Hiermede is de stelling bewezen.' (Schogt, 1929a, p. 13)

Dijksterhuis en H.J.E. Beth (1880-1952) prezen Schogts werk, maar zijn methode heeft nooit echt voet aan de grond gekregen.

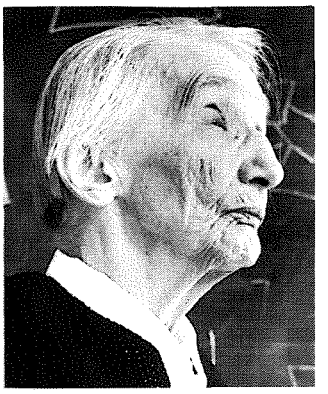
Het hoofdstreven van de aanhangers van de puur-logisch-deductieve stroming was het zuiver leren denken. Dit was eigenlijk het kernthema van de discussies, die zich in de jaren dertig in het vakblad *Euclides* voltrokken. Juist dit tijdschrift werd geleid door de meest fervente aanhangers van de logisch-deductieve richting: J.H. Schogt, H.J.E. Beth, Dijksterhuis zelf en de befaamde schoolboekenauteur Piet Wijdenes (1872-1972). De laatstgenoemde was de meest praktische didacticus, maar toch ook een purist in taal en vorm. Met *Euclides* hadden zij zich geen betere naam

voor het tijdschrift kunnen wensen. Het blad werd dan ook voornamelijk gevuld met artikelen uit de logisch-deductieve hoek. Veel aanhang ontvingen de logisch-deductieven uit de academische wereld, hoewel er uitzonderingen te noemen waren, zoals van de wiskundige D. van Dantzig (1900-1959) en de significus G. Mannoury (1867-1956).

Maar er bestond al sinds jaar en dag onvrede met de logisch-deductieve aanpak voor de inleiding in de meetkunde, zelfs in gematigde vorm. Het was mevrouw Ehrenfest, die de strijd tegen de gevestigde stroming van de logisch-deductieve aanpak opnieuw aanbond. Eerst besteden we kort aandacht aan haar achtergrond en activiteiten, alsook aan die van Dijksterhuis.

Mevrouw Ehrenfest: activiteiten en opvattingen

De uit Rusland afkomstige Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa is een van de meest interessante persoonlijkheden in het Nederlandse wiskundeonderwijs van deze eeuw geweest.[2] Al spoedig na haar aankomst in Nederland in 1912 kreeg zij contact met Reindersma en vonden er didactische bijeenkomsten plaats. In 1915 verscheen het eerste artikel in de Nederlandse taal van haar hand.[3] In 1924 volgde de brochure: *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?*, die de pennenstrijd met Dijksterhuis veroorzaakte. Haar beroemde *Übungensammlung* volgde in 1931. In 1951 ontstond een discussie tussen mevrouw Ehrenfest en Freudenthal: *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?*, waarover meer in B5. Vrijwel vanaf de oprichting van de Wiskunde Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs in 1936 was mevrouw Ehrenfest lid van deze belangrijke groep.[4]


Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa

De tijd die mevrouw Ehrenfest in Göttingen bij Klein en Hilbert gestudeerd heeft, is van doorslaggevende betekenis geweest voor haar latere opvattingen over inhoud en didactiek van de wiskunde. Klein was een begenadigd docent, hij drong aan op zelfwerkzaamheid van de studenten, gebruikte bij zijn colleges concrete modellen, nam ook de elementaire meetkunde als object van studie in ogenschouw en legde de nadruk op de essenties en op het geheel van een theorie of leergang. Allemaal elementen die we in het werk van mevrouw Ehrenfest weerspiegeld zullen zien. Bij Hilbert leerde zij hoe de grondslagen van de meetkunde kritisch te onderzoeken en welke implicaties dit kan hebben voor een op te bouwen logisch systeem. Kennis van dergelijke ontwikkelingen, ook in historisch opzicht, achtte zij van groot belang voor de leraar. In haar eerste artikel (1915) haalt zij een door Hilbert geïntro-

B4 Opmaat tot grote veranderingen
de tijd van de Van Hieles en Freudenthal (1945-1970)

Inleiding

In de periode van 1945 tot 1970 vinden maar liefst twee leerplanwijzigingen voor het voortgezet onderwijs plaats. Eerst, in 1958, nog een vrij gematigde voor de HBS en het Gymnasium, die als een uitvloeisel gezien kan worden van een lange tijd van onvrede met het toen vigerende programma. Maar tien jaar later, in 1968, voltrekt zich als gevolg van de internationale New Math-beweging een ware omwenteling in het Nederlandse wiskundeonderwijs. Beide ontwikkelingen worden in dit hoofdstuk beschreven en geanalyseerd, uiteraard in het bijzonder met het oog op het meetkundeonderwijs.

Ook wordt er in deze periode in Nederland voor het eerst wetenschappelijk onderzoek naar het aanvankelijk meetkundeonderwijs gedaan. Een historische terugblik op de betekenis van deze onderzoeken en experimenten, die door een aantal practici als Mooij, Boermeester, Troelstra, De Groot en anderen zijn verricht, vormt de kern van dit hoofdstuk. Met name besteden we aandacht aan de dissertaties van Van Hiele-Geldof en Van Hiele. We baseren ons daarvoor op de originele teksten, maar maken ook gebruik van het werk van Treffers (1969) en van Treffers en De Moor (1974).

Wat de opkomst van de New Math-beweging in de jaren zestig betreft, beperken we ons in dit hoofdstuk hoofdzakelijk tot het aanvankelijk meetkundeonderwijs. In deel C zal de betekenis van de New Math voor het Nederlandse basis- en voortgezet onderwijs opnieuw aan de orde komen in verband met de ontwikkelingen in de jaren zeventig.

Na de oorlog ging Hans Freudenthal zich in toenemende mate met het wiskundeonderwijs bezighouden, en wel op alle niveaus: van kleuterschool tot universiteit. We geven aan het eind van dit hoofdstuk een korte impressie van Freudenthals betrokkenheid op het wiskundeonderwijs gedurende de periode tot 1970. In deel C zullen we beschrijven hoe Freudenthals opvattingen binnen het werk van de Wiskobasgroep tot verdere ontwikkeling kwamen en in praktische zin toegepast werden.

Ook nu komt het lager onderwijs nauwelijks aan de orde, omdat er geen meetkunde op de lagere school voorkwam. Wel besteden we kort aandacht aan de meetkunde zoals die aan het eind van de jaren zestig in enkele Nederlandse bewerkingen van basisschoolmethoden van de New Math-beweging voorkwam.

Op deze wijze hopen wij een overzicht te creëren van de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs vanaf 1945 tot ongeveer 1970. Om echter ook enige indruk te krijgen van de maatschappelijke context waarin de veranderingen zich afspeelden, besteden we eerst kort enige aandacht aan de algemene onderwijsveranderingen.

duceerd model voor een niet-euclidische meetkunde aan. Het opstel, waarvan het didactische aspect nog niet erg prominent is, trok wel direct de aandacht van de vakmensen hier te lande.

Tot goed begrip van haar opvattingen over meetkunde en meetkundeonderwijs merken we nog op dat mevrouw Ehrenfest ook op theoretisch-natuurkundig gebied, i.c. de thermodynamica, wetenschappelijk werk heeft verricht. Voor haar was meetkunde in eerste instantie 'ruimteleer', de wetenschap die de ons omringende verschijnselen tracht te verklaren en te beschrijven; een vak dat meer verwantschap heeft met natuurkunde dan met zuivere wiskunde.[5] Ook Klein liet zien dat de wiskunde niet slechts op zichzelf beschouwd dient te worden, maar als een wetenschap die vertakkingen in de natuur- en sterrenkunde heeft. Ten slotte wijzen we op de invloed van Sjochor'-Trotskij (over wie in het vervolg meer), in wiens praktisch-didactische werk wij een aantal opmerkelijke overeenkomsten met dat van mevrouw Ehrenfest hebben aangetroffen.

De ideale meetkundecursus volgens mevrouw Ehrenfest

We hebben al kennisgemaakt met de pogingen van Reindersma en Wolda om de inleiding in de meetkunde te ontdoen van het harnas der axiomatische start in de zogenoemde logisch-deductieve opbouw. Toch verschilde de uitwerking van deze 'informelen' nogal met de ideeën van mevrouw Ehrenfest, waarvan de essenties al in haar brochure uit 1924 zijn te vinden.

Mevrouw Ehrenfest maakte onderscheid tussen Ruimteleer en Axiomatiek. Het eerste betreft het 'begrijpen' van de ruimte en het kunnen toepassen van dit begrip, het tweede betreft de meetkunde als een formeel logisch systeem van axioma's en stellingen. Zij onderscheidde drie stadia in het onderwijsleerproces voor een totale leergang meetkunde voor leerlingen van tien tot achttien jaar. Het aanvankelijk meetkundeonderwijs moest beginnen met een zogenoemde *propedeutische* of inleidende *cursus* (tien tot twaalf jaar), daarna diende een meer *systematische cursus* (twaalf tot zestien jaar) te volgen om ten slotte met een strikt *axiomatische leergang* (zestien tot achttien jaar) te besluiten. Wij bepalen ons in het volgende vooral tot de propedeutische cursus.

Het intuïtieve en het logische

De propedeutische cursus diende een intuïtief karakter te hebben. Over het verschil tussen 'intuïtie' en 'logisch werken' schreef zij het volgende:

> 'bij ieder verwerven van inzicht zijn twéé stappen uit elkaar te houden: het *zien* van een zekeren trek in het beeld, dat we in ons hoofd hebben, en het *zich bewustworden* daarvan. Het element van "zich bewust worden" speelt een voorname rol bij al de verschillende stappen van het denkproces: bij het vaststellen en het ordenen van hetgeen aanvankelijk ons intuïtieve beeld voorstelt, bij het ontdekken van gapingen en tegenstrijdigheden erin, bij het trachten om die gapingen aan te vullen en bij het nagaan van

> den oorsprong dier tegenstrijdigheden. Dit alles noem ik nu het *"logische" werk*. Datgene, *wat* zoo bewerkt wordt (of ook soms onbewerkt blijft), noem ik *"intuïtie"*. Het ontwaren van iets zonder er zich rekenschap van te geven en ook het ordenen daarvan zonder bewustwording reken ik tot de *"intuitieve" werkzaamheid.*'
> (Ehrenfest, 1924a p. 7)

Hier wordt intuïtie dus omschreven als een begrip en niet als een werkzaamheid van de geest.[6] Zeker is dat de gegeven omschrijving van het begrip intuïtie niet uitblinkt door helderheid. Maar voor dit moment is van belang dat als inleiding op de meetkunde volgens haar uitgegaan moest worden van meetkundige noties die de kinderen in de realiteit hebben verworven, waarbij vooral het voorstellingsvermogen – het vormen van mentale beelden zouden wij thans zeggen – ontwikkeld diende te worden. Deze intuïtieve werkzaamheid werd niet alleen van belang geacht voor het verwerven van begrippen en relaties tussen die begrippen, maar werd zelfs als een noodzakelijke voorwaarde gezien voor datgene waar het mevrouw Ehrenfest vooral om ging: *leren denken*. Het laatste werd door haar zelfs tot een credo verheven: 'Zonder intuïtie is geen denken mogelijk' (Ehrenfest, 1924a, p. 8).

Vanuit de intuïtieve basis zou een betere mogelijkheid geschapen worden om het meetkundeonderwijs een meer formele basis te geven. Dit laatste betekende dat in de *systematische cursus* de nadruk meer op het *logische werk* zou komen te liggen. Niet echter volgens de traditionele euclidische opbouw, maar aangepast aan het niveau van de kinderen. Praktisch betekende dit dat evidente stellingen (zoals: de basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk) niet bewezen werden, maar (voorlopig) als aanschouwelijke evidenties (axioma's) werden opgevat. Verder dat de leerlingen zelf – wel onder leiding van de leraar – de stellingen dienden te formuleren én bewijzen. En ten slotte dat de inhoud van de cursus zo beknopt mogelijk diende te zijn. Alles diende in het teken te staan van de essentie van de theorie. Daartoe zouden ketens van stellingen opgebouwd moeten worden, ook wel stambomen genoemd, iets dat we tegenwoordig als 'lokaal deductief redeneren' zouden omschrijven.[7]

We zien hieruit dat mevrouw Ehrenfest grote waarde toekende aan het leren denken, hetgeen zij letterlijk als volgt onder woorden bracht: 'Ik behoor tot diegenen, die aan de tot "logisch zijn" opvoedende werking van de Meetkunde wèl gelooven' (Ehrenfest, 1924a, p. 4). 'Denken' betekende voor haar: zelfstandig opstellen van premissen en zelfstandig trekken van oordelen daaruit. De toen bestaande opvattingen over leren denken, waarbij de premissen (de euclidische axioma's) gegeven zijn en de reeds geformuleerde stellingen moeten worden afgeleid, noemde zij 'rekenen': 'een in syllogismen geformuleerd bewijs (is) een *teeken* (...), dat men de stof (...) voldoende doordacht heeft. Het is echter onjuist, dat de syllogismen het *instrument* zelf van het denken zijn' (Ehrenfest, 1924a, p. 8).

Haar opvatting dat constructie van kennis te prefereren is boven reproductie

doet, evenals haar idee over een intuïtieve inleiding, zeer modern aan. 'De kennismaking met de Axiomatica en ook met vragen van kennistheoretischen aard (natuurlijk niet in overdreven mate) zou veel meer op haar plaats zijn na de beëindiging van den systematischen cursus der Ruimteleer' (Ehrenfest, 1924a, p. 15). Dit citaat maakt duidelijk dat mevrouw Ehrenfest tevens belang hechtte aan het opbouwen van een formeel logisch systeem. Zij 'acht het van grote *praktische* beteekenis, dat iemand zich niet alleen voor de juistheid van zijn opvattingen, maar ook voor den oorsprong en de logische reden daarvan interesseert' (Ehrenfest, 1924a, p. 14). In dit verband zij er aan herinnerd dat de studie van de grondslagen van de wiskunde in het begin van deze eeuw een grote vooruitgang had geboekt; dat mevrouw Ehrenfest deze ontwikkelingen van zeer nabij had meegemaakt; maar vooral dat zij gefascineerd was door de ontdekking van de niet-euclidische meetkunden met hun eigen axiomastelsels en bijbehorende modellen. Juist dit laatste zag zij ook als een mogelijk onderwerp van studie voor de middelbare school.

Bij herhaling benadrukte zij het programma niet te overladen; liever het essentiële diepgaand behandeld dan veel op een oppervlakkige wijze. In de door haar voorgestane propedeutische cursus diende plaats te zijn voor concreet handelend werk, zoals meten, tekenen, knippen, plakken en dergelijke. Uitdrukkelijk werd echter gesteld dat dit empirische werk – zelf sprak zij van de laboratorium-methode – niet een doel op zich mocht worden. Het diende altijd in dienst te staan van de ontwikkeling van het voorstellingsvermogen en gepaard te gaan met de denkhandelingen. Helaas werd dit uitgangspunt nogal eens verkeerd begrepen, waardoor een intuïtieve cursus gelijkgesteld werd met alleen maar plakken en knippen. Het hier besproken artikel sloot af met een aantal voorbeeldvraagstukken, waarbij het stereometrische vertrekpunt opvalt. Op de aard van deze vraagstukken komen wij nog terug.

Dijksterhuis

Ook in Eduard Jan Dijksterhuis ontmoeten we een bijzonder mens: intelligent en van een buitengewone eruditie.[8] Als wetenschapshistoricus verwierf hij wereldfaam. Voor ons onderzoek beperken wij ons tot zijn bijdragen aan het wiskundeonderwijs, die zich in hoofdzaak bepaalden tot de uitgangspunten, doelstellingen en programmatische uitwerking. De geleerde, nauwgezette, hardwerkende en met de pen vaardige Dijksterhuis was geknipt voor allerhand commissiewerk, dat hij vele malen op zich nam.

Eduard Jan Dijksterhuis

Zoals eerder opgemerkt, heerste er na de Eerste Wereldoorlog een zekere antiwiskundige tijdgeest. In

sommige kringen wilde men de wiskundeprogramma's beknotten – voor enkele schooltypen zelfs afschaffen – en tevens bestond al sinds lange tijd bij vele didactici het gevoelen dat in ieder geval het aanvankelijk meetkundeonderwijs een andere aanpak dan de logisch-deductieve behoefde.

Dr. E. Reinders – leraar biologie aan het Nederlandsch Lyceum, collega van Reindersma en later hoogleraar te Wageningen – publiceerde eind 1920 een artikel in *Paedagogische Studiën* over het belang van een soort Realgymnasium, waarbij hij de wiskunde als onderwijsvak in dienst wenste te stellen van de natuurwetenschappen: 'wie de mathesis niet laat zien als de dienstbare, (...) die maakt de mathesis tot een dood vak, vervreemd van mensch en werkelijkheid, volstrekt ongymnasiaal' (Reinders, 1920, pp. 28-29). Dit artikel draagt – geheel in de geest van die tijd – een nogal elitaire opvatting uit over de geestelijke vorming, die alleen het Gymnasium zou kunnen geven, terwijl de HBS wordt afgeschilderd als een instituut dat een geschikte wetenschappelijke en sociale habitus niet zou kunnen bewerkstelligen.

Dijksterhuis was het met dat dienstbare karakter van de wiskunde volslagen oneens en bood een tegenartikel bij *Paedagogische Studiën* aan, waarvan Reinders (!) redacteur-secretaris was. Deze wilde het artikel niet plaatsen omdat Dijksterhuis' beschouwingen 'verouderd' waren, waarna Dijksterhuis het naar het *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs* zond.

Uit dit helder geschreven essay wordt Dijksterhuis' opvatting over het belang van de wiskunde als vak op zich al duidelijk. Het leerplan van het Gymnasium moest volgens hem niet uitgebreid worden met natuurwetenschappen, maar juist met zuivere wiskunde, een vak dat in veel groter harmonie zou verkeren met de oude talen om als middelen tot geestelijke vorming te kunnen dienen: 'het is de stijl van de mathesis en de stemming van strenge eerlijkheid, die een exact betoog wekt, waardoor de hooge moreele waarde van dit vak wordt bepaald' (Dijksterhuis, 1921, p. 951). Met dit stuk zette hij de trend voor zijn latere beschouwingen over doel en aard van het wiskundeonderwijs.

De pennenstrijd tussen Dijksterhuis en mevrouw Ehrenfest

Het openingsartikel van het allereerste nummer van *Euclides* was van de hand van Dijksterhuis en droeg als titel: 'Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?' Daarna volgde mevrouw Ehrenfests weerwoord, direct gevolgd door het 'laatste woord' van Dijksterhuis. Het zal niet verbazen dat door mevrouw Ehrenfests brochure Dijksterhuis 'zich in zijn meest fundamentele mathematische overtuigingen (voelde) aangetast' (Dijksterhuis, 1924a, p. 2). Zijn antwoord op de gestelde vraag was dan ook een hartgrondig en onomwonden neen. Het omvangrijke, nog immer zeer leesbare, artikel is een felle, in scherpe bewoordingen gestelde kritiek op mevrouw Ehrenfests opvattingen.[9] Niet alleen betreffende enkele vorm- en begripskwesties, maar vooral ten aanzien van de feitelijke strekking van het geschrift. Dit

betrof op de eerste plaats het feit dat Dijksterhuis bezwaren had tegen het aannemen van evidente stellingen. Dit zou tot een verkeerde habitus kunnen leiden en het meetkundeonderwijs zou worden ontdaan van het belangrijke leren redeneren. Het tweede bezwaar richtte zich op de door mevrouw Ehrenfest zo belangrijk geachte intuïtieve ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht. Weliswaar erkende ook Dijksterhuis het belang van een zekere intuïtieve fase, maar hij meende dat 'meetkundig denken (ook) mogelijk is zonder ruimtelijk voorstellingsvermogen' (Dijksterhuis, 1924a, p. 18). Als voorbeeld hiervan haalt hij de 'stereometrische constructies' aan, die alleen door middel van redeneringen op te lossen zijn.[10]

> 'Men kan juist den niet wiskundig aangelegden leerling geen sterkeren moreelen steun geven, dan wanneer men hem de overtuiging weet bij te brengen, dat alles wat hij op H.B.S. van wiskunde heeft te leeren (...) voor hem bereikbaar is door zuiver logisch redeneeren en dat een goed voorstellingsvermogen weliswaar voor hem, die het bezit, een machtig hulpmiddel vormt, maar dat het gemis aan dat vermogen nooit een onoverkomelijk struikelblok kan zijn.' (Dijksterhuis, 1924a, p. 21)

Dijksterhuis beweerde dat mevrouw Ehrenfests artikel in feite niets nieuws ter tafel bracht. Haar opvattingen over intuïtie en logica ziet hij als vertalingen van Schopenhauers 'Anschauung' en 'Urtheilskraft'. Verder gaat hij in op het onderscheid tussen 'axiomatica a priori' en 'axiomatica a posteriori'. Ten slotte vat Dijksterhuis de grote lijn van mevrouw Ehrenfests betoog samen met het volgende syllogisme: 'Geen denken is mogelijk zonder intuïtie. Intuïtie is in de Ruimteleer identiek met ruimtelijk voorstellingsvermogen. Dus is geen meetkundig denken mogelijk zonder ruimtelijk voorstellingsvermogen' (Dijksterhuis, 1924a, p 18). En omdat 'meetkundig denken (juist wel) mogelijk is zonder ruimtelijk voorstellingsvermogen' acht hij mevrouw Ehrenfests betoog weerlegd. Met name aan het laatste herkennen we opnieuw de pure mathematicus.

Dijksterhuis blijft dus hechten aan een strak logisch-deductieve opbouw. Hij achtte de synthetische meetkunde, eerst planimetrisch, daarna in de ruimte, daartoe hét geijkte middel, ook voor de allerjongste kinderen in het voortgezet onderwijs. Verder beriep hij zich voor zijn standpunt op de historische betekenis, zowel van de euclidische meetkunde zelf als van de onderwijskundige traditie, en op het esthetische aspect. De opvoedende waarde, zoals het kweken van discipline en karaktervorming, werd hogelijk door hem geprezen, maar bovenal was het aspect van de vormende waarde, die er van het wiskundeonderwijs uit zou gaan, zijn leidend motto: 'wat ik als doel van het meetkunde-onderwijs zie, oefening in zuiver denken en spreken' (Dijksterhuis, 1924a, p. 25).[11]

In mevrouw Ehrenfests antwoord aan Dijksterhuis worden een aantal punten opgehelderd. Zij benadrukte nog eens het belang van de ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen, dat zij in zekere zin equivalent met Anschauung beschouwt, en het belang van het leren zien van het essentiële als voorwaarde voor het

praktisch-logische denken.

Dijksterhuis krijgt het laatste woord. Hij komt weer terug op zijn syllogistische redenering, waarbij hij ruimtelijk voorstellingsvermogen en intuïtie als synoniemen bij mevrouw Ehrenfest had aangemerkt. Verder blijft hij vasthouden aan de eerder genoemde argumenten en voert opnieuw de klassieke ode aan de euclidische meetkunde op: 'een gebouw van zoo groote schoonheid en (...) van zoo harmonische soliditeit, dat het iederen mensch geestelijk goed moet doen, daarin eenige tijd te verwijlen' (Dijksterhuis, 1924b, p 67).

Inderdaad was mevrouw Ehrenfest niet ingegaan op de door Dijksterhuis gesuggereerde equivalentie van ruimtelijk voorstellingsvermogen en intuïtie.[12] Wanneer zij dat gedaan had, was de discussie ontaard in een academische woordenstrijd onder voorbijgaan aan de werkelijke bedoeling van mevrouw Ehrenfests standpunt. De feitelijke standpunten lagen echter zo wijd uiteen, dat de kloof al bij voorbaat onoverbrugbaar leek: 'de heer D. wil niet gelooven, dat door den omgang met het aanschouwelijke materiaal van een propaedeutischen cursus het ruimtelijk voorstellingsvermogen van de leerlingen in belangrijke mate kan worden ontwikkeld' (Ehrenfest, 1924b, p. 53).

Epistemisch wiskundeonderwijs

In de jaren dertig bracht Dijksterhuis een eigen methodisch – zelf noemde hij het ook wel didactisch – standpunt naar voren, namelijk dat van het epistemische wiskundeonderwijs. Hij ontleende deze term aan Plato, die onderscheid maakt tussen verschillende vormen van weten: 'namelijk tusschen de empeira, waarin men op grond van ervaring en herinnering een zekere kennis van feiten bezit en episteme, waarin men bovendien rekenschap kan geven van den onderlingen samenhang dier feiten en dus naast het hoe ook het waarom der dingen weet' (Dijksterhuis, 1934, p. 173). In de huidige terminologie zouden wij epistemisch onderwijs inzichtelijk onderwijs noemen. Maar Dijksterhuis gaf er een speciale uitleg aan, niet alleen ten aanzien van het vak, maar ook van de cognitieve ontwikkeling van de leerling. Het leren rekenen van de lagere school stelde hij onder de eerste categorie, dus als een vak dat men louter mechanisch kon aanleren. Maar de wiskunde van de middelbare school zou van meet af aan volgens de epistemische beginselen onderwezen moeten worden, zodat 'de leerling op ieder oogenblik in staat moet zijn, zichzelf en anderen rekenschap te geven van de beteekenis van de termen, die hij gebruikt en van de motiveering van de methoden, die hij toepast' (Dijksterhuis, 1934, p. 173).

Hoewel binnen de epistemische opvatting – ook volgens Dijksterhuis – verschillende uitwerkingen mogelijk waren, paste hij het epistemische principe natuurlijk toe op de logisch-deductieve stroming. Een eenvoudig voorbeeld volgens Dijksterhuis is het bepalen van het extremum van een kwadratische functie door middel van kwadraatafsplitsing in plaats van het gebruik van een formule. Dit principe werd en

wordt in feite door elke vakdidacticus die inzicht boven trucmatigheid stelt, onderschreven. Een ander voorbeeld is het bepalen van de limiet van de som van een oneindige meetkundige rij, waarbij Dijksterhuis als 'principieele consequentie van het epistemische standpunt' een streng formele 'ε-N'-aanpak eiste, zelfs al voor de derde klas van de HBS (Dijksterhuis, 1934, pp. 194-196). Een leraar die zijn leerlingen dit wilde besparen, hoorde volgens Dijksterhuis thuis in de achttiende eeuw. Niet alleen maakt dit voorbeeld nog eens duidelijk dat zijn uitgangspunt in de zuivere wiskunde lag, maar tevens blijkt dat Dijksterhuis bij het onderwijs in de wiskunde vooral aan de meest begaafde leerlingen dacht.

Zijn didactische opvattingen waren dus ondergeschikt aan de wetenschappelijke eisen zowel van de wiskunde zelf als van haar epistemische methode. Het vernieuwende diende volgens hem te liggen in het streven naar volledig inzicht van iedere leerling op elk niveau. De eis van inzicht boven trucmatig mechanisme blijkt ook uit het feit dat hij voor een beperking van de stof was. Met name wees hij de vele gekunstelde opgaven en overmatige sommenmakerij in de algebra uit die tijd, waarbij vaak allerlei foefjes werden onderwezen, ten sterkste af. In feite streefde hij dus, althans voor Gymnasium en HBS, een wiskundeonderwijs na, dat zich tot de essenties diende te bepalen en wel in een zuiver wetenschappelijke vorm. Hierbij paste zijn afwijzende houding om aan een formele opbouw van een stuk wiskunde een oriënterende, intuïtieve en/of empirische verkenning vooraf te laten gaan.

Dijksterhuis' invloed

Met dit kritische artikel tegen mevrouw Ehrenfest had Dijksterhuis direct grote aandacht getrokken, niet alleen van de leraren wiskunde, maar ook van andere belanghebbenden en geïnteresseerden. In 1926 hield hij twee lezingen in Groningen, één voor de Vereniging voor Paedagogisch Onderwijs en één voor het twintigste Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres. Hierin zette hij nog eens zijn opvattingen uiteen over de betekenis van het wiskundeonderwijs, waarvan hij met name de vormende waarde onderstreepte. Met deze lezingen haalde hij de pers; op grond van de tweede lezing schreef hij een artikel in *De Gids* (1926).[13] Dijksterhuis behoorde tot de medewerkers van *Euclides* van het eerste uur. In 1925 werd hij secretaris van de Commissie Beth-Dijksterhuis, die tot taak had de toestand van het onderwijs in de wiskunde en aanverwante vakken (mechanica en kosmografie) op de vijfjarige HBS te onderzoeken. De geest van dit programma wordt het best duidelijk uit het volgende citaat: 'Hoofddoel van het wiskunde-onderwijs is het bijdragen tot geestelijke vorming en ontwikkeling; nevendoel het aanbrengen van nuttige kennis' (*Euclides* 2, p. 114).[14]

Eind jaren twintig maakte Dijksterhuis zich sterk voor de didactische vorming van wiskundeleraren, waarbij hij ook aan de geschiedkundige achtergronden van de wiskunde dacht. Verder was hij betrokken bij enkele officiële werkzaamheden van de Wiskunde Werkgroep van de WVO. Hoe hij in deze groep, waaruit uiteindelijk de

meest vernieuwende ideeën zijn voortgekomen, gefunctioneerd heeft, is weinig bekend.

Via al deze functies heeft Dijksterhuis tussen 1920 en 1940 de mogelijkheid gehad beslissende invloed uit te oefenen op uitgangspunten, doelstellingen en programmatische uitwerking van het wiskundeonderwijs. Aan zijn zijde had hij medestanders als H.J.E. Beth, Schogt en Wijdenes. Zij hebben er in feite voor gezorgd dat het wiskundeonderwijs gedurende het interbellum van logisch-deductieve aard bleef. Na 1945 is Dijksterhuis' invloed – zeker ten aanzien van de fundamentele kwesties van het aanvankelijk meetkundeonderwijs – marginaal geweest.

Dijksterhuis als didacticus

Met inhoudelijk microdidactische problemen heeft Dijksterhuis zich niet of nauwelijks beziggehouden. Hij heeft geen leerboek geschreven, ook zijn ons geen praktische ideeën bekend. Wat het methodische element betreft, had hij weinig op met de toen vigerende ideeën van de zelfwerkzaamheid: 'Er is bijna niemand sterk genoeg om vrij te zijn' (Dijksterhuis, 1921, p. 964). Zijn lezingen en artikelen over het wiskundeonderwijs waren meestal op macroniveau. De immer terugkerende thema's waren de grote waarde van de wiskunde in cultuur-historisch opzicht en de vormende waarde. Zijn streven om de geschiedenis van de wiskunde een plaats in het onderwijs te geven, paste hier goed bij.[15] Uitgangspunt was niet de leerling, maar de heilige geest der mathesis.

Vandaag de dag zouden Dijksterhuis' opvattingen over de didactiek van de wiskunde, van de meetkunde in het bijzonder, weinig weerklank vinden. Ook zijn geringe vertrouwen in het principe der 'zelfwerkzaamheid' zou door het merendeel van de huidige didactici weersproken worden. Maar nemen we zijn algemene beschouwingen, zoals de grote waarde van de wiskunde in cultuur-historisch opzicht, haar vormende waarde en het epistemische onderwijsbeginsel in beschouwing, dan heeft Dijksterhuis wel degelijk een macrodidactisch standpunt neergelegd. Vergelijken we verder zijn epistemische opvattingen met de didactische geest zoals die toen vooral in de kringen van de Technische Hogeschool in Delft opgeld deed – waar men vooral het algoritmische aspect van de wiskunde benadrukte – dan zou men bij Dijksterhuis van een elite-didactiek kunnen spreken. We weten thans echter dat uitwerkingen van het epistemische principe à la Dijksterhuis onhaalbaar zijn, omdat ze in feite een contra-productieve werking hebben.[16]

Analyse der geschilpunten tussen mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis

In 1924 zocht mevrouw Ehrenfest de reden voor het verschil in opvatting onder meer in een kwestie van smaak. Ons inziens zou dit deels teruggevoerd kunnen worden op de meer natuurkundige instelling en achtergrond van mevrouw Ehrenfest tegenover de zuiver wiskundige houding van Dijksterhuis. Maar wij zouden ons ook kun-

nen voorstellen dat mevrouw Ehrenfest het argument van smaakverschil aanvoerde als een beleefdheidsfrase.

Dijksterhuis was, althans later, op de hoogte van de internationale ontwikkelingen. Over deze buitenlandse ontwikkelingen was hij teleurgesteld, wanneer hij vernam dat ook vermaarde geleerden als Klein, Borel en Poincaré zich op het standpunt van een informele propedeuse van de meetkunde stelden. Zelfs in eigen kring sprak H.J.E. Beth zich uit voor een niet al te formele start van het meetkundeonderwijs: 'We weten allen dat hier met jonge leerlingen op voorzichtige wijze met een nieuwe wetenschap moet worden begonnen, dat men een ruim gebruik moet maken van aan de aanschouwing ontleende begrippen (...) dat oog en hand, vooral in het begin, een gewichtige rol te vervullen hebben' (H.J.E. Beth, 1933, pp. 257-258). Overigens stelde Beth dit zo'n tien jaar na de boven beschreven polemiek. In diezelfde tijd herzag ook Dijksterhuis zelf enigermate zijn standpunt over het aanvankelijk meetkundeonderwijs. In zijn artikel over het epistemisch onderwijs schrijft hij:

> 'Men kan zich (...) een heele scala van opvattingen voorstellen, die tusschen het standpunt van mevr. Ehrenfest en dat van J.H. Schogt als uitersten inliggen en die men toch alle epistemisch zou kunnen noemen.
> Persoonlijk zou ik er het meest voor voelen, in de beginstadia van het meetkunde-onderwijs wel vrij spoedig deductief te werk te gaan door stellingen te bewijzen, maar alleen dan, wanneer een bewijsbehoefte òf spontaan optreedt, òf door het stellen van de vraag, gemakkelijk kan worden gesuggereerd. (...) Na eenigen tijd wordt het dan al mogelijk en wenschelijk, tot een partieele ordening van stellingen te komen (...). Ik zou dan echter het meetkunde-onderwijs niet willen laten eindigen, zonder dat de basis nog eens opnieuw in behandeling is genomen, d.w.z. ik zou de beginselen der vlakke meetkunde in de hoogere klassen, eventueel gelijktijdig met die der stereometrie, nog eens in een correct logisch systeem willen ordenen, waarin dan axiomata nog wel uitdrukking zouden zijn van meetkundige inzichten, die voor het natuurlijke denken intuïtief evident zijn, maar waarin hun aantal zoveel mogelijk zou worden beperkt en het bewijzen uitsluitend als kriterium voor logische ordening zou dienen.'
> (Dijksterhuis, 1934, p. 210)

Afgaande op dit citaat, lijken de opvattingen van mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis niet strijdig. Beiden hadden een zelfde einddoel voor ogen: inzicht in een axiomatische opbouw van de meetkunde, en wel aan het eind van de gehele cursus, dus voor de leeftijdsgroep van zestien tot achttien jaar. Mevrouw Ehrenfest ging daarin zelfs nog verder dan Dijksterhuis, waar zij ook pleitte voor eventuele bestudering van niet-euclidische axiomastelsels. Bovendien had zij een drietrapscursus voor ogen, zoals we hiervoor beschreven hebben.

Nog enkele jaren later, in 1939, was Dijksterhuis zowel wat zijn inhoudelijke opvatting als wat de toonzetting betreft weer heel wat milder. Hij schrijft dan in de eerste jaargang van het tijdschrift *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* dat er ten aanzien van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs gedurende de voorafgaande jaren heel wat is gepresteerd en 'dat het doortrekken van die lijnen mogelijk is', mits

men voorzichtig te werk gaat. Dit alles wel in de 'epistemische' stijl (Dijksterhuis, 1939, p. 110).[17]

Zowel Dijksterhuis als mevrouw Ehrenfest geloofden in de scholing van het denken door middel van de meetkunde. Beiden stonden een inzichtelijk wiskundeonderwijs voor. En midden jaren dertig blijken beiden zich uit te spreken voor een aanschouwelijke start. Het grote verschil ligt in de uitwerking: Dijksterhuis nam de traditionele euclidische vlakke meetkunde als uitgangspunt, terwijl mevrouw Ehrenfest om didactische redenen de ruimtelijke realiteit als startpunt koos teneinde de elementaire meetkundige noties te ontwikkelen. Mevrouw Ehrenfest wilde het keurslijf van de euclidische opbouw afleggen, terwijl Dijksterhuis slechts een minieme knieval wilde doen voor het aanschouwelijke element van de meetkunde. Dijksterhuis hield dus ook voor het aanvangsonderwijs vast aan de logische structuur van de meetkunde, terwijl mevrouw Ehrenfest uit wilde gaan van een psychologische ordening. Bij mevrouw Ehrenfest herkennen we zowel het historisch- als het psychologisch-genetische principe, terwijl dit Dijksterhuis geheel vreemd scheen te zijn. Mevrouw Ehrenfest benadrukte voor haar propedeutische cursus het principe van 'leren door doen', ook in concreet praktische zin; iets waarover Dijksterhuis zich nimmer openlijk heeft uitgelaten. Wij vermoeden echter, gezien zijn welbevinden in louter theoretische wetenschap, dat hij daaraan weinig waarde hechtte. In feite schuilt het verschil in beider opvattingen slechts in het idee van de propedeutische cursus van mevrouw Ehrenfest. Dijksterhuis hield bij zijn beschouwingen altijd het oog gericht op de HBS- en Gymnasium-leerlingen en naar onze mening daarvan weer de meest begaafden, terwijl mevrouw Ehrenfest toch aan een meer heterogeen samengestelde groep dacht.

Tijdens de promotie van Dina van Hiele-Geldof in 1957, die een praktische vorm aan mevrouw Ehrenfests ideeën had gegeven, sprak Dijksterhuis zeer waarderend over haar onderwijsexperiment en noemde het 'een stuk pionierswerk' (Krooshof, 1957). Zou het beleefdheid geweest zijn, of was Dijksterhuis op het punt van de intuïtieve inleiding in de meetkunde bijgedraaid?

Het lijkt wat wonderlijk dat Dijksterhuis zich in de jaren twintig zo opwond over de ideeën van een propedeutische cursus à la Ehrenfest, die hij als een werkelijk gevaar zag voor het wiskundeonderwijs. Mogelijk dat mevrouw Ehrenfest toen te weinig benadrukt heeft dat zij met de propedeutische cursus slechts een inleiding op het oog had, die ook, althans voor een deel, geschikt was voor de lagere school. Een voor de hand liggende reden kan gezocht worden in het feit, dat Dijksterhuis elke vorm van toepasbaarheid of samenhang met de realiteit uit de wiskunde wilde weren. Tenslotte was hij een platonist van het zuiverste water. Uit dit laatste moet volgens Klomp de essentie van Dijksterhuis' opvattingen verklaard worden:

> 'Het onveranderlijke, intellectuele van de westerse beschaving was volgens Dijksterhuis een kennisideaal van Griekse (platoonse) origine: het zich voortdurend zeer zorgvuldig rekenschap kunnen geven van denkbeelden, het in staat zijn te definiëren, te

> bewijzen en te motiveren, met andere woorden: de abstracte wiskundige denkvorm.' (Klomp, 1997, p. 157)[18]

Bij deze opvattingen, die Dijksterhuis door de *Politeia* van Plato lijken ingegeven, althans herkend, past ook zijn geringschatting van het empirisch-inductieve handelen en denken. Maar ook zijn morele opvattingen over discipline en opvoeding zijn hieruit te verklaren: er moesten eisen aan het kinderlijke denken gesteld worden, maar een dialoog was slechts voorbehouden aan de volwassenen die zijn denkschool doorlopen hadden. Hiermee is ons inziens de kern van het 'geschil' tussen de democratische mevrouw Ehrenfest en de meer elitair-denkende Dijksterhuis blootgelegd.[19]

Daarom ook was deze periode vóór de Tweede Wereldoorlog nog niet rijp voor veranderingen op grotere schaal. In feite werden noch de ideeën van Dijksterhuis noch die van mevrouw Ehrenfest in praktisch onderwijs omgezet. Zoals al eerder opgemerkt, werd in de modale onderwijspraktijk gebruik gemaakt van modale boeken van een of andere logisch-deductieve snit. Wel werd in de Wiskunde Werkgroep door aanhangers van de verschillende richtingen aan de vernieuwing van de didactiek doorgewerkt. Het werk van mevrouw Ehrenfest, in het bijzonder haar *Übungensammlung*, bleek daarbij een belangrijke leidraad en bron van inspiratie.

Übungensammlung

Met de *Übungensammlung* uit 1931 gaf mevrouw Ehrenfest een praktische handreiking voor de uitwerking van de propedeutische cursus. Dit boekje bevat 194 ideeën, geordend naar 19 onderwerpen, zoals afstanden, lijn als lichtstraal, symmetrie, schaduw, perspectief en topologie. Het is geen lineaire leergang; de losse activiteiten zijn bedoeld als ideeën voor lessen, die door de leraar uitgewerkt dienen te worden. In figuur B3.1 zijn een aantal voorbeelden opgenomen.

Het hoofddoel van de verzameling is het ontwikkelen van het ruimtelijk voorstellingsvermogen, voorafgaande aan de latere systematische cursus. Mentale activiteiten (hoofdmeetkunde) worden gepropageerd boven het concrete handelen (empirie). Empirische activiteiten worden niet afgewezen, maar ze dienen betekenis te hebben voor het denken. Als voorbeeld hiervoor staat het vinden van de constante verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel door middel van meten versus de methode van de ingeschreven zeshoek, twaalfhoek, enzovoort. Naast activiteiten in het platte vlak wordt vooral ook in de ruimte gewerkt, ook op andere oppervlakken dan platte vlakken. De begrippen worden zoveel mogelijk ontleend aan de objecten en verschijnselen uit de realiteit, met inbegrip van machines en werktuigen. Bij het onderwerp afstanden komt het schatten, kiezen van een maat en de relativiteit van een maat aan de orde. Het begrip hoek ontstaat uit de beweging van de wijzers van de klok, waardoor meteen draaiing en draaiingszin ter sprake kunnen komen (figuur B3.1, 32). Kortste afstand wordt aan de hand van allerlei reële situaties ontwikkeld, bijvoorbeeld door de lengte van een pad op een berg op te meten, maar ook de

werkelijk kortste afstand vast te stellen. Dit soort problemen ook op een bol (figuur B3.1, 53). Het begrip rechte lijn wordt via de zichtlijn ontwikkeld; evenwijdige lijnen als lichtstralen van een 'oneindig verre bron' (figuur B3.1, 57 en 69). Mogelijke liggingen van lijnen en vlakken komen ter sprake, waarbij vooral het construerende aspect (in praktische zin, zoals met een in gedachten genomen schietlood) een rol speelt. Voorbeelden uit de realiteit van het roteren van een as. Het maken van doorsneden met behulp van vloeistoffen in ruimtelijke vormen. Het maken van perspectivische beelden en aanzichten (figuur B3.1, 101). Onder 'Parallelenaxiom und seine Folgen' is als eerste activiteit het zogenoemde tegelen of vlakvullen opgenomen (figuur B3.1, 155).

---

32. Der Schüler soll auf dem Wege von seinem Hause zur Schule auf einem Karton successive alle Winkel abtragen, um welche er sich an jeder Strassenecke, die er einschlägt, drehen muss; daraus soll er schliessen, welchen Winkel die Strassenfronten seines Hauses und des Schulgebäudes mit einander bilden. Nach dem Plane der Stadt kontrollieren. Im Falle der Unebenheit des Wegen auf die Möglichkeit der Fehler weisen.
Analog als Vorübung innerhalb des Schulgebäudes ausführen.

53. In welcher Himmelsrichtung soll man aus Berlin auf einem Aeroplan herausfliegen um auf den kürzesten Wege nach Moskau zu kommen? Dasselbe für Berlin - Java. - Auf dem Globus mit Hilfe einer gespannten Schnur feststellen. - Ist der Bogen eines Parallelkreises die kürzeste Linie auf der Kugeloberfläche zwischen beiden Enden?

57. Es sollen sich drei Schüler längs einer Geraden vor die Klasse aufstellen - ohne irgend welche Hilfsmittel zu gebrauchen; ein vierter Schüler soll sie, ebenfalls ohne Hilfsmittel kontrollieren. - Worauf beruht die Möglichkeit dieser Aufgabe?

69. Warum läuft der Mond uns nach? Warum laufen uns die nahen Gegenstände rascher vorbei, als die entfernten, wenn wir etwa in einem Zuge fahren? - Eine schematische Zeichnung machen.

101. Ein Glas so halten, dass man seinen obersten Rand als eine Gerade erblickt (mit einem Auge anschauen!). Dann ihn allmählig nach unten bewegen. Wie erscheint nun dieser Rand? Wie soll man ihn zeichnen? - Eine Glasplatte zwischen Auge und Glas aufstellen und darauf den Rand zeichnen so, wie man ihn sieht. - Wie soll man das Glas halten, damit auf der Glasplatte der Rand exakt kreisförmig herauskommt?

155. Man will mit Platten einer einzigen Form und Grösse ein grosses Stück Boden bepflastern (auf die Ränder kommt es nicht an). Welche Form kann man den Platten geben? Können es Dreiecke, Vierecke, Fünfecke sein? Können sie beliebige Winkel haben?

170. Man hat einen Rock und ein Paar Hosen von gleicher Länge zu nähen. Für welches von beiden hat man mehr Stoff nötig? - ungefähr beurteilen, indem man den Rock als einen Zylinder und die Hosen als zwei Zylinder zur schematischen Beurteilung auffasst.

---

figuur B3.1: Voorbeelden uit de *Übungensammlung* van mevrouw Ehrenfest (1931)

De voorbeelden maken duidelijk hoe de 'opgaven' qua inhoud en vorm afweken van de gewone schoolboekopgaven. Ook het niveau van de oefeningen onderling is sterk verschillend. Dit zijn redenen waarom dit boek niet geschikt was voor de gemiddelde leraar. Toch zou dit obscure boek een belangrijke betekenis gaan krijgen voor de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs in Nederland. Freudenthal maakte P.M. van Hiele reeds in 1931 attent op dit boek.[20] In 1951 schreef Freudenthal nog 'dat haar helaas tot verregaande onbekendheid gedoemde *Übungensammlung* het beste is dat ik op mathematisch-didactisch gebied ooit heb gezien' (Ehrenfest-Afanassjewa en Freudenthal, 1951 p. 24), maar we zullen op de effecten van de *Übungensammlung* in het verdere verloop van onze studie nog nader ingaan. Eerst zullen wij trachten iets bloot te leggen van de bronnen waaruit mevrouw Ehrenfests theoretische en praktische ideeën wellicht zijn ontstaan.

Het werk van Sjochor'-Trotskij

In 1961 noemde mevrouw Ehrenfest (ons inziens voor het eerst en voor het laatst) de naam van de Russische wiskundige-pedagoog S.I. Sjochor'-Trotskij (1853-1923) (Ehrenfest-Afanassjewa, 1961, p. 179).[21] Zij heeft een boek uit 1908 van deze Sjochor'-Trotskij in haar bezit gehad, *Meetkunde in Opgaven* uit de serie *Boeken voor moderne scholen*.[22] De omslagtekst vermeldt: 'Basiscursus met systematische oefeningen in het meetkundig tekenen. – Bewijzen van stellingen worden gegeven naarmate de behoefte hieraan ontstaat bij de leerlingen.' Ook is een en ander over de auteur op het omslag vermeld (figuur B3.2).

Uit het voorwoord van de uitgever blijkt dat men ook in Rusland, net als in West-Europa, streefde naar vernieuwing, namelijk 'het wiskundeonderwijs dichter bij het dagelijks leven (...) brengen' en 'in overeenstemming (...) brengen met de psychologische leeftijd van de leerlingen' (Sjochor'-Trotskij, 1908, p. IV). Het meer dan 400 pagina's tellende boek is bestemd voor de leraar, onder wiens leiding het leerlingenboek moest worden doorgewerkt.[23] De didactische opvatting om het bewijzen voorlopig uit te stellen, wordt als volgt verwoord: 'Tot het bewijs van evidente stellingen kunnen leerlingen zich pas dan zetten, als de interesse is gewekt voor het proces van het bewijzen zelf. (...) In elk geval is het niet juist op pedante wijze de interesse van leerlingen voor bewijzen te negeren, maar evenmin om op een pedante manier hun deze interesse op te dringen' (Sjochor'-Trotskij, 1908, p. VIII).

Bij de praktische aanwijzingen voor de leraar wordt een fikse lijst van hulpmiddelen (millimeterpapier, doorschijnend papier, karton, plasticine, draad en dergelijke), alsook instrumenten (waaronder tangen en een soldeerbout), aanbevolen. Dit alles ten behoeve van de praktische zelfwerkzaamheid van de leerlingen, ook wel de 'laboratorium-methode' genoemd.

De auteur onderscheidt de 'formele methode' (of 'logische richting'), de 'psychologische richting' en de 'compromis-richting'. De eerste is identiek met de

Книги для современной школы.

С. И. Шохоръ-Троцкій,

преподаватель Сельскохозяйственныхъ курсовъ для лицъ обоего пола, Педагогическихъ курсовъ военнаго вѣдомства, Педагогическихъ курсовъ Фребелевскаго общества, женской гимназіи кн. Оболенской и Выборгскаго коммерческаго училища въ СПБ.

ГЕОМЕТРІЯ на ЗАДАЧАХЪ

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ:

а) начальныхъ школъ съ продолжительнымъ курсомъ; б) низшихъ и среднихъ классовъ средне-учебныхъ заведеній; в) профессіональныхъ школъ и курсовъ и т. п.

(400 политипажей въ текстѣ.)

Курсъ основанъ на методическихъ упражненіяхъ въ геометрическомъ черченіи. — Доказательства теоремъ вводятся по мѣрѣ возникновенія потребности въ нихъ у учащихся.

Цѣна 2 рубля.

МОСКВА
1908.

ИЗДАНІЕ
Т-ва И. Д. Сытина.

figuur B3.2: Titelblad van het boek van Sjochor'-Trotskij

euclidische aanpak of 'logisch-deductieve' stroming, zowel naar inhoud als didactische uitwerking. Zowel de eerste als de laatste richting worden door Sjochor'-Trotskij verworpen. Onder verwijzing naar onder meer Pestalozzi, maar met name naar Klein, Borel en Perry, stelt de auteur zich nadrukkelijk op het 'psychologische' standpunt, waarmee hij bedoelt, dat uitgegaan moet worden van de leerling.[24] De argumentatie is voornamelijk gestoeld op het falen van de traditionele methodiek in het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Als alternatief wordt daarom de 'intuïtieve' aanpak – de term 'intuïtie' wordt bij herhaling gebruikt – gepropageerd. Een nauwkeurige bepaling van dit begrip wordt niet gegeven; éénmaal wordt het omschreven als 'spontaan inzicht'.

Sjochor'-Trotskij voorzag een leergang volgens twee 'etappes'. De eerste diende een concreet handelende, aanschouwelijke, intuïtieve gang door de gehele stof te zijn, waarbij planimetrie en stereometrie als een geheel beschouwd werden. Tijdens

de tweede etappe zou dezelfde stof in een 'systematische cursus' opnieuw ter hand genomen moeten worden. De aanleiding tot deze hernieuwde bestudering zou door de eerste cursus opgewekt dienen te worden. Het door ons bestudeerde boek behelst alleen de eerste etappe. Als eisen voor deze propedeutische of basiscursus, golden:

- eenvoud en geleidelijkheid
- aanschouwelijkheid
- opwekken van 'aanhoudende interesse'
- zelfwerkzaamheid
- starten met 'toepasselijke, doeltreffende zintuigelijke waarneming'.

Als uitgangspunten staan met name ervaring (informele kennis), waarneming en doelmatige experimenten in de omringende ruimte centraal. Sjochor'-Trotskij spreekt zelfs over meetkunde als een tak van de natuurwetenschap: 'In het school- en in het buitenschoolse leven hebben de leerlingen reeds veel waarnemingen aan ruimtelijke vormen gedaan, en ze doen die nog voortdurend. De school hoeft haar aandacht alleen te richten op de verbetering en aanvulling van deze waarnemingen met nieuwe' (Sjochor'-Trotskij, 1908, p. XX). Hoezeer het daarbij om het vormen van een attitude gaat, blijkt uit het belang dat Sjochor'-Trotskij hecht aan het procesmatige aspect van het leren: 'De zelfwerkzaamheid moet inhouden het *proces* zelf van het *ontstaan* van de gegeven voorstelling, het *proces* zelf van de *vorming* van het gegeven begrip of het gegeven idee, het *verloop* van de *redenering* zelf' (Sjochor'-Trotskij, 1908, p. XVII).

Berekeningen, zowel getalsmatig als algebraïsch, worden zoveel mogelijk vermeden. Definities dienen op een genetische wijze uit voorbeelden te ontstaan. Ruimtelijke tekeningen worden uit de hand gemaakt volgens wat de schrijver noemt 'instinctief perspectief'. Later volgt meer systematisch het principe van de parallelprojectie als een methode om stereometrische figuren te tekenen en te begrijpen. De start van de cursus is bedoeld voor leerlingen van tien, elf of twaalf jaar. Sjochor'-Trotskij zegt in zijn inleidende opmerkingen dat hij met het ontwikkelen van zijn methode al meer dan een kwart eeuw in theoretische en praktische zin is bezig geweest. In een noot vermeldt hij dat hij al omstreeks 1892 hierover in het blad *Russische Scholen* had gepubliceerd (Sjochor'-Trotskij, 1908, p. XXI).

Sjochor'-Trotskij en mevrouw Ehrenfest

Tussen 1901 en 1910 gaf Sjochor'-Trotskij cursussen voor leraren in Sint Petersburg, die door mevrouw Ehrenfest zijn voltooid. Er is in die tijd dus direct contact geweest tussen deze beide didactici. Het is derhalve aannemelijk dat mevrouw Ehrenfest op de hoogte is geweest van Sjochor'-Trotskij's eerdere activiteiten.

Allereerst vallen de overeenkomsten in terminologie van hun meetkundeboeken

op, al direct tot uiting komend in de titels: *Meetkunde in opgaven* en *Übungensammlung*. Maar ook vergelijking van de uitgangspunten en doelen van beide didactici maakt duidelijk hoe zeer hun opvattingen overeenstemden. Beiden wijzen zij de formele logisch-deductieve aanpak af en beiden achten de intuïtieve aanpak de enig juiste. Ook gaan zij beiden uit van het genetisch-psychologische standpunt. Beiden zijn overtuigd van een rijping van het vermogen tot abstract denken, waarom volgens beiden een propedeutische meetkundecursus vooraf dient te gaan aan een meer systematische behandeling. Wel stelde Sjochor'-Trotskij daarin omvangrijkere eisen dan mevrouw Ehrenfest en zag mevrouw Ehrenfest de bekroning van het geheel in een zuiver axiomatische aanpak voor de leeftijd van zestien tot achttien jaar. Het principe van de zelfwerkzaamheid en van het werken met concreet materiaal in de propedeutische cursus was voor beiden een eis. De realiteit is voor beiden het startpunt voor de meetkunde, terwijl we ook bij beiden het standpunt zien dat de meetkunde in deze fase van het leerproces een sterk natuurkundig karakter heeft. Beiden menen dat men reeds op jonge leeftijd (tien à twaalf jaar) met de propedeuse kan beginnen. Tevens treffen wij bij beiden het standpunt van de ongedeeldheid van planimetrie en stereometrie aan. Over het leren denken, dat bij mevrouw Ehrenfest zo'n belangrijke rol speelde, hebben wij bij Sjochor'-Trotskij niets gevonden.

De overeenkomsten in uitgangspunten van beide didactici zijn derhalve frappant. Bij lezing van Sjochor'-Trotskij's algemene inleiding, dachten wij aanvankelijk daarmee ook het aanknopingspunt gevonden te hebben voor de *Übungensammlung* van mevrouw Ehrenfest. Nadere bestudering van de feitelijke inhoud van Sjochor'-Trotskij's *Meetkunde in opgaven* uit 1908 maakt echter duidelijk dat dit leerboek voor die tijd weliswaar progressief genoemd werd, maar vergeleken met een goed Duits of Nederlands vormleerboek, zoals we die in deel A van deze studie hebben leren kennen, is het toch niet zo spectaculair. De stijl is nogal wijdlopig en het is methodisch sterk voorschrijvend.

De praktische ideeën van mevrouw Ehrenfest uit de *Übungensammlung* hebben een veel realistischer gehalte en zijn veel creatiever en origineler dan die van Sjochor'-Trotskij. Bovendien hebben verschillende ervan een sterk paradigmatisch karakter, iets dat wij bij Sjochor'-Trotskij niet hebben kunnen waarnemen. Uiteindelijk blijft de praktische uitwerking van Sjochor'-Trotskij toch weer dicht bij de schoolse leerstof van de meetkunde. Het originele karakter van de *Übungensammlung* krijgt hierdoor nog een extra dimensie.

Meetkunde in de Wiskunde Werkgroep van de WVO

Wij staan thans even stil bij het werk van de Wiskunde Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs (WVO)[25], die voor de ontwikkeling van het Nederlandse wiskundeonderwijs van cruciaal belang is geweest.[26] Omdat in deze werkgroep vertegenwoordigers van de verschillende richtin-

gen zitting hadden, werd een platform geschapen waar de discussies in constructieve sfeer konden plaatsvinden. De werkbasis werd nog verbreed doordat er ook contacten met Kohnstamm en zijn medewerkers van het Nutsseminarium in Amsterdam ontstonden (zie B4). In de jaren vóór de Tweede Wereldoorlog waren het aanvankelijk meetkundeonderwijs en de aansluitingsproblematiek tussen het lager en het middelbaar onderwijs de belangrijkste onderwerpen van onderzoek.[27] Wij bepalen ons alleen tot het meetkundeonderwijs.

De logicus E.W. Beth (1908-1964), zoon van H.J.E. Beth, hield in 1937 een voordracht voor de werkgroep over 'Doel en zin van het meetkunde-onderwijs'. Als uitkomst van de discussie werden vijf stellingen geformuleerd, waarvan de eerste twee als volgt samengevat kunnen worden.

I Doelen (zin) van het meetkundeonderwijs zijn gelegen in:
   a scholing van het verstand
   b pedagogisch-ethische en esthetische waarde
   c cultureel-sociale waarde
   (het nuttigheidsaspect bleef buiten de conclusies)

II De meetkunde kan de onder Ia genoemde vorming bij uitstek doeltreffend bevorderen. En wel omdat
   - visuele voorstellingen een brug kunnen vormen naar het zuivere abstracte denken
   - met betrekkelijk eenvoudige gegevens de meetkunde al tot logische redeneringen kan leiden
   - de meetkunde steeds de doelmatigheid van het logisch redeneren 'in het licht stelt' (E.W. Beth, 1938, p. 241).

Daarna volgden nog drie stellingen van meer voorwaardelijke aard:
a Het toen vigerende meetkundeonderwijs voldeed niet aan de onder I gestelde eisen.
b Het onderwijs zou voor alle leerlingen wenselijk zijn.
c Er zou pas begonnen moeten worden met een dergelijk onderwijs wanneer de eindfase der ontwikkeling van de intelligentie was ingetreden.

De scholing van het verstand als genoemd onder Ia werd als volgt toegelicht:

> '1. zich leren oriënteren,
> 2. leren ordenen, d.i. hoofdzaken van bijzaken scheiden (...) het probleem 'verwiskundigen',
> 3. leren combineren, d.i. systematisch leren opbouwen, logisch redeneren,
> 4. leren de gevolgde gedachtengang nauwkeurig te formuleren, d.i. taalbeheersing,
> 5. leren zien, dat het onderhavige geval een onderdeel is van een groter geheel, denksprongen naar wijder mogelijkheden leren maken.' (E.W. Beth, 1938, p. 242)

Ook de argumenten van ethische en culturele aard werden nader toegelicht. Wij vermoeden dat de toelichting op de intellectuele scholing ingegeven was door Kohnstamm. Voor het eerst zien we dat aan het meetkundeonderwijs ook andere aspecten (oriënteren, ordenen, combineren, redeneren, formuleren, generaliseren, visualiseren) dan alleen het logisch redeneren werden toegedacht, waarmee een ruimere didactische context werd gecreëerd. Hierdoor kon de discussie over aard en doel van het meetkundeonderwijs op een hoger plan worden voortgezet.

Men sloeg de handen ineen en stelde een werkprogramma op ter herziening van het meetkundeonderwijs, waarbij echter de grootste voorzichtigheid werd betoond ten aanzien van de wijze waarop dit zou dienen te geschieden. Men wilde namelijk eerst nog onderzoeken of deze 'principieel' (à la Ehrenfest) dan wel 'zo goed mogelijk aansluitend bij het historisch gegroeide, tot een voorbereidende cursus met eventueel enige veranderingen in de huidige behandelingswijze' (à la Dijksterhuis' opvatting) moest zijn. Tevens of de herziening 'zuiver didactisch, dan wel mede van wiskundigen aard' moest zijn. Ook werd de wens uitgesproken te onderzoeken 'hoe het onderwijs op de lagere scholen zou zijn in te richten, opdat daar een goede grondslag voor het bouwwerk der middelbare scholen gelegd worde'. En ten slotte diende tot een 'zuivere toetsing' gekomen te worden 'van het ogenblik, waarop het meetkunde-onderwijs aan den mens met vrucht gegeven kan worden'; zowel in 'biologische als in psychologische' zin (E.W. Beth, 1938, p. 243). Als resultaat hiervan werden er in 1938 drie kleine studiegroepen ingesteld met de volgende opdrachten:

- 'uitwerking van de propedeutische cursus 'in de geest van mevrouw Ehrenfest''
- 'meetkunde-onderwijs aan twaalfjarigen, in verband met de ontwikkeling van de denkpsychologie'
- 'minimum-eisen (...) om de culturele waarde na het planimetrie-onderwijs tot zijn recht te doen komen.'

E.W. Beth stelde op eigen kracht een onderzoek in naar het tweede punt, waarvan de resultaten in 1939 in *Euclides* werden gepubliceerd. Er werd een overzicht gegeven van de toen voorhanden zijnde nationale en internationale onderzoeksresultaten op het gebied van de psychologie van het leren van wiskunde, hetgeen tot een mager resultaat leidde. Zijn belangrijkste conclusie was 'dat de verwachting, in de resultaten van de experimentele psychologie positieve richtlijnen te vinden voor de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs, niet wordt vervuld'; op grond hiervan roept hij op tot: 'bescheidenheid, tot matiging van onze kritiek op het bestaande en tot het vermijden van al te revolutionaire hervormingsplannen' (E.W. Beth, 1939, pp. 19-20). Verder gaat hij nog in op de vormende waarde en het leren denken, waarover in het volgende meer. De oorlog van 1940-'45 stond in de weg om tot concrete resultaten te komen in de eerste en de laatste commissie. Wel heeft P.J. van Albada (1905-1997) op eigen initiatief reeds tijdens de oorlogsjaren een inleidende meetkundecursus ontwikkeld, die hij na de oorlog heeft uitgewerkt.

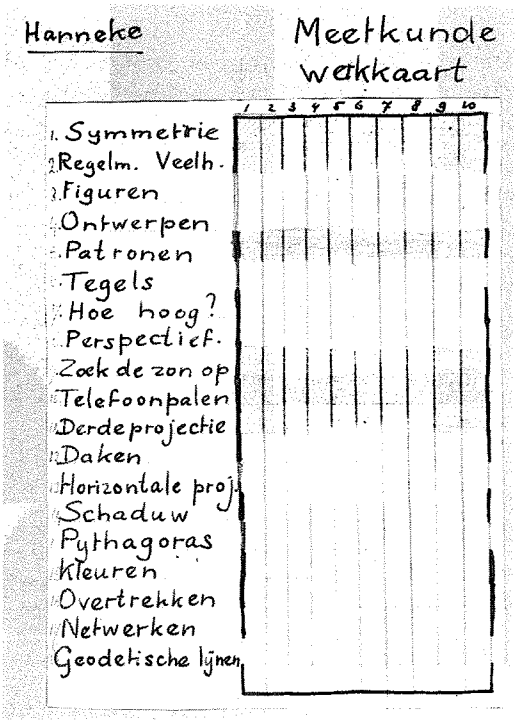
De meetkundecursus van Van Albada

Uit een beschrijving van de meetkundeleergang van Van Albada zien wij een beeld oprijzen dat voor die tijd het meest met de ideeën van mevrouw Ehrenfest strookt.[28] Van Albada ontwierp deze cursus voor het Montessori Lyceum in Rotterdam. Het was een vijfjarig programma, dat was verdeeld over een inleidende cursus (eerste jaar), de systematische opbouw (tweede, derde en vierde jaar) en een formeel-systematisch overzicht (vijfde jaar). In de inleidende cursus herkennen we verschillende activiteiten, die we ook in *Übungensammlung* van mevrouw Ehrenfest zijn tegengekomen. Er wordt uitgegaan van het feit dat kinderen op twaalfjarige leeftijd al een arsenaal van intuïtieve meetkundige noties – informele kennis – tot hun beschikking hebben als gevolg van hun fysieke functioneren in de ruimte. Van Albada omschrijft dit uitgangspunt als volgt:

> 'Our teaching of geometry will only 'strike root' if we take the existing image of space as our starting point. Children have a liking for the world they live in and when they become aware that geometry can be a help to surveying that world better they also get a liking for geometry. Their physiological image of space is a subjective one; the outlook of things depends on their place and orientation with regard to the observer. Their interest is roused when the instruction material helps them to get aware of that subjectivity. Their physiological image of space was formed by sight perceptions and muscle perceptions. In order to further connect geometry with space as it is known to them, hands and eyes should be engaged in the investigation.'
> (Van Albada, 1958, p. 82)

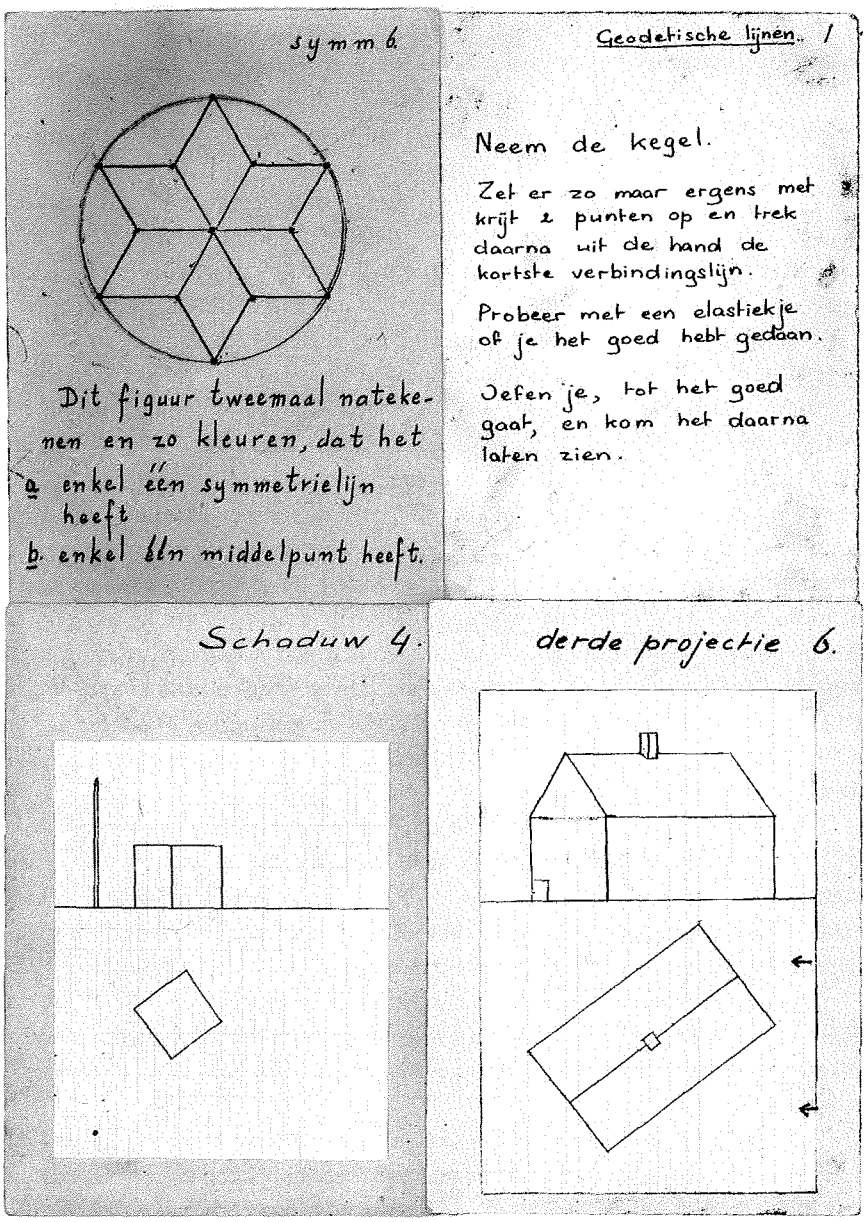
De inhoud van deze cursus moet in vergelijking met alle toen bestaande leergangen (of ze nu logisch-deductief, empirisch of van een of andere mengvorm waren) zeer progressief genoemd worden. Lijn- en draaisymmetrieën, vlakvullingen, centrale projectie (schaduwen en perspectieftekenen), parallelprojectie (schaduw van de zon) en orthogonale projectie (boven-, voor- en zijaanzichten), vergelijking van meetkundige eigenschappen en relaties op verschillende lichamen (afstanden in het euclidische vlak, op de bol, de kegel en de cilinder), regelmatige veelhoeken en veelvlakken, topologie (kleurproblemen, doorloopbaarheid van grafen, Möbiusband). De aard van de activiteiten wordt gekenmerkt door het werken met concrete materialen, modellen en foto's, door tekenen, meten, construeren, knippen en kleuren. Het esthetische element (het maken van mooie figuren) wordt ook als belangrijk doel gezien. In figuur B3.3 zijn enkele authentieke werkkaarten weergegeven. In figuur B3.4 zien we op de aftekenkaart van Hanneke de verschillende onderwerpen, die in de inleidende cursus aan de orde kwamen.[29]

Het doel was om, uitgaande van de door de kinderen vóór hun twaalfde jaar passief opgedane meetkundige noties, deze door middel van activiteiten bewust te maken en (soms in concreto) toe te passen. Van Albada heeft, zeker voor die tijd, een bijzondere inleidende cursus ontworpen, die overigens nooit officieel is uitgegeven. Er werden hogere inhoudelijke eisen gesteld dan mevrouw Ehrenfest in haar



figuur B3.3: Aftekenkaart voor de leerling

Übungensammlung voor ogen had. In ieder geval zijn wij, afgaande op de ons ter beschikking staande beschrijving, verrast over het hoge niveau van deze leergang. Ook in zijn algemeenheid is een frappante overeenkomst met het werk van mevrouw Ehrenfest te signaleren. Voor het tweede systematische deel wilde hij ook zoveel mogelijk aanschouwelijk te werk gaan, hetgeen betekende dat aanschouwelijk evidente stellingen geen bewijs behoefden. Het meest opvallend is de derde trap van de totale leerlijn, waarin de gehele theorie werd herhaald en geordend. Het aantal onbewezen stellingen diende teruggebracht te worden tot een minimum, terwijl aparte aandacht aan het parallellenaxioma besteed diende te worden, ook in verband met een niet-euclidische meetkunde; dit alles 'in order to examine for which theorems an absolute proof might be obtained'. En zo zijn we dus precies op het axiomatische niveau dat ook door mevrouw Ehrenfest (en trouwens ook door Dijksterhuis) aan het einde van de gehele meetkundeleergang nagestreefd werd.[30]



figuur B3.4: Voorbeelden uit Van Albada's cursus
Linksonder: Kubus en kaars; construeer de schaduw
Rechtsonder: De derde projectie van het huis te construeren

Overige ontwikkelingen tussen 1920 en 1940

Uit het voorgaande zou het kunnen lijken alsof de periode 1920-1940 hoofdzakelijk door mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis werd beheerst. Hun discussies en werkzaamheden voltrokken zich echter op afstand van de modale praktijk. Die werd hoofdzakelijk bepaald door de voorhanden zijnde leerboeken, waaruit een beeld valt af te leiden van de feitelijke praktische schoolsituatie.

Treffers heeft in 1969, onder meer op grond van de leerboeken, een analyse gemaakt van uitgangssituatie, doelstellingen, didactische werkvormen en de leertheoretische aspecten van het aanvankelijk meetkundeonderwijs van die periode. Uit dit onderzoek komt naar voren dat de uitgangssituatie 'omtrent de mogelijkheden van het twaalfjarig kind m.b.t. het wiskunde-onderwijs' hoofdzakelijk 'op subjektief psychologische inzichten' of op 'antropologische overtuigingen' gebaseerd waren (Treffers, 1969, p. 116). In het algemeen waren dus gedurende de periode 1920-1940 ontwikkelingspsychologische inzichten in het wiskundeonderwijs nog afwezig. Over de doelstellingen van het meetkundeonderwijs concentreerden de discussies zich voornamelijk rond de vraagstelling van de vormende waarde, waarop we nog nader zullen ingaan (zie B5). De vigerende werkvormen waren in het algemeen (nog steeds) gebaseerd op de herbartiaanse formele leertrappen. De doceermethode bleef de meest gangbare in het wiskundeonderwijs. Leertheoretische aspecten werden nog niet in de didactische beschouwingen betrokken. Een uitzondering was het werk van Turkstra, die in 1934 een boekje met de veelbelovende titel *Psychologisch-Didactische Problemen bij het onderwijs in de Wiskunde aan de Middelbare School* publiceerde. Maar dit boek was van algemene aard en bevatte geen praktisch-didactische aanwijzingen.[31]

Al met al blijkt dat het denken over een gedegen onderbouwing van het aanvankelijk meetkundeonderwijs voor de Tweede Wereldoorlog nog maar net op gang gekomen was. De discussie tussen mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis werd echter de aanleiding voor het ontstaan van het vaktijdschrift *Euclides*.[32] Tevens ontstonden er twee verenigingen voor wiskundeleraren: Liwenagel in 1921 en Wimecos in 1925.[33] Zo ontstond de basis voor een vakdidactisch platform, waar we ook de reeds genoemde Wiskunde Werkgroep van de WVO toe moeten rekenen. Hierdoor werd de vakdidactiek, eens door Versluys aangezwengeld, nu ook min of meer formeel geconstitueerd.

De oorlogstijd onderbrak de in gang gezette ontwikkelingen. In het volgende hoofdstuk B4 zullen we de draad van ná 1945 weer oppakken en zien hoe datgene, wat in de nu beschreven periode in gang gezet was, door een nieuwe generatie didactici voortgezet zal worden.

(Samenvattende conclusies van B3: zie B6.)

congruentie, meetkundige plaatsen, constructies, bijzondere vierhoeken. Gemiddeld zo'n vijftigtal stellingen en hun bewijzen vormden de theorie, daarna ongeveer 250 vraagstukken als toepassingen. Er waren gradaties van logische strengheid aan te wijzen; ook in methodische opzet, zoals in een aantal boeken die een aanpak voorstonden waarin meer nadruk op het constructie-aspect werd gelegd. Ook de inleidingen konden afwijkend zijn, maar in leerstof en methodische vorm ('gegeven – te bewijzen – bewijs') verschilden de boeken uiteindelijk weinig.[1] Met deze boeken bepaalden de 'gematigd traditionelen' het modale onderwijs.

de puristische traditionelen

De vernieuwers binnen de logisch-deductieve richting stonden een meer wetenschappelijke aanpak voor. Waar de gematigden berustten in de gang van zaken van alledag, waarbij het met de grondslagen en wiskundige strengheid niet zo nauw genomen werd, wilden de 'puristische traditionelen' het meetkundeonderwijs juist zo zuiver mogelijk opzetten.

De meest extreme vorm van een streng axiomatische opzet vinden we in het werk van Schogt. Deze meetkundecursus omvat 18 axioma's, 5 postulaten, 266 stellingen, 24 werkstukken en bijna 1500 vraagstukken. In de inleiding van het vraagstukkenboek stelt de auteur dat hij 'formeel-logische quaesties (omkeering, contrapositie)' reeds vroeg ter sprake brengt, omdat hij ondervonden had 'dat deze onderwerpen den leerlingen opmerkelijk weinig moeilijkheden' gaven. Hoe formeel en anti-aanschouwelijk deze aanpak was, illustreren wij met het volgende voorbeeld:

> 'Helften van congruente lijnstukken zijn congruent.
> Onderstelde: AB = A′B′, PQ is de helft van AB, P′Q′ is de helft van A′B′.
> Gestelde: PQ = P′Q′
> Bewijs: Er zijn drie gevallen denkbaar: PQ > P′Q′, P′Q′ > PQ en PQ = P′Q′.
> Was PQ > P′Q′, dan was volgens stelling 7 PQ + PQ > P′Q′ + P′Q′ en daar P′Q′ + P′Q′ = A′B′, volgens stelling 4 AB > A′B′. Dit is in strijd met het onderstelde, dat AB = A′B′, dus kan het geval, dat PQ > P′Q′ is, zich niet voordoen. Evenzo bewijst men, dat P′Q′ > PQ zich niet kan voordoen, omdat daaruit zou volgen, dat A′B′ > AB, hetgeen ook in strijd is met het onderstelde. Dus moet PQ = P′Q′ zijn.
> Hiermede is de stelling bewezen.' (Schogt, 1929a, p. 13)

Dijksterhuis en H.J.E. Beth (1880-1952) prezen Schogts werk, maar zijn methode heeft nooit echt voet aan de grond gekregen.

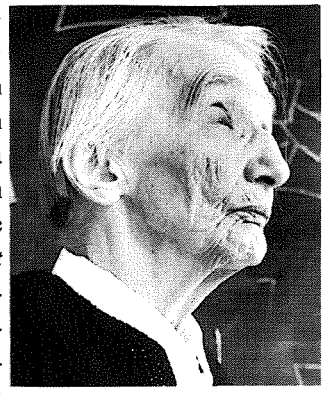
Het hoofdstreven van de aanhangers van de puur-logisch-deductieve stroming was het zuiver leren denken. Dit was eigenlijk het kernthema van de discussies, die zich in de jaren dertig in het vakblad *Euclides* voltrokken. Juist dit tijdschrift werd geleid door de meest fervente aanhangers van de logisch-deductieve richting: J.H. Schogt, H.J.E. Beth, Dijksterhuis zelf en de befaamde schoolboekenauteur Piet Wijdenes (1872-1972). De laatstgenoemde was de meest praktische didacticus, maar toch ook een purist in taal en vorm. Met *Euclides* hadden zij zich geen betere naam

voor het tijdschrift kunnen wensen. Het blad werd dan ook voornamelijk gevuld met artikelen uit de logisch-deductieve hoek. Veel aanhang ontvingen de logisch-deductieven uit de academische wereld, hoewel er uitzonderingen te noemen waren, zoals van de wiskundige D. van Dantzig (1900-1959) en de significus G. Mannoury (1867-1956).

Maar er bestond al sinds jaar en dag onvrede met de logisch-deductieve aanpak voor de inleiding in de meetkunde, zelfs in gematigde vorm. Het was mevrouw Ehrenfest, die de strijd tegen de gevestigde stroming van de logisch-deductieve aanpak opnieuw aanbond. Eerst besteden we kort aandacht aan haar achtergrond en activiteiten, alsook aan die van Dijksterhuis.

Mevrouw Ehrenfest: activiteiten en opvattingen

De uit Rusland afkomstige Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa is een van de meest interessante persoonlijkheden in het Nederlandse wiskundeonderwijs van deze eeuw geweest.[2] Al spoedig na haar aankomst in Nederland in 1912 kreeg zij contact met Reindersma en vonden er didactische bijeenkomsten plaats. In 1915 verscheen het eerste artikel in de Nederlandse taal van haar hand.[3] In 1924 volgde de brochure: *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?*, die de pennenstrijd met Dijksterhuis veroorzaakte. Haar beroemde *Übungensammlung* volgde in 1931. In 1951 ontstond een discussie tussen mevrouw Ehrenfest en Freudenthal: *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?*, waarover meer in B5. Vrijwel vanaf de oprichting van de Wiskunde Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs in 1936 was mevrouw Ehrenfest lid van deze belangrijke groep.[4]



Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa

De tijd die mevrouw Ehrenfest in Göttingen bij Klein en Hilbert gestudeerd heeft, is van doorslaggevende betekenis geweest voor haar latere opvattingen over inhoud en didactiek van de wiskunde. Klein was een begenadigd docent, hij drong aan op zelfwerkzaamheid van de studenten, gebruikte bij zijn colleges concrete modellen, nam ook de elementaire meetkunde als object van studie in ogenschouw en legde de nadruk op de essenties en op het geheel van een theorie of leergang. Allemaal elementen die we in het werk van mevrouw Ehrenfest weerspiegeld zullen zien. Bij Hilbert leerde zij hoe de grondslagen van de meetkunde kritisch te onderzoeken en welke implicaties dit kan hebben voor een op te bouwen logisch systeem. Kennis van dergelijke ontwikkelingen, ook in historisch opzicht, achtte zij van groot belang voor de leraar. In haar eerste artikel (1915) haalt zij een door Hilbert geïntro-

B4 Opmaat tot grote veranderingen
de tijd van de Van Hieles en Freudenthal (1945-1970)

Inleiding

In de periode van 1945 tot 1970 vinden maar liefst twee leerplanwijzigingen voor het voortgezet onderwijs plaats. Eerst, in 1958, nog een vrij gematigde voor de HBS en het Gymnasium, die als een uitvloeisel gezien kan worden van een lange tijd van onvrede met het toen vigerende programma. Maar tien jaar later, in 1968, voltrekt zich als gevolg van de internationale New Math-beweging een ware omwenteling in het Nederlandse wiskundeonderwijs. Beide ontwikkelingen worden in dit hoofdstuk beschreven en geanalyseerd, uiteraard in het bijzonder met het oog op het meetkundeonderwijs.

Ook wordt er in deze periode in Nederland voor het eerst wetenschappelijk onderzoek naar het aanvankelijk meetkundeonderwijs gedaan. Een historische terugblik op de betekenis van deze onderzoeken en experimenten, die door een aantal practici als Mooij, Boermeester, Troelstra, De Groot en anderen zijn verricht, vormt de kern van dit hoofdstuk. Met name besteden we aandacht aan de dissertaties van Van Hiele-Geldof en Van Hiele. We baseren ons daarvoor op de originele teksten, maar maken ook gebruik van het werk van Treffers (1969) en van Treffers en De Moor (1974).

Wat de opkomst van de New Math-beweging in de jaren zestig betreft, beperken we ons in dit hoofdstuk hoofdzakelijk tot het aanvankelijk meetkundeonderwijs. In deel C zal de betekenis van de New Math voor het Nederlandse basis- en voortgezet onderwijs opnieuw aan de orde komen in verband met de ontwikkelingen in de jaren zeventig.

Na de oorlog ging Hans Freudenthal zich in toenemende mate met het wiskundeonderwijs bezighouden, en wel op alle niveaus: van kleuterschool tot universiteit. We geven aan het eind van dit hoofdstuk een korte impressie van Freudenthals betrokkenheid op het wiskundeonderwijs gedurende de periode tot 1970. In deel C zullen we beschrijven hoe Freudenthals opvattingen binnen het werk van de Wiskobasgroep tot verdere ontwikkeling kwamen en in praktische zin toegepast werden.

Ook nu komt het lager onderwijs nauwelijks aan de orde, omdat er geen meetkunde op de lagere school voorkwam. Wel besteden we kort aandacht aan de meetkunde zoals die aan het eind van de jaren zestig in enkele Nederlandse bewerkingen van basisschoolmethoden van de New Math-beweging voorkwam.

Op deze wijze hopen wij een overzicht te creëren van de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs vanaf 1945 tot ongeveer 1970. Om echter ook enige indruk te krijgen van de maatschappelijke context waarin de veranderingen zich afspeelden, besteden we eerst kort enige aandacht aan de algemene onderwijsveranderingen.

Algemene veranderingen in het onderwijs na 1945

Het Nederlandse onderwijs heeft na de Tweede Wereldoorlog een gigantische groei doorgemaakt, waarvan onderstaand overzicht een globale indicatie geeft (Boekholt en De Booy, 1987, p. 292):

	voortg. ond. 12-18-jarigen	beroepsonderwijs 12-18-jarigen	hoger onderwijs 18-25-jarigen
1930	**11%**	**6%**	**1%**
1950	**19%**	**15%**	**2%**
1975	**45%**	**37%**	**7%**

In 1950 bedroeg het aandeel van de totale rijksuitgaven voor onderwijs 7,3%; in 1975 was dit 24,5% (Boekholt en De Booy, 1987, p. 238). De grootste onderwijskundige operatie was de invoering van de Mammoetwet in 1968, waarmee het gehele voortgezet onderwijs onder één wet gebracht werd. De overheid ging naast haar 'distributieve beleid' (het scheppen van voorwaarden) een toenemend 'constructief beleid' voeren. De Landelijke Pedagogische Centra ontstonden, later de Schooladviesdiensten, het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling (Cito) en eind jaren zeventig de Stichting voor Leerplanontwikkeling (SLO). Ten slotte noemen we het ontstaan van de CML's (Commissie Modernisering Leerplan), die in de jaren zestig voor de afzonderlijke vakken of vakgebieden in het leven geroepen werden met als opdracht de inhoudelijke en didactische vernieuwingen van de leervakken aan te vatten. Op het werk van de CML-Wiskunde (CMLW) zullen we in het volgende nog ingaan.

In het lager onderwijs veranderde er in de eerste vijfentwintig jaar na de oorlog eigenlijk heel weinig. Pas tegen het eind van de jaren zestig 'kwam er én bij de overheid én in de onderwijswereld weer de geneigdheid zich te bezinnen op het lager onderwijs en werd de roep om verandering luider, zonder dat dit overigens vooreerst tot fundamentele wijzigingen over de gehele linie leidde' (Boekholt en De Booy, 1987, p. 249). Wel kwam in 1955 de eerste wet op het kleuteronderwijs tot stand. Ook werd in 1952 de wet op het kweekschoolonderwijs aangenomen, welke in een opleiding van vijf jaar voorzag voor diegenen, die via de MULO instroomden en van drie jaar voor degenen, die in het bezit waren van een HBS- of Gymnasium-diploma. De hoofdakte werd geïncorporeerd in de totale opleiding. In 1968 werd de kweekschool omgedoopt tot Pedagogische Academie, die driejarig werd en tenminste een HAVO-vooropleiding eiste.

De acties van de Wiskunde Werkgroep (WWG) vanaf 1945

In B3 hebben we kennisgemaakt met de Wiskunde Werkgroep (WWG) en haar activiteiten van vóór 1940. Direct na de oorlog nam deze groep met groot enthousiasme

de draad weer op. Waren de paar pioniers van toen vooral afkomstig uit de Nieuwe Schoolbeweging, na de oorlog zou het ledental groeien, ook met wiskundeleraren van de meer traditionele scholen. Naast een aantal oude bekenden, waaronder mevrouw Ehrenfest, komen we nu ook nieuwe namen tegen, waarvan verschillenden een rol zullen gaan spelen in de verdere ontwikkelingen. Vanaf 1950 nam Freudenthal het voorzitterschap van de WWG op zich. De WWG groeide uit tot een club, waarvan vrijwel alle belangrijke didactici lid waren.

Niet door de vakverenigingen (Wimecos en Liwenagel), maar door de WWG werd nu in eerste instantie het werkelijk innovatieve werk aangezet. Deze actieve rol is de WWG op verschillende manieren tot in de jaren zestig blijven vervullen.[1] De WWG belegde conferenties, stelde studiecommissies in, schreef rapporten, gaf officiële publicaties uit, startte vanaf 1953 een eigen (gestencild) blad onder de naam *Mededelingenblad van de Wiskunde Werkgroep der WVO*. Vanaf 1962 werd ook *Euclides* een officieel orgaan van de WWG. De werkzaamheden tussen 1945 en eind jaren zestig zijn als volgt te periodiseren. Tot 1952 stond het opstellen van een nieuw leerplan voor het VHMO centraal. Daarna ontstond in de jaren vijftig een toenemende belangstelling voor de didactiek, met name toegepast op het aanvankelijk meetkundeonderwijs. In de jaren zestig was het de opkomst van de moderne wiskunde, die centraal stond.[2] Na het ontstaan van het IOWO in 1971 taanden de activiteiten van de WWG met als gevolg dat deze groep begin jaren zeventig ophield te bestaan. Op de leerplanwijziging van 1958 en wat daaraan voorafging, gaan we nu eerst in.

Kort overzicht van de veranderingen tussen 1945 en 1958

Na de oorlog veranderde er aanvankelijk niets. Nog steeds werd voor het wiskundeprogramma voor de HBS uitgegaan van het leerplan van 1937, dat weer stoelde op het ontwerp van Beth en Dijksterhuis uit 1925 (zie B3).[3] Eind 1948 stelde de WWG echter een aantal commissies in met als doel een eensluidend programma voor Gymnasium-B en HBS-B op te stellen; voor elk vak (algebra, meetkunde, analytische meetkunde, goniometrie en beschrijvende meetkunde) een aparte commissie. In 1953 werd dit voorstel onder de titel 'Het wiskunde programma voor het V.H.M.O.' in *Euclides* gepubliceerd.[4]

In de toelichting op dit voorstel was het argument van de vormende waarde nog slechts op de achtergrond te herkennen. Met name het praktische nut, maar dan vooral als hulpwetenschap voor andere vakken (ook de sociale wetenschappen), werd als motivering voor het wiskundeonderwijs naar voren gebracht. Er werden fikse schrappingen in de leerstof voorgesteld, vooral in de gekunstelde onderdelen van de algebra en goniometrie. De rekenkunde voor de eerste klas van de HBS werd afgevoerd. Als nieuwe vakken werden 'inleiding in de differentiaal- en integraalrekening' en 'statistiek en waarschijnlijkheidsleer' voorgesteld. Over de meetkunde en haar motivering werd gesteld:

> 'Ten aanzien van de meetkunde hebben we het criterium van het practisch nut niet vooropgesteld. Ook zonder diep in te gaan op de vraag, in hoeverre het meetkundig-onderwijs vormende waarde (b.v. voor de ontwikkeling van het denken of van ruimte-inzicht) bezit, hebben we, met het oog op de culturele betekenis van dit vak, gemeend, dat een scherpe breuk met de traditie niet verantwoord was. Het is de leidende bedoeling van het voorgestelde meetkunde-programma, om de leerling inzicht te geven in een logisch opgebouwd systeem, dat zekere afgerondheid bezit; omwegen en afdwalingen worden zoveel mogelijk vermeden.' (*Euclides 28*(5), p. 209)

De feitelijke doelstelling van de meetkunde was dus niet veranderd, zij het dat ook hier in de stof flink geschrapt werd.[5]

In 1954 werd door een commissie van Wimecos (vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en cosmografie aan de HBS'en), bestaande uit een aantal bekende didactici, Alders, Bunt, Holwerda, Vredenduin en Wansink, een nieuw leerplan voor de HBS-B opgesteld, dat vrijwel identiek was met het voorstel van de WWG uit 1953. Zelfs de beschrijvende meetkunde moest verdwijnen. De vernieuwingsvoorstellen luidden als volgt:

- de meetkunde wordt in de eerste klas intuïtief ingeleid
- trigonometrie wordt vereenvoudigd en bij de planimetrie ondergebracht; goniometrische vergelijkingen en functies gaan naar het bovenbouwprogramma
- analytische meetkunde wordt op de HBS-B ingevoerd
- beschrijvende meetkunde wordt geschrapt; slechts één constructiemethode (scheve parallelprojectie) wordt bij de stereometrie behandeld
- differentiaal- en integraalrekening wordt een verplicht onderdeel van de algebra
- statistiek wordt ingevoerd als nieuw vak.

Snel daarna, in maart 1955, stelden de WWG, Wimecos en Liwenagel zich in een gemeenschappelijke vergadering achter het Wimecos-voorstel en behoefde het nieuwe leerplan voor wiskunde alleen nog een Koninklijk Besluit. Met uitzondering van het laatste punt – invoering van de statistiek – werden alle wensen gehonoreerd in het officiële leerplan van 1958, dat toen voor het gehele VHMO van kracht werd. Vanaf 1962 waren de eindexamenopgaven van HBS-B en Gymnasium-B dezelfde. Daarmee was niet alleen een eind gekomen aan de jarenlange onduidelijkheid van het leerplan Beth-Dijksterhuis, maar tevens werd het wiskundeonderwijs nu niet meer in de eerste plaats om de vormende waarde gemotiveerd.[6]

Voor de MULO, waar het programma uit eenvoudige planimetrie en algebra bestond, werden geen officiële veranderingen ingevoerd. Wel werden didactische experimenten uitgevoerd door de Wiskunde-werkgroep van de ULO-sectie van het Pedagogisch Centrum van de NOV.

Inleiding in de meetkunde in het programma van 1958

Over de aard van het aanvankelijk meetkundeonderwijs was echter nog lang niet het laatste woord gesproken. Reeds uit het voorstel van de WWG werd duidelijk dat nog steeds gevaren werd op het kompas van 'inzicht in een logisch samenhangend systeem'. In de beschrijving van dat programmavoorstel was – mogelijk om tactische redenen – iedere directe verwijzing naar de ideeën van mevrouw Ehrenfest, die deel uitmaakte van de betreffende subcommissie van de WWG, vermeden. Het Wimecos-voorstel durfde in haar formulering iets verder te gaan, sprak over 'een algemeen gevoel van onvoldaanheid' en bracht het volgende advies uit:

> 'Naar de mening van de Commissie zullen de resultaten van het aanvangsonderwijs verbeteren, als niet te spoedig wordt overgegaan tot de opbouw van een logisch systeem. De bedoeling van een dergelijke opbouw met behulp van definities, axioma's en stellingen moet door de leerlingen worden ingezien alvorens het zin heeft hen deze te laten bestuderen. Hiertoe dient de meetkundecursus met een intuïtieve inleiding aan te vangen. Deze inleiding behoeft niet van lange duur te zijn en kan geleidelijk overgaan in het logisch-systematische gedeelte. (...)
> Er wordt begonnen met een empirische en intuïtieve behandeling van een gedeelte van de meetkunde. Deze is zo ingericht, dat de leerlingen geleidelijk kennis maken met enkele belangrijke begrippen, vaardigheid krijgen in het gebruik van passer en liniaal en er als vanzelf toe worden gebracht eenvoudige, niet formele redeneringen te houden die het bewijzen van stellingen helpen voorbereiden. Eventuele redeneringen worden dus concreet gehouden en kunnen gegeven worden in de vorm van berekeningen. Om dit te bevorderen wordt onmiddellijk vanaf het begin gebruik gemaakt van de in millimeters verdeelde liniaal en van de gradenboog.'
> (*Euclides 30*, p. 154)

Gezien de term 'intuïtieve inleiding' en de omschrijving 'empirische en intuïtieve behandeling', kunnen we dus een zekere honorering van de gedachten van mevrouw Ehrenfest constateren, maar de inleiding hoefde 'niet van lange duur' te zijn. Het empirische aspect werd gekoppeld aan de 'in millimeters verdeelde' liniaal, passer en gradenboog, waarvan de passer en de niet-metende liniaal juist de instrumenten van de klassieke meetkunde zijn. Verwijzingen naar andere mogelijkheden in empirische zin werden niet genoemd, om maar te zwijgen van een meer radicale aanpak in de vorm van een propedeutische cursus. Er werd in feite alle mogelijkheid gelaten om toch weer snel over te stappen naar een logisch-deductieve opbouw van de vertrouwde euclidische meetkunde.

Wansink, die deze ontwikkelingen van dichtbij had meegemaakt, sprak in 1967 dan ook van een 'compromis' tussen de voor- en tegenstanders van een inleidende cursus in de geest van mevrouw Ehrenfest. Bij die tegenstanders behoorden onder meer Van Hiele-Geldof, Van Hiele en Boermeester, die juist in die tijd een aantal belangrijke onderzoeken over het aanvankelijk meetkundeonderwijs hadden gedaan. Dat er geen enkele opmerking over de noodzakelijkheid van een pedagogisch-didactische en leerpsychologische fundering werd gemaakt, maar wel de hele oude

reeks van berekeningen, evenwijdigheid, congruentie et cetera als inhoud werd opgesomd, stuitte 'bij tal van principiële voorstanders van een inleidende cursus begrijpelijkerwijze op verzet' (Wansink, 1967, p. 28).

In het officiële programma van 1958 voor Gymnasium en HBS werd alleen over een 'inleiding' van de meetkunde gesproken. Toch zouden toen vrijwel alle meetkundeboeken voor het VHMO met een korte 'intuïtieve' of 'inductieve' inleiding beginnen. Bekende boeken voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs in die periode waren bijvoorbeeld die van Vredenduin, Alders en Van der Neut. In feite was de uitwerking van de oorspronkelijke ideeën van mevrouw Ehrenfest op het aanvankelijk meetkundeonderwijs in het VHMO marginaal, maar de didactische en onderwijskundige discussies werden tezelfdertijd in een veel breder kader geplaatst, vooral omdat de didactiek van de meetkunde ook tot onderwerp van wetenschappelijk onderzoek werd verheven.

Het eerste didactische proefschrift

H. Mooij was in 1948 de eerste Nederlandse wiskundeleraar die op een didactisch onderwerp promoveerde; althans gedeeltelijk, want aan de dissertatie is nog een wiskundig onderwerp toegevoegd. Zijn hoofddoel was 'de wetenschappelijke belangstelling van zowel mathematici als psychologen en pedagogen' op het probleem van de wiskundedidactiek te vestigen. Het inhoudelijke aspect betrof het aanvangsonderwijs in de meetkunde, dat volgens Mooij niet volgens de logisch-deductieve methode moest worden onderwezen. Hij sloot zich aan bij de denkpsychologische opvattingen van Kohnstamm en de onderzoekingen van de pedagoog Prins.[7] Hierbij stond het zogenoemde leergesprek centraal. Dit betekende, dat in een door de leraar geleide klassendiscussie de leerlingen verslag doen van hun leeraanpak. In Mooij's uiterst kleine proefneming (hij vergeleek vier klassen, deels mét en deels zónder de methode van het leergesprek) werkte hij volgens de traditionele aanpak van het toenmalige meetkundeonderwijs.

Zijn bevindingen kunnen het best met zijn eigen woorden als volgt worden samengevat: 'De mening, dat door bespreking van de leermethode prestatieverbetering in de weergave van de geleerde les optreedt, wordt hier bevestigd. De goede oplossingen van de toepassingen zijn gering en van enige invloed van het klassegesprek is niets te bespeuren. Er treedt dus wel bij enkelen inzicht op hoe de les geleerd moet worden, maar verbetering van wiskundig begrip is niet te constateren' (Mooij, 1948, p. 68). De mogelijke oorzaak van de geringe inzichtverruiming zocht Mooij in het feit dat 'de kinderen van deze leeftijd nog niet rijp zijn voor meetkunde-onderwijs op de traditionele wijze' (Mooij, 1948, p. 69). Met deze gissing is tevens de methodologische en de didactische beperktheid van het onderzoek aangegeven.

Het experiment van Boermeester

In de jaren vijftig deed ook C. Boermeester een experiment met het leergesprek als centraal thema. Voor het eerst werd nu het meetkundeonderwijs op de MULO tot onderwerp van onderzoek gemaakt. Ook Boermeester kwam uit de school van Kohnstamm en ook hij sloot zich aan bij diens denkpsychologische opvattingen. Hij beschrijft in zijn werk eerst de doelen van het wiskundeonderwijs op de MULO, de factoren die deze doeleinden in de weg staan, de traditionele didactiek en methodiek en de betekenis van de denkpsychologie en haar experimenten voor het meetkundeonderwijs.

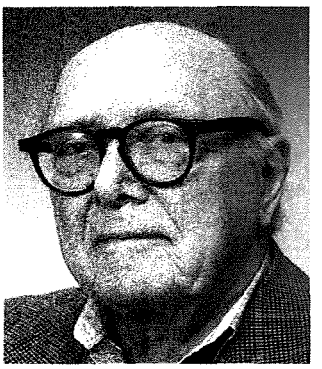
Boermeesters kernvraag luidde: 'Zou het mogelijk zijn door middel van leergesprekken de resultaten van het meetkundig denken te verbeteren, en wel zodanig, dat niet van een schijnsucces, maar van een werkelijk benutten van de speelruimte tussen het metastabiele en stabiele niveau binnen de gegeven rijpingsperiode, kan worden gesproken?' (Boermeester, 1955, p. 70).[8]

De leraar-onderzoeker gaf een 'proefwerk', dat door hem geanalyseerd werd naar de leermethode. Op grond van deze 'analyse' vond een leergesprek plaats, waarbij de leraar de leerling tot grotere bewustwording en verbetering van zijn denkwijze trachtte te brengen.[9] Boermeester kwam onder meer tot de volgende conclusie: 'het houden van een reeks leergesprekken naar aanleiding van enige lastige, door de leerlingen van te voren beproefde vraagstukken, (is) buitengewoon bevorderlijk voor het doorbreken van inzicht en het benutten van de speelruimte die gelegen is tussen het metastabiele en stabiele niveau der intelligentie' (Boermeester, 1955, p. 70).

De protocollen geven de indruk dat de leraar tijdens zo'n leergesprek een nogal sturende rol had. De aanpak was sterk gericht op het aanleren van oplossingsmethoden, zoals 'Ga uit van het te bewijzen' of 'Als je vastloopt ga dan na welke gegevens je nog niet gebruikt hebt', waarmee er voor de leerling weinig mogelijkheden waren voor autonome of intuïtieve processen. Bezien we dit onderzoek echter vanuit de toenmalige stand van de didactiek, dan kan dit toch een stimulans geweest zijn voor de modale leraar. Hier was geen theoretiserende pedagoog aan het woord, maar een motiverende onderwijspracticus. Bovendien stelde Boermeester in zijn slothoofdstuk nog een aantal praktisch-didactische kwesties van het aanvankelijk meetkundeonderwijs aan de orde, die het iedere geïnteresseerde leraar mogelijk maakten in praktisch en theoretische zin kennis te maken met de nieuwe wegen van de toenmalige didactiek van het meetkundeonderwijs.

De Van Hiele-niveaus

P. M. van Hiele promoveerde in 1957 op *De problematiek van het inzicht*. Hiermee heeft hij nationale en internationale erkenning verworven vanwege de door hem ontdekte denkniveaus.



Pierre van Hiele

De eerste maal dat Van Hiele over niveaus sprak, was in 1954 in een artikelenreeks over routine in het *Mededelingenblad van de wiskundewerkgroep* 2(2). Hij verwijst dan naar het proefschrift van J. Koning uit 1948, waarin deze in verband met het scheikundeonderwijs gewag maakt van het begrip niveau (Koning, 1948, pp. 218-222). Diens niveaus worden bepaald door de stof en zijn derhalve van macro-didactische aard. Van Hiele, die in die tijd – net als zijn vrouw – met de didactiek van de formele meetkunde in de eerste klas van het VHMO worstelde, begon nu, naar aanleiding van Konings idee, zijn eigen microdidactische niveaus te ontwikkelen, die juist van leerpsychologische aard zijn. Deze theorie maakte hij in 1955 openbaar in *Pedagogische Studiën* (Van Hiele, 1955). Van Hieles denkniveaus worden wel eens vergeleken met de ontwikkelingsniveaus van Piaget, maar diens experimenten stonden niet in dienst van het onderwijs. Langeveld heeft Van Hiele gestimuleerd de niveautheorie verder uit te werken.[10]

Deze vaak aangehaalde en door velen geïnterpreteerde theorie is in eerste instantie door zijn echtgenote D. van Hiele-Geldof in de praktijk van het aanvankelijk meetkundeonderwijs getoetst.[11] Tot goed begrip van de historische ontwikkelingsgang is het nodig, dat wij deze denkniveaus kort, en zoals ze oorspronkelijk door de Van Hieles zijn geformuleerd, toelichten. We gebruiken daartoe het werk van Van Hiele-Geldof, omdat dit zo direct bij de praktijk van het toenmalige onderwijs aansluit.

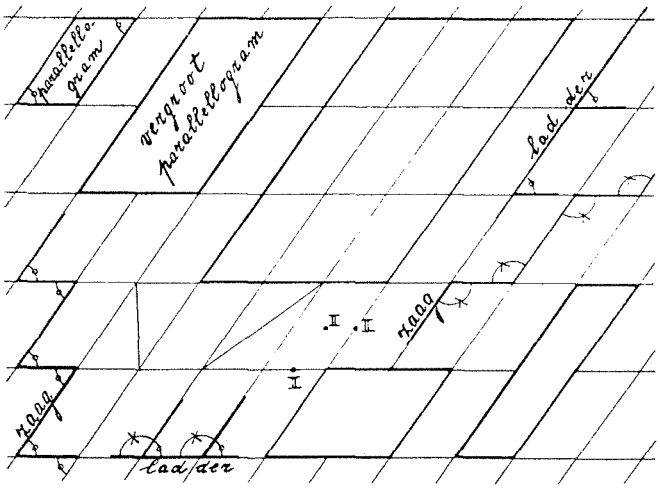
Van Hiele-Geldof acht het leren 'meetkundig structureren' vanuit een concrete ervaringsbasis het fundament voor een inleiding in de meetkunde. Zij gebruikt daarbij het begrip *waarnemingsstructuur*. Dit betekent, dat men de ruimtelijke (en vlakke) objecten, zoals gebruikelijk in de Gestaltpsychologie, in hun totaliteit en in samenhang met de rest van de ruimte globaal waarneemt, ervaart, onderzoekt en ordent. Een eerste ordeningsstructuur kan opgewekt worden door fundamentele meetkundige relaties (symmetrie, evenwijdigheid en dergelijke) door middel van empirische en intuïtieve ervaringen (vouwen, tekenen, enzovoort) ook weer globaal te laten ervaren. Het handelen zet het denken in gang, zodat langzaamaan ook aan een zekere *denkstructurering* wordt bijgedragen. Gewenning aan en toepassing van deze structuren vereist een verstaanbare taal voor de kinderen, die door Van Hiele-Geldof ook nauwlettend in het oog is gehouden. In verband hiermee spreekt zij ook van het begrip *taalstructurering*.

We lichten nu eerst de door de Van Hieles onderscheiden denkniveaus 'nul tot en met drie' nader toe aan de hand van het begrip evenwijdigheid, zoals Van Hiele-

Geldof dat in haar dissertatie heeft gedaan.

Bij het aanvangsonderwijs in de meetkunde (het ging toen om kinderen in de eerste klas van een middelbare school) bevinden de leerlingen zich in het algemeen nog op het *nulde niveau.* Zo kan evenwijdigheid als meetkundige 'notie' ontdekt worden aan concrete verschijnselen en objecten in de omringende ruimte en globaal 'in dezelfde richting' betekenen.

Op het *eerste niveau* worden de 'symbolen en signalen' van het nulde niveau object van nader onderzoek. De leerlingen maken kennis met specifiek meetkundige begrippen en relaties, die zij op het nulde niveau globaal hebben leren kennen. In het geval van evenwijdigheid zal ontdekt worden dat bepaalde hoeken in meetkundige structuren, waarin evenwijdigheid optreedt, gelijk zijn. Van Hiele-Geldof gebruikte hiervoor de begrippen 'zaag' en 'ladder' (zie figuur B4.1).



figuur B4.1: De zaag- en ladderstellingen vanuit een tegelvloer (Van Hiele-Geldof, 1957)

Op het *tweede niveau* worden de verworven relaties zelf (i.c. de gelijkheid van hoeken) met elkaar in verband gebracht om tot een hoger geordende relatie te komen. In het geval van de evenwijdigheid en gelijkheid van de hoeken wordt de structuur van een tegelvloer van driehoeken gebruikt om te ontdekken dat 'De som van de drie hoeken van een driehoek 180° is'. Van Hiele-Geldof spreekt hier van het 'doorstructureren' van de begrippen van het eerste niveau naar die van het tweede niveau (som van de hoeken van een driehoek).

Tenslotte kan men pas van het *derde niveau* spreken, wanneer meer formeel logische betrekkingen tussen de gevonden eigenschappen ingezien worden en een logische ordening van de eigenschappen opgezet kan worden. In het geval van de

evenwijdigheid betekent dit, dat de kinderen de mogelijke 'symmetrie' (omkering van de stelling) van sommige eigenschappen kunnen begrijpen: 'verwisselende hoeken zijn gelijk bij evenwijdige lijnen' en 'als verwisselende hoeken gelijk zijn, zijn de lijnen evenwijdig'. Maar ook wordt nu een logische ordening van de stellingen (een stamboom) in ogenschouw genomen, waarin we duidelijk het didactische denken van mevrouw Ehrenfest herkennen:

> 'Wanneer de leerling zijn aandacht gericht heeft gehad op deze symmetrie van de relatie, dan kan men voor het eerst zeggen, dat deze relatie voor de leerling een logische relatie is. De leerling is dan op het derde denkniveau.
> Om de leerlingen het wezen van de meetkunde beter te laten ervaren gebruik ik de bekende globale struktuur: "de stamboom". De stamboom geeft duidelijk de mogelijkheid van uitbreiding naar weerskanten aan: het voorgeslacht en het nageslacht. Het eerste loopt ten slotte uit op het zoeken naar een stel onafhankelijke axioma's, het laatste betekent het vinden van nieuwe stellingen uit die, welke reeds bekend zijn.' (Van Hiele-Geldof, 1957, p. 160)

Het werk van Dina van Hiele-Geldof

Dina van Hiele-Geldof

Het proefschrift van Dina van Hiele-Geldof (1911-1958) is ons inziens om meerdere redenen nog immer de moeite waard om kennis van te nemen. Ten eerste is het een werk waarin theorie en praktijk op voorbeeldige wijze zijn verbonden. Ten tweede maakt het duidelijk, dat vanuit het werken in de praktijk de meest waardevolle bijdragen aan de ontwikkeling van de didactiek ontstaan (een werkwijze, die men tegenwoordig 'ontwikkelingsonderzoek' noemt). Ten derde vallen de bevindingen van het onderzoek, al betreffen ze een onderdeel van het meetkundeonderwijs dat thans niet meer op die wijze tot het programma behoort, zo duidelijk ten gunste van een intuïtieve, niet formele aanpak van het meetkundeonderwijs uit, dat ze ook op de huidige ontwikkelingen toepasbaar zijn.

Van Hiele-Geldof werkte vanuit de volgende praktisch-theoretische uitgangspunten: subjectieve onderwijservaringen, het praktische werk van mevrouw Ehrenfest, de theorie van de bewustzijnslagen (Keulse school), Gestaltpsychologische 'wetten', kritiek van Van Parreren op de denkpsychologie (autonomie naast intentie van het leerproces), fenomenologische opvattingen over het leren (Langeveld, Prins en Van Gelder), en een synthese van voornoemde opvattingen in de theorie van de denkniveaus van Van Hiele.

Haar didactische doel was de *ontwikkeling van exact leren denken*, terwijl als intermediair doel 'het kennen en begrijpen van de ruimte' werd gesteld. De doelstel-

lingen van het experiment op zich stegen hier bovenuit.[12]

Van Hiele-Geldof voerde haar experiment geheel zelfstandig uit, zonder vergelijkende experimenten. Voor haar analyses maakte zij gebruik van door haar zelf genoteerde protocollen van het onderwijsleerproces. We kunnen dus spreken van een individueel didactisch experiment. Een zekere subjectieve waardering van het experiment was daarbij natuurlijk aanwezig.

Er werd van empirische activiteiten uitgegaan om het denken te onderzoeken en te richten: het maken van een kubus, telproblemen met ruimtelijke figuren, symmetrische figuren, gebruik van de ruit in verband met enkele grondconstructies, en zo meer. De didactische grondstelling hierbij luidde: 'Men moet de kinderen denkend laten doen met hanteerbaar materiaal' (Van Hiele-Geldof, 1957, p. 23).

Na dit empirische stadium van ongeveer vier maanden volgde een periode van onderwijs waarin het zoeken naar samenhang en een logische opbouw aan de orde kwam, overigens zonder dat daarbij direct een systematische ordening plaatsvond. Dit gebeurde met de reeds genoemde 'tegelvloeren'. Deze 'tegel'-context werd steeds verder losgemaakt van de echte tegelvloeren, zodat de conclusie over de som van de hoeken van een driehoek ook op zichzelf, meer abstract, begrepen zou worden. Op grond van de uitgevoerde analyses van haar protocollen trok Van Hiele-Geldof de volgende conclusies:

Waarnemingsstructuring: 'De leerlingen kunnen zich deze strukturen vormen, als het ordenende principe is: vergroting, evenwijdigheid of regelmatigheid.' Maar: 'In het eerste leerjaar kan men de symmetrie slechts dan als ordenend principe gebruiken, als men (...) uitgaat van de speciale empirie van het vouwen, draaien en spiegelen van figuren' (Van Hiele-Geldof, 1957, p. 134).

Denkstructuring: hierover wordt gesteld 'dat de leerlingen in staat zijn een abstrakte denkstruktuur aan te brengen, maar dat de voorkeur uitgaat naar een verklaring berustend op een visueel meetkundige struktuur' (Van Hiele-Geldof, 1957, p. 140) en dat 'het beschikken over visueel meetkundige strukturen de overgang naar de logische denkstrukturen vergemakkelijkt' (Van Hiele-Geldof, 1957, p. 145).

Taalstructurering: hierover concludeert Van Hiele-Geldof, dat de kinderen aanvankelijk gebruik maken van een eigen taal en niet van de vaktaal. 'Pas nadat het begrip zich gevormd heeft volgt het aanbrengen van de bij dit begrip behorende taalstruktuur' (Van Hiele-Geldof, 1957, p. 152).

Op grond van deze analyses komt zij tot de algemene conclusie dat de theorie van de denkniveaus 'klopt'. Wellicht ten overvloede, maar we merken nog even op dat het inhoudelijke aspect van dit onderzoek zich beperkte tot de toenmalige stof van het VHMO.

Pierre van Hiele en het begrip 'inzicht'

Van Hieles dissertatie *De problematiek van het inzicht* uit 1957 is van een meer theo-

retisch en beschouwend karakter dan die van zijn echtgenote. Uit zijn onderzoek spreekt een overtuigd geloof ín en streven náár een meer inzichtelijk meetkunde-(wiskunde)onderwijs. Van Hieles grote verdienste is de bewustmaking van de 'niveaus van denken' in het leerproces en van het belang van het leren 'structureren' geweest, dat hij als de grondslag voor het verwerven van inzicht beschouwt. Het structurerende denken is op zich aan niveaus onderhevig, zoals door Van Hiele-Geldof voor het meetkundeonderwijs is beschreven:

> 'De operaties van het denken bewerkstelligen:
> 1. dat de waargenomen struktuur fijner gestruktureerd wordt,
> 2. dat de waargenomen struktuur als deelstruktuur van een ander wordt gezien,
> 3. dat de waargenomen struktuur uitgebreid wordt,
> 4. dat men in staat is te besluiten tot isomorfie van de waargenomen struktuur met een reeds bekende struktuur.' (Van Hiele-Geldof, 1957, p. 64)

Hiermee worden een aantal belangrijke voorwaarden genoemd om tot (meetkundig) inzicht te geraken. Het begrip 'inzicht' wordt door Van Hiele omschreven als 'intentioneel adekwaat handelen in nieuwe situaties' (Van Hiele, 1957. p. 11). In 1981 sluit hij zich in zijn boek *Struktuur* aan bij een omschrijving uit de Gestaltpsychologie, namelijk 'dat inzicht daar aanwezig is, waar de proefpersoon een conclusie trekt op grond van een zich bij hem gevormd hebbende denkstruktuur'. Dan ook besluit hij dat de twee omschrijvingen van inzicht 'elkaar volkomen dekken' (Van Hiele, 1981, p. 29). In de nieuwe editie van 1997 van dit boek herhaalt hij de omschrijving van 1957 en geeft het volgende voorbeeld voor het ontstaan van inzicht:

> 'Een stukje bloemetjesbehang is versleten en er moet een stukje van een reserverol bijgeplakt worden. We zijn in 'een nieuwe situatie', want we hebben deze opdracht nog niet eerder bij de hand gehad. Er wordt zo'n stukje uitgezocht, dat het precies in het patroon past. De opdracht is juist uitgevoerd: er is 'adequaat gehandeld'. We hebben er heel goed op gelet dat het bloemetjespatroon doorliep, het was geen toeval dat het klopte. Daarom is de opdracht 'met intentie' uitgevoerd.' (Van Hiele, 1997, p. 34)

Van Hiele beschrijft zelf zijn theorie over het inzicht wel in drie niveaus: het *visuele*, het *beschrijvende* en het *theoretische niveau*. Zeer belangrijk acht hij het visuele niveau, waar de waargenomen structuur de basis legt voor het verwerven van inzicht. Hier wordt aanschouwd, goed waargenomen en wordt dus op intuïtieve wijze zonder gebruik van taal de waarnemingsstructuur gevormd.[13] Van Hiele spreekt thans voor deze intuïtieve fase dan ook van *non-verbaal denken*. Overigens zou volgens Van Hiele deze theorie ook toegepast kunnen worden bij het leren van niet-wiskundige begrippen.[14]

In Van Hiele en Van Hiele-Geldof hebben we opnieuw twee didactici ontmoet die, net als Pestalozzi, Fröbel, Diesterweg, mevrouw Ehrenfest en anderen, een intuïtieve (aanschouwelijke) fase in het meetkundeonderwijs als noodzakelijke basis beschouwen voor de opbouw van een inzichtelijke leergang.

Van Hieles opvattingen over meetkunde

Van Hieles opvattingen over meetkunde stonden midden jaren vijftig nog in het kader van de traditionele opzet, maar werden wel gevoed door de discussies die door mevrouw Ehrenfest in de jaren twintig waren aangezwengeld.

Van Hiele kende drie doelstellingen aan het meetkundeonderwijs toe: het *leren begrijpen en beheersen van de ruimte*, het *leren logisch redeneren* en de *toepasbaarheid* van de meetkunde. Net als mevrouw Ehrenfest en als zijn echtgenote was hij van mening dat het verwezenlijken van de tweede doelstelling niet in strijd hoefde te komen met de eerste. Bij de toepassingen wees hij op het nut van de meetkunde in andere vakken, maar de meeste nadruk legde hij op het vraagstuk als toepassing. Daarbij werden ook voorbeelden van toepassingen uit de realiteit gegeven. Tot nadere toelichting van de eerste doelstelling 'het kennen en begrijpen van de ruimte' somt hij in zijn dissertatie vijftien meetkundige aspecten op:

'a Het leren zien en herkennen van meetkundige figuren.
b Vlak- en ruimteverdelingen.
c Het gebruik en de plaatsing van kongruente figuren.
d Gelijkvormige figuren.
e Stapelingen van figuren.
f Transformaties van figuren.
g Symmetrie t.o.v. een plat vlak.
h Symmetrie t.o.v. een lijn.
i Symmetrie t.o.v. een punt.
j Oppervlakte en inhoud.
k Bewegingen in de ruimte: verschuiving, draaiing, schroefbeweging.
l Baankrommen.
m Het in het algemeen niet kongruent zijn van ruimtefiguren, die elkaars spiegelbeeld zijn.
n Afbeeldingen van de ruimte op een plat vlak.
o Doorsnijdingen van figuren.' (Van Hiele, 1957, p. 144)

In een artikel dat de Van Hieles vlak na hun promotie publiceerden, noemen zij deze aspecten 'ordeningsstructuren' (Van Hiele en Van Hiele-Geldof, 1957). In Van Hieles boek *Begrip en inzicht* uit 1973 komt vrijwel dezelfde opsomming voor, maar daar is nog een laatste aspect aan toegevoegd: 'Het vastleggen van een punt met behulp van coördinaten.'[15] Deze ordeningsstructuren krijgen ten aanzien van de doelstelling 'begrijpen en kennen van de ruimte' pas betekenis als we de gegeven voorbeelden erbij betrekken, zoals ad b.: tegelvloeren, ad c.: massafabricage, ad d.: landkaarten, vergrotingen van foto's, ad e.: muren metselen, bolstapelingen, ad f.: mechanische transformaties (samendrukking), waarnemen van figuren, ad g., h. en i.: figuren en lichamen uit de natuur en techniek, esthetische element, ad j.: praktijk van alledag, ad k., l. en o.: technische problemen, ad n.: perspectivische afbeelding en voor-, zij- en bovenaanzichten. Er wordt verder verwezen naar de *Übungensammlung* van mevrouw Ehrenfest.

Zijn opvattingen over de didactiek en methodiek van het aanvankelijk meetkundeonderwijs zijn in overeenstemming met die van Van Hiele-Geldof. De fenomenologische opvatting impliceert, dat de genoemde ordeningsstructuren belangrijk geacht worden om een eerste globale ordening van het gebied te krijgen. Uit datgene wat de kinderen al bekend is als ervaringsgegevens uit hun omgeving, kunnen de eerste begrippen en hun onderlinge relaties verkend worden. Nadat figuren of relaties van hun 'symbool'-karakter ontdaan kunnen worden en een 'signaal'-karakter krijgen, kan volgens Van Hiele pas begonnen worden met eenvoudige redeneringen.

De schoolboeken van de Van Hieles

In eerste instantie had de niveautheorie aan het einde van de jaren vijftig nog geen directe invloed op de methoden. Wel natuurlijk op de methoden van de Van Hieles zelf, waarvan wij alleen de meetkundeboeken beschouwen. Hun eerste meetkundeleergang *Werkboek der Meetkunde* uit 1948 was bedoeld, zoals uit de ondertitel blijkt, voor scholen 'waar zelfstandig werken en denken hoofddoel is'. We zien dat deze twee doelstellingen, zoals in hun dissertaties onderbouwd, dus niet zomaar uit de lucht kwamen vallen. We kunnen in dit kader niet diep op inhoud, vorm en doel van deze uitgave ingaan. We zien echter een uitstekende leergang van een zeer hoog niveau. De invloed van de ideeën van mevrouw Ehrenfest is te herkennen in de splitsing van een 'systematische cursus' en 'axiomatische fundering' achteraf. Wij weten niet of er ook nog een propedeutische cursus aan voorafging. Overigens is Van Hiele op de 'axiomatische aanpak achteraf' later teruggekomen. Het *Werkboek* werd in 1963 omgewerkt tot de leergang *Van Figuren naar Begrippen*, waarin we niet alleen in de titel de Van Hiele-principes herkennen. Ook in deze serie wordt de meetkunde op een geheel eigen wijze opgebouwd: zelfwerkzaamheid, telescoped reteaching, intuïtieve start, systematisering en axiomatisering achteraf als leidende didactische principes.[16] Maar nu verschijnen ook modernere onderwerpen als transformaties, vectoren en het groepsbegrip.

Aan het begin van de jaren zeventig kwam de uitgever van Van Hieles boeken met de serie *Van A tot Z* op de markt. Hiermee werd het 'moderne' programma voor alle categorieën van het voortgezet onderwijs gedekt, waarvan ook Van Hiele auteur was. Er werd geen onderscheid meer gemaakt tussen algebra- en meetkundeboeken. Wiskundige structuren werden het uitgangspunt voor het leerplan. Bekijken we het 'werkboek der wiskunde' voor de brugklas van het lager technische onderwijs (LTO) uit deze serie, dan zien we dat het begrip afbeelding centraal gesteld wordt, zowel in de algebra als functie, als in de meetkunde als transformatie. Verder beheersen verzamelingen, coördinaten en grafieken de stof. Het vierkantenrooster wordt als belangrijkste meetkundige structuur gebruikt. Als didactische uitgangspunten worden genoemd:

- intuïtieve inleiding in de meetkunde
- geleidelijke groei naar deductief denken
- herhaling door telescoped reteaching
- leesbare tekst voor de leerlingen
- opklimmende moeilijkheid
- eerst inzicht, daarna oefening
- zelfwerkzaamheid.

Al deze principes passen bij Van Hieles onderwijskundige opvattingen. Het is echter merkwaardig dat een leerboek voor het LTO aanvangt met formele begrippen als relatie, functie, origineel, beeld, enzovoort. Hoe viel dit te rijmen met de eerste twee hiervoor genoemde principes, hoe kon dit überhaupt in overeenstemming gebracht worden met Van Hieles opvattingen over de taalstructurering? De meetkundige onderwerpen werden hoofdzakelijk op roosters getekend en gelieerd aan coördinaten. Van de door de Van Hieles gepropageerde fenomenologische aanpak van de meetkunde is in deze boeken weinig te herkennen.

De betekenis van de niveautheorie voor de praktijk

Ten behoeve van de ontwikkeling van methoden en leerboeken is de niveautheorie in afgeleide zin van belang. De theorie kan niet als een panacee opgevat worden, waarbij van een vaste driedeling van niveaus gesproken wordt: *visueel, beschrijvend, theoretisch.* Er kan niet in alle gevallen van drie vaste niveaus gesproken worden; bij longitudinale leerplanontwikkeling wordt vereist dat op een gegeven moment het hoogst bereikte niveau van een bepaald onderwerp als laagste niveau gaat dienen voor de ontwikkeling van weer nieuwe begrippen. Zo kan men bijvoorbeeld met de algebra niet starten als een bepaald formeel niveau van het rekenen niet bereikt is. Ook andere ontwikkelingen, zoals toen in de jaren zestig en zeventig nieuwe leerstof zijn intrede deed, de vraag naar 'wiskunde voor allen' opgeld ging doen en het rekenen van de lagere school als onderdeel van de wiskunde beschouwd werd, maakten het noodzakelijk over de niveautheorie opnieuw na te denken. Met name voor de ontwikkelingen voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (Wiskobas) tijdens de jaren zeventig merkte Treffers in 1987 het volgende op: 'It gradually became clear that we could not find in Van Hiele's level theory and its concretisation in his textbooks a ready answer to the following two questions:
1. How to shape concretely the phenomenological exploration at the first level?
2. Which didactical acts should be performed to raise the pupils as efficiently as possible from one level to the next?' (Treffers, 1987, p. 245).

Voor het bereiken van een volgend niveau eist Van Hiele dat het onderwijsleerproces de volgende vijf fasen doorloopt: introductie (informele verkenning), gebonden oriëntatie (opdrachten om enige structuur te ontdekken), explicitering (ontwik-

kelen van een geschikte taal), vrije oriëntatie (exploratie met het voorgaande tot nadere ordening) en integratie (samenvatting tot de essentie en het invoegen in het geheel van kennis en vaardigheden en inzicht). Deze didactische structurering toont enige overeenkomst met die van Van Dormolen, die in de jaren zeventig de fases oriënteren, sorteren, abstraheren, expliciteren en verwerken, bekend als het OSAEV-model, introduceerde (Van Dormolen, 1974, pp. 92-93).

Voor de nieuwe onderwerpen was het zeer lastig uniforme onderwijsleertheoriën toe te passen. De ontwikkelingen van de jaren zeventig in Nederland hebben aangetoond dat een dergelijke theorie in feite samen met de ontwikkeling van de methode en de didactiek moet ontstaan. Dat daarbij bestaande theorieën hun betekenis kunnen hebben, is door Gravemeijer in 1994 aangetoond. Hij maakte bij de ontwikkeling van de basisschoolmethode *Rekenen en Wiskunde* onder meer gebruik van de theoretische opvattingen van Van Hiele. Met name voor de meetkunde lijkt de fenomenologische aanpak volgens de Van Hieles, maar in feite reeds door mevrouw Ehrenfest gepropageerd en later door Freudenthal nader geëxpliciteerd, een zeer geschikte aanpak voor een inleidende cursus. Nu meetkunde ook weer tot de kerndoelen van de basisschool behoort, is een bezinning op de niveautheorie weer actueel geworden.

Van Hiele en de New Math

Van Hiele zelf was ontevreden over de wending die zijn boeken eind jaren zestig ten gevolge van de New Math moesten ondergaan. Dit blijkt uit een interview met Goffree in 1985, waarin hij dit fenomeen 'een geweldige stap achteruit' noemde en wel 'omdat de New Math precies de tegenhanger is van de theorie van Van Hiele, een "ramp" en "gewoon idioot" voor de kinderen' (Goffree, 1985 p. 124). Dit is een heel andere opvatting dan zo'n dikke twintig jaar eerder, toen Van Hiele verklaarde, dat 'een aantal begrippen (...) een kans moet hebben', waarbij hij als voorbeelden noemde: verzamelingentaal, kwantorgebruik, vectoren, symmetrie, transformaties en groepen, eraan toevoegend: 'Zonder dat het eindexamen ook maar iets veranderd hoeft te worden, kunnen zulke onderwerpen nu al met sukses worden aangesneden' (Van Hiele, 1961). Deze opvatting droeg hij toen nog sterker uit in een bespreking van het concept-leerplan wiskunde van 1968, dat hij 'een zeer belangrijke stap in de goede richting' noemde (Van Hiele, 1968, p. 133). In hetzelfde stuk sprak hij zich ook uit voor de aritmetisering van de meetkunde. Twee jaar eerder had hij zich in hetzelfde blad (*Vernieuwing*) ook al voor de New Math-aanpak op de lagere school uitgesproken.

Overigens was Van Hiele niet de enige didacticus die later spijt kreeg van deze 'moderne wiskunde'-rage.[17] Afgezien hiervan, menen wij bij Van Hiele toch een hang te herkennen naar het meer formele aspect van de wiskunde, waarbij het structurerende, het logische en het esthetische element belangrijke redenen zijn om wiskunde als onderwijsvak te motiveren. Dit geldt ook voor het meetkundeonderwijs.

In zijn laatste versie van *Structuur* (1997) wordt dit nog eens bevestigd, waar hij voor vectoren op de basisschool pleit. Dit verklaart dat van de door Van Hiele gestelde doelstellingen voor meetkunde 'begrijpen van de ruimte, logisch redeneren en toepassingen' het laatste – de toepassingen dus – in zijn werk weinig tot geen betekenis heeft gekregen.

Het overzicht van Boermeester

Ten behoeve van het congres van de International Commission on Mathemetical Instruction in 1958 in Edinburgh bracht Freudenthal in 1957 een rapport uit over de Nederlandse situatie met betrekking tot het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Dit *Report on Methods of Initiation into Geometry* geeft een goed overzicht van de opvattingen en stromingen uit de jaren vijftig.[18] We gaan hier nog nader op in, maar wijzen eerst op een artikel uit dit rapport van de hand van Boermeester, dat een indruk geeft van de schoolboekenmarkt en de toen heersende opvattingen over de doelen van de meetkunde.

Er wordt voor de Nederlandse situatie gewag gemaakt van ongeveer tachtig schoolboeken voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs: veertig voor het VHMO, twintig voor het ULO en twintig voor de ambachtsscholen. Zeventig van deze boeken verschilden nauwelijks van elkaar; ze volgden alle de traditionele euclidische opbouw en waren bedoeld voor klassikaal onderwijs, dat volgens de bekende herbartiaanse lesopbouw was gestructureerd. Er is één boek dat er uitspringt vanwege zijn andere aanpak. Hierover schrijft Boermeester: '(it) really starts with solid geometry; it helps the users to handle concrete material and to discover various theorems, without proving them'. Hoewel hij geen auteur noemt, is het ook uit de verdere tekst duidelijk dat dit de leergang van de Van Hieles is.

Verder wordt duidelijk dat de feitelijke invloed van de dan in zwang zijnde leerpsychologische theorie van Selz en de uitwerkingen daarvan door Kohnstamm nog nauwelijks enige invloed hebben op de praktijk van het meetkundeonderwijs: 'Yet contrary to other teaching subjects geometry has not consciously joined gestalt psychology in our country. (...) Psychology of thinking, though much cultivated by psychologists, has little if any influence on secondary education' (Boermeester in *Report*, 1958 p. 18).

Uit een kleine enquête onder een aantal leraren werden 25 doelen van het meetkundeonderwijs opgesomd, waarvan er achttien een formeel en zeven een materieel karakter hadden. Onder de algemene formele doelen werden genoemd: ontwikkeling van een goede werk- en onderzoekshouding, een kritische opstelling, ontwikkeling van verstand en verbeeldingskracht, goed lezen en formuleren, netheid, maar ook karakterontwikkeling en bijdrage aan de morele opvoeding. De meer specifiek formele doelen waren het leren problemen op te lossen, logisch leren denken en de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht.

Bij de materiële doelen werden onder meer genoemd: bewijzen van stellingen, basis voor andere exacte vakken, samenhang met techniek, voorwaarde voor hogere opleidingen. Het lijkt dat er in het denken over de waarde van het meetkundeonderwijs sinds meer dan een eeuw nog nauwelijks iets was veranderd, zeker als we de argumenten van meer pedagogische aard hierbij betrekken. Anders lag de zaak met de inhoudelijke opzet, waarvoor men niet meer vasthield aan een streng logisch-deductieve inleiding, maar veel ruimte wilde geven aan construeren, meten, tekenen en onderzoek van ruimtefiguren. Zeer interessant was de vraag wat men dacht van een eventuele voorbereidende meetkundecursus op de lagere school. Alle ondervraagde leraren waren hiertegen, maar:

> 'Several teachers would admit some preparatory teaching such as: measuring, drawing ornaments, computing areas of rectangles and volumes of orthogonal parallelepipeds. They do not object to incidental preparatory teaching of geometry if it results from a natural situation, e.g. if a certain project leads to the question how to compute a certain area. Systematic teaching of geometry cannot be justified at the primary level.' (Boermeester in *Report*, 1958, p. 25)

Al met al kunnen we stellen dat in het midden van de jaren vijftig zich toch de eerste signalen tot verandering van het aanvankelijk meetkundeonderwijs in het voortgezet onderwijs begonnen af te tekenen.

Overige bijdragen aan het *Report*

Alle auteurs van het *Report*, behalve mevrouw Ehrenfest, waren schoolboekauteurs. Wij gaan niet in op de bijdragen in het rapport van mevrouw Ehrenfest, van de Van Hieles en van Van Albada, daar hun werk al eerder aan de orde is geweest. Over de stukken van de overigen slechts enkele korte opmerkingen.

P.G.J. Vredenduin hield vast aan het idee van de deductieve methode met als doel dat de leerling de structuur van het systeem leert kennen. Maar hij deed ook water in de wijn: geen axioma's en geen bewijzen voordat de leerling de noodzaak daarvan inziet, een 'honest appeal to intuition'. Zijn meetkundeboek werd veel gebruikt in de eerste klas van het Gymnasium. Vredenduins opvattingen over meetkunde pasten bij zijn opvattingen over wiskunde en wiskundeonderwijs. Als didacticus van de naoorlogse tijd heeft hij een belangrijk aandeel gehad in de verspreiding van de moderne wiskunde.

De bijdrage van D.N. van der Neut brengt niet veel nieuws over het voetlicht. Wel beval hij het zogenaamde 'werkschrift' aan. Dit was toen een vorm van zelfwerkzaamheid, waarbij de opgaven een vorm hadden tussen een leerboek en een vraagstukkenboek.

De bijdragen van S.J. Geursen en H. Turkstra betroffen hun methode en 'werkschrift' voor meetkunde. Turkstra lichtte de psychologische achtergronden van het 'werkschrift' toe met verwijzingen naar de Keulse school, de denkpsychologie, de

Gestaltpsychologie en Mannoury.

L.N.H. Bunt beschreef een door hem in de Indonesische taal geschreven meetkundeboek, dat een intuïtieve en empirische basis zou hebben.

Een afwijkende bijdrage was die van Bruno Ernst, die niet over de door hem ontworpen methode schreef, maar vanuit een geheel andere hoek het probleem van het aanvankelijk meetkundeonderwijs benaderde: 'The teacher has to look upon mathematics as though he were exploring it, together with his pupils, and the pupils should be amazed at every new discovery' (Ernst in *Report*, 1958, p. 107). Er zouden, volgens deze auteur, mogelijkheden bestaan om ook op het meest elementaire niveau de kinderen zelf ontdekkingen te laten doen, waarbij zij de schoonheid van de wiskunde en de kracht van hun eigen denken konden ervaren.[19]

J.K. Timmer is altijd een wat eigen weg gegaan. Zijn belangrijkste bijdrage aan de verbetering van het meetkundeonderwijs op de ULO is zijn methode *Met passer en liniaal* geweest, die hij samen met M. Bijpost schreef. Deze methode, die reeds van 1941 is, beoogt een empirische aanpak – er wordt naar Kerschensteiner verwezen – waarbij vooral de werkwijze van de lagere school zo veel mogelijk in het oog gehouden wordt. Zijn bijdrage aan het *Report* is, evenals die van Ernst, uiterst summier.

Het *Report* sluit af met een bijdrage van G. Krooshof, die het meetkundeonderwijs voor het lager beroepsonderwijs onder de loep neemt. Reeds vanaf 1947 waren van hogerhand commissies ingesteld ter verbetering van deze tak van onderwijs. Het meetkundeprogramma werd eenvoudig gehouden met aandacht voor praktische (technische) toepassingen.

In het voorwoord van het rapport spreekt Freudenthal zijn teleurstelling uit dat er geen aandacht wordt besteed aan het werk van Bos en Lepoeter. Deze auteurs hadden inderdaad een van de eerste meetkundeboeken geschreven die goed bruikbaar waren bij zelfwerkzaamheid. W.J. Bos was in die tijd ook een bekend wiskundedidacticus, die over het aanvankelijk meetkundeonderwijs gepubliceerd heeft.

Het onderzoek van De Groot en anderen

De zogenoemde meetkundeprojecten I en II, die in opdracht van de samenwerkende Pedagogische Centra in de jaren vijftig en zestig zijn uitgevoerd, zijn onderzoeken van een geheel andere aard dan die van Mooij, de Van Hieles en Boermeester.

Tussen 1956 en 1959 werden door het Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie (RITP) een studietoets meetkunde en een drietal attitudetests ten behoeve van didactisch onderzoek naar het meetkundeonderwijs in de eerste klas van het VHMO ontwikkeld. Dit zogenaamde Meetkundeproject I is beschreven door S. Wiegersma in 1960. De daarbij ontwikkelde instrumenten hebben een functie in het meetkundeproject II gehad.

Tussen 1958 en 1962 werd het Meetkundeproject II uitgevoerd, dat in 1968 ge-

analyseerd is door de psycholoog A.D. de Groot. Met name dit laatste project is van belang in verband met de historische ontwikkeling van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Door toedoen van Turkstra, toen oud-rector van het Christelijk Lyceum te Hilversum en vertegenwoordiger van de Centra, kon op genoemd lyceum een uitvoerig experiment plaatsvinden. De belangrijkste ontwikkelaar werd de leraar en didacticus R. Troelstra. De algemene leiding van het project berustte bij A.D. de Groot, de projectleiding bij Wiegersma.

Doelen, uitwerking en resultaten van het Meetkunde II project

Het doel van dit onderzoek was primair van theoretisch-methodologische aard: men wilde laten zien dat een vergelijkend evaluatie-onderzoek mogelijk is en hoe zoiets opgezet diende te worden. Pas in de tweede plaats stond het onderzoek in dienst van de vernieuwing van het meetkundeonderwijs. Het inhoudelijke gedeelte betrof een vergelijking tussen twee aanpakken van meetkunde in de eerste klas. De traditionele aanpak, waarbij gebruik gemaakt werd van de methode *Kern der vlakke meetkunde* van Turkstra en Geursen (zonder het werkschrift) en een cursus *Bewegingsmeetkunde*, die door de vier deelnemende docenten ten behoeve van dit experiment was ontworpen.[20] Veel aandacht was besteed aan een zo zorgvuldig mogelijke methodologische opzet, welke natuurlijk aan allerlei praktische randvoorwaarden was gebonden.[21]

We maken hier voor de eerste maal kennis met een 'voorbeeldig' methodologisch onderzoek. Aan een analyse van deze methodologie wagen wij ons niet. Dit is in het kader van ons onderzoek ook niet van belang. De Groot zelf bestempelde het onderzoek achteraf als een voorbeeld van 'action-research'.

De hamvraag voor de didactici was of de bewegingsmeetkunde, later transformatiemeetkunde genoemd, een betere start zou zijn dan de traditionele cursus. Het antwoord daarop was op grond van de tests als volgt: 'Na een jaar onderwijs in de bewegingsmeetkunde zijn de resultaten op de meetkunde testserie over het geheel genomen noch beter noch slechter dan na een jaar klassiek onderwijs' (De Groot, 1968, p. 81). Een resultaat waar men in feite alle kanten mee op kon. De Groot kwam bij zijn interpretatieve analyse verder tot de bevinding dat de vraag naar beter onderwijs slechts beantwoord kon worden in het licht van de onderwijsdoelstellingen. Maar die waren toen eigenlijk nog nauwelijks aan discussie onderhevig, noch was er voor het wiskundeonderwijs onderzoek naar gedaan. Verder kwam hij nog tot de volgende stellingen:

> 'Het onderwijs in de bewegingsmeetkunde slaagde er beter in de zwakke leerlingen mee te nemen en te interesseren, maar minder goed om goede leerlingen intellectueel te stimuleren.' (De Groot, 1968, p. 92)
> 'Het onderwijs in de bewegingsmeetkunde geeft minder specifieke training, met name in het hanteren van de congruentiegevallen (test 3): met als pendant, dat de leerlingen, die dit onderwijs hebben gehad, onbevangener staan tegenover en betere pres-

> taties leveren in ongewone opgaven op meetkundig gebied, die met zelf kijken, denken en proberen moeten worden opgelost (test 5 e.a.).' (De Groot, 1968, p. 94)
> 'Onderwijs in de bewegingsmeetkunde bevordert beter dan meetkunde-onderwijs in klassieke trant het visueel voorstellingsvermogen en het ruimtelijk inzicht.'
> (De Groot, 1968, p. 96)

Dit waren natuurlijk opstekers voor de vernieuwers die ook de zwakkeren in het onderwijs mee wilden nemen, maar ook voor de didactici, die ten eerste meer in algemene denktraining zagen dan in specifieke meetkundetraining en ten tweede de ontwikkeling van het ruimte-inzicht en visualisering als belangrijk doel van het aanvankelijk meetkundeonderwijs voor ogen hadden.

Troelstra's transformatiemeetkunde

Troelstra was een van de eerste protagonisten van een vervanging van de klassieke meetkunde door de transformatiemeetkunde. Hij stelde tijdens een voordracht voor Liwenagel in 1963 het volgende:

> 'U weet, dat men allerwege druk bezig is met pogingen het schoolprogramma voor de wiskunde te herzien. Uit de discussies over deze herziening blijkt, dat de meetkunde gevaar loopt in de hoek te komen waar de slagen vallen. Ik hoop, dat u het net als ik jammer zou vinden, als het vak meetkunde het loodje zou leggen. Misschien zult u dan een bescheiden poging om het vak te redden door het moderner op te zetten met enige welwillendheid willen bezien.' (Troelstra, 1963, p. 148)

Reeds in 1962 had Troelstra met zijn collega's het eerste deel van een bewerkte leergang van het experiment 'bewegingsmeetkunde' als handelseditie op de markt gebracht onder de naam: *Transformatiemeetkunde*. Tezamen met de twee vervolgdelen was dit de eerste leergang vlakke transformatiemeetkunde voor het VHMO. Het was een leergang die de hele planimetrie, die toen nog op het programma stond, volledig dekte. De vraag was nu niet alleen of het tijdstip niet te vroeg gekozen was, maar ook of de uitkomsten van het experiment wel voldoende garantie boden voor een werkelijke verbetering van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Bezien we na vijfendertig jaar deze kwestie nog eens, dan valt het volgende op. Allereerst had deze vernieuwingspoging een heel ander karakter dan al de voorgaande, die meer in de lijn van mevrouw Ehrenfest lagen. Uit het voorwoord van dit boek wordt dit zonneklaar: 'Het is geenszins de bedoeling van de schrijvers de meetkunde slechts intuïtief te benaderen, maar veeleer een nauwkeurige definitie te geven van de verschillende transformaties en daarna, uitgaande van axioma's, stellingen af te leiden' (Troelstra e.a., 1962, p. 5).

Er werd weliswaar geheel gebroken met de euclidische aanpak, maar een andere axiomatische aanpak kwam ervoor in de plaats. Verder stond opnieuw een logisch-deductief systeem centraal. Er was minder aandacht voor pure sommenmakerij, immers het ging vooral om de opbouw en de structuur van het systeem, waarbij aan het

einde van de totale cursus de theorie van de transformatiegroepen ook doel van de cursus was. Hoe anders de methode is, kunnen we al zien aan de keuze van de axioma's, waarvan de eerste drie aan de lijnspiegeling ten grondslag liggen:

'1. Het spiegelbeeld van een rechte lijn is weer een rechte lijn.
2. Lijnstuk en beeldlijnstuk zijn even lang.
3. Bij spiegeling zijn hoek en beeldhoek even groot.
4. Als van een vierhoek drie hoeken recht zijn, dan is ook de vierde hoek recht.'

Het laatste axioma is equivalent met het euclidische parallellenpostulaat, maar is aanschouwelijker. Ook de andere axioma's kunnen als aanschouwelijke evidenties opgevat worden. Er was weliswaar een ruime visuele en constructieve inleiding, maar het feit dat met de axioma's als uitgangspunt daarna een logisch systeem van stellingen afgeleid moest worden bracht de meetkunde, hoe fraai die ook in de methode is opgebouwd, weer terug tot een formeel vak, ook voor het eerste leerjaar.[22] Een illustratie hiervan is al vervat in de eerste stelling van het boek (zie figuur B4.2).

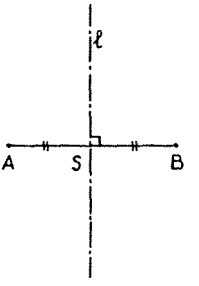
Stelling 1: De middelloodlijn van een lijnstuk is een symmetrieas van het lijnstuk.

Gegeven: Lijnstuk AB; middelloodlijn *l* (fig. 57).

Te bewijzen: *l* is symmetrieas.

Bewijs: Omdat *l* middelloodlijn is, geldt:
AS = BS
en ∠S = 90°.

Fig. 57



Dus volgens de definitie van spiegeling is A ·|· B.

Uit A ·|· B
en B ·|· A } volgt: AB ·|· BA.

Inderdaad valt het beeldlijnstuk met het lijnstuk zelf samen.
De middelloodlijn is dus symmetrieas.

figuur B4.2: Een bewijs uit de transformatiemeetkunde (Troelstra e.a., 1962)

Later is onder auspiciën van de CMLW en onder supervisie van Freudenthal door Troelstra en A.M. Kuipers in 1965 opnieuw een experimenteel boek over transformatiemeetkunde, *Proeve van een gemoderniseerde Meetkunde*, uitgegeven, dat nu startte met een ruimtelijke aanpak. Wansink zei hierover: 'Het boekje is te beschouwen als een eerste poging tot een didactisch experiment ter voorbereiding van een ingrijpende herziening van het wiskundeleerplan' (Wansink, 1967, p. 47). Natuur-

lijk paste de wending naar de transformatiemeetkunde in de tijd van de New Math, maar anderzijds stond het geheel natuurlijk dwars op de intuïtieve pogingen van een halve eeuw daarvoor. Hoe zou dit alles uitpakken? Daarover meer in het volgende, waarin we een overzicht geven van de snelle ontwikkelingen in de jaren zestig.

Kort overzicht ontwikkelingen 1958-1968

Terwijl het programma van 1958 nog maar net ingevoerd was, kondigden zich al weer nieuwe ontwikkelingen aan, namelijk die van de New Math-beweging. In hetzelfde jaar bepleitte Streefkerk al voor een rigoureuze herziening van het leerplan, waarbij hij voor het meetkundige element nauwelijks nog een plaats zag (Streefkerk, 1958, pp. 267-278). De daaropvolgende jaren zestig zouden geheel in het teken van dé modernisering van het wiskundeonderwijs komen te staan. De invloed, zowel van maatschappelijke en technologische ontwikkelingen als die van toonaangevende psychologen als Piaget en Bruner, veroorzaakten bij velen een totale omslag in het denken over aard en doel van het wiskundeonderwijs. Ook in ons land werd men, onder meer door buitenlandse experimenten, eigenlijk vrij plotseling op het spoor van het structuralisme gezet. W.J. Brandenburg hield in 1968 met zijn proefschrift *Modernisering van het wiskunde-onderwijs* een regelrecht pleidooi voor de moderne wiskunde, die hij vooral motiveerde als een 'appèl van de maatschappij'. Het ging in eerste instantie om de aansluiting tussen het hoger en middelbaar onderwijs in theoretisch-wiskundige zin. Maar daarnaast werden ook de toegepaste vakken als numerieke wiskunde, computerkunde, informatica en econometrie als belangrijke argumenten voor de volgens velen hoognodige vernieuwing genoemd. Wij zullen een en ander van deze plotselinge ommezwaai in deel C nader bezien.

De kern van het leerplan zou analyse en lineaire algebra moeten worden. De artikelen in het blad *Euclides* gingen in die jaren steeds meer deze 'moderne' geest weerspiegelen. In 1961 installeerde de staatssecretaris Stubenrouch de CMLW met als taak:

- organiseren en begeleiden van leerplanexperimenten die zouden uitmonden in een nieuw leerplan
- heroriëntering van leraren
- ideeën ontwikkelen voor een wiskundeprogramma voor leerlingen met een bijzondere aanleg voor wiskunde.[23]

In 1963 vonden de eerste cursussen van een lange reeks heroriënteringscursussen voor leraren VHMO plaats. De onderwerpen (verzamelingenleer en logica, lineaire algebra, topologie, groepentheorie, transformatiemeetkunde, lineaire analyse, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, toegepaste wiskunde en computerkunde) geven aan dat de inhoud van de wiskunde centraal stond. Later werden er ook cursus-

sen met een didactische component gegeven. In verband met het eerste punt werden door een aantal subcommissies van de CMLW vier experimenten uitgevoerd: transformatiemeetkunde in de onderbouw (Kuiper en Troelstra), gemoderniseerde algebra in de onderbouw (Kindt en Maassen), algebra en analyse in de bovenbouw (Van Dormolen) en vectormeetkunde (Westermann).

In 1966 besloot de CMLW, met de Wet op het Voortgezet Onderwijs in het vooruitzicht, een leerplan te maken dat tegelijk met de nieuwe wet in werking zou treden. Omdat de leerstofexperimenten nog lang niet afgerond waren, laat staan geëvalueerd, werden er drie subcommissies benoemd voor de nieuwe schoolcategorieën MAVO, HAVO en VWO. De door deze commissies opgestelde discussienota's werden aan alle scholen voor voortgezet onderwijs toegezonden en tijdens een gecombineerde vergadering van Wimecos, Liwenagel en de Wiskunde Werkgroep van de WVO besproken. In de nota's was weliswaar een leerplan voor de A-richting van het Atheneum opgenomen, maar op deze vergadering bleek dat men op het departement niet langer geporteerd was voor een apart wiskundeprogramma voor deze A-richting. Zo kwam er voor het Atheneum een wiskunde I- en een wiskunde II-pakket.[24]

Vergeleken met 1958 was er in 1968 sprake van een veel verder reikende verandering dan de nieuwe leerstof (analyse, vectormeetkunde, statistiek, waarschijnlijkheidsrekening) alleen. Er was nauwelijks ervaring met de invoering in de pas gecreëerde brugklas. Hoe moesten de nieuwe schooltypen MAVO en HAVO hun methoden inrichten? Het was een uitermate zwakke basis waarop dit 'moderne' programma werd ingevoerd; en ook nu weer, zoals we in de loop van de onderwijsgeschiedenis van dit onderzoek al eerder gezien hebben, werden de programma's ingevoerd op het moment dat zich een algemene onderwijswetgeving voordeed. Met name waren deze beslissingen zeer ondoordacht voor het MAVO en het Beroepsonderwijs, die in feite geheel verstoken bleven van leerstofexperimenten van de CMLW. Wel heeft vanaf 1965 op enkele MULO-scholen een experiment plaatsgevonden met een Nederlandse bewerking van de leergang *Modern Mathematics for Schools*, de zogenoemde Schotse methode, later bekend geworden als *Moderne Wiskunde*. Het in 1968 gepubliceerde leerplan werd door het Algemeen Pedagogisch Centrum (APC) van een eigen toelichting voorzien; men begreep echter heel goed dat het onvoldoende geschraagd was door praktijkervaringen. Intussen waren er door de CMLW vanaf 1966 cursussen voor MULO- en LBO-leraren georganiseerd, waarin vooral de nieuwe stof op eigen niveau centraal stond.

Zo was dan in 1968 een situatie in het wiskundeonderwijs ontstaan, waarbij de leraren van het gehele voortgezet onderwijs, die leerstofinhoudelijk enigszins, maar didactisch nauwelijks voorbereid waren, voor de zware taak gezet werden om, tegelijk met de invoering van de Mammoetwet, een nieuw programma te gaan onderwijzen, dat geënt was op de 'moderne wiskunde'. Aldus kreeg de New Math ook in Nederland, althans in het voortgezet onderwijs, voet aan de grond.

Spoedig verschenen er, los van het CMLW-werk, twee nieuwe methoden op de markt: *Van A tot Z* (Van Hiele, Boermeester) en *Moderne Wiskunde* (Krooshof e.a.), waarin behalve de nieuwe leerstof ook didactische vernieuwingen, zoals zelfwerkzaamheid, aanschouwelijkheid en 'telescoped reteaching' werden nagestreefd. Deze boeken kenden aparte uitwerkingen voor VWO en MAVO/LBO. Ook was het principe van gescheiden leerboeken voor algebra, meetkunde en verdere onderwerpen verlaten, waarmee uitdrukking gegeven werd aan het uniforme karakter van de wiskunde.

Kortom, het Nederlandse wiskundeonderwijs anno 1968 had te doen met een geheel nieuwe school, een sterk veranderd programma, een streven naar nieuwe didactiek, maar weinig of geen ervaring bij de leraren en weinig zicht op de examens. Nemen we daar nog eens de sterk veranderende maatschappij bij in aanmerking, dan moet dit voor veel leraren een geweldige opgave geweest zijn.

De neergang van de oude meetkunde

Zoals we weten, was sinds de leerplanherziening van 1958 het planimetrieprogramma al vereenvoudigd en was aan de zogenoemde 'microscopie van de driehoek' al een halt toegeroepen. Maar er moest volgens de aanhangers van de moderne wiskunde meer veranderen. De wiskundige Dieudonné had reeds in 1959 zijn befaamde 'Weg met Euclides' uitgesproken. Meetkunde diende alleen nog als een structuur behandeld te worden en wel vanuit de algemenere structuur der afbeeldingen, dus als transformaties. Wellicht nog belangrijker achtte men in de New Math de vectormeetkunde, die de weg kon openen naar lineaire algebra.

Troelstra had in zijn eerdergenoemde toespraak gelijk, toen hij dacht dat de meetkunde het loodje zou gaan leggen. Weliswaar werd er tot 1968 nog klassieke meetkunde gegeven, maar met de acceptatie van de moderne wiskunde was de nekslag aan dit vak al toegebracht. Slechts een enkeling verzette zich tegen het slechten van het eens door Dijksterhuis zo bewierookte euclidisch-meetkundige 'gebouw van zoo groote schoonheid'. De wiskundige Duparc was een van die weinigen:

> 'Wie dan ook heel radicaal is zou misschien de gehele meetkunde willen bannen van ons schoolonderwijs. Ik kom hier ten sterkste tegen op. (...) Redeneringen die gebruik maken van wat men in een figuur meent te zien, verkrijgen pas hun waarde als het "geziene" wordt aangetoond. (...) Dit dooreenlopen van intuïtie, aanschouwing en een zakelijke redenering vindt men bij de ingenieur terug. (...) Het meetkunde onderwijs nu kan naast het belang dat het op zichzelf heeft, dit type gedachtegang op een prachtige wijze aan de leerlingen bijbrengen.' (Duparc, 1960, pp. 194-195)

Verder prees Duparc de mogelijkheden om in kennis te komen met het logisch-deductieve systeem, maar noemde ook het praktische nut en de cultuur-historische waarde. Interessant is dat hij voor een goed begrip van de vectoranalyse en vectoralgebra een goed ruimtelijk inzicht noodzakelijk achtte. Met name deze laatste opmerking over de noodzaak van de 'ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht' is de

voorgaande decennia altijd een belangrijk item geweest. Maar kennelijk werd dit in de eufore vernieuwingsdrang gemakkelijk vergeten.

Ook de wiskundige N.H. Kuiper hield twee jaar later nog eens een 'Lofzang op de meetkunde' en kwam met ongeveer dezelfde argumenten als Duparc, maar benadrukte tevens het kunnen visualiseren van wiskundige problemen en het plezier dat juist meetkundige problemen met zich mee kunnen brengen. Maar uiteindelijk ging ook hij verder mee in de ontwikkelingen van transformatiemeetkunde en lineaire algebra (Kuiper, 1963).

In het interimrapport van de CMLW van mei 1967 werd het meetkundeprogramma voor de brugklas summier als volgt beschreven:

'a. Introductie van fundamentele begrippen punt, lijn, lijnstuk, halve lijn, verlengde en vlak.
b. De hoek in het vlak: graad, gestrekte hoek, rechte hoek, scherpe hoek, stompe hoek, complement en supplement, overstaande hoeken, overeenkomstige hoeken en verwisselende binnenhoeken, bissectrice, hoek van twee lijnen, loodrecht.
c. De afstand: de afstand van punt en lijn, twee evenwijdige lijnen, de verzameling van de punten die een gegeven afstand tot een gegeven lijn hebben.
d. De driehoek: scherphoekige, rechthoekige, stomphoekige, gelijkbenige en gelijkzijdige driehoeken, hoogtelijn, bissectrice en zwaartelijn
e. De vierhoek: vlieger, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.
f. De cirkel: straal, middelpunt, koorde, middellijn, boog, middelpuntshoek.
g. Lijnspiegeling, lijnsymmetrie, puntspiegeling, puntsymmetrie, verschuiving en draaiing.
h. Het begrip congruent.'

Daarna volgde een toelichting, kennelijk bedoeld voor auteurs, waarmee men alle kanten op kon. We zien dit trouwens alleen al aan de kale leerstofopsomming die, op punt g. na, precies de inhoud van een klassiek planimetrieboek dekte. Het nieuwe zat in de opsomming van de transformaties. Zo kon het gebeuren dat sommige 'nieuwe' boeken de traditionele aanpak, inclusief de congruentiegevallen, trouw bleven en de transformaties als het ware toevoegden.

De toelichting op genoemd leerplan vermeldde dat 'aanvankelijk niet het formele karakter van de wiskunde op de voorgrond gesteld (diende) te worden, maar (...) een intuïtieve benadering, het creatieve element, het zelf actief met de stof bezig zijn, het kritisch denken (zal) een ruime plaats moeten hebben' (CMLW, 1968, p. 7). Zo werden de oude vernieuwingspunten weer ter tafel gebracht, maar nu voor een andere inhoud. Zeer interessant was de daaropvolgende zinsnede, waarin ten aanzien van het meetkundeonderwijs nu ook expliciet aan de basisschool werd gedacht: 'Het zal noodzakelijk zijn ook het basisonderwijs in de vernieuwing te betrekken. Hier zijn andere landen ons reeds voorgegaan. Zo kan bijvoorbeeld reeds heel wat intuïtieve kennis van vlakke en ruimte-meetkunde worden verworven langs de weg van ervaring en experiment, door tekenen, meten en het maken van modellen. Op deze wijze wordt een betere voorbereiding gegeven op het V.O. dan thans het geval

is' (CMLW, 1968, p. 7).

Verder wilde men dat 'het verkrijgen van inzicht in de betekenis van een mathematisch bewijs' niet verloren zou gaan. Tevens dat ook nuttige kennis in verband met latere toepasbaarheid behouden bleef. Ook in de richtlijnen, die de gezamenlijke pedagogische centra voor het nieuwe leerplan uitgaven, zien we zowel het formele als het toepassingsdoel terugkeren. Samenvattend kunnen we zeggen dat voor het meetkundeprogramma voor de brugklas bij invoering van het programma van 1968 het volgende gold:

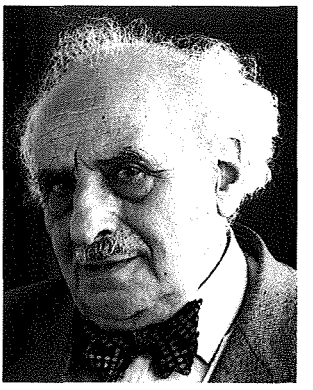
a oriëntatie in ruimte en vlak diende te blijven bestaan
b (schijn)-axiomatiek diende vermeden te worden
c een intuïtieve inleiding had de voorkeur
d de oude planimetrie was afgezworen
e de meetkunde diende een unificerend karakter te krijgen door middel van transformaties
f deductie bleef een belangrijk element
g einddoel was een gearitmetiseerde meetkunde.

Door de tamelijk grote vrijheid van interpretatie ontstonden verschillende nieuwe leerboeken, die niet alleen in niveau verschilden, maar ook een scala van zowel didactische als inhoudelijke uitwerkingen vertegenwoordigden. Voor de brugklas en de daaropvolgende drie leerjaren van het VWO diende wiskunde als één vak beschouwd te worden, waarvan de meetkunde een onderdeel diende te zijn. Bekende nieuwe 'totaal-boeken' uit die tijd waren *Getal en Ruimte* (De Bruin e.a.), *Moderne Wiskunde* (Krooshof e.a.) en *Van A tot Z* (Van Hiele e.a.). Hiermee was een definitief einde gekomen aan het aparte meetkundeboek. We moeten het sterker stellen: het was het einde van de klassieke schoolmeetkunde.

Freudenthal en wiskundeonderwijskunde

Het is misschien nog te vroeg om de betekenis van Hans Freudenthal (1905-1990) als vernieuwer van het wiskundeonderwijs in zijn volle omvang te kunnen schatten. Dat hij echter een enorme invloed op het Nederlandse reken- en wiskundeonderwijs in de twintigste eeuw heeft gehad, lijkt ook nu reeds vrijwel onweerlegbaar. Wanneer we alleen al hetgeen wij in het volgende kort zullen beschrijven in ogenschouw nemen, zal duidelijk worden dat het reken- en wiskundeonderwijs onder zijn bezielende leiding tegen het einde van deze eeuw een wending heeft genomen die zijn weerga niet kent.[25] Freudenthal heeft zich naast zijn zuiver wiskundige werk zijn gehele leven voor het onderwijs, in het bijzonder voor dat van het rekenen en de wiskunde, geïnteresseerd. Hij sprak ten slotte zelfs over de discipline *wiskundeonderwijskunde.*

Tijdens de oorlogsjaren schreef hij een didactiek van het rekenen die weliswaar nooit gepubliceerd is, maar die ter beschikking staat en waarvan sommige ideeën nog steeds interessant zijn. We releveerden al zijn contacten met P.M. van Hiele tijdens de jaren dertig, toen hij zich ook al lovend uitsprak over de ideeën van mevrouw Ehrenfest.


Hans Freudenthal

Na de oorlog werd hij hoogleraar te Utrecht. Ook begon hij zich toen meer direct met het reken- en wiskundeonderwijs te bemoeien. Waarschijnlijk heeft zijn echtgenote S.J.C. Lutter deze belangstelling en ontwikkeling gestimuleerd. In augustus 1945 hield Freudenthal in De Steeg tijdens de eerste naoorlogse conferentie van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs (WVO) een voordracht met als titel 'Opvoeding tot denken'. Nauwkeurige analyse van dit ongepubliceerde stuk leert dat veel van wat Freudenthal later over rekendidactiek uitdroeg, hier in de kiem al aanwezig was. Met name zijn opvatting over het reken-denken is zeer interessant, iets waarvan hij in verband met de beroemde redactiesommen in die lezing stelde dat ze 'uit het leven geknipt en een taak aanwijzend' moesten zijn. Hier zien we al enkele kernpunten van de latere realistische rekendidactiek: de praktische context-gebondenheid en de betekenisgeving van dergelijke opgaven.

Maandelijks vonden er op het Mathematisch Instituut te Utrecht onder voorzitterschap van Freudenthal bijeenkomsten van de Wiskunde Werkgroep plaats. In 1954 volgde Freudenthal E.W. Beth op als voorzitter van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde (NOCW), een commissie van het Wiskundig Genootschap en subcommissie van de International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). Hierdoor verwierf hij ook internationaal op het gebied van het wiskundeonderwijs bekendheid en erkenning.

Volgens Davis en Hersh heeft het streven van de Bourbaki-groep, die de wiskunde als een totale structuur in kaart wilden brengen, in de jaren vijftig een enorme invloed op alle niveaus van het onderwijs gehad: 'The formalist style (van Bourbaki, EdM) gradually penetrated downward into undergraduate mathematics teaching and, finally, in the name of "the new math" , even invaded kindergarten, with preschool texts of set theory' (Davis en Hersh, 1984, p. 344). Freudenthal heeft gesteld dat het niet de lancering van de Spoetnik in 1957 is geweest die de New Math op gang had gebracht. Ook hij achtte de bourbakisten verantwoordelijk voor de ideeën om de New Math op alle niveaus van het onderwijs in te voeren. Maar niet alleen de wiskundigen hadden volgens Freudenthal hier schuld aan. Hij weet dit fenomeen ook aan de support die de wiskundigen uit de psychologische hoek kregen, in het bij-

zonder van Piaget:

> 'Het was een absurde bevlieging wiskunde vanuit dit perspectief op school te onderwijzen. Ik heb deze dwaze geestesgesteldheid toen niet au sérieux genomen en dat was misschien de grootste taxatiefout die ik in mijn leven heb gemaakt. (...) Het begon al in de jaren vijftig. Zelfs Piaget, die er niets van begreep behalve dat het woord structuur hem aansprak hadden ze er toe weten over te halen.' (Freudenthal, 1987, p. 349)

Het officiële startpunt van de New Math wordt meestal gelegd bij de internationale conferentie te Royaumont in 1959, waar Freudenthal zich trouwens aan onttrokken had. Daarna werd in Nederland in 1961 de CMLW ingesteld, waartegen Freudenthal vanuit Amerika, waar hij toen verbleef, nog geprotesteerd heeft vanwege het ontbreken van de onderwijskundige en didactische component in de opzet (Goffree, 1991, p. 173). Toch zou Freudenthal 'loyaal' meewerken om, zoals hij het zelf noemde, te trachten 'bij te sturen'. Over de leerplannen van 1968 voor het voortgezet onderwijs heeft hij later gezegd: 'Een beetje New Math, niet veel, maar toch té veel en in elk geval gespeend van elke relatie met de realiteit, van elk inzicht in de dienende taak van de wiskunde' (Freudenthal, 1987, p. 351).

Freudenthal is zich in de loop van de jaren zeventig steeds luider gaan verzetten tegen de New Math. Hij gaf voor dat hij altijd een tegenstander van deze ontwikkeling was geweest, maar in 1966 op het 16-de Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen te Utrecht hield hij een lezing waaruit het omgekeerde spreekt. Daar spreekt hij vol enthousiasme over de modernisering van de wiskunde in de richting van het structuralisme, waarbij hij meent dat het de sleutel zal bieden tot een beter wiskundeonderwijs. Kleins reform was mislukt, aldus Freudenthal, omdat hij het niet eenvoudig genoeg gehouden had: 'Het is kenmerkend dat van denkbeelden als axiomatiek, van gebieden als verzamelingsleer in Klein's werk (...) niet wordt gerept – het inzicht dat het meest fundamentele het dichtst staat bij het meest elementaire heeft meer dan een halve eeuw nodig gehad om te rijpen' (Freudenthal, 1966, p. 9). Ook spreekt hij in deze rede vol lof over de toenmalige heroriënteringscursussen van de CMLW, die in het teken van de New Math stonden.[26]

Voor het basisonderwijs liep de New Math met een sisser af, omdat zich aan het eind van de jaren zestig de Wiskobas-groep had gevormd onder leiding van E.J. Wijdeveld en F. Goffree, waarmee een overhaaste invoering van de New Math werd tegengehouden. Bovendien ontstond in 1971 het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskundeonderwijs (IOWO) en kon een hernieuwde bezinning op en ontwikkeling van het totale reken-wiskundeonderwijs van vier tot achttien jaar gaan plaatsvinden. Hier komen we in deel C nog op terug.

Hiermee zijn in vogelvlucht Freudenthals bemoeienissen met het reken- en wiskundeonderwijs tussen 1945 en 1970 geschetst. In 1973 publiceerde hij zijn boek *Mathematics as an Educational Task*, waarin hij zijn in de voorgaande jaren ontwikkelde ideeën 'a philosophy of mathematical education' noemt. Het in dit boek voor-

komende stuk over meetkundeonderwijs is sterk geïnspireerd door het werk van mevrouw Ehrenfest, de Van Hieles en Van Albada. In deel C zullen we zien hoe in de jaren zeventig hierop voortgebouwd zou worden.

New Math-meetkunde op de lagere school

Rekenen werd na de oorlog in Nederland niet als een probleemgebied ervaren. Bestudering van het tijdschrift *Vernieuwing* tussen 1945 en 1970 levert slechts een handvol artikelen over rekenen op, onder meer van Boermeester en van Van Hiele. Ook in *Pedagogische Studiën* treffen we in de eerste vijfentwintig jaar na de oorlog een relatief klein aantal artikelen over rekenen aan. Ten slotte bevatten ook de eerste twintig jaargangen van *Onderwijs en Opvoeding* (1950-1970) nauwelijks bijdragen over rekenen.[27]

Wel kwam er in de jaren zestig steeds groter nadruk op individualisering en differentiatie van het rekenen te liggen. Dit kwam tot uitdrukking in methoden als *Naar Zelfstandig Rekenen*, *Naar Aanleg en Tempo* en *Niveaucursus Rekenen*. De inhoud was vooral gericht op het verwerven van een aantal standaardalgoritmen; de onderwijzer trad nauwelijks nog op als didacticus, maar voornamelijk als organisator en controleur. Er verschenen in die jaren echter ook methoden die niet met deze trend meegingen, maar die juist meer nadruk legden op de ontwikkeling van een goede didactiek, waarbij inzicht de kern was. *Functioneel Rekenen* was hiervan een voorbeeld.

Meetkunde kwam in deze boeken niet voor. Na de afschaffing van de vormleer waren de rekenboeken getallenboeken geworden. Alleen oppervlakte en inhoud van enkele eenvoudige figuren en lichamen kwamen ter sprake en dan nog alleen in de hoogste leerjaren en vooral om het metriek stelsel te oefenen.[28]

De *Proeve van een leerplan...* van het Nutsseminarium uit 1968 bevestigt dit. Een enkel voorbeeld over oppervlakte- en inhoudsbepalingen staat onder 'meten en wegen'. Een uitzondering hierop waren de leerplannen voor het montessori-onderwijs en de Vrije School, die meetkunde als een wezenlijk onderdeel van het basisonderwijs opvatten (zie B1). Ook kwam in de extra deeltjes van sommige rekenmethoden wel wat meetkundige voorbereiding op het vervolgonderwijs voor. Een Surinaamse methode uit 1954 draagt zelfs nog de naam *Vormleer* en behandelt uitgebreid de bekende vlakke figuren en de kubus, maar voornamelijk weer ten behoeve van het meten (omtrek, oppervlakte en inhoud).

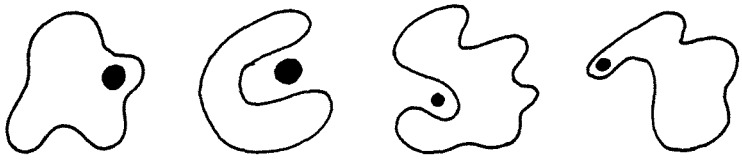
R. de Jong heeft in zijn onderzoek in 1986 naar de effecten van het Wiskobasproject op de schoolboeken ook een elftal rekenmethoden onderzocht die in de jaren 1965-1970 in gebruik waren. Door dit onderzoek wordt bevestigd dat meetkunde niet voorkwam. Ook in een drietal methoden, die aan het eind van de jaren zestig ontwikkeld waren, werd – met als uitzondering de methode *Op Veilig Spoor* – meetkunde niet aangetroffen.

Inmiddels waren aan het eind van de jaren zestig vier importmethoden op de

markt gekomen: *Denken en Rekenen* (Frankrijk), *Ontdek het Zelf* (Verenigde Staten), *Elementair Wiskundig Rekenen* (Verenigde Staten) en *Wiskunde op de Basisschool* (West-Duitsland). Deze methoden, die tot na het midden van de jaren zeventig tezamen ongeveer 5 procent van de markt hadden, bevatten wel meetkundige activiteiten, maar ze waren meestal van een structuralistische signatuur. Vooral uit de methode *Denken en Rekenen* wordt dit duidelijk. Hier werd geheel in de stijl van Piaget en Bourbaki begonnen met de armste meetkundige structuren: amorfe figuren, geslotenheid van figuren, binnen- en buitengebied en zo meer (zie figuur B4.3).

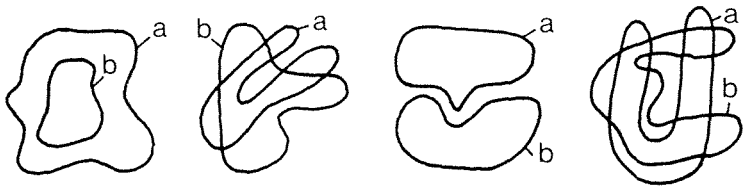
We eisen van de kinderen dat ze scherp observeren; goed denken; alles wat ze doen goed onder woorden brengen en op schrift stellen. Dit valt niet altijd mee, maar het moet. Hier dan enkele opdrachten, die u zelf kunt uitvoeren! Succes!

I.



Streep de kromme door, waar de kraal in het buitengebied van de gesloten kromme ligt.

II.



Streep de tekening door, waar een stuk van de kromme a binnen b en een stuk van de kromme b binnen a ligt.

figuur B4.3: Topologische inleiding in de meetkunde (*Denken en Rekenen*, 1970)

De ontwikkeling van meetkunde als vak voor de basisschool zou in 1971 door het Wiskobas-team opnieuw ter hand genomen worden. Hoe dit in zijn werk is gegaan en hoe de verhouding tot de meetkunde van de New Math zich ontwikkelde, zullen we in deel C beschrijven.

Korte terugblik

De opkomst van de New Math in de jaren zestig heeft in feite de natuurlijke historische ontwikkelingsgang van het wiskundeonderwijs op abrupte wijze doorbroken. Plotseling was de erkenning voor het genetische principe, dat al meer dan een eeuw

in de aandacht stond, verdwenen. Er ontstond als het ware een anti-genetische werkwijze door voor de leerplanontwikkeling van de wetenschappelijke structuren van de wiskunde uit te gaan, die nota bene zelf ook een historisch-genetische ontwikkeling hadden doorgemaakt. Wij kunnen in het kader van deze studie niet diep ingaan op de oorzaken van deze plotselinge omslag, maar het komt ons voor dat hier een breder onderzoek, waarin ook de maatschappelijke, wetenschappelijke en cultuurhistorische veranderingen van de jaren zestig betrokken worden, van nut kan zijn.

In dit hoofdstuk lag de nadruk op de historische betekenis van een aantal didactische onderzoeken, omdat deze de relatie leggen met het verleden en ons de ontwikkelingen van de jaren zeventig beter kunnen doen begrijpen. Voordat we daartoe overgaan, besteden we in B5 aandacht aan één van de constante argumenten voor het leren van wiskunde, in het bijzonder van meetkunde, namelijk de vormende waarde.

(Samenvattende conclusies van B4: zie B6.)

B5 Vormende waarde, een historische constante

Drie dichte deuren

De winnaar van een quiz moet één van de drie dichte deuren, waarachter de hoofdprijs ligt, aanwijzen. Nadat hij zijn keuze heeft gedaan, opent de quizmaster, die weet achter welke deur de prijs ligt, van de twee andere deuren er één waarachter de prijs niet ligt. Nu vraagt de quizmaster of de winnaar nog van keuze wil veranderen. Is het verstandig om dat te doen of maakt het niks uit?

De discussie, die in mei/juni 1995 in NRC-Handelsblad over de oplossing van dit probleem ontstond, laat zien hoe moeilijk construerend logisch denken is, hoeveel verschillende oplossingsstrategieën er voor dit probleem zijn; dat er maar enkele daarvan overtuigend zijn en hoe lastig het is didactisch het goede model te vinden. Onder de vele geleerde en hooggeleerde inzenders (meer dan tachtig) waren er zelfs enkelen, die daarbij ook nog in de fout gingen. Velen zullen wel een B-opleiding gehad hebben. Over vormende waarde gesproken.[1]

Inleiding

In dit hoofdstuk onderzoeken we de historische ontwikkeling van de *vormende waarde* als legitimering van het wiskundeonderwijs gedurende de periode vanaf 1920 tot heden. Vooral in de periode tussen de twee wereldoorlogen liepen de discussies hoog op en hebben tal van didactici, hooggeleerde mathematici en pedagogen hun licht hierover laten schijnen. Inherent aan deze problematiek is de vraag of en in welke mate *leren denken* onderwijsbaar is. Voor zover samenhangend met de doelen van het wiskundeonderwijs, zullen wij ook deze ontwikkelingen aan een historisch onderzoek onderwerpen. Dit betekent dat we ook de betekenis van de toen opkomende denkpsychologie voor het Nederlandse reken- en wiskundeonderwijs aan de orde zullen stellen. Daar niet alleen tijdens het interbellum, maar ook nog enige jaren na de Tweede Wereldoorlog de vormende waarde een constante in de discussies rond aard en doel van het aanvankelijk meetkundeonderwijs bleef, zullen we ook de naoorlogse periode in onze beschouwingen betrekken. Ten slotte trekken we deze kwestie door tot het recente verleden en tot het heden, omdat het argument van de vormende waarde niet alleen een constante blijkt te zijn voor de legitimering van het wiskundeonderwijs, maar ook omdat er wellicht vanuit de nieuwste onderzoekingen een ander licht op dit weerbarstige probleem geworpen kan worden.

Verandering van tijdgeest

De tijdgeest van na de Eerste Wereldoorlog werd gekenmerkt door een zeker cultuurpessimisme, waarvan Spengler in zijn *Untergang des Abendlandes* ook ten aanzien van de wiskunde gewag maakte: 'Sicher ist daß für uns die Zeit der großen Mathematiker vorüber ist'.[2] Dit gevoelen, gevoegd bij wat E.W. Beth eens de 'crisis der

zekerheden' in de natuurwetenschappen noemde, deed velen twijfelen aan het imago van de wiskunde als zeker richtsnoer voor het denken en het leren denken.[3] In 1926 luidde de jaarrede ter gelegenheid van de rectoraatsoverdracht van de universiteit in Groningen zelfs *De onbemindheid der wiskunde* (Barrau, 1926). Het boek van de Belg Cuypers uit 1940 *Het aankweken van het wiskundig denken* lijkt wel uit deze antistemming ontstaan te zijn. In B3 hebben we gezien hoezeer ook Dijksterhuis zich tegen een dergelijk pessimisme verzette.

Naast de twijfel over het nut van de wiskunde als vak van onderwijs, gingen in die tijd ook stemmen op over de negatieve effecten die wiskundeonderwijs bij bepaalde leerlingen zou kunnen veroorzaken. De wiskundige D. van Dantzig was hiervan de boodschapper: 'Alle leerlingen, die hetzij gebrek aan creatieve 'begaafdheid', hetzij eene sterke aversie tegen de wiskunde hebben, dienen van het W.O. te worden vrijgesteld' (Van Dantzig, 1926, p. 191). Na 1945 sloeg dit negativisme om in een geweldig optimisme, zowel ten aanzien van de wetenschappelijke vooruitgang van de wiskunde als van haar betekenis voor de toepasbaarheid en van haar maatschappelijke waarde. Ook in het wiskundeonderwijs werden toen de mouwen opgestroopt en begon zich vanaf het midden der jaren vijftig langzaamaan op inhoudelijk en didactisch gebied een omwenteling te voltrekken, waarvan de gevolgen uiteindelijk van grote invloed zouden zijn op het gehele Nederlandse wiskundeonderwijs: van kleuterschool tot universiteit.

Omschrijving der begrippen en afgrenzing van het gebied

Van oudsher wordt de vorming van het kind (en van de volwassene) opgedeeld naar een materieel en een formeel aspect. De materiële vorming betreft voornamelijk kennis en vaardigheden en onder bepaalde opzichten ook de fysieke ontwikkeling. De formele vorming is gericht op algemene ontwikkeling, in het bijzonder van verstandelijke of intellectuele vermogens (cognitieve ontwikkeling). Ook worden de culturele, zedelijke en morele vorming wel onder de formele vorming gerangschikt, maar deze aspecten laten wij in dit kader buiten beschouwing.

We spreken over vormende waarde van een leervak, indien door een onderwijsleerproces zodanige denkfaculteiten worden ontwikkeld, dat deze vaardigheden niet alleen toegepast kunnen worden op nieuwe problemen in het betreffende leergebied, maar indien er tevens sprake is van *overdracht* of *transfer* op andere situaties of vakgebieden. Wanneer alleen effect is waar te nemen binnen het betreffende leergebied, willen we van *vormende waarde in enge zin* spreken, anders in *ruime zin*.

Aan het denken zijn verschillende aspecten te onderscheiden. Wij zullen het denken alleen beschouwen in verband met het leren in het onderwijs, in het bijzonder bij het leren van wiskunde, nog specifieker bij het leren van de beginselen der meetkunde.Van belang is nu reeds onderscheid te maken tussen het begrijpen en toepassen van onderwezen stof: het *ná-denken*, en het meer zelfstandige, *productieve en*

(creatieve) denken, dat voor het oplossen van problemen zo belangrijk is. Het is Kohnstamm geweest, die hier in de jaren dertig al op gewezen heeft.

Bijdragen uit de psychologie

Voorzover men in de negentiende eeuw van een psychologische onderbouwing van de methodiek (didactiek) kan spreken, was het de associatiepsychologie die hiervoor de basis was. Begrippen (voorstellingen) zouden zich als losse elementen op een min of meer mechanische wijze aan elkaar verbinden tot grotere psychische samenhangen. Herhaling was hierbij een belangrijke voorwaarde.[4] Voor het onderwijs in het rekenen, maar zeker voor dat in de vormleer of de meetkunde, heeft de associatiepsychologie, althans in Nederland, nauwelijks enige betekenis gehad.

Met de opkomst van de denkpsychologie aan het begin van de twintigste eeuw in Duitsland ontstond ook in Nederland, voornamelijk onder invloed van Kohnstamm, eerst hoofdzakelijk in de kringen van de pedagogen, maar langzaamaan ook bij de vakdidactici, meer belangstelling voor de psychologische aspecten van het leren en onderwijzen. Uit de Würzburgerschool van Külpe zijn aan het begin van deze eeuw twee hoofdstromingen binnen de denkpsychologie ontstaan, die beide ook voor de didactiek van het meetkundeonderwijs van belang zijn (geweest). De eerste is de theorie der 'Bewußtseinsschichten' van Lindworsky en anderen: de Keulse school. De tweede betreft de 'denkpsychologische school' van Selz en anderen. Globaal samengevat, stelt de theorie der 'bewustzijnslagen' dat er bij het denken drie lagen of niveaus van denken bestaan, die getypeerd kunnen worden met de steekwoorden: aanschouwelijk, schematisch en abstract. Nieuw voor die tijd was het feit dat denken niet kan en mag blijven steken in het strikt aanschouwelijke, maar dat voor hogere vormen van denken kennis van 'categoriale ordeningssystemen' vereist is. Volgens Selz en de zijnen is het productieve denken doelgericht en niet associatief. De intellectuele faculteiten zouden niet alleen door rijping ontstaan, maar ook door het verwerven van 'oplossingsmethoden'. Deze oplossingsmethoden moeten ruimer begrepen worden dan alleen als oplossingsschema's voor specifieke problemen. Het zelf vinden van een oplossingsmethode is een belangrijk kenmerk van deze theorie. Het overzien van een probleem zou bevorderd worden door schematische anticipatie; dit is een van de kenmerken van de door Selz gewenste gedragswijzen van de denker. Selz en de zijnen nu meenden dat de denkfaculteiten van het kind onderwijsbaar waren, hetgeen een belangrijk argument voor de vormende waarde van bepaalde vakken betekende. In Nederland is Kohnstamm in de jaren dertig op de kwestie van de onderwijsbaarheid van algemene oplossingsmethoden, onder meer ten behoeve van zogenoemde lees-rekenopgaven, doorgegaan.[5] Ook A.D. de Groot heeft zich in zijn werk over het denken gebaseerd op Selz. In het bijzonder heeft De Groot het probleem van het zogenoemde 'omstructureren van figuren', dat door Duncker is onderzocht, onder de aandacht van de didactici gebracht (De Groot, 1955 p. 24).

Volgens de Gestaltpsychologie vormen waarneming, denken en instinct één geheel, een 'Gestalt'. Vanuit deze opvatting werd het denken door Duncker en Wertheimer, die beiden interessante onderzoekingen hebben verricht op het gebied van het meetkundeonderwijs, vooral opgevat als productief denken ten behoeve van het inzicht.

In de vooroorlogse periode bestond er nog weinig aandacht voor het werk van Piaget. In de jaren vijftig ging E.W. Beth met Piaget samenwerken, waaruit we de latere aanbeveling van Beth om 'studie en onderzoek (...) van de denkpsychologie (...) in het bijzonder met betrekking tot het wiskundig denken' te bevorderen, kunnen verklaren (Beth, 1962 p. 187).

Tot het midden van de jaren vijftig ontbraken psychologische onderbouwingen van het meetkundeonderwijs. Pas in 1955 heeft Boermeester enkele experimenten in het meetkundeonderwijs uitgevoerd, waarbij expliciet naar de denkpsychologie verwezen wordt (zie B4). De Van Hieles maakten een eclectisch gebruik van de verschillende opvattingen van de toenmalige stand van de psychologie (zie B4).

Een voor het wiskundeonderwijs belangrijk punt is de kwestie van de rijpheid van de leerling tot abstract redeneren. Daartoe zijn in het begin van de twintigste eeuw een aantal onderzoeken gedaan, waarvan die van Schüssler ook in ons land de aandacht hebben getrokken. Deze onderzoeken betroffen voornamelijk het hoogste niveau van het denken: het formeel-logische denken in de traditie van de aristotelische logica, waarbij het gaat om het trekken van een conclusie uit gegeven premissen. Leren denken betekende daarbij het kunnen hanteren van de meest elementaire regels van de formele logica. De uitkomsten van deze onderzoeken wezen alle in de richting, dat de mogelijkheden tot formeel redeneren pas vanaf circa het veertiende levensjaar mogelijk zouden zijn. Niet alleen in verband hiermee zullen we op deze onderzoeken in het volgende kort ingaan, maar mede doen wij dit omdat de idee dat formele logica de basis zou dienen te zijn voor het leren van wiskunde ook in later tijden opgeld heeft gedaan.

Standpunten vóór 1940, de voorstanders

In het 'Ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in Wiskunde, Mechanica en Kosmographie op de H.B.Scholen met vijfjarigen cursus' stelde de Commissie Beth-Dijksterhuis uit 1925 het volgende:

> 'zij (de commissie, EdM) wenscht vóór alles de vormende waarde, die van beoefening der wiskunde kan uitgaan, in het oog te houden en eerst in de tweede plaats te letten op het practische nut, dat de kennis van sommige gebieden der wiskunde voor een deel harer leerlingen later kan hebben; zij acht derhalve het aanbrengen van fundamentele theoretische inzichten belangrijker dan het ontwikkelen van technische vaardigheid. (...) *Hoofddoel van het wiskunde-onderwijs is het bijdragen tot geestelijke vorming en ontwikkeling; nevendoel het aanbrengen van nuttige kennis.*' (cursivering: EdM) (*Euclides 2*, 1926, p. 114)

Naast de *Euclides*-redactie (Schogt en Wijdenes) waren vele anderen – waarschijnlijk de zwijgende meerderheid der wiskundeleraren – het met deze opvatting eens. Maar ook voor de didactische vernieuwers, zoals Reindersma, mevrouw Ehrenfest en Turkstra, gold de vormende waarde als hoofddoelstelling van het wiskundeonderwijs. Het genoemde drietal stelde zijn hoop vooral op de psychologie. Uit de wiskundig wetenschappelijke kring noemen we als aanhangers van het belang der vormende waarde: Schuh en E.W. Beth. Turkstra beriep zich in 1938 op de toonaangevende Duitse didacticus W. Lietzmann. Hij verwees naar een Duitse enquête uit de jaren dertig onder een groep intellectuelen, waaruit bleek dat aan de praktische waarde van het wiskundeonderwijs vrijwel geen betekenis werd toegekend, terwijl door tweederde deel van de respondenten een bevestigend antwoord werd gegeven op de vraag of 'het wiskundeonderwijs van betekenis (was) voor de ontwikkeling van het denken en de geestelijke instelling' (Turkstra, 1938, p. 21). Hij meende, gezien de volgende retorische vraag, dat ook voor de middelmatige leerling de wiskunde het meest aangewezen vak is om te leren denken: 'Zou het vertoeven in deze strenge school van de mathematica, waarin het zuivere, causale, combinerende denken zo methodisch wordt beoefend, niet voor iederen middelmatigen leerling van de M.S., onverschillig of hij later medicus, theoloog of jurist wordt, of een leidende functie in de maatschappij vervult, van fascinerende invloed zijn?' (Turkstra, 1938, p. 23).

Het opvallende van het argument der vormende waarde van de wiskunde is dat het door alle tijden heen door vele didactici als een axioma geaccepteerd leek te worden. Zelden werd de vraag gesteld wat het begrip nu eigenlijk betekende, wat precies onder leren denken verstaan diende te worden en of er ook onderzoek gedaan was naar de zogenoemde algemene transfer. Natuurlijk, er waren uitzonderingen; we hebben in Reindersma een man ontmoet die zich in ieder geval op de hoogte had gesteld van onderzoeken op dit gebied. Ook Turkstra had belangstelling voor de ontwikkelingen van de denkpsychologie, maar mevrouw Ehrenfest heeft zich, voor zover wij weten, nooit in praktische zin met de psychologische ontwikkelingen bezig gehouden. Van het niet erg optimistische rapport van E.W. Beth uit 1939 over de stand van zaken in de psychologie van het leren van wiskunde maakten we al eerder gewag (zie B 4).

Toch bestond er ook wel degelijk kritiek op dit geloof in de vormende waarde.

Tegenstanders van de vormende waarde (vóór 1940)

Het streven van Reinders in de jaren twintig om de wiskunde op het Gymnasium voornamelijk in dienst te stellen van de natuurwetenschappen, staat voor het argument der toepasbaarheid van de wiskunde, dat we later steeds vaker zien optreden (zie B3). De meest uitgesproken standpunten over de vormende waarde kwamen ter tafel tijdens een discussie, die in 1930 in het *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs* plaatsvond. De aanleiding daartoe was een reeks vragen van de his-

toricus G. Kalff Jr. en een aantal voordrachten, die door Liwenagel georganiseerd waren over beperking of afschaffing van de wiskunde op de A-afdeling van het Gymnasium. Uit deze bronnen blijkt dat op de kernvraag, die Kalff als volgt formuleerde: 'Is bewezen, dat de exacte en logische training (ongetwijfeld door de mathematiek te geven) vanzelf doorwerkt bij andere vakken, m.a.w. een soort geestelijk permeatieproces, plaatsvindt?' (Kalff, 1930, p. 713), slechts subjectieve antwoorden en gebrekkige 'harde' cijfers aangedragen konden worden, zowel pro als contra de hypothese. Kalff zelf ging in zijn contraopvattingen zo ver, dat hij de wiskunde in zijn geheel voor het middelbaar onderwijs wilde afschaffen.

Tijdens een van de maandelijkse bijeenkomsten van wiskundeleraren aan de universiteit van Amsterdam, die in samenwerking met het Nutsseminarium werden gehouden, hield Mannoury in 1920 een voordracht over 'kunst en techniek' in de wiskunde, waarin hij het zoekende en scheppende aspect van de wiskunde als belangrijkste element naar voren brengt. Het opwekken van deze 'kunst', het door de leerling zelf verwerven van de essenties van de wiskunde, zag hij als belangrijkste doel van onderwijs:

> 'Wat is een cirkel? De wiskundeleraar geeft een definitie, waarin het begrip van de cirkel verloren gaat, waarin geen emotie zit, niet eens de rondheid tot uiting komt. En hierin schuilt ook de fout van de opvatting, dat de wiskunde iets te maken heeft met de kunst van logies denken. De wiskunde is geen redeleer. Deze verkeerde opvatting is oorzaak, dat van het wiskundeonderwijs zooveel misbruik wordt gemaakt met het bijoogmerk, de mensen verstandiger en redeliker te willen maken.'[6]

Tijdens de discussie verzetten zich onder meer Van der Waerden, Gunning en Kohnstamm hier tegen. Zij voerden aan dat de wiskunde juist wel een middel was om logisch te leren denken. Er waren dus wel critici van de vormende waarde, maar ze vormden een tegenwicht van geringe omvang. Enkele jaren later, in 1927, schreef Van Dantzig een artikel 'Over de maatschappelijke waarde van de wiskunde', dat een voorbode lijkt van een nieuwe tijd.

Maatschappelijke waarde, een cultuuromslag

Van Dantzig bracht in dit stuk zijn pertinente afwijzing van het argument der vormende waarde naar voren. Maar tegelijk preciseerde hij de betekenis van de *maatschappelijke waarde* der wiskunde. Later zou hij dit verder uitbouwen, toen hij zich geheel in dienst stelde van de toegepaste wiskunde, in het bijzonder van de mathematische statistiek. Al sinds 1932 bestond in Nederland de organisatie voor Toegepast Natuurwetenschappelijk Onderzoek (TNO). Ook binnen de Nederlandse wiskundige wereld groeide gedurende de jaren dertig de gedachte dat de wiskunde in dienst van de maatschappij en industrie gesteld diende te worden. Na de oorlog werd in 1946 in Amsterdam het Mathematisch Centrum – thans het Centrum voor Wiskunde en Informatica – opgericht, waarvan Van Dantzig de geestelijke vader ge-

noemd wordt. Dit volgens Alberts, die in zijn dissertatie Van Dantzigs werkzaamheid als volgt samenvat: 'Van hem kwam de gedachte van een afzonderlijk instituut voor zuivere *en* toegepaste wiskunde. Van hem kwam de gedachte afgestudeerde wiskundigen perspectief te bieden op een andere baan dan leraar. Van hem kwam ook de gedachte steun te zoeken bij het bedrijfsleven door opdrachten uit te voeren, de gedachte om de maatschappelijke functie van wiskunde te gelde te maken. Van meet af aan had Van Dantzig in navolging van Mannoury het wiskundig denken beschouwd in het licht van de sociale waarde. Alles bijeengenomen, was Van Dantzigs opvatting die van *wiskunde als productiefactor*' (Alberts, 1998, pp. 175-176).[7]

Deze cultuuromslag in de mathematische wereld betekende het begin van een totaal andere opvatting over wiskunde. Daarmee kwam ook het argument van de vormende waarde in het onderwijs in een ander licht te staan. Maar wel op indirecte wijze, want in eerste instantie konden aan de uitbating van de wiskunde – een verschijnsel dat zich nog moest bewijzen – nog geen consequenties verbonden worden voor inhoudelijke en/of didactische wijzigingen van het onderwijs. Toch is, ons inziens, rond de Tweede Wereldoorlog vanuit de vooruitgang van de natuurwetenschappen onder meer de basis gelegd voor de verdere ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Dit gold niet alleen voor Nederland en ook niet alleen voor het wiskundeonderwijs op de middelbare scholen. Ook het onderwijs op de lagere school zou zich op den duur niet kunnen onttrekken aan een oud argument voor reken- en wiskundeonderwijs, namelijk dat van de *praktische waarde*. Dat dit alles zijn tijd diende te hebben, spreekt vanzelf.

Vooralsnog bleef de gedachte der vormende waarde overheersen. Er was enige oppositie, maar deze was marginaal en werd al snel weer ondergesneeuwd onder de overheersende opvatting van de toenmalige 'trendsetters' van het Nederlandse wiskundeonderwijs. Hiermee hebben wij de mathematisch-didactische standpunten over het argument der vormende waarde van voor 1940 geschetst. Hoe dacht men in pedagogische kringen over deze kwestie?

Kohnstamm en de vormende waarde

Philip Abraham Kohnstamm (1875-1951) is de grondlegger van de personalistische pedagogiek geweest. Zijn opvattingen hebben een belangrijke bijdrage geleverd aan een onderwijsbeleid, dat na de oorlog van 1940-'45 een democratischer vorm kreeg.[8] Wij beperken ons tot Kohnstamms didactische werk, dat sterk beïnvloed is geweest door de denkpsychologie van Selz en waarvoor hij altijd een praktisch bruikbare uitwerking voor het onderwijs nastreefde. Maar in zijn didactische opvattingen besteedde hij ook aandacht aan de vormende waarde.

Kohnstamm omschreef vormende waarde als 'het verwerven van het *inzicht*, dat het gevolg is van zekeren arbeid'. Dit betekent dat vormende waarde door hem vooral in engere zin opgevat werd en dat ten behoeve van het verwerven van dat inzicht,

zoals uit zijn latere werk blijkt, ook doelgericht onderwijs gegeven diende te worden. Kohnstamm sprak ook van een voor de leerling 'gevoelige periode', waarbij hij stelde dat specifieke begaafdheden zich pas in de puberteit zouden openbaren. Hij distantieerde zich van de opvatting dat het 'toepassen van dezelfde functie op verschillend stofgebied' werkzaam zou zijn. Anders gezegd, hij twijfelde op zijn minst aan de algemene transfer die volgens veelgehoorde opvattingen van de klassieke talen of de wiskunde uit zou gaan. Maar het *leren denken*, de onderwijsbaarheid van denken en daarmee de mogelijke verhoging van de intellectuele vermogens, behoorden tot zijn wetenschappelijk-didactisch credo. We denken hierbij aan een voordracht die Kohnstamm in 1920 in de reeks 'Matematies-Didaktiese Bijeenkomsten' te Amsterdam gaf over 'Detective-problemen en Wiskunde-onderwijs'.[9] Hij zag hierin een mogelijkheid om de logische denkfaculteiten van de kinderen te stimuleren, hoewel hij ook op de beperkingen wees. Tijdens de discussie kwamen de mogelijkheden van puzzels en bepaalde spelen ter sprake; onderwerpen, die een halve eeuw later ook weer opgeld zouden doen. Deen heeft Kohnstamms opvattingen over de vormende waarde als volgt samengevat: 'De vormende waarde berust (...) op de overeenkomstige structuur van het denkproces dat voor oplossing van problemen van variërende inhoud is vereist. (...) de overeenkomstige structuur der denkmiddelen' (Deen, 1969, pp. 106-107).

Hoewel Kohnstamm deelnam aan de bijeenkomsten van de Wiskunde Werkgroep van de WVO, heeft hij weinig bijgedragen aan de vernieuwing van het wiskundeonderwijs op de middelbare scholen. Zijn werkterrein betrof de 'aansluiting tussen lagere school en de middelbare school' en 'inhoud en didactiek van het onderwijs op de lagere school'. Wij wezen al op zijn bijdragen op het gebied van de 'leesreken opgaven', die uiteraard weer met de problemen der vormende waarde en het leren denken te maken hadden.

Zowel Kohnstamm als Langeveld hebben op de mogelijkheid van *negatieve transfer* gewezen. Kohnstamm bedoelde daarmee dat te eenzijdige ontwikkeling van een bepaalde aanleg of intelligentiefunctie van een persoon remmend zou kunnen werken op de ontwikkeling van andere functies en dat daarmee zo iemand voor andere meer algemene kwaliteiten ongeschikt zou kunnen worden. Langeveld onderscheidde verschillende 'transfer-kringen', welke zouden samenhangen met individuele aanleg voor bepaalde intellectuele faculteiten. Tussen deze kringen zou, tenzij men over een algemene aanleg beschikte, negatieve transfer bestaan (Langeveld, 1937, pp. 387-390).[10] In kringen van wiskundedidactici vielen deze opmerkingen slecht, aangezien ze voer leverden voor de antimathematische opvattingen.

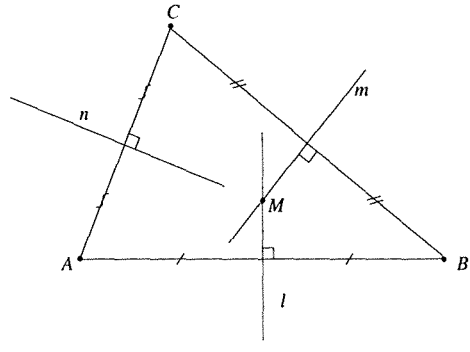
Vormende waarde en rekenen

Net als aan de vormleer werd in de negentiende eeuw ook aan het rekenen vormende waarde – 'verstandsontwikkelend hoofdrekenen' – toegekend. Na het wegvallen van

de vormleer in 1889 werd deze kwalificatie voor het rekenen nog sterker. Er is eigenlijk geen pedagoog, rekendidacticus of boekenschrijver sinds Versluys te noemen, die niet op z'n minst de vormende waarde van het rekenen noemt, vooral in verband met de zogenoemde denksommen. Ook Versluys roemde naast de toepasbaarheid van rekenen en wiskunde menigmaal hun vormende waarde. Deze opvatting – steeds zonder enige onderbouwing geponeerd – zou meer dan een halve eeuw blijven doorwerken. In de jaren dertig van deze eeuw bracht met name de rekendidacticus Diels zijn twijfels hierover naar voren. Diels had zich, in weerwil van de 'Duitse' traditie, georiënteerd op de ontwikkelingen in de Verenigde Staten (Thorndike e.a.), waar de nadruk meer kwam te liggen op het praktische nut van het rekenen. Hoewel er toen ook meer stemmen opgingen het rekenen toch vooral praktisch en toepasbaar te laten zijn, bleven rekendidactici als Grazer (i.e. Fr. Rombouts), Turkstra, Van Gelder en Reijnders en Snijders het argument der vormende waarde voor het rekenonderwijs tot ver in de jaren zestig trouw. Ook de overheid voedde dit geloof. Immers, in de eisen tot toelating tot de HBS luidde het artikel 4.2.d van het KB van 1938: 'het juist zien van de betrekkingen tussen de gegevens in eenvoudige denkvraagstukken (...)', dat tot in de jaren zestig dienst heeft gedaan.

Een voorbeeld van logisch-deductief redeneren

Om het argument van de vormende waarde beter te kunnen begrijpen, maken we een uitstapje in de historie van het klassieke meetkundeonderwijs. We roepen de volgende stelling in herinnering: 'De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt' (zie figuur B5.1). Deze stelling was tot 1968 een van de hoogtepunten van het meetkundeonderwijs aan het eind van de eerste klas der middelbare school. Maar hij stond ook op het programma van de MULO.



figuur B5.1: De middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt

De kern van het bewijs berust op de stelling dat de middelloodlijn van een lijnstuk XY de verzameling – 'meetkundige plaats' – is van álle punten die gelijke afstand tot

X en Y hebben. Voor het snijpunt M van l en m geldt dus $MA = MB$, maar ook $MB = MC$, waaruit volgt $MA = MC$. En uit dit laatste volgt dat M ook op de lijn n ligt.[11]

Een simpel bewijs als men de volgende twee zaken beheerst. Ten eerste begrip van de wet der transitiviteit: $MA = MB$ én $MB = MC$, dus $MA = MC$. Ten tweede moet de eigenschap van de middelloodlijn in zijn essentie begrepen zijn. Met dit laatste bedoelen we dat men bij de laatste stap van het bewijs moet inzien dat als voor een punt (i.c. M) geldt, dat het gelijke afstanden heeft tot twee andere punten (i.c. A en C), dat dat punt dan ook op de middelloodlijn van het betreffende lijnstuk (i.c. AC) ligt.

Deze eigenschap van de middelloodlijn werd in de schoolboeken tot 1968 altijd in twee stappen bewezen. De twee meest voorkomende klassieke bewijzen zijn in het overzicht van figuur B5.2 weergegeven.[12] We gaan daarbij uit van twee 'vaste' punten X en Y en dus van een 'vast' lijnstuk XY en van de bijbehorende middelloodlijn (l).

Het eerste bewijs dat in de meeste meetkundeboeken van vóór 1940 voorkwam, wordt gekenmerkt door 'uitsluiting'. Eerst werd aangetoond, dat voor élk punt P van de middelloodlijn l geldt, dat het gelijke afstanden tot X en Y heeft (1^a). Dit gebeurde via het congruentiegeval *zhz* voor de driehoeken PMX en PMY, een stelling die eerder in de opbouw van de methode aan de orde was geweest. Daarna, dat er buiten de lijn l géén andere punten zijn, die gelijke afstand hebben tot X en Y. Dit gebeurde door gebruik te maken van de driehoeksongelijkheid en van substitutie (1^b). Zo werd dus 'uitgesloten' dat er andere punten zijn, behalve die van l, die gelijke afstand hebben tot X en Y. Nu moet hierbij opgemerkt worden dat – indien in de opbouw van het systeem de driehoeksongelijkheid ook bewezen wordt – de keten van stellingen, die de leerlingen in het epistemische onderwijs à la Dijksterhuis ook zouden moeten kunnen reproduceren, heel lang is. De bewijzen van de driehoeksongelijkheid stoelden namelijk weer op de stelling dat in een driehoek tegenover een grotere hoek een grotere zijde ligt. Wetenschappelijk gezien was er op de bewijzen van dit soort eigenschappen als 1^b heel wat aan te merken, omdat er toch steeds gebruik gemaakt werd van aanschouwelijke evidenties. Anders wordt dit wanneer de driehoeksongelijkheid als aanschouwelijk gegeven wordt aangenomen, waarbij het vlak in drie delen wordt verdeeld: de punten die dichter bij X dan bij Y liggen, de punten die verder van X dan van Y liggen en de punten die precies evenver van X als Y liggen.

Na 1945 verschijnt er een ander bewijs in de meeste leerboeken, ook in die voor de MULO. Dit tweede bewijs uit figuur B5.2 berust op het principe van de logische 'omkering'. Eerst werd op dezelfde manier als in 1a bewezen dat voor élk punt P van l geldt dat $PX = PY$. Daarna werd het omgekeerde bewezen, namelijk dat áls voor een punt P geldt $PX = PY$, dat het dan ook op de middelloodlijn l van XY ligt (2^b). Het bewijs van deze 'omgekeerde' stelling berustte op het congruentiegeval

zzz, waaruit weer afgeleid werd dat de hoeken bij M gelijk zijn en dus elk 90° moeten zijn. In de jaren zestig werd dit bewijs in verzamelingentaal verpakt: $V = \{P \mid P \in l\}$ en $W = \{P \mid PX = PY\}$, $V \subset W \wedge W \subset V \Rightarrow V = W$.

Aan het taalniveau kan al begrepen worden dat een dergelijke 'heen' en 'terug'-redenering voor kinderen van twaalf jaar erg lastig is. Het is de vraag of de kinderen de subtiliteit van de terugredenering kunnen begrijpen: dat daardoor namelijk vaststaat dat er geen andere punten zijn dan alleen die van de middelloodlijn, waarvoor de afstanden tot X en Y gelijk zijn. Bovendien komt daar nog bij dat de kinderen de noodzaak van een bewijs van een voor hen evidente eigenschap meestal niet inzagen. Van Hiele-Geldof heeft in haar proefschrift uit 1957 gewezen op de psychologisch-didactische moeilijkheid van het omkeren van stellingen en de gebruikmaking daarvan in bewijzen. Dit hoort tot het hoogste niveau van redeneren, dat door de meeste kinderen van die leeftijd niet bereikt wordt (zie B4).

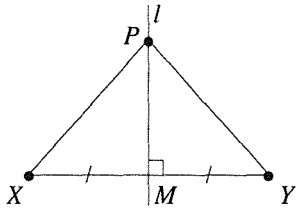
Voegen we hier nog aan toe dat ook begrepen moet worden dat het punt P een variabele is, oftewel dat door het bewijs voor het willekeurig gekozen punt P de eigenschap geldig is voor álle punten van l, dan kunnen we ons voorstellen dat deze opeenstapeling van logische begrippen en taalkwesties voor de kinderen een te moeilijk stuk leerstof is. Iedereen die dit soort onderwijs aan twaalf-dertienjarigen heeft gegeven, weet dat fundamentele kwesties als het begrijpen en kunnen toepassen van de 'transitiviteit', de 'nodig en voldoende' voorwaarden en het 'omkeren van een stelling' voor slechts enkele leerlingen in zijn totale omvang en betekenis haalbaar is. Ook al maakte men gebruik van de evidentie van de middelloodlijn als symmetrieas, het bleef een zeer lastig vraagstuk voor de genoemde doelgroep.

We hebben in het voorgaande gezien dat de aanhangers van de intuïtieve stroming, zoals mevrouw Ehrenfest, dan ook ernstige bezwaren hadden tegen een vroegtijdige aanbieding van dergelijke formele bewijzen. Anderzijds zagen velen, waaronder ook sommige aanhangers der intuïtieve richting, in oefeningen met formeel-logische redeneringen van het klassieke meetkundeonderwijs juist een argument voor de vormende waarde. De overeenkomsten met de formele logica zijn zo evident, dat het onderzoek naar het leren denken en het rijpingsproces der intelligentie zich juist op het formeel-logisch redeneren richtte.

Formele logica en meetkundeonderwijs

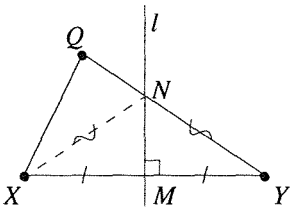
De wetenschappelijke logica was in die tijd nog relatief jong en in feite nog in volle ontwikkeling. Zij had haar wortels in de oude aristotelische en scholastische logica, die vooral op de taal was gebaseerd en waarvan de aloude syllogismen nog steeds een welkom onderwerp waren om het logische redeneren aan te spiegelen. De schoolmeetkunde leende zich daartoe bij uitstek om het formeel logische redeneren toe te passen. We wijzen op de noodzaak van het kiezen van grondbegrippen en het nauwkeurig definiëren van de overige begrippen. Hier zien we direct de noodzaak

1. Bewijs door uitsluiting



1^a

voor élk punt van middelloodlijn l
geldt dat PX = PY
bewijs via congruentie (zhz)

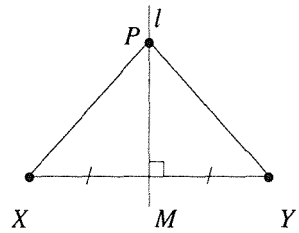


1^b

voor élk punt Q niet op middelloodlijn l
geldt QX ≠ QY
bewijs via driehoeksongelijkheid en 1^a

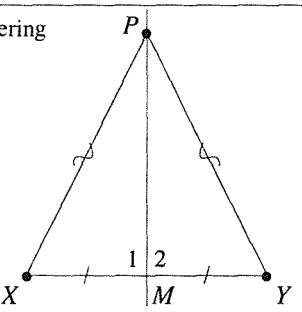
$$\left.\begin{array}{l} QX < QN + NX \\ NX = NY \end{array}\right\} \Rightarrow QX < QN + NY \Rightarrow QX < QY$$

2. Bewijs door omkering



2^a

voor élk punt van middelloodlijn l
geldt dat PX = PY
bewijs via congruentie (zhz)



2^b

als PX = PY dan ligt P op de middelloodlijn l van XY
bewijs via congruentie (zzz) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \angle M_1 = \angle M_2 \\ \angle M_1 + \angle M_2 = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \angle M_1 = \angle M_2 = 90°$$

figuur B5.2: Logisch-deductieve bewijzen van de middelloodlijnstelling

van scherp en accuraat taalgebruik. Het afleiden van stellingen uit voorgaande stellingen en axioma's vereist ook weer een nauwkeurig omschreven taalapparaat, waarvoor de propositielogica in wetenschappelijke zin uitermate geschikt is. (We laten de kwestie of dit ook in didactische zin gewenst zou zijn nog even buiten beschouwing.) De propositielogica wordt gekenmerkt door het 'rekenen' met proposities; de ontkenning *niet* A ($\neg$A), de conjunctie A *en* B (A $\wedge$ B), de disjunctie A *of* B (A $\vee$ B), de implicatie *als* A *dan* B (A $\Rightarrow$ B) en de bi-implicatie A *dan en slechts dan* als B (A $\Leftrightarrow$ B). Door gebruikmaking van kwantoren 'voor alle' ($\forall$) en 'er is een' of 'sommige' ($\exists$) kan de propositielogica uitgebreid worden tot de predikatenlogica, waarmee het domein der relaties en functies geformaliseerd kan worden.

In de bewijzen van figuur B5.2 komen een aantal van de genoemde logische begrippen aan de orde. Met name het maken van gevolgtrekkingen uit één of meer premissen in de meetkunde zette de psychologen op het spoor om de ontwikkeling van het logische denken verder te onderzoeken. We zullen verderop zien dat bij het ontstaan van de New Math-beweging het formeel logische denken en opereren met de genoemde formele taal opnieuw als een voorschool voor het mathematische denken werd gepropageerd.

De ontmaskering van de syllogismen-proeven door Kohnstamm

In het werk van Turkstra uit 1934 worden de onderzoeken van H. Schüssler uit de jaren 1915 tot 1918 naar de ontwikkeling van het logisch denken van kinderen tussen hun achtste en vijftiende jaar besproken.[13] Dit onderzoek was gebaseerd op het vinden van de juiste conclusie in een syllogisme uit de traditionele logica. Zo'n syllogisme bestaat uit twee premissen (P1 en P2), waaruit de conclusie of sluitreden C gevonden moet worden. Elke premisse is een propositie met twee termen: een subject en een predikaat. De twee premissen dienen een gemeenschappelijke term te hebben, die in de conclusie geëlimineerd wordt. Het klassieke voorbeeld luidt:

P1: Alle mensen zijn sterfelijk
P2: Socrates is een mens

C: Socrates is sterfelijk

Door variatie van de premissen (men kan vier typen of figuren onderscheiden) richtte men toentertijd tal van tests in, die tot doel hadden het niveau van en de mogelijkheid tot abstract denken van de proefpersoon te meten.[14] Uit het onderzoek van Schüssler is het volgende voorbeeld later vaak aangehaald.

P1: Alle hagedissen zijn reptielen
P2: Alle reptielen zijn gewerveld

Conclusie: ?

Schüssler concludeerde dat geen van zijn proefpersonen (kinderen en volwassenen)

hierop hét goede antwoord kon produceren. Dit moest zijn: 'sommige gewervelde dieren zijn hagedissen', omdat na eliminatie van de middenterm (i.c. reptielen) alleen de in P2 overblijvende term subject en de in P1 voorkomende term predikaat mag worden. Zouden we P1 en P2 verwisselen dan zou de conclusie 'alle hagedissen zijn gewerveld' zijn. Dit was het antwoord dat door bijna alle proefpersonen werd gegeven en dat natuurlijk niet alleen formeel juist is, maar ook voor de hand ligt. Terecht uitte Kohnstamm hierop ernstige kritiek.[15] Echter niet alleen op dit voorbeeld, veel algemener richtte Kohnstamms kritiek zich op de inhoudelijke aard van deze onderzoeken. Doordat hij en zijn medewerkers zelf een vergelijkbaar experiment hadden uitgevoerd (overigens in veel aanschouwelijker vorm: de premissen waren met behulp van cirkels omgevormd tot de begrippen 'ligt binnen, c.q. buiten', in feite Venn-diagrammen), kreeg Kohnstamm degelijke argumenten tot kritiek in handen (Kohnstamm, 1948, pp. 68-75). Weliswaar is één van zijn conclusies dat bepaalde formele logische denkvormen ook aan jonge kinderen onderwijsbaar zouden zijn, maar het feit dat men in de onderzoeken ervan uitging dat de formele logische regels, zoals in het gegeven voorbeeld van de hagedissen, vanzelf bij de kinderen aanwezig zouden zijn, bracht hem ertoe op de didactische feilen van dergelijk onderzoek te wijzen. Naar aanleiding van zijn eigen onderzoekingen concludeerde Kohnstamm dat het geenszins zijn bedoeling was 'kinderen van de eerste of tweede klasse der L.S. te willen bezighouden met min of meer formele logica', reden waarom hij ook van verdere experimenten heeft afgezien. Interessant is zijn opmerking over de didactische vormgeving van dergelijke denkoefeningen: 'Practische conclusies voor de didaktiek kunnen eerst worden getrokken, wanneer de logische functies, die klaarblijkelijk vanaf het eerste schooljaar der L.S. af ontwikkelbaar zijn, ingebouwd zijn in leerstof en opdrachten, die het kind belangstelling inboezemen en ook voor zijn toekomst van wezenlijk belang zijn' (Kohnstamm, 1948, p. 91).

Deze opmerking is van groot belang in verband met ons verdere relaas. Ook binnen het allereerste meetkundeonderwijs speelt namelijk de aard en de vormgeving der opgaven een buitengewoon belangrijke rol voor de haalbaarheid. Het zou echter nog zo'n veertig jaar moeten duren voor daartoe de eerste stappen konden worden gezet.

Leren denken bij Kohnstamm

Kohnstamm geloofde vast in de mogelijkheden om het kind te leren denken; een overtuiging, die hij vooral ten aanzien van het rekenonderwijs en het leesonderwijs heeft onderzocht. Beroemd zijn z'n verhandelingen tégen de denksommencultuur ('logische droogzwemmerij'), maar vóór een inzichtelijke aanpak van praktische redactievraagstukken, waarbij aan schematisering en visualisering een belangrijke plaats toegedacht werd, die hij lees-rekenopgaven noemde. In verband met het aansluitingsprobleem tussen lagere school en middelbare school is aan dit aspect van het

rekenonderwijs in verschillende *Mededelingen van het Nutsseminarium* aandacht besteed. In de aflevering van 1928 pleit Kohnstamm in verband met 'logische training' tevens voor een aanschouwelijke inleiding in de meetkunde op de lagere school, die verbonden zou kunnen worden met het rekenen (Van Veen en Kohnstamm, 1928). Ook hebben wij in het voorgaande zijn overigens marginale bemoeiingen gezien met de legitimering van het aanvankelijk meetkundeonderwijs.

Wij zijn hier op het werk van Kohnstamm ingegaan vanwege zijn opvattingen over het *denken* en *leren denken*, dat de kern vormde in de discussies over aard en inhoud van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Kohnstamm wees strikt logische oefeningen, die volgens hem niets met het echte denken te maken hadden, van de hand. Hij onderscheidde daarbij het reeds genoemde 'denken' en 'na-denken'. Het eerste betekende 'nieuwe wegen vinden' om iets op te lossen, het tweede het 'begrijpen van een Darstellung', die door een ander op logische wijze is opgesteld.

'In *beide* betekenissen is het "reële denken" – dat tot idealen maatstaf "logisch denken" heeft – ook als het niet door "storende bijcondities" wordt geremd, *niet* een voortschrijden van zekerheid en zekerheid tot zekerheid, maar altijd een *psychische beweging van zekerheid door onzekerheid naar hernieuwde zekerheid.* Alle echte denken is dialektisch, het gevolg van een *onzekerheid*stoestand (...)' (Kohnstamm, 1948, p. 113). Hiermee treft Kohnstamm ons inziens de kern van wat velen vóór hem als de kern van het heuristische wiskundeonderwijs beschouwden.

Onzekerheid over het leren denken

De interesse voor het leren denken door middel van syllogismenonderzoek bleef hiermee in Nederland beperkt, maar het geloof in de vormende waarde voor de wiskunde bleef, soms op de achtergrond, bestaan. De formele wiskunde leek het vanzelfsprekende middel om transfer te doen plaatsvinden. Het logisch leren denken, exact formuleren, hoofdzaken van bijzaken onderscheiden, liggen opgesloten in haar structuur en dit zou bij goed onderwijs dus aan een systematisch aanpakgedrag ook in andere vakken bij kunnen dragen, zo was de redenering.

Maar de psychologische experimenten, die in die tijd vooral in de Verenigde Staten uitgevoerd zijn, leverden nogal tegenstrijdige uitkomsten. Een antwoord op de cruciale vraag of er van de wiskunde vormende waarde uitgaat, kon dus toentertijd niet gegeven worden.

Mevrouw Ehrenfest zocht de mogelijkheid van de vormende waarde en transfer niet in de wiskunde zelf, maar in het wiskundige denken. Het resultaat van het mathematische denkproces is niet equivalent met het resultaat van dat denken. Daarom gaf zij de voorkeur aan het stimuleren van construerende denkprocessen.

Na de oorlog raakte het argument van de vormende waarde wat op de achtergrond. Toch schijnt het in de Wiskunde Werkgroep van de WVO een gedurig punt van discussie gebleven te zijn. Freudenthal zegt daarover zelfs: 'de vormende waar-

de van de wiskunde heeft lang – ook in de Werkgroep Wiskunde – gespookt' (Freudenthal, 1986, p. 57). Uiteindelijk leidde dit tot een openlijke discussie tussen Freudenthal en mevrouw Ehrenfest, waarover nu meer.

Freudenthal en mevrouw Ehrenfest discussiëren

Mevrouw Ehrenfest heeft haar hele leven vastgehouden aan haar geloof in de vormende waarde van het wiskundeonderwijs, of zoals zij het zelf ook wel noemde: 'goede denkmanieren'. Dit leidde in 1951 tot een officiële 'botsing' met Freudenthal. *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?*, zo heet de brochure uit 1951, waarin mevrouw Ehrenfest en Freudenthal in twee artikelen en twee wederwoorden hun discussie presenteerden.

Mevrouw Ehrenfest definieert logisch denken op een nogal ruime manier als volgt: 'de kunst (...) om uit een nog niet geordend geheel van gegevens de bij de zaak behorende gegevens voor den dag te halen' en onderscheid te maken 'tussen juiste beweringen en de bij de zaak behorende juiste beweringen', en ook 'het essentiële in een gegeven situatie te zoeken (...) dit scherp te formuleren (...) en nooit de totale situatie uit het oog te verliezen' (Ehrenfest en Freudenthal, 1951, p. 6). De inhoud (te omvangrijk) en de vorm (te reproductief en te veel sommenmakerij) van het toenmalige (meetkunde)onderwijs zouden dit logische denken in de weg staan, aldus mevrouw Ehrenfest, die in het openingsstuk van de discussie meer op het 'hoe' van de vraagstelling ingaat dan op het 'waarom'. Zij ondersteunt haar stellingname slechts met de uitspraak dat 'in sommige gevallen (het) wél mogelijk (is) goede (denk)manieren door oefenen bij te brengen (p. 7) en relativeert dit aan het eind met 'dat toch nog de kans bestaat, dat men door onderwijs der wiskunde het denkvermogen kan vergroten' (p. 10). Juist de wiskunde acht mevrouw Ehrenfest zo geschikt voor het leren denken vanwege de eenvoud van de stof.

Freudenthal, die mevrouw Ehrenfests omschrijving van logisch denken weliswaar deelt, is het echter volledig oneens met de gedachte dat uitgerekend de wiskunde het middel tot vergroting van het denkvermogen zou zijn. Hij meent dat het kritisch vermogen weliswaar door de wiskunde gekweekt wordt, maar slechts ten bate van de wiskunde zelf. Echter, de wiskunde is volgens Freudenthal: 'het slechtste terrein om (dit) met hoop op overdracht te beoefenen. (...) De wiskunde is in dat opzicht veel te weinig problematisch, omdat haar te eenvoudige structuur haar in hoge mate vrijwaart tegen het optreden van tegenstrijdigheden' (Ehrenfest en Freudenthal, 1951, p. 25). Ook heeft hij bezwaren tegen het oefenen binnen het door mevrouw Ehrenfest voorgestelde principe van de logische geslotenheid van een meetkundig systeem, omdat hij dit a-didactisch acht. Hij ziet juist wel mogelijkheden in het maken van oefenopgaven, waarin de eerdere theorie wordt toegepast. Maar ook Freudenthal kan zijn contraire stellingname niet met harde feiten staven. Zijn opvatting is net als die van mevrouw Ehrenfest een subjectieve, die we met het volgende citaat

kunnen samenvatten:

> 'ik acht het niet onmogelijk, dat men een speciaal vak beoefenende, ook opvoedt tot denken in de meer algemene zin – goed begrepen moedertaalonderwijs is hiervoor vooral aangewezen, omdat denken voor een groot gedeelte taalbeheersing is; ik sluit ook de mogelijkheid van bijdragen in denkoefening van de kant van de wiskunde geenszins uit. *Maar ik vrees, dat men op drijfzand komt, wanneer men de uren, die het één of andere schoolvak opeist, wil rechtvaardigen met het beroep op de denkoefeningen waaraan die tijd zou worden besteed.*' (p. 16) (cursivering: EdM)

In 1963 publiceert Freudenthal een artikel getiteld 'Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?', dat in 1973 grotendeels ook in zijn boek *Mathematics as an Educational Task* wordt opgenomen. Letterlijk schrijft hij daar: 'Es ist bedauerlich, daß in der Mannigfaltigkeit der Publikationen über Axiomatik auf der Schule *der bildende Wert des Axiomatisierens* nicht einmal erwähnt wird' (Freudenthal, 1963, p. 42) (cursivering: EdM).

Het antwoord op het tweede gedeelte van de door hemzelf gestelde vraag is bevestigend, mits axiomatiek in de betekenis van *axiomatiseren* opgevat wordt. Hij bedoelt hiermee dat axiomatiek niet via een geprefabriceerd systeem aangeboden wordt, maar als scheppende activiteit voor de leerlingen. Hij spreekt veelvuldig over 'lokaal organiseren' en/of 'lokaal ordenen', in latere publicaties over 'lokaal deductief redeneren'. Een mooi voorbeeld van dit laatste is de analyse van het bewijs van de concurrentie van de middelloodlijnen van een driehoek, dat wij hiervoor besproken hebben. Freudenthal verwerpt de euclidische meetkunde als onderwerp voor de axiomatiek, omdat de axioma's hiervoor enerzijds te vanzelfsprekend zijn, anderzijds omdat het werkelijke axiomatiseren te gecompliceerd wordt. Zo er al een meetkundig voorbeeld voor meetkundige axiomatica op school gebruikt kan worden, dan verwijst hij naar een meetkunde op de bol die tot de elliptische meetkunde kan voeren.[16]

Zo afwijzend stond Freudenthal dus nu ook weer niet tegenover mevrouw Ehrenfests geloof in de vormende waarde van het wiskundeonderwijs, immers ook haar ideaal was het in een derde ronde het meetkundeonderwijs af te sluiten met een axiomatische cursus.

Briefwisseling maart 1964

Naar aanleiding van genoemd artikel van Freudenthal uit 1963 ontstond een briefwisseling tussen mevrouw Ehrenfest en Freudenthal, die van 3 maart tot 21 maart 1964 duurde.[17] Ieder schreven zij drie brieven. In de eerste van 3-3-64 van mevrouw Ehrenfest lezen we:

> 'Tot mijn vreugde heb ik onder ander bemerkt (trouwens niet voor de eerste keer), dat u precies dezelfde eisen aan het onderrichten van wiskunde stelt, als ikzelf – b.v. wanneer u van het axiomatiseren door de leerlingen zelf schrijft of ze laten zelfstandig denken niet pas in verband met te ingewikkelde vragen, maar van beginne af, waar de

problemen eenvoudig en toegankelijk voor de leerlingen zijn. Merkwaardigerwijs, staan dergelijke beweringen ook in dat artikel van mij, tegen welke u beweerde, dat u niet eens er mee was – dat, op uw voorstel, samen met uw kritiek en ons beider verdere antwoorden in een gemeenschappelijke bundel uitgegeven waren!!!'

In de brief wordt ook een kwestie uit de geschiedenis van de axiomatiek aangesneden en afgesloten met de vraag, waarom Freudenthal, gezien zijn ingenomen en hiervoor beschreven standpunt, het nog nodig vindt om de leerlingen met het begrip 'axioma' bekend te maken. Hierop antwoordt Freudenthal:

'Het is nuttig dat de leerlingen axiomatiek (...) leren kennen (...) omdat de axiomatiek een belangrijk technisch hulpmiddel is dat de wiskunde geweldig vereenvoudigt.'[18]

De volgende brief en het antwoord daarop staan hoofdzakelijk in het teken van de wetenschappelijke en geschiedkundige kanten van de axiomatiek, maar in haar derde en laatste brief aan Freudenthal schrijft mevrouw Ehrenfest:

'Ik vrees, dat u mijn vraag niet begrepen hebt: waarom moet men zeker zijn dat men in bezit van een v o l l e d i g systeem van axiomen is, om de daarop steunende bewijzen van de aanschouwing los te maken? Stelt u zich voor, u deelt iemand mede behalve de axiomen, ook sommige daaruit afgeleide stellingen; dat die persoon dat alles aanvaardt zonder zich af te vragen, wat daarvan axiomen en wat stellingen zijn, waarop u hem de opdracht geeft het systeem van stellingen zonder gebruik van aanschouwelijkheid te ontwikkelen. Dit kan immers. Daarmee wil ik zeggen, dat het bezitten van een volledig systeem van axiomen niet n o o d z a k e l i j k is om abstrakt verder te redeneren (als zoiets überhaupt menselijk mogelijk is).'[19]

Het laatste antwoord van Freudenthal luidt in z'n totaliteit:

'Beste mevrouw Ehrenfest
Op Uw vraag 'hoe kan iemand weten, welke eigenschappen ook voor een algemene driehoek gelden...' zou Euclides vermoedelijk (en Plato zeker) hebben geantwoord 'doordat zijn ziel in de preëxistentie de idee van de driehoek heeft aanschouwd.'
Met de rest van Uw brief ben ik het eens. Het is juist de mening die ik ook in mijn artikel heb uitgesproken.
Met hartelijke groeten, H. Freudenthal (in absentia) secr.e'[20]

Iets meer dan drie weken daarna, op 14 april 1964, overlijdt mevrouw Ehrenfest. Freudenthal schrijft in het *Mededelingenblad* van de Wiskunde Werkgroep een 'In Memoriam', waarin hij naar de discussie uit 1951 verwijst en de zojuist genoemde briefwisseling memoreert. Hij besluit het stukje met de volgende woorden:

'De laatste woorden van mijn laatste brief aan Mevrouw Ehrenfest waren 'Ik ben het met U eens' en 'Hartelijke groeten'. Ik wil er nu aan toe voegen: 'de discussie is gesloten'. (Freudenthal, 1964, p. 2)

Uit de zinsnede 'Ik ben het met U eens', die niet zó in de brief staat, had men toen in 1964 kunnen concluderen dat Freudenthal mevrouw Ehrenfest volledig gelijk gaf

in haar opvattingen over de vormende waarde van het wiskundeonderwijs, maar de oorspronkelijke briefwisseling toont aan, dat dit probleem daarin niet expliciet gesteld werd. Wel stond Freudenthal daar toen reeds anders tegenover en in 1987 schrijft Freudenthal zelfs: 'Nu, (...), sla ik de vormende waarde van het wiskundeleren hoog aan, geweldig hoog' (Freudenthal, 1987, p. 360). We moeten hierbij echter aantekenen dat hij op dat moment een geheel ander wiskundeonderwijs – hij dacht aan de realistische aanpak – voor ogen had dan zo'n halve eeuw daarvoor.

Mevrouw Ehrenfests invloed op Freudenthal

Vergelijking van de discussies van mevrouw Ehrenfest met Dijksterhuis (1924) en met Freudenthal (1951) leert ons het volgende: Dijksterhuis achtte de propedeutische cursus van mevrouw Ehrenfest een gevaar voor de logisch-deductieve opzet van de schoolwiskunde. Over de vormende waarde werd geen woord gewisseld. Freudenthal geloofde niet in de vormende waarde van het wiskundeonderwijs, maar achtte de door mevrouw Ehrenfest voorgestelde intuïtieve inleiding juist van grote waarde. Eigenlijk had Freudenthal zijn pijlen op Dijksterhuis en de zijnen moeten richten, wat hij in 1987 alsnog deed, toen hij in verband met het voorgestelde leerplan Beth-Dijksterhuis uit 1924 over de 'toonaangevende kliek' sprak, 'waarvan (...) H.J.E. Beth en (...) H. Schogt representanten waren' (Freudenthal, 1987, p. 341).

In zekere zin is mevrouw Ehrenfest de aanjaagster – op z'n minst de katalysator – geweest voor de ontwikkeling van Freudenthals didactische opvattingen. Parallellen zien we in het belang van het zelfzoekende van de leerling, het uitgaan van intuïtie, het aansluiten bij de realiteit, het lokaal deductief redeneren en het zelf axiomatiseren. Freudenthal liet geen gelegenheid voorbijgaan om mevrouw Ehrenfests ideeën te prijzen. Meermalen noemde hij haar *Übungensammlung* een meesterwerk. In feite waren zij slechts over het aspect van de vormende waarde voortdurend in discussie. De vormende waarde als motivering voor het wiskundeonderwijs zou echter, zoals we al eerder opmerkten, vanaf de jaren vijftig minder nadrukkelijk optreden.

Vormende waarde, een constante

Toch wijdt Van Hiele in 1957 in zijn proefschrift, waarbij Freudenthal als promotor optrad, nog een heel hoofdstuk aan de vormende waarde. Hij maakt een uitvoerige analyse van de discussie tussen mevrouw Ehrenfest en Freudenthal, waarbij de kernpunten van beide standpunten helder uiteengezet worden. Uit het verdere relaas wordt duidelijk dat Van Hiele zich geheel aan de zijde van mevrouw Ehrenfest schaart; hij acht, net als zij, de 'ontische armoede' van de wiskunde juist een voordeel om dit vak tot 'objekt van denken' te maken. Hier wordt dus de structuur van de zuivere wiskunde als argument voor de vormende waarde gebruikt. Laten we Van Hiele nu zelf aan het woord laten:

> 'Er is (...) geen reden om de vormende waarde van de wiskunde als zijnde onbelangrijk te verwerpen. Het feit, dat zij zo weinig gekonstateerd wordt, behoeft ons niet te verontrusten: Niet de goede denkgewoonten vallen biezonder op, maar juist de slechte. Uit het feit dat de negatieve transfer zo duidelijk herkend kan worden, mogen we met vrij grote zekerheid besluiten, dat de positieve transfer er ook zal zijn. De goede denkgewoonte uit de wiskunde, die het veelvuldigst overgedragen wordt op andere vakken is de systematische ordening.' (Van Hiele, 1957, pp. 98-99)

Allereerst merken we op, dat het niet duidelijk is of de waargenomen negatieve transfer tengevolge van het ondergane wiskundeonderwijs zou zijn. Ten tweede ontleent Van Hiele het begrip negatieve transfer aan Langeveld die, zoals we al eerder opmerkten, tussen de door hem opgestelde transferkringen zou bestaan. Maar dit effect van negatieve transfer volgens Langeveld is louter theoretisch en mist elke empirische onderbouwing. Tenslotte komt ons de redenatie, dat uit het mogelijke bestaan van negatieve transfer die van positieve transfer afgeleid kan worden, nogal zwak voor. Ook de enkele voorbeelden van volwassenen die in hun jeugd wiskunde gehad hadden, deze studie later weer opnamen en dan 'oplosmethoden' gebruikten die voortkwamen uit de 'ter beschikking gestelde middelen', kunnen ons inziens geen afdoende evidentie leveren voor het bestaan van algemene positieve transfer. Kortom, ook Van Hiele heeft het bestaan van de vormende waarde van de wiskunde niet hard kunnen maken.

Ook Brandenburg, die in zijn proefschrift uit 1968 modernisering van het wiskundeonderwijs in de structurele richting bepleit, spreekt van het belang van transfer binnen en buiten de wiskunde (Brandenburg, 1968, pp. 47-48). Dat juist degenen, die de wiskunde als systeem op zich als onderwijsvak bepleitten, het argument der vormende waarde gebruikten, lijkt sterk op eigenbelang. Immers, hoe moest men anders aantonen dat dit vak ook voor later een praktische betekenis kon hebben? Peremans noemde dit in een artikel over het doel van het wiskundeonderwijs in 1960 zelfbehoud, maar geloofde ook in 'het oefenen en ontwikkelen van geestelijke vermogens', zij het, dat hij als eerste het argument van het praktische nut aanvoerde.

Toen vanaf de jaren zestig de praktische waarde van de wiskunde steeds duidelijker werd, werd ook de noodzaak van het argument der vormende waarde natuurlijk minder. Maar het moest nog tot het begin van de jaren tachtig duren voordat een meer toepassingsgericht reken- en wiskundeonderwijs verwezenlijkt zou worden.

Mathematische en psycho-mathematische structuren

Door het imposante werk van de Bourbaki-groep, die sinds de jaren dertig werkte aan de unificatie van de wetenschappelijke wiskunde, kwam het structuurbegrip in een nog algemener kader te staan dan in de tijd van Kleins Erlanger-Programm. In de jaren vijftig werden de effecten hiervan ook zichtbaar in psychologische onderzoeken en in de moderne reken- en wiskundemethoden. Omgekeerd trok het werk van Piaget – in het bijzonder zijn onderzoeken naar de ontwikkeling van de funda-

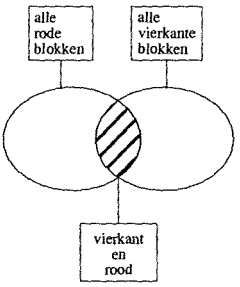
mentele 'psycho-mathematische structuren' in het kinderlijke denken – de belangstelling van een aantal wiskundigen en didactici. De vraag rees of men dergelijke algemene denkschema's, zoals het transitiviteits-redeneren, op natuurlijke wijze zou moeten laten groeien en pas bewust zou dienen te maken nadat de leerling voldoende wiskundige bagage had verworven of dat deze reeds van jongs af aan onderwezen zouden moeten worden: 'is it better that the child should be given the opportunity to function with these schemes, these structures, very early on in his development, so that they can be used as true matrices for the formation of his mathematical thought?' (Fischbein, 1973, p. 226). In hetzelfde ICME-conferentieverslag, waaraan voorgaand citaat is ontleend, schreef Piaget een stuk waarin hij het belang van de 'logico-mathematical structures' benadrukte. Tevens wees hij op het belang van het handelen: 'it would be a great mistake, particularly in mathematical education, to neglect the role of actions and always to remain on the level of language' (Piaget, 1973, p. 80). Hij maakt echter onderscheid tussen 'physical experience' en 'logico-mathematical experience'. Met het laatste bedoelde hij het reflecteren op de concrete handeling, dat hij van groot belang voor de intellectuele groei van het kind achtte. Ten aanzien van het expliciteren en het formaliseren van deze ervaringen stelde hij dat men hierbij in het onderwijs prudent dient om te gaan en dat men daarvoor de nodige tijd van rijping moest nemen: 'the representations or models used should correspond to the natural logic of levels of the pupils in question, and formalisation should be kept for a later moment as a type of systematisation of the notions already acquired' (Piaget, 1973, p. 87).

Hieruit blijkt dus dat Piaget, in ieder geval aan het begin van de jaren zeventig, over het gebruik van formele logica een voorzichtig standpunt innam. Toch waren in verschillende New Math-projecten van de jaren vijftig en zestig de genoemde psychologische ontwikkelingen, ook voor de jonge kinderen, juist via formele wiskundige structuren uitgewerkt. De openingszin van het boekje *Logic* van het toen bekende Nuffield Mathematics Project in Engeland luidt:

> 'A great deal of mathematics taught in schools has been defended because it was said to 'train the mind', and to teach children to think in an orderly, coherent way. The most direct way of doing this is to give a child some experience of elementary logic, and a good deal of this can be done in junior school.'

Hier werd de logica nog voor de 'junior school' gereserveerd, maar Dienes (Canada) en Nicole Picard (Frankrijk), meenden dat reeds op de kleuterschool een aanvang gemaakt kon worden met een inleiding tot het formele logische redeneren, waarbij negatie, conjunctie, disjunctie, implicatie en bi-implicatie, en het gebruik van de logische kwantoren 'alle' en 'sommige' aan de orde kwamen. Dienes maakte daarbij gebruik van spelletjes met de toen bekende logiblokken.[21] De eindige verzamelingenleer met de bijpassende representaties van Venn-diagrammen waren hierbij de werktuigen. Men legde bijvoorbeeld de verzameling van alle rode blokken én de

verzameling van alle vierkante blokken (zie figuur B5.3). Alleen uit de doorsnede van de twee verzamelingen kan een blok gekozen worden dat zowel vierkant als rood is. Hiermee werd de waarheidstabel van de logische conjunctie van de twee proposities P(rood) én Q(vierkant), in de logica trouwens als een axioma ingevoerd, geïnduceerd of gerechtvaardigd.[22]



P(rood)	Q(vierkant)	P ∧ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

figuur B5.3: Conjunctie met de logi-blokken

Hoever dit structuralisme reikte, blijkt vooral uit het werk van Zoltan Dienes, die zich beriep op het werk van Hilbert, Tarski, Russel en Piaget en die een grootse toekomst voor de New Math op de basisschool voorzag:

> 'During the six years of school many children will reach a degree of mathematical maturity which makes it possible to teach them almost any mathematics that is now normally taught in the high schools or during the first years of University. Mathematical groups, the study of sub-groups, isomorphisms, rings, simultaneous equations.'
> (Dienes, 1966, p. 225)

Ook in Nederland kreeg het structuralisme in 1968 in het voortgezet onderwijs voet aan de grond (zie B4). Voor het Nederlandse basisonderwijs ontstonden wel enkele initiatieven in deze richting, maar deze hebben nooit wortel geschoten.[23] We komen hier nog op terug in deel C.

Freudenthal als opponent van het structuralistische denken

In Nederland is het met name Freudenthal geweest, die de verzamelingenmode en de formele logica of verpakkingen daarvan als onderwerp voor het basisonderwijs heeft gekritiseerd.[24] Zo had hij eind jaren zestig nog wel waardering voor het werk van Dienes.[25] Maar hij is pas aan het begin van de jaren zeventig expliciet tot deze opvatting gekomen. Het belang van taalverwerving en -beheersing stond voor hem buiten discussie. Hij pleitte ervoor om in het reken- en wiskundeonderwijs aan te sluiten bij de alledaagse taal en formaliseringen pas later tot ontwikkeling te brengen.[26] Hij heeft erop gewezen dat formele logica vaak strijdig is met de gewone taal en het dagelijkse leven, hetgeen alleen al in het gebruik van het woordje 'of' tot uiting komt. Nog sterker ervaart men deze discrepantie bij de bestudering van de be-

langrijkste elementaire logische uitdrukking, namelijk die van de implicatie (als, dan).[27] In 1973 heeft hij zijn opvattingen over formele logica als vak van onderwijs of als hulpmiddel bij de wiskunde beschreven in zijn *Mathematics as an Educational Task*. Een belangrijk bezwaar, dat hij ook al in de discussie met mevrouw Ehrenfest naar voren bracht, is dat de regels opgelegd worden en dat er alleen formeel mee gerekend kan worden en dat ze niet door de leerlingen ontdekt of gemaakt kunnen worden. 'I must stress again and again that it does not make sense to teach a logical formalism detached from the subject matter which is supposed to formalize' (Freudenthal, 1973, p. 630). Volgens Freudenthal wordt het logische denken geactiveerd doordat de leerling zelf het probleem organiseert, schematiseert, isomorfieën ontdekt en eventueel generaliseert, waarbij de logische wetmatigheden als impliciete noties gevormd kunnen worden. En dit was juist wat aan de New Math ontbrak.

Reeds eerder wezen we in dit verband op het belang dat Freudenthal hierbij aan de meetkunde toekende. Begrijpelijk was dan ook zijn afkeer van de logiblokken met hun kale, opgelegde structuur. Als alternatief voor activiteiten als ordenen en klassificeren noemde hij een speelgoedwinkel met autootjes, dieren, poppen en dergelijke, die in grootte, materiaal en kleur verschillen, waarbij de classificatie niet vooraf opgelegd is, maar door de kinderen zelf geconstrueerd kan worden (Freudenthal, 1991, p. 29).

Net als de Bourbaki-groep, Piaget en Dienes, achtte ook Freudenthal het verwerven van inzicht in structuren een belangrijk element van de cognitieve ontwikkeling. Het verschil is echter, dat Freudenthal in het onderwijs de weg wenste te volgen van de 'rijke structuur' naar de 'arme'. De rijkste structuur van de meetkunde is de euclidische, daarna de affiene, de projectieve en tot slot de topologische structuur. Voor de structuurdenkers was juist de omgekeerde volgorde de aangewezen didactische weg, dus van het algemene naar het bijzondere. Bij het Freudenthal-pad bestaat de mogelijkheid zelf de structuren op te bouwen; in het andere geval zijn de structuren a priori vastgelegd. Bovendien sluit de formele structurele aanpak de mogelijkheid van toepassingen als bron voor het didactische proces af. Hierin lag de kern van de kritiek van Freudenthal op Piagets werk: 'His (Piaget's, EdM) acknowledgment of Bourbaki's structure of mathematics, rather than being a recognition, was an attempt to adapt the Bourbaki system to his own conception' (Freudenthal, 1991, p. 28).[28]

In 1972 hield Freudenthal een van de hoofdlezingen op het tweede International Congress on Mathematical Education (ICME) in het Engelse Exeter. Hierin bracht hij ook zijn bezwaren naar voren over deze kwesties in verband met de belangstelling, die er bij de structuurdenkers voor het gebruik van groepen bestond.[29]

Toch geloofde ook Freudenthal in de mogelijkheid van het leren denken, maar over de vormende waarde sprak hij zich wisselend uit. Wat de logica betreft, wenste hij aan te sluiten bij het gezonde verstand en bij zodanig redeneren, dat door iedereen

in het gewone leven, maar ook in wetenschappelijk opzicht, logica genoemd kon worden. In het begin van de jaren zeventig wees hij in verband met het denken vooral op het belang van het herkennen van isomorfe structuren, waarover nu iets meer.

Structuurelementen bij Wiskobas

De eerste algemene domeinbeschrijving van het Wiskobas-project omvatte zes leerstofvlakken: rekenen, meten, meetkunde, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, relaties en functies (ordenen), taal en logica (*Matematika*, 1973). In het toen ontworpen materiaal voor de pedagogische academies en de heroriëntering voor onderwijzers werd aanvankelijk ook enige aandacht besteed aan onderwerpen uit de structuralistische richting, zij het dat de onderwerpen nog ter discussie stonden en op eigen wijze bewerkt waren. Voorbeelden hiervan zijn de nascholingsboeken over ordenen en ordenend tellen.[30] Binnen het ordenend tellen stond het ontdekken van isomorfe structuren centraal, zoals:

- Hoeveel handdrukken geven zes vrienden?
- Hoeveel wedstrijden in een halve competitie met zes teams?
- Hoeveel lijnen gaan er door zes punten?
- Hoeveel punten hebben zes lijnen gemeen?

Verklaar de samenhang tussen deze problemen.

Dat dergelijke opgaven veel meer een denk- dan een rekenkarakter hebben, is evident. De aard van deze opgaven – het ontdekken van de isomorfe visuele structuren – laat zien dat ook hier het verwerven van algemeen vormende denkmiddelen een (impliciete) doelstelling was.[31] Het sterkst kwam het structuuraspect naar voren binnen de domeinen 'relaties en functies' (ordenen) en 'taal en logica'.[32] Echter ook hier werden deze domeinen niet opgevat als kant en klare leerstofeenheden, die de kinderen aangeleerd zouden moeten worden, maar veeleer als onderwerpen voor zelfstandig onderzoek. Of zoals Treffers in 1978 over 'logica' stelde, dat dit meer als 'denken over denken' moest worden opgevat. Hij wilde daarbij uitgaan van meer complexe, 'realistische' denksituaties dan in de formele logica; dit ten behoeve van het noodzakelijke, uiteindelijke formaliseren (taal) en het zelf construeren van denkpatronen (schematiseren). Het leren denken speelde dus in het Wiskobas-project ook een rol, maar het werd nauwelijks uitgewerkt in de toen genoemde leerstofvakken. Bij de meetkunde speelde het in de zin van 'taal en logica' geen rol. We zullen in deel C laten zien wat hiervan de redenen waren.

Algemene ontwikkelingen na 1945

In Nederland is het met name Van Parreren geweest, die getracht heeft de leerpsychologische opbrengsten ook dienstbaar te maken aan de didactiek. In zijn bekende

leerboek *De psychologie van het leren* gaat hij, onder verwijzing naar Van Hiele, summier in op enkele leerpsychologische problemen van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Hierbij komen dan ook de kernen van het (wiskundige) leren, namelijk het leren om zelf problemen op te lossen en het verwerven van inzicht, aan de orde. Uit het werk van Van Parreren en van de Van Hieles maken wij op, dat werkelijk leren tevens leren denken is en dat dit door goede didactische processen beïnvloedbaar is.

In 1975 is het oktobernummer van *Pedagogische Studiën* geheel gewijd aan 'leren denken'. Het begrip transfer wordt daar nader omschreven en blijkt in de loop der jaren een apart onderwerp van onderzoek geworden te zijn. Simons maakt in 1990 onderscheid tussen negen typen van transfer en negen condities opdat transfer überhaupt kan optreden. Het vermogen tot transfer ligt volgens Simons dicht bij intelligentie en abstractievermogen van de lerende (Simons, 1990, p. 25).

In de jaren tachtig heeft een onderzoek plaatsgevonden over transfer binnen het wiskundeonderwijs. Hierbij is getracht een test op te stellen om te meten in hoeverre leerlingen in staat zijn om geleerde wiskundige kennis en vaardigheid in nieuwe situaties binnen de wiskunde te gebruiken (De Leeuw, 1988). Dat onder goede didactische voorwaarden een bepaalde mate van transfer in enge zin (binnen het domein) kan plaatsvinden, zal eigenlijk niet verbazen.

Sinds de jaren zeventig is de kwestie van de vormende waarde als legitimering voor het reken-wiskundeonderwijs niet eens meer ter discussie gesteld. Doordat vanaf het eind der jaren zeventig de leerplanontwikkeling van het reken- en wiskundeonderwijs haar doel steeds meer verlegde naar de toepasbaarheid van deze vakken, werd het argument der vormende waarde ook overbodig. Maar tegelijkertijd vereiste dit iets anders, namelijk dat de leerlingen zouden moeten leren mathematiseren.

Omwenteling in doelbeschrijving

Treffers heeft in 1978 de kwestie van de doelbeschrijvingen van het wiskundeonderwijs op geheel nieuwe wijze aan de orde gesteld. Onder zijn twaalf ééndimensionale doelen zijn er vier integrale (permanent na te streven) doelen en acht mathematische. De eerste vier omvatten: zingeving voor de persoonlijke ontwikkeling, de sociale betekenis, de voorbereidende waarde en de maatschappelijke relevantie. Hoewel Treffers betreffende de vraag der vormende waarde in historische zin tot vrijwel dezelfde conclusies komt als hiervoor beschreven, zien we toch, dat met de mogelijkheden voor persoonlijke ontwikkeling en de sociale betekenis van het door hem voorgestane reken-wiskundeonderwijs ook door het Wiskobas-project een algemeen vormend aspect erkend wordt. Het verschil is echter dat het uitdrukkelijk verbonden wordt met en gefundeerd dient te zijn op concrete en praktische onderwijsvoorbeelden. Anders gezegd: de vage algemene argumenten over de vormende waarde, die aan het onderwijs in de euclidische meetkunde werden toegedicht, kunnen geen stand houden.

De acht mathematische, ééndimensionale doelen betreffen: het rekenaspect, het taalaspect, de toepasbaarheid, het praktische nut, het structuurkarakter, het methodische element, de dynamiek en het attitude-aspect. Nadere beschouwing van het structuuraspect leert dat 'Het wiskundeonderwijs zich moet richten op het leren opsporen van allerlei onderzoeks- en redeneerstrategieën, waarbij intuïtieve, induktieve en deduktieve elementen gehanteerd kunnen worden' (Treffers, 1978, p. 117).

We zien dus opnieuw dat het denken en redeneren ook in deze vernieuwing een belangrijk element is. Nu is het echter ook bedoeld voor het basisonderwijs en niet gereserveerd voor de wiskunde van het voortgezet onderwijs. Bovendien is het in een ruimere context geplaatst. In het attitude-aspect wordt het belang van de vorming van een goede houding ten aanzien van kennis, vaardigheden en inzichten benadrukt, iets dat men in samenhang met de integrale doelen als 'vorming van een ideale probleemoplosser' zou kunnen opvatten. Nog één stap verder geredeneerd, zou men hieraan de verwachting kunnen koppelen dat hierdoor ook algemene transfer zou kunnen optreden. Aldus zou hiermee een doel geformuleerd kunnen worden dat de concrete mathematische onderwijsdoelen overstijgt: een algemeen vormend doel. Het nieuwe van een dergelijke doelomschrijving is, dat dit als een hogere doelstelling ook intentioneel wordt nagestreefd, waar dat vroeger als vanzelfsprekend resultaat werd verwacht.

Reflectie en nieuwste ontwikkelingen

Wij hebben tamelijk lang stilgestaan bij de geschiedenis van de vormende waarde. De aanleiding daartoe was dat gedurende de eerste helft van de twintigste eeuw de meeste wiskundigen en didactici het traditionele logisch-deductieve meetkundeonderwijs als het aangewezen middel tot leren denken beschouwden. De psychologen bestendigden deze opvatting door juist hun onderzoeken op het 'logisch-mathematische' aspect van de intelligentie te richten. Ook na de Tweede Wereldoorlog hield het idee van het algemeen vormende karakter van de wiskunde bij velen stand. Terugkijkend op de discussies tussen 1920 en 1960 valt op dat het daarbij eigenlijk niet ging om het leren van meetkunde, maar om het ontwikkelen van goede denkgewoonten. Eerst bepaalde men zich tot onderzoek over logica, later werd gebruik gemaakt van de onderzoekingen van Piaget en anderen.

De psycholoog Gardner heeft – overigens met alle waardering voor Piagets baanbrekende werk – erop gewezen, dat Piaget zich te sterk bepaald heeft tot de linguïstische en logisch-mathematische aspecten van de intelligentie en te weinig gebruik gemaakt heeft van andere, meer realistische contexten dan de formele (Gardner, 1985, p. 180). Volgens Gardner moet intelligentie als een holistisch, harmonieus werkend complex van verschillende intelligenties ('frames of mind') opgevat worden, die voor iedere persoon (zelfs per cultuur) verschillend geaard kunnen zijn en ook aparte ontwikkeling behoeven.[33] Voor het wiskundige denken onderscheidt hij

naast de logisch-mathematische intelligentie (formeel redeneren) ook de *ruimtelijke intelligentie*, welke voornamelijk gezeteld is in de rechter hersenhelft en van belang is voor het visuele, meer creatieve, divergente denken. (Van Hiele spreekt thans over het non-verbale denken.) Gardner wijst op grote natuurwetenschappers die sterk visueel ingesteld waren, zoals Einstein, over wie hij aanhaalt: 'He had a very visual mind. He thought in terms of images – gedanken – experiments, or experiments carried out in the mind' (Gardner, 1985, p. 190).[34]

Denkend aan de hoofdpersonen van de discussie van de jaren twintig, moet Dijksterhuis als een convergente denker met een sterk ontwikkeld logisch-mathematisch 'frame' en mevrouw Ehrenfest als een divergent, visueel denker met een tevens ontwikkelde 'spatial intelligence' beschouwd worden.

Piaget, die ook experimenten in verband met de ruimtelijke ontwikkeling van kinderen heeft uitgevoerd, beschouwde de ruimtelijke intelligentie niet als een apart fenomeen, maar als een deel van de logisch-mathematische intelligentie. Zowel in de jaren twintig als in de jaren vijftig werd het belang van de specifieke ruimtelijke intelligentie nog niet voldoende onderkend. Mevrouw Ehrenfest voelde wel aan dat dit aanschouwelijke denken – ze noemde het ruimteleer – in haar propedeutische cursus ontwikkeld diende te worden, maar het ontbrak haar in feite aan harde argumenten en steun vanuit de psychologische hoek. Ook haar *Übungensammlung* miste een voldoende onderbouwing voor een verdergaande reorganisatie van het meetkundeonderwijs. Men zat muurvast in de aloude traditie van de formele euclidische meetkunde.

Nadat de traditionele meetkunde in 1968 uit het programma was verdwenen, werd aan het leren van wiskunde een meer algemeen vormingsaspect als na te streven doel toegekend. Dit gaf opnieuw voeding aan de vragen der leer- en denkpsychologie of logisch denken leerbaar is. Door Dienes en Jeeves werden onderzoeken met behulp van wiskundige spelen uitgevoerd, die een positieve opbrengst vertoonden (Dienes en Jeeves, 1970). Dit leek een nieuwe bevestiging van het belang van het onderwijzen van formele wiskunde, zelfs voor de allerjongste kinderen. Doordat de motivering van het reken- en wiskundeonderwijs in de loop van de jaren zeventig steeds meer gezocht werd in haar praktische waarde, kwam de nadruk meer te liggen op het leren mathematiseren en het nastreven van een andere attitude. Dat hierbij ook allerlei natuurlijke vormen van denken en redeneren hun betekenis kregen, laat zien dat leren denken ook in deze 'realistische richting' een plaats heeft.

Hoe optimistisch men in wetenschappelijke kringen telkens weer was over een mogelijk algemeen vormend aspect, dat inherent zou zijn aan logische denkactiviteiten, moge blijken uit de kortstondige, maar intensieve belangstelling, die er in de jaren tachtig onder invloed van Seymour Papert heeft bestaan voor het leren programmeren door jonge kinderen in de meetkundige computertaal LOGO (Papert, 1980).[35]

Uit de discipline van het hersenonderzoek zijn de laatste jaren gegevens bekend geworden, die in ieder geval bevestigen dat het impliciete (non-declaratieve) en het expliciete (declaratieve) leren zich op verschillende manieren in de hersenen voltrekken, zelfs dat leren op zich de structuur van neurale systemen kan beïnvloeden (Kandel en Hawkins, 1992). Het gaat hierbij overigens om leertaken van beperkte aard, waarbij slechts van transfer in enge zin gesproken kan worden. Of dit op den duur nog een andere kijk op het begrip vormende waarde zal doen ontstaan, valt niet te voorspellen.

Het argument van de vormende waarde in zijn oorspronkelijke betekenis wordt thans nauwelijks meer gebruikt. Binnen het realistische wiskundeonderwijs is de ontwikkeling van een goede attitude als na te streven algemeen doel daarvoor in de plaats gekomen. Als middel om te leren denken en redeneren heeft de meetkunde in haar klassieke vorm afgedaan, althans voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Echter, in het kader van de herprofilering van de tweede fase in het voortgezet onderwijs zal juist het formele redeneren, aan de hand van meetkundige problemen, weer een plaats krijgen. Nu vooral gericht op het construeren van een (lokaal) logisch systeem door de leerlingen zelf (Goddijn, 1995).[36]

Ondanks het feit dat er geen onweerlegbare bewijzen bestaan, dat het leren van wiskunde werkelijk positieve effecten heeft op het leren logisch denken, duikt het toch telkens weer op als argument voor het wiskundeonderwijs. Nog onlangs leverde de Nijmeegse hoogleraar Keune kritiek op het realistisch wiskundeonderwijs en pleitte voor een meer abstracte aanpak voor de meer getalenteerde leerlingen. 'Vooral het veronachtzamen van abstractie en deductie in de onderbouw van het voortgezet onderwijs heeft ongewenste gevolgen.' Dit zou volgens Keune kunnen leiden tot een gemis aan 'training in logisch redeneren, hetgeen ook maatschappelijke consequenties heeft: logisch kunnen denken is voor iedereen van grote waarde' (Keune, 1998, p. 48).

Wij hadden ons geen betere rechtvaardiging kunnen denken voor de titel van dit hoofdstuk: 'Vormende waarde, een historische constante'.

(Samenvattende conclusies van B5: zie B6.)

tiatief van de vakwiskundigen een formele internationale samenwerking op het gebied van het wiskundeonderwijs. Vanuit deze kring (CIEM) stelden belangrijke wiskundigen zich op het standpunt dat het onderwijs in de meetkunde een aanschouwelijke en empirische basis diende te hebben. Hierbij werd ook gedacht aan de leeftijdsgroep van acht tot twaalf jaar. Na de Eerste Wereldoorlog taande in het algemeen de aandacht voor de wiskunde in het onderwijs.

Rond de eeuwwisseling ontstond de Nieuwe Schoolbeweging, die een waaier van praktische uitwerkingen heeft gekend. Kernpunten in de nieuwe pedagogiek en psychologie waren het centraal stellen van het kind en het activiteitsprincipe: *leren door doen*. In het kader van dit praktische handelen kreeg in de lagere school met name het zaakonderwijs (aardrijkskunde, handenarbeid, natuurkennis) een zekere belangstelling. Hierin kwam de betekenis van het praktische nut van het onderwijs tot uitdrukking. Ligthart is een van de weinigen geweest die heeft getracht dit ook werkelijk praktisch uit te werken.

Binnen het rekenen op de lagere scholen was voor de vormleer officieel geen plaats meer. Ondanks een zekere belangstelling voor het zaakonderwijs, lag in de meeste rekenmethoden de nadruk op het gemechaniseerd leren cijferen. Tegen de soms overdreven vormen van het aanschouwingsonderwijs in de lagere leerjaren ontstond weerstand. Met de opkomst van de methode van Bouman en Van Zelm verwerd het rekenen steeds meer tot een verdord vak zonder werkelijke toepassingen, zeker op het gebied der meetkunde. De enkele pogingen, zoals die van Van der Ley en van Poot om via het 'aanschouwelijk handelen' het onderwijs een groter realiteits- en toepassingsgehalte te geven, waren slechts acties in de marge.

Reindersma heeft onder invloed van Kerschensteiner en Dewey het activiteitsprincipe toegepast in zijn inleidende meetkundecursus. Hij stond hierin tamelijk alleen, aangezien het merendeel der meetkundeboeken die op de HBS en het Gymnasium gebruikt werden, op de oude euclidische uitgangspunten gebaseerd waren. In de andere vormen van voortgezet onderwijs en op de kweek- en normaalscholen waren de meer aanschouwelijke vormleerachtige meetkundecursussen in gebruik. Naast Reindersma zijn in didactisch opzicht ook Kleefstra en Wolda figuren geweest die getracht hebben het aanvankelijk meetkundeonderwijs een nieuwe richting te geven. Hun pogingen zijn echter slechts in historisch opzicht van enige betekenis geweest. Reindersma dient beschouwd te worden als de man die de ontwikkeling van de didactiek gaande heeft gehouden. Hij is de *verbindende ontwikkelaar* tussen Versluys en mevrouw Ehrenfest geweest. Reindersma's ideeën waren in feite nog gebaseerd op die van de aanschouwelijke meetkunde van Versluys. Maar ook zijn opvattingen konden qua inhoud eigenlijk niet los gezien worden van de eeuwenlange euclidische traditie: meetkunde als wetenschappelijk vak.

opvattingen betreffende een intuïtieve inleiding in het meetkundeonderwijs. Maar dit heeft slechts gedurende een korte tijd enige uitwerking op het feitelijke onderwijs gehad. De reden hiervan was dat aan het belang van het opbouwen van een deductief systeem en het daarmee samenhangende vormende element van de meetkunde nog steeds een zekere waarde werd toegekend. Bovendien is er eigenlijk geen gelegenheid geweest om deze vernieuwing aan de traditionele meetkunde verder te testen en uit te bouwen. Dit kwam weer doordat een geheel andere inhoudelijke vernieuwing zich van buitenaf aandiende.

Uiteindelijk bleek de New Math-beweging van 1968 een zo grote invloed te hebben, dat de meetkunde als zelfstandig en klassiek kernvak van het voortgezet onderwijs bezweek en opgenomen werd in het algemene structuurdenken, dat ook in het wiskundeonderwijs was doorgedrongen. Weliswaar hadden de door deze modernisering geïnduceerde experimenten met transformatiemeetkunde in de jaren zestig nog wel een geheel andere trend voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs gezet, maar dit bleek opnieuw te leiden tot een geaxiomatiseerde aanpak die te moeilijk was voor dat niveau. Een intuïtieve, wat halfslachtige transformatieaanpak was het resultaat in de moderne wiskundemethoden van het voortgezet onderwijs. Het meetkundige aspect van de schoolwiskunde werd door het gebruik van de vectorrekening steeds verder naar de achtergrond verwezen.

Het rekenonderwijs kwam tussen 1945 en 1970 steeds meer onder druk te staan van de vraag naar organisatievormen voor differentiatie en individualisering. Niet alleen raakte daardoor oude waarden van het rekenen, zoals het hoofdrekenen, op de achtergrond, maar er was überhaupt weinig vooruitgang in de didactiek waar te nemen. Dit ondanks het feit dat sinds 1953 aan de kweekscholen ook rekendidactiek onderwezen werd. Aan meetkunde werd op de lagere school, behalve in het montessori- en het Vrije School-onderwijs, niets gedaan. Wel kwamen aan het eind van de jaren zestig enkele vertalingen van buitenlandse New Math-methoden op de markt, maar deze hebben nauwelijks een marktaandeel gehad. Van cruciaal belang voor de verdere ontwikkelingen in het reken-wiskundeonderwijs voor de basisschool is het oprichten van de Wiskobas-beweging door Wijdeveld en Goffree in 1968 geweest.

De periode tussen 1945 en 1970 is voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs vooral van belang geweest door de *ontwikkeling* van de *didactiek* en haar *theoretische fundering*. Voor het eerst werden er praktijkgerichte experimenten uitgevoerd, waarvan vooral die van D. van Hiele-Geldof een belangrijke bijdrage is geweest. Hiermee werd de gebruikte theoretische grondslag, de theorie van Van Hiele, geverifieerd. Een ander interessant experiment was dat van Boermeester, die het principe van 'telescoped reteaching' en het klassegesprek op waarde wist te schatten. Ten slotte pasten De Groot en zijn medewerkers voor het eerst methodologische en statistische technieken op een onderwijsexperiment (transformatiemeetkunde) toe.

Vanaf 1950 werd Freudenthal in toenemende mate de drijvende figuur voor het

totale reken- en wiskundeonderwijs in Nederland. Aanvankelijk binnen de Wiskunde Werkgroep van de WVO, later ook voor het basisonderwijs in de Wiskobas-groep, die in 1971 officieel aan het werk ging. Hij heeft er bij voortduring op gehamerd dat het niet alleen ging om vernieuwing van de inhoud, maar eerst en vooral om de verbetering van de didactiek: er diende een *wiskundeonderwijskunde* te ontstaan.

Samenvattende conclusies B5 (historie vormende waarde)

De belangrijkste conclusie van ons historische onderzoek naar de vormende waarde als argument voor de legitimering van het wiskundeonderwijs, in het bijzonder van het meetkundeonderwijs, is dat dit argument een constant gegeven blijkt te zijn. Vele denkers over de betekenis van wiskunde als vak van onderwijs hebben dit argument gehanteerd, maar geen van hen was in staat een op feiten of onderzoek gebaseerde onderbouwing te geven. Er waren enkele uitzonderingen, waaronder Freudenthal, die overigens wisselend in zijn standpunt is geweest. Fervente voorstanders waren mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis.

Vormende waarde hangt samen met leren denken. Dit is de reden waarom er veel onderzoek is verricht naar het logisch leren denken bij jonge kinderen. In het algemeen leverden deze onderzoeken, waaraan grote namen als Selz, Kohnstamm en Piaget zijn verbonden, op dat de mogelijkheden om abstract logisch te redeneren zich pas na de puberteit goed ontwikkelen. Ondanks deze uitkomsten zijn pogingen gedaan, vooral tijdens de New Math-periode, ook jongere kinderen vertrouwd te maken met logische begrippen en werkwijzen.

Na de Tweede Wereldoorlog wordt het argument van de vormende waarde steeds meer overgenomen door dat van de praktische waarde van de wiskunde. Binnen de realistische aanpak, waarin de toepassingen zowel doel als bron van het onderwijs zijn, ontwikkelt zich de opvatting dat het onderwijs zich ook expliciet dient te richten op de ontwikkeling van een goede wiskundige attitude. Aan dit laatste kan ook een vormend aspect toegedacht worden.

Gardner heeft erop gewezen dat de intelligentie ook een aspect voor ruimtelijk denken kent, dat zijns inziens ook ontwikkeld moet worden. Dit werpt een heel ander licht op de motivering van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Nu er ook vanuit de discipline van het hersenonderzoek aanwijzingen zijn dat gerichte training wellicht effect kan hebben, kan de discussie over het aanvankelijk meetkundeonderwijs en over haar vormende waarde mogelijk een heel andere betekenis krijgen, vooral daar Gardner aan de meer visuele denkers ook meer creativiteit toedicht.

Analyse

Het kleuteronderwijs

De ontwikkelingen voor het fröbelonderwijs met de sterk meetkundig gerichte activiteiten hebben zich vrij geïsoleerd van de andere takken van onderwijs voltrokken. Eén van de verklaringen daarvoor kan zijn dat de kleuterschool aan het eind van de negentiende eeuw in het verlengde lag van de oude bewaarscholen, die meer de functie van een 'crèche' hadden dan van een school. Ook werden de fröbelactiviteiten door de onderwijzers van de lagere scholen en de leraren van de kweekscholen waarschijnlijk niet op hun mogelijke voorbereidende waarde voor de cognitieve ontwikkeling van het kind onderkend. Tenslotte werden in de kringen van het fröbelonderwijs zelf de waarde van het meetkundige materiaal en de activiteiten niet opgevat als onderdeel van een longitudinale leerlijn voor meetkunde. Met de voortschrijding van de ontwikkelingspsychologie werd dit werk – overigens niet alleen in fröbelkringen – gerangschikt onder het ontwikkelen van de ruimtelijke oriëntatie, maar het kon eenvoudigweg nog niet in verband gebracht worden met een eerste informeel stadium van een totale leerlijn meetkunde. Bovendien weten we dat op de lagere school sinds 1890 niets aan meetkunde werd gedaan. Fröbel en zijn medewerkers hadden indertijd wel het plan nog een meetkundeleergang voor de lagere school te ontwikkelen, maar die is er nooit gekomen. De pogingen om toch nog iets van meetkunde in het lagereschoolprogramma op te nemen (Ligthart, Poot, Van der Ley, later Montessori en de Vrije School) waren te exclusief om echte interesse voor dit vak te wekken. Deze discontinuïteit tussen kleuter- en lagere school is altijd een moeilijk punt geweest in de doorgaande ontwikkeling van het jonge kind, in het geval van de meetkunde in het bijzonder.

Aanschouwelijkheid en leren door doen

In deel A hebben we gezien hoe lang het geduurd heeft voor het begrip aanschouwelijkheid als didactisch principe enige erkenning kreeg. De reden hiervoor was dat de traditionele meetkundeleergangen de aanschouwelijkheid juist wilden negeren en de meetkunde wilden opbouwen als een keten van formele stellingen. Het feit dat de leerlingen op twaalf- tot dertienjarige leeftijd in het algemeen een dergelijk wetenschappelijk systeem niet konden vatten, zette didactici en wiskundigen aan tot het zoeken naar een informele start. Het activiteitsbeginsel in concreet-handelende betekenis, dat aan het eind van de negentiende eeuw als algemeen pedagogisch-didactisch principe opgang maakte, werd door een aantal didactici aangegrepen om de traditionele leerstof te concretiseren en te veraanschouwelijken. Daarbij was, meestal impliciet, de historisch-genetische ontwikkeling van de meetkunde zelf de leidraad: van oorspronkelijk praktisch vak tot formele wetenschap. In de praktijk werd het fysieke 'leren door doen' nauwelijks toegepast, zoals bijvoorbeeld blijkt uit de herschikking van de boeken van Reindersma en uit de geringe belangstelling voor het

werk van Wolda aan het begin van de twintigste eeuw. Slechts op enkele ideologische scholen, zoals die van Ligthart, kreeg het 'leren door doen' – en dan nog in de marge – gestalte.

In het algemeen blijkt uit de onderwijsgeschiedenis van de laatste twee eeuwen dat pogingen om het onderwijs minder intellectualistisch te laten aanvangen niet zijn aangeslagen. Praktisch-organisatorische problemen kunnen een verklaring hiervoor zijn, maar zeer waarschijnlijk zullen de traditie van de school als intellectualistisch instituut en de natuurlijke weerstand van leraren om vernieuwingen werkelijk te effectueren hieraan ook bijgedragen hebben.

Ook het 'leren door doen' in de niet-letterlijke betekenis, maar meer als 'zelf denken', 'zelf problemen oplossen' had al sinds Versluys met zijn 'heuristische methode' de aandacht van de didactici, maar echt concrete uitwerkingen bestonden hiervoor nauwelijks aan het begin van de negentiende eeuw. Een uitzondering was het werk van Kleefstra, maar ook dat heeft geen grote verspreiding gekend. Pas na 1945 ontstond de methode van Bos en Lepoeter, die geheel op zelfwerkzaamheid was ontworpen en ook als zodanig kon functioneren.

De intuïtieve aanpak van mevrouw Ehrenfest moest 'psychologisch-genetisch' gefundeerd zijn, wilde rekening houden met de psychische ontwikkeling van het kind, maar tevens gebruik maken van alle nieuwe didactische elementen (zelfwerkzaamheid, leren door doen, heuristiek). In de voorgestelde propedeutische fase kwamen verrassende nieuwe leerstofelementen naar voren. Van Hiele-Geldof heeft er een zekere uitwerking aan gegeven, maar de tijd zat niet mee, omdat zich al weer nieuwe veranderingen aankondigden.

Traditie als conserverende factor

Dijksterhuis verzette zich in feite tegen al de vernieuwende aspecten en bleef vasthouden aan de traditionele stof en didactiek, hoewel hij wel via zijn epistemische didactiek volledig wetenschappelijk inzicht nastreefde bij de leerlingen. Dijksterhuis en de zijnen hebben vóór de oorlog van 1940-'45 het pleit voor behoud van het traditionele meetkundeonderwijs in hun voordeel beslecht. Dit is toe te schrijven aan Dijksterhuis' grote invloed, die hij te danken had aan zijn gedegen pleidooien voor het conserveren van de klassieke traditie van de meetkunde. Zowel in kringen van de wetenschap, het beleid, de scholen voor voortgezet onderwijs als in de maatschappij heeft hij zijn invloed laten gelden. Meer progressieve geesten als mevrouw Ehrenfest, Reindersma en Kohnstamm vormden slechts een kleine voorhoede van vernieuwers, die het in feite tegen het traditionalisme al bij voorbaat moesten afleggen. Het ontbrak in die kringen echter ook aan bewijsmateriaal dat een nieuwe aanpak beter zou zijn. Alle argumenten waren gebaseerd op een subjectieve mens- en maatschappijvisie, op intuïtief gevoel en verwijzingen naar enkele buitenlandse voorbeelden. Ook de opkomende leerpsychologie kon geen praktische aanknopings-

punten bieden, behalve dat bevestigd werd dat kinderen van twaalf tot dertien jaar in het algemeen nog niet toe waren aan formeel logische redeneringen. Ten slotte merken we nog op dat de discussies over de didactiek zich alleen afspeelden op het niveau van HBS en Gymnasium. Er bestond geen aandacht voor een integrale benadering van leerplanontwikkeling en didactiek.

Bezien vanuit deze situatie getuigen de pogingen van enkele leden van de Wiskunde Werkgroep, die op eigen kracht voor 1940 bleven doorgaan om toch tot vernieuwingen te geraken, van een bijzondere werkkracht en doorzettingsvermogen. Anders dan Versluys had mevrouw Ehrenfest – als drijvende kracht hierachter – het inzicht dat dit een groep moest zijn, waarin voor- en tegenstanders elkaar konden treffen. Zij zag in dat alleen door overtuiging en samenwerking nieuwe initiatieven wortel zouden kunnen schieten.

Groeiende erkenning voor de intuïtieve aanpak

Na 1945 werd de samenstelling van de Wiskunde Werkgroep verbreed, waardoor zij langzaamaan meer bekendheid en erkenning verwierf. Er werd voor het meetkundeonderwijs zowel in wetenschappelijke als in praktische zin voortgewerkt op de ideeen van de intuïtieve richting. Voor het eerst verschenen wetenschappelijk-didactische onderzoekingen, waarvan die van de Van Hieles de belangrijkste uit de jaren vijftig zijn. Hiermee kreeg de didactiek van het aanvankelijke meetkundeonderwijs een theoretische basis en verwierf het zich ook een zekere status als aparte discipline.

Behalve een korte intuïtieve start van het meetkundeonderwijs en een zekere beknotting van de leerstof in 1958, veranderde er inhoudelijk overigens gedurende de eerste twee decennia na 1945 weinig aan het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Mogelijk dat de wetenschappelijke opbrengsten uit de denk- en ontwikkelingspsychologie enig gehoor vonden en dat langzaamaan het besef groeide dat formeel logisch redeneren pas op een latere leeftijd tot volle wasdom kon komen. Kennelijk was de lange aanloop vanuit het eind van de negentiende eeuw nodig geweest om het aanvankelijk meetkundeonderwijs los te weken uit de logische traditie.

Discontinuïteit in de historische ontwikkeling

Althans zo leek het, want met de opkomst van het moderne structuralisme in de jaren zestig – de New Math – diende zich opnieuw het vraagstuk over het leren redeneren en de logica aan. Mondiaal werd deze modernisering vooral verklaard uit politieke achtergronden, zijnde de vermeende technologische achterstand van de Verenigde Staten ten opzichte van de Sovjet Unie. Achteraf bezien lijkt het aannemelijker dat we hier met een complex van factoren van doen hebben gehad. Allereerst heerste er na de Tweede Wereldoorlog in de Westerse wereld een positief klimaat tot wederopbouw, gepaard gaande met een algemeen streven naar vernieuwing dat zich ook in het onderwijs manifesteerde. Een tweede belangrijk punt is het gegeven dat de

wiskunde, mede als gevolg van allerhande oorlogstoepassingen, zich steeds meer kon bewijzen als een vak dat werkelijk toepasbaar is. En ten derde had men zoveel vertrouwen opgevat in de wetenschappelijke ontwikkelingen in de wiskunde en de psychologie, dat de utopistische gedachte ontstond dat de unificatie van de wiskunde nabij was en dat deze vertaald kon worden naar de verschillende ontwikkelingsfasen van het lerende kind.

Beleidsmatige beslissingen

Het vertrouwen in de wetenschappelijke vooruitgang van de wiskunde was zo groot, dat zich ook in Nederland het merendeel van de wetenschappelijke wereld en van de didactici, verenigd in de CMLW, achter de ideeën van de New Math voor het voortgezet onderwijs stelde. Nadat ook de overheid zich door de mogelijkheid van een wetswijziging hierbij aangesloten had, was de meest ingrijpende programmawijziging in twee eeuwen wiskundeonderwijs snel voltrokken.

Bij deze wijzigingen is de invloed van de *wetenschappelijke factor* groter dan ooit geweest. Het was vooral de technische en technologische vooruitgang, die als argumentatie voor de beleidsmakers en politici fungeerde. Van een directe *maatschappelijke invloed* kon niet gesproken worden. Aan een brede consultatie van het *onderwijsveld* werd voorbijgegaan, in het bijzonder werd er te weinig aandacht besteed aan differentiatiemogelijkheden ten behoeve van de verschillende schoolsoorten. Zowel in de kring van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren als in die van Wiskunde Werkgroep was het geloof in de New Math groot. Men kan niet anders spreken dan van overhaaste beslissingen voor het voortgezet onderwijs, iets waarvoor slechts een handjevol tegenstanders gewaarschuwd heeft. Het debacle van de New Math in de jaren zeventig heeft de didactici echter weer vrij snel met beide benen op de grond gezet.

Dat het Nederlandse basisonderwijs nauwelijks aan de New Math-beweging heeft deelgenomen, valt te verklaren uit het volgende. Ten eerste ontstond aan het eind van de jaren zestig onder leiding van Wijdeveld en Goffree de Wiskobas-beweging, waarin de leraren wiskunde en pedagogiek van de Pedagogische Academies een platform zouden gaan vormen voor discussies, studie en ontwikkeling. Ten tweede ontstond de eerste kritiek – in Nederland vooral aangezet door Freudenthal – op de 'top-down' strategie, i.e. de vertaling van de wetenschappelijke structuren naar het onderwijsniveau van de lagere school. Ten slotte was het politieke en beleidsmatige tij zo gunstig, dat een professioneel instituut voor leerplanontwikkeling voor het gehele wiskundeonderwijs (IOWO) opgericht werd, waar de Wiskobas-groep onderdak vond. Op de voorgeschiedenis en de betekenis hiervan zullen we in deel C nader ingaan.

Noten deel B

Noten B1

1 Elise van Calcar gaf voordrachten en schreef een aantal publicaties over Fröbel en zijn methode. Zij redigeerde enige jaren het tijdschrift *De Hoop der Toekomst*, bevorderde het ontstaan van kweekscholen voor het kleuteronderwijs en werd in 1862 door Thorbecke tot de eerste inspectrice van het bewaarschoolonderwijs benoemd.

2 In verband met het onderwerp van deze studie kunnen wij niet in extenso ingaan op Fröbels filosofie, waaruit hij zijn ideeën over opvoeding en onderwijs afleidde. Zijn denkbeelden zijn in talloze wetenschappelijke en populair-wetenschappelijke geschriften belicht. De Fröbel-bibliografie van Heiland bevat meer dan 5000 titels.

3 Gebruik gemaakt is van de heruitgave van *Die Menschenerziehung* uit 1926 door Hans Zimmermann.

4 De romantische natuurfilosofie werd gedragen door de idee dat de wereld en haar verschijnselen een dynamisch karakter zouden hebben. Nadruk lag op de eenheid van materie en geest, van natuur en cultuur. De kosmos werd gezien als een geordend geheel, waarin alles met alles samenhing door een unificerende wet of kracht. Men viel daarbij soms terug op oudere mystieke theorieën. Ook Fröbel liet zich beïnvloeden door Oosterse religies en door de mysticus Jacob Böhme (1575-1624). Voor de historie van de romantische natuurfilosofie zij verwezen naar *Wetenschap en Intuïtie* van H.A.M. Snelders (1995).

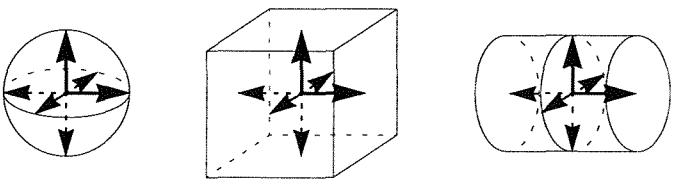
5 De Fransman R.J. Haüy (1743-1822) formuleerde in 1784 het 'atomistische' vermoeden dat elk kristal opgebouwd is uit 'molécules integrantes'. De *Dynamische Ansicht der Krystallisation* van Weiß begint als volgt: 'Es soll die Form, die Figur, dynamisch erklärt werden'. Hiermee zette Weiß zich als het ware aan het hoofd van het 'dynamisme', dat het denken van de Duitse romantische natuurfilosofie kenmerkte. Er dringt zich een gelijkenis op met de dilemma's van de klassieke en de moderne natuurkunde omtrent de statische en stoffelijke opvatting van de materie enerzijds en het massa-energetische- en het golfkarakter anderzijds. In 1912 toonde M. von Laue (1879-1960) met behulp van interferentieproeven met Röntgenstralen de roosterstructuur van de vaste stof zink aan. Daarmee werd het vermoeden van Haüy bevestigd, maar tevens werd een geheel nieuwe richting aan de kristallografie gegeven.

6 Weiß gaat uit van een driedimensionaal coördinatensysteem, waarvan de oorsprong in het centrum van het kristal wordt gekozen. De verhouding van de door een kristalvlak afgesneden stukken van de drie assen bepaalt de karakteristiek van dat vlak. Weiß deelde voor het eerst de kristallen in zes klassen in. (Later onderscheidde men zeven klassen.) Tot de eerste klasse, de kubische behoren onder meer de kubus, het achtvlak en het ruitentwaalfvlak (zie Phillips, 1971).

7 Ten behoeve van zijn dynamisch-fysische opvatting (de krachtentheorie) gebruikte Weiß uitsluitend bewezen en geaccepteerde onderzoeksresultaten. Voor zijn theoretische indeling van de kristalvormen gaat hij op een mathematische wijze te werk. We merken nog op dat in die tijd de theorie van de ruimtelijke isometrieëngroepen nog niet uitgewerkt was (Coxeter, 1969, pp. 278-279).

8 Op grond van het feit dat Lange het later vaak aangehaalde verhaal doet dat aan Fröbel tijdens zijn assistentschap bij Weiß in 1815 een professoraat in de mineralogie zou zijn aangeboden, zegt Wagemann dat hij gedwongen is aan te nemen 'daß Fröbel das System von Weiß auch behersch und verstanden hat' (Wagemann, 1956, p. 175).

9 Uitgaande van Fröbels opvatting over de kristallografische krachtentheorie brengt Wagemann in zijn proefschrift de achterliggende mathematische begrippen en structuren in verband met het begrip vector. Wagemann stelt dat een dergelijk orthogonaal tripel van eenheidsvectoren (met hun tegengestelden) tot de bol, de kubus en de cilinder leidt. Bij de bol vat hij de driepoot op als bewegelijk zijnde met een vast middelpunt, bij de kubus zijn de vectoren vast, bij de cilinder één vast en twee vrij bewegelijk onder behoud van onderlinge



Vectormodel voor bol, kubus en cilinder volgens Wagemann

orthogonaliteit. Een en ander komt ons even speculatief voor als de krachtenleer van Fröbel. Ook de rechthoekige blokken uit de speelgaven relateert hij aan vectoren. Een blok met een verhouding van de ribben 1:2:4 zou op analoge wijze uit drie nu ongelijke vectoren ontstaan als dat voor de kubus is beschreven. De interpretatie van Wagemann, dat in het geheel van het speelleermateriaal van Fröbel deze (voor de jaren vijftig) moderne opvattingen reeds (intuïtief) voorgedacht zouden zijn, wordt nergens onderbouwd.
In 1995 legde de auteur van deze studie Wagemann bovenstaande tekst voor (brief EdM aan Wagemann d.d. 16-11-95). Wagemann schrijft hierover: 'Ihre Kritik akzeptiere ich. Heute würde ich mich vorsichtiger ausdrücken, d.h. mehr mit Fröbels eigenen Worten umschreiben (...)' (brief Wagemann aan EdM d.d. 27-11-95).

10 Tweemaal verbleef Fröbel in Yverdun bij Pestalozzi. Daar leerde hij Joseph Schmid kennen. In het Fröbelmuseum te Bad Blankenburg (voormalige DDR) bevindt zich een exemplaar van Schmids *Formenlehre*. Dit boek is door Fröbel bestudeerd en van aantekeningen voorzien. Meestal zijn het de oplossingen van de vraagstukken. Een enkele maal is getracht een generalisering of uitbreiding te geven. Zo trachtte Fröbel vergeefs een algemene formule te vinden voor het probleem van de 'gleichlaufende' en 'ungleichlaufende' lijnen (zie A2). Af en toe troffen we meer filosofische gedachten aan in de trant van de 'sferische wet'. Op grond van dit boek en deze aantekeningen en van de eigenheid van Fröbels opvattingen over het allereerste meetkundeonderwijs zien wij geen grote invloed van Schmid op Fröbel. Wij zouden zelfs willen stellen dat, zeker op het gebied van de meetkunde, Fröbel een unieke aanpak heeft gecreëerd, waarvan de aanleiding niet bij Pestalozzi en de zijnen gezocht moet worden, maar in de wetenschappelijke ontwikkelingen van de kristallografie van die tijd.

11 Deze indeling is een verkorte vorm zoals die bij Wagemann voorkomt. Er bestaan andere indelingen. In de latere komt groep H van de 'Festgestalten' meestal niet voor.

12 Een uitgebreide beschrijving van de materialen is te vinden bij Wierts van Coehoorn-Stout (1914). Een prachtig boek, dat de fröbelmaterialen ook in verband met kunst en architectuur brengt, is dat van Brosterman (1997).

13 De diepere betekenis van de 'Ganzgliedigkeit' is dat de mens als eenheid op zich tot de alomheersende eeuwige eenheid (God) behoort. Dit principe zou weerspiegeld zijn in de acht kleinere kuben (alle eenheden op zich), die samen de grotere kubus als eenheid vormen.

14 De fröbelmozaïeken bestaan uit de volgende grondvormen: vierkant (zijde 1), half vierkant (rechthoekszijde 1), rechthoekige driehoek (rechthoekszijden 1 en 2), gelijkzijdige driehoek (zijde 1), gelijkbenige driehoek (basis 2, basishoeken 30).Er bestaan ook mozaïeken met een 30°-60°-90°-driehoek met hypotenusa van 2, en een gelijkbenige driehoek met basishoeken van 30° en een opstaande zijde van lengte 1. Er is aan deze kwestie aandacht besteed door Telders in het *Correspondentieblad* (1932, *28*(8 en11)). Zij verwijst hierbij naar Köhlers *Praxis des Kindergartens*, maar daaruit is ons niet duidelijk geworden wat nu eigenlijk de oorspronkelijke mozaïeken waren. Ook de latere door Klazina Smid ontworpen galalith-mozaïeken schijnen deze vormen te hebben. In het boek van Wierts van Coehoorn komen de vormen voor, zoals door ons in de tekst beschreven.

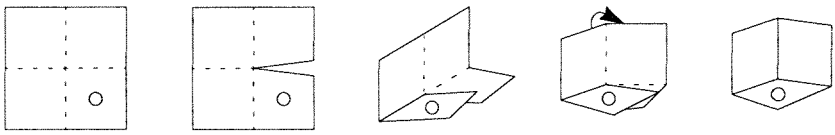
15 Daar de onderzoekingen op het gebied van de grondslagen van de meetkunde, met name naar de mogelijke redundantie van het parallellenpostulaat in de *Elementen* van Euclides, nog heel obscuur waren tijdens de eerste helft van de negentiende eeuw, is het zeer twijfelachtig dat Fröbel enig idee heeft gehad van de toenmalige ontwikkelingen van de niet-euclidische meetkunden. Het zou overigens een onderwerp hebben kunnen zijn dat hem als bespiegelaar ongetwijfeld geïnteresseerd zou hebben. Dat hij in dit opzicht een 'ziener' geweest zou zijn, betwijfelen wij.
Een andere aanleiding tot de vergelijking met de zogenoemde moderne wiskunde van de jaren zestig en zeventig ziet Leeb-Lundberg in de volgende fröbelactiviteit: een nat koordje, waarvan de einden aaneen gebonden waren, werd op goed geluk op een lei gelegd, zodat een gesloten figuur zonder snijpunten ontstond. Daarna werd de afdruk overgetrokken en benoemd. Nu al dergelijke figuren topologisch equivalent zijn met de cirkel, ziet Leeb-Lundberg hier een voorafspiegeling in van de topologische spelletjes die tot de New Math-beweging behoorden.

16 Het *Maandblad voor het Onderwijs* had aanvankelijk de toevoeging 'inzonderheid voor de Bewaarschool', maar later werden deze toevoegingen enige malen gewijzigd. Het laatste nummer in 1916 heeft als toevoeging 'in de Bewaarschool of Kindertuin en de Lagere School'.

17 Een visueel overzicht van de fröbelgaven en de tussengaven van Haanstra is te vinden in Nijkamp (1967).

18 Haanstra heeft deze hulpgave beschreven in het *Maandblad voor het Onderwijs* (1886, 2(7, 8)). Hij zegt daar: 'Dat de kube en de bouwsteen even groot zijn, is voor het kleine kind niet duidelijk.' (...) 'dat de bouwsteen in lengte meer heeft wat hij in dikte verliest, zullen zij u wel nazeggen maar zien doen zij 't niet'. Met behulp van alleen de derde en vierde fröbelgave moet het kind eerst zien dat twee kuben 'even groot' zijn als twee bouwstenen en dan volgens Haanstra de conclusie trekken: 'Dan is ééne kube = één bouwsteen?' Dat zou een te hooge ontwikkelingstrap veronderstellen, een redeneering als volgt: '2a = 2b, dan is a = b'. Het is daarom dat Haanstra de halve bouwsteen of tegel heeft ingevoerd, waarbij de transitiviteit gebruikt moet worden, hetgeen ons lastiger lijkt dan de redenering dat de helften van twee gelijken weer gelijk zijn. Waarschijnlijk werd gelijkheid van volume bedoeld, omdat de oefeningen er steeds op gericht waren te laten zien dat er door gelijkwaardige samenstellingen gelijke ruimten worden ingenomen.

19 Ook hiervoor bestond weer een voorgeschreven methodiek. Eerst diende de drievlakshoek geboetseerd te worden uit pijpaarde (klei). Daarna werd een vierkant blad papier in vier vierkanten gevouwen tot een soort werktekening. Hieruit diende één vouwlijn ingeknipt te worden om ten slotte door vouwen en plakken de gezochte lichaamsvorm te ontdekken (zie figuur).



De lichaamshoek

20 Deze opgave komt uit hetzelfde geschrift van Haanstra uit 1885 (p. 11). Hier wordt als rechthoekige driehoek een 30°-60°-90°-driehoek gebruikt met een schuine zijde van lengte 2, de stomphoekige gelijkbenige driehoek 30°-30°-120° heeft gelijke zijden van lengten 1. Het vierkant heeft de zijde 1.

21 In Duitsland verscheen in 1866 *Die mathematische Formenlehre der Fröbel'schen Spiel- und Beschäftigungsmittel* van F. Navoth. Dit is een tamelijk beperkt en formeel boekje, met zelfs het bewijs van Pythagoras volgens Euclides. Of dit aldaar invloed heeft gehad,

hebben we niet onderzocht. Het heeft in Nederland geen navolging gekregen.

22 Uit het CBS-rapport van1947 blijkt dat 88% van de kleuterscholen 'arbeid naar keuze' toepaste.

23 Kennelijk was Montessori (nog) niet op de hoogte van de veel eenvoudiger legpuzzelbewijzen, die er voor deze stelling bestaan.

24 Genoemd werkboek biedt verder een fiks en zorgvuldig uitgewerkt arsenaal aan meetkundige activiteiten, waarvan de meeste tot de klassieke meetkunde behoren. Tevens vinden we verrijkende uitstapjes, zoals het construeren van Pythagorasbomen. Ook in dit werkboek neemt Pythagoras weer een centrale plaats in. De oorspronkelijke opzet van Montessori is daarbij gehandhaafd, inclusief het euclidische legpuzzelbewijs van deze stelling. Dit wordt vooral duidelijk uit het schema van de leerlijn.

Noten B2

1 In Frankrijk ontwikkelde Monge (1753-1818) de beschrijvende meetkunde en gaf Poncelet (1788-1867) een systematische uitwerking van de projectieve meetkunde, en wel op een synthetische manier. Gergonne (1771-1831) pakte de projectieve meetkunde meer analytisch aan. Het verschil in methoden – synthetisch versus analytisch – werd in die tijd zelfs inzet van een strijd, die zo ernstig genomen werd, dat er een prijs uitgeloofd werd voor het beste artikel over deze controverse (Boyer, 1985, p. 577). Ook in Duitsland bloeide de meetkunde op, en ook daar kwamen twee kampen van 'analytici' en 'synthetici' tegenover elkaar te staan. Een fenomeen op het gebied van de synthetische aanpak was de Zwitser Jakob Steiner (1796-1863). Als rechtgeaard syntheticus verwierp Steiner de algebra als hulpmiddel voor de meetkunde. Algoritmen zouden het denken blokkeren, terwijl de meetkunde dit juist stimuleert, zo luidde zijn argumentatie. In die zin was hij dus de ideale leerling van Pestalozzi geweest, bij wie hij zijn eerste vorming had ontvangen. Hiermee stond hij in Duitsland lijnrecht tegenover Plücker (1801-1868), die juist de analytische meetkunde in systematiek en notatie uitbouwde.

2 De termen analytische en synthetische meetkunde zijn eigenlijk wat ongelukkig. In de analytische meetkunde werken we algemener en met algebraïsche middelen (misschien was 'algebraïsche' meetkunde een betere term geweest). De term synthetische meetkunde verwijst naar de synthetische opbouw volgens Euclides, maar in feite wordt binnen de synthetische aanpak een probleem ook meestal eerst op een analytische (globale) wijze beschouwd (De Moor, 1992, pp. 147-151).

3 In Pasch (1926) is een 'Anhang' opgenomen van M. Dehn: 'Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung'.
Volgens Freudenthal was Pasch' werkwijze nog volledig ontologisch: de objecten van onderzoek (punt, lijn, vlak) en hun relaties (snijden, samenvallen, evenwijdigheid, ...) ontleenden hun betekenis nog aan het 'zijnde' (Freudenthal, 1963, pp. 5-29).

4 Hoewel Hilbert de inleiding van de *Grundlagen* – een boek dat in 1977 zijn twaalfde druk kende – voorzag van een motto van Kant ('So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen') wordt dit boek in het algemeen beschouwd als het eerste niet-kantiaanse model van de elementaire meetkunde. Hilbert construeerde een deductief systeem, dat ontdaan kon worden van fysische elementen of verwijzingen; waarvan de grondbegrippen 'punt', 'lijn' en 'vlak' vervangen konden worden door willekeurige andere begrippen, maar waarbij de redeneringen door de gegeven incidentie-relaties ('Verknüpfungen') en de gegeven axioma's sluitend bleven. Er werden aan het axiomastelsel eisen gesteld betreffende niet-strijdigheid en onafhankelijkheid. Overigens werd wel aan meetkundige visualiseringen gerefereerd. In het algemeen wordt Hilbert beschouwd als de vervolmaker van de zuivere meetkunde. Freudenthal heeft aangetoond, dat ook verschillende andere wiskundigen (onder wie Pasch en Poincaré) aanspraak hadden kunnen maken op deze eer (Freudenthal, 1957c, pp. 105-142).

Tevens wijst hij in genoemd artikel ook nog een aantal onvolmaaktheden aan, die deels later weer opgelost zijn.

5 Op de strijd tussen Hilbert en L.E.J. Brouwer als grondlegger van het intuïtionisme gaan we niet in vanwege de geringe betekenis voor het onderwijs. Zie hiervoor Van Dalen (1990).

6 Schrek deed hiervan in 1922 verslag in *Pedagogische Studiën*.

7 Ook Poincaré nam later in deze commissie, die twaalf jaar heeft bestaan, zitting. Overigens werd de CIEM hoofdzakelijk door een klein aantal West-Europese landen samen met de Verenigde Staten gevormd. Van Nederlandse zijde treffen we de namen van onder meer de hoogleraren J.A. Barrau en P. Zeeman aan.

8 Er moet in die paar jaren, voorafgaande aan de Eerste Wereldoorlog, door deze commissie een enorme hoeveelheid werk zijn verricht, gezien de talloze publicaties en rapporten, die met name door Duitsland zijn geproduceerd. Het was W. Lietzmann (1880-1959), die als overijverig lid van de Duitse subcommissie (in Duitsland Internationale Mathematische Unterrichtskommission, kortweg IMUK) een forse bijdrage aan deze rapporten heeft geleverd.

9 Een historische beschrijving van deze onderzoekingen is ook te vinden bij Lietzmann (1923, pp. 94 e.v.).

10 Branfords boek *A study of mathematical education* uit 1908 is in het Duits vertaald (1913) onder de titel *Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität*. Het heeft volgens Schubring weinig invloed in Duitsland gehad. Schubring (1978) wijdt een uitgebreid en interessant stuk aan Branfords werk. Interessant voor die tijd was Branfords opvatting dat men bij toepassing van het activiteitsprincipe er naar moest streven het niveau van het empirische handelen te ontstijgen.

11 Interessant is het dat ook vooraanstaande geleerden als E. Borel en J. Hadamard meetkundecursussen hebben geschreven.

12 Om een indruk te krijgen van het ruime arsenaal aan leerboeken, dat de Duitsers aan het begin van deze eeuw tot hun beschikking hadden, kan verwezen worden naar een rapport van Lietzmann uit 1912. Voor alle soorten en niveaus van het onderwijs treffen we titels aan. Interessant is dat Lietzmann ook ruime aandacht aan Fröbel en het kleuteronderwijs besteedt, dat hij de aanschouwelijkheid een centrale plaats toedenkt, maar ook op het praktische meten wijst. Het is verbazingwekkend, wanneer men deze opsomming bekijkt, hoeveel ideeën, die thans in het huidige meetkundeonderwijs gemeengoed zijn geworden, toen reeds op een of andere wijze gestalte hadden gekregen. Het is ietwat merkwaardig, dat Klein als uitgever van dit werk, dat Lietzmann ten behoeve van de IMUK had geschreven, daar in zijn *Elementarmathematik* niet op ingaat.

13 Het 'funktionale Denken' betekent bij Klein het centraal stellen van het mathematische functiebegrip. In verband hiermee was hij ook voorstander van invoering van de infinitesimaalrekening in het secundaire onderwijs.

14 Bij Schubring wordt Klein de 'Urheber des genetischen Prinzips' genoemd (Schubring, 1978, p. 6). Wij hebben gezien dat ook bij verschillende andere didactici vóór hem dit principe (soms impliciet) gehanteerd werd.
In zijn *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen* besteedt hij ook enige aandacht aan het meetkundeonderwijs (Raumlehre) op de Volksschulen (Klein, 1907, pp. 11-18).

15 Voor een algemene oriëntatie op de Nieuwe Scholen hebben wij ons gebaseerd op Imelman en Meijer (1986).

16 Voor Dewey hebben wij ons hoofdzakelijk gebaseerd op een bijdrage van G. Wielenga (1964) in *Grote denkers over opvoeding* (I. van der Velde red.), pp. 311-336.
Hij stond een 'experience-centered' onderwijs voor: de school als een maatschappij in het klein en een gezin in het groot. Niet met abstracte leervakken, maar met praktisch handwerk diende het onderwijs aan te vangen.
In Dewey's school werd de handenarbeid aanvankelijk vooral verbonden met het spel en

de fantasie. Daarna diende het ter ontwikkeling van de ondernemingslust en ten slotte tot een soort cultuurhistorische ontwikkelingsgang. Ook Dewey wilde door de bevordering van een gedisciplineerde intelligentie het kind tot een democratische burger vormen. Evenals Kerschensteiner kende ook hij vormende waarde toe aan elk vak: 'any subject, from Greek to cooking, and from drawing to mathematics, is intellectual' (Dewey, 1909, p. 39).

17 De school moest volgens Kerschensteiner (1854-1932) ook dienen tot de vorming van goede staatsburgers. Karaktervorming was een belangrijk onderdeel van de totale opvoeding. Aan oude talen en wiskunde kon volgens hem geen 'magische Kraft' toegedacht worden ten behoeve van het logisch leren denken (vormende waarde). Daartoe zou net zo goed Chinees of kookkunst kunnen dienen. Het boek *De komende school* (1919) is een Nederlandse vertaling door A. de Vletter, bewerking van Kerschensteiners *Grundfragen der Schulorganisation* uit 1907. Dit boek bevat tal van interessante opmerkingen over het Nederlandse onderwijs.

18 In 1899 begon Ligthart zijn weekblad *School en Leven*, waarvan later zijn vriend R. Casimir mederedacteur zou worden. In een serie artikelen in dit blad uit 1908 (*9*(39) pp. 609-613) constateert Ligthart dat zijn school grote overeenkomsten vertoont met de experimenteerschool van Dewey in Chicago. Hieruit blijkt dat de vele vernieuwingen van die tijd niet slechts uit één bron afkomstig waren.
Voor Ligthart verwijzen we verder naar de dissertatie van De Jong (1995).

19 De Nederlandse subcommissie van de CIEM bestond uit een aantal hoogleraren, inspecteurs en leraren. Ook was de voorzitter van het Nederlandsch Onderwijzersgenootschap lid.

20 Het boek van Van Zanten kende tussen 1876 en 1920 twaalf drukken.

21 Knoop brengt Kleefstra in verband met de Nieuwe Schoolbeweging. Zie W. Boyd (1969), *Geschiedenis van opvoeding en onderwijs*, pp. 551-553.

22 De Brinio-school van Kleefstra kende een strak rooster met gezamenlijke maaltijden, lessen, lichamelijke arbeid, handenarbeid, muziek en sport. Discipline en tucht, lichamelijke en geestelijke gezondheid en reinheid, oprechtheid, kameraadschap en karaktervorming waren de sleutelwoorden van Kleefstra's filosofie. Er moesten ferme knapen opgeleid worden voor de toekomst van ons land. Het studieprogramma was zo ingericht dat de leerlingen toegelaten konden worden tot de derde klas van de HBS of vierde klas van het Gymnasium. Ook werd op het instituut opgeleid tot deelname aan de staatsexamens. Zie verder Kleefstra's boek uit 1906: *De School der toekomst en wat haar in de weg staat*. Naast zijn activiteiten op pedagogisch gebied schreef hij een roman, enkele leesboeken, vakantieverhalen en componeerde hij een zangcantate.
Correspondentie met de gepensioneerde wiskundeleraar H.J. Kleefstra uit Beetsterzwaag leverde informatie over de genealogie van de Kleefstra's op. J.J. Kleefstra is driemaal gehuwd geweest. Hij had zeven kinderen uit de eerste twee huwelijken, waarvan de zoon Brinio (1901-1976) wiskundeleraar aan de Rijks-HBS te Velzen is geweest. (Brinio: hoofdman van de Kanninefaten, sloot zich aan bij Claudius Civilis tijdens de opstand tegen de Romeinen in 69-70 n.C.)

23 In Kleefstra's methodiekboek *Leerstof en Methode* voor het lager onderwijs (1887) staat een interessant stuk over vormleer, dat hij als aanschouwelijke meetkunde omschrijft (pp. 131-144). In die tijd was hij hoofd van de openbare school te Venhuizen.

24 Reeds met zijn eerste axioma brengt Kleefstra zichzelf en het systeem in de problemen: 'Wanneer een lijn wentelt om 2 harer punten en alle punten blijven daarbij op hun plaats, dan is zij een rechte lijn.' Allereerst lijkt dit eerder een definitie dan een axioma. Bovendien worden begrippen (punt en rechte lijn) en een relatie (wentelen) gebruikt, die of ongedefinieerd of afgeleid zijn uit de te definiëren begrippen. Daarna wordt op aanschouwelijke wijze uit dit axioma de stelling afgeleid: 'Als een rechte lijn met 2 harer punten in een andere rechte lijn ligt, vallen zij geheel samen.' Ten slotte volgen nog twee axioma's over evenwijdigheid, maar al deze 'axiomatiek' speelt verder geen rol meer.

25 Onze beoordeling dat Kleefstra een eenling in het wiskundeonderwijs geweest moet zijn, komt voort uit het feit dat er in de vakliteratuur nauwelijks iets over hem te vinden is. Zijn pedagogische opvattingen zijn af te leiden uit de vele geschriften die hij op dit gebied liet verschijnen (zie literatuurlijst).
26 In het overzicht van Lietzmann uit 1912 komt A. Wienecke niet voor.
27 Over G. Wolda hebben wij nauwelijks iets kunnen vinden. Volgens het titelblad van zijn boek uit 1921 was Wolda 'vroeger leeraar aan de R.H.B.S. te Wageningen'. Het was al moeilijk de leerlingboeken te vinden. De leidraad bleek onvindbaar. In ieder geval heeft hij nog een boek over beschrijvende meetkunde geschreven.
28 Willem Reindersma was een Groningse boerenzoon. In 1896 behaalde hij aan de Rijkskweekschool te Groningen zijn onderwijzersdiploma, in 1898 gevolgd door de hoofdakte. Hij was werkzaam bij het lager onderwijs van 1896 tot 1901. Daarna studeerde hij wis- en natuurkunde, welke studie hij in 1909 voltooide. In 1906 werd hij leraar aan de zogenoemde vervolgschool van de Haagse schoolvereniging, waaruit in 1909 het Nederlandsch Lyceum ontstond. Reindersma werd directeur van de HBS-afdeling, welke functie hij tot 1916 bekleedde. Van 1916 tot 1923 was hij directeur van de gemeentelijke kweekschool te Rotterdam. Daarna keerde hij terug naar het Nederlandsch Lyceum, waar hij in 1931 Casimir opvolgde als rector (*Paedagogische Encyclopaedie* (z.j.), pp. 439-440).
29 Rommert Casimir (1877-1957) begon ook als onderwijzer. In 1918 werd hij hoogleraar in de pedagogiek te Leiden. Hij ontwikkelde een organisatieplan voor het eerste lyceum, dat de definitieve keuze voor Gymnasium of HBS drie jaar opschoof. Hij was een vriend van Reindersma, maar ook van Ligthart, wiens pedagogische werk hij mede hielp bekendmaken. Ligthart was tot zijn dood lid van het directorium van het lyceum.
30 Paul Ehrenfest (1880-1933) was de opvolger van Lorentz en van 1912 tot 1933 hoogleraar in de theoretische natuurkunde te Leiden. G. Heymans (1857-1930) was van 1890 tot 1927 hoogleraar in de filosofie en psychologie te Groningen. Hij wordt beschouwd als de grondlegger van de experimentele psychologie in Nederland.
31 Bestudering van Kerschensteiners opvattingen uit 1913 over de essentie en de waarde van het natuurwetenschappelijk onderwijs maakt duidelijk dat Reindersma Kerschensteiner soms zelfs letterlijk tot voorbeeld had gekozen (Kerschensteiner, 1920).
32 We baseren ons hierbij onder meer op een onderzoek van Treffers (1969) en op een artikelenreeks van Treffers en De Moor (1974).
33 Als voorbeeld verwijzen we naar Reindersma's aanpak om te bewijzen dat twee overstaande hoeken gelijk zijn. Hij maakt daarbij gebruik van het feit dat deze hoeken het supplement zijn van dezelfde nevenhoek. Eerst gebeurt dat via een getallenvoorbeeld, daarna 'algemeen' via het toekennen van een letter aan de hoek. Freudenthal heeft er vaak op gewezen dat een exemplarisch 'getalbewijs', zoals hier het geval is, voldoende overtuigingskracht heeft.
34 Reindersma heeft het echter niet gelaten bij die inleiding alleen; met het concentrisch opgestelde tweede deel en met het derde deel heeft hij ook getracht een oplossing aan te dragen voor het vervolg van het meetkundeonderwijs. Hij wilde hiermee duidelijkheid scheppen voor het totale programma voor de eerste drie leerjaren van de HBS, c.q. vier jaar Gymnasium. In 1957 verscheen nog een twaalfde druk van dit meetkundeboek.
35 Zie de dissertatie van Barbara de Jong (1996): *Jan Ligthart (1859-1916).*
36 P. Poot was een wiskundeleraar met speciale belangstelling voor het meetkundeonderwijs. Van zijn hand verschenen een meetkundemethode (1893), een studieboek over de 'nieuwe meetkunde' (projectieve meetkunde in verband met de planimetrie) (1894) en een didactisch werk ten behoeve van het meetkundeonderwijs (1900). Poot beriep zich op Fröbels filosofie.

Noten B3

1 Deze gegevens zijn ontleend aan een onderzoek van Treffers (1969), waarin 28 leerboe-

ken uit de periode 1920-1940 met betrekking tot het aanvankelijk meetkundeonderwijs zijn geanalyseerd. Deze methoden zijn met name op de selectie en de ordening van de leerstof gekarakteriseerd.

2 Tatiana Alexeyevna Afanassjewa werd op 19 november 1876 in het Russische Kiev geboren. Zij groeide op in St. Petersburg bij haar oom Peter Afanassjev, een hoogleraar aan het Polytechnisch Instituut aldaar. Zij volgde een driejarige lerarenopleiding in de wis- en natuurkunde. Zij voltooide haar opleiding door middel van een vierjarige studie in de wis- en natuurkunde aan de Vrouwenuniversiteit van Petersburg. In 1900 begon zij wiskundelessen te geven aan een particulier meisjesgymnasium en vanaf 1901 werd zij tevens assistente aan de Vrouwenuniversiteit om het practicum in de wiskunde te leiden. In 1902 vertrok Tatiana naar Göttingen in Duitsland om bij Felix Klein en David Hilbert te studeren. Hier leerde zij de Oostenrijkse fysicus Paul Ehrenfest (1880-1933) kennen, met wie zij in 1904 in het huwelijk trad. Van 1907 tot 1912 verbleef het jonge echtpaar in Rusland, waar Tatiana weer in het onderwijs ging. Voor het eerst werd toen een propedeutische meetkundecursus uitgeprobeerd. In deze jaren werd Tatiana ook gevraagd zich bezig te houden met de hervormingen van het wiskundeonderwijs. In deze tijd had zij contact met Sjochor'-Trotskij. Ook behaalde zij gedurende deze periode nog een diploma aan de mannenuniversiteit van Petersburg. In 1912 nam het leven van de familie Ehrenfest een beslissende wending. Niet alleen voor Tatiana en Paul in persoonlijke zin, maar ook voor de Nederlandse wetenschappelijke en onderwijskundige wereld was hun komst naar Leiden, waar Paul de hoogleraarsstoel van de theoretische natuurkunde van H.A. Lorentz (1853-1928) overnam, van bijzondere betekenis. Van 1926 tot 1933 verbleef mevrouw Ehrenfest weer in Rusland om zich bezig te houden met de opleiding van de wis- en natuurkundeleraren. In die tijd deed zij opnieuw ervaringen in de schoolpraktijk op met haar propedeutische meetkundecursus. De verdiensten van Paul Ehrenfest zijn uitgebreid beschreven door Martin Klein (1970) en door Ehrenfests leerling H.B.G. Casimir (1984). Tatiana Alexeyevna overleed op 14 april 1964, ze werd 87 jaar oud. Paul komt uit de beschrijvingen van Klein en Casimir naar voren als een gevoelige, levendige, geestige, kritische en inspirerende persoonlijkheid, maar ook als een twijfelaar, vooral aan zichzelf. Tatiana moet een veel evenwichtiger iemand geweest zijn. Zeer intelligent, erudiet en voor alles consequent (zie Visser, 1964).

3 Dit artikel 'De rol der axioma's en bewijzen in de meetkunde' verscheen in het *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs 12*(14), pp. 457-47. Het is ook te vinden in *Didactische Opstellen Wiskunde* (1960).

4 De meeste vergaderingen vonden plaats in het door haarzelf ontworpen huis aan de Wittevrouwenstraat 57 te Leiden, dat 'tot haar dood toe (...) een plek (is) geweest, waarheen wis- en natuurkundeleraren zich begaven om nieuwe didactische inzichten te toetsen' (Van Hiele, 1964, p. 259).

5 Graag haalde mevrouw Ehrenfest hierbij Lobatschewsky en Minkovski aan: de eerste met zijn hyperbolische meetkunde als een nieuwe beschrijving van de ruimte, de tweede vanwege diens ruimte-tijd meetkunde, welke zijn toepassing vond in Einsteins relativiteitstheorie.

6 In de discussie met Dijksterhuis zal mevrouw Ehrenfest hierop een nuancering aanbrengen.

7 Een voorbeeld van zo'n stamboom is te vinden bij Freudenthal (1986), *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs 45*, p. 58. Ook bij Reindersma (1924), *Beknopt leerboek der vlakke meetkunde* (tweede druk).

8 Na zijn HBS-opleiding in Tilburg deed Dijksterhuis staatsexamen gymnasium en studeerde vervolgens wis- en natuurkunde te Groningen, waar hij in 1918 promoveerde. Inmiddels werkte hij al als leraar wiskunde, een functie die hij tot 1953 vervulde. Zijn grote liefde betrof de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen, waarover hij vanaf 1920 publiceerde. Het meest bekend is hij geworden met *De mechanisering van het wereldbeeld*, waarvoor hij in 1951 de P.C. Hooftprijs kreeg. Vanaf 1930 was hij privaat-

docent in de geschiedenis van de wiskunde, eerst aan de universiteit van Amsterdam, daarna ook te Leiden. In 1953 werd hij tot buitengewoon hoogleraar in de geschiedenis der exacte wetenschappen in Utrecht benoemd. Verder was hij reeds in 1934 redactielid van *De Gids* geworden, later redactiesecretaris. Hij was lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen en vele jaren lid van de Onderwijsraad. Van Berkel roemt Dijksterhuis om zijn streven tot overbrugging van de kloof tussen de literaire en natuurwetenschappelijke cultuur, maar ook om zijn verdiensten voor de fundering van de beoefening van de wetenschapshistorie in Nederland. Zie verder de uitgebreide biografie van Van Berkel (1996) over Dijksterhuis.

9 Hoe fel deze kritiek verwoord was, moge blijken uit de passage waarin Dijksterhuis mevrouw Ehrenfest 'dat eigenaardig gevoel van superioriteit' aanwrijft 'waarmee in onzen tijd intellectueele vrouwen zoo gaarne op het mannelijk geslacht neerzien' (Dijksterhuis 1924b, p. 63). Er zij hierbij overigens opgemerkt dat mevrouw Ehrenfest als eerste in de discussie het woord vrouwenlogica had gebruikt.

10 'Gevraagd moge worden een rechte x te construeren, die twee gegeven kruisende rechten l en m onder gelijke hoeken kruist, die evenwijdig is aan een vlak V en twee gegeven kruisende rechten p en q snijdt' (Dijksterhuis, 1924a, pp. 19-20).

11 Een heldere beschrijving van Dijksterhuis' mens-opvattingen vinden we bij Van Berkel (1996).

12 E.W. Beth (1935) merkt in zijn dissertatie *Rede en Aanschouwing in de Wiskunde* het volgende op: 'De term "aanschouwing" (waarmede de termen "intuïtie", "intuitio" taalkundig als synoniem worden beschouwd) is in de philosophische litteratuur zeer herhaaldelijk aan te treffen'.

13 Voor een uitgebreide analyse van de Groningse rede zie Van Berkel, 1996, pp. 127-133.

14 In 1926 presenteerde de Commissie Beth-Dijksterhuis haar nieuwe leerplan voor de HBS. Het meest revolutionair was het voorstel tot invoering van de differentiaal- en integraalrekening. Pas in 1937 werd dit leerplan in afgezwakte vorm aangenomen, maar aangezien het eindexamenprogramma niet aan de nieuwe eisen werd aangepast, was de herziening in zekere zin een wassen neus. Wel kreeg het algebraprogramma een modernere snit door aan functies en grafieken een meer centrale plaats toe te kennen.

15 Dit heeft uiteindelijk bij de programmaherziening van het eindexamenprogramma voor Gymnasium-A in 1958 tot de keuzemogelijkheid van 'hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde' geleid.

16 Freudenthal sprak bij dergelijke opvattingen zelfs van 'anti-didactiek'.

17 Net als vijftien jaar eerder in *Euclides* laat in die eerste jaargang van dit tijdschrift ook mevrouw Ehrenfest een artikel verschijnen, nu over de noodzakelijkheid van heroriëntatie van de wiskundeleraren. Dit keer staan Dijksterhuis en mevrouw Ehrenfest echter niet als antagonisten tegenover elkaar.

18 Voor een uitgebreide analyse van deze kwestie verwijzen we naar Klomp, 1997, pp. 153-160.

19 Van Berkel gelooft niet dat Dijksterhuis zijn ideeën ontleend zou hebben aan de *Politeia*, maar ziet meer een soort 'Wahlverwandschaft' tussen Dijksterhuis en Plato (brief van Van Berkel aan EdM d.d. 25-6-1998).

20 Ontleend aan een brief van P.M. van Hiele aan E. de Moor d.d. 4-2-1993.

21 Uit enig onderzoek van de wetenschapshistoricus V. Frenkel te St. Petersburg is ons over Sjochor'-Trotskij het volgende bekend geworden (brief van V.Ya. Frenkel aan E. de Moor, 21-4-93).
Semen Il'ich Sjochor'-Trotskij (1853-1923) studeerde aan de Universiteit van Odessa en het Instituut voor spoorweg-ingenieurs te St. Petersburg. Van 1877 tot 1881 verbleef hij in Duitsland aan de universiteiten van Berlijn, Heidelberg en Königsberg. Hier volgde hij colleges bij onder meer Helmholtz, Weierstrass, Kirchhoff, Kronecker en Kummer. Vanaf 1887 was hij werkzaam in St. Petersburg als leraar aan een gymnasium. Hij was wetenschappelijk secretaris van de twee meest bekende onderwijstijdschriften: *Russische Scho-*

len (1840-1893) en *Gezin en School* (1882-1885).
Deze gegevens worden bevestigd in een brief (d.d. 16-9-93) van de wiskundedidacticus en historicus O. Prinits (Estland) aan R. Troelstra.
In de brief van 21-4-93 schrijft Frenkel aan De Moor: 'He was extraordinary active: he read lectures, wrote reviews, published books (especially on arithmetic and algebra) and papers. So it is quite understandable that Tatiana Afanasieva had known him even before 1907, i.e. before her return to Russia together with P. Ehrenfest, her husband'.

22 Dit exemplaar is door H. van Bommel, schoonzoon van mevrouw Ehrenfest, aan de auteur van deze studie geschonken. R. Troelstra uit Hilversum heeft de inleiding en een aantal stukken uit het boek vertaald.

23 De nummering van de opgaven bevat gaten. Wanneer op nr. 301 nr. 311 volgt, betekent dit dat de opgaven 302-310 in het leerlingenboek staan en bedoeld zijn voor zelfstandige verwerking. Dit leerlingenboek stond ons niet ter beschikking.

24 Men sprak in die tijd wel over de zo noodzakelijke aansluiting bij de ontwikkelingsfase van het kind, maar met wetenschappelijke argumenten werd dit niet gestaafd.

25 Genoemde werkgemeenschap was de Nederlandse afdeling van de internationale organisatie 'New Education Fellowship' (N.E.F.), welke in 1915 was opgericht. Kees Boeke was van de oprichting af voorzitter van de WVO.

26 Voor enkele historische beschouwingen over het totale werk van de Wiskunde Werkgroep van de WVO verwijzen we naar het artikel van H.J. Jacobs (1961) in *Euclides 37*(1) pp. 1- 11 en het speciale nummer (183) van het blad *Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding* (april 1961). Beide publicaties zijn verschenen naar aanleiding van het 25-jarig jubileum van de wiskundewerkgroep. Verder noemen we nog: Wansink (1953) in *Euclides 28*, pp. 197-205) en Freudenthal (1986) in *Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding 45*(1/2), pp. 56-58).

27 In 1938 werd een commissie in het leven geroepen, die als doelen had:
   a. te experimenteren met een cursus voor het juist leren lezen en zich realiseren van wiskundeopgaven in het aanvankelijk wiskundeonderwijs
   b. onderzoek te doen naar de taalmoeilijkheden in verband met het wiskundeonderwijs
   c. te experimenteren met een propedeutische cursus om het voorstellingsvermogen te oefenen en het begrip voor problemen en probleemstelling bij te brengen.

   In deze commissie hadden onder meer zitting: mevrouw Ehrenfest, E.W. Beth, Dijksterhuis en Turkstra. De resultaten van deze werkgroep zijn neergelegd in twee rapporten, die verslag doen van enkele experimenten met zogenoemde lees-rekenopgaven ten behoeve van de toelatingsexamens tot de middelbare school. Zie *Mededelingen 33* en *37* van het Nutsseminarium te Amsterdam (1940 en 1942).

28 Piet J. van Albada (1905-1997) is leraar geweest. Gepromoveerd in 1955 op een wiskundig onderwerp. Van 1951 tot 1958 hoogleraar in Bandoeng (Indonesië). Daarna wetenschappelijk medewerker aan de TU te Eindhoven.
Voor de beschrijving van de cursus, die nooit is uitgegeven, maken we gebruik van een artikel van Van Albada in *Report on methods of initiation into geometry* (1958), dat onder redactie van H. Freudenthal samengesteld werd voor de Subcommittee for The Netherlands of the International Commission on Mathematical Instruction.

29 Pas in de allerlaatste fase van dit onderzoek kreeg de auteur via Van Albada's dochter, mevrouw H. van der Zijpp-van Albada, de originele werkkaarten van de inleidende cursus onder ogen. Deze materialen zijn thans in het bezit van het Freudenthal Instituut.

30 Naar aanleiding van een brief d.d. 20-6-95 van de auteur aan Van Albada heeft een telefoongesprek plaatsgevonden. Hierin heeft Van Albada ingestemd met de gegeven beschrijving en analyse van zijn cursus.

31 Terecht merkt Treffers over het werk van Turkstra op: 'met alle waardering, die men voor deze eerste poging (...) kan hebben, moet men echter ook stellen, dat deze beschouwingen te vaag en te algemeen gehouden waren' (Treffers, 1969, p. 129).

32 De publicatie van mevrouw Ehrenfests brochure uit 1924 is in feite de aanleiding geweest tot oprichting van het didactiek-tijdschrift *Euclides*, dat voor het eerst in 1924 verscheen, aanvankelijk als *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*. Na drie jaar, dus vanaf 1927, werd het zelfstandig als *Euclides*, onder welke naam het nog steeds een bloeiend bestaan kent.Voor nadere gegevens over het ontstaan, zie Van Berkel (1996, p. 121 e.v.).

33 Liwenagel: 'Leraren in Wiskunde en Natuurwetenschappen aan Gymnasia en Lycea'. Deze vereniging was een onderdeel van het 'Genootschap van Leraren aan Nederlandse Gymnasia en Lycea'. Wimecos: 'Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmograhpie aan hoogere burgerscholen met vijfjarigen cursus, lycea en meisjes hoogere burgerschoolen met 5/6 jarigen cursus'. Pas in het begin van de jaren zeventig zouden deze twee verenigingen formeel opgaan in de 'Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren'.

Noten B4

1 Volgens een mondelinge mededeling van H.C. Vernout te Haarlem, die de laatste secretaris-penningmeester van de WWG was, is er nooit een archief bijgehouden. Uit verschillende publicaties van en over de WWG , is de betekenis van haar werk toch redelijk te reconstrueren.

2 Voor nadere informatie over het werk van de WWG van de WVO verwijzen we naar het speciale wiskundenummer van het blad van de WVO: *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* (1953, *11*(103)) met bijdragen van Wilhelmina Bladergroen, P. M. van Hiele, T. Bergsma, G. Krooshof en J. Smit. Zeer informatief in historisch opzicht is het nummer uit 1961 van hetzelfde blad, dat ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan van de WWG verscheen. Hieraan droegen bij: J.R. Janssen, H. Freudenthal, T. Ehrenfest-Afanassjewa, J.J. Boogaard, J.K. Timmer, H.J. Jacobs Jr., G. Krooshof, P.M. van Hiele en L. van Gelder. Verder noemen we een artikel van J. H. Wansink in *Euclides* (1953, *28*, pp. 197- 205) en een artikel van H.J. Jacobs in *Euclides* (1961, *37*, pp. 1-10).

3 Het programma voor de HBS-B was verdeeld over meetkunde (planimetrie en stereometrie), beschrijvende meetkunde (BM), stelkunde (algebra) en trigonometrie. Op het gymnasium werd geen BM gegeven, maar analytische meetkunde. Het gymnasium-A had eenvoudige stereometrie en algebra op het programma staan; op de HBS-A en de MMS kwam wiskunde niet als examenvak voor. Het leerplan van 1937 vermeldde een reeks van onderwerpen, waaronder differentiaal- en integraalrekening, dat niet geëxamineerd en dus ook meestal niet onderwezen werd.

4 Algebra (Bunt, Freudenthal, Van Hiele, Minnaert), Meetkunde (mevrouw Ehrenfest, Bunt, Janssen, Van Hiele), Analytische Meetkunde (Vredenduin, Mooij, Jacobs, Wansink), Goniometrie (Boogaard, Timmer, Van Hiele-Geldof), Beschrijvende Meetkunde (Van Albada, Streefkerk, Wansink). Zie *Euclides* (1953, *28*, pp. 206-226). Dit stuk is ook als nummer 3 in de reeks publicaties van de WWG verschenen.

5 Zeer lastig waren kennelijk de beslissingen over de Beschrijvende Meetkunde, een vak 'waarvan zowel het nut als de vormende waarde door velen in twijfel wordt getrokken'. Toch werd voorgesteld de BM te behouden voor de HBS, waar men tevens de Analytische Meetkunde, die op het Gymnasium werd gegeven, wilde invoeren. Voor het Gymnasium werd voorgesteld een ruimtelijke projectiemethode in te voeren, waarbij men ook wel van constructiemeetkunde sprak. Met name Freudenthal was nogal gekant tegen de BM, hetgeen later nog tot enige pittige confrontaties tussen voor- en tegenstanders heeft geleid.

6 Ter toelichting had de Wimecos-commissie de bundel *250 opgaven* gepubliceerd. Deze bundel, waarin volgens de geest van het ontwerp-leerplan meer nadruk op inzicht dan op uitgebreide berekeningen werd gelegd, heeft grote invloed op het wiskundeonderwijs van de jaren zestig gehad.

7 F.W. Prins had in 1941 deze ideeën onderzocht ten behoeve van de verbetering van de

leerprestaties in het aardrijkskundeonderwijs.

8 Kohnstamm heeft het begrippenpaar 'metastabiel-stabiel' omschreven in verband met het discontinue denkproces en verhoging van het intelligentieniveau. Zie Kohnstamm (1948, p. 26).

9 Net als Mooij werkte Boermeester met twee onderzoeksgroepen. De relevante niveaukenmerken van de begintoestand werden via een proefwerk vastgesteld, waarna het actuele meetkundeniveau via een onderwijsprocedure gelijkgeschakeld werd, zodat men van een gelijk startniveau verzekerd was. Daarna werd het feitelijke experiment gestart: in de ene groep werd de methode met het leergesprek gehanteerd, in de andere groep werd de traditionele doceermethode gebruikt. Dit werd enige malen herhaald. Tot slot volgde opnieuw een proefwerk. Van de lessen werden gedeeltelijk protocollen opgetekend.

10 Deze historische gegevens zijn ontleend aan een brief d.d. 20-9-1998 van Van Hiele aan de auteur van deze studie.

11 Hoewel Van Hiele op dezelfde dag promoveerde als zijn echtgenote D. van Hiele-Geldof, zij veel hebben samengewerkt op het gebied van het aanvankelijk meetkundeonderwijs en in het proefschrift van Van Hiele-Geldof steeds expliciet naar de door haar echtgenoot ontwikkelde theorie wordt verwezen, stelt Van Hiele dat de aanname dat deze theorie 'ook maar ten dele gebaseerd' zou zijn op de protocollen van Van Hiele-Geldof, onjuist is (Van Hiele, 1957, p. 184).

12 Het onderzoek wilde de psychologie feiten verschaffen op grond van de door de didactici ervaren onderwijsleersituatie. Het droeg door de verzamelde protocolgegevens bij tot documentatie en inventarisatie van de didactiek van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Het wilde hiermee tevens de alledaagse praktijk dienen.

13 Het Latijnse 'intueri' betekent onder meer 'met de geest nauwkeurig beschouwen'.

14 De 'Van Hiele niveaus' hebben, mede door de promotie die Freudenthal eraan gaf, nationaal en internationaal aandacht getrokken en hebben vele malen in praktische experimenten en theoretische geschriften navolging gehad. Een vergelijking van het werk van Van Hiele en Freudenthal maakt duidelijk dat er een wederzijdse beïnvloeding is geweest. Het komt ons voor dat Van Hiele van hen beiden de eerste is geweest die aan werkelijke theorievorming heeft gedaan aangaande het leren van meetkunde. Freudenthal heeft Van Hiele daar ook altijd de eer van gegeven.

15 Dit artikel is een vrijwel letterlijke kopie van het artikel van de Van Hiele in *Euclides 33* (2), pp. 33-47.

16 Zie Goffree (1985, p. 130).

17 Zeer kernachtig en geestig omschreef M. Kindt deze bevlogenheid van veel wiskundeleraren uit de jaren zestig eens met de woorden: 'Ook ik ben na de oorlog fout geweest'.

18 Aan dit rapport werkten mee: Chr. Boermeester, T. Ehrenfest-Afanassjewa, P.G.J. Vredenduin, D.N. van der Neut, S.J. Geursen, H. Turkstra, P.M. van Hiele, D. van Hiele-Geldof, P.J. van Albada, L.N.H. Bunt, Bruno Ernst, J.K. Timmer en G. Krooshof.

19 Bruno Ernst (Hans de Rijk) is ondermeer bekend van zijn boeken over Escher, zijn bijdragen aan het jeugdtijdschrift *Pythagoras* en zijn werk voor de stichting 'Ars en Mathesis'.

20 Deze docenten waren: J. Bulens, A.J. de Groot, A.N. Habermann en R. Troelstra.

21 Het onderzoek vond op één school plaats met dezelfde leraren, gedurende vier opeenvolgende leerjaren (met twee opeenvolgende lesmethoden, dus geen parallelliteit van traditionele en experimentele methode), onder gebruikmaking van testonderzoeken bij de leerlingen, onder toepassing van een observatiemethode voor procesmeting, onder gebruikmaking van een meetkunde-voorkeurstest, een meetkunde-attitudetest, een schoolattitudetest, een meetkunde-testserie en een meetkundeproefwerk voor de effectmeting.

22 Volgens een mondelinge mededeling van Troelstra aan E. de Moor (20-2-96) zou de eerste versie van zijn 'bewegingsmeetkunde' veel minder formeel geweest zijn. Tevens stelde hij in dit gesprek dat zijn methode *Transformatiemeetkunde* in de praktijk over het algemeen te moeilijk bevonden werd. Ook Freudenthal zag, volgens Troelstra, meer in een

minder axiomatisch opgezette cursus.

23 In 1962 vond de eerste Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats voor middelbare scholieren. Tevens verscheen het eerste nummer van *Pythagoras*, een wiskundetijdschrift voor jongeren. Beide initiatieven hebben een vaste plaats in het Nederlandse wiskundeonderwijs gekregen.

24 Dit heeft in de jaren zeventig tot uitgebreide discussies geleid over weer een nieuw programma, dat juist meer op de α- of γ-richting gericht zou zijn. Uiteindelijk heeft dit weer tot het zogenoemde HEWET-project (Herverkaveling Wiskunde Een en Twee) geleid en tot invoering van dit programma als wiskunde A en B voor het VWO in 1985 en in 1990 voor het HAVO.

25 Voor een goed overzicht van Freudenthals onderwijskundige werk verwijzen we naar Goffree: 'HF: Werken aan Wiskunde-Onderwijs', *Nieuw archief voor Wiskunde* (1991), vierde serie, deel 9, pp. 163-202. Dat Freudenthal vooral na zijn 65-ste zo productief was op onderwijskundig gebied hangt mede samen met het feit dat hij vanaf 1971 hoogleraar-directeur was van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO), dat van 1971 tot 1981 bestaan heeft.

26 Een ander voorbeeld van Freudenthals aanvankelijk vrij positieve houding ten opzichte van de New Math vinden we in zijn voorwoord van het boekje *Verzamelingen* van Vredenduin (Torusreeks 1967).
Ook in de beginjaren van het Wiskobas-project waren nog tal van structuralistische onderwerpen aan de orde. Freudenthal heeft zich hier toen niet tegen verzet. Integendeel, hij heeft zelfs de helpende hand geboden.

27 Een uitzondering is een nummer uit 1969, dat ruime aandacht aan de New Math in verband met de basisschool besteedt. Hierin bijdragen van onder meer Van der Blij, Goffree, Wijdeveld en anderen.

28 Een experiment van kleine omvang over 'Figuurrekenen' was dat van P. van Iersel (1958).

Noten B5

1 Een oplossing: Je kiest deur A. De prijs ligt erachter of niet. Je kunt wisselen (ww) of niet (nw). Zie verder de tabel.

	nw	ww
A	prijs	niet
B	niet	prijs
C	niet	prijs
kans	1/3	2/3

2 Spengler (1923, p. 123) wijdt een hele paragraaf aan de wiskunde als cultuurverschijnsel.

3 E.W. Beth noemt in een lezing tijdens het symposium 'De functie der wetenschap' in 1948 als voorbeeld van deze onzekerheidscrisis onder meer de gelijkwaardigheid van de golftheorie voor het licht van Huygens en de corpuskeltheorie van Newton, die sinds de opkomst der kwantentheorie weer opgeld maakte.

4 Voor het onderwijs belangrijke associatiepsychologen waren Herbart en J.S. Mill.

5 Het werk van Wolters (1978) kan als een voortzetting hiervan worden beschouwd.

6 Dit citaat is uit een verslag van ene v.d. H.R. in het *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs* (1920, *17*, p. 362)

7 Een goede beschrijving van het begrip productiefactor, dat naast het begrip cultuurfactor als motivering voor de wiskundestudie werd gesteld, vinden we niet alleen in het genoemde werk van Albada, maar is ook door Van Dantzig zelf gegeven in een lezing uit 1948, welke als titel droeg 'Over de maatschappelijke functie van zuivere en toegepaste wetenschappen'. In dit stuk wijst Van Dantzig tevens op het principe van de 'sprong van doel op middel', dat hij aan Brouwer had ontleend en waarmee duidelijk gemaakt wordt dat het zoekproces naar de oplossing van een wiskundige (toegepast of zuiver) probleemstelling het juist nodig kan maken dat men zich op het middel (de wiskunde zelf) richt.

8 We verwijzen hiervoor naar Klomp (1997), die in zijn dissertatie *De relativiteitstheorie in Nederland* een interessant hoofdstuk aan de betekenis van Kohnstamms personalisme wijdt.

9 *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs* (1920, *17*, pp. 545-547).

10 Langeveld onderscheidde vijf 'kringen', die een specifieke habitus representeren: constructief-theoretisch, interpretatorisch-theoretisch, speculatief-extatisch, maatschappelijk-praktisch, experimenteel-praktisch. Tussen deze 'kringen' zou geen transfer mogelijk zijn.

11 Interessant is dat Freudenthal (1973) in zijn *Mathematics as an Educational Task* (pp. 458-460) dit vraagstuk roemt om zijn schoonheid en eenvoud en als voorbeeld geeft van wat hij 'lokaal organiseren' noemt. Allereerst noemt hij het omkeerprincipe en zegt daarvan 'I think this is the first psychologically convincing occurence of the logical complex characterized by such concepts as inversion, necessary and sufficient, if and only if.' Daarna meent hij dat dit een eerste mogelijkheid biedt om het schijnbaar triviale transitiviteitsprincipe expliciet ten nutte te maken. Dan wijst op hij erop dat een symmetrische bewering op een asymmetrische manier opgelost wordt. Verder dat een incidentie-stelling (drie lijnen door één punt) met behulp van metrische argumenten wordt bewezen en ten slotte verheugt hij zich over het feit dat de stelling tot de 'fascinating construction of the circumcircle' leidt.

12 Ook hebben we nog bewijzen gevonden, waarbij van een (schijn) 'indirecte redenering' gebruik werd gemaakt.

13 In de tekst van Turkstra staat consequent Schlüszler in plaats van Schüssler.

14 De vier figuren van de syllogismen worden als volgt ingedeeld:

M-P	P-M	M-P	P-M
S-M	S-M	M-S	M-S
S-P	S-P	S-P	S-P

(*The Encyclopedia of Philosophy*, vol V, p. 37.)

15 Kohnstamm, Ph. (1934), De formele logica en het kinderlijke denken. Mededeling 26 van het Nutsseminarium, opgenomen in *Keur uit het didactisch werk* (1948, pp. 67-92).

16 P.J. van Albada heeft hiermee in de jaren veertig ervaringen opgedaan.

17 Deze brieven bevinden zich in het Rijksarchief van Noord-Holland te Haarlem (RANH). Ze hebben nog geen officiële nummers.

18 Brief van H. Freudenthal aan T. Ehrenfest, 6-3-64, RANH.

19 Brief van T. Ehrenfest aan H. Freudenthal, 19-3-64, RANH.

20 Brief van H. Freudenthal aan T. Ehrenfest, 21-3-64, RANH.

21 De verzameling logiblokken bestaat uit 4 verschillende vormen (driehoek, cirkel, rechthoek en vierkant), met 3 verschillende kleuren (rood, geel en blauw), en 4 formaten (klein of groot, en dik of dun). Er zijn dus 48 verschillende blokken.

22 Ook werd wel geprobeerd met behulp van de logiblokken de waarheidstabel voor de implicatie te rechtvaardigen (zie bijvoorbeeld Goffree (1970):

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Daar dit echter wringt met het dagelijkse taalgebruik, zien we hoe snel men op het vlak der formele, geaxiomatiseerde logica verzeild raakt, die niets meer uitstaande hoeft te hebben met de logica van het dagelijks leven.

23 We wijzen op de volgende activiteiten aan het eind van de jaren zestig:
- een aantal heroriënteringscursussen voor onderwijzers
- de basisschoolmethode *Denken en Rekenen* van Nicole Picard
- informatieve brochures over moderne wiskunde in het basisonderwijs

- de eerste Wiskobas-conferentie te Egmond aan Zee in 1969.
  Voor een kort overzicht van de ontwikkelingsgeschiedenis van 1968 tot 1978 verwijzen we naar *Wiskobas Heroriënteringen Onderwijzers* 1968-1978.

24 Beroemd was zijn lezing op de Egmond-conferentie van 1971. Zie ook zijn artikel 'Plaatjes en Praatjes' (1972).

25 Mondelinge mededeling van A. Treffers.

26 Freudenthal onderscheidde voor het wiskundeonderwijs drie taalniveau's. Het laagste is het 'demonstratieve' niveau, waarin met de allereenvoudigste taaluitingen als het ware aangewezen wordt. Daarna gaan taal-'relaties' een rol spelen, die een stap zijn op weg naar de uiteindelijke 'formalisering'. Vooral op het tweede niveau ontstaat het gebruik van variabelen in een algemene zin, zodat ook woorden als een variabele kunnen optreden.
Daarnaast pleitte hij voor het gebruik van alledaagse situaties en contexten om de logische kwantoren en begrippen (alle, sommige, minstens, hoogstens, ...) betekenis te laten krijgen. Uitgaande van deze ideeën heeft H. ter Heege eind jaren zeventig een interessant leerstofpakketje voor de basisschool ontworpen, waar overigens niet verder mee geëxperimenteerd is.

27 Zie noot 22 (waarheidstabel voor implicatie).

28 Voor nadere kritiek van Freudenthal op Piaget verwijzen we naar Appendix I van *Mathematics as an Educational Task* (1973, pp. 662-677).

29 Freudenthal, H. (1973), in Howson (1973), pp. 101-114.

30 We verwijzen naar de heroriënteringsboeken *In Orde* (1971) en *Ordenend Tellen* (1975).

31 Ook in de combinatorische vormleer kwamen we dergelijke problemen tegen, zij het dat men toen niet of nauwelijks op de isomorfe structuren inging.

32 Zie bijvoorbeeld *Sproeteldam*, Treffers (1978), pp. 177-182.

33 Gardners 'multiple intelligences' betreffen 'linguistic', 'musical', 'logical-mathematical', 'spatial' en 'personal intelligence'. De laatste wordt nog onderscheiden naar inter- en intra-persoonlijke intelligentie.

34 Verder noemt Gardner visuele denkers als Kekulé (benzeen-structuur), Crick en Watson (DNA-dubbelschroef) en Leonardo da Vinci als universeel denker.

35 Zie hiervoor Paperts boek *Mindstorms*.

36 Zie de rapporten van De Lange (1994) en Sjamaar (1995).

DEEL C

Ontstaan van de realistische meetkunde

Be-Grijpen van de ruimte
(vrij naar Freudenthal)

C0 Inleiding op deel C

In deel C wordt het meetkundeonderwijs op de basisschool en in de brugklas van het voortgezet onderwijs tijdens de periode 1970-1995 aan de orde gesteld. Om meerdere redenen wijkt dit deel af van de voorgaande delen A en B.

Allereerst nemen we nu de recente geschiedenis van het onderwerp van studie, dat nog steeds in ontwikkeling is, ter hand. Wegens deze nabijheid kan in de analyses niet die distantie verwacht worden, die we in de delen A en B betracht hebben. Temeer geldt dit, omdat de auteur van deze studie nauw betrokken is geweest bij een deel van de ontwikkelingen gedurende de jaren zeventig en tachtig. Het laatste heeft echter ook voordelen: het was namelijk mogelijk tot bepaalde bronnen door te dringen, die anders onder het stof verdwenen zouden zijn. Ook konden wij een aantal betrokkenen persoonlijk benaderen en ondervragen. Wij hebben getracht zo objectief mogelijk verslag te doen van de feiten, die dit 'oral history'-deel van het onderzoek hebben opgeleverd.

Daartoe – dat is het tweede afwijkende van de tot nu toe gevolgde werkwijze – hebben we, naast documentenonderzoek, gebruik gemaakt van twee schriftelijke enquêtes, waarvan er één nader geëvalueerd is via een korte conferentie. De ondervraagden betroffen de leden van de twee ontwikkelgroepen voor het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs van het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskundeonderwijs (IOWO). De eerste groep stond bekend onder de naam Wiskobas (Wiskunde op de basisschool), de tweede als Wiskivon (Wiskunde in het voortgezet onderwijs).

Om de verbinding met de voorgaande periode, zoals beschreven in deel B, te leggen, zullen we opnieuw in moeten gaan op de veranderingen die zich in verband met de New Math-beweging in de jaren zestig hebben voltrokken. Zowel de internationale als de nationale ontwikkelingen worden in beschouwing genomen, omdat daaruit – althans voor een deel – de geschiedenis van het meetkundeonderwijs in ons land begrepen kan worden.

Tot 1970 vonden de ontwikkelingen in het meetkundeonderwijs voor vier tot veertien jaar gesegmenteerd plaats, naar de niveaus: kleuters, basisschool en eerste klas voortgezet onderwijs (brugklas), zoals we in de delen A en B hebben gezien. Na 1970 werd er gestreefd naar het ontwikkelen van een meer continue lijn. Toch zullen we vanwege de deels gescheiden wijze van leerplanontwikkeling in deze periode dit nu toch per niveau – kleuters, basisschool, brugklas – ter sprake brengen. De grotere samenhang zal duidelijk worden uit de fundamenteel gewijzigde opvattingen over wat meetkunde nu eigenlijk zou moeten zijn.

Ten slotte kwam het ons voor dat het doortrekken van de historische lijn juist in dit deel van het onderzoek, zowel het belang van het historisch onderzoek op zich ten goede zou komen, als dat hieruit ook consequenties getrokken kunnen worden voor toekomstige ontwikkelingen.

Vraagstellingen en werkwijze

De vragen, waarvoor wij in deel C staan, zijn de volgende:

a Hoe is de realistische meetkunde op de basisschool (Wiskobas 1971-1981) ontstaan?
b Wat is de doorwerking hiervan op de methoden voor de basisschool geweest?
c Hoe is de kijkmeetkunde in het voortgezet onderwijs ontstaan (Wiskivon 1975-1981)?
d Welke betekenis heeft de kijkmeetkunde voor verdere ontwikkelingen gehad?
e Wat is de ontstaansgeschiedenis van de kerndoelen van de realistische meetkunde geweest en hoe zijn deze gelegitimeerd?

Voor vraag a heeft *documentenonderzoek* (literatuur- en archiefonderzoek) plaatsgevonden en is een *schriftelijke enquête* uitgevoerd, gevolgd door een *mondelinge evaluatie* met de betrokkenen.
Voor vraag b is een *analyse* van de belangrijkste *schoolboeken* uit de jaren tachtig en negentig uitgevoerd.
Voor vraag c heeft *documentenonderzoek* (literatuur- en archiefonderzoek) plaatsgevonden en is een *schriftelijke enquête* uitgevoerd.
Voor vraag d heeft *documentenonderzoek* en een *analyse* van de belangrijkste *schoolboeken* plaatsgevonden.
Voor vraag e heeft *documentenonderzoek* en *schriftelijke ondervraging* bij de verantwoordelijke betrokkenen plaatsgevonden.
Uiteraard beschikte de auteur als medewerker van het Wiskobas-project ook nog over zijn *eigen waarnemingen.*

Enquête onder Wiskobas- en Wiskivonmedewerkers 1971-1981

Enquête Wiskobas

Wij verkeerden in de gelukkige omstandigheid dat het mogelijk was om een aantal inhoudelijke medewerkers van het IOWO uit de jaren zeventig te bevragen over hun aandeel in de ontwikkelingen van het onderdeel meetkunde uit het Wiskobas-programma. Daartoe werd in mei 1996 een schriftelijke vragenlijst (bijlage C-I) naar twaalf medewerkers uit die tijd gestuurd. In de begeleidende brief was, om de historische terugblik zuiver te houden, het volgende gesteld: 'Het gaat er op dit moment niet om opnieuw een discussie te starten, maar om te trachten boven water te krijgen hoe nu eigenlijk dat ontwikkelingsproces heeft plaatsgevonden.'

Alle aangeschrevenen hebben deze enquête ingevuld teruggezonden. Van de ingestuurde antwoorden is een samenvatting gemaakt (bijlage C-II). Deze is aan de respondenten teruggestuurd. Op 6 september 1996 is deze groep bijeen geweest ten behoeve van een mondelinge evaluatiebijeenkomst. Hiertoe waren vijf gesprekspunten opgesteld (bijlage C-III).

Mede op grond van deze enquête is een aparte lijst van meetkundeontwerpen van de Wiskobasgroep uit de jaren zeventig samengesteld, die in de literatuurlijst is opgenomen.

Wij zullen de uitkomsten van de schriftelijke enquête en van de retrospectieve bijeenkomst in het afsluitende hoofdstuk C6 gebruiken ter verificatie van de historie van de ontstaans- en ontwikkelingsgeschiedenis van de realistische meetkunde op de basisschool in de periode 1971-1980.

Enquête Wiskivon

In bijlage C-IV is het vragenformulier te vinden dat in september 1996 aan zestien voormalige Wiskivon-medewerkers was toegestuurd. Een samenvatting van deze antwoorden is te vinden in bijlage C-V. Ook van de uitkomsten van deze enquête zal in hoofdstuk C6 gebruik gemaakt worden.

De term realistisch wiskundeonderwijs, herkomst en omschrijving

Treffers voerde in 1979 de term realistisch wiskundeonderwijs in. Hij onderscheidde toen globaal twee hoofdrichtingen voor het wiskundeonderwijs op de basisschool: het structuralisme en het realisme, waarbij overigens met allerlei tussenvormen rekening gehouden werd. Deze onderscheiding werd gebruikt om de veranderde opvattingen over het leren cijferen te verantwoorden. In het structuralisme wordt de leerstofkeuze en -ordening vooral bepaald vanuit de hogere wiskundige structuren en vertaald naar het niveau van het kind. In het realisme wordt wiskunde als een menselijke activiteit voor iedereen beschouwd. Er wordt in het onderwijs niet van de structuur van de wiskunde uitgegaan, maar 'de lokale wiskundige strukturen binnen de ervaren realiteit vormen (...) de bron voor leerstof en onderwijsaktiviteiten' (Treffers, 1979, p. 84). Toepassingen hebben een tweeledige betekenis, namelijk als toepassingen van het geleerde, maar didactisch gezien vooral als concrete contexten voor het verwerven van begrip en inzicht. De term realiteit wil niet zeggen dat elk stuk leerstof of elke activiteit ook aan de echte werkelijkheid onttrokken zou moeten zijn. Er wordt van voor de kinderen voorstelbare situaties uitgegaan, die eventueel ook een gedachtenwereld kunnen zijn. Dit is wat bedoeld wordt met de 'ervaren realiteit' *van* en *voor* het lerende kind. We herkennen hier opnieuw een opvatting van wiskunde leren, die past bij het psychologisch-genetische principe.

In deze zin spreken wij nu verder van 'realistische meetkunde' en 'realistisch meetkundeonderwijs'. De term is nieuw, maar het principe is al oud. De historisch-genetische aanpak vanuit de landmeetkunde, zoals die in de negentiende eeuw in Frankrijk wel werd gepropageerd, is hier een voorbeeld van. Ook het werk van mevrouw Ehrenfest uit de jaren dertig past binnen de realistische opvattingen, maar dan meer in psychologisch-genetische zin. Omdat we ons in de schoolmeetkunde bezighouden met de ervaringsruimte, lijkt de term 'realistische meetkunde' haast een

pleonasme, maar hierin school, zoals we in deel B gezien hebben, nu juist het probleem. De euclidische aanpak leek iets met de realiteit te maken te hebben, het ging over concrete figuren, maar er mocht eigenlijk niets concreets bij gedacht worden en wel omdat die meetkunde nu juist voor het vleesgeworden 'structuralisme' stond. Het heeft dus alleszins betekenis om van 'realistische meetkunde' te spreken, waarvan we nu het doorbraakproces in de jaren zeventig bespreken.

C1 Internationale revolutie, nationale reactie

Wetenschappelijke en maatschappelijke aanleidingen tot modernisering

In B4 noemden we het Spoetnik-effect uit 1957, dat in de Verenigde Staten de weg gebaand zou hebben voor de New Math doorbraak. 'This event had an enormous effect on American complacency about their undoubted engineering capacity and its superiority over the Russians' (Griffiths en Howson, 1974, p. 138).[1] Ook beschreven we in B4 dat Freudenthal het ontstaan van de New Math vooral toeschreef aan het werk van de Bourbaki-groep en dat van een aantal vooraanstaande psychologen.

Wij menen echter dat aan het ontstaan van het fenomeen van de New Math een complexer arsenaal van ontwikkelingen uit de jaren 1950 en 1960 ten grondslag heeft gelegen. Een aantal daarvan kende al een langere historie. We hebben in deel B gezien dat de zoektocht naar de verbetering van het wiskundeonderwijs op alle niveaus zich al aan het begin van de twintigste eeuw had ingezet. De discussies over de doelstellingen van het wiskundeonderwijs waren al van de tijd van na de Eerste Wereldoorlog. De interesse voor de bijdragen uit de psychologie, met name ten behoeve van het basisonderwijs, kende ook al een lange traditie. In die zin waren deze ontwikkelingen niet anders dan een logische voortzetting van de internationale ontwikkelingen sinds het begin van de twintigste eeuw. Echter, de noodzaak van een internationale aanpak deed zich na de Tweede Wereldoorlog sterker gevoelen in het kader van een algemene Westerse samenwerking op het gebied van economie, militaire macht, wetenschap, sociale verhoudingen, onderwijs en cultuur. Als oorzaken van de versnelde doorbraak tot internationale vernieuwingen onderscheiden we de volgende factoren:

De *wetenschappelijke ontwikkelingen van de wiskunde* hadden zich in steeds hoger tempo voltrokken. Nieuwe onderwerpen als statistiek en waarschijnlijkheidsrekening, numerieke wiskunde, computerkunde, discrete wiskunde en logica trokken de aandacht van het secundair onderwijs. Maar vooral de *unificatie van de wiskunde* – door het werk van de Bourbaki-groep benadrukt en reeds in de negentiende eeuw ook voor het voortgezet onderwijs door Felix Klein als vernieuwingsrichting aangewezen – sprak tot de verbeelding. Daarmee werd het structuuraspect van de wiskunde veel meer dan het algoritmische aspect tot hoofddoelstelling van het onderwijs gepromoveerd.

Bijdragen uit de psychologie van Piaget, Dienes en Bruner trokken de aandacht. Jean Piaget (1896-1980) en zijn medewerkers hadden al voor het ontstaan van de feitelijke New Math-beweging naam gemaakt, waarbij onder meer de ontwikkeling van het getal- en ruimtebegrip bij het jonge kind bekend zijn geworden. Zoltan P. Dienes, van oorsprong een wiskundige, hield zich vanaf de jaren vijftig al bezig met de psychologische aspecten van de didactiek van de wiskunde, in het bijzonder van

het primaire onderwijs. Zijn werk, dat hij deels in samenwerking met Jerome S. Bruner verrichtte, heeft een enorme invloed gehad op het ontstaan van het 'psychologisch structuralisme'. Opgang maakte Dienes met de leerpsychologische principes van 'multiple embodiment' (veelzijdige inbedding van grondbegrippen) en het 'deep end principle', dat voeding gaf aan het idee dat in het onderwijs een algemene structuur vooraf dient te gaan aan de bijzondere (andere talstelstels vóór het tientallige, topologie vooraf aan metrische meetkunde). Het gebruik van concrete gestructureerde leermaterialen, zoals logiblokken, MAB-materiaal en dergelijke, paste bij Bruners opvattingen over de leerstadia (enactive, ikonic, symbolic). Het was in die jaren vijftig en zestig eigenlijk voor het eerst dat men de psychologische bijdragen ten behoeve van het wiskundeonderwijs in bredere kring wilde gaan toepassen. Daarmee kwamen de ontwikkelingen van het wiskundeonderwijs aan jonge kinderen in een geheel ander licht te staan.

Freudenthals stelling dat de psychologie en de wiskunde elkaar gevonden hadden in het structuurdenken komt ons juist voor, maar er waren nog andere factoren die het internationale gedachtengoed van het wiskundeonderwijs rond het midden van deze eeuw hebben beïnvloed.

De genoemde ontwikkelingen stonden ook in een *wisselwerking* met die in de algemene *onderwijskunde* en in het bijzonder in de *pedagogiek*. Allereerst werd de vraag naar onderwijs nationaal en internationaal groter. Dit betekende dat voor steeds gedifferentieerder groepen programma's – ook voor rekenen en wiskunde – opgesteld moesten worden. Hoe diende het onderwijs georganiseerd te worden? Konden nieuwe methodieken zoals geprogrammeerde instructie soelaas bieden? Dergelijke vragen maakten de modernisering van het reken- en wiskundeonderwijs niet eenvoudiger, maar tegelijk werden ze ook wel als argumenten gebruikt om een beoogde modernisering te effectueren. Binnen sommige opvattingen werd veel waarde gehecht aan een meer projectmatige en met andere vakken geïntegreerde aanpak van het nieuwe wiskundeonderwijs. Uit de pedagogische hoek hoopte men op een meer aan het kind aangepast en een meer motiverend reken- en wiskundeonderwijs. Konden algemene doelstellingomschrijvingen hulp bieden bij de noodzakelijke nieuwe doelformuleringen? De opleidingen dienden aangepast, er moest bijscholing komen, de wijze van implementatie diende gemodelleerd. Kortom dé modernisering van het reken- en wiskundeonderwijs zou niet zonder de onderwijskundige componenten kunnen plaatsvinden, zodat ook vanuit deze sociaalwetenschappelijke disciplines invloed op de innovatiepogingen ontstond.

Ook de *veranderingen in maatschappij, economie en technologie* hebben invloed uitgeoefend op de vernieuwingsprocessen in het reken- en wiskundeonderwijs van na de Tweede Wereldoorlog. In alle rapporten werden argumenten voor hervorming aangedragen. Wiskunde was niet alleen een hulpwetenschap voor de natuurwetenschappen, maar haar methoden waren ook doorgedrongen in de economie, de

taalwetenschappen en de sociale wetenschappen. In het bijzonder werd gewezen op het toenemend belang van de statistiek in alle lagen van de samenleving. Ook de opkomst van de *computer* en de *informatica* werd als argument gebruikt om vroegtijdig met wiskunde, vooral met het logische redeneren, te beginnen. Het is met name het *nuttigheidsaspect* van de wiskunde dat een belangrijke rol gespeeld heeft bij deze hervormingspogingen.

Tevens hebben de *bestuurlijke overheden* hun invloed uitgeoefend op de hervormingen van de jaren zestig. Meestal niet direct, maar uiteindelijk vaak wel finaal door vaststelling van leerplannen of door adviezen van de inspectie. Aan het eind van de jaren vijftig verzorgde het Amerikaanse Congres de financiële middelen om de vermeende achterstand met de Russen goed te maken. Frankrijk, Zweden en België zijn voorbeelden waar de staat een directe hand heeft gehad in de toenmalige hervormingen. Ook in Nederland heeft de New Math in het voortgezet onderwijs, gesanctioneerd door de inspectie, voet aan de grond gekregen.

Wel waren deze directe of indirecte overheidsbemoeiingen in de democratische landen vaak het gevolg van het werk van *ideologische bewegingen*, maar soms staken daar ook *commerciële belangen* achter. Voornoemde bewegingen kwamen meestal voort uit onderzoeksprojecten van de universiteiten, echter ook uit de kringen van het onderwijs zelf, zoals de Association of Teachers of Mathematics (ATM) in Engeland.

Ten slotte bestond natuurlijk in het *onderwijs zelf* ook een zekere vernieuwingsdrang.[2] De behoefte aan vernieuwing bij het onderwijs zélf moet in het algemeen echter klein genoemd worden. De enkele voortrekkers uit het praktische onderwijs zijn meestal aanhangers van een onderwijsideologie en/of schoolboekauteurs. Opvallend is dat het in het algemeen individuele personen zijn die een vernieuwingsbeweging dragen. Uiteraard zijn er ook voorbeelden te geven van een collectief, maar daarbinnen is meestal wel tenminste een *leidende figuur* aan te wijzen.

In de geschiedenis van het wiskundeonderwijs is er wellicht geen periode geweest waarin wetenschappelijke, maatschappelijke en veranderingen in de school zelf, zó hun stempel op de vernieuwingen hebben gezet, als die van de jaren vijftig en zestig van de twintigste eeuw.

Royaumont 1959

Zoals reeds in B4 opgemerkt, wordt het feitelijke startpunt van de New Math gelegd bij de internationale conferentie te Royaumont, welke geïnitieerd was door de Organisation for European Economic Co-operation (OEEC). In deze organisatie participeerden al sinds 1948 achttien Europese landen, terwijl van buiten Europa de Verenigde Staten en Canada als toegevoegde leden deelnamen. De hoofddoelstellingen van de OEEC waren voornamelijk van materiële aard, namelijk verhoging van productie, modernisering van industriële en landbouwkundige toerusting en uitbreiding

van de handel, maar ook het streven naar volledige werkgelegenheid. De aanpak vertoonde een nogal technocratisch karakter. Zo had de OEEC sinds 1958 een Office for Scientific and Technical Personnel (OSTP), die de conferentie van Royaumont georganiseerd had en waarvan we uit de hoofddoelstellingen citeren: 'to improve the educational systems (...) to strenghthen their efforts for training specialised personnel in order to increase economic growth. (...) alerting (...) to the urgent need for increased technical manpower, (...) increasing the effectiveness of science and mathematics teaching' (OEEC, 1961, p. 4).

Uit het verslag van deze conferentie blijkt dan ook dat alle sprekers als belangrijkste argument voor de fel voorgestane modernisering van het wiskundeonderwijs inderdaad dit materiële punt, namelijk de behoefte aan beter technisch opgeleide mensen, naar voren brachten. De voorzitter van de ICMI, M.H. Stone, zei het als volgt: 'Thus the teaching of mathematics is coming to be more and more clearly as the true foundation of the technological society which it is the destiny of our times to create' (OEEC, 1961, p. 18).

Van enig algemeen formeel belang was ternauwernood sprake. In verband hiermee werd ook de grote kloof die tussen de moderne wiskunde van de universiteit en het traditionele nog uit de negentiende eeuw stammende schoolprogramma bestond, als argument aangevoerd. Met name de bourbakist Dieudonné was hier de woordvoerder van. Hij deed een verstrekkend voorstel om eens en voorgoed af te rekenen met de oude programma's en alles in het licht te stellen van de structuur van de wiskunde. Dit is wat Freudenthal bedoelde met de Bourbaki-beïnvloeding. Op deze conferentie sprak Dieudonné ook zijn befaamde 'A bas Euclide' uit: 'if the whole program I have in mind had to be summarised in one slogan it would be: *Euclid must go!*' (OEEC, 1961, p. 35). Het structuralistische denken in termen van verzamelingen, logica, relaties, functies en groepentheorie beheerste het inhoudelijke aspect van de conferentie. Er was geen plaats meer voor de oude euclidische meetkunde. Een intuïtieve inleiding kon nog net, zo kwam uit de discussies naar voren, maar dan zo snel mogelijk overgaan op vectormeetkunde en lineaire algebra.

We dienen ons te realiseren dat deze conferentie – hoewel het de bedoeling was dat ook het onderwijs voor de 'primary grades' aan de orde zou komen – slechts over het middelbaar en het hoger onderwijs handelde. Dit is niet verwonderlijk, daar er uit elk deelnemend land drie deelnemers waren uitgenodigd met de volgende kwalificaties: 'an outstanding mathematician, a mathematics educator and an outstanding secondary school teacher of mathematics'.[3] Slechts Stone en G. Choquet wezen, onder verwijzing naar Piaget, op de noodzaak ook het basisonderwijs in de ontwikkelingen te betrekken. Stone noemde in dit verband als nieuw en belangrijk element 'the study of geometry on an intuitive basis in the very early primary years', zonder overigens enige specificatie aan te geven. Voor het voortgezet onderwijs in verschillende Europese landen is deze conferentie wellicht van doorslagevende aard geweest.

Opvattingen van New Math

Met de term New Math werden vaak verschillende vernieuwingspogingen aangeduid. Howson c.s. (1981) onderscheidden vijf achterliggende filosofieën van de vernieuwingsbewegingen na de Tweede Wereldoorlog:

De *behaviourist approach*, waarvoor de theorieën van Gagné en Bloom model stonden. Het ging om het bereiken van operationele doelstellingen in de vorm van objectief waarneembaar gedrag. Aan deze richting was een technocratische opvatting van onderwijzen en leren verbonden.[4]

De *new-math approach*, die haar wortels had in de nieuwe opvattingen over de structuur van de wiskunde. De School Mathematics Study Group (SMSG) was een van de eerste grotere Amerikaanse projecten die vanaf 1958 materiaal voor zowel high school als primary level heeft geproduceerd.

De *structuralist approach*, waarbij de kern was dat het bij leerprocessen gaat om het verwerven van inzicht in de begrippen en hun relationele structuur; de theorieën van Piaget, Bruner en Dienes dienden als wetenschappelijke fundering van deze benadering, zoals onder meer beschreven in het Hamburg-rapport van 1966. Het toen bekende CSMP project (Comprehensive School Mathematics Program) laat hiervan concrete uitwerkingen zien. Voor vele van dergelijke projecten leverde de 'new-math approach' de inhoudelijke component.

De *formative approach*, waarin hogere doelen zoals ontwikkeling van een onderzoekende houding en creativiteit vooropstonden. Hierbij lag veel meer de nadruk op de rol van de leraar, die de leerlingen de gelegenheid zou moeten bieden om door middel van aangeboden activiteiten een dergelijke houding te ontwikkelen. Van zekere invloed op de Nederlandse ontwikkeling op de basisschool is het Engelse Nuffield Mathematics Teaching Project (1964) geweest, dat tot deze richting gerekend kan worden.

De *integrated-teaching approach*, waarin de nadruk lag op de samenhang tussen de vakken en de relatie met de concrete wereld, ook wel bekend geworden onder de naam projectonderwijs. Een bekend voorbeeld was het Unified Science and Mathematics for Elementary Schools-Project (USMES), dat ook voor de Nederlandse situatie van belang is geweest.

De Scottish Mathematics Group (1967) heeft grote invloed op de ontwikkeling van de methode *Moderne Wiskunde* voor het voortgezet onderwijs in Nederland gehad. Uit dezelfde tijd (1967) stamt het Engelse School Mathematics Project (SMP).

Tegenstrevers

De New Math-ontwikkelingen werden beslist niet door alle betrokkenen met een even groot enthousiasme omarmd. Met name uit de universitaire kringen van de natuurkunde en de wiskunde in de Verenigde Staten ontstond al spoedig felle kritiek.

De befaamde Nobelprijswinnaar Richard Feynman gaf in 1965 een vernietigend

oordeel over het onnodige formalisme in een aantal nieuwe leerboeken. Over de nieuwe aanpak van de meetkunde zei hij onder meer: 'Some of the books go a long way with the definition of a closed curve, open curve, closed regions, and open regions (...) and yet they teach no more geometry than the fact that a straight line drawn in the plane divides the plane in two pieces'.

Al eerder, in 1962, hadden 75 vooraanstaande wiskundigen, onder wie Birkhoff, Courant, Coxeter, Kline, Pollack, Polya en Sawyer onder de titel 'On the Mathematics Curriculum of the High School' een open protestbrief in *The Mathematics Teacher* geplaatst. De belangrijkste bezwaren van deze groep, waaronder de bekende didactici Polya en Sawyer, was het vergaande formalisme van de New Math, het voorbijgaan aan het genetische principe, onderschatting van het belang van het intuïtieve zoekproces, het overboord zetten van oude inhouden en waarden en het ontbreken van samenhang met de realiteit en de toepasbaarheid: 'to introduce new concepts without a sufficient background of concrete facts, to introduce unifying concepts where there is no experience to unify, or to harp on the introduced concepts without concrete applications which would challenge the students, is worse than useless' (...) 'Mathematics separated from the other sciences loses one of its most important sources of interest and motivation'[5] (*The Mathematics Teacher*, 1962, pp. 191-195).

Morris Kline had de wiskundeleraren al direct via een artikel in de *Mathematics Teacher* gewaarschuwd tegen dit modernisme (Kline, 1958). Maar publieke aandacht kreeg Kline als bestrijder van de New Math pas met zijn boek uit 1973: *Why Johnny can't add*, waarin hij het principe van de aanbieding van wiskunde aan de leerlingen als een kant en klaar axiomatisch systeem kritiseert. Ten eerste wees hij op de ontkoppeling van de realiteit, met name van de fysica, waaraan de wiskunde haar ontstaan dankt: het historisch-genetische principe. En als tweede belangrijk bezwaar noemde hij het ontbreken van een goede didactiek in de New Math. Met name achtte hij het van belang dat de leerlingen de gelegenheid geboden werd zelf wiskundige stellingen, op welk niveau dan ook, te kunnen ontdekken c.q. te construeren: het psychologisch-genetische principe. Een argument dat wij in de loop van de historie al vaker zijn tegengekomen. Maar het was toen eigenlijk al te laat om het tij nog te keren, want het wiskundeonderwijs was zowel in Amerika als in Europa in de greep van modernisering geraakt.

Moderne wiskunde en het basisonderwijs in Europa

Dat er niettemin aandacht aan de vernieuwing van het reken- en wiskundeonderwijs op de basisschool besteed diende te worden, werd ook in Royaumont erkend. Er waren op die conferentie echter geen specialisten op dit gebied aanwezig. De vernieuwingspogingen voor deze tak van onderwijs voltrokken zich langs andere paden dan die voor het voortgezet onderwijs. De uitgangspunten waren, althans voor de Eu-

ropese situatie, niet zozeer gelegen in de wiskunde zelf, maar werden, zoals reeds gezegd, vooral geïnstigeerd door het werk van een aantal vooraanstaande leer- en ontwikkelingspsychologen. De voorgestane veranderingen in het voortgezette wiskundeonderwijs vervulden daarbij een katalyserende rol. Het idee van een longitudinale leerplanontwikkeling voor vijf tot achttien jaar sprak alle betrokkenen aan.

In Engeland was het Dienes, die aan het eind van de jaren vijftig in het 'Leicestershire Mathematics Project' experimenten uitvoerde met tienjarige kinderen, die sterk de aandacht trokken.[6] Het werk van Piaget op het gebied van de ontwikkeling van de intelligentie, het getalbegrip, het logisch redeneren, de taal, het ruimtebegrip, het meet- en meetkundige inzicht bij jonge kinderen, kreeg door de verschillende leerplanontwikkelingsprojecten ook betekenis voor de vernieuwingen in het basisonderwijs.

Dienes kreeg via zijn voorzitterschap van de International Study Group for Mathematics Learning (ISGML) de mogelijkheid enige rapporten voor het basisonderwijs op te stellen voor de Unesco. In 1966 kwam hiervan de laatste versie *Mathematics in primary education* uit, ter gelegenheid van de Unesco-conferentie te Hamburg. Deelnemers aan deze conferentie waren er uit de Verenigde Staten, Hongarije, Zweden, West-Duitsland, Rusland, Frankrijk, Groot Brittannië, Denemarken en Ierland. In dit rapport is ook een verslag van de experimenten in België door Fréderique Papy opgenomen. Opvallend is de grote aandacht voor de psychologische aspecten, niet alleen van Piaget en Dienes, maar ook van Bruner, Bartlett, Suppes, Skemp, Hull en Brownell.

Toen de Belg Valeer van Achter in 1969 voor de Vlaamse en Nederlandse situatie een overzicht gaf in *De modernisering van het rekenonderwijs op de basisschool*, baseerde hij zich vrijwel geheel op dit rapport en op het verslag van de Hamburgconferentie, dat opgesteld was door J.D. Williams.

Frankrijk en Engeland

In Frankrijk was sinds 1964 al een opmerkelijke hervorming voor het basisonderwijs op gang gekomen, die een ware omwenteling betekend moet hebben. Dit programma, aldus Nicole Picard, was gebaseerd op de ideeën van Dienes, Piaget en de Belg Papy (Williams, 1967, pp. 72-78). Zou men de hoofddoelstelling van dit puur structuralistische programma met één term moeten omschrijven, dan is dat in de woorden van Picard, dat men de kinderen een 'outil de penser' aan de hand wilde doen: 'een intelligent instrumenteel denken dat bruikbaar is in zeer uiteenlopende situaties', zoals zij in 1969 stelde in een vraaggesprek met Valeer van Achter. De Franse aanpak zou later in Nederland op bescheiden schaal ingang vinden via de methode *Denken en Rekenen*, later voortgezet als *Getal in Beeld*.

In dezelfde tijd was in Engeland het Nuffield-project gestart, dat niet alleen gebruik maakte van de onderwerpen uit het structuralisme, maar ook van meer empi-

rische activiteiten in verband met meten, meetkunde en grafieken. De methode, waarvan de ontwikkeling onder leiding stond van G. Matthews, moest de range van vijf tot dertien jaar bedienen. Heel pregnant was in dit programma het didactische 'learning by doing' principe, vooral in concreet-handelende zin. Niet voor niets had het Nuffield-project het oude Chinese spreekwoord 'I hear and I forget, I see and I remember, I do and I understand' als motto gekozen. Een ander, meer pedagogisch uitgangspunt, betrof het uitgaan van de wereld van het kind. Door deze accenten onderscheidde de Nuffield-aanpak zich, ondanks de omarming van de verzamelingenleer en de formele logica, van het Franse structuralisme.

Alles nieuw

Het aloude rekenonderwijs met zijn hechte traditie kwam in de jaren zestig in Europa, vooral in Frankrijk, België, West-Duitsland, Engeland en Zweden, onder invloed van de genoemde ontwikkelingen onder fikse druk te staan: *alles moest nieuw*. Weliswaar werd in de verschillende moderne aanpakken nog wel gesproken van het belang van de reken-basisvaardigheden, maar men had voor het meer routinematige rekenen alle hoop gesteld op de electronische (zak)rekenmachines.

'In primary school mathematics education we are on the threshold of some remarkable changes – both in what is to be learnt and in how this learning is to take place.' Zo luidt de eerste zin van het ISGML-rapport *Mathematics in Primary Education* uit 1966 van Dienes. Groot was het optimisme waarmee de toekomst door de vernieuwers van de jaren zestig tegemoet getreden werd. Dat het rekenaspect van de basisschool een veel minder belangrijke rol zou kunnen gaan spelen, werd ondersteund door het feit dat de psychologen aangetoond hadden dat kinderen op veel jongere leeftijd dan men tot toen had gedacht in staat zijn eenvoudige mathematische redeneringen te kunnen opzetten en uitvoeren. Vooral dit laatste was een veelgebruikt argument om een meer wiskundige attitude te ontwikkelen: 'It is now generally regarded as less important that children should develop to a high degree the various skills of calculations. Greater emphasis is now given to the provision of what might be called 'mathematical literacy' – that is, the capacity to interpret and interrelate mathematical ideas over a wide range of fields' (Williams, 1967, p. 25).

Vandaag de dag kunnen we ons in gemoede afvragen of dat optimisme, met name wat betreft het geringe belang dat nog aan het rekenen werd gehecht, niet wat te hoog gesteld was. Er werd in de genoemde ontwikkelingen geen of ternauwernood aandacht besteed aan de achterblijvers op het gebied van het rekenen. Als belangrijkste doelstelling van het reken- en wiskundeonderwijs werd het ontwikkelen van een wiskundige attitude – 'mathematical literacy', 'outil de penser'– gesteld; een algemeen procesdoel, dat we in de loop van de historie bij iedere vernieuwing steeds weer opnieuw geformuleerd zien. Merkwaardig was vooral dat de uitwerking van de structuralistische aanpak in feite haaks stond op het argument van de techno-

logische vooruitgang, want juist in het structuralisme was de toepasbaarheid ver te zoeken. Er waren dus redenen te over om in Nederland niet al te hard van stapel te lopen.

New Math en de reactie in het Nederlandse basisonderwijs

De vernieuwingen van de jaren zestig richtten zich in Nederland vooral op het voortgezet onderwijs en aanvankelijk ook nog hoofdzakelijk op het VHMO, zoals reeds in B4 beschreven.

Binnen het rekenonderwijs was men nauwelijks bekend met het verschijnsel van de New Math, waarover de informatie voornamelijk geschiedde via *Euclides*, het vakblad van de wiskundeleraren van het VHMO. Wel bestond van oudsher bij de reken- en wiskundedocenten van de kweekscholen belangstelling voor de vernieuwingen. Uit deze kring zou dan ook de vernieuwing van het rekenonderwijs in Nederland aangezet worden. Pas tegen het eind van de jaren zestig werd het basisonderwijs in zekere zin op de hoogte gesteld van de internationale vernieuwingen.[7]

In 1968 verscheen een brochure onder de titel *Moderne wiskunde en het basisonderwijs* van Van Gelder, Wijdeveld, Goffree en Krooshof. Hierin staat een kort overzicht van de internationale en nationale ontwikkelingen in het voortgezet onderwijs. Van Gelder stelde zich op het standpunt dat er een nieuw leerplan moest komen:

> 'De opbouw van een leerplan voor modern rekenen in de basisschool zal mijns inziens de volgende aspecten moeten verenigen: de structurele opbouw van het voorbereidend rekenen, de denk-psychologische onderzoekingen over het gebruik van oplossingsmethoden, de logisch-mathematische structuren en de gedifferentieerde leersituaties.' (Van Gelder, 1968, p. 16)

Van Gelder wilde dus uitgaan van de bestaande verworvenheden, maar stelde ook een zeker vertrouwen in de opvattingen van het structuralistisch modernisme. Overigens wel onder het voorbehoud dat er onderzoek gedaan zou worden en dat er voorwaarden voor opleiding en nascholing geschapen zouden worden.[8] Het grootste deel van deze publicatie beslaat een stuk van Wijdeveld en Goffree met informatie over het buitenland, waarbij vooral het structuuraspect van de New Math (Dienes) en het empiristische aspect van het Nuffield-project worden belicht. Dit artikel wijst op een zekere sympathie voor de 'moderne wiskunde'. Het stuk van Krooshof is een regelrecht pleidooi voor de structuralistische richting. Hij ging daarbij uit van een uitspraak van Edith Biggs: 'Wiskunde is het ontdekken van relaties.' [9]

Een andere aanwijzing voor de interesse die er in de wereld van de Pedagogische Academies (PA) voor de New Math bestond, vinden we in het septembernummer van 1969 van *Onderwijs en Opvoeding*. Dit themanummer, onder coördinatie van Goffree tot stand gekomen, bevat elf bijdragen die belangstelling wilden wekken voor de internationale ontwikkelingen in het reken-wiskundeonderwijs op de basis-

school.[10]

Ook trachtten de uitgeverijen voor het basisonderwijs in te spelen op het verschijnsel van de New Math. In B4 wezen we al op een aantal vertalingen/bewerkingen van buitenlandse methoden, die eind jaren zestig, begin jaren zeventig op de markt kwamen: *Denken en Rekenen*, *Wiskunde op de basisschool*, *Ontdek het Zelf* en *Elementair Wiskundig Rekenen*. Het gebruik van deze methoden met een marktaandeel van 1 à 2 procent was klein (De Jong, 1986). Het feit dat Freudenthal zich aanvankelijk als adviseur had willen verbinden aan de methode *Elementair Wiskundig Rekenen* toont niet alleen aan hoe onduidelijk het in die tijd met het standpunt over de New Math in ons land gesteld was, maar ook dat Freudenthal aanvankelijk niet zo anti-New Math was.[11]

In oktober 1971 verscheen in *Euclides* een artikel over wiskunde op de basisschool, dat weliswaar een pleidooi was voor een voorzichtige aanpak in Nederland, maar dat door de gegeven inhoudelijke verwijzingen toch ook een voorkeur vertoonde voor de structuralistische New Math-richting (Goffree e.a., 1971). Al met al bestond er in de jaren zestig onder de voortrekkers een serieuze interesse voor de New Math. Toch zouden de ontwikkelingen in ons land een geheel andere wending nemen.

Het ontstaan van Wiskobas

De instelling van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) vond plaats in 1961 (zie B4). Wijdeveld, een van de medewerkers van het eerste uur, zag al spoedig in dat, indien een longitudinale leerplanontwikkeling kans van slagen wilde hebben, hier ook het basisonderwijs in betrokken diende te worden. Samen met Brandenburg, medewerker van het pedagogisch-didactisch instituut te Groningen en Goffree, die toen kweekschoolleraar in Hengelo was, werd in 1967 een werkgroep 'modernisering rekenonderwijs' gevormd, die het *Rapport inzake het leervak rekenen in het basisonderwijs* samenstelde. In 1968 werd dit gevolgd door het *Rapport over de wenselijkheid en noodzakelijkheid van wiskunde op de basisschool*. In de zomer van 1968 werd een *10-jarenplan* opgesteld, dat een totale innovatie van het rekenonderwijs wilde bewerkstelligen door heroriëntering van de onderwijzers, leerplanherziening voor de PA en implementatie van de basisschool met behulp van onder meer de televisie (NOT en Teleac). In dit alles was een centrale plaats toegedacht aan de PA's.

Op 28 november 1968 werd een groep van vijftien kweekschool-rekendidactici en vijftien pedagogiekleraren door de CMLW, waarvan Van der Blij toen voorzitter was, ontvangen. Deze datum wordt als ontstaansdatum van de 'Wiskobas-beweging' opgevat. Deze groep van werkers van het eerste uur begon al direct met het opzetten van heroriënteringscursussen voor onderwijzers, waarbij uitgegaan werd van de moderne wiskunde. Een reeks practica op eigen niveau kwam tot stand over verzamelingenleer, logica, relaties, groepen, kansrekening, maar ook meetkundige

onderwerpen als randornamenten en mozaïeken. In de zomer van 1968 werd door een aantal didactici een studiereis naar Edinburgh in Schotland gemaakt.

In 1969 vond de eerste studieconferentie voor leraren wiskunde van de PA's in het Troelstra-oord in Egmond aan Zee plaats, waarbij de eerder genoemde wiskundepractica centraal stonden als leerstof voor de PA en de geplande heroriëntering voor onderwijzers. Deze conferentie, waar ook enkele buitenlandse gasten acte de présence gaven, moet een nogal hectisch karakter gehad hebben, maar ook zeer inspirerend geweest zijn. Uit een onder de deelnemers gehouden enquête bleek dat slechts 1 van de 96 ondervraagden meende dat de toen vigerende rekenstof voor de lagere school zonder meer gehandhaafd diende te blijven; 49 respondenten waren van mening dat de leerstof radicaal gewijzigd moest worden in de richting van de New Math, terwijl 44 respondenten de mening waren toegedaan dat de toen vigerende rekenleerstof gehandhaafd kon worden, maar dat van een aantal elementen van de moderne schoolwiskunde, zoals verzamelingen, gebruik gemaakt zou kunnen worden tot verbetering van de didactiek (twee respondenten hadden geen mening). In ieder geval was duidelijk dat eigenlijk niemand tevreden was met de bestaande situatie; dat er nogal grote verwachtingen van de New Math bestonden, maar ook dat toch bijna de helft van de ondervraagden een wat voorzichtiger vernieuwingsaanpak voorstond.[12]

In 1970 ontstond een eerste oriëntatieplan voor een nieuw basisschoolprogramma. Via een conferentie, ook in 1970, werd de inspectie bij de plannen betrokken, waarbij als belangrijkste uitkomst naar voren kwam dat in ieder geval *niet zonder meer met de New Math* in zee gegaan moest worden.

Toen staatssecretaris Grosheide, vooruitlopende op de resultaten van de zogenoemde COLO-plannen (Commissie Organisatie Leerplan Ontwikkeling), waardoor de leerplanontwikkeling in Nederland later geïnstitutionaliseerd zou worden, op 26 januari 1971 erin toestemde dat de CMLW een eigen bureau kon starten, is het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs (IOWO) als zelfstandig instituut van de Rijksuniversiteit van Utrecht geboren. Freudenthal werd hoogleraar-directeur en Wijdeveld algemeen directeur. Er kwamen afdelingen voor het kleuter- en basisonderwijs (Wiskobas), het voortgezet onderwijs (Wiskivon), het lager- en middelbaar beroepsonderwijs, het hoger beroepsonderwijs en voor speciale onderwerpen, zoals computerkunde en informatica.[13]

Werkwijze van het Wiskobas-team

Er waren voor Wiskobas twaalf formatieplaatsen, verdeeld over de drie hoofdaspecten van het ontwikkelingswerk: de kleuter- en lagere school, de opleiding (PA) en de heroriëntering van de onderwijzers (HO).[14] De periode 1971-1973 werd besteed aan *exploratie* van het gebied met als doel: het maken van een model voor een schoolwerkplan rekenen-wiskunde voor de lagere school, dat in 1975 gepresenteerd moest

worden, hetgeen ook geëffectueerd is. De Dr. Willem Dreesschool te Arnhem was al in 1970 als ontwerpschool aangetrokken. Hier werden nieuwe onderwijsideeën in de praktijk uitgeprobeerd.[15] De *heroriënteringscursussen*, die nog een voorlopig karakter hadden en in dienst stonden van de leerplanontwikkeling, startten direct al in het cursusjaar 1971-1972. Ook werd van meet af aan ontwikkeld voor het *leerplan voor de PA*.[16] Tegelijkertijd ontstond de theoretische onderbouwing door middel van een onderzoek over de doelstellingen van het reken-wiskundeonderwijs.[17] Tijdens de zogenoemde *integratiefase* (1973-1975) vond de samenstelling van het integratieplan van de Dreesschool plaats. Daarna, van 1975 tot eind 1980, volgden nadere uitwerkingen, toen de periode van de *fundamentele opbouw* genoemd. Deze zijn voornamelijk neergelegd in de zogenoemde *leerplanpublikaties* (leerplandelen) van het *Wiskobas Bulletin*. Deze uitwerkingen zijn slechts gedeeltelijk voltooid.

Er werd dus gebruik gemaakt van een simultane werkwijze van ontwikkelen, onderzoeken, opleiden en nascholen. Door het beleggen van conferenties, scholings- en nascholingsbijeenkomsten, maar vooral door middel van het tijdschrift *Wiskobas Bulletin* kon het veld – de verzorgingsinstellingen, de opleidingen en de scholen – bij de ontwikkelingen betrokken blijven. Nadruk lag bij het IOWO op het aspect van de longitudinaliteit van het totale reken-wiskundeonderwijs voor leerlingen van vier tot achttien jaar.

Deze aanpak was een voorbeeld van 'onderwijsontwikkeling' in de meest brede zin. Het meest kenmerkende van zowel het leerplanontwikkelingswerk als het uiteindelijke leerplan voor de PA als de cursussen voor de heroriëntering, maar ook voor bijna alle wetenschappelijk onderzoek, dat later uit deze groep is voortgekomen, is dat het werk aan de basis, het praktische werk met de kinderen, steeds als bron heeft gediend. Dat het Wiskobas-werk en het meeste IOWO-werk op 1 januari 1981 al beëindigd moest worden, laten we hier verder buiten beschouwing. Er hebben zich gedurende de tijdspanne van ruim negen jaar dat het Wiskobas-team aan zijn taakstelling kon werken bijna geen personeelswijzigingen voorgedaan. Freudenthal heeft van meet af aan in praktische zin met het team meegedraaid.[18]

Uitgangspunten van Wiskobas

Wiskobas wilde – in weerwil van haar naam – niet zonder meer 'wiskunde op de basisschool' introduceren, maar koos voor een voorzichtige innovatiestrategie. Als voorwaarde voor een succesvolle innovatie werd uitgegaan van de noodzaak van deskundigheid op alle niveaus: die van de onderwijzers (heroriëntering), herziening van het leerplan van de PA en deskundigheidsverhoging van de opleiders en deskundigheidsbevordering van schoolbegeleiders. Tevens moest van meet af aan de mogelijkheid tot zelfstandig of met anderen uitgevoerd (theoretisch) onderzoek bevorderd worden. Rekening houdend met de traditionele verworvenheden en waarden van het bestaande rekenonderwijs, werd afgezien van het overnemen, vertalen of be-

werken van enige buitenlandse methode. Dit ondanks de activiteiten die een aantal grote uitgeverijen reeds ontwikkeld hadden als voorschot op een mogelijk succes van de New Math. In het leerplanontwikkelingsproces dienden de ervaringen en stemmen van alle betrokkenen, in het bijzonder die van de onderwijsgevenden, betrokken te worden. Kortom: geen leerplanontwikkeling vanachter het bureau, maar ontwikkelingswerk, gevoed vanuit de praktijk van het onderwijs; geen dictaat van nieuwe leerplannen van bovenaf, maar een democratische procedure tot consensusvorming. Niet alleen diende de leerstof in studie en heroverweging genomen te worden, maar vooral leek er behoefte aan nieuwe didactische inzichten, waarbij afstand genomen zou kunnen worden van het oude mechanistische rekenen ten gunste van een meer inzichtelijk rekenen. Daarbij werden ook argumenten van de veranderende maatschappij gehanteerd. Het bevorderen van een 'wiskundige attitude' stond voor alle betrokkenen voorop. Hoewel zeker niet aan al deze voorwaarden optimaal voldaan kon worden, kan achteraf gesteld worden dat dit geheel van uitgangspunten een voor die tijd verstandig vertrekpunt is geweest en een gunstige uitwerking heeft gehad op het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs.

Hoe heeft de geschiedenis zich nu voor het domein meetkunde in dit alles ontrold? Dat is de vraag waarvoor wij in dit deel C staan. De verschillende richtingen in de New Math zouden dit aspect voor het basisonderwijs ieder op hun eigen manier weer onder de aandacht brengen. Voor de Nederlandse situatie, waar meetkunde geen plaats had in het basisonderwijs, schiep dit de mogelijkheid tot een geheel nieuwe doordenking (zie B4). Voordat we die geschiedenis bespreken, volgt eerst nog een kort overzicht van de meetkundeprogramma's in het basisonderwijs in West-Duitsland (BRD), België (Vlaanderen), Frankrijk en Groot-Brittannië.

Meetkunde op de basisschool in de omringende landen vóór de New Math

Aan de hand van de officiële richtlijnen van 1955 voor de bondsstaat *Nordrhein-Westfalen* kunnen we een indruk krijgen van het vak meetkunde voor de Grundschule, i.e. voor kinderen van zes tot tien jaar. In de *Richtlinien und Stoffpläne für die Volksschule* uit 1963 treffen we onder de globale omschrijvingen voor de bekende basisschoolvakken ook die voor 'Raumlehre' aan: 'Der Raumlehreunterricht bildet die Raumanschauung, pflegt das raumkundliche Denken und befähigt den Schüler, die elementaren Raum- und Flächenformen in ihrer Gesetzmäßigkeit zu erkennen, zeichnerisch und werklich darzustellen, zu messen und in möglichst lebensnahen Aufgaben selbstständig und sicher zu berechnen.' In de toelichting wordt beschreven dat het onderwijs in de 'Raumlehre' dient voor te bereiden op de voortzetting in het vijfde en zesde schooljaar (elf- tot twaalfjarigen), waar een meer 'planmäßige Raumunterricht' begint. Uitdrukkelijk wordt ook het meetkundige tekenen, zowel het vrije schetsen als het ruimtelijke tekenen (Entwurf, Projektions- und Werkzeichnen) als vervolg aanbevolen. Het ging dus om een praktisch, toegepast meetkunde-

onderwijs. Deze omschrijving sluit aan bij de traditie die we aan het begin van de twintigste eeuw in Duitsland al opmerkten voor het vak 'Formenlehre'.[19]

De officiële programmarichtlijnen van de inspectie van de jaren vijftig en zestig in *Frankrijk* behelsden voor de lagere school (zes- tot twaalfjarigen) 'calcul arithmétique et géométrie'. Hoewel de omschrijvingen heel summier zijn, werden naast het rekenen en het meten (vooral het metriek stelsel) vanaf het laagste niveau meetkundige activiteiten en doelen beschreven. De stof was traditioneel (driehoeken, vierhoeken, cirkel, hoeken, kubus, ruimtelijke lichamen), maar informeel beschreven en er werd met aanschouwelijke en concreet-praktische oefeningen (vouwen, knippen) begonnen. Gebruik van liniaal, passer en gradenboog, toegespitst op technisch tekenen, behoorde tot het programma. Aan het einde van de cursus kwamen eenvoudige bouwtekeningen aan de orde. Samenvattend: een heel praktisch programma in de trant van het Franse meetkundige rekenen en tekenen van de negentiende eeuw.[20]

In de jaren vijftig was er in *Groot-Brittannië* nauwelijks interesse voor meetkunde op de basisschool. Er was een 'national curriculum', maar dit werd overschaduwd door het zogenoemde '11-plus examination', dat diende als selectie voor de Grammar en Secondary Modern Schools. Deze examens werden beheerst door rekenen, taal en een intelligentietest. Alleen in de intelligentietest kwamen opgaven voor die iets van meetkunde bevatten. De schoolboeken waren hoofdzakelijk rekenkundig gekleurd. 'There was some measurement, but nothing which could be described as geometry. Of course, nothing was compulsory.'[21]

Tot nog geen halve eeuw geleden heeft in *België (Vlaanderen)* meetkunde in de lagere school een plaats behouden onder de naam 'vormleer'. In *Leerplan en Leidraad* van 1958 stond voor alle leerjaren vormleer als apart onderdeel van het rekenen op het programma. Allereerst dienden de elementaire vlak-meetkundige figuren onderzocht te worden aan de realiteit (het 'milieu') door middel van concrete activiteiten (vouwen, knippen, tekenen,...). Pas in het vierde leerjaar kwamen de ruimtelijke figuren ter sprake. De einddoelen waren gespecificeerd in het berekenen van oppervlaktes van vlakke figuren door middel van verdeling in eenvoudiger figuren, het meten en construeren van hoeken, de cirkelomtrek, het maken van bouwplaten van de kubus, balk, prisma en cilinder en het werken met schaal. Het beschreven programma vertoonde een sterke overeenkomst met de vormleerboeken, die aan het einde van het Versluys-tijdperk zijn beschreven (zie A13).[22]

In de ons omringende landen was dus in ieder geval nog iets overgebleven van de praktische vormleer van de negentiende eeuw, in Nederland werden de boeken voor de lagere school volledig beheerst door het rekenen.

C2 De meetkunde van Wiskobas

Al enige malen is in het voorgaande vooruitgewezen naar de omslag in de opvattingen over het Nederlandse meetkundeonderwijs in de jaren zeventig. Het IOWO, waarvan we het ontstaan in C1 beschreven hebben, heeft hierin een cruciale rol gespeeld. Voor het eerst kon er op professionele wijze gewerkt gaan worden aan een fundamentele leerplanherziening. Een aantal voortrekkers van de jaren zestig kreeg een plaats in dit instituut. Freudenthal, die toen al 65 was, onttrok zich aan zijn 'zuivere wiskunde'-taken, werd hoogleraar-directeur van het IOWO en ging zich meer en meer met het totale wiskundeonderwijs bezighouden. Hierdoor werd enerzijds de band met het verleden niet afgesneden, anderzijds ontstond ook ruimte voor nieuwe, vrije exploraties. De tijd was rijp om nieuwe wegen voor het rekenonderwijs op de lagere school in te slaan en daarbij kreeg ook de meetkunde na tachtig jaar een nieuwe kans. Onder deze optimale omstandigheden kon een werkelijk nieuwe opbouw gestart worden. In dit decennium is de basis gelegd voor de realistische meetkunde.

Tijdens de ontwikkeling van dit nieuwe domein werd deze term niet gebruikt, er werd eenvoudig van meetkunde gesproken. Maar wij willen toch in het volgende over realistische meetkunde en realistisch meetkundeonderwijs spreken, omdat deze termen het beste de aard van de nieuwe opvattingen weerspiegelen. Het gaat namelijk vooral om meetkundige verschijnselen zoals die zich in de realiteit voordoen. Voor het voortgezet onderwijs werd in de tweede helft van de jaren zeventig voortgebouwd op deze nieuwe opvattingen, maar daar werd toen de term 'kijkmeetkunde' gebezigd.

Van meet af aan zijn vrijwel alle ontwerpen van het Wiskobas-project in en met de praktijk op de ontwerpschool in Arnhem ontwikkeld. Voor meetkunde is verder onderzoek gedaan op de Jozefschool in Hilversum en op een school in Waddenoyen.

Over het ontstaan van de realistische meetkunde voor leerlingen van vier tot twaalf jaar gaat nu dit hoofdstuk, dat we voor de overzichtelijkheid hebben opgedeeld in de volgende vier paragrafen:

C2.1: Meetkundige exploratie van Wiskobas (1971-1973)
In deze periode staat Wiskobas nog onder zekere invloed van buitenlandse ontwikkelingen. Het accent van het ontwikkelwerk ligt vooral op het rekenen. Wel worden via de heroriënteringscursussen de meetkundige onderwerpen 'stadsplan' en 'spijkerbord' ontwikkeld, waarvoor de inspiratie in oorsprong uit het buitenland kwam.

C2.2: De realistische meetkunde van Wiskobas (1973-1975)
Plotseling ontstaat via het project Waterland een totaal andere visie op meetkunde. We zien voor het eerst hoe de realiteit (concreet of gedacht) als bron voor nieuwe ontwerpen gebruikt kan worden. In deze paragraaf beschrijven we de eruptie van

ideeën paradigmatisch aan het project Waterland.

C2.3: Opvattingen over realistisch meetkundeonderwijs (1975)
Een nieuw vak vereist een verantwoording. Hoe moest voor dit nieuwe vak een achterliggende visie opgesteld worden? Wat was het kenmerkende? Waartoe diende het? Kon een longitudinale leerlijn opgesteld worden? Dit soort vragen kwamen niet alleen bij de ontwerpers zelf op, maar werden natuurlijk ook door de leraren in de praktijk gesteld. Freudenthal pleitte voor een heel ruime opvatting van het vak, die door de leerplanontwikkelaars echter niet in een conreet werkplan gerealiseerd kon worden.

C2.4: Meetkunde in het kleuteronderwijs (1976-1983)
Omdat het werk voor het kleuteronderwijs bij Wiskobas pas later op gang kwam, werd dit geënt op het ontwikkelwerk dat al voor de lagere school was gedaan. Dit alles kon echter niet meer in een totaalplan ondergebracht worden. Ten eerste vanwege de afbouw van het IOWO. Ten tweede, omdat de politiek en het beleid toen al streefden naar een nieuwe basisschool, waarin geen plaats meer was voor een zelfstandige kleutergroep en een bijbehorende opleiding.

C2.1 Meetkundige exploratie van Wiskobas (1971-1973)

Uitgangssituatie en planning van het Wiskobas-project

De ontwikkeling van het domein meetkunde voor de basisschool kan niet los gezien worden van het totale ontwikkelingswerk van het Wiskobas-project. Voor het lager onderwijs wilde Wiskobas een eigen weg gaan. Om dit duidelijk te maken onderscheidde Treffers toen globaal drie nieuwe richtingen:

'– de *mathematisch-arithmetische richting* (grote nadruk op het getalsmatige aspect, vroegtijdige introductie van verzamelingen, gebruik van MAB-materiaal, nadruk op kale sommen en drill, weinig toepassingen en geen samenhang met de realiteit)
– de *mathematisch-structurele richting* (nadruk op mathematische structuren, logica, talstelsels, waarschijnlijkheidsrekening en transformatiemeetkunde; weinig samenhang met de realiteit)
– de *mathematisch-empirische richting* (aanknopingspunten in de realiteit via levensechte situaties en experimenten, nieuwe elementen als functies, grafieken, meten, meetkunde en statistiek).'

Daarnaast werd gesproken van het *traditionele* rekenonderwijs en het *vernieuwde* rekenonderwijs, waarbij met de laatste richting op een meer toepassingsgericht rekenonderwijs gedoeld werd. Wiskobas wilde de ontwikkeling met de nodige voorzichtigheid en zorg laten plaatsvinden. Aan de scholen in het land werd geadviseerd niet op 'moderne methoden' over te stappen, maar voorlopig uit te blijven gaan van het toen vigerende rekenprogramma. Maar tevens werd aanbevolen heroriënteringscursussen te volgen en het rekenonderwijs te 'verlevendigen' via nieuwe onderwerpen en werkwijzen. Daar hoorden ook meetkundige onderwerpen bij.

Handboek van het Kohnstamm Instituut

Al voor de start van het Wiskobas-project was van 1965 tot 1972 op het Kohnstamm Instituut te Amsterdam aan een 'modern' leerplan gewerkt. Als opbrengst van dit door SVO gefinancierde project is het *Handboek voor het moderne rekenonderwijs in de basisschool* uitgegeven. In het zevende deel: 'Inleiding in de meetkunde' worden de volgende meetkundige onderwerpen genoemd: lijnen, vlakken, ruimtefiguren, symmetrie (Boomsma, 1974).[1] Voor elk onderwerp worden een aantal leerdoelen opgesomd, waarin ook het gewenste gedrag wordt omschreven. Bij elk leerdoel zijn subdoelen van gewenste vaardigheden en kennis aangegeven. De stof is afgeleid uit de traditioneel bekende meetkundige inleidingen, waarbij het leren van begrippen, eigenschappen en enige vaardigheden de kern bepalen. Gebruik van passer, liniaal en gradenboog komen aan de orde. Als toepassing wordt handvaardigheid genoemd. De te doorlopen leerfasen zijn gebaseerd op Bruners leerstadia (enactive, ikonic, symbolic) en worden omschreven als handelen, afbeelden, symboliseren, toepassen. Deze didactiek wordt op een eenvormige wijze bij elk leerdoel voorgeschreven. Een voorbeeld van een subleerdoel zien we in figuur C2.1. Dit document

heeft geen invloed gehad op de Wiskobas-ontwikkelingen, noch op de ontwikkelingen bij het Cito of op methoden.

```
parallellogram
   De leerling kan een parallellogram herkennen in de grensvlakken
   aan objecten en op afbeeldingen van objecten, en benoemen.
   Hij kan door draaisymmetrie laten zien
   • dat de tegenover elkaar liggende zijden twee aan twee gelijk zijn
   • dat de overstaande hoeken gelijk zijn.
   Hij kan de tegenover elkaar liggende zijden herkennen als even-
   wijdige zijden en als zodanig benoemen.
   Hij kan de overstaande hoeken als scherpe, respectievelijk stompe
   hoeken herkennen en benoemen.
   Hij kan een parallellogram tekenen op een ruitjesblaadje al of
   niet op maat.
```

figuur C2.1: Subleerdoel parallellogram (Boomsma, 1974)

In Stroombergs onderzoek naar 'communale rekendoelen' uit 1977 kwam geen meetkunde voor. Er was dus, omdat er in de reguliere schoolboeken geen meetkunde voorkwam, een geheel braakliggend terrein te ontginnen.

Oriëntatiepunten 1 en 2

Toch was aan de start van het Wiskobas-project in 1971 wel een en ander voorafgegaan. We beschreven al de activiteiten van de jaren zestig (zie C1). Zelfs was in 1970 al een ontwerpleerplan opgesteld.[2] Later werd dit intern ook wel het *Eerste Oriëntatiepunt* genoemd. Dit stuk was bedoeld voor de werkgroepen van de leraren wiskunde en pedagogiek van de Pedagogische Academies. Het bevatte een aantal algemene doelstellingen voor het wiskundeonderwijs en een honderdtal meer gespecificeerde doelstellingen. De algemene doelstellingen luidden:

'a Leren adekwaat te reageren in wiskundige situaties in het dagelijks leven
b Leren werken met wiskundige modellen
c Leren van diverse redeneervormen
d Leren gebruiken van wiskundig georiënteerde apparatuur
e Leren beoordelen van resultaten, die met wiskundige methoden zijn verkregen
f Leren doorzien c.q. begrijpen van de betekenis van de wiskunde voor de hedendaagse samenleving
g Het leren verwoorden van een onderzoek van wiskundige methoden
h Leren herkennen van isomorfe structuren
i Leren exploreren en structureren van een ongeordend, kwantitatief veld in de werkelijkheid van het dagelijks leven
j Leren gebruiken van symbolen als namen van concrete of abstracte grootheden
k Leren werken met abstracties
l Verkrijgen van vaardigheid in het gebruik van wiskundige taal
m Verkrijgen van een positieve houding t.o.v. het mathematiseren.'

Deze lijst laat een mengeling van praktische en formele doelen zien, waarbij het praktische aspect – het leren greep te krijgen op de realiteit door middel van wiskunde – overheerste. Het is een herkenbare afspiegeling van de toen structuralistische en empiristische opvattingen over het wiskundeonderwijs. Een aantal van de genoemde doelen (a, b, i en m) zou later ook het totale leerplanontwikkelingswerk van het IOWO gaan kenmerken. We doelen onder meer op termen als 'wiskunde als menselijke activiteit', het 'ontwikkelen van een wiskundige attitude' en 'realistisch wiskundeonderwijs', die vanaf de jaren zeventig werden gebezigd om het IOWO-werk te karakteriseren.

Analyse van de lijst van vakspecifieke doelen bevestigt de invloeden van het structuralisme en het empirisme. Formele logica, verzamelingentaal, relaties en functies, structuren, statistiek en waarschijnlijkheid, computerkunde, getallenleer, maar ook fysische experimenten werden als mogelijkheden voor het basisschoolprogramma genoemd. Ook werd aangegeven dat het niet om een minimumprogramma ging en dat de 'pretentie niet meer (was) dan een beginpunt'. Bezien in het licht van het heden, kunnen we niet anders zeggen dan dat de verwachtingen over de vermogens van de basisschoolleerling – zoals we eerder bij Dienes zagen – zeer hooggespannen waren.

Op basis van dit *Eerste Oriëntatiepunt* werd in augustus 1971 een *Tweede Oriëntatiepunt* opgesteld, dat naast de uit het ontwerpleerplan overgenomen algemene doelen circa 700 doelstellingen als activiteiten omvatte (Treffers, 1971a). Dit overzicht was minder ambitieus en benadrukte net als het voorgaande ontwerpleerplan de noodzaak van een gedegen try-out, van onderzoek, heroriëntering en begeleiding.

De specifieke doelen van het *Tweede Oriëntatiepunt* waren verdeeld over de categorieën verzamelingentaal, relaties, grafieken, coördinaten, meetkunde, tellen, plaatswaarde, optellen, aftrekken, meten, patronen, mathematische spelen, vermenigvuldigen, delen, algoritmiek, structuren, wetten, statistiek en waarschijnlijkheid, logica en redeneren. Deze opsomming alleen al maakt opnieuw de invloed uit de structuralistische en de empiristische hoek duidelijk.

Meetkunde in de ontwerpleerplannen (1970 en 1971)

De niet geoperationaliseerde leer- en lesdoelen in het ontwerpleerplan van 1970 waren opgedeeld in vier niveaus: A (5-6 jaar); B (7-8 jaar); C (9-10 jaar); D (11-12 jaar). De meetkundige activiteiten waren structuralistisch gekleurd:

'A: vormen, spijkerbord, symmetrie, spiegelen, gesloten en open krommen, binnen- en buitengebied, tussenbegrip, lijn en lijnstuk, doolhoven
B: voortzetting van A, transformaties, hoeken, cirkel
C: structuur van de transformaties, vectoren, constructies met passer en liniaal, coördinaten, evenwijdigheid, loodrecht,...
D: deductieve opzet van de transformaties, exploratie van R-3, vectoren in R-3, matrices, topologische begrippen, Pythagoras,...'

Ook het *Tweede Oriëntatiepunt* (Ø-2) vertoonde nog kenmerken van het structuralisme. In dit stuk werd over het 'ontwerpleerplan' opgemerkt dat 'de niveaukeuze wat te hoog was' en dat het 'D-gedeelte voor de basisschool voor de komende (tien?) jaren onhaalbaar' was. De doelstellingen voor meetkunde waren wat afgezwakt:

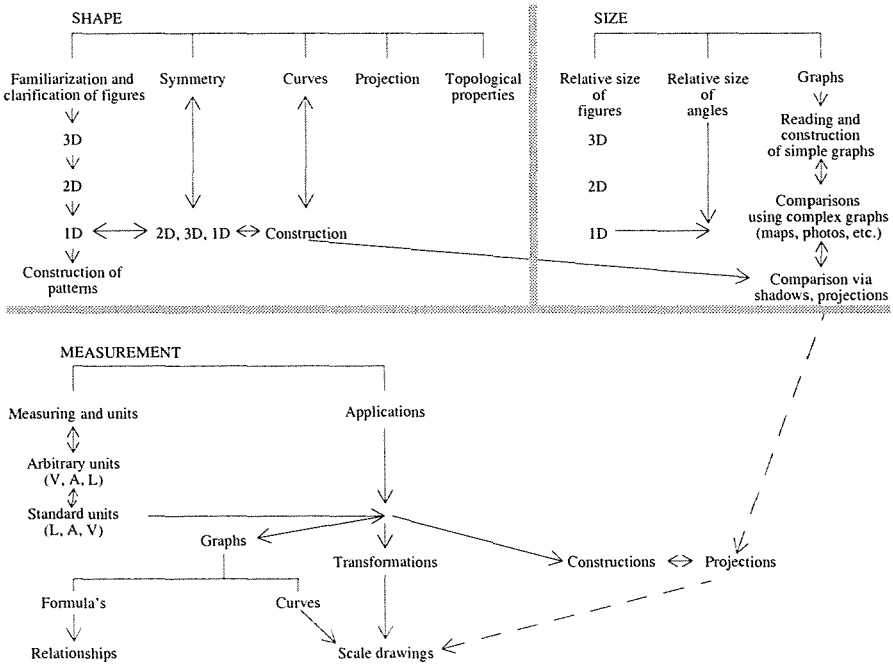
Klas 1 & 2. 14 doelstellingen: maken en herkennen van 2-en 3-dimensionale figuren, vlakvullingen, coördinaten, roostergebruik, gebruik van foto's.
Klas 3 & 4. 23 doelstellingen: meetkundige begrippen (punt, lijn, lijnstuk, ribbe enzovoort), hoeken, klassificeren van figuren, spiegel- en draaisymmetrieën van 2- en 3-D-figuren, cirkel, gebruik van passer en liniaal en doorkijkspiegel, telproblemen met diagonalen van veelhoeken, congruentie van figuren, lijnstukken, cirkelbogen en hoeken.
Klas 5 & 6. 25 doelstellingen: onderzoek van 3-D-figuren (symmetrieën, constructies, telproblemen, inhoud, netwerken), hoeken meten en berekenen, vlakvullingen, samenstellen van spiegelingen, congruentie van 2-D en 3-D-figuren, ellips, vectoren, begrippen als deellijn, rechte hoek, middelpunt en dergelijke.

Een aparte (meetkundige) categorie betrof coördinaten, waarvoor in totaal 36 doelstellingen geformuleerd waren. Opvallend was ook de grote nadruk op het meten met totaal 140 doelstellingen, die impliciet ook veel meetkundige activiteiten omvatten.

Een aantal van de meetkundedoelen was ontleend aan het *K-13 Geometry Report* uit 1967, dat opgesteld was door het Ontario Institute for Studies in Education en waaraan onder meer was meegewerkt door de bekende meetkundige Coxeter. In dit programma werd de meetkunde onderscheiden naar drie hoofdgebieden *Shape*, *Size* and *Measurement*. In *Shape* is de meetkunde van figuren: 2-D en 3-D-figuren, constructies, patronen, transformaties, krommen, topologie. Bij *Size* wordt het getal bij de meetkunde betrokken: schatten van lengte, oppervlakte, inhoud, vergelijken van hoeken, interpretaties van grafieken, alles hoofdzakelijk kwalitatief. Bij *Measurement* komt het getal meer in meet-en rekensituaties aan de orde: formules voor oppervlakte en inhoud, gebruik van grafieken, nauwkeurige constructies en zo meer. In figuur C2.2 zien we een globaal schema van het Ontario-programma voor de 'primary grades'.

Betekenis van de beide Oriëntatiepunten

De doelstellingenlijsten zowel van het *Eerste Oriëntatiepunt* als van het *Tweede Oriëntatiepunt* hebben het onderwijsveld nooit bereikt. Zij geven echter inzicht in de complexe opdracht waarvoor het Wiskobas-project toen stond: enerzijds het ontwikkelen van praktische onderwijsleermaterialen, anderzijds het scheppen van een theoretisch kader. In feite hebben deze beide documenten geen andere betekenis ge-



figuur C2.2: Ontario meetkundeprogramma voor de basisschool (1967)

had dan wat hun titels aangaven: *een oriëntering op mogelijke nieuwe doelen en inhouden van het reken-wiskundeonderwijs.*[3] Het eerste stuk was alleen aan enkele medewerkers bekend. Het tweede is enkele malen binnen het team ter discussie geweest. Voor het ontwikkelingswerk op de ontwerpschool is het *Tweede Oriëntatiepunt* van weinig of geen betekenis geweest. Op deze school moest ook het normale rekenprogramma nog uitgevoerd worden. Wel werden mogelijk nieuwe onderwerpen, zoals verzamelingen en pijlentaal, tijdens de eerste try-out van de heroriënteringscursus op de Dreesschool ter discussie gesteld. Aan het eind van de periode 1971-1973 speelde het *Tweede Oriëntatiepunt* ook intern geen rol meer. Er was afgestapt van het beschrijven van specifieke operationaliseerbare doelen; de wijze van leerplanontwikkeling uit die jaren is terug te vinden in een reeks artikelen onder de naam 'Leerplanologie' in het *Wiskobas Bulletin.*

Ook het genoemde Ontario-programma heeft geen directe invloed op de meetkundeontwerpen van Wiskobas gehad. Wel heeft het aanvankelijk als een zeker richtsnoer op de achtergrond gediend. Waar er in Nederland niets voorhanden was, bood dit in eerste instantie de mogelijkheid voor een zeker theoretisch kader voor het meetkundeonderwijs op de basisschool. Het heeft echter niet lang dienst gedaan.

Eerste meetkundeontwerpen van Wiskobas

Dat er buitenlandse invloeden waren, is zonneklaar. Voor meetkunde was dit al tot uiting gekomen in de experimentele practica voor de heroriëntering voor onderwijzers, die aan het eind van de jaren zestig waren ontworpen en waaronder zich een practicum over transformatiemeetkunde bevond.

Ook in de eerste officiële heroriënteringscursus voor onderwijzers (HO) van Wiskobas in 1971 bevonden zich twee meetkundige onderwerpen, één over roostermeetkunde en één over het spijkerbord.[4] De meetkunde in het Wiskobas-project van de jaren 1971-1973 was geënt op de stof van deze heroriënteringsboeken: *Stadsplan* en *Spijkerbord.*

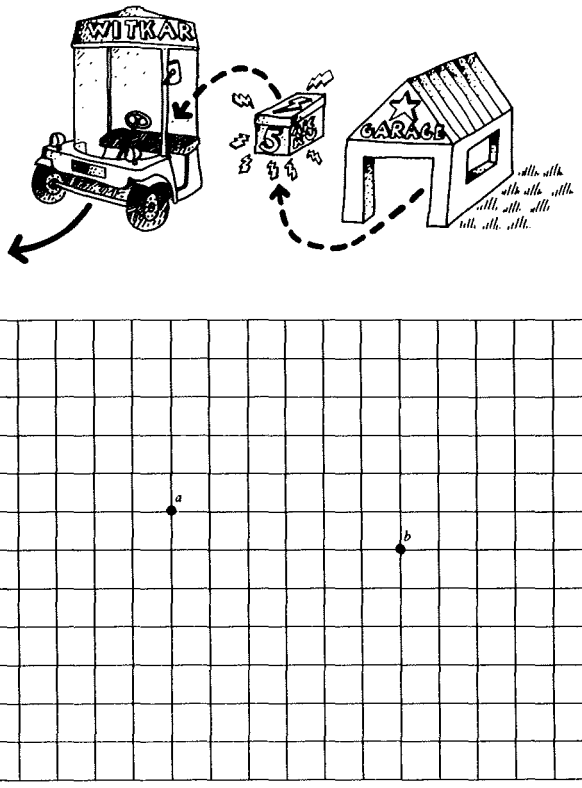
Het *Stadsplan* betrof de zogenoemde roostermeetkunde; een onderwerp dat uit de structuralistische richting kwam en ontleend was aan het werk van Georges en Fréderique Papy. Algemene doelen van dit blok voor de onderwijsgevende behelsden onder meer:

'– kennismaking met wiskunde als een niet-statische wetenschap
– zelf ontdekkingen doen en 'bewijzen' op eigen niveau leveren
– het ontwikkelen van een 'wiskundige houding'
– het belang van isomorfe structuren
– het leren zien van een verticale opbouw vanaf de basisschool
– de toepasbaarheid van wiskunde.'

Er was dus voor een heel ander soort meetkunde dan de traditioneel bekende gekozen.[5] De cursisten konden op inductieve wijze patronen en isomorfieën ontdekken, ze werkten met symmetriëen en met het rooster als model voor toepassingen. Ontdekking en toepassing van de driehoek van Pascal en een aantal combinatorische telproblemen vormden het hoogtepunt.[6]

Voor de basisschool ging het bij het *Stadsplan* in afgeleide zin om het gebruik van coördinaten, om een ruimere opvatting van het afstandsbegrip, het 'tussen'-begrip en eenvoudige redeneerproblemen. Uit dit onderwerp zijn later ontwerpen voor de basisschool ontstaan over taximeetkunde (Van den Brink, 1974), coördinaten (Van Bruggen, 1974), optimaliseringsproblemen in een stadsplanwijk (Ter Heege, 1973) en werkbladen (De Moor, 1976). Een voor de bassisschool bedoelde activiteit zien we in figuur C2.3, waar ingespeeld werd op het idee van de 'witkarren' uit de jaren zestig in Amsterdam.

Dit onderdeel van de meetkunde is tot het eind van de jaren zeventig steeds in de aandacht geweest, vooral via de heroriënteringscursussen. In het programma voor de PA speelde het geen rol. De uiteindelijke doorwerking in de schoolboeken is gering geweest. In de huidige realistische rekenmethoden komt het onderwerp vrijwel niet voor. Wel wordt aandacht besteed aan coördinaten, maar dat zou waarschijnlijk ook wel zonder het stadsplan gebeurd zijn.



figuur C2.3: Een witkar rijdt met een accu, waarmee hij 5 roostereenheden aflegt. Hij wil van a naar b. Teken de punten, waar een garage moet staan (*Wiskobas Bulletin*, 1976)

Een ander meetkundig onderwerp in de eerste HO-cursus van Wiskobas in 1971 betrof het *spijkerbord,* een leermiddel met een empiristisch karakter.[7] Dit onderwerp genoot toen door het 'doe-karakter' veel waardering. Op het niveau van de onderwijzer stond het redeneren en bewijzen centraal; inhoudelijk ging de stof vrij ver: de stelling van Pythagoras, de formule van Pick[8] en irrationale getallen. Voor de basisschoolactiviteiten sloot het, meer dan het stadsplan, aan bij de traditionele meetkundige onderwerpen als omtrek en oppervlakte in samenhang, vlakke (regelmatige) figuren, hoekbegrip, symmetrie, verhoudingen, meetkundige telproblemen en eenvoudige redeneringen. Het ging om 'het bedrijven van wiskunde op kinderlijk nivo, waarbij het oplossen van problemen, het doen van ontdekkingen, het verwoorden van resultaten en het abstraheren (...) een grote rol spelen', toen aangekondigd als een 'verzameling vingeroefeningen' voor een blok 'meetkunde op de basisschool'.[9]

Dit laatste is er nooit gekomen. De betekenis van dit onderwerp voor de toenmalige leerplanontwikkeling moet vooral gezocht worden in de latere ontwikkelingen voor het onderwerp oppervlakte. Het spijkerbord heeft in de Nederlandse basisschool als leermiddel geen invoering gevonden. Wel hebben verschillende ideeën in verband met oppervlakte invloed gehad op de nieuwe methoden. Vooral het toen gelanceerde idee van Streefland om de oppervlakte van onregelmatige figuren (eilanden) te benaderen met behulp van roosters heeft gedurende enige tijd navolging gevonden. Ook kwamen toen (opnieuw) de ideeën naar voren om rechthoekige stippenpatronen te gebruiken voor het inzicht in getalstructuren en rekeneigenschappen, zoals de distributieve wetten. Het 'papieren spijkerbord' (rechthoekig rooster met stippen) is op den duur verdrongen door het vierkantenrooster.

Tussenstandpunt anno 1973

Aan het eind van de HO-cursus 1971-1973 werd de cursisten het handboek *Matematika* uitgereikt. Dit document laat zien dat het Wiskobas-standpunt inzake de vernieuwing in 1973 nog steeds onder zekere invloed stond van de structuralistische en de empiristische richtingen.

> 'Het leerstofprogramma vertoont vanuit de heroriënteringscursus enkele tendensen:
> - de mathematisch-empirische richting krijgt een aangepaste plaats
> - de mathematisch-aritmetische richting wordt kritisch bezien
> - de mathematisch-structurele richting gereserveerd bekeken.
>
> De kritiek geldt vooral het ondoordachte gebruik van verzamelingen en de reserve heeft voornamelijk betrekking op de (on)hanteerbaarheid van een geavanceerd programma in de onderwijspraktijk. Dit neemt echter niet weg dat verschillende leerstofonderdelen uit de laatste twee richtingen bruikbaar zijn, terwijl ook de didactische instelling van vooral de mathematisch-structurele richting navolging verdient.'
> (*Matematika*, p. 24)

Met de onderwerpen ter navolging uit het structuralisme werden onder meer bedoeld: ordenend tellen, ordenen, stadsplanproblemen, pijlentaal, open beweringen en modulo-rekenen. Dit kwam ook tot uiting in het gedeelte dat op het niveau van de onderwijzer de wiskundige inhoud van de cursus weergaf. Ook uit de praktische onderwijsvoorbeelden sprak nog deze trend. Deze waren gepresenteerd als thema's, waarin een achttal uitgangspunten van mathematisch-didactische aard tot uiting dienden te komen. We vinden in dit boek ook de eerste beschrijving van de zogenoemde doelstellingenkubus, welke later werd uitgewerkt tot de theorie van de driedimensionale doelbeschrijvingen (Treffers, 1975 en 1978).[10]

Verder vinden we in *Matematika* summiere opsommingen van leerstofinhouden voor de onder-, midden- en bovenbouw van de toenmalige lagere school. Voor meetkunde werden toen acht aspecten onderscheiden:

'– *Vorm-aspect*: herkennen en benoemen en klassificeren van twee- en driedimensionale figuren, patronen, vlak-en ruimtevullingen, doorsneden, regelmatige figuren, tangram,....
– *Relatie-aspect:* congruentie en gelijkvormigheid (stempels, vergrotingen, verkleiningen), evenwijdigheid, overeenkomsten en verschillen van figuren....
– *Meet-aspect:* omtrek, oppervlakte, inhoud, indirecte meetmethoden
– *Constructie-aspect:* uitslagen, werken met constructiemateriaal, spijkerbord, tekenen op schaal, aanzichten, tekenen van patronen....
– *Reken-aspect:* telproblemen aan ruimtefiguren en hun relaties, telproblemen op roosters (afstandswegen), hoeken vergelijken, gelijkvormigheid
– *Topologisch aspect:* open en gesloten figuren, ruimtelijke oriëntatie (tussenbegrip), doorloopbaarheid, Möbiusband, topologische gelijkwaardigheid, matrices.....
– *Transformatie-aspect:* lijnsymmetrie, spiegelen, draaien, papier vouwen, randversieringen, eigenschappen van translaties, draaiingen en spiegelingen, samenstellen van afbeeldingen (geslotenheid, commutativiteit, associativiteit, eenheidselement, inverse)
– *Taal-aspect:* horizontaal, verticaal, loodrecht, benoemen en beschrijven van figuren, symmetrisch, gelijkvormig, congruent.....'

Bij de genoemde onderwerpen werd in sommige gevallen verwezen naar de HO-cursusboeken *Stadsplan* en *Spijkerbord*, maar in zijn totaliteit was dat zeker voor het niveau van de basisschool nog beperkt. Dit was begrijpelijk, immers er was na twee jaar ontwikkeling ook nog nauwelijks tijd geweest om het leerstofvlak van de meetkunde nader te onderzoeken. De opsomming diende enerzijds als een houvast voor de ontwerpers – *waar moet het naar toe?* – anderzijds als richtlijn voor de onderwijzers – *wat wordt bedoeld?* De onderwijzers moesten zich immers ook iets concreets kunnen voorstellen bij het voor hen nieuwe onderwerp meetkunde.

Vergelijking met de doelstellingen van het *Tweede Oriëntatiepunt* maakt duidelijk dat nog van vrijwel dezelfde leerstofomschrijving uitgegaan werd. De opgesomde onderwerpen waren afkomstig uit het systeem van de wiskunde, waardoor ze geen of nauwelijks een relatie met de realiteit hadden. De invloed van het structuralisme bleef herkenbaar, wat met name tot uiting kwam bij onderwerpen als transformaties en topologie. Toch was de omvang en nadruk op de structuralistische meetkundige elementen van bescheiden omvang in vergelijking met sommige buitenlandse methoden.

Freudenthals 'devil and deep sea'

In 1971 publiceerde Freudenthal in het tijdschrift *Educational Studies in Mathematics* het artikel 'Geometry between the devil and the deep sea'. Hoewel dit stuk niet met het oog op het basisonderwijs geschreven was, worden hierin toch een aantal zaken besproken die voor de ontwikkeling van het totale meetkundeonderwijs in Nederland vanaf 1970 van groot belang zijn geweest.

Allereerst stelt Freudenthal dat meetkunde begint met de verkenning van de fysische ruimte waarin wij leven. Hij sluit daarbij aan bij de opvattingen van Tatiana

Ehrenfest-Afanassjewa. Hij stelt zich onomwonden op het standpunt dat wiskundeonderwijs gebaseerd dient te zijn op de realiteit: 'I espouse the philosophy of teaching mathematics related to reality' (Freudenthal, 1971, p. 420). Hij verwerpt daarmee de deductieve aanpak (voor het voortgezet onderwijs) niet, maar hij pleit voor een didactische opbouw, zoals uitgevoerd in de experimenten van Dina van Hiele-Geldof. Dit leidt tot een tweede standpunt over meetkundeonderwijs, namelijk dat van het principe van 'local organizing' (zie B5). Een derde belangrijke uitspraak is zijn standpunt over de geringe betekenis van vectormeetkunde voor de ontwikkeling van ruimtelijke begrippen. Maar zijn opvatting over meetkunde als een oorspronkelijk fysische wetenschap zou later van groot belang blijken te zijn voor de ontwikkeling van dit voor de basisschool nieuwe vak. De voorbeelden in dit artikel zijn geheel in de trant van mevrouw Ehrenfests *Übungensammlung*. Van een andere orde, maar ook van belang voor het nieuwe vak, zijn de in dit stuk genoemde didactische principes:

- het principe van de geleide herontdekking (reïnvention)
- het principe van de eigen activiteit
- het principe van concreet handelen (vouwen, plakken, knippen...)
- het noodzakelijke nulde niveau van Van Hiele (vrije oriëntatie)
- uitstel van formele deductie
- de 'waarom'-vraag als kern van meetkundige activiteiten
- het belang van lijnsymmetrie
- niet uitgaan van affiene meetkunde.

De 'devil' uit de titel van het artikel is de personificatie van de axiomatisch opgezette meetkundecursussen, waarmee het onderwijs in de meeste landen op twaalfjarige leeftijd begon. 'The deep sea' symboliseert het meetkundige bad waar Freudenthal de leerling in wilde gooien, om hem onder het oog en leiding van een goede badmeester zelf te leren zwemmen.

Dit artikel is in Nederland bekend geworden onder een beperkt aantal didactici, het merendeel van de leraren in het voortgezet onderwijs is het ontgaan. Het tijdstip om het toen in 1971 ook voor de basisschool te gebruiken, was kennelijk nog te vroeg. Meetkunde had toen ook niet de hoogste prioriteit, maar het principe van meetkunde als het leren beheersen van de ruimtelijke realiteit zou bij Wiskobas vanaf 1973 het uitgangspunt worden voor de verdere ontwikkelingen. Ook de ideeën van mevrouw Ehrenfest zouden toen opnieuw betekenis krijgen.

C2.2 De realistische meetkunde van Wiskobas (1973-1975)

Meetkundige revival

In de tweede helft van de jaren vijftig werd er in het Amerikaanse tijdschrift voor de primary school *The Arithmetic Teacher* geen enkele aandacht aan meetkunde geschonken. Tussen 1960 en 1965 verschenen vijf verhandelingen over meetkunde per jaargang, daarna tien, en in de periode 1968-1973 liep dit op tot vijftien artikelen per jaargang. Internationaal gezien steeg in het begin van de jaren zeventig de belangstelling voor meetkunde op de basisschool net zo hard als die voor meetkunde in het voortgezet onderwijs daalde. In de nieuwe buitenlandse reken-wiskundemethoden begon meetkunde een vast onderdeel van het programma voor de basisschool te worden. Er werd op internationale conferenties regelmatig aandacht aan besteed.

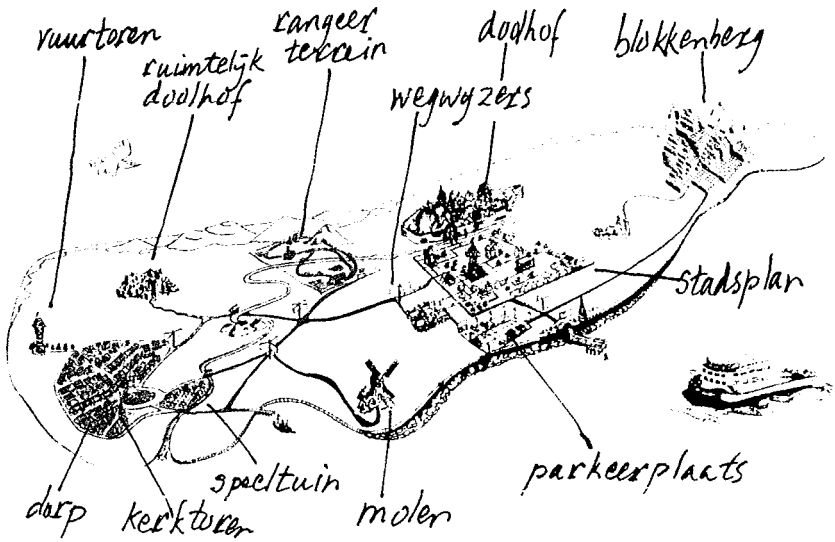
In Nederland begon de Wiskobas-groep in 1973 plotseling aan een vruchtbare tijd van meetkundeontwerpen. De vierde jaargang (1974-75) van het *Wiskobas Bulletin* bestond voor ongeveer de helft uit meetkundige bijdragen. In 1974 werd het vijftigjarig bestaan van het tijdschrift *Euclides* herdacht met een speciaal meetkundenummer. Vanaf 1973 begon de afdeling Wiskivon van het IOWO meetkundeonderwijs te ontwikkelen vanuit een geheel andere optiek dan de euclidische of transformationele opvatting. De special van het tijdschrift *Educational Studies in Mathematics* van augustus 1976 ter gelegenheid van Freudenthals pensionering van het IOWO, was voor een groot deel gewijd aan meetkunde op de basisschool. Uit de literatuurlijst blijkt dat er in de periode 1973-1975 binnen het IOWO een groot arsenaal meetkundige ontwerpen is ontstaan. We zullen in deze paragraaf de cruciale ontwikkelingsmomenten van deze twee jaren beschrijven en analyseren.

Wiskundige wereldoriëntatie

Voor de cursusjaren 1973-1974 en 1974-1975 was een planning door de Wiskobas-groep gemaakt, die moest leiden tot het zogenoemde 'integratieplan'.[11] Al eerder was het idee ontstaan om de leerstof niet louter cursorisch, maar ook rond thematische kernen te ordenen. Eind 1973 ontstond het project Waterland, dat bedoeld was voor ongeveer zes weken reken-wiskundeonderwijs voor het eerste leerjaar van de basisschool. In dit project werd waarschijnlijk voor het eerst de term 'wiskundige wereldoriëntatie' gebruikt.[12] Nu hoefde de wereld niet per se de werkelijke wereld te zijn, maar kon ook een gedachtenwereld zijn, die voor het kind betekenis had. Door kijken, bespreken en onderzoeken van fenomenen uit zo'n wereld – bij Wiskobas sprak men wel van een 'wereldje' – ontstond een spontane of geleide onderwijsactiviteit die gericht was op de wiskundige aspecten van die verschijnselen. Hiertoe hoorde de meetkunde of 'ruimtelijke oriëntatie' natuurlijk ook. Een van de meest aansprekende 'wereldjes' was dat van Waterland., waarvan de leerstof een verhelderend paradigma is voor wat toen onder meetkunde voor de basisschool werd verstaan.

Waterland

Voor de klas hing een grote panoramische wandplaat van een fictief eiland Waterland met een haven, toren, molens, dorpjes, wegennet, ruimtelijke dwaaltuin, stadsplan, blokkenberg,... (figuur C2.4).[13] Een wereldje vóór en ván de kinderen, waarnaar ze met een boot op reis gingen.



figuur C2.4: Meetkundige activiteiten op Waterland

Een beschrijving van dit project is te vinden in *leerplanpublikatie 2* (De Jong e.a., 1975). Het wordt daar omschreven als een aantal activiteiten rond 'ruimtelijke oriëntatie', waar meer onder moet worden verstaan dan 'het herkennen van twee- of driedimensionale vormen, en de bijbehorende terminologie'. We noemen een aantal van de activiteiten die direct met Waterland of naar aanleiding daarvan ondernomen werden.

- Er zijn "foto's" van details gegeven, waarbij de essentiële vraag is: "waar stond de fotograaf?"
- Een serie foto's vanaf de varende boot veroorzaakt "verschuivingen" van een aantal vaste objecten op de wal: wat is de volgorde van de foto's?
- Er zijn foto's van een object vanuit verschillende posities genomen, waardoor verschillende aanzichten ontstaan: van welke kant is de foto genomen?
- Er zijn foto's van een object vanaf verschillende hoogten genomen.

- Je loopt in een rechte lijn op twee objecten van verschillende hoogten af (een huis en daarachter een toren): verklaar je waarneming.
- Wat kan je zien met een speelgoedverrekijker (wc-rolletje): wat gebeurt er als je dichterbij komt?
- Er moet een wegwijzer op een kruispunt neergezet worden; wat moet er op de borden staan?
- Er is een 'losse' wegwijzer met informatie gegeven; waar moet die geplaatst worden?
- Maak een kaart van een gedeelte van Waterland.
- Een route is beschreven; wijs hem aan op de kaart.
- Een stripkaart is gegeven; wijs de route aan op de kaart.
- Maak een stripkaart van een route.
- Bepaal de kortste route tussen twee plaatsen.
- Bepaal kortste routes op het stadsplan.
- Schat de lengte van een route op grond van een wegwijzeraanduiding.
- De hoogte van de blokkenberg bepalen in stapjes; verschillende manieren om de berg te beklimmen.
- Blokkenbouwsels naar aanleiding van de grote blokkenberg: maak een plattegrond, voor- en zijaanzicht.
- Een blokkenbouwsel beschrijven.
- Redeneringen naar aanleiding van aanzichten van blokkenbouwsels.
- Als deze weg 3 km is, hoe lang is dan...?
- Een echte foto van een kind voor het schoolgebouw; hoe hoog is de school?

enzovoort.

Een opmerkelijke omslag

In 1974 schreef Freudenthal in het speciale meetkundenummer van *Euclides*: 'In het werk van het IOWO voor de basisschool heb ik van begin af voor meetkunde gepleit. Het aarzelende antwoord hierop was begrijpelijk. Kon men bij alle andere lasten ook nog die van de meetkunde op zich nemen?' (Freudenthal, 1974, p. 151). Inderdaad was het denken over meetkunde op de basisschool in Nederland nog maar nauwelijks op gang gekomen. In 1976 werd dit bevestigd in de special van *Educational Studies*: 'The tasks the IOWO initially listed as having priority, did not include geometry' (*Five years IOWO*, 1976, p. 193). In dit stuk vinden we ook een historische verwijzing naar de start van het meetkundige ontwikkelingswerk op het IOWO:

> 'After literature research regarding curriculum development on this subject and stimulated by Freudenthal's conviction, we started a discussion in 1973. Some tried to distinguish the various aspects of geometry, others did historical research, and yet others started designing texts for pupils and teachers, a few offered resistance to the subject, goals were set and rejected, speakers were invited, conferences attended – for almost a year meaningful and useless discussions were held. In the meantime the work went on.' (p. 194)

Nu was in de daaraan voorafgegane perioden de aard van de meetkundige onderwerpen sterk door het vak zelf bepaald. De inhoud van Waterland maakt duidelijk dat er zich toen een doorbraak in het denken over meetkunde op de basisschool heeft voorgedaan. Niet alleen zette zich een proces van afrekening met de oude erfenis van de euclidische meetkunde in, maar ook de toen opgekomen transformatiemeetkunde of de empirische voorbereiding daarop komt in Waterland niet of nauwelijks voor. Meetkunde werd vanaf toen opgevat als het *'leren begrijpen van de ruimtelijke verschijnselen'*, niet door uit te gaan van een meetkundig systeem, maar door de directe dagelijkse ervaringen als uitgangspunt te kiezen. In feite was men teruggekeerd naar de oorsprong van de meetkunde, naar de meetkunde van de fysische wereld, waarmee het historisch-genetische principe werd uitgebuit.

Freudenthal had een dergelijke aanpak al eerder voorgesteld, waarbij hij sterk steunde op de ideeën van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa. Nu waren Freudenthals opvattingen uit 1971, zoals verwoord in 'The devil and the deep sea', nog gericht op het voortgezet onderwijs. Hoe hij die nu in verband bracht met meetkunde op de basisschool, zien we verwoord in zijn artikel 'Wat is meetkunde?' uit 1974. Hij stelt dan dat hij nog geheel en al achter zijn eerdere opvattingen over meetkunde staat, maar hij beziet de verticale leerstofplanning vanaf twaalf jaar nu niet meer naar boven, maar juist naar beneden:

> 'Ik heb niet iets ontdekt, dat voor mij een nieuwe wereld zou zijn, maar heb van iets de betekenis en de relevantie begrepen, die groter blijkt te zijn dan mij toen duidelijk was. De betekenis van de meetkunde voor de basisschool is me in een mate duidelijk geworden, dat ik nu durf stellen dat er zonder meetkunde op de basisschool voor velen ook geen meetkunde in het voortgezet onderwijs bestaat. Deze ontdekking heb ik aan kinderen op basis- en kleuterschoolleeftijd te danken, met wie ik gewerkt heb.'
> (Freudenthal, 1974, p. 151)

Plotseling bleken de tijd en de omstandigheden rijp om de globale ideeën van mevrouw Ehrenfest en Freudenthal uit te werken tot praktische lessen voor de basisschool. Waterland is daarvoor het startpunt en de inspiratiebron geweest.[14] Maar ook voor het voortgezet onderwijs leek zich een nieuwe periode voor meetkunde aan te kondigen. De inleiding en leeswijzer van het jubileumnummer van *Euclides* in 1974 eindigt met de volgende woorden: 'Anno 1974, 50 jaar na de oprichting van dit tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde, schijnen nieuwe mogelijkheden voor een verbeterd meetkundeonderwijs binnen ons bereik te zijn gekomen. Wellicht staan we aan het begin van een fundamenteel nieuwe aanpak van dit gebied. Moge dit tijdschrift in de komende jaren hiervan een 'getrouwe afbeelding' geven' (Goffree, 1974, p. 141).

Herkomst

Het is lastig om precies te traceren op welke wijze de verschillende onderwijsactiviteiten van Waterland tot stand zijn gekomen. Ongetwijfeld werd de algemene opvatting over een meer realistische meetkunde direct of indirect beïnvloed door Freudenthals visie, die weer teruggreep op die van mevrouw Ehrenfest. Dit was echter lang niet voor alle ontwerpers een bewuste gedachte, zoals uit de analyse van de door ons uitgevoerde enquête zal blijken (zie bijlage C-II). Meestal kwam één van de ontwerpers met een idee, dat daarna in de wekelijkse kaderbesprekingen via een brainstorm uitgediept werd. Tijdens deze gesprekken ontstonden dan allerhand variaties, maar ook nieuwe (soms ook onuitvoerbare of onzinnige) ideeën.[15] Lang niet alle ontwerpen hadden een origineel karakter.

De blokjesberg op het eiland was al in de periode 1971-1973 gebruikt en was ontleend aan het toen net uitgebrachte *Rekenactiveringsprogramma* van G. Janssen e.a., een modern getint rekenprogramma voor de eerste twee klassen van de lagere school, waarin trouwens ook weer veel ideeën verwerkt waren uit buitenlandse methoden. Activiteiten met blokjes zouden later binnen het gehele Wiskobas-programma een grote rol gaan spelen. Ook heeft een Hongaars programma, *Munkalapok*, als belangrijke bron voor ideeënontwikkeling gediend. Met name is hier het werken met allerhand roosters uit overgenomen.

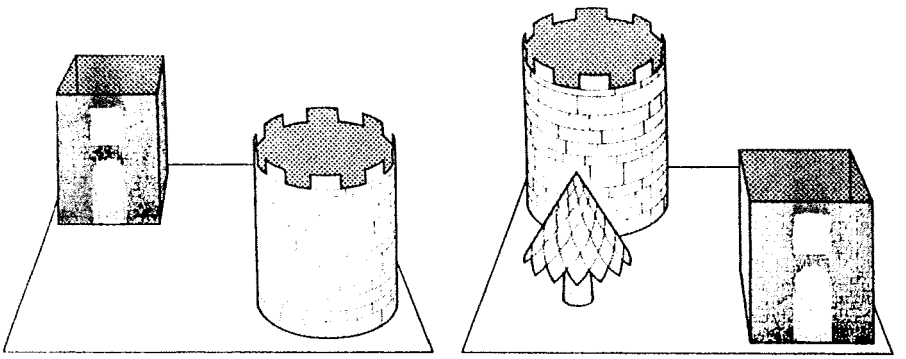
Een van de meest karakteristieke aspecten van de nieuwe meetkundeaanpak was het gebruik maken van de zichtbare wereld: kijken, waarnemen, een mentaal beeld vormen, een afbeelding van dat beeld maken, denken over en verklaren van deze beelden en de daarmee samenhangende verschijnselen. Het ging hierbij om meetkundige begrippen als posities, kijkpunten, kijklijnen en projecties; begrippen, die toen overigens niet zo onder woorden werden gebracht. In principe waren al deze aspecten van de meetkunde al in Waterland aanwezig.

In het boekje *Checking Up 2* van het Nuffield-project komt onder meer het probleem van aanzichten bij draaiing over 180° voor (zie fig. C2.5). Van den Brink heeft in 1974 beschreven hoe hij dit idee verder heeft uitgewerkt in verband met Waterland en het fotograferen ('kieken') door de kinderen zelf.

Een interessant gegeven is, dat genoemd Nuffield-boekje gebaseerd is op de proeven die Piaget en zijn medewerkers in de jaren veertig over ruimtelijke oriëntatie bij jonge kinderen hadden uitgevoerd. Het boekje bevat ook andere uitwerkingen van Piaget – proeven voor het onderwijs over conservatie van lengte en gewicht, transitiviteit van gewicht, oppervlakte, omtrek en oppervlakte. In de onderwijsbeschrijvingen van Wiskobas werd echter aan deze psychologische achtergronden geen of nauwelijks aandacht besteed.[16]

De herkomst van de inhoudelijke meetkundige ontwerpen voor Waterland was in feite een mengeling van bestaande ideeën uit buitenlandse en binnenlandse methoden en eigen ideeën, welke op een creatieve wijze door het Wiskobas-team wer-

den bewerkt, bewust of onbewust gedragen door de ehrenfestiaanse en freudenthaliaanse visie op het aanvankelijk meetkundeonderwijs.



figuur C2.5: Piaget-proef als onderwijsmateriaal (Nuffield-project, 1972)

Meetkundige onderwerpen in het integratieplan

Een beschrijving van de meetkundige onderwerpen is te vinden in het *Wiskobas Bulletin 5*(2/3) uit 1975. Dit 'model voor een schoolwerkplan', verder te noemen het integratieplan, gaf Wiskobas een ideaal-typische beschrijving voor een nieuw leerplan voor de basisschool.

Hierin werd het onderbouwprogramma (leerjaren 1 en 2) gekarakteriseerd als 'numerieke en ruimtelijke oriëntatie' of als 'reken-meetkundige oriëntatie'. Voor het eerst verschenen toen termen als 'oriënteren', 'lokaliseren', 'construeren' en 'redeneren', waarmee een zekere systematisering van de meetkunde beoogd werd.[17]

Voor het middenbouwniveau (leerjaren 3 en 4) werden specifieke aspecten van de Waterlandse meetkunde nader uitgewerkt. In een thema als 'Zie Zaltbommel' kwam het oriënteren met behulp van kaarten en plattegronden opnieuw en diepgaander aan de orde: verscheidene meetkundige aspecten van kaarten, routes, schaal en coördinaten werden tot onderwerp van meetkundig onderzoek gemaakt. Ook werd weer gebruik gemaakt van foto's ten behoeve van het oriënteren.[18] Uitgebreid werd in de middenbouw met blokjes gewerkt, waarvoor Ter Heege een enorm arsenaal van wiskundige activiteiten ontworpen had. Naast de bekende aanzichtproblemen werd een methode tot beschrijving van de bouwsels, schaduwvraagstukken en redeneerproblemen ontwikkeld. Op een meer thematische wijze werd het blokjesbouwen uitgewerkt in de 'Vierkubers', waarbij in een onderzoeksmatige interactieve aanpak wiskundige en rekenkundige aspecten werden verenigd. Hier gaan we in C3.2 nog nader op in.

Een andere voortzetting van de Waterlandse meetkunde was het thema 'Schip ahoy', waarin het begrip 'viseren' op voorbeeldige wijze is uitgewerkt.[19] Veel aandacht was er verder in de middenbouw voor de volgende meetkundige onderwerpen: oppervlakte, roosters, stadsplan, spijkerbord, figuren, transformaties op roosters, symmetrieën, verhoudingen, hoeken en zo meer.

Ook het bovenbouwprogramma (leerjaren 5 en 6) was doortrokken van meetkundige activiteiten. Het door Streefland ontworpen thema 'Afstand, tijd en snelheid', dat oorspronkelijk maar liefst honderd pagina's omvatte en uit acht delen bestond, was in tegenstelling tot het fictieve Waterland op de realiteit betrokken: het ging om onze eigen aardbol en zijn vele meetkundige verschijnselen. Een kernactiviteit bestond uit meetexperimenten onder de naam 'Zon zien', waarbij het gaat om het bepalen van de hoogte van de zon op verschillende tijdstippen van de dag en het jaar naar aanleiding van schaduwmetingen. Hierbij wordt de rechtlijnige voortplanting van het licht – ook in de *Übungensammlung* van mevrouw Ehrenfest genoemd – gebruikt voor het maken van parallelprojecties en wordt de daarbij behorende verhoudingsconstantie uitgebuit. In dit project was het doel dat de kinderen al onderzoekend greep op de echte wereld kregen: de aardbol zelf en enige verschijnselen in samenhang met de zon. Er werden bouwplaten gemaakt, hoeken gemeten, hoogtes berekend, het coördinatensysteem van de globe werd verkend en ten slotte werd de aarde met haar eigen omwenteling en haar omloop om de zon in verband gebracht. Daarnaast treffen we voor de bovenbouw nog tal van 'losse' meetkundige activiteiten aan als de kubus, de voetbal, plattegronden, spijkerbord, stadsplan, ruimtelijke figuren, tangram, samenhang tussen oppervlakte en inhoud, experimenten met vaten (kegel, cilinder,...), doorloopbaarheid et cetera, kortom een heel rijk en geavanceerd programma, dat sterk meetkundig getint was.

Maar ook dienden zich opnieuw de historische vragen aan: Hoe kon dit nieuwe onderwerp voor de lagere school gemotiveerd worden? Wat waren de doelstellingen? Was een longitudinale leerlijn op te stellen? Maar vooral: Wat was nu eigenlijk de kern van die nieuwe realistische meetkunde?[20] Op enkele facetten van deze vragen gaan we in de volgende paragraaf in.

C2.3 Opvattingen over realistisch meetkundeonderwijs (1975)

Wat werd onder meetkunde verstaan in het integratieplan?

De termen 'reken-meet-kundige verkenning' of 'numerieke en ruimtelijke oriëntatie', die voor de onderbouw gebruikt werden, maken duidelijk dat Wiskobas het reken-, het meet- en het meetkundige aspect in samenhang wilde beschouwen.

In het overzicht van de onderbouw van het integratieplan werden twee hoofdlijnen van de 'ruimtelijke verkenning' onderscheiden: 'construeren', in het bijzonder bouwen, en 'analyseren', in het bijzonder lokaliseren (p. 117). Een belangrijk didactisch uitgangspunt was dat bij voorkeur eerst een beroep gedaan werd op een mentale activiteit, 'zich realiseren', dat het voorstellingsvermogen zou kunnen vergroten en het redeneren zou kunnen activeren. De samenhang met meten en verhoudingen werd daarbij steeds benadrukt.

De middenbouw beoogde volgens de beschrijving een 'rechtstreekse voortzetting' te zijn van het voorgaande 'met een verdere uitdieping van onderwerpen'. De verbindingen met andere leerstofonderdelen betroffen 'meten', 'rekenen', 'verhoudingen' en zelfs 'statistiek'.

In het overzicht van de bovenbouw lezen we 'dat de meetkunde in de bovenbouw een vooraanstaande positie inneemt':

> '– als visualiseringsmiddel in verband met andere leerstofvlakken
> – als doel op zich in de zin van ruimtelijke oriëntatie
> – en vooral als objekt bij uitstek voor matematische processen en redeneervormen.' (p. 337)

Hiermee werd duidelijk gemaakt welk een belang op dat moment, in 1975, aan meetkunde voor de basisschool werd toegekend. Opmerkelijk is dat in de genoemde drieledige doelstelling meetkunde als hulpmiddel om te visualiseren vooropstaat. Dat meetkunde ook als doel in zich bestudeerd kan worden, spreekt bijna vanzelf. Interessant is ook het derde punt, waarin meetkunde aanbevolen werd als middel tot het ontwikkelen van een mathematische attitude. Op al deze zaken komen we nog terug, met name op het eerste punt, waarvan zal blijken dat het voor de latere leerplanontwikkeling lang niet altijd duidelijk is geweest.

Leerlijn van het integratieplan

In dit model-leerplan was een leerlijn voor meetkunde opgenomen, maar deze behelsde in feite niet meer dan een schematische opsomming van de onderwerpen, waarbij verbindingspijlen de samenhang met andere onderwerpen, zoals meten en verhoudingen, aanduidden. In de tekst van dit document werd deze leerlijn in mathematisch-didactische termen besproken, waarbij het construeren, het lokaliseren en het redeneren vanuit een steeds hoger standpunt werden belicht. Wat de onderwerpen zelf betreft, werd een verticale spiraalsgewijze opbouw geschetst, hetgeen

bijvoorbeeld goed zichtbaar is bij het onderwerp 'blokjes bouwen'. Het gegeven dat voor de beschrijvingswijze in het integratieplan was gekozen voor zogenoemde 'taferelen', die een projectmatig of thematisch karakter hadden, maakte een specifiek logische leerstofordening voor de verschillende leerstofvlakken vanzelf al lastig. Temeer daar ook nog de meer opzichzelfstaande en meer formele onderwerpen, zoals het stadsplan en het spijkerbord, geordend dienden te worden. Al waren deze theoretische overwegingen achteraf beschreven, men was er in dit document in zekere zin in geslaagd een bepaalde synthese te maken uit datgene wat min of meer op intuïtieve en spontane wijze was ontworpen.

Het vraagstuk van een leerlijn meetkunde

Bij de presentatie van een zo revolutionair voorstel als het integratieplan, waarbij totaal nieuwe gebieden als waarschijnlijkheid en statistiek, ordenend tellen, meten, taal en logica en meetkunde voor de basisschool voorgesteld werden, was het begrijpelijk dat auteurs van methoden, PA-docenten, schoolbegeleiders en de onderwijsgevenden om houvast, onder meer in de vorm van een leerlijn, vroegen. Uiteraard was er ook behoefte aan legitimatie van het nieuwe vak, officiële eindtermen, toetsen, geschikte materialen, een herschikking van de totale stof en aan een didactisch kader. Beperken we ons tot de kwestie van de leerlijn, dan moet gesteld worden dat het onderzoek daarnaar op dat moment eigenlijk nog maar net op gang gekomen was.

Zo werd onder de titel 'In antwoord...' in het voorjaar van 1976 een grote conferentie gehouden om de mening van het veld te peilen over het integratieplan. Hier werden tien thema's uit het voorgestelde model voor een schoolwerkplan besproken, waarvan er twee een meetkundig karakter hadden: 'Analyse van de deelleergang oppervlakte' en 'Het bouwen met blokjes'. Naast een aantal kritische punten, vooral ten aanzien van de haalbaarheid, werd op beide onderwerpen in het algemeen positief tot zeer positief gereageerd. Echter, voor de onderwijspraktijk werd om meer concreet uitgewerkte publicaties gevraagd, ook weer ten behoeve van een longitudinale leerstofplanning.

Van een consensus ten aanzien van meetkunde in het algemeen was op dat moment nog zeker niet te spreken. Of meetkunde überhaupt een plaats in het nieuwe leerplan moest krijgen, was nog onduidelijk. Ook was nog niet duidelijk welke inhouden tot dit nieuwe domein zouden moeten gaan behoren.

Meetkunde in ruime zin

Voorafgaande aan het speciale meetkundenummer van *Euclides* van eind 1974, waren drie artikelen als inleiding op dat nummer verschenen. In de eerste twee van deze serie werd kort de historie van het aanvankelijk meetkundeonderwijs in Nederland geschetst en in het derde artikel werd aandacht gevraagd voor meetkunde als vak voor de basisschool (De Moor en Treffers, 1974). In dit stuk werd vastgesteld dat

over inhoud, doel en vorm van het meetkundeonderwijs internationaal op dat moment geen consensus bestond. Dit was in overeenstemming met de eerder besproken richtingen van de moderniseringspogingen.

Verder werden nu tien aspecten van de meetkunde onderscheiden, welke lijst veel overeenkomst vertoonde met de acht aspecten voor meetkunde in *Matematika*.[21] In dit artikel werd ook het Canadese *K-13 Geometry-Report* besproken, dat, zoals eerder gezegd, als aanvankelijke richtlijn voor een meetkundeprogramma was gekozen.

In het bedoelde *Euclides*-nummer was een vurig pleidooi van de mathematicus Schuster opgenomen voor een herwaardering van de meetkunde als vak van onderwijs (Schuster, 1971).[22] De auteur vroeg aandacht voor meetkunde als een vak 'that (has) its roots in the study of physical space and physical objects'. Verder benadrukte hij het belang van 'geometric experiences, geometrizing, local axiomatics, symmetry, combinatorics, topology' en 'more emphasis on the creative and problem-solving aspects than on studying the highly polished formal structure'. Het zijn topics die we ook bij Freudenthal en bij Treffers en De Moor aantroffen. In het bijzonder zij gewezen op het punt van het 'geometriseren'. We zien dus dat er in het begin van de jaren zeventig een trend ontstond die aan meetkunde een veel ruimer karakter toekende dan de studie van de ruimte op zich, namelijk als middel tot:

1 visualiseren
2 begrijpen van de ruimte en
3 problem-solving (ontwikkeling mathematische attitude).

Dit zijn precies de doelen van de meetkunde zoals ze in het integratieplan beschreven waren. Nu maakte deze pluriforme opvatting – *meetkunde in ruime zin* – het opstellen van een leerlijn extra lastig. Bovendien speelde ook nog mee dat voor de inhoud een grote variëteit van onderwerpen, zoals topologie en combinatoriek, in aanmerking kwam, waarvan de relevantie beslist niet altijd duidelijk was. Het werd toen kernachtig als volgt geformuleerd: 'Er bestaat (...) internationaal gezien opvallend weinig overeenstemming over een meetkundeprogramma voor het basisonderwijs. Wellicht is dit toe te schrijven aan de rijkdom van het gebied: de meetkunde bevat tal van aspekten, die moeilijk in een vertikaal gepland leerstofprogramma gevat kunnen worden' (De Moor en Treffers, 1974, p. 98).

Kennelijk stond men toen niet alleen voor de vraag betreffende de aard en inhoud van een meetkundeprogramma voor de basisschool, maar ook en vooral voor het probleem van de (on)mogelijkheid van de constructie van een verticale leerlijn. Voor het inhoudelijke aspect van de meetkunde had de Waterlandse meetkunde weliswaar de basis gelegd voor een meer realistische zwenking, maar toch bleven invloeden van meer structuralistische aard nog zichtbaar.

Freudenthals visie: *Ik zie het zo!*

In het eerdergenoemde artikel 'Wat is meetkunde?' gaat Freudenthal onder meer in op het eerste punt van de hiervoor genoemde drieledige doelstelling. Hij zal vanaf dan meetkunde, zeker voor het laagste niveau, heel ruim gaan opvatten: 'Meetkunde op basisschoolleeftijd is hetgeen in termen van gedrag van de leerling door de reactie "ik zie het zo" op de vraag "waarom" kan worden gekarakteriseerd' (Freudenthal, 1974, p. 158).

Een in die tijd befaamd geworden observatie van Freudenthals kleinzoon Bastiaan vinden we in dit stuk, naar wij menen, voor het eerst genoteerd:

> 'Ineens bij het dessert zegt Bastiaan (4;3), met zes aalbessen op zijn lepeltje: 'Zoveel zijn wij.' Ik vraag: 'Waarom?' Hij: 'Ik zie het zo.' En dan meteen: 'Twee kinderen, twee volwassenen en Opa en Oma.' (Mogelijk lagen die aalbessen op het lepeltje in dezelfde dobbelsteen-configuratie als waarin wij tegenover elkaar langs de tafel zaten, maar dat heb ik niet kunnen zien.) (...)
> Onze verzamelingstheoretische vooroordelen eisen, dat we de relatie, die Bastiaan tussen de aalbessen en de personen schijnt te constitueren, als een één-één-afbeelding interpreteren, maar het is een veel globalere relatie, waarbij verzamelingen niet in elementen geatomiseerd, maar in groeperingen gestructureerd worden. Heb ik gelijk, zoiets meetkunde te noemen?' (Freudenthal, 1974, pp. 153-154)

Deze visie 'meetkunde in ruime zin', die we ook bij Schuster opmerkten, zou vanaf die tijd binnen het IOWO de opvattingen over het meetkundeonderwijs gaan kleuren. Zo betoogde Freudenthal dat soms 'juist concretiseren het kenmerk van wiskunde kan zijn – mathematiseren bestaat even vaak in het concretiseren als in het abstraheren. Het is een geometriserend abstraheren.' Overigens betekende de slogan 'Ik zie het zo' niet dat Freudenthal daar ook zonder meer genoegen mee wilde nemen.[23] Hij beschouwde deze kinderlijke 'ik zie het zo'-ervaring als een 'intern visioen', waarvan hij in hetzelfde stuk beweerde dat men dergelijke interne visioenen 'als het ware naar buiten kan laten kondenseren'. 'Een van deze kondensatiekernen bestaat hierin, dat als men een groep onderwijst, men het kind dat 'het zo ziet' vraagt, het de anderen, die het niet zien, uit te leggen – in de wending van ondervraagde tot onderwijzende kan het kind zich adekwate uitdrukkingsmiddelen verwerven. Een andere kondensatiekern is die dat men het kind vraagt 'als je het ziet, teken dan (of modelleer of wijs aan) wat je ziet' (Freudenthal, 1974, pp. 152-153).

Kennelijk sprak deze 'ik zie het zo!'-uitleg zo sterk aan, dat sommigen in het veld het als een gemakkelijk middel aangrepen om uit te leggen wat onder meetkunde op de basisschool verstaan moest worden. De titel van Freudenthals stuk dekte de lading echter niet. Weliswaar gaf hij nog een aantal voorbeelden van wat aan meetkundige activiteiten op de basisschool gedaan zou kunnen worden – Waterland was weer het paradigma – maar het geheel bleef toch steken in een aantal didactische tips, enkele suggesties voor verticale leerstofplanning (grafieken, oppervlakte en verhoudingen) en vooral in retorische vraagvorm aan de lezer gestelde voorstellen

of deze meetkunde genoemd mochten worden. Overigens, ook de wat meer structuralistische onderwerpen als het stadsplan en transformatiemeetkunde achtte hij geschikt voor de basisschool.

Iets meer dan tien jaar later werd een studiedag over meetkunde op de basisschool gehouden.[24] De hierbij behorende reader opende met hetzelfde stuk van Freudenthal, maar hij had er een klein aanhangsel aan toegevoegd. Opnieuw werd daarin ingegaan op het belang van visuele verhoudingen. Zijn standpunt over het belang van visualiseren was niet veranderd, eerder versterkt: 'Aan de antwoorden, die ik op de vraag "Wat is meetkunde?" gaf zou (...) toegevoegd kunnen worden: Ook een weg naar een beter rekenkundig en algebraïsch inzicht' (Freudenthal, 1985, p. 12).

Het is duidelijk dat Freudenthal ook toen (1985) het leren visualiseren als een belangrijke doelstelling van het meetkundeonderwijs zag; dit vooral met het oog op het meer algemene mathematiseren.

Meetkunde voor de PA (1975)

Eind augustus 1975 startte op de PA Juliana van Stolberg in Gorcum het ontwerpwerk voor een nieuw schoolwerkplan 'Wiskunde en Didaktiek' voor de opleiding. Goffree en Jansen gingen daarbij uit van het integratieplan. Meetkunde was het tweede onderwerp (voor zes weken opleidingsonderwijs), dat op deze ontwerpacademie aan de orde kwam. Het blok dat hieruit tot stand kwam, kreeg de titel: *Kijken, Doen, Denken en Zien.*

Vrijwel terzelfder tijd vond een conferentie met PA-docenten plaats waarin meetkunde centraal stond. De conferentie had in de wandeling de titel 'Voor paal staan' gekregen, zo genoemd naar een van de activiteiten, die ondernomen moest worden naar aanleiding van een geometrisch kunstwerk, dat bestond uit een negental in een carré staande verticale palen.[25] Uit het verslag van deze conferentie blijkt dat Goffree en Jansen de ideeën van de Waterlandse meetkunde wilden gaan volgen.

Kijken, Doen, Denken en Zien (KDDZ) was het eerste meetkundeblok voor de PA. De onderwerpen van dit blok dekten de Waterlandse meetkundige activiteiten, met nadruk op het blokjes bouwen. Verder troffen we een aantal activiteiten over het stadsplan, spiegelen en bouwplaten aan. Interessant waren een aantal schaduwopgaven en enige fysische meetkunde, zoals het ontstaan van een zonsverduistering. Hoe de realiteit als bron fungeerde, blijkt uit een opgave als: 'Als je in de trein zit en je kijkt uit het raampje naar buiten, dan lijkt het net of de bomen die dichterbij staan, veel harder voorbij gaan' (KDDZ, p. 23). Ook was een aantal van de onderwerpen gebaseerd op de *Übungensammlung* van mevrouw Ehrenfest, zoals uit het logboek, dat Goffree in 1975 bijhield, blijkt.[26]

Een van de doelstellingen was dat ook PA-studenten die geen meetkunde gehad hadden in hun vooropleiding, direct deel konden nemen aan deze 'informele' meetkundecursus, iets wat – zo blijkt uit Goffrees logboek – lang niet altijd lukte. Het

volgende citaat uit Goffrees logboek maakt duidelijk hoe lastig de nieuwe materie was en hoe moeizaam het proces van leerplanontwikkeling verliep:

> '27-10-'75 maandagavond
>
> Een week + weekend lang nadenken en schrijven aan een nieuwe opzet van het blok 'meetkunde'. Deze aanpak van l.p.o. kost veel tijd en energie.
>
> *
>
> 'Kijken, doen, denken en zien'. Is dat meetkunde? Je kunt eraan toevoegen: 'tekenen wat je ziet' en 'zeggen wat je ziet.' Maar nadruk hierop – vooral dat laatste – brengt het gevaar met zich mee waaraan o.a. het meetkunde onderwijs ten onder is gegaan.
>
> *
>
> Onze leerplanpublikatie jrg. V nr 5 zou 'Meetkundige Ervaringen van een basisschoolleerling' moeten gaan heten. Geen leergang, geen leerstof sekwentie, geen deelleergangen, geen projekten, geen 'some lessons in geometry' maar gewoon; 'ervaringen...' Doelstellingen in termen van 'geef gelegenheid om...' en de 'herkenbaarheid' is, ondanks het volkomen nieuwe gebied heel groot:
>
> – begrijpen van verschijnselen
> – ruimtelijk oriënteren
> – visualiseren van problemen
> – meetkundige structuren toepassen in het denken.
>
> Deuren naar andere vakgebieden worden opengezet:
> – aardrijkskunde
> – natuurkunde
> – taal tekenen
> – handvaardigheid.'[27]

In deze gedachten wordt precies weergegeven waarmee de leerplanontwikkelaars in die tijd tobden. Welke inhoud moest meetkunde op de basisschool krijgen? Hoe zouden de doelen omschreven moeten worden? Moest er een programma, c.q. een leerlijn en/of deelleergangen beschreven worden? Hoewel Goffree duidelijk naar een bepaalde opvatting tendeert, zijn die ideeën op dat moment niet verder uitgewerkt (en zelfs nog tijden blijven liggen). De genoemde leerplanpublicatie is er nooit gekomen.

Het lijkt wel zeker dat Goffree op dat moment sterk beïnvloed was door Freudenthals 'Wat is meetkunde?', dat hij ook in zijn logboek als een belangrijk stuk vermeldt. Ook was Goffree in die periode eindredacteur van de meetkundespecial van *Euclides*, waarover we eerder schreven. En juist in die *Euclides*-aflevering werd een aantal van de genoemde gedachten verwoord. Naast het integratieplan, de *Übungensammlung* en het artikel van Freudenthal, noemde Goffree nog als bronnen van inspiratie: *l'Enfant et les géométries* van J. en J. Sauvy, *Experiences in visual thinking* van McKim en 'eigen ervaringen'. Het eerstgenoemde boekje past in de school van het piagetiaanse denken over meetkundige ontwikkelingen bij de allerjongste kinderen, het tweede, heel praktische boek, is een pleidooi voor het 'leren visualiseren'.[28]

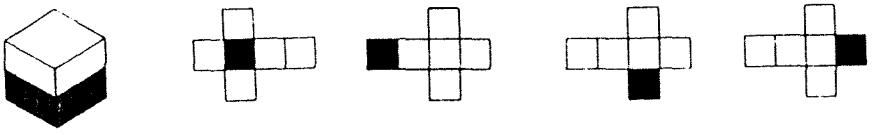
Goffree was, zoals alle medewerkers van Wiskobas, sterk betrokken op het leerplanontwikkelingswerk voor de basisschool. Het boek *Kijken, Doen, Denken en Zien* had echter een heel andere doelstelling, namelijk het ontwikkelen van een nieuw didactisch programma voor de PA. De ontwikkelingsgang daarvan is later door Goffree in 1979 beschreven. Daarin treffen wij ook aan wat eigenlijk met de intrigerende titel bedoeld werd: Het *kijken* betreft een globale oriëntatie, het *doen* slaat op een fase van materieel handelen. Een dergelijke fase kan voorafgaan aan het *denken* en het *zien* heeft betrekking op inzicht. Onderzoekend bezig zijn in meetkundige situaties, leidt hopelijk tot 'inzien'.[29] De genoemde vierslag bevat de bekende elementen, die in vrijwel alle leerpsychologische theorieën zijn te herkennen, namelijk de algemene oriëntatiefase, de fase van het concrete handelen, de overgang naar het meer schematische denken om ten slotte tot volledig inzicht te komen; maar nu dan specifiek betrokken op de allereerste meetkunde-ervaringen. Hierbij vestigde Goffree vooral de aandacht op het kijken, op de concrete waarnemingswereld: typische aspecten van de fysische meetkunde. *Kijken, Doen, Denken en Zien* werd daarmee een didactische meetkundecursus voor PA-studenten op een informeel niveau, gericht op het *be-grijpen van de ruimte en haar verschijnselen*. Het kan als het eerste boek aangeduid worden, waarin meetkunde opgevat werd als dat wat later op het IOWO 'kijkmeetkunde' werd genoemd.

Meetkunde voor de Heroriëntering (HO II-1975)

In diezelfde periode werd de eerste heroriënteringscursus voor onderwijzers (HO-I) herzien.[30] Onder de acht nieuwe blokken was er nu één over meetkunde. Hier was gekozen voor één onderdeel van de meetkunde uit het integratieplan, namelijk blokjes bouwen. *De Kubus*, zo luidde de titel, was bedoeld voor vier tot zes cursusuren (De Moor en Treffers, 1975). Het blok bestond uit drie delen: een practicum op eigen niveau over de kubus, een studiestuk en een aantal praktische activiteiten over blokjes bouwen voor de basisschool. Of, zoals het kernachtig in de inleiding werd omschreven: 'wiskunde aan de kubus' en 'wiskunde met de kubus'. Om redenen van tijd was voor een exemplarische aanpak besloten, hetgeen natuurlijk het gevaar in zich had dat er op meetkunde een te beperkte kijk werd gegeven. Het eerste probleem uit dit blok is een 'tophit' geworden, gezien de vele malen dat dit vraagstuk aangehaald is en in methoden verwerkt is (zie figuur C2.6).

In de inleiding wordt het concrete handelen als didactisch principe genoemd, maar er wordt aan toegevoegd: 'We hopen hier echter niet te blijven staan op het nivo van 'knippen en plakken', maar door te stoten naar een hoger nivo door ook de vraag te stellen *waarom?* Ook bij de heroriëntering zien we dus de intentie tot aansluiting bij het werk van de basisschool, maar deze cursus had meer een informatief karakter dan dat een volledige didactische bijscholing werd beoogd. De bedoeling was een introductie op latere schoolwerkplanontwikkelingen per school in samen-

werking met de schoolbegeleidingsdiensten. Alleen al in dit opzicht moesten de HO-cursussen wel van de PA-cursussen verschillen.



figuur C2.6: Een kubus is voor de helft in de zwarte inkt gedompeld. Maak de uitslagen af. Het ondervlak is al ingekleurd. (HO-blok *De Kubus*, 1975)

Vergelijking PA- en HO-aanpak

Op de PA trachtte men de innovatie veel directer ter hand te nemen, wat zich ook weerspiegelde in het cursusmateriaal voor meetkunde. Een opvallend verschil in de HO- en de PA-aanpak zien we in het theoretische kader van deze meetkundeblokken. Bij de PA-ontwerpen werd ernaar gestreefd dat de student zelf via het eigen leerproces in de oefenschool een didactische professionaliteit ontwikkelde. De theoretische achtergrond werd terzelfder tijd door de ontwerpers (Goffree en Jansen) ontwikkeld en onder meer via conferenties uitgedragen naar de opleiders. De kern hiervan is dat de onderwijsgevende zelf het aangeboden onderwijsleermateriaal 'constructief' dient te 'analyseren' en zodanig te bewerken dat een passend en optimaal onderwijsleerproces op gang gebracht kan worden. Voor de 'mathematisch-didactische aangrijpingspunten', die hierbij als theoretisch frame dienden, verwijzen we naar Goffree (1979). Er werd in deze aanpak dus een stevig appèl gedaan op de eigen creativiteit en inspanning van de onderwijsgevende.

Bij de heroriëntering lag dit anders. De ontwerpers van de HO-blokken (De Moor en Treffers) meenden dat aan de onderwijzer in functie geen opvattingen over een bepaalde didactiek konden worden verstrekt. Allereerst ging het in de HO-cursussen om kennismaking met nieuwe inhouden en nieuwe doelen van het reken-wiskunde-onderwijs. Het verder liggende doel was een aanpassing van het eigen schoolwerkplan te maken; weer later het kiezen van een methode. Daarom werd in het geval van de meetkunde niet uitgegaan van een tamelijk gecompliceerd thema als Waterland, maar van een eenvoudig, herkenbaar onderwerp als de blokjes. In het studiestuk van het blok *De Kubus*, dat als theoretische achtergrond voor de onderwijzer bedoeld was, werden de tien aspecten van de meetkunde, die de beide auteurs eerder in *Euclides* gepubliceerd hadden, onder meer aan de hand van tien vraagstukken over de kubus nader toegelicht. Dit stuk had een nogal formeel karakter. De theorievorming voor meetkunde voltrok zich bij de HO-ontwerpers veel meer vanuit de historie dan

vanuit het feitelijke leerplanontwikkelingswerk. Deze onderscheiden werkwijzen van Goffree en Jansen enerzijds en Treffers en De Moor anderzijds hebben zich ook in hun latere werk respectievelijk voor de PA en voor de *Proeve van een nationaal programma* voortgezet. Ten aanzien van de inhoud van de meetkunde voor de basisschool en ten aanzien van de driedimensionale doelbeschrijvingen constateren we dat er een gelijkgestemd streven was.

C2.4 Meetkunde in het kleuteronderwijs (1976-1983)

Uitgangssituatie en werkkader

Het ontwikkelingswerk van Wiskobas had zich gedurende de eerste vier jaren beperkt tot de lagere school. Vanaf 1975 werd ook het kleuteronderwijs in het werk betrokken.[31] Op het moment van de start van de kleuteractiviteiten was het hiervoor besproken integratieplan al gepubliceerd. De uitgangspunten waren dus niet meer vrij te kiezen. Doelen vooraf werden ook nu niet gespecificeerd, behalve dat de longitudinaliteit van het programma van kleuterschool naar lagere school nagestreefd zou worden. Dit heeft de ontwikkeling in sterke mate bepaald.

Tevens was een doel dat ook de opleidingsscholen voor kleuterleidsters (KLOS) bij deze ontwikkelingen betrokken zouden worden. Overigens kwamen deze opleidingen vanaf het einde van de jaren zeventig al onder druk van fusies en opheffingen te staan door de voorbereiding op de nieuwe basisschool voor kinderen van vier tot twaalf jaar in 1985 en het ontstaan van de nieuwe opleiding, de Pedagogische Academie voor het Basisonderwijs (PABO) in 1984.

De historische terugblik op dit onderdeel van het Wiskobas-werk wordt op de eerste plaats gelegitimeerd door onderzoek van de geschreven bronnen, waarvan een studie van De Gooijer-Quint uit 1979 de leidraad vormt. Verder komen ook de antwoorden op enquêtevraag 7 (bijlage C-II) aan de orde.

In B1 hebben we de historische ontwikkeling van het kleuteronderwijs in Nederland beschreven. Daaruit is gebleken hoe sterk de invloed van het fröbelonderwijs met zijn meetkundige oriëntatie is geweest. Deze traditie – door Haanstra aan het eind van de negentiende de eeuw ingezet – heeft lang standgehouden, maar een wiskundige component, laat staan een verantwoording, heeft immer ontbroken. Het theoretische kader van de opleiding werd meer door algemeen pedagogische en psychologische opvattingen gedomineerd dan door vakinhoudelijke aspecten. Wel ontstond in de jaren zeventig een toenemende belangstelling – ook op de KLOS – voor de ontwikkelingen van cognitieve vaardigheden, gebaseerd op het werk van Piaget, Gal'perin en Vygotsky. De handelingspsychologische theorie van Gal'perin, in ons land vooral bekend gemaakt door de school van Van Parreren, leidde tot verschillende trainingsprogramma's voor kleuters. Daarnaast was er juist ook belangstelling voor de meer affectieve en creatieve ontwikkeling van het jonge kind, zoals bepleit door Janssen-Vos.

Binnen het Wiskobas-project werd echter een ontwikkelingsstrategie toegepast die zich niet of nauwelijks conformeerde aan gevestigde psychologische opvattingen. Er bestond kritiek op Piagets theorieën der ontwikkelingsstadia, welke ondersteund werd door eigen onderzoek en dat van Margaret Donaldson (1978). Een belangrijk punt leek dat de cognitieve ontwikkeling nogal afhankelijk is van de context waarin de opdrachten aan de kinderen voorgelegd worden. Het was voor het eerst

dat in Nederland specifiek leerplanontwikkeling uitgevoerd zou worden voor de kleuterschool met het oog op de eerste wiskundige ontwikkeling van het jonge kind. Goffree vatte de nieuwe situatie als volgt kernachtig samen: 'Nijkamp, Lambert-Anema, Fröbel e.a. kwamen ineens niet meer voor. Maar HF gooide de logiblokken aan de kant en wees op de speelgoedkast en (als 't moest) op wereldmateriaal'.[32]

Twee voorbeelden van de Wiskobas-aanpak voor de kleuters

Om een indruk te krijgen van wat onder de 'kleuter-wiskundige' activiteiten dient te worden verstaan, volgen hier twee voorbeelden die in die tijd de aandacht trokken en paradigmatisch genoemd kunnen worden voor de Wiskobas-aanpak.[33]

'Gesprek met twee 5-jarigen, naar aanleiding van een torenhaan.

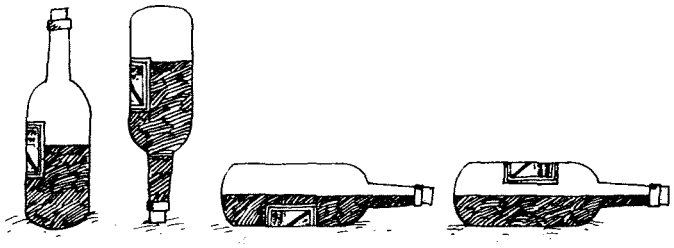
Juf: Kan iemand vertellen hoe groot de haan op die toren is?
Kind: Ik weet het... (wijst met z'n handen ± 25 cm aan).
J.: Nu heb ik laatst gezien dat ze de haan van de toren naar beneden gehaald hebben, want hij was een beetje kaal geworden. Hoe groot zou de haan geweest zijn, toen hij op de grond stond, denk je?
K.: Zoiets (wijst weer ± 25 cm aan)... een kip is toch niet zo lang?
J.: Hoe groot is een vliegtuig in de lucht?
K.: Heel klein.....
J.: En als het vliegtuig op de grond staat?
K.: Ik weet het, net zo groot als het schoolplein.
J.: Denk nu nog eens aan die haan, hoe groot was die haan op de toren.... en toen hij op de grond stond?
(de kleuters wijzen de haan steeds even groot aan)
J.: Ik was laatst boven op de toren en toen ik naar beneden keek, zag ik speelgoedautootjes staan.
K.: Dat waren echte auto's en die zie je dan heel hoog in het klein, maar ze zijn groot.
K.: Als je hoog in een vliegtuig zit, dan zie je kabouterhuisjes.'

(De Gooijer-Quint, 1979, pp. 38-39)

De kinderen hebben op die leeftijd een intuïtief begrip van het perspectiefverschijnsel, namelijk dat iets dat verder weg is, kleiner lijkt. Ook kunnen ze redeneren op grond van de blikwisselingsvraag 'als je nu op de toren staat'. Maar de 'onbekende' context van de torenhaan heeft kennelijk nog geen algemene constitutie van dit verschijnsel veroorzaakt. Ziehier hoe belangrijk de context is.

Een ander voorbeeld van een ongebruikelijke aanpak met zevenjarigen is het volgende probleem over constitutie van inhoud (zie figuur C2.7).

'Er wordt de kinderen gevraagd een fles precies voor de helft met water te vullen. Hoogte van het niveau wordt aanvankelijk als maat voor de helft geschat, maar daarna wordt de fles met kurk (gebracht als een goocheltruc onder een doek) omgekeerd en lijkt de fles voor meer dan de helft gevuld. Er wordt naar verklaringen gezocht en naar een methode om precies de helft te vinden. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de symmetrie van de fles.' (Van den Brink, 1987)



figuur C2.7: Is de fles halfvol? (Van den Brink, 1978)

Algemene en mathematisch-didactische uitgangspunten

Vatten we de visie van Wiskobas, zoals die toen opgeld deed voor de kleuterontwikkeling, samen dan komen tot we de volgende karakteristieken:

- uitgaan van de ervaringen en de belevingswereld van de kinderen ten behoeve van de verschillende ontwikkelingsaspecten
- uitgaan van de voor het kind zinvolle contexten en zijn realiteit (dit kan ook een fantasiewereld zijn)
- geen aparte reken-wiskundelesjes
- geen voorgestructureerde kale materialen
- geen werkbladencultuur of rekenvoorwaarden-toetsen
- creatieve gebruikmaking van de materialen en omgeving van de echte of bedachte wereld van het kind (speelgoed, spellen, ..., verhaaltjes, ..., reële verschijnselen)
- geïntegreerd onderwijsleer- c.q. ontwikkelingsproces, waarin de impliciete wiskundige aspecten binnen de totaliteitsbeleving van het kind zijn opgenomen
- gebruikmaking van verrassings- en conflictsituaties.

Er werd belang gehecht aan de ontwikkeling van het ruimtelijke oriëntatievermogen, ordenen, taal, denken, aanvankelijk getalbegrip en voorbereidend rekenen. Voor de praktijk van het onderwijs lag de nadruk op het belang van gerichte observaties en reflectie en een interactief onderwijsleerproces.

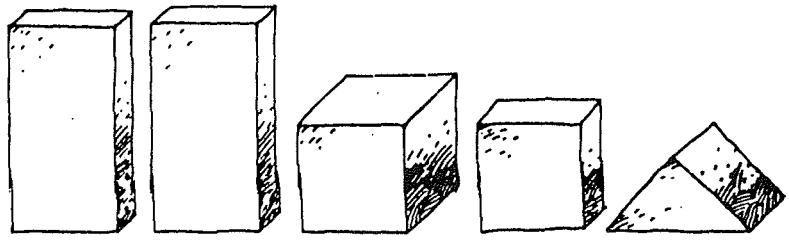
Er werd in de kleuterschool niet over meetkunde gesproken. Dit onderwerp valt onder ruimtelijke oriëntatie en ordenen. De wiskundige (en meetkundige) aspecten dienden alleen expliciet gemaakt te worden voor de onderwijsgevende. Gezien het aanschouwelijke karakter van het kleuteronderwijs, trad juist het meetkundige onderdeel sterk op de voorgrond.

Meetkundige ontwerpen

We geven nu een indruk van een aantal meetkundige onderdelen. Voor de totaliteit van de meetkundige Wiskobas-ontwerpen voor vijf- tot zevenjarigen verwijzen we naar de literatuurlijst.

Voor de basale oriëntatiebegrippen (onder, boven, links, rechts, enzovoort) en de bijbehorende taalontwikkeling zijn geen aparte ontwerpen geproduceerd. Het was de bedoeling dat deze begrippen voortdurend in alle activiteiten aan de orde zouden komen. Zo treffen we ze bijvoorbeeld op natuurlijke wijze aan bij het 'maken van foto's' met een lucifershulsje en met het 'verrekijkerspel', activiteiten, die afgeleid waren uit het Waterlandproject. Hieruit was het maken van 'kijkdozen' ontstaan, dat niet alleen een creatieve en motiverende activiteit bleek te zijn, maar waarbij tevens op natuurlijke wijze met de begrippen horizontaal, verticaal, dichtbij, veraf, voor, achter, boven, groot, klein, ... gewerkt werd, maar ook voor afstand, kijkrichting, wisseling van positie, zij- en bovenaanzicht en zelfs kijkhoek een eerste ervaringsbasis gelegd kan worden.

Hoewel het gebruik van blokken al sinds Fröbel bekend was, werd er door Wiskobas een extra dimensie aan gegeven. Dit onderwerp was natuurlijk ook voor de kleuterschool zeer geschikt. Vooral activiteiten met een aantal specifieke fröbelblokken zijn uitvoerig beschreven (zie figuur C2.8).



figuur C2.8: Bouw de hoogste toren, bouw verschillende torens, welke torens zijn stabiel? (De Gooijer-Quint, 1979)

Het leggen van puzzels, het maken van schaduwen, het doorlopen van doolhoven, het tekenen, vergelijken van (gelijkvormige) figuren, vouwen en knippen van (symmetrische) figuren, werken met spiegels, vergelijken van grootheden, het maken van plattegronden, ..., het is maar een greep uit de vele activiteiten met een meetkundig aspect.

Naast dergelijke losse activiteiten zijn enkele thema's beschreven, waarvan 'Het papieren tovenaarsfeest' het meest meetkundig is. Dit thema brengt de kinderen op een speelse wijze in contact met de ruimtelijke aspecten van oppervlakte, omtrek en

inhoud. Vooral gaat het om het wekken van verbazing: het maken van een zolang mogelijke 'brug', het 'opbergen' van de krant in een fles en zo meer.

Ook bij de thema's werd vooraf niet uitgegaan van leerdoelen of van een bepaalde theorie. Een belangrijk uitgangspunt was dat de kinderen zelf via concrete ervaringen aan de onderwijsleersituatie bijdroegen, waarin ook de op de cognitie gerichte vragen zich vanzelf aanboden. Met name werd het (soms opzettelijk) creëren van verrassings- en conflictsituaties hierbij als een bruikbaar middel gehanteerd.

> 'Wiskobas wil op deze eigen realiteiten (van de kinderen, EdM) inhaken. Dat wil zeggen: we willen aansluiten bij ideeën en noties van kinderen omtrent een bepaald begrip of handeling. Daarom trachten we verrassende situaties in het onderwijs te kreëren, waarin die kinderlijke ideeën worden gekonfronteerd met voor hen afwijkende opvattingen en verschijnselen.' (Van den Brink, 1979, p. 77)

Een totaalprogramma voor de kleuterschool is niet ontworpen, maar dit stond in feite ook niet voor ogen.[34]

Implicaties voor de KLOS

Uiteraard werd ten behoeve van de uitvoering van een dergelijk programma van de onderwijsgevende een attente en creatief-observerende houding verlangd. In verband met de allereerste mathematische ontwikkeling van het kind was het van belang dat de onderwijsgevende al tijdens de opleiding ook deze specifieke aspecten vanuit een mathematisch-didactisch standpunt zou leren kennen.

Deze opvatting was een van de resultaten van een conferentie met een veertigtal KLOS-docenten in 1977. Deze conferentie was op verzoek van het veld tot stand gekomen en had, zoals bij alle bijeenkomsten van Wiskobas, een werkkarakter; er werd van de deelnemers een actieve en praktische inbreng verwacht. Een belangrijk doel was het ontwerpen van geschikte stage-activiteiten met een (verborgen) wiskundig karakter. Men liep tijdens deze conferentie al vooruit op de integratie van kleuter- en basisschool, daar de totale range van vier- tot achtjarigen werd beschouwd. Als benaderingswijze voor wiskundige activiteiten werd naar voren gebracht dat de invalshoek het 'dagelijkse leven' zowel voor het kind als voor de student zou moeten zijn. Echter de 'totale beleving en ontwikkeling van het kind' diende steeds in het oog gehouden te worden. Over de opleiding werd gesteld dat 'de student(e) een bewustwordingsproces (zal) moeten ondergaan om door middel van observaties mathematische aspekten te kunnen signaleren'. Verder werd de ontwikkeling van de eigen attitude ten aanzien van wiskundige activiteiten in de opleiding van belang geacht 'tot het inspireren en stimuleren van wiskundige aktiviteiten (...) bij jonge kinderen'. Als middel daartoe werd van 'gerichte observatie-opdrachten' gesproken 'om te analyseren *wat* er plaats heeft gevonden en *hoe* we het gedrag (datgene wat 'zichtbaar' is) kunnen interpreteren' (Conferentieverslag 1977).

Kennelijk is op deze conferentie ook gesproken over het ontwikkelen van een

programma van wiskundige activiteiten voor de toenmalige KLOS. Maar de uitspraken hierover wijzen in een richting dat men de invulling wilde overlaten aan de eigen verantwoordelijkheid van de opleidingen. Het IOWO bood wel ondersteuning op het inhoudelijke vlak en wilde samen met de opleidingen en de schooladviesdiensten meewerken aan de begeleiding van mentoren en aan informatieverstrekking voor kleuterleidsters in dienst.

Freudenthals opvattingen over structuren

Al eerder wezen we op het belang dat Freudenthal hechtte aan het inzicht in structuren ten behoeve van de cognitieve ontwikkeling (zie B5). Maar zijn denken over het *verwerven van structuren* was precies tegengesteld aan dat van Piaget en van Dienes. Zijn credo voor het wiskundeonderwijs was – ook voor de kleuters als noodzakelijke consequentie – altijd uit te gaan van de meest herkenbare, de rijkste structuur om eventueel later door te werken naar een armere.[35] Dit principe 'van rijk naar arm' betekende ook voor het allereerste meetkundeonderwijs: aanvangen bij het bekende alledaagse, de euclidische structuur en niet bij de armste topologische, zoals in de New Math wel gebeurde.

Ondanks zijn kritiek had Freudenthal tot op zekere hoogte ook oog voor het werk van Piaget en Bruner. Van de eerste roemde hij diens vondst om de constituering van invarianties van verschillende begrippen te onderkennen en te onderzoeken. Van de tweede erkende hij diens trits 'enactive-ikonic-symbolic' als een bruikbare theorie, echter alleen voor de jongste kinderen. Maar het denken over structuurverwerving, althans voor de wiskunde, diende zijns inziens nader onderzocht te worden. Zo spreekt hij in verband met de cognitieve ontwikkeling van jonge kinderen over 'elementaire' structuren, zoals structuur der opvolging (een file maken), herhalingsstructuur (patronen), kringstructuur (kralenkettingen, tijdcycli) (Freudenthal, 1984a, p. 54). In 1977, tijdens de KLOS-conferentie, wijdde hij aan deze kwestie een lezing, waarbij hij met name op het topografische karakter van een aantal elementaire structuren voor de jonge kinderen, zoals de 'randstructuur' wees. Daarbij ging hij ook in op de meetkundige experimenten van Piaget (Freudenthal, 1977, pp. 47-51). Het verwerven van dergelijke elementaire meetkundige structuren door jonge kinderen achtte hij van groot belang, maar dan op haast onbewuste wijze aangeboden in een interactief informeel leergesprek. Voor het kleuteronderwijs waren de rijke structuren: de (fröbel)-blokkendoos, de speelgoedkast en dergelijke, maar ook al wat zich in het alledaagse leven aandiende als uitgangspunt voor de totale ontwikkeling van de kleuter. Geïsoleerde begripsverwerving, zoals in de jaren zeventig in de belangstelling kwam via voorwaardentoetsen en werkbladen voor de kleuterschool, wees hij zonder meer af (Freudenthal, 1979, 1984a). Hij stond een geïntegreerd programma voor, waarin de wiskundig cognitieve ontwikkeling net als de taalontwikkeling impliciet lag opgesloten. Observatie was het middel om de zijns inziens discontinue

doorbraken van inzicht te kunnen vaststellen: 'een rijke context – zintuigelijke, werktuigelijke, lichamelijke of verbeelde actie – geïllustreerd met ervaringen en verdiept door analyses van waar je op moet letten, van wat je ermee kunt nastreven en bereiken' (Freudenthal, 1984a, p. 23). Freudenthal was zelf een goed observator; bekend zijn z'n observaties van de leerprocessen van zijn kleinzoon Bastiaan. Deze eenmalige en unieke onderzoeksgegevens vormden de basis enerzijds voor zijn kritiek op de psychologie van het establishment van die tijd, anderzijds voor zijn eigen theoretische beschouwingen. We herkennen hierin de opvattingen die ook uit het verslag van de KLOS-conferentie van 1977 naar voren kwamen en die het werk van Wiskobas voor de kleuters eind jaren zeventig gekenmerkt hebben.

Veelsoortige ontwikkelingen

Niet alleen vanuit de rekendidactiek vonden er ontwikkelingen voor het kleuteronderwijs plaats. Ook vanuit de pedagogische en psychologische hoek werden nieuwe speel-leerprogramma's ontwikkeld, waarbij tevens het aspect van de denkontwikkeling in ogenschouw werd genomen. Voorbeelden van dergelijke programma's waren *Werken met kinderen* (Janssen-Vos, 1975), *Doen, denken, durven: Kleuters willen ook wel eens denken* (OSM, Rotterdam, 1979).

Daarnaast ontstonden in de jaren zeventig voorbereidende programma's waarbij het aanleren van opzichzelfstaande begrippen en vaardigheden de kern was. Hierbij werd veelal uitgegaan van de van oudsher bestaande indelingen van begrippen en vaardigheden, zoals het klassificeren, seriëren en ordenen. De ruimtelijke oriëntatie beperkte zich tot de bekende begrippenlijsten (links, rechts, onder, boven,....). Ook werd aandacht besteed aan voorbereidend rekenen. Voorbeelden van dergelijke programma's waren *Schoolrijp maken* (Langendijk, 1978) en *Voetje voor voetje* (Faber, 1982).

Ten slotte kwamen enkele uitgeverijen die al een moderne rekenmethode in hun fonds hadden, met voorbereidende methoden, zoals *Speletal* (1982) en *Rekenwiskunde-activiteiten voor kleuters* (1984) van het School Advies Centrum in Utrecht. Het IOWO stelde een bundel activiteiten samen onder de titel *Prikkeltjes voor wiskunde*. Vooral de drie laatstgenoemde uitgaven bevatten op Wiskobas geënte 'kleuterwiskundige' activiteiten, zoals Vuurmans en Van den Brink deze richting in 1983 noemden.[36]

Ontmoeting van opvattingen

In 1982 werd de eerste Panama-conferentie gehouden; deze was gewijd aan het reken-wiskundeonderwijs aan jonge kinderen.[37] Anders dan bij de Wiskobas-conferenties van de jaren zeventig was bij deze conferentie bewust gekozen voor confrontatie van verschillende onderwijsvisies, zij het dat groeperingen met een uitgesproken visie op 'geïsoleerde begripsvorming' niet uitgenodigd waren voor de vulling

van het programma. Naar aanleiding van deze conferentie signaleerde De Jong dat er, althans voor de deelnemende groeperingen, 'convergerende tendenzen' bestonden ten aanzien van de volgende karakteristieken: 'aansluiten bij 'informele strategieën van kinderen' en 'uitgaan van geïntegreerde activiteiten in zinvolle contexten (geen geïsoleerde begripsvorming)'. Ook constateerde hij dat binnen deze tendensen 'oriëntaties op leertheoretische coryfeeën (bijvoorbeeld Piaget, Bruner, Gal'perin, Davydov) veelal verlaten zijn en plaats hebben gemaakt voor meer realistische oriëntaties. Mogelijk heeft Wiskobas in dit opzicht ontdogmatiserende effecten gehad' (De Jong, 1983, p. 109).

De Jong schreef deze convergerende ontwikkeling toe aan een katalyserende invloed van Wiskobas uit de jaren zeventig: 'Wiskobas heeft ervoor gezorgd dat het onderwijs 'zwanger' werd van bepaalde ideeën over wiskundeonderwijs. Anno 1980 was het kind nog maar net ter wereld. Nu (1982, EdM) (...) blijkt het kind levensvatbaar: de ideeën zijn aangeslagen, verwerkt in materialen, televisieseries, methoden, cursussen, etc.' (De Jong, 1983, p. 110).

De Jongs constatering van 1983 was gewaagd, immers het was de vraag of de levensvatbaarheid ook op langere termijn zou voortduren. Zeker voor de methodenontwikkeling voor het rekenonderwijs is dit voor een groot deel bewaarheid geworden. Wat het kleuteronderwijs betreft, zijn ook veel Wiskobas-achtige activiteiten in de methoden opgenomen. De vraag of dit alles ook naar de geest uitgevoerd wordt, is zelfs nu nog niet gesteld. Zeker niet voor de meetkundige aspecten van de zogenoemde kleuterprogramma's.

Integratie van kleuter- en lagere school

De kleuterscholen werden begin jaren tachtig veelal door geheel andere zaken in beslag genomen dan door didactische vernieuwingen, laat staan door die van rekenwiskundige aard. De tijd stond in het teken van de integratie van kleuter- en lagere school. De overheid had daartoe zogenoemde 'Integratie Voorbereidende Cursussen' (IVB) in het leven geroepen, die voornamelijk een algemeen pedagogisch en onderwijskundig/organisatorisch karakter hadden. In deze cursussen werd weinig aandacht aan de inhoudelijke en didactische componenten van de basisschool besteed. Ze hadden mede tot doel de kleuterleidster 'op te scholen' tot een volwaardige basisschoolleraar. Alles stond in dienst van artikel 8 van de nieuwe Wet op het Basisonderwijs (1983) en wel lid 1: 'Het onderwijs wordt zodanig ingericht dat de leerlingen een ononderbroken ontwikkelingsproces kunnen doorlopen. Het wordt afgestemd op de voortgang in de ontwikkeling van de leerlingen'.

Later werden deze IVB-cursussen gevolgd door 'Schoolwerkplancursussen'. Iedere basisschool werd verplicht om een eigen schoolwerkplan (SWP) op te stellen. Daarnaast werd in 1984 ook de Pedagogische Academie omgevormd tot Pedagogische Academie Basis Onderwijs (PABO), hetgeen met de gelijktijdige opheffing van

de aloude KLOS-instituten gepaard ging. Bij de voorbereiding hiervan is door de reken-wiskundedidactici vergeefs gepleit om tenminste een specialisatie voor leraren voor de leeftijdsgroep van vier tot acht jaar in te stellen. Al deze ontwikkelingen hebben bepaald geen gunstige invloed gehad op het proces van de inhoudelijk-didactische vernieuwingen.

Effecten op het onderwijs

Er bestonden geen speciale op Wiskobas gerichte heroriënteringscursussen voor kleuterleidsters. Zowel binnen de IVB- als binnen de SWP-cursussen werd geen tot weinig aandacht aan de specifieke aspecten van de kleuterwiskunde besteed. Wat de praktijk van de kleuterschool zelf betreft, moeten de directe effecten van het Wiskobas-werk aan het eind van de jaren zeventig, begin jaren tachtig, marginaal genoemd worden. De meeste invloed zou pas later uitgaan van de nieuwe reken-wiskundemethoden.

Op enkele KLOS-instituten (Dordrecht, Bilthoven en Arnhem) werden opleidingsprogramma's gehanteerd waarbij aandacht bestond voor de specifieke Wiskobas-opvattingen. Voor de PABO verschenen in 1982 de opleidingsboeken *Wiskunde & Didactiek*. Deze boeken zijn bedoeld voor de student die opgeleid wordt voor de nieuwe basisschool. Het laatste hoofdstuk van deel II is gewijd aan de kleuters. Hierin is de filosofie van het Wiskobas-standpunt inzake de eerste mathematische ontwikkelingen weergegeven. Zowel wordt uitgegaan van de mogelijkheden die van oudsher het kleuteronderwijs domineerden (blokken, mozaïeken, kralen, puzzels, vouwblaadjes, ...) als van nieuwere mogelijkheden (zand- en watertafel, klimrek, logiblokken, ...). Centraal staat echter de gedachte dat 'het leren van wiskunde, in het bijzonder van jonge kinderen, ook zou moeten geschieden in levensechte situaties'. Echter onder de voorwaarde dat de leraar basisonderwijs (voorheen onderwijzer, kleuterleidster) in staat is tot observatie, analyse en creatieve vormgeving van het onderwijsleerproces: 'De leraar moet daarom, als hij de kleuters wiskundige noties en begrippen wil helpen verwerven, op de juiste momenten bewustmaking doen plaats vinden' (Goffree, 1982, p. 183).

Zo werden in de jaren tachtig op opleidingsniveau de Wiskobas-ideeën nader bekend gemaakt. Gezien de hiervoor beschreven feitelijke situatie van onzekerheid en geringe expertise van de leerkrachten, was de schoolpraktijk in die jaren echter nog ver verwijderd van deze beschrijving in ideeën. Voor de begeleiding in de praktijk gaf de Centrale Werkgroep Reken-Wiskundeonderwijs (CWRW) een handreiking uit.

Van de situatie voor de reken-wiskundige voorbereidingen in de groepen 1 en 2 van de huidige basisschool (de oude kleuterschool) kan weinig gezegd worden.

C3 Didactisch onderzoek en traditionele onderwerpen

In het voorjaar van 1976 organiseerde Wiskobas een grote conferentie onder de titel 'In antwoord...'. Hiermee vond een raadpleging plaats van onderwijsgevenden van basis- en kleuterscholen, scholen voor voortgezet onderwijs, van opleiders en begeleiders over het integratieplan van 1975 (zie C2). Uit deze conferentie werd duidelijk dat de basisdoelstellingen van Wiskobas door het onderwijsveld geaccepteerd werden. Tegelijkertijd vroegen de werkers uit de praktijk ook om meer specifieke uitwerkingen van onderdelen van het integratieplan. Dit gold ook voor de meetkundige onderwerpen die tijdens die conferentie aan de orde geweest waren, namelijk *oppervlakte* en *blokjes bouwen*. In het verslag van de genoemde conferentie lezen we 'dat in een publikatie hierover zoveel gegevens moeten zitten, dat een schoolteam een verantwoorde keuze kan maken uit de hele rijkdom aan problemen, deelleergangen en tema's' (Conferentieverslag *In antwoord*, p. 34). Als reactie hierop is voor deze onderwerpen in de periode 1975-1980 binnen het IOWO verdergaand leerplanontwikkelingswerk verricht.

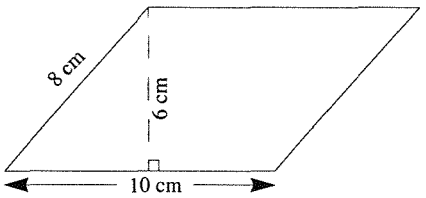
Twee Wiskobas-medewerkers (Ter Heege en De Moor) hebben zich toen gedurende de jaren 1976 en 1977 intensief beziggehouden met nieuwe praktische ontwerpen over oppervlakte in een zo breed mogelijke zin. Uitgangspunt was het integratieplan en hoofddoel de constructie van een leerlijn over oppervlakte, die voor elke school gemakkelijk in het schoolwerkplan in te passen zou zijn.[1]

Behalve de vraag van het onderwijsveld om nadere uitwerking van dit onderwerp, waren er ook andere redenen om aan dit klassieke onderwerp een aparte publicatie, die zich ook op de toenmalige brugklas richtte, te wijden. Zoals bekend was de innovatiestrategie van het Wiskobas-project van voorzichtige aard. Aansluiten bij het bekende, i.c. oppervlakte, leek de beste aanpak om het veld vertrouwd te maken met de beoogde vernieuwingen.

Inhoudelijk was de verandering echter revolutionair. Het onderwerp werd namelijk vanuit een geheel andere opvatting beschouwd. Niet meer als een toepassing van het rekenen achteraf, maar als een prototypische uitwerking van een onderdeel van het leerstofvlak meten. Tevens moest duidelijk worden dat geen van de leerstofonderdelen volledig geïsoleerd kon worden 'behandeld', maar dat juist in de samenhang van verschillende onderdelen een aantal algemene leerdoelen (verwerven van een wiskundige attitude en het kunnen toepassen) het best verwezenlijkt zouden kunnen worden. Juist die samenhang met de andere leerstofvlakken, in het bijzonder met die van meten, meetkunde en rekenen, maakte de nieuwe opzet inhoudelijk rijker, maar stelde de onderwijsgevende tevens voor een nieuwe taak.

Ook voor het onderwerp blokjes bouwen werd vanaf 1975 nader ontwikkelingswerk gestart. Er verschenen in het *Wiskobas Bulletin* een groot aantal losse activiteitenbladen. Dit waren werkbladen, een soort halfproducten, die door de onderwijsge-

internationale IEA-onderzoek uit 1980, waaraan ook door een representatieve steekproef van Nederlandse dertienjarigen is deelgenomen.[2]



Hoe groot is de oppervlakte van bovenstaand parallellogram?

A.	30 cm^2	Goedscores:	
B.	36 cm^2	VWO/HAVO	52%
C.	48 cm^2	MAVO	37%
D.	60 cm^2	LBO 3	7%
E.	80 cm^2	LHNO	25%

figuur C3.2: uit IEA-onderzoek in Nederland (1980)

Toen waren dit soort resultaten ook wel bekend, maar volgens de Wiskobas-opvattingen diende dit onderwerp niet smal, dus niet in eerste instantie gericht op de 'lengte keer breedte'-vaardigheden gericht te zijn, maar juist zo breed mogelijk opgezet te worden.

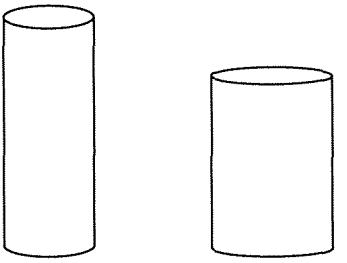
Bredere opzet

We kunnen hier geen uitgebreide beschrijving geven, ook gaan we niet op de verantwoording in[3], maar in het kort luidden de karakteristieken van deze bredere opzet als volgt:

1 ruime aandacht voor het kwalitatief vergelijken van figuren en lichamen binnen het aanvankelijk onderwijs
2 nadruk op begripsvorming binnen een totale aanpak van het meten
3 binding aan andere grootheden, alvorens tot (standaard)maten over te gaan
4 samenhang tussen omtrek, oppervlakte en inhoud
5 vroegtijdige activiteiten in verband met het omstructureren van figuren
6 onderzoekjes en experimenten, al dan niet gebonden aan de realiteit
7 aandacht voor gelijkvormigheidstransformaties (vergrotingen en verkleiningen) in verband met omtrek, oppervlakte en inhoud
8 optimaliseringsproblemen (minimaliseren en maximaliseren)
9 verbanden met andere vakgebieden als aardrijkskunde en natuurkunde
10 begripsvorming van samengestelde grootheden
11 formalisering als sluitstuk van het onderwijsleerproces.

In verband met het onder punt 2 genoemde principe werd uitgegaan van een door Freudenthal opgestelde didactische sequentie van stadia van verwerving van inzicht in het meten van grootheden. Kort weergegeven luidt deze 'meetlijn' als volgt: vergelijken → ordenen → samenstellen (inwisselen) → natuurlijke maat → standaardmaat → toepassen.[4] Dit kwalitatieve en kwantitatieve meten, dat in dit verband niet los te maken valt van het meetkundige aspect van dit onderwerp, leidde tot verschillende nieuwe didactische inzichten, die we buiten de hoofdtekst laten.[5]

We beperken ons tot de punten 4 tot en met 7, die het meest meetkundig zijn. In het aspect van de non-relatie tussen omtrek, oppervlakte en inhoud (punt 4) komt het nieuwe van deze aanpak onder meer tot uiting. In figuur C3.3 is hiervan een voorbeeld gegeven.



figuur C3.3: Vouw van A4-blaadjes twee kokers. In welke koker kun je de meeste erwten gieten? (*Wiskobas Bulletin*, leerplandeel 7)

Dit, vaak ook voor volwassenen verrassende vraagstuk, is paradigmatisch voor de Wiskobas-filosofie. Het is namelijk een probleem dat experimenterend kan worden aangepakt, een onverwachte eigenschap kent, om een verklaring vraagt, generaliseerbaar is en talloze toepassingen kent. Het is gemakkelijk zo te didactiseren dat de genoemde kenmerken door de lerende zelf of in een interactieve situatie uitgewerkt kunnen worden.

Maar ook het omstructureren en het gelijkvormig vergroten (verkleinen) van figuren waren onderwerpen, die zowel didactisch als inhoudelijk een nieuw licht wierpen op de opvattingen over meetkunde op de basisschool.

Oppervlakte meten

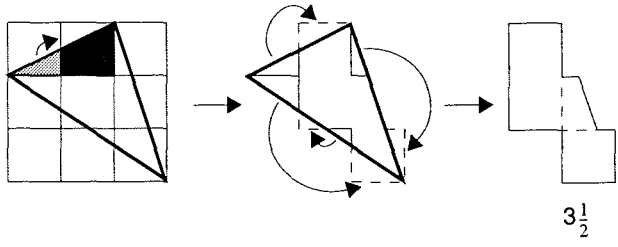
Uit het onderzoekswerk van Ter Heege en De Moor kwamen een aantal knelpunten, ook al door eerdere onderzoekers geconstateerd, opnieuw in de aandacht. Het verschil is echter dat nu op het niveau van de basisschool gewerkt werd. Op grond van dit onderzoek menen wij dat er voor het onderwerp oppervlakte in die jaren een en ander is toegevoegd aan de specifieke didactiek van dit onderdeel en dat daarmee ook een zekere systematisering, die voor het meetkundeonderwijs van belang is, op gang gebracht is. Hiervan volgt nu een korte samenvatting.

Construeren en omstructureren

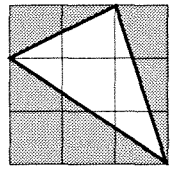
Uit de Gestaltpsychologie was bekend dat vorm en ligging van een vlakke figuur een dwingende rol kunnen spelen bij het denken over die figuren. Wertheimer (1955) heeft beschreven hoe verward leerlingen kunnen raken – ook na een inzichtelijke les over de oppervlakte van een parallellogram, waarbij gebruik gemaakt werd van het afknippen en plakken (verplaatsen) van een driehoek – als zo'n parallellogram plotseling 'staand' werd aangeboden. Kennelijk had er geen volledige constitutie van oppervlakte via het 'liggende' parallellogram plaatsgevonden. Uit de didactiek van het voortgezet onderwijs waren deze problemen toen ook bekend.[6] Ook de Wisko-bas-ontwerpers liepen hier tegenaan. Het was een reden voor de ontwerpers om aan dit omstructureren door de gehele leerlijn aandacht te besteden. Het is van eminent belang gebleken dat de kinderen eerst zelf door middel van knippen en plakken van een rechthoek een parallellogram *construeren*. Ook werden oefeningen gegeven waarbij ze alleen tekenend het parallellogram mochten construeren. Zo werd op de 'heenweg' de figuur gemaakt, die later door *omstructureren* weer geanalyseerd kon worden. Dit omstructureren kon soms ook alleen via een tekening gebeuren of zelfs geheel mentaal geschieden. Via dit leerproces kregen de kinderen begrip van de aard van de figuur, hetgeen uiteindelijk voor bepaalde figuren, zoals het parallellogram, tot een formule voor oppervlakte kon leiden die begripsmatig tot stand was gekomen (Ter Heege en De Moor, 1977; De Moor, 1991). Hierbij wijzen we nog eens op de opgave die afgebeeld is in figuur C3.2. Bij die opgave hoeft men zelfs de formule 'basis maal hoogte' niet eens te kennen, als men de figuur in gedachten kan omstructureren tot een rechthoek.

Completeren

Freudenthal had er bij herhaling op gewezen dat jonge kinderen, maar ook veel volwassenen, bij de oppervlaktebepaling van een figuur bijna altijd van binnenuit willen beginnen. Ook de ontwerpers liepen tegen dit verschijnsel aan. In figuur C3.4 is een scheve driehoek in een rooster getekend. Slechts enkele kinderen bleken tijdens de proefsessies in staat door handig verknippen en verschuiven (van binnenuit werkend) tot de goede oplossing te geraken. Geen van de leerlingen kwam in de proefsituaties tot het completeren van de driehoek tot een vierkant, waarvan de toegevoegde delen moesten worden afgetrokken. Deze strategie van completeren werd ook wel de 'van buitenaf-strategie' genoemd (figuur C3.5).

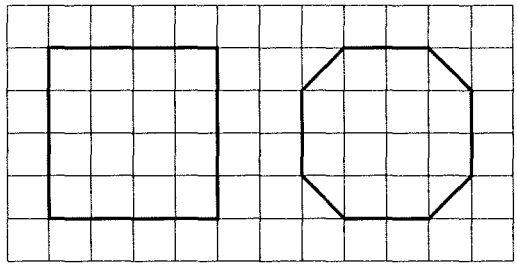


figuur C3.4: Oppervlakte bepalen 'van binnenuit' (*Wiskobas Bulletin*, leerplandeel 7, 1977)



figuur C3.5: Oppervlakte bepalen 'van buitenaf' door 'completeren' $9 - 1 - 3 - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ (*Wiskobas Bulletin*, leerplandeel 7, 1977)

De ontwerpers waren derhalve van mening dat deze vaardigheid aangeleerd diende te worden. Het was Freudenthal die hiervoor een bruikbare didactische hint gaf. Hij paste zijn 'blikwisselingsprincipe' toe en stelde voor om aan dergelijke opgaven eerst enkele activiteiten vooraf te laten gaan waarbij de omgekeerde weg werd gevolgd: ga van een vierkant uit en knip daar eerst stukken vanaf, in feite analoog aan het hiervoor genoemde construeren (zie figuur C3.6).



figuur C3.6: Afknip-didactiek van Freudenthal

Roosters

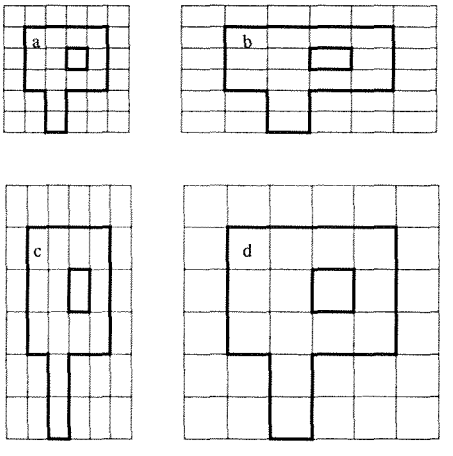
Roosterpapier (eenheids-vierkanten) was van oudsher al een bekend didactisch en methodisch middel. Het gebruik kan in bepaalde gevallen echter een verstarrend en zelfs een contra-inzichtelijk effect (vooral bij het omstructureren) hebben. Het was

dus zaak de leerlijn zo op te bouwen dat enige flexibiliteit mogelijk zou zijn. Derhalve werd ook wel van anderssoortige roosters uitgegaan.

Ook de wijze van aanbieding van de roosterstructuur was een vraag die tijdens de ontwikkeling gespeeld heeft. Er zijn activiteiten beschreven waarbij de ontwerpers hoopten dat de leerlingen deze fundamentele structuur als het ware vanzelf zouden verwerven. Daartoe werd uitgegaan van in de realiteit aanwezige patronen (muurtjes, behang, gordijnstoffen, legpuzzels, en zo meer). Ook op dit punt kon de ontwikkeling echter niet verder komen dan het aanbod van een aantal werkbladen en activiteiten. Nader onderzoek is uitgebleven.

Rekken en krimpen

De anderssoortige roosters brachten de ontwerpers op het idee om het gelijkvormige vergroten en verkleinen van figuren gestructureerd aan te bieden. Eerst werd bijvoorbeeld in de X-richting en daarna in de Y-richting opgerekt (zie figuur C3.7).



figuur C3.7: Effect van vergroting op oppervlakte: omtrek 2 maal zo groot, oppervlakte 4 maal zo groot (*Wiskobas Bulletin*, leerplandeel 7, 1977)

Verbanden

De volgende samenhangende doelen stonden bij het vergroten en verkleinen voorop:

- (her)bewustmaking van de begrippen vergroting en verkleining
- het ontwikkelen van een intuïtief gevoel voor gelijkvormige figuren
- het inzicht in de eigenschappen van de lineaire, kwadratische en kubieke vergroting van een (ruimte) figuur
- het terugblikken op de rekenregels in het metriek stelsel
- het werken met eenvoudige schaaltekeningen.

Het is Freudenthal geweest die op het belang van de fenomenologische samenhang van de grootheden lengte, oppervlakte en inhoud heeft gewezen. Wellicht nog sterker kwam dit tot uiting in enkele thema's waarin de samenhang van lengte-, oppervlakte- en inhoudsmeting aan de orde werd gesteld, zoals in de thema's over Gulliver en de Reus Egbert.[7]

Meetkundig-didactische aspecten van oppervlakte en systematisch onderzoek

Op deze ontwerpfase terugziend, kan de vraag gesteld worden waarom naar aanleiding van dit soort vondsten geen nader onderzoek is verricht.[8] Of waarom er geen vergelijkingen zijn gemaakt met al bekend onderzoek op dit gebied, zoals dat van Piaget en zijn medewerkers uit de jaren veertig (Piaget e.a., 1966, pp. 261 e.v.).[9]

De Wiskobas-experimenten en die van Piaget hadden in ieder geval één overeenkomst: er werd slechts met enkele proefpersonen gewerkt. Maar verder zijn de verschillen groot. Ten eerste waren de doelen essentieel verschillend. In de Piagetschool was de ontwikkelingspsychologie de drijfveer, bij Wiskobas kwamen de onderzoeken voort uit de noodzaak dat een leerlijn voor oppervlakte ontworpen diende te worden. Vooral het feit dat er bij Piaget geen didactische aanleiding bestond, maakt dat de experimenten zo totaal verschillend van karakter waren.

Het zoekproces van de Wiskobas-ontwerpers naar oplossingen om de leerlingen op weg te helpen naar verwerving van het begrip oppervlakte, heeft waarschijnlijk tot een aantal van de hiervoor genoemde didactische principes geleid. De experimenten mislukten in eerste instantie nogal eens, er werd althans niet het nagestreefde leereffect bereikt. Op grond daarvan werd dan met andere leden van de Wiskobas-groep overleg gepleegd en werden nieuwe ontwerpen gemaakt. Een belangrijke doorbraak daarbij was het idee om in de beginfase de grootheid oppervlakte systematisch te binden aan een anderssoortige grootheid (zie noot 5). Treffers heeft dit idee tijdens de ontwikkelingsfase aangedragen, zoals hij ook op het belang van het omstructureren van figuren heeft gewezen. Dit heeft tijdens de ontwerpfase tot belangrijke verbeteringen van een aantal ontwerpen bijgedragen.

Freudenthal heeft aan de praktische ontwikkeling van dit onderdeel niet bijgedragen. Wel is gebruik gemaakt van zijn meetlijn, enkele microdidactische en conceptuele inzichten. In 1978 heeft hij een artikel gepubliceerd dat de mathematische achtergrond van het oppervlaktebegrip en de daarbij behorende didactische voetangels en klemmen behandelt.[10]

Betekenis voor de praktijk

In ieder geval heeft het leerplanontwikkelingswerk van Wiskobas effect gehad op een vervroegde aanbieding van het onderwerp oppervlakte. In de moderne methoden worden thans hiervoor ook voor de zeven- en achtjarigen opgaven en activiteiten

aangetroffen. Dit is mede een gevolg van het idee om oppervlakte in de beginfase aan andere grootheden als bijvoorbeeld kosten te binden; iets waardoor de abstracte grootheid oppervlakte in de beginfase voor de kinderen meer betekenis krijgt.

De grote hoeveelheid praktische stof die via twee publicaties (de Wiskobas-leerplandelen 7 en 9) ter beschikking kwam, had de auteurs genoodzaakt 'trajecten' aan te geven. Deze waren zo opgesteld dat door een schoolteam op een voorzichtige en zuinige manier gestart kon worden, maar ook werd de mogelijkheid geboden het onderwerp in zijn hele rijkdom en breedte aan te pakken. Tevens werden verrijkings- en herhalingsmogelijkheden binnen de trajecten aangegeven. In latere heroriënteringscursussen is van deze trajectkeuzen praktisch gebruik gemaakt.[11]

Van groot belang waren deze aanwijzingen voor praktische leerstofsequenties in de nieuwe methoden. Vastgesteld kan worden dat door de boekenschrijvers ook daadwerkelijk geput is uit de vele nieuwe ontwerpen. In het algemeen is dit echter zo geschied dat de rijke thematische aanpakken, zoals in de Reus Egbert, niet gerealiseerd zijn. Ook die onderwerpen waar veel concreet-praktisch werk bij te pas diende te komen, werden weinig nagevolgd, althans niet in de leerlingboeken. Over het algemeen is voor werkvormen gekozen die in het onderwijs zo eenvoudig mogelijk te organiseren zijn. Ook is van de didactische verfijningen niet veel terug te vinden in de methoden.

Dit toont ons inziens tenminste twee dingen aan. Ten eerste heeft ook een traditioneel onderwerp als oppervlakte nog steeds minder prioriteit dan het rekenen. Ten tweede wordt ook met dit onderwerp, hoe dicht het ook bij het traditionele rekenonderwijs ligt, aangetoond dat het implementatieproces voor een nieuw onderwerp in het onderwijs een buitengewoon lastige kwestie is. Hierop gaan we in C4 nader in.

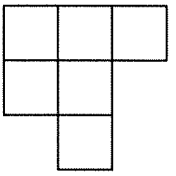
C3.2 Blokjes bouwen als meetkunde voor de basisschool

Een oud leermiddel

In de periode na 1975 werd ook het onderwerp 'bouwen met blokjes' opnieuw uitgewerkt. Het ging hier om meetkundige en rekenkundige activiteiten met houten kubussen. Waren blokjes niet een wat afgezaagd leermiddel? Was het materiaal niet te sterk voorgestructureerd? Leidde het niet tot een éénzijdige belichting van de meetkunde? Dergelijke vragen werden opgeworpen tijdens de toenmalige discussies binnen de Wiskobas-groep. Het nieuwe zat bepaald niet in het materiaal zelf (er werden gewone fröbel- of sternblokjes gebruikt), maar het waren de opgaven die nieuwe mogelijkheden voor het wiskundeonderwijs op de basisschool boden. Met name de ontdekking dat met dit eenvoudige materiaal echte denkopgaven gesteld konden worden en dat op intuïtieve wijze elementaire meetkundige begrippen ontwikkeld konden worden, heeft ertoe bijgedragen dat het 'blokjes bouwen' binnen het Wiskobas-programma een grote vlucht heeft genomen. Het onderwerp bleek op den duur, overigens na enige weerstand binnen de Wiskobas-groep, tal van mogelijkheden te bieden voor wiskundeonderwijs op verschillende niveaus, waarbij de toenmalige leerstofvlakken meetkunde, rekenen en taal en logica in samenhang aan de orde kwamen.[12]

Leerstof en doelen

In het integratieplan wordt gespreid door de tekst aandacht besteed aan dit onderwerp. Een eenduidige beschrijving van doelstellingen ontbrak echter. Voor de middenbouw werd over dit onderwerp het volgende gesteld: 'ruimtelijk inzicht, tellen van zichtbare en onzichtbare blokjes, plattegrond, voor- en zij-aanzichten van bouwsels, maksimale en minimale hoogte van bouwsels, relatief maksimum, bouwtekeningen lezen en maken, roetes lopen, bouwselschaduwen' (*Wiskobas Bulletin*, leerplandeel 2, p. 169). In de onderbouw werd het onderwerp gebruikt voor (wiskundige) taalontwikkeling (coördinaten), oriëntatie in de ruimte en om het gebruik van symmetrie en redeneren te stimuleren. De opgaven hadden over het algemeen een wiskundig karakter, zoals uit het voorbeeld van figuur C3.8 moge blijken.

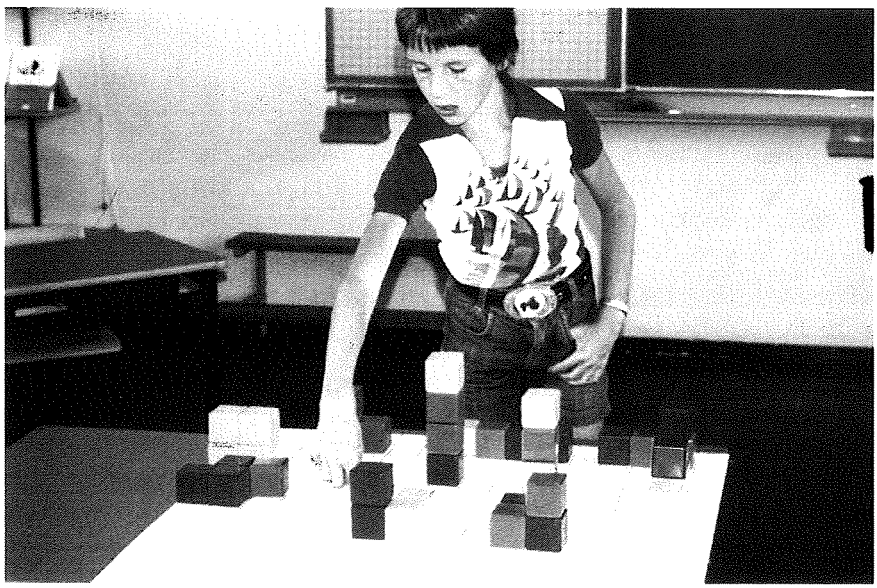


figuur C3.8: Er zijn 10 blokjes beschikbaar voor de plattegrond van een bouwsel. Maak een zo laag mogelijk bouwsel. Hoeveel laagst mogelijk bouwsels zijn er?
(*Wiskobas Bulletin*, leerplandeel 7, 1977)

Tijdens de conferentie 'In antwoord' werd dit onderwerp positief gewaardeerd, maar juist in verband met de doelen werd om een nadere uitwerking in praktisch materiaal gevraagd.

Vierkubers en implementatie

Zo kwam de ontwikkeling van het al genoemde project Vierkubers op gang. De inhoudelijke kant was gecentreerd rond het zoeken van alle (15) essentieel verschillende blokkenbouwsels van vier blokjes (zie figuur C3.9).



figuur C3.9: Hoeveel essentieel verschillende vierkuberhuisjes zijn te bouwen?

In de Vierkubers komen de volgende inhoudelijke aspecten aan de orde:

- *meetkunde*: ruimtelijke oriëntatie, spiegelingen, rotaties, draaizin, coördinaten, plattegrond, aanzichten en oppervlakte-inhoud
- *rekenen*: bewerkingen, handig rekenen, eigenschappen en geldrekenen
- *redeneren*: combinatoriek, systematisch werken en bewijzen.

Nieuw en bijzonder was de vorm van de publicatie: het project is beschreven in de vorm van een fotoverhaal, waarbij de tekst door een leerling wordt verteld. De mathematisch-didactische aanwijzingen staan in handschrift kort genoteerd op de linkerpagina's. De bedoeling was dat er aldus drie handleidingen ontstonden: voor een

klassikale, vrij-ontdekkende, creatieve aanpak, voor een meer strakke klassikale organisatie, en voor een individuele aanpak.

In de inleiding van dit hoofdstuk wezen we al op de verborgen doelstelling van dit project, namelijk de innovatie van de Wiskobas-opvattingen. Impliciet werd zo een poging gedaan om de onderwijsgevenden te winnen voor een meer wiskundige aanpak van het rekenen op de basisschool. Maar tevens hoopte de ontwerper tegemoet te kunnen komen aan de vragen naar differentiatie van het onderwijs, hetgeen ook al in die dagen een hot item was. Maar een van de belangrijkste doelen was om de methodenschrijvers concrete materialen te verschaffen.

Overigens was aan het vierkuberproject al in een eerdere aflevering van het *Wiskobas Bulletin* (leerplandeel 3, 1976) aandacht besteed. Maar die beschrijving was als onvoldoende ervaren. Door de gewijzigde vorm ontstonden mogelijkheden om de beoogde vernieuwingen een extra impuls te geven. Het project kon met eenvoudige aanpassingen namelijk door de gehele basisschool toegepast worden. Het leek verstandig aan te sluiten bij de traditionele opvattingen vanwege de aanknopingspunten met het bestaande rekenonderwijs. De mathematisch-didactische beschrijvingen waren kort en helder geformuleerd, waardoor er aangrijpingspunten ontstonden voor een inhoudelijke en didactische discussie over rekenen-wiskunde in het gehele team. Dit laatste nu leek een geschikt uitgangspunt voor de ontwikkeling van een eigen schoolwerkplan, waar de scholen in die tijd toe uitgedaagd werden.[13]

Dat er hoge verwachtingen bestonden ten aanzien van de implementatiemogelijkheden door middel van dit project moge blijken uit het volgende citaat: 'Bij elkaar gevoegd zijn de belangrijkste doelen die nagestreefd worden, te vatten onder de 'titels': persoonlijke waarde (kreativiteit, taal), sociale waarde (samenwerken, onderzoeken), wiskundige waarde (onderzoeken, redeneren, 'taaltje' voor bouwsels ontwikkelen), terwijl de toepasbaarheid van het geleerde in het vervolg van de lessenserie kan liggen'. Er werd echter direct aan toegevoegd: 'Het is echter niet eenvoudig om alle genoemde mogelijkheden optimaal te benutten' (Wijdeveld, 1977, p. 7), waaruit blijkt hoe lastig het vraagstuk van de implementatie ervaren werd.

Analyse

Bij beschouwing van het onderwerp 'blokjes bouwen' na meer dan twintig jaar, springen opnieuw de vele en rijke mogelijkheden van het materiaal en de ontworpen activiteiten in het oog. In het bijzonder is dit fraai uitgewerkt in het project over de Vierkubers. Waarschijnlijk was een aantal activiteiten met betrekking tot de combinatoriek voor de toenmalige (en de huidige) basisschool te hoog gegrepen. Een leerlijn, waar toentertijd ook om gevraagd werd, is toen en ook nu nog niet gemaakt. Het gevaar van een voorgeschreven leerlijn kan zijn dat het onderwerp te sterk geatomiseerd en geprogrammeerd wordt en dat hierdoor de zelfonderzoekende en de creatieve mogelijkheden gefrustreerd worden. Het onderwerp biedt echter uitstekende

mogelijkheden om op een praktische en enigszins gestructureerde wijze aan meetkunde op de basisschool aandacht te schenken.

Een vrije en creatieve uitwerking van het vierkuberproject bood de mogelijkheid om de Wiskobas-filosofie op eenvoudige wijze te expliciteren. In hoeverre deze doelstelling ook geëffectueerd is, valt moeilijk te beoordelen.

Dit project belicht echter maar ten dele de inhoud en bedoelingen van wat met meetkunde op de basisschool bedoeld wordt. Blijven we bij de Vierkubers alleen, dan komen de meer realistische aspecten van de meetkunde niet of gekunsteld aan bod.

Beschouwen we de invloed van 'blokjes bouwen' op de leerboeken, dan valt op dat zowel in de methoden van de jaren tachtig als in die van daarna geen optimaal gebruik is gemaakt van de vele mogelijkheden die bijvoorbeeld het vierkuberproject bood. Net als bij oppervlakte is in de schoolboeken voor zodanige inhoudelijke activiteiten gekozen, dat deze gemakkelijk via werkbladen of leerboek tot papieren 'sommen' waren te maken, waarbij vooral het rekenkundige aspect de boventoon voert. Juist de vragen die tot meetkundige denkopgaven zouden kunnen leiden, ontbreken in het algemeen. De handleidingen bevelen het concrete bouwen en handelen meestal wel aan, maar de vraag kan gesteld worden of dit in de praktijk ook daadwerkelijk uitgevoerd wordt. Al met al kan gesteld worden dat een optimale innovatie van het onderwerp 'blokjes bouwen' volgens de opvattingen van Wiskobas niet gerealiseerd is.

C4 Implementatie

Door de totstandkoming van de nieuwe wet op de verzorgingsstructuur in 1975 kon de structuur van het IOWO niet meer gehandhaafd blijven. Deze wet stond niet toe dat leerplanontwikkeling, nascholing en onderzoek van het wiskundonderwijs op geïntegreerde wijze plaatsvonden. De leerplanontwikkeling kwam in handen van de Stichting Leerplanontwikkeling (SLO) in Enschede, nascholing moest door de lerarenopleidingen uitgevoerd worden, de innovatie ging naar de Landelijke Pedagogische Centra (LPC) en het onderzoek, dat door de Stichting voor Onderzoek voor het Onderwijs (SVO) gecoördineerd werd, kwam bij de universiteiten. Voor het IOWO, dat zich op alle vier gebieden bewoog, betekende dit het einde van de verstrengelde werkzaamheden die als onderwijsontwikkeling bekend stonden.[1]

Vanaf 1981 zette een sterk verkleinde vakgroep Onderzoek van het Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computer Centrum (OW&OC, thans Freudenthal Instituut) aan de Universiteit van Utrecht het *onderzoeks*werk voort. De SLO had niet voldoende armslag en kracht om het Wiskobas-werk in zijn volle omvang te continueren. Wel kreeg het *Wiskobas Bulletin* vanuit de SLO een voortzetting in het tijdschrift *Willem Bartjens*. Het project *Pa*bo *Na*scholing *M*athematische *A*ctiviteiten, kortweg Panama, ging samenwerking aan met de vakgroep OW&OC, waardoor conferenties, cursussen en studiegroepen gerealiseerd konden worden.[2] Eind 1982 werd de nieuwsbrief *Panama-Post* gestart, die later uitgroeide tot het *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*. Verder werd op 3 juni 1982 op instigatie van Freudenthal de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken Wiskunde Onderwijs (NVORWO) opgericht.

Hiermee ontstond een platform voor alle betrokkenen in onderzoek, ontwikkeling, begeleiding en (na)scholing van het reken-wiskundeonderwijs. Deze infrastructuur maakte het mogelijk de in de jaren zeventig in gang gezette vernieuwingen een breder draagvlak te verschaffen.

De opheffing van Wiskobas heeft in zekere zin een positieve invloed gehad op de verbreding en acceptatie in het onderwijsveld. Vanaf de jaren tachtig wordt er door verschillende instituties eendrachtig samengewerkt tot verdere implementatie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs, zoals het streven van de Wiskobas-beweging vanaf toen genoemd werd.

Maar hoe verliep onder deze nieuwe voorwaarden het verdere proces van leerplanontwikkeling en innovatie? In het bijzonder, hoe verliep dit voor de meetkunde op de basisschool? Hoe zouden de nieuwe methoden erop inspelen? Waren er nog mogelijkheden voor verder onderzoek en/of leerplanontwikkeling? En vooral, zou het mogelijk zijn meetkunde ook officieel tot een doel voor het basisonderwijs te promoveren?

We zullen deze vragen bespreken in de volgende vier paragrafen, waarvan de ti-

tels voor zich spreken.

C4.1 Nieuwe methoden voor de basisschool (1975-1985)
C4.2 Voortgezet ontwikkelingswerk
C4.3 Effecten op leer- en studieboeken (1980-1995) en
C4.4 Ontstaan van de kerndoelen.

C4.1 Nieuwe methoden voor de basisschool (1975-1985)

Het onderzoek van De Jong

De Jong heeft in 1986 een analyse gemaakt van de reken-wiskundemethoden voor de basisschool, die tussen 1965 en 1985 op de Nederlandse markt waren. De kern van zijn onderzoek was in hoeverre de methoden van na 1975 beïnvloed waren door het werk van Wiskobas. Het door hem ontwikkelde onderzoeksinstrument omvatte 22 karakteristieken waarmee de methoden gescreend zijn. Hieronder bevonden zich drie meetkundige karakteristieken: 'oriënteren en lokaliseren', 'meetkundige activiteiten' en 'stadsplan' en één over meten met expliciete verwijzing naar 'oppervlakte'. Op grond van dit onderzoek kunnen we het volgende constateren:

- in de methoden van voor 1970 kwam geen meetkunde voor
- ook de zeven 'traditioneel mechanistische' methoden, die tussen 1970 en 1975 op de markt verschenen, bevatten nauwelijks meetkunde
- enkele importmethoden uit de jaren 1970-1975 (*Denken en Rekenen*, *Ontdek het zelf*, *Elementair Wiskundig Rekenen* en *Wiskunde op de Basisschool* bevatten meetkunde, hoofdzakelijk van structuralistische of traditioneel-formele aard.

Pas vanaf 1975 kon er enige invloed van het Wiskobas-werk op de methoden uitgaan. De Jong omschrijft de periode 1975-1980 als die van het 'opkomend realisme'. Hij onderzocht vier methoden *Hoj! Rekenen!*, *Getal in Beeld*, *Taltaal* en *Operatoir Rekenen*, waarvan de eerste drie vrije bewerkingen van buitenlandse methoden waren. In deze methoden werd, behalve in het Zweedse *Hoj! Rekenen!*, redelijke aandacht aan meetkunde besteed volgens de genoemde karakteristieken en wel met een redelijke mate van getrouwheid aan de Wiskobas-opvattingen (De Jong, 1986, pp. 219-220).

In de periode 1980-1985 ontstonden de eerste 'zuiver' realistische methoden: *De Wereld in Getallen* (1981), *Rekenwerk* (1983) en *Rekenen en Wiskunde* (1983).[3] Zowel de aanwezigheid als de getrouwheid van de meetkundige karakteristieken van deze methoden waren volgens het onderzoek van De Jong hoog. Er werden in deze studie geen kwalitatief-inhoudelijke oordelen uitgesproken.

Een oordeel anno 1983

De Panama-conferentie van 1983 was gewijd aan 'Methoden en reken/wiskundeonderwijs'. In het verslag van deze conferentie is een artikel over meetkunde in basisschoolmethoden opgenomen, waarin over *Taltaal* en *De Wereld in Getallen* (WiG) het volgende opgemerkt werd.

> 'Voorzover we meetkundige activiteiten in de leerboeken aantreffen lijken die wel zo gekozen dat ze zo weinig mogelijk onrust in de klas veroorzaken. Precies die items uit het Wiskobas-arsenaal zijn gekozen, die tot werkbladactiviteiten voeren, waarin

> hooguit één geïsoleerd meetkundeaspect aan de orde komt. Kenmerkend is ook, dat de oplossingen meestal éénduidig bedoeld zijn. Het voorgestructureerde materiaal, zoals de blokjes, blijkt voor deze verwerking zeer geschikt, gezien de enorme aandacht die hieraan besteed wordt. Een rijke uitvoering van dit onderwerp, zoals dit bijvoorbeeld is neergelegd in de "vier-kuber" (Edu Wijdeveld) hebben wij niet kunnen vinden. Betekent dit, dat meetkunde, zoals door Wiskobas bedoeld, vooralsnog niet tot het domein van het B.O. zal behoren?' (De Moor, 1984, pp. 76-77)

In ieder geval ontstond er enige aandacht voor meetkunde in de realistische methoden. De omvang en didactische vormgeving in vergelijking met de Wiskobas-opvattingen waren echter tamelijk schraal. Gering realiteitsgehalte, geen aanleiding tot eigen concrete activiteiten (knippen, plakken,...) en onderzoek. Of de aangeboden activiteiten daadwerkelijk uitgevoerd werden in de klas was onbekend. Over de inhoudelijke en didactische deskundigheid van de onderwijsgevenden op dit gebied weten we nauwelijks iets, maar we vermoeden dat die toentertijd niet optimaal geweest zal zijn.

In de *Almanak* van 1987, een verzameling beoordelingen van de toenmalige reken-wiskunde methoden, werd over meetkunde in verband met *WiG* opgemerkt: 'Meetkunde heeft thans nog geen vastomlijnde plaats in het Nederlandse basisschoolprogramma voor rekenen/wiskunde gekregen. Maar dat zal binnenkort wel veranderen. Te verwachten valt dat *WiG* dan ongeveer het minimumprogramma zal blijken te bevatten: (...)' (*Almanak* 1987, p. 66)

De ontwikkeling voor meetkunde op het IOWO was gedurende de jaren 1975-1980 nog lang niet afgesloten. Er is daarna echter door één ontwikkelteam, dat van 'Onderwijs en Sociaal Milieu' (OSM) te Rotterdam, verder gewerkt aan meetkunde op de basisschool.[4] Uit dit project is later de methode *Rekenen en Wiskunde* (*R&W*) voortgekomen. Over deze methode werd in de *Almanak* van 1987 geschreven: 'in *R&W* is meetkunde een volwaardig leerstofonderdeel, waarin ook een zekere opbouw zit, terwijl deze juist zo moeilijk te construeren is' (*Almanak* 1987, p. 89).

Het is vooral aan Gravemeijer en Kraemer te danken dat in de na-IOWO-tijd de interesse voor meetkunde gaande is gebleven. We besteden aan hun werk daarom nadere aandacht.

C4.2 Voortgezet ontwikkelingswerk

Met het oog op ruimte

In 1984 verscheen er in Nederland voor het eerst sinds de vorige eeuw weer een boek over meetkunde voor het reguliere basisonderwijs: *Met het oog op ruimte*, waarvan Gravemeijer en Kraemer de auteurs zijn. In dit boek wordt meetkunde opgevat in de 'ruime zin', zoals we hiervoor in C2.3 beschreven hebben. De auteurs beschouwen meetkunde als vak op zich, maar ook als middel tot leren schematiseren en visualiseren. Vooral dit laatste wordt sterk benadrukt. Tevens zien zij in het meetkundeonderwijs een belangrijk middel om een wiskundige attitude te ontwikkelen. Er worden dan ook verbanden gelegd tussen meetkunde en rekenen, meten en verhoudingen. Voor de theoretisch-didactische onderbouwing baseren de auteurs zich op de niveautheorie van Van Hiele. Verder is gebruik gemaakt van het werk van de Engelse didacticus Skemp, maar vooral van de opvattingen van Freudenthal, zoals neergelegd in diens artikelen uit 1971 en 1974 (zie C2.1, C2.2). In het bijzonder wordt het 'reïnvention'-principe aanbevolen, dat door Freudenthal bij herhaling naar voren was gebracht als belangrijk onderwijsleerprincipe.[5]

Voor de inhoudelijke aspecten wordt sterk geleund op het Wiskobas-werk, maar ook herkennen we aspecten van het latere werk van Wiskivon, met name van de zogenoemde kijkmeetkunde, waar we in C5 nader op ingaan. Er wordt gepleit voor een doorlopende leerlijn van het kleuteronderwijs tot het voortgezet onderwijs: 'Van ruimtelijke oriëntatie naar ruimtelijk inzicht.' Hierbij wordt aan de volgende fasen van een leerproces gedacht: waarnemen, direct en indirect (foto's e.d.); mentaal innemen van een standpunt; beschrijven van een object; vormen van een mentaal beeld; handelen aan een mentale voorstelling.

Hiermee was overigens nog geenszins een lange leerlijn vastgelegd, maar eerder een richtsnoer voor een meetkundige didactiek voor kleinere leerstofonderdelen aanbevolen, zoals we die ook bij Goffree met zijn 'kijken, doen, denken en zien' hebben leren kennen (zie C2.2). Voor de praktische realisering in het onderwijs gaven de auteurs toen de volgende aanbevelingen tot eigen invulling, uit welke opsomming nog eens duidelijk wordt hoe zeer het Gravemeijer en Kraemer om 'meetkunde in ruime zin' ging:

'– een verbreding van het bestaande programma met activiteiten, waarin de meetkunde de andere leerstof ondersteunt
– een uitbreiding van het programma, door toevoeging van activiteiten gericht op het leren visualiseren als een typisch wiskundige manier van werken
– het ontwikkelen van een leergang gericht op het doen ontstaan van ruimtelijk inzicht
– een verrijking van het programma met losse, direct aan de realiteit ontleende, activiteiten
– en, last but not least, een combinatie van bovenstaande mogelijkheden.'
(Gravemeijer en Kraemer, 1984, p. 124)

Freudenthal heeft er in zijn opvattingen over wiskunde bij herhaling op gewezen, en zo ook in zijn bekende meetkundeartikel uit 1971, dat wiskunde en dus ook de meetkunde geen afgerond of afgesloten systeem is, maar veeleer opgevat dient te worden als een 'menselijke activiteit', waarbinnen men ook zelf op zoek kan gaan naar problemen (looking for problems) en waar men het probleemgebied zelf dient te organiseren (organizing a subject matter). Deze opvattingen nu greep Gravemeijer (1988) aan om de meetkunde als nieuw onderwerp voor de basisschool aan te bevelen ten behoeve van de bevordering van een wiskundige attitude. Ook Treffers en De Moor hadden dit argument al eerder in 1974 en in 1984 naar voren gebracht. De vraag was echter of deze argumenten degenen die de verantwoording voor het basisschoolprogramma hadden, ook zouden bereiken. Anders gezegd, zou meetkunde ooit weer een serieus onderdeel van het basisschoolprogramma kunnen worden?

Meetkunde in de methode *Rekenen & Wiskunde*

Men was bij het Rotterdamse project Onderwijs en Sociaal Milieu (OSM) al aan het eind van de jaren zeventig aan de ontwikkeling van een methode voor rekenen-wiskunde begonnen. Omdat OSM zich richtte op het onderwijs aan kinderen uit de kansarme milieus, had het ontwikkelteam van *Rekenen & Wiskunde* (*R&W*) een extra uitdaging op zich genomen door bij het rekenen in plaats van de traditionele opvattingen juist in het Wiskobas-werk zijn uitgangspunt te kiezen. Men was echter door de meer generale opvattingen over leerplanontwikkeling bij OSM gebonden aan de voorwaarde dat de methodiek in ieder geval gestructureerd diende te zijn. Echter, het waren niet alleen deze theoretische uitgangspunten die de ontwikkelaars tot deze opvatting hadden gebracht. Er is eind jaren tachtig over het meetkundeprogramma binnen *R&W* een uitgebreid en informatief verslag uitgebracht, waaruit we citeren: 'Uit ervaring met een twintigtal scholen is gebleken dat rijke problemen, thema's en projecten moeilijk uitvoerbaar zijn. Het beroep dat we hiermee op kinderen en leerkrachten doen, is te groot, met name omdat de verschillen tussen de leerlingen en tussen de leerkrachten (scholen) zo groot zijn. Ik ben niet geneigd te denken dat het voor de "gemiddelde" school in ons land zo anders is' (Kraemer, z.j., p. 42).[6]

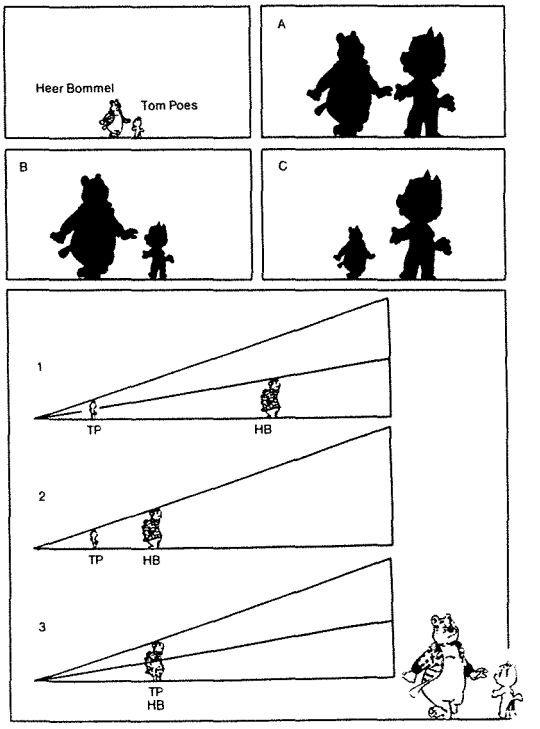
Meetkunde werd in *R&W* derhalve meer programmatisch aangeboden en niet projectmatig of thematisch, waarvoor Wiskobas verschillende voorbeelden had ontwikkeld.[7] De structurering in *R&W* kreeg vorm door heldere werkbladen en activiteiten in de leerboekjes, die voorzien waren van een eveneens duidelijk gestructureerde, begeleidende tekst in de handleidingen. Uitgangspunt voor meetkunde in de methode *R&W* was het principe van de 'integratie' van dit leerstofonderdeel – meetkunde, meten, verhoudingen (en rekenen) als een samenhangend geheel – binnen het gehele reken-wiskunde programma.[8] 'Deze twee lijnen (verhoudingslijn en meetlijn) moeten dan ook nauwkeurig vanaf klas één (derde groepers) worden geconstrueerd. De voortgang op die lijnen moet steeds de mogelijkheid bieden om dwarsver-

bindingen met meetkunde en rekenen te leggen' (Kraemer, z.j., p. 120).

In eerdere artikelen had Kraemer (1985, 1986) zich al uitgesproken voor deze integrerende of bindende functie van meetkunde binnen het basisschoolprogramma. Hiermee werkte Kraemer, gesteund door Gravemeijer, het principe van 'meetkunde in ruime zin', dat in feite door Freudenthal en Wiskobas naar voren was gebracht, tot in de uiterste consequentie uit. Kraemer sprak in zijn reflectieve analyse met grote overtuiging over een nieuw meetkundeprogramma ('onze meetkunde'), dat gebaseerd zou worden op de meetkundeontwikkelingen van de voorafgegane vijftien jaar. Ook voor de zwakkere leerlingen zag hij hierbij mogelijkheden:

> 'Het is in principe mogelijk om binnen het wiskunde-onderwijs een doorgaande meetkundelijn van 4 tot 18 jaar te realiseren. (...) Het is in principe mogelijk om binnen de verticale opbouw van de basisschool meteen de onderwijsleerprocessen zo in te richten dat zelfs de minst ondernemende en minst getalenteerde leerlingen zelfvertrouwen opbouwen en profijt krijgen van hun eigen activiteiten op eigen niveau (differentiatie in oplossingsniveau binnen een voorwaardelijk opgebouwde leergang).'
> (Kraemer, z.j., p. 63)

Welk schaduwplaatje (A, B of C) krijg je bij de tekeningen 1, 2 en 3?
Schrijf het cijfer met de letter in je schrift.



figuur C4.1: Een viseer-opgave uit *Rekenen & Wiskunde* (1983)

De inhoud van de puur meetkundige activiteiten van *R&W* werd in de jaren tachtig in de methodenbeoordelingen als het beste programma voor dit onderdeel beschouwd. De auteurs hadden veel ideeën ontleend aan de Wiskobas-meetkunde, zoals Kraemer deze noemde. Er kwamen echter ook verschillende nieuwe bewerkingen en ontwerpen in *R&W* voor. Met name waren een aantal ideeën uit de kijkmeetkunde, welke we later als 'viseren en projecteren' tegen zullen komen, tot voor de basisschool geschikte activiteiten uitgewerkt (zie figuur C4.1).

Terugblik op de periode 1975-1985

In het voorjaar van 1985 stond de jaarlijkse Voorjaarsdag van de NVORWO en het Panama-project in het teken van meetkunde op de basisschool.[9] De reader opende met het bekende artikel 'Wat is meetkunde?' van Freudenthal uit 1974, waaraan hij nu nog een nawoord had toegevoegd (zie C2.2). Met deze toevoeging – we hebben het al eerder gememoreerd – versterkte hij opnieuw de opvatting over meetkunde in ruime zin, waarbij met name de mogelijke visuele begripsvorming van verhoudingen nog eens door hem onderstreept werd. De discussie aan het eind van deze dag betrof de vraag of meetkunde zo geprogrammeerd diende te worden dat het als verplicht vak in de methode zat. Hier kwam toen geen eensluidend standpunt uit naar voren.

Inmiddels was in 1984 al de discussie over een nationaal plan voor het rekenwiskundeonderwijs op gang gekomen via de Panama-najaarsconferentie van 1984. Daar waren toen door Treffers en De Moor een tiental principiële programmatische voorstellen gedaan onder de titel *10 voor de basisvorming*. Eén hiervan betrof ook de meetkunde. Op de betekenis van deze raadpleging van het veld gaan we in C4.3 nader in.

Bezien we de periode 1975-1985 nog eens globaal ten aanzien van het aspect van de meetkunde van het basisonderwijs, dan constateren we:

- het werk van Wiskobas op het gebied van de meetkunde was in 1980 nog niet afgerond
- er waren een aantal bruikbare leerplanpublicaties beschikbaar, die voor de auteurs van nieuwe methoden als ruime (maar niet dekkende) bronnen gebruikt konden worden
- het is het OSM-team geweest, dat deze bronnen op een eigen en heldere wijze in een praktische vorm heeft gegoten en verder door publicaties de aandacht voor meetkunde op de basisschool heeft vastgehouden.

C4.3 Effecten op leer- en studieboeken (1980-1995)

In deze paragraaf gaan we de effecten na van het ontstaan van de realistische meetkunde op enkele basisschoolmethoden en op de studieboeken voor de PABO. We beperken ons tot nieuwe of vernieuwde uitgaven vanaf circa 1980. Wij onthouden ons van inhoudelijke oordelen. Wel kunnen globale onderlinge vergelijkingen het zicht op aanbod en inhoud van meetkunde verduidelijken.[10] Ook past een enkel woord over het 'onderwijsprogramma meetkunde' voor de eerste twee groepen, gemakshalve ook wel het kleuteronderwijs genoemd.

Operatoir Rekenen (OR vernieuwd)

De vernieuwing van de methode *Operatoir Rekenen* (*OR*) heeft plaatsgevonden tussen 1989 en 1995. Deze methode had in 1996 een marktaandeel van circa 5 procent.[11] Men spreekt in *OR* van 'meetkundige oriëntatie' als een apart domein, kennelijk bedoeld als een brede verkenning van het gebied. Het komt in alle leerjaren (groep 3 tot en met 8) aan de orde. Er is een 'voorloper' voor de kleuters.

Van de leerlingen die in groep 3 aankomen, worden de volgende meetkundige kennis en vaardigheden verwacht: namen van rechthoek, vierkant, cirkel, ruimtelijke oriëntatiebegrippen (voor, achter,...), kunnen ordenen, sorteren en seriëren (lengte, hoogte, dikte, oppervlakte, gewicht, en inhoud).Voor elke reeks lessen voor de groepen 3 tot en met 8 wordt een kort overzicht van de stof, dus ook van de meetkunde, gegeven. Zelf handelen wordt belangrijk geacht, zoals vouwen, knippen, vormen leggen, spiegelen, bouwen, enzovoort. Verschillende activiteiten hebben overeenkomst met de Wiskobas-meetkunde. De typische kijkmeetkunde-opgaven komen pas aan het eind van de cursus. Er ligt iets meer nadruk op het meer traditionele aspect van de meetkunde in verband met vormen, figuren en lichamen dan in de andere methoden. Er lijkt geen gebruik gemaakt van de studies van Gravemeijer en Kraemer. Het aantal meetkundeopgaven is relatief gering.

Niet aangetroffen zijn: activiteiten met hoeken, evenwijdigheden en activiteiten met lamplicht (centrale projectie).

Wereld in Getallen (nieuwe versie)

De vernieuwing van de methode *Wereld in Getallen* (*WiG*) heeft plaatsgevonden tussen 1961 en 1996. Het marktaandeel van *WiG* in 1996 was circa 25 procent. Meetkunde wordt als een apart domein beschouwd. Het komt in alle leerjaren (groep 3 tot en met 8) aan de orde. Als voorloper voor de kleuters bestaat het *Ideeënboek*.

Meetkunde wordt in *WiG* opgevat als een apart domein. Door de gehele cursus heen bestaat aandacht voor opgaven over oriëntatie (wegen, plattegronden, routes, plaatsbepaling) en over blokjes bouwen. Deze activiteiten, afgeleid uit de Wiskobas-meetkunde, zijn sterk bepalend voor de meetkunde in *WiG*. Aan het eind van groep

8 treffen we wat 'middelbare school meetkunde' (hoeken meten, passergebruik, ...) aan. Er lijkt geen gebruik gemaakt van de studies van Gravemeijer en Kraemer. Het aantal meetkundeopgaven is relatief gering.

Niet of nauwelijks aangetroffen zijn: realistische activiteiten met hoeken, cirkel, evenwijdigheid, activiteiten met lamplicht (centrale projectie), schaduwconstructies, klassificeren van vlakke (en ruimtelijke) figuren en activiteiten met de bol.

Pluspunt

De methode *Pluspunt* is ontwikkeld tussen 1986 en 1991, het marktaandeel in 1996 was circa 30 procent. Ook in deze methode wordt meetkunde als een apart domein beschouwd. Het komt in alle leerjaren (groep 3 tot en met 8) aan de orde. In het algemene methodenboek wordt de leerlijn 'meetkunde en ruimtelijke oriëntatie' als volgt ingedeeld: ruimtelijke beschrijvingen, standpuntbepaling, spiegelen en symmetrie, routebeschrijvingen en coördinaten, construeren, waarvoor geen verantwoording wordt gegeven. Er is een lijst van minimumdoelen aangegeven. De invloed van het Wiskobas-materiaal uit de jaren zeventig is evident. Er zijn geen nieuwe ontwikkelingen waargenomen en er lijkt geen gebruik gemaakt van de studies van Gravemeijer en Kraemer. Het aantal meetkundeopgaven is relatief gering. De vorm van de opgaven is gericht op samenwerking; de opgaven zijn meestal in werkbladvorm. Aanbevolen wordt veel te handelen.

Niet aangetroffen zijn: realistische activiteiten met hoeken, afstandsbegrip, cirkel, evenwijdigheid, activiteiten met lamplicht (centrale projectie), schaduwconstructies, tekenoefeningen (gebruik van liniaal, passer), klassificeren van vlakke (en ruimtelijke) figuren en activiteiten met de bol.

Rekenen en Wiskunde

De methode *R&W* is al eerder besproken in C4.2. De uitgave is gestart in 1983. Het marktaandeel in 1996 van R&W was circa 20 procent. *R&W* heeft van de vier genoemde realistische methoden het meest uitgebreide en geavanceerde meetkundeprogramma. In deze methode is ook een leerlijn meetkunde beschreven, die verstrengeld is met de domeinen 'meten' en 'verhoudingen'. Tevens staat meetkunde in het teken van het leren visualiseren. Niet alleen is veel aan de Wiskobas-meetkunde ontleend, maar ook heeft het werk van Wiskivon invloed gehad. Veel is op eigen wijze uitgewerkt en vaak ook vernieuwd of uitgebreid.

Meetkunde in het kleuteronderwijs

Er zijn geen gegevens voorhanden die inzicht geven over het gebruik van handleidingen in het kleuteronderwijs. Bij twee van de vier hiervoor genoemde realistische methoden zijn 'voorlopers' uitgegeven: *Ideeënboek* bij *WiG* en *Handleiding A* bij *OR*. In deze twee handleidingen komen tal van meetkundige activiteiten voor, zoals

die aan het eind van de jaren zeventig door Wiskobas waren ontwikkeld (blokjes bouwen, lokaliseren naar aanleiding van foto's, aanzichten, kijkdoos-activiteiten, vouw- en spiegel-activiteiten, schaduwspelletjes, enzovoort). Vergelijken we de aandacht voor meetkundige activiteiten in de twee kleuterprogramma's met hun respectievelijke voortzettingen, dan is een zekere discrepantie aan te wijzen, zowel in soorten activiteiten als in omvang. In *OR* beroept men zich voor de kleuters op het freudenthalse adagium 'ik zie het zo', waarop in een later stadium meer redenerend voortgebouwd zal worden. Ook in het *Ideeënboek* spreekt men van een doorgaande lijn. Ons inziens is dat echter in geen van beide methoden gerealiseerd.

Bij de methode *Pluspunt* hoort de map *Idee*, met als toevoeging: rekenen-wiskunde, gericht op 'wereldoriënterend en ontwikkelingsgericht' onderwijs. Inhoudelijk zijn de activiteiten gericht op begripsvorming van hoeveelheid, grootte, inhoud, oppervlakte, vorm, ruimte en tijd; niet geïsoleerd, maar via thema's als 'reken-wiskundige wereldoriëntatie'. Er is geen directe beïnvloeding van het Wiskobas-werk waarneembaar.[12]

Er zijn meerdere handleidingen die, zonder dat van directe beïnvloeding sprake is, een filosofie vertonen die in de jaren zeventig onder meer door Wiskobas werd gepropageerd en die als volgt gekarakteriseerd kan worden: aansluiten bij de natuurlijke omgeving (zowel van het kind als de realiteit), gelegenheid geven tot het doen van eigen ontdekkingen, het wekken van noties voor latere begrippen door middel van spontane of geleide activiteiten, ontwikkeling van eigen creativiteit en dat alles in een speelse en actieve sfeer.[13]

Daarnaast bestaan ook methoden die zich meer op geïsoleerde begripsvorming richten.[14]

Kleuterwiskunde voor de opleiding

Na de opheffing van het IOWO verschenen de opleidingsboeken *Wiskunde & Didactiek, I, II, en III* (Goffree, 1982-1985). In deel II was onder de titel 'Grote momenten voor kleine kinderen' een hoofdstuk aan wiskundige activiteiten voor kleuters gewijd. 'De belangrijkste opdracht voor leraren van het jonge kind is om gevarieerde omgevingen te scheppen waarin kleuters op alle facetten van hun ontwikkeling actief kunnen worden' (Goffree, 1983, p. 171).

De kern van het onderwijs moet volgens de auteur zijn dat de kinderen in de gelegenheid gesteld worden hun eigen begrippenkader te vormen, dat breed toepasbaar is. De leraar observeert en dient op het juiste moment de bewustmaking plaats te laten vinden. Dit werk is duidelijk gebaseerd op het Wiskobas-werk uit het eind van de jaren zeventig (zie C2.3).

In 1993 verschijnt van dezelfde auteur *Kleuterwiskunde*, een zelfstudieboek voor aanstaande leraren die zich willen specialiseren voor de onderbouw van de basisschool (groepen 1 en 2, leeftijd 4-6). Het pedagogisch-didactische uitgangspunt is

dat de cognitieve ontwikkeling van het jonge kind in zijn totaliteit moet worden bevorderd. Goffree stelt dat de verschillende nieuwe 'oriëntaties' op het kleuteronderwijs (ervaringsgericht, situatie-georiënteerd, ontwikkelend, basisontwikkeling) alle gebouwd zijn op en rond een aantal kernbegrippen: 'rijke omgeving', 'engagement', 'activiteit', 'initiatief' en 'interactie'. 'Bijna in alle gevallen wordt gezocht naar situaties uit de werkelijkheid van de kinderen, waarin zij zoveel mogelijk onder eigen verantwoordelijkheid handelingen verrichten, die betekenis voor hen hebben' (Goffree, 1993, p. 143). Hierdoor legt hij een relatie tussen deze voor de kleuterschool nieuwe opvattingen en de onderwijsleerprincipes van de reconstructiedidactiek in het realistisch reken-wiskundeonderwijs: 'construeren en concretiseren; niveaus en modellen; reflectie en eigen produktie; sociale context en interactie' (Treffers e.a., 1989, pp. 14-19). Hij ziet dus in deze nieuwe ontwikkelingen mogelijkheden voor de ideeën, zoals die in jaren zeventig door Wiskobas voor het kleuteronderwijs neergelegd waren. De auteur stelt hoge eisen aan de leraar waar hij verwacht dat hij/zij 'tegelijk ontwerper, uitvoerder en doordènker' zal worden.

Voor het wiskundige aspect worden door Goffree zes brongebieden onderscheiden: tellen, meten, oriënteren in ruimte en tijd, (technisch) construeren, spelletjes en redeneren. De Wiskobas-invloeden van de jaren zeventig blijven zichtbaar, zij het thans meer indirect, daar vaak gebruik gemaakt wordt van bestaande handleidingen. De meetkundige elementen vallen vooral onder meten, ruimtelijk oriënteren en het (technisch) construeren ('de natuur naar onze hand zetten'). Dit laatste is een nieuwe verfijning in de opvattingen over meetkunde, welke ontleend is aan de Engelse wiskundedidacticus Bishop. We kunnen daarbij voor de kleuters bijvoorbeeld denken aan de moderne speel-leermaterialen zoals Lego en hun voorbeeldboeken. Goffree formuleert het als volgt:

> 'Kleuters leren de meetkundige figuren kennen in de context van het 'technisch' gebruik ervan. (Een cirkel levert een betere wielvorm dan een ovaal.) Voorwerpen worden op basis van vorm en functionaliteit vergeleken (van rechthoekige blokken kun je een stevige muur bouwen). Ze leren dat bouwtekeningen alleen de hoofdzaken laten zien en moeten soms symmetrie-overwegingen laten gelden om constructies af te maken. Ze leren gelijkvormigheid te zien als een natuurlijk gegeven.'
> (Goffree, 1993, pp. 29-30)

Meetkunde in de opleiding

Het domein meetkunde neemt met één hoofdstuk een eigen plaats in de opleidingsboeken van Goffree in. We beperken ons tot hoofdstuk 4 van *Wiskunde & Didactiek deel 2*, (1992): 'Kijken, doen, denken en zien'. Dit is ongeveer 6 procent van de omvang van de gehele cursus. De titel geeft al min of meer aan dat de auteur zijn opvattingen over meetkunde sinds 1975 nauwelijks gewijzigd heeft (zie C2.2). Er is nu (1992) echter veel meer materiaal voorhanden om het meetkundeonderwijs van de basisschool aan te demonstreren. De concrete doelen voor meetkunde uit de

Proeve 1 worden ter nadere adstructie van de motivering voor het domein aangevoerd. Doel en aard van het meetkundeonderwijs op de basisschool worden als volgt kort samengevat: 'Begripsvorming in de meetkunde zou voorbereid moeten worden met het constitueren van mentale objecten, die het ideële materiaal vormen om mee te werken, om te verfijnen en om zich op te oriënteren' (Goffree, 1992, p. 235).

Ten aanzien van een leerlijn wordt opgemerkt dat dit domein zich niet voor een stapsgewijze programmering leent, maar dat er wel een zekere opbouw is te realiseren. Voor dit laatste wordt onder meer naar de methode *Rekenen & Wiskunde* verwezen.

Samenvatting

- De meetkunde in de vier onderzochte realistische reken-wiskundemethoden van de jaren 1980-1995 is gebaseerd op de Wiskobas-ideeën van de jaren zeventig; dit geldt zowel voor de onderzochte kleuterhandleidingen als de methoden voor de groepen 3 tot en met 8.
- De omvang van het aanbod in de methoden is relatief klein ten opzichte van het totale aanbod rekenen.
- Van een duidelijke aansluiting tussen de programma's voor de kleuters en de reken-wiskunde methoden kan niet gesproken worden.
- Het inhoudelijke aanbod in de verschillende methoden is niet gelijkvormig.
- Behalve in de methode *Rekenen & Wiskunde* zijn geen leerlijnen aangegeven.
- De studieboeken voor de PABO zijn, wat meetkunde betreft, duidelijk gebaseerd op de realistische meetkundeopvatting. De omvang van de aangeboden stof is klein in verhouding met het getalsmatige aspect in de opleiding.
- Er ontbreekt nog steeds een 'nationale afstemming' voor meetkunde op de basisschool.

C4.4 Ontstaan van de kerndoelen

Op zoek naar een programmabeschrijving

De eerste programmatische beschrijving van meetkunde voor de basisschool naar de geest van Wiskobas was van Treffers en De Moor (1973, 1974). Er werd toen nog sterk geleund op buitenlandse programmabeschrijvingen (zie C2.1). Dit was echter niet meer dan een zekere categorisering van de leerstof via een aantal meetkundige aspecten, die voorzien waren van voorbeelden. Het integratieplan van 1975 voorzag ook niet in duidelijke doelstellingen voor meetkunde. Het werk van Gravemeijer en Kraemer (1984) was vooral didactisch en gaf geen antwoord op de vraag naar de richtdoelen voor meetkunde.

Om tot een zekere inhoudelijke homogenisering in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool te komen en om gunstige samenhangende condities te scheppen voor opleiding, nascholing, begeleiding, ontwikkeling en onderzoek, besloot de NVORWO in 1983 een onderzoek te laten instellen naar de mogelijkheden om tot een nationaal plan te komen. Als gevolg hiervan werd in 1984 een Panama-conferentie belegd onder de titel '10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde'. Er was een werkboek vervaardigd waarin de achtergronden, uitgangspunten en condities voor een dergelijk nationaal plan belicht werden en ter discussie gesteld werden. Tevens werd via tien onderwerpen een voorstel over de inhoud gedaan, waarover de 290 deelnemende deskundigen, waaronder tachtig basisschoolleraren, geraadpleegd werden. Onder de titel 'Meetkunde als nieuw programma-onderdeel' werd dit kernpunt toen als volgt omschreven:

> 'Meetkunde is een rijke bron voor wiskundige activiteiten. Het gebied bevat zoveel aspecten dat er zeer verschillend tegenaan gekeken kan worden. Voorkeur verdient een niet-formele, niet-structuralistische aanpak. Positief gesteld: context-rijk, realiteitsgebonden, ruimteverkennend meetkundeonderwijs dat aansluit bij de geëigende leerstofgebieden van rekenen en meten, dient een volwaardige plaats in het reken-wiskundeonderwijs te krijgen.' (Treffers en De Moor, 1984, p. 50)

De resultaten van dit onderzoek zijn in 1986 gepubliceerd (Cadot en Vroegindeweij). De respons op dit inhoudelijke kernpunt over meetkunde was het minst eenduidig in vergelijking met de andere. Door 12 procent werd geen antwoord gegeven op deze vraag. Van de respondenten was *60 procent het volledig eens met dit kernpunt en ruim 30 procent het grotendeels eens*. De overige 10 procent was het niet eens of volledig oneens met dit kernpunt. Ook de kwalitatieve beoordelingen gaven een verdeeld beeld te zien. Er kon op dat moment bepaald niet van consensus over meetkunde gesproken worden.

Concrete leerdoelen meetkunde in *Proeve 1*

De generale uitkomst van de veldraadpleging was aanleiding tot het opstellen van een nationaal programma in de zin van *10 voor de basisvorming*. Ook meetkunde, dat overigens al in de realistische methoden was opgenomen, kreeg hierin een plaats. In deel 1 van de *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool* (1989) – verder aan te duiden met *Proeve 1* – werd een overzicht van de einddoelen voor het basisonderwijs gegeven. De stof wordt in dit boek globaal in drie domeinen opgesplitst: basisvaardigheden en cijferen, verhoudingen en breuken, meten en meetkunde.[15]

Voor het eerst werden nu (1989) concrete doelstellingen voor meetkunde omschreven:

'1. Leerlingen beschikken over noties waarmee zij de ruimte meetkundig kunnen ordenen en beschrijven: plaats; richting; afstand; evenwijdigheid; patroon; vorm; grootte; schaal; spiegeling; symmetrie; coördinaat; plattegrond; vooraanzicht, zijaanzicht, bovenaanzicht; lengte, breedte, hoogte; omtrek; oppervlakte; inhoud.
2. Leerlingen kunnen ruimtelijk redeneren door zich in standpunten te verplaatsen en verbanden tussen gegevens te leggen. Ze bedienen zich daarbij van bouwsels, plattegronden, kaarten en foto's, en gegevens over plaats, richting, afstand en schaal.
3. Leerlingen kunnen schaduwbeelden verklaren, figuren samenstellen en bouwplaten van regelmatige objecten ontwerpen en identificeren.
4. Leerlingen kunnen reken- wiskundeproblemen visualiseren en schematiseren.' (Treffers, De Moor en Feijs, 1989)

De laatste doelstelling berust op de opvatting van meetkunde in ruime zin. De omvang van meetkunde in *Proeve 1* is relatief gering in vergelijking met de aandacht die eraan besteed werd in het 'integratieplan' van 1975 (zie C2.2). De toelichting werd echter helderder doordat vanaf nu een vijftal aspecten onderscheiden werden, die een betere basis boden om de doelstellingen te beschrijven. Tevens werd daarmee de methodenschrijvers, de onderzoekers, de PABO-docenten, de begeleiders en de onderwijsgevenden wat meer houvast geboden voor het praktische werk. De vijf aspecten luiden: Oriënteren en Lokaliseren, Viseren en Projecteren, Ruimtelijk redeneren, Transformeren en Construeren en Meten. Een nadere beschrijving en gebruik van deze aspecten zal volgen in deel D.

Officiële kerndoelen, korte historie[16]

In de conceptwet voor de basisvorming van 1986 doet minister Deetman het voorstel om 'eindtermen' in te voeren. De toelichting vermeldt dat hierdoor 'de inhoud van het onderwijs controleerbaar voor het parlement en de samenleving' wordt. De SLO krijgt de opdracht een advies uit te brengen in de vorm van een ontwerp van eindtermen voor het basisonderwijs. Er worden 'ontwikkelgroepen' voor de verschillende vakgebieden ingesteld, waarbij voor rekenen en wiskunde wordt samengewerkt

door de SLO, OW&OC, Cito en de NVORWO. Begin 1989 worden de adviezen als 'voorlopige eindtermen' uitgebracht. Wij beperken ons tot die van 'Rekenen en Wiskunde'. Na een kabinetswijziging stelt staatssecretaris Wallage begin 1990 de Commissie Herziening Eindtermen (CHE) in. Vanaf nu wordt niet meer over eindtermen, maar over *kerndoelen* gesproken, die een inhoudelijke beschrijving van het *minimumaanbod* voor de basisschool weergeven. Medio 1990 brengt de CHE haar rapport uit: de kern van de voorstellen blijft gehandhaafd. Nadat de Onderwijsraad gehoord is, die negatief is in haar oordeel, omdat zij niet gelooft in kwaliteits-verbetering door middel van kerndoelen, wordt het voorstel in de Tweede Kamer besproken. Eind 1991 volgt een bijgesteld advies van de CHE. De kerndoelen voor rekenen en wiskunde blijven ongewijzigd. In augustus 1993 volgt de publicatie van het *Besluit Kerndoelen voor het Basisonderwijs*. De scholen krijgen nu de gelegenheid voor het aanvullen van eventuele lacunes in het onderwijsaanbod. Er wordt een termijn van vijf jaar gesteld voor de invoering van de kerndoelen. In 1994 concludeert de Commissie Evaluatie Basisonderwijs (CEB) dat het onderwijsaanbod overladen is en dat de kerndoelen dit versterken. De CEB beveelt aan de kerndoelen voor alle leer- en vormingsgebieden te heroverwegen met uitzondering van die voor Nederlandse taal en rekenen en wiskunde. Naar aanleiding hiervan brengt de Commissie Heroverweging Kerndoelen Basisonderwijs (CHKB) in 1994 het rapport *Doelbewust Leren* uit. De overlading wordt toegeschreven aan de overbelasting van de schoolorganisatie en niet aan de kerndoelen. Er wordt voorgesteld de zestien leer-en vormingsgebieden tot negen terug te brengen en het aantal kerndoelen te beperken. De adviezen van de CHKB zijn aanvankelijk niet opgevolgd. De SLO krijgt opnieuw de opdracht de kerndoelen te herzien. In 1996 brengt staatssecretaris Netelenbos de nota *Impuls voor het basisonderwijs* uit, welke in de kamer wordt bediscussieerd. Naar aanleiding hiervan wordt door haar een opdracht tot revisie van de kerndoelen gegeven, waarbij die voor taal en rekenen-wiskunde nauwelijks gewijzigd mogen worden. In 1997 beslist Netelenbos dat voor taal en rekenen-wiskunde als proef tussendoelen zullen worden geformuleerd. De oude kerndoelen blijven voorlopig van kracht.[17]

Kerndoelen voor meetkunde: een bijna-ongeluk anno 1989

We gaan nu in het bijzonder na hoe de ontwikkelingsgeschiedenis van de doelen voor meetkunde hierbij verlopen is. Op grond van de uitslag van de raadpleging op *10 voor de basisvorming* werd de realistische meetkunde als uitgangspunt gekozen. In 1988 werd een special van *Willem Bartjens* uitgebracht, waarin een uitgebreid artikel over 'beredeneerde eindtermen' van Treffers staat.[18] Het gedeelte over meetkunde is vrijwel identiek aan dat wat in de latere *Proeve 1* verschijnt. Er worden acht eindtermen voor meetkunde genoemd in de stijl van de realistische meetkunde. Deze zijn vrijwel dezelfde als de eindtermen van de ontwikkelgroep rekenen en wiskunde, zoals gepubliceerd in het *Advies over de voorlopige eindtermen basisonderwijs* in

begin 1989, alleen zijn deze uitgebreid met een negende eindterm: 'De leerlingen leveren een bijdrage aan groepsonderzoek in dit domein'.[19]

In de zomer van 1989 gebeurde er bijna een ongeluk. De ARBO (Advies Raad voor het Basis Onderwijs) gaf het volgende advies:

> 'Mede gezien de (grote) uitval van leerlingen op de verschillende traditionele domeinen en het vrij lage percentage dat de elementaire opgaven aankan, lijkt uitbreiding naar meetkunde en kansrekenen niet gewenst. (...) Bij de huidige omvang van de rekenlestijd (circa 300 minuten per week) lijkt uitbreiding van het rekenen en wiskunde naar specifieke wiskundige aspekten, zoals formele meetkunde en kansrekenen, niet haalbaar.' (ARBO-advies, 1989, p. 47)[20]

Treffers reageerde hierop met een persoonlijke brief aan de coördinator van de Projectgroep Voorlopige Eindtermen Basisonderwijs. Hij geeft kritiek op de argumenten in het ARBO-advies en verwijst naar het brede draagvlak waarop de eindtermen voor rekenen en wiskunde zijn gebaseerd. We citeren uit deze brief: 'Het is trouwens niet te tolereren dat de zorgvuldige procedure (mede in de VALO en Panama) die bij het samenstellen van de (beredeneerde) eindtermen is gevolgd, en die inhoudelijk ook zijn neerslag krijgt in de 'Proeve van een Nationaal Programma' op basis van één advies teniet gedaan zou worden'.[21]

Toch wilde de projectleiding van de SLO, op grond van het ARBO-advies, de meetkunde uit het eindtermenontwerp schrappen.[22] Een compromis werd voorgesteld om het domein meetkunde te handhaven, maar dit te beperken tot ruimtelijke begrippen voor het kleuteronderwijs. Het argument dat juist de kloof tussen de meetkundige kleuterervaringen en het meetkundeonderwijs van het VO overbrugd diende te worden 'werd om pragmatische redenen terzijde geschoven'. De SLO-medewerker H. van Die, die verantwoordelijk was voor rekenen en wiskunde, heeft toen getracht een uitweg te vinden om uit deze impasse te geraken. Hij schrijft hierover het volgende: 'Het aantal eindtermen werd eerst teruggebracht van acht naar twee, en na indringend telefonisch overleg met Adri Treffers, weer opgevoerd tot vier. Door een zeer pregnante wijze van formuleren bleef de kern van de oorspronkelijke voorstellen (het structureren van ruimtelijke verschijnselen, het redeneren en construeren) gehandhaafd.' [23]

Ten slotte zijn in 1993 de voorlopige kerndoelen voor rekenen en wiskunde dan toch inclusief die voor meetkunde uitgebracht. Er worden zes domeinen onderscheiden: vaardigheden, cijferen, verhoudingen en procenten, breuken en decimale breuken, meten en meetkunde, in totaal 23 doelen. De lijst wordt voorafgegaan door een algemene doelstelling:

> 'Het onderwijs in rekenen/wiskunde is er op gericht, dat de leerlingen
>
> - een positieve werkhouding ontwikkelen en verbindingen kunnen leggen tussen het onderwijs in rekenen/wiskunde en hun dagelijkse leefwereld
> - basisvaardigheden verwerven, eenvoudige wiskunde-taal begrijpen en deze toepassen in praktische situaties

- reflecteren op eigen wiskundige activiteiten en resultaten op juistheid controleren
- eenvoudige verbanden, regels, patronen en structuren beschrijven en gebruiken
- onderzoeks- en redeneerstrategieën in eigen woorden kunnen beschrijven en gebruiken.'

De drie concrete kerndoelen voor meetkunde zijn in dit rapport als volgt omschreven:

'21: De leerlingen beschikken over eenvoudige noties en begrippen waarmee zij ruimte kunnen ordenen en beschrijven.[24]

22: De leerlingen kunnen ruimtelijk redeneren. Zij bedienen zich daarbij van bouwsels, plattegronden, kaarten en foto's en gegevens over plaats, richting, afstand en schaal.

23: De leerlingen kunnen schaduwbeelden verklaren, figuren samenstellen, bouwplaten van regelmatige objecten ontwerpen en identificeren.'

Deze doelen dienden in 1998 officieel van kracht te worden. Inmiddels wordt aan een herziening gewerkt, maar dat geldt niet voor rekenen-wiskunde. De algemene formulering maakt het mogelijk deze beschrijvingen zo te interpreteren dat ze die van *Proeve 1* dekken, op die van het leren visualiseren en schematiseren na. Deze was inmiddels vanwege haar minder specifiek-meetkundige karakter uit de doelbeschrijvingen verdwenen.[25] Toch bleken de beschrijvingen van de officiele kerndoelen meetkunde erg summier, hetgeen aanleiding was om deze in 1994 opnieuw nader te specificeren, maar hier komen we in deel D nog op terug.

Historische les

Het heeft dus heel weinig gescheeld of meetkunde was wederom – net als precies (!) honderd jaar geleden – in 1989 door maatregelen van hogerhand van het basisschoolprogramma geschrapt (zie A16). De precieze gang van zaken in de zomer van 1889 hebben we niet kunnen reconstrueren. Indien we niet de beschikking hadden gehad over een aantal gegevens uit het informele circuit zouden de hiervoor beschreven feiten van de afgelopen tien jaar niet boven water gebracht zijn. De historische vraag of persoonlijke interventies belangrijke beslissingen kunnen beïnvloeden, is voor dit geval duidelijk te beantwoorden. In hoeverre dit ook bij andere beslissingen voor het onderwijs het geval is, zou een interessante historische onderzoeksvraag kunnen zijn.

C5 De meetkunde van Wiskivon en haar effecten

In dit hoofdstuk besteden we aandacht aan de veranderingen in het meetkundeonderwijs voor de leerlingen van twaalf tot veertien jaar, zoals die begonnen zijn binnen het IOWO van de jaren zeventig en zich thans zelfs tot buiten onze grenzen voortzetten.

In C5.1 gaan we eerst de geschiedenis na van het ontwikkelingswerk dat in de jaren tussen 1973 en 1980 door de groep Wiskunde in het Voortgezet Onderwijs, kortweg Wiskivon, is uitgevoerd. We beperken ons daarbij tot de eerste twee leerjaren (brugklassen) van het voortgezet onderwijs (VO). De kern van deze paragraaf is de analyse van het fenomeen kijkmeetkunde, zoals de nieuwe aanpak toen werd genoemd. Net als bij ons onderzoek van de Wiskobas-meetkunde (zie C2) maken we gebruik van openbare en interne documenten. Verder is ook nu een enquête onder de voormalige medewerkers uitgevoerd.[1] De uitkomsten van de respons worden in C6 gebruikt ter verificatie van de historische getrouwheid van dit hoofdstuk.

Daarna beschrijven we in C5.2 de ontwikkelingen van het meetkundeonderwijs in de brugklassen van het voortgezet onderwijs vanaf 1980. We zullen nagaan welke de invloed is geweest van de Wiskivon-meetkunde van de tweede helft van de jaren zeventig op de schoolboeken. Omdat aan het eind van de jaren tachtig zich een nieuwe leerplanherziening aankondigde, ontstond de mogelijkheid verder ontwikkelingswerk, in het bijzonder voor de meetkunde, te verrichten. Dit werk is op verzoek van het ministerie, onder verantwoording van de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) uitgevoerd door de SLO en de vakgroep OW&OC. Dit had effecten op het onderbouwprogramma van het nieuwe leerplan van 1993. Onze aandacht gaat uit naar de aard en functie van de meetkunde in dit programma en uiteraard naar de samenhang met de 'kijkmeetkundige' opvattingen.

Het werk uit Utrecht kreeg allengs ook bekendheid in het buitenland. Zo is in de jaren negentig een Amerikaans-Nederlands samenwerkingsproject ontstaan, waarvoor door medewerkers van het Freudenthal Instituut ontwikkeling is verricht. De producten van dit werk zijn thans als een complete wiskundemethode onder de naam *Mathematics in Context* (*MiC*) voor de grades 5 tot 8 (in Nederland groepen 7 en 8 basisonderwijs en leerjaren 1 en 2 voortgezet onderwijs) uitgegeven. Dit *MiC*-programma bevat naast de domeinen algebra, getallen en waarschijnlijkheid en statistiek ook een leerlijn voor meetkunde, die zijn wortels heeft in de kijkmeetkunde. Omdat deze meetkundelijn naast nieuwe inhoudelijke aspecten ook een duidelijke structuur vertoont, is dit project niet alleen van belang voor ons historische onderzoek, maar kan het ook van betekenis zijn voor toekomstige ontwikkelingen in het Nederlandse basisonderwijs. Het is daarom dat we in C5.3 kort op de meetkunde van het *MiC*-programma ingaan. In hoofdstuk D4 zullen we in verband met een programmavoorstel voor meetkunde op de Nederlandse basisschool nog terugkomen op de leergangconstructie in het *MiC*-programma.

C5.1 Het meetkundewerk van Wiskivon (1971-1980)

Uitgangssituatie en startactiviteiten van Wiskivon

Omdat de kern van de taakstelling van het IOWO het ontwikkelen van een integraal (voor alle soorten onderwijs) en longitudinaal (van vier tot achttien jaar) leerplan was, stond de opdracht voor Wiskivon in relatie met die van Wiskobas. Ten aanzien van de uitgangspunten bestonden er echter verschillen voor de beide ontwikkelteams. In het voortgezet onderwijs (VO) was net het 'moderne wiskunde'-programma van 1968 ingevoerd, waarvoor de bijscholing voor de docenten nog gaande was. Het VO vormde een waaier van sectoren, die eigenlijk elk om een specifieke invulling van het wiskundeprogramma vroegen.

Het lager beroepsonderwijs (LBO) kreeg in eerste instantie de meeste aandacht, omdat juist het programma van 1968 het minst op deze sector toegesneden was. Gedurende de periode 1971-1973 werd nog nauwelijks leerlingenmateriaal voor de brugklas ontwikkeld. De titel van de LBO-brochure uit 1973, *Startpunt leerplan-ontwikkeling*, bevestigt dit, maar de inhoud geeft wel een indicatie van de richting, waarin men wilde gaan. Het inhoudelijke deel van deze brochure gaat uit van zes leerstofdomeinen: meetkunde, beschrijvende statistiek/grafische verwerking, meten, relaties en functies, waarschijnlijkheidsrekening, algoritmiek. Met het laatste werd computerkunde bedoeld. Opvallend is het ontbreken van algebra, rekenen en taal.

Wij beperken ons tot de meetkunde van deze brochure. Uitgaande van enkele buitenlandse methoden (Groot-Brittannië en de Verenigde Staten) werd een aantal voorbeelden van 'leerstofeenheden' besproken. Uitgangspunten waren dat de leerstof zich moest lenen voor het activiteitsprincipe (leren door doen) en dat de leerstof geschikt moest zijn voor LBO-leerlingen. De aangehaalde voorbeelden betroffen onder meer: ruimtelichamen, vlakke figuren, vlakvullingen, praktische metingen, vergrotingen, schaal, (lamp)projectie, mooie figuren. De bedoeling van een dergelijke opsomming was dat de lezer (de LBO-docent) een indruk zou krijgen wat voor soort meetkunde werd voorgestaan en dat de docent zelf eens in de klas kon experimenteren. De keuzen waren gedaan op grond van literatuurstudie en brainstormbijeenkomsten op het IOWO. Er zijn invloeden van het Wiskobas-werk in deze brochure aanwezig, maar nauwelijks op het gebied van de meetkunde. Zoals eerder beschreven, was het Wiskobas-team in die jaren ook nog zoekende naar een geschikte vormgeving en argumentatie van het meetkundeonderwijs.

In 1975 werd de *Wiskrant* gestart, een tijdschrift in de vorm van een krant, waarin voornamelijk informatie werd gegeven over de voortgang van het Wiskivon-project. In totaal omvatte de *Wiskrant* zes jaargangen met 24 'kranten'.

Pakketjes en thema's (1973-1980)

Vanaf 1973 werden door het Wiskivon-team zogenoemde leerstofpakketjes ontwikkeld, die direct bruikbaar waren in de klassenpraktijk. Zo'n leerstofeenheid voor enkele weken onderwijs bestond uit een leerlingenboekje (verbruiksmateriaal) en een handleiding voor de docent.[2] Voor meetkunde ontstonden zo in de periode 1973-1980 een twaalftal boekjes (zie literatuurlijst).

De pakketjes *Verpakkingen*, *Regelmatige figuren*, *Hoeken*, *Oppervlakte*, *Symmetrie*, *Klein en Groot* en *Pythagoras* waren alle in eerste instantie gericht op de begripsvorming en vaardigheid van traditioneel bekende meetkundige onderwerpen.[3] Maar alleen de vormgeving van dit materiaal straalde al een vernieuwende werking uit. Ook de mathematisch-didactische aanpak was totaal verschillend van wat tot dan in het VO usance was. Verschijnselen uit het alledaagse leven vormden de basis voor het aanschouwelijkheidsprincipe. Eigen activiteit en het motiverende karakter dienden het onderwijsleerproces te verbeteren. Begripsvorming werd geïnitieerd vanuit eerste intuïtieve verkenningen. Via de handleidingen werden mogelijkheden tot niveaudifferentiatie geboden. Het nieuwe van deze aanpak is met name herkenbaar in *Hoeken*, *Klein en Groot* en *Pythagoras*.

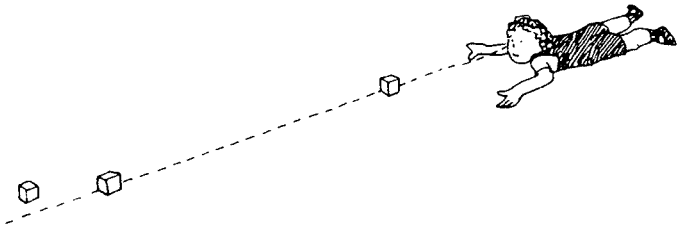
Het hoekbegrip werd opgebouwd vanuit de persoonlijke richtingoriëntatie van de leerling (kwartslag, halve slag, ...), maar ook door middel van lokaliseren op een kaart met een kompasroos. Sterk afwijkend van de gebruikelijke aanpak was die van het schaalbegrip. Dit onderwerp werd via verschijnselen uit de reële wereld in *Klein en Groot* aangeboden. Zo werd bijvoorbeeld door de leerlingen zelf op het schoolplein een schaalmodel van zon, aarde en maan gemaakt. Het pakketje *Pythagoras*, dat in een historische context was geplaatst, beoogde een inzichtelijke opbouw van de kernstelling van de metriek van de euclidische meetkunde en het zelf ontdekken van de irrationale getallen.

Was van deze pakketjes de inhoud in zekere zin nog in verband te brengen met de klassieke schoolmeetkunde, anders zou dit vanaf 1975 worden met de ontwerpen *Zie je wel* van Schoemaker en *Licht op Schaduw* en *Met het oog op diepte* van Goddijn. Hierop gaan we dadelijk nader in.

Bovendien kwamen nog enkele thematische pakketten ter beschikking. *Spionnen in de stad* is een verhaal waaraan wiskundige problemen werden ontleend. Hetzelfde gold voor *De reis om de wereld in 80 dagen*, dat geënt was op het bekende Jules Verne-verhaal. Hierin kwamen bolmeetkundige activiteiten voor, zoals kaartprojecties, plaatsbepaling, geografische lengte en breedte, afstand, routes, cirkel, symmetrie en tijdzones. *Belvia* was het meest meetkundige thema. Het handelde over het ontwerpen van een bungalow. Het meetkundige aspect was gecentreerd rond de kubus. Verder kwamen ook oppervlakte, schaal en kostenberekeningen aan de orde.

Kijkmeetkunde

Het begrip kijkmeetkunde kwamen we eerder tegen bij de beschrijving van het ontstaan van het Waterland-project en het PA-blok *Kijken, Doen, Denken en Zien* (zie C2). In *Zie je wel* staat het begrip kijk- of viseerlijn centraal: het kijken geschiedt langs een rechte lijn, hetgeen effecten voor waarneming en afbeelding heeft. Hierbij wordt gebruik gemaakt van perspectivische en anamorfotische vervormingen, toepassingen uit de zeevaart, zonsverduistering, camerastanden, aanzichten, horizon en portrettekenen met een glasplaat als tafereel.



figuur C5.1: Viseren (*Zie je wel*, 1979)

In de handleiding van *Zie je wel* vinden we een indruk van de beoogde doelen:

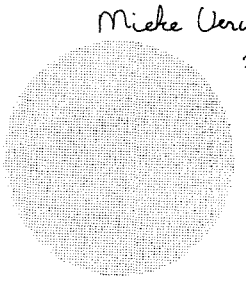
> '(er) wordt geprobeerd het kijken naar de wereld om je heen meer bewust te maken. Vanuit dit kijken komt het probleem van het vastleggen aan de orde. Het kijken naar plaatjes leidt tot het interpreteren van tekening of foto. Maar ook uit een tekst moet men zich een beeld kunnen vormen: in gedachte om iets heen lopen, nadenken over hoe iets eruit moet zien van de andere kant bekeken.' (Schoemaker, 1980, p. 1)

Deze ontwikkeling heeft haar vervolg gevonden in de schaduwmeetkunde van *Licht op schaduw* en de perspectiefmeetkunde van *Met het oog op diepte*. Ook hierin is de rechte lijn het basisbegrip, respectievelijk als lichtstraal en als kijklijn. Het activiteitsprincipe is ook nu weer een leidend motief voor de vormgeving van de onderwijspraktijk. De leerlingen dienen begrip te krijgen van schaduwvorming op grond van de rechtlijnige voortplanting van het licht; een verschijnsel dat kennelijk geen triviale eigenschap is en ook door ons geconstateerd is via het Pimbo-onderzoek, dat in deel D aan de orde komt. Eén van de startactiviteiten is afgebeeld in figuur C5.2.

De kern van het eerste pakketje betreft de verschillen van schaduwvorming door zonlicht en door lamplicht. Deze twee natuurlijke, alledaagse verschijnselen representeren meetkundig gezien respectievelijk de scheve parallelprojectie en de centrale projectie. De hierbij behorende fundamentele meetkundige eigenschappen zijn:

- scheve parallelprojectie: invariantie van lijn, evenwijdigheid en evenredigheid
- centrale projectie: invariantie van lijn, geen invariantie van evenwijdigheid en evenredigheid.

▶ Maak met een plakbandje een klein papieren rondje op de ruit vast. Ongeveer zo groot:



Als de zon niet schijnt, moet iemand het rondje vasthouden, een paar meter van de lamp.

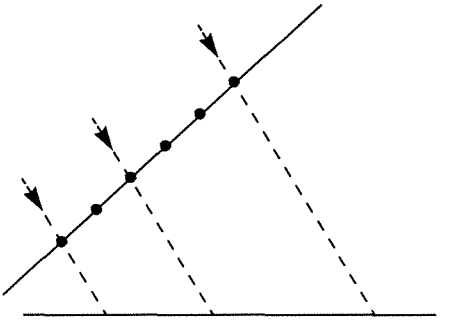
We hebben een rondje geknipt. En op het raam geplakt. En toen kwam William en die heeft met haar hand de schaduw van het rondje gevangen. Later hebben we het met papier gedaan en met een touw geteken of het recht was en het klopte nog ook

▶ Vang zo gauw mogelijk de schaduw van het rondje dicht bij de ruit in je handpalm op. Leg de schaduw heel voorzichtig op de grond.

Wat voor beweging heeft je hand nu gemaakt? van boven naar beneden In een rechte lijn. En van beneden naar boven.

figuur C5.2: Leerlingenwerk bij *Licht op schaduw* (Goddijn, 1980)

Al experimenterend (kijkend en doend) kunnen van deze kerneigenschappen van de meetkunde de eerste noties ontwikkeld worden. In een later stadium van het onderwijs komen deze eigenschappen op een meer formele manier aan bod. Als voorbeeld verwijzen we naar figuur C5.3, waar met behulp van een knopentouw en de zonneschaduw de centrale evenredigheidsstelling uit de planimetrie op aanschouwelijke wijze duidelijk wordt gemaakt. Dit leerstofpakketje sluit af met het verklaren van de maanstanden aan de hand van een model (bouwplaat).



figuur C5.3: Bij zonlicht blijven de lengteverhoudingen constant

De kern van *Met het oog op diepte* is de centraal-projectieve afbeelding, maar nu in het teken van het perspectiefverschijnsel. Dit blijft beperkt tot perspectivisch afbeelden met één verdwijnpunt. Uitgangspunt is de beroemde prent van Albrecht Dürer, waarin de methode 'oogpunt – object – tafereel' wordt 'gedemonstreerd'. Dit onderwerp borduurt voort op het portrettekenen door waarneming via een glasplaat, zoals dat in *Zie je wel* werd aangezet. De vormgeving van het pakketje kreeg door het uitgangspunt van de schilder- en tekenkunst ook een culturele meerwaarde. In wiskundige zin wordt het begrip evenwijdigheid via het vierkantenrooster, dat bij het praktische perspectieftekenen een beslissende rol speelt, zowel euclidisch als projectief nader onderzocht. Een apart pakketje *Evenwijdigheden* was meer voor de praktische vaardigheden bedoeld.

De invloed van de kijkmeetkunde, zoals in deze drie pakketten neergelegd, is van cruciale betekenis geweest voor de latere ontwikkelingen in het voortgezet onderwijs. Niet alleen voor de brugklassen, maar ook voor de hogere leerjaren, waar op de kijkmeetkunde voortgebouwd werd.[4]

Herkomst en beïnvloeding

Aanvankelijk hebben enkele Angelsaksische publicaties, met name die van het School Mathematics Project (SMP), inspiratie geleverd voor de eerste Wiskivon-ontwerpen. We zien dit bijvoorbeeld terug in *Verpakkingen* en *Regelmatige Figuren*. Aanleiding tot de ideeën over schaduw- en kijkmeetkunde van Wiskivon zijn terug te vinden in het eerdere Wiskobas-werk (*Waterland, Schip ahoj!, Schaduwproblemen* en in *Afstand, Tijd en Snelheid op Aarde*). Met *Zie je wel* werd in eerste instantie als proef geëxperimenteerd in de hoogste klas van de basisschool. De ontwerper, G. Schoemaker, had zijn twijfels over de haalbaarheid van ideeën over hoeken, schaduwen en viseren, zoals die in het integratieplan van Wiskobas aan de orde waren gesteld. Hij ging daarom met dit onderwerp in de brugklas aan de slag.

De verdere ontwikkeling van de kijkmeetkunde voor het VO werd vanaf 1978 vrijwel volledig ter hand genomen door Schoemaker en Goddijn. Deze ontwerpers werkten beiden vanuit een praktische visie op het meetkundeonderwijs. Hun beider hobby's, respectievelijk zeilvaart en fotografie, boden daarbij talloze aanknopingspunten. 'Doe iets met de meetkunde die je ziet' luidde het adagium.[5] Goddijn noemt in dit geval als inspiratie Minnaerts boek: *De natuurkunde van het vrije veld*. Zo kwam aan het eind van die jaren zeventig – wellicht zonder dat de ontwerpers zich dit volledig bewust waren – een inleidende meetkundecursus voor het VO tot stand, die de beste afspiegeling tot dan zou worden van de ideeën uit de *Übungensammlung* van mevrouw Ehrenfest uit 1932.

Programma en leerlijn

Vanaf 1977 werd een reeks publicaties gestart onder de titel *Leerplanontwikkeling onderweg*. In het zogenoemde *Raampjesplan*, dat als deel 1 van deze serie verscheen, werd onder meer een volgorde van de IOWO-pakketten aangegeven zoals die op de experimenteerschool werd gehanteerd. In deel 2a van deze serie (1980) vinden we een stuk over de wiskundige inhoud en de uitgangspunten van de Wiskivon-pakketjes voor de brugperiode.[6]

De verantwoording voor de wiskundige inhoud luidde in drie punten als volgt: 'Gekozen is voor die wiskunde onderwerpen', die 'helpen alledaagse verschijnselen te verklaren'; die 'iedere Nederlander eigenlijk zou moeten weten' en die 'knelpunten in het vigerende onderwijs' zijn (De Lange, 1980). Aan de hand hiervan werden de toen voorhanden zijnde Wiskivon-pakketjes (21 stuks) besproken. Tevens werden aan dit materiaal de drie uitgangspunten van het voorgestane wiskundeonderwijs in de brugklas gedemonstreerd: gebruik van contexten, concreet handelen en onderzoekend leren. Het nuttigheidsaspect van de wiskunde vierde duidelijk hoogtij.

Van de 21 opgesomde pakketten waren er maar liefst twaalf die over meetkunde gingen. Op deze overmatige aandacht wordt in genoemd stuk ingegaan onder de gelijktijdige vraagstelling waarom in het voorgestelde programma zo weinig algebra voorkwam, waarvoor toen in feite nog helemaal niets was ontwikkeld. De verklaring – we volgen nog steeds dit artikel – was dat de eerste twee uitgangspunten ('contexten' en 'concreet handelen') hoofdzakelijk tot meetkunde leidden. Allereerst lijkt deze gevolgtrekking niet erg sterk. Er zijn immers contexten te bedenken die tot algebra leiden en men kan ook concrete situaties bedenken, bijvoorbeeld in de statistiek, waarbij men niet alleen op meetkundige situaties stuit. Maar tevens kunnen we ons afvragen of deze argumentatie niet achteraf bedacht is. Waren immers veel van die meetkundepakketjes niet ontwikkeld omdat de ontwerpers zichzelf de vragen over de inhoudelijke kernproblemen hadden gesteld?

Hoe het zij, er lag begin 1980 een geweldige hoeveelheid meetkundemateriaal voor de brugperiode, terwijl aan een aantal andere domeinen geen aandacht was besteed. Maar ook met deze bron was nog geen meetkundeleerlijn voorhanden. Weliswaar probeerde Goddijn in een spoedig daarop volgend artikel aan te geven dat 'er steeds meer lijn in de meetkunde' kwam, maar daarin wordt bevestigd dat een sequentie pas achteraf bedacht was:

> 'De hier geschetste ontwikkeling van 'context met wiskunde' via 'wiskunde met context' naar wiskunde en context die onscheidbaar zijn, is natuurlijk pas achteraf door mij verzonnen. Het klopt echt wel in grote trekken, maar niemand heeft dit in 1973 zo bedacht en er plannen voor gemaakt die precies tot en met 31 december 1980 aangeven wat er moet gebeuren. Het ontstaan van bepaalde pakketten hangt natuurlijk ook samen met de belangstelling van de individuele Wiskivonner.'
> (Goddijn, 1980b, p. 32)

Er waren binnen het Wiskivon-project eigenlijk nooit bindende planningen gemaakt, noch was er van doelstellingen uitgegaan. Er was om zo te zeggen met bezieling en uit het hart aan meetkunde gewerkt. Op het moment dat het IOWO eind 1980 moest stoppen met ontwikkelen, was men eigenlijk net op gang gekomen. De gevolgen waren dat er geen afgerond resultaat tot stand was gekomen, dat een systematische uitlijning gemist werd en dat – om met Van Hiele te spreken – de verbinding met het volgende niveau ontbrak.[7] Wellicht dat er door de ontdekking van de nieuwe en fascinerende elementen van de kijkmeetkunde te veel nadruk was komen te liggen op de eerste twee stadia van Goffree's meetkundedidactiek uit *Kijken Doen Denken en Zien*: te veel 'kijken' en 'doen' en te weinig 'denken' en 'zien'.[8]

C5.2 Meetkunde in het voortgezet onderwijs (1980-1995)

Schoolboeken van de jaren tachtig

Het wiskundeprogramma voor het VO viel begin jaren tachtig nog steeds onder het leerplan van 1968. De meetkunde voor de brugklas had daarin een magere rol gekregen (zie B4). Datgene wat door Wiskivon ontwikkeld was, kon derhalve geen officiële invloed krijgen. Toch blijkt dat enkele schoolboeken zich in de jaren tachtig gaan afwenden van de formele verzamelingenaanpak, terwijl tevens de aandacht voor meetkunde weer gaat groeien. Een sprekend voorbeeld hiervan is de vierde editie van *Moderne Wiskunde* uit 1980, waaruit de verzamelingentaal geheel is verdwenen. Het boek begint met ruimtelijke lichamen (verpakkingen), er wordt gebruik gemaakt van roosters (onder meer in verband met oppervlakte en als hulpmiddel voor het tekenen) en er is aandacht voor symmetrie. De invloed van de materialen die door het IOWO tot het midden van de jaren zeventig ontwikkeld waren – zowel van Wiskobas als van Wiskivon – is evident.

Maar lang niet alle uitgevers wilden of durfden een nieuwe koerswijziging aan. Zo blijkt dat een veelgebruikte methode als *Getal en Ruimte* (tiende druk, 1983) op het leerplan van 1968 gebaseerd blijft: verzamelingen, transformatiemeetkunde met een tendens naar algebraïsering.

Een bijzonder boek uit de jaren tachtig was *Exact Wiskunde*, waaraan onder meer Van Dormolen meewerkte. Hierin vinden we veel meetkunde zoals bedoeld door het IOWO, ook volgens de opvattingen van de kijkmeetkunde. Een gewaagd experiment, waar nog steeds het leerplan van 1968 van kracht was.

Herziening van het VWO-programma van 1968, ontstaan van HEWET

Het wiskundeprogramma van 1968 betekende dat voor de bovenbouw van het Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs (VWO) het programma gesplitst was in Wiskunde I (analyse en statistiek) en Wiskunde II (vectormeetkunde). Het puur meetkundige element was geheel verdwenen. Om toegelaten te worden tot een studie in de sociale wetenschappen werd wiskunde I geëist. Vooral dit punt gaf al spoedig aanleiding tot een nieuwe bezinning op de eindexamenprogramma's van het VWO. In 1976 diende het IOWO bij het ministerie een plan in om tot een nieuwe uitwerking en indeling van de wiskunde voor het eindniveau van het VWO te komen: wiskunde A en wiskunde B. In 1978 werd door de toenmalige staatssecretaris van onderwijs K. de Jong Ozn. de 'Werkgroep van Advies voor de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en II v.w.o' ingesteld, later kortweg de commissie HEWET genoemd. In 1981 werd op de vakgroep OW&OC officieel begonnen met ontwikkeling van materialen voor de HEWET.[9] Er ontstond in relatief korte tijd (1981-1986) een nieuw programma, waarvan het A-gedeelte geheel in de historische ontwikkeling van de realistische wiskunde van het voormalige IOWO stond: *wiskunde in con-*

texten, gericht op toepassingen.[10] Opvallend is de terugkeer van de meetkunde, maar alleen in het B-programma, dus kennelijk alleen voor de Bèta's. Het eerste officiële eindexamen vond plaats in 1987.[11] Een zelfde ontwikkeling vond plaats voor het HAVO tussen 1987 en 1990.

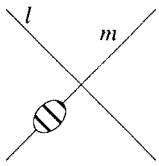
Een gat in de longitudinaliteit

Door het toenemend gebruik van de realistische reken-wiskundemethoden op de basisschool – in 1985 circa 50% – en het nieuwe HEWET-programma dreigde een gat te ontstaan in de doorgaande lijn van het wiskundeonderwijs voor de twaalf- tot zestienjarigen. Dit was vooral voor het LBO/MAVO een ongunstige ontwikkeling, dat immers nog steeds onder het leerplan van 1968 viel. Als illustratie van de daar nog steeds geldende formele aanpak verwijzen we naar twee eindexamenopgaven MAVO uit 1982, die in figuur C5.4 zijn afgebeeld.

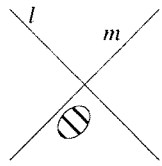
Gegeven zijn een lijn l en de punten P en Q.
P ligt op l en Q ligt niet op l.
Het aantal cirkels dat l in P raakt en door Q gaat, bedraagt

5	A	0
54	B	1
14	C	2
26	D	meer dan 2

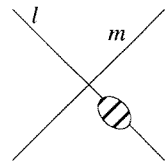
Gegeven zijn twee snijdende lijnen l en m.
In welke figuur geldt $d(P, l) \leqq d(P, m)$ voor *elk* punt van het gearceerde vlakdeel?



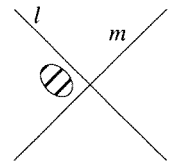
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

6	A	in figuur 1
7	B	in figuur 2
64	C	in figuur 3
22	D	in figuur 4

---

figuur C5.4: Meetkundeopgaven, eindexamen MAVO 1982

Voor de beide vakverenigingen: die van wiskundeleraren bij het VO, de NVvW en de net opgerichte vereniging voor het reken-wiskundeonderwijs, de NVORWO, was dit aanleiding om hierover in 1985 het rapport *Longitudinale planning van het reken & wiskundeonderwijs in Nederland* uit te brengen.[12] Hierin werden drie aanbevelingen gedaan: opstellen van einddoelen voor het BO, intensivering van nascholing en opleiding, zowel op de PABO als de NLO en het instellen van een commissie ter herziening van leerplan en examens voor het MAVO/LBO.[13] Ook van andere zijden werd aangedrongen op een herziening van het laatstgenoemde punt, zoals bijvoorbeeld blijkt uit het advies aan de Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid, opgesteld door Van der Blij en Treffers (1986). Het is staatssecretaris Ginjaar-Maas geweest, die zich ingespannen heeft een oplossing voor dit 'leerplan-gat' te vinden.[14]

Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW)

Als gevolg hiervan werd in het najaar van 1987 de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) ingesteld. Van der Blij werd voorzitter, later opgevolgd door De Lange. De opdracht was om in 1992 met adviezen te komen over:

- een leerplan MAVO/LBO en de eerste drie leerjaren HAVO/VWO
- een eindexamenprogramma MAVO/LBO-CD-niveau
- aanbevelingen voor nascholing docenten.

Voor het ontwikkelwerk werd het zogenoemde 'Team W12-16' opgericht, dat voornamelijk bestond uit medewerkers van de SLO en OW&OC. Dit team heeft van 1988 tot 1992 aan dit project gewerkt. De uitgangspunten kwamen overeen met die van het realistische reken- en wiskundeonderwijs.

In 1988 was door de SLO al een leerplanvoorstel voor de leeftijdsgroep van twaalf tot zestien jaar gepresenteerd onder de titel *Wiskundeonderwijs is nooit af*. In dit voorstel werden voor de eerste twee leerjaren van het VO de leerstofgebieden 'voortgezet rekenen', 'oriëntatie op meetkunde', 'verbanden grafieken en functies' en 'statistiek, combinatoriek en kans' onderscheiden. Wat de 'oriëntatie' op de meetkunde betreft, was door de SLO doorgegaan op de ideeën van de kijkmeetkunde, zoals deze door het IOWO in gang gezet waren.[15] Verder lagen er nog de in de jaren zeventig ontwikkelde materialen van Wiskivon. Het was op deze basis dat het 'Team 12-16' aan het werk ging.

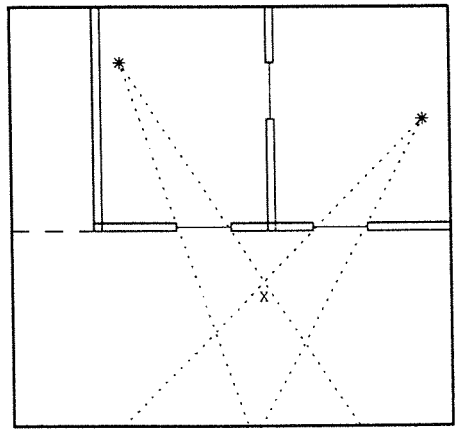
Tevens was in 1990 een 'Samenwerkingsgroep Wiskunde 12-16' gestart onder coördinatie van het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum (APS), waardoor de implementatie, scholing en nascholing vorm dienden te krijgen. In 1993 is het nieuwe leerplan reeds ingevoerd.

Kijkmeetkunde nader uitgewerkt en verklaard

In de publicatie *Achtergronden van het nieuwe leerplan 12-16*, verder kortweg *Achtergronden*, uit 1992 worden de inhouden van dit nieuwe leerplan in twee banden (meer dan 450 pagina's) beschreven. Wij beperken ons tot de meetkunde. Er werd gekozen voor 'praktijkgerichte meetkunde, zonder de weg naar pure abstractie af te sluiten', die naar vier inhoudelijke gebieden werd onderscheiden:

'– kijkmeetkunde
– meetkunde van vormen en figuren
– meetkunde over plaatsbepalen en
– rekenen in de meetkunde.' (*Achtergronden 2*, p. 25).

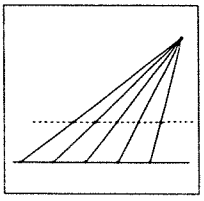
Het blijkt dat de ontwerpers voortbouwden op de ingeslagen veranderingen van de jaren zeventig. Meer dan eenderde deel van de *Achtergronden* wordt aan meetkunde besteed, waarmee dit domein een enorme nadruk krijgt. Het begrip kijkmeetkunde wordt nu voor het eerst min of meer gedefinieerd en wel als het onderwerp dat betrokken is op 'de relatie tussen afbeelding en werkelijkheid en de rol van het kijken zelf daarbij' (*Achtergronden 2*, p. 27). Ook wordt een zekere systematisering van de kijkmeetkunde gegeven. Er worden aan de hand van voorbeelden en in relatie met elkaar zes elementen onderscheiden: *kijklijn, de rol van het standpunt, kijkhoek, aanzichten en verklaringen, afbeeldingen in soorten en constructies*. Deze elementen zijn te onderscheiden in de tekening van figuur C5.5, waar de schematische weergave is afgebeeld van een kijkmeetkundeopgave. Twee kinderen (**) zien vanuit verschillende standpunten een roodborstje (x) in de tuin zitten. Het gebied waar het vogeltje zit, wordt met kijklijnen geconstrueerd. Het is meetkunde die geheel op de rechte lijn als kijklijn of lichtstraal is gebaseerd, waar geen berekeningen en geen formeel deductieve redeneringen aan te pas komen. Hoewel er geen leerlijn voorgeschreven is, wordt gesuggereerd dat deze wel te ontwikkelen is.



figuur C5.5: Waar kan het roodborstje (x) zitten? (*Achtergronden 2*, 1992)

Het genoemde artikel, dat steunt op praktijkervaringen en waarin bij herhaling gewezen wordt op moeilijkheden, die de kinderen (kunnen) ondervinden, lijkt voornamelijk een didactische steun te willen bieden aan de leraren die met dit nieuwe vak aan de slag moeten. De theoretische kern van de kijkmeetkunde ligt vervat in de verschillende projectieprincipes: *parallelprojectie* en *centrale projectie* (zowel van lijn als cirkel). Zie hiervoor figuur C5.6, waarin de zes basisvormen, zoals in genoemd stuk beschreven, staan afgebeeld.

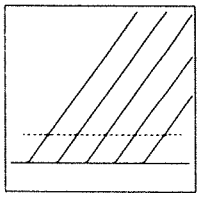
I: Lijn evenwijdig aan projectievlak, centrale projectie.



Situatie:
schaduw door lamp.
Eigenschap:
afstandsverhoudingen blijven kloppen.
Toepassing:
rekenen met vergrotingsfactor en eventueel met verhoudingen in driehoeken.

fig. 34

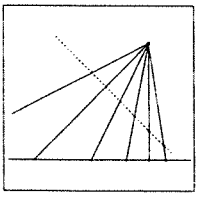
II: Lijn evenwijdig aan projectievlak, parallelprojectie.



Situaties:
schaduw door de zon, droog blijven bij regen.
Eigenschap:
afstanden blijven hetzelfde.
Toepassing:
bij élke situatie met twee stel evenwijdige lijnen.

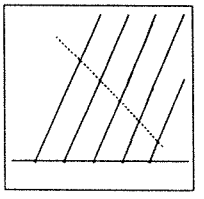
fig. 35

III: Lijn niet evenwijdig aan projectievlak, centrale projectie.



Situatie:
algemene situatie bij schaduw door lamp.
Eigenschap:
verhoudingen veranderen echt.
Toepassing:
als waarschuwing bij figuur 34.

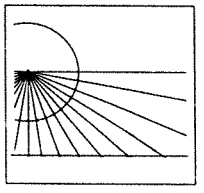
IV: Lijn niet evenwijdig aan projectievlak, parallelprojectie.



Situatie:
schaduw door de zon.
Eigenschap:
afstandsverhoudingen blijven kloppen.
Toepassing:
bij rekenen met verhoudingen in diverse figuren.

fig. 37

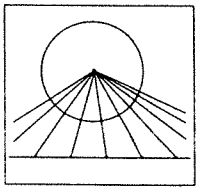
V: Punten op een cirkel met gelijke afstanden, centrale projectie.



Situatie:
schaduw van bol of cirkelvormige lampekap vanuit midden.
Eigenschap:
afstanden worden ongelijk.
Toepassingen:
bij redeneren over bijvoorbeeld foutieve hoogtemeting (zie bij 'Kijkhoeken').

fig. 38

VI: Gelijke afstanden op een lijn, centrale projectie vanuit midden van cirkel.



Situaties:
kijken naar rij mensen, hoeken bepalen.
Eigenschappen:
twee grenzen waar het tussen blijft, ongelijke hoeken die naar de buitenste punten kleiner worden.
Toepassing:
opbouw van ervaringsbasis voor tangensbegrip.

figuur C5.6: Zes basisvormen van projectie in de kijkmeetkunde (*Achtergronden 2*, 1992)

Naast de praktische toepassingen van de kijkmeetkunde is dit de wiskundige kern van dit onderwerp. In het verlengde van de ontwikkelingen van de jaren zeventig zijn een aantal begrippen nu nauwkeuriger omschreven, het perspectieftekenen met verdwijnpunten is weggelaten, het zogenoemde panoramaperspectief (afbeelden op een cirkel) is toegevoegd, het begrip kijkhoek is nader uitgewerkt en er is een aanvang gemaakt met een didactische onderbouwing.[16]

De didactisch verfijnde uitwerking van de kijkmeetkunde uit het achtergrondboek is niet terug te vinden in het cursusmateriaal voor de nascholing.

Overige meetkundeonderwerpen in '12-16'

De drie andere meetkundige onderwerpen (vormen en figuren, plaatsbepalen en rekenen) zijn minder nieuw in vergelijking met de kijkmeetkunde. Wel worden ze in het achtergrondboek in samenhang met de kijkmeetkunde beschreven. Ook het meten staat in nauwe relatie met de meetkunde. Bij de afsluiting van het project 12-16 werd het *Trajectenboek* gepresenteerd met aanbevelingen over de omvang van de stof. Voor de eerste twee leerjaren golden daarbij de volgende aanbevelingen:

leerjaar 1: circa 45 lesuren voor meetkunde op een totaal van 120 lesuren. De nadere precisering daarbij was: kijklijnen en kijkhoeken (6), ruimtelijk tekenen (6), aanzichten (6), vlakke figuren (7), ruimtelijke figuren (7), plaatsbepalen (7) en meten (7).

leerjaar 2 (voor het MAVO, LBO CD-traject): circa 30 uur op een totaal van 90 lesuren. Precisering: doorsneden (6), vlakke figuren (6), vergroten en verkleinen (6), omtrek, oppervlakte, inhoud (6), Pythagoras (6).[17]

Het kijkmeetkundige aspect is vooral in het eerste leerjaar geconcentreerd. Bij de beschrijving van de leerstof was uitgegaan van de formuleringen van de kerndoelen voor de basisvorming van dat moment. Voor de meetkunde luidden die als volgt:

'– de leerlingen kunnen vlakke afbeeldingen van ruimtelijke figuren, zoals foto's, plattegronden, landkaarten, bouwtekeningen lezen, interpreteren, ruimtelijk zich voorstellen en weergeven op papier of scherm
– de leerlingen kunnen concreet handelen aan de hand van voorstellingen van ruimtelijke figuren en aan tastbare voorwerpen. Zij kunnen uitslagen, patronen en dergelijke maken en vlakken uit ruimtelijke figuren op schaal (na)tekenen
– de leerlingen kennen de stelling van Pythagoras en kunnen deze in eenvoudige situaties toepassen
– de leerlingen kunnen eenvoudige berekeningen aan voorstellingen van ruimtelijke figuren uitvoeren
– de leerlingen hebben inzicht in de begrippen richting, evenwijdig, rechte hoek, loodrecht en afstand
– de leerlingen kunnen congruentie, symmetrie en patroonrelaties in of tussen figuren aangeven en eenvoudige transformaties herkennen en uitvoeren
– de leerlingen kunnen de invloed van vergroten en verkleinen aangeven op de relatie tussen lengte en oppervlakte, tussen lengte en inhoud.'
(*Trajectenboek*, 1992, p. 168)

We merken op dat de doelen zo geformuleerd zijn, dat aan dit onderwerp een zodanige vorm gegeven kan worden zonder dat van de kijkmeetkunde gebruik gemaakt zou worden. We zullen thans nagaan hoe de uitwerking van het ontwikkelwerk van het COW-team in samenhang met de geformuleerde doelen op de schoolboeken is geweest.

Uitwerking in de schoolboeken van de jaren negentig

Bestudering van de drie meest gebruikte methoden voor het voortgezet onderwijs, *Moderne Wiskunde* zesde editie, *Getal en Ruimte* en *Netwerk*, naar inhoud en methodiek voor de meetkunde, leidt tot de volgende constateringen:

1 Aan de formele kerndoelen is meestal precies voldaan.
2 Dit betekent dat een soort minimumprogramma is ontstaan.
3 De vraagstukken zijn soms erg eenvoudig. (In sommige basisschoolboeken komen lastiger opgaven voor.)
4 Veelal ontbreekt het bij de probleemstellingen aan een wiskundige kern, althans wordt die niet geëxpliciteerd.
5 Concreet handelen wordt aanbevolen, vooral bij constructies (bouwplaatjes).
6 De onderwerpen worden aangeboden in de vorm van geïsoleerde vraagstukken. Vaak worden nieuwe begrippen slechts eenmalig aangeboden.
7 De boeken kunnen als een soort sommenboeken gehanteerd worden, waarbij op zichzelf staande begrippen en vaardigheden aangeleerd worden.
8 Mede door de afwisseling met andere onderwerpen zijn doorgaande leerlijnen moeilijk te ontdekken.
9 Het typisch kijkmeetkundige aspect ontbreekt, maar zou door de leraar toegevoegd kunnen worden.
10 De methoden verschillen – wat de meetkunde betreft – weinig van elkaar.

Een gebruiker-docent van de nieuwe uitgave van *Getal & Ruimte* omschrijft zijn eerste ervaringen als volgt: 'Er zijn meer contextrijke opgaven dan vroeger (...). Toch is er ten opzichte van vroeger vrij weinig veranderd. Men streeft ernaar, dat programmawijzigingen voor de docent zo weinig mogelijk gevolgen hebben.' (...) 'Zo blijft wiskunde sommetjes maken en sommetjes controleren' (*Euclides 69*(3) p. 70). Er lijkt inderdaad in het algemeen niet erg veel veranderd. Gemeten naar datgene, wat in de achtergrondboeken beschreven is, moeten de uitwerkingen flets genoemd worden. Of de leraar met een nascholing van tien middagen, waarvan twee aan meetkunde besteed werden, voldoende toegerust was voor de implementatie, is een vraag waarop we niet kunnen ingaan.

Van de ideaal-typische beschrijving van de kijkmeetkunde is slechts een reeks individuele doe-opgaven overgebleven, waaruit naar onze mening de door de ontwerpers bedoelde essentie is verdwenen. Kijklijn wordt bijvoorbeeld als een nieuw begrip (als naam) op zich geïntroduceerd en niet gebruikt als didactische context om het begrip rechte lijn als drager van twee punten te doen postvatten. Kijkhoek is niet conform de ideeën van de ontwerpers uitgewerkt. Schaduwmeetkunde komt ternauwernood voor, hetgeen overigens strookt met de kerndoelen. De kern van de kijkmeetkunde – het essentiële verschil tussen parallelprojectie en centrale projectie – is

nergens te herkennen. Voor de verklaring hiervan zijn een aantal redenen aan te geven.

De beschreven kerndoelen zijn de leidraad voor de boekenschrijvers geweest, hetgeen aangeeft dat een werkelijk didactische vernieuwing niet via het beschrijven van kerndoelen alleen kan plaatsvinden. De uitgevers zullen ongetwijfeld voor een veilig innovatieve weg van zo min mogelijk ingrijpende wijzigingen hebben willen kiezen. Het niveau van de stof is gladgestreken, immers de kerndoelen moesten in verband met de voorziene basisvorming voor alle leerlingen van de eerste twee leerjaren van het gehele VO gelden. Wellicht ontbrak het de schoolboekauteurs voor meetkunde aan een te weinig praktisch uitgewerkt voorbeeldplan. Ten slotte was mogelijk het totale aanbod van de voorgestelde inhoudelijke en didactische vernieuwingen voor meetkunde te omvangrijk en te 'sofisticated'.

In verband met het laatstgenoemde merken we op dat zelfs het concreet-handelende karakter van het meetkundeonderwijs nog steeds weinig toepassing vindt in de onderwijspraktijk. Zo schrijft een gebruiker-docent van *Moderne Wiskunde*: 'Aan de doe-opdrachten zal menig leerkracht nog moeten wennen. Mede gezien de orde in de klas zal ik ze vaak overslaan; (...) 't Kost veel tijd om alle doelen van deze doe-wiskunde te bereiken. Verschillende leerlingen kunnen met verschillende ervaring toe. (...) je kunt desgewenst de basisstof beperken. Zinvolle diepgang in dit programma is niet eenvoudig' (*Euclides 69*(3) p. 68).

Samenvattend kunnen we stellen dat meetkunde in 1993 is teruggekeerd als apart onderwerp in de brugklassen van het VO, voornamelijk beargumenteerd om haar praktische waarde, niet in de euclidische vorm van vóór 1968, ook niet in de formele vorm van de transformatiekunde. De invloeden van de ontwikkelingen van de jaren zeventig (Wiskivon) en van het ontwerpteam 12-16 zijn zichtbaar, maar niet naar de geest van de ontwerpers.

'Realistische meetkunde is een uitgebreid en moeilijk te overzien gebied' (Goddijn, 1997, p. 11). In verband hiermee pleit Goddijn voor het opsplitsen van de meetkunde in zes gebieden: Symmetrie: figuren bewegen, maken en indelen (1). Verhoudingen: vergroten en verkleinen, gelijkvormigheid (2). Maat: inhoud, oppervlakte en omtrek (3). Ruimtelijk redeneren (4). Verkennen van vormen (5) en Plaatsbepaling (6). Daarbij moet de realiteit als leidraad genomen worden en bij 'deelonderwerpen een systematische inhoudelijke analyse' gegeven worden, 'die de relaties tussen de begrippen belichten'. Kortom, ook nu wordt weer voor een zekere structuur in de leergang gepleit.

Vergelijking van BO- en VO-boeken

Vergelijking van de door ons genoemde BO-schoolboeken met die van het VO maakt duidelijk dat er een grote mate van overlap van de meetkundestof bestaat. Aanzichten en vraagstukken hierover worden op vrijwel alle niveaus van de basisschool aan-

geboden. In de brugklasmethoden anno 1993 wordt echter opnieuw begonnen met dit onderwerp. Iets dergelijks geldt ook voor plaatsbepalen (coördinaten), viseerlijnen, symmetrie, bouwplaten, roostergebruik; zelfs worden bepaalde meetkundige onderwerpen (schaduw bijvoorbeeld) wel in het BO en niet in het VO aangeboden. Het meest opvallend is de overlap bij oppervlakte, waarvoor in het BO een leerlijn was ontwikkeld, maar waarbij in het VO dit onderwerp opnieuw uit de doeken wordt gedaan.

Wel komen ook nieuwe en vervolgonderwerpen voor: hoeken (gebruik van Geodriehoek), tekenen en construeren, doorsneden, som van de hoeken van een driehoek, transformaties, Pythagoras en enig meetkundig rekenen.

Onze conclusie is dat een goede afstemming van de BO- en VO-programma's voor meetkunde, zowel in de formulering van de kerndoelen als in de uitwerking in de methoden, anno 1996 nog niet tot stand is gebracht. Anders gezegd: op dit punt is het gat in de longitudinale leerlijn niet gedicht.

Mathematics in Context

dit hoofdstuk wezen we al op de door de jaren groeiende interna-
ling en waardering voor de opvattingen en ontwikkelingen van
udenthal', zoals dat in het buitenland vaak genoemd werd. Er ver-
5 enkele Engelstalige publicaties van het IOWO, verschillende me-
en ook in internationale tijdschriften te publiceren.[18]

g van De Langes proefschrift uit 1987 over het HEWET-project
nwerkingsproject tussen het Wisconsin Center for Education Re-
versiteit van Wisconsin-Madison in de Verenigde Staten en het
uut. Binnen dit project, dat gefinancierd werd door de 'National
n' (NSF), is in de periode 1991-1996 een 'comprehensive curricu-
' ontwikkeld. Dit heeft geleid tot de wiskundemethode *Mathema-
C*) voor de Amerikaanse grades 5 tot 8 (tien- tot veertienjarigen).
an het onderdeel meetkunde van *MiC* nu kort enige aandacht. Ten
rische lijn tot in het heden door te trekken, maar vooral omdat dit
ht mogelijkheden biedt voor een uitlijning van het meetkundeon-
nbouw van het Nederlandse basisonderwijs. Verder kan het van
e al eerder aangeduide aansluitingsproblematiek.

de Staten was men zich sinds het eind van de jaren zeventig gaan
New Math-mode van de jaren zestig. Nieuwe motivering van het
s werd toen met name gezocht in de criteria van toepasbaarheid
ke betekenis. In 1989 werd na voorbereiding door de National
rs of Mathematics (NCTM) een lijvig rapport uitgebracht onder de
and Evaluation Standards for School Mathematics, verder te noe-
met doelstellingen voor de grades K-4, 5-8, en 9-12, dus voor alle
tot achttien jaar. Het *MiC*-project diende uit te gaan van de *Stan-*
.[19] Voor meetkunde voor grade 5-8 luidt de *Standards*-omschrij-

he mathematics curriculum should include the study of the geometry
three dimensions in a variety of situations so that the students can ....

cribe, compare, and classify geometric figures;
d represent geometric figures with special attention to developing spa-

sformations of geometric figures;
d solve problems using geometric models;
nd apply geometric properties and relationships;
ppreciation of geometry as a means of describing the physical world.'
p. 112)

Als citaat bij deze omschrijving is Freudenthals omschrijving van meetkunde uit 1973 vermeld: 'Geometry is grasping space... that space in which the child lives, breathes and moves. The space that the child must learn to know, explore, conquer, in order to live, breathe and move better in it' (Freudenthal, 1973, p. 403).

'Grasping space' – *be-grijpen van de ruimte* – duidt op dezelfde filosofie als die waarvan het IOWO in de jaren zeventig bij de ontwikkeling van de realistische meetkunde uitging. Maar had men ook dezelfde uitwerking voor ogen? De algemene doelformulering bood immers ruimte voor verschillende praktische uitwerkingen. De toelichting in de *Standards* laat zien dat voor deze leeftijdsgroep de deductieve aanpak taboe is, maar dat gestart dient te worden met informele meetkunde, die in dienst staat van latere formalisering. Tevens wordt het belang van het leren geometriseren (visualiseren) van wiskundige problemen benadrukt. Een werkelijke toewending naar toepassingen of gebruikmaking van contexten als uitgangspunten voor de ontwikkeling van een meetkundig begrippenkader wordt niet expliciet genoemd. De omschrijving echter dat het leerproces in 'a variety of situations' kan plaatsvinden als ook de verwijzing naar Freudenthals 'grasping space' heeft het *MiC*-project de mogelijkheid geboden het domein van de meetkunde een 'kijkmeetkundig' karakter te geven.

MiC Geometry Strand

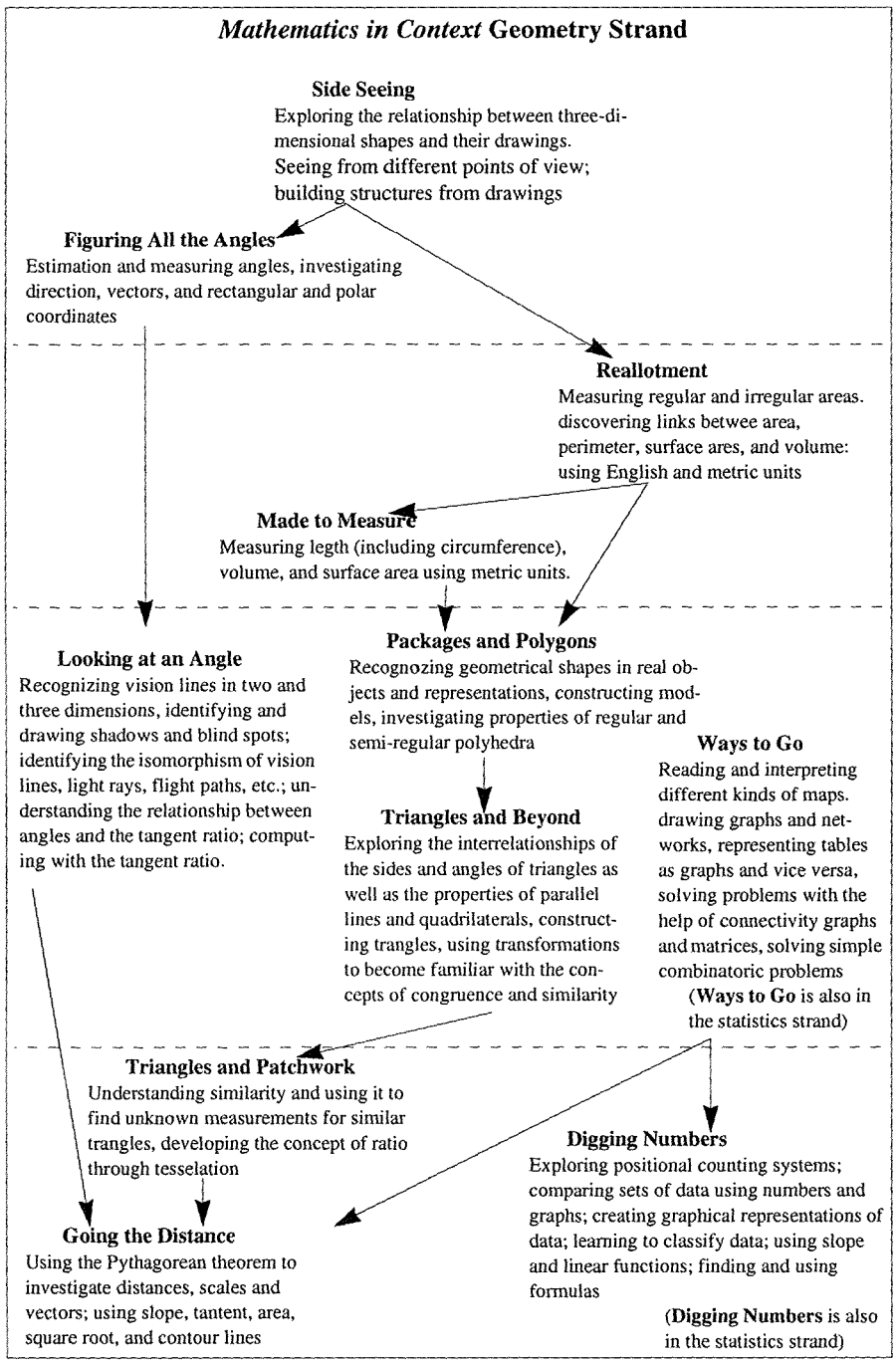
Ten behoeve van het domein meetkunde zijn voor het *MiC*-project elf boekjes ontworpen (zie literatuurlijst). In figuur C5.7 is een overzicht van het gehele domein te zien. Binnen dit domein worden drie hoofdlijnen onderscheiden:

- kijkmeetkunde: aanzichten, hoeken, viseren en projecteren
- twee- en driedimensionale figuren: aanzichten, oppervlakte, meten, verpakkingen en veelvlakken, driehoeken en vierhoeken, vlakvullingen
- grafen en toepassingen. [20]

Wij richten ons op de eerste twee lijnen, die een aanpak vertonen van zowel de kijkmeetkunde als van de 'traditionele informele' meetkunde. Beide vinden hun hoogtepunt in de stelling van Pythagoras.

Binnen de kijkmeetkunde-lijn is de invloed van de Nederlandse ontwikkelingen evident. Er is echter voor een andere sequentie van de begripsontwikkeling gekozen, waardoor ook andere accenten geplaatst worden.

Globaal ziet de gevolgde kijklijnleergang in *MiC* er als volgt uit: ontwikkeling van begrippen en verwerven van vaardigheden ten aanzien van de volgende onderwerpen. Aanzichten en plattegronden (inclusief hoogtegetallen). Richting en hoek vanuit dynamische situaties (draai); hierbij wordt gebruik gemaakt van globe, landkaart met gradencoördinaten, kompas. Vanuit de context van vliegroutes worden



figuur C5.7: Overzicht van de meetkunde in *Mathematics in Context*

routebeschrijvingen vastgelegd via afgelegde afstand en draaihoek. Viseerlijnen, projecties (centraal en parallel), constantie van verhoudingen, hoekbepaling (tangens), berekeningen; dit wordt gerealiseerd vanuit realistische kijksituaties, zoals uit de stuurhut van een schip, later gemodelleerd op vierkantenroosters met kubusbouwsels, waardoor het constructie- en het rekenaspect een didactische sturing krijgen.

Figuren-meetkunde in *MiC*

Deze lijn is 'traditioneler' van opzet. Men kan niet zeggen dat hierbinnen een typisch Nederlandse inbreng aanwezig is (of het zouden de Escher-patronen moeten zijn). De informele meetkundeaanpak vanuit oppervlakte, inhoud en het meten, waarbij gebruik gemaakt wordt van concreet handelen, kent een zekere traditie. Dit geldt ook voor het gebruik van vulling van het vlak door middel van driehoeken ten behoeve van gelijkvormigheid.

Globaal ziet de leergang er als volgt uit. Ontwikkeling van begrippen en verwerven van vaardigheden ten aanzien van de volgende onderwerpen. Oppervlakte door middel van omstructureren, effecten van vergroting, metriek stelsel, inhoud. Schatten en meten. Ruimtelijke modellen, constructies, klassificeren van vlakke en ruimtefiguren, regelmatige veelhoeken en de formule van Euler. Eigenschappen van driehoeken, som van de hoeken (empirisch), berekeningen van hoeken, evenwijdigheid, constructies, vierhoeken, translatie, rotatie en lijnspiegeling. Vlakvulling met driehoeken, waaruit de 'gelijkvormigheidsstellingen' volgen, berekeningen hiermee, samenhang met de centrale (lamp) en parallel (zon)-projectie.

Karakteristieken van meetkunde in *MiC*

Beschouwen we het meetkundeprogramma van *MiC* in zijn totaliteit, dan vallen de volgende karakteristieke punten op:

- het is een programma voor tien tot veertien jaar, dat duidelijke leerlijnen bevat
- het meer traditionele meetkundeaspect is zichtbaar gebleven
- de kijkmeetkundige leerlijn wordt verweven met de traditionele leerlijn
- er wordt, indien mogelijk, gestart vanuit concrete en realistische situaties
- er staan duidelijke doelen voorop
- de leerstof is per boekje duidelijk gestructureerd (per boekje een handleiding).

Bezien we het programma vanuit een meer didactisch en innovatief standpunt, dan ontdekken we het volgende:

- De kijkmeetkunde is niet in de eerste plaats uitgebuit om de kernbegrippen van de 'lijnen-meetkunde' (collineariteit, centrale projectie en parallelprojectie) te

doen postvatten. Men heeft de elementaire noties van kijk- en viseerlijn min of meer als natuurlijke gegevens opgevat.
- De kernstelling van gelijkvormige vergroting wordt niet ontleend aan de kijkmeetkunde, maar aan de vlakvulling met driehoeken.
- Bij de kijkmeetkundige problemen zijn de situaties vaak voorgestructureerd door van eenheidsblokken (kubussen) en vierkantenroosters uit te gaan.
- Een centrale rol in de aanloop van de leerlijn speelt het 'navigeren en oriënteren'. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een poolcoördinaten systeem uit de luchtvaart. Dit betekent dat het begrip hoek en de maatindeling volgens een kompasroos (0-360 graden) direct aan de orde komt.
- Bij de ontwikkeling van het hoekbegrip wordt uitgegaan van het draaibegrip vanuit het individu.
- Aan de aspecten van de transformatiemeetkunde (translatie, rotatie en lijnsymmetrie) wordt beperkte aandacht besteed.

Reeds in grade 5 (Nederland: groep 7) wordt op een tamelijk hoog niveau met hoeken gewerkt. Volgens Feijs en De Lange (1994) zouden de experimenten met deze aanpak voor hoeken in een Amerikaanse situatie met succes zijn verlopen.

De Nederlandse situatie kent nog geen werkbare meetkundeleerlijn voor de basisschool, terwijl tevens de aansluiting met het VO niet past, zoals we in het voorgaande hebben vastgesteld. Dit is op z'n minst een reden om het meetkundeprogramma van *MiC* ten behoeve van de ontwikkeling van meetkunde in het Nederlandse basisonderwijs verder te bestuderen. In D4 gaan we nader in op de noodzaak van consensusvorming voor de Nederlandse situatie. Daar komt ook een door de auteur van deze studie opgesteld programmavoorstel aan de orde, waarbij gebruik gemaakt is van de ideeën van de leerlijnen in *MiC*.

C6 Samenvattende conclusies, verificatie, analyse (1970-1995)

Samenvatting Wiskobas-meetkunde 1971-1980

De eerste ontwikkelingen voor meetkunde als nieuw vak voor de basisschool vonden plaats in de periode 1971-1973 van het Wiskobas-project en stonden nog onder enige invloed van de structuralistische en empiristische stromingen van de New Math-beweging van de jaren zestig.

Het in 1973 ontworpen Waterland-project voor de eerste twee leerjaren van de lagere school kan beschouwd worden als een doorbraak naar een nieuwe opvatting van meetkunde voor de basisschool. Met name in het jaar 1974 volgde een groot aantal meetkundige ontwerpen en publicaties, die van realistische contexten uitgingen. In het algemeen valt in het midden van de jaren zeventig een revival van meetkunde waar te nemen.

Er ontstond een trend om 'meetkunde in ruime zin' op te vatten, waarbij het leren visualiseren als een belangrijke doelstelling van het meetkundeonderwijs werd genoemd. Freudenthal was hiervan zowel de interne als de externe boodschapper. De opvatting 'meetkunde in ruime zin' is in verdere externe onderzoeken een rol blijven spelen.

Een behoorlijke definiëring van het domein meetkunde is in de jaren zeventig niet tot stand gekomen. Wel was duidelijk dat – ook na consultatie van het veld – elementen van de Wiskobas-meetkunde, zoals die toen in concrete onderwijsactiviteiten gestalte kregen, in ieder geval tot het programma voor de basisschool moesten gaan behoren en wel als 'leren beschrijven, begrijpen en beheersen van de ruimtelijke wereld om ons heen'. Daarmee zou meetkunde in de Nederlandse situatie een eigen, oorspronkelijke vorm krijgen, afwijkend van de wetenschappelijke en onderwijskundige traditie en afwijkend van wat zich via buitenlandse stromingen had aangeboden.

Gedurende de periode 1975-1980 is voor het onderwerp oppervlakte apart ontwikkelingsonderzoek uitgevoerd, dat aangrijpingspunten bood voor constructie van leerlijnen in methodes. Daarbij zijn ook microdidactische aspecten van dit onderwerp in een nieuw licht gesteld. Tevens is in deze periode veel aandacht besteed aan het onderwerp 'blokjes bouwen' als nieuw meetkundig onderwerp voor de gehele basisschool.

Ten slotte is gedurende de tweede helft van de jaren zeventig door Wiskobas een grote hoeveelheid praktisch materiaal ontwikkeld voor wiskundige activiteiten voor kleuters. De achterliggende filosofie voor de onderwijspraktijk was dat de vorm via geïntegreerde activiteiten gestalte diende te krijgen, waarbij niet alleen de (wiskundig) cognitieve functies, maar ook de sociale, emotionele en fysieke ontwikkeling van de kleuter maximale kansen voor ontplooiing zouden krijgen.

Effecten van de meetkundeontwikkelingen zijn terug te vinden in de realistische

reken-wiskundemethoden voor het basisonderwijs van de jaren tachtig en negentig. Alleen in de methode *Rekenen en Wiskunde* kan gesproken worden van een leerlijn. Enkele auteurs van deze methode, met name Gravemeijer en Kraemer, hebben de ontwikkelingen voor meetkunde als vak voor de basisschool ook gedurende de jaren tachtig gaande gehouden.

Verificatie van de Wiskobas-ontwikkelingen

1971-1973

In de bijlagen C-I, C-II en C-III zijn de resultaten te vinden van de schriftelijke enquête en de daaraan gekoppelde evaluatiebijeenkomst. Alle twaalf aangeschrevenen hebben de vragen beantwoord en deelgenomen aan de evaluatiebijeenkomst.[1]

Duidelijk is dat alle respondenten – allen met een euclidisch-traditionele achtergrond – bij de start van het Wiskobas-project in 1971 geen welomschreven idee hadden waar meetkunde voor de basisschool voor zou moeten staan.[2] Er werd niet uitgegaan van een vooropgezet plan, noch van een vooropgezette leerlijn, noch van (leer- of denk-)psychologische theorieën. De doelstellingenlijst van het zogeheten *Eerste Oriëntatiepunt* en het *Ontario-programma* dienden als een voorlopig houvast. Maar deze aanvankelijke richtpunten verdwenen haast ongemerkt uit het zicht. Toch werd als een vrijwel vanzelfsprekende zaak meetkunde tot het domein van het reken-wiskundeprogramma van de basisschool gerekend. Aan de feitelijke ontwikkeling van specifieke meetkunde-activiteiten werd in die periode geen voorrang gegeven. Dit weerspiegelt zich ook in de eerste twee jaargangen (1971-73) van het *Wiskobas Bulletin.*

Buitenlandse invloeden waren er vanuit het Nuffield-project, het Hongaarse programma van Varga en het Amerikaanse Usmes-project, maar deze dienden meer als startpunten dan als onderwerpen voor bewerking.

De betekenis van het artikel van Freudenthal uit 1971 om het aanvankelijk meetkundeonderwijs meer het karakter van 'onderzoek van de reële ruimte' te geven, vond in die periode slechts bij enkele medewerkers weerklank. Sommigen hadden er in die tijd zelfs geen kennis van genomen.

De vragenlijst en de mondelinge evaluatie over de periode 1971-1973 bevestigen dus het beeld dat uit het documentenonderzoek naar voren was gekomen.

1973-1975

Tijdens de evaluatiebijeenkomst was één van de gesprekspunten 'Waterland als bron' (zie bijlage C-III). Algemeen werd bevestigd dat tijdens die fase van het leerplanontwikkelingswerk in dit thema de potentiële rijkdom voor een nieuwe aanpak van het reken-wiskundeonderwijs, waarin rekenen en ruimtelijke oriëntatie verweven waren, ontdekt werd. Op de gekozen locatie (Waterland) kon een aantal van de eerdere ontwerpen een plaats krijgen. Er had zich in de voorafgegane periode 1971-

1973 kennelijk een zodanig vruchtbaar proces voltrokken, dat de tijd nu rijp was dat een doorbraak als hiervoor beschreven, kon plaatsvinden.[3] Dat er toen een geheel andere kijk op meetkunde ontstond, zoals door de auteur van deze studie op grond van de geschreven documenten verondersteld, werd eenstemmig bevestigd. Maar de veronderstelling dat dit zich als direct gevolg van Freudenthals reeds bestaande opvattingen voltrokken zou hebben, werd vrijwel unaniem afgewezen. Slechts enkele van de medewerkers kenden toen het werk van mevrouw Ehrenfest, waardoor van directe beïnvloeding vanuit haar werk binnen dit specifieke onderwerp op de meeste medewerkers geen sprake kon zijn. Veelmeer werd het ontwerp- en ontwikkelwerk voor Waterland herinnerd als prototype van een gezamenlijk creatief proces. Ook ontwerpen ten behoeve van andere onderwerpen hebben een dergelijk interactief ontwikkelingsproces gekend.

Wel werd erkend dat de meetkundige activiteiten van Waterland vanaf eind 1973 een opvatting over meetkunde binnen Wiskobas (en later binnen het gehele IOWO) zijn gaan bepalen. Deze opvatting zou zich in de jaren na 1973 steeds sterker manifesteren.[4] We menen derhalve te mogen stellen dat op dit punt – Waterland als doorbraak naar de realistische meetkunde – de opbrengsten van het documentenonderzoek, de schriftelijke enquête en de evaluatiebespreking een duidelijk *uniform beeld* vertonen.

De convergente opvattingen, geverifieerd zowel via het documentenonderzoek als via een check op de vragenlijsten, behoeven over het algemeen geen nadere toelichting. Een voorbeeld van een check achteraf betrof de opstelling van de leerlijn in leerplandeel 2. Op de hierop betrekking hebbende enquêtevraag 5 werd unaniem geantwoord dat dit achteraf was gebeurd en dat dit toen nog een nadere uitwerking behoefde.

Er werden echter ook twee *niet-uniforme beelden* geconstateerd. Deze betroffen de volgende voorname kwesties: de opvatting over meetkunde in de jaren zeventig en de invloed van Freudenthal.

Opvatting over meetkunde bij Wiskobas

Uit het documentenonderzoek is gebleken dat meetkunde in het midden van de jaren zeventig binnen de Wiskobas-groep niet alleen gezien werd als vak op zich, maar ook als doel om te leren visualiseren: 'meetkunde in ruime zin'. Dit is onder meer beschreven door Freudenthal (1974, 1985), Goffree (1974, 1975), De Moor en Treffers (1974, 1975) en De Jong e.a. (1975). In de schriftelijke enquêtevraag 8 werd deze vraag opnieuw aan de orde gesteld. Het merkwaardige feit deed zich nu voor dat tien van de twaalf respondenten categorisch stelden dat zij meetkunde toen niet in die 'ruime zin' opgevat hadden. Meetkundige modellen waren weliswaar belangrijk, maar het onderwijs in de meetkunde was daarvoor niet (in eerste instantie) bedoeld, zo kunnen de tien antwoorden samengevat worden.

Tijdens de evaluatiebijeenkomst gaf dit opnieuw aanleiding tot discussie. Ten eerste werd opgemerkt dat onderscheid gemaakt diende te worden tussen 'meetkundige modellen' (een landkaart, ...) en 'visualiseringsmiddelen' (een getallenlijn, ...). Maar ook werd duidelijk dat het vooral Freudenthal was geweest die de ruime opvatting van meetkunde voorstond. Dit wordt bevestigd door zijn herhaling van het stuk uit 1974 in 1985 met een naschrift dat het aspect van het visualiseren nog eens benadrukte.[5]

Freudenthals invloed bij Wiskobas

De opvattingen van de respondenten op de enquêtevraag 7 (Freudenthals invloed op de Wiskobas-meetkunde) lopen sterk uiteen: van 'totaal geen invloed' tot 'van doorslaggevende aard'. Unaniem, ook tijdens de mondelinge evaluatie, was men van oordeel dat Freudenthal geen ontwerper was. Nooit heeft hij een praktisch ontwerp gemaakt. Ook, zo bleek vooral tijdens de evaluatie, was hij geen directe initiator. Hij kwam nooit met voorstellen die een bepaalde richting hadden kunnen bepalen; althans niet tijdens de praktische werk- en studiebijeenkomsten van Wiskobas, kadervorming geheten, waar ideeën besproken werden. Wel wees hij op feilen en onvolkomenheden, riep hij vragen op en gaf praktische hints. Dit alles zowel op micro- als op macroniveau ten aanzien van mathematische inhouden als ten aanzien van de didactiek en de theoretische onderbouwing.[6] Tijdens de studiebesprekingen heeft hij niet expliciet verwezen naar mevrouw Ehrenfests opvattingen, terwijl hij dat in zijn geschriften over meetkunde nooit naliet. Maar, zoals eerder gezegd, een aantal van de Wiskobas-medewerkers had in die tijd van deze geschriften niet eens kennisgenomen. Ter Heege verwoordde Freudenthals invloed als volgt: 'Ongetwijfeld invloed gehad, maar dat stond voor mij niet voorop. Zijn invloed was niet veel nadrukkelijker dan die van de anderen. Bewust maken van het belang van observeren en vaststellen van inzicht'. Uit deze mededeling wordt nogmaals duidelijk hoe belangrijk het groepsproces binnen Wiskobas was. Maar ook onthult deze opmerking op indirecte wijze iets over de positie van Freudenthal, namelijk als een relatief gelijkwaardige participant in het interactieve groepsproces.[7] Al had hij een globaal idee van het aanvankelijk meetkundeonderwijs als verkenning van de fysische ruimte, toch heeft het groepsproces hem nieuwe inzichten over meetkunde op de basisschool verschaft. De inspiratie hiervoor verkreeg hij met name door het werk dat hij in de klassenpraktijk met de kinderen ervoer. Zijn belangrijkste inbreng voltrok zich door middel van dit praktische werk, dat samen met de ontwerpers werd uitgevoerd. Deze ervaringen leidden vele malen tot didactische beschouwingen die, nadat ze weer terug in de groep gebracht waren, van essentiële waarde bleken te zijn. Mede daardoor kon het ontwikkelingswerk op een hoger niveau gebracht worden.

Toch – zo blijkt uit de schriftelijke enquête en de mondelinge evaluatie – werd Freudenthal door de Wiskobas-medewerkers wel als een belangrijk initiator in alge-

mene zin, ook voor de meetkunde, beschouwd. Hij was, zoals Wijdeveld het uitdrukte 'het zuurdesem van het Wiskobas-werk, maar hoe je een brood moest bakken, wist hij niet'. Doordat hij veel van zijn praktische ervaringen omzette in meer algemene en theoretische beschouwingen, werd het meetkundige werk verrijkt met een aantal nieuwe inzichten. Sommige waren van specifieke of microdidactische aard, maar andere zoals het principe van 'ik zie het zo!' bouwde hij uit tot meer algemene principes. Dit laatste heeft er mede toe bijgedragen dat in het midden van de jaren zeventig meetkunde in meer ruime zin opgevat werd.

Het feit dat sommigen van de respondenten toch menen dat Freudenthals invloed van doorslaggevende betekenis voor het meetkundewerk van Wiskobas is geweest, ligt waarschijnlijk aan de individuele ervaringen en persoonlijke kennis van zaken in die tijd. Degenen, die zijn eerdere opvattingen kenden, zagen veel van wat toen ontstond in dat licht. Anderen meenden dat – juist doordat Freudenthal zo onbevangen te werk ging – veel van het nieuwe meetkundige werk unieke en oorspronkelijke vondsten waren.

Enquêtevraag 6: kleuterwiskunde

Negen van de twaalf respondenten zijn op de vragen over de kleuterwiskunde ingegaan. Het in C2 geschetste beeld wordt bevestigd, althans voor zover de vragen reikten. Met name wordt door verschillende respondenten gewezen op het belang van een geïntegreerde aanpak en het belang van het observeren. Meetkunde kon niet op zichzelf beschouwd worden, maar kon op zich weer een onderdeel zijn van totaalactiviteiten met een impliciet wiskundig karakter.

De Gooijer-Quint bevestigt dat de reeds ontworpen activiteiten voor de eerste twee leerjaren een duidelijke rol hebben gespeeld, met name was Waterland 'een belangrijke inspiratiebron'. Ook wijst zij op het belang van Freudenthals theoretische onderbouwingen, die als het ware het ontwerpwerk schraagden.

Samenvatting ontwikkelingen voortgezet onderwijs 1971-1995

De meetkundeontwikkelingen voor het voortgezet onderwijs zijn bij het IOWO vanaf 1973 op gang gekomen. Er werd gestart met praktisch toepasbare onderwerpen uit de empiristische richting. Vanaf 1975 ontstonden een aantal typisch kijkmeetkundige onderwerpen. Het onderdeel kijkmeetkunde kreeg een enorm groot aandeel in het door Wiskivon ontworpen leerplan. De aanvankelijke invloed (in de jaren tachtig) van de kijkmeetkunde op de methoden was klein, omdat men nog aan het formele programma van 1968 moest voldoen. De doorwerking van dit werk voor meetkunde kon pas zichtbaar worden in het begin van de jaren negentig, toen er een nieuw leerplan voor 12-16 (basisvorming) ontwikkeld werd. Meetkunde keert dan als vak terug, niet meer in euclidische vorm, maar als 'realistische meetkunde'. De kerndoelen zijn geheel in deze stijl geformuleerd, maar als een soort minimum. De methoden

voor de basisvorming vertonen weliswaar trekken van de kijkmeetkunde, maar de fundamentele vernieuwingsgedachten – vooral in didactische zin – blijken afwezig. De afstemming tussen de meetkundeprogramma's van voortgezet onderwijs en basisonderwijs is onvoldoende.

Verificatie ontwikkeling Wiskivon-meetkunde 1971-1980

In de bijlagen C-IV en C-V zijn de gegevens te vinden over de door ons uitgevoerde enquête. Het vragenformulier was aan zestien voormalige Wiskivon-medewerkers toegestuurd.[8] Hiervan zijn er vijftien teruggestuurd, waarvan twee niet ingevuld. We beschikken dus over dertien respondenten.

Er blijkt bij de meest betrokkenen in die tijd een redelijk *uniform beeld* te bestaan over deze kwestie, hetgeen tot de volgende conclusies leidt:

- de feitelijke gegevens over de ontstaansvolgorde van de meetkundeontwerpen kloppen
- de tamelijk onconventionele werkwijze wordt bevestigd
- men wilde voortbouwen op het Wiskobas-werk
- de betekenis en invloed van het eerdere Wiskobas-werk wordt bevestigd [9]
- er werd niet volgens een bestaand wetenschappelijk ontwerpmodel gewerkt
- men hechtte geloof aan het begrip niveaudifferentiatie
- er was vooraf geen leerlijn gepland
- de invloed van Freudenthal als stimulator wordt erkend
- er werd nauwelijks gebruik gemaakt van bestaande didactische theorieën
- uit vrijwel alle antwoorden spreekt een grote persoonlijke betrokkenheid en de ervaring van de IOWO-tijd als persoonlijk belangrijke leerschool.

Divergent waren de meningen over:

- de betekenis en belang van het begrip 'meetkunde in ruime zin', zoals dat toen gehanteerd werd
- de vraag of er voldoende 'uitontwikkeld' was in 1980.

Analyse

Er is in onze geschiedschrijving geen periode geweest van turbulenter veranderingen in het Nederlandse wiskundeonderwijs – in het bijzonder in het meetkundeonderwijs – dan het laatste kwart van de twintigste eeuw. De redenen daarvoor zijn zowel van maatschappelijke, wetenschappelijke als onderwijskundige aard. Hoewel de veranderingen spectaculair zijn, lagen ze toch in de lijn der verwachtingen, als we de voorgaande honderd jaar als een soort incubatietijd beschouwen voor een meer informeel meetkundeonderwijs. Opvallend zijn echter de grote gelijkenissen tussen

de inhoudelijke en didactische opvattingen van mevrouw Ehrenfest uit 1931 en die van de kijkmeetkunde van het IOWO uit de jaren zeventig.

Hoe zou dit proces verlopen zijn als mevrouw Ehrenfest en Freudenthal niet zulke diepgaande voorstellen hadden gedaan, als zij niet met volharding hun standpunten telkens maar weer naar voren hadden gebracht en niet steeds weer ter discussie hadden gesteld? Hoe zou dit verlopen zijn als Dijksterhuis zich in de jaren twintig niet zo fel verzet had? En hoe zou dit verlopen zijn als we in Nederland in de jaren zeventig niet de gelegenheid gehad hadden om zulk intensief ontwikkelingswerk te verrichten, iets wat enkele jaren daarvoor volstrekt ondenkbaar was geweest? Het lijken zinloze vragen, maar onze analyse wijst toch sterk in de richting dat een aantal individuele persoonlijkheden hierin een belangrijke rol heeft gespeeld.

De feitelijke wijzigingen worden uiteindelijk door de overheid bepaald. Soms zonder dat er een gedegen veldraadpleging heeft plaatsgevonden, zoals bij de invoering van het moderne wiskundeprogramma van 1968 en de verwijdering van de oude meetkunde. Hoezeer ook bij dergelijke beslissingen persoonlijk ingrijpen van beslissende betekenis kan zijn, is gebleken bij het vaststellen van de kerndoelen voor het basisonderwijs in 1989. Het domein meetkunde was bijna van tafel geveegd als er toen er geen persoonlijke actie was ondernomen.

Het meetkundeprogramma in de basisschoolboeken vertoont niet alleen per methode grote verschillen, maar ook blijkt de geest van de oorspronkelijke ontwerpen soms ver te zoeken. De uitwerking in de schoolboeken voor het VO van medio negentig is tamelijk kaal en ons inziens van een te gering niveau. Verder is duidelijk dat van een passende aansluiting tussen BO en VO geen sprake is. Kortom, er is een groot verschil tussen ideële ontwikkeling en praktische uitwerking in de boeken en de praktijk van het onderwijs, iets dat trouwens ook bij andere innovaties waarneembaar is. Of dit constante historische gegeven in de praktijk van de leerplanontwikkeling betrokken moet worden, is een vraag die verder strekt dan de aard van dit onderzoek.

Vergelijking van de kerndoelen voor meetkunde voor de basisvorming (tot vijftien jaar) en die voor de basisschool maakt duidelijk dat de in de schoolboeken geconstateerde discrepantie ook in de kerndoelen tot uiting komt. Men kan zich afvragen of formulering en vaststelling van (kern)doelen voor een domein dat zowel het BO als het VO bestrijkt, niet een andere procedure behoeft dan tot nu toe gevolgd is. Zouden vakdidactici hierin niet een prominentere rol moeten vervullen?

Tot slot van deze analyse merken we op dat tot nu toe nog geen gebruik gemaakt is van de (nota bene door Nederlandse ontwikkelaars gemaakte) producten voor het Amerikaanse onderwijs. We doelen op het meetkundeprogramma in *Mathematics in Context*. De resultaten van dit project kunnen van nut zijn voor een heroverweging van de Nederlandse programma's voor de bovenbouw van het BO en de brugklassen van het VO.

In C0 stelden we als specifieke onderzoeksvragen voor dit deel C:

a Hoe is de realistische meetkunde op de basisschool (Wiskobas, 1971-1981) ontstaan?
b Wat is de doorwerking hiervan op de methoden voor de basisschool geweest?
c Hoe is de kijkmeetkunde in het VO ontstaan (Wiskivon 1975-1981)?
d Welke betekenis heeft de kijkmeetkunde voor verdere ontwikkelingen gehad?
e Wat is de ontstaansgeschiedenis van de kerndoelen van de realistische meetkunde geweest en hoe zijn deze gelegitimeerd?

Wij menen dat door middel van het beschreven documentenonderzoek en de uitgevoerde enquêtes de gestelde vragen beantwoord zijn. De opbrengst leert ons echter meer: wij hebben ook kunnen vaststellen dat de nagestreefde situatie niet bereikt is.

In het volgende deel D zullen de uitkomsten van het zogenoemde Pimbo-project besproken worden. Hieruit krijgen we een indruk van de huidige stand van zaken voor het domein meetkunde op de basisschool. Op grond van die gegevens en op basis van de historische ontwikkelingen gedurende de periode 1970-1995 zullen we in onze slotbeschouwing een aantal aanbevelingen doen voor de toekomst.

Bijlage C-I

Vragenlijst oud Wiskobas-medewerkers

1 Eigen opvatting over meetkunde vóór 1971
Hoe stond je midden en eind jaren 60 tegenover meetkunde in het algemeen? Welke opvatting (empirisch/ traditioneel-euclidisch/ structuralistisch) stond je voor? Kende je een vormende waarde aan het vak toe? Had je idee van mogelijke praktische waarde? Had je toen al het idee dat meetkunde een plaats diende te hebben op de basisschool? Welke argumenten had je daar voor? Aan wat voor soort meetkunde dacht je? En aan welke omvang? Waren dit eigen ideeën of was er sprake van een bepaalde beïnvloeding?

2 Eigen ontwerpen
Noem de meetkunde-ontwerpen van na 1971 van jezelf of die je met anderen hebt gemaakt, liefst met jaar van ontstaan en aanleiding. Ook die voor PA en HO-blokken. Geef, indien mogelijk, ook aan hoe het idee tot stand is gekomen: artikel, boek, gesprek, spontaan idee.

3 Meetkunde in Dreesschool-programma
Kun je je herinneren of en hoe meetkunde een plaats kreeg in het eerste ontwerp-programma voor de Dreesschool? In hoeverre hebben buitenlandse invloeden hierbij een rol gespeeld? Hebben we daarbij voor meetkunde in strikte zin een leerlijn voor ogen gehad? Is daar in de beginfase ook over gediscussieerd?

4 Meetkunde in ruime zin
Door het didactische idee van het visualiseren werden alle schema's, modellen, tabellen en dergelijke tot de meetkunde gerekend (meetkunde in ruime zin). Dit voltrok zich zo ongeveer vanaf 1975.
Hoe stond je toen ten opzichte van deze opvatting? Was hiermee het idee van meetkunde in strikte zin, dus als zelfstandig onderwerp vervallen? Was je het er toen mee eens dat meetkunde alleen nog als een soort bindend element opgevat diende te worden?

5 Leerlijn meetkunde
Toch wordt in leerplandeel 2 (model voor een schoolwerkplan) een meetkundelijn geschetst. Hoe is die tot stand gekomen? Welke uitgangspunten lagen er aan ten grondslag? Hoe zeker waren we en welke verwachtingen hadden we toen dat al deze onderwerpen ook verwerkelijkt zouden kunnen worden?

6 Kleuterwiskunde (meetkunde)
Pas vanaf 1975 zijn we ons echt met de kleuters gaan bezig houden.
Welke waren op dat moment de globale ideeën binnen het team voor de leerplanontwikkeling voor dit niveau, in het bijzonder die voor de meetkunde?
Er is een programma-voorstel voor de kleuterschool gemaakt. In hoeverre speelde het meetkundige element hier een rol in? Van welke bestaande ideeën, zowel praktische als theoretische, is daarbij gebruik gemaakt?
Tevens stond voor ogen een programma voor de KLOS te maken. In hoeverre is dit gelukt? Hoe groot was het meetkundige aspect in dit programma? Hoe was de acceptatie van het veld? Zou je een kernachtige beschrijving kunnen en willen geven van wat we toen bedoelden met

kleuterwiskunde (meetkunde)?

7 Freudenthal
Welke invloed heeft Freudenthal binnen Wiskobas in verband met meetkunde uitgeoefend?

8 Voldoende ontwikkeling?
Meende je in 1981 dat er voldoende materiaal lag voor de schoolboekenauteurs om een verantwoorde keuze te doen? Of had je toen de gedachte dat hiertoe nog meer onderzoek en ontwikkeling diende te geschieden? Welke onderwerpen, wat voor onderzoek? (Alleen dat wat je toen in 1981 daarover dacht.)

9 Meetkunde-didactiek
Bij meetkunde voor de basisschool was de onbekendheid met het onderwerp wellicht al uitdagend genoeg voor het ontwerpen van uitwerkingen van nieuwe leerstof. Maar namen we het didactische aspect ook direct in ogenschouw? Welke nieuwe, hernieuwde of bestaande didactische elementen, zowel op micro- als macroniveau, zijn toen ontstaan of opnieuw leven ingeblazen?

10 Persoonlijke ervaring
Beschrijf ten slotte kort datgene wat voor jou persoonlijk in verband met het meetkundeonderwijs op de basisschool de meest belangrijke lering is geweest tussen 1971 en 1981.

Bijlage C-II

Overzicht enquête meetkunde oud-Wiskobas-medewerkers*

1 Eigen opvatting over meetkunde voor 1971

Alle teamleden hebben een 'traditioneel-euclidische' meetkunde-scholing gehad en dachten in de jaren zestig ook meestal nog in deze traditie. Drie geven aan geloof te hechten aan de 'vormende waarde' van de meetkunde, één wijst dit expliciet af, de overigen gingen niet op dit aspect in. Eén van de respondenten vermeldt het gedachtegoed van Fröbel als belangrijke achtergrond. EW, FG en AT geven blijk van hun onvrede met het toen vigerende rekenonderwijs.

EW pleitte in die tijd in de kweekschoolwereld al voor 'rekenen vanuit/met het alledaagse leven', waaronder 'ruimtelijke verkenningstochten of wiskunde te velde' in de vorm van 'projekten, waarin aardrijkskunde, natuurkunde en wiskunde' geïntegreerd zouden worden. Meetkunde diende volgens hem ook een plaats op de basisschool te krijgen vanwege de maatschappelijke waarde, de voorbereidende waarde en het motiverende aspect. FG pleitte toen voor een empirische aanpak van de meetkunde op de basisschool. AT verwijst naar de praktische ideeën van mw. Ehrenfest en Van Albada.

Voor zover men ervaring had met de lagere school, wordt meegedeeld dat er nauwelijks systematisch gedacht werd aan meetkunde voor deze tak van onderwijs. Wel wordt gewezen op empirische activiteiten bij handenarbeid.

EW, FG en AT, die de voortrekkers op het gebied van de vernieuwing van het rekenonderwijs op de lagere school waren, waren bekend met de ontwikkelingen in het buitenland en wilden in ieder geval de beide hoofdstromingen New Math en de 'empiristische richting' nader bestuderen. Zij waren ook op de hoogte van de Nederlandse ontwikkelingen betreffende het rekenonderwijs en de meetkundedidactiek.

De antwoorden op vraag 2 zijn niet opgenomen. Er is een aparte lijst van ontwerpen gemaakt, die in de literatuurlijst is opgenomen.

3 Meetkunde in het Dreesschool-programma

Uit de antwoorden van de respondenten op de vraag of er enig vooropgezet plan aan de meetkunde in het begin van de ontwerpfase (1971-1973) ten grondslag lag, blijkt eenduidig dat dat er niet was. In eerste instantie lag de nadruk voor de Dreesschool op het opzetten van een nieuw rekencurriculum (HtH). Voor het rekenprogramma was 70% van de tijd gereserveerd (AD). Er werden motiverende meetkundige activiteiten ontworpen, meestal onder de titel 'verlevendiging' van het rekenonderwijs. 'Een leergang (leerlijn) was er niet en was ook niet in discussie' (FG).

Er werd dus ook niet uitgegaan van een bestaande leerlijn uit een buitenlandse methode. Systematische bestudering van de buitenlandse methoden en van psychologisch onderzoek op het gebied van de meetkunde (Piaget) behoorde niet tot de methode van ontwerpen. Wel hebben een aantal ideeën voor meetkundige ontwerpen hun oorsprong gehad in het Nuffield-werk en het Hongaarse *Munkalapok* van Varga.

Over het feit of er discussie was over meetkunde, in het bijzonder over een leerlijn, verschillen de meningen. Het is mogelijk dat hier de herinneringen in de tijd verschoven zijn. (Na 1973 is er meer over meetkunde gediscussieerd dan in de aanvangsfase, EdM). EW stelde in de aanvangsfase dat de leerstof, dus ook de meetkunde, zichzelf motiveerde (FG). Dit gegeven van inspirerende leeractiviteiten als uitgangspunt voor de leerplanontwikkeling (AT

sprak over activiteiten als doelstellingen) wordt door meerdere respondenten genoemd. EW formuleerde het als volgt: 'We werkten toen toch eigenlijk allemaal al uit de filosofie die later de 'realistische visie' mocht gaan heten. En daarbinnen spreekt het toch vanzelf dat meetkunde niet alleen meedoet, maar minstens evenwaardig, essentieel onderdeel is van het programma.'

4 Meetkunde in ruime zin

Vrijwel unaniem wordt door de respondenten gesteld dat meetkundige modellen niet tot de meetkunde gerekend dienen te worden. Sommigen vonden het zelfs een wat merkwaardige vraag (toch is dit indertijd ter sprake geweest, denk aan HF, die meende dat meetkundige structuren wellicht vooraf gingen aan getalstructuren, zie ook leerplandeel 2, EdM). JvdB dacht hier anders over: 'kinderen dienen zich iets te realiseren'; ook AD zag veel in de verbinding van meetkundige modellen en rekenen.

Er is niet zo expliciet ingegaan op de vraag of meetkunde na 1975 meer als bindend element werd opgevat. LS wijst er bij herhaling op dat hij de meetkunde verstrengeld wilde zien met andere leerlijnen en of leerstofvlakken. JvdB zag de meetkunde als 'dienstmaagd'. Wel wordt door verschillende respondenten gewezen op de toen door JvdB in het leven geroepen term 'wiskundige werldoriëntatie', waarbij de omringende wereld getalsmatig én meetkundig verkend wordt. Enkelen spreken over 'meetkundige wereldoriëntatie'. FG wilde hierbij zelfs meer getalsmatige en formele aspecten buiten beschouwing houden.

Gemeenschappelijk in de beantwoording van deze vraag is dat het idee van meetkunde als het begrijpen van de wereld toen tot de leerstof voor de basisschool diende te gaan behoren: 'leren beschrijven, begrijpen en beheersen van de ruimtelijke werld om ons heen' (EW).

5 Leerlijn meetkunde

De leerlijn meetkunde in het model voor een schoolwerkplan (leerplandeel 2) is achteraf tot stand gekomen, zo luidt het unanieme atwoord. Deze was geconstrueerd door EW op basis van de ontwerpen die er toen in de zogenoemde raamplannen lagen: 'Gewoon door alle onderwerpen bij elkaar te harken die in de Drees waren ontworpen' (JvdB).

Over het algemeen werd dit nog niet als een volledig uitgewerkte leerlijn gezien. LS en HtH wijzen erop dat bepaalde ontwerpen vanzelf voor- of na-activiteiten opriepen, waardoor 'vanzelf' een zekere longitudinaliteit ontstond.

Wat betreft de verwachtingen van het team over de realiseerbaarheid, merkt RdJ op dat de opgestelde leerlijn voor verdere ontwikkelingen een leidraad had kunnen vormen. HM merkt op dat dat de 'constructeurs t.a.v. de realiseerbaarheid hogere verwachtingen hadden dan het team als totaal'. Ook AT was over de realiseerbaarheid afwachtend, maar positief gestemd.

6 Kleuterwiskunde (meetkunde)

Niet allen hebben deze vraag beantwoord. Ook door de anderen zijn de vragen niet volledig beantwoord. Er bestaat overeenstemming dat ontwikkelingen voor het kleuterprogramma pas later (vanaf 1975) op gang gebracht zijn.

Een leerlijn voor de vier- tot zesjarigen is nooit opgezet. Dat streed ook met de opvattingen binnen de groep. Men was het er over eens dat het in deze leeftijdsfase ging om vrije, motiverende activiteiten, waarbij de mogelijkheid geboden werd om eerste 'noties' van wiskundige (meetkundige) begrippen op te doen. Afgewezen werden werkbladen en starre dogmatische voorbereidende oefeningen. Wel werden de vele losse activiteiten in het teken van voorbereiding op het latere reken-wiskundeprogramma gezet.

Voor de ontwerpactiviteiten (JdG, EW, en JvdB) waren de toen bestaande ontwerpen als Waterland een grote bron van inspiratie. Er zijn toen talloze nieuwe ontwerpen gemaakt: verrekijker, kijkdoos, bouwen, mozaïeken, lego, spiegelen, ... JdG ging uit van de volgende aspecten ter beschrijving van het onderwijs: interactie, spel, contexten, conflicten, begripsvorming in brede zin. Zij onderscheidde de volgende vakinhouden: oriëntatie eigen lichaam/in de ruimte/in het platte vlak; oriëntatie in de tijd/meetkundige oriëntatie; meten/wegen; ordenen/vergelijken/hoeveelheden/tellen. Voor de toenmalige KLOS leefde het woord 'meetkunde' niet, maar bij confrontatie van de activiteiten ontstond herkenning met oude waarden van het kleuteronderwijs (JdG). Voor de KLOS is geen echt programma gemaakt.

Nog enkele saillante opmerkingen:
'Kleuterwiskunde heeft tel-aspect, vorm-aspect en relatie-aspect' (EW). 'Wiskobas heeft het kleuteronderwijs behoed voor een programma' (HJ). 'Vergeet niet het 1+ boek' (RdJ). 'Kleutermeetkunde is wat de kleuter beleeft, als hij/zij met de grote meester de wereld intrekt' (FG). 'HF gooide logiblokken aan de kant en wees op de speelgoedkast' (FG). 'Verhoudingen speelden een sleutelrol' (LS).

7 Freudenthal

De opvattingen over HF's invloed lopen sterk uiteen: van totaal geen invloed tot van doorslaggevende aard. Daarom volgt hier per respondent een samenvatting van zijn/haar antwoorden:

FG: De invloed van HF was doorslaggevend. HF wees Ehrenfests *Übungensammlung* af vanwege de toegang tot de euclidische meetkunde. Ook wees hij de transformatiemeetkunde af. Wees op de observaties van Van Hiele-Geldof, niet op de theorie van Van Hiele. Wees op meetkunde als verschijnsel en het beschouwen van de wereld in een meetkundige context.

AT: Weinig. Stond positief t.o.v. meetkunde en het visualiseren. Niet veel aangedragen, wel subtiele suggesties. Ik (AT) heb de *Übungensammlung* genoemd, hij niet.

EW: Geen praktische ideeën. Hij was het 'zuurdesem' voor het Wiskobas-werk, maar hoe je een brood moest bakken, wist ie niet. Wel leverde hij de verrassende en frisse krenten voor het brood en hij wist het grandioos te verkopen. Meest saillante over meetkunde: 'Ik zie het zo!'

HJ: Heeft gewezen op de Fröbel-ideeën. Nooit een specifiek pleidooi voor of tegen meetkunde gehouden.

HM: Zoals alle invloeden van HF. Meester in samenbundeling en verheffing van ideeën. Dit heeft grote invloed gehad op de groep.

LS: De blikwisseling dat de abstracte meetkunde haar wortels heeft in de realiteit. De bewustmaking van het besef dat je voor de meetkunde ook terug moet naar de oerbronnen.

HtH: Ongetwijfeld invloed gehad, maar dat stond voor mij niet voorop. Zijn invloed was niet veel nadrukkelijker dan die van anderen. Bewustmaking van het belang van observeren en vaststellen van inzicht.

JvdB: Meetkunde is een empirische wetenschap. Belang van observeren van leerprocessen. Het idee van 'lokale lijntjes'. Was soms ook heel negatief over ontwerpen.

JvB: Weinig invloed op meetkunde en het denken daarover.

RdJ: Hoofdzakelijk als stimulator. Tegenhouden van transformatiemeetkunde?

AD: Vooral door de kadervormende bijeenkomsten oefende hij invloed uit.

JdG: Theoretisch houvast bij de begripsvorming van kleuters: 'topografische structuren', 'construeren' en 'lokaliseren'. Belang van observaties.

Samenvatting:
De invloed van HF is kennelijk sterk persoonsgebonden geweest. Toch komt wel een zeker totaalbeeld naar voren: HF heeft geen directe praktische ideeën aangedragen. Wel zag hij veel in meetkunde, ook voor de basisschool. Voor de totale leerplanontwikkeling achtte hij meetkunde als verkenning van de ruimte onmisbaar. Zijn bijdragen waren voornamelijk van microdidactische aard, die een extra dimensie kregen door zijn eigen observaties. Door zijn 'theoretische' beschouwingen' achteraf konden bepaalde activiteiten in een breder kader gezet worden. Voor een aantal van de Wiskobas-groep heeft hij ook voor de meetkunde een zeer stimulerende rol gespeeld.

8 Voldoende ontwikkeling?
Twee respondenten vonden dat er voldoende ontwikkeld was. Eén zegt dit niet te weten. De overigen stellen dat de ontwikkeling nog niet klaar was. Wel stelt een aantal dat er voldoende mooi materiaal lag voor de methodenauteurs die de geest van Wiskobas begrepen hadden. Van een verantwoorde keuze kon echter nauwelijks gesproken worden, omdat de auteurs tamelijk eclectisch te werk zijn gegaan (HtH). Voor meten en meetkunde ontbrak nog het fundament (HtH). De prioriteiten lagen toen anders (cijferen, hoofdrekenen, breuken, ...). Sommigen menen dat er nog een meetkundelijn geconstrueerd diende te worden. Anderen zijn van mening dat een strakke leerlijn voor meetkunde voor de basisschool niet vereist is. 'Men kan niet verantwoord kiezen in de zin van Gravemeijers theoriegeleide bricolage. Ook Gravemeijer zelf destijds niet' (FG).

9 Meetkundedidactiek.
Algemeen wordt geantwoord dat op macroniveau het didactische element van de meetkunde voor de basisschool niet direct beschouwd kon worden, omdat het om een nieuw onderwerp ging. Wel wordt door de meeste respondenten gewezen op het toen opkomende uitgangspunt 'wiskunde als menselijke activiteit', dat uiteraard een nieuw didactisch handelen vereiste. Van de theorie van Van Hiele werd geen gebruik gemaakt. Het Wiskobas-werk heeft dus geen macrodidactische theorie of beschouwing voor meetkunde opgeleverd. Een aanzet daartoe is later ontstaan in het PABO-blok *Kijken, doen, denken en zien*, waarbij met name het redeneren en reflecteren centraal stonden. Ook in de deelleergang over oppervlakte kan gesproken worden van een macrodidactische opbouw.

Een antwoord op genoemde vraag werd destijds wel afgedaan met 'meetkunde didactiseert zichzelf'. In ieder geval riep het onderwerp, al of niet opgenomen binnen 'wiskundige wereldoriëntatie', didactische, maar ook psychologische vragen op. Het was een nieuw onderwerp, dat niet geblokkeerd werd door de traditionele opvattingen. Omdat de leerplanontwikkeling zich vanuit de praktijk voltrok, werden talrijke microdidactische vondsten gedaan: blikwisseling, belang van reële contexten, gezond-verstand-methode, redeneren op elementair visueel niveau, belang van construeren, oriënteren en lokaliseren als eerste meetkundige activiteiten, verhoudingen in meetkundige context, mentaal-visuele voorstelling voorafgaande aan het concrete, onzichtbaarheden, completeren, omstructureren, conflictsituaties, kracht van visuele bewijzen, enzovoort.

Aan het eind van de jaren zeventig werd ook het werk van Margaret Donaldson bekend, dat een andere kijk gaf op de meetkunde-experimenten van Piaget.

10 Persoonlijke ervaring
FG: Meetkunde in de eigen wereld; aandacht voor de geschiedenis van de meetkunde in didactisch perspectief; serieuze meetkunde voor kleuters.

AT: Waterland als mooiste context; Vierkuber-project; werk van Goddijn en Kindt.
EW: De volkomen vanzelfsprekendheid waarmee de grote rijkdom van 'ruimtelijke oriëntatie' in het reken-wiskundeprogramma werd opgenomen; de 'ontdekking' van de non- of premathematische fase bij kleuters, die óók bij meetkunde een rol speelt.
HJ: Gaat hier niet op in.
HM: Weet niet.
LS: Het project *Zon zien.* Sleutelwoord schaduw. Eén van de meest inspirerende en enerverende onderwijservarigen die ik ooit heb gehad.
HtH: Het zelf kunnen ontwikkelen van meetkundige problemen; het enthousiasme dat meetkunde bij anderen (kinderen en volwassenen) opwekte.
JvdB: Dat je geen grip op meetkunde kunt krijgen; acties van kinderen zijn niet in systemen te vatten; meetkunde lijkt het leven te zijn: meetkunde is leven!
JvB: Het leren 'redeneren in voorstellingen' o.m. met het thema blokjes bouwen; (meetkunde moet een oefening van de geest blijven).
RdJ: Het spannende van het nieuwe onderwerp; meetkunde steeds als afzonderlijke activiteiten gezien, maar anderen wilden structuren (leerlijnen) maken.
AD: Een geheel andere kijk op meetkunde gekregen.
JdG: De inspirerende Wiskobas-ontwerpen maakten meetkunde tot een 'levend' onderwerp; de KLOS-conferentie van 1977 was voor de docenten een eye-opener.

Aanvullingen

Gewezen werd op het belang van de Wiskivon-ontwikkelingen; op het bestaan van video-opnamen. Verder aanvullingen op de ontwerpen. FG stuurde zelfs een persoonlijk dagboek op waarin hij onder meer naar mw. Ehrenfest verwijst.

* De geënquêteerden zijn aangeduid met hun initialen. Voor de volledige namen zie noot 1 van C6.

Bijlage C-III

Discussiepunten t.b.v. evaluatiebijeenkomst 6 september 1996

Meetkunde in de beginjaren

Bij de start van het Wiskobas-project werd als vanzelfsprekend ook meetkunde tot het domein van het reken-wiskundeprogramma van het basisonderwijs gerekend. Er werd niet uitgegaan van een vooropgezet plan. Wel was als oriëntatie een lijst doelstellingen voorhanden die beïnvloed was door structuralistische én empiristische opvattingen. De doelstellingen voor meetkunde waren sterk geïnspireerd door het *K-13 Geometry Report* uit Canada. Deze doelen waren afgeleid uit de wiskunde zelf en hadden weinig relatie met de realiteit. Aan de feitelijke ontwikkeling van specifieke meetkunde-activiteiten werd in die periode geen voorrang gegeven. Dit weerspiegelt zich ook in de eerste twee jaargangen (1971-73) van het *Wiskobas Bulletin*, waarin over meetkunde – behalve over het stadsplan en het spijkerbord – nauwelijks iets is te vinden. De heroriënteringsboeken voor de onderwijzers bevatten wel twee onderwerpen (stadsplan en spijkerbord), die tot een aantal praktische meetkundeontwerpen voor de basischool hebben geleid. De genoemde lijst doelstellingen verdween bijna ongemerkt uit het zicht. Een artikel van Freudenthal uit 1971 om het aanvankelijk meetkundeonderwijs meer het karakter van 'onderzoek van de reële ruimte' te geven, vond in die periode nog geen weerklank.

Vraag: Is dit een juiste weergave van dit tijdperk?

Waterland als bron

Eind 1973 ontstond het idee van Waterland als een thema over 'wiskundige wereldoriëntatie' (zes weken reken-wiskundeonderwijs voor klas I).
Fred Goffree bracht een ansichtkaart mee met een panoramische kaart van Ameland. Op grond daarvan tekende hij de wandplaat van Waterland met haven, vuurtoren, molens, dorpjes, berg, wegennet, ruimtelijk doolhof, stadsplan, blokkenberg, ... Een wereldje vóór en ván de kinderen, waarnaar ze met een boot op reis gingen. Aan de hand van dit project 'wereldgeoriënteerd wiskundeonderwijs' ontstonden onder meer de volgende meetkundige activiteiten:

- foto's van details: waar stond de fotograaf? (oriënteren en lokaliseren)
- foto's vanaf de varende boot, verschuiving van vaste objecten (viseren)
- foto's vanuit verschillende posities: aanzichten (oriënteren)
- toelopen op twee objecten van verschillende hoogten: kijkhoek (viseren)
- verrekijker-activiteiten (viseren)
- routes beschrijven: (lokaliseren)
- routes maken (construeren)
- kaarten maken (construeren)
- wegwijzers plaatsen (oriënteren en lokaliseren; redeneren)
- kortste routes bepalen (meten)
- lengtemetingen (meten)
- blokjes bouwen n.a.v. blokkenberg: aanzichten, plattegronden (redeneren)
- blokkenberg beklimmen (redeneren)
- visuele verhoudingen (meten, redeneren)
- .....

Vraag: Is het juist te stellen dat aan het eind van 1973 met het project Waterland de feitelijke grondslag voor de 'realistische meetkunde' is gelegd?

Freudenthals invloed

Uit de enquête blijkt dat de opvattingen over de invloed van Freudenthal sterk uiteenlopen. Sommigen menen dat hij nauwelijks tot geen invloed heeft gehad. Anderen spitsen de invloed toe op:

- beschouwingen óver meetkunde
- stimulerende inbreng voor ontwerpers (zuurdesem).

In 1974 schrijft Freudenthal in het speciale meetkundenummer van *Euclides 50*(4/5), pp.151-152:

"In het werk van het IOWO voor de basisschool heb ik van begin af voor meetkunde gepleit. Het aarzelende antwoord hierop was begrijpelijk. Kon men bij alle andere lasten ook nog die van de meetkunde op zich nemen?"

Vraag: Hoe zit dit nu precies?

Opmerking: Freudenthal heeft in al zijn geschriften over meetkunde als vak van onderwijs verwezen naar het werk van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa en Dina van Hiele-Geldof. Meermalen noemde hij de *Übungensammlung* een meesterwerk.

Hoe zagen wij meetkunde toen?

In 1975 werd gepropageerd meetkunde vooral via thema's en projecten aan te bieden. Meetkunde werd aangeprezen als een 'bindend' of 'integrerend' element van de verschillende leerstofonderdelen. In leerplandeel 2 (p. 337) lezen we daarover:

'dat de meetkunde in de bovenbouw een vooraanstaande positie inneemt:

- *als visualiseringsmiddel in verband met andere leerstofvlakken*
- *als doel op zich in de zin van ruimtelijke* oriëntatie
- en vooral a*ls objekt bij uitstek voor matematische processen en redeneervormen.'*

Volgens deze beschrijving beschouwden wij meetkundige modellen in die tijd wel degelijk als behorende tot dat leerstofvlak. Ook Freudenthal vatte meetkunde voor de basisschool heel ruim op. Bekend is zijn verhaal over Bastiaan met zes aalbessen op een lepeltje: 'Zoveel zijn wij' (Wat is meetkunde? *Euclides 50*(4/5) p.153. Toch stellen bijna alle respondenten dat meetkundige modellen niet tot de meetkunde gerekend dienden te worden. Hier komt degene die een waarheidsgetrouwe historische beschrijving wil geven in de knel.

Vraag: Hoe zijn de antwoorden van nu (1996) en de neergeschreven standpunten van toen (1975) te begrijpen?

Didactiek

De ontwikkeling van een macrodidactiek voor meetkunde in het basisonderwijs (verantwoording, leerlijnen, theorie) is achtergebleven bij die van microdidactische ideeën. Meetkunde 'motiveerde en didactiseerde zichzelf', zo was toen wel de opvatting. Door dit uitgangspunt leverden de vele onderwijservaringen een schat van microdidactische vondsten: blikwisseling, completeren, omstructureren, visuele bewijzen (ik zie het zo), constructieprincipe, reële contexten, visuele verhoudingen, mentaal-visueel versus concreet, ...

Vraag: Is de volgende uitspraak verdedigbaar?
Wiskobas heeft unieke bijdragen geleverd aan de ontwikkeling van microdidactische ideeën voor het meetkundeonderwijs op de basischool en het brugjaar.

Bijlage C-IV

Vragenlijst oud Wiskivon-medewerkers

1 Persoonlijke gegevens
naam, werkzaam bij IOWO van ..... tot....., functie/taak bij IOWO.

2 Opvatting over meetkunde vóór 1968
Hoe stond je midden en eind jaren zestig (vóór de invoering van de 'moderne wiskunde') tegenover meetkunde in het algemeen? Welke opvatting (empirisch/traditioneel-euclidisch/ structuralistisch) stond je voor? Kende je vormende waarde aan het vak toe? Had je idee van en/of opvattingen over mogelijke praktische waarde van meetkunde?

3 Ervaring met de meetkunde van de eerste twee leerjaren van het programma van 1968
Heb je praktische ervaring gehad met het programma van 1968? ja/nee, hoe lang? wat voor schooltype? welke methode?
Wat was je mening over de intuïtieve inleiding m.b.v. 'transformaties'?
Was je content met de vervlechting van meetkunde en algebra? Had je toen het idee dat er een nieuwe ontwikkeling voor meetkunde in het VO moest komen? ja/nee/ weet niet
Aan wat voor soort meetkunde dacht je? En aan welke omvang?
Waren dit eigen ideeën of was er sprake van een bepaalde beïnvloeding?
Hoe stond je tegenover de afschaffing van het traditionele bewijzen in het aanvankelijk meetkundeonderwijs?

4 Kende je in 1971 het artikel van Freudenthal 'Geometry between the devil and the deep sea' (Educational Studies) en wat vond je er van?

5 Periode 71-73
Hoe komt het dat er in de periode 71-73 bij het IOWO nauwelijks iets aan meetkunde voor het VO is gedaan?
Hoe stond je tegenover het idee van Wiskobas dat meetkunde ook op de basisschool een plaats diende te hebben?

6 Eigen ontwerpen
Het eerste meetkundeontwerp van Wiskivon (IOWO-stijl) voor de brugperiode was *Belvia*. Noem de meetkundeontwerpen uit de IOWO-tijd van jezelf of die je met anderen hebt gemaakt, liefst met jaar van ontstaan en aanleiding. Geef, indien mogelijk, ook aan hoe het idee tot stand is gekomen: artikel, boek, gesprek, buitenlandse methode, spontaan idee.

7 Meetkunde: LBO-MAVO-HAVO-VWO
In de LBO-brochure *Startpunt leerplanontwikkeling* van 1973 wordt een eerste opsomming gegeven van meetkundige onderwerpen voor de brugperiode van het LBO. Het zijn sterk doeachtige activiteiten. Wat waren de argumenten voor deze aanpak?
Deze pakketjes waren niet alleen voor het LBO bedoeld, maar ook voor de brugperiode van MAVO, HAVO en VWO (zie *Wiskrant 3*, mei 76, p. 49). Hoe werd dat verantwoord en hoe waren de reacties uit het veld? Had men op dat moment al een leerlijn meetkunde (in het achterhoofd)?

8 Kijkmeetkunde: Wiskobas – Wiskivon
Meetkunde als studie van de fysische ruimte en haar verschijnselen ('het leren be-grijpen van de ruimte') komt tijdens IOWO-tijd voor het eerst aan de orde in het project Waterland van Wiskobas (1973). Dan treden voor het eerst begrippen als 'oriënteren en lokaliseren', 'construeren', 'ruimtelijk redeneren' en 'viseren en projecteren' op, hoewel die laatste term dan nog niet expliciet gebruikt wordt.
In de latere pakketjes van Wiskivon na 1975 komt vooral het element van het 'viseren en projecteren' steeds sterker naar voren (*Zie je wel*, *Met het oog op diepte* en *Licht op schaduw*).
In hoeverre is hier van invloed te spreken van Wiskobas (Waterland, Schip ahoy e.d.) op Wiskivon?

9 Freudenthal
Welke invloed heeft Freudenthal binnen Wiskivon in verband met meetkunde uitgeoefend?

10 Meetkundedidactiek
Op het gebied van de didactiek van de meetkunde bestond reeds een grote traditie in het VO. (Reindersma, Ehrenfest-Afanassjewa, Van Hiele, Van Hiele-Geldof, Boermeester, Troelstra, Van Dormolen, ...).
Werd bij het ontwerpen rekening gehouden met bestaande theoretische inzichten?
Welke nieuwe, hernieuwde of bestaande didactische elementen, zowel op micro- als macroniveau, zijn toen ontstaan of opnieuw leven ingeblazen?

11 Meetkunde in ruime zin
Door het didactische idee van het visualiseren werden soms alle schema's, modellen, tabellen, grafieken e.d. tot de meetkunde gerekend (meetkunde in ruime zin). Dit voltrok zich zo ongeveer vanaf 1975. Hoe stond je toen ten opzichte van deze opvatting?

12 Voldoende ontwikkeling?
Meende je in 1981 (einde IOWO) dat er voldoende meetkundemateriaal lag voor de methodenschrijvers om een verantwoorde keuze te doen voor de schoolboeken van de brugperiode? Of had je toen de gedachte dat hiertoe nog meer onderzoek en ontwikkeling diende te geschieden? Welke onderwerpen, wat voor onderzoek? (Alleen dat wat je toen in 1981 daarover dacht.)

13 Persoonlijke ervaring
Beschrijf tenslotte kort datgene wat voor jou persoonlijk in verband met het meetkundeonderwijs in de brugperiode de meest belangrijke lering is geweest tussen 1971 en 1981.

14 Aanvullingen

Bijlage C-V

Overzicht enquête oud Wiskivon-medewerkers*

1 Persoonlijke gegevens
Van de zestien aangeschrevenen hebben vijftien geantwoord. Twee daarvan konden geen antwoorden geven, omdat zij niet betrokken waren bij de meetkundeontwikkelingen. De enige aangeschrevene die niet antwoordde, was ook niet inhoudelijk bij de brugklas betrokken en was slechts één jaar in dienst van het IOWO. Van de dertien respondenten waren er zeven direct betrokken bij het leerplanontwikkelingswerk voor meetkunde voor de brugperiode. Voor geen van deze zeven respondenten gold dit voor de gehele IOWO-periode.

2 Opvatting over meetkunde vóór 1968.
Op één na geven alle respondenten aan in die periode een euclidisch en/of structuralistische opvatting te hebben gehad. De vormende waarde wordt acht maal in positieve zin genoemd, twee maal in negatieve zin. De praktische waarde in positieve zin zes maal.

3 Ervaring met de meetkunde van de eerste twee leerjaren van het programma van 1968
Op drie na hebben alle respondenten ervaring gehad met het programma van 1968.
Van dertien respondenten geven er zes aan dat ze toen content waren met de intuïtieve transformatieaanpak, twee waren tegen. Van de 'voorstanders van toen' wijzen twee op het feit dat de transformatiebewijzen nieuwe denkmoeilijkheden opleverden. Vier van de dertien respondenten meenden toen dat er een nieuw meetkundeprogramma moest komen, drie niet, zes wisten het niet. Het nieuwe programma diende een 'praktische' signatuur te hebben, ook werd het intuïtieve en constructie-element eenmaal genoemd. Over het afschaffen van de traditionele bewijzen in de brugklas waren de reacties: acht akkoord, zij het soms met enige twijfel, twee tegen, drie geen mening.

4 Kende je in 1971 het artikel van Freudenthal 'Geometry between the devil and the deep sea' (Educational Studies) en wat vond je er van?
Vier respondenten hadden dit artikel toen gelezen, maar het schijnt toen nog niet direct aangeslagen te zijn. Acht antwoordden 'neen'. Eén gaf geen antwoord.

5 Periode 71-73
Slechts drie respondenten gaven antwoord op het eerste deel van de vraag. Volgens deze respondenten betrof het een kwestie van prioriteiten en inwerkperiode.

6 Eigen ontwerpen: zie literatuurlijst

7 Meetkunde: LBO-MAVO-HAVO-VWO
Zeven van de dertien respondenten geven als reden voor het voorgestane 'doe-karakter' dat het LBO gebaat was met praktisch-toepasbaar wiskundeonderwijs. De ontwerpen voor het LBO konden ook op andere niveau's van het VO gebruikt worden, omdat ze zo ontworpen waren dat ze aanleiding konden geven tot niveaudifferentiatie (vier van de dertien). Twee van de dertien menen dat ook rekening gehouden werd met de mogelijkheid van de toen geplande 'middenschool'. Zes respondenten zijn niet ingegaan op de vraag. Slechts twee respondenten gingen expliciet in op de vraag hoe de reacties van het veld waren op de nieuwe ontwikkelingen.

Eén hiervan luidde: 'Wiskivon kreeg voortdurend bemoedigende reacties uit het veld. Maar het gros van wiskunde-onderwijzend Nederland werd niet bereikt. In beide betekenissen: nam geen kennis en/of verwierp' (Van 't Riet). Zes respondenten gingen niet in op de vraag. Er is niet uitgegaan van een vooropgezette leerlijn (zeven van de dertien). Twee respondenten meenden dat er een zekere ordening van onderwerpen was. Vier lieten de vraag onbeantwoord.

8 Kijkmeetkunde: Wiskobas-Wiskivon
De invloed van Wiskobas op Wiskivon in verband met meetkunde was duidelijk aanwijsbaar volgens zes van de dertien respondenten. Eén respondent betwijfelt dit, één meent dat dit persoonsgebonden was, vier geven geen antwoord. Eén respondent geeft aan geheel opnieuw begonnen te zijn en zijn inspiratie vooral uit de realiteit, de eigen ervaringen, de boeken van Minnaert en de gesprekken met de directe collega's te hebben ontleend (Goddijn). De ja-zeggers geven soms ook aan dat er van het Wiskobas-werk een positieve inspiratie voor het Wiskivon-werk uitging, maar één hiervan stond ook kritisch ten opzichte van de soms vergaande meetkunde-ideeën voor de basisschool (Schoemaker).

9 Freudenthal
Zeven respondenten wijzen op de belangrijke invloed die Freudenthal binnen Wiskivon in verband met de meetkunde-ontwikkelingen heeft uitgeoefend. Al deze antwoorden wijzen op zijn rol als stimulator voor praktisch leerplanontwikkelingswerk, niet vanuit bestaande theoretische kaders. Zijn fort lag op het microdidactische niveau, waarbij hij ook op 'rare' nieuwe ideeën inging. Over langere leerlijnen heeft hij zich in de Wiskivon-vergaderingen niet uitgesproken: 'hij was geen regisseur'. Twee respondenten melden dat er geen of nauwelijks invloed op dit gebied van HF is uitgegaan. Vier respondenten hebben de vraag niet beantwoord of wisten het niet.

10 Meetkundedidactiek
Er werd niet op een bepaalde theorie gesteund, zo luidde het antwoord van negen van de zestien respondenten (zeven antwoordden niet). Wel werd soms impliciet van Van Hieles niveautheorie gebruik gemaakt, maar meer als rechtvaardiging achteraf. Er wordt opgemerkt dat de bestaande theorieën van Van Hiele en Van Dormolen hoofdzakelijk betrekking hadden op de oudere en toen vigerende vakinhouden. Er diende voor het LBO opnieuw ontwikkeld te worden, hetgeen met zich mee bracht dat ook de didactiek vernieuwd diende te worden: 'Wij gaan iets nieuws doen' (Van 't Riet). Maar welke nieuwe didactische aangrijpingspunten er toen ontstaan zouden zijn, is hier niet beantwoord. Eén van de respondenten noemt met name de aanpak van mevrouw Ehrenfest als uitgangspunt.

11 Meetkunde in ruime zin
Op deze vraag is heel verschillend geantwoord. Twee respondenten stonden daar toen geheel achter en nu nog. Eén toen wel, nu niet meer. Eén wijst de opvatting geheel af. Twee vinden een dergelijke indeling irrelevant. Eén stelt de vraag of meetkunde volgens de hedendaagse wetenschap nog wel eenduidig te definieren valt. Drie noemen als belangrijkste punt van de verruimde opvatting het 'visualiseren'. Drie gaven geen antwoord. Als gemeenschappelijk punt komt naar voren dat het principe van visualiseren als een belangrijk didactisch hulpmiddel (her)ontdekt werd.

12 Voldoende ontwikkeling?
Acht respondenten hebben deze vraag beantwoord; vier meenden dat er in 1980 voldoende materiaal lag voor de methodenschrijvers, vier meenden dat toen nog een leerlijn ontwikkeld had moeten worden. Enige malen werd aangegeven dat de algebra toen was blijven liggen.

13 Persoonlijke ervaring
Hierop is door negen van de dertien respondenten geantwoord. De volgende saillante ervaringen worden genoemd:
- dat meetkunde vanuit de realiteit ontwikkeld kon worden (drie maal)
- dat het begrip kijkmeetkunde als volwaardige wiskundige activiteit ontstond (twee maal)
- het functionele gebruik van concrete materialen
- dat brugklasleerlingen zonder formalisme aan het denken gebracht konden worden
- dat informele meetkunde als startpunt gekozen kon worden
- dat er voor het eerst longitudinaal ontwikkeld kon worden
- de ontdekking van de kracht van het visualiseren
- het werkelijk gaan beleven van meetkunde
- het omkeren van de traditie: nu eerst realiteit dan pas wiskunde
- de nieuwe evaluatiemogelijkheden
- het leren reflecteren op eigen ontwikkelingen
- het belang van leerlingobservaties.

Algemene conclusies:
Door de versnippering van de antwoorden zou de indruk kunnen ontstaan dat de meningen tamelijk divergent zijn. Het tegendeel is echter waar: er bestaat een sterk *uniform* beeld onder de meest betrokkenen bij meetkunde in die tijd:
- de feitelijke gegevens over ontstaansvolgorde kloppen
- de tamelijk onconventionele werkwijze wordt bevestigd
- men wilde voortbouwen op het Wiskobas-werk
- de betekenis en invloed van het eerdere Wiskobas-werk wordt bevestigd
- er werd niet volgens een bestaand wetenschappelijk ontwerpmodel gewerkt
- men hechtte geloof aan het begrip niveaudifferentiatie
- er was vooraf geen leerlijn gepland
- de invloed van Freudenthal als stimulator wordt erkend
- er werd nauwelijks gebruik gemaakt van bestaande didactische theorieën
- uit vrijwel alle antwoorden spreekt een grote persoonlijke betrokkenheid en de ervaring van de IOWO-tijd als persoonlijk belangrijke leerschool.

Divergent waren de meningen over:
- de betekenis en belang van het begrip 'meetkunde in ruime zin', zoals dat toen gehanteerd werd
- de vraag of er voldoende 'uitontwikkeld' was in 1980.

* Voor de namen zie noot 8 van C6.

Noten Deel C

Noten C1

1 Ook in *A History of Mathematics Education in the United States and Canada* (NCTM, 1970) wordt op meerdere plaatsen en door verschillende auteurs op de betekenis van het Spoetnik-effect gewezen, maar meestal wat genuanceerder dan in het algemeen wordt gesuggereerd. Er wordt gewezen op het vrijkomen van overheidsgelden in verband met de toen heersende Sovjet-angst in de Verenigde Staten, maar tevens wordt in dit boek ook de voorgeschiedenis van de na-oorlogse ontwikkelingen over doel en functie van het gehele reken- en wiskundeonderwijs aan de orde gesteld.

2 De Engelse ATM is een voorbeeld van een vereniging die voor het eerst ook onderwijzers van het primaire onderwijs bij de vernieuwingen betrok. In ons land is de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren altijd betrokken geweest bij de veranderingen, maar uitsluitend voor het voortgezet onderwijs, tot 1968 zelfs alleen voor het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs.

3 Voor Nederland waren dit de hoogleraar H.T.M. Leeman, de didacticus L.N.H. Bunt en de wiskundeleraar P.G.J. Vredenduin.

4 Een voorbeeld van een dergelijke technocratische aanpak was het *Individually Prescribed Instruction project* (IPI). Zie bijvoorbeeld Treffers (1978).

5 Deze brief verscheen ook in The *American Mathematical Monthly*.

6 De wiskundige Zoltan Dienes, die zich later ontwikkelde tot leerpsycholoog, kreeg mede door zijn samenwerking met Bruner en Jeeves wereldfaam. Hij werd in 1966 directeur van het psycho-mathematische research instituut van Sherbrooke in Canada. Dienes wordt gezien als de '(her)ontdekker' van het MAB-materiaal en de logiblokken; in het algemeen als de initiator van concrete, gestructureerde materialen en spelen.

7 De ontwikkelingen die door Wiskobas in de jaren zestig en zeventig zijn ondernomen, zijn ook beschreven door Treffers (1978), Goffree (1979) en De Jong (1986).

8 In dit essay wordt voor het eerst van 'verlevendiging van het rekenen' gesproken, een term die later zo'n belangrijke rol in het innovatieproces van Wiskobas zou gaan spelen.

9 Wij merken op dat zowel Van Gelder als Krooshof Edith E. Biggs voor een man hielden.

10 Bijdragen van F. Goffree, E.J. Wijdeveld, F. van der Blij, B. van der Krogt, J. Eilander, W.F.M. Bronnenberg, C. Nijdam, G.H. Blaauw, H.M.M. Jansen, G.W.J. van de Molengraaf en D.W. Oort.

11 Mondelinge mededelingen van A. Treffers, F. Goffree en E. Wijdeveld. Tevens heeft Treffers aan de auteur van deze studie het volgende meegedeeld. Eind jaren zestig was Freudenthal door de uitgeverij Malmberg als adviseur aangezocht voor de methode *Denken en Rekenen*, waaraan zijn vrouw S.J.C. Freudenthal-Lutter meewerkte. Op advies van Freudenthal heeft de Nijmeegse hoogleraar J.J. de Iongh deze functie op zich genomen.

12 Gegevens ontleend aan de *Conferentiegids Wiskobas-1971*.

13 Gegevens ontleend aan een niet-gepubliceerde studie van E. Wijdeveld over de historie van de CMLW en het IOWO tussen 1971 en 1975.

14 Er waren vier ontwerpers voor de lagere school, één voor de kleuterschool, twee voor de PA, twee voor de heroriëntering van de onderwijzers, een eindredacteur van het begeleidende tijdschrift *Wiskobas Bulletin*, een voorlichter en een directeur. De medewerker voor het kleuteronderwijs werd pas in 1975 aangetrokken. De verschillende functies en inhoudelijke taken waren niet strikt gescheiden. Alle medewerkers werden betrokken in het praktische ontwikkelwerk voor de drie genoemde gebieden. Veel gemeenschappelijke werktijd werd in de begintijd in het ontwerpen van nieuwe basisschoolstof gestoken. De ontwerpen werden via wekelijkse bijeenkomsten, die het karakter van brainstorms hadden, besproken. Eén medewerker was belast met algemene interne kadervorming, één met de theoretische bewaking van de leerplanontwikkeling.
Een rekenmedewerker die in dienst van de NOT was, stond ook gedeeltelijk op de loonlijst

van het IOWO. Alle medewerkers, op één na, hadden oorspronkelijk ervaring met het lager of kleuteronderwijs, de meesten ook met de vroegere kweekschool. De opleidingen van de medewerkers waren vaak in dubbelvorm geschied: wiskunde en pedagogiek.

15 Op deze school, die onder leiding van C. Frenay stond en waar ook de latere Wiskobas-medewerker A. Dekker een stimulerende rol vervulde, werden ook de ontwerpen voor de heroriënteringscursussen getest.

16 Zie hiervoor de dissertatie van F. Goffree (1979)

17 Zie hiervoor de dissertatie van A. Treffers(1976).

18 Voor de namen van de inhoudelijke medewerkers van Wiskobas ten tijde van het IOWO zie noot 1, C6.

19 Informatie van Siegbert Schmidt, Keulen (24-7-1996).

20 Informatie van Jean-Marie Kraemer, Cito (zomer 1996).

21 Informatie van Bob Jeffery, Brunel University (3-10-1996).

22 Informatie van Raf Feys (Katholieke Hogeschool Zuid-West Vlaanderen (herfst 1996).

Noten C2

1 Aanvankelijk was dit project op gang gekomen door een vraag van vier Amsterdamse scholen naar diagnostische rekentoetsen. Het is uitgegroeid tot een handboek van negen delen, dat zowel een 'leerplan' als een 'werkplan' wilde zijn.

2 Dit *Ontwerpleerplan Wiskunde op de basisschool* was opgesteld door F. Goffree in samenwerking met A. Treffers en de PA-docenten J. Eilander, J. Nieland, J. Boerema, W. Bronnenberg, O. van Engelen, I. Verkruijsse en G. Blaauw.

3 Intern werd het stuk aangeduid met *Øriëntatiepunt*, waarbij de letter O vervangen was door het teken voor de lege verzameling.

4 De eerste Wiskobas HO-cursus werd ontworpen door E. de Moor en A. Treffers en bestond uit de volgende 'blokken': *Stadsplan, Grafieken, In Orde, Spijkerbord, Open beweringen, Tel-op-Tal, Meten, Waarschijnlijkheid en Statistiek.*

5 Ten tijde van het ontwerpen van de materialen voor de cursus *Stadsplan* bestond er geen discussie over de vraag of dit onderwerp tot de meetkunde gerekend moest worden. Vanuit een algemeen standpunt is dit heel wel te verdedigen. Vooral door vergelijking van euclidische begrippen als afstand, lijn, cirkel, middelloodlijn en dergelijke zijn ook op schoolniveau interessante vergelijkingen te bestuderen. Opmerkenswaardig is dat via de vragenlijst van 1996 aan de oud-Wiskobassers en tijdens de responsbijeenkomst van 6 september 1996 aan het licht kwam dat een aantal respondenten deze stadsplanactiviteiten nooit als meetkunde had ervaren.

6 In de herziene uitgave van het *Stadsplan* (1975) lag de nadruk vrijwel uitsluitend op het meetkundige aspect van de roostermeetkunde.

7 Een spijkerbord is een houten bord waarop met spijkers een vierkantenrooster is aangebracht. Met behulp van elastiekjes kunnen hier figuren op gemaakt worden.

8 De stelling van Pick (1899) luidt als volgt: De oppervlakte van een willekeurige samenhangende veelhoek, waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn, wordt bepaald door de formule $B + \frac{1}{2}R - 1$, waarbij B het aantal binnenroosterpunten en R het aantal randroosterpunten is.

9 Ontleend aan een zogenoemd Bas-boekje, dat bij een heroriënteringsblok hoorde en dat ideeën voor de onderwijspraktijk bevatte.

10 De doelstellingenkubus van Treffers is een visueel model voor:
- acht mathematisch-didactische *uitgangspunten* voor het onderwijs (activiteits-principe, differentiatie-principe, verticale planning, structuurkarakter, taalaspect, toepasbaarheid, dynamiek en specifieke benaderingswijze van de wiskunde)
- twaalf *algemene richtlijnen* (vier integrale: persoonlijke waarde, sociale betekenis, voorbereidende waarde, maatschappelijke relevantie en acht mathematische doelen: rekenen, taal, toepassen, praktisch nut, structuur, methode, dynamiek en attitude) en

– zes *leerstofvlakken* (rekenen, meten, meetkunde, waarschijnlijkheid en statistiek, relaties en functie, taal en logica).

Voor het reken-wiskundeonderwijs onderscheidt Treffers doelstellingen naar drie dimensies. De *ééndimensionale doelen* betreffen de vier algemene, integrale, permanent na te streven doelen en de acht mathematische doelen, zoals hierboven genoemd onder de twaalf richtlijnen. De *tweedimensionale* doelen betreffen de concrete doelstellingen, gerelateerd aan de zes leerstofvlakken. Deze doelen dienen zowel een inhoudelijke als een gedragscomponent te hebben.

Naast deze één- en tweedimensionale doelen kent Treffers ook nog een *derde dimensie* aan zijn doelbeschrijvingen toe. Hij bedoelt hiermee dat ook de didactische context, waarbinnen de één- en tweedimensionale doelen nagestreefd dienen te worden, een zodanig duidelijke beschrijving behoeft dat de geest van waaruit de Wiskobas-ideologie werkte, optimaal nagestreefd zou kunnen worden.

11 Er werd in twee opvolgende jaren eerst voor de leerjaren 1, 3 en 5 en daarna voor de leerjaren 2, 4 en 6 een totaalplan voor de Dreesschool ontworpen.

12 Eind 1973 wordt dit begrip voor het eerst door J. van den Brink in een officiële tekst gebruikt met de term 'wereldgeoriënteerd wiskunde-onderwijs' (*Wiskobas Bulletin 3*(1), p. 47).

13 Deze plaat is ontworpen en getekend door F. Goffree naar aanleiding van een ansichtkaart van Ameland. In de plaat zijn allerlei elementen die in een eerdere fase van de leerplanontwikkeling gebruikt waren (stadsplan, routes, blokkenberg, ...) opgenomen. Er was dus eerst een eiland en pas daarna zijn de verdere activiteiten ontwikkeld.

14 Het is aan J. van den Brink en de toenmalige onderwijzeressen van de Dreesschool te danken dat dit niet bij een papieren ontwerp is gebleven, maar tot een praktisch zinvol project voor de eerste klas van de lagere school is uitgegroeid.

15 In de herinnering van de auteur van deze studie riepen deze brainstormbijeenkomsten vaak een ongelooflijke creativiteit bij de deelnemers op.

16 We stuiten hier op een pikant detail in de historische ontwikkeling van de kijkmeetkunde. We constateren immers dat veel van de ruimtelijke oriëntatieopgaven, zoals die in Waterland voorkwamen en die aanleiding zijn geweest tot een hele reeks meetkundige ontwerpen, in feite teruggaan op het ontwikkelings-psychologische onderzoek van Piaget en zijn medewerkers uit de jaren veertig. Hoewel het in die tijd – zeker in aanwezigheid van Freudenthal – 'not done' was om enig enthousiasme over Piaget te etaleren, heeft diens werk toch indirect bijgedragen aan het ontstaan van de kijkmeetkunde van het IOWO.

17 Wijdeveld maakte onderscheid tussen statisch lokaliseren (bepalen van punten, lijnen, vlakken, figuren) en dynamisch lokaliseren (richting, doorloopbaarheid, ...).

18 Het idee van het gebruik van foto's komt ook in het Ontario-programma voor.

19 Een uitstekende beschrijving van *Schip ahoy* is te vinden onder de Engelse titel 'The rescue of the Bermuda' in *Five years IOWO*, pp. 211-223.

20 De term 'realistische meetkunde' werd toen nog niet gebruikt.

21 Genoemd zijn daar de volgende aspecten: 1. aanschouwelijkheidsaspect: oriëntatie in vlak en ruimte; 2. tekenen- en construeren; 3. nuttigheid; 4. logisch aspect; 5. structuuraspect; 6. algebraïsch aspect; 7. rekenen en meten; 8. taal en relatieaspect; 9; combinatorische aspect; 10. topologisch aspect.

22 Dit artikel was een overdruk van een artikel in *Educational Studies in Mathematics*, 1971 (4).

23 We verwijzen in dit verband naar Freudenthals artikel *Meetkunde, Van 'Ik zie het zo' tot 'Hoe weet ik dat?'* (1987a). In dit stuk gaat hij in op het redeneeraspect van de meetkunde.

24 Panama Voorjaarsdag op 29 maart 1985.

25 In het exemplaar van het conferentieverslag van Goffree heeft deze aan de binnenzijde geschreven: 'De konferentie is vlak voor de herfstvakantie, het geworstel met het blok meetkunde is dan al aan de gang. "Iedereen heeft meetkunde in zijn pakket" is dan al geschreven.'

26 Dit persoonlijke logboek van Goffree, waarover wij met dank aan de auteur konden beschikken, bood een unieke mogelijkheid om terug te blikken op het ontwikkelingswerk, dat in die periode rond 1975 door de Wiskobas-groep werd verricht. Goffree heeft zelf over dit logboek gepubliceerd in *Pedagogische Studiën 53*, 1976, pp. 239-264.
27 Logboek van Goffree (1975), pp. 90-91.
28 Voor het visualiseren was in de jaren zeventig op het IOWO onder meer het boek van McKim *Experiences in Visual Thinking* een bron van inspiratie.
29 In 1996 herhaalt Goffree via zijn antwoord op de enquêtevraag 2 deze betekenis, zij het dat hij 'denken' dan 'reflecteren' noemt (zie bijlage C-II).
30 De herziene heroriënteringscursus (HO-II) werd éénjarig (20 × 2 uur) in plaats van twee jaar. De inhoud werd directer gekoppeld aan de praktijkervaringen (zie *Rapportboekje 2*).
31 In 1975 verschafte het ministerie de mogelijkheden om binnen het Wiskobas-team ook een medewerkster (J. de Gooijer-Quint) voor het kleuteronderwijs aan te stellen. De opdracht was het ontwerpen van wiskundige activiteiten voor vier- tot zesjarigen in de geest van het Wiskobas-project. De Gooijer-Quint werd ondersteund door Wijdeveld, terwijl ook Van den Brink in die periode activiteiten voor de kleuterschool begon te ontwerpen. Er diende een schoolwerkplan voor de kleuterschool De Iris te komen, die in een samenwerkingsverband gebracht zou worden met de ontwerpschool van Wiskobas (Dr. Willem Dreesschool) te Arnhem. Voor het praktische ontwikkelingswerk werd de Fatima-kleuterschool te Bussum aangetrokken. Daarnaast hebben de opleidingsscholen te Arnhem, Bilthoven en Dordrecht later medewerking verleend. Zoals gebruikelijk werden ook deze ontwerpactiviteiten regelmatig in de kadervormingen besproken.
32 Ten aanzien hiervan maken we de volgende opmerkingen:
   – Deze opmerking ontlenen we aan het antwoord van Goffree op enquêtevraag 6. HF staat voor Freudenthal, die een groot voorstander van het fröbelmateriaal was. Hij is degene geweest die nationaal en internationaal op het werk van Leeb-Lundberg heeft gewezen.
   – Freudenthals bezwaren tegen de logiblokken betroffen: 1. de voorstructurering van het materiaal; 2. structuur is beperkt tot classificatie; 3. het wekt de verwachting dat de wiskunde een eindig gesloten systeem van verzamelingenalgebra is; 4. de predikaten bepalen steeds één element. Echter, op dezelfde plaats onderkent hij tevens dat de 'logische blokken, verstandig gebruikt, een van de vele nuttige hulpmiddelen kunnen zijn' (Freudenthal, 1984, p. 63).
33 De term 'kleuterwiskunde' werd pas in de jaren tachtig – naar wij menen voor het eerst door A.C. Vuurmans – gebruikt.
34 Wel is voor de Fatima-kleuterschool te Bussum een totaal activiteitenjaarplan opgesteld, alsook een schoolwerkplan voor De Iris in Arnhem.
35 Een mathematische structuur is een verzameling van objecten met een of meerdere relaties tussen die objecten. Het spoorboekje bevat een net van stations en verbindingslijnen. De objecten zijn de stations, de verbindingslijnen de relatie. Door bij de verbindingen afstanden te zetten (er wordt een relatie toegevoegd) wordt de structuur rijker. Helder heeft Freudenthal het principe van rijke en arme structuren eens beschreven en gedemonstreerd aan een aantal isomorfe grafen in het *Wiskobas Bulletin 6*(1) p. 5 (1976).
36 Daarnaast onderscheidden zij voor het kleuteronderwijs nog vier andere richtingen, die gekenmerkt werden door respectievelijk: functie-ontwikkeling, (geïsoleerde) begripsontwikkeling, geïntegreerde ontwikkeling, en structurele denkontwikkeling.
37 Met name werd tijdens deze conferentie aandacht besteed aan de nieuwe opvattingen over de mogelijkheden van oriënteren bij kleuters naar aanleiding van enige 'Piaget-experimenten' van Margaret Donaldson.

Noten C3

1 De resultaten van dit ontwerpwerk zijn neergelegd in de leerplandelen 7 en 9 van het *Wiskobas Bulletin*. Deel 7 gaat in op de vraag van een leerlijn, deel 9 is ook aan opper-

vlakte gewijd, maar meer in thematische zin.

2 IEA: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

3 Zie hiervoor Ter Heege en De Moor (1977).

4 Dit stuk was reeds in het begin van de jaren zeventig ter beschikking van de Wiskobas-medewerkers. Het is later gepubliceerd in het PA-blok *Meten* (1973) en in *Appels en peren/wiskunde en psychologie*' (Freudenthal, 1984).

5 Het gaat om de volgende didactische principes:
Voorstelbare betekenis: Bij het kwalitatieve vergelijken van figuren naar oppervlakte werd onder meer uitgegaan van willekeurig gevormde figuren, maar aan deze figuren werd een voor de kinderen *voorstelbare betekenis* verbonden, bijvoorbeeld door de figuren stukken deeg of drop (van gelijke dikte) te noemen.
Meerdere figuren: Er werd niet van één figuur uitgegaan, maar bij voorkeur van meerdere, waardoor er een natuurlijke uitdaging ontstond voor het zoeken naar een geschikte strategie tot het ordenen naar grootte van oppervlakte.
Schatten en concreet handelen: Nadruk werd gelegd in het onderwijsleerproces op de volgende punten: het *vooraf schatten* van de grootste figuur, het *uitknippen en beleggen* van de figuren en het geven van de gelegenheid om *zelf te kiezen voor een verknipping* in delen van één van de figuren, waarmee de andere(n) belegd konden worden. Deze activiteiten werden beschouwd als voorbereiding op het (mentaal) omvormen of omstructureren van figuren.
Ten behoeve van de overgang naar het kwantitatieve aspect van het meten bleken de volgende principes uiterst nuttig:
Binding aan een andere grootheid: Figuren werden gemeten naar een meer voorstelbare grootheid dan oppervlakte. Daarvoor werden gewicht of geld gebruikt, maar ook soms tijd (om een weiland te maaien of een muur te schilderen). Dit maakte het rekenaspect in het aanvangsproces ook veel eenvoudiger, omdat er nog niet met metrieke maten gerekend hoefde te worden.
Kiezen van een natuurlijke maat: Hiermee kon ook in de laagste klassen al voorbereid worden op het metrieke meten, dat geschiedt door met een geschikte maat (intermediair) twee figuren te vergelijken. De aard van de figuren kon die maat bepalen. Twee rechthoekige tafels konden via een schrift of boek vergeleken worden, maar soms ook kon de hand als maat gebruikt of in een ander geval andersoortige roosters dan het vierkantenrooster.
Symmetrie: Gebruikmaking van symmetrische eigenschappen van figuren bleek een haast vanzelfsprekend hulpmiddel te zijn voor het vergelijken van figuren naar oppervlakte, dat ook voor de allerjongste kinderen bruikbaar bleek.
Bovenstaande principes werden door de ontwerpers tijdens de proefzittingen met enkele leerlingen ontdekt of herontdekt. Helaas zijn van het feitelijke ontwerpwerk geen systematische verslagen gemaakt. Het betekent dat sommige waarnemingen van de toenmalige experimenten op persoonlijke herinneringen berusten.

6 Zie ook De Groot (1955) en Van Parreren (1973, pp. 81-87).

7 Tijdens de experimenteerfase van de oppervlakteleergang in1976 ontstond naar aanleiding van enkele proefgesprekken in Hilversum bij de ontwerpers het idee een hele lessenserie te maken over een eenzame reus Egbert, die contact zocht met de mensen. In dit thema *Met de groeten van de reus*, dat begint met een reuzenhandafdruk op het bord, werd met leerlingen van het tweede leerjaar van de lagere school de lengte van de reus geschat (4 maal zo groot als de juf), de schoenafdruk bepaald (16 maal), een reuzenboterkoek en een reuzenkrant gemaakt en zelfs uitgezocht hoeveel knotten wol er nodig waren voor zijn wanten. Hier werd onder leiding van de lerares gemathematiseerd door middel van schattingen en geschikte modellen, waarbij impliciet de oppervlakteproblematiek in alle facetten aan de orde kwam. Het kan als een paradigma dienen van de fenomenologische opvatting over de oppervlakte-problematiek. Daarnaast bevatte de lessenserie nog een aantal ordenings- en redeneerproblemen. Het is beschreven in *leerplanpublikatie 9* van het *Wiskobas Bulletin*. De auteur van deze studie herinnert zich de uitvoering van dit thema

op de school De Kokkenhof in Wadenoyen als een van de hoogtepunten van het ontwerpwerk dat hij samen met de eerste ontwerper H. ter Heege heeft uitgevoerd.
Een vergelijkbaar thema over Gulliver was al eerder naar aanleiding van het bekende boek van Jonathan Swift ontworpen door Streefland. Zie leerplandeel 2, pp. 313-319.

8 De reden hiervoor was er een van praktische aard. Er moest onder tijdsdruk steeds maar weer nieuw materiaal gemaakt worden. Wel is in 1982 door Dogger een onderzoek gedaan naar aanleiding van het Wiskobas-practicum *Volkstuintjes* in de vierde klas van de lagere school.

9 Het onderzoek van Piaget beperkte zich tot conservatie van oppervlakte en het meten van oppervlakte door middel van met vierkanten voorgestructureerde figuren.

10 Zie *leerplanpublikatie 9* of de publicatie *Appels en Peren* van Freudenthal (1984).

11 Zie leerplandeel 7, pp 20-38.

12 De auteur van deze studie is in het bezit van een pakketje van zestien A5-blaadjes uit 1973 met opgaven over blokkenbouwsels. Deze heeft hij tijdens de evaluatiebijeenkomst van 6 september 1996 gekregen van de ontwerper H. ter Heege, die deze opgaven met zijn eigen kinderen had uitgeprobeerd. Het is een van de vele voorontwerpen die in de Wiskobas-tijd gemaakt zijn en waarvan veel verloren is gegaan. Mondelinge informatie tijdens de genoemde evaluatie-bijeenkomst lijkt het vermoeden te bevestigen dat dit ook het eerste pakketje werkbladen over dit onderwerp is geweest. Analyse van de opdrachten maakt duidelijk dat deze sterk getalsmatig waren: Hoeveel blokjes? Hoe hoog? Hoeveel minstens? De blokjesbouwerij werd dus aanvankelijk via ruimtelijke voorstellingen voor het rekenen gebruikt. Maar tegen het eind van het boekje heten de opgaven opeens 'denken over bouwen met blokjes'. In deze opdrachten werd meer het meetkundige aspect van de blokkenbouwsels uitgebuit. Het lijkt waarschijnlijk dat hier de eerste ideeën gevormd werden om met het 'blokjes bouwen' ook andere doelen dan die van het rekenen te bereiken.

13 Wiskobas was over de ontwikkeling van eigen schoolwerkplannen overigens nogal terughoudend. Men zag meer in het voorzichtig invoeren van enkele wiskundige momenten, het liefst ondersteund door heroriëntering om later over te gaan op een nieuwe methode.

Noten C4

1 De IOWO-groep heeft zich sterk verzet tegen de opheffing van het IOWO. Zij kreeg daarbij brede steun van het veld uit binnen- en buitenland. Men hield vast aan de eenheid van ontwikkeling – nascholing – onderzoek. Ook zagen met name de Wiskobas-medewerkers onvoldoende garanties voor voortzetting voor hun werk bij de SLO. Pikant detail is dat de opheffing al een jaar eerder had moeten plaatsvinden. Door een vormfout (niet alle medewerkers was tijdig ontslag aangezegd) kon het IOWO nog een jaar langer doorwerken. Voor een uitgebreidere beschrijving en nadere achtergronden van deze reallocatie zie De Jong, 1986, pp. 33-42.

2 Omdat de auteur van deze studie in 1981 een aanstelling aan de Stichting Opleiding Leraren te Utrecht (SOL, later Hogeschool Midden Nederland, nu Hogeschool Utrecht) kreeg, ontstond vanaf 1982 de mogelijkheid om met medewerking van het ministerie de nascholing van de PA-docenten verder gestalte te geven. Dit werd het Panama-project (*PA*bo *NA*scholing *M*athematische *A*ctiviteiten). Het Panama-project is sinds 1996 een onderdeel van het Freudenthal Instituut geworden.

3 We bedoelen met 'zuiver realistisch' dat de methode geheel of grotendeels gebaseerd is op de uitgangspunten en materialen van Wiskobas.

4 De ontwerpers van OSM die zich met name voor de meetkunde hebben ingezet, waren K. Gravemeijer, J-M. Kraemer en F. van Galen.

5 Freudenthal gebruikte hierbij steeds het klassieke voorbeeld van Socrates, die een slaaf de verdubbeling van een vierkant al vragenderwijs zelf liet ontdekken.

6 Volgens navraag bij de auteur zou dit in 1989 geweest kunnen zijn.
7 In de methode *De Wereld in Getallen* werd meetkunde meer thematisch aangeboden, waardoor de indruk ontstond dat het een meer incidenteel onderwerp was.
8 Sinds 1996 wordt door dezelfde uitgeverij een nieuwe methode *Wis en Reken* uitgebracht.
9 In vergelijking met andere jaren was het aantal deelnemers niet hoog (circa 80). Dit is een zekere indicatie voor het belang dat men toen aan het onderwerp hechtte. Er waren onder meer presentaties van het OSM-team en van A. Vuurmans over de methode *Rekenwerk*, waarin veel aandacht besteed wordt aan meetkunde voor de kleuterleeftijd.
10 In dit verband verwijzen wij ook naar de *Gids voor onderwijsmethoden...* van de SLO (1997). Hierin is een vergelijking van de door ons geanalyseerde methoden te vinden. Voor het onderdeel meetkunde is gescoord naar het voorkomen in de methoden van een zeventiental kerninhouden, die afgeleid zijn uit de kerndoelen. De genoemde methoden komen er op dit onderdeel vrijwel maximaal uit.
11 De oude versie van *Operatoir Rekenen* was toen ook nog op de markt en had een aandeel van circa 20%.
12 De delen 1 en 2 van de methode *Rekenwerk* (1986), die we buiten beschouwing gelaten hebben vanwege het geringe marktaandeel, omvat een programma dat als kleuterwiskunde wordt omschreven. In dit programma zien wij de meest pregnante beïnvloeding van het Wiskobas-project.
13 We noemen in dit verband de volgende titels: *Klimboom*, *Speletal*, *Van je 1,2, 3...*, *Schatkist Rekenen*, *Handboek Kleuterwiskunde* en *Telboek*. Voor nadere gegevens zie literatuurlijst.
14 Naar aanleiding van toetsen kunnen hulppakketten worden gebruikt:
– Cito-toets voor groep 1/2 en hulppakket *Ordenen*, J. van Kuyk
– *Utrechtse Getalbegrip Toets* en hulpboek, H. van Luit e.a.
15 Inmiddels zijn een aantal vervolgdelen verschenen. Deel 2: *Basisvaardigheden en Cijferen*; deel 3a: *Breuken*; deel 3b: *Kommagetallen*. Nog gepland zijn deel 4: *Procenten en Verhoudingen*; deel 5: *Meten en meetkunde*; deel 6: *Meetkunde en meten*.
16 De korte historische schets over het ontstaan van de kerndoelen is ontleend aan een verslag van H. van Die, inspecteur basisonderwijs, voormalig SLO-medewerker voor rekenen en wiskunde en lid van de ontwikkelgroep voor de eindtermen. Dit verslag d.d. 7-10-1997 was door Van Die opgesteld naar aanleiding van een verzoek van de auteur van deze studie om nadere inlichtingen te verkrijgen over de gang van zaken rond het domein meetkunde. Hierop is Van Die in genoemd verslag ook ingegaan. De eerste versie van het door de auteur van deze studie opgestelde stuk is ter verificatie gestuurd aan B. Donkers en J. Letschert van de SLO, die de eindverantwoording droegen voor de kerndoelen voor het BO. Op grond van hun reacties d.d. 5-2-1998 is een aantal wijzigingen en opmerkingen toegevoegd. Voor een algemene historische beschrijving van het ontstaan van de kerndoelen voor het basisonderwijs verwijzen we naar de dissertatie van J.F.M. Letschert (1998).
17 Tijdens de Panama-najaarsconferentie van november 1998 is de brochure en CD-rom van het *TAL-1* project aan de staatssecretaris Adelmund aangeboden. *TAL* staat voor *Tussendoelen Annex Leerlijnen*. Inhoudelijk betreft *TAL-1* de leerstof van de hele getallen voor groep 1, 2 en 3. Dit project was op verzoek van het ministerie uitgevoerd door het Freudenthal Instituut in samenwerking met de SLO en CED te Rotterdam.
18 Dit stuk, dat vrijwel identiek is aan *Proeve 1*, was opgesteld in samenspraak en overleg met: J. Bokhove en J. Janssen (Cito), E. Feijs en E. de Moor (Panama), K. Gravemeijer en L. Streefland (OW&OC), H. van Die en F. Goffree (SLO); H. Jansen en W. Oonk (VALO-wiskunde). VALO was de commissie Veldadvisering Leerplanontwikkeling.
19 Dergelijke omschrijvingen waren onmogelijk, omdat ze een didactische werkvorm zouden verplichten en tot een soort staatspedagogiek zouden kunnen leiden.
20 Van dit ARBO-advies hebben wij slechts het onderdeel *Kanttekeningen bij de voorstellen voor rekenen en wiskunde* tot onze beschikking (pp. 40-48).
21 Een kopie van deze ongedateerde, aan J. Letschert gerichte brief, is door de schrijver aan

de auteur van deze studie eind 1997 ter hand gesteld. Een afschrift van deze brief is toen aan B. Donkers, hoofd basisonderwijs van de SLO, gezonden.

22 Donkers merkt hierover in zijn brief van 5-2-1998 op, dat de voorstellen tot schrappen van meetkunde uit de kerndoelen voor rekenen-wiskunde door 'niet-rekendeskundigen of niet-wiskundigen' waren gedaan 'mede omdat er overlap (zou zijn) met natuuronderwijs en de beeldende vakken'. We zien hier een zelfde soort argument als honderd jaar eerder toen de vormleer moest wijken voor het tekenen.

23 Geciteerd uit het verslag van Van Die, genoemd in noot 16.

24 Vermoedelijk is bij 'ruimte' het lidwoord 'de' weggevallen.

25 Dit vierde doel luidde: 'Leerlingen kunnen reken-wiskunde problemen visualiseren en schematiseren.'

Noten C5

1 Voor de namen van de inhoudelijke Wiskivon-medewerkers verwijzen we naar noot 8 van C6.

2 Deze pakketjes werden voor het merendeel in samenwerking met een aantal brugklasleraren van de experimenteerschool (LEAO-MAVO Gansstraat te Utrecht) ontwikkeld.

3 Van een aantal van de genoemde leerstofpakketten zijn beschrijvingen, didactische aanwijzingen en lesprotocollen te vinden in de brochures *Leerplanontwikkeling onderweg 1, 2a en 2b.*

4 Bedoeld zijn de HEWET- en HAWEX-programma's, die in de jaren tachtig zijn ontwikkeld.

5 Geciteerd uit het enquêteformulier van Goddijn.

6 Dit stuk is van de hand van J. de Lange, die dit in dezelfde tijd in *Wiskrant 21* publiceerde.

7 Van 't Riet heeft hier in zijn respons op de enquête ook op gewezen.

8 In de enquête gaan de verantwoordelijke ontwerpers hier trouwens ongevraagd op in. Schoemaker refereert aan gesprekken met Treffers in die tijd waarin de laatste hem 'waarschuwde voor afglijden in perceptieproblemen'. Goddijn stelt: 'Probleem van de hele meetkunde was dat het alleen 'waarnemen' was: de intuïtie werd niet expliciet gemaakt.' (Zie bijlage C-V).

9 De inhoudelijke medewerkers/ontwerpers van het HEWET-team waren M. Kindt, J. de Lange Jzn. en G. Vonk, die vanaf 1982 opgevolgd werd door H.B. Verhage.

10 Inhoudelijk betekende dit voor wiskunde A: analyse en algebra, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, automatische gegevensverwerking en een keuzeonderwerp, maar al deze onderwerpen vanuit en toegesneden op toepassingen. Het wiskunde-B programma omvatte een formele analysecursus en ruimtemeetkunde.

11 Inmiddels wordt er alweer aan een nieuwe programmaopzet voor de bovenbouw van het HAVO/VWO gewerkt volgens bepaalde profielen voor verdere studie. Zie Sjamaar (1995).

12 Opstellers van dit rapport waren L. Bozuwa, K. Gravemeijer, E. de Moor en W. Uittenbogaard.

13 Op 20 augustus 1985 is dit rapport aan de staatssecretarissen, N.J. Ginjaar-Maas en G. van Leyenhorst in aanwezigheid van de algemeen hoofdinspecteur AVO, B. Westerhoff, aangeboden.

14 Uit een persoonlijk gesprek, dat de auteur van deze studie op 24-2-97 had met F. van der Blij, is het volgende duidelijk geworden. De toenmalige staatssecretaris Ginjaar-Maas was er veel aan gelegen dat de kwestie van de aansluiting van de wiskundeprogramma's opgelost zou worden. Zij heeft daartoe Van der Blij persoonlijk gevraagd om hiervoor een oplossing te zoeken. In voorbereidende gesprekken op het departement kwam vooral aan de orde: wie moet dit werk doen en hoe kan dit bekostigd worden? De staatssecretaris wilde dat zowel de SLO als de vakgroep OW&OC hierin zouden participeren. In een brief van 23-11-1986 verzoekt Ginjaar-Maas Van der Blij officieel het voorzitterschap van de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) op zich te nemen. Zij schrijft in

deze brief dat het naar haar mening 'dringend noodzakelijk is dat op korte termijn een nieuw wiskundeprogramma wordt ontwikkeld voor MAVO, LBO en voor de eerste drie leerjaren HAVO, VWO'.

15 Er werd door de SLO een pakketje *Goed gezien* uitgegeven, dat een bewerking was van *Zie je wel.*

16 Het is met name A. Goddijn geweest aan wie de praktische en theoretische ontwikkeling van de kijkmeetkunde moet worden toegeschreven.

17 Voor het AB-traject en het HAVO/VWO-traject golden iets andere aanbevelingen.

18 Van Treffers' dissertatie over de doelstellingen van het realistisch wiskundeonderwijs uit 1978 werd in 1987 een Engelse vertaling/bewerking uitgegeven.

19 Algemeen voorzitter van de *Standards*-commissie was Thomas Romberg. In zijn functie als directeur van het Wisconsin Center for Education Research verzocht hij De Lange om het *MiC*-project mede op te zetten en uit te voeren.

20 Grafentheorie kan tot de meetkunde gerekend worden. In de *MiC*-boekjes worden allerlei praktische netwerkproblemen met behulp van combinatoriek en matrixrekening aan de orde gesteld. Wij laten dit onderwerp in verband met onze studie voor de Nederlandse situatie buiten beschouwing.

Noten C6

1 De inhoudelijke Wiskobas-medewerkers ten tijde van het IOWO waren: F.J. van den Brink (71-81), J. van Bruggen (71-76), A. Dekker (76-81), H. Freudenthal (71-81, † 1990), L. Gilissen (71-81, † 1990), F. Goffree (71-81), J. de Gooijer-Quint (75-81), J.H. ter Heege (71-81), H.M.M. Jansen (71-81), R.A. de Jong (71-81), G.H. Meijer (71-81), E.W.A. de Moor (71-81), L. Streefland (71-81, † 1998), A. Treffers (71-81) en E.J. Wijdeveld (71-81).

2 Opgemerkt zij dat de vijftien leden van de Wiskobas-groep geheel verschillende achtergronden en kennis van zaken hadden bij de start in 1971. We wezen al op de voortrekkersrol van Wijdeveld, Goffree en Treffers. Voor een aantal gold dat men tamelijk blanco aan de opdrachten, die per persoon ook weer verschilden, begon. Ook Freudenthal was op het gebied van de nieuwe ontwikkelingen in het basisonderwijs op dat moment een relatieve 'beginner'.

3 Een van de aanwezigen bij de evaluatie-bijeenkomst, J. van Bruggen, meende dat juist ook de sociologisch-historische aspecten van dit gezamenlijke proces nader onderzocht zouden moeten worden. 'Er moest immers aan dit gehele proces ook een en ander vooraf gegaan zijn.' De auteur van deze studie is niet op dit aspect ingegaan.

4 Dat Freudenthal zich in de realistische aanpak van meetkunde kon vinden, spreekt, gezien zijn opvattingen hierover, eigenlijk vanzelf. Hij liet in de jaren zeventig dan ook geen gelegenheid voorbijgaan om Waterland als paradigma van het leerplanontwikkelingswerk van Wiskobas openbaar te maken en aan te prijzen.

5 Wij zijn hier niet ingegaan op de vraag hoe deze divergentie van opvattingen te verklaren valt. Waren de vroegere standpunten van de medewerkers na twintig jaar geëvolueerd, was men toentertijd niet alert en zorgvuldig genoeg geweest met datgene wat naar buiten gebracht werd of had verdringing plaatsgevonden? De auteur van dit onderzoek stelde zich in 1975 ook nog op het standpunt van 'meetkunde in ruime zin', maar kwam daar pas in de tweede helft van de jaren zeventig op terug.

6 Met dit praktische werk onderbouwde hij zijn kritiek op de New Math en het structuralisme van Piaget.

7 De auteur van deze studie herinnert zich van zijn persoonlijke sollicitatiegesprek met Freudenthal in 1971 dat deze hem zei dat hij – hij was toen al 65 jaar – zich erop verheugde nog eens aan een geheel nieuw ontwikkelingsterrein te beginnen. Freudenthal was dan ook een van de medewerkers van Wiskobas die in zekere zin blanco aan het gehele project begon. Maar dat was toch ook weer ogenschijnlijk. Immers, hij beschikte over een enorm

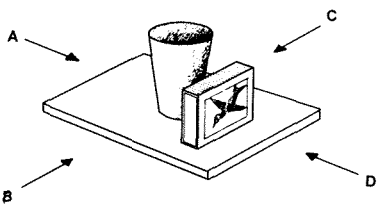
kennis-arsenaal op wiskundig, historisch, psychologisch, cultureel en onderwijskundig gebied. Hierdoor had hij een natuurlijk gezag, waarvan hij echter nimmer misbruik maakte. De discussies binnen de groep hadden daardoor een zeer liberaal en humaan karakter. Een van Freudenthals algemene verdiensten is geweest, dat hij de ontwerpers vrij hun gang liet gaan en dat hij soms in de op het eerste oog onooglijkste experimenten een belangrijk didactisch aangrijpingspunt kon zien. Door hier op te wijzen, werden de ontwerpers verder aangemoedigd om op de ingeslagen weg verder te gaan. Anderzijds, als hem iets niet beviel, dan werd dat niet met de mantel der liefde bedekt.

8 De Wiskivon-adressanten, met hun dienstjaren op het IOWO, waren: G. van Barneveld (71-79), F. van der Blij (76-81), J. Bosman (71-77), A.J. Goddijn (77- 81), G.M. Janssen (74-77), M. Kindt (75-81), W.H.M. Kremers (72-78), J. de Lange (76-81), C.P. Leenders (71-79), A.D. Nijdam (71-75), N. Querelle (75-81), P.C. Revet (71-73), N. van 't Riet (77-79), G. Schoemaker (75-81), W.J. Sweers (73-78) en G.A. Vonk (71-81).

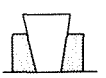
9 Een van de respondenten, Goddijn, verklaart dat de invloed van Wiskobas op Wiskivon gering geweest is, maar Schoemaker spreekt dit nadrukkelijk tegen. Bovendien zijn regelrechte invloeden in de pakketten aan te wijzen. Een voorbeeld is de camerastanden-problematiek, zoals door Streefland aangedragen bij Wiskivon.

DEEL D

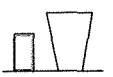
Staat van het meetkundeonderwijs op de basisschool anno 1995



Vanaf welke kant is er gekeken?



vanaf ____



vanaf ____

vanaf ____

ITEMNR	P= A	EN A=WAARDEN B	C	D
1	59*	41	0	0
2	98*	1	0	0
3	35*	63	0	0
4	19*	79	0	0
5	56*	43	0	0
6	23*	76	0	0
7	83*	17	0	0
8	70*	30	0	0
9	90*	10	0	0
10	67*	32	0	0
11	56*	44	0	0
12	61*	31	0	0
13	62*	30	0	0
14	69*	22	0	0
15	62*	31	0	0

The acceptance of a rich uncertainty can create room for further progress
(Van den Heuvel-Panhuizen, 1996)

D0 Inleiding op deel D

Nu wij ons historisch onderzoek in de delen A, B, en C afgerond hebben en aangeland zijn in het heden, ligt het voor de hand om ook de huidige staat van het aanvankelijk meetkundeonderwijs in ons onderzoek te betrekken. Wij hebben in de loop van deze geschiedenis gezien dat de betekenis en functie van meetkunde als vak voor de basisschool, waartoe we ons in dit deel beperken, aan sterke veranderingen onderhevig zijn geweest. In de negentiende eeuw werd dit onderwerp in het algemeen als te moeilijk en irrelevant voor het lager onderwijs afgedaan, in de twintigste eeuw was het tot in de jaren zestig eenvoudigweg verdwenen en lag alle nadruk op het rekenen. Pas gedurende de laatste kwarteeuw is de belangstelling opnieuw gewekt, enerzijds als belangrijk structurerend onderdeel van de wiskunde, anderzijds vanwege de aandacht die er in de psychologie ontstond voor de ontwikkeling van het ruimtelijk-oriënterende vermogen van jonge kinderen.

Ook hebben we kunnen constateren dat de beslissingen om het vak officieel aan het curriculum van de basisschool toe te voegen moeizaam tot stand zijn gekomen. Bijna was in 1989 bij de vaststelling van de huidige kerndoelen voor het basisonderwijs het vak wederom afgevoerd als niet voldoende relevant (zie C4).

Sinds 1993 behoort het domein meetkunde tot het reken-wiskundeonderwijs, hetgeen tot uiting komt in de leerboeken en in de formulering van de kerndoelen voor het basisonderwijs. De vraag is echter hoe dit in het praktische onderwijs van alledag gestalte krijgt. Daarbij dienen zich de volgende vragen aan:

- Wat is het onderwijsaanbod via de methoden?
- Dekt dit aanbod de kerndoelen?
- Is het onderwijsaanbod in overeenstemming met de geest van het 'nationaal programma' (*Proeve I*)?
- Wordt het aanbod ook omgezet in daadwerkelijk onderwijs?
- Hoe wordt het onderwijs getoetst?
- Hoe is de acceptatie van de leraren ten aanzien van dit nieuwe domein?
- Zijn de leraren basisonderwijs voldoende toegerust voor deze nieuwe taak?
- Wordt er in de opleiding voldoende aandacht aan meetkunde besteed?
- Zijn de schoolbegeleiders voldoende toegerust voor de ondersteuning van dit vak?
- Moet er speciale nascholing komen?

Op een aantal van deze vragen is via theoretisch onderzoek antwoord te vinden. Zo kan het aanbod en de dekking met de kerndoelen in de methoden kwantitatief geanalyseerd worden. Een voorbeeld hiervan vinden we in de *Gids voor Leermiddelen* van de SLO (1997). Een globale kwalitatieve analyse hebben wij in C4.3 verricht. Maar

onze interesse gaat toch vooral uit naar de praktijk, naar de opvattingen van de man en vrouw voor de klas: hoe is hun mening over het nieuwe vak en hoe geven zij vorm aan het meetkundeonderwijs?

In het verleden is nimmer een kwantitatief-empirisch onderzoek gedaan dat specifiek het meetkundeonderwijs van de basisschool betrof. Wel waren in de door het Cito uitgevoerde Periodieke Peilingen van het Onderwijsniveau van 1992, de zogenoemde PPON-peilingen, al enige opgaven over meetkunde opgenomen (Bokhove, 1995). Een en ander gaf voor de auteur van deze studie aanleiding om te trachten wat duidelijker gegevens over het meetkundeonderwijs op de basisschool boven water te brengen. Aanvankelijk was het idee om een dergelijk onderzoek via een representatieve steekproef te beperken tot een enquête onder de leraren basisonderwijs. Eind 1993 werd hiervoor bij het Cito om hulp gevraagd. Naar aanleiding hiervan vond begin 1994 een overleg plaats tussen drie vertegenwoordigers van het Cito en de auteur van deze studie.[1] Daar ontstond de gedachte voor een gemeenschappelijk project tussen het Freudenthal Instituut (FI) en het Cito, dat zich zou richten op de innovatie van het realistische meetkundeonderwijs op de basisschool. Daarom werd toen besloten naast een enquête onder de leraren BO ook een proeftoets meetkunde eind basisschool af te nemen. Dit *P*roject *I*nnovatie *M*eetkunde *B*asis*O*nderwijs (Pimbo) werd kort daarop ook formeel als samenwerkingsproject tussen het FI en het Cito op bestuurlijk niveau geratificeerd.[2] De doelen van het Pimbo-project werden in de loop van 1994 als volgt gedefinieerd:

- ontwikkeling van geschikte meetkunde-items en toetsen
- onderzoek naar de opbrengst van het meetkundeonderwijs in de basisschool
- onderzoek naar waardering en belang van meetkunde bij leraren BO, PABO-docenten en schoolbegeleiders
- onderzoek naar de mate waarin het programma van de gebruikte methoden wordt geïmplementeerd en
- onderzoek naar nascholingsbehoeften.

De ontwikkeling van de toets-items en toetsen vond plaats in het voorjaar van 1994, de afname in 1995. De enquête onder de BO-leraren werd ook in het voorjaar van 1995 uitgevoerd. In verband met de laatste drie vragen werden in 1995 door de auteur via het Freudenthal Instituut ook nog twee enquêtes onder de opleiders (PABO-docenten) en schoolbegeleiders afgenomen. Van het gehele onderzoek zijn in 1997 twee rapporten samengesteld:

- *Niveau van het meetkundeonderwijs op de basisschool. Pimbo proeftoets 1995*[3]
- *Eindverslag Pimbo-enquêtes.*[4]

In 1996 en 1997 zijn drie artikelen over de opbrengsten van het Pimbo-project gepubliceerd in het *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskunde-onderwijs*, waarvan de auteurs dezelfde zijn als de in het Pimbo-project participerende onderzoekers: E. de Moor, J. Janssen, J-M. Kraemer en J. Menne. Deze artikelen vormen de basis voor de volgende drie hoofdstukken (D1, D2 en D3), waarin achtereenvolgens de kwantitatieve resultaten van de Pimbo-toets van 1995 behandeld worden, een inhoudelijk-kwalitatieve analyse van de Pimbo-toets plaatsvindt en ten slotte de resultaten van de drie enquêtes besproken worden.

De opbrengsten van de onderzoeken uit 1995 brachten ook een aantal knelpunten aan het licht die een goede implementatie van het realistische meetkundeonderwijs kunnen frustreren. Eén hiervan is het gemis aan een zekere programmatische beschrijving. Dit heeft de auteur van deze studie ertoe gebracht een *Voorstel voor een realistisch meetkunde-programma voor de basisschool* te schrijven (De Moor, 1997). Het doel hiervan was om tot een aanzet van 'nationale afstemming' te komen 'zowel in programmatische als in didactische zin.' Dit voorstel is met een vragenlijst aan een aantal deskundigen gestuurd. In D4 wordt een beknopte beschrijving van dit voorstel en een indruk van de reacties gegeven.

In het afsluitende hoofdstuk D5 worden de belangrijkste conclusies van het totale Pimbo-onderzoek samengevat en het gehele Pimbo-onderzoek aan een reflectieve beschouwing onderworpen. Dit nu leidt tot een aantal punten van discussie en nadere overweging. Aldus wordt de zesde onderzoeksvraag: *Wat zijn de opbrengsten van de empirische onderzoeken anno 1995 en 1997?* in beschouwende zin beantwoord.

D1 Proeftoets meetkunde op de basisschool 1995
kwantitatieve resultaten

Inleiding

Met de vaststelling van de kerndoelen voor het basisonderwijs in 1993 behoort de meetkunde officieel tot het basisschoolprogramma. Het ontstaan van de huidige basisschoolmeetkunde is terug te voeren tot het leerplanontwikkelingswerk van Wiskobas in de jaren zeventig (zie C2.2). Het is deze opvatting van meetkunde, die vanaf de jaren zeventig in de basisschoolmethoden is verwerkt en die nu in de kerndoelen wordt aangeduid.

Over de implementatie van deze nieuwe activiteiten en de effecten van het gegeven onderwijs is tot nog toe weinig bekend. Via de tweede Periodieke Peiling einde basisonderwijs (PPON) en via enkele opgaven van de toetsen van het Leerling Volg Systeem (LVS) en de eindtoets basisonderwijs beschikken we weliswaar over eerste aanwijzingen van de opbrengsten van het meetkundeonderwijs (Bokhove e.a., 1996), maar deze toetsen hadden een beperkte omvang en de dekking van de leerstof was onvolledig. In dit hoofdstuk doen we verslag van het onderzoek betreffende de eerste twee doelen van het Pimbo-project: *ontwikkeling van geschikte meetkundeitems en toetsen, en onderzoek naar de opbrengst van het meetkundeonderwijs in de basisschool.*

De ontwikkeling van het toetsinstrument wordt beschreven en de verkregen kwantitatieve resultaten worden geanalyseerd. Voor het gemak zullen we de meetkundeproeftoets soms omschrijven met de 'Pimbo-toets'.

Onderzoekskader

Het onderzoek moest verkennend van aard zijn, aangezien geen referentiekader voorhanden was. Het hoofddoel was het verkrijgen van een eerste indruk van de 'staat van het meetkundeonderwijs'. Tevens konden zo empirische gegevens verkregen worden, die de basis kunnen zijn voor een herhaling van vervolgonderzoeken.

Als uitgangspunten voor de toetsconstructie diende allereerst het *domein* afgegrensd te worden. Daarvoor kon uitgegaan worden van de kerndoelen voor meetkunde, zoals geformuleerd door de Commissie Herziening Kerndoelen (1993).

> 'kerndoel 21: De leerlingen beschikken over eenvoudige noties en begrippen waarmee ze de ruimte meetkundig kunnen ordenen en beschrijven.
>
> kerndoel 22: De leerlingen kunnen ruimtelijk redeneren. Zij bedienen zich daarbij van bouwsels, plattegronden, kaarten en foto's en gegevens over plaats, richting afstand en schaal.
>
> kerndoel 23: De leerlingen kunnen schaduwbeelden verklaren, figuren samenstellen, bouwplaten van regelmatige objecten ontwerpen en identificeren.'

Vergelijking van deze doelformuleringen met die van de *Proeve van een nationaal programma, deel 1* maakt duidelijk dat de kerndoelen een afspiegeling zijn van de in *Proeve 1* gestelde doelen (Treffers, De Moor en Feijs, 1989). Later is een meer gedetailleerde beschrijving van de kerndoelen opgesteld (Treffers en De Moor, 1994).

Verder konden de schoolboeken als uitgangspunt dienen. Een probleem hierbij was dat de verschillende auteursgroepen de toenmalige Wiskobas-voorstellen uit de zeventiger jaren op eigen wijze in hun methoden hadden uitgewerkt (De Moor, 1984). Niet alle genoemde kerndoelen komen in dezelfde mate in de nieuwe methoden aan bod. Bovendien is er sprake van een grote variatie in soorten activiteiten en in de organisatie daarvan in de verschillende jaargroepen. Zo is meetkunde in de methode *De Wereld in Getallen* hoofdzakelijk thematisch opgezet, terwijl de meetkundelessen in *Rekenen en Wiskunde* meer gericht zijn op het principe van de 'verticale mathematisering' en op het 'bindende element' van de meetkunde (Gravemeijer en Kraemer, 1984; Kraemer, z.j.).

Om toch een zekere structuur voor de uitvoering en de verwerking van het onderzoek te scheppen, hebben wij ons bepaald tot de vijf aspecten van de meetkunde die hierna nog beschreven zullen worden: *oriënteren en lokaliseren, viseren en projecteren, ruimtelijk redeneren, transformeren, construeren en meten* en de daarin vervatte doelstellingen.

Een ander uitgangspunt betrof de *moeilijkheidsgraad van de items*. In de PPON-peiling van 1992 kwamen vijftien opgaven over meetkunde voor. De gemiddelde procentuele goedscore (p-waarde) was 54,3 met uitschieters naar boven en naar beneden (Bokhove, 1996). De inhoudelijke analyse van die resultaten en van de gegevens die met de LVS-toetsen en de eindtoets waren verzameld, gaven enige aanwijzingen voor het niveau dat verwacht kon worden.

Een interessant uitgangspunt leek gelegen in de zo vaak genoemde *verschillen tussen de prestaties van jongens en meisjes*. Zowel uit de twee PPON-peilingen van 1987 en 1992 over het rekenonderwijs (Wijnstra, 1988; (Bokhove e.a., 1996; Kraemer, 1996) als uit de Cito-eindtoetsgegevens blijkt dat meisjes geringere prestaties voor rekenen-wiskunde leveren dan jongens. Dit geldt ook voor de meetkundeopgaven van die onderzoeken. Een onderzoek naar de mechanismen die ertoe bijdragen dat bij rekenen-wiskunde de prestaties van de meisjes achterlopen bij die van de jongens is juist afgerond (Van den Heuvel-Panhuizen & Vermeer, 1999). Hoewel de realistische meetkunde andere kennis en vaardigheden vereist dan rekenen, werd voorlopig uitgegaan van de verwachting die de PPON-gegevens oproepen, namelijk dat jongens met een grote mate van waarschijnlijkheid beter zullen presteren dan meisjes.

Gardner (1985) heeft gewezen op het bestaan van een specifieke ruimtelijke intelligentie, die zich onafhankelijk van de logisch-mathematische intelligentie zou

ontwikkelen, maar ook van jongs af aan geoefend zou moeten worden (zie B6). Waar bij de Pimbo-toets ook over de resultaten van het rekenen van de proefpersonen beschikt kon worden, lag het voor de hand om ook de *correlatie tussen rekenen en meetkunde* te onderzoeken.

Ten slotte leek het interessant om ook de *verschillen in opbrengst tussen de scholen* in het onderzoek te betrekken. Normeringsonderzoeken van het Cito in het kader van de ontwikkeling van een LVS-rekenen geven aan dat er inderdaad aanzienlijke verschillen tussen de scholen bestaan in de mate waarin deze de doelstellingen van het rekenonderwijs halen (Janssen e.a., 1992 en 1994). De vraag was of er vergelijkbare verschillen te vinden zouden zijn bij de toetsing van het onderdeel meetkunde. Hieraan kleefden enkele bezwaren. Ten eerste is nog onbekend wat kinderen buiten de school om aan kennis en vaardigheden verwerven die ze bij een onderdeel als meetkunde kunnen gebruiken. Ten tweede ontbrak het in dit onderzoek aan gegevens over schoolspecifieke factoren, zoals de gebruikte methode, prioriteit die aan meetkunde wordt gegeven, de affiniteit van de leraar voor het vak, zijn/haar scholing en deskundigheid op dit gebied.

Onderzoeksvragen proeftoets

Tegen de achtergrond van de bovenstaande gegevens werd het onderzoek wat betreft de proeftoets meetkunde ingeperkt tot de volgende vragen:

1 Hoe moeilijk is de voorgelegde toets onder de huidige praktijkcondities?
2 Is er bij meetkunde een verschil in resultaten tussen jongens en meisjes?
3 Wat is de correlatie tussen de prestaties van de leerlingen op de meetkundetoets (Pimbo) en op de eindtoets rekenen van het Cito?
4 Is er sprake van verschillen in resultaten tussen de scholen van de steekproef?

Om deze vragen te kunnen beantwoorden was het onderzoek als volgt opgezet.

Toetsinstrument

De toetscategorieën

Voor de constructie van de items zijn vijf categorieën gebruikt die de verschillende aspecten van de realistische meetkunde dekken, zoals onderscheiden in *Proeve I*. We duiden ze kort aan en verwijzen daarbij naar een collage van voorbeelden in figuur D1.1. Opgemerkt zij nog dat vraagstukken, activiteiten en (deel)leergangen niet exclusief naar deze aspecten zijn te onderscheiden.

1 *Oriënteren en lokaliseren* (O&L)
Hieronder wordt verstaan dat de leerlingen met behulp van elementaire ruimtelijke oriëntatiebegrippen (richting, hoek, afstand, evenwijdigheid, coördina-

ten, ...) hun eigen positie en die van andere objecten in de ruimte kunnen bepalen. In het onderwijs wordt daarbij gebruik gemaakt van kaarten, plattegronden, schema's, foto's en aanzichten, kortom allerlei beschrijvingsmiddelen van de ruimte.

2 *Viseren en projecteren* (V&P)
Dit betekent dat met behulp van rechte lijnen meetkundige verschijnselen uit de realiteit verklaard kunnen worden. Men kan daarbij denken aan schaduwverschijnselen, maar ook aan (on)zichtbaarheid van objecten vanuit bepaalde standpunten.

3 *Ruimtelijk redeneren* (RR)
Dit houdt in dat verklaringen gegeven worden naar aanleiding van eenvoudige problemen met blokkenbouwsels, aanzichten, figuren en dergelijke. Dit aspect wordt dus beheerst door de waarom-vraag.

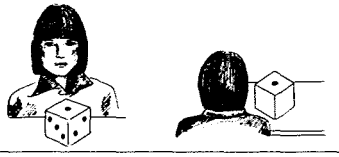
4 *Transformeren* (TR)
Hieronder wordt verstaan het verschuiven, draaien en spiegelen van eenvoudige figuren, maar ook vergroten en verkleinen van figuren en het zogenoemde omstructureren van figuren onder behoud van oppervlakte. Met dit aspect komen we het dichtst bij de meer formele kant van de meetkunde. Een kernrol is hierbij weggelegd voor het symmetriebegrip.

5 *Construeren en meten* (C&M)
Dit is het van oudsher meest herkenbare aspect, waarbij het gaat om het lezen, tekenen en construeren van eenvoudige meetkundige figuren. Denk aan bouwplaten, (ruimtelijke) modellen, schaaltekeningen en grafieken. In het bijzonder wijzen we op completeren en omstructureren, dat bij oppervlakte- en inhoudsberekeningen zo belangrijk is. Ook het in eenvoudige gevallen verklaren en toepassen van de effecten van vergroting en verkleining op omtrek, oppervlakte en inhoud vallen hieronder.

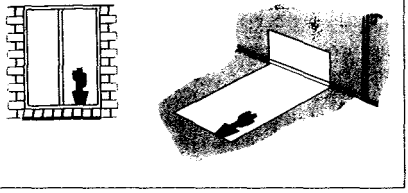
Itemconstructie

Op basis van deze categorieën is in de loop van 1994 een verzameling van ongeveer zestig opgaven geconstrueerd. Daarbij werden met name de methoden *De Wereld in Getallen* (Huitema e.a.) en *Rekenen en Wiskunde* (Gravemeijer e.a.) als bronnen gebruikt. Daarnaast zijn geraadpleegd: *400 opgaven...* (Feijs e.a., 1987), *Proeve 1* (Treffers e.a.), *Met het oog op ruimte* (Gravemeijer & Kraemer, 1984), *Meetkunde op de basisschool* (Kraemer, z.j.) en een *Een blokje om* (Ter Heege, 1978). Na een eerste revisie en ordening heeft dit geleid tot een pakket van 55 opgaven die aan de Commissie Eindtoets Basisonderwijs van het Cito en aan externe deskundigen is voorgelegd.[1] De daarop volgende wijzigingen betroffen het niveau van de opgave, de formulering in de stam en de vragen, en de aard van de afbeelding. Na een proeftoets van enkele opgaven in een klas en een individuele afname van alle opgaven bij

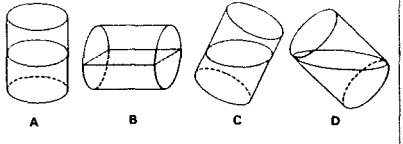
Oriënteren en lokaliseren (p = 59)
Er ligt een grote dobbelsteen op een tafel. Op een dobbelsteen hebben vlakken, die tegenover elkaar liggen, samen altijd 7 ogen. Sara staat achter de tafel.
Teken in het tweede plaatje hoe Sara de dobbelsteen ziet.



Viseren en projecteren (p = 45)
Er valt zonlicht door het raam. De tekenaar heeft de schaduw van het balkje in het midden van het raam nog niet getekend. Maak de tekening hieronder af.

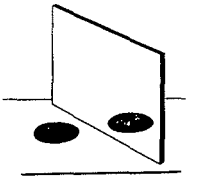


Ruimtelijk redeneren (p = 87)
Een gesloten, doorzichtige cylinder is voor de helft gevuld met gekleurd water. De cylinder wordt in de standen A, B, C en D gehouden. Het wateroppervlak neemt dan de vormen 1, 2, 3 of 4 aan.

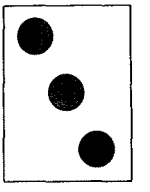


Zet de goede letters bij de goede vorm.

Transformeren (p = 35)

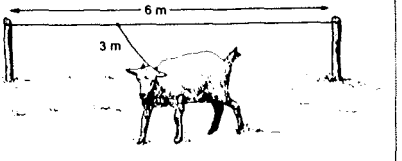


Op een stuk papier staat één stip. Een spiegel wordt recht op het papier met een stip gezet. Je ziet dan twee stippen. Hieronder zie je een blaadje met drie stippen.

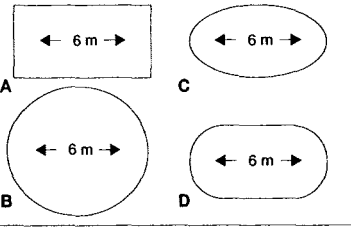


Teken op dit blaadje een lijn waarop je een spiegel moet zetten om vijf stippen te krijgen.

Construeren (p = 50)



Een geit zit aan een lijn van 3 meter. Het einde van deze lijn kan over een draad van 6 meter schuiven.
Als de geit alles afgraast, hoe ziet dat stuk er dan uit?
Zet een rondje om de letter bij het goede antwoord.



figuur D1.1: Voorbeelden uit de Pimbo-toets 1995 met aspect en p-waarde

één leerling zijn de definitieve opgaven vastgesteld.[2]

In afwijking van de normale gang van zaken bij de eindtoets van het Cito waren wij niet gebonden aan de vorm van de vierkeuzeopgave. Juist het feit dat de leerlingen zelf iets moesten tekenen, berekenen of beredeneren, kon zo extra informatie opleveren. Dit betekende echter dat alle opgaven met de hand moesten worden nagekeken.[3]

Tevens moest een systeem bedacht worden waarmee de gegevens ook computertechnisch verwerkt konden worden. In verband met dit laatste is toen besloten de items te dichotomiseren op goed-fout. Dit bracht echter mee dat een aantal items, die een stapeling van opgaven kenden, herleid moest worden tot enkelvoudige items, waarvan een aantal de mogelijkheid tot gokken in zich had. Zo is uiteindelijk een verzameling van 81 opgaven ontstaan, die over drie parallelle toetsboekjes A (27 items), B (24 items) en C (30 items) zijn verdeeld. Uit de toets-item-analyse is gebleken dat de drie parallelle toetsen als gelijkwaardig beschouwd kunnen worden.

Steekproef van scholen

Elk jaar wordt als voorbereiding op de eindtoets basisonderwijs van een volgend jaar door het Cito een proeftoets afgenomen. Hiertoe wordt een steekproef getrokken uit het totale bestand van deelnemende scholen van de eindtoets basisonderwijs. Het totaal aantal deelnemende scholen aan de Cito-eindtoets bedraagt 5300, dat is 71 procent van alle Nederlandse scholen. Aan een deel van de leerlingen van de steekproef van 1995 is de Pimbo-toets voorgelegd. In totaal namen 46 scholen met 923 leerlingen aan de Pimbo-toets deel. Deze leerlingen hebben later ook de drie onderdelen van de Cito-eindtoets van 1995 gemaakt, te weten Rekenen, Taal en Informatieverwerking.[4] Ter beantwoording van de gestelde vragen maken we in het hierna volgende gebruik van drie toetsresultaten:

- de resultaten van de meetkundetoets (Pimbo)
- de resultaten van het onderdeel rekenen van de eindtoets 1995 (rekenen-Cito)
- de resultaten van alle opgaven van de drie onderdelen van de eindtoets (tot-EB, Cito). Dit is dus het gemiddelde van 180 opgaven over rekenen, taal en informatieverwerking.

Moeilijkheidsgraad van de toets

Hoe moeilijk is de voorgelegde toets onder de huidige praktijkcondities?

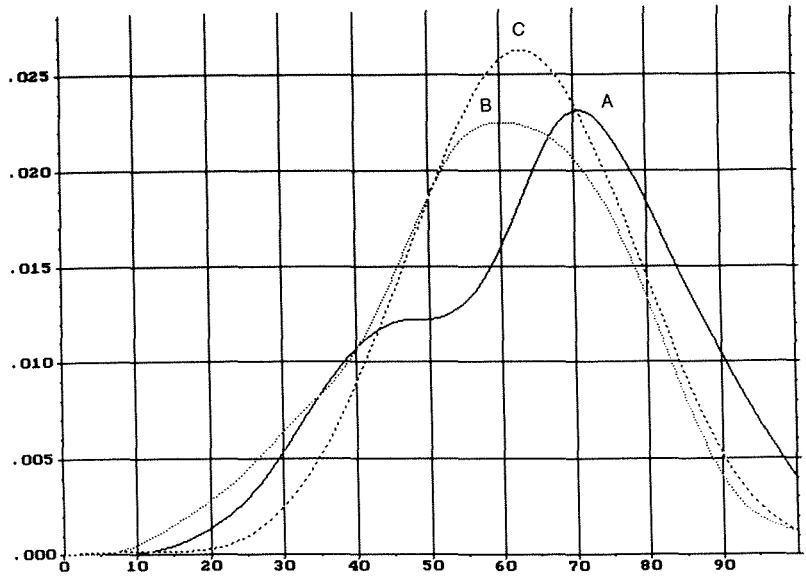
In figuur D1.2 staat een schematisch overzicht van de gemiddelde resultaten van de drie parallelle Pimbo-toetsen (A,B,C) en de bijbehorende standaarddeviaties.[5] Daarnaast worden van deze leerlingen van de drie steekproeven ook de resultaten op de rekentoets (rekenen-Cito), en op het totaal van de eindtoets (tot-EB, Cito) weergegeven.

		meetkunde (Pimbo)		rekenen (Cito)		tot. EB (Cito)	
Toets	N	p	sd	p	sd	p	sd
A	172	65	18	71	21	73	16
B	324	59	16	69	19	70	15
C	427	62	14	74	19	72	16

figuur D1.2: Gemiddelde goedscores *p* (procenten) en bijbehorende standaarddeviaties (*sd*) op meetkunde, rekenen en totaalscore eind basisschool (N = 923)

Op grond van deze gegevens menen wij de volgende conclusies te kunnen trekken:

a De scores op het onderdeel rekenen van de Cito-eindtoets BO 1995 van de leerlingen die de Pimbo-toetsen A, B of C gemaakt hebben, wijken niet veel af van het algemeen gemiddelde, dat ongeveer 70 procent is.
b Gemiddeld genomen zijn de opgaven van deze meetkundetoetsen moeilijker dan die voor rekenen. Van de drie meetkundetoetsen samen ligt de score gemiddeld 9 procent lager dan die van rekenen (62 procent voor meetkunde tegen 71 procent voor rekenen).



figuur D1.3: Vergelijking van de drie meetkundetoetsen (Pimbo) via dichtheidskrommen

c Gezien de gevonden p-waarden voor meetkunde, is de poging om drie parallelle meetkundetoetsen te ontwerpen redelijk geslaagd. In figuur D1.3 zijn de opbrengsten ook via drie dichtheidskrommen weergegeven.[6] Naar aanleiding hiervan merken we nog het volgende op:

- de volgorde van goedscores (hoog naar laag) van de drie toetsen is A – C – B
- toets A (met de kleinste N) vertoont de grootste variatiebreedte en het meest afwijkende gedrag
- met name de top van A wijkt af van de gevonden p-waarde; dit als gevolg van de afwijkende verdeling van A
- de toetsen B en C vertonen een nagenoeg normale verdeling.

Verschil jongens-meisjes

Is er bij meetkunde een verschil in resultaten tussen jongens en meisjes?
Uit de PPON-onderzoeken van 1987 en 1992 is gebleken dat jongens aan het einde van de basisschool op een groot aantal onderdelen van het rekenen significant beter scoren dan meisjes. Dit wordt bevestigd door het MOOJ-onderzoek van Van den Heuvel-Panhuizen en Vermeer uit 1999. Ook Van der Heijden had in zijn onderzoek over hoofdrekenen in 1993 al dergelijke verschillen geconstateerd. De resultaten, zoals weergegeven in de tabel van figuur D1.2, zijn in figuur D1.4 uitgesplitst naar jongens en meisjes (van drie proefpersonen was het geslacht onbekend). Een sterretje geeft aan dat de t-toets van Levene significante verschillen oplevert.
Dit leidt tot de volgende conclusies:

a Op grond van deze steekproef blijken de verschillen tussen de prestaties van jongens en meisjes op de totaalscores eindtoets basisonderwijs niet significant. Dit is in overeenstemming met de eindtoetsgegevens van het Cito.
b In twee steekproeven van leerlingen (B en C) scoren de jongens bij het onderdeel rekenen van de eindtoets significant beter dan de meisjes. Dit is in overeenstemming met de hiervoor genoemde onderzoeksgegevens. Dat het even grote verschil bij steekproef A niet significant is, komt door het relatief kleine aantal leerlingen van deze groep.
c Meetkunde levert een zelfde beeld op als rekenen. In alledrie deelpopulaties behalen de jongens gemiddeld genomen betere scores op de Pimbo-toets dan de meisjes. Deze verschillen zijn significant. Dit doet veronderstellen dat meisjes bij meetkunde geen betere kans van slagen hebben dan bij rekenen.

Toets	meetkunde (Pimbo)					
	N		p		sd	
	j	m	j	m	j	m
A	81	91	67*	62	16	19
B	156	165	62*	56	16	16
C	227	200	65*	60	14	14

Toets	rekenen (Cito)					
	N		p		sd	
	j	m	j	m	j	m
A	81	91	73	68	16	21
B	156	165	73*	66	18	19
C	227	200	76*	71	19	19

Toets	tot. EB (Cito)					
	N		p		sd	
	j	m	j	m	j	m
A	81	91	73	73	16	16
B	156	165	71	70	14	15
C	227	200	72	73	15	14

* geeft aan dat jongens significant beter scoren dan meisjes (α = 5 procent)

figuur D1.4: *n*-, *p*- en bijbehorende *sd*-waarden uitgesplitst naar jongens en meisjes (N = 920)

Correlatie meetkunde-rekenen

Wat is de correlatie tussen de prestaties van de leerlingen op de meetkundetoets (Pimbo) en op de eindtoets rekenen van het Cito?

De tabel van figuur D1.5 laat de sterktes van drie verbanden zien, namelijk

- tussen gemiddelde scores bij rekenen en de gemiddelde totaalscores op de eindtoets
- tussen de gemiddelde Pimbo-scores en de gemiddelde totaalscores op de eindtoets
- tussen de gemiddelde Pimbo-scores en de scores op het onderdeel rekenen.

Toets	N	rekenen/ tot. EB	meetkunde/ tot. EB	meetkunde/ rekenen
A	172	0,92	0,67	0,68
B	324	0,89	0,58	0,57
C	427	0,89	0,50	0,54

figuur D1.5: Correlaties tussen meetkunde (Pimbo), rekenen (Cito), en totaal eindtoets BO. Ter vergelijking de correlatie tussen rekenen en totaal-EB (N = 923)

De gevonden correlatiecoëfficiënten roepen een tweetal conclusies op:

a Het sterke verband tussen rekenscore en totaalscore op de eindtoets Cito stemt overeen met de Cito-gegevens van de jaarlijkse afnamen.
b In vergelijking met de hoge correlatie tussen rekenen en totaal-EB is het verband tussen de gemiddelde Pimbo-score en de totaalscore 'matig' te noemen, evenals het verband tussen de Pimbo-score en de score op het rekenonderdeel van de Cito eindtoets.[7] Voorzichtig uitgedrukt betekent dit dat de prestaties op de Pimbo-toets slechts matige voorspellers zijn van de prestaties op de eindtoets rekenen.

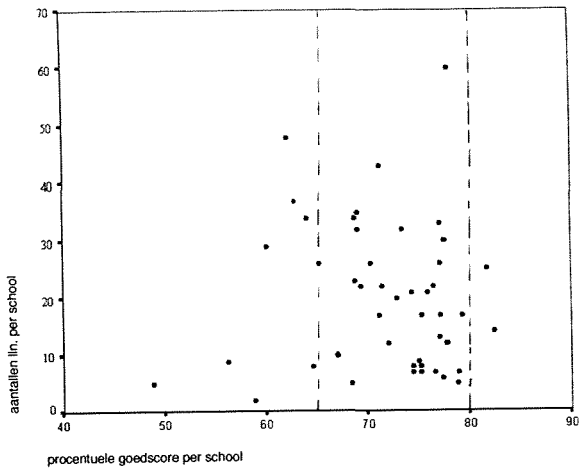
Wij hebben echter ook de correlaties tussen meetkunde (Pimbo) en rekenen berekend, waarbij een correctie is toegepast op het totaal-EB. Dit betekent dat de beste 10 procent en de slechtste 10 procent van de totaal-EB zijn weggelaten. Deze *partiële correlaties* luiden voor *toets A: 0,24,* voor *toets B: 0,13* en voor *toets C: 0,22.* Vatten we de *gehele groep* samen dan bedraagt de *partiële correlatie meetkunde-rekenen: 0,19.*

Er is door ons dus een zwakke correlatie geconstateerd tussen meetkunde en rekenen indien gecorrigeerd wordt op de totaal-EB-scores.

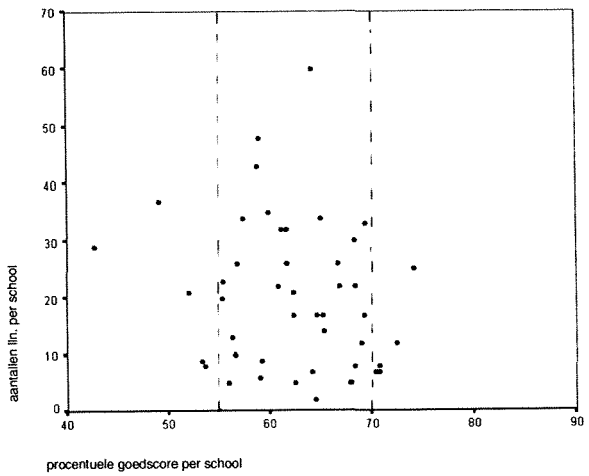
Verschil tussen de scholen

Is er sprake van verschillen in resultaten tussen de scholen van de steekproef?
Bijlage D-I geeft een overzicht van de gemiddelde scores van de 46 scholen van het Pimbo-project op respectievelijk de Pimbo-toets, het onderdeel rekenen en op de drie onderdelen van de Cito-eindtoets. De scholen zijn geordend naar opklimmende scores (van 43 procent tot 74 procent) op de Pimbo-toets. Tevens zijn per school vermeld: het aantal leerlingen, de gemaakte versie van de Pimbo-toets, de rekenscore en de totaalscore op de eindtoets. Omdat deze lijst weinig visueel houvast biedt voor

de interpretatie van de uitkomsten, zijn tevens twee diagrammen gemaakt waarin de gemiddelde totaalscore op de eindtoets, respectievelijk de meetkundescore zijn afgezet tegen het aantal deelnemende leerlingen (zie figuren D1.6a en D1.6b).



figuur D1.6a: Totaal eindtoets basisonderwijs (Cito) voor de 46 Pimbo-scholen



figuur D1.6b: Meetkundescore voor de 46 Pimbo-scholen

Op grond van de tabel en de diagrammen kunnen we de volgende conclusies trekken:

a Het merendeel (78 procent) van de scholen heeft een totaalscore van het Cito van 65 procent tot 80 procent, conform de bedoelingen van de toetsconstructeurs. Voor meetkunde haalt een zelfde percentage van de scholen een score van 55 procent tot 70 procent. Op basis van deze toetsen blijkt dat de spreiding van de scholen bij meetkunde vergelijkbaar is met die voor rekenen, alleen ligt die 10 procent lager.

b Uit deze steekproef valt geen verband af te leiden tussen de grootte van de leerlingroepen en de resultaten op meetkunde en op de totaalscore eindtoets BO.

c Rekening houdend met het feit dat de Pimbo-opgaven van deze proeftoets relatief moeilijker waren dan de rekenopgaven van de eindtoets, kunnen we stellen dat er op grond van dit onderzoek geen aanwijzingen zijn dat de basisschoolleerlingen minder kans krijgen om succes bij meetkunde te boeken dan bij andere schoolvakken.

Samenvattende conclusies D1

Via het Pimbo-onderzoek is voor het eerst een verzameling toetsopgaven realistische meetkunde samengesteld zoals dit onderwerp thans in de moderne Nederlandse reken-wiskundemethoden voorkomt en zoals voorgeschreven door de kerndoelen voor het basisonderwijs. Een eerste belangrijke uitkomst van dit onderzoek is dat het de ontwerpers van de proeftoetsen gelukt is een verzameling toetsopgaven samen te stellen die goed discrimineren. Tevens is gebleken dat het mogelijk is om gelijkwaardige parallelle toetsen op te stellen.[8] De totale gemiddelde goedscore van de Pimbo-toets van 1995 is 62 procent. Er was echter geen vergelijkbare standaard voorhanden. In dit onderzoek is een zwakke tot matige correlatie tussen rekenen en meetkunde geconstateerd. De verschillen in prestaties tussen jongens en meisjes op meetkunde zijn significant in het voordeel van de jongens. Vanwege het ontbreken van specifieke gegevens per school valt over de verschillen in opbrengst per school vooralsnog weinig te zeggen.

In hoofdstuk D5 zullen we naar aanleiding van deze gegevens en die van de overige onderzoeken (zie D3 en D4) de betekenis van deze conclusies nader ter discussie stellen.

D2 Inhoudelijk-kwalitatieve analyse van de proeftoets meetkunde

Inleiding en vraagstelling

In dit hoofdstuk zullen wij de Pimbo-toets op een meer kwalitatieve wijze beschouwen. Wij maken daarbij gebruik van de al genoemde didactische indeling van de meetkundige inhoud naar vijf aspecten: oriënteren en lokaliseren (O&L); viseren en projecteren (V&P); ruimtelijk redeneren (RR); transformeren (TR) en construeren en meten (C&M). Vanwege de in algemene termen gestelde omschrijvingen van deze aspecten was het onmogelijk de meetkundige opgaven van de proeftoets in disjuncte (aspect)verzamelingen op te delen. Anders gezegd, bepaalde opgaven kunnen soms onder meerdere aspecten gerangschikt worden. Toch was bij de constructie van de items getracht bij iedere opgave steeds één bepaald aspect pregnant uit te laten komen.

Van alle vijf aspecten zijn de antwoorden per item op goed/fout gescoord. Hiermee is een zekere getalsmatige indruk verkregen van het totaalresultaat per aspect. Aan deze getallen kan om bovengenoemde reden geen absoluut discriminerend karakter toegekend worden; ze zijn slechts bedoeld als een eerste indicatie over de stand van zaken en als mogelijk hulpmiddel ter verbetering van het onderwijs.

Omdat de vraagstukken per stuk zijn nagekeken, kregen we tevens de beschikking over enig leerlingenwerk in de vorm van tekeningen en/of geschreven antwoorden en berekeningen. Dit leerlingenwerk bood de mogelijkheid om bepaalde opgaven nader te analyseren dan alleen op het goed-fout criterium. Met name de geleverde tekeningen gaven aanknopingspunten voor het niveau van inzicht en vaardigheid. Gezien de proefsituatie en het nieuwe van het onderwerp meetkunde was een systematisch-methodologische werkwijze hierbij niet te voorzien. Niettemin menen we dat de verkregen gegevens aanwijzingen opgeleverd hebben tot een voorlopige beantwoording van de volgende vragen:

1 Welke aanwijzingen levert het leerlingenwerk (de particuliere antwoorden) over het beheersingsniveau van bepaalde begrippen en/of vaardigheden?
2 Zijn er uit de totale toets aanwijzingen af te leiden over de aard en het niveau van het aangeboden onderwijs?

Deze vragen vormen de leidraad voor de nu volgende beschrijving, waarin we in het algemeen per aspect één goed gemaakt item en één minder goed (of slecht gemaakt) item bespreken.

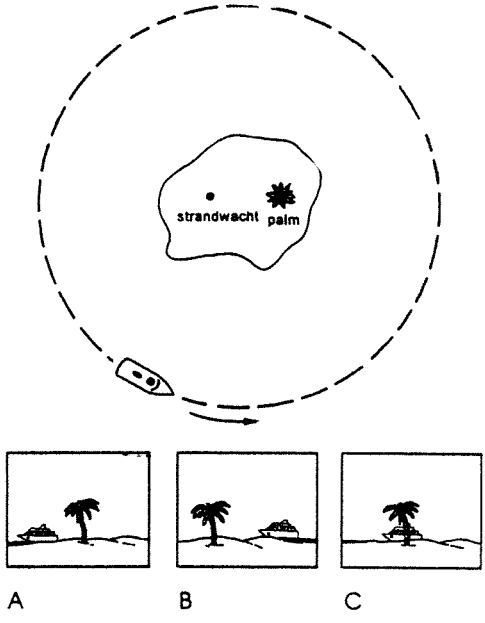
Oriënteren en lokaliseren (O&L)

Oriënteren op een kaart

De drie toetsen bevatten dertien zuivere opgaven over oriënteren en lokaliseren

(O&L). De gewogen gemiddelde p-waarde van O&L is 62,7. Heel goed, met een p-waarde van 94, is het item dat in figuur D2.1 is weergegeven. Slechts 1 procent van de leerlingen beantwoordde deze vraag niet.

Een boot vaart volgens de stippellijn een keer rond het eiland.
De strandwacht maakt 3 foto's van de boot: foto A, foto B en foto C.



In welke volgorde zijn de foto's gemaakt?
Zet een kruisje bij het goede antwoord.

☐ A - B - C
☐ B - A - C
☐ B - C - A
☐ C - A - B

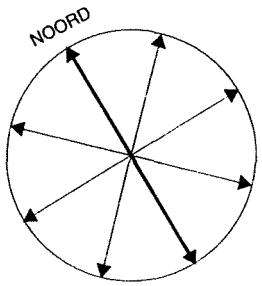
---

figuur D2.1: Een goedscorend item oriënteren en lokaliseren, p = 94

Voor drie andere, vergelijkbare items waarbij dezelfde inzichten ter sprake kwamen, was de gemiddelde p-waarde 67, maar in die items moesten de kinderen de posities van waaruit de foto's tijdens de rondvaart waren gemaakt, zelf op de plattegrond construeren. Toch kan mede op grond van enkele andere items uit deze toets gesteld worden dat het *oriënteren op een kaart of naar aanleiding van een gegeven panoramische tekening in het algemeen goed beheerst wordt.*

Richting en hoek

Veel problemen traden op met de items over richtingen en het begrip rechte hoek. De richtingsvragen waren gekoppeld aan een kompasroos (figuur D2.2). Er werd hier getoetst op de begrippen evenwijdigheid, richting en hoek.



Booreiland 1

Booreiland 2

Els zit op een duin van een eiland.
In welke richting ziet zij booreiland 1?
In welke richting ziet zij booreiland 2? _____
Hoe groot is de hoek, die deze twee richtingen maken? _____

figuur D2.2: Richting en hoek worden slecht beheerst (p = 48 en p = 26)

De richtingvraag leverde een p-waarde op van 48 (3 procent niet beantwoord). Veel fouten werden gemaakt doordat de oriëntering van de kompasroos afweek van de gebruikelijke. Ook het omkeren van richting kwam nogal eens voor (zuidwest in plaats van noordoost). De grootste problemen lagen bij het hoekbegrip. Iets meer dan een kwart (26%) van deze proefgroep gaf als antwoord 90° of rechte hoek, wat als criterium voor het goede antwoord was vastgesteld. Het meest sprekend voor dit item is wellicht dat door 27 procent van de leerlingen überhaupt geen antwoord werd gegeven. Een op zich begrijpelijk antwoord als '$\frac{1}{4}$ van het hele rondje' is niet geaccepteerd. Als antwoorden werden een aantal breuken, zoals $\frac{3}{4}$ (breukencirkel?), maar ook $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ geregistreerd.

Leerlingen die de graadnotatie kenden, gaven antwoorden van 9° tot 250°. Enkele van deze foute antwoorden, zoals 45°, 135°, 180°, 270° (!) en 450°, zijn nog wel te verklaren, maar de meeste antwoorden zijn mysterieus. Eenmaal komt ook de verwarring met temperatuur (80° C) voor. Een aantal malen werden percentages als antwoord gegeven, waarbij die van 25% en 75% in verband met de procentencirkel verklaarbaar lijken.

Zeer vaak komt de verwarring met het begrip driehoek voor. Een aantal kinderen had de driehoek tussen de drie punten (Els en de twee booreilanden) getekend en de zijden gemeten. Deze waren 3, 4 en 5 cm lang. Daaruit kunnen wellicht de antwoorden als 3 cm, 7 cm, 10 cm en 12 cm verklaard worden.

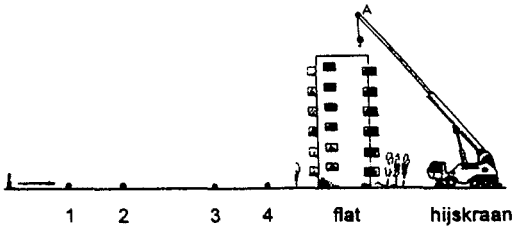
Vergelijken we dit item met een soortgelijke opgave, waarin de onderling loodrechte richtingen (van twee varende boten) getekend waren, dan blijken de scores aanmerkelijk hoger uit te vallen: 65% voor de richting en 41% voor de hoek. Maar ook hier werd door 21 procent van de leerlingen geen antwoord gegeven op de hoekvraag. Overigens werden bij de foute oplossingen dezelfde specifieke antwoorden als hiervoor besproken, geconstateerd. Op grond van dit schriftelijke werk is geen gedegen foutenanalyse over het hoekbegrip te maken. In hoeverre het begrip evenwijdigheid in verband met richting beheerst wordt, is uit deze gegevens niet af te leiden.

Uit deze toets blijkt dat *het merendeel van de leerlingen aan het eind van de basisschool het begrip rechte hoek niet kent.* Het lijkt verder een gerechtvaardigd vermoeden dat de meeste leerlingen aan het eind van de basisschool *überhaupt nauwelijks een idee van het hoekbegrip hebben.*

Viseren en projecteren (V&P)

Als specifiek voor het aspect 'viseren en projecteren' waren in de drie toetsen acht items aangemerkt. De gewogen gemiddelde p-waarde op dit aspect in deze toets is 52,9.

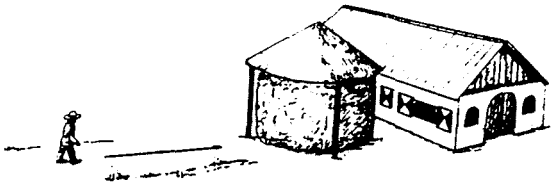
In figuur D2.3 zien we een opgave met een p-waarde van 83, die door alle leerlingen is beantwoord. Het gaat om een eenvoudige toepassing van het begrip viseerlijn, zoals die ook in de meeste realistische methoden voorkomt.[1] Zodra het begrip viseerlijn aan lastiger figuren, zoals de cirkel, moet worden toegepast, neemt de moeilijkheidsgraad toe. Zo blijkt uit enkele andere items, waarvan er één in figuur D2.4 is weergegeven. Dit item had een p-waarde van 22, waarbij 4 procent van de leerlingen niets invulde. Behalve de cirkel zijn er meerdere complicerende factoren bij deze opgave te noemen. De situatie is weergegeven via een panoramische tekening en een bovenaanzicht. Ook de taal kan een rol gespeeld hebben: 'de man mocht de schuur helemaal niet meer zien'. Verder moest opgemerkt worden dat de totale figuur niet symmetrisch is.



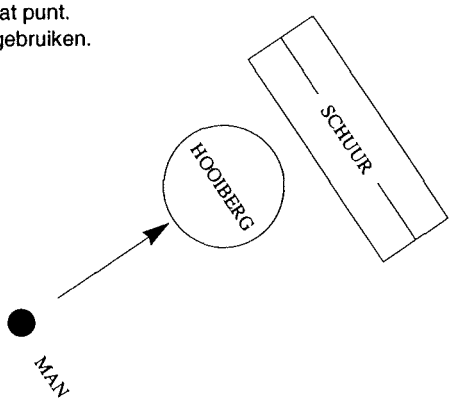
De wandelaar ziet de hijskraan boven de flat uitsteken.
Als hij dichterbij komt, ziet hij steeds minder van de hijskraan.
Op welke plaatsen (1, 2, 3, 4) kan hij punt A van de hijskraan niet zien?

Op de plaatsen _____

figuur D2.3: Een makkelijke viseer-opgave (p = 83)



Een man loopt naar de hooiberg. Op een bepaald punt kan hij de schuur helemaal niet meer zien.
Zet een kruisje bij dat punt.
Je mag een liniaal gebruiken.



figuur D2.4: Een moeilijke viseer-opgave (p = 22)

De kinderen moesten in deze opgave dus tweemaal een 'viseerlijn' door de hoekpunten van de schuur langs de cirkel trekken of schatten of op grond van een redenering meteen de goede kant kiezen. Het construeren van de viseerlijn gaat het makkelijkst bij verwisseling van waarnemer en object (blikwisseling), zij het dat dit ook door proberen (de man vooruit laten bewegen) gevonden kan worden. Ten slotte zij opgemerkt dat dit vraagstuk ook een constructief element heeft: het punt moest echt getekend worden. Als criterium voor de goedscore was een kleine marge van de plaats van het punt toegestaan. Verder hoefden de viseerlijnen niet getekend te zijn.

Zodra er complicerende factoren in het spel waren, bleken de V&P-opgaven van deze toets lastig tot zeer lastig te zijn. In hoeverre hierbij het constructieve element een extra verzwarende factor was, valt moeilijk te zeggen. Een drietal items, die alle het afmaken van onvolledig getekende schaduwen betroffen, leverde een gemiddelde p-waarde van 54,2 op. In al deze vraagstukken speelde het concrete construeren een rol.[2]

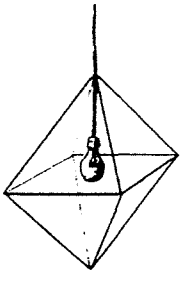
Onze indruk voor dit aspect, dat een geheel nieuw soort opgaven meebrengt, is dat er vooralsnog tamelijk zwak op gescoord wordt, zeker wanneer er een beroep op het 'zelf construeren (tekenen)' wordt gedaan.

Ruimtelijk redeneren (RR)

Aan 25 items was het aspect ruimtelijk redeneren toegekend.[3] De gewogen gemiddelde p-waarde op het aspect RR in deze toets was 63,9.

Aanzichten

Hoog scoorden die items, waarbij gevraagd werd voor-, achter- en zijaanzichten van een object te combineren met een camerapositie. Deze vraagstukken komen veelvuldig in de methoden van de lagere leerjaren voor.[4]



Joerie maakt een lamp van ijzerdraad en glas.
Hoeveel driehoekige stukken glas heeft hij nodig?

_____ stukken glas

figuur D2.5: Een goed scorend item ruimtelijk redeneren (p = 92)

Veelvlakken

Items waarbij een beroep gedaan werd op ruimtelijk inzicht bij enige regelmatige veelvlakken (viervlak, kubus en achtvlak), scoorden hoog. Het item over het achtvlak in figuur D2.5 had een p-waarde van 92. De foute antwoorden (8%) getuigden van onbegrip van een ruimtelijke voorstelling; er werd namelijk met de figuur geredeneerd alsof het een vlakke figuur was.

Blokkenbouwsels en redeneren

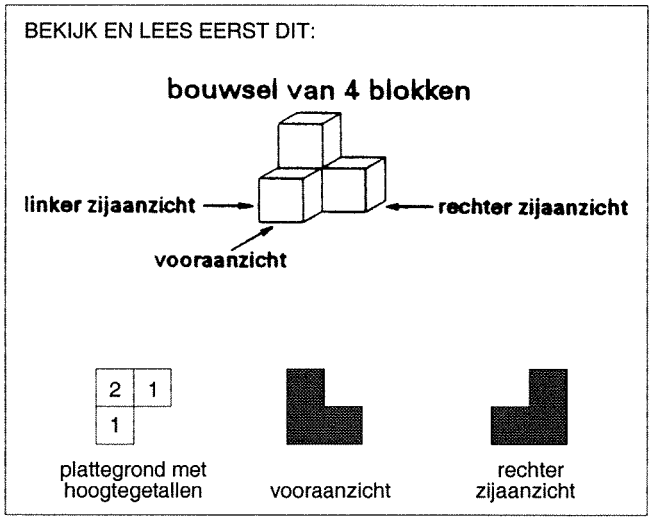
Veel minder waren de resultaten op de opgaven die bekend staan onder blokkenbouwsels en aanzichten, die in alle methoden veelvuldig voorkomen. Het verschil met de eerder genoemde aanzichtopgaven is dat de informatie veel schraler is; slechts de contouren van de bouwsels zijn gegeven, waardoor allerlei specifieke informatie ontbreekt. Bij deze items moest eerst een instructie gelezen worden, waarin de begrippen voor-, zijaanzicht en plattegrond uitgelegd werden. Er wordt in het hierbij afgebeelde voorbeeld (figuur D2.6) ook een beroep gedaan op logisch redeneren, hetgeen de moeilijkheidsgraad zonder meer verhoogd heeft. Het is daarom niet verwonderlijk dat de goedscore op dit item slechts 10% was, terwijl 18 procent van de leerlingen in het geheel geen antwoord gaf. In sommige gevallen werd door de leerlingen bij deze opgaven geschreven dat ze zoiets nog nooit gehad hadden.

Ook opgaven over blokkenbouwsels, waarbij het aantal blokjes berekend moest worden en waarbij uit het hoofd de ruimtelijke structuur gezien moest worden, bleken niet gemakkelijk te zijn.

Op grond van deze toets kan gesteld worden dat het merendeel van de kinderen van eenvoudige ruimtelijke figuren en situaties zich een ruimtelijke voorstelling kan maken. Zodra echter van meer complexe ruimtelijke figuren of bouwsels wordt uitgegaan, dalen de prestaties. Indien bovendien een beroep op logische, ruimtelijke redeneringen wordt gedaan (als, dan-redeneringen), zijn de prestaties duidelijk onvoldoende.

Transformeren (TR)

Als zuivere items voor het aspect transformeren waren vijftien items aangemerkt. De gewogen gemiddelde p-waarde was 67,6, waarmee dit aspect in deze toets als het best scorend naar voren komt. Opvallend is dat uit de enquête die onder de leraren is gehouden, is gebleken dat juist dit aspect als het minst belangrijk werd beoordeeld (zie D3).

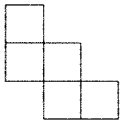


Hieronder staan het vooraanzicht en het rechter zijaanzicht van een ander blokkenbouwsel.

vooraanzicht

rechter zijaanzicht

Zet de hoogtegetallen in de plattegrond.



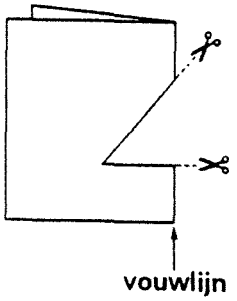
plattegrond

figuur D2.6: Redeneren vanuit aanzichten (p = 10)

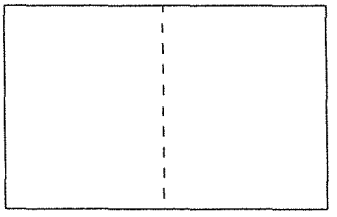
In de items werd gebruik gemaakt van vlakke figuren, die door translaties, lijnspiegelingen en draaiingen in elkaar overgevoerd konden worden; overigens zonder dat deze termen gebruikt werden. Voor de spiegelingen werd aan het 'echte' spiegelen gerefereerd of werd gebruik gemaakt van vouwlijnen, waarbij de spiegeling opgevat wordt als een rotatie in de ruimte om de spiegel-as. Een voorbeeld van een

vlakke lijnspiegeling is weergegeven in figuur D2.7. Dit item had een p-waarde van 72, ondanks de complicerende factor dat ook nog een constructietekening gevraagd werd. Slechts 1 procent van de leerlingen gaf op deze vraag geen antwoord.

Een blaadje wordt gevouwen, geknipt en open gevouwen.



Teken wat je ziet als het blaadje open gevouwen is.

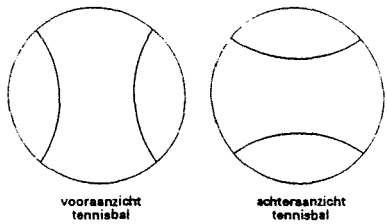


figuur D2.7: Goede beheersing van symmetrie (p = 89)

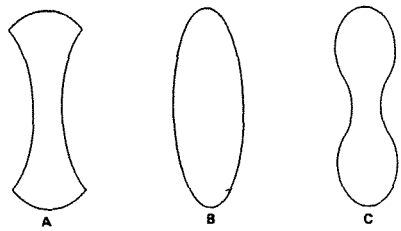
Ook het principe van de vlakspiegeling kwam in de opgaven voor, zoals bij een opgave over een stempel en zijn afdruk, dat een p-waarde van 89 had. Drie items betroffen de vermenigvuldigingstransformatie (vergroten en verkleinen).

Ten slotte wijzen we op één opgave van een iets andere aard, die formeel onder de topologische transformaties geplaatst kan worden en waarvan nauwelijks voorbeelden in de methoden zijn te vinden (figuur D2.8). De p-waarde van dit item was 33, in feite gelijk aan de gokkans.

In het algemeen kan gesteld worden dat op het aspect 'transformeren' in deze toets redelijk gepresteerd is.



Hierboven zie je een tennisbal van voren en van achteren.
Zo'n tennisbal is uit twee gelijke stukken gemaakt.
Welke vorm heeft één zo'n stuk?
Zet een rondje om de letter bij het goede antwoord.



figuur D2.8: Goedscore gelijk aan gokkans (p = 33)

Construeren en meten (C&M)

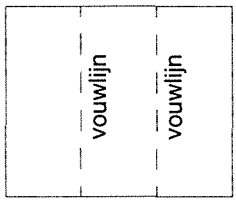
Twintig opgaven waren als typische C&M-items aangeduid. De gewogen gemiddelde p-waarde is 55,7. Construeren is van oudsher door de meetkundige traditie bepaald, met name door de bekende passer- en liniaalconstructies uit de euclidische planimetrie. In de realistische meetkunde voor de basisschool wordt dit aspect veel ruimer geïnterpreteerd. Er wordt daar van construeren gesproken wanneer een meetkundig object, dat aan bepaalde voorwaarden dient te voldoen, 'gemaakt' wordt. In deze opvatting kan ook het concrete ruimtelijke bouwen, het werken met constructierietjes of bouwplaten, het vouwen en knippen en zo meer verstaan worden. Om praktische redenen waren wij voor deze toets aangewezen op vraagstukken die slechts het gebruik van een liniaal toestond. Er is gezocht naar zodanige problemen, dat het inzicht van de betreffende constructie getoetst werd.

Het praktische, meer getalsmatige meten, inclusief het manipuleren binnen het metriek stelsel, was in deze toets buiten beschouwing gelaten. Dit heeft in het realistische reken-wiskundeonderwijs overigens wel een aparte plaats. Wel kwamen enkele begripsmatige aspecten van het meten aan de orde: hoe wordt bijvoorbeeld door omstructureringen de oppervlakte van een bepaalde figuur gevonden? Het gebruik van formules behoort niet tot dit aspect van de meetkunde. Uiteraard kan het

rekenaspect niet geheel buiten beschouwing blijven, vandaar dat het aspect ook wel als CM&R wordt aangeduid. Een belangrijk onderwerp van het aspect CM(&R) is de visuele schaal, waarbij de maatlat op een of andere wijze – dit kan ook een referentiefiguur zijn – in de figuur wordt afgebeeld.

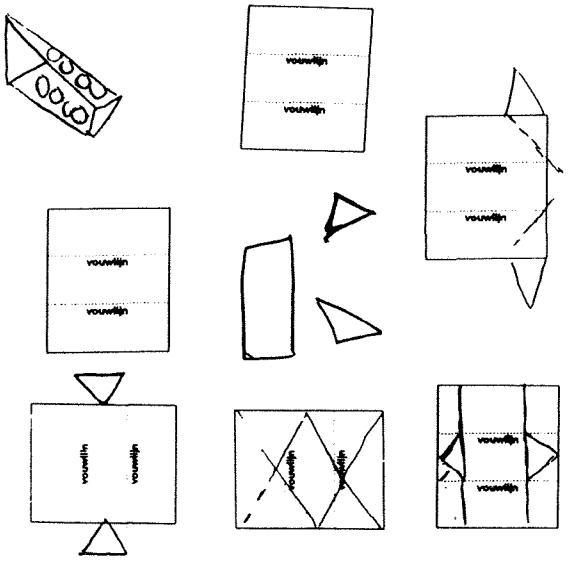
Bouwplaten
In figuur D2.9 is een item weergegeven dat als voorbeeld kan dienen voor het bedoelde construeren. Dit item had een p-waarde van 44; 10 procent (!) van de leerlingen had geen antwoord gegeven. In figuur D2.10 is een aantal oplossingen weergegeven, waaruit moge blijken dat dit soort opgaven voor een groot aantal kinderen nog geen gemeengoed is.

De bouwplaat van het chocoladedoosje is uit één stuk karton gemaakt.
Teken hieronder de twee driehoeken aan de bouwplaat.



figuur D2.9: Een constructie-opgave (p = 44)

Opgemerkt dient te worden dat niet geaccepteerd was als twee driehoeken wel op de juiste wijze, maar al te schetsmatig waren aangegeven. Als criterium gold namelijk dat ook ingezien moest worden dat de aan te hechten driehoeken gelijkzijdig dienden te zijn. Een kleine afwijkingsmarge was daarbij toegestaan. Mogelijk dat bij deze opgave de eisen van technische constructie als een complicerende factor aangeduid moeten worden.



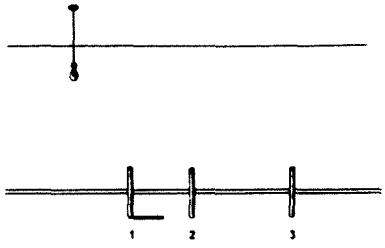
figuur D2.10: Voorbeelden van leerlingenwerk van de opgave uit D2.9

Licht-schaduw constructies

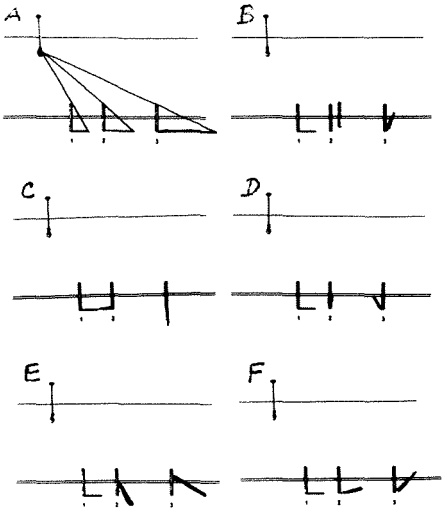
Er bevonden zich drie items in de toets die constructies betroffen over de licht-schaduw problematiek, die gebaseerd zijn op het constructie-principe van de centrale projectie. De essentie hiervan is dat de lichtstraal, uitgaande van de lichtbron, schematisch als rechte lijn wordt opgevat. In zekere zin behoren deze opgaven dus ook tot het aspect V&P. De gevraagde constructies betroffen directe projectie van de schaduw van een object, maar ook waren er vragen om het principe indirect toe te passen (uit de schaduw de lichtbron construeren).

Een vraagstuk waarbij de vaardigheid van de directe constructie werd getoetst (figuur D2.11), leverde een p-waarde van 26 op (2 procent niet beantwoord). In de nieuwe methoden wordt incidenteel wel aandacht aan schaduwopgaven geschonken, maar meestal niet in constructieve vorm. Men kan zich derhalve afvragen of dergelijke opgaven wel eens aan de orde gesteld zijn, ook al gezien de merkwaardige antwoorden waarvan in figuur D2.12 een collage van leerlingenwerk van het vraagstuk uit figuur D2.11 wordt getoond.

De lamp die aan het plafond hangt, is aan.
Je ziet de schaduw van paaltje 1.
Teken de schaduw van paaltje 2 en paaltje 3.
Je mag een liniaal gebruiken.



figuur D2.11: Schaduw construeren blijkt lastig (p = 26)



figuur D2.12: Leerlingenwerk van de opgave uit D2.11

Dit vermoeden wordt gesterkt wanneer we ook de twee andere opgaven die hierop betrekking hebben, in ogenschouw nemen. Deze drie items leverden samen een gewogen gemiddelde van slechts 31,2% op. Gezien de vele merkwaardige tekeningen die ook deze opgaven opleverden, kunnen wij ons niet aan de indruk onttrekken dat

voor veel kinderen het ontstaan van de schaduw een fenomeen is dat nauwelijks of niet in het onderwijs aan de orde is geweest.

Opvallend is de lage gemiddelde score van 55,7% op het aspect C&M. Des te opmerkelijker is dit omdat oppervlakteberekeningen van driehoeken constant hoge scores opleveren.

Dit is een reden om hierop iets nader in te gaan.

Construeren en meten nader bekeken

Onder het aspect C&M kwamen in deze toets vier vraagstukken voor waarbij de vaardigheid van oppervlakteberekeningen van driehoeken getoetst werd. Hierbij werd gemikt op de strategie van het completeren van een driehoek tot een rechthoek, die in oppervlakte tweemaal zo groot is. Overigens was de completering in alle gevallen reeds gegeven door middel van een 'omgeschreven' rechthoek (zie C3.1). De gewogen gemiddelde p-waarde voor deze vier oppervlakte-items bedroeg 87,1%. Voor dit onderdeel kan geconstateerd worden dat door de meeste leerlingen een of andere strategie gekend wordt (dit kan ook de bekende oppervlakteformule geweest zijn). Ook twee items over het begrip schaal hadden redelijke scores met 69% en 67%. Deze zes vraagstukken betreffende de meer traditionele stof over schaal en oppervlakte werden dus heel behoorlijk tot zeer goed gemaakt. Zouden we deze items buiten beschouwing laten, waardoor alleen die items van C&M overblijven die nieuwe elementen van de meetkunde bevatten, dan zou voor het 'construeren en meten' het ons inziens toch al lage gewogen gemiddelde van 55,7 dalen tot een gemiddelde p-waarde slechts 45,4.

Vooralsnog stellen we vast dat de resultaten voor 'construeren en meten' voor de traditionele onderwerpen als oppervlakte en schaal in deze toets goed zijn, maar dat op de nieuwere onderwerpen als constructies met bouwplaten zwak gepresteerd wordt. Zeer zwak zijn de resultaten op constructies, die gebaseerd zijn op licht-schaduw-vraagstukjes.

De aspecten geordend naar beheersing

De gemiddelde goedscores (dit zijn gewogen gemiddelden) per aspect voor de Pimbo-toets van 1995 zijn hieronder nog eens samengevat:

Oriënteren en lokaliseren	62,7
Viseren en projecteren	52,9
Ruimtelijk redeneren	63,9
Transformeren	67,6
Construeren, meten en rekenen	55,7 (45,4 zonder schaal en oppervlakte)
(oppervlakte, 4 items)	(87,1)
(oppervlakte en schaal, 6 items)	(85,0)

Dit overzicht dient echter met de nodige reserve beschouwd te worden. Met name kan het toewijzen van een item als een zuivere opgave van een bepaald aspect een zekere mate van subjectiviteit met zich meebrengen. Zoals eerder opgemerkt, kunnen opgaven ook verschillende aspecten dekken.

Evaluatie van de kwalitatieve opbrengsten

1 Welke aanwijzingen levert het leerlingenwerk (de particuliere antwoorden) over het beheersingsniveau van bepaalde begrippen en/of vaardigheden?

Omdat wij niet over vergelijkingsmateriaal beschikken, dienen onze conclusies met de nodige voorzichtigheid geïnterpreteerd te worden. Maar het is mede door de kwalitatieve indrukken, die wij uit het leerlingenwerk van de Pimbo-toets hebben verkregen, dat wij op grond van deze toets de volgende conclusies menen te kunnen trekken:

Voldoende tot goede beheersing van de volgende begrippen en vaardigheden:

- oriënteren op een kaart naar aanleiding van een panoramische tekening
- redeneringen in verband met viseren, indien geen eigen constructies nodig zijn
- lokaliseren vanuit verschillende posities naar aanleiding van een 'foto'
- ruimtelijk inzicht bij eenvoudige veelvlakken
- het herkennen van spiegelsymmetrische figuren
- eenvoudige toepassingen van spiegelsymmetrie
- eenvoudige oppervlakteberekingen door middel van omstructureren en completeren
- eenvoudige schaalberekeningen.

Zeer zwak tot zwak zijn uit deze toetsopgaven naar voren gekomen:

- het hoekbegrip, zelfs van een rechte hoek
- ruimtelijke voorstelling van en redeneringen over niet-triviale blokkenbouwsels
- constructies van uitslagen van ruimtefiguren
- vaardigheid in technisch tekenen
- viseerlijn, zowel als kijklijn als als lichtstraal
- constructies van eenvoudige schaduwbeelden van de zon (parallelprojectie)
- constructies van eenvoudige schaduwbeelden van lamp (centrale projectie)
- redeneringen op grond van aanzichten van ruimtelijke blokkenbouwsels
- begrippen als diagonaal en veelhoek
- combinatorische opgaven over het berekenen van het aantal diagonalen van een veelhoek.

2 *Zijn er uit de totale toets aanwijzingen af te leiden over de aard en het niveau van het aangeboden onderwijs?*

Op grond van deze eenmalige toets zijn hierover geen harde uitspraken te doen. Er ontbreken kwantitatieve en kwalitatieve gegevens van een aantal essentiële parameters:

- bevatte de bij het onderwijs gebruikte methode de betreffende stof?
- is die stof aan de orde geweest?
- hoe is de stof aan de orde geweest (systematisch, incidenteel, concreet handelend, open of gesloten, ...)?
- wat is de deskundigheid en de betrokkenheid van de betreffende leraar?

Een zeer lastig te onderzoeken punt is de vraag in welke mate gezond verstand en eventueel buitenschools leren invloed hebben op de verwerving van meetkundige begrippen en vaardigheden.

De lage scores op het onderdeel 'viseren en projecteren' zijn wellicht te verklaren uit het feit dat dit aspect nauwelijks op systematische wijze in de methoden aangeboden wordt. Het vermoeden dat het aanbod via de methoden in ieder geval kan bijdragen tot betere resultaten, lijkt bevestigd te worden door het feit dat aan het oriënteren en lokaliseren tamelijk ruime aandacht in de methoden besteed wordt. Op dit onderdeel werd namelijk vrij redelijk gescoord.

Over het aspect 'ruimtelijk redeneren' valt op te merken dat dit met name bij het 'blokjes bouwen', dat in de meeste moderne methoden tamelijk prominent aanwezig is, onder de maat bleef. De vraag of dit aan gebrek aan systematisch onderwijs ligt of in de moeilijkheidsgraad van de opgaven, is vooralsnog moeilijk te beantwoorden.

Analyse van het leerlingenwerk van de typische constructieopgaven doet ten sterkste vermoeden dat dit onderdeel weinig aandacht in het onderwijs krijgt.

Sommige van de opgaven uit de Pimbo-toets waren kennelijk van een te hoog niveau.[5] Resultaten en moeilijkheidsniveau zijn in dit stadium van de implementatie echter niet te relateren. Het is niet zo verwonderlijk dat bijvoorbeeld op het aspect 'viseren en projecteren' zwak gepresteerd werd. We hebben hier namelijk te maken met een voor de basisschool nieuw leerstofonderdeel, dat in de methoden nog niet optimaal vormgegeven en uitgelijnd is. Gezien de ervaringen met enkele individuele proefnemingen zouden gerichte didactische aanwijzingen en een meer systematische onderbouwing tot verbetering van de resultaten kunnen leiden. Gelijksoortige opmerkingen gelden ons inziens voor de andere meetkunde-onderdelen, die op deze toets zwak scoorden.

In de discussie in hoofdstuk D5 zullen we nog nader ingaan op datgene wat dit onderzoek tot nu heeft opgeleverd.

D3 Betekenis van meetkunde voor de basisschool
opbrengsten van drie enquêtes

Inleiding

In D1 en D2 is via de analyse van de Pimbo-toets van 1995 de balans opgemaakt van het huidige niveau van inzicht en vaardigheden van meetkunde aan het eind van de basisschool. In het kader van dit project zijn in 1995 tevens drie enquêtes uitgevoerd over de betekenis van de realistische meetkunde als domein van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. De onderzoeksgroepen waren de leraren BO die les geven in groep 8, de wiskunde-didactiekdocenten van de PABO's en de schoolbegeleiders. Dit hoofdstuk bevat de resultaten en analysen van deze drie enquêtes. Doelen van dit onderzoek waren informatie te verkrijgen over de volgende punten:

leraren basisonderwijs:
- belang van meetkunde op de basisschool
- belang van de verschillende aspecten van meetkunde
- aanbod van meetkunde in de methode
- uitvoering van het aanbod
- belang van bijscholing voor meetkunde

PABO-docenten Rekenen-Wiskunde & Didactiek:
- belang van meetkunde op de basisschool
- belang van de verschillende aspecten van meetkunde
- meetkundeprogramma op de PABO
- bestede opleidingstijd
- kadervorming

schoolbegeleiders:
- belang van meetkunde op de basisschool
- belang van de verschillende aspecten van meetkunde
- inschatting van belang, probleemgevoeligheid, feitelijke uitvoering in de basisschool en nascholingsbehoefte van de leraren BO
- kadervorming

We geven eerst een verantwoording van het onderzoek en van de onderzoeksopzet. Voor de drie categorieën van ondervraagden zijn de eerste twee onderzoeksvragen dezelfde. De kwantitatieve resultaten hiervan zullen daarom in samenhang besproken worden. Daarna worden per categorie de andere onderzoekspunten kwantitatief geanalyseerd. Dan volgt een kwalitatieve analyse van de schriftelijke opmerkingen. Tot slot een samenvattend overzicht van de conclusies.

Verantwoording van het onderzoek

Sinds de jaren tachtig heeft de realistische meetkunde een plaats gekregen in de moderne reken-wiskundemethoden. De vraag is echter in hoeverre dit ook door het onderwijsveld gedragen wordt. Een eerste aanwijzing hiervoor was het onderzoek dat tijdens de Panama-najaarsconferentie *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde* in 1984 is uitgevoerd. De opbrengsten hiervan zijn in C4.4 beschreven, waarvan we de uitslag van 'Meetkunde als nieuw programmaonderdeel' nog even releveren. Van de 255 respondenten (er was een totale respons van 88 procent) was 60 procent het 'volledig eens' met dit kernpunt en ruim 30 procent 'grotendeels eens'. De rest gaf aan het oneens te zijn. Ook de kwalitatieve analyse van de opmerkingen bevestigde dat er toen geen consensus over meetkunde op de basisschool bestond (Cadot en Vroegindeweij, 1986). In de *Proeve van een nationaal programma...* wordt meetkunde als een apart domein beschreven (Treffers e.a., 1989). Sinds 1993 behoort het tot de officiële kerndoelen van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Op grond van kleine informele onderzoeken en 'praktijkverhalen' bestonden echter vermoedens dat meetkunde niet altijd als een volwaardig domein wordt opgevat.

Dit nu is de reden geweest om in samenhang met de Pimbo-proeftoets de betrokken deskundigen opnieuw naar hun instemming met dit nieuwe domein te vragen. De meest betrokkenen zijn natuurlijk de leraren BO. Deze groep (80 leraren BO) was ook in het onderzoek van 1984 opgenomen, iets meer dan een kwart van de ondervraagden van toen. Deze konden voor die tijd als pioniers beschouwd worden. Nu was het de bedoeling een meer modaal beeld van de opvattingen van de leraren BO te verkrijgen door middel van een steekproef. De tweede groep van deskundigen bestaat uit de PABO-docenten Rekenen-Wiskunde en Didactiek (RWD). Deze groep is van oudsher betrokken geweest bij de ontwikkelingen van het reken-wiskundeonderwijs en speelt een belangrijke rol bij de innovatie. Ten slotte is in het onderzoek ook die groep van schoolbegeleiders betrokken, die de innovatie van meetkunde van dichtbij kunnen waarnemen en/of daarbij betrokken waren.

Onderzoeksopzet

Vragenlijsten

De drie hiervoor bedoelde enquêtes noemen we verder naar hun doelgroepen als volgt: *Enq-BO, Enq-OP* en *Enq-SB*. De ontwikkeling van de vragenlijsten is gedaan op voorstel van de auteur van deze studie. De ontwerp-enquêtes zijn voorgelegd aan een aantal deskundigen, waarna herziening heeft plaatsgevonden.[1] De ontwikkeling van de Enq-BO was eind 1994 gestart; de afname heeft plaatsgevonden in het voorjaar van 1995. Voor de ontwikkeling van de Enq-OP en de Enq-SB is een analoge werkwijze gevolgd in de zomer van 1995.[2] De vragen voor de opleiders (Enq-OP) en voor de begeleiders (Enq-SB) stonden op hetzelfde formulier; het bevatte een aantal gemeenschappelijke vragen en enkele specifieke vragen voor de twee subgroepen.

Deze enquêtes zijn in de herfst van 1995 afgenomen.[3] Alle drie enquêtes zijn in de loop van 1995 uitgewerkt. Hiervan is in januari 1996 een intern rapport opgesteld.[4]

Steekproef leraren basisonderwijs en respons
In verband met de technische uitvoerbaarheid van de Enq-BO was deze onderzoeksgroep beperkt tot leraren BO van groep 8. Een verdere restrictie van de steekproef was gelegen in het feit dat er gebruik gemaakt is van een bestand van het Cito. De Enq-BO is aan alle scholen die aan de proeftoets eind basisonderwijs in 1995 deelnamen, toegezonden.[5] Deze steekproef had een grootte van 240 scholen. Van deze 240 scholen hebben er 192 toegezegd deel te willen nemen aan de proeftoets. Al deze 192 scholen hebben ook het formulier Enq-BO ontvangen. Hiervan zijn er 158 geretourneerd. Twee formulieren zijn onvolledig ingevuld. Wij beschikken dus voor de *Enq-BO* over een *respons van 156 van de 192 (81%).*[6]

Thans nog enkele karakteristieken van de respondenten van Enq-BO:

- Alle 156 respondenten geven les in groep 8. Hiervan hebben er 85 één groep. De overigen (71) hebben combinatiegroepen (meestal 7/8).
- Onder de respondenten zijn 47 directeuren en 18 onderdirecteuren. Eén respondent gaf ook een andere functie op (intern begeleider).
- Het aantal mannen is 131, het aantal vrouwen 24 (1 niet ingevuld).
- Meer dan de helft heeft een onderwijservaring van meer dan twintig jaar.[7]

Keuze respondenten opleiders, begeleiders en respons
Voor de Enq-OP en de Enq SB is gebruik gemaakt van het bestand van de 138 PABO-docenten RWD, waarover het Freudenthal Instituut in september 1995 beschikte. Dit bestand bestrijkt in feite alle RWD-docenten. De *respons* op de *Enq-OP* bedroeg 68 *(49%).*[8]

Tevens is bij het Freudenthal Instituut een bestand aanwezig van 156 schoolbegeleiders die één of meerdere malen aan de jaarlijkse Panamaconferentie hebben deelgenomen.[9] Aan deze personen is het formulier Enq-SB toegestuurd. De *respons* op de *Enq-SB* bedroeg 57 *(37%).*[10]

Deze populatie van schoolbegeleiders is geen aselecte steekproef. Het bestand (N = 156) was met opzet zo gekozen, dat er op zekere deskundigheid inzake het reken-wiskundeonderwijs vertrouwd kon worden. Mogelijk dat vanwege het specifieke onderwerp de respons tamelijk gering was: 57 (37%), maar niettemin is dit acceptabel in verband met de doelen van het onderzoek. We kunnen namelijk aannemen – vooral op grond van de persoonlijke opmerkingen – dat vooral de 'specialisten' onder de schoolbegeleiders op deze enquête hebben gereageerd.

Afname en verwerking

De afname van de Enq-BO is in maart 1995 door het Cito verzorgd. De afnames van de Enq-OP en Enq-SB is in september 1995 via het Freudenthal Instituut verzorgd. De kwantitatieve gegevens van de ingevulde vragenlijsten zijn door de auteur van deze studie tot hanteerbare overzichten en diagrammen verwerkt. Tevens zijn alle kwalitatieve opmerkingen getranscribeerd en geanalyseerd.[11] Op zowel de kwantitatieve als de kwalitatieve gegevens gaan wij in de twee volgende paragrafen in.

Kwantitatieve analyse van meetkunde als kerndoel

Acceptatie van meetkunde als programmaonderdeel

In alle drie enquêtes was de kernvraag dezelfde: *Meetkunde is opgenomen onder de kerndoelen rekenen-wiskunde voor het basisonderwijs. Bent u het daar mee eens?*

Bij een bevestigend antwoord werd naar een specificatie gevraagd, namelijk of die verplichting zou moeten gelden voor het gehele BO, uitsluitend voor de vier- tot achtjarigen, of uitsluitend voor de acht- tot twaalfjarigen.[12] Van de antwoorden op deze vraag in Enq-BO waren er 153 van de 156 consistent; de resultaten zijn uit tabel van figuur D3.1 af te lezen. Van de 68 respondenten Enq-OP hebben er 61 hun standpunt in enkele zinnen of steekwoorden gemotiveerd. Van de 57 respondenten op Enq-SB hebben er 53 hun standpunt in enkele zinnen of steekwoorden gemotiveerd. Hierop komen we nog terug.

	N	gehele BO	alleen 8-12	tegen	geen mening
BO: leraren groep 8	153	109 (71%)	33 (22%)	6 (4%)	5 (3%)
OP: opleiders	68	65 (96%)	2 (3%)	1 (1%)	–
SB: begeleiders	57	46 (81%)	8 (14%)	1 (2%)	1 (2%)

figuur D3.1: Instemming met meetkunde als kerndoel voor het basisonderwijs

Vergelijking van deze peiling met die van 1984 maakt duidelijk dat de instemming over meetkunde als kerndoel voor de basisschool sterk gegroeid is (zie C4.4). Op grond van deze gegevens zouden wij thans van een vrijwel volledige instemming – zeker voor de acht- tot twaalfjarigen – door alle groepen willen spreken. Dit wil niet zeggen dat er ook consensus is over de aard van het programma. Hierop komen we terug in D4.

Waardering van de vijf meetkundige aspecten

In de enquêteformulieren was elk van de vijf meetkundige aspecten omschreven en van een voorbeeld uit de Pimbo-toets voorzien. De respondenten was gevraagd het door hen geschatte belang van de onderscheiden aspecten op een vijfpuntsschaal aan te geven, als volgt: (volkomen onbelangrijk) — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — (zeer be-

langrijk). De frequentieverdelingen van de scores per aspect en per respondentengroep zijn vastgesteld. Wij beperken ons tot de gemiddelde waarderingen per respondentengroep, die we in de tabel van figuur D3.2 kunnen aflezen.

	O&L	V&P	RR	TR	C&M
BO: leraren groep 8	4,1	3,5	4,1	3,3	4,0
OP: opleiders	4,5	3,9	4,3	3,5	4,1
SB: begeleiders	4,4	3,6	4,0	3,1	4,0

figuur D3.2: Gemiddelde waardering van de meetkundige aspecten op een 5-puntsschaal

In alle onderzoeksgroepen worden de aspecten 'O&L', 'RR' en 'C&M' het hoogst gewaardeerd. Aan de nieuwere aspecten 'V&P' en 'TR' wordt minder belang gehecht, maar dit blijft toch nog boven het midden van de schaal.

Motivering belang van meetkunde (OP en SB)
Aan de opleiders en begeleiders was gevraagd een korte motivering te geven voor hun instemming met het belang van meetkunde op de basisschool. De respons hierop was voor de opleiders 61 van de 68, voor de begeleiders 53 van de 57.[13] Uit de analyse van de motiveringen is gebleken dat de uitspraken naar zes criteria ingedeeld konden worden: persoonlijke waarde, voorbereidende waarde, maatschappelijke waarde, vakspecifieke waarde, praktische samenhang met rekenen en onderwijskundige redenen. In de tabel van figuur D3.3 zijn deze kwantitatieve gegevens weergegeven.

	OP	SB
Persoonlijke waarde	25 (41%)	16 (30%)
Voorbereidende waarde	44 (72%)	28 (53%)
Maatschappelijke waarde	19 (31%)	19 (36%)
Vakspecifieke waarde	5 (8%)	2 (4%)
Praktische samenhang met rekenen	14 (23%)	5 (9%)
Onderwijskundige redenen	17 (28%)	8 (15%)

figuur D3.3: Motiveringen voor meetkunde op de basisschool (opleiders en begeleiders)

De eerste vier motiveringen komen overeen met de eerste vier algemene schooldoelen zoals geformuleerd in het eerste deel van *De Proeve...* . De *samenhang* van meetkunde met de overige onderdelen van het reken-wiskundeonderwijs (meten, verhoudingen, grafieken) betreft een in de vakdidactische literatuur van de jaren zeventig

en tachtig vaak genoemd argument voor dit domein. Soms wordt meetkunde zelfs specifiek aanbevolen voor het leren visualiseren. Meerdere malen werden argumenten van *onderwijskundige aard, algemeen pedagogische* of *leerpsychologische aard* aangevoerd om meetkunde als vak te motiveren, waarbij meetkunde meer als middel dan als doel wordt gezien.

Er zijn twee redenen om deze gegevens met de nodige voorzichtigheid te interpreteren. Ten eerste zou door de vraagstelling de nadruk gelegd kunnen zijn op de vraag of meetkunde voor de gehele basisschool, alleen voor de kleuters, of alleen voor de hoogste groepen zou moeten gelden. Waarschijnlijk heeft hierdoor het aspect van de doorgaande lijn sterke aandacht gekregen. Dit kan een verklaring zijn voor de sterke nadruk op de voorbereidende waarde van het vak.

Ten tweede was de beantwoording niet gestuurd door het voorleggen van een lijst van alternatieven. De persoonlijke motivering was derhalve volledig open, hetgeen kan betekenen dat de respondenten bepaalde redenen over het hoofd gezien hebben of minder belangrijk hebben gevonden. Het voordeel van de open vraagstelling was echter dat het karakter van de motivering spontaan en persoonlijk was en dus een afspiegeling geeft van wat bij de opleiders en begeleiders leeft.

Kwantitatieve analyse Enq BO

De methoden

Naar aanleiding van de vraag in Enq-BO welke methoden in groep 7-8 en in de groepen 3 tot 6 gebruikt werden, is de tabel van figuur D3.4 opgesteld. De meest genoemde methoden waren *Wereld in Getallen*, *Pluspunt*, *Rekenwerk*, *Operatoir Rekenen*, *Rekenen en Wiskunde* en *Naar Zelfstandig Rekenen.*

	groep 8	groep 3-6
Wereld in Getallen	39 (25%)	56 (36%)
Pluspunt	6 (4%)	27 (17%)
Rekenwerk	4 (3%)	5 (3%)
Operatoir Rekenen	42 (27%)	24 (15%)
Rekenen en Wiskunde	26 (17%)	31 (20%)
Naar Zelfstandig Rekenen	25 (16%)	7 (4%)
anders	13 (8%)	5 (3%)
niet ingevuld	1	1

figuur D3.4: In gebruik zijnde methoden (Enq BO, 1995)

Op grond van deze steekproef constateren we dat in 1995 *Operatoir Rekenen* en *De*

Wereld in Getallen de meest gebruikte methoden waren. Er is een forse stijging van het gebruik van *De Wereld in Getallen* en *Pluspunt*, een lichte stijging van *Rekenen en Wiskunde*, een daling van *Operatoir Rekenen* en een sterke daling van *Naar Zelfstandig Rekenen.*

Aanbod meetkunde in de methoden

De vraag naar de 'mate van aanbod' van meetkunde in de in groep 8 gebruikte methoden levert het resultaat zoals weergegeven in de tabel van figuur D3.5 op.

methode	geen	onvoldoende	matig	voldoende	meer dan voldoende
WIG	0	3	9	23	4
PP	0	1	0	3	2
RW	0	0	2	1	1
OR	0	11	16	14	0
R&W	0	0	4	18	4
NZR	3	18	4	0	0

figuur D3.5: Waardering van het aanbod meetkunde volgens leraren groep 8 (absolute aantallen)

De methoden *WIG* en *R&W* bieden volgens de respondenten voldoende meetkundige activiteiten aan. Over *PP* is in verband met het toen geringe aandeel weinig te zeggen. Met betrekking tot deze vraag is het oordeel over *OR* matig te noemen. In *NZR* komen geen tot onvoldoende meetkundige activiteiten voor. Deze waarnemingen kloppen met de analysen in de *Almanak reken-wiskundemethoden* (Feijs e.a., 1987) en het onderzoek van De Jong (1986). De waarderingen voor de vijf 'overige methoden' luidden van 'geen' tot 'matig'.

Uitvoering van het aanbod

Om een indruk te krijgen van de daadwerkelijke uitvoering was in Enq-BO de vraag gesteld hoeveel van de aangeboden activiteiten in groep (7 en) 8 ook daadwerkelijk uitgevoerd werd. Dit moest aangekruist worden op een schaal van 'geen' (0 procent) tot 'alle' (100 procent). Voor de realistische methoden komen we voor groep 8 tot de score zoals weergegeven in figuur D3.6.[14]

frequentie	**2**	**4**	**18**	**41**	**51**
	0% ..... 20% ..... 40% ..... 60% ..... 80% 100%				

figuur D3.6: Uitvoering van het meetkunde-aanbod

Dit leidt tot een 'gemiddeld' uitvoeringspercentage van ruim 70 procent. Indien geantwoord was dat minder dan 50 procent van het aanbod uitgevoerd werd, is naar de redenen daarvan gevraagd. Hierop hebben 26 respondenten gereageerd. Er was te kiezen uit: geen tijd (9 maal), hoort niet op de basisschool (1 maal), komt voldoende aan bod in andere vakken (0 maal), komt voldoende aan bod in de groepen 3 tot 6 (0 maal), te weinig relevant ten opzichte van het gewone rekenen (2 maal), nog niet gewend om dit te doen (9 maal), andere reden (5 maal). Voor de 'andere reden' werd meestal de methode genoemd.

Ten slotte is in het kader van dit onderzoekspunt gevraagd of er in de groepen 3 tot 6 aandacht aan meetkunde werd besteed. De scores hierop luiden als volgt: in het geheel niet (0 maal), incidenteel (70 maal), regelmatig (78 maal); 8 maal bleef de vraag onbeantwoord. Door middel van deze vraag hebben we een globale indicatie verkregen over de uitvoering in groep 8 van het in de methoden voorkomende aanbod. Volgens de leraren BO is dit ongeveer 70 procent. De meest genoemde redenen om minder dan 50 procent van het aanbod uit te voeren zijn tijdgebrek en gewendheid.

Eigen deskundigheid en behoefte aan bijscholing

Ten aanzien van de eigen deskundigheid op het gebied van meetkunde was in de Enq-BO gevraagd of men tijdens de opleiding hiervoor voldoende scholing had genoten. Tevens was gevraagd naar de behoefte aan bijscholing. De resultaten hiervan staan in de tabel van figuur D3.7.

genoten scholing		behoefte aan bijscholing	
geen scholing	29 (19%)	geen behoefte aan bijscholing	109 (72%)
onvoldoende	66 (42%)	wel behoefte aan bijscholing	43 (28%)
voldoende	60 (38%)		

figuur D3.7: Genoten scholing en behoefte aan bijscholing voor meetkunde (leraren groep 8)

Van de 109 nee-zeggers tegen bijscholing hadden er 89 dit gemotiveerd. De argumenten zijn als volgt te categoriseren: acht zich deskundig zonder nadere motivering (33); deskundig door zelfstudie (5); voldoende houvast aan handleiding (12); voldoende kennis door opleiding (7); voldoende kennis door vooropleiding door middelbare school (6); voldoende kennis door bijscholing (6); andere prioriteiten (10); geen tijd (10); slechte ervaring met nascholing (4); niet bijscholen op deelaspect (1); andere argumenten (3).

Hoewel dus meer dan 60 procent stelt geen of onvoldoende scholing voor meetkunde gehad te hebben, blijkt er weinig behoefte te bestaan aan bijscholing. Hoog is het aantal dat zonder nadere toelichting zegt 'zich voldoende deskundig' te voelen. Mogelijk wordt goede steun in de handleidingen gevonden.[15]

Kwantitatieve analyse meetkunde in de opleiding

Tijdsomvang RWD-programma PABO

Daar de Enq-OP persoonlijk en anoniem is uitgevoerd, dienen de gegevens over de totale tijdsomvang voor het programma Rekenen-Wiskunde en Didactiek (RWD) met de grootst mogelijke voorzichtigheid beschouwd te worden.[16] Toch menen we hiervan een globale indruk verkregen te hebben. Een en ander leidt tot de volgende globale gegevens (er is afgerond op tientallen uren), weergegeven in figuur D3.8.

totale studiebelasting RWD:	'gemiddeld' 360 uur (sd: 120)
aantal contacturen RWD:	'gemiddeld' 120 uur (sd: 50)
aantal zelfstudie-uren RWD:	'gemiddeld' 250 uur (sd: 110)

figuur D3.8: Studiebelasting voor Rekenen Wiskunde en Didactiek op de PABO (1995)

Allereerst valt de enorme variatiebreedte voor de totale studiebelasting op: 160 tot 720 uren of 4 tot 18 modulen. Het aantal contacturen varieert van 48 tot 380. Bij een indeling in klassen met een breedte van 80 worden de urenaantallen voor de totale studiebelasting tussen 240 en 320, vooral 320, het meest genoemd. De verhouding tussen contacturen en studie-uren is 'gemiddeld' 1 tegen 2, maar ook hier zit een enorme variatie in. De laagste verhouding is 1 contactuur tegen 10 studie-uren. In 2 van de 58 gegevens is de verhouding 1 op 1. In 5 gevallen worden er meer contacturen dan studie-uren geteld (meestal ongeveer anderhalf maal) met een uitschieter van 380 tegen 120 uren.

Tijd besteed aan meetkunde in de opleiding

Deze vraag is door 63 van de 68 respondenten beantwoord. Ook deze percentages hebben een fikse variatie: van 2% tot 35%. Een klassenindeling met een klassenbreedte van 5(%) maakt duidelijk dat de modus van deze verdeling in de klasse 5% tot 10% ligt. Laten we de vier uitschieters boven de 20 procent buiten beschouwing, dan ontstaat een beeld dat duidelijk maakt dat de 'gemiddeld' bestede tijd aan meetkunde in de opleiding rond de 10 procent van de totale studiebelasting ligt.

Belang van meetkunde in de opleiding

De vraag naar het belang van meetkunde in de opleiding is door 65 van de 68 respondenten beantwoord door middel van scoring op een vijfpuntsschaal. Dit leverde een hoge gemiddelde waardering van 4,2 op, waaraan de frequentieverdeling van figuur D3.9 ten grondslag ligt.

frequentie	0	1	11	29	24	
volkomen onbelangrijk ..	1	2	3	4	5	zeer belangrijk

figuur D3.9: Belang van meetkunde op de PABO (enq OP)

Programma voor meetkunde in de opleiding

Om een indruk te krijgen van het inhoudelijke aanbod op de PABO was een vraag naar de programma-invulling gesteld. Als keuzen waren mogelijk Goffree: *Wiskunde & Didactiek 2* (hoofdstuk 4); Goffree: *Kleuterwiskunde* (meetkundeonderdelen); een ander programma. Slechts één respondent van de 68 heeft deze vraag niet beantwoord.

Goffree (Wiskunde & Didactiek)	x	x	x	x	–	–
Goffree (Kleuterwiskunde)	x	x	–	–	x	–
Anders	x	–	x	–	x	x
aantal	27	14	10	6	3	7

figuur D3.10: Combinaties programma-inhoud meetkunde op de PABO

Uit de tabel in figuur D3.10 wordt duidelijk welke combinaties gebezigd worden. In vrijwel alle programma's wordt gebruik gemaakt van de boeken van Goffree. Er bestaan overigens geen andere specifieke opleidingsboeken voor RWD. In meer dan de helft van de combinaties wordt ook gebruik gemaakt van andere materialen. Als meest voorkomend (34 maal) wordt 'zelf ontwikkeld' of 'zelf samengesteld materiaal' genoemd, in vele gevallen 'reader' of 'module' genoemd. Vaak wordt bij dit eigen materiaal ook weer gebruik gemaakt van de boeken van Goffree. Het lijkt waarschijnlijk dat verschillende PABO's één module meetkunde aanbieden.

Verder worden als materialen voor meetkunde genoemd 'Basisschoolmethoden' (9 maal), Wiskobas-materiaal waaronder *Wiskobas Bulletin* (7), materialen voor het VO, zoals 'pakketjes 12-16' (6), artikelen uit *Willem Bartjens* (5), *De Proeve...* (4), *Met het oog op ruimte* (4), NOT-materiaal (2). Ook zijn er onderwerpen c.q. materialen die maar één keer worden genoemd.[17]

Samenvattend kunnen we stellen dat vrijwel alle meetkundeprogramma's van de PABO's op basis van het realistisch reken-wiskundeonderwijs zijn opgesteld, maar dat de praktisch-inhoudelijke en didactische accenten sterk verschillen.

Eigen kadervorming opleiders

Deze vraag is door 63 van de 68 respondenten eenduidig beantwoord. Daarvan hebben er 31 geen behoefte aan kadervorming op dit gebied, waarvan er elf nog een persoonlijke opmerking toevoegen. Zes respondenten zeggen over voldoende ervaring

en kennis te beschikken. Twee bieden aan om zelf hiervoor cursusmateriaal te ontwikkelen. Twee willen wel informatie op papier. Eén deelt mee dat zijn collega dit onderdeel verzorgt. Toch geven 32 respondenten aan zelf ook verdere verdieping nodig te vinden. Hiervan hebben 24 hun standpunt toegelicht. De gegeven redenen met frequenties luiden als volgt: continue kadervorming in verband met nieuwe ontwikkelingen (6); doorgaande leerlijn en programmaopbouw van de meetkunde (5); doelen van de meetkunde eventueel in samenhang met de *Proeve* (4); gezamenlijke programma-opstelling en didactiek meetkunde op PABO (5); nieuw materiaal vergaren (3); plezier in meetkunde (2); ten behoeve van volwassenenonderwijs (1).

Kwantitatieve analyse van schattingen van schoolbegeleiders

Omvang van het uitgevoerde aanbod BO

Door de schoolbegeleiders is een schatting gegeven van het percentage van het meetkundeaanbod in de realistische methoden dat ook daadwerkelijk zou worden uitgevoerd. Deze vraag is door 47 respondenten beantwoord. Eén respondent geeft als antwoord 60% en schrijft daarbij: 'Ik besef dat dit een slag in de lucht is. Wat ik wel merk, is dat dit nauwelijks vragen oplevert van schoolteams. Bovendien is het zo dat onder tijddruk deze onderdelen wel eens overgeslagen worden.' Gemiddeld schatten de schoolbegeleiders dat de leraren BO ongeveer de helft van de aangeboden meetkundige activiteiten uitvoeren, maar deze 'persoonlijke' schattingen lopen uiteen van 5% tot 100%!

Didactische en methodische moeilijkheid

Aan de 57 begeleiders waren nog twee vragen over de methodiek en didactiek van de meetkunde gesteld:

Meent u op grond van uw ervaringen in de praktijk dat het onderwijs in de meetkunde problemen oplevert?

De antwoorden luidden: ja 32 (56%); neen 12 (21%) en weet niet: 13 (23%). Hierop volgde de vraag:

Levert meetkunde naar uw mening meer, minder of evenveel problemen dan/als rekenen?

De respons hierop leverde de cijfers op zoals weergegeven in de tabel van figuur D3.11.

meer problemen dan rekenen:	29 (51%)
evenveel problemen als rekenen:	14 (25%)
minder problemen dan rekenen:	12 (21%)
niet beantwoord:	2 (4%)

figuur D3.11: Geschatte probleemverhouding meetkunde t.o.v. rekenen (begeleiders)

Van de 43 respondenten die evenveel of meer hadden geantwoord, hebben er 32 toegelicht waarom de BO-leraar dit als een probleem zou ervaren. De genoemde redenen zijn naar twaalf aspecten te ordenen, hetgeen tot het volgende beeld leidt:

- organisatorische problemen: 8 keer
- vakspecifieke problemen, te moeilijk: 6 keer
- te weinig deskundigheid: 14 keer
- onbekendheid met het nieuwe vak: 8 keer
- ontbreken van een leerlijn: 1 keer
- tijdgebrek: 6 keer
- te geringe nadruk via methode: 1 keer
- niet geschikt voor zwakke leerlingen: 2 keer
- te gering belang, weinig relevantie: 6 keer
- hoort niet op de basisschool: 1 keer
- het is moeilijk te toetsen: 1 keer
- specifieke didactische problemen: 7 keer.

De begeleiders noemen het gebrek aan deskundigheid van de leraar BO als belangrijkste oorzaak van de problemen tijdens de meetkundelessen. Andere oorzaken zijn naar hun mening organisatorische problemen, de door de leraar gering geschatte relevantie en specifieke didactische problemen. Analyse van de opmerkingen van de respondenten (Enq-SB), die stellen dat er bij meetkunde juist minder problemen optreden dan bij rekenen, leert dat dit vooral zou zitten in het vrijblijvende karakter van meetkunde ('het wordt nauwelijks getoetst') en in de opvatting dat het meer iets extra's is dan dat het tot het basisprogramma hoort. Of, zoals één van de respondenten het verwoordt: 'Men beschouwt het niet als essentieel; wel als leuk en aardig. Weglaten is niet iets te kort doen'.

Al met al schetsen de begeleiders een niet zo gunstig beeld om meetkunde op de basisschool tot bloei te brengen. Vergelijken we deze gegevens met hetgeen de leraren daar zelf van vinden, dan ontstaat nogal een tegenstelling. We komen hier nog op terug.

Belang van meetkunde ten opzichte van rekenen

Het belang van meetkunde ten opzichte van het rekenen, zoals de leraren BO dit zouden ervaren, wordt door de schoolbegeleiders op een vijfpuntsschaal geschat, zoals aangegeven in figuur D3.12.

frequentie	**2**	**36**	**16**	**1**	**0**
volkomen onbelangrijk .. 1	 2	 3	 4	 5	.....zeer belangrijk

figuur D3.12: Belang van meetkunde ten opzichte van het rekenen, zoals leraren BO dit zouden ervaren, geschat door schoolbegeleiders

Dit relatieve belang zou volgens de schoolbegeleiders dus tamelijk laag zijn: de modus ligt bij waardering 2, de 'gemiddelde' waardering valt duidelijk in het voordeel van het rekenen uit. Deze vraag was niet aan de leraren gesteld, zodat vergelijking op dit punt onmogelijk is.

Geschatte nascholingsbehoefte BO

De behoefte tot nascholing bij de leraren BO wordt door de begeleiders als volgt ingeschat: wel nascholing (37%), geen nascholing (25%), terwijl bijna 40 procent van de respondenten hierover geen uitspraak kan doen. Uit de schriftelijke toelichtingen spreekt een algemeen gevoelen dat meetkunde maar 'een restpostje is'. Verder ontstaat uit een aantal toelichtingen van de ja-zeggers de indruk dat de gestelde vraag eerder opgevat is als 'Is nascholing voor de leraar nodig?' in plaats van 'Hoe schat u de behoefte aan nascholing?' Er wordt namelijk verschillende malen gewezen op de geringe deskundigheid van de leraar. Bij de nee-zeggers wordt het algemene gevoelen dat er belangrijker prioriteiten bestaan, versterkt door opmerkingen als: 'Eerst maar eens rekenen!, hierna nog 'ns rekenen en dan... wat meetkunde'.

De algemene conclusie ten aanzien van dit punt is derhalve dat de schoolbegeleiders de behoefte van de leraren aan nascholing voor meetkunde erg laag schatten. Uit de Enq-BO is gebleken dat de leraren zelf inderdaad weinig behoefte aan nascholing hebben, maar hun argumenten zijn van geheel andere aard: zij achten zichzelf wel degelijk deskundig genoeg.

Eigen kadervorming

De vraag naar de behoefte aan eigen kadervorming voor de begeleiders werd door 55 van de 57 begeleiders beantwoord. De uitslag is half-half: wel 27, niet 28. Van de ja-zeggers hebben er zestien hun antwoord toegelicht, van de nee-zeggers tien. Volgens de schriftelijke motiveringen is bij de ja-zeggers behoefte aan verhoging van de eigen deskundigheid, zowel inhoudelijk en didactisch – 'Ik lijd aan dezelfde problemen als mijn cliënten' – als wat het aspect van de begeleiding betreft. De nee-zeggers zijn te verdelen in degenen die zich voldoende competent achten en degenen die weinig tijd of andere prioriteiten hebben. Overigens stelt deze laatste groep wel kortdurende kadervormende bijeenkomsten op prijs.

Kwalitatieve analyse van aanvullende opmerkingen

Bij de kernvraag van alle drie enquêtes was de gelegenheid geboden een korte motivering te geven. Bovendien bestond aan het eind van het vragenformulier de mogelijkheid tot het maken van aanvullende opmerkingen. Van deze persoonlijke toevoegingen hebben we voor Enq-OP en Enq SB al een kwantitatieve analyse gemaakt.[18] Het is echter interessant om ook in meer kwalitatieve zin op deze opmerkingen in te gaan.

Opleiders

Drie van de vier algemene schooldoelen staan voorop als motivering van meetkunde als domein van rekenen-wiskunde op de basisschool. Een van de respondenten spreekt dit zelfs expliciet uit: 'Meetkunde is een belangrijk middel om de (alle vier!) algemene doelen van de basisschool na te streven. Niet alleen de vakspecifieke, ook de persoonlijke, de voorbereidende en maatschappelijke waarde wordt door goed meetkundeonderwijs bevorderd'.[19]

Vrijwel unaniem is men van mening dat meetkunde voor het gehele basisonderwijs moet gelden. Uit de wijze waarop de motiveringen verwoord zijn, spreekt een overtuigde erkenning van dit vak voor kinderen van vier tot twaalf jaar. Meermalen wordt gewezen op de noodzakelijkheid van meetkundige activiteiten voor de kleuters in verband met de noodzakelijke ontwikkeling van ruimtelijk inzicht. De samenhang met de realiteit, met de andere domeinen (vooral meten) en met andere vakken zijn ook veel gebruikte argumenten. Tevens wordt bij herhaling gewezen op het intrinsiek motiverende karakter van de meetkunde: de activiteiten geven vaak veel 'plezier'. Ook ziet men mogelijkheden om activiteiten met de gehele groep te doen, waarbij op natuurlijke wijze aan het principe van niveaudifferentiatie kan worden tegemoetgekomen. Sommigen zien mogelijkheden om via meetkunde het 'probleemoplossend denken op alle niveaus' in het basisonderwijs te bevorderen. De longitudinaliteit krijgt een extra betekenis voor de meisjes 'omdat zij veel minder bagage van huis uit meekrijgen dan jongens'. Enige malen wordt erop gewezen dat meetkunde een minder gestructureerde leergang behoeft dan het rekenen en dat het aankomt op een aantal 'basale ervaringen' en 'kernbegrippen', die in een 'cyclische opbouw' steeds verdiept kunnen worden. Eén van de respondenten brengt meetkunde in relatie met de kerndoelen: 'Heel graag zou ik zien dat de gebezigde aspecten opgenomen zouden worden in de kerndoelen. Zij bieden veel houvast en geven structuur aan het domein meetkunde dat in de schoolpraktijk veel onwetendheid oproept'.[20]

Soms gaat het enthousiasme voor meetkunde bij de respondenten zo ver dat meetkunde 'belangrijker dan breukrekenen' wordt geacht of dan 'het beheersen van verschillende vaardigheden'.

Een vertegenwoordiger van de Vrije School onderschrijft van harte het belang van meetkunde op de basisschool als 'een echt opvoedend middel', maar achtte de

vraagstellingen van de enquête te eenzijdig: 'Ik mis de begrippen verwondering en bewondering'.

Ook waren enkele kritische kanttekeningen te ontwaren. In verband met de afgebeelde items uit de Pimbo-toets werd er gewaarschuwd voor het gevaar van standaardtoetsen op dit gebied, voor verschraling tot een 'papieren' meetkundeonderwijs in plaats van een activiteitsgericht onderwijs, terwijl ook door menig respondent gewezen werd op het eerste belang van de reken-basisvaardigheden. Slechts één respondent was enigszins afwijzend over meetkunde, omdat het te informeel zou zijn, een gedegen leerlijn miste en grotendeels bij andere vakken ondergebracht zou kunnen worden.

In overeenstemming met de kwantitatieve beoordeling kan gesteld worden dat meetkunde voor de basisschool, althans in de realistische vorm, door de opleiders ook in kwalitatief opzicht als een zeer belangrijk vak beoordeeld wordt.

Begeleiders

Ook de schoolbegeleiders hebben zich in sterke mate voor meetkunde op de basisschool uitgesproken, zoals uit de eerder gegeven kwantitatieve scoring is gebleken. Beschouwen we de toelichtingen van deze groep respondenten, dan komt een wat ander beeld naar voren dan dat van de opleiders. Uit de aard van de protocollen spreekt een mindere bevlogenheid voor het vak op zich. Veel sterker dan bij de opleiders liggen de argumenten in het algemeen onderwijskundig motiverende karakter. Vooral de praktische betekenis (redzaamheid) en de verbinding met de realiteit spraken deze groep van respondenten aan. Of zoals een van de respondenten het zei: 'De meetkunde toont zich in de diverse genoemde aspecten uitstekend om opgebouwd te worden vanuit ervaringen met concrete meetactiviteiten tot een hoger inzichtelijk niveau, vanaf de jongste kleuterleeftijd. Dat de hele basisschoolperiode hieraan gewerkt kan worden, strookt trouwens ook met de algemene doelstellingen genoemd bij de kerndoelen, met name ''t leggen van verbindingslijnen tussen r/w/ onderwijs en de dagelijkse leefwereld'.[21]

Vaak – in tegenstelling tot de opmerkingen van de opleiders – worden bij de onderwijskundige redenen argumenten van leerpsychologische aard genoemd, waarbij het bekende adagium 'concreet – schematisch – abstract' het leidende principe lijkt. 'Ik acht meetkundige aspecten van essentieel belang om de ontwikkeling van het denken op abstract niveau te stimuleren en uit te lokken. Het precies omschrijven van handelingen en later gedacht in taal (woorden), is het fundament van later wetenschappelijk denken.'[22]

Meerdere respondenten omarmen de mogelijkheden die meetkunde zou bieden om het analytische denken te bevorderen. Dit is de reden dat een klein aantal het vak in die zin afwijst voor de allerjongste kinderen. Nadere analyse van de argumenten van de acht respondenten die meetkunde alleen voor acht- tot twaalf-jarigen willen

reserveren, leert dat deze respondenten in het algemeen niet tegen de meetkundige ontwikkelingsaspecten voor de vier- tot acht-jarigen zijn. Juist het informele en spelkarakter wordt door hen benadrukt. Mogelijk worden de voorbereidende activiteiten op het gebied van ruimtelijke ontwikkeling voor de allerjongste kinderen door deze respondenten niet onder meetkunde geschaard.

Op een enkele uitzondering na, wordt – als men de vergelijking tussen het belang van rekenen en meetkunde tegen elkaar afweegt – toch de prioriteit bij het rekenen gelegd. Dit lijkt te sporen met de beantwoording van de vraag, waarin dit belang (dat de onderwijsgevende eraan hecht) op een vijfpuntsschaal werd geschat.

Enkele respondenten wijzen op het belang van meetkundige ontwikkeling in verband met de ontwikkeling van het getalbegrip. Er klinkt een waarschuwing om meetkunde niet te gaan gebruiken om via toetsen te selecteren. We komen hier in de discussie nog op terug.

Slechts één respondent is het volledig oneens met de opname van meetkunde als onderwerp voor de basisschool; zijn (haar) argumentatie, die niet van inhoudelijke of didactische aard is, maar meer van politieke aard lijkt, luidt: 'Basisonderwijs is geen eindonderwijs. De kerndoelen overvragen de scholen en beletten het realiseren van eigen doelen die stoelen op de grondslag van de school. Meetkunde is een voorbeeld van een leerlijn die door de kerndoelen wordt toegevoegd aan het curriculum'.[23]

Leraren BO

De aanvullende respons van de leraren BO (groep 8) was gering: 40 van de 156. De meeste opmerkingen betreffen de gehanteerde methode of de te kiezen methode, die kennelijk als richtingwijzer voor het onderwijs wordt gezien. Ook is er soms kritiek op de Pimbo-opgaven. Voor de betere leerlingen wordt meetkunde als 'niet lastig' ervaren: 'intelligente leerlingen zullen met dit werk geen enkel probleem hebben'. Anderzijds worden de opgaven als 'vrij pittig' ervaren. Inhoudelijk dragen deze protocollen weinig bij tot nadere analyse van de motiveringen voor het vak meetkunde. We volstaan derhalve slechts met het citeren van enkele van de schaarse, maar saillante inhoudelijke opmerkingen:

'Binnen onze rekenmethode mis ik nogal wat zaken die via voorliggende vragen (bedoeld zijn de Pimbo-toetsvragen, EdM) getoetst worden. Diverse zaken herken ik wel, andere zijn vrij onbekend. Vanwege het tijdrovende karakter van dit onderdeel binnen de rekenles kiezen velen voor het overslaan van deze opgaven in de rekenles. Ik probeer mezelf zoveel mogelijk te dwingen deze opgaven toch te behandelen.' (Deze respondent werkt met *WiG*, EdM.)[24]

'Kinderen vinden over het algemeen het uitvoeren van meetk. opdr. fijn, het stimuleert inzicht, samenwerking en hanteren van diverse materialen.' (Deze respondent werkt met *R&W*, EdM.)[25]

'Mijn groep heeft dit jaar extra wiskunde/meetkunde oefeningen gehad middels

gastlessen van studenten van de universiteit van Groningen, hetgeen een prima aanvulling/uitbreiding was.' (Deze respondent werkt met *WiG*, EdM.)[26]

Samenvattende conclusies

Op grond van de drie in 1995 uitgevoerde enquêtes onder een representatieve steekproef van de leraren BO van groep 8, die aan de Cito-eindtoets deelneemt, de helft van het bestand van opleiders RWD aan de PABO's en een groep van 57 schoolbegeleiders die bekend zijn met het realistisch reken-wiskundeonderwijs, kunnen de volgende conclusies getrokken worden:

1 Meetkunde als kerndoel

Respectievelijk 92% van de leraren BO van groep 8, 99% van de RWD-opleiders van de PABO's en 95% van een groep deskundige schoolbegeleiders onderschrijven meetkunde als kerndoel voor de basisschool.

2 Belang van de meetkundige aspecten

Van de vijf onderscheiden aspecten worden door zowel de leraren, de opleiders als de schoolbegeleiders de aspecten 'oriënteren en lokaliseren', 'ruimtelijk redeneren' en 'construeren en meten' het belangrijkste geacht. De nieuwere aspecten 'viseren en projecteren' en 'transformeren' krijgen van alle groepen een mindere waardering, maar het gemiddelde ligt voor alle groepen toch steeds rechts van het midden van de waarderingsschaal.

3 Motiveringen

Als motivering voor meetkunde op de basisschool blijken voor de opleiders en de begeleiders met name de drie algemene schooldoelen van rekenen-wiskunde, te weten de persoonlijke waarde, de voorbereidende waarde en de maatschappelijke waarde, de belangrijkste te zijn. De leraren BO hebben voor hun opvatting geen uitgesproken onderbouwing gegeven.

4 Aanbod in de methoden

Van de moderne methoden *Wereld in Getallen*, *Pluspunt*, *Rekenwerk*, *Operatoir Rekenen* en *Rekenen & Wiskunde* wordt in 1995 het meetkundige aanbod door de leraren BO voldoende of meer dan voldoende geacht. Voor de traditionele methode *Naar Zelfstandig Rekenen* is dit onvoldoende.

5 Bestede onderwijstijd

Volgens de leraren BO wordt gemiddeld ruim 70% van de in de moderne methoden aangeboden meetkundige activiteiten in de groepen 7 en 8 ook daadwerkelijk uitgevoerd. De meest genoemde redenen om minder dan de helft van het aanbod uit te

voeren zijn tijdgebrek en de geringe gewendheid. De schoolbegeleiders schatten dat slechts 50% van het aanbod wordt uitgevoerd.

6 Eigen deskundigheid leraren BO

Meer dan 60% van de leraren BO zegt geen tot onvoldoende vooropleiding op het gebied van meetkunde te hebben gehad. Niettemin voelt het overgrote deel hiervan zich voor de praktijk van het onderwijs voldoende toegerust. De begeleiders achten de deskundigheid met betrekking tot meetkunde van de leraren ontoereikend.

7 Meetkunde ten opzichte van rekenen

De helft van de begeleiders meent dat het meetkundeonderwijs meer problemen oplevert dan het rekenonderwijs. Een kwart meent dat het evenveel problemen oplevert en een kwart meent dat dit juist minder is. Het belang van meetkunde ten opzichte van het rekenen, zoals de leraren BO dit zouden ervaren, wordt door de begeleiders laag ingeschat.

8 Meetkunde in de opleiding

De omvang van de totale (vierjarige) studiebelasting voor Rekenen Wiskunde en Didactiek op de PABO verschilt anno 1995 sterk per instituut: van 160 tot 720 uur. Het aantal contacturen varieert van 48 tot 380. Het gemiddeld aantal contacturen RWD is 30 per jaar. Het gemiddeld aantal studie-uren is 60 per jaar. Dit alles anno 1995.

Het belang van meetkunde in de opleiding wordt door de PABO-docenten RWD zeer groot geacht. Binnen het totale vierjarige opleidingsprogramma wordt gemiddeld 10% van de studiebelasting aan meetkunde besteed.

De inhouden van vrijwel alle meetkundeprogramma's zijn gebaseerd op het realistisch reken-wiskundeonderwijs.

9 Behoefte aan bijscholing leraren BO

Bij de ondervraagde groep leraren BO bestaat nauwelijks behoefte aan bijscholing voor meetkunde, ondanks het feit dat meer dan 60% zegt hierin onvoldoende vooropleiding te hebben gehad. Volgens de leraren BO die wel prijs stellen op bijscholing (28%), zouden eventuele cursussen kort en praktijkgericht moeten zijn.

De begeleiders schatten de behoefte aan nascholing bij de leraren BO laag (37%).

10 Eigen kadervorming opleiders en begeleiders

Ongeveer de helft van de opleiders stelt eigen kadervorming op prijs, vooral ten behoeve van nieuwe ontwikkelingen. Ook de helft van de begeleiders stelt kadervorming op prijs ten behoeve van verhoging van de eigen deskundigheid.

In de discussie in D5 zullen we op deze conclusies nader ingaan.

D4 Noodzaak van consensus
opbrengsten van een deskundigenenquête

Een voorstel anno 1997

In verband met de knelpunten over inhoud, programmatische en methodisch-didactische opbouw van een realistisch meetkundeprogramma heeft de auteur van deze studie een brochure *Voorstel voor een realistisch meetkunde-programma voor de basisschool* geschreven (De Moor, 1997). Het doel hiervan was om 'zowel in programmatische als in didactische zin' tot een zekere consensus te komen. Deze zou haar beslag dienen te krijgen in een deel over meetkunde in de reeks publicaties van *De Proeve...*, maar vooral via de operationalisering in de methoden. Er wordt in dit voorstel uitgegaan van een 'activiteits- en probleemgericht' leerplan meetkunde met een globale indeling volgens de volgende leeftijdniveaus:

- groepen 1 en 2 (vier- tot zesjarigen): kleuters
- groepen 3, 4, 5 en 6 (zes- tot tienjarigen): onder- en middenbouw
- groepen 7 en 8 (tien- tot twaalfjarigen): bovenbouw.

Voor de *kleuters* wordt in het voorstel uitgegaan van een *geïntegreerd programma*, waarbij de sociaal-emotionele ontwikkeling, de zelfstandigheid, sociale betrokkenheid, eigen initiatief en creativiteit verweven zijn met de ontwikkeling van de cognitieve faculteiten van de kleuter. De wiskundige activiteiten worden geïntegreerd in speel-leersituaties aangeboden. Meetkunde maakt daar een natuurlijk deel van uit en behoeft in deze leeftijd geen voorwaardelijk opgezette leerlijn.

In de *onder- en middenbouw* (zes- tot tienjarigen) wordt in het voorstel uitgegaan van een hoofdzakelijk *thematische* en/of *projectmatige aanpak*, waarbij een aantal *basale meetkundige begrippen* aan de orde gesteld worden. Dit op een informele wijze en zo mogelijk gebonden aan reële situaties of verschijnselen, echter niet louter als papieren activiteiten, maar via een aanpak die in het concrete handelen haar start vindt. De betreffende begrippen behoeven in deze fase niet in alle gevallen geëxpliciteerd te worden, hetgeen echter niet wil zeggen dat niet naar de wiskundige kern gevraagd kan worden. Daarmee wordt bedoeld dat ook op dit niveau de 'waarom-vraag' een belangrijke rol speelt.

Voor de *bovenbouw* (tien- tot twaalfjarigen) wordt een *meer systematisch programma* voorgesteld. De leerlingen zullen een aantal meetkundige begrippen en hun onderlinge relaties moeten leren beheersen. Verder zullen ze met die begrippen en relaties moeten kunnen opereren en redeneren. Voor de praktijk zouden deze onderwerpen als *modulen* uitgewerkt dienen te worden.

Kleuters groepen 1 & 2	Onder/middenbouw groepen 3, 4, 5, en 6	Bovenbouw groepen 7 en 8
	1 lesuur per 2 weken	1 lesuur per 2 weken
Impliciete begripsvorming van meetkundige kwaliteits-begrippen, oriëntatie- en ordeningsbegrippen via speel-leerprogramma	Intuïtieve begripsvorming van basale meetkundige begrippen, relaties, eigen-schappen, vaardigheden via thematische activiteiten	Consolidatie van de basale begrippen Systematisering via een aan-tal modulen
	Oppervlakteleergang vanaf groep 4	
Meetkundewerkhoek		

figuur D4.1: Globaal overzicht van een voorstel voor een meetkundeprogramma voor de basisschool (De Moor, 1997)

Het voorstel kent geen hiërarchisch geordende leerlijn. Er wordt vanuit gegaan dat een aantal basale meetkundige begrippen vaak door één unieke leerervaring gefundeerd kan worden, waardoor de stappen in het 'realistisch meetkundige' leerproces veel groter kunnen zijn dan bijvoorbeeld bij het verwerven van een verfijnd algoritmisch systeem. Bovendien zijn de meetkundige ervaringen vaak zo concreet en alledaags, dat het feitelijke leerproces soms niet meer is dan een bewustmaking van wat 'eerder gezien' is. Dit laatste betekent echter niet dat alle meetkundige kennis en vaardigheden als vanzelf zouden ontstaan. Het gaat juist om de bewustmaking, om het herkennen van de wiskundige kern en aan het eind van de basisschool om een zekere systematisering van het begrippenkader en oefening van vaardigheden. De begrippen moeten op hogere niveaus telkens opnieuw aan de orde gesteld worden, waarbij een steeds verdere abstrahering kan plaatsvinden.

Op dit uitgangspunt, dat strijdt met een strakke leerstofsequentie, wordt een uitzondering gemaakt voor het meten, dat een nauwe relatie met de meetkunde heeft. In het bijzonder geldt dit voor een *deelleergang voor oppervlakte en inhoud van figuren en lichamen.* Er wordt voor gepleit om dit onderdeel juist wel volgens een meer hiërarchische leerlijn aan te bieden. Door het sterk meetkundige karakter van dit onderwerp verstevigt het mede het gehele framework van het meetkundecurriculum.[1]

Om aan het activiteitsprincipe de volle kans te geven, wordt verder gepleit voor het inrichten van een *meetkundewerkhoek* door alle jaren heen. Deze werkhoek zou opgenomen kunnen zijn in een wiskundewerklokaal, waar ook activiteiten op het gebied van het meten zijn te vinden.[2]

Leerstof in het voorstel

Ongeveer driekwart van het voorstel betreft beschrijvingen en opsommingen van mogelijke onderwerpen.

Voor de *kleuters* wordt verwezen naar speel-leerprogramma's met een interactief karakter en een rijke inhoud, zoals die nu op de markt zijn.Voor het individuele werken worden activiteiten met geometrische mozaïeken, ruimtelijke vormen, constructies, papierwerk en spiegelen onder verwijzing naar bekende en nieuwe materialen genoemd. Verder wordt verwezen naar groepsactiviteiten, zoals onder meer in het Wiskobas-project waren aanbevolen. Nogmaals wordt het standpunt van training en toetsing op 'geïsoleerde begrippen' afgeraden.

De *stofinhoudelijke voorstellen* voor *onder- en middenbouw* (zes- tot tienjarigen) omvatten zo'n veertig thematische onderwerpen, elk bedoeld voor een aantal lessen. Deze onderwerpen zijn in het voorstel slechts globaal beschreven, maar wel van doelen, verwijzingen naar praktische uitwerkingen en van een niveau-aanduiding voorzien. Er wordt voorgesteld per schooljaar zo'n twintig lessen hieraan te besteden (één lesuur per twee weken). Dit komt overeen met 10 procent van de totaal beschikbare tijd voor reken/wiskunde. Om een indruk te geven van de aard van de onderwerpen voor de onder- en middenbouw volgt nu een globale opsomming van activiteiten uit het voorstel.

Groep 3,4: Plattegronden, foto's, wandelen in de buurt, hoge en lage gebouwen, rechte lijnen maken, Waterland, blokjestaal, spiegelen, draaisymmetrie, werken met roosterpapier, ...

Het doel is intuïtieve kennis wekken van: plattegrond, route, plaatsbepaling, horizontale en verticale zichtlijnen, lijn, richting(verandering), coördinaten, aanzichten, lijnsymmetrie, draaisymmetrie, rooster, perspectief, afstand, ...

Vaardigheden ontwikkelen: standpuntverandering, blikwisseling, schematiseren, mentaal oriënteren, spiegelen, tekenen, ...

Groep 4,5: Busroutes, stripkaarten, wandelen in de zon, lantaarn in de klas, schaduwen maken, overheadprojector, aanzichten, vouwen, symmetrie, cirkel maken, figuren veranderen, spijkerbord, werken met roosterpapier, stadsplan, ...

Het doel is intuïtieve kennis wekken van: schematiseringen, kortste wegen, zonneschaduw, lampschaduw, gelijkvormige figuren en eigenschappen, soorten aanzichten, lijn, evenwijdige en loodrechte lijnen, cirkel, ...

Vaardigheden ontwikkelen: als hiervoor en verder: viseren, projecteren, meetkundige schema's maken, omstructureren, eenvoudige berekeningen, ruimtelijk redeneren, ...

Groep 5,6: Schip Ahoy, vierkubers, kubus maken, plat en bol, bouwplaten, lucifers leggen, tegelvloeren maken, tegelvloeren veranderen, Tangram, afstanden, kompas, draaien en hoeken, hoeken en richtingen, werken met roosterpapier, tekenen, ...

Het doel is intuïtieve kennis wekken van: verschillende figuren en lichamen, hoeken, hoekmaten, patronen, ...

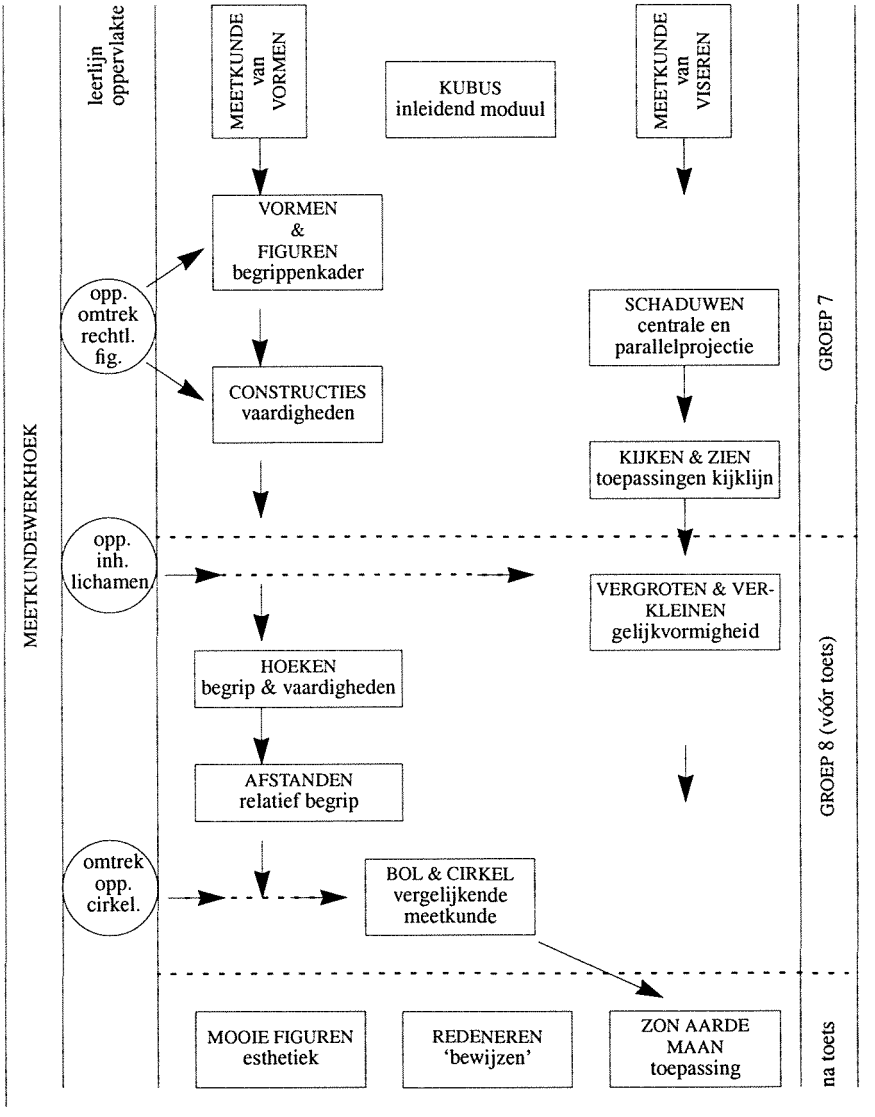
Vaardigheden ontwikkelen: als hiervoor. En verder: werken met liniaal, eenvoudige gradenboog, figuren tekenen, bouwplaat maken, evenwijdigheid, loodrecht, ...

Voor de *bovenbouw (groep 7,8)* kan het programma bestaan uit een aantal modulen. Elke module kan een serie van drie à vier lessen bevatten, waarin de basisstof wordt aangeboden. In totaal voor circa veertig lessen gedurende de laatste twee schooljaren, dus één les per veertien dagen. De modulen zouden zo geconstrueerd moeten worden dat uitbreiding en verrijking van het onderwerp mogelijk is. Een mogelijke modulencursus is weergegeven in het schema van figuur D4.2.

Voor de constructie van het bovenbouwprogramma is gebruik gemaakt van de opzet zoals die in *Mathematics in Context* is toegepast (zie C5.3). In de twaalf modulen wordt steeds de inhoud globaal beschreven en de doelen geformuleerd. 'Vormen en Figuren', 'Constructies', 'Hoeken', 'Afstanden' en 'Mooie figuren' worden tot de lijn van de 'meetkunde van vormen' gerekend. Deze onderwerpen hebben een vanouds bekend karakter. In de uitwerking zou rekening gehouden moeten worden met het doel om een aantal basisbegrippen en eigenschappen aan het eind van de basisschool te consolideren, met elkaar in verband te brengen en te systematiseren. Tevens dienen enige vaardigheden zoals het kunnen tekenen (construeren) van eenvoudige meetkundige figuren en het meten van hoeken geoefend te worden.

De nieuwe elementen van de realistische meetkunde zouden vooral tot uiting moeten komen in de modulen 'Schaduwen', 'Kijken en Zien', 'Vergroten en Verkleinen' en 'Zon, Aarde en Maan', welke in de lijn van de 'meetkunde van het viseren' zijn geplaatst. Ook deze onderwerpen zouden eerder in de onder- en middenbouw aan de orde geweest moeten zijn. In de bovenbouw is het tijdstip aangebroken om de verworven noties te actualiseren, te consolideren en te systematiseren. Ook nu weer op een informele wijze, maar toch zodanig dat verbanden, bijvoorbeeld tussen de verschillende projectiemethoden, thans begrepen worden en dat eenvoudige toepassingen gemaakt kunnen worden. De totale opzet voor de bovenbouw is zo geconstrueerd dat de 'Kubus' een inleidend moduul vormt, waarin een aantal aspecten van de daarna volgende modulen globaal aan bod komt. Verder duidt het schema een sequentie aan waarbij modulen uit de 'vormenlijn' en de 'viseerlijn' worden afgewisseld. Er is niet gestreefd naar een streng hiërarchische volgorde, waarbij het ene moduul een noodzakelijke voorwaarde is voor een volgende.

In de meest linkse kolom van het schema is aangegeven dat een goed gestructureerde leerlijn oppervlakte kan bijdragen aan versterking van de meetkunde-'leerlijn'. Ook hier zouden activiteiten in de meetkundewerkhoek de leergang kunnen verrijken en versterken. Het voorgestelde programma zou ook van 'Kubus tot Bol' kunnen heten, omdat het voorstel voorziet in een moduul dat onder meer tot doel heeft om de meetkunde van de bol te vergelijken met die van het platte vlak.



figuur D4.2: Voorstel voor een aantal meetkundemodulen voor de groepen 7 en 8 van de basisschool (De Moor, 1997)

Voor het totale programma tot aan de eindtoets is gekozen voor negen modulen (circa 36 lesuren), waarmee als het ware ook een minimumprogramma wordt voorgesteld. De drie overige modulen zouden als uitbreiding en verdieping voor de periode 'na de eindtoets' kunnen worden gebruikt.

Deskundigenenquête

Genoemd voorstel is in het voorjaar van 1997 aan 21 deskundigen op het gebied van het meetkundeonderwijs gestuurd. Gevraagd was een bijgevoegd enquêteformulier in te vullen (zie bijlage D II). De 21 aangeschrevenen waren door de auteur van deze studie op persoonlijke titel uitgekozen. Bij deze keuze van de aangeschrevenen zijn de volgende criteria aangelegd: deskundigheid (hierin schuilt een zekere subjectieve beoordeling), functie (onderzoeker, opleider, schoolbegeleider, leerplanontwikkelaar, methodenschrijver, toetsdeskundige, inspecteur), betrokkenheid bij de verschillende in ontwikkeling zijnde methoden. Er waren geen fulltime leraren BO in dit bestand, zij het dat een aantal van de uitgekozen deskundigen een ruime ervaring als leraar BO heeft. Van de 21 aangeschrevenen hebben er 17 de vragenlijst ingevuld en geretourneerd.[3]

Vraag 1, die naar de *instemming* vroeg met de *indeling naar de drie leeftijdsniveaus* en de *aard van het onderwijs* (oriënterende fase voor de kleuters, intuïtieve begripsvorming voor zes- tot tienjarigen en systematische aanpak voor de bovenbouw) leverde de volgende uitkomst: *ja (12), nee (1), weet niet (4).*

De *vragen 2 en 3* leveren een beeld op dat *kwantitatief moeilijk te interpreteren* valt. Slechts drie respondenten stemmen volledig in met de voorgestelde inhoudsopsommingen, maar de meesten geven aan dat vooral de opsomming voor de onder-, midden-, en bovenbouw te overladen is, maar tegelijk soms ook te weinig. In verband met het laatste worden veel specifieke meetactiviteiten genoemd, zoals tijdmeting. Soms ook worden onderwerpen aangedragen die op een andere plaats in het voorstel voorkomen. Verschillende respondenten gaan bij deze vragen al in op de haalbaarheid, waarbij soms volkomen tegengestelde opvattingen opvallen. Tevens wordt in het commentaar meerdere malen direct naar problemen van didactische en methodische aard verwezen.

Vraag 4, waarin gevraagd werd naar instemming met de doelen van de *twaalf modulen*, leverde het volgende beeld op, dat in figuur D4.3 is weergegeven.
Drie van de 17 respondenten zijn bij de uitwerking van de respons consequent op twijfel (weet niet) gescoord, omdat deze respondenten geen keuze hadden gemaakt voor een eenduidige beantwoording met eens, oneens of weet niet. Deze respondenten hebben in plaats hiervan een schriftelijke toelichting op deze vragen gegeven, die overigens in het algemeen constructief van aard was. Twee respondenten zijn het vrijwel categorisch oneens, met name met de doelen van het voorgestelde kernprogramma (tot en met 'bol en cirkel'). De een, omdat deze respondent meent dat de

inhouden te hoog gegrepen zijn, de ander omdat het programma te formeel lijkt en te weinig toepassingsgericht zou zijn. Opvallend is dat juist de modulen (Aarde, zon en maan, Redeneren en Mooie figuren), die volgens het voorstel bedoeld zijn als verrijkingsstof voor de periode ná de eindtoets basisonderwijs, het hoogste op instemming scoren.

		eens	oneens	weet niet
meetk. van vormen	Kubus (inleiding)	8	2	7
	Vormen en figuren	9	2	6
	Constructies	10	2	5
	Hoeken	10	2	5
	Afstanden	9	2	6
meetk. van viseren	Schaduwen	10	4	3
	Kijken en zien	9	2	6
	Vergroten en verkleinen	10	2	5
	Bol en cirkel (afsluiting)	9	2	6
extra	Aarde, zon en maan	12	0	5
	Redeneren	13	0	4
	Mooie figuren	12	1	4

figuur D4.3: Instemming met de voorgestelde modulen (deskundigenenquête)

Vraag 5 over de volgorde van de modulen leverde *geen relevante informatie* op.

Vraag 6 luidde of het voorgestelde programma in zijn totaliteit praktisch te beschrijven is en in de methoden is in te voegen. Hierop waren de antwoorden: *ja* (9), *nee* (5) en *weet niet* (3). Uit de toegevoegde reacties blijkt echter in enkele gevallen dat men 'in zijn totaliteit' had opgevat als alle beschreven stof.

De laatste *vraag 7* betrof de 'haalbaarheid in zijn totaliteit' voor de schoolpraktijk. Hierop waren de antwoorden *ja* (7), *nee* (7) en *weet niet* (3). Hoewel ook hier enige verwarring leek te bestaan over het begrip totaliteit, kwam uit de persoonlijke reacties toch naar voren dat men vreesde voor een te *overladen programma*.

Conclusies op grond van de enquête

Door de vele persoonlijke reacties op de verschillende vragen leverde de enquête meer op dan louter kwantitatieve gegevens. Tegenover twee negatieve reacties staan

ook twee zeer positieve. Zeker tien respondenten vinden het een 'goed' voorstel. Verschillende malen wordt opgemerkt dat het voorstel als 'inspirerend' wordt ervaren. De twijfels bij een aantal respondenten zitten vooral in het methodische aspect, met name bij diegenen, die meetkunde meer geïntegreerd in het gehele reken-wiskundeonderwijs willen zien opgenomen. Ook wordt door twee respondenten op een meer gestructureerde leerlijn aangedrongen. Hoewel deze persoonlijke reacties lastig zijn te scoren, valt toch een meer dan gemiddelde instemming waar te nemen op het inhoudelijke aspect van de bovenbouw. Een van de respondenten, die sterke twijfels uitte over het programma, achtte dit voorstel 'voer voor een conferentie'.

Zo leidt de respons van deze 17 deskundigen op het *Voorstel voor een realistisch meetkunde-programma voor de basisschool* tot de volgende samenvattende conclusies:

- De niveau-indeling voor een realistisch meetkundeprogramma wordt onderschreven. Dit geldt zowel voor de leeftijdsindelingen, maar ook voor de aard van het onderwijs, dat inhoudelijk spiraalsgewijs dient te worden opgebouwd: kleuters (oriënterend), zes- tot tienjarigen (thematisch, intuïtief), tien- tot twaalfjarigen (meer systematisch). Er wordt gewaarschuwd tegen overlading.
- Over de inbedding in het totale curriculum bestaat bij een aantal respondenten twijfel. Moet meetkunde als zelfstandig subdomein opgevat worden of moet het bij het meten opgenomen worden of zelfs geheel geïntegreerd binnen rekenen-wiskunde? Hierover bestaat beslist geen consensus bij de geraadpleegde groep deskundigen.
- Uit de antwoorden spreekt waardering voor het voorstel. Ook kan het dienst doen als inspiratiebron voor methodenontwikkeling. Nadere praktische uitwerkingen zullen wellicht een grotere mate van consensus binnen deze groep kunnen bewerkstelligen.[4]

Al met al kan vastgesteld worden dat naar aanleiding van de Pimbo-enquêtes en de deskundigenenquête er in Nederland consensus bestaat over het feit dat de 'realistische meetkunde' een subdomein van het reken-wiskundeonderwijs dient te zijn. Dit wordt ook formeel mogelijk gemaakt door de vaststelling van de officiële kerndoelen. Anderzijds blijkt, zowel uit de Pimbo-onderzoeken als uit de deskundigenenquête, dat over de omvang, de aard en de plaats van een programmatische uitwerking de meningen niet volledig eenstemmig zijn. Ook al was de groep van ondervraagde deskundigen klein, toch dient deze uitslag als een serieuze factor in het verdere proces van consensusvorming opgevat te worden, omdat juist in deze groep een aantal vooraanstaande methodenschrijvers en adviseurs voorkomt. In het afsluitende hoofdstuk van dit boek komen we hier bij de aanbevelingen nog op terug.

D5 Conclusies en discussie over de staat van het meetkunde-onderwijs op de basisschool anno 1995

Door dit meervoudige onderzoek is voor het eerst in de historie van het basisonderwijs het domein meetkunde aan een controleerbare analyse onderworpen. Er is hiermee een betrouwbare hoeveelheid informatie gegenereerd die van nut is voor de beantwoording van onderzoeksvraag 6: *Wat zijn de opbrengsten van de empirische onderzoeken anno 1995 en 1997?* Allereerst is een globale indruk van de inrichting en opbrengsten van het gegeven onderwijs gekregen. Verder is gebleken dat volgens het veld het domein meetkunde een vaste plaats dient te krijgen binnen het curriculum voor de leerlingen van vier tot twaalf jaar. Maar ook is duidelijk geworden dat een aantal punten nader onderzoek behoeft en dat de implementatie van dit voor de basisschool nieuwe vak nog in een pril stadium is. Hierop gaan we nu in het volgende in.

Toetsontwikkeling

In het Pimbo-onderzoek is voor het eerst een verzameling goed discriminerende toetsopgaven samengesteld voor meetkunde, zoals dit onderwerp thans in de moderne Nederlandse reken-wiskundemethoden voorkomt en zoals voorgeschreven door de kerndoelen voor het basisonderwijs. De ontwerpers hebben de items en de toetsen als proeftoetsen beschouwd. Tevens is gebleken dat het mogelijk is om gelijkwaardige parallelle toetsen op te stellen. Er is gebruik gemaakt van de klassieke toets-item-analyse, waarbij de p-waarden en de standaarddeviaties berekend zijn. Naast de verstrekte gegevens in D1 zijn de opgaven van de drie toetsboekjes door het Cito geschaald. Een dergelijke kalibratie maakt het mogelijk de opgaven van de verschillende toetsen onderling te vergelijken. Met behulp van deze geschaalde itembank bestaat de mogelijkheid om bij een volgende (proef)afname een nieuwe, verbeterde toets samen te stellen.

Een lastig probleem was en is het bepalen van de norm. De totale gemiddelde goedscore van de Pimbo-toets van 1995 was 62 procent. Er was echter geen vergelijkbare standaard voorhanden. Onbekende factoren als methodengebruik en omvang van het aanbod, maar ook het gebrek aan harde informatie over de deskundigheid van de leraar BO, maken het moeilijk uitspraken te doen over de volle betekenis van de gevonden opbrengsten.

De Pimbo-proeftoetsen waren deels in multiple choice-vorm, deels als open opgaven geformuleerd. Hoewel wij menen dat het merendeel van de meerkeuzenitems zeker voor het vigerende doel goed voldaan heeft, kan men zich toch afvragen of deze wijze wel de meest geschikte is voor het toetsen van inzichten en vaardigheden van het realistisch meetkundeonderwijs. Sterker nog, niet alle aspecten van het meetkundeonderwijs lenen zich voor een evaluatie via 'paper-pencil'-tests. Bijzon-

der lastig is dit bijvoorbeeld voor het aspect 'construeren en meten', waarbij de kinderen zelf moeten tekenen en construeren. Het is derhalve van belang dat ten behoeve van de implementatie ook andere evaluatie-instrumenten ontwikkeld worden.

Beperktheid van het toetsonderzoek

Door het totaal nieuwe van de Pimbo-proeftoetsen werden allerhande vragen opgeworpen, die tot een complex design hadden kunnen leiden. Allereerst zou het natuurlijk interessant geweest zijn wanneer deze toetsen ook in andere leerjaren afgenomen waren. Het is nog onduidelijk welke de vroegste leeftijd is dat kinderen bepaalde meetkundige problemen aankunnen. Van een aantal opgaven uit de proeftoetsen is echter bekend dat ze door jongere kinderen gemaakt kunnen worden. Om praktische redenen hebben we de toetsafname beperkt tot het eindniveau BO. Een van de redenen daarvoor was dat op die wijze gecorreleerd kon worden met de reken- en totale prestaties van de leerlingen uit de steekproef.

Bij de opzet van het toetsinstrument is overwogen om ook het verband tussen gebruikte methode en opbrengst te onderzoeken. Afgezien van de moeilijkheden met de technische realiseerbaarheid hiervan, werd tijdens het onderzoek al snel duidelijk dat kale informatie over de gebruikte methode weinig zou zeggen, indien daarbij niet tevens gegevens over de methodiek en didactiek van het gegeven onderwijs voorhanden waren. Wat wordt behandeld uit de methoden? Hoeveel onderwijstijd wordt besteed? En vooral, op welke wijze vindt dat onderwijs plaats? In verband hiermee zou men zich ook kunnen afvragen of bepaalde begrippen en vaardigheden zich ook los van gericht onderwijs ontwikkelen, anders gezegd, beschikken de kinderen over informele kennis? Al deze parameters hebben we om praktische redenen buiten het toetsonderzoek moeten laten.

Een laatste parameter die van invloed kan zijn op de opbrengsten, is de samenstelling van de schoolbevolking. Bij de handmatige correctie vielen enkele scholen op door een uniform goede of slechte score. Dit punt zou zeker met behulp van de gegevens die het Cito over deze scholen bezit, nader te onderzoeken zijn.

Specifieke onderzoeksvragen van de toets

Van psychologisch belang is de samenhang tussen respectievelijk de reken- en meetkundeprestaties en de algemene en meetkundeprestaties van de individuele leerlingen. De in het Pimbo-onderzoek gevonden correlaties zijn zwak. Dit lijkt in overeenstemming met de opvatting dat de ruimtelijke intelligentie als een zelfstandige faculteit opgevat kan worden en zich ook min of meer los ontwikkelt van de logische faculteiten, zoals het rekenen (Gardner, 1985). Dit kan een punt van nader onderzoek zijn. Niet alleen is deze kwestie van belang voor de formulering van de kerndoelen, maar ook voor de schoolwerkplanbeschrijving. Men zou namelijk kunnen overwegen of meetkunde niet als een apart kennis- en vaardigheidsgebied binnen re-

kenen-wiskunde opgevat zou moeten worden.

Een soortgelijke kwestie hebben we aangetroffen bij het gevonden significante verschil in prestaties tussen jongens en meisjes ten gunste van de jongens. Dit klopt met de uitkomsten van het derde TIMSS-onderzoek, waarbij de reken-wiskunderesultaten van een aantal landen vergeleken zijn.[1] In hoeverre dit terug te voeren is tot cultureel-pedagogische en/of genetische factoren, viel geheel buiten het kader van deze studie.

Herziene meetkundetoets

Alleen al op grond van het voorgaande ligt het voor de hand dat een verbeterde Pimbo-toets ontwikkeld en afgenomen wordt. Hierbij zouden een aantal van de hier genoemde discussiepunten doelen van onderzoek moeten zijn. Met name lijkt ons onderzoek naar samenhang tussen methode en opbrengst van wezenlijk belang. Dit zou echter een sterk verbeterd design behoeven.

Acceptatie en uitvoering

De acceptatie van realistische meetkunde voor de basisschool is zowel in kringen van het basisonderwijs als op de PABO als bij de schoolbegeleiders vrijwel volledig. Het is echter nog onduidelijk in hoeverre de doelen voor meetkunde bij de leraren BO bekend zijn en of er systematisch onderwijs in wordt gegeven. Ook is niet systematisch onderzocht in hoeverre de methoden aan de kwalitatieve eisen van de doelen van het realistisch meetkundeonderwijs voldoen en in hoeverre de methoden voldoende methodische en didactische steun bieden voor het bereiken daarvan. Merkwaardigerwijs schatten de leraren zichzelf als voldoende deskundig voor dit nieuwe domein in, maar de schoolbegeleiders twijfelen ernstig over de deskundigheid van de leraren. Ook dit zou een punt van nader onderzoek kunnen zijn.

Scholing en nascholing

Uit de enquêtes is duidelijk geworden dat de opleiders het domein meetkunde als een essentieel onderdeel van het opleidingsprogramma beschouwen. Er wordt grofweg 10 procent van de totale opleidingstijd aan besteed. Ons lijkt een dergelijke voorbereiding echter marginaal en kan hooguit een zekere startbekwaamheid verschaffen. Juist daarom zijn de gegevens over de geringe behoefte aan nascholing van de leraren enigermate verontrustend. Nader onderzoek op dit punt is beslist noodzakelijk.[2]

Programmaontwikkeling

Een belangrijke vraag die zich juist op grond van de kwalitatieve analyse van de proeftoetsen aandiende, is of de inhouden en de didactiek van de meetkunde voor de basisschool voldoende 'uit-ontwikkeld' zijn. In feite hebben zich gedurende de laatste twintig jaar geen essentiële vernieuwingen op dit gebied voltrokken, noch naar

inhoud noch naar didactiek of methodiek. Een vaak terugkerende vraag betreft die van een leerlijn. Door enige methodenschrijvers is getracht een leerlijn te beschrijven, maar wat in de methoden geoperationaliseerd is, stoelt in wezen op de ontwikkelingen van de jaren zeventig. Verder is via *Proeve 1* (Treffers e.a.) enig houvast geboden met een beschrijving van de vijf aspecten.

Men zou als nadere uitwerking van de kerndoelen een lijst van basale meetkundige begrippen en vaardigheden op kunnen stellen. Een dergelijke werkwijze zou echter het typische karakter van de meetkunde met haar meer procesgerichte doelen kunnen frustreren. Anderzijds zullen de doelen zonder een zekere operationalisering voor de praktijk te vaag blijven. Willen we de innovatie van dit domein een steviger frame bieden, dan zal in 'programmatische zin' meer houvast voor de methodenontwikkelaar en de leraar geboden moeten worden, maar uit de deskundigenenquête blijkt dat dit nog nadere ontwikkeling behoeft (zie D4).

Knelpunten

De proeftoetsen, de drie enquêtes en de deskundigenenquête hebben een schat van informatie opgeleverd over dit nieuwe domein van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Tegelijkertijd echter zien we dat deze onderzoeken een aantal oude en nieuwe kwesties rond het meetkundeonderwijs hebben geactualiseerd.

a Zowel uit de methodenanalysen als uit de kwalitatieve antwoorden van de leraren BO blijkt dat er geen uniforme aanpak voor het domein meetkunde bestaat. De vigerende kerndoelen zijn te algemeen gesteld om een dergelijk eensluidend concreet programma op te stellen.

b De enquêtegegevens leren dat veel leraren meetkunde nog als een onderwerp beschouwen dat niet wezenlijk bij het vak rekenen-wiskunde behoort. Het gevolg is dat het domein als een extraatje of 'iets dat ook nog moet' wordt beschouwd. Niet zelden worden de aangeboden meetkundige activiteiten overgeslagen.

c Een aparte moeilijkheid in verband met de innovatie is het gegeven dat de realistische meetkunde een activiteits- en probleemgerichte aanpak vereist: er moeten vaak concreet handelende activiteiten ondernomen worden, er moet materiaal verschaft (gemaakt) worden, soms moet er buiten de school gewerkt worden, kortom allerlei factoren die, zoals een van de respondent-begeleiders het uitdrukte, 'troep in je klas' veroorzaken. De handleidingen van de methoden bevelen dergelijke activiteiten wel aan, maar het vermoeden bestaat dat in verband met de organisatiemoeilijkheden vaak meteen tot de 'papieren' activiteiten wordt overgegaan.

d Samenhangend met het zojuist genoemde methodische aspect, doet het meetkundeonderwijs op de basisschool ook een appèl op specifiek didactische kwaliteiten van de leraar. Het aangrijpen van verschijnselen in de ons omringende ruimte zou als natuurlijk uitgangspunt voor het meetkundeonderwijs gekozen dienen te worden, waardoor intuïtieve verwerving van een aantal basale meetkundige noties van en relaties tussen begrippen kan plaatsvinden. Hierbij kan één fundamentele ervaring soms belangrijker zijn dan een voorwaardelijk opgebouwde leerlijn. (Bijvoorbeeld: viseren leidt tot het begrip rechte lijn, zonneschaduw legt de basis voor de eigenschappen van parallelprojectie, vergroten legt een aanschouwelijke basis voor verhoudingsconstantie, ...) De vraag kan gesteld worden of men in de praktijk in voldoende mate over deze specifieke didactische kwaliteiten beschikt.

e Een fundamenteel aspect van de didactiek is het bevorderen van het mentale handelen, dat het meetkundige denken op een hoger niveau tilt. Ruimtelijk denken en redeneren is de sleutel tot werkelijk inzicht in ruimtelijke relaties en verschijnselen. Meetkundeonderwijs dat blijft steken op het concrete handelingsniveau zonder dat de essentiële waarom-vragen gesteld worden, strijdt met de algemene doelen van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Hiermee raken we meteen het lastigste onderdeel van de didactiek: er wordt een beroep op vaardigheden en inzichten van de leraar gedaan, die met name in de interactie met de leerlingen bij het oplossen van meetkundige problemen worden ontwikkeld.

In het afsluitende hoofdstuk van deze studie zullen we een aantal aanbevelingen doen hoe tot een oplossing te komen van genoemde knelpunten.

Bijlage D-I

Deelnemende scholen Pimbo-toets, geordend naar opklimmende meetkundescore.

School	N	toets	meetkunde	rekenen	tot. EB
01	29	B	43	62	60
02	37	B	49	59	63
03	21	C	52	72	74
04	9	C	53	54	56
05	8	B	54	72	75
06	20	B	55	72	73
07	23	A	56	62	69
08	5	C	56	39	49
09	13	B	56	79	77
10	10	C	57	69	67
11	26	C	57	73	70
12	34	C	57	65	64
13	43	B	59	69	71
14	6	B	59	71	78
15	48	A	59	58	62
16	9	B	59	71	75
17	35	B	60	73	69
18	22	C	61	72	71
19	32	B	61	63	69
20	26	C	62	69	65
21	32	C	62	73	74
22	17	C	62	80	77
23	21	C	62	76	76
24	5	B	63	75	79
25	7	B	64	77	75
26	60	C	64	80	78
27	2	B	65	55	59
28	17	B	65	75	75
29	34	C	65	68	69
30	17	A	65	79	79
31	14	C	65	85	83
32	26	A	67	79	77
33	22	C	67	73	69
34	5	C	68	63	68
35	30	C	68	78	78
36	8	C	68	78	75
37	22	C	68	81	77
38	12	B	69	72	72
39	17	B	69	74	71
40	33	A	69	75	77
41	7	C	70	78	79
42	7	B	71	76	77
43	7	B	71	72	75
44	8	B	71	63	65
45	12	B	73	78	78
46	25	A	74	84	82

Bijlage D-II

Tekst van de vragen bij de *deskundigenenquête* bij het *Voorstel voor een realistisch meetkundeprogramma voor de basisschool*

1 *Het programmavoorstel is naar drie leeftijdsperioden met verschillende accenten ingedeeld:*
kleuters:speel-leerprogramma (oriënterende fase)
ob-mb: activiteitenprogramma (intuïtieve begripsvorming)
bb: consolidering en systematisering via een aantal modulen.
Kunt u in principe met deze opzet instemmen?
ja / neen / weet niet, zo neen of weet niet. Gaarne korte toelichting

2 *Zijn er onderwerpen in het ob-mb-programmavoorstel, waarvan u vindt dat ze niet opgenomen moeten worden?*
a Zo ja, welke en waarom?
b Mist u onderwerpen in het ob-mb-programmavoorstel?
Zo ja, welke?

3 *Zijn er onderwerpen in het bb-programmavoorstel, waarvan u vindt dat ze niet opgenomen moeten worden?*
a Zo ja, welke en waarom?
b Mist u onderwerpen in het bb-programma-voorstel?
Zo ja, welke?

4 *In het programmavoorstel bb zijn de volgende doelen geformuleerd. Kunt u hiermee instemmen? Eventueel kort commentaar.*

Kubus: Inleiding op meetkundige begrippen en vaardigheden aan de hand van het eenvoudigste ruimtelijke lichaam. eens, oneens, weet niet.

Vormen en Figuren: Overzicht krijgen van een zekere formalisering van het begrippenkader, waarvoor in de groepen 3 t/m 6 de basis is gelegd. eens, oneens, weet niet.

Constructies: Inzicht in ruimtelijke vormen en uitslagen. Vaardigheid verwerven met enkele eenvoudige constructies. eens, oneens, weet niet.

Hoeken: Begrip van hoek als draai. Eenvoudige hoeken kunnen maken en meten. Som van de hoeken van een driehoek is 180°. eens, oneens, weet niet.

Afstanden: Begrip ontwikkelen van afstand onder voorwaarden. eens, oneens, weet niet.

Mooie Figuren: Gevoel ontwikkelen voor het esthetische aspect van meetkundige vormen. eens, oneens, weet niet.

Schaduwen: Inzicht verkrijgen in verschil tussen parallelprojectie (zon) en centrale projectie (lamp). Eenvoudige constructies. Eenvoudige berekeningen. eens, oneens, weet niet.

Kijken en Zien: Praktische toepassingen van kijkmeetkunde.Versterking van het hoekbegrip. Versterking van gelijkvormigheidsbegrip. Samenhang met centrale projectie. eens, oneens, weet niet.

Vergroten en Verkleinen: Begrip van gelijkvormige figuren. Samenhang met centrale projectie. Eenvoudige berekeningen. Bewustmaking van verschillen van lineaire, kwadratische en kubieke vergroting. eens, oneens, weet niet.

Bol en Cirkel: Bol leren kennen als ander meetkundig systeem dan het platte vlak. Eigenschappen van de cirkel, waaronder de omtrek. eens, oneens, weet niet.

Zon, Aarde, Maan: Jaargetijden, dag en nacht kunnen verklaren. eens, oneens, weet niet.

Ruimtelijk Redeneren: Eenvoudige oefeningen in logisch redeneren. Gevoel ontwikkelen voor 'bewijzen'. eens, oneens, weet niet.

5 *Hebt u eventueel commentaar op het volgordeschema voor de bovenbouw?*

6 *Denkt u dat het voorgestelde programma in zijn totaliteit praktisch te beschrijven is en in de methoden is in te voegen?*
ja / neen / weet niet. Commentaar:

7 *Denkt u dat het voorgestelde programma in zijn totaliteit haalbaar is in de schoolpraktijk?*
ja / neen / weet niet. Commentaar:

Noten deel D

Noten D0

1 Deelnemers aan dit overleg op 6-1-1994 waren H.J. Uiterwijk (hoofd Bedrijfsgroep Dienstverlening Primair Onderwijs van het Cito), J. Janssen en J-M. Kraemer (medewerkers van het Cito ten behoeve van toetsontwikkeling BO) en E. de Moor namens het Freudenthal Instituut.
2 Het Pimbo-project geschiedde met gesloten beurzen van het Freudenthal Instituut en het Cito. Afgesproken werd dat J. Janssen en J-M. Kraemer mee zouden werken aan de ontwikkeling van de items, die in eerste instantie door E. de Moor werden ontworpen. Verder nam het Cito de vormgeving en de afname van de toetsen voor zijn rekening, alsook de technische computerverwerking. De toets-items bleven eigendom van het Cito, maar stonden voor het onderhavige onderzoek ter beschikking van E. de Moor. De verwerking van de toets zou door het Freudenthal Instituut verzorgd worden, hetgeen later is uitgevoerd door E. de Moor en J. Menne. Verder zou het Cito de vormgeving van de lerarenenquête verzorgen en hiervoor een representatieve steekproef ter beschikking stellen. De verwerking hiervan is later door E. de Moor uitgevoerd. Ten slotte werd afgesproken dat de resultaten van het project in gemeenschappelijkheid bekend gemaakt zouden worden. Hierbij werd E. de Moor hoofdauteur.
3 Dit rapport *Niveau van het meetkunde-onderwijs op de basisschool. Pimbo proeftoets 1995* (E. de Moor, J. Janssen, J-M. Kraemer en J. Menne, 1997) bevat alle items, alle data, een verslag van de werkzaamheden en de interpretaties. Het rapport is opgenomen in de archieven van het Cito en het Freudenthal Instituut.
4 Dit rapport *Eindverslag Pimbo-enquêtes* (E. de Moor, J. Janssen, J-M. Kraemer en J. Menne, 1997) bevat alle enquêteformulieren, alle data (antwoorden), een verslag van de werkzaamheden en de interpretaties. Het rapport is opgenomen in de archieven van het Cito en het Freudenthal Instituut.

Noten D1

1 Deze commissie bestond uit: H. Puttestein, A. Noteboom, H. Huinink en J. Kindermans. De externe deskundigen waren: E. Wijdeveld, A. Treffers, K. Gravemeijer, F. van Galen, M. van den Heuvel-Panhuizen en R. de Jong.
2 Deze leerling Jop (12;8), die wegens één keer doubleren in groep 8 zat, met de methode *Taltaal* werkte en als een zwakke leerling werd beschouwd, maakte eind 1994 in twee sessies van elk een half uur zonder aanwijzingen 61 opgaven. Zijn score was 39 volledig goed. In een derde sessie zijn alle opgaven door de auteur van deze studie met Jop besproken. 'Ik heb er veel van geleerd' was zijn reactie. Van dit onderzoekje is een intern rapport gemaakt.
3 Dit werk is in de zomer van 1995 uitgevoerd door J. Menne en E. de Moor.
4 In feite hebben 1223 leerlingen de Pimbo-toets gemaakt. Door een technische omissie (sommige scholen hadden vergeten hun nummer in te vullen) moest het aantal deelnemers aan toets A gereduceerd worden. Hierdoor kon geen gebruik gemaakt worden van de gegevens van deze leerlingen op de officiële eindtoets BO. Voor de goede orde vermelden we hier de resultaten van die 1223 leerlingen op de Pimbo-toets: toets A: N = 414, p = 64,9; toets B: N = 379, p = 58,4; toets C: N = 430, p = 62,4. Het gewogen gemiddelde van deze drie toetsen levert een goedscore van 62%.
5 De door het Cito verstrekte computergegevens zijn met behulp van het programma SPSS nader geëvalueerd door J. Menne en M. van den Heuvel-Panhuizen. Hierbij is steun verleend door de statisticus A.D. Nijdam.
6 De lokale dichtheid in het punt x wordt bepaald door de proportie van de scores in het in-

terval [$x - 1/2b$, $x + 1/2b$] te delen door de breedte (b) van het interval. In casu is $b = 20$.

7 Nijdam en Van Buuren (1983) spreken van een 'redelijk positieve' correlatie als deze ligt tussen 0,5 en 0,7 en van 'zwak positief' als deze ligt tussen 0 en 0,5.

8 Naast de verstrekte gegevens in dit hoofdstuk zijn de meetkundeopgaven van de drie toetsboekjes geschaald. Dit maakt het mogelijk de opgaven van de verschillende toetsen onderling te vergelijken. Door gebruik te maken van deze geschaalde itembank geeft dit de mogelijkheid om bij een volgende proefafname een meer verantwoorde toets samen te stellen.

Noten D2

1 Een dergelijk vraagstuk kwam ook in de PPON-peiling van 1992 voor. Dat vraagstuk scoorde toen een p-waarde van 80 en werd als een betrekkelijk eenvoudige opgave aangemerkt (Bokhove, 1995).

2 Ook in de PPON-peiling van 1992 kwamen enkele V&P-items voor, waarop zeer wisselend gescoord werd. Bij die items hoefden de kinderen niet zelf te construeren, doch alleen te redeneren.

3 In de oorspronkelijke opzet was dit een beperkter aantal (18). Dit was het gevolg van het feit dat een aantal items later opgesplitst was om de scoring gemakkelijker te kunnen uitvoeren.

4 Dit lijkt in tegenspraak met een opgave uit de PPON-peiling van 1992, waar een dergelijke opgave maar een p-waarde van 35 oplevert (Bokhove, 1995).

5 Een voorbeeld hiervan was het berekenen van het aantal diagonalen van een regelmatige tienhoek. Ook uit vroegere onderzoeken is gebleken dat dit soort combinatorische vraagstukken het gemiddelde niveau van de basisschool overstijgt.

Noten D3

1 Het eerste ontwerp Enq-BO is toegezonden aan J. Janssen, J-M. Kraemer, A. Treffers, R. de Jong, E. Wijdeveld, M. van den Heuvel-Panhuizen, F. van Galen en K. Gravemeijer. Aanvankelijk was het de bedoeling ook de mening te peilen van alle groepsleerkrachten. Hiervan is om redenen van praktische uitvoerbaarheid afgezien. Op grond van de commentaren is in december 1994 de lijst sterk ingekort, zijn de vragen vereenvoudigd en zijn de vijf aspecten van meetkunde op de basisschool uitvoeriger omschreven en van voorbeelden voorzien. Tevens werd de doelgroep van respondenten beperkt tot de leraren van groep 8. Op dit herziene voorstel kwam van de bovengenoemde deskundigen weinig commentaar, waarna Janssen en De Moor de definitieve vragenlijst hebben opgesteld.

2 Naast de eerder genoemde groep van deskundigen zijn voor de Enq-OP/SB ook de PABO-docenten W. Oonk, W. Faes en R. Keijzer geraadpleegd. Met name Wijdeveld heeft erop gewezen dat het belang van realistische meetkunde ten opzichte van het realistische rekenen door de ondervraagden geschat zou dienen te worden. Tevens adviseerden meerdere van de deskundigen om de ondervraagden tot een kwalitatief standpunt ten aanzien van meetkunde op de basisschool uit te lokken.

3 De enquêtes waren voorzien van een begeleidingsbrief van prof. A. Treffers van het Freudenthal Instituut en dr. H. Uiterwijk van het Cito. Ten behoeve van de respons op de Enq-OP/SB is in oktober 1995 een rappel tot inzending gestuurd.

4 Bedoeld wordt het *Eindverslag Pimbo-enquêtes*. Hierin zijn alle materialen, data, gegevensverwerkingen en protocollen opgenomen. Dit rapport is te raadplegen op het Freudenthal Instituut te Utrecht en op het Cito te Arnhem.

5 Door het Cito wordt elk voorjaar bij een steekproef van een aantal scholen dat aan de jaarlijkse eindtoets BO deelneemt een proeftoets afgenomen ten behoeve van de ontwikkeling van de items voor het daaropvolgende jaar.

6 Het aantal scholen dat jaarlijks aan de Eindtoets BO van het Cito deelneemt, is circa 5000.

In het voorjaar van 1995 waren bij deze proeftoets bij het onderdeel rekenen ook drie proeftoetsen meetkunde, die in het kader van het Pimbo-project waren ontwikkeld, opgenomen. Niet alle scholen die aan de Enq-BO hebben deelgenomen, hebben ook deze meetkundetoetsen gemaakt.

7 Het aantal jaren onderwijservaring in Enq-BO is als volgt verdeeld: 0-5 jaar: 6 (4%); 5-10 jaar: 12 (8%); 10-20 jaar: 54 (35%); meer dan 20 jaar: 82 (53%). Door 2 respondenten niet ingevuld.

8 De verdeling man-vrouw was 51 (76%) tegen 16 (24%) (1 niet ingevuld). Het aantal jaren ervaring was als volgt opgebouwd: 0-5 jaar: 18 (26%); 5-10 jaar: 15 (22%); 10-20 jaar: 14 (21%); meer dan 20 jr: 21 (31%).

9 De lijst van begeleiders is gescreend op 'verborgen' deskundigen (basisschoolleraren, onderzoekers, buitenlanders, medewerkers van de Centra, Cito en SLO). Genoemde personen zijn uit het bestand verwijderd. In drie gevallen was een PABO-leraar tevens schoolbegeleider, zoals bleek uit de teruggezonden formulieren.

10 35 mannen (65%) en 19 vrouwen (35%), (3 niet ingevuld). Het aantal jaren ervaring was als volgt opgebouwd: 0-5 jaar: 7; 5-10 jaar: 3; 1-20 jaar: 34; meer dan 20 jr: 13.

11 Deze gegevens zijn opgenomen in *Eindverslag Pimbo-enquêtes*.

12 Op de vraag of meetkunde alleen voor vier- tot achtjarigen gereserveerd zou moeten blijven, is slechts éénmaal een bevestigend antwoord geregistreerd. We laten deze categorie derhalve buiten de tabel.

13 De letterlijke teksten zijn opgenomen in het *Eindrapport Pimbo-enquêtes*.

14 De klassenindeling in vijven is bij de verwerking toegepast. In verband met het geringe aanbod in *NZR* en de overige methoden zijn die uitvoeringspercentages niet berekend.

15 Bij de vooropleiding wordt verwezen naar onder meer HAVO met wiskunde, HBS-B, LO-wiskunde. Bij de nascholing naar methodekeuze-cursussen en Wiskobas-cursussen. Hoog scoren de argumenten 'andere prioriteiten' en 'geen tijd'. Onder de 'andere argumenten' troffen we aan 'ga met de VUT' en 'ik leer het wel van mijn kinderen in het VO'.

16 Van sommige PABO's kunnen meerdere leraren over hetzelfde rooster gerapporteerd hebben. De respons op deze vraag bedroeg 58 van de 68.

17 Materialen en onderwerpen die genoemd werden, zijn: *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken/wiskundeonderwijs*, *Nieuwe Wiskrant*, *Ruimtelijke Oriëntatie* (J. van Kuyk), Basisvorming-programma, *Reken Vaardig*, Meten en metriek, raadsels en puzzels, Islamatica, Mondriaan, Boomhuis, projectieve meetkunde, ruimtemeetkunde, kosmografie en topologie. Het programma van de Vrije Academie stoelt op een andere filosofie dan die van het realistische reken-wiskundeonderwijs en gebruikt eigen materialen.

18 Al deze opmerkingen zijn getranscribeerd, gecodeerd en opgenomen in het *Eindverslag Pimbo-enquêtes*.

19 *Eindverslag Pimbo-enquêtes*, respondent O-009, p. O-22

20 *Eindverslag Pimbo-enquêtes*, respondent O-063, p. O-26

21 *Eindverslag Pimbo-enquêtes*, respondent B-010, p. B-17

22 *Eindverslag Pimbo-enquêtes*, respondent B-028, p. B-18

23 *Eindverslag Pimbo-enquêtes*, respondent B-033, p. B-19

24 *Eindverslag Pimbo-enquêtes*, respondent L-098, p. L-13

25 *Eindverslag Pimbo-enquêtes*, respondent L-106, p. L-14

26 *Eindverslag Pimbo-enquêtes*, respondent L-194, p. L-13

Noten D4

1 Voor een leerlijn oppervlakte wordt verwezen naar leerplanpublikatie 7, waarin verschillende trajecten beschreven staan (Ter Heege en De Moor, 1977). De realistische methoden hebben hiervan in het algemeen gebruik gemaakt. Het meten van oppervlakte en in-

houd kan gerelateerd worden aan de volgende specifiek meetkundige aspecten:
- naamgeving van vlakke figuren
- vergelijken van figuren naar aanleiding van natuurlijke grootheid (gewicht, prijs, ...)
- belang van handelende fase (knippen, beleggen, ...)
- (mentaal) omstructureren van figuren
- completeren van figuren
- gebruikmaking van symmetrie
- gebruikmaking van structuren (roosters, patronen, ...)
- vinden van hulplijnen voor omstructureren
- vergroten en verkleinen op roosters
- omtrek oppervlakte en inhoud in samenhang
- cirkel; omtrek en oppervlakte.

Ook zij opgemerkt dat binnen het domein meten van tal van meetkundige modellen en vaardigheden gebruik gemaakt wordt, waardoor een verbinding met de meetkunde gelegd kan worden.

2 Onder een meetkundewerkhoek verstaan we dat op een of andere wijze gestalte wordt gegeven aan het idee dat naast het reguliere onderwijs ook mogelijkheden bestaan om individueel of in tweetallen zelfstandig opdrachten uit te voeren of onderzoek te doen. In die zin is het een hernieuwd pleidooi voor een wiskundewerklokaal. Alhoewel er van dit idee, dat al in de jaren zestig werd gelanceerd, in de praktijk over het algemeen weinig is terechtgekomen, willen we het nu toch opnieuw onder de aandacht brengen. Ons inziens biedt juist de meetkunde, maar ook het meten, een mooie gelegenheid om een dergelijke 'werkhoek' in te richten. Hierbij kan ook tegemoetgekomen worden aan het differentiatieprincipe, zowel voor de zwakkere als voor de betere leerlingen.
Voor de meetkunde zouden wij willen pleiten voor de aanwezigheid van
- allerhand meetkundige opdrachten
- relevante op niveau aangepaste informatie
- meetkundige modellen en materialen om modellen te maken
- instrumenten als passers, linialen, hoekmeters, spiegels, pantograaf, spirograaf, ...
- computer met meetkundig tekenprogramma
- tekenmaterialen, ...
- constructiematerialen, ...

3 Twee aangeschrevenen hebben de vragenlijst niet geretourneerd wegens tijdgebrek. Twee hebben mondeling meegedeeld niet op een dergelijk voorstel en de wijze van bevraging in te kunnen gaan. De 17 respondenten zijn: J. van den Brink (leerplanontwikkelaar, onderzoeker), K. Buijs (leerplanontwikkelaar, methodenschrijver), H. van Die (inspecteur), W. Faes (PABO-docent, leerplanontwikkelaar), E. Feijs (onderzoeker, leerplanontwikkelaar), F. Goffree (onderzoeker, leerplanontwikkelaar, methodenschrijver), H. ter Heege (onderzoeker, leerplanontwikkelaar), S. Huitema (PABO-docent, schoolbegeleider, methodenschrijver), A. Kolste (inspecteur), A. Lek (schoolbegeleider, leerplanontwikkelaar, BO-docent), F. Moerlands (leerplanontwikkelaar, methodenschrijver), J. Nelissen (onderzoeker, schoolbegeleider), A. Noteboom (toetsontwikkelaar, methodenschrijver), H. van der Straaten (methodenschrijver, schoolbegeleider, PABO-docent), W. Sweers (leerplanontwikkelaar, methodenschrijver), A. Veltman (PABO-docent, leerplanontwikkelaar, BO-docent) en J. Winnubst (schoolbegeleider, methodenschrijver).

4 In april 1998 heeft onder leiding van de auteur van deze studie een studiedag plaatsgevonden met een aantal auteurs van de methode *Pluspunt*. Onderwerp was meetkunde als programmaonderdeel voor deze methode. Centraal in deze bijeenkomst stond het hier besproken programmavoorstel. Ook hier bleek instemming met de gedachte van de niveauindeling. Verder is gebleken dat deze auteursgroep het voorstel als een inspirerend en praktisch document kon gebruiken. Er werd vooral gezocht naar een zodanige organisatie van het onderwijs dat regelmatig aandacht aan meetkunde geschonken zou worden. Zo

kwam het idee naar voren om in plaats van één les per veertien dagen bijvoorbeeld tweemaal per week een kwartier in te ruimen, gekoppeld aan de rekenles. Dit om het overslaan te bemoeilijken.

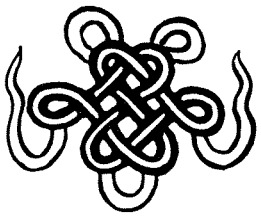
Noten D5

1 Aan het rapport van de International Association for the Evaluation of Educational Achievement uit1975 Mathematics Achievement in the Primary School Years: *IEA's Third International Mathematics and Science Study*, in de wandeling het derde TIMMS-onderzoek genoemd, ontlenen we het volgende:
   - Van de 25 deelnemende landen blijkt dat bijna in alle gevallen de resultaten van de jongens op 'mathematics overall' in 'fourth grade' (groep 6) beter zijn dan die van de meisjes. Alleen in Korea en Nederland zijn die verschillen significant.
   - Voor Nederland blijkt er ook een significant verschil voor de meetkunde (73-69) te bestaan ten gunste van de jongens. Opvallend is echter dat in 19 landen de scores gelijk of beter zijn voor de meisjes, maar slechts in één geval significant (Nieuw Zeeland: 64-49).

2 Persoonlijke ervaring van de auteur met nascholing over meetkunde van een basisschoolteam in Amsterdam in 1997 heeft dit vermoeden versterkt. Vrijwel alles wat aan de orde kwam, was volledig nieuw voor de deelnemers. Het enthousiasme over de mogelijkheden voor realistische meetkunde als vak voor de basisschool was echter groot.

DEEL E

Slotbeschouwingen



Waar bleef wel de meetkund'ge, die begon
Zijn gouden werkstuk ginds te construeeren?
Hij liet een paar reusacht'ge teekenveeren
Achteloos liggen op de horizon.

Wat cirkelboog en punt daarbuiten leeren,
Neergezet, scherp, met heldergeel crayon
Op effen vlak van blauwig grijs carton,
Staat in het oost de nacht te mediteeren.

En langzaam, langzaam om onzichtbare as
Wentelen rond in grootsch balancement
De wereldstolpen van gespikkeld glas.

'K hoor – Ja! nu weet ik 't: 't was Puthagoras,
Van sferenharmonie de dirigent,
Teek'naar van sterrepunt en maansegment.

(Adwaita, 1918)

E1 Historische opbrengsten
beantwoording van de onderzoeksvragen 1 – 5

In dit hoofdstuk worden de eerste vijf onderzoeksvragen aan de orde gesteld. Met de beantwoording van de vragen ontstaat een samenvattend overzicht van het historische gedeelte van dit onderzoek. Voor uitgebreider informatie over de verschillende periodes verwijzen we naar de samenvattingen aan het eind van de delen A, B en C. Onderzoeksvraag 6 is al aan het eind van deel D besproken.

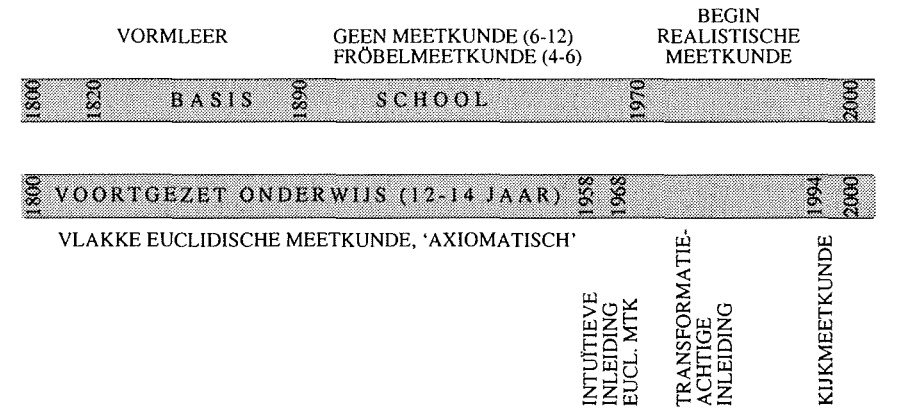
Onderzoeksvraag 1

Welke constanten en veranderingen zijn waarneembaar in deze historie in de aard en inhoud van het meetkundeonderwijs?

In de gestileerde tijdbalk van figuur E1.1 is de ontwikkeling voor de Nederlandse situatie weergegeven. Hieruit wordt duidelijk dat globaal gezien de volgende perioden zijn te onderscheiden:

kleuter- en lager onderwijs (vier- tot twaalfjarigen):
- 1820-1890: vormleer
- 1890-1970: geen meetkunde; ontstaan fröbelmeetkunde (vier tot zes jaar)
- 1970: begin van realistische meetkunde

voortgezet onderwijs (twaalf- tot veertienjarigen):
- 1800-1958: vlakke euclidische meetkunde, uitgaande van axioma's
- 1958-1968: intuïtieve inleiding in de vlakke euclidische meetkunde
- 1968-1994: niet-axiomatische transformatie-achtige inleiding
- 1994 → : kijkmeetkunde



figuur E1.1: Vormleer en meetkunde in het Nederlandse onderwijs (1800-2000)

In de *Elementen* van Euclides (circa 300 voor Christus) werd meetkunde als eerste discipline van onderzoek wetenschappelijk gefundeerd. Het vak kreeg een deductieve structuur door de aristotelische logica, waardoor de meetkunde zelf hét oefengebied voor leren deduceren werd. Zo heeft meetkunde meer dan tweeduizend jaar gefungeerd als een propedeuse voor de filosofie. Dit verklaart waarom er buiten de meetkunde geen schoolvak in de historie is aan te wijzen dat zo in haar ontwikkeling gedomineerd is door de wetenschappelijke betekenis van het vak. Door de eeuwen heen is voor het voortgezet onderwijs dan ook vastgehouden aan de traditie van de euclidische aanpak. Clairaut (1713-1765), die in het midden van de achttiende eeuw een aanschouwelijke, op praktische, landmeetkundige principes gebaseerde inleiding in de meetkunde liet verschijnen, kon de traditie van de euclidische aanpak niet verdringen.

Ook in Nederland bleef tijdens de negentiende eeuw de traditionele euclidische aanpak dominant, zij het dat er vormverschillen en accentverschuivingen in de schoolboeken optraden (Smid, 1997). Pas in 1958 werd er in Nederland officieel toe overgegaan het aanvankelijk meetkundeonderwijs met een intuïtieve inleiding te starten, waarbij niet direct van een logisch-deductieve opbouw gebruik werd gemaakt. Met de komst van de New Math in 1968 verdween de euclidische meetkunde geheel. Wel probeerde men iets van formele logica te introduceren.

In het begin van de jaren negentig keerde meetkunde terug in het programma van het voortgezet onderwijs. In deze kijkmeetkundige opvatting wordt weer aangesloten bij de traditionele meetkunde, maar in een geheel andere vorm en met een ander doel. Zoals meetkunde ooit is ontstaan vanuit praktische landmeetkundige en astronomische problemen, wordt ook nu weer aangesloten bij verschijnselen uit de realiteit.

Voor de wetenschappelijke ontwikkeling van de meetkunde, zoals de systematisering van de projectieve meetkunde, de ontdekking van de niet-euclidische meetkunden, de meetkunde als studie der transformaties en de fundering van de axiomatiek van de euclidische meetkunde, was de negentiende eeuw een gouden tijdperk. Geen van deze ontwikkelingen heeft in die tijd invloed op de schoolmeetkunde gehad. Pas in de jaren van de New Math zou Kleins *Erlanger Programm* van 1872 actueel worden voor het onderwijs.

De euclidische traditie met haar geloof in de vormende waarde was en bleef tot het midden van de twintigste eeuw het vaste richtsnoer voor het onderwijs. De pogingen tot veranderingen voor het aanvangsonderwijs in de meetkunde kwamen aan het einde van de negentiende eeuw niet uit de wiskundige ontwikkelingen zelf voort, maar uit de pedagogische en psychologische wetenschappen.

Inhoudelijk gezien, kan voor het begin van de meetkunde in het voortgezet onderwijs tot 1968 dan ook nauwelijks van grote veranderingen gesproken worden. De inhoud lag per traditie vast: begonnen werd met definities en axioma's, waarbij het

parallellenaxioma de didactische adder was.

Er zijn geen doorslaggevende aanwijzingen dat de plotselinge inhoudelijke omslag van 1968 terug te voeren is op een eerdere, latente vernieuwingsdrang, zoals dat bij vrijwel alle wetenschappelijke, maatschappelijke en onderwijskundige veranderingen het geval is. Wel valt een zeker parallellisme op met de algemene maatschappelijke omwentelingen van de jaren zestig. De revolutionaire omslag van de New Math moet wellicht verklaard worden als een reactie op oude waarden, waarbij de verantwoordelijke voortrekkers een blind geloof hadden in de nieuwe wiskunde, de leerpsychologie en de technologische ontwikkelingen. Zeker is dat de vernieuwingen niet ontstaan zijn vanuit het praktische onderwijs, maar van bovenaf geïnduceerd zijn. Het lijkt een proces van 'groupthink' geweest te zijn: een aantal vooraanstaande wetenschappers heeft – zonder voldoende onderzoek en experimenten, maar vooral zonder consensus met de werkers in het veld – de New Math er in het onderwijs doorgedrukt.

Geheel anders waren de veranderingen vanaf het midden van de jaren zeventig, toen de kijkmeetkunde voor het VO ontstond. Deze ontwikkelingen dienen allereerst als een reactie op de moderne schoolwiskunde gezien te worden. De inhoud van de kijkmeetkunde stoelde op oude verworvenheden, op de oerfunctie van de meetkunde. Met name het werk van mevrouw Ehrenfest uit de jaren dertig van de twintigste eeuw kon als bron dienen, maar nu met het oog op een geheel andere doelstelling van de schoolmeetkunde: de toepasbaarheid ervan.

Zien we af van de interruptie van zo'n vijfentwintig jaar moderne schoolwiskunde, hetgeen thans als een misstap bestempeld kan worden, dan heeft de algemene inhoudelijke ontwikkelingslijn voor de Nederlandse situatie in het voortgezet onderwijs steeds in het teken van meetkunde als studie van vlak en ruimte gestaan, gebaseerd op de evidente euclidische principes.

Bezien we de historie voor het lager onderwijs, dan moet het logisch-deductieve karakter van de euclidische meetkunde als belangrijkste en terechte reden aangemerkt worden dat deze meetkunde ongeschikt werd geacht voor het lager onderwijs.

Pestalozzi heeft ingezien dat naast de ontwikkeling van taal en rekenen ook het visuele aspect in de cognitieve ontwikkeling een rol speelt. Reden waarom hij de kinderen van jongs af aan op aanschouwelijke wijze met meetkundige begrippen in aanraking wilde brengen. De door hem en zijn leerling Schmid ontwikkelde vormleer heeft in het Duitse taalgebied tijdens de negentiende eeuw een zekere bloei gekend. Maar ook in de vormleer werden de elementaire begrippen – punt, lijn, et cetera – als basis voor de leerstof gekozen, hetgeen tot een nieuw formalisme – met name van de meetkundige combinatoriek – heeft geleid.

De invloed van de Duitse pedagogen, die de vormleer van harte omarmd hadden, is zo sterk geweest dat zij ook in Nederland een verplicht hoofdvak voor het lager onderwijs werd. Gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw werd het echter

meer opgevat als een vak om te leren denken dan als inleiding in de meetkunde.

Nadat Diesterweg in Duitsland de vormleer in een meer praktische richting had geleid, kreeg zij ook in Nederland een wat begrijpelijker en handzamer vorm. Versluys heeft tijdens het laatste kwart van de negentiende eeuw getracht de vormleer om te buigen naar een aanschouwelijke, toepasbare meetkunde. Maar ook hij viel weer terug op een inhoudelijke stofkeuze à la Euclides, hetgeen mogelijk ook bijgedragen heeft aan de mislukte invoering in Nederland.

Fröbel is degene geweest die werkelijk met de euclidisch-synthetische aanpak brak. Hij zag in dat de jongste kinderen al spelenderwijs met concreet materiaal de eerste meetkundige ervaringen kunnen opdoen. Zijn aanpak is een unieke doorbraak geweest in het denken over het meest elementaire meetkundeonderwijs. Vooral door toedoen van Haanstra hebben Fröbels ideeën vanaf het einde van de negentiende eeuw een enorme invloed op het Nederlandse kleuteronderwijs gehad. In het lager onderwijs is echter van een mogelijke voortzetting van de fröbelmeetkunde nooit gebruik gemaakt. Het idee van meetkundig speel-leermateriaal is later veelvuldig nagevolgd. Terwijl in het kleuteronderwijs het meetkundige element rijkelijk aanwijsbaar was, is ten gevolge van de gescheiden ontwikkelingen tussen kleuter- en lager onderwijs de Nederlandse lagere school tot in de jaren zeventig van de twintigste eeuw verstoken gebleven van meetkunde als programmaonderdeel. Pas met de integrale leerplanontwikkeling van het IOWO in de jaren zeventig is dit programmaonderdeel weer in de aandacht gekomen, zowel voor de kleuters als voor de leerlingen van de lagere school.

De historische ontwikkeling van meetkunde voor de basisschool (vanaf vier jaar) wordt gekenmerkt door een zoektocht naar geschikte inhouden, naar motiveringen en methodisch-didactische middelen. Invloed vanuit de wetenschappelijke meetkunde werd voor deze leeftijdsgroep steeds gefrustreerd door de euclidische traditie. Het kernpunt van deze negentiende-eeuwse zoektocht was – in zekere zin in tegenstelling met het VO – dat er voor het lager onderwijs geen basis bestond om op verder te bouwen. Kort samengevat: behalve voor het kleuteronderwijs bestond er geen goede bron van inhouden om uit te putten.

Het euclidische gedachtengoed is de inhoudelijke factor voor het meetkundeonderwijs op alle niveaus geweest en gebleven. Een begrijpelijke constantie, daar de reële ruimte door de evidenties van de uitgangspunten van de euclidische meetkunde bepaald wordt. De manier waarop de inhoud uitgewerkt werd tot onderwijs om de ruimte te 'be-grijpen', heeft echter vele varianten gekend. De uitwerkingen, zo blijkt uit dit onderzoek, waren namelijk afhankelijk van de doelen van het meetkundeonderwijs: algemeen vormend, praktisch toepasbaar of voorbereidend.

Onderzoeksvraag 2

Welke constanten en veranderingen zijn waarneembaar in deze historie in de didactiek?

Bij de historische analyse van de ontwikkeling van de didactiek van het schoolvak meetkunde hebben we in ons onderzoek twee hoofdrichtingen in de didactiek onderscheiden: de *historisch-genetische didactiek*, waarbij de historische ontwikkeling van het vak zelf als leidend didactisch principe voor het leerproces van de leerling wordt gekozen, en de *psychologisch-genetische didactiek*, waarbij de ontwikkeling van het kind, dat zijn eigen kennis en vaardigheden dient te verwerven, uitgangspunt is. Wordt in de eerste richting vooral de (historische) ontwikkeling van de *leerstof* benadrukt, in de tweede opvatting staan de *ontwikkelingsfasen van het lerende kind* centraal.

Clairaut stelde in de inleiding van zijn eerder genoemde boek uit 1765: 'je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie; et j'ai tâché d'en développer les principes, par une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers Inventeurs, observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont necessairement dû faire', waaruit het streven naar vervulling van beide principes blijkt.

Men kan in de genoemde principes Haeckels biogenetische wet (ontogenese als herhaling van de fylogenese) herkennen, die weer haar pendant kent in de psychologische recapitulatietheorie. In zijn studie over de historische ontwikkeling van het genetische principe laat Schubring (1978) zien hoe talloze vooraanstaande wiskundigen, pedagogen en psychologen zich door de tijden heen op een of andere wijze hebben uitgesproken voor een inleiding in de meetkunde, die op een natuurlijke wijze, genetisch in beide betekenissen, vorm diende te krijgen.

Ook in het onderhavige onderzoek wordt deze waarneming bevestigd. In de negentiende eeuw hebben Pestalozzi en Fröbel zich vooral laten leiden door het psychologisch-genetische aspect van de didactiek. In Diesterwegs werk zijn beide aspecten aanwezig, net als bij Versluys in Nederland. Later zijn deze opvattingen, met name het psychologisch-genetische aspect, soms impliciet, ook waarneembaar bij de belangrijkste Nederlandse meetkundedidactici van de twintigste eeuw: Reindersma, mevrouw Ehrenfest, Van Hiele-Geldof, Van Hiele en in zekere zin ook Freudenthal.

Felix Klein wordt in de historie van de didactiek meestal gereleveerd vanwege het belang dat hij hechtte aan de structuur van de wiskunde, in het bijzonder het functiebegrip. Ook hij onderkende de beide aspecten van het genetische principe, maar hij bracht ze niet met elkaar in verbinding, hetgeen wellicht te verklaren valt uit het feit dat hij zich vooral op een hoger niveau met het wiskundeonderwijs bezighield. 'Aber auch höher hinaus verfährt der Lehrer immer genetisch oder genauer gesagt: heuristisch, d.h. er läßt die Knaben das Neue durch geschickt entwickelnde

Fragen nach Möglichkeit selber finden' (Klein, 1907, p. 24, geciteerd bij Schubring, 1978).

Tijdens de eerste helft van de twintigste eeuw raakte het genetische principe in de didactische beschouwingen op de achtergrond, maar juist de ontwikkelingen in de denk- en ontwikkelingspsychologie pasten bij de psychologisch-genetische didactiek. Vooral door het werk van Piaget en Dienes won deze opvatting aan belang. Maar door het geloof dat deze psychologen in de bourbakisten hadden, werd de stof ontleend aan de meest abstracte wiskundige structuren, waarmee het historisch-genetische principe op z'n kop werd gezet. In het werk van de critici op de toenmalige ontwikkelingen, zoals Polya, Thom, Wittmann en Freudenthal, bestaat wel erkenning voor het genetische principe, maar vooral in de historisch-genetische zin.

Afgezien van het feit dat het genetische principe allerlei variaties kende, was het ook een onvolledig en gebrekkig instrument voor de leerplanontwikkeling. Er werd voorbijgegaan aan het feitelijke onderwijsleerproces, waarbij niet eens de eigen activiteit van de leerling ter sprake werd gebracht. Ook leverde het genetische principe geen criteria voor leerstofkeuze. Het is de Britse didacticus Branford geweest die aan de biogenetische opvatting twee belangrijke principes toevoegde: de relatie van begripsontwikkeling en activiteit en de betekenis van samenhang tussen wetenschap, maatschappij en school.

Op grond van onze historische analyse kan gesteld worden dat het genetische principe door die didactici, die een natuurlijke informele inleiding in de meetkunde voorstonden, soms impliciet erkend werd. Uitgesproken tegenstanders voor de Nederlandse situatie waren Dijksterhuis en Schogt, die wilden vasthouden aan een systematische inleiding, gestoeld op de oorspronkelijke euclidisch-wetenschappelijke aanpak. Hoewel ten aanzien van de genetische didactiek in zekere zin van constantie gesproken kan worden, althans bij de vernieuwers, in het algemeen had dit tot de jaren zeventig van de twintigste eeuw weinig effect op de keuze van de leerstof. Mevrouw Ehrenfest en Van Albada ontwikkelden wel andere stof, maar de toepassing daarvan in de praktijk bleef beperkt tot degenen die een voortrekkersrol hadden. Mevrouw Ehrenfest kende ook aan de psychologische ontwikkeling een belangrijke rol toe, zoals tevens in het werk van de Van Hieles tot uiting kwam. Het genetische principe kan echter niet los gezien worden van een aantal andere didactische principes die in de historie van het meetkundeonderwijs een rol gespeeld hebben.

Allereerst de heuristische werkwijze. Deze didactische opvatting, waarbij centraal staat dat de leerling zelf nieuwe begrippen, relaties en structuren verwerft, zelf problemen tracht op te lossen, kent verschillende gedaanten. De variaties bewegen zich tussen de meest klassieke vorm, het socratische leergesprek en die van de constructivistisch-psychologische opvattingen, zoals die de laatste jaren opgeld doen. Daartussen bevindt zich het standpunt van de geleide herontdekking, dat aan Freudenthal wordt toegeschreven.

In verband met het heuristische principe in het meetkundeonderwijs voor het VO in de negentiende eeuw moeten allereerst Diesterweg en Klein genoemd worden. In Nederland was het Versluys die de heuristische werkwijze propageerde, zowel voor het VO als het LO, met name als socratisch leergesprek. Voor de vormleer waren het Van Dapperen, Bouman en Versluys die deze werkwijze aanbevalen, maar meer dan een principiële stellingname was dit niet. In de praktijk werd er namelijk een didactiek van vóór- en nadoen gehanteerd. In de twintigste eeuw beval mevrouw Ehrenfest voor haar zogenoemde systematische cursus aan dat de leerlingen zelf onder leiding van de leraar een systeem van stellingen zouden ontwikkelen. Freudenthal wilde zelfs zo ver gaan dat de leerlingen zelf een axiomasysteem zouden opzetten. Bij alle didactici had het zelf ontdekken een hoge prioriteit. Bos en Lepoeter hadden dit principe zelfs tot methoden van grote zelfwerkzaamheid gesystematiseerd. De aanhangers van de logisch-deductieve richting, zoals Dijksterhuis, zagen niet veel in dit idee van zelfwerkzaamheid. Opnieuw kan gezegd worden dat de heuristische werkwijze voor de progressieve didactici een constant aandachtspunt was, zij het dat ook nu weer verschillende verschijningsvormen waren waar te nemen.

De heuristische werkwijze houdt zelfwerkzaamheid in. Hierbij wordt van de leerling een oorspronkelijke geestelijke activiteit geëist. Naast dit geestelijke activiteitsprincipe kwam aan het einde van de twintigste eeuw ook het meer concrete handelen als activiteitsprincipe in de aandacht. Of eigenlijk al eerder in het kleuteronderwijs van Fröbel, dat sterk activiteitsgericht is. Het waren de Reformbeweging in Duitsland, het in de traditie gegroeide empirisme in Engeland, het 'learning by doing'-principe van Dewey in de Verenigde Staten en het werk van Ligthart in Nederland, die deze trend bepaalden. In Nederland paste Wolda dit toe in zijn meetkundemethode, maar ook mevrouw Ehrenfest, Van Albada, Timmer en Van Hiele-Geldof wezen op het belang van dit didactische principe. In de jaren zestig, ten tijde van de New Math, kreeg het vooral door het Britse Nuffield-project een hernieuwde betekenis. Branford wees al in het begin van deze eeuw op het gevaar dat het leerproces zou kunnen blijven steken in het louter handelen, zonder dat een sprong naar een hoger niveau gemaakt zou worden. Ook nu weer vinden we onder de systematici, zoals Dijksterhuis, geen voorstanders, maar tot in de jaren vijftig van deze eeuw werd door de wiskundeleraren vaak nog geringschattend over 'knippen en plakken' als inleidende meetkundige activiteiten gesproken. Er traden natuurlijk praktische uitvoeringsproblemen op die toepassing van dit principe bemoeilijkten. In de meest gebruikte schoolboeken werd het principe veelal genegeerd. Zelfs in deze tijd bestaat het meeste meetkundewerk, zowel in het BO als in het VO, uit schriftelijke opgaven, zonder gebruikmaking van concrete activiteiten.

Het activiteitsprincipe voor meetkunde is, vooral sinds het begin van deze eeuw, onder de constante aandacht van de didactici geweest. Uit de ontwikkelingsgeschiedenis blijkt verder dat ook thans dit principe als een belangrijke voorwaarde van het

meetkundeonderwijs wordt erkend, maar dat ook het *mentale handelen* als hogere doelstelling wordt nagestreefd.

De negentiende eeuw kan beschouwd worden als het tijdperk van de acceptatie van het principe van de aanschouwelijkheid in het onderwijs. Het is een van de grote verdiensten van Pestalozzi en zijn leerlingen geweest dat dit principe voor verschillende vakken van onderwijs ook praktisch is uitgewerkt. Voor vrijwel alle didactici van de negentiende en de twintigste eeuw, ook voor Dijksterhuis, was het duidelijk dat het aanvankelijk meetkundeonderwijs noodzakelijkerwijs een aanschouwelijke component behoefde. We kunnen in dit opzicht van een constant historisch gegeven spreken, echter ook nu weer zijn de opvattingen daarover sterk uiteenlopend geweest. Allereerst was daar de vraag welke stellingen in een deductieve opbouw op grond van aanschouwing zonder meer geaccepteerd konden worden en vervolgens of deze acceptatie later via een meer axiomatische methode in een logisch-deductief systeem gevat dienden te worden. Ook speelde de vraag op welk tijdstip men met een aanschouwelijke meetkunde kon beginnen en van welke aanschouwingsmiddelen men gebruik zou maken. Een belangrijk punt in deze ontwikkeling was dat er in de meetkunde ook van het begrip beweging gebruik gemaakt kon worden. De kernvraag was daarbij tot in hoeverre en tot welk tijdstip in de ontwikkeling van de leerling men nog van het 'ik zie het zo'-principe van Freudenthal gebruik mocht maken.

Een ander aspect van de ontwikkeling van het aanschouwelijkheidsprincipe was de ontdekking van het *visualiseren* als krachtig didactisch hulpmiddel. Op zeker moment, in de jaren zeventig, werd hierom meetkunde zelfs als vak gemotiveerd. In navolging van mathematiseren als kernactiviteit van de wiskunde werd toen ook gesproken van leren *geometriseren*.

Kortom, het principe van de aanschouwelijkheid in het meetkundeonderwijs, zowel voor het BO als VO, is gedurende de negentiende en twintigste eeuw een constant aandachtspunt geweest ter verbetering van de didactiek. De interpretatie en toepassing van het principe zelf zijn echter aan verandering onderhevig geweest.

Samenvattend, de laatste tweehonderd jaar meetkundeonderwijs overziend, kan het volgende geconstateerd worden:

- er is een continue ontwikkeling te zien in het didactisch denken
- de voortgang in het didactisch denken was in het algemeen voorbehouden aan enkele wetenschappers en practici
- de principes van genetische ontwikkeling, heuristische werkwijze, het activiteitsbeginsel en de aanschouwelijkheid blijken constanten in de historie van de didactiek
- de didactische principes zelf worden ook verder ontwikkeld en verfijnd en vinden langzamerhand ingang in het onderwijs.

Onderzoeksvraag 3

Welke constanten en veranderingen zijn waarneembaar in deze historie in de doelstellingen?

De geschiedenis van de doelstellingenproblematiek van het meetkundeonderwijs wordt hoofdzakelijk beheerst door het vraagstuk van de vormende waarde en door de vraag naar de toepasbaarheid. De meetkunde is als een praktische hulpwetenschap ontstaan, maar de vroege wetenschappelijke systematisering heeft geleid tot het idee dat meetkunde onderwezen diende te worden als oefening tot logisch leren denken. Deze opvatting komt voor de negentiende en de eerste helft van de twintigste eeuw als een vrijwel constant gegeven uit ons historisch onderzoek naar voren. Gedurende de negentiende eeuw werden de wiskunde, in het bijzonder de meetkunde, en de klassieke talen beschouwd als de onderwijsvakken die bij uitstek geschikt waren tot oefening van het denkvermogen. Althans voor de Latijnse school en later voor het Gymnasium, hoewel men ook daar weer in dit opzicht de klassieken boven de wiskunde stelde. In de tweede helft van de negentiende eeuw werd ook op de HBS de wiskunde vanwege haar vormende waarde gemotiveerd, maar tevens werd toen ook het argument van de praktische waarde gehanteerd. De argumenten voor de vormende waarde waren op geen enkele wijze empirisch onderbouwd en werden door de gezaghebbende geleerden en bestuurders eenvoudigweg aan de klassieke wetenschappelijke traditie ontleend. De praktische waarde werd voornamelijk gemotiveerd als hulpwetenschap voor de natuurwetenschappen.

Ook voor de vormleer van de eerste helft van de negentiende eeuw gold de vormende waarde als de voornaamste doelstelling. Maar in die tijd werden voor de vormleer ook de argumenten van leren aanschouwen, leren spreken, leren tekenen, esthetische ontwikkeling en voorbereiding op de meetkunde genoemd, die ontleend werden aan het denken van Pestalozzi. Net als in het VO werd de vormleer gedurende de tweede helft van de negentiende eeuw hoofdzakelijk gemotiveerd als praktisch vak van aanschouwelijke meetkunde. Aan de vormende waarde werd toen niet zoveel aandacht meer besteed, wel aan leren tekenen, construeren van en meetkundig rekenen aan meetkundige figuren.

De doelen van het fröbelonderwijs waren in eerste instantie op de persoonlijke ontwikkeling van het jonge kind gericht. De toepassing van het meetkundige speelleermateriaal beoogde weliswaar ook cognitieve doelen, doch de zuivere fröbelfilosofie stond vooral in het teken van een hoger doel, namelijk opvoeding tot een harmonieuze en geestelijke houding. Maar ook Fröbel was overtuigd van de vormende waarde van de wiskunde. In de later meer praktische uitwerkingen van het fröbelonderwijs zijn de cognitieve doelstellingen nooit doorgetrokken naar de verdere ontwikkelingsfasen van het lerende kind.

Hoewel toonaangevende wiskundigen en pedagogen aan het eind van de negen-

tiende eeuw de basis legden voor een meer toepassingsgericht wiskundeonderwijs, bleef de doelstelling van de vormende waarde in de eerste helft van de twintigste eeuw de toon aangeven. Klein benadrukte beide aspecten, maar in de praktijk van het VO bleef de vormende waarde als belangrijkste argument gehanteerd. De meest fervente voorstanders in Nederland waren H.J.E. Beth en Dijksterhuis. Maar ook mevrouw Ehrenfest, met haar praktisch-getinte propedeutische cursus, hield de vormende waarde als uiteindelijk doel voor ogen. Haar openbare discussie met Freudenthal in de jaren vijftig heeft daarin geen verandering gebracht. Noch Freudenthal als tegenstander van de vormende waarde, noch mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis als voorstanders hadden echter steekhoudende, harde argumenten voor hun standpunten. De doelstellingen bleven hoofdzakelijk gebaseerd op argumenten van traditie, persoonlijk geloof en wetenschappelijk vertrouwen. Opmerkelijk is overigens dat Freudenthal zijn standpunt in de jaren tachtig hierover radicaal wijzigde.

Rond de jaren dertig van deze eeuw begon zich een andere betekenis van de wiskunde aan te dienen. De toepasbaarheid in maatschappelijke en technische zin werd meer manifest. Steeds sterker kwam het maatschappelijk nut van de wiskunde en het wiskundeonderwijs in de aandacht. De kritiek op het aanvankelijk meetkundeonderwijs nam toe en in pedagogische kringen werd getwijfeld aan het argument van de vormende waarde. Deze beweging zette zich in de jaren vijftig voort. Daarna is het argument van de vormende waarde geheel uit de officiële doelen van het Nederlandse meetkundeonderwijs verdwenen.

Tijdens de New Math-periode van de jaren zestig werden de doelstellingen voor het meetkundeonderwijs afgeleid uit de wiskunde zelf. De euclidische meetkunde werd nu opgevat als de studie van invarianties onder bepaalde transformatiegroepen. Het belangrijkste doel was nu niet meer het krijgen van en het toepassen in het systeem zelf, maar inzicht verwerven in de specifieke groepsstructuur als algemeen ordenend principe van de wiskunde. Deze opvatting was een totale omkering van het genetische principe en heeft uitsluitend dienst gedaan als formele verantwoording van de protagonisten van het zuivere structuralisme.

Terzelfder tijd werd vanuit de opkomende onderwijskunde begonnen met het onderzoeken en beschrijven van doelstellingen als een belangrijke wetenschappelijke bezigheid. Met name vanuit de behavioristische opvattingen leidde dit tot zeer gespecificeerde doelstellingenoverzichten. De mogelijkheid tot het creëren van een omvattende onderwijsfilosofie, die juist voor de wiskunde zo nodig was, kon hierdoor gefrustreerd worden. Maar in Nederland heeft deze werkwijze, op een enkele interne poging na, voor de wiskunde – in het bijzonder voor de meetkunde – nooit voet aan de grond gekregen.

Wat ontbrak was een fundamentele filosofie voor het wiskundeonderwijs, waaraan de uitgangspunten en doelstellingen ontleend konden worden. In het midden van de jaren zeventig heeft Treffers voor het reken-wiskundeonderwijs op de basis-

school zijn model van de driedimensionale doelbeschrijving gepresenteerd. Deze manier van doelbeschrijving maakte het mogelijk op verantwoorde wijze de keuze van leerstof en didactiek te motiveren. Hoewel de vormende waarde als zodanig in dit model niet voorkomt, vertoont vooral het aspect van de persoonlijke ontwikkeling als een algemeen permanent na te streven doel grote overeenkomst met de vormende waarde in engere zin. Naast de persoonlijke ontwikkeling, worden als integrale doelen de sociale betekenis, de voorbereidende waarde en de maatschappelijke relevantie onderscheiden. In het laatste ligt ook de praktische waarde opgesloten. Ook voor de meetkunde op de basisschool konden hiermee de motiveringen onderbouwd worden. Daar in de doelstellingen van de derde dimensie juist de hogere procesdoelen aan de orde komen, kon aan de meetkunde – als vak waarin 'problem solving' centraal staat – een nieuwe motivering toegevoegd worden.

De praktische waarde van de meetkunde is in de loop der ontwikkelingsgeschiedenis vaak verschillend geïnterpreteerd. Het kon betekenen dat men het geleerde binnen het vak kon toepassen ten behoeve van het oplossen van vraagstukken, maar ook dat het geleerde toepasbaar zou zijn in andere, verwante, schoolvakken als de mechanica, natuurkunde, scheikunde of kosmografie. Dat meetkunde ook bruikbaar kon zijn voor realistische toepassingen werd wel beseft, maar tot zo'n vijfentwintig jaar terug lukte het niet hieraan vorm te geven. Men volstond met verwijzingen naar technische vakken, zoals bouwkunde, geodesie en astronomie, waarin meetkundige vaardigheden een rol spelen.

Sinds de acceptatie van Freudenthals opvatting, van oorsprong steunend op de ideeën van mevrouw Ehrenfest, dat de echte of voorgestelde realiteit als uitgangspunt voor het onderwijs gekozen zou moeten worden, hebben de doelstellingen voor het meetkundeonderwijs een geheel andere betekenis gekregen. Sinds de jaren zeventig werd het hoofddoel van het meetkundeonderwijs, zowel voor de basisschool (vanaf vier jaar) als voor de basisvorming (tot vijftien jaar), *'het be-grijpen van de ons omringende ruimte'*. De ruimtelijke verschijnselen en hun verklaringen werden echter niet alleen als doel achteraf gekozen, maar juist ook als vertrekpunt van het onderwijsleerproces. Het historisch-genetische principe werd dus opnieuw toegepast, maar kreeg een moderne uitvoering. Er werden voor het eerst zinvolle problemen op elementair niveau geconstrueerd die tot de realiteit van het lerende kind behoorden. Hierdoor kreeg ook het psychologisch-genetische principe een nieuwe betekenis. Het is deze fenomenologische opvatting van de meetkunde die het gezicht van het meetkundeonderwijs radicaal heeft veranderd. Betrekken we ook de meest recente ontwikkelingen voor de bovenbouw van het VO in deze beschouwing, dan blijkt dat daar tegenwoordig het logisch-deductieve redeneren aan de hand van meetkundige problemen als doel nagestreefd wordt.

Inhoudelijk zijn de doelstellingen thans als volgt globaal in te delen. Verwerven van noties, meetkundige begrippen en relaties aan de hand van realistische ver-

schijnselen (basisschool), eerste systematisering en verwerving van fundamentele begrippen via de kijkmeetkunde (basisvorming), logisch-deductieve verdieping (bovenbouw VO).

Kort samengevat is de historie van de motivering van het meetkundeonderwijs voor de laatste twee eeuwen beheerst door enerzijds de vormende waarde, en wel in de meest brede opvatting, anderzijds door de praktische waarde. Onderbouwing met harde argumenten ontbrak, de argumentatie gebeurde veelal 'ex cathedra'. Grofweg is de dominantie van één van beide afwisselend met periodes van circa vijftig jaar waar te nemen: 1800-1850 (vormende waarde), 1850-1900 (praktische waarde), 1900-1950 (vormende waarde), 1950-2000 (praktische waarde).

Onderzoeksvraag 4

Hoe zijn de processen verlopen die tot officiële invoering c.q. afschaffing van de vormleer/meetkunde hebben geleid?

De introductie van de vormleer in de eerste helft van de negentiende eeuw is een aangelegenheid van enkelingen geweest, die gericht en bewust door de centrale overheid werd gesteund. Prinsen heeft het werk van Pestalozzi onder de aandacht van de Nederlandse pedagogen en de overheid gebracht. Door zijn invloedrijke positie en door zijn goede connecties met de algemeen hoofdinspecteur Van den Ende kon zijn leerling Van Dapperen korte tijd bij Pestalozzi verblijven. De pestalozziaanse leer en daarmee ook de vormleer heeft de Nederlandse pedagogiek van de eerste helft van de negentiende eeuw sterk beïnvloed. De overheid werkte hieraan mee door de verspreiding van het vertaalde werk van Pestalozzi onder de inspectie en onderwijzersgezelschappen. Ook in het door de overheid uitgegeven onderwijsblad *Bijdragen* werd het gedachtengoed van Pestalozzi aangeprezen. De latere hoofdinspecteur Wijnbeek heeft de vormleer ook sterk gepropageerd, net zoals de eerste inspecteur van het middelbaar onderwijs Steyn Parvé. Ondanks het feit dat sommige regionale inspecteurs melding maakten van onvrede bij de onderwijzers, vonden werkelijke discussies niet plaats. Wel leidde dit tot debatten in de Tweede Kamer, waar rond 1850 verschillende afgevaardigden zich tegen de vormleer uitspraken. Maar desondanks werd de vormleer in 1857 tot verplicht hoofdvak van het lager onderwijs gesteld. Waarschijnlijk omdat de regering toen meende dat er enige vormende waarde van het vak uitging.

Door het werk van Brugsma en Bouman werd een duidelijker beschrijving van aard en functie van de vormleer tot stand gebracht, die stoelde op het werk van Diesterweg. De onwil in het onderwijs, die hoofdzakelijk door de inspecteurs tot uiting gebracht werd, bleef echter voortduren. Maar de leidende pedagogen bleven vasthouden aan de vormleer, nu ook gesteund door het argument van de praktische en de voorbereidende waarde. Met name Versluys heeft zich hiervoor beijverd. Bij de

wetswijziging van 1878 deed zich het verschijnsel voor dat de vormleer afgeschaft dreigde te worden, maar ondanks veel oppositie overleefde het vak. Het is mogelijk dat de sterk op het onderwijs betrokken inspecteur Moens, die tevens kamerlid was, hierin een belangrijke rol heeft gespeeld. Van een weloverwogen argumentering van regeringszijde was geen sprake.

Na het midden van de negentiende eeuw dienden zich tijdens de nationale industriële revolutie maatschappelijke hervormingen aan, die niet alleen voor het onderwijs in het algemeen, maar ook voor de plaats van de vormleer daarin van doorslaggevende aard zijn geweest. Enerzijds ontstond behoefte aan een meer technisch en pragmatisch gericht onderwijs, waarin ook het tekenen een plaats diende te hebben. Anderzijds was het wederom een kleine groep van bevlogenen, die de ontwikkeling van het esthetische element in het onderwijs nastreefde. Doordat deze groep zich ook als vereniging manifesteerde, werd – gevoegd bij het verlangen uit industriële kringen – maatschappelijke druk op het beleid veroorzaakt. Ten slotte was het ook nu weer een hooggeplaatst ambtenaar in de persoon van De Stuers, die zijn invloed deed gelden ten behoeve van de invoering van het vak tekenen in het lager onderwijs. Zonder veel discussie werd derhalve in 1889 de vormleer ingeruild voor tekenen. De voorstanders van de vormleer hadden zich de ernst van de situatie onvoldoende gerealiseerd, zich niet georganiseerd en te weinig ingespannen om bij de verantwoordelijke politici en bestuurders te 'lobbyen'. Maar ze hadden vooral nagelaten de discussie op het niveau van de praktijk van het onderwijs te verhelderen. Met name is aan het gegeven van het tamelijk hoge niveau van de stof te gemakkelijk voorbijgegaan.

Zoals de overheid eerst de feitelijke beslissingen nam tot invoering van de vormleer, zo ook werd op dit niveau over de afschaffing beslist. Een behoorlijke analyse van plaats, aard en functie van het vak heeft daarbij geen rol gespeeld. Hoewel de betekenis van de vormleer tegen het eind van de negentiende eeuw, vooral door het werk van Versluys, een positieve wending had genomen, is het de leidende onderwijsmannen van die tijd niet gelukt dit ook aan de praktiserende onderwijzer duidelijk te maken.

De invoering van het fröbelonderwijs en in het bijzonder daarbinnen het gebruik van het meetkundige ontwikkelingsmateriaal, laat een geheel ander ontwikkelingsproces zien. Ten eerste werd het kleuteronderwijs meer vanuit een sociaal-maatschappelijke bewogenheid geïnitieerd dan vanuit een vooropgezet plan tot ontwikkeling van cognitieve vaardigheden. Verder werd voor het eerst erkend dat het kind door vrij en gebonden spel zijn fysieke en psychische vermogens kon ontwikkelen. De fröbelbeweging vond vooral haar erkenning vanuit de groeiende maatschappelijke onvrede met het vigerende bewaarschoolonderwijs. Elise van Calcar, die hierover de algemene inspectie voerde, werd de Nederlandse protagoniste van het fröbelsysteem,

dat wereldwijd zou aanslaan.

Dat binnen het door Fröbel en zijn leerlingen ontwikkelde programma aan de ruimtelijke oriëntatie zo'n ruime aandacht werd besteed, was van origine niet bedoeld als ontwikkeling van specifiek-cognitieve vaardigheden. In Nederland is het vooral Haanstra geweest, die de meetkundige spelmaterialen verder systematiseerde. Maar met dit werk werd niet aangesloten bij het rekenprogramma van de lagere school, zodat het beperkt bleef tot het spelen op de kleuterschool en daarmee eigenlijk niet de waardering kreeg die het verdiende. Het ontbrak de toenmalige voortrekkers echter ook aan een vakmatige motivering, aan een doelstellingenbeschrijving en aan een didactische inkadering van de 'kleutermeetkunde'. Door de gescheiden werelden van kleuter- en lager onderwijs ontstond er ook geen omvattende onderwijsvisie. Het zou tot ver na de Tweede Wereldoorlog duren voor in de kringen van de kleuterleidsters-opleidingsscholen aandacht besteed werd aan de theorieën van Piaget, waardoor de opvattingen over het leren van de kleuters in een geheel ander licht kwamen te staan. Kortom, het meetkundige aspect van het kleuteronderwijs is een geïsoleerd en onderschat element geweest, althans tot het midden van de jaren zeventig. De redenen daarvoor moeten gezocht worden in de toen nog onbekende mogelijkheden van vroegtijdige aanbieding van speelleermaterialen ter ontwikkeling van ruimtelijke oriëntatie, maar ook in het gebrek aan een zekere wetenschappelijke onderbouwing en ten slotte in de tamelijk geïsoleerde situatie van waaruit het kleuteronderwijs moest opereren.

Het meetkundeonderwijs aan de Latijnse en Franse scholen gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw was gebaseerd op een of andere vorm van de *Elementen* van Euclides. Het vak behoorde tot de traditie van de klassieke opvoeding en was nauwelijks onderhevig geweest aan vernieuwingen. De overheid bemoeide zich niet met de inhoud van de programma's. Noch de wetenschappelijke ontwikkelingen binnen de wiskunde, noch de ontwikkelingen in de pedagogiek hadden invloed op inhoud en didactiek. De boeken voor het (M)ULO vanaf 1857 waren in dezelfde geest, zij het wat aanschouwelijker en wat meer op de vormleer gebaseerd. Voor de HBS, vanaf 1863, werd ook weer uitgegaan van Euclides, zij het dat later de boeken overzichtelijker en beter gesystematiseerd waren, dit vooral door de bemoeienissen van Versluys. Er heeft gedurende de negentiende eeuw dan ook geen fundamentele discussie plaatsgevonden over aard en functie van het meetkundeonderwijs aan de leerlingen vanaf twaalf jaar. Kleins *Erlanger Programm* had alleen invloed op het meetkundeonderwijs kunnen hebben indien uitgegaan was van totaal andere inhouden. De inhoud van het aanvankelijk meetkundeonderwijs bleef tot het eind van de jaren zestig van deze eeuw gebaseerd op Euclides.

Wel dienden zich vanaf het einde van de negentiende eeuw nieuwe ideeën aan voor de didactiek van het aanvankelijk meetkundeonderwijs, zoals deze in de beant-

woording van vraag 2 besproken zijn. Met name de aanschouwelijkheid en het activiteitsprincipe werden de kernpunten van de discussies. In Nederland is het vooral mevrouw Ehrenfest geweest, die vanaf circa 1915 het debat over de didactische vernieuwing op gang heeft gebracht. Haar voorstellen voor een intuïtieve inleiding in de meetkunde hebben echter een lange incubatietijd nodig gehad en zijn jarenlang onderwerp van grondige meningsverschillen geweest. De discussies voltrokken zich aanvankelijk op een niveau dat boven de alledaagse klassepraktijk uitging: aan de ene kant stonden de puristische traditionalisten als Dijksterhuis en Beth, die een epistemisch wiskundeonderwijs voorstonden, aan de andere zijde de vernieuwers als mevrouw Ehrenfest en Reindersma, die van een intuïtieve inleiding wilden uitgaan. In de praktijk bleef het traditionalisme, in een of andere vorm van een euclidische inleiding, gedurende de eerste helft van de twintigste eeuw de orde van de dag bepalen.

Maar in de jaren dertig ontstond op initiatief van mevrouw Ehrenfest een werkgroep, die de voortrekkers van de didactiek in zich verenigde. Deze Wiskunde Werkgroep heeft een sleutelrol gespeeld in de totstandkoming van de eerste modernisering van het wiskundeonderwijs in de jaren vijftig, in het bijzonder in het loslaten van de eis om de meetkunde te beginnen met een logisch-deductieve inleiding. Weliswaar hebben de vakverenigingen van wiskundeleraren deze voorstellen – zij het in iets gematigder vorm – officieel geratificeerd en heeft de overheid die plannen overgenomen en in een KB neergelegd, de feitelijke vernieuwingen moeten toegeschreven worden aan een klein aantal betrokken onderwijsmensen.

De maatschappelijke invloeden op deze vernieuwingen waren geworteld in het ontstaan van de Nieuwe Schoolbeweging, waar niet de leerstof maar het kind centraal stond. In die zin liepen de wetenschappelijke ontwikkelingen in de denk- en ontwikkelingspsychologie hiermee parallel, zij het dat deze onderzoeken voor het praktische onderwijs weinig betekenis hadden. Ook waren de ontwikkelingen van de wiskunde zelf van weinig invloed. Wel wilden de puristische traditionalisten zich baseren op het meetkundig grondslagenonderzoek van Hilbert en trachtte mevrouw Ehrenfest de niet-euclidische meetkunden onder de aandacht te brengen, maar dit bleken te hoog gegrepen pogingen en utopistische ideeën.

Zolang als het voorspel tot een kleine verandering duurde, zo plotseling diende zich de New Math in de jaren zestig aan. Nu hadden geen discussies vooraf plaats gevonden, maar sloeg een plotselinge mondiale vernieuwingsgolf ook over naar Nederland. De oorzaak wordt vaak gezocht in het politiek-maatschappelijke feit van de lancering van de Russische Spoetnik in 1956, waardoor men in de Verenigde Staten dacht een vermeende technische achterstand op de Russen door middel van ingrijpende onderwijshervormingen te kunnen inhalen. Zeker is dit niet, maar enige invloed zal dit effect wel gehad hebben. Er ontstond in die tijd ook een wetenschappelijke ontmoeting

tussen de wiskunde van Bourbaki en de psychologie van Piaget, Bruner en Dienes. Men vond elkaar in het begrip wiskundige structuur, waarvan het verwerven door de psychologen als de kern van het leren werd opgevat. Op geen enkel moment in de door ons bestudeerde geschiedenis is de invloed van de wetenschappelijke en maatschappelijke ontwikkelingen zo geprononceerd geweest als bij deze vernieuwing. In Nederland werd deze beweging door een aantal hoogleraren in de wiskunde gesteund en opnieuw werkte de overheid mee: nu werd de CMLW ingesteld, die zich aanvankelijk zou richten op de verspreiding van de New Math in het VO.

Tegelijkertijd importeerden de uitgevers moderne buitenlandse wiskundemethoden, die voor de Nederlandse markt bewerkt werden. Het VO raakte in de greep van het 'modernisme' zonder dat veel kritiek geuit werd. Met het aanvankelijk meetkundeonderwijs op basis van Euclides was het in één klap gedaan toen in 1968 een nieuw wiskundeprogramma voor het VO verplicht gesteld werd. Al spoedig bleek echter dat er een te zwakke praktische basis bestond voor deze revolutionaire hervorming.

Met name voor het basisonderwijs wilde een aantal wiskunde- en pedagogiekleraren van de kweekscholen een wat voorzichtiger koers varen, hetgeen resulteerde in de Wiskobas-beweging. Door de instelling van het IOWO kon hier vanaf 1971 professioneel aan gewerkt worden. Tevens startte men daar met de plannen voor een longitudinaal leerplan van vier tot achttien jaar voor het wiskundeonderwijs.

De overheid schiep in die jaren niet alleen voorwaarden voor professionele leerplanontwikkeling (later in de SLO gecentreerd), maar tevens voor onderzoek, verzorging (begeleiding en toetsontwikkeling) en nascholing van het onderwijs. Omdat ontwikkeling, onderzoek en (na)scholing binnen het IOWO in één instituut vertegenwoordigd waren, ontstond een wijze van leerplanontwikkeling die zowel praktisch als wetenschappelijk onderbouwd was. Deze werkwijze, later ontwikkelingsonderzoek genoemd, heeft zich tot de dag van vandaag in het Freudenthal Instituut voortgezet.

Binnen de IOWO-groep van de jaren zeventig kregen de ontwikkelingen een brede basis, waarbij zowel de vakmatige, de didactische, de psychologische als de onderwijskundige aspecten van het wiskundeonderwijs betrokken werden. De historische verworvenheden werden niet uit het oog verloren, terwijl vooral de maatschappelijke waarde van de wiskunde een nieuwe betekenis kreeg in het onderwijs. Onder leiding van Freudenthal werd wiskunde als menselijke activiteit, gedragen door de realiteit van alledag – het belangrijkste inhoudelijke uitgangspunt voor de leerplanontwikkeling. Het didactische uitgangspunt was dat gelegenheid gecreëerd diende te worden voor eigen of geleide (her)ontdekking van structurele inzichten, terwijl fundamentele vaardigheden niet verwaarloosd mochten worden. Hiermee ontstond het 'realistische wiskundeonderwijs', zoals Treffers het later betitelde, dat het totale wiskundeonderwijs anno 2000 domineert.

Specifiek voor het meetkundeonderwijs ontstond vanuit het realisme een nieuwe aanpak, zowel inhoudelijk, didactisch als methodisch. De ideeën kwamen vooral voort uit de denktank van de groep, waarbij door degenen, die de oude waarden zoals die van mevrouw Ehrenfest kenden, ook het waardevolle van de meetkundige traditie nieuw leven werd ingeblazen. Door praktische uitvoering in de klassenpraktijk, door directe publicatie en door raadplegingsrondes van het onderwijsveld, werd een zekere democratische wijze van onderwijsontwikkeling gewaarborgd.

Bijzonder was de werkwijze dat getracht werd leerlijnen op te stellen, die vanaf de kleuterschool tot aan de universiteit moesten doorlopen. Hoewel niet gezegd kan worden dat dit voor het meetkundeonderwijs ook geëffectueerd is, heeft de meetkunde, zowel in de methoden voor het BO als voor het VO, thans wel een realistisch karakter. Er ontbreekt echter een longitudinale lijn. In het bijzonder is de aansluiting tussen BO en VO problematisch.

Naast de reeds bestaande vakvereniging voor wiskundeleraren NVvW ontstond aan het begin van de jaren tachtig de NVORWO, de vakvereniging voor reken-wiskundedidactici. Deze vereniging ging als platform fungeren voor alle betrokkenen voor rekenen-wiskunde op de basisschool en de basisvorming. Op instigatie van deze verenigingen gaf de overheid in het begin van de jaren negentig de opdracht aan de SLO en het FI om een nieuw programma voor de leerlingen van twaalf tot zestien jaar te ontwikkelen. Hierin kreeg de realistische meetkunde een groot aandeel.

De innovatie van de realistische meetkunde op de basisschool vond in praktische zin plaats via de nieuwe schoolboeken in de jaren tachtig. In het midden van de jaren tachtig vond een raadpleging van het veld plaats over de gewenste einddoelen voor het BO, waarbij ook de meetkunde onderwerp van discussie was. Inmiddels had de overheid het voortouw genomen tot opstelling van eindtermen voor BO en basisvorming (tot vijftien jaar). In 1993 zijn de voorlopige eindtermen zowel voor de basisschool als de basisvorming gepubliceerd. In de kerndoelen voor het BO is ook meetkunde opgenomen. Het heeft echter weinig gescheeld of de daarvoor verantwoordelijke commissie had de meetkunde uit de kerndoelen geschrapt. Pas na persoonlijke overreding is het gelukt dit domein voor het BO verplicht gesteld te krijgen. Inmiddels is het domein ook onderwerp geworden in de eindtoets BO van het Cito. Voor het VO zijn de doelen voor meetkunde omschreven als kijkmeetkunde.

Er ontstaat uit het voorgaande een weinig constant beeld van de wijze waarop beslissingen in de processen van ontwikkeling van leerplannen en van doelstellingen voor het meetkundeonderwijs gedurende de laatste twee eeuwen tot stand zijn gekomen. Hoewel nieuwe gedachten zich in het algemeen al latent in maatschappij en wetenschap aankondigen, zijn bij het meetkundeonderwijs pregnante discontinuïteiten te signaleren. Frappante voorbeelden zijn de opkomst van de vormleer aan het begin van de negentiende eeuw en de tijdelijke bloei van de New Math in de jaren zestig

van de twintigste eeuw. Maar ook de vrij snelle opbloei van het realistische meetkundeonderwijs past nauwelijks in een natuurlijke continue ontwikkeling.

Wel is een constant gegeven dat beoogde vernieuwingen meestal door enkelingen of door kleine groepen van betrokkenen gedragen werden. De oogmerken van de vernieuwingen waren steeds – 't klinkt triviaal – verbetering van het onderwijs, maar de argumenten waren verschillend. Soms werd geredeneerd vanuit een visie waarbij het lerende kind centraal stond, maar ook zijn meer utilitaire argumenten gebruikt omdat er maatschappelijke belangen in het geding waren. De feitelijke invoeringen zijn echter altijd door middel van wetgeving of andere dwingende maatregelen geëffectueerd. In sommige perioden, zoals gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw, maar ook thans weer, heeft de overheid hierbij zelf een actief en participerend beleid gevoerd. Zij heeft zich daarbij steeds laten leiden door deskundigen op het betrokken gebied. Dit betekent dat vooraanstaande wetenschappers, maar ook belangengroepen zoals vakverenigingen, een belangrijke rol in de beoogde vernieuwingen hebben gespeeld.

De kernvraag van deze merkwaardige ontwikkelingsgeschiedenis is hoe deze discontinuïteiten te verklaren zijn.

Een eerste antwoord ligt in de geschiedenis van het vak zelf. De aloude traditie van meetkunde als wetenschappelijke inleiding tot het leren denken heeft een ander soort meetkunde voor het onderwijs in de weg gestaan, in het bijzonder was het in die zin voor het basisonderwijs ongeschikt. Laat staan dat men een geschikte vorm voor de kleuters kon ontwerpen. Verder waren taal en rekenen voor het basisonderwijs natuurlijk belangrijker vakken. Pas toen de opvatting veld won dat meetkunde niet alleen een formele maar ook een praktische waarde kon hebben, kregen de pogingen tot realisering meer kans. Maar de uitvoering was buitengewoon lastig. Voor zover uit de eerste schaarse pogingen wijzigingen tot stand zijn gekomen, blijken die ook weer voortgekomen uit persoonlijke inspanningen van individuele bevlogenen of kleine groepen.

Een andere verklaring is gelegen in het ontbreken van een psychologische basis voor het meetkundeonderwijs aan de leerlingen van de basisschool. Tot voor kort was eigenlijk heel weinig bekend over wat leerlingen van die leeftijd aankunnen op dit gebied. De experimenten van Dienes gaven weliswaar enig inzicht, maar waren sterk beïnvloed door de structuur van de wiskunde, waardoor ze niet aansloten bij het historisch-genetische principe. De proeven van Piaget boden wel aanknopingspunten voor ontwikkeling van meetkundige onderwijsactiviteiten, althans voor het meest elementaire niveau.

Dat het werk van Fröbel wel een succes was in het onderwijs, vindt zijn verklaring in het feit dat het daarbij om een meer algemeen pedagogische verandering ging, waarin de leerstof, in het bijzonder de meetkundige speelgaven, meer een mid-

del dan een doel was. Het meetkundige element werd nog niet herkend en erkend als een voorbereiding op het latere meetkundige onderwijs. Dit laatste is waarschijnlijk juist een gunstige factor voor de invoering ervan geweest.

Maar naast het gegeven dat er geen consensus bestond over de theoretische fundering voor een geschikte meetkunde voor de kinderen van vier tot veertien jaar, ontbrak het eenvoudig aan ervaring met een voor die leeftijdsgroep nieuw vak. Pas toen op een wat grotere schaal in de jaren zeventig met nieuwe onderwerpen geëxperimenteerd kon worden, werden nieuwe wegen ontsloten welke geleid hebben tot de huidige realistische meetkunde. Hierbij werd ook teruggegrepen op eerdere ontwikkelingen, met name op het werk van mevrouw Ehrenfest. Deze ontwikkeling is echter nog lang niet afgesloten.

In hoeverre de plotselinge wendingen in deze historie ook door toevalligheden en opportune beslissingen beïnvloed zijn, is lastig te achterhalen. Dat deze echter een rol gespeeld hebben, lijkt zeer waarschijnlijk.

Onderzoeksvraag 5

Welke betekenis kan het onderhavige historische onderzoek hebben voor het heden?

Onze historische analyse van het meetkundeonderwijs op de basisschool was vooral betrokken op de Nederlandse situatie, maar kan niet los gezien worden van de internationale achtergrond. Uit de conclusies van de eerste vier onderzoeksvragen is duidelijk geworden dat de pogingen tot invoering van meetkunde op de basisschool in verschillende West-Europese landen nauwelijks succesvol genoemd kan worden. De belangrijkste obstakels vatten we hier nog eens samen:

- de wetenschappelijke meetkunde strookte niet met het idee van een intuïtieve cursus
- het argument van de vormende waarde voor meetkunde kon niet onderbouwd worden
- de praktische toepasbaarheid was nauwelijks in concrete onderwijsmaterialen herkenbaar
- er was geen adequate scholing en nascholing, vooral ten aanzien van de didactiek
- er was geen wetenschappelijk verantwoorde psychologische verantwoording en
- het ontbrak veelal aan een onderwijskundig en maatschappelijk draagvlak.

We zouden hier nog aan kunnen toevoegen dat voor een vak zonder onderwijskundige traditie de innovatiekansen zonder meer geringer zijn dan voor een onderwijsvak dat reeds een plaats kent in het curriculum en waarvoor alleen programmatische of didactische vernieuwingen nagestreefd worden.

De genoemde knelpunten zijn van verschillende aard, maar we herkennen weer

de driedeling van de invloedssferen van *school(vak), wetenschap* en *maatschappij*. Het is ons inziens het ontbreken van een evenwichtige samenhang tussen deze invloedssferen dat de innovatieprocessen voor meetkunde op de basisschool zo moeilijk verlopen zijn. Wanneer één van deze factoren domineert, dreigen de andere daaraan ondergeschikt te geraken.

De vormleer van Schmid raakte geheel verstrikt in haar eigen vaksysteem, zonder dat acht geslagen werd op de mathematische fundering, laat staan op de wetenschappelijke ontwikkelingen dienaangaande. Of er een maatschappelijke erkenning en betekenis aan gegeven kon worden, kwam in het geheel niet ter sprake.

Ten tijde van de verplichtstelling van het tekenonderwijs in 1889 waren het vooral maatschappelijk-economische overwegingen die deze innovatie moesten rechtvaardigen. Dat hierbij zonder meer de vormleer werd ingeleverd, heeft de mogelijkheid tot het opbouwen van enige traditie voor meetkunde op de basisschool in de kiem gesmoord.

Bij de New Math werden weliswaar zowel de wetenschappelijke (wiskunde en sociale wetenschappen) als de maatschappelijke ontwikkelingen in het geweer gebracht, maar daar ontbrak het aan een gedegen doordenking vanuit het praktische schoolwerk en vooral aan de vorming van consensus met het onderwijsveld.

In het werk van Wiskobas in de jaren zeventig werden de drie pijlers *school (vak), wetenschap* en *maatschappij* wel betrokken in de leerplanontwikkeling, waardoor de doelen en hun beschrijvingswijze op een breder draagvlak konden steunen. Weliswaar lag de nadruk toen vooral op het vaksystematische element, maar er werd uitgegaan van de historisch gegroeide gegevenheden, waarbij *consensus* werd nagestreefd. Aan deze laatste eis kon eind jaren zeventig, zoals we in hoofdstuk C gezien hebben, voor meetkunde niet voldaan worden.

De historische les, die hier ons inziens uit getrokken kan worden, is dat de kans op slagen voor een geplande innovatie – hier hoort de feitelijke implementatie bij – toeneemt indien in het leerplanontwikkelingswerk uitgegaan wordt van de historische en actuele gegevenheden binnen *school(vak), wetenschap* en *maatschappij*, waarbij het uiteindelijke doel moet zijn consensus met alle betrokkenen te bereiken.

E2 Aanbevelingen

Deze studie heeft een aantal specifieke vragen opgeroepen met betrekking tot het historisch-didactische gedeelte. Tevens zijn in het empirische deel een aantal knelpunten blootgelegd ten aanzien van verdere implementatie van het realistische meetkundeonderwijs. In verband hiermee volgen nu een aantal aanbevelingen, zowel voor nader onderzoek als voor praktische acties.

Culturele betekenis en historisch besef

Historisch onderzoek op zich heeft een algemene en culturele betekenis, welke kan bijdragen aan de vorming van een zekere mate van historisch besef. Voor specifieke delen van de onderwijsgeschiedenis zoals in deze studie aan de orde gesteld, bestaat echter nog weinig traditie. Algemeen onderwijs-historisch onderzoek heeft zich via de historische pedagogiek een zekere plaats verworven, maar over het algemeen is de Nederlandse onderwijsgeest door de tijden heen gekenmerkt geweest door rationalisme en toepassing van het profijtbeginsel in dienst van toekomstige vernieuwingen, zonder daarbij al te zeer acht te slaan op de ontwikkelingen in het verleden. Von der Dunk (1996) omschreef 'het ware historische besef' als 'het bewustzijn dat door alle bedwelmende veranderingen en innovaties heen en zelfs ín die veranderingen, evenals in elk van ons, het menselijke verleden gefilterd aanwezig is. Dat wij ons zelf en onze tijd alleen werkelijk kunnen kennen als wij haar zien onder het aspect niet uitsluitend van het vergankelijke maar ook van die onvergankelijke boventijdelijke dialoog van de mensheid met zichzelf. Daaraan kunnen we geen directe praktische oplossingen ontlenen voor de grote problemen van vandaag of morgen'. Hierin vinden we de essentie van de idee van historisch besef, ook voor een vakspecifiek onderwerp: *wat zijn de wortels van datgene waarmee we ons vandaag bezighouden?* Dit is de intrinsieke waarde van elk historisch onderzoek, dus ook voor een vakspecifieke studie als deze. Wij hebben kennisgemaakt met het denken en werken van een aantal erflaters van de wiskundedidactiek, in het bijzonder van diegenen die hun bijdragen op het gebied van het Nederlandse meetkundeonderwijs hebben geleverd. Door de bestudering van de opvattingen van Versluys, mevrouw Ehrenfest, Dijksterhuis en Freudenthal, allen van een grote eruditie en wetenschappelijke klasse, allen ook met belangstelling voor het verleden, hebben wij niet alleen de ontwikkelingslijn van deze ideeëngeschiedenis leren kennen, maar vooral zijn we ons bewust geworden dat wij in deze tijd voortbouwen op een traditie, die door deze grote voorgangers in samenwerking en discussie met anderen is gevormd. Wie zijn verleden niet kent, kan geen toekomst scheppen.

1: Het verdient aanbeveling historisch-sociologisch onderzoek te doen naar het leven en werken van enige prominenten op het gebied van het reken- en wiskundeon-

derwijs. Studies over onder meer Jan Versluys, Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa en Hans Freudenthal zullen de culturele betekenis, die deze erflaters aan ons onderwijs hebben gegeven, verhelderen. In het bijzonder zou een dergelijk onderzoek naar het werk van de Wiskobas-groep uit de jaren zeventig tot beter begrip van de ontwikkelingen van die tijd kunnen bijdragen.

Hoofdlijnen van het historisch-didactische onderzoek

De grote historisch-didactische thema's van ons onderzoek waren de waarde van meetkunde als vak van onderwijs, het idee van de genetische aanpak, de heuristische leerwijze en de betekenis van de aanschouwelijkheid.

Uit de analyses van de discussies over de vormende waarde van het meetkundeonderwijs is gebleken dat doelstellingen veelal weinig systematisch gepland waren en dat de argumentatie voor meetkunde als vak van onderwijs zwak was onderbouwd. In het bijzonder gold dit voor het lager onderwijs in de negentiende eeuw.

Het zijn vooral de wetenschappelijke ontwikkelingen in de pedagogiek en psychologie geweest, die hebben bewerkstelligd dat er gebroken moest worden met de op logisch-deductieve opgezette methode van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Bewustmaking van het genetische principe heeft hierin een belangrijke rol vervuld. We leren (opnieuw) uit deze geschiedenis dat het innovatieproces voor een vak zonder schooltraditie veel tijd vergt.

Uit de historie is gebleken dat alle vernieuwers die inzicht via eigen kennisverwerving als kern van het leerproces opvatten, het heuristische principe als een centraal punt van de didactiek hebben gesteld. Het blijkt een constant streven te zijn, dat kennelijk moeilijk tot een operationeel en controleerbaar element van het onderwijs is te maken.

Het principe van aanschouwelijkheid is wellicht het meest aangeslagen gedurende de laatste twee eeuwen. Het kan een machtig didactisch hulpmiddel zijn, maar het kan ook blokkerend werken voor het bereiken van een hoger niveau, wanneer het op een te eenzijdige (concrete) basis is gestoeld. Juist in het meetkundeonderwijs, waarin – hoe belangrijk het concrete visuele element ook is – het uiteindelijk toch aankomt op mentale processen, zijn in didactisch opzicht gedurende de laatste halve eeuw duidelijke verbeteringen waar te nemen. Doordat de aanschouwelijkheid via de meetkunde sinds de laatste tientallen jaren een aparte rol is gaan spelen ten behoeve van de visualisering van wiskundige problemen, zijn de afgrenzing en waarde van het vak in zeker opzicht verruimd. Nieuwe technologische ontwikkelingen kunnen hierbij wellicht nog van betekenis zijn.

Deze hoofdthema's (waarde van het vak, het genetische principe, de heuristische aanpak en de aanschouwelijkheid) vormden de rode draad van onze geschiedenis, die steeds – voor zover mogelijk – gerelateerd werd aan de historische ontwikkelingen in de school, de maatschappij en de wetenschap. Ook binnen de geschiedenis

van het rekenonderwijs zijn deze thema's herkenbaar, maar dit is door ons niet systematisch onderzocht. Aanvulling en uitbreiding op de eerdere studie van Leen uit 1961 is daarom zinvol.

2: Het verdient aanbeveling hernieuwd historisch-didactisch onderzoek op het gebied van het rekenonderwijs van de laatste twee eeuwen te doen, waarbij met name de ontwikkelingen tot het jaar 2000 betrokken worden. In het bijzonder zouden daarbij de waarde van het vak rekenen, het genetische principe, de heuristische leerwijze en de aanschouwelijkheid onderwerp van onderzoek kunnen zijn.

3: Het verdient aanbeveling om, binnen het kader van het hiervoor genoemde punt, in het bijzonder de betekenis van Fröbel en het werk van Haanstra voor de Nederlandse situatie nader te onderzoeken.

Specifieke betekenis voor het heden

Deze geschiedenis laat zien dat nieuwe ideeën soms al vaker gelanceerd waren. Misschien hoort het wel bij elk ontwikkelingsproces dat het wiel telkens opnieuw uitgevonden moet worden, maar een historische terugblik kan de innovator van vandaag wellicht toch enige bescheidenheid bijbrengen over de nieuwste theorieën, methoden en producten die het onderwijs met de regelmaat van de klok bereiken. Tevens maakt de historie duidelijk dat lang niet elke innovatie een verbetering heeft betekend.

De vraag waarom bepaalde innovaties het niet of wel gehaald hebben, is niet altijd te achterhalen, omdat innovatieve processen van zoveel verschillende, vaak externe, factoren afhankelijk zijn. Een planmatige benadering is kennelijk een hachelijke zaak. Dikwijls blijken veranderingen namelijk samen te vallen met politieke en/of beleidsmatige besluiten.

Historisch-didactisch onderzoek kan ook inzicht verschaffen over de algemene mate van progressie die is geboekt. Zo is objectief vast te stellen dat de didactiek van het reken- en wiskundeonderwijs de laatste tweehonderd jaar grote schreden voorwaarts heeft gemaakt. Analyses van school- en studieboeken en van examens voor de onderwijzers hebben laten zien welke inhoudelijke en didactische problemen als constanten optreden. Tevens is uit ons historisch onderzoek duidelijk geworden welke invloed boeken en vooral examens op het feitelijke onderwijs hebben. Het aanbod, het feitelijke onderwijs, de examens kunnen enorm in omvang en niveau verschillen, om over de feitelijke opbrengsten van de examens (toetsen) maar niet te spreken.

4: Het verdient aanbeveling om bij onderzoek of ontwikkeling van nieuwe onderwijsmaterialen eerst een historisch-didactische analyse van het betreffende onderwerp uit te voeren.

Programmatische consensus

Uit de Pimbo-toetsen is gebleken dat de opbrengsten op bepaalde onderdelen zwak zijn. Ook is aangetoond dat er nog niet van een nationale afstemming van inhoud, methodiek en didactiek gesproken kan worden. De uitslag van de gerichte deskundigenenquête maakt ten slotte duidelijk dat nadere uitwerkingen van een programmatisch voorstel gewenst zijn.

De vraag is hoe een grotere mate van consensus bereikt kan worden. Gezien de totaal andere aard van de meetkunde dan het rekenen op de basisschool, zijn gevarieerde uitwerkingen van een realistisch meetkundeprogramma voor de basisschool mogelijk. Men kan zich daarbij een scala van programma's voorstellen: enerzijds een tamelijk gestructureerde opbouw, waarbij de nieuwe elementen van de realistische meetkunde-inhouden toch aan de orde gesteld worden, anderzijds een meer open programma, waarin alle elementen van de zelfontdekkende methodiek en didactiek optimaal worden uitgebuit. Een zekere middenweg is die waar de meetkunde gelieerd wordt aan het meten en een meer empiristische inslag heeft. In alle gevallen moet een globale opbouw in de methode te herkennen zijn.

Eerst en vooral zal een zekere overeenstemming gevonden moeten worden over de inhoud, het niveau waarop bepaalde onderdelen worden aangeboden, de minimumdoelen en de mogelijkheden van differentiatie.

Praktische onderwijsbeschrijvingen op grond van ervaringen kunnen hiertoe een bijdrage leveren. Omdat het in het realistische meetkundeonderwijs gaat om fundamentele, meestal visuele ervaringen, waarbij nog geen eisen aan abstract structuurinzicht en formele operaties worden gesteld, hoeven de (te ontwerpen) activiteiten niet te complex te zijn. Wel gaat het om 'activiteits-' en 'probleemgeoriënteerde' situaties met een fundamentele wiskundige kern.

5: Het verdient aanbeveling om op korte termijn een groep van deskundigen op het gebied van het meetkundeonderwijs voor één of meerdere studiebijeenkomsten bijeen te brengen. Het doel hiervan moet zijn consensus te bereiken over minimumdoelen, inhoud en vorm van een realistisch meetkundeprogramma. Modellen van gedifferentieerde programma's dienen daarna in een werkconferentie aan een groep basisschoolleraren voorgelegd te worden. Door hier het project Tussendoelen Annex Leerlijnen (TAL) bij te betrekken, kan directe koppeling met de actuele ontwikkelingen in het reken-wiskundeonderwijs tot stand gebracht worden, waarmee de kans op implementatie vergroot wordt. Tevens kunnen deze voorstellen als uitgangspunt dienen voor een bijdrage in de reeks publicaties voor een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs.

Herziening methoden

De meetkundeprogramma's van de realistische reken-wiskundemethoden die thans op de markt zijn, verschillen onderling naar omvang en inhoud. In de meeste methoden ontbreekt een programmatische onderbouwing. Voor de leraren is het niet duidelijk wat de (minimum)doelen zijn. Volgens de Pimbo-enquête onder de leraren van groep 8 zou gemiddeld 70 procent van het aanbod uitgevoerd worden, maar over de inhoud en over de aard van het onderwijs zijn geen gegevens bekend. Uit de Pimbo-enquête onder de schoolbegeleiders zou opgemaakt kunnen worden dat meetkunde door de leraren BO niet als een volwaardig domein wordt opgevat. Het is dus onduidelijk wat nu eigenlijk het meetkundeonderwijs op de huidige basisschool voorstelt.

6: Het verdient aanbeveling dat methodenschrijvers een meetkundeprogramma in hun boeken opnemen dat bij uitvoering in ieder geval voldoet aan de (minimum)doelen. Dit programma moet duidelijk beschreven worden via de handleidingen en dient een structurele plaats in het totale reken-wiskundecurriculum te hebben. Dit zou, afgezien van het meten, ongeveer 10 procent van de totale onderwijstijd voor rekenen-wiskunde moeten zijn. De aard van het voorgestelde deelcurriculum dient ook duidelijk verantwoord te zijn.

Toetsontwikkeling

De Cito-rekentoetsen bevatten sinds kort ook meetkunde-items in vierkeuzevorm. Op zich is dit een gunstige ontwikkeling voor het innovatieproces. Immers, de school zal nu rekening moeten houden met dit onderwerp. Een eerste zorg is dat de thans voorhanden zijnde opgaven niet verstarren tot prototypen, waarop specifiek getraind kan worden. Door de meerkeuzevorm van de eindtoets wordt echter het toetsen van specifieke vaardigheden als het zelf construeren, meten en tekenen in feite onmogelijk gemaakt. Zelfs kan de vraag gesteld worden of het toetsen van meetkunde via meerkeuzeopgaven wel strookt met het probleemgeoriënteerde aspect van de realistische opvatting. Hiervoor lijken toetslessen, gezamenlijke practica of werkstukken veel geschikter.

7: Het verdient aanbeveling om naast ontwikkeling en uitbreiding van meerkeuzevragen over meetkunde voor de Cito-eindtoets ook andere evaluatie-instrumenten te ontwikkelen.

Opleiding en nascholing

Een PABO-student besteedde anno 1995 in de vierjarige opleiding gemiddeld 360 uur, waarvan eenderde deel contacturen, aan rekenen-wiskunde; 10 procent hiervan (één werkweek) is aan meetkunde gewijd. Dit is te weinig om een behoorlijke start-

bekwaamheid, niet alleen voor het vak rekenen-wiskunde, maar zeker voor het onderdeel meetkunde te verwerven. De Pimbo-enquête onder de leraren wijst uit dat 60 procent van de leraren BO vindt zelf een onvoldoende vooropleiding gehad te hebben voor meetkunde. Desondanks is de behoefte aan nascholing erg klein (28 procent).

8: Het verdient aanbeveling om modellen voor korte nascholingscursussen realistisch meetkundeonderwijs te ontwikkelen, die in eerste instantie gericht zijn op de leraren die rekenen-wiskunde op de school onder hun hoede hebben (reken-coördinatoren). Daarin dient met name het specifieke karakter en de methodisch-didactische vorm, zo mogelijk gekoppeld aan een methode, aan de orde gesteld te worden. Het TAL-project zou hieraan een belangrijke bijdrage kunnen leveren. Een ondersteunend TV (Teleac-NOT) programma kan hierbij goede diensten bewijzen. Via het Rekenweb (Website van het Freudenthal Instituut) kan hierover informatie verschaft worden.

Nader onderzoek

De aard van de Pimbo-toetsen was vooral gericht op ontwikkeling van geschikte meetkunde-items. Samenhang tussen reken- en meetkundescores zijn in het betreffende onderzoek wel berekend, maar het design was hierop niet optimaal ingesteld en het toetsinstrument was niet specifiek daarvoor ontwikkeld. Dit aspect zou derhalve aan een apart nieuw onderzoek onderworpen moeten worden. De samenhang tussen aanbod en opbrengsten kon via deze toetsen niet gepeild worden. En zo zijn er tal van onderzoekspunten in verband met het realistische meetkundeonderwijs te noemen, die een nog vrijwel braakliggend terrein vormen. Dit zijn redenen om gericht onderzoek in dit opzicht ernstig in overweging te nemen.

9: Het verdient aanbeveling onderzoek uit te voeren naar vraagstellingen aangaande het meetkundige denken van kinderen in de leeftijdsgroep van vier tot veertien jaar, zoals de samenhang tussen logische en ruimtelijke intelligentie, effecten van gericht onderwijs in samenhang met de gebruikte methode, verschillen van aanleg en leerstijlen tussen jongens en meisjes en gebruik van meetkundige computerprogramma's. Tevens is een inventariserend internationaal onderzoek naar meetkundecurricula aan te bevelen.

Basis- en Voortgezet Onderwijs

Aangetoond is dat er geen goede aansluiting tussen de meetkundeprogramma's van de basisschool en de brugklas van het voortgezet onderwijs bestaat.

***10**: Het verdient aanbeveling bij de vaststelling van de programmavoorstellen (zie 5 en 6) in samenspraak met de daarvoor verantwoordelijke instanties en met de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs (NVORWO) en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) tot een duidelijke afstemming te komen tussen de kerndoelen meetkunde voor het basisonderwijs en die voor de basisvorming.*

Deze aanbeveling brengt ons samen met de voorgaande weer terug bij het punt dat we met de implementatie van realistisch meetkundeonderwijs in feite nog maar aan het begin staan. Er moet verder gewerkt worden aan afstemming van inhouden, programmatische beschrijvingen, differentiatiemogelijkheden, samenhang met andere domeinen, ontwikkeling van methodiek en didactiek, ontwikkeling van evaluatiemogelijkheden en zo meer. Het is daarom van het grootste belang dat het TAL-project een meerjarig karakter krijgt en dat meetkunde (en meten) een van de volgende domeinen zal worden waarvoor (tussen)doelen en leerlijnen ontwikkeld worden.

E3 Epiloog

Internationale vergelijking

Nationaal bestaat er erkenning voor 'realistische meetkunde' als vak voor de basisschool. Maar ook internationaal blijkt de belangstelling voor meetkunde voor het primair onderwijs te groeien en wel in een richting waarbij vooral het nuttigheidsaspect als uitgangspunt wordt gekozen. Werden de ICME-conferenties van de jaren zeventig (Exeter 1972, Karlsruhe 1976) nog beheerst door de naweeën van de New Math, vanaf de jaren tachtig won de opvatting van een meer toepasbaar wiskundeonderwijs ook internationaal het veld. In het bijzonder neemt de aandacht voor informele meetkunde als propedeuse toe. In Duitsland is een zekere gelijkenis met de Nederlandse realistische meetkundeaanpak waar te nemen (Radatz en Rickmeyer, 1991; Wittmann, 1996). In enkele Belgische publicaties valt enige invloed vanuit Nederland waar te nemen (Verschaffel, Heyerick, 1995). Ook in de Amerikaanse *Standards* (NCTM, 1989) staat toepasbaarheid van de meetkunde voorop. Het valt op dat buitenlandse programmavoorstellen vaak meer gestructureerd zijn opgezet dan wat tot nu toe in de Nederlandse schoolboeken tot uiting is gekomen. Dit komt onder meer voort uit het feit dat men ook mathematische structuren als contexten op zich wil beschouwen (Wittmann, 1996). In geen van de door ons bestudeerde buitenlandse voorstellen is sprake van een leerlijngeoriënteerde aanpak. Zouden we al van een programma spreken, dan dient dit eerder als 'activiteitsgerichte' of 'probleemgeoriënteerde' aanpak bestempeld te worden. Dit stelt aan het methodisch-didactische element van het meetkundeonderwijs nieuwe eisen. Hoewel thans veelal wordt uitgegaan van een 'informele' of 'intuïtieve' start, zijn de uitwerkingen in de schoolboeken niet uniform. Vooral de niveaubepaling van de onderdelen blijkt per methode, zowel nationaal als internationaal, sterk uiteen te lopen. Maar ook de nadruk op de verschillende aspecten van de meetkunde verschilt nogal. Waar bijvoorbeeld in Nederland de zogenoemde 'stadsplanmeetkunde' (taxicab-geometry), die in de jaren zeventig nogal aandacht had, vrijwel verdwenen blijkt te zijn, treffen we die in *Mathe 2000* (Wittmann e.a. 1996) – een methode voor de Grundschule (zes- tot tienjarigen) – wel aan. Het hoekbegrip wordt in de methode *Mathematics in Context* aan het begin van grade 5 (tienjarigen) meteen algemeen en diepgaand behandeld, waar dit in de Nederlandse methoden nauwelijks aan de orde komt. Alleen al aan de hand van deze twee voorbeelden blijkt dat over de sequentiëring van de leerstof internationaal geen consensus bestaat.

De algemene omschrijvingen van het vak meetkunde voor het primair onderwijs zijn tamelijk divers. Typisch voor de Nederlandse situatie is de aandacht voor het aspect van 'viseren en projecteren'. Gemeenschappelijk punt in vrijwel alle programmaopvattingen is de aandacht voor de ruimtelijke oriëntatie, in de Nederlandse opvatting omschreven als 'oriënteren en lokaliseren', voor het meten en construeren

(zij het soms verschillend geïnterpreteerd) en voor de meetkunde van figuren en vormen (soms sterk gelieerd aan transformaties). In de opvatting van Wittmann, maar ook in de Amerikaanse *Standards*, wordt ook het aspect van het 'ruimtelijke redeneren' belicht, maar naarmate een opvatting meer empiristisch is getint, krijgt dit minder aandacht. Kortom, over de aard van meetkunde op de basisschool bestaat ook internationaal bepaald geen consensus. Wij bepalen ons uitsluitend tot de Nederlandse situatie en gaan uit van de opvattingen over 'realistische meetkunde'.

Motivering

Waarom zouden wij meetkunde als vak op de basisschool nog dienen te motiveren, nu het wettelijk is vastgelegd door de kerndoelen? Allereerst menen wij aan deze opdracht te moeten voldoen omdat dit bij de officiële beschrijving van de kerndoelen, maar ook in de *Proeve I*, achterwege gelaten moest worden. Verder kan de verankering van meetkunde in het onderwijs pas gestalte krijgen wanneer het veld ook zelf overtuigd is van de betekenis van dit nieuwe vak en wanneer een zekere consensus over inhoud, doelen en didactiek bestaat.

Ons inziens kunnen als meest pragmatische argumenten voor meetkunde op de basisschool die van het praktische nut en van de voorbereidende waarde aangevoerd worden. Het *praktische nut* van meetkunde is evident. En wel in de algemene zin dat de kinderen meetkundige fenomenen uit de realiteit leren begrijpen en verklaren. Maar ook in meer specifieke betekenis heeft meetkunde nut, namelijk voor het leren organiseren, ordenen en modelleren van allerhand ruimtelijke problemen, niet alleen in het onderwijs, maar ook in het leven van alledag. Zelfs bieden meetkundige modellen vaak hulp bij allerlei getalsmatige problemen.

Het argument van de *voorbereidende waarde* is inherent aan een longitudinale planning van een meetkundecurriculum voor vier- tot achttienjarigen. Dit argument heeft in vroeger tijden ongelukkig uitgepakt, daar de meetkundige onderwerpen voor de basisschool ontleend werden aan het formele meetkundige systeem. Het realistische meetkundeonderwijs op de basisschool kan, zowel naar inhoud als didactiek, van zodanige aard zijn dat van jongs af aan op aanschouwelijke en aan de realiteit gelieerde wijze, noties ontwikkeld worden van meetkundige begrippen, relaties en structuren, die op een hoger niveau verder uitgewerkt worden.

De volgende argumenten zijn van meer vakspecifieke aard. Aan meetkunde moet – zoals overigens aan meerdere vakken – een *intrinsieke* of *specifieke waarde* toegekend worden, wanneer we haar beschouwen als een discipline die de moeite waard is op zich te bestuderen en te onderwijzen. Deze intrinsieke waarde wordt niet alleen ontleend aan de kracht en schoonheid van haar structuur en aan haar lange wetenschappelijke traditie, maar ook aan de bijzondere mengeling van aanschouwelijke evidentie en mathematische exactheid van haar methode. Het is nu eenmaal een prachtig vak. Ook op basisschoolniveau zijn talloze verrassende problemen aan te

wijzen, zowel uit de realiteit als in meer puzzelachtige vorm, die aanleiding geven tot het stellen van de *waarom-vraag* en het zoeken naar de oplossing.

- Twee gelijke, rakende cirkels. De één draait om de ander. Hoe vaak draait deze om zichzelf?
- Hoe kan je van een vierkant blaadje een vierkant vouwen dat de helft in oppervlakte is?
- Hoe vinden we het middelpunt van een cirkel?
- Hoeveel essentieel verschillende dobbelstenen bestaan er?
- Wat is de kortste afstand tussen twee punten op een koker?

Nauw hiermee samenhangend is het feit dat meetkunde sterk appelleert vanwege haar *esthetische aspect.* Het maken van mooie figuren en patronen, het gebruik van symmetrieën, het ontdekken van structuren in de natuur, het oog krijgen voor geometrische elementen in kunst, vormgeving en architectuur, het zijn aspecten die kunnen bijdragen aan de algehele culturele ontwikkeling, ook van de basisschoolleerling. In die zin kan het meetkundeonderwijs dus ook bijdragen aan de persoonlijke ontwikkeling van het lerende kind.

Bezien we de meetkunde vanuit een meer onderwijskundig standpunt, dan blijkt uit praktijkervaringen dat van het vak ook een *motiverende waarde* kan uitgaan. Hoewel er geen systematische onderzoeksgegevens bekend zijn, blijken zwakke rekenaars bij de meetkundige activiteiten in het reken-wiskundeonderwijs soms op te bloeien. In verband hiermee dient gememoreerd dat verschillende didactici meetkunde vaak aanbevelen om haar specifieke mogelijkheden tot vorming van een *mathematische attitude.* Vooral het leren probleemoplossen zou vanuit de meetkunde bevorderd kunnen worden, zo lezen we in de *Standards* (1989), maar ook dicht bij huis klinkt een dergelijk geluid: 'Wellicht is er geen onderdeel dat, naast het meten, zo de vorming van een wiskundige attitude kan bevorderen als het meetkundeonderwijs en, meer in het algemeen zo aan de algemene leerdoelen appelleert' (Treffers, De Moor en Feijs, 1989, p. 94).

In het historische deel van deze studie hebben we uiteengezet dat meetkunde tot het midden van deze eeuw vooral gemotiveerd werd vanwege haar *vormende waarde.* Er bestaan geen harde bewijzen dat er een algemene transfer van goede denkgewoonten naar andere leergebieden zou bestaan vanuit de wiskunde of de meetkunde in het bijzonder. Er zijn wel aanwijzingen voor het bestaan van zogenaamde korte transfer (zie B5). We betreden met het argument van de vormende waarde tevens de gebieden van de leer- en ontwikkelingspsychologie. Howard Gardner (1985) onderscheidt tenminste zeven verschillende soorten intelligenties: 'linguistic', 'musical', 'logical-mathematical', 'spatial', 'body-kinesthetic', 'interpersonal' en 'intrapersonal'. Al deze 'abilities' dienen tijdig, dus ook in het jonge kind, ontwikkeld te wor-

den, zo is zijn stelling. De onderkenning van een aparte 'ruimtelijke intelligentie' naast die van een 'logisch-mathematische' versterkt onze argumenten voor een vroegtijdige start van het meetkundeonderwijs (zie B5).

En dan hebben we bij deze opsomming het argument van de meetkunde als middel tot leren visualiseren nog buiten beschouwing gelaten. Allereerst omdat het in deze hele studie niet apart onderzocht is, maar ook omdat het een beschrijving van doelen en inhoud van de meetkunde nog lastiger maakt dan het nu al is.

Nogmaals de doelen van het realistisch meetkundeonderwijs

Formeel worden de doelen van het meetkundeonderwijs op de basisschool bepaald door de kerndoelenbeschrijving van 1993 (zie C4.4). In verband met de zeer compacte omschrijving zijn deze in 1994 door Treffers en De Moor nader gepreciseerd:

'1 De leerlingen beschikken over een begrippenkader om de ruimte meetkundig te ordenen. Tot deze begrippen horen plaats, rechte lijn, richting, hoek, afstand, evenwijdigheid, plattegrond, kaart, coördinaten, ...
2 De leerlingen kunnen redeneren naar aanleiding van eenvoudige ruimtelijke problemen zoals met bouwsels, foto's, schaduwen en eenvoudige meetkundige figuren.
3 De leerlingen kunnen eenvoudige meetkundige constructies maken aan de hand van bouwsels, bouwplaten, vormen, ...
4 De leerlingen kunnen meten, rekenen en met grafieken werken naar aanleiding van eenvoudige (reële) situaties. In het bijzonder zijn zij in staat schaaltekeningen te maken en te lezen.
5 De leerlingen kunnen meetkundige patronen herkennen, analyseren en voortzetten. Ze hebben enige vaardigheid met spiegelen, lijn- en puntsymmetrieën, vergroten en verkleinen van figuren.
6 De leerlingen kunnen in eenvoudige gevallen de effecten van vergrotingen en verkleiningen (op omtrek-oppervlakte; oppervlakte-inhoud) verklaren en toepassen.
7 De leerlingen kunnen op inzichtelijke wijze, door middel van completeren en omstructureren, de oppervlakte c.q. inhoud van eenvoudige meetkundige figuren bepalen.' (Treffers en De Moor, 1994)

Wij menen dat hiermee, samen met de vijf aspecten van het realistische meetkundeonderwijs, in ieder geval een *werkbaar kader* en *globale inhoud van een realistisch meetkundecurriculum voor de basisschool* is neergelegd. Voor een meer gespecificeerde doelbeschrijving zou passend bij het realistische wiskundeonderwijs gebruik gemaakt dienen te worden van Treffers' model der *driedimensionale doelstellingen*. De eerste dimensie betreft het gewenste *operationele gedrag*, zoals vastgelegd in de kerndoelen en de daarvan door ons geformuleerde specificaties. Voor de tweede dimensie, de *inhoud*, dient ons inziens gekozen te worden voor een beschrijving in activiteiten, omdat zich daarin reeds iets van het karakter van het beoogde onderwijs aftekent, te weten: geen geïsoleerde begripsvorming, geen verbalisme, geen formalisme. Dit nu betekent weer dat we geen doelstellingslijsten van begrippen, eigenschappen en vaardigheden hebben opgesteld, maar dat deze via de beschreven acti-

viteiten impliciet aangeboden worden. De derde dimensie, de *didactische context*, is binnen dit kader moeilijk na te streven, omdat dit het praktisch-didactische handelen van de onderwijsgevende betreft. Er zijn nog te weinig ervaringsgegevens met het meetkundeonderwijs op de basisschool bekend om dit aspect in zijn volle omvang te kunnen beschrijven. In het algemeen wordt in het realistisch wiskundeonderwijs een open probleemaanpak voorgestaan, waarbij de kans geboden wordt voor vrije exploratie, maar wel zodanig dat de leraar tevens een centrale rol vervult in het onderwijsleerproces dat hij/zij gestalte geeft via het principe van de 'geleide herontdekking'. Dit alles betekent echter niet dat meetkunde op de basisschool een vak van 'hap-snap'-activiteiten mag zijn. Wil de realistische meetkunde een structurele inbedding binnen het reken-wiskundonderwijs op de basisschool krijgen, dan zal tenminste een globale programmatische opzet noodzakelijk zijn.

Eindelijk een aanschouwelijke start

Het is aan Pestalozzi, die naast het *getal* en het *woord* ook *vorm* als vertrekpunt voor het onderwijs koos, te danken dat meetkunde een vak van onderwijs ook voor de jongste kinderen kon worden. Maar het is een lange weg geweest – moeizaam, nochthans met overgave geplaveid door Diesterweg, Fröbel, Versluys, Ehrenfest-Afanassjewa, de Van Hieles, Freudenthal en vele anderen – om uiteindelijk tot aanvaarding van een *informele* aanpak, die nu als realistisch bekend staat, te komen. Hier te lande staat deze aanpak in dienst van de latere *kijkmeetkunde* en de wat meer formele meetkunde in het begin van het VO. De aanvaarding van meetkunde als vak voor de basisschool is vooral tot stand gekomen doordat in de didactiek het *genetische principe*, de daarmee samenhangende *aanschouwelijkheid* en de *heuristische werkwijze* uitgebuit en ontwikkeld zijn. Ook in dit opzicht hebben we een moeizame weg door de onderwijshistorie van dit vak moeten maken. De grote wiskundige Klein, maar ook velen na hem, hebben steeds weer op de waarde van deze didactische elementen gewezen, waarmee de deuren geopend kunnen worden voor een aanschouwelijk meetkundeonderwijs, dat al op zeer jonge leeftijd kan aanvangen.

De doelen van de realistische meetkunde op de basisschool vatten wij aan het einde van ons relaas nog eens kort en zo praktisch mogelijk samen: verwerven van meetkundige noties en oplossingsmethoden, ontwikkelen en gebruik maken van schema's, vaardigheden in tekenen en construeren, verwerven van basale meetkundige kennis en feiten, verwerven van structuren en vooral het ontwikkelen van een attitude, die nodig is om de ruimte te organiseren en te ordenen om deze te Be-Grijpen. Dit laatste komt de ontwikkeling van een *wiskundige attitude*, waarbij het visualiseren een zo belangrijke rol speelt, ook ten goede.

Wittmann (1987, p. V) stelt dat 'die Elementargeometrie, wenn (...) geeignet unterrichtet, die Ausbildung der menschlichen Wahrnemungs- und Gestaltungsfähigkeit entscheidend fördern kann'. Freudenthal achtte meetkunde zo belangrijk, dat hij

stelde dat er aan dit vak evenveel aandacht besteed moet worden als aan rekenen, 'though a different kind of attention: broader to arithmetic and more profound to geometry' (Freudenthal, 1991, p. 65). Hij wees daarbij nog eens op de grote rijkdom van het vak voor het onderwijs, sprak zich uit voor interessante kleine problemen waarin de kinderen basale begrippen en relaties zelf heruitvinden, maar stelde zich tevens dezelfde vraag, die in de huidige discussie over meetkunde steeds opduikt: 'But how to link together nice pieces of geometrical reinvention, to get chains of long-term learning processes?' (p. 66). Zijn aanbevelingen hierover gingen echter niet verder dan dat de herontdekkingen, geleid door middel van een leergesprek waarbij hints gegeven worden, plaatsvinden. Eens kunnen we het zijn met Freudenthals opvatting dat eenmalige diepgaande ervaringen met meetkunde op jonge leeftijd moeten plaatsvinden om de basis voor latere abstracties te leggen. Daarmee is echter het probleem van de leerlijn – hij bedoelde verticale mathematisering – voor de praktijk van vandaag niet opgelost. In onze voorstellen hebben we qua omvang van het programma 10 procent van de totale reken-wiskundetijd voor meetkunde genoemd, afgezien van het onderdeel meten. Tevens is daarin een meer gestructureerde leerstofplanning aanbevolen, die gedifferentieerde uitwerkingen van de realistische meetkunde in de methoden mogelijk zou moeten maken.

Nog éénmaal omgekeken

Bezien we ten slotte ons totale onderzoek nog eens vanuit de historische ontwikkelingen, dan is een van de belangrijkste conclusies dat twee eeuwen na Pestalozzi's introductie van de vormleer informele meetkunde thans geaccepteerd en aanbevolen wordt voor het primair onderwijs, in Nederland onder de naam realistische meetkunde. De uitwerking voor verschillende landen is niet diepgaand door ons onderzocht, maar in de Verenigde Staten en de ons omringende landen lijkt een gelijksoortig streven te bestaan. Meetkunde moet, óók op de basisschool.

Laten we eens fantaseren dat Pestalozzi, Fröbel en Diesterweg voor deze ontwikkelingen alsnog in levende lijve geëerd zouden worden met een eredoctoraat aan de Universiteit van Göttingen. Er moet een immense ruimte worden afgehuurd vanwege de overgrote belangstelling voor deze plechtigheid. Onder de speciale genodigden zien we Delekat, Heiland, Siegbert Schmidt, Wagemann, Leeb-Lundberg en vele andere historisch-pedagogen en reken-wiskundedidactici uit de gehele wereld. Heinrich Bauersfeld houdt op de hem bekende humoristische, maar ook filosofische wijze de feestrede, waarin hij de verdiensten van de drie laureaten uiteenzet, in het licht plaatst van het heden en confronteert met datgene wat op didactisch-methodisch gebied in de laatste twee eeuwen bereikt is. Hij prijst hen om hun fundamentele opvattingen over het genetisch principe, maar zal ook naar de praktische en theoretische ontwikkelingen, vooral in de psychologie, van de twintigste eeuw verwijzen.

Hoe zouden de laureaten zich in hun dankwoord uiten? Zou de chaotische Pestalozzi zich herkennen in de huidige opvattingen over aanschouwing, in verband met de meetkunde vooral ten aanzien van zijn 'innerlijke aanschouwing', door ons het mentale handelen genoemd? Zou de overgevoelige Fröbel niet in de war raken van het huidige enorme aanbod aan concreet en aanschouwelijk speel-leermateriaal, vooral voor het jonge kind? En de meer rationele Diesterweg, zou hij gecharmeerd zijn van de nieuwe wegen die de heuristische methode is gegaan? Wat zou zijn reactie geweest zijn op de nieuwe opvattingen van de kijkmeetkunde en het opschorten van het formele redeneren in de meetkunde? Zouden deze 'Grote Drie' alsnog geschokt raken in hun vaste vertrouwen in de vormende waarde van de wiskunde? We weten het niet, maar tamelijk waarschijnlijk lijkt het dat ze alle drie vraagtekens zouden zetten bij de huidige individualisering, de grote vrijheid van de kinderen en de devaluatie van de grote waarde van hun tijd: de religie. Vooral de laatste vergelijkingen maken duidelijk dat het zinloos is om ons aan dergelijke gedachtenspinsels over te geven. We laten daarom een zelfde fantasie over Versluys en mevrouw Ehrenfest als de initiators van dezelfde principes, maar dan voor de eerste helft van de twintigste eeuw, maar achterwege.

Trouwens, er zouden nog vele anderen met lauweren omhangen moeten worden voor de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs in deze eeuw, zoals we in dit boek getracht hebben duidelijk te maken. We laten het vooral achterwege omdat er op dit gebied nog zoveel werk te verzetten is: Meetkunde moet, ook op de basisschool, al is het alleen maar, om nog eenmaal met Freudenthal te spreken: 'omdat je de kinderen zoveel moois niet mag onthouden'!

Literatuur en bronnen

De indeling en beschrijvingswijze van deze 'literatuurlijst' behoeft enige toelichting.

In deze studie is het meetkundeonderwijs zowel vanuit mathematisch-didactisch als vanuit pedagogisch-psychologisch oogpunt beschouwd. Ook zijn de maatschappelijk-historische veranderingen, voor zover van belang voor het onderwerp van studie, in ogenschouw genomen. Dit alles ook nog over een lange periode van twee eeuwen. Vooral vanwege het laatste is geen onderscheid gemaakt tussen primaire en secundaire literatuur.

De schoolboeken, die de basis voor het historische onderzoek vormden, zijn voor de verschillende perioden apart ingedeeld, waardoor specifieke overzichten van de toen voorhanden zijnde onderwijsmaterialen zijn ontstaan. Gegevens over aantal drukken zijn zoveel mogelijk ontleend aan *Brinkmans Cumulatieve Catalogus* (BCC).

De tijdschriften, die systematisch onderzocht zijn in verband met de discussie over de vormleer in de negentiende eeuw, zijn in een aparte rubriek opgenomen, maar niet gesplitst naar historisch of actueel belang. Bij de verwijzingen was het niet altijd mogelijk jaartal, jaargang en nummer te achterhalen. Soms omdat er geen nummeringen gehanteerd waren, soms vanwege opnieuw gebonden jaargangen.

Ook de onderwijsmaterialen van het laatste kwart van de twintigste eeuw zijn apart volgens de betreffende hoofdstukken gerubriceerd.

Ten slotte is getracht een zo goed mogelijke inventarisatie te maken van alle onderwijsmaterialen, artikelen, rapporten en dergelijke over meetkunde, die ten tijde van het bestaan van het IOWO (1971-1980) zijn ontstaan. De daar genoemde artikelen en publicaties zijn niet in alle gevallen met volledige titel beschreven. Niet alle geschriften zijn officieel gepubliceerd. De tussen haakjes toegevoegde opmerkingen geven een aanduiding over de inhoud.

Over enkele kwesties is door de auteur gecorrespondeerd. Deze correspondenties zijn in een aparte rubriek opgenomen. Daarin zijn ook een aantal andere correspondenties opgenomen, waarover de auteur de beschikking heeft kunnen krijgen.

Door de gehanteerde opdeling kunnen sommige referenties vaker genoemd zijn.

Naast de historische aspecten heeft deze studie ook een actueel perspectief. Dit komt met name tot uiting in deel D, waarin een aantal empirische onderzoeken is besproken. De originele data zijn in het bezit van de auteur van deze studie. De statistische opbrengsten zijn in twee rapporten samengevat, waarvan zich exemplaren in de archieven van het Freudenthal Instituut en het Cito bevinden. Enkele relevante samenvattingen van uitgevoerde enquêtes zijn als bijlagen bij deze studie gevoegd.

Geraadpleegde literatuur

Aarts, L. e.a. (1995). Inpakken. *Willem Bartjens 14*(4) pp. 40-42.

Abb, E. (1920). *Einführung und Erläuterungen zu Pestalozzi. Wie Gertrud ihre Kinder lehrt.* Nürnberg: Verlag der Friedrich Kornschen Buchhandlung.

Achter, V. van (1971). *De modernisering van het rekenonderwijs op de basisschool.* 's Hertogenbosch: Malmberg.

Ahlfors, L.V. e.a. (1962). On the mathematics curriculum of the high school. *The Mathematics Teacher 55* pp. 191-195.

Albada, P.J. van (1958). An introductory course of geometry. *Report on Methods of Initiation into Geometry* (H. Freudenthal, ed.). Groningen. pp. 81-96.

Alberts, G. (1998). *Jaren van berekening. Toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskundebeoefening 1945-1960* (diss). Amsterdam University Press.

Alberts, G., F. van der Blij en J. Nuis (1987). *Zij mogen daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen.* Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum.

Arithmetic Teacher (special on spatial sense). *37*(6), 1990.

Asselbergs-Neessen, V. (1989). *Kind, Kunst en Opvoeding* (diss). Amersfoort: Acco.

'B', (1864). Teekenen in verband met vormleer. *Nieuwe Bijdragen* pp. 46-53.

Bakkes, H. (1874). Zijn of niet zijn? *De Wekker 31*(57), (59).

Baravalle, H. von (1957). *Geometrie als Sprache der Formen.* Freiburg im Breisgau: Novalis-Verlag.

Barrau, J.A. (1926). *De onbemindheid der wiskunde.* Groningen-Den Haag: J.B. Wolters.

Bartels, A. (1963). *Een eeuw middelbaar onderwijs 1863-1963.* Groningen: J.B. Wolters.

Bartolini Bussi, M.G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathemetics 31*(1) pp. 11-41.

Baudet, P.J. (1824). *Meetkundig Schoolboek.* Deventer: L.A. Karsenbergh en J. de Lange.

Beaufort, W.H. de (1884). De onderwijzersexamens. *De Gids 48*(1) pp. 136-153.

Bergh, H. van den e.a. (red.) (1987). *Multatuli!* Stichting CPNB.

Beckers, D.J. (1993). *Eene onbepaalde Equatie. Een biografie van de mathematicus Jacob de Gelder (1765-1848)* (doct. scriptie geschiedenis). Katholieke Universiteit Nijmegen.

Beckers, D. (1996). Jacob de Gelder (1765-1848) en de didactiek van de wiskunde. *Euclides 71*(8) pp. 254-262.

Beckers, D. (1998). A.C. Clairaut en de geschiedenis van de wiskunde. *Euclides 73*(4) pp. 111-116.

Beeke, K. ter (1921). Rekenen en Wiskunde. *Verdieping en Belijning nr. 5. Geschriften voor de practijk van het Christelijk schoolleven in den nieuwen tijd* (red. D. Wouters en W.G. van de Hulst). Groningen: P. Noordhoff.

Beeloo, A. (1868). *A.H. Niemeijer's Grondbeginselen van Opvoeding en Onderwijs verkort* (bewerking). Purmerende: J. Schuitemaker.

Beem, D. en E. Muijlaert (1977). *En zij maakten van de School een Deugd. Een onderzoek naar de praktijk van het onderwijs, naar aanleiding van de wet van 1806, in Linschoten, Jutphaas, Montfoort en Ysselstein* (doct. scriptie historische pedagogiek). RU Utrecht.

Beer, T.H. de (1865). Aanteekeningen op het Verslag van den Minister van Binnenlandsche Zaken. *Nieuwe Bijdragen* pp. 268-276.

Beernink, R. en B. Donkers (1997). De processie van Echternach en de kerndoelen voor het basisonderwijs. *Spiegel 15*(2) pp. 69-80.

Benner, D. (1986). *Die Pädagogik Herbarts. Eine problemgeschichtliche Einführung in die Systematik neuzeitlicher Pädagogik.* Weinheim-München: Juventa-Verlag.

Berkel, K. van (1985). *In het voetspoor van Stevin. Geschiedenis van de natuurwetenschap in Nederland 1580-1940.* Meppel-Amsterdam: Boom.

Berkel, K. van (1992). E.J. Dijksterhuis en het onderwijs in de wiskunde. *Euclides 68*(4) pp. 102-109.

Berkel, K. van (1996). *Dijksterhuis. Een biografie.* Amsterdam: Bert Bakker.

Beth, H.J.E. (1934). Enkele beschouwingen in zake het meetkunde-onderwijs. *Euclides 10*

pp. 257-275.
Beth, H.J.E. (1938). Het nieuwe leerplan voor wiskunde (H.B.S. B). *Euclides 13* pp. 270-282.
Beth, E.W. (1935). *Rede en Aanschouwing in de Wiskunde* (diss.). Groningen-Batavia: P. Noordhoff.
Beth, E.W. (1938). Doel en zin van het meetkundeonderwijs. *Euclides 14* pp. 236-243.
Beth, E.W. (1939). De psychologische argumenten en richtlijnen voor de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde. *Euclides 16*(1) pp.1-23.
Beth, E.W. (1948). De wetenschap als cultuurfactor. *De functie der wetenschap.* 's-Gravenhage: H.P. Leopolds uitgevers-mij. pp. 7-19.
Beth, E.W. (1950). *Wijsgerige Ruimteleer* (Philosophische bibliotheek). Antwerpen: N.V. Standaardboekhandel/Nijmegen: N.V. Dekker & Van de Vegt.
Beth, E.W. (1962). Logische en denkpsychologische aspecten van het wiskunde-onderwijs. *Euclides 38*(5) pp.179-187.
Beyma thoe Kingma, F.H. van (1873). *Open adres aan de leden der Staten Generaal.* Heerenveen: N.A. Hingst.
Biggs, E.E. en J.R. Maclean (1969). *Freedom to learn.* Addison-Wesley (Canada).
Bishop, A. (1988). *Mathematical Enculturation. A cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Bladergroen, W.J. (1953). De genese van het geometrisch bewustzijn. *Vernieuwing van opvoeding en onderwijs 11*(103) pp. 198-201.
Blaupot ten Cate, S. (1875[2]). *De Wet op het Lager Onderwijs met aanteekeningen.* Groningen: J.B. Wolters.
Blaupot ten Cate, S. en G. van Milligen (1880[3]). *Handleiding tot de kennis der wet op 't Lager Onderwijs.* Groningen: J.B. Wolters.
Blaupot ten Cate, S. en A. Moens (1890[4]). *De wet op het lager onderwijs met aantekeningen (de wet van 1889).* (Bewerkt door G. van Milligen). Groningen: J.B. Wolters.
Bloem, H.W. (1866). Paedagogisch verslag aangaande den toestand van het onderwijs. *Maandblad van het N.O.G. 17*(5) pp. 85-148.
Bloem, H.W. en J. ter Gouw (1861). *De tentoonstelling voor onderwijs te Amsterdam in 1860.* Amsterdam: C.L. Brinkman.
Bloth, H.G. (1966). *Adolph Diesterweg. Sein Leben und Wirken für Pädagogik und Schule.* Heidelberg: Quelle & Meijer.
Boekholt, P.Th.F.M. (1991). *Onderwijsgeschiedenis.* Zutphen: Walburg Pers.
Boekholt, P.Th.F.M. (1998). *Het ongeregelde verleden* (inaugurele rede Universiteit van Utrecht). Van Gorcum.
Boekholt, P.Th.F.M. en E.P. de Booy (1987). *Geschiedenis van de School in Nederland.* Assen-Maastricht: Van Gorcum.
Boermeester, C. (1955). *Over meetkunde-onderwijs en psychologie. Het klassegesprek en andere didactische mogelijkheden voor het meetkunde-onderwijs aan MULO-scholen gebaseerd op psychologische inzichten.* Groningen-Djakarta: J.B. Wolters.
Boeser, A.L. (1858). Iets over vormleer als leervak op de lagere scholen. *De Nederlandsche Paedagoog 2* pp. 215-124.
Boeser, A.L. (1875). Middelen om de resultaten van ons onderwijs te verbeteren. *De Wekker 32*(27).
Bokhove, J. (1983). *Werken met kaarten.* Tilburg: Zwijsen.
Bokhove, J. (1995). Bouwsels, kaarten, foto's en plattegronden. Meetkunde in de kerndoelen. *Willem Bartjens 14*(5) pp. 10-14.
Boogman, J.C. e.a. (1988). *Geschiedenis van het moderne Nederland: politieke, economische en sociale ontwikkelingen.* Houten: De Haan.
Boomsma, G. (1974). *Handboek voor het moderne rekenonderwijs in de bassischool.* Amsterdam: Kohnstamm Instituut.
Booy, E. de (1977). *De Weldaet der Scholen. Het plattelandsonderwijs in de provincie Utrecht van 1580 tot het begin der 19de eeuw* (diss.). Utrecht.

Borel, Emile (1905). *Géométrie.* Paris: Librairie Armand Colin.
Bos, H.J.M. (1990). Wiskunde en maatschappij. *Euclides 65*(9) pp. 255-267.
Bos, H.J.M. (1993). 'The bond with reality is cut' – Freudenthal on the foundations of geometry around 1900. *Educational Studies in Mathematics 25(*1/2) pp. 51-58.
Bouman, H. (1858). Het onderwijs in de vormleer in de lagere school. *Nieuw Nederlandsch Tijdschrift voor Opvoeding en Onderwijs 4*(3) pp. 162-188.
Bouman, H. (1872). Vormleer. *De Schoolbode 4*, deel I pp. 410-418, deel II pp. 455-466.
Bouman, P.J. en J.C. van Zelm (1918). *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang met -als proeve van toegepaste logica- een rekenmethode voor de lagere school.* Amsterdam: W. Versluys.
Boyd, W. (1969). *Geschiedenis van opvoeding en onderwijs.* Utrecht-Antwerpen: Het Spectrum.
Boyer, C.B. (1985). *A history of mathematics.* Princeton: Princeton University Press.
Brandenburg, W.J. (1968). *Modernisering van het wiskunde-onderwijs* (diss.). Groningen: Wolters-Noordhoff.
Branford, Benchara (1921^{2}). *A study of mathematical education.* Oxford University Press.
Bree, L.W. de (z.j.). *Het platteland leert lezen en schrijven.* Amsterdam: P.N. van Kampen & Zoon.
Brink, J. van den (1974). Kieken. *Wiskobas Bulletin 4(*1) pp. 48-53.
Brink, J. van den (1976). *Waterland. Mathematische Weltkunde* (voordracht in Bremen). IOWO: interne publicatie.
Brink, J. van den (1978). Wiskundige wereldoriëntatie. Inhoud. *Wiskobas Bulletin 7(*4) pp.18-19.
Brink, J. van den (1979). Wiskundige wereldoriëntatie. Realistisch wiskundeonderwijs. *Wiskobas Bulletin 8*(3) pp. 76-81.
Brink, F.J. van den (1994). Meetkundeonderwijs te midden van theorieën. *Tijdschrift voor Didactiek der b-wetenschappen 12*(2) pp. 130-149.
Brosterman, Norman (1997). *Inventing Kindergarten.* New York: Harry N. Abrams, Incorporated.
Brouwer, C.J. en A. Bakker (1900). *Het voorbereidend lager onderwijs, handleiding voor aanstaande onderwijzeressen aan eene Fröbelschool.* Groningen: J.B. Wolters.
Brugmans, I.J. (1961a). *Paardenkracht en Mensenmacht. Sociaal-Economische Geschiedenis van Nederland 1795-1940.* 's-Gravenhage: Martinus Nijhoff.
Brugmans, I.J. (red.) (1961b). *Honderd vijfentwintig jaren arbeid op het onderwijsterrein 1836-1961.* Groningen: J.B. Wolters.
Brugsma, B. (1839). *Korte aanwijzing nopens het gebruik van twintig platen voor het aanschouwelijk onderwijs in de lagere- en kleine-kinderscholen.* Groningen: R.J. Schierbeek junior.
Brugsma, B. (1869^{8}). *Kort overzicht van de Opvoeding door het onderwijs in de lagere scholen.* Groningen: A.L. Scholtens.
Brugsma, B. (z.j.). *Redevoering ter herinnering van J.H. Pestalozzi's verdiensten, uitgesproken op den 18 januarij 1845* .
Bruner, J.S. (1967^{4}). *Toward a theory of instruction.* Cambridge-Massachusetts: The Belknap Press of Harvard University Press.
Bruyn, R. van der (1877). Een doodvonnis. *Nieuwe Bijdragen 3.*
Bunt, L.N.H. (1946). Over moeilijkheden van structurele aard in de meetkunde. *Paedagogische Studiën 23* pp. 178-189 (I), pp. 202-214 (II).
Bunt, L.N.H. (1949). *De leerstof van ons wiskunde-onderwijs.* Groningen-Batavia: J.B. Wolters.
Cadot, J. en D. Vroegindeweij (1986). *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde onderzocht* (doct. scriptie onderwijskunde). Utrecht: OW&OC.
Calcar, E. van (z.j.). *Het vlechten.* Leiden: A.W. Sijthoff.
Calcar, Elise van (1879). *Frederik Fröbel. Hoe hij opvoeder werd en wat de kinderwereld*

hem openbaarde. 's-Gravenhage: H. C. van Calcar.
Carpay, J. (1992). Adolph Diesterwegs Pädagogik im Zusammenhang von Gesellschaft und Schule. *Pädagogik der modernen Schule* (B. Fichtner u. P. Menck, Hrsg.) pp. 301-313. Weinheim und München: Juventa Verlag.
Casimir, R. (1919). *Uit het leven en werken van Jan Ligthart.* Groningen-Den Haag: J.B. Wolters.
Casimir, R. (1934). *Het Nederlandsch Lyceum van 1909 tot 1934.* Groningen-Den Haag-Batavia: J.B. Wolters.
Casimir, H.B.G. (1984). *Het toeval van de werkelijkheid.* Amsterdam: Meulenhoff.
Castelnuovo, Emma (1968). Les transformations affines dans le 1er cycle de l'école secondaire. *Educational Studies in Mathematics 1* pp. 274-288.
Castelnuovo, E. en M. Barra (1976). *Matematica nella realtà.* Turijn: Boringhieri.
Clairaut, A.C. (1920). *Éléments de Géométrie.* Paris: Gauthiers-Villars et Cie (heruitgave van de oorspronkelijke editie van 1765).
Clements, D.H. en M.T. Battista (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (Douglas A. Grouws, editor). New York: Macmillan Publishing Company pp. 420-464.
Coolidge, J.L. (1947, reprint). *A history of geometrical methods.* Oxford: Clarendon Press.
Cornaz-Besson, J. (1977). *Qui êtes-vous, monsieur Pestalozzi?* Yverdon: Editions de la Thièle.
Coxeter, H.S.M. (1969). *Introduction to geometry.* New York-London-Sydney-Toronto: John Wiley & Sons.
CPS/CWRW (1984). *Reken/wiskundeprogramma's voor kleuters in de basisschool.*
Critas Jr. (1907). *De school voor het leven eene contradictio in terminis. Pleidooi voor eenvoudig praktisch onderwijs.* Almelo: W. Hilarius Wzn.
Cuypers, K. (1940). *Het aankweken van het wiskundig denken.* Antwerpen: De Sikkel.
Dalen, D. van (1990). *L.E.J. Brouwer, wiskundige en mysticus.* Logic Group Reprint series 54. Department of Philosophy: University of Utrecht.
Dalfsen, B.M. van (1930). Axioma of hypothese. *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs 26* pp. 1065-1069.
Dantzig, D. van (1926). Over de maatschappelijke waarde van onderwijs in de wiskunde. *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 3* pp. 187-196.
Dantzig, D. van (1948). Over de maatschappelijke functie van zuivere en toegepaste wetenschappen. *De functie der wetenschap.* 's-Gravenhage: H.P. Leopolds uitgevers-mij pp. 20-40.
Davis, P.J. en R. Hersh (1984). *The mathematical experience.* Middlesex: Penguin Books Ltd.
Davis, P.J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathemetics 24*(4) pp. 333-344.
De dagboeken van P.N. Panken 1819-1904. Memorieboek van een Brabantse schoolmeester. Eerste band: 1819-1858 (bezorgd door P. Meurkens, 1993). Eindhoven: Kempen Uitgevers.
De eerste vijf en twintig jaren uit de geschiedenis van een Amsterdamsche Kunstschool 1881-1906.
De Methode van Fröbel voor de Jonge Jeugd, in practijk gebracht door de Leidsche Kweekschool (6 deeltjes). Uitgave van Marie de Bock-Hardenberg en W. Haanstra (z.j.).
Deen, N. (1969). *Een halve eeuw onderwijsresearch in Nederland. Het Nutsseminarium voor Pedagogiek 1919-1969* (diss.). Amsterdam: Wolters-Noordhoff.
Delden, P.S. van (1838). *Handleiding voor onderwijzers en onderwijzeressen in scholen voor jonge kinderen.* Deventer: J. de Lange.
Det, E.J. van (1983). *De Bond van Nederlandse Onderwijzers.* Amsterdam: SUA.
Delekat, F. (1968). *Johann Heinrich Pestalozzi. Mensch-Philosoph-Politiker-Erzieher.* Heidelberg: Quelle & Meyer.
Dewey, J. (1909). *How we think.* London: D.C. Heath.
Die Grundschulzeitschrift. Special Geometrie und Sachrechnen (z.j.).

Diels, P.A. (1933). *Op paedagogische verkenning*. Groningen-Den Haag-Batavia: J.B. Wolters.
Dienes, Z.P. (1965). *Modern mathematics for young children*. Pinnacles-Harlow-Essex: The Educational Supply Association Limited School Materials Division.
Dienes, Z.P. (1966[2]). *Mathematics in the primary school*. London: Macmillan & Co.
Dienes, Z.P. & M.A. Jeeves (1965). *Thinking in structures*. London: Hutchinson Educational.
Dienes, Z.P. & M.A. Jeeves (1970). *The effects of structural relations on transfer*. London: Hutchinson Educational.
Dienes, Z.P. en E.W. Golding (1972[2]). *De eerste stappen in de wiskunde 1. Logica en logi-spelletjes*. 's-Hertogenbosch: L.C.G. Malmberg, Lier: Jozef van In.
Dienske, M., T. Konings en H. Krabbendam (1992). *Wiskunde voor leerlingen van 12 tot 16 jaar, meetkunde*. Amsterdam: APS.
Diephuis, G. (1859). *Handleiding tot de kennis der wetgeving op het Lager Onderwijs in Nederland*. Groningen: J.B. Wolters.
Diesterweg, F.A.W. (1822). *Leitfaden für den ersten Unterricht in der Formen- Größen- und räumlichen Verbindungslehre oder Vorübungen zur Geometrie*. Elberfeld: Bäschler'sche Verlagsbuchhandlung.
Diesterweg, F.A.W. (1832[2]). *Der Unterricht in der Klein-Kinder-Schule*. Crefeld: Funcke'sche Buchhandlung.
Diesterweg, F.A.W. (1844[3]). *Wegweiser für Deutsche Lehrer*. Essen: G.D. Bädeker.
Diesterweg, A. (1850[4]). *Wegweiser zur Bildung für Deutsche Lehrer*. Essen: G.D. Bädeker.
Diesterweg, Adolph (1858). Het onderwijs in vormleer en ruimteleer. *Nieuwe Bijdragen* pp. 955-977.
Diesterweg's Wegweiser zur Bildung für Deutsche Lehrer (1873[5]). Essen: G.D. Bädeker.
Dijksterhuis, E.J. (1921). Over wiskundig onderwijs. *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs 17*(22) pp.947-968.
Dijksterhuis, E.J. (1924a). Moet het meetkundeonderwijs gewijzigd worden? *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen 1*(1) pp. 1- 26.
Dijksterhuis, E.J. (1924b). Antwoord aan mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa. *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen 1* pp. 60-68.
Dijksterhuis, E.J. (1925). Het wiskunde-onderwijs. *De Gids 89*(4) pp. 73-93.
Dijksterhuis, E.J. (1926). Ontwerp voor een eindexamenprogramma voor de H.B.S. met vijfjarigen cursus. *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen 3* pp. 37-46.
Dijksterhuis, E.J. (1929). *De Elementen van Euclides*. Groningen: P. Noordhoff.
Dijksterhuis, E.J. (1934). Epistemisch wiskunde-onderwijs. *Euclides 10* pp. 165-213.
Dijksterhuis, E.J. (1937). Problemen van het wiskundeonderwijs. *Euclides 14* pp. 99-118.
Dijksterhuis, E.J. (1939). Vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. *Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding 1*(4) pp. 109-111.
Dijksterhuis, E. J. (1990). *Clio's stiefkind* (met een inleiding van K. van Berkel). Amsterdam: Bert Bakker.
Dittes, F. (1874). *Geschiedenis van de opvoeding en het onderwijs* (vert. J. Versluys). Groningen: P. Noordhoff en M. Smit.
Dodde, N.L. (1968). *Het Rijksschooltoezicht in de Bataafse Republiek* (diss.). Groningen: Wolters-Noordhoff.
Dodde, N.L. (1983). *Het Nederlandse onderwijs verandert, ontwikkelingen sinds 1800*. Muiderberg: Coutinho.
Dodde, N.L. (1987). *The influence of Pestalozzi on the Dutch schoolsystem during the first half of te 19th century*. Paper: International Standing Conference for the History of Education. Pecs, Hungary.
Dodde, N.L. (1991a). *...tot der kinderen selffs proffijt..., een geschiedenis van het onderwijs te Rotterdam*. 's-Gravenhage: SDU.
Dodde, N.L. (1991b). *De rol van de leraar in de school van de toekomst en het verleden*. Utrecht: Vakgroep Onderwijskunde Utrecht, Maatschappij tot Nut van 't Algemeen.

Dodde, N.L. (1997). *Waarom leren we lezen?* (afscheidscollege). Edam: Maatschappij tot Nut van 't Algemeen.
Dogger, A. (1982). *Oppervlakte bij Wiskobas en inzichtverwervend handelen* (doct. scriptie onderwijskunde). Utrecht: OW&OC.
Donaldson, M. (1978). *Children's Minds.* Glasgow: Fontana/Collins.
Doppenburg, B. en A. Veltman (1995). Spiegelen. *Willem Bartjens 15*(2) pp. 24-27.
Dormolen, J. van (1974). *Didactiek van de wiskunde.* Utrecht: Oosthoek's Uitgeversmaatschappij.
Douma, H. (1899). *Het Leerplan. Het concentratie-beginsel, historisch beschouwd – toegepast op het leerplan der lagere school.* Purmerend: J Muusses.
Douma, H. (1911[8]). *Handboek voor de Methodiek der Leervakken.* Purmerend: J Muusses.
Douma, H. (1922). *De ontwikkeling van het lager onderwijs in Nederland.* Zutphen: W.J. Thieme & Cie.
Dover Wilson, J. en F.A. Cavenagh (eds.) (1932). *Herbert Spencer on Education.* Cambridge.
Draijer, H. (1993). De hoogtemeter. *Willem Bartjens 12*(5) pp. 40-43.
Duhamel, J.M.C. (1865 1ère partie), (1866 2ème partie). *Méthodes dans les sciences de raisonnement.* Paris: Gauthier-Villars.
Duncker, K. (1966). *Zur Psychologie des produktiven Denkens.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.
Dunk, H.W. von der (1994). Het ozongat van de geschiedenis. *Vrij Nederland* 28 mei 1994 pp. 38-41.
Duparc, H.J.A. (1960). Welke gevolgen brengt de veranderende plaats der wiskunde in de maatschappij met zich mede? *Euclides 36*(4) pp.177-200.
Eck Jr. P.L. van (1927). *Pestalozziana, bibliografiese bijdrage tot de kennis van Pestalozzi's invloed op de Nederlandse Pedagogiek.* Groningen-Den Haag: J.B. Wolters.
Edsgard, John. C. (1970). Some ideas in geometry that can be taught from K-6. *Educational Studies in Mathematics 2* pp. 478-495.
Eenige stellingen over de Vormleer (1863). *Maandblad N.O.G. 14*(5) pp. 75-78.
Eger, J.C. (1860). *Beginselen der meetkunde van Dr. Oskar Schlömilch. Eerste deel, planimetrie.* Groningen: J. Oomkens, J. Zoon.
Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1915). Over de rol der axioma's en der bewijzen in de meetkunde. *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs 12*(14) pp. 457-470.
Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1924a). *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?* Groningen: J.B. Wolters.
Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1924b). Moet het meetkundeonderwijs gewijzigd worden? Een antwoord aan de heer E.J. Dijksterhuis. *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen 1* pp. 47-59.
Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1931). *Übungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse.* Den Haag: Martinus Nijhoff.
Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1939). Hoe kan de verfrissing van het schoolonderwijs worden bereikt? *Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding 1*(2) pp. 39-41.
Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1960). *Didactische opstellen.* Zutphen: W.J. Thieme & Cie.
Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1962). Ingezonden brief. *Mededelingenblad van de Wiskunde Werkgroep van de WVO 10*(1-2).
Ehrenfest-Afanassjewa, T. en H. Freudenthal (1951). *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?* Purmerend: J. Muusses.
Elffers, J. (1974). *Het oude Chinese vormenspel, Tangram.* Keulen: DuMont.
Eliot, J. & N.J. Salkind (1975). *Children's spatial development.* Springfield-Illinois: Charles C. Thomas.
Essen, Mineke van (1990). *Opvoeden met een dubbel doel, twee eeuwen meisjesonderwijs in Nederland.* Amsterdam: SUA.
Everdingen, E. van (1874). De resultaten van het lager onderwijs. *De Wekker 31*(31).
Fabian, Eginhard (1986). *Die Entdeckung der Kristalle.* Leipzig: VEB Deutscher Verlag für

Grundstoffindustrie.
Faes, W. (1996). Doen met je handen en je hersens. *Willem Bartjens 14*(5) pp. 5-10.
Feikema, R.W. (1929). *De totstandkoming van de schoolwet van Kappeyne* (diss.). Amsterdam.
Feynman, R.P. (1965). New Textbooks for the New Mathematics. *Engineering and Science 28* pp. 9-15.
Feijs, E. e.a. (1987). *Almanak reken-wiskundemethoden*. Utrecht: OW&OC.
Feijs, E., J. de Lange, M van Reeuwijk en A. Roodhardt (1992). Nederlands wiskundeonderwijs in Amerika. *Nieuwe Wiskrant 11*(3) pp. 11-13.
Feijs, E. en J. de Lange (1994). Een andere koers in het Amerikaanse meetkunde-onderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 12*(4) pp. 25-32.
Feijs, E. en J. de Lange (z.j.). *From a different angle* (niet gepubliceerd). Utrecht: Freudenthal Instituut.
Fielker, David S. (1979). Strategies for teaching geometry to younger children. *Educational Studies in Mathematics 10* pp. 85-133.
Fischbein, E. (1973). Intuition, structure and heuristic methods. *Developments in mathematical Education* (A. G. Howson, editor) pp. 222-232.
Fischer, Sophie (1909). *Fröbelbewaarscholen*. Amsterdam: S.L. van Looy.
Frankrijker, J.J.G.B. de (1988). *De Katholieke Onderwijzersopleiding, organisatie en ideologie 1889-1984* (diss. RU Leiden). Meppel: Krips Repro.
Freudenthal, H. (z.j.). *Geometrie in der Grundschule* (lezing). IOWO: interne publicatie.
Freudenthal, H. (1945). *Opvoeding tot denken* (lezing voor de WVO in De Steeg, ongepubliceerd).
Freudenthal, H. (1957a). Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. *Nieuw Archief voor Wiskunde, derde serie, deel V* pp. 105-141.
Freudenthal, H. (ed.) (1957b). *Report on Methods of Initiation into Geometry*. Groningen: J.B. Wolters.
Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? *Der Mathematikunterricht 9*(4) pp. 5-29.
Freudenthal, H. (1966). De betekenis van de wetenschappelijke basis voor de leraar. *Verslag van het zestiende congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen te Utrecht*. pp. 5-11. Groningen: Wolters.
Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics 3* pp. 413-435.
Freudenthal, H. (1972). Plaatjes en praatjes. *Wiskobas Bulletin 1*(2-3) pp. 99-101.
Freudenthal, H. (1973a). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
Freudenthal, H. (1973b). What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education. *Developments in Mathematical Education* (A. G. Howson, editor) pp. 101-114.
Freudenthal, H. (1974). Wat is meetkunde? *Euclides 50*(4/5) pp.151-152.
Freudenthal, H. (1976). Van 't zelfde. *Wiskobas Bulletin 6*(1) pp. 3-5.
Freudenthal, H. (1977). Wandelingen met kinderen. *Verslag KLOS konferentie/Beekbergen '77*. Utrecht: IOWO.
Freudenthal, H. (1978a). *Weeding and Sowing*. Dordrecht-Boston: D. Reidel Publishing Company.
Freudenthal, H. (1978b). Omgangstaal en geformaliseerde taal. *Wiskrant 13* pp. 4-5.
Freudenthal, H. (1979a). Structuur der wiskunde en wiskundige structuren; een onderwijskundige analyse. *Pedagogische Studiën 56*(2) pp. 51-60.
Freudenthal, H. (1979b). Onderwijsontwikkeling voor de kleuterschool (1) en (2). *De Wereld van het Jonge Kind 6*(7) pp. 143-147, *6*(8), pp. 169-172.
Freudenthal, H. (1984a). *Appels en peren / wiskunde en psychologie*. Apeldoorn: Van Walraven.

Freudenthal, H. (1984b). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren.* Utrecht: OW&OC.
Freudenthal, H. (1985). Wat is meetkunde? *Meetkunde op de basisschool, reader NVORWO-Panama studiedag 29 maart 1985* (E. de Moor ed.) pp. 3-12.
Freudenthal, H. (1986). De Werkgroep Wiskunde, Herinneringen. *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs 45*(1/2) pp. 56-58.
Freudenthal, H. (1987a). Meetkunde. Van 'Ik zie het zo' tot 'Hoe weet ik dat?' *Nieuwe Wiskrant 6*(2) pp. 32-36.
Freudenthal, H. (1987b). *Schrijf dat op Hans.* Amsterdam: Meulenhoff Educatief.
Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers.
Freudenthal, H., G.M. Janssen en W.J. Sweers (eds) (1976). *Five years IOWO. On H. Freudenthal's retirement from the directorship of* IOWO. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
Freudenthal Instituut en SLO (1992a). *Trajectenboek wiskunde 12-16.* Utrecht, Enschede: COW.
Freudenthal Instituut en SLO (1992b). *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16,* Band 1 en 2. Utrecht, Enschede: COW.
Freudenthal Instituut en SLO (1992c). *Wiskunde 12-16. Een boek voor docenten.* Utrecht, Enschede: COW.
Fröbel, Friedrich Wilhelm August (1926). *Die Menschenerziehung. Die Erziehungs-, Unterrichts- und Lehrkunst* (herausgegeben von Hans Zimmerman). Leipzig: Verlag von Philipp Reclam jun.
Galen, F. en M. Doorman (1995). Doosjes ontwerpen. *Willem Bartjens 14*(5) pp. 20-25.
Gardner, Howard (1985). *Frames of Mind. The Theory of Multiple Intelligences.* London: Paladin Books, Granada Publishing Ltd.
Gedenkboek ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan van het Genootschap van Leeraren aan Nederlandsche Gymnasiën 1830-1930 (1930). Amersfoort.
Geel, R. (1989). *Niemand is meester geboren* (diss. UvA). Muiderberg: Coutinho.
Gedenkboek ter herinnering aan het Gouden feest van de Rijkskweekschool voor Onderwijzers te Haarlem (1912). Amsterdam: W. Versluys.
Gedenkboek voor Prof. Dr. Ph. A. Kohnstamm (1957). Groningen-Djakarta: J.B. Wolters.
Gediking, F. (1874). Is vormleer een leervak? *De Wekker 31*(53), (54).
Gelder, J. de (1826). *Verhandeling over het verband en den zamenhang der natuurlijke en zedelijke wetenschappen.* 's Gravenhage en Amsterdam: Gebroeders Van Cleef.
Gelder, L. van, E.J. Wijdeveld, F. Goffree en G. Krooshof (1968). *Moderne wiskunde en het basisonderwijs.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Gerdes, P. (1988). On culture, geometrical thinking and mathematics education. *Educational Studies in Mathemetics 19*(2) pp. 137-162.
Gleuns, W. (1874). De vormleer als leervak der lagereschool. *De Schoolbode 5* pp. 257-275.
Goddijn, A. (1980a). In de schaduw van de meesters. *Wiskrant 20* pp. 1-8.
Goddijn, A. (1980b). Er komt steeds meer lijn in de meetkunde. *Wiskrant 21* pp. 32-34.
Goddijn, A. (1980c). Wiskunde in de brugperiode: In de schaduw van de meesters. *Wiskobas Bulletin 9*(4/5) pp. 41-47.
Goddijn, A. (1996). De diepte van het platte vlak. *Nieuwe Wiskrant 15*(3) pp. 6-12.
Goddijn, A. (1997). Rond de rechte lijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 15*(4) pp. 3-12.
Goeij, E. de (1998). *Tusendoelen Annex Leerlijnen* (doct. scriptie onderwijskunde UU).
Goeje, M.J. de (1878). *Aanteekeningen op het wetsontwerp Kappeyne tot regeling van het lager onderwijs.* Leiden: E.J. Brill.
Goffree, F. (z.j). *Ontdekken in mozaïeken.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Goffree, F. (1970a). *Logica-Verzamelingenleer-Boolse Algebra.* Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Culemborg: Kluwer/Stam.

Goffree, F. e.a. (1970b). *Øntwerpleerplan Wiskunde op de basisschool* (interne publicatie). Utrecht: CMLW (W96/70).
Goffree, F. (1973-1974). *Logboek Gorkum 4* (persoonlijk dagboek, ongepubliceerd).
Goffree, F. (1974). Inleiding en leeswijzer. *Euclides 50*(4-5) pp.129-141.
Goffree, F. (1976). De onderwijzersopleiding: een (leerplan)ontwikkelingsgebied. *Pedagogische Studiën 53*(7) pp. 239-264.
Goffree, F. (1977). *Kijken, doen, denken en zien. Analyse van wiskundig-didaktisch werk door P.I-studenten.* Utrecht: IOWO.
Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met Wiskobas* (diss.). Utrecht: IOWO.
Goffree, F. (1982). *Wiskunde & Didactiek. Eerste deel.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Goffree, F. (1983a). *Wiskunde & Didactiek. Tweede deel.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Goffree, F. (1983b). *Wiskunde & Didactiek. Derde deel.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Goffree, F. (1992[2]). *Wiskunde en Didactiek . Deel 2.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Goffree, F. (1993). *Kleuterwiskunde.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Goffree, F. (1994[4]). *Wiskunde en Didactiek. Deel 1.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Goffree, F. (1985). *Ik was wiskundeleraar.* Enschede: SLO.
Goffree, F. (1991). HF: Werken aan Wiskunde-Onderwijs. *Nieuw Archief voor Wiskunde, vierde serie, deel 9* pp. 163-202.
Goffree, F. (1992). *Hans Freudenthal. Working on mathematics education.* Enschede-Amsterdam.
Goffree, F., A. Treffers en E. Wijdeveld (1971). Wiskunde op de basischool (II). *Euclides 47*(2) pp. 45-53.
Goffree, F., H. Jansen en J. Keijnemans (1977). *Kijken, doen, denken en zien.* Utrecht: IOWO.
Goffree, F. en J. de Gooijer-Quint (1983). Kleuters, wiskunde en de opleiding voor leraren basisonderwijs. *Panama Cursusboek 1* (E. de Moor, ed.) pp. 54-69. Utrecht: OW&OC.
Gooijer-Quint, J. de (1979a). *Onderwijssituaties voor 4-8 jarigen.* Utrecht: IOWO.
Gooijer-Quint, J. de (1979b). *Aktiviteitenplan Fatima-kleuterschool Bussum 1978-1979* (interne publicatie). Utrecht: IOWO.
Gooijer-Quint, J. de (1979c). *Heb je wel gehoord van de zevensprong? Op zoek naar wiskundige momenten in de kleuterschool* (afstudeerscriptie MO-B pedagogiek). Utrecht: IOWO (interne publicatie).
Görlitz, P.K. (1849). *Geschiedkundig overzicht van het lager onderwijs in Nederland.* Leiden: D. du Mortier & Zoon.
Goudswaard, N.B. (1981). *Vijfenzestig jaren nijverheidsonderwijs.* Assen: Van Gorcum.
Gouka, M. (z.j.). *De Kweekschool. Handleiding voor moeders en aankomende onderwijzers en onderwijzeressen, bij de opvoeding en het onderwijs van jonge kinderen in de huisgezinnen en scholen.* Rotterdam: W. Wenk.
Graßmann, J.G. (1817). *Raumlehre für Volksschulen.* Berlin: Realschulbuchhandlung.
Gravemeijer, K.P.E. (1983). *De grondslagen van het programma Rekenen en Wiskunde.* Rotterdam: OSM.
Gravemeijer, K. (1988). *Meetkunde op de basisschool; een meetkundige wereldoriëntatie.* Curr 7611 pp. 65-80.
Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education* (diss.). Utrecht: Freudenthal Instituut.
Gravemeijer, K. en J-M. Kraemer (1984). *Met het oog op ruimte* (Onderwijskundige Brochuren Reeks 306). Tilburg: Zwijsen.
Grazer, G. (z.j.). *Rekenmetodiek en moderne psychologie.* Opvoedkundige Brochurenreeks nr. 68. Tilburg: Drukkerij van het R.K. Jongensweeshuis.
Griffiths, H.B. en A.G. Howson (1974). *Mathematics: Society and Curricula.* Cambridge University Press.
Groot, A.D. de (1955). De psychologie van het denken en het meetkundeonderwijs. *Euclides 30* pp. 224-236.
Groot. A.D. de (en medewerkers) (1968). *Bewegingsmeetkunde. Verslag van een gecontro-*

leerd innovatie-experiment. Groningen: Wolters-Noordhoff.
Gunning Wz., J.H. (1898). Organizatie van ons onderwijs. *De Gids 62* (vierde serie *16)* pp. 188-238.
Gunning Wz., J.H. (1917[2]). *Verzamelde paedagogische opstellen (tweede bundel).* Amsterdam: S.L. van Looy.
Haan, Lize de (1925). In memoriam Wybrandus Haanstra. *Volksontwikkeling 7* pp. 33-40. Amsterdam: Mij. tot Nut van 't Algemeen.
Haan, Lize de (1937). *Leidraad bij de methodiek in de kleuterschool.* Utrecht: H.J. Smits.
Haan, Lize de (1952). *Fröbels plaats in de moderne onderwijssystemen.* Groningen-Djakarta: J.B. Wolters.
Haanstra, W. (1885). *Willen en streven der Kweekschool voor Bewaarschoolhouderessen te Leiden (naar aanleiding van het programma van een eind-examen).* Leiden: Louise Hardenberg.
Haanstra Kweekschool 1867-1982. Gedenkschrift.
Handboek voor de onderwijzers op de openbare lagere scholen binnen het Bataafsch Gemeenebest, vervaardigd op last van den Agent van Nationale Opvoeding, eerste deel (1803). Amsterdam: Pieter den Hengst.
Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen, Theil I.* Leipzig: Leopold Voss.
Harberts, D. (1885). Een en ander over het onderwijs in de vormleer op de lagere school. *Het Schoolblad 14*(16).
Hartman, J.A. en P.M. van Hiele (1972). *Van A tot Z, werkboek der wiskunde voor L.T.O., deel I brugklas.* Purmerend: J. Muusses.
Heege, H. ter en E. de Moor (1977). *Oppervlakte. Leerplanpublikatie 7* (handleiding plus werkblok) (R. de Jong, ed.). Utrecht: IOWO.
Heijden, M.K. van der (1993). *Consistentie van aanpakgedrag* (diss.). Lisse: Swets & Zeitlinger.
Heiland, Helmut (1989). *Die Pädagogik Friedrich Fröbels. Aufsätze zur Fröbelforschung 1969-1989.* Hildesheim-Zürich-New York: Georg Olms Verlag.
Heiland, Helmut (1990). *Bibliografie Friedrich Fröbel. Primär- und Sekundärliteratur 1820-1990.* Hildesheim-Zürich-New York: Georg Olms Verlag.
Heiland, Helmut (1995[2]). *Friedrich Fröbel.* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.
Hemkes Kz., H. (1871). Schoolbezoek. *De Wekker 28*(31).
Hemkes, H. (1858). *Wet op het Lager Onderwijs van 13 augustus 1857 met aantekeningen.* Groningen: J. Oomkens J. zoon.
Herbart, J.F. (1804). *Pestalozzi's Idee eines ABC der Anschauung.* Göttingen: Johann Friedrich Röwer.
Herbold, A.F. (1849). De Methode van Teekenonderwijs van de Gebroeders Ferdinand en Alexander Dupuis. *Nieuwe Bijdragen* pp. 115-126 en pp. 232-247.
Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathemetics 24*(4) pp. 389-400.
Heuvel-Panhuizen, M. van den (1996). *Assessment and realistic mathematics education* (diss.). Utrecht: CD-b Press.
Heuvel-Panhuizen, M. van den en H. Vermeer (1999). *Verschillen tussen meisjes en jongens bij het vak rekenen-wiskunde. Eindverslag MOOJ onderzoek.* Utrecht: Freudenthal Instituut.
Heyerick, L. (1995). Meetkunde (leereenheid 17). *Naar een nieuwe wiskundedidactiek voor de basisschool en de basisseducatie* (L. Verschaffel, red.). Studiecentrum Open Hoger Onderwijs, Acco.
Hiele, P.M. van (1954). Routine (2). *Mededelingenblad Wiskunde Werkgroep der WVO 2*(2).
Hiele, P.M. van (1955). De niveau's van het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van het V.H.M.O. *Paedagogische Studiën 32* pp. 289-297.
Hiele, P.M. van (1957). *De problematiek van het inzicht* (diss.). Utrecht.

Hiele, P.M. van (1961). Tendenzen van de huidige eindexamens. *Mededelingenblad Wiskunde Werkgroep der WVO 9*(10) pp. 3-5.
Hiele, P.M. van (1966). Zal de modernisering van de wiskunde ook gevolgen hebben voor het rekenen in het basisonderwijs? *Vernieuwing van opvoeding en onderwijs 22* pp. 475-479.
Hiele, P.M. van (1968). Het koncept leerplan wiskunde voor Rijksscholen. *Vernieuwing van opvoeding en onderwijs 27* pp. 129-133.
Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht.* Purmerend: Muusses.
Hiele, P.M. van (1964). T. Ehrenfest-Afanassjewa. *Euclides 39*(6) pp. 257-259.
Hiele, P.M. van (1981). *Struktuur.* Purmerend: Muusses.
Hiele, P.M. van (1997). *Structuur.* Zutphen: Thieme.
Hiele, P.M. van en D. van Hiele-Geldof (1948). *Werkboek der Meetkunde 1 en 2.* Purmerend: J. Muusses.
Hiele, P.M. van en D. van Hiele-Geldof (1957). Een fenomenologische inleiding tot de meetkunde. *Euclides 33*(2) pp. 33-47.
Hiele, P.M. van en D. van Hiele-Geldof (1963). *Van Figuren naar Begrippen 1,2 en 3.* Purmerend: Muusses.
Hiele-Geldof, D. van (1957). *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.* (diss.). Utrecht.
Hilbert. D. (1968^{10}). *Grundlagen der Geometrie.* Stuttgart: B.G. Teubner.
Hilgard, E.R. en R.C. Atkinson (1967^{4}). *Introduction to Psychology.* New York: Harcourt, Brace & World.
Hoekstra, Tj. (1870). Denkbeelden van Duitsche opvoedkundigen over vormleer in verband met het meetkunstig teekenen. *De Oefenschool 31* pp. 161-171.
Hoffmann, Erika (1951). *Friedrich Fröbel. Ausgewählte Schriften.* Godesberg: Helmut Kupper.
Hoppe, Th.J. en J.H.M. Bosman (1878). *De Wet op het Lager Onderwijs, met den zakelijken inhoud der kamerdebatten, toelichtingen en opheldering.* Tiel: D. Mijs.
Horrik, H.A.Th. van (1928). *Hollands Einfluss auf Belgien und Deutschland auf dem Gebiet der Erziehung und Fürsorge im Frühkindlichen Alter* (diss.). München.
Houël, J. (1867). *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire.* Paris: Gauthier-Villars.
Howson, A.G. (ed.) (1973). *Developments in mathematical Education.* Proceedings of the Second Congress on Mathematical Education. Cambridge University Press.
Howson, G., C. Keitel en J. Kilpatrick (1981). *Curriculum development in mathematics.* Cambridge University Press.
Idenburg, Ph.J. (1964^{2}). *Schets van het Nederlandse Schoolwezen.* Groningen: J.B. Wolters.
Iersel, P. van (1958). Figuurrekenen. *Paedagogische Studiën 35* pp. 62-93.
Imelman, J.D. en W.A.J. Meijer (1986). *De Nieuwe School, gisteren & vandaag.* Amsterdam-Brussel: Elsevier.
In memoriam J. Versluys. (1920). *Wiskundig Tijdschrift* (red. J. Vaes) *16* pp. 244-247.
Inleidende meetkunde (1959). *Mededelingen van het Pedagogisch Centrum van de N.O.V., no. III.* Groningen: J.B. Wolters.
Israel, August (1970). *Pestalozzi-Bibliographie.* Hildesheim-New York: Georg Olms Verlag.
J.H.St. (1883). Hulpmiddelen bij het onderwijs in de vormleer. *School en Studie 5*(1) pp. 13-21.
Jacobs, H.J. Jr. (1961). Welke ontwikkelingsmomenten zijn er in het werk van de Wiskunde Werkgroep van de afgelopen 25 jaar op te merken? *Euclides 37*(1) pp. 1-10.
Janssen, G.M., A.N. van der Geest en W. Swüste (1972). *Rekenactiveringsprogramma.* Den Bosch: Malmberg.
Janssen, J. e.a. (1992). *Toetspakket Reken/wiskunde 1.* Arnhem: Cito.
Janssen, J. e.a. (1994). *Toetspakket Reken/wiskunde 2.* Arnhem: Cito.
Jong, B.C. de (1996). *Jan Ligthart (1859-1916). Een schoolmeesterpedagoog uit de schilderswijk* (diss.). Groningen: Wolters-Noordhoff.

Jong, C. de (1930). De "Plaats, waar de logica onzin schijnt" en de wiskunde. *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs 26* pp. 1073-1074.
Jong, R. de (ed) (1976). *Leerplanpublikatie 3. Bussen en blokken.* Utrecht: IOWO.
Jong, R. de (ed.) (1978). *Oppervlakte (2). Leerplanpublikatie 9. Handleiding plus werkblok.* Utrecht: IOWO.
Jong, R. de (1983). Wiskunde van 4 tot 8. *Panama Cursusboek 1* (E. de Moor, ed.) pp. 107-110. Utrecht: OW&OC.
Jong, R. de (1986). *Wiskobas in methoden* (diss.). RU Utrecht: OW&OC.
Jong, S. de (z.j.). *Examens voor de Hoofdacte 1888.* Haarlem: W.H.J. van Nooten.
Jong Jz., S. de (1879). *Acte-examens. Schriftelijke werkzaamheden opgegeven op verschillende acte-examens voor hoofd- en hulponderwijzers, en hoofd- en hulponderwijzeressen. Eerste stukje.* Schoonhoven: S. & W.N. van Nooten.
Jong Jz., S. de en A.L. Roest (1869). *250 Rekenkundige Voorstellen opgegeven bij Acte-examens voor hulp-onderwijzers.* Amsterdam: A. Hoogenboom.
Jonker, A.E.M. (1992). Het onderwijs in Delft. *De stad Delft. Cultuur en maatschappij van 1813 tot 1914.* (J.W.C. Hilkhuijzen e.a. red.). pp. 195-204. Delft: Stedelijk museum Het Prinsenhof.
Kalff Jr., G. (1930a). Axioma of hypothese? *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs 26* pp. 712-713.
Kalff Jr., G. (1930b). Het Gymnasium en de wiskunde. *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs 26* pp. 1007-1014.
Kandel, E.R. en R.D. Hawkins (1992). The biological basis of learning and individuality. *Scientific American 267*(3) pp. 53-60.
Keijzer, R. (1992). Bouwen met blokken. *Willem Bartjens 12*(2) pp. 38-42.
Karsten, J.W. (1824). *Volks-meetkunde.* Amsterdam: Johannes van der Hey en Zoon.
Kemme, S. (1984). *Taalaspekten van het wiskunde-onderwijs.* Utrecht: OW&OC.
Kerschensteiner, G. (1919). *De komende school* (vertaling-bewerking van *Grundfragen der Schulorganisation* uit 1907 door A. de Vletter). Zeist: J. Ploegsma.
Kerschensteiner, G. (1920, nachdruck). *Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichts.* Leipzig-Berlin: B.G. Teubner.
Keune, F. (1998). Hoe realistisch is abstract? *Nieuwe Wiskrant 17*(4) pp. 48-49 (met een weerwoord van M. Kindt).
Keur uit de eerste jaargang van het tijdschrift 'Denken en rekenen' (1969). 's-Hertogenbosch: Malmberg.
Keijzer, R. (1992). Pak er even een schaar bij... *Euclides 68* pp. 82-83.
Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (Douglas A. Grouws, editor). New York: Macmillan Publishing Company pp. 3-38.
Kindt, M. (1992). De bissectricestelling. *Euclides 68*(2) pp 37-52.
Kindt, M. (1993). *Lessen in Projectieve Meetkunde.* Utrecht: Epsilon Uitgaven.
Kindt, M. en J. de Lange (1984). *Lessen in ruimtemeetkunde 1 en 2.* Utrecht: IOWO.
Kleefstra, J. (1887). *Leerstof en Methode. Practische methodiek van het onderwijs en de opvoeding, ten dienste van onderwijzers.* Tiel: D. Mijs.
Kleefstra, J. (1905). *Wat maken wij van onze jongeren?* Haarlem: De Erven F. Bohn.
Kleefstra, J. (1906). *De School der Toekomst en wat haar in de weg staat.* Bussum: C.A.J. van Dishoeck.
Kleefstra, J. (1909). *Over het onderwijs in de wiskunde.* Haarlem: H.D. Tjeenk Willink.
Kleefstra, J. (1913). *Grondslagen van opvoeding en onderwijs.* Amsterdam: De maatschappij voor goede en goedkoope lectuur.
Kleefstra, J. (1921). *Nieuwe vondsten op 't gebied der wiskunde.* Amsterdam: Maatschappij voor goede en goedkoope lectuur.
Kleefstra, J. (z.j.). *Wat wil de Brinioschool?* Amsterdam: gebr. Binger.
Kleefstra, J. (z.j.). *Wat wil de Brinioschool?* (2-de uitgaaf). Amsterdam: gebr. Binger.

Klein, F. (1907). *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen, Teil 1* (bearbeitet von Rud. Schimmack). Leipzig: B.G. Teubner.
Klein, F. (1925[3]). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil 2.* Geometrie. Berlin: Julius Springer.
Klein, F. (1926[3]). *Vorlesungen über höhere Geometrie* (bearbeitet von W. Blaschke). Berlin: Julius Springer.
Klein, M. (1970). *Paul Ehrenfest. The making of a theoretical physicist*, Vol. I. Amsterdam-London.
Kline, M. (1958). The ancients versus the moderns. *Mathematics Teacher 51* pp. 418-427.
Kline, M. (1974). *Why Johnny can't add.* New York: First Vintage Books Edition.
Klomp, Henk (1996). E.J. Dijksterhuis en zijn tijdgenoten. *Nieuwe Wiskrant 16*(1) pp. 18-22.
Klomp, Henk A. (1997). *De relativiteitstheorie in Nederland. Breekijzer voor democratisering in het interbellum* (diss. RU Groningen). Utrecht: Epsilon Uitgaven.
Knippenberg, Hans (1986). *Deelname aan het lager onderwijs in Nederland gedurende de negentiende eeuw* (diss.). Amsterdam: KNAG, ISG.
Knippenberg, H. en B. de Pater (1988). *De eenwording van Nederland.* Nijmegen: Sun.
Koevoets, Ben en Herbert van Rheeden (1980). *Geen dag zonder lijn. Honderd jaar tekenonderwijs in Nederland 1880-1980.* Haarlem: Fibula, Van Dishoeck.
Köhler, August (1905). *Die Praxis des Kindergartens* (3 delen). Weimar: Hermann Böhlaus Nachfolger.
Kohnstamm, Ph. (1924). Boekbespreking van Mw. Ehrenfests 'Wat kan en moet het meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven?' *Paedagogische Studiën 5* pp. 230-231.
Kohnstamm, Ph. (1948). *Keur uit het didaktisch werk.* Groningen-Batavia: J.B. Wolters.
Koning, J. (1948). *Enige problemen uit de didactiek der natuurwetenschappen* (diss). Dordrecht: Retel en Felkers.
Konings, H., H. Krabbendam, H. Staal en T. Dienske (1994). *Meetkunde voor de lerarenopleiding.* Utrecht: APS.
Kossmann, E.H. (1986). *De Lage Landen 1780-1980. Twee eeuwen Nederland en België* (2 delen). Amsterdam: Agon.
Kraemer, J-M. (1985). Meetkunde geïntegreerd 1. *Willem Bartjens 5*(1) pp. 30-37.
Kraemer, J-M. (1986). Meetkunde geïntegreerd 2. *Willem Bartjens 5*(2) pp. 121-129.
Kraemer, J-M. (z.j.). *Meetkunde op de basisschool. Didactiek, inhoud en structuur van meetkunde in de methode 'Rekenen en Wiskunde'.* Rottterdam: OSM.
Kremer, H[S]. (1824). *Meetkundig rekenboek voor de jeugd.* Groningen: J. Oomkens.
Krooshof, G. (1957). De promoties. *Mededelingenblad van de Wiskunde Werkgroep 5*(7/8)
Kruitbosch, D.J. (1936). *Avontuurlijk wiskunde-onderwijs.* Rotterdam: W.L.& J. Brusse N.V.
Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* The University of Chicago Press.
Kuiper, N.H. (1963). Lofzang op de meetkunde. *Euclides 39*(2) pp. 33-47.
Kynigos, C. (1993). Children's inductive thinking during intrinsic and euclidean geometrical activities in a computer programming environment. *Educational Studies in Mathemetics 24*(2) pp. 177-197.
Lagerwerf, B. (1982). *Wiskunde-onderwijs nu.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Lagerwerf, B. (1994). *Wiskunde-onderwijs in de basisvorming.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Lako, D. (1899). *Overzicht van de Geschiedenis van het Teekenonderwijs, meer bepaald met het oog op de Ontwikkeling van het Teekenonderwijs in Nederland.* Tiel: D. Mijs.
Lamping, H.A. (1859). De Voorbereiding tot het Hooger Onderwijs. *De Gids 23*(1) pp. 1-51.
Lammerts, M.D. (1950). Uitzending van twee jongelieden in 1808 naar het instituut van Pestalozzi te IJverdun. *Pedagogische Studiën 27* pp. 117-123.
Lange, Wichard (1874[2]). *Die Pädagogik des Kindergartens. Gedanken Friedrich Fröbel's über das Spiel und die Spielgegenstände des Kindes.* Deel 3 van Friedrich Fröbel's *Gesammelte pädagogische Schriften.* Berlin: Verlag von Th.Chr.Fr. Enslin.

Lange, J. de (1980). De wiskunde inhoud en enkele didactische uitgangspunten van de Wiskivonpakketjes. *Wiskrant 21* pp. 22-27.
Lange, J. de (1987). *Mathematics, insight and meaning* (diss). Utrecht: OW&OC.
Lange, J. de en E. Feijs (1994). Verschillende koersen leiden tot een hoek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 13*(2) pp. 10-15.
Langenberg, E. (1877). *Adolph Diesterweg's Ausgewählte Schriften, Erster Band.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg.
Langeveld, M.J. (1937). *Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie van de middelbare schoolleeftijd.* Groningen-Batavia: J.B. Wolters.
Lawlor, R. (1995^2). *Sacred Geometry.* London: Thames and Hudson Ltd.
Leeb-Lundberg, Kristina (1970). Kindergarten Mathematics Laboratory – nineteenth century fashion. *The Arithmetic Teacher 17*(5) pp. 372-380.
Leeb-Lundberg, Kristina A.M. (1972). *Friedrich Froebels mathematics for the kindergarten: philosophy, program, and implementation in the United States* (diss.). New York University.
Leen, A. (1961). *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19e en het begin van de 20ste eeuw* (diss). Groningen: J.B. Wolters.
Leeuw, L. de, J. Meijer, J.Ch. Perrenet en W.E. Groen (1988). *De constructie en validering van een transfertest voor wiskunde-onderzoek met gebruikmaking van items met gefaseerde hulp.* Vrije Universiteit, Eindverslag SVO-project 1128.
Leeuwen, J.H. van (1885). De Vormleer in de twee onderwijzers-examens. *Het Nieuwe Schoolblad 3*(39).
Lek, A. en A. Veltman. Waar vindt de beer de honing? *Wereld van het Jonge Kind 23*(10) pp. 322-327.
Lenders, J.H.G. (1988). *De burger en de volksschool. Culturele en mentale achtergronden van een onderwijshervorming, Nederland 1780-1850* (diss.). Nijmegen: Sun.
Letschert, J.F.M. (1998). *Wieden in een geheime tuin. Een studie naar kerndoelen in het Nederlandse basisonderwijs* (diss). Enschede: SLO.
Lietzmann, W. (1912). Stoff *und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland.* Leipzig und Berlin: B.G.Teubner.
Lietzmann, W. (1923^2). *Methodik des mathematischen Unterrichts. 2. Teil.* Leipzig: Quelle & Meyer.
Lietzmann, W. (1926^2). *Methodik des mathematischen Unterrichts. 1. Teil.* Leipzig: Quelle & Meyer.
Ligthart, J. (1908). Een medestander in Amerika (I). *School en Leven 9*(39) pp. 609-613.
Linden, J. van der (1996). Een doos met een plafond en een gat. *Willem Bartjens 16*(2) pp. 18-22.
Lion Izn. J. (1857). *De wet op het Lager Onderwijs ten behoeve van allen, die met het onderwijs in betrekking staan, volledig verklaard en toegelicht.* Haarlem: De Erven F. Bohn.
Lips, B.J. (1890). *Volledig Leerplan voor Lagere Scholen.* Groningen: J.B. Wolters.
Lips, G.K. (1939). *Werken met Fröbels leermiddelen, voor school en zelfstudie.* Bussum: Jacs Swildens.
Lummel, H.J. van (1867^2). *Beknopte handleiding behoorende bij de platen voor klassikaal aanschouwelijk onderwijs ten dienste van bewaar- en lagere scholen.* Utrecht: Kemink en Zoon.
Maanen, J. van (1984). Over het verdelen van aangeslibd land. Een brugklasprojekt. *Euclides 60*(4) pp. 161-168.
Magielse, P.K. (1878). Art. 21 der Nieuwe Wet op het L.O. *De Wekker 37*(76).
Mandemakers, K. (1996). *HBS en Gymnasium. Ontwikkeling, structuur, sociale achtergrond en schoolprestaties, Nederland circa 1800-1968.* Amsterdam: Stichting beheer IISG.
McKim, R.H. (1971). *Experiences in visual thinking.* Belmont: Wadsworth Publishing Company Inc.
Meijsen, J.H. (1976). *Lager onderwijs in de spiegel der geschiedenis. 175 jaar nationale wet-*

geving op het lager onderwijs in Nederland. 's-Gravenhage: Staatsuitgeverij.
Messing, F. (1988). Het economische leven in Nederland 1945-1980. *Geschiedenis van het moderne Nederland* (Boogman, J.C. e.a.) pp. 517-561. Houten: De Haan.
Mesquita, A.L. (1989). Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie. *Educational Studies in Mathemetics 20*(1) pp. 55-77.
Mill, J.S. (1875). *Utilisme* (vertaling J. Versluys). Groningen: W. Versluys.
Minnaert, M. (1968[5]). *De natuurkunde van 't vrije veld 1.* Zutphen: W.J. Thieme.
Minnaert, M. (1970[3]). *De natuurkunde van 't vrije veld 2 en 3.* Zutphen: W.J. Thieme.
Moerlands, F. en W. Vermeulen (1998). Meetkunde, meer dan een belofte. *Willem Bartjens 18*(1) pp. 20-26.
Molema, H. (1880). Verbinding van vormleer en teekenen. *Het Schoolblad 10*(1).
Molkenboer, W.B.G. (1878). *Wat is noodig, nuttig en uitvoerbaar bij het lager en voortgezet onderwijs, om den kunstsmaak te vormen en de kunstvaardigheid te vermeerderen?* Amsterdam: C.L. Brinkman.
Moll, J.D.R. (1864). Over de Vormleer. *De Wekker 21*(30).
Mommers, C. en G. Janssen (1997). *Zwijsen een passie voor uitgeven. Geschiedenis van een educatieve uitgeverij.* Tilburg: Zwijsen.
Montessori, Maria (1919[2]). *De Methode Montessori. Zelfopvoeding van het jonge kind.* Zeist: J. Ploegsma.
Montessori, Maria (z.j.). *Zelfopvoeding II. Leermiddelen voor het onderwijs aan kinderen van 6-12 jaar.* Amsterdam: Van Holkema en Warendorf.
Montessori, Maria (1934). *Psico-geometria. El studio de la geometria basado en la psicologia infantil.* Barcelona: Casa editorial Araluce.
Mooij, H. (1948). *Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies van een hoek in gelijke delen* (diss). Amsterdam.
Moor, E. de (1984). Meetkunde in B.O. methoden. *Panama cursusboek 2* (E. de Moor, ed.). Utrecht: OW&OC. pp. 73-74.
Moor, E. de (1986). Meetkunde voor jong en oud. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 4*(2) pp. 33-38.
Moor, E. de (1990a). Boekbespreking van Kraemers 'Meetkunde op de basisschool'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 9*(1) pp. 62-63.
Moor, E. de (1990b). Vormleer. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 9*(1) pp. 34-44.
Moor, E. de (1991). Een beeld van een formule. *Willem Bartjens 10*(2/3) pp. 113-122.
Moor, Ed de (1992). Analyse, synthese en elegance. *Euclides 67*(5) pp.147-151.
Moor, E. de (1993a). Het 'gelijk' van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa. *Nieuwe Wiskrant 12*(4) pp. 15-24.
Moor, E. de (1993b). Jan Versluys 1845-1920. *De School Anno 11*(1) pp. 4-6.
Moor, E.W.A. de (1994a). *The case of Vormleer.* Paper XVI-th International Standing Conference for the History of Education. Vrije Universiteit, Amsterdam.
Moor, E. de (1994b). De betekenis van historisch-didactisch onderzoek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 13*(1) pp. 39-41.
Moor, E. de (1994c). Jan Versluys en het ontstaan van de vakdidactiek. *Nieuwe Wiskrant 14*(1) pp. 8-13.
Moor, Ed W.A. de (1995). Vormleer – an innovation that failed. *Paedagogica Historica*, new series, XXXI-1 pp. 103-123.
Moor, E. de (1996a). Het ongenoegen van Dijksterhuis. *Nieuwe Wiskrant 15*(4) pp. 22-26.
Moor, Ed W.A. de (1996b). 100 jaar vormleer: een mislukking. *De Negentiende Eeuw 20*(2) pp. 113-128.
Moor, E. de (1996c). Implementatie van realistische meetkunde op de basisschool. *Modellen, meten en meetkunde* (C. van den Boer en M. Dolk red.) pp. 45-60. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Moor, E. de (1996d). Meetkunde, een nieuw kerndoel. *Willem Bartjens 14*(5) pp. 11-15.

Moor, Ed de (1997a). *Meetkunde op de basisschool* (reader en practicum studiedag Flevoparkschool te Amsterdam) (interne publicatie). Utrecht: Freudenthal Instituut.
Moor, Ed de (1997b). *Voorstel voor een realistisch meetkunde-programma voor de basisschool* (interne publicatie). Utrecht: Freudenthal Instituut
Moor, E. de en A. Treffers (1971). *In Orde*. Heroriëntering Onderwijzers Wiskobas. Utrecht: IOWO.
Moor, E. de en A. Treffers (1972). *Spijkerbord*. Heroriëntering Onderwijzers Wiskobas (koboek). Utrecht: IOWO.
Moor, E. de en A. Treffers (1974). Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs (3). Meetkunde op de basisschool. *Euclides 50*(3) pp. 81-99.
Moor, E. de en A. Treffers (1975a). *Ordenend tellen*. Heroriëntering Onderwijzers Wiskobas. Utrecht: IOWO.
Moor, E. de en A. Treffers (1975b). *De Kubus*. Heroriëntering Onderwijzers Wiskobas. Utrecht: IOWO.
Moor, E. de, J. Janssen, J.M. Kraemer en J. Menne (1996). Proeftoets meetkunde op de basisschool (1). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 15*(2) pp. 11-20.
Moor, E. de, J. Janssen, J.M. Kraemer en J. Menne (1997a). Proeftoets meetkunde op de basisschool (2). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 15*(3) pp. 13-21.
Moor, E. de, J. Janssen, J.M. Kraemer en J. Menne (1997b). Betekenis van meetkunde voor de basisschool. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 15*(4) pp 13-26.
Moor, Ed de en Jan van den Brink (1997). Geometrie vom Kind und von der Umwelt aus. *Mathematik Lehren 83* pp. 14-17.
Mouw, J.A. dèr (1947). *Verzamelde werken Tweede Deel*. Amsterdam: G.A. van Oorschot.
N. (1821). Over de nieuwigheden in het lagere schoolwezen. *Algemeen Magazijn voor Onderwijs en Opvoeding 3* pp. 25- 28.
NCTM (1970). *A History of Mathematics Education in the United States and Canada*. Washington.
NCTM (1970). *Readings in Geometry from the Arithmetic Teacher*.
Nelissen, J.M.C. (1987). *Kinderen leren wiskunde* (diss.). Gorinchem: De Ruiter.
Nelissen, J. (1996). Hoe werken kinderen met ruimtelijke beelden? *De wereld van het Jonge Kind 23*(6) pp. 211-214.
Noordam, N.F. (1964). Pestalozzi. *Grote denkers over opvoeding* (I. van der Velde, red.). Groningen: Erven P. Noordhoff.
Noordam, N.F. (1979). *Historische pedagogiek van Nederland, een inleiding*. Nijkerk: Intro.
Nijdam, B. en H. van Buuren (1983). *Statistiek voor de sociale wetenschappen I*. Alphen aan de Rijn-Brussel: Samsom.
Nijkamp, W.M. (1976[4]). *Van Begijneschool naar kleuterschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
Nijkamp, W.M. (1967). *100 jaar kleuters*. IJmuiden: Vermande zonen.
Nijsen, J. (1989). *Twee zulke goede namen. Willem Versluys en Annette Versluys-Poelman, uitgevers te Amsterdam* (doct. scriptie Neerlandistiek). Amsterdam: UvA.
Nuffield Mathematical Project (z.j.). *Logic* (first draft).
Nuffield Foundation (1969). *Environmental geometry*.
Nuffield Mathematical Project (1972). *Checking up II*. Edinburgh: W&R Chambers, London: J. Murray, New York: J.Wiley.
O'Brien, T.C. (1978). *Solve it! Basic problem solving*. Chicago: Educational Teaching Aids.
Ontwerp eener nieuwe wet op het lager onderwijs door een Schoolopziener (1873). Amsterdam: C.L. Brinkman.
Overzicht brugklasboeken voor de basisvorming (1993). *Euclides 69*(3) pp. 67-76.
Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Parreren, C.F. van (1969[4], 1970[3]). *Psychologie van het leren I & II.* Deventer: Van Loghum Slaterus.
Parreren, C.F. van (1975). 'Leren denken' anno 1975. *Pedagogische Studiën 52* pp. 363-369.
Pasch, M. (1926). *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Mit Anhang: M. Dehn. Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung. Berlin: Julius Springer.
Peremans W. (1960). Het doel van het onderwijs in de wiskunde bij het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs. *Euclides 36*(4) pp. 145-164.
Perrenet, J. en W. Groen (1990). Transfertest afgerond. *Euclides 65*(6) pp. 174-180.
Personeel Dr. W. Dreesschool (1972). *Spijkerbord.* Heroriëntering Onderwijzers (bas-boek). Utrecht: IOWO.
Pestalozzi, J.H. (1803a). *ABC der Anschauung oder Anschauungs-lehre der Maßverhältnisse. Erstes Heft.* Zürich und Bern: Heinrich Geßner, Tübingen: J.G. Cotta'schen Buchhandlung.
Pestalozzi, J.H. (1803b). *ABC der Anschauung oder Anschauungs-lehre der Maßverhältniss. Zweytes Heft.* Zürich: Geßnerschen Buchhandlung, Tübingen: J.G. Cotta'schen Buchhandlung.
Pestalozzi, J.H. (1803c). *Buch der Mütter oder Anleitung für Mütter ihre Kinder bemerken und reden zu lehren. Erstes Heft.* Zürich und Bern: Heinrich Geßner, Tübingen: J.G. Cotta'schen Buchhandlung.
Pestalozzi, J.H. (1826a). Praktische Elementarübungen. Zahl- und Formenlehre. *Sämmtliche Schriften. Vierzehnther Band.* pp. 1-75. Stuttgart und Tübingen: J.G. Cotta'schen Buchhandlung.
Pestalozzi, J.H. (1826b). Praktische Elementarübungen. Form und Größenlehre. *Sämmtliche Schriften. Funfzehnther Band.* pp. 1-125. Stuttgart und Tübingen: J.G. Cotta'schen Buchhandlung.
Pestalozzi, J.H. (1826-1831). *Al de werken over het onderwijs en de opvoeding, naar het Hoogduitsch bewerkt, onder opzigt van P.J. Prinsen. 1 tot 8.* Zutphen: W.G. Wansleven.
Pestalozzi, J.H. (z.j.). *Wie Gertrud ihre Kinder Lehrt.* Leipzig: Verlag von Philipp Reclam jun.
Phillips, F.C. (1971[4]). *An introduction to crystallography.* London: Longman.
Piaget, J. (1973). Comments on mathematical education. *Developments in mathetical Education* (A. G. Howson, editor). pp. 79-87. Cambridge University Press.
Piaget, J., E.W. Beth, J. Dieudonné, A. Lichnerowicz, G. Choquet en C. Gattegno (1955). *l'Enseignement des mathématiques.* Neuchatel-Paris: Delachaux & Niestlé.
Piaget, J., B. Inhelder and A. Szeminska (1966[2]). *The Child's Conception of Geometry.* London: Routledge and Kegan Paul.
Piaget, J. en B. Inhelder (1973, vert. oorspr. uitgave: 1967). *Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen (I en II.).* Pedagogischer Verlag Schwann: Düsseldorf.
Picard, N. (z.j.). *Denken en rekenen, werkschriften.* 's-Hertogenbosch: L.C.G. Malmberg, Lier: Jozef van In.
Plato (1975). *Politeia* (vertaling: G. Koolschijn). Amsterdam: Atheneum- Polak & Van Gennep.
Ploeg, E. van der (1991). *Papiervouwen.* Helmond: Helmond
Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton: University Press.
Poot, P. (1894). *Complement der meetkunde.* Amsterdam: S.L. van Looy /H. Gerlings.
Poot, P. (1900). *Methodisch hulpboek bij het oplossen van meetkundige vraagstukken.* Groningen: J.B. Wolters.
Prevost, F.J. (1988). Meetkunde in de brugklas. *Euclides 63*(7) pp. 191-198.
Prinsen, P.J. (1809). *Leerwijze van Pestalozzi.* Leyden: D. du Mortier en Zoon.
Projectgroep Montessori APS (1992). *Werkboek Geometrie.* Algemeen Pedagogisch Studiecentrum.
Radatz, H. en K. Rickmeyer (1991). *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen.* Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.
Rangelrooy, A. en K. Buys (1995). Bolletje wol. *Willem Bartjens 15*(1) pp. 10-14.

Regt, J.W. (1854). *Allereerste Beginselen der Practische Onderwijskunde.* Gouda: G.B. van Goor.
Regt, J.W. (1866). *Hoofd- en Steunpunten uit de Vakken van het Lager Onderwijs* (herzien door G.B. Lalleman). Gouda: G.B. van Goor.
Regt, J.W. (1876[3]). *Geschiedenis der Nederlandsche Paedagogiek.* Gouda: G.B. van Goor.
Reeuwijk, M. van (1993). Het Middle School Project in kaart gebracht. *Nieuwe Wiskrant 13*(2) pp. 22-27.
Reinders, E. (1921). De gymnasiale geest en de realia aan B-gymnasium. *Paedagogische Studiën 2*(1) pp. 9-34.
Reindersma, W. (1915). *De beteekenis van het onderwijs in de natuurwetenschappen en de inrichting van dit onderwijs op het lyceum* (overdruk uit *School en Leven 16*(40), (41)). Groningen: J.B. Wolters.
Reindersma, W. (1926). *Over het inleidend onderwijs in de meetkunde.* Groningen-Den Haag: J.B. Wolters.
Reinsma, R. (z.j.). *Scholen en schoolmeesters onder Willem I en II.* Den Haag: N.V. voorheen Van Keulen Periodieken.
Reinsma, R. (1964). *Scholen en schoolmeesters in Friesland tussen 1830 en 1850.* Bolsward: A.J. Osinga.
Reijnders, J.M. en J. Snijders (1959). *Functioneel Rekenen* (handleiding). Amsterdam-Djakarta: W. Versluys N.V.
Rekenwerkgroep (1994). *Rekenen in beweging.* SLO/VPC.
Renesse, J.E. van (1883). *Algemeen Reglement voor de Rijks-Normaallessen ter opleiding van Onderwijzers en Onderwijzeressen.* 's-Gravenhage: De Gebroeders Van Cleef.
Revuz, André (1971). The position of geometry on mathematical education. *Educational Studies in Mathematics 4* pp. 48-52.
Rheeden, Herbert van (1988). *Formalisme en Expressie, ontwikkelingen in de geschiedenis van het teken- en kunstonderwijs in Nederland en Nederlands-Indië gedurende de 19e en 20e eeuw* (diss.). Amsterdam: UvA.
Rijkens, R.G. (1847a). *Aanschouwelijk Onderwijs. Handboekje voor bewaar- en lagere scholen ter vorming van verstand en hart: volgens de geest van Pestalozzi en Nieuwold.* Leeuwarden: G.T.N. Suringar.
Rijkens, R.G. (1847b). *De bewaarschool. Praktische handleiding, ten dienste van hen, die bewaarscholen wenschen op te rigten en daarin werkzaam moeten zijn.* Leeuwarden: G.T.N. Suringar.
Roest, A.L. en S. de Jong Jz. (1868). *Reken-, Stel- en Meetkundige vraagstukken, opgegeven op vergelijkende examens 1-ste reeks.* Almelo: Joh. Wilmes.
Rombouts, S. (1940[3]). *Leerboek Historische Pedagogiek.* Tilburg: Drukkerij van het R.K. Jongensweeshuis.
Roodhuijzen Sr., D.H. (1862). Nog eenige opmerkingen over het Onderwijs in de Vormleer. *Maandblad van het N.O.G.* pp. 17-25.
Rouché, E. en Ch. de Comberousse (1865). *Traité de géométrie, première partie.* Paris: Gauthier-Villars.
Ruyter, J.H. de (1889). Het nut der vormleer. *Het Schoolblad 19*(2).
'S.' (1872). Hoe moet het onderwijs in de beginselen der vormleer op de lagereschool worden opgevat? *De Schoolbode* pp. 305-314.
Sauvy, J. et J. (1974). *l'Enfant et les géométries.* Collection "Orientations/E3": Casterman.
Schasfoort, Ben (1986). *Bibliografie van Nederlandstalige literatuur met betrekking tot tekenonderwijs.* Enschede: SLO.
Schasfoort, B. (1992). *De geschiedenis van het tekenonderwijs in Nederland.* Enschede: interne publicatie SLO.
Scheepstra, H. (1897). *Beknopte Geschiedenis van de Opvoeding en het Onderwijs, vooral in Nederland.* Groningen: J.B. Wolters.
Scherer, H. (1904[2]). Diesterweg, Friedrich Adolf Wilhelm. *Encyklopädisches Handbuch der*

Pädagogik. Band 2 (W. Rein, ed.) pp. 215-230. Langensalza: H. Beyer & Söhne.
Schimmack, R. (1911). *Die Entwicklung der mathematischen Unterrichts-Reform in Deutschland.* Leipzig u. Berlin: B.G. Teubner.
Schipper, W. (1983). The topological primacy thesis: genetic and didactic aspects. *Educational Studies in Mathematics 14*(3) pp. 285-296.
Schlömilch, O. (1859). *Geometrie des Maasses.* Eisenach: Joh. Fr. Baerecke.
Schmid, Joseph (1809a). *Die Elemente der Form und Größe (gewöhnlich Geometrie genannt). Erster Theil.* Bern: Wittwe Stämpfli.
Schmid, Joseph (1809b). *Die Elemente der Form und Größe (gewöhnlich Geometrie genannt). Zweiter Theil.* Bern: L.A. Haller.
Schmid, Joseph (1811). *Die Elemente der Form und Größe (gewöhnlich Geometrie genannt). Dritter Theil.* Heidelberg: Mohr und Zimmer.
Schmidt, J.F. (1805). *Pestalozzi's Größenlehre als Fundament der Arithmetik und Geometrie.* Halle: Rengersche Buchhandlung.
Schmidt, Siegbert (1991). *Rechenunterricht und Rechendidaktik an den Rheinischen Lehrerseminaren in 19. Jahrhundert: eine Studie zur Fachdidaktik innerhalb der Volksschullehrerbildung an Lehrerseminaren 1819-1872.* Köln-Wien: Böhlau.
Schoemaker, G. (1979). Wiskunde in de brugperiode: Zie je wel. *Wiskobas Bulletin 8*(3) pp. 18-22.
Schoemaker, G. (1980). *Ziet U wel* (handleiding bij *Zie je wel*). Utrecht: IOWO.
Schoemaker, G. (1986). Tekeningen. *Euclides 62*(3) pp. 75- 78.
Schogt, H.J. (1929a). *Beginselen der vlakke meetkunde.* Groningen: P. Noordhoff.
Schogt, H.J. (1929b). *Oefeningen in de vlakke meetkunde.* Groningen: P. Noordhoff.
Schotten, H. (1890). *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts I.* Leipzig: B.G. Teubner.
Schrek, D.J.E. (1922). De 'Commission internationale de l'enseigmement mathématique' 1908-1920. *Paedagogische Studiën 3* pp. 109-127.
Schreuder, I. (1922-23). *Jan Versluys en zijn levenswerk (1845-1920)* (particuliere uitgave?).
Schröder, W. (1978). *Adolph Diesterweg. Studien zu seiner Wirkungsgeschichte in der Pädagogik des 19. und 20. Jahrhundert.* Frankfurt am Main-Berlin-München: Verlag Moritz Diesterweg.
Schubring, Gert (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik.* Stuttgart: Klett-Cotta.
Schubring, Gert (1989). Pure and Applied Mathematics In Divergent Institutional Settings in Germany: The Role and Impact of Felix Klein. *The History of Modern Mathematics Vol II* (D.E. Rowe and J. McCleary, eds.). San Diego: Academic Press Inc.
Schüssler, H. (1916). Ist die Behauptung Meumanns richtig: Kinder können im allgemeinen vor dem 14. Lebensjahre nicht logisch schließen? *Zeitschrift für angewandte Psychologie 11* pp. 480-497.
Schuster, S. (1971). On the teaching of geometry: a potpouri. *Educational Studies in Mathematics 4* pp. 76-86.
Schuurman, L.N. (1865). *Wet van 13 Augustus 1857, S.103, tot regeling van het Lager onderwijs, met aanteekeningen en alphabetisch register.* Zwolle: W.E.J. Tjeenk Willink.
Selter, Christoph (1997a). Genetischer Mathematikunterricht: Offenheit mit Konzept. *Mathematik Lehren 83* pp. 4-8.
Selter, Christoph (1997b). *Schulpädagogik und Fachdidaktik: Zur Aktualität des Werkes von Johannes Kühnel (1869-1928).* Bochum: Universitätsverlag Dr. N. Brockmeyer.
Serra, M. (1989). *Discovering Geometry. An Inductive Approach.* Berkeley: Key Curriculum Press.
Sillevoldt, J.H. van (1850). *Iets over de methode van onderwijs in de meetkunde.* 's-Gravenhage en Amsterdam: De Gebroeders van Cleef.
Simmons, M. en P. Cope (1990). Fragile knowledge of angle in turtle geometry. *Educational Studies in Mathematics 21*(4) pp. 375-382.

Simon-Thomas, M. (1996). *Leer van het Ornament in Nederland* (diss.) Amsterdam: De Bataafsche Leeuw.
Simons, P.R.J. (1990). *Transfervermogen.* Inaugurele rede K.U. Nijmegen.
Sjochor'-Trotskij, S.I. (1908). *Meetkunde in opgaven.* Moskou: T-va I.D. Sytina.
Skemp. R.R. (1986[2]). *The psychology of learning mathematics.* Penguin Books.
SLO (1988). *Wiskundeonderwijs is nooit af.* Enschede.
Smid, H.J. (1997). *Een onbekookte nieuwigheid? Invoering, omvang, inhoud en betekenis van het wiskundeonderwijs op de Franse en Latijnse scholen 1815-1863* (diss). TU Delft: Delft University Press.
Snelders, H.A.M. (1994). *Wetenschap en intuïtie. Het Duitse romantisch-speculatief natuuronderzoek rond 1800.* Baarn: Ambo.
Sondhaus, C. (1877). Der Elementarunterricht in der Geometrie. In: *Diesterweg's Wegweiser zur Bildung für Deutsche Lehrer (fünfte Auflage)* III pp. 255-331. Essen: G.D. Bädeker.
Spapens, A.A.M. (1991). *De betekenis van de onderwijzersgezelschappen en onderwijstijdschriften tegen de achtergrond van de opleidingsvarianten tussen 1830-1890* (doct. scriptie geschiedenis). Utrecht.
Spengler, O. (1923). *Der Untergang des Abendlandes. Erster Band: Gestalt und Wirklichkeit.* München: Oskar Beck.
Spranger, Eduard (1953[2]). *Aus Friedrich Fröbels Gedankenwelt.* Heidelberg: Quelle & Meyer.
Startpunt Leerplan-ontwikkeling (1973). Utrecht: IOWO.
Steinvoorte, S. (1995). Speurtocht. *Willem Bartjens 14*(4) pp. 11-15.
Steyn Parvé, D.J. (1850). *Het wiskundig onderwijs in Nederland.* Rotterdam: H.A. Kramers.
Steyn Parvé, D.J. (1852). De Methode van Teekenonderwijs van de Gebroeders F. en A. Dupuis. *Nieuwe Bijdragen* pp. 34- 68 en pp. 112-141.
Steyn Parvé, D.J. (1859). Boekbeoordelingen. *Nieuwe Bijdragen* pp. 405-444.
Steyn Parvé, D.J. (1860). Het onderwijs in de vormleer op de lagere school. *De Gids 24*(1) pp. 62-80.
Steyn Parvé, D.J. (1877). *De grens tusschen het lager en het middelbaar onderwijs.* Leiden: A.W. Sijthoff.
Stilma, L.C. (1995). *Van kloosterklas tot basisschool. Een historisch overzicht van opvoeding en onderwijs in Nederland.* Nijkerk: Intro.
Streefkerk, H. (1958). De toekomst van ons wiskundeonderwijs. *Euclides 34*(5) pp. 267-278.
Streefland, L. (1973). Introductie van decimale getallen. *Wiskobas Bulletin 3*(2) pp. 166-190.
Streefland, L. (1974a). Wij maken zelf een kubus. *Wiskobas Bulletin 3*(6) pp. 537-538.
Streefland, L. (1974b). Meetkundige verkenning van de bol. *Wiskobas Bulletin 4*(1) pp. 63-66.
Streefland, L. (1974c). Zon zien. *Wiskobas Bulletin 4*(2) pp. 168-177.
Streefland, L. (1974d). Schaduwen. *Wiskobas Bulletin 4*(2) pp. 178-185.
Streun, A. van (1989). *Heuristisch wiskunde-onderwijs* (diss.). Groningen.
Streun, A. van (1997). Bewijzen als denkmethode. *Euclides 72*(8) pp. 295-301.
Stroomberg, H.P. (1977). *Communale rekendoelen, een empirisch onderzoek naar doelstellingen van het rekenonderwijs* (diss.). Amsterdam: RITP.
Struik, D.J. (1925). Boekbespreking van mw. Ehrenfests 'Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?' *PHYSICA, Nederlandsch Tijdschrift voor Natuurkunde 5*(7) pp. 243-246.
Struik, D.J. (1987). *A Concise History of Mathematics.* New York: Dover Publications, Inc.
Study, E. (1928[2]). *Denken und Darstellung in Mathematik und Naturwissenschaften.* Braunschweig: Vieweg und Sohn.
Stuers, Victor de (1873). Holland op zijn smalst. *De Gids 37*, derde serie pp. 320-403.
Sweers, W. (red.) (1977). *Leerplanontwikkeling onderweg 1.* Utrecht: IOWO.
Sweers, W. (red.) (1980). *Leerplanontwikkeling onderweg 2a.* Utrecht: IOWO.
Talsma, S. (1862). Onderzoek naar den aard, het wezen en het doel der vormleer, als onderwijsvak bij het lager onderwijs. *Nieuwe Bijdragen* pp. 1142-1160.
Tarski, A. (1953). *Inleiding tot de logica* (Nederlandse bewerking door E.W. Beth). Amster-

dam: Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij.
Telders, J.M. (1922). *Uit en over Fröbel.* Zeist: J. Ploegsma.
Telders, J.M. (1931). Fröbel. *Paedagogische Bibliotheek VI en VII.* Groningen: P. Noordhoff.
Timerding, H.E. (1912). *Die Erziehung der Anschauung.* Leipzig und Berlin: B.G. Teubner.
Treffers, A. (1969). *Aanvankelijk meetkunde-onderwijs gedurende de periode 1920-1940* (doct. scriptie opvoedkunde, KU Nijmegen).
Treffers, A. (1971a). *Tweede Ørientatiepunt* . Utrecht: IOWO (interne publicatie).
Treffers, A. (1971b). *Stadsplan.* Heroriëntering Onderwijzers. Utrecht: IOWO.
Treffers, A. (1971c). Verleden en heden van Wiskobas. *Wiskobas Bulletin 1*(1) pp. 13-17.
Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht* (diss.). Utrecht: IOWO.
Treffers, A. (1979). Fundering. Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). *Wiskobas Bulletin 8*(5/6).
Treffers, A. (1985). Reken/wiskunde didactiek in historisch perspectief. *Panama cursusboek 3* (E. de Moor, ed.). Utrecht: OW&OC.
Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction. The Wiskobas Project.* Dordrecht: D. Reidel.
Treffers, A. en E. de Moor (1974). Het aanvankelijk meetkundeonderwijs (1). *Euclides 50*(1) pp. 1-10.
Treffers, A. en E. de Moor (1984). *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde (werkboek).* Utrecht: OW&OC.
Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1.* Tilburg: Zwijsen.
Treffers, A. en E. de Moor (1994). De stille revolutie in het reken-wiskundeonderwijs. *Jeugd in School en Wereld 79*(3) pp. 4-10.
Troelstra, R. e.a. (1962). *Transformatiemeetkunde I, II en III.* Groningen: J.B. Wolters.
Troelstra, R. (1963). Transformatiemeetkunde in de lagere klassen van het V.H.M.O. *Euclides 39*(4) pp.138-149.
Turksma, R. (1961). *De geschiedenis van de opleiding tot onderwijzer in Nederland aan de openbare, protestants-christelijke en bijzonder-neutrale instellingen* (diss.). Groningen: J.B. Wolters.
Turkstra, H. (1934). *Psychologisch-Didactische Problemen bij het onderwijs in de Wiskunde aan de Middelbare School.* Groningen-Den Haag-Batavia: J.B. Wolters.
Turkstra, H. (1938). *Het veelomstreden vraagstuk van het wiskundeonderwijs op de middelbare school.* Nederlandsche Vereeniging voor Geestelijke Volksgezondheid, sectie paedagogiek, Amsterdam.
Turkstra, H. en J.K. Timmer (1953). *Rekendidactiek I en II.* Groningen-Djakarta: J.B. Wolters.
Valk, M. (1871). Vormleer en Teekenen. *Nieuwe Bijdragen* pp. 330-343.
Vakken van onderwijs op de lagere school II (1860). De Vormleer. *Maandblad N.O.G. 11*(1) pp. 3-16.
Varga, T. (1968) *Munkalapok.* Budapest: Nationaal Instituut voor Opvoeding en Onderwijs.
V.D.H.R. (1920). Kunst en techniek in de mathesis (Voordracht van prof. G. Mannoury). *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs 17* pp. 360-364.
Veen, G. van en Ph. Kohnstamm (1928). *De Aaneensluiting tusschen Lager en Middelbaar (Gymnasiaal) Onderwijs.* Amsterdam: Mededeling van het Nutsseminarium No. 3.
Velde, I. van der (red.) (1964). *Grote denkers over opvoeding.* Groningen: J.M. Meulenhoff.
Verberne, L.G.J. (1957). *Geschiedenis van Nederland in de jaren 1850-1925 I en II.* Utrecht: Het Spectrum.
Verhetsel, A. (1990). De wereld in ons hoofd. Een onderwijsexperiment in verband met het ruimtelijke voorstellings- en structureringsvermogen. *Pedagogische Studiën 67* pp. 261-270.
Verrijn Stuart, C.A. (1913). *Inleiding tot de beoefening der statistiek II.* Haarlem: De Erven F. Bohn.

Verschaffel, L. en E. de Corte (red.) (1995). *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 3.* Studiecentrum Open Hoger Onderwijs, Acco.
Versluys, J. (1868). *Beginselen der nieuwere meetkunde.* Groningen: J.B. Wolters.
Versluys, J. (1871). *Theorie der algebra.* Groningen: P. Noordhoff.
Versluys, J. (1872). Een raad aan aankomende onderwijzers. *Schoolblad 1*(15).
Versluys, J. (1874) *Methoden bij het onderwijs in de wiskunde en bij de wetenschappelijke behandeling van dat vak.* Groningen: P. Noordhoff.
Versluys, J. (1875). *Handleiding bij het rekenonderwijs, deel 1.* Groningen: W. Versluys.
Versluys, J. (1877). *Handboek der meetkunde I.* Groningen: W. Versluys.
Versluys, J. (1878a). *Over methoden bij het oplossen van meetkundige vraagstukken.* Groningen: W. Versluys.
Versluys, J. (1878^{5}b). *Leerboek der vlakke meetkunde.* Amsterdam: J.B. Wolters.
Versluys, J. (1878c) *Wenken over opvoeding, vooral ten dienste van moeders.* Groningen: W. Versluys.
Versluys, J. (1879^{2}a). *Handleiding bij het onderwijs in de vormleer.* Groningen: W. Versluys.
Versluys, J. (1879b). *Fröbel, een overzicht van zijn denkbeelden en zijn leermiddelen.* Groningen: W. Versluys.
Versluys, J. (1879c). Vormleer en Wiskunde. Volgens de wet van 1878. *Tijdschrift voor vormleer, rekenkunde en de beginselen der wiskunde 1*(1) pp. 5-9.
Versluys, J. (1879d). Fröbel en de Vormleer. *Tijdschrift voor vormleer, rekenkunde en de beginselen der wiskunde 1*(2) pp. 49-60.
Versluys, J. (1879e). Fröbel en het rekenonderwijs. *Tijdschrift voor vormleer, rekenkunde en de beginselen der wiskunde 2*(1) pp. 255-262.
Versluys, J. (1880a). A. Diesterweg over de methode van onderwijs in de meetkunde bij het lager onderwijs. *Tijdschrift voor vormleer, rekenkunde en de beginselen der wiskunde. 2*(3) pp. 81-89.
Versluys, J. (1880b). *Het aanschouwingsonderwijs in de lagere school en de bewaarschool.* Groningen: W. Versluys.
Versluys, J. (1880c). *Handleiding bij het schrijfonderwijs in de lagere school.* Groningen: W. Versluys.
Versluys, J. (1881). *Beknopte geschiedenis van de opvoeding en het onderwijs, vooral in Nederland.* Groningen: W. Versluys.
Versluys, J. (1882). *Beginselen der zielkunde.* Amsterdam: W. Versluys.
Versluys, J. (1883). *Opvoedkunde voor de lagere school.* Amsterdam: W. Versluys.
Versluys, J. (1884a). *De eigenschappen der meetkunde en theoretische vragen.* Amsterdam: W. Versluys.
Versluys, J. (1884b). *Proeve van een nieuwere levensbeschouwing.* Amsterdam: W. Versluys.
Versluys, J. (1886). *Over methoden bij het oplossen van rekenkundige vraagstukken, eerste stukje.* Amsterdam: W. Versluys.
Versluys, J. (1887). *Het oplossen van Algebraïsche Vraagstukken.* Amsterdam: W. Versluys.
Versluys, J. (1889a). De vormleer bij het Lager Onderwijs. *Het Nieuwe Schoolblad 7*(36).
Versluys, J. (1889b). *De methodiek van het rekenen.* Amsterdam: W. Versluys.
Versluys, J. (1889c). *Een en ander over Multatuli.* Amsterdam: W. Versluys.
Versluys, J. (1889d). *Een nieuw soort oorspronkelijkheid en nog iets over Multatuli.* Amsterdam: W. Versluys.
Versluys, J. (1896a). *De plaats van de school en van den onderwijzer in de maatschappij.* Amsterdam: A. Versluys.
Versluys, J. (1896^{2}b). *Methoden bij het oplossen van rekenkundige vraagstukken.* Amsterdam: A. Versluys.
Versluys, J. (1898^2). *Over methoden bij het oplossen van rekenkundige vraagstukken. Tweede deel.* Amsterdam: A. Versluys.
Versluys, J. (1901a). *J.F. Herbart, een overzicht van zijn stelsel.* Amsterdam: A. Versluys.
Versluys, J. (1901b). *Het herhalingsonderwijs volgens de Wet van 1900.* Amsterdam: A. Versluys.

Versluys, J. (1902a). *Kritische beschouwing van het stelsel van Herbart.* Amsterdam: A. Versluys.
Versluys, J. (1902b). *Beknopte geschiedenis der Wiskunde.* Amsterdam: A. Versluys.
Versluys, J. (1906). *Inleiding tot het oplossen van meetkundige vraagstukken.* Amsterdam: A. Versluys.
Versluys, J. (1912[5]). *Inleiding tot de perspectief.* Amsterdam: A. Versluys.
Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras.* Amsterdam: A. Versluys.
Versluys, J. en H.J. Snijder (1908). *Aanschouwelijke rekenkunde, deel 1.* Amsterdam: A. Versluys.
Visser, H.W.C.A. (1820). *Verhandeling over de volstrekt noodzakelijke kundigheden, welke in de openbare en armenscholen in het Koningrijk der Nederlanden behoren meegedeeld te worden, en de beste leerwijze voor de zelve.* Leyden, Deventer en Groningen: D. du Mortier, J.H. de Lange en J. Oomkens.
Visser, H.W.C.A. (1823). *Handleiding voor houderessen van kleine kinderscholen.* Leiden: D. du Mortier en Zoon, Deventer: J.H. de Lange, Groningen: J. Oomkens.
Visser, H.W.C.A. (1824). *Circulaire voor het 8ste schooldistrict in Vriesland.* Ysbrechtum.
Visser, C. (1964). In memoriam T. Ehrenfest-Afanassjewa. *Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding 22*(217).
Voorstel van den Heer MOENS tot wijziging van enkele bepalingen der wet van 13 Augustus 1857 (Staatsbl. no. 103) (1876). Amsterdam: Blikman & Sartorius.
Vollrath, H.J. (1976). The place of geometry in mathematics teaching: an analysis of recent developments. *Educational Studies in Mathematics 7* pp. 431-442.
Vries, G. de (1993). *Het pedagogisch regime. Groei en grenzen van de geschoolde samenleving.* Amsterdam: Meulenhoff.
Vroede, M. de (1970). *Van Schoolmeester tot Onderwijzer. De opleiding van leerkrachten in België en Luxemburg, van het eind van 18de eeuw tot omstreeks 1842.* Leuven: Universiteitsbibliotheek, Universitaire Uitgaven.
Vuurmans, A. en J. van den Brink (1984). Integratie Kleuterschoolwerkplannen en eerste klasmethoden. *Panama cursusboek 2* (E. de Moor, ed.). pp. 32-44. Utrecht: OW&OC.
Wagemann, E-B. (1956). *Quadrat-Dreieck-Kugel. Die Elementarmathematik und ihre Bedeutung für die Pädagogik bei Pestalozzi, Herbart und Fröbel (diss.).* Göttingen.
Wal, B. van der (1992). Meetkunde en weerbaarheid. *Euclides 67*(9) pp. 263-265.
Walter, M. I. (1971[2]). *Boxes, Squares and Other Things.* NCTM.
Walter, M. (1973). *Annette.* Annette Verlag Wesel.
Walter, M. (1973). *Entdecke neue Bilder.* Annette Verlag Wesel.
Waltman, J. (1851[2]). *Handleiding voor het Onderwijs in de Meetkunde op de Volksscholen.* Delft: J. de Groot.
Wansink, Joh.W. (1953). De wiskunde-werkgroep van de W.V.O. *Euclides 28* pp. 197-205.
Wansink, J.H. (1966). *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Eerste deel.* Groningen: J.B. Wolters.
Wansink, J.H. (1967). *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Tweede deel.* Groningen: J.B. Wolters.
Wansink, J.H. (1970). *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren. Derde deel.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Wansink, Joh.H. (1973). Franse invloed op de schoolmeetkunde in Nederland. *Euclides 48*(3) pp. 107-110.
Wansink, Joh.H. (1976). 1874-1974. Een herinnering aan het werk van Jan Versluys. *Euclides 51*(6) pp. 230-236.
Wansink, Joh.H. (1978). Some aspects of the development of the Dutch mathematical schoolbookmarket from 1800 to 1940. *Nieuw Archief voor Wiskunde (3)* XXVI pp. 206-230.
Wertheimer, M. (1959). *Productive Thinking.* New York: Harper & Brothers.
Wiegersma, S. (1960). *Rapport Meetkunde-Project* (samenvatting). Amsterdam.
Wierts van Coehoorn-Stout, Joh[a]. (1914[2]). *De Kindertuin. Handleiding bij de ontwikkeling*

van het kind van 3 tot 7 jaar, volgens de methode van Fröbel. Amsterdam: H. Wierts van Coehoorn.
Wijdeveld, E.J. (1969a). *Nieuwe wiskunde I. Taal en logica.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Wijdeveld, E.J. (1969b). *Nieuwe wiskunde II. Structuren.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Wijdeveld, E. (1977). *Vierkubers. Leerplanpublikatie 5.* Utrecht: IOWO.
Wijdeveld, E. (1980). Matematiseren: een didaktisch denkmodel. *Wiskobas Bulletin 9*(6) pp. 28-48.
Wilkeshuis, C. (z.j.). *Daantje zou naar school toe gaan. Honderd jaar 'Volksonderwijs'.* Utrecht: A.W. Bruna.
Wilkeshuis, C. (1968). *Meester, welbedankt! De school van 1900 tot nu.* Leiden: A.W. Sijthoff.
Willigen, A. van der (1823). *Verstandsoefeningen volgens het Boek der Moeders; toegepast op twaalf verschillende voorwerpen.* Leyden: D. du Mortier en Zoon.
Willink, B. (1988). *Burgerlijk sciëntisme en wetenschappelijk toponderzoek. Sociale grondslagen van nationale bloeiperioden in de negentiende eeuwse bètawetenschappen* (diss.). UvA.
Willink, B. (1998). *De Tweede Gouden Eeuw. Nederland en de Nobelprijzen voor natuurwetenschappen.* Amsterdam: Bert Bakker.
Wiskobas-team (1973). *Matematika. Handboek Heroriëntering Onderwijzers Wiskobas.* Utrecht: IOWO.
Wittmann, Erich Ch. (1987). *Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken.* Braunschweig/Wiesbaden: F. Vieweg & Sohn.
Wittmann, Erich Ch. (1996). *Fundamental Ideas of Geometry as a Basis for Curriculum Development.* Freudenthal Memorial Lecture. University of Dortmund.
Wittmann, E.C. en G. Müller (1994 e.v.). *Programm Mathe 2000.* Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.
Wolters, M. (1978). *Van rekenen naar algebra* (diss.). Utrecht.
Wolthuis, J. (1985). Theorievorming over Nederlandse onderwijsgeschiedenis: een terreinverkenning. *Info 16* (1985/86) pp. 228-251.
Young, J.W.A. (1911). Rapport adressé à la Sous-commission A. *L'Enseignement Mathématique 13* pp. 471-479.
Zwager, H.H. (1980^2). *Nederland en de Verlichting.* Haarlem: Fibula-Van Dishoeck.
Zijlstra, J. (1877). Nog eens Vormleer. *Schoolblad 6*(21).

Tijdschriften (systematisch onderzocht i.v.m. onderwerp van studie)

Algemeen Magazijn voor Onderwijs en Opvoeding, vanaf 1824: *Nieuw Algemeen Magazijn.....* 1819-1926.
Arithmetic Teacher. 1981-1994.
Beoefenaar der rekenkunde. (1876-1897)
Bijdragen..., later *Nieuwe Bijdragen.* 1801-1877 (geen jaargangnummers):
Bijdragen betrekkelijk den Staat en de verbetering van het Schoolwezen in het Bataafsch Gemeenebest. 1801-1806.
Bijdragen betrekkelijk den Staat en de verbetering van het Schoolwezen in het Koninkrijk Holland. 1806-1810.
Bijdragen ter bevordering van het Onderwijs en de Opvoeding, voornamelijk met betrekking tot de Lagere Scholen in Holland. 1810-1814.
Bijdragen ter bevordering van het Onderwijs en de Opvoeding, voornamelijk met betrekking tot de Lagere Scholen binnen de Verenigde Nederlanden. 1814-1815.
Nieuwe Bijdragen ter bevordering van het Onderwijs en de Opvoeding, voornamelijk met betrekking tot de Lagere Scholen in het Koninkrijk der Nederlanden. 1815-1877.
Correspondentieblad van den Bond van Onderwijzeressen bij het Fröbelonderwijs. 1905-1940.
De Beoefenaar der Wiskunde. 1865-1870.

l'Enseignement Mathématique. 1910-1913.
De Christelijke Schoolbode. 1888-1890.
De Leerschool, tijdschrift voor kweekelingen. 1844-1848.
De Nederlandsche Paedagoog. 1857-1860.
De Oefenschool. Tijdschrift voor jeugdige onderwijzers. 1839-1877.
De Schoolbode (Tholen). 1842-1846.
De Schoolbode. Tijdschrift voor Volksopvoeding en Volksonderwijs. 1869-1880.
De Volksschool. Tijdschrift voor aankomende onderwijzers en kweekelingen. 1847-1851.
De Wekker. Weekblad voor Onderwijs en Opvoeding. 1844-1877.
De Wekker. Nieuwe Bijdragen voor het Onderwijs. 1878-1890.
Educational Studies in Mathematics. 1968-1997.
Euclides. 1924 -1998 (eerste drie jaargangen onder de titel: *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen).*
Gids voor den Onderwijzer. 1881-1889.
Het Nieuwe Schoolblad. 1882-1890.
Journal for research in mathematics education. 1989-1998.
Maandblad van het Nederlandsch Onderwijzers Genootschap ter bevordering van Volksopvoeding en Onderwijs. 1850-1872.
Maandblad gewijd aan de belangen van het teekenonderwijs en de kunstnijverheid in Nederland. 1884-1890.
Maandblad voor het Onderwijs, inzonderheid voor de Bewaarschool (wisselende titel). 1885-1916.
Magazijn voor Rekenkunst. 1828-1832 en 1834-1835.
Mededelingenblad van de Wiskunde Werkgroep der WVO. 1953-1967.
Nieuw Nederlandsch Tijdschrift voor Opvoeding en Onderwijs. 1856-1859.
Nieuwe Wiskrant. 1981-1998.
Onderwijs en Opvoeding. 1950-1970.
Paedagogische Bijdragen. 1881-1890.
Paedagogische Studiën. 1946-1970.
Pestalozzi. Tijdschrift voor Onderwijs en opvoeding. 1867-1869.
School en Studie. 1879-1890.
(Het) Schoolblad, Wekelijksche Courant voor Lager, Middelbaar en Gymnasiaal Onderwijs. 1871-1890.
Teaching Children Mathematics. 1994-1998.
Tijdschrift voor aankomende onderwijzers. 1836-1849.
Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs (Panama Post). 1982-1998.
Tijdschrift voor onderwijzers, en ter bevordering der huiselijke opvoeding. 1833-1843.
Tijdschrift voor Rekenkunde ten behoeve van aankomende onderwijzers en onderwijzeressen. 1872-1880.
Tijdschrift voor Reken-, Stel- en Meetkunde. 1853- 1881.
Tijdschrift voor vormleer, rekenkunde en de beginselen der wiskunde. 1879-1882.
Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding. 1938-1948.
Weekblad voor Lager, Middelbaar en Gymnasiaal Onderwijs. 1865-1880.
Willem Bartjens. Tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. 1981- 1998.
Wiskobas Bulletin. 1971-1980.
Wiskrant (nrs 1 t/m 24). 1975-1980.

Verslagen en rapporten

ARBO (1983). *Van tekentafel tot levend geheel.* Zeist.
ARBO (1989). *Kanttekeningen bij de voorstellen voor rekenen en wiskunde* (pp. 40-48).
Bijlagen bij Bijblad van de Nederlandsche Staats-Courant. 1876-1878.

Bijlagen tot het Verslag der Handelingen van de Tweede Kamer der Staten Generaal. 1848-1858.

Bokhove, J., T.J.H.M. Eggen en F.J.C. van der Schoot (1996). *Balans van het rekenonderwijs aan het einde van de basisschool II. Uitkomsten van de tweede peiling reken/wiskundeonderwijs einde basisonderwijs.* Arnhem: Cito.

Bruggen, J. van en A. Treffers (red.). *In antwoord, responsboek 1* (verslag van de conferentie van 29-3 tot 1-4-1976 in Noordwijkerhout). Utrecht: IOWO.

Buddelmeijer, M.Th., R.K. Buiter en J.C. van der Wolf (1989). *Uitzicht op ruimtelijk inzicht? Een onderwijsexperiment op twee Amsterdamse scholen voor het lager beroepsonderwijs, gericht op het verbeteren van het ruimtelijk inzicht bij allochtone leerlingen (onderzoeksverslag).* Amsterdam: Psychologisch-pedagogisch Instituut.

Buddelmeijer, M.Th., R.K. Buiter en J.C. van der Wolf (1990). *Probleemgericht Onderwijs en Ruimtelijk inzicht bij Allochtone leerlingen: Effectonderzoek bij een onderwijsexperiment op Amsterdamse scholen voor lager beroepsonderwijs.* Amsterdam: Psychologisch-pedagogisch Instituut.

Catalogus Friedrich-Fröbel-Museum (z.j.). Bad Blankenburg.

Centraal Bureau voor de Statistiek (1937). *Statistiek van het voorbereidend onderwijs (bewaarschoolonderwijs) 1933-1936.* 's-Gravenhage: Rijksuitgeverij.

Centraal Bureau voor de Statistiek (1942). *Statistiek van het voorbereidend onderwijs (bewaarschoolonderwijs) 1937-1940.* 's Gravenhage: Rijksuitgeverij.

Centraal Bureau voor de Statistiek (1948). *Statistiek van het voorbereidend onderwijs (kleuteronderwijs) 1947.* 's Gravenhage: Staatsdrukkerij- en uitgeverijbedrijf.

CMLW (1968). *Toelichting op het Leerplan Wiskunde.*

Commissie Herziening Eindtermen. *Kerndoelen rekenen-wiskunde* (1993).

CPS (z.j.). Vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. Verslag conferentie maart 1964. *Stemmen uit de praktijk* 5.

CWRW (1984). *Reken/wiskundeprogramma's voor de kleuters in de basisschool.* Hoevelaken: CPS.

Feijs, E. e.a. (1987). *Almanak Reken/wiskunde methoden anno 1984.* Utrecht: OW&OC.

Freudenthal Instituut en SLO (1992). *Eindrapport.* Utrecht, Enschede: COW.

Gids Wiskobasconferentie 1971 in Egmond aan Zee.

Gemeente-archief Rotterdam (GAR): Bib XXVII F351, 1840 (leerplan bewaarschoolonderwijs).

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1996). *Verschillen in reken/wiskundeprestaties tussen meisjes en jongens op de basisschool (onderzoeksverslag fase I).* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Iets over bewaarscholen, en bepaaldelijk over die te Rotterdam. Gemeente Archief Rotterdam-Bibliotheek XXVII F 351.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (1975). Mathematics Achievement in the Primary School Years: *IEA's Third International Mathematics and Science Study.* Timss International Study Center: Boston College.

Lange, J. de e.a. (1994). *Rapport studiecommissie Wiskunde B vwo.* Utrecht.

K-13 Geometry Report (1967). Ontario Institute for Studies in Education.

Kindt, M. e.a. (1987). *Hewet Project eindverslag.* Utrecht: OW&OC.

Kraemer, J-M., F. van der Schoot en N. Veldhuizen (1996). *Balans van het rekenonderwijs in LOM- en MLK-scholen.* Uitkomsten van de eerste peiling rekenen/wiskunde. Arnhem: Cito.

Leerplan en Leidraad voor de eerste drie graden der lagere scholen en der oefenklassen toegevoegd aan de normaalscholen en voor de voorbereidende afdelingen der middelbare scholen in het Koninkrijk België (1957).

Mathematics in Primary Education (1966). Hamburg: Unesco Institute for Education.

Meeder, M., M. Mettes en H. Pouw (1993). *Evaluatieverslag Voorbereidingscursus wiskunde.* Utrecht: APS.

Moor, E. de, J. Janssen, J-M. Kraemer en J. Menne (1997). *Niveau van het meetkunde-onderwijs op de basisschool. Pimbo proeftoets 1995. Items, resultaten, verslag, interpretaties* (intern rapport). Arnhem, Utrecht: Cito/Freudenthal Instituut.

Moor, E. de, J. Janssen, J-M. Kraemer en J. Menne (1997). *Eindverslag Pimbo-enquêtes. Materialen , data, verslagen* (intern rapport). Arnhem, Utrecht: Cito/Freudenthal Instituut.

Nederlanse Vereniging van Wiskundeleraren. *Vademecum voor de Wiskundeleraar*, derde uitgave (1993).

NVvW en NVORWO (1985). *Longitudinale planning van het reken & wiskundeonderwijs in Nederland.*

OEEC (1961). *New Thinking in School Mathematics* .

Ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in Wiskunde, Mechanica en Kosmographie op de H.B. Scholen met vijfjarigen cursus (1925). *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 2* pp. 187-196.

Proeve van een leerplan voor het basisonderwijs, B, Rekenen (1968). Groningen: J.B. Wolters.

Rapport van de Leerplan-commissie-1954 van WIMECOS inzake het opstellen van een ontwerp-leerplan en een ontwerp-eindexamen-programma voor wiskunde voor de H.B.S.-B. (1954). *Euclides 30*(3) pp.113-139.

Responsgroep (1975). *Wiskunde en Didaktiek konferentie voor P.A. docenten oktober 1975* (verslag). Utrecht: IOWO.

Richtlinien und Stoffpläne für die Volksschule (Nordrhein-Westfalen) (1963). Ratingen bei Düsseldorf: A. Henn Verlag.

Rijksarchief 172 B 37 (transcriptie van de inspectie-verslagen van mr. H. Wijnbeek).

Rijksarchief Noord-Holland: *Archief Hans Freudenthal* (in bewerking).

Sjamaar, M. e.a. (1995). *Advies examenprogramma's havo/vwo wiskunde.* Den Haag.

SLO (1989). *Advies over voorlopige eindtermen basisonderwijs, deel 4. Rekenen en wiskunde.* 's-Gravenhage: Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen.

SLO (1997a). *Gids voor onderwijsmethoden voor het basisonderwijs. Rekenen/wiskunde.* Overzichten per methode: De Wereld in Getallen, Pluspunt, (Nieuw) Operatoir rekenen, Rekenen & Wiskunde, Naar Zelfstandig Rekenen. Enschede.

SLO (1997b). *Gids voor onderwijsmethoden voor het basisonderwijs. Reken/wiskunde Algemeen deel en Vergelijkend overzicht.* Enschede.

VALO (1988). *Verslag VALO-conferentie Wiskunde 12-16 in 1987.*

Verslag van de Handelingen der Staten Generaal. 1856-1857.

Verslag van de Handelingen der Staten Generaal. 1877-1878.

Verslag van den Staat der Hooge-, Middelbare en Lagere Scholen in het Koningrijk der Nederlanden, 1858-1890 (te noemen Algemeen Onderwijsverslag).

Verslag van de Handelingen van de Tweede Kamer der Staten Generaal. 1877-1890.

Verslag van de Buitengewone vergadering van LIWENAGEL dd. 8-2- 1930. *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs 26* pp. 822-840 en 860-866.

Verslag Voorjaarsdag 1985. *Panama Post 3*(4) pp. 5-9.

Staatsblad. 1880-1890.

Stemmen uit de praktijk. Vernieuwingen van het wiskundeonderwijs, conferentieverslag 1964. CPS.

Vlaams Verbond van het Katholiek Basisonderwijs (1997). *Leerplan Wiskunde (ontwerp). Deel 3: Meten en metend rekenen, deel 4: Meetkunde.*

Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid (1986). *Basisvorming in het onderwijs.* Rapport 27. Den Haag.

Wijnstra, J. (red.) (1988). *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool.* Arnhem: Cito.

Williams, J.D. (1967). *Mathematics Reform in the Primary School.* Hamburg: Unesco Institute for Education.

Wiskobas Heroriëntering Onderwijzers 1968-1978 (Rapportboekje 2). Utrecht: IOWO.

Algemene naslagwerken

Alphabetische Naamlijst van Boeken, Plaat- en Kaartwerken 1833-1849. Amsterdam: C.L. Brinkman.

Brinkman's Catalogus der Boeken, Plaat- en Kaartwerken 1850-1882. Amsterdam: C.L. Brinkman.

Brinkman's Catalogus der Boeken, Plaat- en Kaartwerken 1883-1891. Leiden: A.W. Sijthoff.

Brinkman's Catalogus der Boeken, (Plaat- en Kaartwerken) 1891-1900, 1901-1910, 1911-1915, 1916-1920, 1921-1925, 1926-1930, 1931-1935, 1936-1940, 1941-1945, 1946-1950. Leiden: A.W. Sijthoff.
(bovenstaande werken ook wel aangeduid met *Brinkmans Cumulatieve Catalogus* of *BCC.*)

Geluk, J. (1882). *Woordenboek voor opvoeding en onderwijs.* Groningen: J.B. Wolters.

Jansen, H.P.H. (1979[4]). *Kalendarium. Geschiedenis van de lage landen in jaartallen.* Utrecht-Antwerpen: Spectrum.

Molhuysen, P.C. e.a. (red.) (1911-1937). *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek.* Leiden: A.W. Sijthoff.

Noordman, J. (red.) (1978). *Literatuurwijzer Historische pedagogiek.* Nijmegen: SUN.

Paedagogische Encyclopaedie (R. Casimir en J.E. Verheijen, red.) (z.j.). Groningen-Batavia: J.B. Wolters.

Rein, W. (ed.) (1903-1910). *Encyclopädisches Handbuch der Pädagogik. Band 1-10.* Langensalza: Hermann Beyer & Söhne.

Standaard Encyclopedie voor Opvoeding en Onderwijs, (1974-1982). Antwerpen: Scriptoria.

The Encyclopedia of Philosophy (1972). (Paul Edwards, ed. in chief). New York: Macmillan Publishing Co. & The Free Press / London: Collier Macmillan Publishers.

Wolf, H.C. de en Frida de Jong (z.j.). *Pedagogische tijdschriften in Noord-Nederland 1795-1830.* Amsterdam: Kohnstamm Instituut.

Wal, M. van der (1992). *Geschiedenis van het Nederlands.* Utrecht: Het Spectrum.

Walle, J. van de en H. de Wolf (1981). *Pedagogische tijdschriften in Nederland van 1830 tot 1857.* Nijmegen: IWHP/KUN.

Wie is dat? (1902) (biografische naamlijst).

Zernike, C.F.A. (1905). *Paedagogisch Woordenboek.* Groningen: J. B. Wolters.

Correspondenties

K. van Berkel en E. de Moor, betreffende Dijksterhuis, mevrouw Ehrenfest en Versluys:
EdM aan KvB: (6-12-90), (8-5-95), (26-5-95), (20-6-95), (7-8-95), (7-10-95), (14-10-96), (15-1-96), (21-2-96), (3-4-96), (24-4-96), (30-10-97).
KvB aan EdM: (13-12-90), (23-5-95), (9-7-95), (19-9-95), (23-12-95), (23-1-96), (24-3-96), (23-5-96), (16-12-96), (17-11-97), (25-6-98).

H. van Die aan EdM (7-10-97). Van eindtermen tot kerndoelen: een kleine kroniek (historische beschrijving van totstandkoming van de kerndoelen BO).

B. Donkers aan EdM (?-2-98), commentaar en aanvullingen op rapport van H. van Die (7-1-97).

V. Frenkel aan EdM (21-4-93), (27-4-93), betreffende Sjochor'-Trotskij.

H. Freudenthal en T. Ehrenfest-Afanassjewa (Rijks Archief Noord-Holland), over axiomatiek.
TEA aan HF: (3-3-64), (8-3-64), (19-3-64).
HF aan TEA: (6-3-64), (11-3-64), (21-3-64).

J. Goedheer aan EdM (14-1-91), (24-2-92), (15-12-93), (14-1-93), (8-2-94), (6-2-95), genealogische gegevens over de familie Versluys, in het bijzonder over J. Versluys; bibliografische gegevens over J. Versluys.

P.M. van Hiele aan EdM (4-2-93), betreffende herkomst mevrouw Ehrenfests ideeën en invloed daarvan op het werk van de Van Hieles.

P.M van Hiele aan EdM (20-9-98), betreffende het onstaan van Van Hieles niveautheorie.
M.A. Hofman aan EdM (3-12-97), betreffende hersenonderzoek bij de ontwikkeling van cognitieve functies.
A.E.M. Jonker aan EdM (10-3-92), vondsten over vormleer in Gemeente Archief Rotterdam.
H.J. Kleefstra aan EdM (6-11-97), genealogische gegevens J.J. Kleefstra en onderzoek naar diens werk.
H. Klomp aan EdM (1-11-95), betreffende mevrouw Ehrenfests opvattingen over axiomatiek.
EdM aan P.J. van Albada (20-6-95), betreffende EdM's beschrijving en interpretatie van Van Albada's cursus, gevolgd door een telefoongesprek tussen PJvA en EdM.
M.S.R. Nihom aan EdM (10-2-93), betreffende mevrouw Ehrenfests betekenis in de Wiskunde Werkgroep.
S. Schmidt aan EdM (?-?-97), betreffende J. Schmid en J. Schmidt.
O. Prinits aan R. Troelstra (16-9-93), informatie over Sjochor' Trotskij.
D.J. Struik aan EdM (2-2-94), betreffende Jan Versluys.
D.J. Struik aan EdM (30-9-96), betreffende mevrouw Ehrenfests eerste colloquia in 1916.
A. Treffers aan J. Letschert (begin juli 89), betreffende schrappen van meetkunde in het eindtermenvoorstel.
R. Troelstra aan EdM (31-3-93), (5-6-93), (23-9-93), begeleidend commentaar op diens vertaling van het werk van Sjochor' Trotskij.
E-B. Wagemann aan EdM (27-11-95), betreffende de wiskundige interpretatie van Fröbels materialen.

Leerboeken vormleer (1817-1857) behorende bij hoofdstuk A3

Dapperen, D. van (1820). *Handleiding voor onderwijzers*, om volgens eenen geregelden gang, kinderen te leeren opmerken, denken en spreken, toegepast op de zamenstelling der eenvoudigste voorwerpen uit de meetkunde, bekend onder den naam *Vormleer*, eerste stukje. Amsterdam: Johannes van der Hey. 113 pagina's, voorrede I t/m XVI, twee platen met 76 figuren. Het boek is opgedragen aan P.J. Prinsen en B. Schreuder. Aantal drukken: 4.

Diesterweg, F.A.W. (1854, eerste druk 1837). *Onderwijs in de Vormleer*, als middel ter ontwikkeling van het verstand, en ter voorbereiding tot de beoefening der wiskundige wetenschappen. Eerste stuk. Op het schutblad: Handleiding bij het onderwijs in de Vormleer. Vertaling: J. Blouw. Groningen: J.B. Wolters. De voorrede (I t/m XII) is van B. Brugsma en dateert uit 1836. 80 pagina's. 1 plaat met 5 figuren. Aantal drukken: 2.

Diesterweg, F.A.W. (1854, eerste druk 1839). *Onderwijs in de Vormleer*, als middel ter ontwikkeling van het verstand, en ter voorbereiding tot de beoefening der wiskundige wetenschappen, tweede stuk. *Aanwijzing tot het gebruik van de Handleiding.* Voorrede van B. Brugsma (z.j.) I t/m VIII. Groningen: J.B. Wolters. 239 pagina's. 3 platen met 81 figuren. Aantal drukken: 2.

Graßmann, J.G. *Ruimteleer of Meetkunst voor de lagere scholen.* Uit het Duits vertaald. Gepubliceerd in twaalf afleveringen in de Nieuwe Bijdragen van 1849 (5 delen), 1851 (2 delen) en 1852 (5 delen). Aantal pagina's: 93. In Nederland niet als officïeel boek gepubliceerd.

Handleiding tot de Vormleer, voor Moeders en Onderwijzers, naar het Hoogduitsch gevolgd van Pestalozzi (1817). Uitgegeven door de leden van het hoofdbestuur der Onderwijzers Gezelschappen in het 8ste schooldistrict in Vriesland. Sneek: F.W. v. B. Smallenburg. 48 pagina's . Voorrede I t/m XVI. Uitklapplaat met 64 figuren. (Eén van de onderwijzers Lantinga, Reidsma, Krol of Van Haarst moet volgens 'Aan den Lezer' de auteur van het geschrift zijn.) Aantal drukken: ?

Hemmenga, A.H. (1823). *Verzameling van de Zamengestelde Figuren, naar de Vormleer van Pestalozzi.* Voorberigt 3-15. 50 voorbeeldtekeningen. Rotterdam: Mensing en Van Westerenen. Aantal drukken: ?

Leupen, P. (1839). *Practische Handleiding tot het Elementair Teekenen.* Middelburg: Gebroeders Abrahams. Voorwoord 1 t/m 6. 16 bladen met tekeningen. Aantal drukken:?

Oefeningen met den Cubus, tot eene handleiding in het aanschouwen, opmerken en vergelijken, volgens Pestalozzzi (1817). Uitgegeven door het Hoofdbestuur der Onderwijzers Gezelschappen in het VIIIe schooldistrict in Vriesland. Sneek: F.W. v. B. Smallenburg. 64 pagina's. Inleiding I t/m XVI. Opgedragen aan de Commissaris tot het Lager en Middelbaar Onderwijs A. van den Ende. Aantal drukken: ?

Prinsen, P.J. (1824). *Handleiding voor onderwijzers,* om volgens eenen geregelden gang, kinderen te leeren opmerken, denken en spreken, toegepast op de zamenstelling der eenvoudigste voorwerpen uit de meetkunde, bekend onder den naam *Vormleer,* tweede stukje. Amsterdam: Johannes van der Hey en Zoon. 190 pagina's. Voorberigt en inhoud I t/m VIII, 2 platen met 184 figuren. Aantal drukken:?

Reidsma, H.M. (1826). *Praktische handleiding tot onderwijs in de eerste beginselen der vormleer,* voor scholen en huisgezinnen, eerste stukje. Sneek: F. Holtkamp. 18 pagina's, 2 pagina's voorrede, 13 platen met 35 figuren. Aantal drukken: 2.

Rijkens, R.G. (1830). *Praktische handleiding voor de beoefening der vormleer,* ten dienste van onderwijzers en leerlingen der lagere scholen; als een middel om de zielsvermogens der kinderen harmonisch te ontwikkelen. Groningen: J. Oomkens. 42 pagina's, I t/m XI, 28 platen. Aantal drukken: 2.

Leerboeken vormleer (1857-1875) behorende bij hoofdstuk A7

Bakkes, H. (1865). *De vormleer, methodisch en praktisch bewerkt voor de lagere school.* Schiedam: H.A.M. Roelants. 114 pagina's, voorberigt I-IV, 31 platen met 320 figuren. Aantal drukken: 1.

Bierens de Haan, D. (1858). *Leidraad bij het onderwijs in de vormleer op de lagere scholen.* Deventer: J. de Lange. 13 pagina's, voorwoord I en II, één pagina met figuren. Aantal drukken: 3.

Boer, H. de (1858). *Oefeningen in de vormleer, voor de scholen ten dienste van de leerlingen.* Zwolle: W.E.J. Tjeenk Willink. 32 pagina's inclusief voorberigt, 2 uitklapbare platen met figuren. Aantal drukken: 2-de, herziene druk in 1864.

Bouman, H. (1858). *De vormleer in de lagere school.* Eene handleiding bij het onderwijs en tot zelfoefening voor aankomende onderwijzers. Groningen: J.B. Wolters. 148 pagina's, voorbericht I-VIII, 78 houtsneefiguren. Aantal drukken: 6. Vanaf de 7-de druk (1879) titel gewijzigd in *De vormleer der meetkunde in de lagere school.* De 9-de druk heet *Vormleer, meetkunde in de lagere school.*

Bouman, H. (1864). *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen voor de verschilllende klassen der lagere school. Eerste reeks voor de laagste klassen.* Groningen: J.B. Wolters. 48 pagina's, voorbericht I-IV, 13 houtsneefiguren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1879 onder de titel: *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen als voorbereiding tot de beoefening der meetkunde.*

Bouman, H. (1865). *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen voor de verschilllende klassen der lagere school. Tweede reeks.* Groningen: J.B. Wolters. 48 pagina's, voorrede 2 pagina's, 27 houtsneefiguren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1879 onder de titel: *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen als voorbereiding tot de beoefening der meetkunde.*

Bouwman, L. (z.j.). *Meetkundig rekenboek voor lagere scholen.* Groningen: F. Folkers. 62 pagina's met figuren en antwoorden. Aantal drukken: 3. Laatste druk: 1871 bij J. Snelders in Groningen.

Bouwman, L. (1863, BCC). *Vormleer. Een rekenboek voor de lagere scholen.* Groningen: F. Folkers. 36 pagina's inclusief voorberigt en antwoorden, geen figuren. Aantal drukken: 1.

Brug, S.L. (1863). *Meetkundig rekenboek, overeenkomstig de behoeften van onzen tijd; voor scholen en ter bevordering der nijverheid.* Groningen: J. Noorduyn en Zoon. 96 pagina's,

figuren, antwoordenboekje. Aantal drukken: 1.
Crüts, J.A. (1865). *Vragen en opgaven bij het onderwijs in de vormleer ten dienste van kweekelingen of aankomende onderwijzers.* Gouda: G.B. van Goo. 45 pagina's inclusief voorberigt, enige figuren. Aantal drukken: 1.
Dijkstra, F. (1858). *Korte handleiding bij het onderwijs in de beginselen der vormleer op de lagere scholen.* Groningen: J. Oomkens, J. Zoon. 22 pagina's inclusief voorberigt, 2 uitklapplaten met 86 figuren. Aantal drukken: 1.
Groot, D. de (1864). *Praktische leergang voor het onderwijs in de vormleer in de lagere school.* Groningen: P. Noordhoff. 46 pagina's inclusief inleiding, geen figuren. Aantal drukken: 2-de vermeerderde druk 1872.
Hemkes, H. Kz. (1858). *Vormleer voor de school en het leven, ter ontwikkeling van verstand, bevordering van goeden smaak en aankweeking van gepaste vormen.* Eene practische handleiding voor onderwijzers. Groningen: J. Oomkens J. Zoon. 120 pagina's, voorberigt 4 pagina's, ca. 300 figuren. Aantal drukken: 1.
Hemkes H. Kz. (1861) (auteur niet op titelpagina, zie BCC). *Vormleer, een leesboekje voor de scholen.* Groningen: M. Smit. 54 pagina's, voorberigt 2 pagina's, geen figuren. Aantal drukken: 3. Laatste druk: 1876 (BCC). Volgens BCC moet nog een tweede deeltje bestaan.
Hetterschy, D.C. (1867). *Meetkundig leer- en rekenboekje ten dienste der leerlingen van de hoogste klasse eener lagere school, en inzonderheid van avond- en herhalingsscholen.* Purmerende: L.G. Post. 68 pagina's, inclusief voorbericht, 1 uitvouwblad met 46 figuren. Aantal drukken: 1.
Meulevelt, W.G. (1865). *Vormleer voor de leerlingen der lagere scholen.* Amsterdam: W.H. Zeelt. 16 pagina's, inclusief voorberigt, geen figuren Aantal drukken: 2. Laatste (?) druk: 1876.
Meurs, J. (1866). *Vormleer, verzameling van vragen en opgaven ter herhaling en toepassing tot gebruik voor de lagere school.* Nieuwe Niedorp: J. Groot. 4 delen, tezamen ca. 100 pagina's (deel 2 onvindbaar), figuren en antwoorden. Aantal drukken: 1(?).
Moll, J.D.R. (1862). *Vormleer dienstig voor onderwijzers-kweekelingen, strekkende tevens tot handleiding voor den onderwijzer bij het onderwijs van de vormleer in de scholen (eerste deel).* Deventer: J. Brinkgreve. 124 pagina's, voorwoord en inleiding I-IV, houtsneefiguren. Aantal drukken: 4. 4de vermeerderde druk: 1873.
Moll, J.D.R. (1864). *Vormleer dienstig voor onderwijzers-kweekelingen, strekkende tevens tot handleiding voor den onderwijzer bij het onderwijs van de vormleer in de scholen. Tweede deel; over den Cirkel en de Lichamen.* Deventer: Gebrs Brinkgreve. 175 pagina's, voorwoord, houtsnee-figuren. Aantal drukken: 3. Laatste druk: 1873.
Moll, J.D.R. (1865). *Ruim vierhonderd opgaven over rechte lijnen en vlakken, behoorende bij het eerste deel der vormleer.* Deventer: Gebrs Brinkgreve. 61 pagina's inclusief voorwoord, geen figuren. Aantal drukken: 3. Laatste druk: 1873.
Moll, J.D.R. (1872). *Vormleer voor het lager onderwijs.* Deventer: A.J. van de Sigtenhorst. 82 pagina's , voorwoord 2 pagina's, houtsneefiguren. Aantal drukken: 1.
Moll, J.D.R. (1873[2]). *Ruim zeshonderd vragen en opgaven over den cirkel behoorende bij het tweede deel der vormleer.* Deventer: Gebrs Brinkgreve. 77 pagina's , antwoorden, geen figuren. Aantal drukken: 2.
Mulder, G.C. (1858). *Handleiding bij het onderwijs in de vormleer, ten dienste van aankomende onderwijzers.* Arnhem: J.F. Thieme. 84 pagina's, voorberigt en inleiding I-IV, 8 platen met 100 figuren. Aantal drukken: 1.
Otterloo, A. van (1868). *Vormleer of aanschouwelijke meetkunst.* Uitgegeven door het Nederlandsch Onderwijzers-Genootschap te Amsterdam: C.L. Brinkman. 128 pagina's, voorbericht III-VIII, ca. 30 figuren. Aantal drukken: 1.
Postel, J.G.W. (1861). *Vraagstukken over de vormleer.* Zwolle: S.H. ten Cate. 16 pagina's inclusief voorwoord, uitklapblad met 45 figuren. Aantal drukken: ?
Semmelink, B. (1858). *Beginselen der vormleer en volksmeetkunde, vraag- en werkstukken ter toepassing, ten gebruike bij het gewone en meer uitgebreide lager onderwijs.* Zutphen:

A.E.C. van Someren. 115 pagina's, voorberigt I-VIII, 73 houtsneefiguren. Aantal drukken: 1.

Stratemeijer, J.H. (1858). *Handleiding bij het onderwijs in de vormleer op de lagere scholen.* Leeuwarden: U. Proost. 88 pagina's, voorberigt III-VIII, 5 pagina's met figuren. Aantal drukken: 4. Laatste druk: 1860.

Swartwolt, R. (1862). *Oefeningen en vraagstukken ter toepassing bij het onderwijs in de vormleer voor de middelste klasse eener lagere school.* Amsterdam: A. Hoogenboom. 27 pagina's, 3 houtsneefiguren. Aantal drukken: 4. Laatste druk: 1872.

Swartwolt, R. (1862). *Oefeningen en vraagstukken ter toepassing bij het onderwijs in de vormleer voor de hoogste klasse eener lagere school.* Amsterdam: A. Hoogenboom. 31 pagina's inclusief voorberigt, 2 platen, antwoorden. Aantal drukken: 3. Laatste druk: 1867.

Vernimmen, H. (1875^2) (niet op titelblad, maar auteur volgens Zwijsen Gedenkboek). *Meetkundig Leer- en Rekenboek of Handleiding in de Vormleer, eerste gedeelte.* Tilburg: Drukkerij van het R.K. Jongens-Weeshuis. 98 pagina's, 92 houtsneefiguren. Voorrede: 2 pagina's. Antwoorden. Aantal drukkken: 2.

Wilk, L.J. van der (1858). *Hoe men vormleer kan onderwijzen. Iets voor de lagere scholen.* Utrecht bij C.J. Heijl. 27 pagina's, geen figuren. Aantal drukken: 1.

Witte van Citters, J. de (1861). *Handleiding tot het aanvankelijk onderrigt in het regtlijnig teekenen en tot het zamenstellen van symmetrische figuren, met toepassing op de vormleer.* 's-Gravenhage: de Erven Thierry en Mensing. 120 pagina's, inleiding I-IV, aparte atlas met 45 platen. Aantal drukken: 4. Laatste druk: 1877.

Handleidingen (*), Leerlingboeken (**) en studieboeken (***) (1875-1889) behorende bij hoofdstuk A13

Bouman, H. (Directeur der Kweekschool te Amsterdam)

A13;1a * (1879^7). *De vormleer der meetkunde in de lagereschool. Eene handleiding bij het onderwijs en tot zelfdoening.* Groningen: J.B. Wolters. 7-de druk, 247 p. Voorbericht 2 p. 118 houtsneefiguren. Voortzetting van *De vormleer in de lagere school* (1 ste druk: 1858, 6de druk: 1874). Aantal drukken: 9. Laatste in 1886 onder de titel: *Vormleer, meetkunde in de lagere school.*

A13;1b ** (1879^2). *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen als voorbereiding tot de beoefening der meetkunde, eerste reeks.* Groningen: J.B. Wolters. 48 p. Voorbericht III-IV. 13 houtsneefiguren. Herdruk van *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen voor de verschillende klassen der lagere school* (1-ste druk: 1864). Aantal drukken: 2.

A13;1c ** *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen als voorbereiding tot de beoefening der meetkunde, tweede reeks.* Groningen: J.B. Wolters. 48 p. 27 houtsneefiguren. Herdruk van *De vormleer in geregeld opeenvolgende opgaven en oefeningen voor de verschillende klassen der lagere school,* tweede reeks (1-ste druk: 1865). Aantal drukken: 2.

Donck J.J.C. (Leeraar aan de Rijkskweekschool voor Onderwijzers te Haarlem)

A13;2 *** (1876). *Practisch-meetkundig handboek op aanschouwelijke grondslagen voor zelfonderricht*. Haarlem: De Erven Loosjes. 311 p. Inhoudsopgave I-IV. Aan de lezer I-IV. Atlas met 22 platen. 193 figuren. Aantal drukken: 1(?).

Koenen, H.J. en A.J.M. Brogtrop

A13;3a ** (1884^2). *Meten en teekenen. Vormleer voor de Lagere Scholen, eerste stukje.* Tiel: D. Mijs. 64 p. Voorbericht 1 p. ca. 30 figuren. Aparte toelichting en antwoorden (10 p.). Aantal drukken: 10. Laatste (?) druk: 1912.

A13;3b ** (1889^3). *Meten en teekenen. Vormleer voor de Lagere Scholen, tweede stukje.* Tiel: D. Mijs, 52 p. ca. 20 figuren. Aparte toelichting en antwoorden (8 p.). Aantal drukken: ?

A13; 3c *** (1884). *Beknopte Aanschouwlijke meetkunde. Vormleer van het vlak en de ruimte, eerste stukje.* Tiel: D. Mijs. 74 p. inclusief antwoorden. Voorbericht 1 p. ca. 30

figuren. Aantal drukken: tenminste 8 (1913).

A13; 3d *** (1884). *Beknopte Aanschouwlijke meetkunde. Vormleer van het vlak en de ruimte, tweede stukje.* Tiel: D. Mijs. 85 p. Voorbericht 1 p. ca. 70 figuren. Aantal drukken: tenminste 5 (1913).

A13; 3e *** (1879). *Aanschouwlijke meetkunde. Vormleer van het vlak en de ruimte, deel 1.* Tiel: D. Mijs. 147 p. incl. antwoorden. 140 figuren. Aantal drukken: tenminste 9. 9de druk: 1905.

A13; 3f *** (1879). *Aanschouwlijke meetkunde. Vormleer van het vlak en de ruimte, deel 2.* Tiel: D. Mijs. 80 p. incl. antwoorden. 70 figuren. Aantal drukken: tenminste 6. 6de druk: 1895.

Koonings, J.

A13;4 ** (1888). *Oppervlak en Inhoud. Practisch Rekenboek voor de gewone Lagere School, het herhalingsonderwijs en de laagste klassen van ambachtsscholen.* Zutphen: W.J. Thieme & Cie. 49 p. incl. antwoorden. 10 figuren. Aantal drukken: 6. Laatste druk: 1910, BCC.

Molema, H.

A13; 5a ** (1886). *Aanschouwings- en denkoefeningen of Vormleeropgaven voor de lagere school, eerste stukje.* Groningen: Noordhoff & Smit. 55 p. Voorbericht 2 p. 340 figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1886, BCC.

A13;5b ** (1884). *Aanschouwings- en denkoefeningen of Vormleeropgaven voor de lagere school, tweede stukje.* Groningen: Noordhoff & Smit. 51 p. 218 figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1886, BCC.

A13;5c **/*** (1886). *Aanschouwings- en denkoefeningen of Vormleeropgaven voor de lagere school, vooral ten gebruike bij het Herhalingsonderwijs en de Normaallessen, derde stukje.* Groningen: Noordhoff & Smit. 51 p. ca. 70 figuren. Aantal drukken: 1, BCC.

Mulder, H.

A13;6 * (1885). *De Vormleer op de lagere school.* Groningen: J.B. Wolters. 26 p. Overdruk uit *Gids voor den Onderwijzer 5*, 1885.

Raadersma Lzn, H. (Hoofd der School te Luinjeberd en Onderwijzer aan de Normaallessen te Heerenveen)

A13;7a ** (1883). *Vormleer voor de lagere scholen, eerste stukje,* 1883 (niet gevonden).

A13;7b ** (1883). *Vormleer voor de lagere scholen, tweede stukje.* 's-Gravenhage: Joh. IJkema. 42 p. Voorbericht 1 p. ca. 30 figuren. Aantal drukken: 3, BCC.

A13;7c ** (1891). *Meten, teekenen en rekenen voor de lagere scholen, eerste stukje.* 's-Gravenhage: Joh. IJkema. 48 p. Voorbericht III-I. ca. 40 figuren. Aantal drukken: 10. Laatste (?) ongewijzigde druk: 1912.

A13;7d ** (1891). *Meten, teekenen en rekenen voor de lagere scholen, tweede stukje.* 's-Gravenhage: Joh. IJkema. 48 p. Voorbericht 1p. ca. 40 figuren. Aantal drukken: 10. Laatste (?) ongewijzigde druk: 1912.

A13;7e ** (1895). *Voor het leven. Meet, teeken en reken.* 's-Gravenhage: Joh. IJkema. 52 p. Voorbericht 2 p. ca. 20 figuren. Aantal drukken: ?

Roekel, W. van

A13;8 *** (1886). *Vraagstukken over de vormleer met verklarende Aantekeningen: ten dienste van onderwijzers, die voor de hoofdacte studeeren en van hen, die aan de Vergelijkende Examens deelnemen.* Tiel: D. Mijs. 46 p. Voorbericht 1 p. Enkele figuren. Aantal drukken: ?

Tiemersma Hzn, G. (Hoofd der School te Wildervank)

A13;9a **/*** (1886[3]). *Vijfhonderd opgaven over de vormleer, voor kweekelingen en voor de hoogste klasse der volksschool.* Sneek: J.F. van Druten. 70 p. 49 figuren. Voorbericht III- IX (2-de druk: 1880). Aantal drukken: tenminste 3. In 1900 verschijnt nog *Driehonderd opgaven.*

A13;9b ** (1886). *Voorlooper voor 'Vijfhonderd opgaven over de vormleer'.* Sneek: J.F. van Druten. 27 p. Voorbericht 1 p. Geen figuren. Aantal drukken: ?

Veenstra, O.G. (Hoofdonderwijzer te Waddinxveen)
A13;10 ** (1882). *Vormleer voor de lagere school* (3 delen). Sneek: J.F. van Druten. Deel 1: 42 p. Voorbericht III-IV ca. 80 figuren. Deel 2: 40 p. ca. 100 figuren. Deel 3: 26 p. Geen figuren. Aantal drukken: 1.

Versluys, J.
A13;11a */*** (1876). *Handleiding bij het onderwijs in de vormleer.* Groningen: W. Versluys. 156 p. Inleiding 2p. ca. 50 figuren. 10 platen met 56 tekenvoorbeelden. Aantal drukken: 4 Laatste (?) druk: 1882.
A13;11b ** (1876). *Vraagstukken bij het onderwijs in de vormleer, eerste stukje.* Groningen: W. Versluys. 45 p. Voorrede 1p. ca. 30 figuren. Aantal drukken: 6. Laatste druk: 1888, BCC.
A13;11c ** (1876). *Vraagstukken bij het onderwijs in de vormleer, tweede stukje.* Groningen: W. Versluys. 45 p. ca. 25 figuren. Aantal drukken: 6. Laatste druk: 1888, BCC.
A13;11d *** (1880). *Vraagstukken over vormleer, vooral ten dienste van normaalscholen en kweekscholen.* Groningen: W. Versluys. 93 p. Voorbericht 2 p. ca. 10 figuren. Aantal drukken: 1 (?).
A13;11e *** (1886). *Vormleer voor meergevorderden.* Amsterdam: W. Versluys. 180 p. Voorrede 2 p. ca. 80 figuren. Aantal drukken: 1.

Wamel, A van en G. Werdes (Hoofden van scholen te Amsterdam)
A13;12a ** (1889). *Oog en Hand. Vormleer opgaven voor het vierde leerjaar.* Amsterdam: W. Versluys. 39 p. Voorbericht III-IV. ca. 20 figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1891, BCC.
A13;12b ** (1891). *Oog en Hand. Vragen en oefeningen ter berekening van oppervlakten en inhouden.* Amsterdam: W. Versluys. 40 p. Voorbericht III-IV. ca. 30 figuren. Aantal drukken: 1-ste en laatste druk: 1991, BCC.

Weersma, M. (Hoofdonderwijzer te Groningen)
A13;13 ** (1881). *Vorm en inhoud. Aanschouwelijke meetkunde (Practische vormleer).* Groningen: J.B. Wolters. 47 p. Inleiding 2 p. ca. 35 houtsneefiguren. Aantal drukken: 1, BCC.

Welker, P.H.M. (Hoofd der Eerste Openbare School te Numansdorp)
A13;14 ** (1889). *Een uur 's weeks met winkelhaak en passer. Proeve van een concentrischen vijffarigen vormleer cursus voor de lagere school.* 5 boekjes. Nijmegen: H.C.A. Thieme. 110 p. Inleiding 4 p. Geen figuren. Aantal drukken: 1, BCC.

Woltering, F.A.R. (Onderwijzer aan 's Rijks-Kweekschool en Directeur der Burger-Avondschool te 's-Bosch)
A13;15 *** (1884). *Vormleer. Verzameling van vragen en opgaven over meetkundige lichamen, ten dienste van het onderwijs aan kweek- en normaalscholen.* 's-Hertogenbosch. 63 p. Voorrede 1 p. Geen figuren. Antwoorden. Aantal drukken: 1.

IJkema, IJ. (Hoofdonderwijzer te 's-Gravenhage)
A13;16a * (1881). *Handleiding bij het onderwijs in de vormleer in de volksscholen.* 's-Gravenhage: Joh. IJkema. 57 p. Voorbericht 2 p. 6 platen met 98 figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1885, BCC.
A13;16b ** (1881). *Oefeningen bij het onderwijs in de vormleer in de volksscholen, eerste leergang.* 's-Gravenhage: Joh. IJkema. 24 p. Voorbericht 1 p. Geen figuren. Aantal drukken: 5. Laatste druk: 1896, BCC.
A13;16c ** (1881). *Oefeningen bij het onderwijs in de vormleer in de volksscholen, tweede leergang.* 's-Gravenhage: Joh. IJkema. 32 p. Geen figuren. Aantal drukken: 5. Laatste druk: 1896, BCC.

Ook werd nog gebruikt:

Hemkes Kz., H. (1884[8]) ***Rekenboek voor jongens, tweede deeltje, over de meetkunde.* Groningen: Noordhoff & Smit. 95 p. inclusief antwoorden. Voorbericht 2 p. ca. 15 figuren. Aantal drukken: 1-ste druk (?), 8-ste en laatste (?) druk: 1884.

Schoolboeken, geënt op de vormleer (1889-1910) behorende bij hoofdstuk A16

Couvée, J. (Hoofd eener Tusschenschool te Rotterdam)

A16; 17a ** (1896). *Lijnen, vlakken en lichamen, Reken- en Tekenboek voor de lagere school. Eerste stukje (4de en 5de leerjaar).* Rotterdam: S. Zwart. 24 p. Voorbericht 1 p. Geen figuren. Aantal drukken: 1 (?).

A16; 17b ** (1896). *Lijnen, vlakken en lichamen, Reken-en Tekenboek voor de lagere school. Tweede stukje (6de leerjaar).* Rotterdam: S. Zwart. 47 p. Voorbericht 1 p. Geen figuren. Aantal drukken: 1 (?).

Gast Jz., S. de (Leeraar aan de Rijkskweekschool en de Rijksnormaallessen te Maastricht)

A16;18a *** (1907[7]). *Beginselen der Meetkunde, op aanschouwelijken grondsleg, v.n.l. ten dienste van Normaallessen.* 's- Gravenhage: Joh.IJkema. 109 p. Voorrede 2 p. 150 figuren. Aantal drukken: 1-ste druk: 1894, 12. Laatste (?) druk: 1923.

A16;18b *** (1907[7]). *Meetkundig Rekenboek, behoorende bij de Beginselen der Meetkunde.* 's- Gravenhage: Joh. IJkema. 52 p. incl. antwoorden. Voorrede 1 p. 1 figuur. Aantal drukken: 1-ste druk: 1894, 9. Laatste (?) druk: 1912.

Hout, J. van der en J.V. Disselkoen (Hoofden van scholen te Schiedam en Sliedrecht)

A16;21a *** (1891). *Vragen en opgaven over Vlakke Figuren en Lichamen ten dienste van Normaal- en Kweekscholen, eerste stukje: vlakke figuren.* Schiedam: J. Odé. 44 p. Geen figuren. Aantal drukken: 1.

A16;21b *** (1891). *Vragen en opgaven over Vlakke Figuren en Lichamen ten dienste van Normaal- en Kweekscholen, tweede stukje: lichamen.* Schiedam: J. Odé. 36 p. Geen figuren. Aantal drukken: 1.

Landsman, J.M. (Hoofd eener School te Rotterdam)

A16; 19a ** (1896). *De drie afmetingen. Proeve van een methode voor de oppervlakte- en inhoudsberekening met toepassing van den papierarbeid (Cartonnage), eerste stukje.* Amsterdam: W. Versluys. 39 p. Voorbericht 2 p. Geen figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1904, BCC.

A16;19b * (1896). *Toelichting bij de drie afmetingen. Proeve van een methode voor de oppervlakte- en inhoudsberekening met toepassing van den papierarbeid (Cartonnage), eerste deeltje.* Amsterdam: W. Versluys. 32 p. Voorbericht 2 p. Geen figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1904, BCC.

A16;19c ** (1897). *De drie afmetingen. Proeve van een methode voor de oppervlakte- en inhoudsberekening met toepassing van den papierarbeid (Cartonnage), tweede stukje.* Amsterdam: W. Versluys. 40 p. Voorbericht 2 p. Geen figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1904, BCC.

A16;19d ** (1897). *De drie afmetingen. Proeve van een methode voor de oppervlakte- en inhoudsberekening met toepassing van den papierarbeid (Cartonnage), derde stukje.* Amsterdam: W. Versluys. 45 p. Voorbericht 1 p. Geen figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1904, BCC.

A16;20e * (1897). *Toelichting bij de drie afmetingen. Proeve van een methode voor de oppervlakte- en inhoudsberekening met toepassing van den papierarbeid (Cartonnage), tweede deeltje.* Amsterdam: W. Versluys. 40 p. Voorbericht 1p. Geen figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1904, BCC.

Rooy, M. de

A16; 22a ** (1893[2]). *Meetkundig Rekenboek voor de Volksschool, eerste stukje.* Tilburg: R.K. Jongens-Weeshuis. 37 p. Voorbericht 2 p. Aantal drukken: 2 (?).

A16;22b ** (1896[2]). *Meetkundig Rekenboek voor de Volksschool, tweede stukje.* Tilburg: R.K. Jongens-Weeshuis. 35 p. Antwoorden. Aantal drukken: 2 (?).

Rosier, B. en L. de Vries (hoofdonderwijzers te Wormerveer)

A16;23 ** (1897). *Teekenen, meten en rekenen, oefeningen voor de lagere school.* Deel I,

3-de leerjaar. Groningen: J.B. Wolters. 44 p. Voorbericht 1 p. 2 figuren. Aantal drukken: 1.

Versluys, J.

A16;24a ** (1891). *Meetkundig rekenboek voor de lagere school, eerste stukje.* (niet gevonden)

A16;24b ** (1892). *Meetkundig rekenboek voor de lagere school, tweede stukje.* Amsterdam: Versluys. 36 p. Voorbericht 1 p. ca. 20 figuren. Aantal drukken: 4. Laatste (?) druk: 1901.

Wisselink, W.H. (Directeur der R.H.B. School te Heerenveen)

A16;25a *** (1894) *Meetkundig rekenboek, eerste stukje (vlakke figuren) A. Theorie.* Groningen: P. Noordhoff. 48 p. Voorbericht 1 p. ca. 50 figuren. Aantal drukken: 4. Laatste druk: 1907, BCC.

A16;25b *** (1894). *Meetkundig rekenboek, tweede stukje (lichamen) A. Theorie.* Groningen: P. Noordhoff. 35 p. ca. 30 figuren. Aantal drukken: 4. Laatste druk: 1907, BCC.

A16;25c *** (1894). *Meetkundig rekenboek, eerste stukje (vlakke figuren) B. Vraagstukken.* Groningen: P. Noordhoff. 35 p. inclusief antwoorden. Geen figuren. Aantal drukken: 4. Laatste druk: 1907, BCC.

A16;25d *** (1894). *Meetkundig rekenboek, tweede stukje (lichamen) B. Vraagstukken.* Groningen: P. Noordhoff. 35 p. inclusief antwoorden. Enkele figuren. Aantal drukken: 4. Laatste druk: 1907, BCC.

Zijlstra, J.G. (Hoofd eener Openbare School te Arnhem)

A16;26a ** (1893). *Meetkundig rekenboek, driehonderd vormleeropgaven, in verband met het reken- en het teekenonderwijs, eerste stukje.* Groningen: J.B. Wolters. 46 p. Voorbericht 2 p. Geen figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1899, BCC.

A16;26b ** (1893). *Meetkundig rekenboek, driehonderd vormleeropgaven, in verband met het reken- en het teekenonderwijs, tweede stukje.* Groningen: J.B. Wolters. 56 p. Voorbericht 1 p. Geen figuren. Aantal drukken: 2. Laatste druk: 1899, BCC.

Schoolboeken en handleidingen tekenen behorende bij hoofdstuk A15

Bes, K. (1879). *Handleiding bij de elementaire klassieke teeken-methode voor de lagere of volksschool.* Groningen: J.B. Wolters.

Braet von Überfeldt en V. Bing (1862). *Handleiding tot het Teekenen der Natuur en de Beginselen der Doorzigtkunde, voornamelijk ingerigt ten dienste der Volksscholen.* Amsterdam: Gebroeders Binger.

Laagland, G.A. en G.M.A. Jansen (z.j.). *De Teekenles (zesde schooljaar).* Heerenveen.

Laagland, G.A. en G.M.A. Jansen (1909). *De Teekenles (leerplan voor de kweekschool).* Heerenveen: A. Binnert Overdiep.

Laagland, G.A. en G.M.A. Jansen (z.j.). *De Teekenles op de Kweekschool. Deel 1: Begrip van Projectie en Doorsnede.* Heerenveen: A. Binnert Overdiep.

Laagland, G.A. en G.M.A. Jansen (1912). *Handleiding bij het onderwijs in zaaktekenen.* Heerenveen: A. Binnert Overdiep.

Plaatzer van de Hull, H.W. (1856). *Eene bijdrage tot de methode van teeken-onderwijs van de Gebroeders F. en A. Dupuis.* Haarlem: J.J. van Brederode.

Plaatzer van de Hull, H.W. (1860). *Handleiding voor Teeken-Onderrigt in de Volksschool.* Amsterdam: F. Muller, Deventer: A.H. de Lange, Leiden: A.W. Sijthoff.

Rijkens, R.G. (1829). *Praktische handleiding voor de eerste beginselen der teekenkunde ten dienste van lagere scholen en huisgezin.* Groningen: J. Oomkens J.Zoon.

Schmid, Joseph (1809). *Die Elemente des Zeichnens nach Pestalozzischen Grundsätzen.* Bern: L.A. Haller.

Versluys, J. (1881). *Handleiding bij het eerste teekenonderwijs.* Groningen: W. Versluys.

Zwier Gzn.,W. en T. Jansma (1916[6]). *Het teekenen naar vlakke figuren.* Tiel: D. Mijs.

Geraadpleegde schoolboeken bij hoofdstuk B2 (1890-1925)

Bouman, P.J. en J.C. van Zelm (1918). *Rekenmethode voor de lagere school* (13 deeltjes). Amsterdam: W. Versluys.

Boswijk, D. en W. Walstra (1908[2]). *Meetkunde voor aanstaande onderwijzers.* Groningen: J.B. Wolters.

Boswijk, D. en J.G. Zijlstra (1883-1918). *Het Rekenen in de lagere school* (8 deeltjes). Groningen: J.B. Wolters.

Critas (1902). *Opgaven behoorende bij het "Metriek Stelsel"* (2 deeltjes). Tiel: D. Mijs.

Derksen, H.A. en G.L.N.H. de Laive (1910[6]). *Vlakke Meetkunde met vraagstukken. Eerste deel.* Zutphen: Thieme & Cie.

Douma, H. (1893-1907). *Rekencursus. Eene serie rekenboeken voor de lagere school.* (9 deeltjes). Purmerend: J. Muusses.

Hoestra, P. (1907). *Inleiding tot de Meetkunde. Eerste deeltje.* Groningen: P. Noordhoff.

Kleefstra, J. (1920). *Leerboek der vlakke meetkunde, ten dienste van het M.U.L.O., Middelbaar en Technisch Onderwijs.* Amsterdam: Maatschappij voor goede en goedkoope lectuur.

Kleefstra, J. (1921). *Leerboek der Stereometrie, ten dienste van het Hooger, Middelbaar en Technisch Onderwijs.* Amsterdam: Maatschappij voor goede en goedkoope lectuur.

Kleefstra, J. (1920). *Leerboek der Analytische Meetkunde en de gronden der Analytische Stereometrie.* Amsterdam: Maatschappij voor goede en goedkoope lectuur.

Ley, P.H. van der (1884). *Toelichting tot het allereerste onderwijs in de kennis der levenlooze natuur.* Amsterdam: W. Versluys.

Ley, P.H. van der (1896). *Handleiding voor het onderwijs in het meten, wegen en de natuurkunde.* Amsterdam: W. Versluys.

Mout, A. (1914). *Meetkundig rekenboek voor de lagere school, vervolgklassen en hehalingsscholen. Vierde stukje.* 's-Gravenhage: Joh. IJkema.

Pelt, D. van (1903). *Overzicht der Methode.* Tiel: D. Mijs.

Pelt, D. van (1901-1910). *De nieuwe rekencursus* (10 deeltjes). Tiel: D. Mijs.

Pelt, D. van (1912). *Het Hooge Rekenboek. Derde deel. Inleiding in de meetkunde.* Tiel: D. Mijs.

Poot, P. (1893). *Handelend Aanschouwen. Methode voor het onderwijs in handenarbeid, meetkundig rekenen en teekenen in alle klassen der lagere school.* 3 delen, 2 opgavenboekjes. Amsterdam: S.L. van Looy / H. Gerlings.

Poot, P. (1893). *Beginselen der vlakke meetkunde.* Amsterdam: S.L. van Looy / H. Gerlings.

Rauwerda, A. (1902). *Het Aanschouwingsonderwijs in de lagere school en op de bewaarschool.* Zwolle: W.E.J. Tjeenk Willink.

Reindersma, W. (1912). *Nieuw leerboek der vlakke meetkunde.* Groningen, Den Haag: J.B. Wolters.

Reindersma, W. (1918[2]). *Nieuw Leerboek der Vlakke Meetkunde. Delen 2 en 3.* Groningen-Den Haag: J.B. Wolters.

Reindersma, W. (1957 12). *Beknopt Leerboek der Vlakke Meetkunde* (herzien door W. Vreeken). Groningen: J.B. Wolters.

Smits, G. (1910[6]). *Leerboek der Vlakke Meetkunde.* 's-Hertogenbosch: Robijns.

Vellenga, J. (1910). *Inleiding tot de meetkunde. Eerste deeltje.* Amsterdam: W. Versluys.

Versluys, J. (1878[2]). *Beknopt leerboek der vlakke meetkunde.* Groningen: W. Versluys.

Versluys, J. (1875-1917). *Rekenboek voor de Lagere School* (8 deeltjes). Amsterdam: A. Versluys.

Voerman, P.J. (1913). *Meten en Teekenen.* Groningen: P. Noordhoff.

Wolda, G. (1921-1923). *Meetkunde (Theorie en Vraagstukken) I. Congruentie, II. Evenredigheid en berekeningen, III. De Cirkel.* Zwolle: W.E.J. Tjeenk Willink.

Zanten, J. van (1894[4]). *Leerboek der meetkunde, ten gebruike bij het onderwijs voor ambachtslieden.* Groningen: P. Noordhoff.

Geraadpleegde schoolboeken bij hoofdstuk B4 (1945-1970)

Voortgezet Onderwijs

Alders, C.J. (1963[29]). Vlakke meetkunde voor m.o. en v.h.o. Groningen: P. Noordhoff.

Bijpost, M. en J.K. Timmer (1958[8]). *Met Passer en Liniaal 1. Eenvoudig leerboek der vlakke Meetkunde.* (Reeks: het ULO-boek). Zutphen: W.J. Thieme.

Bos, W.J. en P.E. Lepoeter (1966[12]). *Wegwijzer in de meetkunde. Deel I.* Amsterdam: J.M. Meulenhoff.

Bruin, K. de e.a. (1971[5]). *Getal en Ruimte, B2. Meetkunde voor de brugklas.* Culemborg: Tjeenk Willink-Noorduijn.

Dop, A. van en A. van Haselen (1949). *Vlakke meetkunde.* Groningen: J.B Wolters.

Ernst, B (z.j.). *Werkboek der meetkunde 1.* Amsterdam-Djakarta: W. Versluys.

Hartman, J.A. en P.M. van Hiele (1972). *Van A tot Z, werkboek der wiskunde voor L.T.O. Deel I.* Purmerend: J. Muusses.

Hiele, P.M. van en D. van Hiele-Geldof (1959[5]). *Werkboek der meetkunde 1.* Purmerend: J Muusses.

Hiele, P.M. van en D. van Hiele-Geldof (1957[3]). *Werkboek der meetkunde 2.* Purmerend: J Muusses.

Hiele, P.M. van en D. van Hiele-Geldof (1948). *Werkboek der meetkunde. Tweede deel.* Purmerend: J Muusses.

Hiele, P.M. van en D. van Hiele-Geldof (1963). *Van figuren naar begrippen 1, 2, en 3. Werkboek der meetkunde voor VH&MO.* Muusses.

Hiele, P.M. van e.a. (1976[5]). *Van A tot Z, wiskunde-werkboek voor HAVO/VWO 1a, 1b.* Purmerend: Muusses.

Holwerda A. en D.N. van der Neut (1959[4]). *Werkschrift ter inleiding in de meetkunde.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Jacobs, H.J. e.a. (1968). *Moderne wiskunde voor mavo, havo en vwo 1 en 2.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Jasper, H. en H. Lolkema (bewerkers) (1969). *Moderne wiskunde voor het lager beroepsonderwijs 1.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Stoelinga, Th.G.D. en M.G. van Tol (1961[8]). *Planimetrie, leerboek voor HBS, Gymnasium en Lyceum. Deel I.* Zwolle: W.E.J. Tjeenk Willink.

Streefkerk, H. (1959[4]). *Nieuw Meetkundeboek I.* Groningen: P. Noordhoff.

Troelstra, R. e.a. (1962). *Transformatiemeetkunde I, II en III.* Groningen: J.B. Wolters.

Troelstra, R. en A.M. Kuipers (1967). *Proeve van een gemoderniseerde meetkunde I.* CMLW. Utrecht: Pressa Trajectina.

Turkstra H. en S.J. Geursen (1955[2]). *Werkschrift Vlakke Meetkunde I.* Groningen: J.B. Wolters.

Turkstra, H. en S.J. Geursen (1953). *Kern der vlakke meetkunde.* Groningen: J.B. Wolters.

Thijn, A. van (1948). *Hoofdpunten der planimetrie.* Groningen: J.B. Wolters.

Vredenduin, P.G.J. (1961[7]). *Planimetrie I voor v.h. en m.o.* Groningen: J.B. Wolters.

Wijdenes, P. (1953[2]). *Nieuwe schoolmeetkunde I.* Groningen-Djakarta: P. Noordhoff.

Lager onderwijs

Diels, P.A. en J. Nauta (1936). *Fundamenteel Rekenen.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Eicholz, E. e.a. (1970). *Elementair Wiskundig Rekenen.* Assen: Van Gorcum.

Glimmerveen, C. en S. van der Werff (1970). *Op Veilig Spoor.* Meppel: H. ten Brink.

Gravemeijer, K. e.a. (1984). *Rekenen en Wiskunde.* Baarn: Bekadidact.

Lugtmeyer, H.J. e.a. (1954). *Naar aanleg en tempo.* Zutphen: W.J. Thieme.

Menke, J.H. (1954). *Vormleer voor de lagere school. Deel 1.* Paramaribo: W.E. Menke.

Nicolaï, B. e.a. (1971). *Wiskunde voor de basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Picard, N. (z.j.) *Denken en Rekenen.* 's-Hertogenbosch: Malmberg.

Reynders, J.M. e.a. (1959). *Functioneel Rekenen.* Amsterdam-Djakarta: W. Versluys.
Vere de Vault, M. de e.a. (1970). *Ontdek het zelf.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Vossen, H.M.M. (1970). *Niveaucursus Rekenen.* 's-Hertogenbosch: Malmberg.
Zandvoort, R.H. e.a. (1970[10]). *Naar zelfstandig rekenen.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Kleuterprogramma's en handleidingen bij C2-3

Faber, S.E.K. (1982). *Voetje voor voetje: een raamplan voorbereidend rekenen, meten en andere zaken.* Amsterdam: Van Goor Zonen.
Gooijer-Quint, J. de (z.j.). *Prikkeltjes voor wiskunde met kleuters.* Utrecht: IOWO.
Graaf, M. de, M. Lemmens en M. Mesu (1982). *Speletal.* Zeist: Dijkstra.
Huitema, S. e.a. *Ideeënboek* (bij *De Wereld in Getallen*). Den Bosch: Malmberg.
Janssen, J. e.a. *Idee; activiteitenmap rekenen-wiskunde.* 's-Hertogenbosch: Malmberg.
Janssen-Vos, F. (1975). *Werken met kinderen: het Kiosk-werkplan voor kleuteronderwijs.* Assen-Amsterdam: Van Gorcum.
Kuyk, J.J. van (1992). *Ordenen.* Arnhem: Cito.
Keuper-Makkink, A. (1985). *De Klimboom.* Groningen: Wolters Noordhoff.
Langendijk, P. (1978). *Schoolrijp maken: oefeningen voor 5-8 jarigen.* Deventer: Ankh-Hermes.
Luit, J.E.H. van e.a. (1994). *Utrechtse Getalbegrip Toets.* Doetinchem: Graviant educatieve uitgaven.
Projectgroep OSM Rotterdam (1979). *Kleuters willen ook wel eens denken.* Tilburg: Zwijsen.
Raamplan Montessori-basisonderwijs (1982). APS: Amsterdam.
Reken-wiskunde-activiteiten voor kleuters (1984). SAC: Utrecht.
Sweers, W. (1989). *Handleiding A* (bij Operatoir Rekenen). Tilburg: Zwijsen.
Vuurmans, A.C. e.a. (1986). *Rekenwerk, Praktijkboek 1&2.* Gorinchem: De Ruiter.

Schoolboeken bij C5

Aarssen, C. e.a. (1993). *Netwerk 1.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Abels, M. e.a. (1993). *Moderne wiskunde I. Zesde editie.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Jacobs, H.J. e.a. (1980). *Moderne Wiskunde 1 en 2. Vierde editie.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Kelfkens, A. e.a. (1983[10]). *Getal en Ruimte B1.* Culemborg: Educaboek.
Werkgroep zestien min-zestien plus (1986). *Exact Wiskunde.* Amsterdam: Meulenhoff Educatief.
Van *Mathematics in Context* (1996), uitgegeven door Encyclopaedia Brittannica Educational Corporation, Chicago Illinois, werden de volgende 'pre-publication versions' bestudeerd: Side Seeing, Figuring all the Angles, Looking at an Angle, Reallotment, Made to Measure, Packages and Polygons, Triangles and Beyond, Triangles and Patchwork, Ways to Go en Digging the numbers.
Verder de volgende 'draft versions' en interne documenten:
– Teacher Resource and Implementation Guide (nov. 1996)
– overzicht van de vier hoofdleerlijnen ('strands')
– 'working paper' (1994): Geometry and Measurement: 'grasping space'.

Realistische reken-wiskundemethoden bij C4

Beusekom, N. e.a. *Pluspunt*, reken-wiskundemethode voor de basisschool. Den Bosch: Malmberg.
Gravemeijer, K. e.a. (1984). *Rekenen & Wiskunde.* Baarn: Bekadidact.
Huitema, S. e.a. *De Wereld in Getallen* (herzien). Den Bosch: Malmberg.
Sweers, W. e.a. (1990). *Operatoir Rekenen* (vernieuwd). Tilburg: Zwijsen.

Artikelen over meetkunde in het Wiskobas Bulletin (WBB), 1971-1980

Blij, F. van der (1973). Soepspeeltjes en Turkse tekeningen. *WBB 2*(3) pp. 717-721.
Blij, F. van der (1975). De knoop. *WBB 5*(2/3) pp. 4-7.
Blij, F. van der (1976). De doolhof. *WBB 5*(4) pp. 4-7.
Blij, F. van der (1978). Handelsmerk en huisstijl (meetkundige aspecten van logo's). *WBB 7*(4) pp. 4-8.
Blij, F. van der (1979). Van natuur naar meetkunde en vice versa. *WBB 8*(3), 4-11.
Blij, F. van der (1980). Not interested in mathematics (over Sol LeWitt). *WBB 9*(4/5) pp. 22-32.
Boersma, F. en J. Bultsma (1974). Spiegelen. *WBB 4*(2) pp. 206-207.
Brink, J. van den (1973). Omtrek. *WBB 2*(3) pp. 732-737.
Brink, J. van den (1974). Laat ze voor je uit lopen (tegels leggen). *WBB 3*(3) pp. 229-232.
Brink, J. van den (1974). Kieken (foto's op Waterland). *WBB 4*(1) pp. 48-54.
Brink, J. van den (1974). Witkarproblemen (roostermeetkunde). *WBB 4*(2) pp. 156-163.
Brink, J. van den (1975). De kortste weg. *WBB 4*(3) pp. 262-267.
Brink, J. van den (1975). Bouwen met blokjes. *WBB 4*(3) pp. 296-308.
Brink, J. van den (1977). Wiskundige wereldoriëntatie (over schaduwen en andere afbeeldingen). *WBB 6*(5/6) pp. 57-59.
Brink, J. van den (1978). Wiskundige wereldoriëntatie. Inhoud (over de helft van de inhoud van verschillende flessen). *WBB 7*(4) pp. 18-20.
Brink, J. van den (1978). Wiskundige wereldoriëntatie. Doolhoven (opereren in topografische structuren). *WBB 8*(1) pp. 36-40.
Brink, J. van den (1979). Wiskundige wereldoriëntatie. Realistisch wiskundeonderwijs (Wiskobaservaringen en Piaget). *WBB 8*(3) pp. 76-81.
Bruggen, J. van (1974). Het adressenspel (over coördinaten n.a.v. het stadsplan). *WBB 3*(6) pp. 533-536.
Freudenthal, H. (1974). Wiskobal (over veelvlakken en de bol). *WBB 3*(2) pp. 104-106.
Freudenthal, H. (1974). De grootst mogelijke – de kleinst mogelijke (over maximaliseren en minimaliseren). *WBB 3*(6) pp. 456-459.
Freudenthal, H. (1975). Waar gaat meer in? (vouwen van een A-4 blad). *WBB 4*(5) pp. 364-365.
Freudenthal, H. (1976). Van 't zelfde (over meetkundige structuren). *WBB 6*(1) pp. 3-5.
Freudenthal, H. (1977). Pythagoras. *WBB* 6(5/6) pp. 2-4.
Freudenthal, H. (1978). Het midden van... *WBB* 7(4) pp. 2-4.
Freudenthal, H. (1978). Hoe weet je dat? (verdubbelen van een vierkant). *WBB* 8(1) pp. 2-3.
Freudenthal, H. (1980). Zon en maan. *WBB 9*(5/4) pp. 20-22.
Gier, T. de en A. Goffree (1975). Verkenningsreis op de kubus. *WBB 4*(6) pp. 584-587.
Goddijn, A. (1980). In de schaduw van de meesters (over schaduwmeetkunde). *WBB 9*(4/5) pp. 41-47.
Gooijer-Quint, J. de (1976). Bouwwerken (voor kleuters). *WBB 6*(1) pp. 14-16.
Gooijer-Quint, J. de en E. Wijdeveld (1977). Kijken (over verrekijker en kijkdoos met kleuters). *WBB 6*(5/6) pp. 13-22.
Gooijer-Quint, J. de en E. Wijdeveld (1978). Kinderpraat (over foto's maken met kleuters). *WBB 7*(4) pp. 11-14.
Gooijer-Quint, J. de (1979). Een treintje ging uit rijden (over spelen en oriënteren). *WBB 8*(2) pp. 13-16.
Groote Haar, D. e.a. (1973). Een mooie, rooie bus (een optimaliseringsprobleem op het stadsplan). *WBB 3*(1) pp. 64-69.
Heege, H. ter (1972). Wiskundewerkhoeken (over het spijkerbord). *WBB 1*(5) pp. 369-377.
Heege, H. ter (1973). Wiskundewerkhoeken (over het tangram). *WBB 2*(4/5) pp. 853-857.
Heege, H. ter (1974). Prikbordproblemen (vierkanten en rechthoeken). *WBB 4*(1) pp. 28-29.
Heege, H. ter (1974). Je raakt er wegwijs van (Over het Lange Water. Thema voor de middenbouw over oriënteren). *WBB 4*(1) pp. 54-62.

Heege, H. ter (1975). Prikbordproblemen (blokjes bouwen). *WBB 4*(3) pp. 268-270.
Heege, H. ter (1975). Prikbordproblemen (vierkanten combineren). *WBB 4*(5) pp. 395-396.
Heege, H. ter (1975). Jan Jaap, onze bakkersjongen (over routeproblemen). *WBB 4*(5) pp. 428-431.
Heege, H. ter (1975). Roetes op het stadsplan. *WBB 4*(6) pp. 552-556.
Heege, H. ter (1980). Aktiviteitencentrum. *WBB 9*(4/5) pp. 103-106.
Heege, H. ter (1980). Aktiviteitencentrum (2). *WBB 9*(6) pp. 99-105.
Hervormde school Onstwedde (1973). Verslag over spijkerbordlessen. *WBB 2*(3) pp. 815-818.
Huitema, B. (1974). Kleuters aan het spijkerbord. *WBB 4*(1) pp. 74-76.
Jansen, H. (1974). Skriptoteek (Tangram). *WBB 3*(3) pp. 235-237.
Jansen, H. (1974). Opleiding (konstruktieve bouwplaten). *WBB 4*(2) pp. 132-137.
Jansen, H. (1974). Opleiding (meten en meetkunde). *WBB 4*(3/4) pp. 271-275.
Jansen, H. (1975). Opleiding (over Waterland). *WBB 4*(6) pp. 514-520.
Jong, R. de (ed.) (1971). Over het stadsplan. *WBB 1*(1).
Jong, R. de (ed.) (1972). Problemen in het stadsplan. *WBB 1*(2/3) pp. 208-239.
Jong, R. de (ed.) (1973). Nogmaals het spijkerbord. *WBB 2*(4/5) pp. 961-968.
Kindt, M. (1977). Wiskunde in de brugperiode. Regelmatige figuren. *WBB 6*(5/6) pp. 23-28.
Mogensen, A. e.a. (1978). Richting Straatsburg (over het vinden van richting op aarde). *WBB 8*(1) pp. 18-23.
Moor, E. de (1974). Bespreking van 'das Formenspiel' van Bauersfeld e.a. *WBB 4*(1) pp. 20-24.
Moor, E. de (1974). Doe-idee (meetkunde-werkbladen). *WBB 4*(2) pp. 186-192.
Moor, E. de (1975). Bespreking van 'Matema-Körperspiel'. *WBB 4*(3/4) pp. 253-256.
Moor, E. de (1975). Doe-idee (blokjes en doosjes). *WBB 4*(3/4) pp. 315-318.
Moor, E. de (1975). Doe-idee (vormen zien). *WBB 4*(5) pp. 438-440.
Moor, E. de (1975). Doe-idee (spiegelen). *WBB 4*(6) pp. 568-572.
Moor, E. de (1976). Doe-idee (meetkunde met het Tobleronedoosje). *WBB 5*(5/6) pp. 15-16.
Moor, E. de (1978). Bespreking van het TV-programma 'Open Kaart'. *WBB 8*(1) pp. 23-28.
Moor, E. de (1979). Bespreking van het TV-programma 'Een blokje om' (over routes en kaarten,..). *WBB 8*(4) pp. 24-27.
Onzen, J.E.F. van (1973). Opmerkingen bij het spijkerbord. *WBB 2*(2) pp. 771-772.
Oort, D. (1972). Afstandswegen in het stadsplan. *WBB 1*(2/3) pp. 122-126.
Oort, D. (1974). Kijk ook eens zo (relatie oppervlakte inhoud bij vergroten). *WBB 4*(1) pp. 42-44.
Oort, D. (1974). Met pa naar pi (oppervlakte). *WBB 3*(4/5) pp. 349-354.
Schoemaker, G. (1979). Zie je wel (over kijkmeetkunde). *WBB 8*(3) pp. 18-22.
Streefland, L. (1973). Enkele opmerkingen (over het spijkerbord). *WBB 2*(3) pp. 821-823.
Streefland, L. (1974). Wij maken zelf een kubus. *WBB 3*(6) pp. 537-538.
Streefland, L. (1974). Meetkundige verkenning van de bol. *WBB 4*(1) pp. 63-66.
Streefland, L. (1974). Zon zien. *WBB 4*(2) pp. 168-177.
Streefland, L. (1974). Schaduwen. *WBB 4*(2) pp. 178-185.
Streefland, L. (1975). Tijd, afstand en snelheid op onze aarde. *WBB 4*(5) pp. 432-437.
Sweers, W. (1976). Wiskunde in de brugperiode (over verpakkingen). *WBB 6*(1) pp. 37-39.
Sweers, W. (1977). Wiskunde in de brugperiode (over Belvia, een meetkundethema). *WBB 6*(3) pp. 41-45.
Treffers, A. (1980). Cito item dito (over toetsopgaven oppervlakte). *WBB 9*(6) pp. 81-98.
Walter, M. (1976). Over de constructie van veelvlakken, opgebouwd uit driehoeken. *WBB 5*(5/6) pp. 22-24.
Wijdeveld, E. (1976). Meetkunde in de buurt (bespreking van een scriptie van G. Wegman). *WBB 5*(5/6) pp. 24-26.
Wijdeveld, E. (1978). Didaktisch perspektief (over het verschijnsel perspectief i.v.m. met meetkunde op de basisschool). *WBB 8*(1) pp. 78-87.

Leerplanpublikaties van Wiskobas 1975-1980 over meetkunde

leerplandeel 1 (1975).
De kiekkas van Wiskobas. A. Treffers.
Over uitgangspunten en doelstellingen, ook over meetkunde.
leerplandeel 2 (integratieplan). 1975.
Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool (model voor een schoolwerkplan).
Wiskobasteam, eindredactie: R. de Jong, A. Treffers en E. Wijdeveld.
Meetkundige taferelen onderbouw: Waterland pp. 26-34. Naar verhouding pp. 51-58, Oppervlakte pp. 71-82, Aan wal pp. 98-106. Overzicht meetkunde pp. 117-118.
Meetkundige taferelen middenbouw: Kavelland pp. 161-167, Vissers van het Buljoekameer pp. 187-192, Brievenbussen pp. 193-197, De laatste drie maanden pp. 198-203. Overzicht meetkunde pp. 217-221.
Meetkundige taferelen bovenbouw: Het schaatstema pp. 251-256, Eksperimenten pp. 257-263, De kubus pp. 264-273, Afstand, tijd, snelheid pp. 300-306, Gulliver pp. 313-319. Overzicht meetkunde pp. 337-340.
leerplandeel 3 (1976).
Bussen en blokken. R. de Jong (ed.). Ontwikkeling: L. Gilissen, E. de Moor, A. Treffers en E. Wijdeveld.
Bevat onder meer meetkundige werkbladen over routes en blokjes.
leerplandeel 4 (1976).
Inter-lokaal. R. de Jong (ed.). Ontwikkeling: J. van den Brink, J. van Bruggen, L. Gilissen, F. Goffree, H. ter Heege, R. de Jong, E. de Moor, A. Treffers en E. Wijdeveld.
Bevat onder meer meetkundige werkbladen over het stadsplan.
leerplandeel 5 (1977).
Vierkubers. E. Wijdeveld.
Een project over het bouwen met blokjes.
leerplandeel 7 (1977).
Oppervlakte. H. ter Heege en E. de Moor.
Werkblok met 116 werkbladen en aparte handleiding (verschillende leertrajecten omtrek, oppervlakte, inhoud en dichtheid).
leerplandeel 8 (1978).
De Kamping. J. van den Brink en E. Wijdeveld.
Werkbladen en lesbeschrijvingen behorende bij een schoolradioproject NCRV; bevat ook een aantal meetkundige activiteiten.
leerplandeel 9 (1978).
Oppervlakte R. de Jong (ed).
Werkblok met 58 werkbladen en aparte handleiding.
Lessenseries, practica en thema's: Het papieren tovenaarsfeest (J. De Gooijer-Quint, E. Wijdeveld), Met de groeten van de reus (H. ter Heege), Kavelland (H. ter Heege), Volkstuintjes (H. ter Heege), Ralph de zeerover (L. Streefland), De vissers van het Buljoekameer (H. ter Heege), Het spijkerbord (E. de Moor). Verder bevat de handleiding een theoretische beschouwing 'Oppervlakte – als verschijnsel benaderd' (H. Freudenthal).

Meetkunde voor de Pedagogische Academie (PA) 1971-1980

Verslag van conferentie 1975 (over meetkunde) voor PA-docenten.
Goffree, F., H. Jansen en J. Keijnemans (1977). *Kijken, doen, denken en zien* (blok meetkunde voor het eerste jaar van de PA).
Goffree, F., J. Keijnemans, H. Jansen en J. Ritsema (1977). *Stagespullen* (bevat een hoofdstuk met meetkundige ideeën voor de student in de stage).
Goffree, F. (1977). *Kijken, doen, denken en zien. Analyse van wiskundig-didaktisch werk door P I-studenten.*

Meetkunde voor Heroriëntering Onderwijzers (HO) 1971-1980

Treffers, A. e.a. (1971). *Stadsplan*: een practicum voor de onderwijzer (ko-boek), een boekje met suggesties voor de praktijk van de basisschool (bas-boek) en een begeleidende tekst voor de docent (wis-boek).
Moor, E. de, A. Treffers e.a. (1972). *Spijkerbord*: practicum plus wis- en bas-boekjes.
Moor, E. de en A. Treffers e.a. (1975). *De Kubus*.

Meetkunde voor Kleuterschool en KLOS

J. de Gooijer-Quint:
Bouwaktiviteiten voor de kleuterschool (z.j.). werkboek 1 en leidsterstekst (interne publicatie IOWO).
Bouwen met kubusblokjes, stageopdrachten (z.j.). (interne publicatie IOWO).
Verslag bouwaktiviteiten 1976. KLOS Dordrecht (interne publicatie IOWO).
Patronen (z.j.). Leidsterstekst (interne publicatie IOWO).
Puzzelen (z.j.). (interne publicatie IOWO).
Mozaïek (z.j.). Opdrachten op de KLOS en in de kleuterschool (interne publicatie IOWO).
Bekijk het maar. Oriëntatie in de ruimte (z.j.). Opdrachten op de KLOS en in de Kleuterschool (interne publicatie IOWO).
Vertrekpunten blokjes bouwen (z.j.). KLOS-konferentie (interne publicatie IOWO).
Klos konferentie 1977 Beekbergen. Stage-opdrachten: Dwaaltuinen, Schaduwen, Spiegels, Dobbelstenen.
Onderwijssituaties voor 4-8 jarigen (1979). IOWO.
In het teken van..., verslag KLOS-conferentie Beekbergen 1977. IOWO.
Aktiviteitenplan Fatimakleuterschool Bussum 1978-1979.
Heb je wel gehoord van de zevensprong (1979) (scriptie MO-B onderwijskunde).
J. van den Brink:
Schoolwerkplan de IRIS, map III (z.j.). (interne publicatie IOWO).

Films over meetkunde van Wiskobas (archief Freudenthal Instituut)

Hutten Bouwen (video van J. van den Brink, 1980).
Bouwsel-taal (over blokjes bouwen, H. ter Heege en J. van Bruggen).
Midden in het rond (over de cirkel, J. van Bruggen).
Emperiment (omtrek van de cirkel, J. van Bruggen).

Overige

Hoeken en draaiingen (autowegen, spiltrappen, kijkhoeken van vogels, oriëntatie op kaarten, windroos, projecties i.v.m. TV-kijken, oriëntatie-opgaven i.v.m. camerastanden en foto's). Een aantal is niet uitgewerkt.
Zie Zaltbommel (project van Ter Heege).
Naar Oma (route-problemen) (Ter Heege en Van Bruggen)
Brandtorens op de Veluwe (meetkundige oriëntatie).
Topologie (De Moor, niet gepubliceerd).
Vouwmeetkunde (De Moor, interne publicatie).
Een en ander over meetkunde (De Moor, 1973, interne publicatie).

Wiskivon-materialen meetkunde (1971-1980)

Belvia (1973). W. Kremers.
Zie je wel (1979). G. Schoemaker.
Verpakkingen (1978). W. Sweers.
Klein en groot (1980). A. Goddijn.

Hoeken (1979). G. Schoemaker.
Regelmatige figuren (1977). M. Kindt.
Oppervlakte (19??). W. Sweers.
Licht op Schaduw (1980). A. Goddijn.
Evenwijdigheden (19??). A. Goddijn.
Met het oog op diepte (1980). A. Goddijn.
Spiegelen Symmetrie Draaien (1979).
Pythagoras (1980). M. Kindt.
Lijngrafieken (1980). A. Goddijn.
De reis om de wereld in 80 dagen (1980). M. Kindt en W. Sweers.

Artikelen over meetkunde in de Wiskrant (WK) 1975-1980

Barneveld, G. van (1975). Een boom vol meetkunde. *WK 1.*
Barneveld, G. van (1977). Spelen met kubussen. *WK 9.*
Blij, F. van der (1977). Die goeie ouwe meetkunde. *WK 6.*
Blij, F. van der (1978). Bewijzen, wat zijn dat? *WK 14.*
Blij, F. van der (1979). Een spiegelspel voor alle leeftijden. *WK 16.*
Blij, F. van der (1980). Meetkunde, met of zonder rekenen. *WK 23.*
Blij, F. van der (1980). Meetkunde, met of zonder rekenen (deel 2). *WK 23.*
Crooy, J. (1976). Belvia in een Mavo-brugklas. *WK 4.*
Goddijn, A. (1979). Een school verhuist. Bouwgrond voor meetkunde onderwijs. *WK 16.*
Goddijn, A. (1979). De weerbarstigheid van Klein en Groot. *WK 17.*
Goddijn, A. (1980). In de schaduw van de meesters. *WK 20.*
Goddijn, A. (1980). Er komt steeds meer lijn in de meetkunde. *WK 21.*
Goddijn, A. (1980). Zon en maan. *WK 24.*
Hoffer, A. (1978). Making a Better Beer Glass. *WK 13.*
Freudenthal, H. (1979). Oppervlakte – als verschijnsel benaderd. *WK 15.*
Kindt, M. (1976). Meetkunde met vectoren of vectoren met meetkunde? *WK 3.*
Kindt, M. (1976). Een lastige som? *WK 5.*
Kindt, M. (1978). De bijecel. *WK 14.*
Kindt, M. (1979). Met Pythagoras op ontdekkingsreis. *WK 18.*
Kindt, M. (1979). Minder getal en meer ruimte. Meetkunde in het HEWET-rapport. *WK 18.*
Kindt, M. (1980). Gewichtige meetkunde. *WK 20.*
Kindt, M. (1980). Kent u Pythagoras? *WK 22.*
Kremers, W. (1976). Belvia, een meetkunde thema voor de brugperiode. *WK 3.*
Lange, J. de (1979). Vlieg er eens in. Een goniometrie-pakketje voor MAVO en HAVO. *WK 17.*
Lange, J. de (1979). Vlieg er eens in 2. Een inleiding in de vectoren of: het meisje met de witte bloes. *WK 18.*
Lange, J. de (1979). Er waait een nieuwe wind door de goniometrie. *WK 19.*
Lange, J. de (1979). Vlieg er eens in. Alle goniometrie en vectorrekening voor het mavo-programma binnen één thema. *WK 19.*
Leenders, C. (1978). Spelen in de wiskundeles... mag dat? *WK 13.*
Leenders, C. (1978). Onderwijs-leermiddelen in het wiskunde onderwijs. *WK 14.*
Moor, E. de (1979). Open Kaart. *WK 15.*
Pot, H. (1978). Pythagoraspuzzel. *WK 10.*
Schoemaker, G. (1978). Van kubusbouwer tot architect. *WK 12.*
Schoemaker, G. (1978). "Hoeken" in het raampjesplan. *WK 13.*
Schoemaker, G. (1979). Met de Iet-Wiet op leerplanontwikkeling. *WK 16.*
Sweers, W. (1975). Anamorfosen. *WK 2.*
Sweers, W. (1975). Waardeloos materiaal, start van meetkunde-onderwijs. *WK 2.*
Sweers, W. (1976). De (transport)band van Möbius. *WK 5.*
Sweers, W. (1978). Vensters, gericht op symmetrie. *WK 12.*

Sweers, W. (1978). Lijnspiegeling. *WK 14.*
Sweers, W. (1980). Bouwstenen voor een momument. Een verzameling suggesties voor wiskundige activiteiten rond de piramide. *WK 23.*
Vandeberg, T. en P. Evertz (1980). Hoeken. Verslag van een klein project. *WK 23.*

Programma's Nederlandse Onderwijstelevisie (NOT) met meetkundige aspecten 1971-1980

Scholten, P. (1975). *Wiskunde voor de brugklas.* 's-Gravenhage: NOT.
Scholten, P. (1978). *Open Kaart.* Onderwijsleerpakket wiskunde en aardrijkskunde 11-13 jarigen, 5 TV-programma's, werkboek en handleiding. Purmerend: Muusses.
Heege, H. ter en P. Scholten (1978). *Een blokje om.* 's-Gravenhage: NOT.

Figuren en illustraties

Herkomst van de afgebeelde figuren is meestal via de onderschriften aangegeven. Over een aantal illustraties volgt hieronder nadere informatie.

p. 11 Tabel III uit *Die Elemente der Form und Größe, I. Thl.* van J. Schmid (1809).
p. 17 Portret van Pestalozzi. Detail van een schilderij van F.G.A. Schöner (Pestalozzianum te Zürich).
p. 41 Portret van Diesterweg. Detail van een gravure van G.A. von Eichen naar een schilderij van W. Hensel.
p. 69 Detail van een portretfoto van Herman Bouman. Uit *Ter herinnering aan de Gemeente-Kweekschool voor onderwijzers en onderwijzeressen te Amsterdam.*
p. 119 Portretfoto van J. Versluys. Uit *Gedenkboek ter herinnering aan het Gouden feest van de Rijkskweekschool voor Onderwijzers te Haarlem.*
p. 206 Portret van Fröbel. *Century Magazine, Febr. 1893.*
p. 245 Detail van een portret van W. Reindersma uit *Het Nederlandsch Lyceum van 1909 tot 1934* door R. Casimir.
p. 258 Detail van een foto van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa, beschikbaar gesteld door Tamara van Bommel.
p. 261 Detail van een portretfoto van E.J. Dijksterhuis. *Euclides 68,* p. 103.
p. 288 Portret van Pierre van Hiele, door hemzelf beschikbaar gesteld.
p. 290 Detail van een foto van Dina van Hiele-Geldof, beschikbaar gesteld door P. van Hiele.
p. 308 Detail van een foto van Hans Freudenthal. Onderwijs en Media Instituut van de Universiteit Utrecht.
p. 369 Kinderen meten de hoogte van de zon. Activiteit op de ontwerpschool van Wiskobas, de Dr. Willem Dreesschool te Arnhem, circa 1973.
p. 438 Uit *Wiskobas leerplanpublikatie 5,* 1977. Foto: Louis Gilissen.
p. 587 The Mystic Knot. (Een boeddhistisch symbool.) Uit: *Symbols, Signs & Signets* door Ernst Lehner (1950). New York: Dover Publications.
p. 587 Sonnet van Adwaita (J.A. dèr Mouw). *Verzamelde werken, tweede deel,* p. 80. Voor het eerst gepubliceerd in *De Amsterdammer, Weekblad voor Nederland* (3-8-1918) onder de titel: 'Avond'.

Register van personen

Abb, E. 183
Achter, V. van 381
Adelmund, K. 509
Adwaita (J.A. dèr Mouw) 587
Afanassjev, Peter (oom van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa) 360
Albada, P.J. van 230, 276, 277, 279, 298, 310, 351, 362-366, 491, 594, 595
Alberts, G. 319
Alders, C.J. 284, 286
Amerom, B.A. van 9
Archer, M.S. 9
Archimedes (wet van) 95
Aristoteles 45, 186
Asselbergs-Neessen, V. 9, 143, 199
Atkinson, R.C. 249

Baar, W. 55
Bacon, R. 22
Bakker, A. 224
Bakkes, H. 73, 78, 79, 80, 89, 106, 108, 110, 111, 146, 171, 190, 194
Barneveld, G. van 512
Barrau, J.A. 314, 357
Bartlett, F.C. 381
Baudet, P.J. 54
Bauersfeld, H. 622
Beckers, D. 9, 120, 186, 195
Beeke, K. ter 252
Beem, D. 187
Beer, T.H. de 101, 193, 194
Berch van Heemstede, J.L. Cremer van den 117, 118
Bergsma, T. 363
Berkel, K. van 255, 361, 363
Bes, K. 147
Beth, Evert W. 275, 276, 308, 313, 316, 317, 361, 362, 365
Beth, H.J.E. (vader van E.W.) 257, 265-267, 275, 283, 284, 316, 331, 361, 598, 603
Beyma thoe Kingma, F.H. van 191, 193
Bierens de Haan, D. 73, 75, 76, 79, 117, 189
Biggs, Edith 383, 503
Bijpost, M. 299
Bing, V. 107, 145, 146, 198
Birkhoff, G. 380
Bishop, A. 452
Blaauw, G.H. 503, 504
Bladergroen, Wilhelmina 363
Blaupot ten Cate, S. 155, 165, 187
Blij, F. van der 365, 384, 469, 503, 510, 512
Bloem, H.W. 72, 100
Bloom, B.S. 379
Blouw, J. 44, 55, 56
Bock-Hardenberg, Marie de 224
Boeke, Kees 362
Boekholt, P.Th.F.M. 7, 282
Boer, H. de 72, 73, 75, 76, 79
Boerema, J. 504
Boermeester, Chr. 281, 285, 287, 297-299, 305, 310, 316, 345, 364, 499
Boeser, A.L. 100, 106, 193
Böhme, Jacob 353
Bokhove, J. 509, 516, 519, 520, 582
Bommel, H. van 362
Boogaard, J.J. 363
Boogman, J.C. 7
Boomsma, G. 391, 392
Booy, E. de 7, 282
Borel, Emile 267, 272, 357
Bos, W.J. 299, 348, 595
Bosman, J.H.M. 195
Bosman, J. 512
Bosscha, J. 187
Boswijk, D. 251
Bouman, Herman 15, 67, 69-73, 78, 79, 82-85, 87, 89, 93, 96, 103, 105, 106, 108, 109, 111, 117, 127, 130-136, 154-156, 161, 162, 171, 172, 174, 187-189, 194, 595, 600
Bouman, P.J. 251, 343
Bourbaki 308, 311, 332, 335, 375, 378, 604
Bouwman, L. 73, 81, 197
Boyd, W. 358
Boyer, C.B. 356
Bozuwa, L. 510
Braet von Überfeldt, J. 107, 145, 146, 198
Brandenburg, W.J. 303, 332

Branford, B. 234, 357, 594, 595
Brauw, W.M. de 114, 118
Brinio 358
Brink, F.J. van den (Jan) 396, 405, 418, 419, 421, 423, 505, 506, 511, 584
Brogtrop, A.J.M. 133, 136-139, 141, 160, 167
Bronnenberg, W.F.M. 503, 504
Brosterman, N. 354
Brouwer, C.J. 224
Brouwer, L.E.J. 357, 365
Brownell, W.A. 381
Brug, S.L. 73, 81
Bruggen, J. van 396, 511
Brugmans, I.J. 7
Brugsma, B. 14, 23, 46, 47, 53, 55, 58-60, 67, 70, 92, 106, 170, 183, 188, 192, 600
Bruin, K. de 307
Bruner, J.S. 219, 303, 375, 376, 379, 381, 391, 422, 424, 604
Bruyn Kops, J.L. de 195
Bruyn, R. van der 111, 112
Buijs, K. 584
Bulens, J. 364
Bunt, L.N.H. 284, 299, 363, 364, 503
Buuren, H. van 582

Cadot, J. 454, 548
Calcar, Elise van 207, 220, 222, 224, 342, 353, 601
Casimir, H.B.G. (zoon van R.) 360
Casimir, R. 245, 246, 358, 359
Cattie, J.Th. 197
Cézanne, Paul 199
Choquet, G. 378
Clairaut, A.C. 26, 234, 590
Claudius Civilis 358
Comberousse, Ch. de 125, 197, 234
Comenius, J.A. 22, 143
Cornaz-Besson, J. 184, 185
Courant, R. 380
Couvée, J. 167
Coxeter, H.S.M. 353, 380
Crick, F.H.C. 367
Critas Jr. (pseudoniem van H. Douma) 251
Crüts, J.A. 73, 87, 190
Cuisenaire, G. 227
Cuypers, K. 314

Dalen, D. van 357
Dantzig, D. van 258, 314, 318, 319, 365
Dapperen, Dirk van 14, 31, 33-35, 38-40, 44, 49, 52-56, 59, 73, 75, 76, 106, 107, 117, 130, 151, 169, 172, 185, 595, 600
Davis, P.J. 308
Davydov, V.V. 424
De Vries en Te Winkel (spelling van) 99
Deen, N. 320
Deetman, W. 455
Dehn, M. 356
Dekker, A. 504, 511
Delden Pz., S. van 59
Delden, A. van 195
Delekat, F. 17, 18, 183, 622
Derksen, H.A. 237
Dewey, John 236, 240, 241, 249, 343, 357, 358
Die, H. van 457, 509, 510, 584
Diels, P.A. 321
Dienes, Z.P. 227, 333-335, 339, 375, 376, 379, 381-383, 393, 422, 503, 594, 604, 606
Diephuis, G. 148
Diesterweg, F.A.W. (Adolph) 33, 34, 40-47, 49, 53, 55, 56, 59, 67, 68, 70, 71, 73, 106, 119, 120, 124, 127, 132, 170, 171, 185, 186, 188, 194, 195, 215, 292, 592, 593, 595, 600, 621-623
Dieudonné, J. 305, 378
Dijksterhuis, Eduard Jan 4, 9, 203, 253, 255-258, 261-269, 276, 278, 280, 283, 284, 305, 314, 316, 322, 331, 339, 344, 346, 348, 360-362, 487, 594-596, 598, 603, 609
Dijkstra, F. 74, 75, 77
Disselkoen, J.V. 159, 167, 197
Dodde, N.L. 7, 9, 13, 51, 59, 187
Dogger, A. 429, 508
Donaldson, M. 417, 494, 506
Donck, J.J.C. 133, 139, 198
Donkers, B. 509, 510
Dormolen, J. van 296, 304, 499, 501
Douma, H. 196, 250, 251
Duhamel, J.M.C. 122, 125, 197
Duncker, K. 315, 316
Dunk, H.W. von der 609
Duparc, H.J.A. 305, 306

Dupuis, Alexandre 107, 143, 145, 146, 149, 198
Dupuis, Ferdinand (broer van A.) 71, 107, 143, 145, 146, 149, 198
Dürer, Albrecht 464

Eck Jr, P.L. van 183
Ehrenfest, Paul (echtgenoot van Tatiana) 245, 359, 360, 362
Ehrenfest-Afanassjewa, Tatiana 4, 194, 203, 238, 245, 253, 255, 258-271, 273, 274, 276-278, 280, 283, 285, 286, 290, 292-294, 296, 298, 301, 308, 310, 317, 323, 327-331, 335, 339, 343, 344, 346, 348, 349, 351, 360, 361-364, 366, 373, 400, 404, 405, 407, 412, 464, 483, 484, 487, 491, 493, 495, 497, 499, 501, 591, 593, 594, 595, 598, 599, 603, 605, 607, 609, 610, 621, 623
Eilander, J. 503, 504
Einstein, Albert 339, 360
Elffers, J. 190
Elout van Soeterwoude, P.J. 64
Ende, Adriaan van den 13, 14, 33, 54, 183, 600
Engelen, O. van 504
Ernst, Bruno (Hans de Rijk) 299, 364
Escher, M.C. 364, 479
Essen, M. van 59, 186
Euclides *passim*
Euler (stelling van) 139, 198, 479
Everdingen, E. van 99

Faber, S.E.K. 423
Fabian, E. 211
Fabius, J.C. 200
Faes, W. 584
Fehr, H. 232
Feijs, E. 455, 480, 509, 520, 522, 553, 584, 619
Feikema, R.W. 195
Feynman, Richard 379
Feys, Raf 504
Fichte, Johann G. 208
Fischbein, E. 333
Fischer, S. 224
Freinet, C. 240
Frenay, C. 504
Frenkel, V.Ya. 361, 362
Freudenthal, Hans 3, 4, 9, 203, 205, 207, 258, 271, 281, 283, 296, 297, 299, 302, 307-309, 327-331, 334, 335, 345, 346, 350, 356, 359, 360-367, 369, 375, 376, 378, 384, 385, 386, 389, 390, 399-401, 403-405, 410-413, 418, 422, 423, 431-433, 435, 441, 445-448, 451, 476, 477, 481-487, 490, 493, 496-503, 505-508, 511, 512, 593-596, 598, 599, 604, 609, 610, 621-623
Fröbel, Friedrich W.A. 3, 4, 78, 128, 146, 160, 172, 190, 204, 205, 207-228, 230, 241, 253, 292, 341, 342, 347, 353-355, 357, 359, 418, 420, 491, 493, 592, 593, 595, 597, 602, 606, 611, 621, 622, 623

Gagné, R.M. 379
Gal'perin, P.J. 417, 424
Galen, F. van 508, 581, 582
Gardner, Howard 338, 339, 346, 367, 520, 574, 619
Gast Jzn, S. de 160, 167, 237
Gediking, F. 110
Geel, R. 9
Geertsema, C. 195
Gelder, Jacob de 120, 122, 186, 195
Gelder, L. van 290, 321, 363, 383, 503
Geluk, J. 159-162
Gergonne, J.D. 356
Geßner, H. 17
Geursen, S.J. 298, 300, 364
Gilissen, L. 511
Ginjaar-Maas, N.J. 469, 510
Gleuns Jr, W. 92, 96, 100, 109-111, 132, 192, 197
Goddijn, A. J. 340, 461, 463-465, 474, 495, 501, 510-512
Godfrey, C. 242
Goeije, M.J. de 117
Goeman Borgesius, H. 200
Goethe, W. 230
Goffree, F. 9, 296, 309, 345, 350, 364-366, 383, 384, 404, 412, 413, 414-416, 418, 425, 445, 451-453, 466, 483, 503-506, 509, 511, 584
Gooijer-Quint, J. de 417, 418, 420, 485, 506, 511

Görlitz, P.K. 51-53, 61, 186
Goudswaard, N.B. 187
Gouka, M. 51, 59, 132, 197
Graßmann, H. 186
Graßmann, J.G. 34, 35, 47-49, 55, 186
Gravelaar, N.L.W.A. 160
Gravemeijer, K.P.E. 296, 444-447, 449, 450, 454, 482, 494, 508-510, 520, 522, 581, 582
Grazer, Govert (Fr. Rombouts) 321
Greenhill, G. 232
Griffiths, H.B. 375
Groot, A.D. de 281, 299-301, 315, 345, 507
Groot, A.J. de 364
Groot, D. de 74, 82, 86, 87, 89, 92, 96, 111, 192
Grosheide, J.H. 385
Grube, A.W. 196
Gruner, G.A. 208
Gulliver 435, 508
Gunning Wzn, J.H. 207, 236, 238, 318

Haan, Lize de 220, 224
Haanstra, Wybrandus 207, 220-225, 227, 342, 355, 417, 602, 611
Habermann, A.N. 364
Hadamard, J. 357
Haeckel, E. 593
Hankel, H. 197
Harberts, D. 159
Hardenberg, Louise 207, 220, 222-224, 227
Hartogh, A.F.K. 200
Haüy, R.J. 353
Hawkins, R.D. 340
Heege, J.H. ter (Hans) 367, 396, 406, 427, 431, 432, 484, 507, 508, 511, 522, 583, 584
Heemskerk Azn, J. 114-116, 118, 187
Heemskerk, Th. 163
Heijden, M.K. van der 526
Heiland, Helmut 209, 210, 353, 622
Helmholtz, H. von 361
Hemkes Kzn, Hemke 62, 72, 74-76, 79, 87, 88, 99, 138, 189, 191
Hemmenga, A.H. 33, 34, 37
Hentschel, E. 196
Herbart, Johann F. 21-23, 159, 183, 196, 234, 365
Herbold, A.F. 198
Heron (stelling van) 139
Hersh, R. 308
Hetterschy, D.C. 74, 81
Heuvel-Panhuizen, M. van den 520, 526, 581, 582
Heyerick, L. 617
Heymans, G. 245, 359
Hiele, P.M. van 4, 203, 271, 281, 285, 287, 288, 290-297, 305, 307, 308, 310, 316, 331, 332, 337, 339, 345, 349, 351, 360, 361, 363, 364, 445, 466, 493, 494, 499, 501, 593, 594, 621
Hiele-Geldof, Dina van 4, 203, 268, 281, 285, 288-294, 296, 298, 299, 310, 316, 323, 345, 348, 349, 351, 363, 364, 400, 493, 497, 499, 593-595, 621
Hilbert, David 232, 233, 258, 334, 356, 357, 360, 603
Hilgard, E.R. 249
Hoekstra, Tj. 107
Hoestra, P. 242, 248
Hoffmann, J.C.V. 197
Hollander, L.A. den 251
Holwerda, A. 284
Hoppe, Th.J. 195
Horrik, H.A.Th. van 220
Houël, J. 125, 197
Hout, J. van der 167
Houten, S. van 113
Howson, G. 367, 375, 379
Hug 194
Huinink, H. 581
Huitema, S. 522, 584
Hull, C.L. 381
Huygens, Christiaan 365

Idenburg, Ph.J. 9, 225
Iersel, P. van 365
IJkema, IJ. 133-138, 159, 160
Imelman, J.D. 357
Iongh, J.J. de 503
Israel, August 183, 184

Jacobs, H.J. 362, 363
Jansen, G.M.A. 150

Jansen, H.M.M. 412, 415, 416, 503, 509, 511
Janssen, G.M. 405, 512
Janssen, J.R. 363
Janssen, Jan 9, 363, 509, 517, 521, 581, 582
Janssen-Vos, Frea 417, 423
Jeeves, M.A. 339
Jeffery, Bob 504
Jonckbloet, W.J.A. 194, 195
Jong Jz, S. de 192, 197
Jong Ozn, K. de 467
Jong, Barbara C. de 241, 253, 358, 359
Jong, Frida de 54, 55
Jong, Rob A. de 310, 384, 402, 424, 443, 483, 503, 508, 511, 553, 581, 582
Jonker, A.E.M. 59, 187, 199

Kalff Jr, G. 318
Kandel, E.R. 340
Kant, Immanuel 21, 201, 356
Kappeyne van de Coppello, J. 113, 116-118, 148, 194, 195
Karsten, J.W. 80, 81, 190
Kehr, 139
Kekulé, F.A. 367
Kempenaer, J.M. de 61, 62, 187
Kerdijk, A. 200
Kerschensteiner, G. 236, 240, 241, 246, 249, 299, 343, 358, 359
Keune, F. 340
Kindermans, J. 581
Kindt, M. 304, 364, 495, 510, 512
Kirchhoff, G.R. 361
Kleefstra, Brinio (zoon van J.J.) 358
Kleefstra, H.J. 358
Kleefstra, J.J. 238-240, 242, 343, 348, 358, 359
Klein, Felix 231, 232, 234-236, 242, 258, 259, 267, 272, 309, 332, 357, 360, 375, 590, 593-595, 598, 602, 621
Klein, Martin 360
Kline, Morris 380
Klöden 198
Klomp, H.A. 255, 268, 269, 361, 366
Knippenberg, H. 15, 153, 185, 193
Knoop, M. 358
Koenen, H.J. 133, 136-139, 141, 160, 167
Koevoets, B. 143, 144
Köhler, August 354
Kohnstamm, Philip A. 275, 276, 286, 287, 297, 315, 318-320, 325-327, 346, 348, 364, 366
Kolste, A. 584
Koning, J. 288
Kool, M. 9
Koonings, J. 133, 135, 136
Kossmann, E.H. 7
Kraemer, J.M. 9, 444-450, 454, 482, 504, 508, 517, 520, 522, 581, 582
Kremer, H^{s} 190
Kremers, W.H.M. 512
Krogt, B. van der 503
Kronecker, L. 361
Krooshof, G. 299, 307, 363, 364, 383, 503
Krüsi, H. 183
Kuiper, N.H. 306
Kuiper, W. 9, 304
Kuipers, A.M. 302
Külpe, O. 315
Kummer, E.E. 361
Kuyk, J. van 509, 583
Kuyper, A. 195

La Bastide-van Gemert, S. 9
Laagland, G.A. 150
Laive, G.L.N.H. de 237
Lako, D. 143, 148-150, 198
Lambert-Anema, K.C. 418
Lammerts, M.D. 33
Lamping, J.A. 189
Landsman, J.M. 167
Lange, J. de 367, 465, 469, 476, 480, 510-512
Lange, Wichard 212
Langendijk, P. 423
Langeraad, L. van 189, 197
Langeveld, M.J. 290, 320, 332, 366
Laue, M. von 353
Leeb-Lundberg, Kristina 208, 209, 218-220, 225, 227, 355, 506, 622
Leeman, H.T.M. 503
Leen, A. 9, 53, 196, 611
Leenders, C.P. 512
Leeuw, L. de 337
Leeuwen, J.H. van 156, 159

Legendre, A.M. 234
Leibniz, G.W. 186
Lek, A. 584
Lem, M.H. 196
Lenders, J.H.G. 7, 13, 14, 183
Lenting, L.E. 195
Lepoeter, P.E. 299, 348, 595
Letschert, J.F.M. 509
Leupen, P. 34, 37
Levene (t-toets van) 526
Ley, P.H. van der 253, 254, 343, 347
Leyenhorst, G. van 510
Lietzmann, W. 233, 317, 357, 359
Ligthart, Jan 236, 240, 241, 252, 253, 343, 347, 348, 358, 359, 595
Lindworsky, J. 315
Lobatschewsky, N.I. 125, 360
Locke, John 22, 143
Lorentz, H.A. 359, 360
Luit, H. van 509
Lummel, H.J. van 183
Lutter, S.J.C. 308, 503
Lynden, W. van 187

Maassen, A.J.Th. 304
Mackay, A. 164
Magielse, P.K. 100
Mandemakers, K. 7
Mannoury, G. 258, 299, 318, 319
Mantel, S. 200
Matthews, G. 382
Matthijssen, M.A.J.M. 9
McKim, R.H. 413
Mees Az, R.P. 195
Meijer, G.H. (Henk) 511
Meijer, W.A.J. 357
Menne, J. 9, 517, 581
Messchert van Vollenhoven, J. 195
Meulevelt, W.G. 74, 87, 190
Meurs, J. 87, 190
Mill, J.S. 196, 365
Milligen, G. van 155
Minkovski, H. 360
Minnaert, M.G.J. 363, 501
Moens, Antony 99, 115, 117, 118, 148, 150, 157, 160, 165, 191, 193, 195, 601
Moerlands, F. 584
Molema, H. 133, 135, 136, 140, 159, 198, 199
Molengraaf, G.W.J. van de 503
Molkenboer, W.B.G. 143, 147-149, 163, 198, 199
Moll, J.D.R. 74, 77-79, 87, 88, 107, 108, 127
Mondriaan, Piet 198, 199, 583
Monge, Gaspard 356
Montessori, Maria 208, 227-230, 240, 241, 347, 356
Mooij, H. 281, 286, 299, 363, 364
Moor, E.W.A. de 9, 240, 255, 281, 356, 359, 361, 362, 364, 396, 409, 410, 414-416, 427, 431, 432, 444, 446, 448, 454, 455, 483, 504, 507, 509-511, 517, 520, 565, 569, 581-583, 619, 620
Mout, A. 251
Muijlaert, E. 187
Mulder, G.C. 74-76
Mulder, H. 133-137
Multatuli 128, 196, 197

Nagel, Chr.H. 55, 188
Navoth, F. 355
Nelissen, J. 584
Netelenbos, T. 456
Neut, D.N. van der 286, 298, 364
Newton, Isaac 365
Niederer, J. 184
Nieland, J. 504
Nijdam, A.D. (Bert) 512, 581
Nijdam, C. 503
Nijkamp, W.M. 227, 418
Nispen van Sevenaar, J.A.C.A. van 187
Noordam, N.F. 183
Noordewier 132, 197
Noteboom, A. 581, 584
Novalis 208

Oonk, W. 509
Oort, D.W. 503
Otterloo, A. van 74, 77

Palm, Jan Hendrik van der 13
Papert, S. 339, 367
Papy, Fréderique 381, 396
Papy, Georges 381, 396
Parkhurst, Helen 240

Parreren, C.F. van 290, 336, 337, 417, 507
Pascal (driehoek van) 396
Pasch, Moritz 232, 356
Pater, B. de 193
Pelt, D. van 251
Peremans, W. 332
Perry, John 234, 272
Pestalozzi, Johann Heinrich 13, 14, 17-26, 29-31, 33, 34, 36, 37, 39, 41- 44, 51, 53, 57, 58, 68, 69, 71, 78, 110, 117, 120, 131, 143, 169, 175, 183-186, 204, 208, 214, 215, 234, 236, 241, 272, 292, 354, 356, 591, 593, 596, 597, 600, 621, 622, 623
Phillips, F.C. 353
Piaget, Jean 219, 303, 309, 311, 316, 332-335, 338, 339, 346, 367, 375, 378, 379, 381, 405, 406, 417, 422, 424, 435, 491, 494, 505, 508, 511, 594, 602, 604, 606
Picard, Nicole 333, 366, 381
Pick, G. 397, 504
Pickel, A. 196
Plaats, A. van der 189
Plato 264, 269, 330, 361
Plücker, J. 356
Poel, J.D. van der 187
Poincaré, Henri 267, 356, 357
Pollack, H.O. 380
Polya, G. 197, 380, 594
Poncelet, J.V. 356
Poot, P. 252, 253, 343, 347, 359
Postel, J.G.W. 74, 81
Prinits, O. 362
Prins, F.W. 286, 290, 363
Prinsen, P.J. 14, 33, 34, 39, 40, 51, 53, 57-59, 60, 170, 183, 185, 188, 600
Pruttel, Jan (pseudoniem?) 194
Puttestein, H. 581
Pythagoras (stelling van) *passim*

Quant, J.P. 189, 197
Querelle, N. 512

Raadersma Lzn, H. 133, 135, 136, 138, 199
Raaf, H. de 196
Radatz, H. 617
Rappard, H.A. van 194
Rappard, W.L.F.C. van 63, 65
Rauwerda, A. 251
Rebhuhn 184
Reenen, G.C.J. van 62
Reidsma, H.M. 33, 34, 36, 52
Reijnders, J.M. 321
Rein, Wilhelm 196
Reinders, E. 262, 317
Reindersma, Willem 4, 203, 231, 236, 238, 240, 242, 245, 246-250, 255, 258, 259, 262, 317, 343, 347, 348, 359, 360, 499, 593, 603
Reinsma, R. 53, 54, 186, 187
Renesse, J.E. van 199
Reus Egbert 435, 507
Revet, P.C. 512
Rheeden, H. van 9, 143, 144, 198
Rickmeyer, K. 617
Riet, N. van 't 501, 510, 512
Rijk, Hans de (Bruno Ernst) 364
Rijkens, R.G. 14, 33, 34, 37, 38, 49, 52, 59, 60, 78, 143, 144, 170, 183
Roekel, W. van 133, 140, 160
Roëll, J. 164, 165
Röhner, J.C. 200
Romberg, T. 511
Roodhuijzen, D.H. 106
Roorda, T. 100
Rooy, M. de 167
Rosier, B. 167, 200
Rouché, E. 125, 197, 234
Rousseau, J.J. 19, 22, 143
Rückbeil 190
Russel, Bertrand 334
Ruyter, J.H. de 166

Salverda, M. 148, 150
Sauvy, J. en J. 413
Sawyer, W.W. 380
Scheller, E. 196
Schelling, Friedrich W.J. 208
Scherer, H. 185
Schimmack, R. 234
Schlömilch, O. 122
Schmid, Joseph (soms ook Schmidt) 24-31, 34, 38, 39, 41, 42, 53, 69, 71, 76, 132, 144, 169, 170, 184-186, 188, 189, 197, 208, 215, 354, 591, 608
Schmid, Peter 198

Schmidt, J.F. 184
Schmidt, Siegbert 46, 185, 195, 504, 622
Schoemaker, G. 461, 462, 464, 501, 510, 512
Schogt, J.H. 257, 266, 267, 317, 331, 594
Scholte, H. 200
Scholten, G.A. 198
Scholten, H. 33
Schopenhauer, A. 263
Schrek, D.J.E. 232, 233, 237, 357
Schröder, W. 185
Schubring, G. 1, 6, 9, 235, 357, 593, 594
Schuh, F. 317
Schüssler, H. 316, 325
Schuster, S. 410, 411
Schuyt, W. van der 159, 197
Selz, O. 297, 315, 319, 346
Semmelink, B. 74, 77, 88
Siddons, 242
Simons, G. 63
Simons, P.R.J. 337
Simon-Thomas, M. 199
Sjamaar, M. 367, 510
Sjochor'-Trotskij, S.I. 259, 271-274, 360, 361
Skemp, R.R. 381, 445
Slijper, E.K. 197, 200
Sluijters, H. 189, 200
Smeur, A.J.E.M. 9
Smid, H.J. 3, 9, 590
Smid, Klazina 354
Smit, J. 363
Smits, G. 237, 238
Snelders, H.A.M. 353
Snell, K. 122, 196, 197, 200
Snijders, J. 321
Socrates 508
Sondhaus, C. 188, 189
Spapens, A.A.M. 52, 186
Spencer, Herbert 196
Spengler, O. 313, 365
Spranger, Eduard 209
Stappen, G. van 189, 197, 199
Steiner, Jakob 356
Steiner, Rudolf 230
Steyn Parvé, Daniël J. 15, 55, 67, 70-72, 75-77, 83, 84, 86, 88, 131, 143, 145, 148, 150, 170-172, 174, 188, 189, 197, 198, 600
Stone, M.H. 378
Straaten, H. van der 584
Stratemeijer, J.H. 72, 74, 79, 82, 85, 86, 89, 93, 103, 117, 190, 194, 199
Streefkerk, H. 303, 363
Streefland, L. 398, 407, 508, 509, 511, 512
Stroomberg, H.P. 392
Stubenrouch, G.C. 303
Stuers, Victor E.L. de 143, 144, 148, 150, 198, 601
Stuurman, S. 9
Suppes, P. 381
Swartwolt, R. 74, 79, 87, 190
Sweers, W.J. 512, 584
Swift, Jonathan 508

Talsma, S. 194, 197
Tarski, A. 334
Teding van Berkhout, J.J. 194
Telders, J.M. 207, 224, 354
Thijssen, Theo 251
Thom, R. 594
Thorbecke, J.R. 15, 61-63, 113, 187, 188, 353
Thorndike, E.L. 249, 321
Tiemersma Hzn, G. 133, 135, 136, 140
Timmer, J.K. 299, 363, 364, 595
Treffers, A. 240, 242, 255, 256, 280, 281, 295, 336-338, 359, 362, 367, 373, 391, 393, 398, 409, 410, 414-416, 435, 446, 448, 452, 454-456, 457, 469, 483, 503-505, 510, 511, 520, 522, 548, 576, 581, 582, 604, 619, 620
Troelstra, R. 281, 300-302, 304, 305, 362, 364, 499
Türk, W. von 33
Turksma, R. 13, 51, 186, 191
Turkstra, H. 280, 298, 300, 317, 321, 325, 362, 364, 366

Uiterwijk, H.J. 581, 582
Uittenbogaard, W. 510

Valk, M. 107
Varga, T. 482, 491
Veen, G. van 327
Veenstra, O.G. 133-136
Velde, I. van der 357

Vellenga, J. 242
Veltman, A. 584
Verhage, H.B. 510
Verkruijsse, I.A. 504
Vermeer, H. 520, 526
Vermeulen, P.J.F. 163, 164, 200
Verne, Jules 461
Vernimmen, H. 74, 77, 78, 190
Vernout, H.C. 363
Verrijn Stuart, C.A. 193
Verschaffel, L. 617
Versluys, Jan 15, 51, 73, 82, 91, 109, 111, 117, 119-134, 136-138, 140, 141, 143, 146, 148-150, 155, 156, 159-163, 166-168, 172, 174, 176, 185, 189, 190, 191, 195-198, 200, 207, 222, 223, 234, 237, 241, 243, 248, 251, 256, 280, 321, 343, 348, 349, 592, 593, 595, 600-602, 609, 610, 621, 623
Versluys, W.A. (zoon van Jan) 196
Versluys, Willem (uitgever, broer van Jan) 125, 195, 223
Vinci, Leonardo da 367
Visser, C. 360
Visser, H.W.C.A. 35, 36, 49, 52, 54, 58, 59, 60, 185
Vives, J.L. 22
Vletter, A. de 358
Voerman, P.J. 242, 243
Vonk, G.A. 510, 512
Vredenduin, P.G.J. 284, 286, 298, 363-365, 503
Vries, L. de 167, 200
Vroede, M. de 186
Vroegindeweij, D. 454, 548
Vuurmans, A.C. 423, 506
Vygotsky, L.S. 417

Waerden, B.L. van der 318
Wagemann, E-B. 21, 22, 183, 209, 211, 214, 218, 353, 354, 622
Wallage, J. 456
Walle, J. van de 55
Waltman, J. 185, 189, 198
Wamel, A. van 133, 135, 136, 138
Wansink, Joh. W. 125, 196, 197, 284-286, 302, 362, 363
Watson, J.D. 367
Weersma, M. 133, 135, 136, 160
Weierstrass, K. 361
Weiß, C.S. 208, 211, 218, 353
Welker, P.H.M. 133, 135, 136, 139, 198
Werdes, G. 133, 135, 138
Wertheimer, M. 316, 432
Westerhoff, B. 510
Westermann, R.L.J. 304
Wiedemann, F. 198, 199
Wiegersma, S. 299, 300
Wielenga, G. 357
Wienecke, A. 242, 359
Wierts van Coehoorn-Stout, Joh[a] 217, 224, 354
Wijdenes, P. 257, 266, 317
Wijdeveld, E.J. 309, 345, 350, 365, 383-385, 485, 503, 505, 506, 511, 581, 582
Wijnbeek, H. 4, 53-55, 57-59, 68, 186, 187, 600
Wijnstra, J. 520
Wilk, L.J. van der 74, 87, 88
Williams, J.D. 381, 382
Winnubst, J. 584
Winterberg, J.F.W. 198
Wintgens, W. 194
Wisselink, W.H. 167, 224, 237
Witte van Citters, J. de 74, 78, 79, 87, 89, 100, 106, 110, 111, 146, 190
Wittmann, E.C. 594, 617, 618, 621
Wolda, G. 238, 242-245, 255, 259, 343, 348, 359, 595
Wolf, H.C. de 54, 55
Woltering, F.A.R. 133, 140
Wolters, M. 365
Wolthuis, J. 6

Young, J.W.A. 233, 249

Zaaijer, J. 163, 164
Zanten, L. van 198, 237, 358
Zeeman, P. 357
Zelm, J.C. van 251, 343
Zernike, C.F.A. 195
Zijlstra, J.G. 111, 167, 168, 251
Zijpp-van Albada, H. van der 362
Ziller, T. 196
Zimmermann, Hans 353

Summary

From 'Vormleer' to Realistic Geometry describes the history of the development of geometry teaching to children of four to fourteen years of age in the nineteenth and twentieth centuries in the Netherlands.[1] Historical aspects are dealt with in Parts A, B and C. Part D contains the report and the analysis of an empirical study on the current state of geometry teaching in 1995 in the eighth grade of primary school (twelve-year-olds). Viewpoints of those directly involved in geometry teaching at primary school level are also discussed in Part D, based on three questionnaires. These are primary school teachers active in the eighth (highest) grade, teacher educators from PABO's (*P*edagogische *A*cademie *B*asis *O*nderwijs, Colleges of Education) and school advisors.

The research that constitutes the basis of Parts A, B and C is of a historical didactic nature. That means that the curriculum, teaching methods, motivation and goals of geometry as a school subject form the focal point of the study in relation to relevant historical developments in science, in society and in schools themselves.

Part A contains the history of vormleer in primary and infant schools in the nineteenth century. In addition to the concepts of 'word' and 'number', Pestalozzi also took the concept of 'shape' as a starting point for education. Based on this concept, he created the school subject *Formenlehre* at the beginning of the nineteenth century. The main aim of this 'geometry' was learning how to '*anschauen*', but also to promote thinking, speaking, working systematically and aesthetic development.[2] Learning vormleer as it was developed in *Die Elemente der Form und Größe* (Elements of Form and Size), by Joseph Schmid, began with dots and line segments. An important aspect of this pure form of vormleer was the synthetic construction and ordering of configurations of dots and line segments under specific conditions, which is now called 'geometrical combinatorics'.

In their educational work, J.F. Herbart, F.A.W. Diesterweg and F.W.A. Fröbel also used the concept of *Anschauung* as a keystone and each developed their own methods for informal geometry teaching. In the Netherlands, the teachers-cum-educators P.J. Prinsen, R.G. Rijkens and B. Brugsma were active in propagating Pestalozzi's vormleer. The teacher Dirk van Dapperen, who had been taught by Pestalozzi, wrote a textbook founded on Schmid's ideas, which was to determine the character of vormleer in the Netherlands until the middle of the nineteenth century.

However, vormleer was not popular with Dutch teachers because of its ambiguous goals and formal character. In the first half of the nineteenth century, the subject was taught in no more than 10 percent of all primary schools. It was nevertheless made compulsory under the Education Act of 1857, as a matter of fact as a main subject. The influential official administrator D.J. Steyn Parvé, Minister J.R. Thor-

becke's right-hand man, contributed to this by especially recommending Herman Bouman's textbook. Bouman's views originated in Diesterweg's ideas. The latter saw vormleer simply as visual and practical geometry. After 1857, Schmid's pure vormleer had, to all intents and purposes, been dispensed with, and textbooks with a more visual character were introduced, concentrating more on applications. About 1875, an important contribution was made by the renowned mathematics educator Jan Versluys. He regarded the subject as visual geometry and drew up a lucid and practical syllabus, primarily based on the idea that vormleer should be a visual introduction to formal geometry in secondary education. Despite clarification of the goals and despite improved textbooks, for many teachers the subject remained a disaster area.

During the Dutch industrial revolution the demand for better educated craftsmen increased. Under pressure from business and industrial circles and because of the increased consciousness of the cultural importance of drawing, a growing body of opinion wanted this subject, which was already taught in 25% of all schools, to be amalgamated with vormleer. In the summer of 1889, these practical deliberations unexpectedly led to the abolition of vormleer by the Dutch Parliament. It was axed as a compulsory subject and drawing took its place. All attempts over the best part of a century to make geometry a feature of Dutch primary education had thus failed.

Following from discussions on vormleer, education circles were becoming increasingly aware of the difficulties involved in setting up formal entry-level teaching in geometry, the subject which, since Euclid's *Elements*, seemed ideally suited for learning to reason. Educators wondered more and more often whether twelve was not too early an age to start geometry, according to Euclid's logic-deductive method. The principle of *Anschaulichkeit* was (re)discovered as an essential general teaching aid and was not only propagated in geometry teaching.[3] At the same time, Diesterweg propagated heuristic or discovery learning. In particular, the genetic principle was (re)discovered for geometry, initially in a historical-genetic sense. As early as the eighteenth century, A-C. Clairaut had suggested taking the historical development of geometry - the practical discipline of surveying and astronomy - as a starting point for developing a learning strand. But towards the end of the nineteenth century, the psychological-genetic principle, i.e. taking the cognitive development phases of the child as a basis, also grew in importance. In the Netherlands, it was chiefly Jan Versluys who initiated the systematic study of the teaching of mathematics.

Part B explores the period between 1890 and 1970, in which geometry was no longer compulsory in primary schools (six to twelve-year-olds). There was however evidence of geometry activities in nursery schools.

That is the reason why the work of Friedrich Fröbel is subjected to a mathematical-didactical analysis in Part B. With his so called 'gifts' (playthings for learning),

Fröbel laid the foundation for a practical geometry programme for nursery schools. Thanks to the efforts of an educator from Leiden, Wybrandus Haanstra, this had an enormous influence on Dutch nursery education. Mathematical aspects remained implicit, however, and the developments had no influence on normal primary school curricula, from which geometry had been expunged since 1889. This study has shown that practical Fröbel materials and activities were a new impetus for curriculum development during the nineteen-seventies.

As a sequel to developments in teaching methods at the end of the nineteenth century, Part B also investigates activities and contributions made by a number of practitioners and thinkers in the field of early geometry teaching at secondary level, notably those of W. Reindersma, T. Ehrenfest-Afanassjewa, E.J. Dijksterhuis, P.M. van Hiele, D. van Hiele-Geldof and H. Freudenthal.

The principle of activity-based learning was given new meaning at the start of the international Reform Movement at the end of the nineteenth century, particularly in the form of discovery learning by experimenting in real-life situations. For the first steps in geometry, this implied reconsidering the logic-deductive method. Felix Klein and other learned mathematicians and educators disagreed with this approach and stood up for a visual, informal introduction to geometry. International initiatives were taken by scientific mathematicians to improve geometry teaching. In the Netherlands, the mathematics teachers J. Kleefstra and G. Wolda attempted this with their geometry textbooks, but these individual initiatives were of marginal importance only. The first educator to publish a popular geometry textbook which moved away from traditional views was Reindersma. With his theoretical observations, this pioneer became an authority in his field.

In 1924, Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa published the brochure *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?* (What Can and Should Geometry Teaching Offer a Non-Mathematician?), in which she argued the case for an intuitive introduction to geometry. This led to heated discussions with Eduard Jan Dijksterhuis which were published in the first volume of a Dutch journal for the teaching of mathematics, *Euclides*. Dijksterhuis also wanted to change mathematics education, but from an epistemic point of view, thus retaining and even reinforcing its formal character. Ms Ehrenfest was not given much support. Geometry education remained very much as it was, but the strictly logical approach was more or less disregarded in the classroom.

Ms Ehrenfest carried on with her work, however, and in 1931 she published her *Übungensammlung* (Collection of Problems), in which she substantiated her ideas from a practical point of view. This book contains a unique collection of problems of an entirely different nature from the traditional ones. It presents everyday geometrical phenomena that could be examined by children of ten years old or even younger. Accordingly, these problems served to stimulate children's intuitive notions of geometric concepts and properties, thus forming a basis for later formal and system-

atic work. This publication, too, which Ms Ehrenfest called an introductory course, had little direct effect on geometry education at first, but was to play an important part at a later stage.

In the Thirties the *Wiskunde Werkgroep* (Mathematics Study Group) was founded as a study group of the Dutch branch of the international New Education Fellowship. Under the inspiring leadership of Ms Ehrenfest this group of mathematics teachers was to remain active up to the Seventies, and should be seen as the platform for education pioneers of that period. Educational studies inspired by this group were carried out on pre-geometry teaching. In the new mathematics curriculum of 1958 this group was also instrumental in creating the possibility of an intuitive start to geometry in secondary education.

In the Fifties, Pierre van Hiele published his theory of cognitive levels of learning in mathematics, for which he achieved national and international renown. His wife, Dina van Hiele-Geldof tested this theory in a practical teaching experiment in geometry in the first secondary school year. Although the programme was based on the traditional geometry curriculum, a number of Ms Ehrenfest's ideas were also used.

New Math entered the international forum in the 1960s. This approach to mathematics education used formal mathematical structures as a starting point, and subsequently adapted them to secondary and even nursery and primary school levels. Psychologists such as J. Piaget, J. Bruner and the mathematician-cum-psychologist Z. Dienes supported this reform, and their experiments and theories confirmed that psycho-mathematical structures in children could be developed from an early age. They worked in accordance with the psychological-genetic principle, but tended to neglect the historical-genetic component. New Math also influenced secondary school teaching in the Netherlands, so that in 1968 geometry was abolished as a separate subject. It was replaced by a type of transformation geometry which itself prepared the way for arithmetized geometry using vectors. Hence, the aspect of *Anschaulichkeit* disappeared from geometry teaching.

From 1945 onwards, Hans Freudenthal became increasingly involved in mathematics education in the Netherlands, particularly as chairman of the Wiskunde Werkgroep. Internationally, too, he was making a name for himself. Although at the beginning he agreed, to some degree, with New Math, he soon began to oppose it and became a formidable adversary of this revolution. In his view, New Math was reprehensible, especially for primary education.

Traditionally speaking, assigning formal value to mathematics, and in particular to geometry, was an important means of justifying the teaching of this subject. This argument has been shown to have been an almost constant factor in the last two centuries, even though there were periods in which the practical value of mathematics

took a more prominent position. Under the influence of the metamorphosis of science, society and economy after the Second World War, the school of thought stressing the formal value of mathematics began to take a back seat. In the 1950s, Freudenthal, who at the time attached little credence to the formal value, instigated a public discussion with Ms Ehrenfest who, on the contrary, trusted in the teaching of mathematics to develop proficient cognitive patterns. In the last chapter of Part B, the historical question of the justification of mathematics, above all its formal value, is examined separately.

The main conclusion of Part B is that between 1890 and 1970 a foundation was laid for reforms which since 1970 have taken place in Dutch mathematics education. People of note, such as Ms Ehrenfest, kept this process going and by establishing the Wiskunde Werkgroep in the Thirties, for the first time created an educational platform from which developments could find their way into everyday teaching. Although at the time developments in thinking about geometry were directed in the main towards the level of the first secondary school year, they do prove to have been of considerable consequence for primary schools as well.

The history of the genesis of realistic geometry for primary schools and the transition year of secondary schools is addressed in Part C. This period covers about twenty-five years and began around 1970.

At the end of the Sixties, New Math seemed to be making its way into Dutch primary education as well. Under the inspired guidance of Edu Wijdeveld and Fred Goffree, a number of teacher educators at Colleges of Education founded the 'Wiskobas' movement (*Wisk*unde *o*p de *bas*isschool, Mathematics in Primary Schools) in 1968. Wiskobas' aim was to adapt reforms in mathematics education to the Dutch situation and traditions. In 1971, they were given a seat in the newly founded IOWO (*I*nstituut voor *O*ntwikkeling van het *W*iskunde*O*nderwijs, Institute for the Development of Mathematics Education). Freudenthal was the first professor to become director of this institute, which later changed its name to Freudenthal Institute.

In the years between 1971 and 1981, a new model curriculum for primary schools was developed at the IOWO, in addition to a new teacher training programme and materials for in-service training. The practical materials were backed up by exploratory developmental studies in a design school. This work was scientifically validated by Adrian Treffers in a publication about the goals in mathematics education. Since 1979, the term 'realistic mathematics education' has been used to describe the effects of this school of thought. Correspondingly, the term 'realistic geometry' is used.

Geometry took up a prominent position in the model curriculum developed by Wiskobas. The leading authors were F.J. van den Brink, J.H. ter Heege and L.

Streefland. Although some authors were at first still influenced by New Math structuralist and empirical trends, a specific Wiskobas geometry did evolve from 1973 onwards, the cornerstone of which was formed by everyday geometric phenomena. Emphasis was placed on 'observing, doing, thinking and seeing', as Goffree described the Wiskobas geometry concept in 1975. This was a concise recapitulation of the didactic principles of *Anschaulichkeit*, *concrete operating*, *understanding* and *insight*, which did indeed take shape in the actual teaching materials. Sometimes existing teaching material was revived, such as Fröbel's blocks, but activities designed with this material had a new and realistic quality. The curriculum, remarkably, had much in common with Ms Ehrenfest's view on the intuitive introduction to geometry and it also had a striking resemblance to several activities described in her *Übungensammlung* from 1931.

Influenced by this work of Wiskobas, between 1976 and 1981 at the IOWO A. Goddijn, M. Kindt and G. Schoemaker developed a great many geometry teaching units for secondary school transition classes at the IOWO. The aspect of sighting was central here, so that this approach is often referred to as 'vision geometry'.[4]

In the 1980s, the effects of the Wiskobas work became apparent in the new, realistic textbooks for primary schools. Geometry was also given a place in them. In the textbook series *Rekenen en Wiskunde* (Arithmetic and Mathematics) by K. Gravemeijer et al., geometry was combined with measuring and ratio to become a fully-matured learning strand. However, in teaching practice the topic was often seen as a side-issue or an incidental subject. Halfway through the Eighties, at the request of the NVORWO (*N*ederlandse *V*ereniging voor *O*ntwikkeling van het *R*eken-*W*iskunde*O*nderwijs, Dutch Association for the Development of Mathematics Education), a study was carried out into the possibility of setting up a national curriculum for realistic mathematics education in primary schools. This resulted in the publication of a programme draft *Proeve I* by A. Treffers, E. de Moor and E. Feijs in 1989 in which geometry was given a place as well.

Meanwhile, the SLO (Stichting voor Leerplan Ontwikkeling, National Institute for Curriculum Development), as well as other experts and representatives in the field had been asked by the Minister of Education to define achievement goals (to be attained by all students) for primary education. *Proeve I* was taken as a starting point for mathematics, and an abridged version of the goals for geometry was also adopted. Whilst the report in question was being drawn up, the geometry goals were all but removed in 1989. Since 1993, however, these achievement goals for primary education, including those for geometry, have been adopted officially. In the national standard final test for primary schools drawn up by the Cito (*C*entraal *I*nstituut voor *T*oets*O*ntwikkeling, National Institute for Educational Measurement), items on geometry are now included.

At the start of the 1990s, the Ministry required that a new mathematics curriculum be developed for the first three to four years of secondary education. Here was

the opportunity to regenerate geometry education, which had been languishing since 1968. The ideas of vision geometry from the Seventies were further developed, so that the realistic approach took shape for this level, too. Be that as it may, there is no continuity between primary and secondary education in relation to vision geometry.

It can be concluded that realistic mathematics education originated in the period from 1970 to the present day. Preparatory geometry in particular has been given a complete face-lift as a subject, the main aim of which is to actually grasp space and its phenomena. It is extraordinary that, having been absent from primary schools for over a century, this subject is now back again.

Six research themes are the principle constituents of this study. In Part E, the first five are answered and discussed. The sixth question arises from Part D and concludes this summary. Here follows a summary of the answers to the first five questions.

The historical analysis shows that the development of geometry education in the last two centuries is distinguished by the search for suitable *subject matter*, *teaching methods* and *goals*. The first three research questions are based on these three aspects. What evidence is there of constant and what of variable factors?

As far as subject matter is concerned (question 1), the Euclidean tradition was continually pressed into service. This constant factor was highly effective in blocking possibilities for imbuing geometry education in primary schools with new ideas. Scientific developments in geometry in the nineteenth century were also ineffective in improving the matter at the primary school level. Although Pestalozzi and his assistants wanted to move away from the Euclidean framework at the beginning of the nineteenth century, they too reverted to the traditional way of introducing geometry by using dots, lines and shapes. The spatial play school material for infants developed by Fröbel in the mid-nineteenth century was a different matter: this material was suitable for further development for the benefit of the older pupil. Unfortunately, this did not come about. It was only around 1930 that Ms Ehrenfest's ideas were instrumental in ousting Euclidean tradition. Nevertheless, it took almost half a century before any effect was noticeable.

Teaching methods (question 2) developed at a continuous but tardy pace. The principles of genetic development, the heuristic approach, the activity principle and *Anschaulichkeit* appear to be constant factors in the history of geometry teaching. In almost all attempts at reform of geometry education, the starting point was to be found in dissatisfaction with the formal approach. Time and again, a link was sought with the child's way of thinking in its own environment. The didactic principles themselves underwent further growth and sophistication, yet it remained difficult to find the right methodological means. For all that, under the influence of a few scientists and practitioners, these didactic principles have gradually found an educational audience.

The study of constancy and change in the goals (question 3) of geometry education has shown that this problem was primarily dominated by justifications of the value of the subject itself. Generally speaking, in the first half of the nineteenth century the subject was especially valued for its formality. For the following fifty years, practical values were preponderant, and this same cycle was repeated in the twentieth century. The reasons for this are to be found to a large extent in developments in society and science. In the first half of the nineteenth century, the emerging preparatory school with its aspirations to educate children to become reasonable-thinking citizens played a part. After that, the industrial revolution had a more practical impact on education. Following on from that, the first half of the twentieth century was a period in which education expanded, again with the aim of giving working-class children better schooling. Technological progress after the Second World War also affected education, so that mathematics education was increasingly justified on the grounds of its applicability. Arguments such as preparatory value, but also personal value and aesthetic development were still put forward to justify math education.

The fourth research question centres around those processes which led to the official introduction and eventually abolition of vormleer/geometry. By examining textbooks, journals, archive documents, inspection and parliamentary reports, an attempt has been made to understand the often peculiar decisions taken in this matter. A remarkable and constant factor is that up until now innovations were almost always introduced by individuals who then played a tenacious part in the process. Final decisions as to introduction or abolition of geometry were almost always taken at the highest policy levels, in the last century even without prior expert advice having been called in. Even when advice was requested, for example in 1968 when the New Math approach was introduced at secondary school level and the old geometry disappeared for good, the government still took the final decision in that matter. The extent to which personal interventions did indeed play a role became apparent from the course of events - as they were unravelled by this study - leading to the near abolition of geometry from the achievement goals for primary schools in 1989. It seems that accidental circumstances and personal influence often swayed the final decisions to a larger extent than would have been expected by looking at the actual developments.

The fifth research question concentrates on the discussion as to whether the historical survey undertaken can also be of value for the present day. It is true that there is a certain friction between scientific geometry and an intuitive introduction to the subject. What is also true is that no proof could be given for justifying geometry on the grounds of its formal value and it took considerable effort to demonstrate its practical value using concrete teaching material. The study also shows that pre- and in-service training are indispensable if a new subject is to be introduced successfully. Scientific research into learning processes in young children learning geometry has so far been incidental. The few experiments that have been done clearly show

that significant didactic and practically applicable ideas can be gleaned from such studies. If anything can be learned at all from this study, then it is that to successfully introduce a new geometry approach in teaching, a balance must be struck between the scientific, social and educational significance of this subject.

Part D offers an answer to the sixth research question. Here the results of an empirical study on the status of realistic geometry education in 1995 are discussed. In that year, 923 twelve-year-olds were given a geometry test at the end of their primary schooling. The test was developed by the author of this study, in association with assistants at the Freudenthal Institute (J. Menne) and the Cito (J. Janssen and J-M. Kraemer). The evaluation and the compiling of a report were also done cooperatively.

The average correct score for the geometry test, which was developed for this study, was 62%. The score of the national standard final arithmetic test was 71% for this group. The scores were as follows for the various aspects of geometry: orientation and localization (63%), sighting and projecting (53%), spatial reasoning (64%), transforming (68%), constructing, measuring and calculating (56%) and area and scale (85%). In this test boys performed significantly better than girls. The partial correlation between geometry and arithmetic is weak (0.19).

A qualitative analysis was made of the work done by the pupils on a number of problems. Performance on localizing, simple symmetry problems, restructuring figures and spatial perception was satisfactory to good, but performance was weak bordering on very weak as soon as constructing or spatial reasoning was required. The pupils had little grasp of the concept of angles in particular. As no data on the amount of geometry taught or the textbooks used were available, the quantitative and the qualitative results have to be interpreted with due caution.

Surveys were also conducted among three groups involved in geometry teaching: teachers in the highest classes of the primary school, mathematics teacher educators at Colleges of Education, and school advisors. The response from primary school teachers was 81% (N = 192), teacher educators 50% (N = 138) and school advisors 37% (N = 156).

One of the main questions in all three surveys was whether one agreed that geometry should be an achievement goal in primary schools. The answer to this question was very positive: 93% of primary school teachers, 99% of teacher educators and 95% of school advisors answered in the affirmative.

According to primary school teachers, there is sufficient geometry in current textbooks. According to them, about 70% of what is in the textbooks is actually put to effect. Slightly more than 60% of this group state that they had no or insufficient training in geometry at college. However, there is little call for further in-service training (28%).

The total time spent doing mathematics in the four-year course at Colleges of Ed-

ucation averages 360 hours. One third is face-to-face instruction (lessons), the rest is private study. On aggregate, geometry takes up about 10%. Nevertheless, it is considered to be an important subject by the teacher educators.

Advisors think that only 50% of the geometry available in textbooks is actually used in primary schools. Three quarters of this interviewee group believe that geometry for primary school teachers is as difficult or more difficult than arithmetic. They also estimate that these teachers make light of the importance of geometry as opposed to arithmetic. In general, they think that primary school teachers have little proficiency in geometry.

Both the survey conducted among teacher educators and that among school advisors show that geometry in primary schools is still not considered a fully-developed subject.

The author has drawn up a general proposal for a realistic geometry curriculum for primary school children aged four to twelve. This proposal has been presented to twenty experts. Their reactions trigger further reflection on goals, subject matter and form of a primary school geometry curriculum.

In conclusion, the following ten recommendations have been made.

1 More detailed historical sociological research, especially on the Wiskobas group of the Seventies, should be done into the life and work of prominent individuals in mathematics education mentioned in this study.
2 Renewed historical didactic research is needed into mathematics education in the Netherlands during the nineteenth and twentieth century.
3 The importance of Fröbel and Haanstra for Dutch nursery education should be investigated.
4 Prior to education development projects, a historical-didactic analysis should be undertaken.
5 A conference should be convened with a number of experts with the aim of reaching a consensus on basic goals, content and form of a realistic primary school geometry curriculum.
6 A comprehensible description of a programme should be included in the school textbooks.
7 For primary schools, geometry tests other than multiple choice tests should be developed.
8 Short in-service courses in realistic geometry should be developed for mathematics coordinators in primary schools.
9 Geometric reasoning in children of four to fourteen years old should be studied. The connection between logic and spatial intelligence, the effects of specific geometry teaching, the differences between boys and girls and the use of geo-

metry computer programmes should also be examined.

10 Geometry curricula in primary and secondary schools should be coordinated.

Pestalozzi pioneered the idea of introducing geometry as a foundation subject for young children, side by side with language and arithmetic. Fröbel managed to construct geometric material and activities suitable for the youngest children. It is only in the last few decades that geometry topics have been available that can be used in an informal geometry curriculum for children aged four to fourteen. The author of this study is of the firm opinion that putting such a curriculum into practice in primary schools would contribute to the development of spatial reasoning in children and that this would be good preparation for more formal geometry. Implementation will only succeed, however, if geometry is given a substantive position in the primary school curriculum and if sufficient emphasis is placed on pre- and in-service training of teachers.

Notes

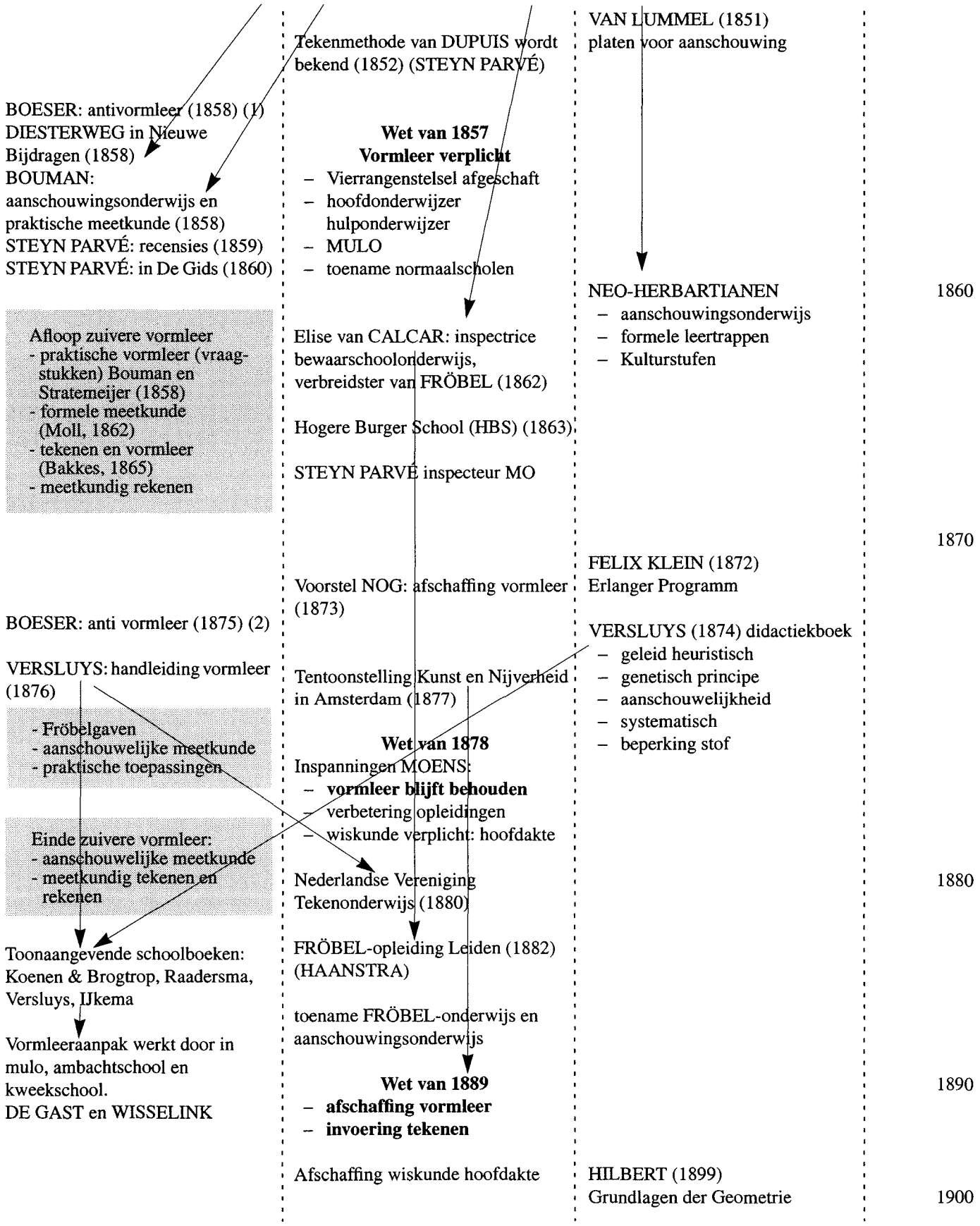
1 The literal meaning of vormleer is 'the study of shapes'.
2 Pestalozzi's conception of *Anschauung* was wide-ranging. 'Intuitive perception' could be a translation of the German word, but this does not cover all meanings. In this study the term is restricted to (1) the physical observation of concrete (mathematical) objects and shapes, (2) their (drawn) representations (figures), (3) the perception of a mental image of such an object, and (4) the mental operations involving these mental images.
3 We speak of *Anschaulichkeit* of a problem or more generally of a text when it is posed in such a form that it gives the opportunity to create mental images and visual understanding. Usually this is done by means of drawings, schemes, diagrams or other visual aids.
4 'Vision geometry' is based on looking at (observing), perceiving, representing and explaining spatial objects and spatial phenomena, in which the idea of the straight line as a vision line (sighting) and a light ray plays a central role.

Over de auteur

Ed de Moor (1933) deed in 1951 eindexamen-B aan het Barlaeusgymnasium te Amsterdam. Hij studeerde wis-, natuur- en sterrenkunde aan de Gemeentelijke Universiteit van Amsterdam. Van 1956 tot 1971 werkte hij als leraar wiskunde en schoolleider op het Barlaeusgymnasium en het Vondelgymnasium te Amsterdam. In de jaren zeventig was hij in dienst van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) te Utrecht als medewerker van Wiskobas (*Wisk*unde *o*p de *bas*isschool). Hiervoor organiseerde hij heroriënteringscursussen voor onderwijzers en werkte mee aan het leerplanontwikkelingswerk van Wiskobas. Van 1981 tot 1990 was hij in dienst van de Stichting Opleiding Leraren (SOL) te Utrecht als coördinator van het Panama-project (*P*edagogische *A*cademie *Na*scholing *M*athematische *A*ctiviteiten). In 1982 richtte hij de *Panama-Post* op, die later is voortgezet als *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*. Hij is mede-oprichter van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs (NVORWO), waarvan hij van 1982 tot 1993 secretaris is geweest, thans gewoon bestuurslid. In 1990 kwam hij als onderzoeker in een parttime-functie bij het Freudenthal Instituut. Ook werkte hij mee aan het zogenoemde 12-16 project. In 1995 richtte hij de Historische Kring voor het Reken en Wiskundeonderwijs (HKRWO) op. Thans is hij parttime-medewerker bij het Freudenthal Instituut voor het TAL-project-II (Tussendoelen Annex Leerlijnen). Hij is mede-auteur van de publicaties in de serie *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool*. In 1999 promoveerde hij in Utrecht op de onderhavige studie.

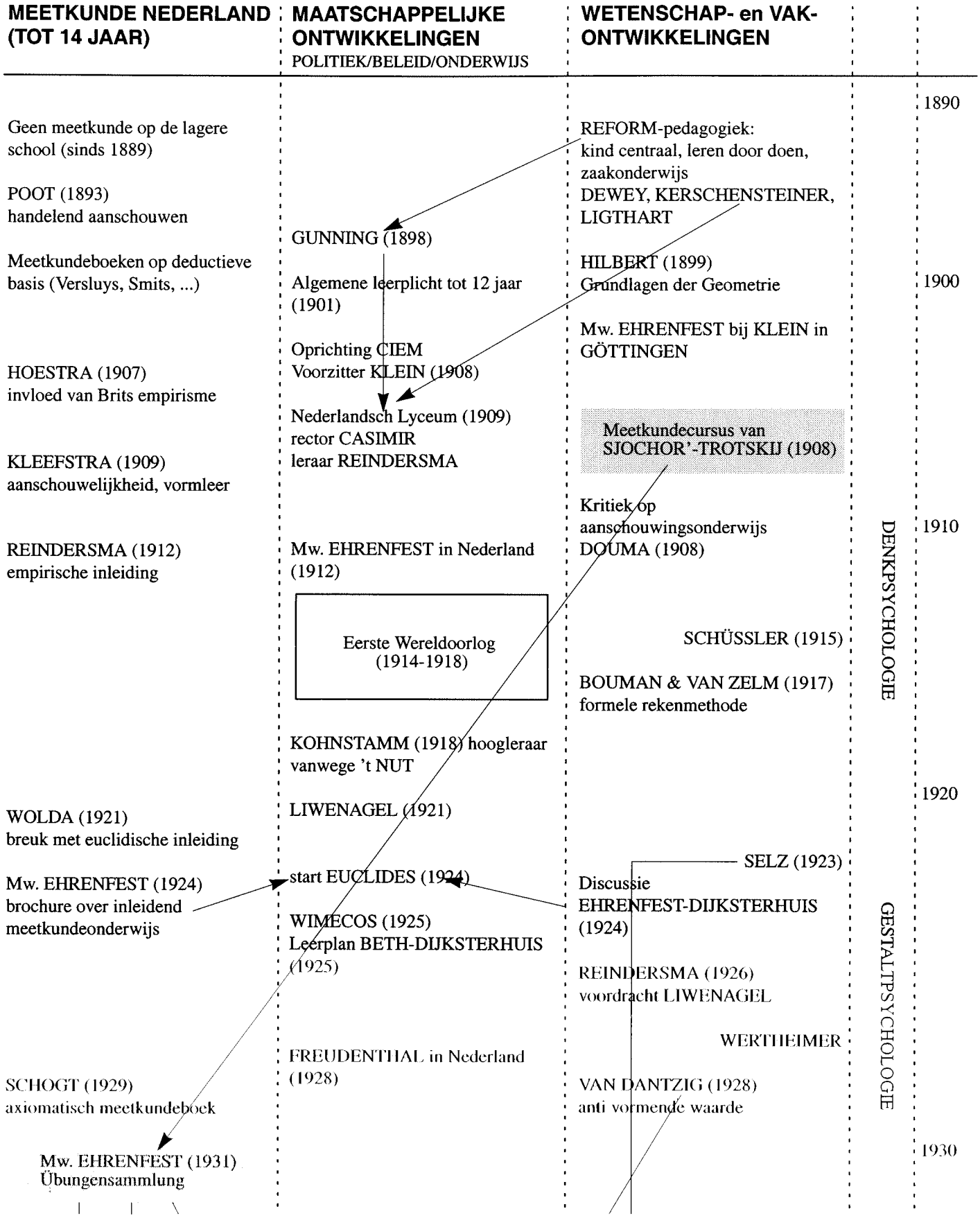
1800-1900

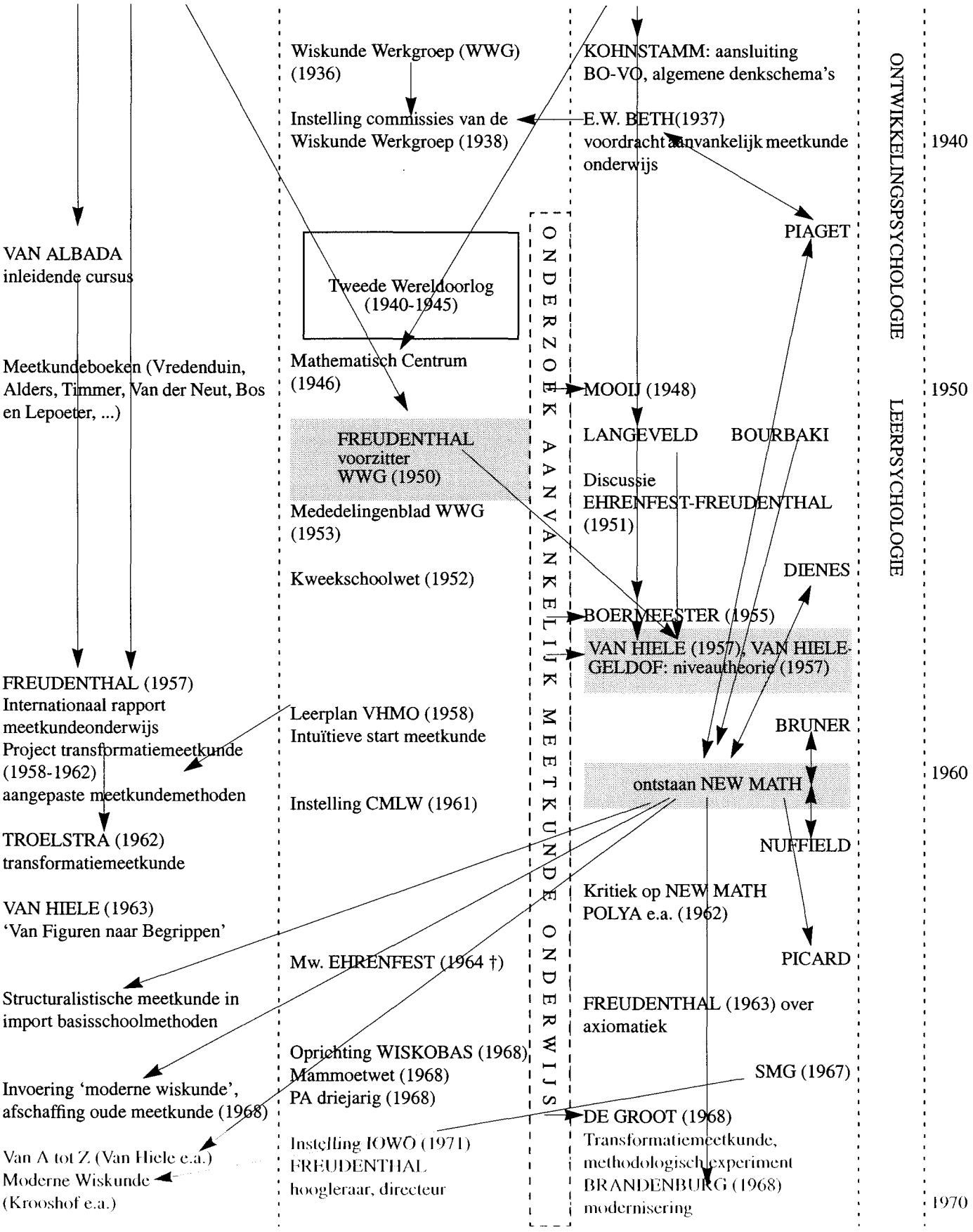
VORMLEER in NEDERLAND (lagere school)	MAATSCHAPPELIJKE ONTWIKKELINGEN POLITIEK/BELEID/ONDERWIJS	WETENSCHAP- EN VAKONTWIKKELINGEN	
			1800
	Maatschappij tot Nut van 't Algemeen Hoofdinspecteur VAN DEN ENDE **Onderwijswetten** 1801, 1803, **1806** Start tijdschrift BIJDRAGEN (1801) Handboek Onderwijzers (1803) Algemeene Boekenlijst (1810)	HERBART (1802, 1804) Anschauung, driehoek als grondfiguur PESTALOZZI (1803) ABC der Anschauung, vierkant als grondfiguur	
PRINSEN (1809) Leerwijze van Pestalozzi VAN DAPPEREN werkt bij Pestalozzi (1809-1810)	klassikaal onderwijs inspectieapparaat	Elemente der Form und Größe SCHMID (1809, 1810): atomisering, synthetische opbouw	1810
	Rijkskweekschool te Haarlem, directeur: PRINSEN (1816)		
Vormleerboek VAN DAPPEREN (1820) zuivere vormleer, combinatoriek	Subsidiëring onderwijsgezelschappen (1820)	DE GELDER: methodus docendi DIESTERWEG (1822) heuristische werkwijze, socratisch-genetisch principe	1820
RIJKENS (1830) veelzijdige nut van vormleer gebruik van platen voor aanschouwing	WIJNBEEK, hoofdinspecteur (1833-1850) inspectiereizen en verslagen	DIESTERWEG (1835) elementaire, aanschouwelijke meetkunde (Wegweiser)	1830
DIESTERWEG vertaald door BLOUW (1837) meer formele meetkunde			
	Nederlandsch Onderwijzers Genootschap (NOG) (1842)	FRÖBEL (1840) Kindergarten, speelgaven	1840
GRASZMANN vertaald (1849-1852) systematische cursus, constructies	THORBECKE: grondwet (1848)		
		STEYN PARVÉ (1850) formeel en praktisch nut van de wiskunde	1850



E.W.A. de Moor (1999). Van vormleer naar realistische meetkunde. Tijdbalk I

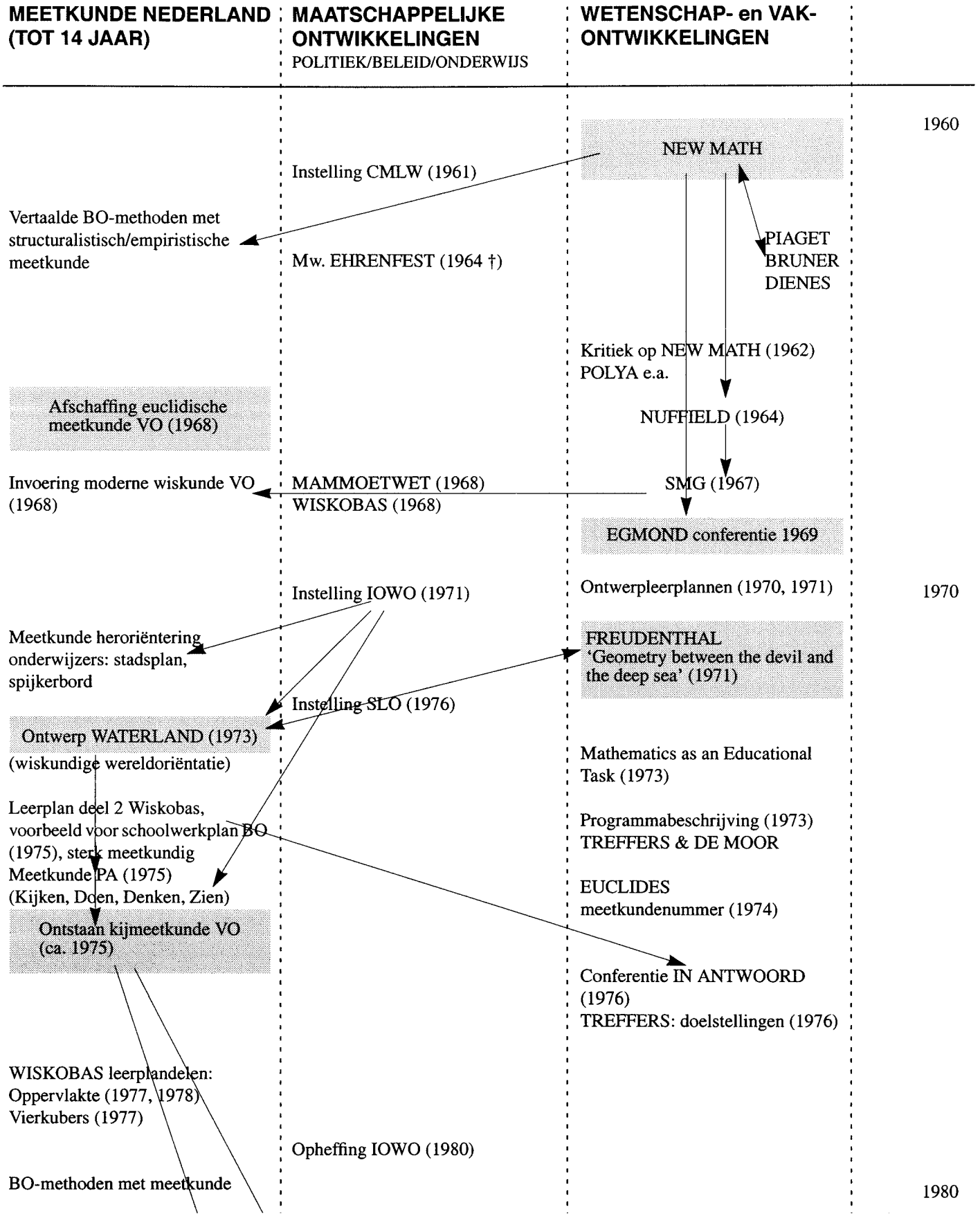
1900-1970

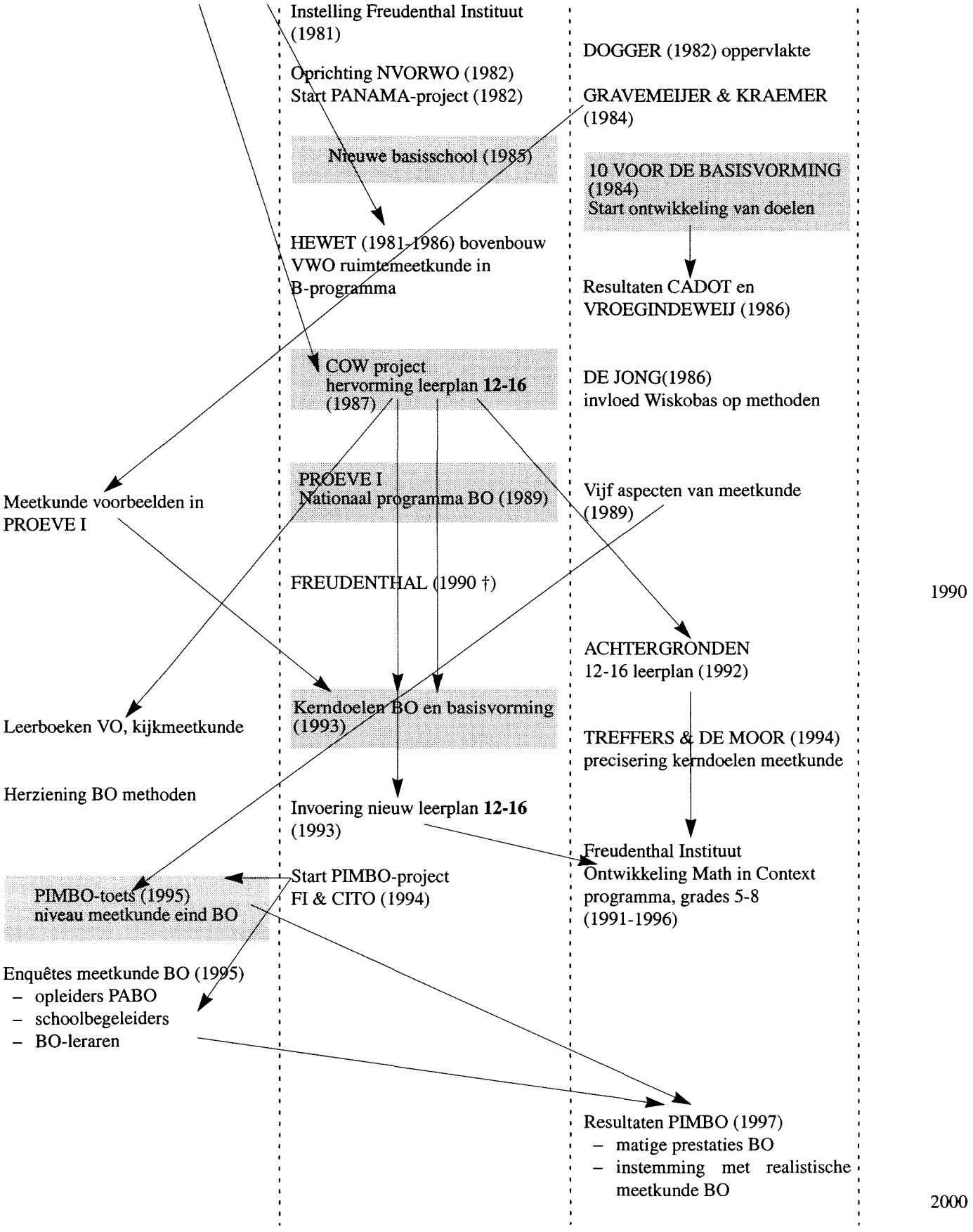

MEETKUNDE NEDERLAND (TOT 14 JAAR)
MAATSCHAPPELIJKE ONTWIKKELINGEN
POLITIEK/BELEID/ONDERWIJS
WETENSCHAP- en VAK-ONTWIKKELINGEN
1890
1900
1910
1920
1930
Geen meetkunde op de lagere school (sinds 1889)
POOT (1893)
handelend aanschouwen
Meetkundeboeken op deductieve basis (Versluys, Smits, ...)
HOESTRA (1907)
invloed van Brits empirisme
KLEEFSTRA (1909)
aanschouwelijkheid, vormleer
REINDERSMA (1912)
empirische inleiding
WOLDA (1921)
breuk met euclidische inleiding
Mw. EHRENFEST (1924)
brochure over inleidend meetkundeonderwijs
SCHOGT (1929)
axiomatisch meetkundeboek
Mw. EHRENFEST (1931)
Übungensammlung
GUNNING (1898)
Algemene leerplicht tot 12 jaar (1901)
Oprichting CIEM
Voorzitter KLEIN (1908)
Nederlandsch Lyceum (1909)
rector CASIMIR
leraar REINDERSMA
Mw. EHRENFEST in Nederland (1912)
Eerste Wereldoorlog (1914-1918)
KOHNSTAMM (1918) hoogleraar vanwege 't NUT
LIWENAGEL (1921)
start EUCLIDES (1924)
WIMECOS (1925)
Leerplan BETH-DIJKSTERHUIS (1925)
FREUDENTHAL in Nederland (1928)
REFORM-pedagogiek:
kind centraal, leren door doen, zaakonderwijs
DEWEY, KERSCHENSTEINER, LIGTHART
HILBERT (1899)
Grundlagen der Geometrie
Mw. EHRENFEST bij KLEIN in GÖTTINGEN
Meetkundecursus van SJOCHOR'-TROTSKIJ (1908)
Kritiek op aanschouwingsonderwijs
DOUMA (1908)
SCHÜSSLER (1915)
BOUMAN & VAN ZELM (1917)
formele rekenmethode
SELZ (1923)
Discussie EHRENFEST-DIJKSTERHUIS (1924)
REINDERSMA (1926)
voordracht LIWENAGEL
WERTHEIMER
VAN DANTZIG (1928)
anti vormende waarde
DENKPSYCHOLOGIE
GESTALTPSYCHOLOGIE



E.W.A. de Moor (1999). Van vormleer naar realistische meetkunde. Tijdbalk II

1960-2000


MEETKUNDE NEDERLAND (TOT 14 JAAR)
MAATSCHAPPELIJKE ONTWIKKELINGEN
POLITIEK/BELEID/ONDERWIJS
WETENSCHAP- en VAK-ONTWIKKELINGEN
1960
NEW MATH
Instelling CMLW (1961)
Vertaalde BO-methoden met structuralistisch/empiristische meetkunde
Mw. EHRENFEST (1964 †)
PIAGET
BRUNER
DIENES
Kritiek op NEW MATH (1962)
POLYA e.a.
NUFFIELD (1964)
Afschaffing euclidische meetkunde VO (1968)
Invoering moderne wiskunde VO (1968)
MAMMOETWET (1968)
WISKOBAS (1968)
SMG (1967)
EGMOND conferentie 1969
Instelling IOWO (1971)
Ontwerpleerplannen (1970, 1971)
1970
Meetkunde heroriëntering onderwijzers: stadsplan, spijkerbord
FREUDENTHAL
'Geometry between the devil and the deep sea' (1971)
Instelling SLO (1976)
Ontwerp WATERLAND (1973)
(wiskundige wereldoriëntatie)
Mathematics as an Educational Task (1973)
Leerplan deel 2 Wiskobas, voorbeeld voor schoolwerkplan BO (1975), sterk meetkundig
Meetkunde PA (1975)
(Kijken, Doen, Denken, Zien)
Programmabeschrijving (1973)
TREFFERS & DE MOOR
EUCLIDES
meetkundenummer (1974)
Ontstaan kijmeetkunde VO (ca. 1975)
Conferentie IN ANTWOORD (1976)
TREFFERS: doelstellingen (1976)
WISKOBAS leerplandelen:
Oppervlakte (1977, 1978)
Vierkubers (1977)
Opheffing IOWO (1980)
BO-methoden met meetkunde
1980



E.W.A. de Moor (1999). Van vormleer naar realistische meetkunde. Tijdbalk III