

Kinderen leren rekenen

Tussendoelen Annex Leerlijnen



TAL-team

Wolters
Noordhoff

KINDEREN LEREN REKENEN

Utrecht Institute
for Science and Mathematics Education
UWU
Postbus 9432, 3506 GK Utrecht, Nederland
Dijkstra 12, 3561 GE Utrecht, Nederland



KINDEREN LEREN REKENEN

TUSSENDOELEN ANNEX LEERLIJNEN

**HELE GETALLEN
BOVENBOUW BASISCHOOL**

eindredactie

M. van den Heuvel-Panhuizen
K. Buys
A. Treffers

FREUDENTHAL INSTITUUT EN SLO



Vormgeving binnenwerk: TAL-team

Secretariële ondersteuning: W. Hofman, E.J. Hanepen en M. Moonen

Illustraties: Lex van de Oudeweetering

Vormgeving omslag: Studio Wolters-Noordhoff

Tekening omslag: Meta Lemmens, groep 8

TAL-team in de periode september 1998-2000:

J. Bokhove

J. van den Brink

A. Buter

K. Buys

E. de Goeij

M. v.d. Heuvel-Panhuizen (coördinatie)

J. Menne

E. de Moor

A. Noteboom

J. Nelissen

A. Treffers

A. Veltman

J. Verwaal

Wolters-Noordhoff bv voert voor het hoger onderwijs de imprints Wolters-Noordhoff, Stenfert Kroese, Martinus Nijhoff en Vespucci.

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen, e-mail: info@wolters.nl

Ofschoon iedere poging is ondernomen om de volgens de auteurswet rechthebbenden van het in dit boek opgenomen illustratiemateriaal te traceren, is dit in enkele gevallen niet mogelijk gebleken. In het onderhavige geval verzoekt de uitgever rechthebbende met hem contact op te nemen.

11 12 / 10 09 08

Copyright © 2000 Wolters-Noordhoff bv Groningen/Houten, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voorzover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16b Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van korte gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.cedar.nl/pro). Voor het overnemen van niet-korte gedeelte(n) dient men zich rechtstreeks te wenden tot de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 978 90 01 85100 2

NUR 846



Inhoud

	VOORWOORD	p. 7
<i>M. van den Heuvel-Panhuizen en K. Buys</i>	IN GROTE LIJNEN	p. 8
<i>A. Treffers</i>	GETALLEN EN GETALRELATIES	p. 17
<i>K. Buys</i>	HOOFDREKENEN	p. 37
<i>A. Treffers, A. Noteboom en E. de Goeij</i>	KOLOMSGEWIJS REKENEN EN CIJFEREN	p. 65
<i>M. van den Heuvel-Panhuizen</i>	SCHATTEND REKENEN	p. 91
<i>E. de Moor en J. van den Brink</i>	REKENMACHINE	p. 123
<i>J. Nelissen en A. Treffers</i>	ONDERWIJSKADER	p. 147
<i>J. Bokhove en A. Noteboom</i>	BEGRIPPENLIJST	p. 163
	NOTEN	p. 167

Voorwoord

Kwaliteit van het onderwijs als doel

De kwaliteit van het onderwijs verbeteren: dat is een belangrijk streven binnen het onderwijsbeleid. TAL heooft hieraan bij te dragen. Het is een project geïnitieerd door het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen en dat wordt uitgevoerd door het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en de Stichting Leerplanontwikkeling, in samenwerking met Centrum Educatieve Dienstverlening Rotterdam.

De kwaliteit van het onderwijs verbeteren kan op veel manieren. TAL wil dit doen door zicht te geven op de grote lijn in het onderwijsleerproces en de samenhangen daarbinnen. TAL wil een steun zijn voor leraren, naast de methoden.

Tussendoelen Annex Leerlijnen

Het doel van het TAL-project is het beschrijven van de tussendoelen voor rekenen-wiskunde op de basisschool. De tussendoelen vormen een verdere uitwerking van en aanvulling op de al eerder vastgestelde kerndoelen voor het vak rekenen-wiskunde. Essentieel voor de beschrijving van de tussendoelen is dat deze zijn ingebed in een leerlijn. Vandaar de naam TAL. Deze naam staat voor *Tussendoelen Annex Leerlijnen*, maar kan ook gelezen worden als: tussendoelen, afbeeldingen, leerlijnen. De afbeeldingen verwijzen naar voorbeelden van leerlinggedrag en onderwijsactiviteiten die een wezenlijk onderdeel van de leerlijnbeschrijving vormen.

De TAL-leerlijnen met tussendoelen omvatten de belangrijkste domeinen van het vak rekenen-wiskunde en gaan elk vergezeld van een cd-rom met videofragmenten. De leerlijn voor het domein van het *rekenen met hele getallen* bestaat uit een deel voor de onderbouw en een deel voor de bovenbouw van de basisschool.

Het voorliggende boek betreft het deel voor de *bovenbouw*. Het bevat de leerlijn voor het rekenen met hele getallen voor de groepen 5 tot en met 8.

Werk van veel mensen

Sinds september 1998 is er hard gewerkt aan de realisatie van deze leerlijnbeschrijving. Naast het TAL-team hebben ook anderen aan de totstandkoming ervan bijgedragen. Hierbij moet vooral gedacht worden aan de leden van de Resonansgroep¹ en degenen die anderszins aan de consultatie² hebben meegewerkt. Hierdoor kon dit boek een breed draagvlak krijgen. De reacties van leraren zijn van grote waarde geweest voor de leerlijnbeschrijving die er nu ligt. Een bijzonder woord van dank moet eveneens uitgaan naar de scholen³ voor hun medewerking aan de uitvoering van onderzoek en het maken van video-opnamen.

De Begeleidingscommissie⁴ heeft gezorgd voor de beleidsmatige afstemming met de leerlijnbeschrijvingen voor de andere vakken. Bovendien heeft ze wegen geopend voor de implementatie van TAL via de ontwikkeling van informatiebijeenkomsten en nascholingsmodulen voor rekencoördinatoren.

Leerlijnbeschrijvingen als inspiratiebron

We hopen dat deze leerlijnbeschrijving stimulerend werkt voor de onderwijspraktijk, en dat het boek leraren inspireert tot vakdidactische prestaties van hoge orde. Een oplossing voor alle knelpunten in het onderwijs kan een leerlijnbeschrijving niet bieden.

Met dit boek is vooral geprobeerd lijn te brengen in het domein van het rekenen met hele getallen in de bovenbouw van de basisschool. Er zijn signalen dat in het onderwijsveld aan een dergelijk houvast veel behoefte is.

TAL-team, Utrecht oktober 2000

In grote lijnen

Over het boek

Voortzetting van de onderbouwleerlijn

Dit TAL-boek *Kinderen leren rekenen* beschrijft de reken-wiskundeleerlijn en de bijbehorende tussendoelen voor het rekenen met hele getallen voor groep 5 tot en met 8 van de basisschool.

Het boek is een vervolg op het eerder verschenen *Jonge kinderen leren rekenen*, waarin de leerlijn voor de onderbouw van de basisschool is neergelegd die het tellen en rekenen binnen het getalgebied tot honderd omvat.

In de bovenbouw wordt het getaldomein verder uitgebreid en vindt een uitgroei naar meer specifieke rekenvormen plaats. Dit houdt in dat er geleidelijk aan een onderscheid gemaakt kan worden in hoofdrekenen, kolomgewijs rekenen en cijferen, schattend rekenen en machine-rekenen. Deze rekenvormen zijn ook als uitgangspunt genomen voor het beschrijven van de leerlijn voor de bovenbouw.

In plaats van één leerlijn bevat dit boek dus meerdere leerlijnen.

Tussendoelen met een dubbel perspectief

Met de leerlijnbeschrijving wordt een overzicht gegeven van het leerproces dat leerlingen in de bovenbouw van de basisschool doorlopen. De cruciale leerstappen die de leerlingen hierbij maken, zijn als tussendoelen samengevat.

Om leraren hierbij meer houvast te geven, is ook de onderwijskant belicht. In onderwijskaders is samengevat hoe het onderwijs kan bijdragen aan het bereiken van de tussendoelen.

De tussendoelen en onderwijskaders zijn als volgt te herkennen.

Tussendoel

Onderwijskader

Een leerlijn met voorbeelden

Kenmerkend voor de opzet van de leerlijnbeschrijving is het werken met voorbeelden. Ze zijn bedoeld als verbeldering van bepaalde cruciale elementen in de leerlijn en laten concretisering zien van de didactiek.

Op een aantal plaatsen is in dit boek het symbool van een filmcamera afgebeeld.



Daarmee wordt aangegeven dat bij een bepaalde passage een videofragment hoort. Deze videofragmenten zijn opgenomen op een cd-rom die bij dit boek hoort.¹ Daarnaast bevat de cd-rom ook een overzicht van de tussendoelen.



Indeling in hoofdstukken

De leerlijn en bijbehorende tussendoelen voor het rekenen met hele getallen in de bovenbouw van de basisschool zijn beschreven in hoofdstukken over:

- *getallen en getalrelaties*
- *hoofdrekenen*
- *kolomsgewijs rekenen en cijferen*
- *schattend rekenen*
- *de rekenmachine.*

De kern van de leerlijnbeschrijving in dit boek wordt gevormd door de hoofdstukken over hoofdrekenen, kolomsgewijs rekenen en cijferen, en schattend rekenen. Het hoofdstuk over getallen en getalrelaties beschrijft meer het algemene getallenkader waarbinnen de verschillende verschijningsvormen van de rekenhandelingen tot ontwikkeling komen.

Ofschoon de verschillende rekenvormen in aparte hoofdstukken zijn beschreven, hangen ze wel in hoge mate samen. Het uiteindelijke doel van het leren rekenen met hele getallen is, dat de leerlingen die rekenvorm kiezen die het best bij een bepaald probleem past. In dit licht moet ook het hoofdstuk over de rekenmachine worden gezien.

Een algemeen hoofdstuk over het *onderwijskader* vormt het sluitstuk van de leerlijnbeschrijving. Hierin komen de verschillende leerlijnen als het ware weer samen.

Het hoofdstuk legt een koppeling tussen de tussendoelen van de leerlijn voor het rekenen met hele getallen en de kerndoelen voor het vak rekenen-wiskunde op de basisschool. Dit gebeurt in samenhang met een algemene beschrijving van het onderwijskader dat nodig is om deze doelen te bereiken.

Ten slotte bevat het boek nog een *begrippenlijst* en een overzicht met *noten*.

Voorafgaand aan de eigenlijke leerlijnbeschrijving geeft dit eerste, inleidende hoofdstuk enige achtergrondinformatie over de leerlijnbeschrijving met tussendoelen. Toegelicht wordt wat in het TAL-project met een leerlijn wordt bedoeld en hoe de tussendoelen worden gezien. In relatie hiermee wordt ingegaan op de wijze waarop de leerlijnbeschrijving in de praktijk van het onderwijs een functie kan hebben.

Dit hoofdstuk vormt ook de verbindende schakel tussen de leerlijnbeschrijving van de onderbouw en die van de bovenbouw. Het geeft een terugblik op het leerproces in de onderbouw en laat vooruitblikkend zien hoe dit proces zich verder ontwikkelt in de bovenbouw.

Terugblik en vooruitblik

Rekenen in onderbouw

In de eerste vier leerjaren van de basisschool is de grondslag gelegd voor de groeiende gecijferdheid die het rekenen halverwege het basisonderwijs kenmerkt. Wat deze basis precies inhoudt, is terug te vinden in de leerlijn met tussendoelen voor het rekenen met hele getallen in de onderbouw. Het onderstaande geeft hiervan al terugblikkend een samenvatting en laat aansluitend zien hoe deze basis in de bovenbouw verder wordt uitgebouwd.

In de onderbouw zijn de kinderen geleidelijk vanuit het tellen tot rekenen gekomen. De twee belangrijke pijlers waarop deze stap naar het rekenen stoelt, zijn de kennis die de kinderen van getallen hebben opgedaan en de vaardigheid

die ze ten aanzien van de operaties hebben ontwikkeld.

De leerlingen raken steeds meer vertrouwd met getallen en worden steeds *bedrevener* in het uitvoeren van bewerkingen. In het leerproces zijn deze twee pijlers uiteraard met elkaar verbonden. Door exploraties op de getallenlijn verkennen de kinderen enerzijds getallen en ontwikkelen ze vaardigheid in het opereren. Anderzijds bouwen ze door het uitvoeren van bewerkingen ook getalinzicht op.

Kenmerkend voor de leerlijn voor het rekenen met hele getallen in de onderbouw is de koppeling aan bepaalde getaldomeinen. In de onderbouw wordt een onderscheid gemaakt in elementair getalbegrip (groep 1 en 2), rekenen tot twintig (groep 3) en rekenen tot honderd (groep 4).



Voor het rekenen geldt dat de leerlingen in grote lijnen drie niveaus van handelen doorlopen: die van het tellende, het structurerende en het formele rekenen. Deze niveaus zeggen iets over de toenemende mate van verkorting en abstractie van de uitgevoerde rekenhandelingen.

Bij het rekenen tot twintig houdt dit onderscheid in niveaus het volgende in.

Op het *tellende niveau* zijn de handelingen nog sterk verbonden met het langs de telrij bewegen: verder springen bij optellen, terugspringen bij terugtellen.

Op het *structurerende niveau* worden de getallen op een handige manier bij elkaar genomen of uit elkaar gehaald. Structuurmateriaal zoals het rekenrek speelt hierbij een centrale rol.

Op het *formele niveau* zijn de rekenhandelingen vooral verbonden met de getalrelaties en rekeneigenschappen die de kinderen in het voorafgaande hebben ontdekt en doorzien.

Ofschoon het rekenen tot honderd veelal wordt uitgevoerd op het niveau van het structurerende en het formele rekenen, zijn alle drie niveaus hierin terug te vinden. De verbinding loopt via de drie fundamentele typen rekenstrategieën die horen bij het rekenen tot honderd: de rijgaanpak, de splitsaanpak en de varia-aanpak. Elk van deze strategieën vindt in zekere zin haar oorsprong in de eerder beschreven niveaus bij het rekenen tot twintig. De *rijgaanpak*, die berust op het langs de telrij of getallenlijn bewegen vanuit het eerste getal als vertrekpunt, vindt haar oorsprong vooral op het niveau van het tellende rekenen.

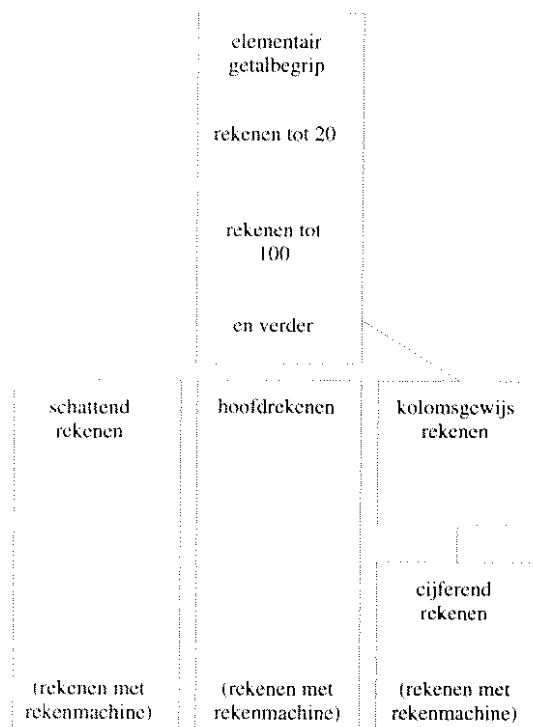
De *splitsaanpak*, die erop neerkomt dat beide getallen op basis van hun decimale structuur 'opengebroken' en bewerkt worden, is wat complexer en vooral verbonden met het structurerende niveau.

De *varia-aanpak* is vooral verbonden met het formele niveau dat inherent is aan het redeneren via getalrelaties en rekeneigenschappen. Doordat de kinderen steeds verder vertrouwd raken met deze drie aanpakken en deze op een steeds hoger niveau uitvoeren, komt de vaardigheid in het rekenen tot honderd tot ontwikkeling.

Rekenen in de bovenbouw

In de bovenbouw kenmerkt het rekenen met hele getallen zich door consolidatie en differentiatie: wat in de onderbouw geleerd is, moet in de bovenbouw onderhouden worden. Daarnaast waaiert het rekenen van de onderbouw uiteen in de meer autonome rekenvormen van hoofdrekenen, kolomsgewijs rekenen en cijferen, schattend rekenen en rekenen met de rekenmachine. Ook de ontwikkeling van deze rekenvormen berust in hoge mate op de twee pijlers van de verdere verkenning van de getallen en operaties.

Bij het leren opereren spelen ook weer de drie genoemde aanpakken een rol. Doordat de kinderen de rijgaanpak, splitsaanpak en varia-aanpak binnen de verschillende bewerkingen in het getal domein boven honderd steeds verder exploreren, 'vertakt' het rekenen zich in de genoemde vier richtingen.





Zoals het schema aangeeft, maken de kinderen in de bovenbouw kennis met de verschillende rekenvormen. Het hoofdrekenen ontwikkelt zich daarbij als de meest basale rekenvorm die in feite de andere aanpakken mogelijk maakt. Via een proces van verkorting en standaardisering van de splitsaanpak maken het kolomsgewijs rekenen en cijferen zich geleidelijk los van het hoofdrekenen. Ook het schattend rekenen vindt haar oorsprong in het hoofdrekenen met ronde getallen en ontwikkelt zich met name vanuit de gevarieerde vorm van hoofdrekenen. Gaat het om grote getallen en samengestelde bewerkingen, dan dient het rekenen op de rekenmachine zich aan. Ook hiervoor geldt dat de leerlingen stuurloos zouden zijn zonder de basis van het hoofdrekenen.

Vier rekenvormen

De grens tussen de vier rekenvormen is niet altijd even scherp te trekken: vaak komen mengvormen voor. Zo ligt het kolomsgewijs rekenen vrij dicht bij het hoofdrekenen en kunnen er zich bij het oplossen van één opgave verschillende rekenvormen voordoen. Een leerling kan zich plotseling realiseren dat de 'details' van de getallen er niet toe doen om tot een passende oplossing te komen en dan van een precieze berekening overstappen op een schattende aanpak. In toepassingssituaties kunnen de kinderen een breed scala aan rekenvormen laten zien.

Polen bekend als harde werkers

Van onze verslaggever

Ieder jaar komen tienduizenden Polen naar Nederland om enkele maanden te werken in de bloembollenteelt. (...)

Zygmunt is al voor de vierde keer in Nederland. Hij heeft in bollenvelden en in kassen gewerkt. Nu werkt hij op de transportafdeling van een bedrijf op de bloemenvelding. "Ik laad vrachtwagens in, dat is zwaar werk. Gemiddeld werk ik 220 uur per week. Dat is goed, want zo verdien je", aldus Zygmunt.

> 220 uur per week werken, zou dat kunnen?

Heeft de verslaggever hier geen fout gemaakt?

Aan de hand van de opgave over Zygmunt² worden de verschillende rekenvormen toegelicht. Dit probleem maakt ook de belangrijke rol duidelijk die maatkennis heeft bij toepassingsproblemen.

Hoofdrekenen

Hoofdrekenen is het handig en flexibel rekenen, gebruik makend van allerlei getalrelaties en rekeneigenschappen. Kenmerkend voor deze rekenvorm is dat er voornamelijk uit het hoofd wordt gewerkt, waarbij in sommige gevallen passende tussennotaties worden gebruikt. Niet alles hoeft dus uit het hoofd te gebeuren.

Het in groep 7 verzamelde leerlingenwerk³ over de Zygmunt-opgave laat zien dat bij het hoofdrekenen verschillende strategieën worden ingezet, zoals een rijgaanpak met verdubbeling.

$$\begin{array}{rcl}
 1 \text{ dag} & 24 \text{ uur} & \\
 2 \text{ dagen} & 48 \text{ uur} & \\
 4 \text{ dagen} & 96 \text{ uur} & \\
 8 \text{ dagen} & 192 \text{ uur} & \\
 & 24 \text{ uur} & \\
 \hline
 & 168 &
 \end{array}$$

Ook een splitsaanpak behoort tot de mogelijkheden.

$$7 \times 24 = 140 + 28 \times 168$$

Dus dat kon niet
omdat een week maar
168 heeft !!



Verder kunnen verschillende varia-aanpakken voorkomen zoals de volgende strategie via compenseren.

een dag heeft 24 uur dan
doe ik $25 \times 7 = 175$ uur - 7 =
168 uur per week

Kolomsgewijs rekenen

Niet als bij hoofdrekenen werkt het kolomsgewijs rekenen met getalwaarden, en niet met cijfers. Kenmerkend voor deze rekenvorm is verder dat ze gebruik maakt van standaardprocedures waarbij een aantal vaste stappen in een min of meer vaste volgorde wordt uitgevoerd. De decimale structuur van de getallen wordt daarbij benut om efficiënt tot een oplossing te komen.

$7 \times 20 = 140$ | Dat gaat nooit
 $7 \times 4 = 28$ | want 7×24 u
168 | is 168 u per week!

Zoals gezegd is deze rekenvorm verwant aan het hoofdrekenen. De vaste notatiewijze laat zien dat het bij de kolomsgewijze aanpak om een standaardprocedure gaat. Deze wordt dan ook vaak toegepast als het om bewerkingen met grotere getallen gaat. Een scherp onderscheid tussen beide vormen is niet altijd vast te stellen. Een verschilpunt is dat bij het hoofdrekenen de splitsaanpak op inderflexibele manieren gebruikt wordt.

Cijferen

Ook bij het cijferen wordt volgens een standaardprocedure gewerkt, maar nu niet met getalwaarden maar met cijfers. In het geval van de Zygmunt-opgave is de cijferende aanpak niet de meest voor de hand liggende oplossingsstrategie, toch komt deze voor.

24 uur vandaag
7x dagen
168 uur

Cijferen gaat hier volgens de gangbare manier van: zeven keer vier is achtentwintig; acht opschrijven, twee onthouden; zeven keer twee is veertien, plus die twee is zestien. Dat de twee van 'twee onthouden' in feite voor twee tientallen staat, blijft tijdens het maken van de berekening even buiten beschouwing. Het komt pas weer bij het antwoord aan het licht.

Schattend rekenen

Schattend rekenen is die vorm van rekenen waarbij afstand wordt genomen van de 'details der getallen' door deze af te ronden op ronde getallen zoals tien-, honderd-, duizendtallen, enzovoort. De getallen omzetten in andere mooie getallen waarmee gemakkelijk gerekend kan worden, zoals vijftientigtallen, kan natuurlijk ook. Met deze getallen kunnen de leerlingen op een eenvoudige manier tot een 'ongeveer-oplossing' komen. In de praktijk zijn er tal van situaties waarin een dergelijke globale uitkomst volstaat om over een gestelde vraag uitsluitsel te krijgen.

De Zygmunt-opgave leent zich daar goed voor. Zo kunnen ronde en mooie getallen dienst doen om snel tot een antwoord te komen.

Nee, want 10 werkdagen
is al 240 uur, dus
220 werkuren zou
dan 9 dagen + 4 uur
zijn.



Op een zelfde manier kan de deling $210 : 7 = 30$ duidelijk maken dat die 220 uur per week het aantal uren in een etmaal ruim overstijgt. Deze omgekeerde redeneerwijze passen de leerlingen ook toe.

Het kiezen van ronde en mooie getallen is lang niet altijd even eenvoudig. In die zin vormt schattend rekenen een domein dat pas goed tot z'n recht komt als het meer basale hoofdrekenen voldoende gerijpt is.

Kenmerkend voor de wijze waarop deze drie rekenvormen door de kinderen worden geleerd, is het feit dat ze hecht met elkaar verbonden zijn en op elkaar voortbouwen.

De basis wordt daarbij, zoals gezegd, gevormd door een brede verkenning van de getallen, resulterend in een steeds beter inzicht in de verschillende betekenissen van getallen, hun orde van grootte en decimale structuur.

Het hoofdrekenen komt hier direct uit voort. Zijn de kinderen eenmaal goed vertrouwd met deze meest basale rekenvorm, dan wordt eerst het kolomsgewijs rekenen en later ook het cijferen als een meer gestandaardiseerde vorm daarvan geïntroduceerd. Van de andere kant kan dan ook het schattend rekenen zich ontwikkelen. Dit houdt in dat de kinderen geleidelijk steeds meer loskomen van het precieze rekenen. Daarnaast speelt het schattend rekenen op een heel basaal niveau al een rol waar het gaat om de ontwikkeling van maatgevoel, en gevoel voor de orde van grootte van getallen.

Rekenen met de rekenmachine

Ten slotte is er dan nog de vierde rekenvorm: het machinerekenen. Het rekenen wordt dan met de rekenmachine uitgevoerd. Dit kan ook betrekking hebben op een deel van de rekenhandelingen.

Het kan zijn dat in een samengestelde opgave een van de stappen een nogal ingewikkelde berekening vraagt.

Deze kan aan de rekenmachine 'uitbesteed' worden.

Behalve dit gebruik van de rekenmachine als rekenhulp, kan deze ook ingezet worden voor getalverkenningen en onderzoekjes naar getalpatronen. De machine heeft dan meer een didactische functie, gericht op verdieping van het inzicht in getallen en getalrelaties.

Oplossingen buiten het rekenen

In toepassingssituaties is het niet altijd vanzelfsprekend dat kinderen zich primair op de rekenkundige inhoud richten. Zo komt het voor dat een kind meer gevoelsmatig reageert en een oplossing noteert als de onderstaande.

In het onderwijs dienen dergelijke reacties ook gehonoreerd te worden en dus niet als weinig ter zake doend te worden afgedaan. Niet voor iedere leerling is het rekenperspectief vanzelfsprekend ...

ja, dat kan
omdat het werk
erg zwaar werk is
en daarom duurt het
ook vaak lang

nee, want mijn moeder
werk al 18 uur in de week
als hij harder zou werken
dan is ie de hele
dag bezig dat is wel
een beetje veel

omdat je vrachtwagens
kan laden
en bollen velden kan
op laten groeien



Leerlijnen met tussendoelen

Doel van TAL

Het doel van TAL is helderheid verschaffen over en zicht geven op het onderwijsleertraject dat leerlingen op de basisschool voor het vak rekenen-wiskunde doorlopen. Hierbij worden de kerndoelen voor rekenen-wiskunde als uitgangspunt genomen. In zekere zin schetst TAL de weg ernaartoe. De beschrijving moet echter niet als een strak keurslijf worden opgevat. Daarvoor zijn leerprocessen te complex. Ze vinden zelden op precies dezelfde wijze plaats. Dat is overduidelijk als gekeken wordt naar de leerprocessen van afzonderlijke kinderen. Wordt echter het leerproces van een hele klas beschouwd, dan is er vaak een grote lijn in te onderkennen.

Leerlijnbeschrijving met bandbreedte

Het is deze gemeenschappelijke leerlijn, die geldt voor de meerderheid van de leerlingen, die in deze kernbrochure voor het domein van de hele getallen wordt beschreven, zonder specifieke aanpassingen voor zeer zwakke of zeer goede rekenaars.

Hoewel het om de hoofdlijnen in het leerproces gaat, worden toch de individuele verschillen in leertrajecten niet uit het oog verloren. Het is dan ook een leerlijn met een bepaalde bandbreedte. Dit betekent dat binnen een zekere marge meerdere wegen naar een bepaald doel leiden. Het duidelijkst komt dit tot uiting in de beschrijving van de tussendoelen, die als markeringen op deze weg worden beschouwd en die gekoppeld zijn aan verschillende niveaus van denken en handelen.

Wat deze tussendoelen precies zijn, wordt verwoord en verbeeld aan de hand van voorbeelden van onderwijs rond bepaalde kernactiviteiten. Deze laten met name zien hoe gevarieerd het gedragsrepertoire van de leerlingen kan zijn. Het houvast dat dit voor het onderwijs oplevert, is dat tegelijk met de beschrijving van de gevarieerde strategieën die men bij de kinderen tegenkomt, wordt aangegeven welke aanpakken perspectief hebben en welke het risico van een dood spoor in zich dragen.

Leerlijnbeschrijving met beperkingen

Onderwijsleerprocessen zijn geen geïsoleerde processen binnen een vak of een onderdeel van een vak. In deze leerlijn over hele getallen kunnen deze verbanden met andere vakken uiteraard niet volledig zichtbaar worden, doch slechts globaal worden aangestipt. Hetzelfde geldt voor de samenhang met de andere leerstofdomeinen binnen het vak rekenen-wiskunde.

Helderheid scheppen vraagt nu eenmaal om een zekere afgrenzing. Bovendien zou een leerlijnbeschrijving die alles met alles verbindt – zo die al te maken is – niet in een brochure passen.

Longitudinaal perspectief

De beperking van het blikveld tot hele getallen heeft onmiskenbaar zijn nadelen. Toch vormt dit ook de kracht ervan, de kracht van het overzicht, de mogelijkheid om de ontwikkelingsgang die zich tijdens de basisschoolperiode afspeelt in een paar grote stappen te vatten, en om de verbanden te zien tussen nu en wat nog komen gaat en wat is geweest. Onderwijs geven zonder een breed overzicht is eigenlijk niet mogelijk. Zo'n overzicht moet deel uitmaken van de mentale bagage van de leraar. Pas dan kunnen de verbanden worden gerealiseerd – in de lengte en in de breedte – die het onderwijs kwaliteit verlenen. De leerlijnbeschrijving die in deze brochure is opgenomen, wil bijdragen tot dit overzicht.

Boven de methode en boven de toets

Om dit longitudinale perspectief te krijgen moet enige afstand genomen worden van het onderwijs van alledag. Tegelijkertijd mag het er ook niet te ver vanaf komen te staan. Daarom nemen de voorbeelden uit de praktijk in deze leerlijnbeschrijving ook zo'n belangrijke plaats in. Ze maken de grote lijn concreet en herkenbaar, zodat deze bruikbaar is als referentiekader voor het nemen van didactische beslissingen. De leerlijnbeschrijving is echter geen methode, maar eerder een bron van inspiratie om boven de methode te staan.



Op dezelfde manier kunnen de tussendoelen als richtsnoer bij het toetsen dienen. Doordat de tussendoelen zijn opgenomen in een leerlijn, wordt benadrukt dat ze op verschillende niveaus en op verschillende tijdstippen bereikt kunnen worden. Als een prestatie maat voor individuele leerlingen moeten ze dus niet gebruikt worden. Ook voor de tussendoelen geldt dat ze eerder een bron van inspiratie zijn dan een controle middel.

Leerlijnbeschrijvingen als nieuw verschijnsel

Leerlijnbeschrijvingen zijn een nieuw verschijnsel in het Nederlandse onderwijs. Ze dienen als leidraad voor het onderwijs.

Als zodanig gaan ze verder dan de kerndoelen. Ze geven niet alleen aan waarnaar gestreefd moet worden, maar beschrijven ook het proces ernaartoe en de markeringspunten die hierbij te onderscheiden zijn. Een steeds weer terugkerend patroon van in elkaar grijpende niveauverhogingen vormt hierbij het verbindende element.

Nieuw is ook de vorm die voor de leerlijnbeschrijving gekozen is. Geen kale opsomming van te bereiken vaardigheden en inzichten. Geen strikte formulering in direct toetsbare gedragstermen. Maar in plaats daarvan een verhaal over de doorgaande lijn in een onderwijsleerproces.

Houvast voor leraren

TAL is op de eerste plaats bedoeld om leraren een referentiekader te bieden voor het nemen van didactische beslissingen. Hoeveel hulp een methode bij de realisatie van het onderwijs ook geeft, de leraar zal ook steeds zelf keuzen moeten maken. Dit geldt des te meer als men het onderwijs wil aanpassen aan het niveau van de kinderen en ruimte wil scheppen voor hun eigen inbreng. De leraar nodigt de kinderen dan regelmatig uit om eigen ideeën en oplossingen aan te dragen. Deze eigen vondsten worden dan in de klas besproken waarbij de verschillende oplossingen met elkaar in verband worden gebracht. Via dit gezamenlijk doordenken komen de oplossingen ten dienste van de groep als geheel en worden mogelijkheden gecreëerd om gezamenlijk vooruitgang te boeken. De kinderen kunnen zo op een natuurlijke manier ervaren, hoe je steeds verder kunt komen op basis van wat je al weet en begrijpt.

Het is bij een dergelijke opzet van het onderwijs van beslissende betekenis dat de leraar in staat is de eigen ideeën en oplossingen van kinderen goed in te schatten en te verduidelijken. De leraar moet aan het proces van uitwisseling immers leiding geven en moet daarbij met het oog op de beoogde verkorting en niveauverhoging steeds bepaalde afwegingen maken. Dat kan eigenlijk alleen

maar goed lukken indien de leraar een goed overzicht heeft over de leerlijnen en weet wanneer men bepaalde ideeën en oplossingen kan verwachten. Het longitudinale perspectief verschaft de leraar dan de mogelijkheden om het leerproces te sturen. Dit betekent dat de leraar mede op basis van wat de kinderen aandragen, de weg kan plaveien naar de beoogde verkorting en niveauverhoging.

Het is juist op deze punten dat de leerlijnbeschrijving steun wil geven. In de eerste plaats door de betreffende leerlijnen zo helder mogelijk in beeld te brengen en daarmee een houvast te bieden om de aanpakken en ideeën van kinderen te kunnen herkennen en waarderen. Daarbij wordt onder meer beschreven welke aanpakken zich binnen onderwijsleersituaties kunnen voordoen. In de tweede plaats door didactische aangrijpingspunten aan te reiken waarmee de beoogde verkorting en niveauverhoging daadwerkelijk binnen de groep geëffectueerd kan worden, met inachtneming van individuele mogelijkheden en verschillen.

Het is in dit licht dat de tussendoelen een duidelijke functie hebben: het zijn bakens die zowel vanuit een lange termijn perspectief als op het micro-didactische vlak richting kunnen geven aan het onderwijsleerproces.

Getallen en getalrelaties

Inleiding

Hele getallen manifesteren zich in vele gedaanten. Kinderen van de onderbouw hebben de meest basale verschijningsvormen ervan al leren kennen. Bij een hardlooptwedstrijd bijvoorbeeld weten kinderen van begin groep 5:

- dat een rugnummer naar een bepaalde atleet verwijst (naamgetal)
- dat een groepje uit een bepaalde hoeveelheid lopers bestaat (aantal)
- dat een volgorde van aankomst wordt vastgesteld (aftelgetal)
- dat men de afstand die gelopen is, aanduidt met een lengtemaat (meetgetal)
- en dat met sommige van die getallen op zinvolle wijze gerekend kan worden zoals aantallen en meetgetallen, en met andere niet zoals naamgetallen, maar dat je ook met pure, onbenoemde getallen kunt opereren (rekengetal).

In het volgende worden getallen en getalrelaties eerst beschouwd in relatie met reële contextsituaties – dit is het *contextualiseren*.

Daarna worden de getallen bekeken naar de plaats die ze hebben in de telrij en hun daarmee corresponderende positie op de getallenlijn of meetlijn – kortweg aangeduid met *positioneren*.

Het volgende deel analyseert de getallen op specifieke structuurkenmerken, zoals bijvoorbeeld de decimale notatiewijze, de relatie tot andere getallen en de visualiseerbaarheid – alles bij elkaar het *structureren*. Het hoofdstuk besluit met een overzicht waarin speciaal de samenhang tussen de verschillende getalaspecten en getalrelaties wordt belicht.

Deze indeling in respectievelijk contextualiseren, positioneren en structureren is ook gemaakt bij het rekenen tot honderd in de onderbouw.

Dit hoofdstuk concentreert zich vooral op getallen boven de honderd. Hierbij worden uiteraard de verworven kennis, vaardigheden en inzichten van getallen en rekenoperaties in de onderbouw betrokken.

Grondige kennismaking met hele getallen is in drie opzichten van grote waarde.

1. Het is van groot belang dat kinderen zoveel begrip van getallen ontwikkelen, dat ze in staat zijn om in allerlei praktische situaties wijs te worden uit de betekenis van getallen en mogelijk onjuist gebruik kunnen ontmaskeren.
2. Via deze kennismaking komen de getallen zo sterk tot leven, dat de verkenning van het opereren ermee soepel en gefundeerd kan plaatsvinden, waarbij de kinderen in hoge mate een eigen, constructieve inbreng hebben. Je krijgt de bewerkingen bijna cadeau als je de getallen voorafgaand daaraan maar goed genoeg blijft verkennen.
3. De ontleding van getallen vertegenwoordigt door het getaltheoretische onderzoek ook een puur wiskundige waarde.

Bij het contextualiseren ligt de nadruk meer op het overkoepelende doel van de praktische betekenis, terwijl bij het positioneren, en deels ook bij het structureren, de basis voor het opereren wordt gelegd. Bij het structureren speelt echter vooral de algemene wiskundige waarde een belangrijke rol.

Tot slot zij nog opgemerkt dat in de praktijk van het onderwijs getallen en operaties niet strikt gescheiden zijn. De term ‘getalrelaties’ drukt dit verband uit, zoals uit het volgende zal blijken. Maar een specifieke beschouwing van getallen en getalrelaties is begripsmatig bezien wel heel verhelderend. Vandaar dat er een apart hoofdstuk aan wordt gewijd.



Contextualiseren

Overzicht

De hele getallen die kinderen in de context van het leven van alledag en in schoolse toepassingssituaties tegenkomen, zijn voornamelijk benoemde aantallen en meetgetallen.

De leerlijnsbeschrijving voor de onderbouw gaf daar al een opsomming van. Deze kan ook op de bovenbouw worden betrokken:

- lengte- en gewichtsmaten
- tijdmaten: uren, halve uren, kwartieren, minuten
- kleding- en schoenmaten
- nummers van bladzijden
- scores bij spelletjes
- kalendergetallen, data
- temperatuur
- snelheden en afstanden
- benoemde hoeveelheden
- muntstukken, geldbiljetten
- prijzen
- (huis-)nummers, buslijnen
- leeftijden.

Contextsituaties waarin deze henoemde getallen en meetgetallen zijn ingebed, leveren tevens een bijdrage aan het opereren, dat immers in een sterk ontwikkeld getalgevoel wortelt. Maar de relatie tussen getallen en operaties kan ook worden omgekeerd: naarmate het opereren vordert, kan zich het inzicht in getallen verdiepen. Of anders gezegd, rekenopgaven kunnen ook vanuit de getaluitkomsten worden gezien.

De genoemde lijst kan voor de bovenbouw nog uitgebreid worden met bijvoorbeeld:

- oppervlakte- en inhoudsmaten
- metriek stelsel
- samengestelde grootheden
- 'geschaalde' maten voor windkracht, aardbevingen, papiersoorten ...
- en bijzondere maten als lichtjaar, zonnebrandfactor, bloeddruk, luchtdruk en intelligentiequotiënt.

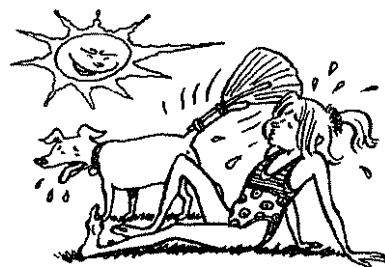
In het volgende wordt een voorbeeld van een contextsituatie in een *thematische samenhang* bekeken.

Enkele ervaringsgegevens van een zomervakantie geven een indruk van de rijkdom aan kwantitatieve aspecten uit de alledaagse werkelijkheid.

Weerthema als voorbeeld

Het is begin augustus 1999 als deze tekst wordt geschreven. In Nederland heerst een hittegolf. De kranten vermelden nauwkeurig wat onder een hittegolf wordt verstaan: een periode van ten minste vijf aaneengesloten dagen met tropische temperaturen (30°C of hoger), eventueel gevolgd door een reeks van zomerse dagen (25°C of meer).

Teletekst meldt dat de maand juli van 1999 een mooie zomermaand is geweest: de 6^e van de 20^e eeuw, met 255 uur zonneschijn en 27 dagen met een maximumtemperatuur van 20°C of meer, waarvan 13 dagen boven 25°C . Er viel in die maand gemiddeld 46 mm regen. De weersverwachting voor 5 augustus luidt: maximumtemperatuur 26°C , minimumtemperatuur 13°C , windkracht 3, percentage zonneschijn 80, kans op neerslag 20 procent.



Bij een nadere beschouwing van dit bericht – met het oog op het rekenonderwijs in verschillende groepen van de bovenbouw – kan men zich afvragen welke gegevens passen bij het onderwijs in de betreffende leerjaren. Een andere vraag is op welke wijze de gegevens tot onderwerp van analyse en onderzoek kunnen worden gemaakt.



In *groep 5 en 6* kan het onderwijs zich concentreren op jaartallen, data, aantal dagen per maand, aantal uren per etmaal (dag), en temperaturen in graden Celsius. Kinderen ontwerpen een thermometer en plaatsen daarop de hoge temperaturen van juli 1999, maar ook de minimum temperatuur van 5 augustus (13°C). Zij kunnen zich buigen over de volgende vragen.

- > Hoeveel graden is het vandaag?
- > Hoeveel graden zal het in december overdag en 's nachts kunnen worden?
- > Hoelang moet de thermometer zijn?

De kwestie van de getallen onder nul zal zeker door een enkele leerling worden ingebracht.

- > Hoe kun je buiten zien dat de temperatuur onder nul is?

In *groep 7* kan daarnaast het aantal uren zonnenschijn nader worden beschouwd.

- > Is 255 uur zonnenschijn in de hele maand juli veel?
- > Hoeveel uur is dat gemiddeld per dag?
- > Hoeveel uur is het ongeveer licht op een dag in juli?
- > Op welke dag van het jaar is het 't langst licht en wanneer het kortst?
- > Wat betekent 'neerslag 46 mm'? Hoe meet je dat?

Van dit laatste heeft het merendeel van de kinderen geen duidelijk beeld. Om hieraan iets te doen, kunnen ze de opdracht krijgen om de hoogte van 46 mm precies uit te zoeken met de liniaal en dan globaal aan te duiden via 50 mm, 5 cm, $\frac{1}{2}$ dm, met duim en wijsvinger. Ook de maateenheden van m en km worden in het verlengde van mm, cm, dm even aangestipt.

In *groep 8* volgt 'windkracht 3'. Daarvan hebben slechts enkele kinderen een heldere voorstelling: matige wind, ongeveer 15 km per uur, rustige fietssnelheid. Windkracht 6 daarentegen is geen 30 km per uur, maar 45 km (snelheid profwielrenner). Een voorbeeld dat leert hoe misleidend in werkelijkheid een schijnbaar eenvoudige relatie als '2x zoveel' tussen schaalgetallen van Beaufort kan zijn. En dan gaat het nog helemaal niet over de schaal

van Richter voor aardbevingen, waar 1 punt meer een 10 keer zo krachtige beving betekent. De dramatische aardbeving in Turkije van 17 augustus 1999 was niet 6,7, zoals eerst gedacht, maar 7,4. Dit is een groot verschil! 'Percentage zonnenschijn 80' zegt de leerlingen aanvankelijk ook niet veel. Maar via vragen over 0 procent, 100 procent en 50 procent zonnenschijn komt groep 8 daar in samenspraak toch heel goed uit: 'het overgrote deel van de dag zal de zon schijnen'. Deze uitspraak kan nog wat nader worden gepreciseerd. 'Kans op neerslag 20 procent' is de moeilijkste kwestie. Ook hier weer kan die kans met achtereenvolgens 0 procent, 100 procent en 50 procent worden benaderd en tot de kwalitatieve uitspraak leiden: 'de kans dat het gaat regenen is klein'.

Conclusie

De verscheidenheid van kwantitatieve aspecten van het weerthema is in het voorgaande voor de verschillende leerjaren gescheiden beschreven. In de praktijk kan dit tamelijk onnatuurlijk zijn. Waarom zou je bijvoorbeeld de aardbeving in Turkije onbesproken laten in groep 5 of 6 als die op dat moment de kinderen erg bezighoudt? De rekenkundige uitdieping is pas zinvol in groep 8; vandaar de geschetste opdeling. Op deze wijze kunnen kinderen maatkennis en gevoel voor getallen opbouwen die mede de grondslag vormen van elementaire gecijferdheid. Bovendien fungeren dergelijke thema's als knooppunten van verschillende leergangen die verstrengeld kunnen worden, in het bijzonder die van rekenen en meten. Het is echter maar één voorbeeld uit de vele mogelijkheden die voor het opscheppen liggen: uitgebreid weerbericht van de dag, leeftijd, kalender, winkel, sportgebeurtenissen en zo meer. De opsomming waarmee deze paragraaf begon, roept moeiteloos thema's op – niet alleen over getallen en getalrelaties, maar uiteraard ook voor het rekenen met getallen, dat in het voorgaande ook kort in beschouwing is genomen. In sommige rekenmethodes worden dergelijke thema's aan de orde gesteld. Men kan ze ook buiten de methode om als actueel thema in het onderwijs behandelen, al behoren niet alle elementen van het thema tot de basisstof, zoals bijvoorbeeld 'kans' of 'geschaalde getallen'.



I

Leerlingen kunnen getallen en getalrelaties contextualiseren in een variatie van zinvolle situaties met een grote verscheidenheid aan alledaagse (meet)getallen. In de groepen 5-8 omvatten die domeinen achtereenvolgens getallen tot ten minste duizend, tienduizend, honderdduizend en miljoen (miljard).

Hoewel de getaldomeinen niet strikt aan leerjaren zijn gebonden, is het thans gangbaar om in de groepen 5-8 achtereenvolgens vooral te rekenen tot ten minste duizend, tienduizend, honderdduizend en miljoen (miljard). De bedoelde contextualisering kan deze uitbreiding in de verschillende leerjaren globaal volgen. Let wel 'globaal', want juist ook de thematische samenhang waarin getallen verschijnen, bepaalt voor een belangrijk deel hoever men met de groep gaat. Neem bijvoorbeeld 'miljoen'. Het is ongewenst om dit grote getal, dat vrijwel dagelijks in de media verschijnt, tot groep 8 te mijden. Al in groep 6 zou miljoen als 1000 duizend in allerlei contextsituaties kunnen opduiken (geld, tijd, metriek, schaal, ...). Hetzelfde geldt voor miljard als 1000 miljoen in groep 7. Voor het contextualiseren van getallen, dus bij het in een contextsituatie beschouwen en begrijpen van getallen, en bij het zelf bedenken van een zinvolle 'benoeming' van getallen, is de eigen inbreng van de leraar naast die van het leerboek van cruciaal belang. Met name actuele gebeurtenissen bieden vaak mooie aangrijpingspunten voor een getalsmatige beschouwing van de betreffende contexten. De leraar kan de kinderen stimuleren om zelf naar (context)getallen op zoek te gaan.

Positioneren

Honderdlijn

Positioneren houdt in het kunnen plaatsen van hele getallen op een (lege) getallenlijn met een vast begin- en eindpunt. Ook het voorafgaande tellen, ordenen en vergelijken wordt onder dit kopje gevat. Via positioneren krijgen leerlingen een globaal idee van de orde van grootte van de te plaatsen getallen.

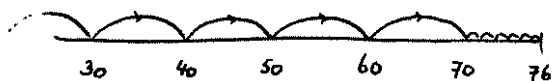
In de onderbouw komt dit positioneren eveneens aan bod. De telrij tot honderd wordt daar aanvankelijk afgebeeld op een kralenketting met een tienpatroon: afwisselend tien witte en tien rode kralen.

Na het aftellen van 76 wordt een klemmetje op de honderdketting geplaatst. Maar 76 kan natuurlijk veel vlugger worden gepakt: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, ...76. Door de twee kleuren kralen heeft de ketting immers structuur.

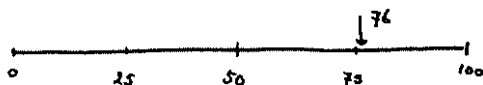




Daarna wordt het tellen met tien en enen met een lege getallenlijn gevisualiseerd.



Hierop volgt de globale plaatsing van 76 op de honderdlijn. Dit gebeurt vaak met steun van herhaald halveren. Als gevolg daarvan gaan achtereenvolgens 50, 25 en 75 als markeringspunten fungeren.



Voor het tellen en positioneren van getallen tot duizend in groep 5 en mooie ronde getallen daarboven in groep 6, 7 en 8, kan een vergelijkbare aanpak worden gekozen:

- eerst tellen met wisselende 'tallen'
- dan de telrij globaal uitbeelden op een 'open' getallenlijn zonder vast eindpunt
- en vervolgens getallen plaatsen op een duizendlijn, een tienduizendlijn enzovoort.

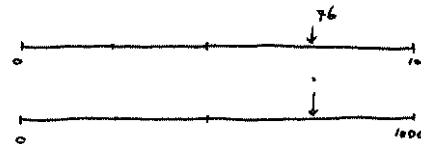
Duizendlijn

In groep 5 en 6 krijgt de duizendlijn de volle aandacht. De vraag die hierbij kan worden gesteld is of het noodzakelijk is om ook deze lijn als schematisering van een kralenketting op te vatten, zoals dat in de onderbouw bij de honderdlijn gebeurde. Dat kan, maar hoeft nu niet meer per se. Wel is het van belang om de leerlingen zich te laten voorstellen hoelang een duizendketting wordt als een honderdketting met hele kleine kraaltjes 1 decimeter is. Later – zeg in groep 7 – kan worden gevraagd hoelang dan een miljoenketting zou worden (1 kilometer!).

Via zo'n voorgestelde kralenketting en met de metrieke maten van nm, cm, dm, m en km kan zo het verband en de verhouding tussen de ronde getallen van verschillende decimale grootte worden vastgelegd. De betekenis van een nulletje meer of minder geeft op deze wijze een gevoel voor de maat of orde van grootte van getallen.

Het is dus belangrijk om de uitdijende getalgebieden met elkaar in verband te brengen. Daarbij kan het oproepen van een lijnmodel in de vorm van een kralenketting of meetlijn aanvankelijk zeker houvast bieden.

Maar al snel is het schema van de getallenlijn of meetlijn als afbeelding van de getallenlijn op zich concreet genoeg voor kinderen in de bovenbouw.

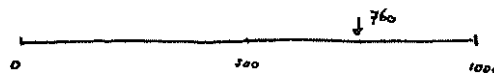


- > We veranderen het eindpunt van de honderdlijn in duizend. Welk getal zou je nu bij de pijl zetten? Zijn er meerdere keuzemogelijkheden?

Deze vragen geven aanleiding tot een diepgaande gedachtenwisseling in de klas.

Eerst worden de nieuwe markeringspunten geplaatst. Dan komt de kwestie aan de orde of bij de pijl per se 760 moet staan of dat je daar ook best 761 of 765 of 755 mag neerzetten, dus getallen die bij 760 in de buurt liggen. En hoever strekt die buurt zich uit?

Kortom, het globale karakter van de plaatsing en de (afge)rontheid van de te plaatsen getallen komen daarbij in het geding. Maar de volgende vraag geeft aan dat er meer is.



- > Waar moet 76 nu op de duizendlijn worden geplaatst?

Kinderen volgen hierbij verschillende strategieën. Ze gaan nog verder halveren ($125, 62\frac{1}{2}$), verdelen 250 globaal in drieën en een enkeling denkt aan het verdelen van 760 in tien, maar de meesten gokken op 't oog en kijken daarna, in het beste geval, of de gekozen plaats in een redelijke verhouding tot die van 250 of 125 staat.



Honderdduizendlijn

Stel, op de kilometerteller van een auto staat 75.896.
Waar valt dit ongeveer te plaatsen op de honderdduizendlijn?



- > Geef globaal 75.896 km aan.

In groep 6 en 7 vindt de uitbreiding naar honderdduizend plaats. Bij de betreffende getallenlijn kunnen dezelfde soort vragen gesteld worden als bij duizend in groep 5(6).



- > Welk rond getal staat bij de pijl?
- > Zijn er meerdere mogelijkheden?
- > Waar zet je 7600 neer? Waar 760? En waar 76?

De relatieve grootte van getallen komt in deze opgaven duidelijk tot uitdrukking. Dat is ook bij de omgekeerde opdracht het geval die eerder al ter sprake kwam.



- > Breid de duizendlijn van ongeveer 1 meter uit tot een honderdduizendlijn. Waar komt honderdduizend dan ongeveer te liggen?

Miljoen- en miljardlijn

In groep 7 en vooral in groep 8 ten slotte vindt de uitbreiding naar miljoen en miljard plaats. Ook daarbij komen de genoemde krimp- en uitbreidingsvragen aan de orde over (afge)ronde getallen of machten van tien, waarbij eveneens een verbinding met metrieke afstandsmaten wordt gelegd. Dit gebeurt om de kinderen een heldere voorstelling van grote getallen te laten maken in relatie tot kleinere getallen.

Neem bijvoorbeeld het werkblad van de Super Kop van Jut. In videofragment 1 is te zien dat kinderen uit groep 8 hiermee aan het werk zijn.¹

Niet alle kinderen zullen met vragen over grote getallen goed overweg kunnen. Daarom moet allereerst aandacht aan de uitgesproken en uitgeschreven getallen worden besteed, voorafgaand aan de notatie met cijfers. Hetzelfde geldt voor de relatie tussen miljoen en duizend, en later eveneens voor die tussen miljoen en miljard. Vooral het bespreken van de Bart-kwestie kan een verrassende uitkomst geven: de staaf van 1 m op het bord moet dus 1 km hoog worden!

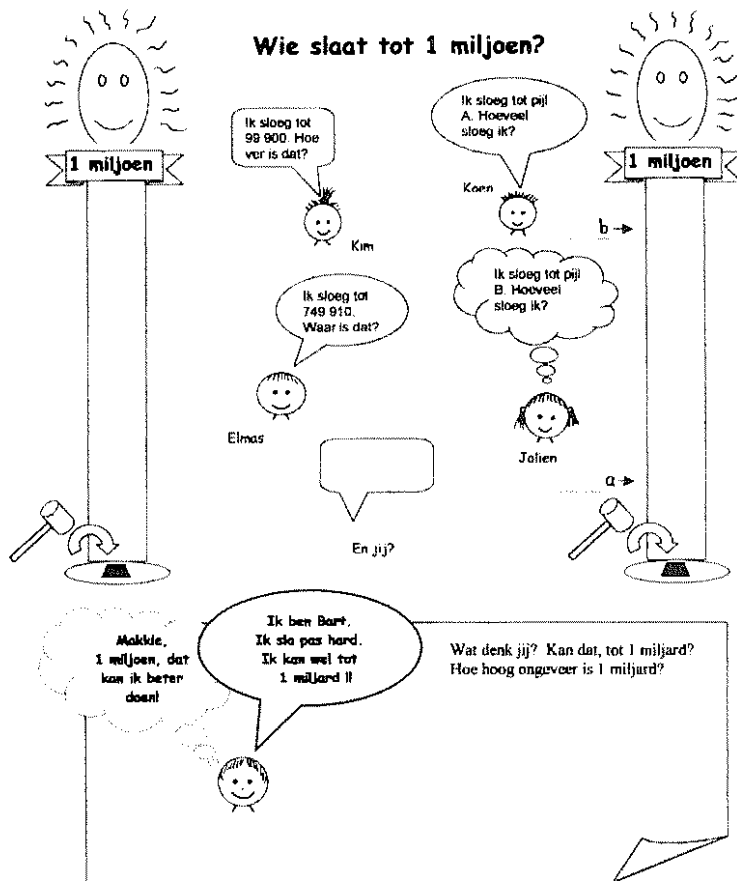
Ter toelichting van het voorgaande nu eerst iets over de schrijfwijze bij grote getallen. Bij de getallen van duizend tot miljoen gaat 'duizend' als nieuwe maateenheid fungeren die zowel in de uitspraak als in de beschrijving van de getallen tot uitdrukking gebracht wordt: 125 duizend en vervolgens 125.000, waarbij de punt de duizendtallen markeert. Miljoen wordt geïntroduceerd via 1000 duizend oftewel 1000.000 en dan 1.000.000, waarbij de nieuwe punt de miljoenen markeert. Iets ingewikkelder is weer hoe '1 miljoen 400 duizend' met cijfers wordt genoteerd: 1.400.000.

In groep 8 worden deze notaties in het kader van de kommagetallen in verband gebracht met 1,4 miljoen. Bij de getallen van miljoen tot miljard fungeert 'miljoen' als maateenheid. Miljard wordt geïntroduceerd als 1000 miljoen oftewel 1000.000.000, of 1.000.000.000. Algemeen geldt dus dat de getallen tot duizend als basis dienen om grote getallen eerst benoemd te noteren ('321 duizend', '16 miljoen', '2 miljard...') en vervolgens louter met cijfers, waarbij punten in groepjes van drie de benoeming van de verschillende 'tallen' vergemakkelijken. Men kan kinderen het systeem dat achter de uitspraak en de notatie van getallen zit op de bovenstaande manier uitleggen en laten verwerken.



Naam _____ Groep _____

Super Kop van Jut!



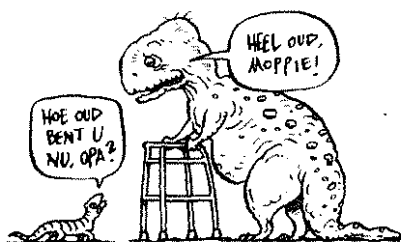
Gevoel voor de relatieve grootte van getallen

De volgende opdracht past nadrukkelijk bij een herkenbare situatie of context:

- > Bente is ongeveer 1 miljoen seconden oud.
En Ans is ongeveer 1 miljard seconden oud.
Kan Ans de moeder van Bente zijn?
Hoe oud zijn Ans en Bente ongeveer?

De antwoorden van 'ruim twaalf dagen' en 'ruim dertig jaar' voegen weer wat toe aan het gevoel voor deze getallen en hun onderlinge verhoudingen. Dat gevoel voor de grootte van getallen wordt ook versterkt door tijdlijnen te gebruiken.

- > Stel, je beeldt 1 jaar af als 1 cm. Hoelang is dan honderd jaar, duizend jaar, miljoen jaar, miljard jaar?



Een bekende anekdote in dit verband is de volgende.

Iemand vraagt aan de portier van een museum voor fossielen hoe oud de tentoongestelde dinosaurus is.

Waarop hij antwoordt: "70 miljoen en 4 jaar."

De verbaasde blik van de vragensteller ziend, voegt hij daaraan toe: "Ja, want toen ik hier 4 jaar geleden werd aangesteld, zei men dat 'ie 70 miljoen jaar oud was ...!'"

Deze grap komt in veel varianten voor, die alle de gek steken met het precies rekenen met volstrekt ongelijkwaardige getallen, namelijk zeer grote (afge-)ronde getallen en kleine exacte getallen. Maar er zijn ook misrekeningen die serieus zijn bedoeld.

Een voorbeeld. Bij de start van het eerste Paarse kabinet in 1994 was er aanvankelijk een fout in de eerste miljoenennota van minister Zalm geslopen.

Onverwachte tegenvaller in begroting van 18 miljard

Maar minister Zalm wordt ook geconfronteerd met een - kleine - tegenvaller. De persen die de Miljoenennota drukken, moesten worden gestopt omdat in de kleurendiagram van de uitgaven van het rijk een fout was geslopen.

Het financieringstekort zou volgend jaar uitkomen op 18,6 miljoen gulden. Dat is 18.581.400.000 gulden te laag, want het tekort van het rijk bedraagt volgend jaar 18,6 miljard gulden.

(Volkskrant, 1994)

In plaats van een financieringstekort van 18,6 miljard gulden wordt een tekort van 18,6 miljoen gulden genoemd. Een verschil van ... 18.581.400.000 gulden, zoals de krant nauwgezet meldt. Deze berekening is echter onjuist! Het verschil van 18,6 miljard en 18,6 miljoen is namelijk ... 18,6 miljard. Ra, ra hoe kan dat? Maakt die 18,6 miljoen dan niets uit?

Wie heeft Gerrit Zalm leren rekenen?

Maar werk, juff!

Inderdaad zijn die miljoenen niet van invloed, omdat 18,6 miljard een (afge)ronnd getal van 18.600 miljoen is, met een marge van 50 miljoen naar boven en naar beneden. Gelet op die marge is het niet zinvol om van zo'n getal 18,6 miljoen af te trekken.

Kinderen die hebben geleerd om getallen globaal te positioneren en die weten hoe ze getallen die sterk in orde van grootte verschillen aan elkaar moeten relateren, doorzien wel wat er hier aan de hand is. Aanvankelijk kunnen ze dit natuurlijk nog niet met miljoenen in relatie tot miljarden, maar al snel zal het wel lukken met betrekking tot enen en duizenden, en vervolgens ook met duizenden en miljoenen.

Het volgens machten van tien laten variëren van eindpunten van een lijn, en omgekeerd het uitbreiden van een tienlijn of honderdlijn of duizendlijn tot een lijn 'met meer nullen' zijn kernactiviteiten die van groep 5 tot 8 binnen passende getalgebieden beoefend dienen te worden.

Daarbij komen onder meer aan bod: relatieve grootte van getallen, afronden van getallen, marges van afgeronde getallen, al dan niet op zinvolle wijze de precieze verschillen bepalen tussen getallen van (zeer) verschillende orden van grootte, voorstelbaar maken van grote getallen en hun onderlinge verhoudingen, en grote getallen relateren aan metrieke afstandsmaten en bekende tijdseenheden.



Leerlingen in de groepen 5-8 kunnen achtereenvolgens tellen met passende decimale eenheden tot duizend, tienduizend, honderdduizend, miljoen ... en miljard. Ook zijn ze in staat om de getallen in de betreffende getalgebieden globaal op een lege getallenlijn te positioneren en aan elkaar te relateren in orde van grootte. Ze kunnen daarbij verbanden leggen met tijd- en afstandmaten en geldbedragen.

Speciaal duizendvouden, miljoenen en miljarden en hun onderlinge verhoudingen zijn daarbij van cruciale betekenis, zoals ook in de notatiewijze van getallen en de uitspraak ervan tot uitdrukking komt. Gevoel voor (grote) getallen dat op deze wijze wordt ontwikkeld, vormt een van de basiselementen van gecijferdheid. Het globale positioneren is een van de kernvaardigheden voor schatten en schattend rekenen, en daarmee ook voor het doorzien van ongepast precies rekenen met afgeronde getallen van (sterk) verschillende orden van grootte. Kinderen vinden grote getallen fascinerend. Via voorstellingen van afstanden, tijden en geldbedragen kunnen boeiende verbanden worden gelegd met kosmologische afstanden en geologische tijdperioden. Maar het zal duidelijk zijn dat die fascinatie vooral kan worden versterkt indien de leraar zelf zo'n gevoel voor getallen ook als zodanig beleeft.

Structureren

Bij structureren gaat het erom dat kinderen getallen steeds meer als een knooppunt in een netwerk van getalrelaties gaan zien, waarvan je al naar gelang de situatie gebruik kunt maken als er geredeneerd en gerekend moet worden.² In de onderbouw hebben ze hiermee al de nodige ervaring opgedaan. Getallen in het gebied tot honderd zijn ze daardoor steeds meer in een web van getalrelaties gaan zien.

Neem bijvoorbeeld 24:

- Ze zijn naar 24 op de lege getallenlijn toegesprongen, en kunnen 24 tientallig ontleden in $(2 \times 10) + 4$ of $20 + 4$ (opsplitsen).
- Ze hebben ontdekt dat 24 in verschillende tafels past:
 $24 = 6 \times 4 = 4 \times 6 = 8 \times 3 = 3 \times 8 = \dots$

Of anders gezegd, ze hebben ervaren dat met 24 tegels verschillende rechthoekige vloertjes kunnen worden gemaakt (ontbinden).

- En ze hebben gevonden dat 23, 24 en 25, vanuit de tafels gezien, essentieel verschillen: 23 past in geen enkele tafel, 24 in meerdere tafels en 25 in een speciale tafel; ieder van die getallen kan rekenkundig gekarakteriseerd worden (kenschetsen).

Algemeen gesteld, in de onderbouw verwerven kinderen enig besef van het decimale karakter van genoteerde getallen tot honderd, zijn ze in staat om getallen, via de basisoperaties, met andere getallen in relatie te brengen, en kunnen deze relatie rekenkundig karakteriseren.

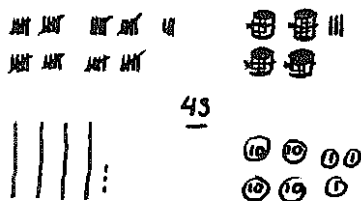


Door te opereren leren kinderen getallen te structureren, maar door getallen te laten structureren leren ze ook beter met getallen te opereren. Deze wisselwerking tussen getallen en operaties komt mede in de $=$ -notatie tot uitdrukking: $3 \times 4 = 12$, maar ook $12 = 3 \times 4 \dots$ In het volgende zal de genoemde opdeling van het structureren van getallen in opsplitsen, ontbinden en kenschetsen nader worden uitgewerkt voor het rekenen boven de honderd.

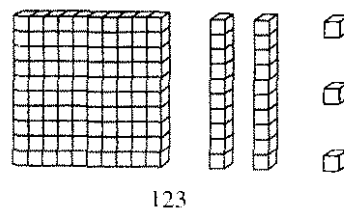
Opsplitsen

Tientallig splitsen

Met tientallig splitsen wordt bedoeld het uiteenleggen van een getal in de positiewaarden waaruit het is samengesteld. Het is een specifieke vorm van structureren die speciaal van belang is voor splitsend rekenen. In de onderbouw hebben kinderen geleerd om getallen tot honderd uiteen te leggen in tientallen en eenheden. Dat gebeurde 'op lijn' door met sprongen van tien en stappen van één naar getallen toe te springen. Ook werden groepjesmodellen geïntroduceerd om aantallen overzichtelijk tientallig weer te geven.



In groep 5 kan het tientallig voorstellen van getallen en getalrelaties daarop aansluiten. Bijvoorbeeld door een getal als 123 uit te beelden als 1 honderdje, 2 tientjes en 3 euro. Daaraan voorafgaand kan dit getal ook worden voorgesteld met MAB-materiaal: 1 plak van honderd, 2 staven van tien en 3 losse blokjes.



Daarna kan overgestapt worden op positiekaarten waarmee de decimale plaatsen benoemd zijn als E (enen), T (tien), H (honderden) ...



Maar ook deze kaarten worden snel terzijde geschoven: kinderen kunnen de honderden, tien en enen al heel snel zelf benoemen. Afgezien van de geldcontext is het genoemde positiemateriaal al vlug overbodig. Het rekenen met de verschillende plaatswaarden van de cijfers is niet eenvoudig, maar dat blijft hier buiten beeld. Enkele voorbeelden van opgaven die het inzicht in het tientallige positiesysteem kunnen verdiepen:

- > Je hebt alleen maar tientjes en euro's.
Hoe zou je 748 euro kunnen betalen?

Het feit dat 748 ook gelezen kan worden als 74 tien en 8 enen blijkt niet vanzelfsprekend en kan met deze opdracht worden ontdekt.

- > Je hebt honderdjes, tientjes en euro's. Bedenk eens ten minste vijf verschillende manieren waarop 748 euro uitbetaald kan worden.

Het belangrijke inruilprincipe komt uit deze opdracht naar voren: kinderen bedenken al gauw dat je 1 honderdje mag inruilen tegen 10 tientjes of 100 enen – een principe dat bij het kolomsgewijze en cijferende rekenen veelvuldig wordt toegepast.



Deze opdrachten zijn in *groep 6 en 7* uit te breiden naar getallengebieden boven de duizend. Daarbij doet zich echter een schijnbare onregelmatigheid voor. Neem bijvoorbeeld 74800. Het cijfer 7 staat hier voor 7 tienduizenden, 4 voor 4 duizenden, en 8 voor 8 honderden. Dit getal wordt geschreven als 74.800 en benoemd als '74 duizend 8 honderd'. Algemeen geldt dat getallen in 'honderd-zoveel' eenheden, duizenden, miljoenen of miljarden worden uitgedrukt.

In *groep 8* kan de efficiëntie van het positiesysteem blijken door het tegen de achtergrond van het additionele systeem van de Romeinse schrijfwijze van getallen te bekijken. Of door de waarde van het tientallige positiesysteem via andere talstelsels te laten herontdekken, waarover straks meer.

Gevarieerd splitsen

Men kan de genoemde voorbeelden van tientallig splitsen rijker maken door niet alleen de tientallige eurobiljetten als betaalmiddel te geven, maar ook de andere beschikbare biljetten erbij te betrekken.

We krijgen zo: 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 en 1000.

Voor *groep 5* worden opdrachten verstrekt zoals:

- > Bedenk ten minste vijf verschillende manieren om 123 euro te betalen.
- > Bedenk ten minste vijf verschillende manieren om 748 euro te betalen.

Voor *groep 6 en groep 7* zijn soortgelijke opdrachten te geven voor bedragen boven (tien)duizend. Deze vormen van gevarieerd splitsen sluiten net als die van het tientallige splitsen goed aan op het splitsende rekenen, en wel speciaal bij optellen en aftrekken.

Andertallig splitsen

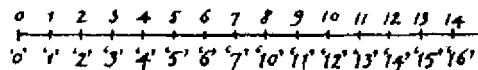
Als voorbeeld van een niet-tientallig positiesysteem kan in *groep 8* 'Het Land van Acht' geïntroduceerd worden.

'Het Land van Acht' is geïnspireerd op figuren uit tekenfilms die gewoonlijk vier vingers aan iedere hand hebben.



Toen die figuurtjes gingen leven in de film – die niets anders is dan een aaneenschakeling van plaatjes – begonnen de problemen. Wat bleek namelijk? De filmfiguren – en vooral de kinderen onder hen – bleken nogal wat moeite te hebben met het tellen en rekenen vanwege de vier vingers aan iedere hand. Daarom besloot men om anders te gaan tellen en rekenen met een 'nieuwe tien' voor twee handen.

- > Probeer eens te begrijpen hoe ze in dit land van de filmfiguurtjes tellen, en waarom daar na '7' niet 8 maar '10' volgt ... Met alle gevolgen van dien voor het rekenen!



De praktische waarde van dit tellen en vervolgens ook rekenen in 'Het Land van Acht' is gering, al zou men er op kunnen wijzen dat computers tweetallig werken en dat het achttallige stelsel daaruit afgeleid kan worden. Het gaat hier echter vooral om de getaltheoretische waarde: inzicht in het positiesysteem in z'n algemeenheid, los van het tientallige stelsel. Deze doelstelling van hoge orde dient echter niet als een communaal doel – een doelstelling voor alle leerlingen – te worden aangemerkt, maar als een differentieel doel voor geïnteresseerde rekenaars. Inzicht in het tientallige systeem is wel een communaal doel; splitsen is vooral van belang voor optellen en aftrekken.



Nu kan men deze gedachte weerleggen door met sprongen van 2 de telrij te laten aflopen, of door de (uitgebreide) tafel van 2 op het honderdveld te laten inkleuren.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Men kan dit inzicht ook verwerven door in het betreffende onderwijs 58 in een geldcontext te plaatsen, dus op te vatten als 58 euro die met z'n tweeën verdeeld moeten worden. Dat gaat dan als volgt: eerst ieder 4 euro en 2 tientjes, en dan het overblijvende tientje verdelen in ieder nog 5 euro. Het laatste is essentieel: als er al 1 tientje mocht overblijven dan kan dat altijd nog weer verder verdeeld worden. Kortom: een getal is alleen deelbaar door 2 als het laatste cijfer deelbaar is door 2. Dit is de uitkomst van het onderzoek dat kinderen in groep 5 of 6 verrichten vanuit vermenigvuldigen en (eerlijk) delen.

Deelbaarheid door 4 en door 8 voor groep 6.

Aangezien 100 deelbaar is door 4 hoeven we bij een getal als 758 alleen maar naar de laatste twee cijfers te kijken: 58. En dat getal is niet deelbaar door 4, dus is 758 niet deelbaar door 4. Concreter: leg 758 euro uiteen in 7 honderdjes, en 58 euro. De honderdjes kunnen met z'n vieren verdeeld worden, daar hoeven we verder niet naar te kijken. Dus gaat het erom of 58 deelbaar is door 4. En dat is betrekkelijk eenvoudig na te gaan. Het kenmerk van deelbaarheid door 8 kan op een overeenkomstige manier worden ontdekt. Nu doen de duizendjes er niet toe.

Dan het programma voor groep 7.

Hoe kun je vlot vaststellen of een getal deelbaar is door 9? Eerst laten we de tafel van 9 inkleuren op het honderdveld. Wat merken we op aan het patroon? En wat aan de cijfers van de 9-vouden? Er zijn kinderen die de somregel van de cijfers ontdekken: van de 9-vouden is de som van de cijfers ook een 9-voud. De leerlingen gaan deze gevonden regel uittesten bij getallen boven de honderd. En wat blijkt? Het klopt: we hebben een deelbaarheidskenmerk van 9 ontdekt.

Dit kenmerk kan op een hoger niveau als volgt worden verklaard. Is 758 deelbaar door 9? Of concreter: kan 758 euro eerlijk met z'n negenen worden verdeeld?

We kijken eerst naar de honderdjes. Ieder honderdje dat in negenen wordt verdeeld, levert een 'rest' op van 1 euro; dus geven 7 honderdjes een rest van 7 euro.

Hetzelfde gebeurt met ieder tientje: ook dat geeft na verdeling een rest van 1 euro; dus 5 tientjes een rest van 5 euro. Voeg daarbij de oorspronkelijke 8 euro en ga het totale restant van $7 + 5 + 8 = 20$ euro met z'n negenen verdelen. Dan blijft er 2 euro over. Conclusie: 758 is niet deelbaar door 9. Regel: kijk of de som van de cijfers deelbaar is door 9. Is dat het geval dan is het getal deelbaar door 9. Zoniet, dan gaat de (ver)deling niet op.

Vervolgens wordt opdracht gegeven om te onderzoeken of voor het getal 3 een soortgelijke regel geldt. En dan blijkt dat eveneens te kloppen!

Ook dit kenmerk kan op een hoger niveau worden verklaard via het verdelen van geld: ieder honderdje en ieder tientje levert een 'rest' op van 1 euro; dus levert 758 euro op deze wijze een rest op van 20 euro, en die kan vervolgens niet eerlijk verdeeld worden met z'n drieën. Dus: 758 is niet deelbaar door 3. De wijze van redeneren komt overeen met die van het delen door 9. Deze inzichtelijke verklaring is voor de meeste kinderen te moeilijk. Men kan volstaan met het laten uittesten van de regel op een aantal gevallen, en het patroon van de tafel van drie te laten analyseren.



Tot slot *groep 8*.

De kenmerken van deelbaarheid door bijvoorbeeld 6 en 12 zijn samenstellingen van respectievelijk die van 2 en 3, en van 3 en 4. Indien de leerlingen dat inzien zijn deze deelbaarheidskenmerken eenvoudig te vinden. Dit inzicht kan vooral verworven worden door de uitgebreide tafels van bijvoorbeeld 2 en 3 op het honderdveld te laten inkleuren.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Deelbaarheid door 7, 11 en 13 zijn aparte gevallen omdat de kenmerken daarvan geen vereenvoudigingen geven ten opzichte van het delend uitrekenen op zich. Om die reden worden deze kenmerken hier buiten beschouwing gelaten.

Kijkje in de klas

Een voorbeeld³ van een raadselsom voor groep 7 en 8 waarin verschillende kenmerken van deelbaarheid worden gecombineerd.

- > Een raadselsom. Welk getal tussen 200 en 250 kun je delen door 2, 3, 4, 5, en 6?

De kinderen zijn enige tijd met deze opgave bezig geweest, maar zonder succes.

Leraar: "Hebben jullie het wel geprobeerd?"

Ingrid: "Ja hoor. Je neemt een getal en dan probeer je steeds door al die getallen te delen; eerst door 2, dan door 3, enzovoort. Maar dat lukt niet zo."

Mara: "Ik dacht eerst 12. Dat kun je al door 2, 3 en 4 delen, en ook door 6. En toen dacht ik 120, die kun je ook delen door 5. Maar dan zit je nog lang niet tussen de 200 en 250..."

Leraar: "Goed. Zullen we het eens van de andere kant proberen? Welke getallen tussen 200 en 250 kun je allemaal delen door 5? Is dat moeilijk?"

Diverse leerlingen: "Nee! Dat zijn er maar tien. Dat is 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245."

De leraar noteert ze in rijen van twee op het bord.

Het blijken er negen te zijn:

Leraar: "Kun je al deze getallen nu ook door 2 delen?"

Diverse leerlingen: "Nee! 205 valt af; en 215, 225, 235, 245..."

De leraar streept deze getallen door. Er staat nu:

205	230
210	235
215	240
220	245
225	

Leraar: "En nu?" Diverse leerlingen: "Nu door 3."

Dat blijkt ook makkelijk: 210 wel, 220 niet (de leraar streept het getal door), 230 ook niet (idem) en 240 wel.

Otto: "En nu nog door 4; 210 lukt niet, want dan moet je 10 delen door 4."

Diverse leerlingen: "Je houdt er maar één over: 240. En die kun je ook door 6 delen..."

Ten slotte merkt de leraar nog op dat Mara een hele mooie strategie op het spoor was: ze had alleen 120 nog maar hoeven te verdubbelen. Want als 120 deelbaar is door 2, 3, 4, 5 en 6 dan is het dubbele van 120 dat ook. Nog preciezer: 60 is het kleinste getal dat deelbaar is door 2, 3, 4, 5 en 6 (5×12).

Daaruit volgt dat 2×60 ; 3×60 ; 4×60 ... deelbaar zijn door die getallen. Ziehier een algemene oplossing: zoek 60-vouden.

Met name in *groep 8* is de laatste oplossingsmethode op z'n plaats in verband met het onderzoek naar gemeenschappelijke veelvouden in samenhang met kenmerken van deelbaarheid. Terughlokkend kan daar worden vastgesteld dat 240 deelbaar is:

- door 5 (eindigt op 0)
- door 4 (40 is deelbaar door 4)
- door 3 (som van de cijfers (6) is deelbaar door 3)
- door 2 (want door 4, of vanwege het laatste cijfer)
- dus door 6
- en dus ook door 60.



Kenschetsen

Met getallen kenschetsen wordt bedoeld: ze indelen volgens bepaalde criteria, en de eigenschappen van de betreffende getallen nader rekenkundig onderzoeken. Op deze wijze krijgen getallen een gezicht.

Een bekend voorbeeld van zo'n klassificatie is die van de even en oneven getallen. Nader onderzoek van deze getallen levert rekenkundige eigenschappen op als:
even + even = even; oneven + oneven = even;
even $\times$ oneven = even; ...

Een betrekkelijk onbekende indeling is die volgens het 'gewicht' van de delers:

- een licht getal heeft een som van echte delers die kleiner dan het getal is (bijvoorbeeld 27 met de echte delers 1, 3 en 9, samen 13)
- een evenwichtig getal heeft een som van echte delers die gelijk aan het getal is (bijvoorbeeld 28 met de echte delers 1, 2, 4, 7 en 14, samen 28)
- en een zwaar getal heeft een som van echte delers die groter is dan het betreffende getal (bijvoorbeeld 30 met de echte delers 1, 2, 3, 5, 6, 10 en 15, samen 42).

Een andere indeling die hiermee samenhangt, is die van de figurale getallen. Een voorbeeld daarvan zijn de zogenoemde driehoeksgetallen 1, 3, 6, ...

$$\bullet \quad 1 = 1$$

$$\bullet \bullet \quad 3 = 1 + 2$$

$$\bullet \bullet \bullet \quad 6 = 1 + 2 + 3$$

Het is visueel duidelijk hoe de reeks van driehoeksgetallen optellend wordt opgebouwd. Het patroon dat daarbij ontstaat bezit tal van bijzondere eigenschappen die met onder meer de volgende opgaven kunnen worden opgespoord.

- > Bepaal het 4^e driehoeksgetal; het 10^e driehoeksgetal; ...
- > Bepaal de som van het 1^e en 2^e driehoeksgetal; idem van het 2^e en 3^e driehoeksgetal; van het 3^e en 4^e; ... Welke bijzondere getallen levert dat achtereenvolgens op?

In het volgende worden, in aansluiting met onthinden, figurale getallen gekenschetst die niet zozeer met optellen als wel met vermenigvuldigen zijn verbonden.

Figurale getallen kunnen, opgevat als aantallen, gerepresenteerd worden in de vorm van een figuur, zoals een rechthoek, een vierkant en een strook. Dit zijn de uitbeeldingen van de genoemde samengestelde getallen, kwadraten en priemgetallen.

Neem 12 tegels. Daarmee kan een rechthoekig vloertje gelegd worden, zelfs meerdere vloertjes. Daarom noemen we 12 ook wel een rechthoekgetal. Met 13 tegels kan dat niet. Daarmee kun je alleen maar een strook leggen, een smalle rechthoek van 1 bij 13. Daarom heet 13 ook wel een strookgetal. En 16 is een vierkantgetal, want daarmee kan een vierkant vloertje worden gelegd.

Rechthoekgetallen

Rechthoekgetallen (samengestelde getallen) zijn niet zo bijzonder omdat het merendeel van de hele getallen rechthoekgetallen zijn: ze kunnen ontbonden worden in factoren. Anders gezegd, naast één en het getal zelf zijn er nog andere getallen die in het betreffende getal 'passen'. Voorbeelden daarvan zijn de kinderen al veelvuldig tegengekomen in het eerder genoemde inleidende rekenspel 'Delers scoren'. Het waren de getallen die men niet gauw weggaf. Of nog anders gezegd, dit zijn getallen waarmee je een of meer rechthoekige vloertjes kunt leggen.

- > Zoek enkele getallen onder de honderd waarmee verschillende rechthoekige vloertjes kunnen worden gelegd.
- > Met welk getal kunnen de meeste vloertjes worden gelegd?

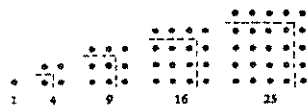
Vierkantgetallen

Vierkantgetallen (kwadraten) vormen een bijzondere soort van de rechthoekgetallen. Ze zijn het product van twee gelijke getallen. Het volgende patroon, dat ontstaat door het verschil van opeenvolgende vierkantgetallen te nemen, is eenvoudig visueel te verklaren.

Merk op dat een vierkantgetal bestaat uit twee opeenvolgende driehoeksgetallen waarover in de inleiding van deze kenschets werd geschreven.



1 4 9 16 25 36 49 64
3 5 7 9 11 13 15



Zulke 'kwadraten' zijn bijvoorbeeld: $4 = 2 \times 2$; $9 = 3 \times 3$; $16 = 4 \times 4$; ... Als men dit rijtje uitbreidt, valt op dat het laatste cijfer van ieder vierkantgetal niet elke waarde aanneemt. Zo is er geen vierkantgetal dat op een 2 eindigt. De vraag is: waarom gebeurt dat niet?

Denkend aan de vermenigvuldigprocedure is dat als volgt te verklaren: de kwadraten van 0, 1, ... 9 vormen de basis van de laatste cijfers van alle kwadraten. Dus als we van deze elementaire kwadraten de eindcijfers weten, zijn we klaar: 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Zoals gezegd komt in dit rijtje geen 2 voor. Ook 3, 7 en 8 ontbreken.

Dit inzicht vormt de verklaring van enkele onderzoekproblemen die we kinderen van groep 7 en groep 8 naar keuze kunnen voorleggen:

- > Waarom kan een vierkantgetal niet op een 2 eindigen?
- > Laat zien dat getallen die eindigen op 0, 1, 4, 5, 6 en 9 kwadraten kunnen zijn, en op 3, 7 en 8 niet.
- > Laat zien dat getallen die geschreven kunnen worden als '5 keer iets en nog 2' geen kwadraat kunnen zijn.
- > Idem voor '5 keer iets en nog 3' en '4 keer iets en nog 2' en '4 keer iets en nog 3'.

Het feit dat de reeks van opeenvolgende vierkantgetallen oneven opklimt, is al eerder besproken.

Strookgetallen

Strookgetallen (priemgetallen) hebben twee delers: één en zichzelf. Ze worden ook wel ondeelbare getallen genoemd (het getal één uitgezonderd). Men kan met deze getallen (2, 3, 5, 7, 11 ...) dus geen 'rechthoek' leggen.

Met andere woorden, men kan er slechts een strook mee maken.

- > Streep op het honderdveld alle veelvouden door, te beginnen bij de veelvouden van 2 (dus 2 zelf niet!) en dan de veelvouden van 3 enzovoort. Je houdt dan de strookgetallen over.
- Het streepwerk valt mee: na 2 en 3, is 6 gemakkelijk ...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

In het inleidende rekenspel 'Delers scoren' zijn de meeste strookgetallen tot dertig door de kinderen ontdekt. Via bovenstaande opdracht worden ze op het spoor gezet om priemgetallen op systematische wijze uit te zeven. Ze doen daarbij belangrijke ontdekkingen. Bijvoorbeeld dat de 6-vouden al uitgezeefd zijn, nadat de 2-vouden en 3-vouden zijn weggestreept. Of omgekeerd bezien, dat als een getal deelbaar is door 2 én door 3 het ook deelbaar is door 6. Indien het domein van de priemgetallen tot honderd in kaart is gebracht, kan het nader onderzocht worden met behulp van nieuwe opdrachten.

- > Ieder even getal tot honderd is te schrijven als de som van twee strookgetallen, te beginnen bij 4. Probeer maar eens.
- > Alle strookgetallen zijn buren van zesvouden, te beginnen bij 5. Ga maar na.

De oplossing van de laatste opgave wordt zichtbaar als de strookgetallen worden doorgestreept op een rechthoekig veld waar de getallen in rijen van zes staan.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60

Opdrachten over strookgetallen zijn nog uit te andere onderzoekjes.

- > Is ieder priemgetal het verschil van twee opeenvolgende kwadraten? Probeer maar eens enkele getallen.
- > Kunnen priemgetallen naast elkaar in de tabelrijen voorkomen?
- > Kun je priemgetallen vinden die in tweetallen (elkaar omringend) of in drietallen (elkaar omringend) liggen, met een getal ertussen? En zijn priemgetallen die in drietallen bijna naast elkaar voorkomen?

Priemgetallen in tweetallen (bijna) naast elkaar voorkomen. Nog steeds is niet bekend (bewezen) hoe vaak dit voorkomt. Wel kun je laten zien dat priemgetallen heel beperkt zijn. Men kan daartoe de rijen van zes gebruiken. De tweevouden en drievouden daarop laten (boven de drie) geef drie 'opeenvolgende' priemgetallen. Ziehier een impressie van het prachtige onderwerp van de strookgetallen. Het onderzoek is niet bepaald leerjaar gebonden en kan al in groep 5, tot tienduizend jaar oud.

Leerlingen kunnen gemakkelijk verschillende posities daarbij vaststellen bij het zoeken naar priemgetallen in de bovenstaande tabel van de bovenstaande groep 5, tot tienduizend jaar oud.



e woorden, men kan er slechts een strook mee

p op het honderdveld alle veelvouden door, te
men bij de veelvouden van 2 (dus 2 zelf met!) en dan
elvoud van 3 enzovoort. Je houdt dan de
kggetallen over.
treepwerk valt mee: na 2 en 3, is 6 gemakkelijk ...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

idende rekenspel 'Delers scoren' zijn de meeste
illen tot dertig door de kinderen ontdekt. Via
nde opdracht worden ze op het spoor gezet om
llen op systematische wijze uit te zeven. Ze doen
langrijke ontdekkingen. Bijvoorbeeld dat de 6-
uitgezeefd zijn, nadat de 2-vouden en 3-vouden
estreept. Of omgekeerd bezien, dat als een getal
s door 2 en door 3 het ook deelbaar is door 6.
domein van de priemgetallen tot honderd in
bracht, kan het nader onderzocht worden met
n nieuwe opdrachten.

r even getal tot honderd is te schrijven als de som
wee strookgetallen, te beginnen bij 4.
eer maar eens.
strookgetallen zijn buien van zesvouden, te
nnen bij 5. Ga maar na.

ing van de laatste opgave wordt zichtbaar als de
illen worden doorgestreept op een rechthoekig
de getallen in rijen van zes staan.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60

Opdrachten over strookgetallen zijn nog uit te breiden met
andere onderzoekjes.

- > Is ieder priemgetal het verschil van twee opeenvolgende kwadraten? Probeer maar eens enkele getallen.
- > Kunnen priemgetallen naast elkaar in de telrij liggen?
- > Kun je priemgetallen vinden die in tweetallen bijna naast elkaar liggen, met één getal ertussen? En zijn er priemgetallen die in drietallen bijna naast elkaar liggen?

Priemgetallen in tweetallen (bijna) naast elkaar heten
priemparen. Nog steeds is niet bekend (bewezen) of er
oneindig veel van zijn. Wel kun je laten zien dat het aantal
priemtrio's heel beperkt is. Men kan daartoe het veld met
de rijen van zes gebruiken. De tweevouden en de
drievouden daarop laten (boven de drie) geen ruimte voor
drie 'opeenvolgende' priemgetallen.
Ziehier een impressie van het prachtige onderzoeksterrein
van de strookgetallen. Het onderzoek is niet aan een
bepaald leerjaar gebonden en kan al in groep 5 (6) starten.

Slotsom

Ten slotte zij nog opgemerkt dat het ontbinden in twee
factoren nu kan worden uitgebreid met het ontbinden van
samengestelde getallen in twee of meer priemfactoren.
Kennis van de kenmerken van deelbaarheid van 2, 3 en 5
kan daarbij helpen.

Het grootste deel van de geschetste activiteiten past
binnen de algemene kerndoelstelling 'eenvoudige
verbanden, regels, patronen en structuren opsporen', en
wordt daardoor ook gemotiveerd. Die algemene doelen
hebben betrekking op fundamentele reken-wiskundige
bekwaamheden. Vanaf groep 5 (6) exploreren kinderen de
kenmerken van rechthoekgetallen (samengestelde
getallen), vierkantgetallen (kwadraten) en strookgetallen
(priemgetallen). Deze onderzoeksactiviteiten vinden op
aangepaste wijze plaats: niet alle leerlingen gaan daarin
even ver. Kinderen blijken met groot plezier en zeer
geconcentreerd aan de geschetste getaltheoretische
onderzoeken te werken. Dat geldt met name ook voor de
zwakkere leerlingen. Dit wordt hier expliciet vermeld,
omdat vaak wordt gedacht dat deze kinderen daar geen
plezier aan beleven.

Zoals gezegd zijn dergelijke opgaven voor de kinderen
realistisch, in de zin van betekenisvol, vanwege het feit
dat de getallenwereld voor hen realiteit is. Bij het oplossen
van de betreffende opgaven oefent men impliciet de
basisvaardigheden (productief oefenen). Dit rechtvaardigt
tevens – naast de wiskundige waarde die het oplossen van
deze getaltheoretische problemen heeft – de plaatsing van
deze onderzoeksactiviteiten in het bestaande
onderwijsprogramma.

3

Leerlingen kunnen getallen tientallig ontleden en de waarden van de
verschillende positiecijfers, alsmede de specifieke functie van de nul
daarbij, vaststellen binnen de getaldomeinen die in de verschillende
leerjaren van de bovenbouw aan bod komen: getallen tot duizend in
groep 5, tot tienduizend in groep 6, tot honderdduizend in groep 7, en tot
miljoen en daarboven in groep 8. Ze kunnen in grote getallen ook het
aantal tientallen, honderdtallen, duizendtallen en zo verder vaststellen.



Leerlingen eind groep 5 hebben de kenmerken van deelbaarheid door 10, 5 en 2 onderzocht en doorzien. In groep 6 komt vervolgens in dezelfde vorm de deelbaarheid door 4 en 8 aan bod, in groep 7 de deelbaarheid door 3 en 9, en in groep 8 enkele samenstellingen ervan, zoals 6 en 12. Vanaf groep 6 (7) exploreren leerlingen de kenmerken van rechthoekgetallen, vierkantgetallen (kwadraten) en strookgetallen (priemgetallen). Deze onderzoeksactiviteiten vinden op aangepaste wijze plaats: niet alle leerlingen gaan daarin even ver.

Geld vormt een belangrijke modelcontext voor het decimaliseren, dus het inzicht verwerven in het decimale positiesysteem. Het operationaliseren van getallen in de vorm van ontbinden in factoren met behulp van de kenmerken van deelbaarheid plus het visualiseren van getallen in vierkant- en rechthoekpatronen met stippen, hebben een puur getaltheoretisch accent. De leraar dient af te meten hoever met de gedifferentieerde groep leerlingen en per leerling op dit onderzoeksterrein gegaan kan worden. Alle leerlingen moeten met (enkele) kenmerken van deelbaarheid geconfronteerd worden, waarbij op verschillende niveaus kan worden gewerkt, zoals aangegeven in de tekst. En alle leerlingen dienen met de genoemde figurale getallen in aanraking te worden gebracht. Maar dat wil niet zeggen dat ook allen dezelfde opgaven maken. Het bovenstaande doel ontleent zijn betekenis aan de getaltheoretische activiteit van het zoeken, en minder aan de weetopbrengst ervan in de vorm van een regel voor kenmerken van deelbaarheid of een omschrijving van wat bijvoorbeeld een vierkantgetal is.

Om 12 u. 17, in een
hoog 3,04 m, op een
vervoerende 48 pers
27 jaar, 3 maanden
een 17 cm hoge hoe-
lengte, het woord to
68 en wegend 77 kg
seconden in beslag r
over een afstand van
een punt van 2 m 16

Samenvatting

De drie onderscheiden aspecten van getallen en getalrelaties dienen niet gescheiden opgevat te worden. Ook duiden contextualiseren, positioneren en structureren niet op een strakke onderwijsfasering, al zit er wel een zekere opbouw in. Zo verschijnen getallen in de onderbouw allereerst in contexten en gaat vervolgens het positioneren vooraf aan het structureren (opsplitsen en ontbinden). Maar in de bovenbouw valt deze zwakke fasering weg. Daar komen ze in de groeiende getaldomeinen niet meer in deze strakke volgorde aan de orde. In het voorgaande werd ook gewezen

op de samenhang tussen de getallen en de operaties ermee. In de term 'getalrelaties' komt dit verband tot uitdrukking. Positioneren en structureren zijn verbonden met het ordenen en opereren. Om deze reden is het apart onderwijzen van getallen en operaties kunstmatig en ongewenst. Maar het apart beschouwen ervan is daarentegen heel verhelderend omdat getallen en getalrelaties in het rekenonderwijs vaak onderbelicht zijn en te veel in de schaduw van de operaties gesteld worden, terwijl ze juist voorop dienen te staan en in verbinding met de basisoperaties moeten worden gezien.



van deelbaarheid door 10, met vervolgens in dezelfde groep 7 de deelbaarheid van 6 en 12. Kenmerken van priem- en strookgetallen vinden op aangepaste wijze ver.

or het decimaliseren, dus systeem.
van ontbinden in factoren id plus het visualiseren van 4 stippen, hebben een puur weten hoever met de ng op dit onderzoeksterrein iet (enkele) kenmerken van op verschillende niveaus tekst. En alle leerlingen anraking te worden in dezelfde opgaven maken. s aan de getaltheoretische reetopbrengst ervan in de lbaarheid of een antgetal is.

3

samenhang tussen de getallen en de operaties ermee, erm 'getalrelaties' komt dit verband tot uitdrukking. meren en structureren zijn verbonden met het ordenen renen. Om deze reden is het apart onderwijzen van n en operaties kunstmatig en ongewenst. Maar het eschouwen ervan is daarentegen heel verhelderend getallen en getalrelaties in het rekenonderwijs vaak elicht zijn en te veel in de schaduw van de operaties l worden, terwijl ze juist voorop dienen te staan en in ding met de basisoperaties moeten worden gezien.

Om 12 u. 17, in een bijwagen van lijn 16, lang 12 meter, breed 2,20 m en hoog 3,04 m, op een afstand van 3,6 km van het eindpunt van de lijn, vervoerende 48 personen, richt een individu van het mannelijk geslacht, oud 27 jaar, 3 maanden en 8 dagen, lengte 1 m 72, gewicht 65 kg, op het hoofd een 17 cm hoge hoed, waarvan de bol is omgeven door een lint van 35 cm lengte, het woord tot een man oud 48 jaar, 4 maanden en 3 dagen, lang 1 m 68 en wegend 77 kg, met behulp van 12 fonemen waarvan het uitspreken 5 seconden in beslag nam en die verwezen naar onwillekeurige verplaatsingen over een afstand van 15 tot 20 millimeters. Vervolgens begeeft hij zich naar een punt van 2 m 10 daarvandaan en gaat zitten.

Uit: Stijloefeningen van Raymond Queneau

Hoofdrekenen

Inleiding

Overzicht

“Wat hoofdrekenen is, weet iedereen”, aldus luidde de titel van een invloedrijk artikel over hoofdrekenen eind jaren zeventig.¹ En inderdaad: iedereen heeft in het dagelijks leven of in de werksituatie wel eens met hoofdrekenen te maken, en iedereen heeft dus wel een idee wat daarmee bedoeld wordt. Toch ligt het minder duidelijk dan men op het eerste gezicht wellicht zou denken. Is hoofdrekenen bijvoorbeeld vooral uit het hoofd rekenen, of mag er ook pen en papier aan te pas komen? En cijferen uit het hoofd, valt dat er ook onder? Of moet vooral gedacht worden, zoals in sommige landen het geval is, aan het uit het hoofd leren van basale rekenfeiten als $6 + 7 = 13$ of $6 \times 7 = 42$?

In Nederland heeft zich de laatste decennia mede onder invloed van voornoemd artikel een steeds duidelijker opvatting over hoofdrekenen gevormd. Een opvatting die haar wortels vindt in de wijze waarop de afgelopen 100 à 150 jaar tegen dit leerstofgebied is aangekeken en die mede onder invloed van de grootschalige invoering van de rekenmachine steeds meer gestalte krijgt in de reken-wiskundemethoden. Deze opvatting komt er kort gezegd op neer dat hoofdrekenen handig en flexibel rekenen is op basis van bekende getalrelaties en rekeneigenschappen. Deze opvatting wordt inmiddels door een brede groep praktijkmensen en vakdeskundigen gedragen. Zij vindt ook internationaal steeds meer ingang. Hieronder een aantal voorbeelden van opgaven die in deze opvatting tot het domein van het hoofdrekenen gerekend worden:

$$\begin{aligned}> 56 + 28 = \\& 368 + 57 = \\& 1980 + 370 =\end{aligned}$$

> Pieter koopt een walkman. Hij betaalt met een briefje van 200. De prijs van de walkman is €189,-. Hoeveel houdt hij over?

$$\begin{aligned}> 142 - 76 = \\& 702 - 635 = \\& 2980 - 370 =\end{aligned}$$

> Ans koopt 8 mueslibollen. Een mueslibol kost 95 cent. Hoeveel moet zij betalen?

$$\begin{aligned}> 8 \times 28 = \\& 6 \times 249 = \\& 12 \times 15 =\end{aligned}$$

> Sander kijkt op z'n horloge. Het is 16.51 uur. Hij moet om half 6 thuis zijn. Hoeveel tijd heeft hij nog?

$$\begin{aligned}> 84 : 4 = \\& 150 : 6 = \\& 750 : 15 =\end{aligned}$$

Hoofdrekenen als handig en flexibel rekenen vormt ook het uitgangspunt voor de beschrijving van de leerlijn in dit hoofdstuk. Het begint met een korte toelichting geïllustreerd met voorbeelden. Daarbij komt ook het toegenomen belang van hoofdrekenen aan de orde en de historische achtergrond ervan. Vervolgens wordt voor zes afzonderlijke deelgebieden de leerlijn geschetst:

- rekenen tot honderd
- optellen en aftrekken tot duizend
- vermenigvuldigen met grote getallen
- delen met kleine en grote getallen
- vermenigvuldigen en delen met ronde getallen
- hoofdrekenen in de hoogste leerjaren.



In een afsluitende paragraaf wordt het gedifferentieerde karakter van de leerlijn nog eens onder de loep genomen en wordt een staalkaart van opgaven gepresenteerd die de kinderen aan het eind van het basisonderwijs via een hoofdrekenstrategie moeten kunnen oplossen.

Wat is hoofdrekenen?

Hoofdrekenen als elementaire rekenkundige vaardigheid heeft niet zozeer betrekking op een bepaald getalgebied, of een bepaalde operatie. Het is in de eerste plaats een *benaderingswijze* van getallen en getalsmatige gegevens waarbij handig en flexibel met de getallen wordt gerekend:

- werkend met getalwaarden en niet met cijfers; de getallen worden bij het hoofdrekenen ‘in hun waarde gelaten’
- gebruik makend van elementaire reken eigenschappen en getalrelaties als de verwissel eigenschap ($16 + 47 = 47 + 16$; $28 \times 3 = 3 \times 28$), verdeel eigenschap ($13 \times 6 = (10 \times 6) + (3 \times 6)$), inverse relatie ($62 \div 59 = 3$, want $59 \times 3 = 62$; $420 : 7 = 60$, want $7 \times 60 = 420$), en combinaties daarvan
- steunend op een goed ontwikkeld getalgevoel en een hechte kennisbasis van elementaire rekenfeiten tot twintig en tot honderd
- al naar gelang de situatie eventueel gebruik makend van passende tussennotaties, maar voor een belangrijk deel uit het hoofd rekenend.²

Vlot en flexibel door de getallenwereld kunnen bewegen, zo zou men hoofdrekenen kunnen omschrijven. Of het daarbij om optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen gaat, of een combinatie van deze operaties, is niet wezenlijk. Evenmin is hierbij van belang uit welk getalgebied de getallen afkomstig zijn. Wel een belangrijk kenmerk is dat de kinderen bij het oplossen van hoofdrekenopgaven niet op dezelfde wijze tot een oplossing hoeven te komen. Integendeel, binnen het hoofdrekenen kan zich een natuurlijke differentiatie ontwikkelen doordat de kinderen de ruimte krijgen om, binnen zekere grenzen, hun eigen weg te volgen, hun eigen voorkeuren ten aanzien van strategieën te gebruiken, hun eigen referentiegetallen in te zetten, en hun eigen mate van verkorting te gebruiken.

In videofragment 2 is te zien hoe gevarieerd de kinderen bij het hoofdrekenen te werk kunnen gaan.³



Aan het eind van het schooljaar wordt in groep 6 een rekendietee gegeven met optel- en aftrekopgaven tot duizend. Als ‘warming-up’ daarbij wordt gezamenlijk nog even besproken op wat voor manieren je de opgave $702 - 635$ allemaal kunt oplossen. Eerst mag Nancy haar oplossing naar voren brengen. Zij trekt van de 702 eerst 600 af (102), daarna 5 (97), en ten slotte nog 30 . Haar conclusie is: “ 67 over.” Simone reageert daarop met: “Ik zou doortellen.” Ze licht haar werkwijze toe: “Eerst 60 bij de 635 is 695 . Daarna 5 erbij (700) en dan nog 2 , is 702 . In totaal heb ik er dan 60 en 5 en 2 bijgedaan, dus 67 .” De leraar vat het als volgt samen: “Jij gaat dus op zoek naar het verschil tussen 702 en 635 .” Vervolgens lichten nog drie andere kinderen hun aanpak toe. Alle aanpakken worden door de leraar stapsgewijs op het bord genoteerd, zodat het volgende overzicht ontstaat:

702 - 635 =			
702 - 600 = 102	Nancy	702 - 600 = 102	Faranas
102 - 35 =		102 - 2 = 100	
102 - 5 = 97		100 - 30 = 70	
97 - 60 = 37		70 - 3 = 67	
635 + 60 = 695	Simone	702 - 630 = 72	Damiën
695 + 5 = 700		72 - 5 = 67	
700 + 2 = 702			
67		640 700 702	
		635+5+60+2	Cindy
		67	

Na deze voorbespreking weten de kinderen weer waar het om draait bij zulke opgaven en hoe je daarin je eigen weg kunt volgen. Het rekendietee kan beginnen.

De zin van hoofdrekenen

Voor het leven van alledag is hoofdrekenen (schattend rekenen) van eminent belang. Of rekenen met geld gaat, met tijd, met gewichte een goede hoofdrekenvaardigheid is ononthoerbaar. Een goede hoofdrekenvaardigheid is onontbeerlijk voor de greep op de getalsmatige omstandigheden te kunnen kritisch te kunnen bekijken en op een manier te kunnen interpreteren. In die zin vormt hoofdrekenen een cruciaal element van een goede rekenvaardigheid, waarop een kind zich zonder meer moet kunnen baseren. Maar ook voor het vervolgonderwijs is hoofdrekenen van grote waarde. Niet alleen vormt het de basis voor het altijd moet kunnen terugvallen bij het vele binnen de verschillende vakgebieden, juist waarin de rekenmachine als hulpmiddel gebruikt wordt. Dit is eveneens van belang voor het inzicht in de fundamentele eigenschappen van het rekenstelsel. Het rekenstelsel mede de grondslag vormt van een aanzienlijk deel van de wiskunde die hieraan komt. In het bijzonder bij de verkenning van variabel begrip en de algebraïsche handel daarmee na verloop van tijd verricht wordt. Het inzicht in onder meer de verwissel eigenschap verdeel eigenschap op een wat abstractere manier in het basisonderwijs van grote betekenis.

Drie grondvormen van hoofdrekenen

Hoofdrekenen doet zich in het algemeen voor in drie elementaire vormen die, gezien vanuit het leerproces, logisch in elkaars verlengde staan, waarvan de verwerving gepaard gaat met een verder toenemend begrip van getallen en rekenen:

- het rijgende hoofdrekenen waarbij de getallen primair worden opgeteld of afgetrokken in de telrij en waarbij het opereren via ‘bewegen over de getallenlijn’: vermenigvuldigen ($\times$), herhaald vermenigvuldigen ($\div$) of herhaald delen ($\div$)
- het splitsende hoofdrekenen waarbij de getallen primair worden opgeteld of afgetrokken met een decimaal-positioneel getal waarbij het opereren plaatsvindt door de structuur van die structuur te splitsen en te



ient 2 is te zien hoe gevarieerd de kinderen rekenen te werk kunnen gaan.³



d van het schooljaar wordt in groep 6 een gegeven met optel- en aftrekopgaven tot s 'warming-up' daarbij wordt gezamenlijk nog oken op wat voor manieren je de opgave dilemmaal kunt oplossen.

Nancy haar oplossing naar voren brengen. i de 702 eerst 600 af (102), daarna 5 (97), en ten 0. Haar conclusie is: "67 over." geert daarop met: "Ik zou doortellen." n werkwijze toe: "Eerst 60 bij de 635 is 695, bij (700) en dan nog 2, is 702. In totaal heb ik a 5 en 2 bijgedaan, dus 67."

n het als volgt samen: "Jij gaat dus op zoek naar tussen 702 en 635." lichten nog drie andere kinderen hun aanpak toe. sken worden door de leraar stapsgewijs op het verd, zodat het volgende overzicht ontstaat:

702 - 635 =	
00 = 102 Nancy	702 - 600 = 102 Farinas
35 =	102 - 2 = 100
5 = 97	100 - 30 = 70
60 = 37	70 - 3 = 67
4 = 695 Simone	702 - 630 = 72 Damiën
5 = 700	72 - 5 = 67
1 = 702	
640 700 702	
635+5+60+2	Cindy
67	

orbespreking weten de kinderen weer waar het ij zulke opgaven en hoe je daarin je eigen weg i. Het rekendictieo kan beginnen.

De zin van hoofdrekenen

Voor het leven van alledag is hoofdrekenen (samen met schattend rekenen) van eminent belang. Of het nu om het rekenen met geld gaat, met tijd, met gewichten of afstanden; een goede hoofdrekenvaardigheid is onontbeerlijk om greep op de getalsmatige omstandigheden te houden, om de getallen kritisch te kunnen bekijken en op een passende manier te kunnen interpreteren. In die zin vormt hoofdrekenen een cruciaal element van *gecijferdheid* waarop een kind zich zonder meer moet kunnen verlaten. Maar ook voor het vervolgonderwijs is hoofdrekenen van grote waarde. Niet alleen vormt het de basis waarop men altijd moet kunnen terugvallen bij het vele rekenwerk binnen de verschillende vakgebieden, juist in een situatie waarin de rekenmachine als hulpmiddel gemeengoed aan het worden is. Dit is eveneens van belang omdat een goed inzicht in de fundamentele eigenschappen van ons rekensysteem mede de grondslag vormt voor een aanzienlijk deel van de wiskunde die hier aan de orde komt. In het bijzonder bij de verkenning van het variabelebegrip en de algebraïsche handelingen die daarmee na verloop van tijd verricht worden, is een goed inzicht in onder meer de verwissel-eigenschap en de verdeel-eigenschap op een wat abstracter niveau dan in het basisonderwijs van grote betekenis.

Drie grondvormen van hoofdrekenen

Hoofdrekenen doet zich in het algemeen voor in drie elementaire vormen die, gezien vanuit het oogpunt van leerprocessen, logisch in elkaars verlengde liggen en waarvan de verwerving gepaard gaat met een steeds verder toenemend begrip van getallen en operaties:

- het rijgende hoofdrekenen waarbij de getallen primair worden opgevat als objecten in de telrij en waarbij het opereren plaatsvindt via 'bewegen over de getallenlijn': verder (+) of terug (-), herhaald verder (x) of herhaald terug (:)
- het splitsende hoofdrekenen waarbij de getallen primair worden opgevat als objecten met een decimaal-positionele structuur en waarbij het opereren plaatsvindt door de getallen op grond van die structuur te splitsen en te bewerken

- het gevarieerde hoofdrekenen op grond van rekeneigenschappen waarbij de getallen opgevat worden als objecten die op allerlei manieren gestructureerd kunnen worden; en waarbij het opereren plaatsvindt door een passende structurering te kiezen en een daarmee overeenstemmende rekeneigenschap te gebruiken.

Elk van deze grondvormen kan op verschillende niveaus worden uitgevoerd. Op een lager niveau onder gebruikmaking van modellen als de lege getallenlijn of geld, op een hoger niveau met ondersteuning via het noteren van tussenstappen in rekentaal of louter mentaal. Binnen de verschillende deelgebieden waarmee het hoofdrekenen tot ontwikkeling komt, kunnen deze grondvormen als uitbreiding van elkaar geïntroduceerd en beoefend worden. Met de introductie van een hogere vorm verdwijnen de lagere vormen echter niet; zij worden daarin opgenomen, zodat zich gaandeweg binnen de verschillende domeinen een steeds breder repertoire van hoofdrekenstrategieën ontwikkelt waaruit al naar gelang de opgave en de eigen voorkeur geput kan worden. Zo kunnen zich medio groep 6 bij een opgave als $325 - 249$ de volgende aanpakken⁴ voordoen:

- rijgaanpakken waarbij het eerste getal als geheel wordt opgevat en het tweede er in gedeeltes vanaf wordt gehaald

$$\begin{array}{r} 325 - 249 = \underline{76} \\ 325 - 200 = 125 \\ 125 - 20 = 105 \\ 105 - 20 = 85 \\ 85 - 9 = 76 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 325 - 249 = \underline{76} \\ 325 - 49 = 276 \\ 276 - 200 = 76 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 325 - 249 = \underline{86} \\ \text{ik doe eerst } 325 - 200 = 125 \\ \text{en dan } 125 - 49 = 86 \end{array}$$



- splitsaanpakken waarbij beide getallen gesplitst worden op grond van hun decimale structuur en in aparte gedeeltes van elkaar afgehaald worden

$$325 - 249 = 76$$

$$\begin{array}{r} 300 - 200 = 100 \text{ weet ik gewoon} \\ 125 - 49 = \end{array}$$

$$100 - 19 = 51 + 25 = 76$$

$$325 - 249 = 76 \quad \text{ik doe eerst } 300 - 200 = 100 \text{ en dan } 125 - 25 = 100 \text{ en dan nog } 100 - 24 = 76$$

- varia-aanpakken waarbij de getallen op verschillende manieren gestructureerd worden en waarbij rekeneigenschappen worden ingezet om ze van elkaar af te halen of het verschil te bepalen

$$325 - 249 = 76$$

$$\begin{array}{r} 325 - 200 = 125 \\ 125 - 50 = 75 \\ 75 + 1 = 76 \end{array}$$

$$325 - 249 = 76$$

$$\begin{array}{l} \text{bij } 249 \text{ eerst } 100 - 200 \text{ opkellen} = 51 \\ \text{dan } 25 \text{ erbij} = 325 \text{ dan nog} \\ 51 + 25 = 76 \end{array}$$

Goed leren hoofdrekenen

Hoe leren kinderen nu goed hoofdrekenen? Essentieel voor het verwerven van hoofdrekenvaardigheid als benadering in de hiervoor geschetste zin is dat binnen de verschillende domeinen steeds een vergelijkbaar proces van getalverkenning, en het ontwikkelen en uitbreiden van strategieën plaatsvindt waarbij de drie hierboven geschetste grondvormen steeds verder verkend en eigen gemaakt worden:

- begonnen wordt met een brede verkenning van de getallen als zodanig; in aansluiting hierop worden rijstrategieën verkend die natuurlijk voortvloeien uit deze getalverkenning en die de kinderen onder leiding van de leraar voor een belangrijk deel zelf construeren
- als daarmee voldoende vertrouwdheid is opgebouwd en het begrip der getallen zich in samenhang daarmee navenant heeft verdiept, wordt uitgebreid naar splitsstrategieën die door sommige kinderen al in een veel eerder stadium zijn ontdekt
- als de kinderen ook daarmee voldoende vertrouwd zijn geraakt en het begrip van de operatie(s) zich eveneens verder heeft verdiept, vindt een verdere uitbreiding naar varia-aanpakken plaats.

Een en ander betekent natuurlijk niet dat de kinderen bijvoorbeeld varia-aanpakken niet al veel eerder gebruiken. Maar wel dat in het onderwijs in eerste instantie een duidelijke nadruk op het gebruik van rijstrategieën ligt, en op de vraag hoe je die steeds efficiënter en verkort kunt gebruiken. Pas als de kinderen daar voldoende greep op hebben gekregen, wordt nadrukkelijk meer aandacht aan splitsstrategieën besteed; hetzelfde geldt in een later stadium voor de varia-aanpakken. Gebeurt dit niet in voldoende mate in deze volgorde, dan is er het gevaar dat zwakkere leerlingen het spoor bijster raken en verschillende soorten aanpakken door elkaar gaan halen.

Naast de ontwikkeling van hoofdrekenstrategieën raken de kinderen vanaf een zeker moment ook steeds verder vertrouwd met de meer gestandaardiseerde strategieën van het kolomsgewijze en cijferende rekenen. Zo gebruiken kinderen medio groep 6 bij de som $325 - 249$ naast de genoemde hoofdrekenstrategieën ook de kolomsgewijze aanpak:

$$325 - 249 = 76$$

$$\begin{array}{r} 325 \\ 249 \\ \hline 100 \\ - 20 \\ - 9 \\ \hline 76 \end{array}$$

Kenmerkend voor de wijze waarop het kol rekenen geïntroduceerd wordt, is dat dit vo niet zoveel anders is dan hoofdrekenen. De voor hen vanzelfsprekend in het verlengde hoofdrekenen, in het bijzonder het splitsen. In die zin kan deze standaardprocedure op als een verdere uitkristallisering en abstrah hoofdrekenen – een manier van rekenen die programma naast het hoofdrekenen met ee regelmaat aan de orde komt.

Kenmerkend is verder de cruciale eigen in kinderen bij het leren hoofdrekenen. Onder onderwijsgevende krijgen ze gelegenheid o zekere grenzen, de verschillende soorten rel in samenspraak met de medeleerlingen eig. Daardoor kunnen ze een eigen repertoire a ophouden, met een eigen reikwijdte, een e flexibiliteit, en leren ze om zelf te beslisse en niet gebruik wordt gemaakt van passend

Hoofdrekenen in historisch perspectief

Aan hoofdrekenen is, historisch gezien, niet waarde toegekend. Er waren tijden dat het l geen rol speelde in het programma van het b. Dat geldt in het bijzonder voor de periode v het voornamelijk cijferen was dat de klok sl was er voor hoofdrekenen alleen aandacht i uit het hoofd leren van de optel-, aftrek-, ve en deeltafels, veelal via mechanisch inoefn. Tegen het einde van de 19^e eeuw trad onder wiskundige en vakdidacticus Versluys een e op. Hij interpreteerde hoofdrekenen veeleer in het voorgaande getypeerd: niet zozeer de het daarmee gepaard gaande inprenten viel veel meer het handig werken met getallen, g van allerlei getalrelaties en rekeneigenschap. Hoofdrekenen, aldus Versluys, onderscheid cijferen door de flexibiliteit waarmee de rek gepaard gaan. Aanvankelijk leidde deze op 20^e eeuw tot rekenmethoden waarin hoofd cijferen een ruime plaats kreeg toebedeeld.



men wordt met een brede verkenning van de mogelijkheden als zodanig; in aansluiting hierop worden strategieën verkend die natuurlijk voortvloeien uit de verkenning en die de kinderen onder leiding van de leraar voor een belangrijk deel zelf construeren. Wanneer voldoende vertrouwdheid is opgebouwd met het begrip der getallen zich in samenhang daarmee heeft verdiept, wordt uitgebreid naar strategieën die door sommige kinderen al in een eerder stadium zijn ontdekt. De kinderen ook daarmee voldoende vertrouwd zijn met het begrip van de operatie(s) zich eveneens heeft verdiept, vindt een verdere uitbreiding van de varia-aanpakken plaats.

der betekent natuurlijk niet dat de kinderen zeld varia-aanpakken niet al veel eerder vinden. Maar wel dat in het onderwijs in eerste instantie een duidelijke nadruk op het gebruik van strategieën ligt, en op de vraag hoe je die steeds vaker en verkort kunt gebruiken. Pas als de kinderen daar voldoende greep op hebben gekregen, wordt er drukkelijker meer aandacht aan splitsstrategieën. Hetzelfde geldt in een later stadium voor de varia-aanpakken. Gebeurt dit niet in voldoende mate in deze fase, dan is er het gevaar dat zwakkere leerlingen het gebruik van de splitsstrategieën en verschillende soorten aanpakken niet meer gaan halen. De ontwikkeling van hoofdrekenstrategieën raken de kinderen vanaf een zeker moment ook steeds verder ontwikkeld met de meer gestandaardiseerde strategieën van kolomsgewijze en cijferende rekenen. De kinderen medio groep 6 bij de som 325 - 249 naast de genoemde hoofdrekenstrategieën ook de kolomsgewijze aanpak:

$$325 - 249 = \underline{\quad}$$

$$\begin{array}{r} 325 \\ -249 \\ \hline 100 \\ -20 \\ -9 \\ \hline 76 \end{array}$$

Kenmerkend voor de wijze waarop het kolomsgewijze rekenen geïntroduceerd wordt, is dat dit voor de kinderen niet zoveel anders is dan hoofdrekenen. Deze aanpak ligt voor hen vanzelfsprekend in het verlengde van het hoofdrekenen, in het bijzonder het splitsende rekenen. In die zin kan deze standaardprocedure opgevat worden als een verdere uitkristallisering en abstrahering van het hoofdrekenen – een manier van rekenen die in het verdere programma naast het hoofdrekenen met een zekere regelmaat aan de orde komt.

Kenmerkend is verder de cruciale eigen inbreng van de kinderen bij het leren hoofdrekenen. Onder leiding van de onderwijsgenoten krijgen ze gelegenheid om zich, binnen zekere grenzen, de verschillende soorten rekenstrategieën in samenspraak met de medeleerlingen eigen te maken. Daardoor kunnen ze een eigen repertoire aan strategieën opbouwen, met een eigen reikwijdte, een eigen vorm van flexibiliteit, en leren ze om zelf te beslissen wanneer wel en niet gebruik wordt gemaakt van passende hulpnotaties.

Hoofdrekenen in historisch perspectief

Aan hoofdrekenen is, historisch gezien, niet altijd evenveel waarde toegekend. Er waren tijden dat het hoegenaamd geen rol speelde in het programma van het basisonderwijs. Dat geldt in het bijzonder voor de periode vóór 1850, toen het voornamelijk cijferen was dat de klok sloeg. In die tijd was er voor hoofdrekenen alleen aandacht in de zin van het uit het hoofd leren van de optel-, aftrek-, vermenigvuldig- en deeltafels, veelal via mechanisch inoefenen. Tegen het einde van de 19^e eeuw trad onder invloed van de wiskundige en vakdidacticus Versluys een eerste kentering op. Hij interpreteerde hoofdrekenen veeleer in de zin zoals in het voorgaande getypeerd: niet zozeer de basisfeiten en het daarmee gepaard gaande inprenten viel eronder, maar veel meer het handig werken met getallen, gebruik makend van allerlei getalrelaties en rekeneigenschappen. Hoofdrekenen, aldus Versluys, onderscheidt zich ook van cijferen door de flexibiliteit waarmee de rekenhandelingen gepaard gaan. Aanvankelijk leidde deze opvatting in de 20^e eeuw tot rekenmethoden waarin hoofdrekenen naast cijferen een ruime plaats kreeg toebedeeld.

Een voorbeeld uit klas 4, afkomstig uit de methode "Geef Acht!" staat hieronder afgebeeld.

HOOFDREKENEN

- | | | | |
|--------------|-----------|-----------|-----------------------------|
| 100 = 2 × .. | 100 : 2 = | 80 + 60 = | $\frac{1}{2}$ deel van 18 = |
| 100 = 4 × .. | 300 : 2 = | 70 + 40 = | $\frac{1}{4}$ „ „ 30 = |
| 200 = 4 × .. | 500 : 2 = | 90 + 80 = | $\frac{1}{2}$ „ „ 27 = |
| 200 = 8 × .. | 700 : 2 = | 60 + 90 = | $\frac{3}{4}$ „ „ 28 = |
| 400 = 8 × .. | 900 : 2 = | 80 + 70 = | $\frac{1}{4}$ „ „ 24 = |
- | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| 2 × 25 = | 4 × 25 = | 6 × 25 = | 8 × 25 = | 10 × 25 = |
| 3 × 25 = | 5 × 25 = | 7 × 25 = | 9 × 25 = | 11 × 25 = |
| 100 - 15 = | 100 - 35 = | 100 - 45 = | 100 - 75 = | 100 - 85 = |
| 95 - 40 = | 85 - 45 = | 73 - 42 = | 68 - 27 = | 49 - 25 = |
- | | |
|---------------------------------|---------------|
| 100 weken = 100 × 7 dagen | = .. dagen |
| 100 stuiver = 100 × 5 ct. | = .. centen |
| 100 uren = 100 × 60 minuten | = .. minuten |
| 100 doz. potl. = 100 × 12 potl. | = .. potloden |
| 100 kilo = 100 × 2 pond | = .. pond |

In sommige van deze methoden werd het cijferen los van het hoofdrekenen als een op zichzelf staande rekenwijze opgebouwd, maar er waren ook methoden waarin dit in nauwe samenhang met het hoofdrekenen gebeurde. Ook in de methoden van vlak na de tweede wereldoorlog is deze tweesporige benadering te vinden. Later verdween zij echter weer. Onder invloed van een sterke tendens tot individualisering werd het rekenonderwijs meer en meer een individueel-papieren aangelegenheid waarin cijferen centraal stond. Geleidelijk aan kwam daar weer verandering in, onder andere onder invloed van enkele vernieuwde methoden en veel bekeken schooltelevisieprogramma's.⁵ Hierin werd onder meer aandacht besteed aan het inzichtelijk onderbouwen van rekeneigenschappen, gevarieerd oefenen en hoofdrekenen in spel- en puzzelvorm. De nadruk lag echter vooral op het handige, gevarieerde hoofdrekenen (ook wel eigenschapsrekenen of handig rekenen genoemd), en minder op het meer basale rijgende en splitsende hoofdrekenen. Pas met de nadere uitwerking van de realistische onderwijsbenadering in de jaren tachtig en negentig verbreedde de opvatting over hoofdrekenen zich verder in de richting zoals eerder beschreven. Daarmee samenhangend werd aan hoofdrekenen een steeds groter belang toegekend.



Met de grootschalige invoering van de rekenmachine wordt aan het cijferend rekenen steeds minder belang toegekend – een ontwikkeling waarvan het einde nog niet in zicht lijkt. Deze opvatting over plaats en aard van hoofdrekenen lijkt nu definitief ingang gevonden te hebben. Bij een recente enquête⁶ onder meer dan tweehonderd rekendeskundigen

bleek een ruime meerderheid haar te onderschrijven. Tevens sprak driekwart van de ondervraagden zich uit voor een programma waarin hoofdrekenen, mits systematisch uitgewerkt in een netwerk van leerlijnen, de ‘stam’ van het reken-wiskundeonderwijs vormt. Kolomsgewijs rekenen en cijferen zijn daarvan dan een belangrijke ‘vertakking’.

Rekenen tot honderd

Binnen het getalgebied tot honderd leren de kinderen het hoofdrekenen in z'n meest elementaire vorm kennen – eerst bij optellen en aftrekken, later ook bij vermenigvuldigen en delen. Zoals in de onderbouwbrochure beschreven, wordt de basis daarbij voor een belangrijk deel gevormd door de verwerving van een goed begrip van de getallen als zodanig: van het tientallige patroon van de telrij, de verschillende reële betekenissen der getallen, hun globale positie op de getallenlijn en het gevarieerde tellen met sprongen. In de rekenhandelingen die daarbij worden verricht, liggen de vier hoofdbewerkingen in principe reeds besloten. Mede op basis van deze getalverkenning komt vervolgens het optellen en aftrekken aan de orde. In de brochure voor de onderbouw is uitvoerig beschreven hoe de kinderen daarbij geleidelijk aan vertrouwd raken met een eerste basale oplossingsstrategie: de *rijgaanpak*. Daarbij blijft het eerste getal intact en wordt het tweede in gedeelten toegevoegd dan wel eraf gehaald. De lege getallenlijn fungeert hier als centraal model waaraan de kinderen ook op mentaal niveau nog de nodige steun kunnen onttelen ('denk nog eens aan de getallenlijn ...').

Als de kinderen voldoende vertrouwd zijn met deze rijgaanpak en het inzicht in de decimale structuur van de getallen heeft zich eveneens verder verdiept, wordt de *splitsaanpak* nader verkend: de aanpak waarbij beide getallen 'opengebroken' en in gedeeltes samengevoegd dan wel van elkaar afgehaald worden. Dit vindt in de laatste periode van groep 4 of de eerste periode van groep 5 plaats, waarbij geldt of ander structuurmateriaal fungeert om de handelingen te onderbouwen. Dit gebeurt speciaal ook met het oog op het ontmaskeren van de bekende fout van het verkeerd splitsen zoals in de volgende opgave.

$$\begin{array}{r} 80 - 40 = 40 \\ 7 - 3 = 4 \\ 40 + 4 = 44 \end{array}$$

In een klassikaal-mondelinge activiteit wordt de situatie geconcretiseerd met geld (je hebt 83 euro en je wilt iets kopen van 47 euro) en wordt de onjuistheid van deze aanpak aan de kaak gesteld. Besproken wordt waarom deze aanpak niet correct is. Verschillende kinderen doen daarbij uitspraken als:

"Je hebt helemaal geen 7 losse euro's. Je hebt er 3, en daar moet je die 7 vanaf halen."

"Ja, precies. Dan kun je er eerst die 3 afhalen en dan moet je er nog 4 van de tientjes afhalen."

Op basis van de gezamenlijke doordenking van dergelijke uitspraken komen enkele manieren naar voren om het splitsen wel op een verantwoorde manier uit te voeren:

$$\begin{array}{ll} 80 - 40 = 40 & \text{of} & 80 - 40 = 40 \\ 40 + 3 = 43 & & 3 - 7 = -4 \text{ (4 tekort)} \\ 43 - 7 = 36 & & 40 - 4 = 36 \end{array}$$

In de loop van groep 5 komt ook een derde categorie aanpakken nader aan bod die door sommige kinderen al veel eerder zijn opgepikt: de *variëeraanpakken*. Dit geldt bijvoorbeeld voor de aanvulstrategie van het aftrekken. Betaalsituaties (je hebt 80 euro bij je, en je koopt iets van 67 euro) worden benut om deze strategie nader bewust te maken en te onderbouwen.

De lege getallenlijn en notaties in rekentaal (op verschillende niveaus te beschrijven. Op soortgelijke manier komen andere variëeraanpakken, gebruik van de inverse-relatie transformeren met een zekere regelmaat aan. Het resultaat van dit alles is dat de kinderen bedrevener raken in het vlot en flexibel uit allerlei opgaven tot honderd. Ze krijgen daarmee de beschikking over een repertoire aan hoofdrekenstrategieën waaruit al naar gelang geput kan worden. Uiteraard komt niet iedereen even ver mee: niet iedereen ontwikkelt een repertoire, en niet iedereen ziet even snel een strategie zich bij uitstek leent voor het handelen van een bepaalde opgave. Vandaar ook dat van een kladdblaadje om nog even een tussenantwoord te noteren, voor sommige kinderen een belangrijke steun blijft. Maar zeker als in de groep 6 dit gebied nog de nodige aandacht vorm van korte oefenlesjes, kunnen ook de leerlingen hier heel ver mee komen, en aldus een idee krijgen wat hoofdrekenen in wezen is. In samenhang met dit alles ontwikkelt zich ook het automatiseren van de rekenen. Van de kinderen in het steeds sneller en beter oplossen van opgaven uit het gebied van de honderd. In de onderbouwbrochure is beschreven hoe grote lijnen in z'n werk gaat. Ook hier is te zien dat de kinderen steeds flexibeler in hun oplossingsstrategie. Het automatiseringsproces is immers niet zo kwestie van blind inprenten, maar van het splitsen uitrekenen van de sommen. Zo volgen kinderen van groep 5 vaak de volgende rekenstapen:

Eind groep 5 kunnen honderd vlot en met toepassingssituatie tussentijd notaties.
Eind groep 6 kunnen hoofdrekenen uitvoeren.

in ruime meerderheid haar te onderschrijven. sprak driekwart van de ondervraagden zich uit voor grammata waarin hoofdrekennen, mits systematisch rkt in een netwerk van leerlijnen, de 'stam' van het iskandeonderwijs vormt. Kolomsgewijs rekenen en zijn daarvan dan een belangrijke 'vertakking'.

erd

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

klassikaal-mondelinge activiteit wordt de situatie
retiseerd met geld (je hebt 83 euro en je wilt iets
van 47 euro) en wordt de onjuistheid van deze
aan de kaak gesteld. Besproken wordt waarom
npak niet correct is. Verschillende kinderen doen
uitspraken als:

hebt helemaal geen 7 losse euro's. Je hebt er 3, en daar
t je die 7 vanaf halen.”
precies. Dan kun je er eerst die 3 afhalen en dan moet
nog 4 van de tientjes afhalen.”

s van de gezamenlijke doordenking van dergelijke
ven komen enkele manieren naar voren om het
i wel op een verantwoorde manier uit te voeren:

$$\begin{array}{rcl} 40 & - & 40 \\ 3 & = & 43 \\ 7 & = & 36 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \text{of} & & 80 - 40 = 40 \\ 3 & - & 7 = -4 \text{ (tekort)} \\ 40 & - & 4 = 36 \end{array}$$

rop van groep 5 komt ook een derde categorie ken nader aan bod die door sommige kinderen al rder zijn opgepikt: de *varia-aanpakken*. Dit geldt eeld voor de aanvulstrategie van het aftrekken. ituaties (je hebt 80 euro bij je, en je koopt iets van) worden benut om deze strategie nader bewust te en te onderbouwen.



De lege getallenlijn en notaties in rekentaal dienen om haar op verschillende niveaus te beschrijven. Op een soortgelijke manier komen andere varia-aanpakken als compenseren, gebruik van de inverse-relatie en transformeren met een zekere regelmaat aan bod. Het resultaat van dit alles is dat de kinderen steeds bedrevenener raken in het vlot en flexibel uitrekenen van allerlei opgaven tot honderd. Ze krijgen daarbij steeds meer de beschikking over een repertoire aan efficiënte hoofdrekenstrategieën waaruit al naar gelang de opgave geput kan worden. Uiteraard komt niet ieder kind daar even ver mee; niet iedereen ontwikkelt een even breed repertoire, en niet iedereen ziet even snel wat voor strategie zich bij uitstek leent voor het handig uitrekenen van een bepaalde opgave. Vandaar ook dat het gebruik van een kladblaadje om nog even een tussenstap of tussenantwoord te noteren, voor sommige kinderen een belangrijke steun blijft. Maar zeker als in de loop van groep 6 dit gebied nog de nodige aandacht krijgt in de vorm van korte oefenlesjes, kunnen ook de zwakkere leerlingen hier heel ver mee komen, en aldus steeds meer een idee krijgen wat hoofdrekenen in wezen inhoudt. In samenhang met dit alles ontwikkelt zich de vaardigheid van de kinderen in het steeds sneller en 'automatischer' oplossen van opgaven uit het gebied van de tafels. In de onderbouwbrochure is beschreven hoe dit proces in grote lijnen in z'n werk gaat. Ook hier is te zien dat de kinderen steeds flexibeler in hun oplossingsgedrag worden. Het automatiseringsproces is immers niet zozeer een kwestie van blind inprenten, maar van het steeds verkort uitrekenen van de sommen. Zo volgen kinderen tegen het einde van groep 5 vaak de volgende rekenstrategieën:

$\geq 6 \times 8 =$
 "Dan doe ik 5×8 is 40. Die weet ik al. Dan nog 8 erbij is 48."
 $\geq 7 \times 9 =$
 "Die draai ik om; want 9×7 is makkelijker; dat is $70 - 7$ is 63."
 $\geq 8 \times 7 =$
 "Eerst 4×7 is 28. En dan 28 en 28 is 56."

Het verwerven van parate kennis op dit gebied wordt ook gestimuleerd via 'omgekeerde' oefeningen. De leraar noemt bijvoorbeeld een getal (48, 35, 61, ...) en de kinderen bedenken welke vermenigvuldigingen daarbij passen. Vermenigvuldigingen die de tafels te boven gaan, komen zo ook vrij snel in het vizier. Bij 48 bijvoorbeeld passen niet alleen 6×8 en 8×6 , maar ook 2×24 , 4×12 , en dergelijke. Bovendien groeit op deze wijze het besef dat er ook getallen zijn (zoals 61) die in geen enkele tafel passen. Op een later tijdstip kan het onderzoek naar zulke getallen (priemgetallen) op een meer systematische wijze worden voortgezet.

Het resultaat van dit alles is dat er niet alleen steeds meer tafelsommen worden geautomatiseerd en later gememoriseerd, maar ook dat de kinderen vertrouwd raken met belangrijke vermenigvuldigstrategieën (gebaseerd op de verdeel- en verwissel-eigenschap) die voor de hele verdere rekenontwikkeling van grote waarde zijn.

In de loop van groep 5 en in groep 6 komt de nadruk steeds meer op het rekenen tot duizend en daarboven te liggen. Het rekenen tot honderd komt nog wel regelmatig aan de orde, maar dan vooral in de vorm van korte, gevarieerde oefenlesjes zoals sommendicties, rekenraadsels, tempo-oefeningen rond de tafels en rekenspelletjes, en zo meer.

Eind groep 5 kunnen de leerlingen alle optellingen en aftrekkingen tot honderd vlot en met inzicht uit het hoofd uitrekenen, zowel kaal als in toepassingssituaties. Desgewenst maken ze daarbij nog gebruik van tussennotaties.

Eind groep 6 kunnen de leerlingen deze bewerkingen geheel uit het hoofd uitvoeren.



Eind groep 5 hebben de leerlingen alle vermenigvuldigingen uit de tafels van 2 tot en met 10 geautomatiseerd.
Medio groep 6 zijn al deze opgaven gememoriseerd.

De kinderen krijgen ruim de gelegenheid de geschetste drieslag van rijgend, splitsend en gevarieerd hoofdrekenen te doorlopen. Daarbij raken ze eerst grondig vertrouwd met de meer basale vormen van hoofdrekenen voordat een 'hogere' vorm verder wordt verkend. Mede daardoor zijn ze zich ervan bewust dat ze in geval van twijfel over een aanpak altijd kunnen terugvallen op het rijgen als meest veilige, basale strategie.

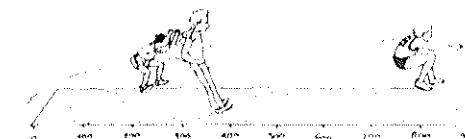
Door de oefeningen in de periode na deze verkenning steeds meer een speels, gevarieerd karakter te geven, wordt gestimuleerd dat de kinderen hun natuurlijke flexibiliteit steeds verder ontwikkelen, zodat ze steeds gevoeliger worden voor het kiezen voor een passende strategie.

Voor wat betreft de tafels concentreren dergelijke lesjes zich vooral op de allermoeilijkste opgaven (zoals 7×8 , 8×6 , 7×7 , 6×8 , 7×6) en op de vraag welke handige strategieën je achter de hand hebt als je een opgave nog niet weet. In de uitwisseling en het beoefenen van de strategieën die bij het beantwoorden van deze vraag naar voren komen (zoals omkeren, gebruik van $5 \times$ en $10 \times$ als steunpunt, handig verdubbelen) ligt de sleutel tot verdere automatisering.

Optellen en aftrekken tot duizend

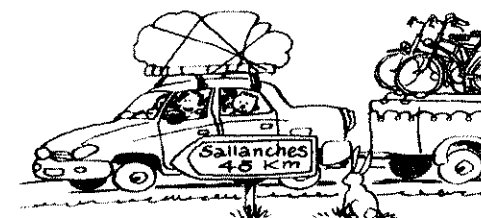
De leerlijn rond het optellen en aftrekken tot duizend vertoont in een aantal opzichten sterke overeenkomst met die van het optellen en aftrekken tot honderd. Dit betreft in de eerste plaats het feit dat het getalgebied als zodanig eerst grondig wordt verkend. Verschillende aspecten van de getallen komen daarbij weer aan bod, waarbij wordt voortgebouwd op de kennis die de kinderen al hebben verworven binnen het gebied tot honderd. Er hoeft dus niet weer 'op nul' begonnen te worden. Integendeel, het is

juist door de getallenrij tot duizend op te vatten als een uitbreiding van de getallenrij tot honderd dat de kinderen de structuur daarvan goed leren doorzien. En het is juist door het positioneren van getallen tot duizend als een uitbreiding van het positioneren tot honderd te zien, dat het inzicht in de globale positie der getallen wordt gestimuleerd. Net als binnen het gebied tot honderd worden daartoe onder meer contexten uit de sfeer van het meten gebruikt:



- > Hoever is het als je 2 m 45 springt?
- En als iemand 3 m 79 springt? En 7 m 98?
- Past die laatste sprong in het eigen lokaal?

Hebben de getallen eenmaal voldoende inhoud betekenis gekregen, dan doorlopen de kinderen drieslag rijgend-splitsend-gevarieerd hoofdrekenen vervolgens op een soortgelijke manier als bij het en aftrekken tot honderd. Begonnen wordt met uitvoerige verkenning van rijgaanpakken, waarbij getallenlijn weer als centraal model fungeert. Met het in gedachten uitvoeren van de handelingen op getallenlijn en het beschrijven daarvan in termen van rekentaal komt al gauw naar voren als een moge om het handelen te ondersteunen.



- > Robin gaat met z'n familie op vakantie naar Fran Laat in de middag ziet hij dat de dagteller van de a 356 staat. Op een bord langs de weg ziet hij dat h nog 48 km is naar het stadje waar ze gaan kampe Hoeveel km rijden ze die dag totaal?

Zo doen zich in de klas bij bovenstaand context de volgende aanpakken voor:

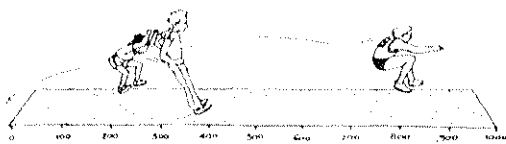
zeldigingen uit de tafels
 zerd.

chteste drieslag van
 doorlopen.
 meer basale vormen
 rder wordt verkend.
 n geval van twijfel over
 en als meest veilige.

nnig steeds meer een
 nuleerd dat de kinderen
 kelen, zodat ze steeds
 sende strategie.
 se lesjes zich vooral op
 ' $\times 7$, 6×8 , 7×6) en op
 hand hebt als je een
 beoefenen van de
 raag naar voren komen
 anpunt, handig
 isering.

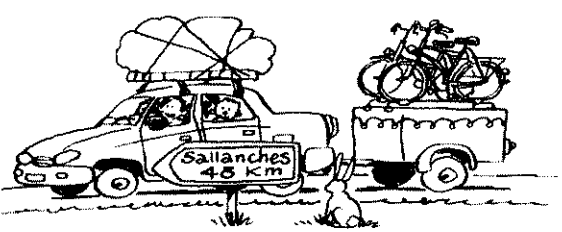
duizend

de getallenrij tot duizend op te vatten als een
 ig van de getallenrij tot honderd dat de kinderen
 ur daarvan goed leren doorzien. En het is juist
 ositioneren van getallen tot duizend als een
 ig van het positioneren tot honderd te zien, dat
 it in de globale positie der getallen wordt
 erd. Net als binnen het gebied tot honderd
 aartoe onder meer contexten uit de sfeer van het
 bruikt:



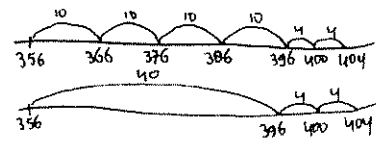
- > Hoever is het als je 2 m 45 springt?
- En als iemand 3 m 79 springt? En 7 m 98?
- Past die laatste sprong in het eigen lokaal?

Hebben de getallen eenmaal voldoende inhoud en betekenis gekregen, dan doorlopen de kinderen de drieslag rijgend-splitsend-gevarieerd hoofdrekenen vervolgens op een soortgelijke manier als bij het optellen en aftrekken tot honderd. Begonnen wordt met een uitvoerige verkenning van rijgaanpakken, waarbij de lege getallenlijn weer als centraal model fungeert. Maar ook het in gedachten uitvoeren van de handelingen op de lege getallenlijn en het beschrijven daarvan in termen van rekentaal komt algaauw naar voren als een mogelijkheid om het handelen te ondersteunen.



- > Robin gaat met z'n familie op vakantie naar Frankrijk. Laat in de middag ziet hij dat de dagteller van de auto op 356 staat. Op een bord langs de weg ziet hij dat het dan nog 48 km is naar het stadje waar ze gaan kamperen. Hoeveel km rijden ze die dag totaal?

Zo doen zich in de klas bij bovenstaand contextprobleem de volgende aanpakken voor:



rijgaanpak op de lege getallenlijn, in verschillende graden van verkorting

$356 + 40 = 396$	$356 = 300 + 56$
$396 + 4 = 400$	$50 + 40 = 90$
$400 + 4 = 404$	$6 + 8 = 14$
	$300 + 90 + 14 = 404$

<i>rijgaanpak genoteerd in rekentaal</i>	<i>splitsaanpak, eveneens genoteerd in rekentaal</i>
--	--

In de nabespreking komt het accent in eerste instantie vooral op de *rijgaanpakken* te liggen, en op de verschillende niveaus waarop deze kunnen worden uitgevoerd. Via de gezamenlijke doordenking daarvan worden de kinderen zich nader bewust van het feit dat het rekenen boven de honderd in wezen niet zoveel verschilt van het rekenen onder de honderd. Nieuw hierbij is vooral dat de 'grens' van honderd overschreden wordt. De kinderen worden er bewust van gemaakt hoe je die 'grensoverschrijding' op een efficiënte manier kunt voltrekken. Het vlot kunnen verder tellen en terugtellen met sprongen van 10 en 100, geconcretiseerd in de spaarsituatie (steeds een tientje of honderdje sparen, respectievelijk uitgeven), speelt hierbij net als bij het optellen en aftrekken tot honderd een belangrijke voorwaardelijke rol. Naast rijgaanpakken doen zich in de klas gewoonlijk ook al andere werkwijzen voor. De *splitsaanpak* van hierboven is daarvan een voorbeeld. En ook het compenseren ($356 + 48$ via $356 + 50 - 2$) komt soms voor. De kinderen kennen dergelijke aanpakken immers al uit het gebied tot honderd, en zijn soms geneigd deze ook in het gebied boven de honderd al snel te gaan hanteren. Uiteraard signaleert de leraar dergelijke werkwijzen, maar hij vestigt er nog niet nadrukkelijk de aandacht op.



Het streven is immers eerst en vooral om alle kinderen vertrouwd te maken met het rijgen als meest basale aanpak. In de tweede helft van groep 5, als het inzicht in de decimale structuur der getallen zich verder heeft verdiept, komt het splitsen meer in de schijnwerpers te staan. Daarbij worden de handelingen weer onderbouwd met structuurmateriaal als geld en beschreven in termen van rekentaal. Zijn de kinderen ook daarmee voldoende bekend, dan komen *varia-aanpakken* steeds meer onder de aandacht. Bijvoorbeeld: het aanvullen als handige aftrekstrategie in het geval de getallen dicht bij elkaar liggen ($302 - 297$ en dergelijke) en het compenseren in het geval de tweede term een bijna rond getal is ($620 - 99$ en dergelijke). Zo breidt het repertoire aan efficiënte aanpakken zich steeds verder uit en groeit het besef van wat hoofdrekenen in z'n essentie inhoudt: op basis van het inzicht in de getallen en van het begrip van de verschillende soorten strategieën kiezen voor een toepasselijke aanpak, en op basis van de vaardigheid in het uitvoeren van deze strategieën vlot en handig tot een oplossing komen. Er is echter ook een belangrijk verschil met het rekenen tot honderd. Naarmate de getallen groter en onoverzichtelijker worden, doet zich meer de behoefte gevoelen aan een gestandaardiseerde vorm van rekenen – een vorm waarbij de getallen op een vaste manier volgens vaste stappen ‘bewerkt’ worden. Daarom wordt in de eerste helft van groep 6 de kolomsgewijze rekenaanpak als een uitvloeisel van de splitsaanpak geïntroduceerd, later gevolgd door de cijferaanpak. In de loop van de tweede helft van groep 6, als ook de getallen boven de duizend indringend zijn verkend en de

kinderen nader vertrouwd raken met de cijferaanpak, wordt het rekenen tot duizend op velerlei manieren geoefend. Dat kan in de vorm van rekendictees (eenvoudigere sommen), geldsituaties en andere toepassingen, analogierijtjes, en ook in de vorm van oefeningen waarbij het erop aankomt onderscheid te maken tussen opgaven die zich meer voor een hoofdrekenaanpak lenen, en opgaven waarbij de kolomsgewijze/cijferaanpak meer in aanmerking komt.

> Reken uit. Gebruik een hoofdrekenmanier, of een manier ‘onder elkaar’.

$345 + 345 =$	$302 - 298 =$
$236 + 670 =$	$1000 - 895 =$
$2306 + 698 =$	$247 - 837 =$
$1250 + 1250 =$	$5000 - 4950 =$
$1876 + 3459 =$	$2136 - 1478 =$

De eerste optelling wordt door (vrijwel) alle kinderen als hoofdrekenopgave opgevat. De tweede wordt door sommige kinderen hoofdrekenend en door andere cijferend uitgerekend. Bij de derde en vijfde opgave wordt veelal voor de kolomsgewijze of cijferaanpak gekozen. Maar bij de vierde daarentegen gaan veel kinderen weer hoofdrekenen. Een soortgelijk gevarieerd aanpakgedrag doet zich bij het aftrekken voor. In een nabespreking komen dergelijke verschillen in aanpak naar voren, waarbij besproken wordt waarom bijvoorbeeld bij een opgave als $5000 - 4950$ veelal voor een hoofdrekenaanpak is gekozen, terwijl het toch twee hele grote getallen betreft ...

3

Eind groep 5 kunnen de leerlingen optellingen en aftrekkingen tot duizend rijgend oplossen, al dan niet ondersteund met de lege getallenlijn.
Eind groep 6 zijn ze in staat optellingen en aftrekkingen tot duizend (en beperkt daarboven) op te lossen met rijg-, splits- en varia-aanpakken. Ook kunnen ze daarbij verstandig kiezen tussen een hoofdrekenaanpak of een kolomsgewijze/cijferaanpak.

Het voor groep 5 g
kinderen zijn die a
en varia-aanpakke
dat de rijgaanpak i
met inzicht gehant
Het voor groep 6 g
kinderen ruim de g
rijgend, splitsend e
daarbij op toe dat e
geleidelijk aan op e
uitbreiden. Daarbij
gaten te houden en
te doorlopen; en at
opgaven en contex
kinderen ruim gele
niveaus en mate van
duizend vervaagt d

Vermer

In de loop van de tweede helft van groep 5
kinderen zich op handige aanpakken voor g
vermenigvuldigingen als 12×6 , 5×24 , $7 \times$
Op dat moment zijn ze bij het optellen en a
duizend al een eind gevorderd, zodat ze in
grondig vertrouwd zijn met de rijgaanpak t
gebied, terwijl ook het splitsen al is verkem
deze periode het automatiseringsproces rom
vermenigvuldiging al een eind gevorderd. I
hierbij is ontwikkeld (feitenkennis, maar oc
belangrijke vermenigvuldigstrategieën geb
‘verwisselen’ en ‘verdelen’) vormt samen i
van het optellen en aftrekken tot duizend de
verkenning van grotere vermenigvuldigings
Het vertrekpunt wordt gevormd door probl

> Zeilschip ‘De Mondriaan’ maakt een reis om
In het magazijn staan maar liefst 6 dozen ko
elke doos 24 pakken koffie.
Hoeveel pakken zijn dat bij elkaar?



nader vertrouwd raken met de cijferaanpak, en rekenen tot duizend op velerlei manieren (d. Dat kan in de vorm van rekendietees (digere sommen), geldsituaties en andere dingen, analogierijtjes, en ook in de vorm van gen waarbij het erop aankomt onderscheid te tussen opgaven die zich meer voor een kenaanpak lenen, en opgaven waarbij de gewijze/cijferaanpak meer in aanmerking komt.

> Reken mt. Gebruik een hoofdrekenmanier, of een manier 'onder elkaar'.

$$\begin{array}{ll} 345 + 345 = & 302 - 298 = \\ 236 + 670 = & 1000 - 895 = \\ 2306 + 698 = & 247 - 837 = \\ 1250 + 1250 = & 5000 - 4950 = \\ 1876 + 3459 = & 2136 - 1478 = \end{array}$$

te optelling wordt door (vrijwel) alle kinderen als kenopgave opgevat. De tweede wordt door te kinderen hoofdrekenend en door andere cijferend end. Bij de derde en vijfde opgave wordt veelal kolomsgewijze of cijferaanpak gekozen. Maar bij te daarentegen gaan veel kinderen weer ken. Een soortgelijk gevarieerd aanpakgedrag h bij het aftrekken voor. In een nabespreking jergelijke verschillen in aanpak naar voren, waarbij en wordt waarom bijvoorbeeld bij een opgave als 4950 veelal voor een hoofdrekenaanpak is gekozen, et toch twee hele grote getallen betreft ...

en aftrekkingen tot
und met de lege

rekkingen tot duizend (en
ts- en varia-aanpakken.
en een hoofdrekenaanpak

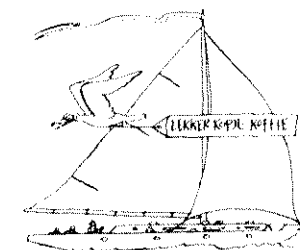
Het voor groep 5 gestelde doel betekent uiteraard niet dat er geen kinderen zijn die al andere werkwijzen gebruiken, zoals de splitsaanpak en varia-aanpakken als aanvullen (+) en compenseren (+ en -). Maar wel dat de rijgaanpak als een basisstrategie fungeert die door alle kinderen met inzicht gehanteerd kan worden.

Het voor groep 6 geformuleerde doel wordt bevorderd indien de kinderen ruim de gelegenheid krijgen om de beschreven drieslag van rijgend, splitsend en gevarieerd rekenen te doorlopen. De leraar ziet er daarbij op toe dat de kinderen hun repertoire aan hoofdrekenstrategieën geleidelijk aan op een aan het individuele kind aangepaste manier verder uitbreiden. Daarbij komt het er enerzijds op aan de grote lijn goed in de gaten te houden en de leerlijn op macro-niveau met een zekere strakheid te doorlopen; en anderzijds om op micro-niveau, gegeven allerlei kale opgaven en contextproblemen, de teugels volop te laten vieren en de kinderen ruim gelegenheid te geven strategieën van verschillende niveaus en mate van verkorthed te laten construeren. De bovengrens van duizend vervaagt daarbij allengs.

Vermenigvuldigen met grotere getallen

In de loop van de tweede helft van groep 5 oriënteren de kinderen zich op handige aanpakken voor grotere vermenigvuldigingen als 12×6 , 5×24 , 7×80 en 6×48 . Op dat moment zijn ze bij het optellen en aftrekken tot duizend al een eind gevorderd, zodat ze in ieder geval grondig vertrouwd zijn met de rijgaanpak binnen dit gebied, terwijl ook het splitsen al is verkend. Verder is in deze periode het automatiseringsproces rond de tafels van vermenigvuldiging al een eind gevorderd. De kennis die hierbij is ontwikkeld (feitenkennis, maar ook inzicht in belangrijke vermenigvuldigstrategieën gebaseerd op 'verwisselen' en 'verdelen') vormt samen met de kennis van het optellen en aftrekken tot duizend de basis voor de verkenning van grotere vermenigvuldigingen. Het vertrekpunt wordt gevormd door problemen als:

- > Zeilschip 'De Mondriaan' maakt een reis om de wereld. In het magazijn staan maar liefst 6 dozen koffie, met in elke doos 24 pakken koffie. Hoeveel pakken zijn dat bij elkaar?



Het zijn vooral aanpakken in de sfeer van *herhaald optellen*, vaak ondersteund met eigen informele notaties, die kinderen in zulke situaties hanteren. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{|c|c|} \hline 24 & 24 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 24 & 24 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 24 & 24 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 24 & 24 \\ \hline \end{array} \\ \hline 24 & 24 & 24 & 24 \end{array} \begin{array}{l}) 96 \\) 96 \\) 48 \end{array} \begin{array}{l} 96 + 48 = 144 \\ 48 + 48 = 96 \\ 96 + 24 = 120 \\ 120 + 24 = 144 \end{array} \begin{array}{l} 2 \times 24 = 48 \\ 3 \times 24 = 72 \\ 6 \times 24 = 144 \end{array}$$



Bij al deze aanpakken gaat het in wezen om *rijgen*: het vermenigvuldigtal wordt als geheel opgevat en een aantal keren samengenomen, overeenkomstig de wijze waarop dat aanvankelijk bij het optellen gebeurt.

Als de kinderen de nodige ervaring met zulke situaties hebben opgedaan en ook de vermenigvuldigstructuur daarvan nader bewust gemaakt is, worden dergelijke aanpakken vrij snel als omslachtig ervaren. Daarom komt de aandacht na enige tijd op *splitsaanpakken* te liggen die door sommige kinderen allang op eigen kracht zijn uitgevonden – aanpakken waarbij het vermenigvuldigtal niet langer als geheel wordt opgevat, maar wordt gesplitst in tientallen en eenheden.

Het zijn met name geldsituaties die zich bij uitstek lenen om deze aanpak uit te lokken en bewust te maken.

- > Cindy gaat met een groepje van zes vriendinnen een weekend naar een ponykamp.
- Per persoon moeten ze 48 euro betalen.
- Hoeveel gaat dat in totaal kosten?



Een deel van de kinderen zal ook hier geneigd zijn om via herhaald optellen of verdubbelen tot een oplossing te komen, maar anderen zullen mede door de geldstructuur die in de opgave besloten ligt, met de splitsaanpak komen.

Deze kan in verschillende vormen uitgevoerd worden, zoals onderstaande voorbeelden aangeven.

$$\begin{array}{ll} 6 \times 20 = 120 & \text{of} & 6 \times 40 = 240 \\ 6 \times 20 = 120 & & 6 \times 8 = 48 \\ 6 \times 8 = 48 & & 240 + 48 = 288 \\ 120 + 120 + 48 = 288 & & \end{array}$$

Via de onderlinge uitwisseling en bespreking van rekenmanieren wordt deze op de verdeel eigenschap gebaseerde splitsaanpak ook onder de aandacht van de andere kinderen gebracht en aanschouwelijk gemaakt aan de hand van een bordtekening of namaakgeld.

In deze voorstellingswijze zijn enerzijds de werkwijzen in de sfeer van herhaald optellen herkenbaar. Maar anderzijds kunnen ook de verschillende vormen van splitsen er inzichtelijk mee worden gemaakt. Zo kunnen de kinderen voor zich zien hoe je '6 keer 48' kunt onderverdelen in '6 keer 40' (ofwel 6 keer 4 tientjes) en nog '6 keer 8'. De verdeel eigenschap die de kinderen bij de tafels voor het eerst hebben leren gebruiken, krijgt hier dus een bredere toepassing.

Door ook vermenigvuldigsituaties met een andere grondstructuur erin te betrekken, wordt bereikt dat de splitsstrategie los komt van de concrete inbedding in de geldsituatie. Dit geldt met name voor situaties met een rechthoekstructuur (een tegelpad van 6 rijen met 48 tegels) en situaties met een lijnstructuur (6 dagen per week een afstand van 48 km afleggen).

Bij dit alles speelt nog een andere belangrijke kwestie, namelijk die van de nulregel. De kinderen moeten zich bewust worden van het feit dat je een opgave als 6×40 handig kunt uitrekenen door '6 keer 4 met een nulletje erachter' te doen.

Voor sommige kinderen is dit een ervaringsgegeven dat al gauw de status van een regel krijgt. Maar wat daar precies achter zit, is voor vele kinderen niet zonder meer duidelijk. De geldcontext van hierboven leent zich bij uitstek ook om tot een eerste onderbouwing van deze regel te komen. In die situatie ligt het immers voor de hand om 6×40 op te vatten als '6 keer 4 tientjes' en dus als 24 tientjes, oftewel 240.

Maar daarmee is de kous niet af. Immers, 40×6 het eerste gezicht toch weer een ander verhaal, name door situaties met een rechthoekstructuur betrekken en daarin nog eens naar voren te laten dat 40×6 en 6×40 op hetzelfde neerkomen, dat kinderen zich realiseren dat je ook in een dergelijke situatie kunt uitgaan van '6 keer 4 groepjes van



Ook voor het latere delen met grotere getallen bewustmaking van groot belang.

Zijn de kinderen eenmaal grondig vertrouwd met splitsaanpak en het gebruik van de nulregel, dan wordt net als bij het optellen en aftrekken weer naar *varia-aanpakken* zoals die van het completeren het herhaald verdubbelen. Sommige kinderen dergelijke rekenwijzen al in een vroeg stadium, wat later – en dan vooral in gevallen waarin d

Eind groep 6 zijn de leerlingen een ééncijferig met een nul (zoals 25×7) kaal en in toetse splitsaanpak en de variatie zijn gesteld. Al naar gelang passende tussennotatie

in verschillende vormen uitgevoerd worden, erstaande voorbeelden aangeven.

$$\begin{array}{lcl} = 120 & \text{of} & 6 \times 40 = 240 \\ = 120 & & 6 \times 8 = 48 \\ 48 & & 240 + 48 = 288 \\ (20 + 48 = 288 \end{array}$$

derlinge uitwisseling en bespreking van ieren wordt deze op de verdeeieigenschap te splitsaanpak ook onder de aandacht van de nderen gebracht en aanschouwelijk gemaakt aan an een bordtekening of namaakgeld. iorstellingswijze zijn enerzijds de werkwijzen in an herhaald optellen herkenbaar. Maar s kunnen ook de verschillende vormen van 'inzichtelijk mee worden gemaakt. Zo kunnen en voor zich zien hoe je '6 keer 48' kunt elen in '6 keer 40' (ofwel 6 keer 4 tientjes) en er 8'. De verdeeieigenschap die de kinderen bij oor het eerst hebben leren gebruiken, krijgt hier edere toepassing.

vermenigvuldigsituaties met een andere ctuur erin te betrekken, wordt bereikt dat de egie los komt van de concrete inbedding in de ie. Dit geldt met name voor situaties met een structuur (een tegelpad van 6 rijen met 48 situaties met een lijnstructuur (6 dagen per afstand van 48 km afleggen).

is speelt nog een andere belangrijke kwestie, lie van de nulregel. De kinderen moeten zich orden van het feit dat je een opgave als 6×40 nt uitrekenen door '6 keer 4 met een nulletje e doen.

nige kinderen is dit een ervaringsgegeven dat status van een regel krijgt. Maar wat daar precies is voor vele kinderen niet zonder meer duidelijk. ntext van hierboven leent zich bij uitstek ook om ste onderbouwing van deze regel te komen. In die t het immers voor de hand om 6×40 op te vatten '4 tientjes' en dus als 24 tientjes, oftewel 240.



Maar daarmee is de kous niet af. Immers, 40×6 lijkt op het eerste gezicht toch weer een ander verhaal. Het is met name door situaties met een rechthoekstructuur erbij te betrekken en daarin nog eens naar voren te laten komen dat 40×6 en 6×40 op hetzelfde neerkomen, dat de kinderen zich realiseren dat je ook in een dergelijke situatie kunt uitgaan van '6 keer 4 groepjes van 10'.



Ook voor het latere delen met grotere getallen is deze bewustmaking van groot belang. Zijn de kinderen eenmaal grondig vertrouwd met de splitsaanpak en het gebruik van de nulregel daarbij, dan wordt net als bij het optellen en aftrekken weer verbreed naar *varia-aanpakken* zoals die van het compenseren en het herhaald verdubbelen. Sommige kinderen gebruiken dergelijke rekenwijzen al in een vroeg stadium, anderen wat later – en dan vooral in gevallen waarin de getallen zich er bij uitstek voor lenen.

$$\begin{array}{lcl} 6 \times 99 = ? & \text{of} & 8 \times 75 = ? \\ 6 \times 100 = 600 & & 2 \times 75 = 150 \\ 6 \times 1 = 6 & & 150 + 150 = 300 \\ 600 - 6 = 594 & & 300 + 300 = 600 \end{array}$$

Hier treedt dus weer een fase van flexibilisering in, waarbij de kinderen zich nader bewust worden van het feit dat er naast rijgen en splitsen nog andere handige strategieën zijn die soms heel efficiënt zijn in te zetten. Van belang is weer de onderbouwing van zulke strategieën: door uit te gaan van concrete situaties met een geldstructuur of een rechthoekstructuur wordt bereikt dat de kinderen ook echt begrijpen waarom je bijvoorbeeld 6×99 mag doen via '6 keer 100 min 6 keer 1'.

Net als bij het optellen en aftrekken vindt ook bij het vermenigvuldigen na verloop van tijd een verdere uitbreiding plaats in de richting van standaardprocedures: de kolomsgewijze aanpak wordt in de loop van groep 6 geïntroduceerd, later gevolgd door de cijferaanpak. Ook hier spruit de meer standaardmatige aanpak van het kolomsgewijze rekenen met in het verlengde die van het cijferend rekenen voort uit de 'stam' van het hoofdrekenen. Hier geldt eveneens dat de kinderen aan de ene kant een steeds breder repertoire aan hoofdrekenstrategieën verwerven, terwijl ze aan de andere kant steeds meer greep krijgen op de meer standaardmatige rekenwijzen van het kolomsgewijze en het cijferende rekenen.

4

Eind groep 6 zijn de leerlingen in staat grotere vermenigvuldigingen van een ééncijferig met een meercijferig getal (6×48 , 7×80 , 4×251 , 25×7) kaal en in toepassingssituaties op te lossen met behulp van de splitsaanpak en de varia-aanpak die in samenhang daarmee aan de orde zijn gesteld. Al naar gelang de opgave maken ze daarbij gebruik van passende tussennotaties.



Dit doel wordt bevorderd indien de leraar de kinderen op concreet niveau met behulp van geld of ander structuurmateriaal laat ervaren dat deze splitsstrategie in wezen op hetzelfde neerkomt als de rijgaanpakken in de sfeer van herhaald optellen waarvan het splitsen als een verkorting kan worden beschouwd. Door de contexten regelmatig te variëren wordt bereikt dat de kinderen steeds beter onderkennen in wat voor soort situaties je deze splitsaanpak allemaal kunt toepassen. Bijvoorbeeld:

- 6 keer per week 48 km naar het werk rijden
- 6 dozen met 48 pakjes boter
- 6 hoeken van 48 euro
- een boomgaard met 6 rijen van 48 appelbomen
- een modelautootje van 6 cm bij een schaal van 1 : 48

Mede als gevolg hiervan worden de kinderen zich meer en meer bewust van de mogelijkheid om los van de context voor een passende strategie te kiezen, ook in gevallen dat deze context uitnodigt tot een andere, omslachtigere aanpak.

Om de verwerving van de splitsstrategie verder toegankelijk te maken voor de kinderen, krijgen zij verder ruim gelegenheid om zich te oriënteren op de nulregel. Geldcontexten en rechthoekssituaties worden aangewend om ze bij opgaven als 6×40 inzicht te geven in het waarom achter redeneringen als 'ik doe 6 keer 4 met een nulletje erachter'.

Delen met kleinere en grotere getallen

Delen is de laatste hoofdbewerking die systematisch geëxploreerd wordt, al is de informele verkenning die daaraan in de lagere leerjaren voorafgaat, reeds een hele tijd gaande. Er is echter weinig reden om het delen in een vroeg stadium (groep 3 of 4) al een meer formele status te geven. In toepassingssituaties is het immers vooral via (op-)vermenigvuldigen dat deze operatie wordt uitgevoerd. Zoals in de onderbouwbrochure beschreven, kan het delen daarom een tijdlang een informele, sterk met vermenigvuldigen verbonden status houden. Als het dan zover is, ongeveer medio groep 5, kan de operatie 'gedeeld door' en het daarmee corresponderende deelteken in eerste instantie verbonden worden met

opdeelsituaties. Bijvoorbeeld: je hebt 18 eieren die in doosjes van 6 gedaan moeten worden; hoeveel doosjes heb je nodig? Door aan een dergelijke situatie de formele notatie $18 : 6$ te koppelen, krijgt het delen voor het eerst een meer op zichzelf staande betekenis in de zin van: hoeveel groepjes van 6 kun je uit 18 halen? Of korter nog: hoeveel keer past 6 in 18? Naderhand wordt deze betekenis ook betrokken op *verdeelsituaties*, zoals: je hebt 25 knikkers die verdeeld worden onder 4 kinderen; hoeveel knikkers krijgt ieder? Omdat delingen niet altijd mooi uitkomen (niet opgaan), kan hier het begrip rest meteen aan de orde komen: datgene wat overblijft als de deler niet meer in z'n geheel

uit het deeltal gehaald kan worden. Ook als het d aldus een meer eigen status heeft gekregen, blijft overigens hecht met het vermenigvuldigen verbonden. Het is vooral via 'omgekeerd vermenigvuldigen' dat kinderen tot een oplossing komen.

Als het vermenigvuldigen met grotere getallen in van groep 5 de nodige aandacht heeft gekregen en leerlingen vertrouwd zijn geraakt met de mogelijkheden van het splitsen daarbij, worden ook grotere delingen verkend. De kinderen zitten dan in de eerste helft van groep 6. Net als bij het vermenigvuldigen zijn het instantie vooral rijgaanpakken die de kinderen helpen om tot een oplossing te komen. Bijvoorbeeld, in 1 van onderstaand contextprobleem:



- > Mira werkt op een tuincentrum. Ze moet hyacintienbollen in dozen van vier doen. In totaal ze nog 60 bollen.
Hoeveel dozen kan ze vullen?

$60 - 4 = 56$ $56 - 4 = 52$ $52 - 4 = 48$ en zo ga ik door 15 dozen	4 4 4 4 20 4 4 4 4 20 4 4 4 4 20 15 dozen	$10 \times 4 = 40$ $5 \times 4 = 20$ $40 + 20 = 60$ dus $15 \times$	$40 : 4 = 10$ $20 : 4 = 5$ $10 + 5 = 15$
---	---	--	--

Zoals bij de oplossingen a en b te zien is, doet het zich bij het delen voor in de vorm van *herhaald*



inderen op concreet niveau
aaf laat ervaren dat deze
als de rijgaanpakken in de
sen als een verkorting kan
natieg te variëren wordt
nen in wat voor soort
epassen. Bijvoorbeeld:

en
in 1 : 48

zich meer en meer bewust
oor een passende strategie
nodigt tot een andere,

er toegankelijk te maken
genheid om zich te
rechthoekssituaties worden
ht te geven in het waarom
en nulletje erachter’.

tere getallen

situaties. Bijvoorbeeld: je hebt 18 eieren die in
van 6 gedaan moeten worden; hoeveel doosjes
nodig? Door aan een dergelijke situatie de formele
 $18 : 6$ te koppelen, krijgt het delen voor het eerst
er op zichzelf staande betekenis in de zin van:
1 groepjes van 6 kun je uit 18 halen? Of korter nog:
1 keer past 6 in 18?

and wordt deze betekenis ook betrokken op
situaties, zoals: je hebt 25 knikkers die verdeeld
onder 4 kinderen; hoeveel knikkers krijgt ieder?
delingen niet altijd mooi uitkomen (niet opgaan),
het begrip rest meteen aan de orde komen:
wat overblijft als de deler niet meer in z'n geheel

uit het deeltal gehaald kan worden. Ook als het delen
aldus een meer eigen status heeft gekregen, blijft het
overigens hecht met het vermenigvuldigen verbonden.
Het is vooral via ‘omgekeerd vermenigvuldigen’ dat de
kinderen tot een oplossing komen.

Als het vermenigvuldigen met grotere getallen in de loop
van groep 5 de nodige aandacht heeft gekregen en de
leerlingen vertrouwd zijn geraakt met de mogelijkheid
van het splitsen daarbij, worden ook grotere delingen
verkend. De kinderen zitten dan in de eerste helft van
groep 6. Net als bij het vermenigvuldigen zijn het in eerste
instantie vooral rijgaanpakken die de kinderen hanteren
om tot een oplossing te komen. Bijvoorbeeld, in het geval
van onderstaand contextprobleem:



- > Mira werkt op een tuincentrum. Ze moet
hyacinthebollen in dozen van vier doen. In totaal heeft
ze nog 60 bollen.
Hoeveel dozen kan ze vullen?

$60 - 4 = 56$	$\begin{array}{ c c c } \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$	$10 \times 4 = 40$	$40 : 4 = 10$
$56 - 4 = 52$	$\begin{array}{ c c c } \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$	$5 \times 4 = 20$	$20 : 4 = 5$
$52 - 4 = 48$	$\begin{array}{ c c c } \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$	60	$10 + 5 = 15$
en zo ga ik door	$\begin{array}{ c c c } \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$	dus $15 \times$	
15 dozen	$\begin{array}{ c c c } \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$		
	15 dozen		

Zoals bij de oplossingen a en b te zien is, doet het rijgen
zich bij het delen voor in de vorm van *herhaald aftrekken*

en *herhaald optellen*: uitgaan van het deeltal en daarvan
steeds de deler een aantal keren aftrekken; ofwel uitgaan
van de deler en deze net zo lang herhaald optellen tot het
deeltal is bereikt. Bij oplossing c is te zien hoe deze laatste
aanpak op een efficiëntere manier uitgevoerd kan worden
via handig *op-vermenigvuldigen*. Oplossing d is van een
andere orde. Hier wordt het deeltal gesplitst in aparte
gedeeltes, en wordt de deling op deze gedeeltes
uitgevoerd. Het gaat hier om een vorm van splitsen die
vergelijkbaar is met de splitsstrategie zoals die bij de
overige bewerkingen al naar voren is gekomen.
Tijdens de nabespreking wordt de aandacht vooral
gevestigd op oplossingen van het type c: het op-
vermenigvuldigen. De relatie met het omslachtigere
herhaalde optellen en aftrekken wordt gelegd, en de
leerlingen worden ervan bewust gemaakt hoe je deze
aanpak als een verkorting daarvan kunt opvatten.
De opdeelstructuur van de situatie kan hier voor de nodige
steun zorgen: in een plaatje kan aanschouwelijk gemaakt
worden hoe je in plaats van telkens 1 groepje van 4 ook in
één keer 10 groepjes van 4 kunt nemen.
Door te verbreden naar andere situaties wordt het inzicht
in dit opvermenigvuldigen verder ontwikkeld.

- > In een kan koffie passen 6 koppen koffie. Er komen
72 ouders op de ouderavond. Hoeveel kannen moeten er
gevuld worden (ervan uitgaande dat iedereen koffie
drinkt)?
- > Vader legt een nieuw tegelpad aan. Er komen 5 tegels
naast elkaar te liggen. In totaal heeft hij 80 tegels.
Hoeveel rijen van 5 kan hij leggen?
- > Tijdens het schoolreisje maken de kinderen een tochtje
met een waterfiets. Er zijn in totaal 125 kinderen, en er
mogen 4 kinderen op een waterfiets.
Hoeveel waterfietsen zijn er nodig?

Inzicht in het omgekeerde karakter van de bewerkingen
vermenigvuldigen en delen ($6 \times 7 = 42$, dus $42 : 7 = 6$ en
 $42 : 6 = 7$) alsmede kennis van de deeltafels kan hier in
hoge mate helpen om vlot tot een oplossing te komen.
Het rechthoekmodel in de vorm van een tegel- of
stippenpatroon werkt hier ondersteunend.



Via de ervaringen opgedaan in dergelijke situaties, worden de kinderen zich er steeds meer van bewust hoe je het op-vermenigvuldigen op een efficiënte manier kunt uitvoeren. Maar ook de al genoemde splitsstrategie komt nu steeds meer aan de orde. Bijvoorbeeld, in het geval van de boerderijsituatie:

$$\begin{array}{ll} 30 : 3 = 10 & \text{of} & 60 : 3 = 20 \\ 30 : 3 = 10 & & 15 : 3 = 5 \\ 15 : 3 = 5 & & 20 + 5 = 25 \\ 10 + 10 + 5 = 25 \end{array}$$

Bij dit alles is een goede vertrouwdheid met het vermenigvuldigen (en later delen) met ronde getallen een belangrijke voorwaarde. Het gaat hier vooral om de 'grote tafelsommen' (20×3 , 30×4 , 100×5 , 6×40 , 20×70 , en dergelijke) die snel en efficiënt uitgerekend moeten kunnen worden. Het inzicht in de nulregel zoals in de vorige paragraaf uiteengezet, vormt hierbij naast een goede kennis van de tafels de basis. Ook bij het delen zijn uiteraard *variastراتيجи* mogelijk. Dit betreft bijvoorbeeld het compenseren en het herhaald halveren:

$$\begin{array}{ll} 195 : 5 = ? & 1000 : 4 = ? \\ 200 : 5 = 40 & 1000 : 2 = 500 \\ 5 : 5 = 1 & 500 : 2 = 250 \\ 40 : 1 = 40 \end{array}$$

Ook hier geldt dat een gedegen onderbouwing van dergelijke strategieën van grote waarde is om misrekeningen te voorkomen. Zo komt het nogal eens voor dat bij de eerste som geredeneerd wordt: ik maak van 195 het mooie ronde getal 200; 200 gedeeld door 5 is 40; en dan die 5 er weer af is 35. Door te controleren via het vermenigvuldigen ($195 : 5 = 35$? Dan moet $35 \times 5 = 195$ zijn) kan de fout achterhaald worden. En door terug te grijpen op het grondidee van 'nagaan hoeveel groepjes van 5 er uit 195 gehaald kunnen worden', kan deze fout ontmaskerd worden. Daarmee kan immers nader verklaard worden dat er 1 groepje van 5 teveel uitgehaald is; dat moet er dus nog af.

Niet als bij de andere bewerkingen geldt ook hier dat, naarmate de getallen groter worden, de behoefte toeneemt aan een meer gestandaardiseerde, volgens vaste stappen verlopende werkwijze. Om daarin te voorzien wordt in de loop van de tweede helft van groep 6 de herhaald aftrekkenprocedure geïntroduceerd. Daarnaast gaat de aandacht regelmatig uit naar allerlei varia-aanpakken. Zoals in het inleidende hoofdstuk beschreven, komt bij het delen de vorm van het pure cijferen niet (meer) voor. De standaardprocedure van het herhaald aftrekken is vergelijkbaar met de werkwijzen van het kolomsgewijze rekenen bij de overige drie bewerkingen.

Niet als bij de andere bewerkingen is het effect van deze leerlijn dat de kinderen hun repertoire aan handige hoofdrekenstrategieën geleidelijk aan verder uitbreiden. Ook hier geldt dat het rijgen in de zin van op-vermenigvuldigen beschikbaar blijft als een veilige basisstrategie waarmee je te allen tijde (zij het niet altijd even efficiënt) tot een oplossing kunt komen. Maar gaandeweg komt ook bij deze laatste hoofdbewerking het accent meer en meer op het handige gevarieerde hoofdrekenen te liggen. Kleine onderzoekjes naar deelbaarheid kunnen hiervan eveneens het nodige bijdragen. Bijvoorbeeld:

- > In een doos zitten totaal 48 pakjes boter. Hoe zouden deze in de doos gestapeld kunnen zijn?
- > Arno heeft een spel gekregen met 65 kaarten die eerlijk over de deelnemers verdeeld moeten worden. Met z'n hoeven kun je dat spel eerlijk spelen?
- > Door welke getallen kun je 100 delen? En door welke getallen 120? Welk getal heeft de meeste van zulke 'delers'?
- > Wat is het kleinste getal dat je door 2, 3, 4, 5 en 6 kunt delen?
- > Priemgetallenonderzoekjes zoals: welke drie getallen tussen 120 en 130 kun je door geen enkel ander getal (behalve door 1 en door zichzelf) delen?

Via dergelijke onderzoekjes vergroten de kinderen niet alleen hun vaardigheid op het gebied van delen, maar ook

worden ze zich steeds meer bewust van de vers structureringen van een getal. Mede daardoor kunnen zulke getallen steeds meer een 'eigen gezicht'.

Naarmate de 'hogere getalbegrippen' (breuken, kommagetallen, procenten, verhoudingen, ...) van de tweede helft van groep 6 steeds meer inhoud krijgen, het delen niet alleen een rijk toepassingsgebied in werken met de breuk als operator ($5/6$ deel van een 150 personen en dergelijke) en in het rekenen in percentages' (25% korting op een jas van € 150

Eind groep 6 kunnen de $250 : 5$, $600 : 15$, ...) zo uitrekenen. Op-vermen Medio groep 7 zijn de k bij dergelijke opgaven (varia-aanpakken als een kunnen de rest al naar g

Anders dan bij de andere meer formele, op zichzelf $36 : 5$): nagaan hoeveel verbinding te leggen me in de loop van groep 5 i Vertrouwdheid met op-grotere delingen wordt gelegenheid gesteld wo van de relatie van deze sfeer van herhaald opte hyacintenprobleem ku Om de opbouw van een bevorderen, wordt er re karakter van de operatie van de deeltafels. Teve: regelmatig kleine onder Het is mede als gevolg : bepaalde getallen steeds



ij de andere bewerkingen geldt ook hier dat, de getallen groter worden, de behoefte toeneemt naar gestandaardiseerde, volgens vaste stappen te werkwijze. Om daarin te voorzien wordt in de tweede helft van groep 6 de herhaald procedure geïntroduceerd. Daarnaast gaat de regelmatig uit naar allerlei varia-aanpakken. Het inleidende hoofdstuk beschreven, komt bij de vorm van het pure cijferen niet (meer) voor. Het procedure van het herhaald aftrekken is naar met de werkwijzen van het kolomsgewijze bij de overige drie bewerkingen.

ij de andere bewerkingen is het effect van deze dat de kinderen hun repertoire aan handige strategieën geleidelijk aan verder uitbreiden. Het geldt dat het rijgen in de zin van opvuldigen beschikbaar blijft als een veilige strategie waarmee je te allen tijde (zij het niet altijd) tot een oplossing kunt komen. Bovendien komt ook bij deze laatste bewerking het accent meer en meer op het handige. Het hoofdrekenen te liggen. Kleine onderzoekjes naar waarheid kunnen hiervan eveneens het nodige Bijvoorbeeld:

in de doos zitten totaal 48 pakjes boter. Hoe zouden in de doos gestapeld kunnen zijn?
hoeveel heeft een spel gekregen met 65 kaarten die eerlijk de deelnemers verdeeld moeten worden. Met z'n velen kun je dat spel eerlijk spelen?
Welke getallen kun je 100 delen? En door welke delen 120? Welk getal heeft de meeste van zulke resten?
Wat is het kleinste getal dat je door 2, 3, 4, 5 en 6 kunt delen?
Welke getallenonderzoekjes zoals: welke drie getallen kun je 120 en 130 kun je door geen enkel ander getal delen (dve door 1 en door zichzelf) delen?

ijke onderzoekjes vergroten de kinderen niet alleen de vaardigheid op het gebied van delen, maar ook

worden ze zich steeds meer bewust van de verschillende structureringen van een getal. Mede daardoor krijgen zulke getallen steeds meer een 'eigen gezicht'.

Naarmate de 'hogere getalbegrippen' (breuken, kommagetallen, procenten, verhoudingen, ...) vanaf de tweede helft van groep 6 steeds meer inhoud krijgen, vindt het delen niet alleen een rijk toepassingsgebied in het werken met de breuk als operator (5/6 deel van een bus met 150 personen en dergelijke) en in het rekenen met 'mooie percentages' (25% korting op een jas van € 150,-), maar

ook komt het restbegrip in een breder daglicht te staan. Zo zijn de kinderen vanuit hun ervaringen met kleinere deelsommen gewend een som als $25 : 4$ te beantwoorden met '6 rest 1'. Maar in verbinding met een situatie als '25 pannenkoeken verdelen met z'n vieren' blijkt de rest verder opgedeeld te kunnen worden: $25 : 4 = 6 \frac{1}{4}$ gekoppeld aan een situatie als 'een touw van 25 meter in 4 gelijke stukken verdelen', ook als 6,25 m. Zo verbreedt zich de geestelijke horizon steeds verder in de richting van de wereld van de gebroken getallen die als een uitbreiding van de al bekende wereld van de gehele getallen naar voren treedt.

5

Eind groep 6 kunnen de leerlingen grotere delingen ($60 : 4$, $75 : 3$, $250 : 5$, $600 : 15$, ...) zowel kaal als in toepassingssituaties vlot en handig uitrekenen. Op-vermenigvuldigen fungeert daarbij als basisstrategie. Medio groep 7 zijn de kinderen ook vertrouwd met de mogelijkheid om bij dergelijke opgaven de splitsstrategie in te zetten, alsmede enkele varia-aanpakken als compenseren en herhaald halveren. De leerlingen kunnen de rest al naar gelang de context correct interpreteren.

Anders dan bij de andere operaties hoeft het delen pas geleidelijk aan een meer formele, op zichzelf staande betekenis te krijgen in de zin van (bij $36 : 5$): nagaan hoeveel groepjes van 5 je uit 36 kunt halen. Door de verbinding te leggen met opdeel- en verdeelsituaties, worden de kinderen in de loop van groep 5 met deze eigen betekenis vertrouwd gemaakt. Vertrouwdheid met op-vermenigvuldigen als een basisstrategie voor grotere delingen wordt met name gestimuleerd indien de kinderen in de gelegenheid gesteld worden zich op concreet niveau bewust te worden van de relatie van deze strategie met omslachtigere aanpakken in de sfeer van herhaald optellen en aftrekken. Contextproblemen als het hyacintenprobleem kunnen daarbij als een modelsituatie fungeren. Om de opbouw van een netwerk aan elementaire getalrelaties te bevorderen, wordt er regelmatig aandacht besteed aan het omgekeerde karakter van de operaties vermenigvuldigen en delen en aan het oefenen van de deeltafels. Tevens worden er vanaf de tweede helft van groep 6 regelmatig kleine onderzoekjes naar deelbaarheid gedaan. Het is mede als gevolg van de ervaringen bij zulke onderzoekjes dat bepaalde getallen steeds meer een eigen gezicht voor de kinderen krijgen.



Vermenigvuldigen en delen met ronde getallen

Uit het gebied van het vermenigvuldigen en delen met grotere getallen maakt zich na verloop van tijd een specifiek deelgebied los, dat gedurende de hele verdere basisschool een prominente rol blijft spelen: het vermenigvuldigen en delen met ronde getallen.

$$\begin{array}{ll} 50 \times 20 = & 600 : 5 = \\ 60 \times 250 = & 10.000 : 4 = \\ 20 \times 35.000 = & 12.000 : 100 = \\ 50 \times 150.000 = & 300.000 : 15 = \end{array}$$

Vanaf de tweede helft van groep 6 worden dergelijke opgaven zowel kaal als in toepassingen regelmatig aan de orde gesteld. Eerst met betrekking tot vermenigvuldigen, later ook tot delen. Niet alleen is dit gebied van grote waarde in verband met de verdere verdieping van het inzicht in belangrijke rekeneigenschappen als de nulregel en de verdeel-eigenschap, maar ook draagt het in belangrijke mate bij tot versterking van het getalgevoel voor grote getallen. Bovendien vormt het een essentiële ondersteuning bij het rekenen met breuken en procenten. Zo is een goede kennis van het rekenen met ronde getallen onontbeerlijk waar het gaat om opgaven als: $\frac{3}{4}$ deel van een stadion met 10.000 plaatsen, 5% korting op een auto van 12.000 euro, en dergelijke.

Zoals eerder beschreven is er bij de verkenning van het vermenigvuldigen en delen met grotere getallen in de eerste helft van groep 6 reeds de nodige aandacht voor opgaven als 6×40 , 30×5 en 200×4 . Het ging daarbij in de eerste plaats om een bewustmaking van de nulregel (het feit dat er een nul achter een heel getal komt als je dat getal met 10 vermenigvuldigt), en om de manier waarop je deze nulregel kunt gebruiken om de genoemde sommen handig uit te rekenen. Ter onderbouwing speelde, zoals gezegd, geld en het rechthoekmodel een centrale rol. De nulregel geldt natuurlijk ook in 'omgekeerde richting' voor het delen: als je een (rond) getal deelt door 10, gaat er een nul van dat getal af. Sommige kinderen doorzien deze eigenschap gewoonlijk al op eigen kracht, maar dit

geldt zeker niet voor het merendeel van de kinderen. Daarom wordt dit in de loop van de tweede helft van groep 6 enkele keren nadrukkelijk aan de orde gesteld vanuit contextproblemen als:

- > De goede uitslag van de voetbalwedstrijd is door 10 personen geraden. Deze mogen het geld dat in de pot zit (250 euro) gezamenlijk verdelen. Hoeveel euro krijgt ieder?

Sommige kinderen zijn hier wellicht nog geneigd tot een vorm van op-vermenigvuldigen. Gebruik van de omkeersrelatie (zoals die door veel kinderen op eigen initiatief al wordt benut) maakt echter voor iedereen duidelijk dat er een veel kortere weg is: je kunt 250 euro immers ook opvatten als 10 groepjes van 25 euro, want $10 \times 25 = 250$ (nulregel voor het vermenigvuldigen). Dus krijgt ieder één groepje van 25 euro.

Door de betreffende problematiek in andere contexten (350 eieren in dozen van 10 stoppen; 150 meter touw in stukken van 10 meter knippen, ...) terug te laten komen, wordt bereikt dat de nulregel ook voor het delen tot een goed begrepen rekeneigenschap uitgroeit. Steeds meer komt het vermenigvuldigen en delen met ronde getallen nu aan de orde in aparte, korte lesjes in de vorm van:

- rekendictées (waarbij de kinderen in een beperkte tijd bijvoorbeeld drie rijtjes van vijf sommen oplossen)
- betaal oefeningen (als je weet dat 1 grapefruit 35 cent kost, hoeveel moet je dan voor 5, 10, 20 en 40 grapefruits betalen? En voor 200?)
- sommenspinnen (als je de uitkomst van $42 : 6$ weet, dan kun je veel opgaven met grotere getallen ook makkelijk uitrekenen: $420 : 6$; $4200 : 6$; $42 : 7$; $420 : 7$; $420 : 70$; $4200 : 70$; ...)
- zelf vermenigvuldigingen bij een groot rond getal bedenken (bijvoorbeeld: bedenk tien verschillende vermenigvuldigingen bij het getal 3600; doe daarna hetzelfde voor 4800)
- ...

Via de voor- en nabesprekingen bij deze oefenbouwen de kinderen gaandeweg een steeds uitbreidend netwerk aan bekende getalrelaties op en een steeds groter repertoire aan hoofdreenstrategieën die beruht op hetgeen in het voorgaande aan de orde is gesteld. Aanvankelijk ligt het accent meer op het vermenigvuldigen, later (in de eerste helft van groep 7) komt ook het delen steeds meer aan bod. Daarbij wordt relatie tussen beide bewerkingen eveneens de aandacht, in het bijzonder met het oog op de mogelijkheid om de uitkomst van deelsommen te controleren bijbehorende vermenigvuldiging te maken. In videofragment 3 is een voorbeeld van een rond het vermenigvuldigen te zien.³



In de klas van Ingrid (mei, groep 6) wordt een sommendictée over de volgende tien sommen gegeven:

$$\begin{array}{ll} 6 \times 60 = & 300 \times 5 = \\ 50 \times 120 = & 12 \times 50 = \\ 10 \times 65 = & 48 \times 10 = \\ 20 \times 65 = & 48 \times 20 = \\ 4 \times 75 = & 5 \times 16 = \end{array}$$

Als warming-up wordt geïnventariseerd wat handig zijn om de som 15×40 op te lossen. In korte tijd slaan de kinderen vier aanpakken op het bord neer:

$$\begin{array}{llll} & 15 \times 40 = & & \\ \begin{array}{l} 15 \times 10 = 150 \\ 15 \times 10 = 150 \\ 300 \\ 2 \times 300 = 600 \end{array} & \text{Ietender} & \begin{array}{l} 15 \times 20 = 300 \\ 15 \times 20 = 300 \\ 600 \end{array} & 1 \\ \begin{array}{l} 10 \times 40 = 400 \\ 5 \times 40 = 200 \\ (5 \times 4 = 20) \\ 400 + 200 = 600 \end{array} & \text{bananas} & \begin{array}{l} 5 \times 40 = 200 \\ 5 \times 40 = 200 \\ 5 \times 40 = 200 \\ 600 \end{array} & 6 \end{array}$$

at ronde getallen

ker niet voor het merendeel van de kinderen.
n wordt dit in de loop van de tweede helft van
enkele keren nadrukkelijk aan de orde gesteld
contextproblemen als:

le goede uitslag van de voetbalwedstrijd is door 10
ersonen geraden. Deze mogen het geld dat in de pot zit
250 euro) gezamenlijk verdelen.

hoeveel euro krijgt ieder?

ge kinderen zijn hier wellicht nog geneigd tot een
an op-vermenigvuldigen. Gebruik van de omkeer-
(zoals die door veel kinderen op eigen initiatief al
venut) maakt echter voor iedereen duidelijk dat er
el kortere weg is: je kunt 250 euro immers ook
n als 10 groepjes van 25 euro, want $10 \times 25 = 250$
el voor het vermenigvuldigen). Dus krijgt ieder
epje van 25 euro.

e betreffende problematiek in andere contexten
eren in dozen van 10 stoppen; 150 meter touw in
i van 10 meter knippen, ...) terug te laten komen.
bereikt dat de nulregel ook voor het delen tot een
egrepen rekeneigenschap uitgroeit.
meer komt het vermenigvuldigen en delen met
getallen nu aan de orde in aparte, korte lesjes in de
an:

ndietees (waarbij de kinderen in een beperkte tijd
oorbeeld drie rijtjes van vijf sommen oplossen)
aloefeningen (als je weet dat 1 grapefruit 35 cent
hoeveel moet je dan voor 5, 10, 20 en 40
e fruits betalen? En voor 200?)

menspinnen (als je de uitkomst van $42 : 6$ weet, dan
je veel opgaven met grotere getallen ook makkelijk
skenen: $420 : 6$; $4200 : 6$; $42 : 7$; $420 : 7$; $420 : 70$;
 $42 : 70$; ...)

vermenigvuldigingen bij een groot rond getal
nken (bijvoorbeeld: bedenk tien verschillende
nigvuldigingen bij het getal 3600; doe daarna
elfde voor 4800)

Via de voor- en nabesprekingen bij deze oefeningen
houwen de kinderen gaandeweg een steeds uitgebreider
netwerk aan bekende getalrelaties op en een steeds breder
repertoire aan hoofdrekenstrategieën die berusten op af
hetgeen in het voorgaande aan de orde is gesteld.
Aanvankelijk ligt het accent meer op het
vermenigvuldigen, later (in de eerste helft van groep 7)
komt ook het delen steeds meer aan bod. Daarbij krijgt de
relatie tussen beide bewerkingen eveneens de nodige
aandacht, in het bijzonder met het oog op de mogelijkheid
om de uitkomst van deelsommen te controleren door de
bijbehorende vermenigvuldiging te maken.
In videofragment 3 is een voorbeeld van een rekendietee
rond het vermenigvuldigen te zien.³



In de klas van Ingrid (mei, groep 6) wordt een
sommendietee over de volgende tien sommen gegeven:

$6 \times 60 =$	$300 \times 5 =$
$50 \times 120 =$	$12 \times 50 =$
$10 \times 65 =$	$48 \times 10 =$
$20 \times 65 =$	$48 \times 20 =$
$4 \times 75 =$	$5 \times 16 =$

Als warming-up wordt geïnventariseerd wat handige manieren
zijn om de som 15×40 op te lossen. In korte tijd staan er op
aangeven van de kinderen vier aanpakken op het bord:

$15 \times 40 =$		
$15 \times 10 = 150$	$15 \times 20 = 300$	
$15 \times 10 = 150$	$15 \times 20 = 300$	
300	600	
$2 \times 300 = 600$		
$10 \times 40 = 400$	$5 \times 40 = 200$	
$5 \times 40 = 200$	$5 \times 40 = 200$	
$(5 \times 4 = 20)$	$5 \times 40 = 200$	
$400 + 200 = 600$	600	

Ter afsluiting van de warming-up worden de aanpakken
gezamenlijk doorgenomen. Algemeen wordt de manier van
Faranas als meest voor de hand liggend beschouwd.
Die van Jeetender en Cindy worden ook algemeen als
handig aangemerkt, terwijl die van Emrah meer als een
persoonlijk handigheidje gezien wordt dat voor veel
kinderen niet zo voor de hand ligt.

Niet alleen vormen dergelijke oefeningen een belangrijke
stimulus voor verdere flexibilisering en uitbreiding van
het repertoire aan handige hoofdrekenstrategieën op dit
gebied. Maar tegelijkertijd ervaren de kinderen nog weer
eens een van de meest aantrekkelijke aspecten van
hoofdrekenen: in veel situaties zijn er vaak diverse
handige aanpakken die tot een oplossing voeren.
Welke je daarvan gebruikt, maakt in wezen niet zoveel
uit. Dat maakt hoofdrekenen in de praktijk vaak tot zo'n
plezierige en spannende bezigheid, waar zowel leraren als
kinderen heel veel plezier aan kunnen beleven!

In de eerste helft van groep 7 vormen de genoemde
oefeningen naast die rond bijvoorbeeld het optellen en
aftrekken tot duizend en het rekenen met geld een vast
onderdeel van het wekelijkse hoofdrekenmenu.
Het delen komt daarbij steeds meer in de schijnwerpers te
staan omdat dit niet alleen op zichzelf een waardevol
gebied is, maar ook omdat hiermee de weg naar de
verkenning van het procentenbegrip in belangrijke mate
geëffend wordt.
De getallen waarop de oefeningen betrekking hebben,
worden daarbij gaandeweg groter.
Om de voorstelbaarheid van sommen te bevorderen,
wordt het vertrekpunt soms ook gekozen in een 'tastbare'
situatie.

De leraar heeft uit het magazijn enkele pakken A4-papier
(500 vel per pak) gehaald, alsmede enkele doosjes paperclips
(200 paperclips per doosje). Eerst wordt nog eens vastgesteld
hoeveel exemplaren er in één pak respectievelijk doosje
zitten.



Vervolgens laat de leraar de kinderen 'fantaseren' wat je op basis van deze bekende aantallen allemaal nog meer zou kunnen uitrekenen.

Het naar voren gebrachte wordt in tabelvorm op het bord genoteerd en besproken.

1 pak: 500 vel		1 doos: 200 paperclips	
1	500	1	200
2	1000	5	1000
20	10.000	10	2000
50	25.000	50	10.000
100	50.000	500	100.000
1000	500.000	1000	200.000
2000	1.000.000 (1 miljoen)	5000	1.000.000 (1 miljoen)

Naderhand worden er van tijd tot tijd nog eens opgaven als '1000 pakken van 500 vel' onder de loop genomen. Wat in de tabel al is ervaren, wordt nu nader expliciet gemaakt: je kunt de nullen als het ware 'rijgen'.

10 pakken	→	5000 vel (1 nul erachter)
100 pakken	→	50.000 vel (2 nullen erachter)
1000 pakken	→	500.000 vel (3 nullen erachter)

In een later stadium gebeurt iets soortgelijks voor het delen en worden de kinderen zich bewust van de mogelijkheid om steeds een nul te schrappen als er door een factor 10 gedeeld wordt.

Ook de mogelijkheid van het handig 'organiseren' van het schrappen van nullen in toepassingssituaties met veel nullen komt nadrukkelijk onder de aandacht.

- > Er waren 50.000 bezoekers bij het popconcert in de Arena. Die betaalden aan entreegeld bij elkaar ongeveer 2 miljoen euro. Hoeveel is dat gemiddeld per bezoeker ongeveer?



Ook hier is op-vermenigvuldigen een mogelijkheid om tot de oplossing te komen. Maar via het handig schrappen van nullen kan de opgave tot een elementaire deling worden gereduceerd:

$$2.000.000 : 50.000 =$$

$$2000 : 50 =$$

$$200 : 5 = 40 \text{ euro}$$

Het is van grote waarde dat de kinderen ervaring opdoen met dergelijke handige 'schrapsstrategieën'.

6

Eind groep 7 kunnen de leerlingen vermenigvuldigingen en delingen met ronde getallen (50×20 , 60×250 , $600 : 4$, $1200 : 80$, en dergelijke) zowel kaal als in toepassingssituaties handig en flexibel uitrekenen. Ze maken daarbij onder meer gebruik van de nulregel die in het voorafgaande uitgebreid aan de orde is gesteld.

Geen gebied leent als dat van het verloop van groep voldoende doorzichten vermenigvuldigen zijn voldoende is voor steeds verder mondelinge lesjes steeds bedrevener hoofdrekensstrategieën binnen deze lesjes strategieën steeds vaker dat er vaak vele wijzen ene weg duidelijk genoemde oefeningen die hie

Hoofdrekenen

Uitbouwen en verdiepen

In de loop van groep 7 komt het accent binnen van de hele getallen steeds meer op het werk met getallen te liggen. Daarnaast gaat de aandacht toenemende mate uit naar leerlijnen buiten van de hele getallen: breuken, kommagetal en verhoudingen.

Op het gebied van het hoofdrekenen wordt periode – ruwweg de tweede helft van groep – weinig nieuwe zaken meer aangeboden. Het is echter niet dat de leerlijn daarmee als afgevoerd beschouwd kan worden. Integendeel, het komt aan dat de kennis die binnen de verschillende deelgebieden tot op zekere hoogte is ontwikkeld wordt uitgebouwd en verdiept. Het opgebouwd repertoire aan hoofdrekensstrategieën en het bekende getalrelaties dient verder geconsolideerd en uitgebreid te worden. Het is juist wanneer de nodige zorg gebeurt, dat hoofdrekenen kan de benaderingswijze waarvan je als kind zo



nogelijkheid van het handig 'organiseren' van het en van nullen in toepassingssituaties met veel omt nadrukkelijk onder de aandacht.

waren 50.000 bezoekers bij het popconcert in de ena. Die betaalden aan entreegeld bij elkaar ongeveer miljoen euro. e veel is dat gemiddeld per bezoeker ongeveer!



r is op-vermenigvuldigen een mogelijkheid om tot ssing te komen. Maar via het handig schrappen van an de opgave tot een elementaire deling worden eerd:

$0,000 : 50,000 =$
 $1 : 50 =$
 $: 5 = 40 \text{ euro}$

an grote waarde dat de kinderen ervaring opdoen gelijke handige 'schrappstrategieën'.

uldigingen en delingen
 , 1200 : 80, en dergelijke)
 en flexibel uitrekenen. Ze
 regel die in het
 d.

Geen gebied leent zich beter om de essentie van hoofdrekenen te ervaren als dat van het vermenigvuldigen en delen met ronde getallen. Indien in de loop van groep 6 de nulregel voor het vermenigvuldigen én het delen voldoende doorzichtig is gemaakt voor de kinderen, terwijl het vermenigvuldigen en delen met grotere getallen ook in meer algemene zin voldoende is verkend, komt dit gebied wagenwijd open te liggen voor steeds verdere exploratie. Het zijn vooral korte, klassikaal-mondelinge lesjes met verwerkingsmomenten waardoor de kinderen steeds bedreven raken in het gebruik van allerlei handige hoofdrekenstrategieën binnen dit gebied. De besprekingsmomenten binnen deze lesjes zijn er met name ook op gericht om de gehanteerde strategieën steeds verder inzichtelijk te maken en om ze te laten ervaren dat er vaak vele wegen zijn die naar de oplossing leiden, zonder dat de ene weg duidelijk de voorkeur heeft boven de andere. Naast de al genoemde oefenvormen zijn het vooral ook spelletjes en spelachtige oefeningen die hieraan het nodige kunnen bijdragen.

Hoofdrekenen in de hoogste leerjaren

Uitbouwen en verdiepen

In de loop van groep 7 komt het accent binnen het domein van de hele getallen steeds meer op het werken met grote getallen te liggen. Daarnaast gaat de aandacht in toenemende mate uit naar leerlijnen buiten het domein van de hele getallen: breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen.

Op het gebied van het hoofdrekenen worden in deze periode – ruwweg de tweede helft van groep 7 en groep 8 – weinig nieuwe zaken meer aangeboden. Dat betekent echter niet dat de leerlijn daarmee als afgerond beschouwd kan worden. Integendeel, het komt er nu op aan dat de kennis die binnen de verschillende deelgebieden tot op zekere hoogte is ontwikkeld, verder wordt uitgebouwd en verdiept. Het opgebouwde repertoire aan hoofdrekenstrategieën en het bestand aan bekende getalrelaties dient verder geconsolideerd en uitgebreid te worden. Het is juist wanneer dit met de nodige zorg gebeurt, dat hoofdrekenen kan uitgroeien tot de benaderingswijze waarvan je als kind zowel in het

vervolg van je schoolloopbaan als in het dagelijks leven enorm veel plezier kunt hebben.

De hoofdrekenactiviteiten in deze laatste periode van de basisschool zijn globaal in te delen in drie soorten activiteiten:

- gevarieerde oefenactiviteiten
- activiteiten met steeds grotere getallen
- toepassing van hoofdrekenen binnen andere leerlijnen.

Hieronder wordt kort stilgestaan bij alle drie deze soorten van activiteiten.

Gevarieerde oefenactiviteiten

Het gaat hier om oefenactiviteiten rond leerstofonderdelen die in het voorafgaande al uitgebreid ter sprake zijn gekomen, zoals:

- alle hoofdbewerkingen tot duizend (en met eenvoudige getallen daarboven)
- vermenigvuldigen en delen met ronde getallen
- geldsituaties en andere alledaagse toepassingen.



De oefeningen rond deze onderdelen hebben een sterk gevarieerd karakter en hebben veelal betrekking op korte series opgaven. Soms vinden ze plaats in de vorm van zelfstandig werken, maar vaak ook in de vorm van korte klassikaal-mondelinge activiteiten. Ze zijn gericht op verdere niveauverhoging en flexibilisering, waarbij de kinderen enerzijds steeds verder vertrouwd raken met al bekende strategieën en de rekeneigenschappen waarop deze berusten, en anderzijds kennismaken met nog relatief onbekende aanpakken. Hieronder eerst een voorbeeld van een activiteit gericht op nadere doordienking van al bekende strategieën.⁷

In de nabespreking van een rekendietee rond optel- en aftreksommen tot duizend (medio groep 7) wordt nog even stilgestaan bij de verschillende gehanteerde aanpakken bij een van de opgaven uit het dietee: $753 - 78 =$. Naar aanleiding van wat de kinderen naar voren brengen, noteert de leraar in rekentaal de volgende strategieën naast elkaar op het bord, met de namen van de kinderen erbij die de betreffende aanpak naar voren hebben gebracht:

	$753 - 78 =$	
$753 - 80 = 703$	$753 = 700 + 53$	$700 - 78 = 622$
$703 - 8 = 695$	$700 - 70 = 630$	$622 + 53 = 675$
$695 - 20 = 675$	$630 + 53 = 683$	Simone
Judith	$683 - 8 = 675$	
	Rowan	
$700 - 80 = 620$		
$620 + 53 = 673$	$53 - 78 = -25$ (25 tekort)	
$673 + 2 = 675$	$700 - 25 = 675$	Ingrid
Sietze		

Ter afsluiting worden de verschillende werkwijzen met elkaar vergeleken. Gezamenlijk wordt vastgesteld dat de aanpakken van Rowan, Simone en Sietze eigenlijk niet zoveel verschillen: steeds splits je de 753 in 700 en 53, en daarna voer je enkele handelingen uit om tot de oplossing te komen. Verder licht Ingrid op verzoek nog eens toe hoe dat nu gaat met die 'mingetallen', zoals een kind het formuleert. Zij vertelt dat $53 - 78$ eigenlijk niet kan, je kunt eigenlijk maar $53 - 53$ doen. Die 25 heb je tekort, die moeten er nog af. Tot slot vraagt de leraar nog even naar de voorkeur van de kinderen. Sommige kinderen gebruiken het liefst de

manier van Judith (of een variant daarop). Maar er zijn heel wat kinderen die inmiddels een duidelijke voorkeur voor de verschillende vormen van splitsen hebben.

Zoals te zien, komen binnen dit deelgebied de drie grondvormen van hoofdrekenen (rijgen, splitsen en varia-aanpakken) in dit stadium volop naast elkaar voor, met een zeker accent op splitsen, dat door nogal wat kinderen als meest efficiënte strategie beschouwd wordt. Rijgen komt ook nog wel voor, maar dit wordt toch als minder efficiënt ervaren. Typerend is verder dat zowel rijg- als splitsaanpakken op vele uiteenlopende manieren gebruikt worden. Vaak gebeurt dat in combinatie met varia-aanpakken als compenseren (de aanpak van Sietze) en rekenen met tekorten (Ingrid). In die zin vervaagt in dit stadium het onderscheid tussen rijgen, splitsen en varia-rekenen steeds meer. Er is nog slechts hoofdrekenen als een specifieke benaderingswijze van getallen.

Naast oefenactiviteiten met kale getallen spelen ook toepassingssituaties een belangrijke rol. Dit betreft in het bijzonder toepassingen met geld. Geldrekenen heeft meer in het algemeen in het hele voorafgaande programma al een zekere nadruk gekregen. Nu worden geldsituaties benut om de hoofdrekenkennis over een breed front verder te verdiepen. Het gaat daarbij om herkenbare situaties zoals: tarieflijsten en entreprijzen, uitstallingen en boodschappenlijstjes, tabellen en reiskosten, prijs-gewicht-opgaven, rekenen met kassabonnen, enzovoorts. Vaak zijn er diverse soorten opgaven rond één situatie mogelijk, waarmee diverse soorten rekenstrategieën belicht kunnen worden. Bijvoorbeeld:

Bakkerij Van Basten wenst u prettige feestdagen			
	Aantal	Prijs	
Speculaaspop klein	€ 2,95		
Speculaaspop groot	€ 3,95		
Taaipop klein	€ 2,45		
Taaipop groot	€ 3,45		
Pepernoten per ons	€ 0,95		
Ge vulde speculaas per ons	€ 1,95		
Amandelstaaf	€ 4,80		
	Totaal		

Vul nu uw bestellijst in!

Mogelijke soorten opgaven bij een dergelijk

- > prijzen vergelijken; bezinning op 'mooie' en 'mooie' getallen
- > eenvoudige rekenopgaven, zoals: hoeveel kleine speculaaspoppen? En 4 grote speculaas? En 5 kleine taaipoppen?
- > samengestelde rekenopgaven, zoals: wat bet 3 kleine speculaaspoppen en 3 kleine taaipop voor 4 amandelstaven en 4 grote speculaas?
- > prijs-gewicht-opgaven, zoals: hoeveel betaal $1\frac{1}{2}$ ons pepernoten? En voor 1 pond pepernoten voor 1 kg gevulde speculaas?
- > schatopgaven in de trant van: je hebt een briefje van 20 euro, en je wilt 4 kleine taaipoppen kopen; is dat genoeg? Hoeveel ons pepernoten zou je maximaal met een briefje van 20 kunnen kopen?
- > raadselopgaven: Ramsey heeft het een en ander en moest in totaal €7,20 betalen. Wat zou hij kunnen hebben? (bedenk verschillende mogelijkheden)



Dergelijke opgaven lenen zich aan de ene kant al eerder verkende strategieën voor de kinderen om het voetlicht te halen. Bijvoorbeeld: het gebruik van compenseren bij opgaven als $4 \times €1,95$ (relatief $4 \times €2,-$ min $4 \times €0,05$). De geldsituatie is ook mogelijk om het grondprincipe achter deze strategie (je vermenigvuldigt met een wat te groot getal, daarna het te veel gerekende weer vanaf) op een aanspreekbaar niveau nader bewust te maken. Het kan ook op andere kant kunnen ook relatief nieuwe strategieën worden ontwikkeld, zoals: de 'omgekeerde' verdeling van opgaven als $(3 \times €2,95) + (3 \times €2,45)$ te berekenen als $3 \times (€2,95 + €2,45)$, en dus via $3 \times €5,40$. Het is ook mogelijk om de nabespreking van een opgave als $10 \times €0,95$ nadere doordienking van de nulregel met h

er van Judith (of een variant daarop). Maar er zijn heel velen die inmiddels een duidelijke voorkeur voor de verschillende vormen van splitsen hebben.

zien, komen binnen dit deelgebied de drie vormen van hoofdrekenen (rijgen, splitsen en variëren) in dit stadium volop naast elkaar voor, met er accent op splitsen, dat door nogal wat kinderen als efficiënte strategie beschouwd wordt. Rijgen is ook nog wel voor, maar dit wordt toch als minder ervaren. Typerend is verder dat zowel rij- als splitsen op vele uiteenlopende manieren gebruikt wordt. Vaak gebeurt dat in combinatie met variëren als compenseren (de aanpak van Sietze) en met tekorten (Ingrid). In die zin vervaagt in dit stadium het onderscheid tussen rijgen, splitsen en variëren steeds meer. Er is nog slechts hoofdrekenen als specifieke benaderingswijze van getallen.

Oefenactiviteiten met kale getallen spelen ook in de dagelijkse omstandigheden een belangrijke rol. Dit betreft in het bijzonder toepassingen met geld. Geldrekenen heeft meer algemeen in het hele voorafgaande programma al een nadruk gekregen. Nu worden geldsituaties om de hoofdrekenskennis over een breed front te verdiepen. Het gaat daarbij om herkenbare situaties zoals: tarieflijsten en entreprijzen, uitstallingen, afschrijven, tabellen en reiskosten, prijsvergelijkingen, rekenen met kassabonnen, enzovoorts. Er zijn er diverse soorten opgaven rond één situatie mogelijk, waarmee diverse soorten rekenstrategieën kunnen worden. Bijvoorbeeld:

Kkerij Van Basten wenst u prettige feestdagen		
	Aantal	Prijs
speculaaspop klein		€ 2,95
speculaaspop groot		€ 3,95
taaijpop klein		€ 2,45
taaijpop groot		€ 3,45
pepermotens per ons		€ 0,95
gevulde speculaas per ons		€ 1,95
amandelstaaf		€ 4,80
	Totaal	

! nu nuw bestelstijst m !

Mogelijke soorten opgaven bij een dergelijke prijslijst:

- > prijzen vergelijken; bezinning op 'mooie' en 'minder mooie' getallen
- > enkelvoudige rekenopgaven, zoals: hoeveel kosten 4 kleine speculaaspoppen? En 4 grote speculaaspoppen? En 5 kleine taaijpoppen?
- > samengestelde rekenopgaven, zoals: wat betaal je voor 3 kleine speculaaspoppen en 3 kleine taaijpoppen? En voor 4 amandelstaven en 4 grote speculaaspoppen?
- > prijs-gewicht-opgaven, zoals: hoeveel betaal je voor $1\frac{1}{2}$ ons pepermotens? En voor 1 pond pepermotens? En voor 1 kg gevulde speculaas?
- > schatopgaven in de trant van: je hebt een briefje van 10 euro, en je wilt 4 kleine taaijpoppen kopen; heb je genoeg? Hoeveel ons pepermotens zou je maximaal voor een briefje van 20 kunnen kopen?
- > raadselopgaven: Ramsey heeft het een en ander gekocht en moest in totaal €7,20 betalen. Wat zou hij gekocht kunnen hebben? (bedenk verschillende mogelijkheden).



Dergelijke opgaven lenen zich aan de ene kant om allerlei al eerder verkende strategieën voor de kinderen nader voor het voetlicht te halen. Bijvoorbeeld: het gebruik van het compenseren bij opgaven als $4 \times €1,95$ (rekenen via $4 \times €2,-$ min $4 \times €0,05$). De geldsituatie maakt het mogelijk om het grondprincipe achter deze strategie (je vermenigvuldigt met een wat te groot getal, en trekt er daarna het te veel gerekende weer vanaf) op een aanschouwelijk niveau nader bewust te maken. Aan de andere kant kunnen ook relatief nieuwe strategieën aan de orde komen, zoals: de 'omgekeerde verdeel-eigenschap' om opgaven als $(3 \times €2,95) + (3 \times €2,45)$ te berekenen via $3 \times (€2,95 + €2,45)$, en dus via $3 \times €5,40$. Evenzo kan de bespreking van een opgave als $10 \times €0,95$ leiden tot een nadere doordinking van de nulregel met het oog op



geldbedragen: als je zo'n bedrag met 10 vermenigvuldigt worden de dubbeltjes hele euro's en de centen dubbeltjes. Het antwoord is dus 9 euro en nog 5 dubbeltjes, ofwel €9,50. Komen zulke opgaven met enige regelmaat aan de orde, dan leidt dit tot bewustwording van het feit dat de komma een plaats opschuift.

Activiteiten met steeds grotere getallen

In de loop van groep 7 en 8 leren de kinderen steeds grotere getallen kennen en de verschillende benoemingswijzen voor zulke getallen. In het hoofdstuk over getallen en getalrelaties is daar al het nodige over gezegd. Het is van grote waarde dat ze hiermee vertrouwd raken. Ze moeten zulke getallen steeds meer inhoud en betekenis kunnen geven. Dat gebeurt niet alleen via geschikte contexten zoals inwonertallen, kilometertellers, prijzen van huizen en afstanden in de ruimte, maar ook via activiteiten met kale getallen waarbij bijvoorbeeld allerlei vermenigvuldigingsstructuren bij een getal als 1 miljoen worden bedacht en beredeneerd.

1.000.000 (1 miljoen)		
1000×1000	2×500.000	10×100.000
500×2000	4×250.000	20×50.000
250×4000	8×125.000	40×25.000
125×8000	16×62.500	80×12.500

Niet alleen krijgen de kinderen via dergelijke oefeningen een steeds beter idee van de verschillende structureringen van een getal als 1 miljoen, maar ook komt hier een hoofdrekensstrategie naar voren die voor nogal wat kinderen relatief nieuw is: de strategie van het halveren-verdubbelen.⁸ Door opgaven die zich bij uitstek lenen voor deze strategie enkele keren gericht aan de orde te stellen, wordt bereikt dat de kinderen zich steeds meer bewust worden van het principe waarop deze strategie berust: als je bij een vermenigvuldiging de ene factor verdubbelt (verdrievoudigt, vertienvoudigt, ...) en de andere halveert (door 3 deelt, door 10 deelt, ...) blijft de uitkomst hetzelfde. Aan de hand van het rechthoekmodel in de vorm van een tegelpleintje (12 rijen van 15 tegels) kan dit principe nader aanschouwelijk gemaakt worden.



$$\begin{array}{r}
 15 \\
 12 \overline{) 180} \\
 \underline{120} \\
 60 \\
 \underline{60} \\
 0
 \end{array}$$

Ook andere nieuwe hoofdrekenstrategieën kunnen in relatie tot grote getallen onder de aandacht komen. Een voorbeeld hiervan is het transformeren (een opgave als $1980 + 370$ omvormen tot $2000 + 350$) en het vergroten of verkleinen van beide termen van een deling met dezelfde factor (een opgave als $750 : 15$ omvormen tot $1500 : 30$ en $150 : 3$). Dit onderbouwen van de strategieën aan de hand van modellen is belangrijk om inzicht erin te bevorderen.

Hoofdrekenen binnen andere leerlijnen

Het valt buiten het bestek van deze leerlijnbeschrijving om uitgebreid bij dit onderdeel stil te staan. In het hoofdstuk

over schattend rekenen wordt al beschreven hoe de ontwikkeling van deze rekenvorm in belangrijke mate steunt op een gedegen vaardigheid in het basale hoofdrekenen.

Verder is in dit hoofdstuk al op verschillende plaatsen gewezen op het grote belang van een goede hoofdrekenvaardigheid in verband met een vlotte verkenning van bijvoorbeeld het werken met de breuk als operator, het optellen en aftrekken van kommagetallen en het rekenen met eenvoudige percentages.

Zijn de kinderen namelijk goed thuis in het vlot uit het hoofd uitrekenen van sommen als $1200 : 6$ en $6000 : 4$, dan verloopt het leren uitrekenen van opgaven als '5/6 van een zaal met 1200 mensen' en '25% korting op een bedrag van €6000,-' ook veel vlotter. Het omgekeerde is eveneens waar. Via het rekenen met eenvoudige breuken en percentages wordt het vlot uitrekenen van opgaven als $1200 : 6$ en $6000 : 4$ onderhouden.

7

Eind groep 8 kunnen de leerlingen vlot en flexibel hoofdrekenen met gepaste getallencombinaties tot duizend en met ronde getallen daarboven, zowel kaal als in toepassingen met betrekking tot geld, tijd, gewichten, afstanden, en dergelijke.

Als een extra mogelijkheid om dergelijke opgaven op te lossen, hebben ze ook kennis gemaakt met strategieën als transformeren, halveren-verdubbelen en het vergroten of verkleinen van beide termen van een deling met dezelfde factor.

Deze doelen worden bevorderd indien er een uitgekiende opvolging van gevarieerde oefenactiviteiten plaatsvindt, waarbij de strategieën naar aanleiding van wat de kinderen aandragen in kort bestek met regelmaat de revue passeren. De oefeningen richten zich met name ook op het nader onderbouwen en het steeds flexibeler hanteren van deze strategieën. Om dit te bereiken vinden de activiteiten bij voorkeur plaats in een bepaald patroon, een bepaald ritme – een oefenritme waarbij verschillende didactische werkvormen (korte klassikaal-mondelinge activiteiten, spel- en puzzelachtige activiteiten, werken in groepjes, zelfstandig werken-activiteiten, ...) elkaar regelmatig afwisselen, en waarbij verschillende onderdelen op een gevarieerde en uitdagende manier aan de orde komen.

In het voorgaande is duidelijk geworden dat hoo niet zozeer betrekking heeft op een specifiek ge of specifieke bewerkingen. Het is veeleer de *benaderingswijze* van getallen en getalsmatige die kenmerkend is. Een benaderingswijze die te komt als de kinderen 'door de gebieden heen' e leiding van de onderwijsgevende de drieslag rij splitsend-gevarieerd hoofdrekenen een aantal k doorlopen. Ze bouwen daarbij gaandeweg een s breder repertoire aan hoofdrekenstrategieën op, combinatie met een steeds breder netwerk aan l getalrelaties.

Dat de verschillende deelgebieden zoals in het voorgaande beschreven nauw met elkaar samen moge afdoende duidelijk zijn geworden. De be benaderingswijze komt met name tot stand door binnen een bepaald gebied aan kennis, inzichten vaardigheden wordt ontwikkeld, binnen andere volop wordt toegepast en nader doordacht. Ook zorgvuldige uitbouw van de beide 'vertakkingen' kolomsgewijs/cijferend rekenen en schattend re draagt daartoe het nodige bij.

In het groeiende inzicht in de brede samenhang verschillende soorten handelingen manifesteert de *gecijferdheid* van de kinderen. Het besef drin verder door dat je de beschikking hebt over een mate van inzicht in de getallen als zodanig en o repertoire aan rekenstrategieën die grotendeels l tot het domein van het hoofdrekenen, maar daari tot het domein van het kolomsgewijs/cijferend re het schattend rekenen. En dat je al naar gelang e rekensituatie kunt kiezen voor een hoofdrekenaar kolomsgewijze of cijferaanpak, of een schataanj waarbij de rekenmachine vanaf een zeker mome meer als vierde 'rekenoptie' fungeert voor het g getallen erg groot en onoverzichtelijk worden, ter een precies antwoord wordt gevraagd.



Besluit

In het voorgaande is duidelijk geworden dat hoofdrekenen niet zozeer betrekking heeft op een specifiek getalgebied of specifieke bewerkingen. Het is veelmeer de *benaderingswijze* van getallen en getalsmatige gegevens die kenmerkend is. Een benaderingswijze die tot bloei komt als de kinderen 'door de gebieden heen' onder leiding van de onderwijsgevende de driestag rijgend-splitsend-gevarieerd hoofdrekenen een aantal keren doorlopen. Ze bouwen daarbij gaandeweg een steeds breder repertoire aan hoofdrekenstrategieën op, in combinatie met een steeds breder netwerk aan bekende getalrelaties.

Dat de verschillende deelgebieden zoals in het voorgaande beschreven nauw met elkaar samenhangen, moge afdoende duidelijk zijn geworden. De beoogde benaderingswijze komt met name tot stand doordat wat binnen een bepaald gebied aan kennis, inzichten en vaardigheden wordt ontwikkeld, binnen andere gebieden volop wordt toegepast en nader doordacht. Ook een zorgvuldige uitbouw van de beide 'vertakkingen' kolomsgewijs/cijferend rekenen en schattend rekenen draagt daartoe het nodige bij.

In het groeiende inzicht in de brede samenhang van de verschillende soorten handelingen manifesteert zich ook de *gecijferdheid* van de kinderen. Het besef dringt steeds verder door dat je de beschikking hebt over een zekere mate van inzicht in de getallen als zodanig en over een repertoire aan rekenstrategieën die grotendeels behoren tot het domein van het hoofdrekenen, maar daarnaast ook tot het domein van het kolomsgewijs/cijferend rekenen en het schattend rekenen. En dat je al naar gelang de rekensituatie kunt kiezen voor een hoofdrekenaanpak, een kolomsgewijze of cijferaanpak, of een schataanpak, waarbij de rekenmachine vanaf een zeker moment steeds meer als vierde 'rekenoptie' fungeert voor het geval de getallen erg groot en onoverzichtelijk worden, terwijl toch een precies antwoord wordt gevraagd.

Typerend voor de leerweg die binnen het gebied van het hoofdrekenen wordt doorlopen, is dat de kinderen hier een eigen stempel op kunnen drukken. Het is immers een essentieel kenmerk van het beschreven onderwijs dat ze in allerlei probleemsituaties binnen zekere grenzen volgens hun eigen werkwijze en op hun eigen niveau tot een oplossing komen, en dat ze via de gezamenlijke uitwisseling en doordenking onder leiding van de onderwijsgevende op hun eigen manier steeds verder komen. Dat brengt met zich mee dat ze tot op zekere hoogte eigen voorkeuren voor strategieën ontwikkelen, eigen verkortingen introduceren en eigen combinaties van strategieën gaan hanteren. In die zin is er dan ook sprake van een sterk gedifferentieerd leerproces dat zich bij uitstek leent om 'onderwijs op maat' te realiseren.

Het resultaat van het leerproces is dus aan de ene kant meer individueel bepaald, en aan de andere kant meer collectief. Alle kinderen zijn bijvoorbeeld in staat om opgaven als $1980 + 370$ en 36×50 correct en redelijk vlot op te lossen. Bij de een zal dit echter op een wat omslachtigere manier gebeuren en wordt nog even een tussenstap genoteerd, terwijl bij de ander een wat efficiëntere aanpak gevolgd wordt waarbij alles uit het hoofd gebeurt. Zo zal het ene kind bij de som $1980 + 370$ graag een tussenstap als $1900 + 300 = 2200$ op papier zetten, terwijl het andere kind zal zien dat je makkelijk even 20 van het tweede getal naar het eerste kunt 'overhevelen', en zodoende een makkelijk sommetje krijgt: $2000 + 350$.

Evenzo zal de een bij 36×50 graag even $30 \times 50 = 1500$ als tussenstap noteren, terwijl de ander deze som in gedachten omdraait (50×36) en handig uitrekent als de helft van 100×36 . En nog weer een ander denkt aan geld en vat de opgave op als 36 halve euro's (en dus 18 hele euro's). Zolang dergelijke handelingen vanuit een goed begrip van de betreffende strategie uitgevoerd worden, maakt het niet zoveel uit of de ene dan wel de andere strategie gebruikt wordt. Het is juist hierin dat de rijkdom van het hoofdrekenen zo treffend naar voren komt.



Maar er zijn natuurlijk grenzen.

Er is een bepaalde categorie opgaven waarvan het zonder meer wenselijk is dat alle kinderen deze vrijwel direct uit het hoofd weten. Evenzo is er een categorie opgaven die redelijk vlot en handig uit het hoofd uitgerekend dient te kunnen worden, en een categorie opgaven die eventueel via notatie van een tussenstap redelijk vlot opgelost moet kunnen worden.

Een dergelijke categorisering mag uiteraard niet als dwangbuis gaan werken, maar wel kan zij als een globaal richtsnoer fungeren voor wat voor verreweg de meeste kinderen haalbaar moet zijn.

Tot besluit van deze leerlijnbeschrijving volgt daarom hieronder een voorbeeld van een dergelijke 'staalkaart':

Staalkaart van hoofdrekenopgaven in drie categorieën		
Eerste categorie: vrijwel direct weten op basis van gemenoriseerde kennis of inzicht in regels/eigenschappen	Tweede categorie: vlot en handig uit het hoofd	Derde categorie: redelijk vlot en handig uit het hoofd, eventueel via tussennotaties
$36 + 60 =$ $62 - 40 =$ $620 - 7 =$ $457 + 8 =$ $12.000 + 9.000 =$ $21.000 - 3.000 =$ $10 \times 36 =$ $94 \times 1000 =$ $4500 : 45 =$ $36.000 : 1000 =$ $700 \times 6 =$ $4500 : 9 =$ $4 \times \dots = 100$ $300 : \dots = 50$	$37 + 48 =$ $92 - 78 =$ $350 + 280 =$ $620 - 370 =$ $256 + 256 =$ $702 - 635 =$ $5000 : 2 =$ $10.000 - 30 =$ $12 \times 50 =$ $600 \times 15 =$ $900 : 6 =$ $36.000 : 20 =$ $245 + 245 + 245 + 245 =$ $740 - 37 - 63 =$ $8 \times 9 \times 5 =$ $4 \times 17 \times 25 =$ Jan koopt drie kaartjes van 18 euro voor het circus; hij betaalt met 3 briefjes van 20. Hoeveel krijgt hij terug? Hoeveel uren zitten er in 1 week?	$345 + 287 =$ $325 - 249 =$ $6 \times 78 =$ $4 \times 347 =$ $1624 : 8 =$ $4800 : 25 =$ $2980 + 370 =$ $2980 - 370 =$ $195 : 5 =$ $750 : 15 =$ $100.000 = \dots \times 250$ $100.000 = \dots \times 500$ $12 \times 15 =$ $16 \times 25 =$ $36 \times 50 =$ $40 \times 68 =$ De trein vertrekt om 12 minuten over 9. Als Lisa op haar horloge kijkt is het 20.28 uur. Hoelang duurt het nog voor de trein vertrekt? Je koopt 3 stokbroden van €0,95 per brood en 3 appelflappen van €0,85 per flap. Hoeveel kost dat bij elkaar?



‘Goed,’ zei de vader, ‘reken dan nu maar eens uit hoeveel winst ik op elk van die auto’s gemaakt heb en tel alles bij elkaar op. Dan kun jij vertellen hoeveel jouw slimme vader vandaag heeft verdiend.’

‘Dat zijn een hoop sommen,’ zei de jongen.

‘Ja, allicht zijn dat een hoop sommen,’ zei de vader. ‘Maar wanneer je grote zaken doet, zoals ik, moet je een kei in rekenen zijn. Ik heb zo ongeveer een computer in mijn hoofd. Ik deed er nog geen tien minuten over om alles uit te rekenen.’

‘Bedoelt u dat u dat uit uw blote hoofd heeft uitgerekend, pap?’ vroeg de zoon met wijd opengesperde ogen. ‘Nou nee, dat niet,’ zei de vader. ‘Dat kan niemand. Maar ik deed er niet lang over. Als je klaar bent vertel je me maar eens hoeveel winst je denkt dat ik vandaag gemaakt heb. Ik heb het bedrag hier opgeschreven dus ik kan je zo vertellen of je het goed hebt.’

Matilda zei zachtjes: ‘Pappa, u hebt precies vierduizenddriehonderddrie pond vijftig verdiend.’

‘Hou jij je erbuiten,’ zei de vader. ‘Je broer en ik zijn druk bezig met belangrijke financiële zaken.’

‘Maar pappa...’

‘Hou je kop,’ zei de vader. ‘Hou op met dat stomme raden en de knappe kop uithangen.’

‘Kijk maar naar uw getal, pappa,’ zei Matilda kalm. ‘Als u het goed hebt uitgerekend, moet het vierduizenddriehonderddrie pond vijftig zijn. Hebt u dat ook, pappa?’

De vader keek op het papier in zijn hand. Hij scheen te verstijven. Hij bleef onbeweeglijk staan. Het bleef stil. Toen zei hij: ‘Zeg dat nog eens?’

Uit: *Matilda* van Roald Dahl

Kolomsgewijs rekenen en cijferen

Inleiding

Cijferen is receptmatig rekenen met cijfers. Bij optellen gaat het als volgt.

$$\begin{array}{r} 463 \\ 382 \\ \hline 845 \end{array} +$$

Handwritten notes in a cloud: $3+2=5$, $6+8=14$, 4 opschrijven, 1 onthouden.

Cijferen past bij het opereren met relatief grote hele getallen en veelcijferige kommagetallen waarmee niet eenvoudig en vlot uit het hoofd gerekend kan worden. Althans vroeger gebeurde dat zo, want vandaag de dag kan men in die gevallen ook de rekenmachine inschakelen. Alleen zal men daartoe in bovenstaand voorbeeld niet willen overgaan, daarvoor zijn de getallen te klein. Zelfs cijferen is hier discutabel. In ieder geval moeten leerlingen van groep 5 (6) een dergelijke opgave ook niet-cijferend kunnen oplossen, zo luidt het algemene oordeel. Dat kan op verschillende manieren. Een ervan gaat via kolomsgewijs rekenen.

$$\begin{array}{r} 463 \\ 382 \\ \hline 700 \\ 140 \\ 5 \\ \hline 845 \end{array} +$$

Handwritten note in a cloud: $700 + 140 = 840$.

Kenmerkend voor kolomsgewijs rekenen is niet zozeer de verticale schrijfwijze van de opgave, als wel de splitsende rekenwijze met positiegetallen bij het berekenen van deeltuitkomsten, werkend van groot-naar-klein, van links-naar-rechts. Dit in tegenstelling tot cijferen waarbij van klein-naar-groot, van rechts-naar-links, met positiecijfers wordt geopereerd.

Cijferend optellen kan als de ultieme verkorting van kolomsgewijs optellen worden opgevat.

$$\begin{array}{r} (a) \quad 463 \\ 382 \\ \hline 700 \\ 140 \\ 5 \\ \hline 845 \end{array} + \quad \begin{array}{r} (b) \quad 463 \\ 382 \\ \hline 5 \\ 140 \\ \hline 700 \\ \hline 845 \end{array} + \quad \begin{array}{r} (c) \quad 463 \\ 382 \\ \hline 845 \end{array} + \downarrow$$

In (a) wordt eerst splitsend gerekend van groot-naar-klein en vervolgens worden de deeltuitkomsten samengevoegd (700, ...840, ...845). Dit is de grondvorm van kolomsgewijs rekenen. In (b) wordt splitsend gerekend van klein-naar-groot en worden de deeltuitkomsten verticaal ($\downarrow$) met cijfers opgeteld. In (c) wordt cijferend gerekend volgens het aloude optelalgoritme. De overgang van (a) naar (b) wordt gemarkeerd door een richtingsverandering bij het berekenen van de deeltuitkomsten en vervolgens bij het bepalen van de uitkomst. De transformatie van (b) in (c) bestaat voornamelijk uit het verkort kolomsgewijs uitrekenen van de deeltuitkomsten per kolom. Hier vindt de overgang plaats van rekenen met positiegetallen ($5 + 140 + 700$) naar positiecijfers ($2 + 3 = 5$; $6 + 8 = 14$; 4 opschrijven 1 onthouden; $1 + 4 + 3 = 8$). Wordt in het vervolg over 'kolomsgewijs rekenen' gesproken dan verwijst dit naar (a). Met 'cijferen' wordt (c) bedoeld. Daartussen zijn verschillende overgangsvormen mogelijk, waarvan (b) een voorbeeld is. In het geval van optellen kan cijferen dus als een natuurlijk verlengstuk en sluitstuk van kolomsgewijs (hoofd-)rekenen worden beschouwd, als het eindproduct van een abc-proces van voortgaande schematisering en automatisering van rekenhandelingen. Kortom, er bestaat een relatie tussen kolomsgewijs (hoofd-)rekenen en cijferen.



Historisch uitstapje

Aan het eind van de 19^e eeuw dachten de belangrijkste leerboekauteurs nogal verschillend over de plaats en de betekenis van het cijferen. Van Pelt benadrukte vooral het hoofdrekenen en meende dat het, zoals net aangegeven, de grondslag van het cijferen diende te vormen. Bij Versluys, de andere gezaghebbende auteur uit die tijd, hebben hoofdrekenen en cijferen van meet af aan een zelfstandige positie naast elkaar – geen van beide krijgt het primaat. In de eerste helft van de 20^e eeuw was de situatie bij de toenmalige leerboekauteurs niet anders: Diels en Nauta accentueerden het hoofdrekenen, en Bouman en Van Zelm het cijferen. Eerstgenoemden gingen daarbij nog een stap verder dan Van Pelt deed. Geïnspireerd vanuit het hoofdrekenen brachten zij zelfs wijzigingen in de bestaande gangbare algoritmen aan. Bij aftrekken bijvoorbeeld werden de kinderen gestimuleerd om, waar nodig, met cijfergroepjes te werken.

$$\begin{array}{r} 967 \\ 340 \\ \hline 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} 967 \\ 340 \\ \hline 619 \end{array}$$

"7 - 8 gaat niet, maar 67 - 48 lukt wel:

67 - 48 = 19 en 9 - 3 = 6"

In het standaardalgoritme volgens Bouwman en Van Zelm werd echter strikt per kolom van rechts-naar-links gerekend.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 967 \\ 340 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 967 \\ 340 \\ \hline 619 \end{array}$$

"7 - 8 gaat niet, daarom leen ik een tien uit de buurkolom"

Bij deze standaardprocedure moet je vlot onder de twintig kunnen aftrekken, terwijl in de groepjesaanpak vaardig onder de honderd (of duizend...) gerekend moet kunnen worden. En daar besteedde die methode dan ook veel aandacht aan. Om die reden startte hun cijferleergang wat later dan toen gebruikelijk was.

Vanaf 1985 gaan de zogenoemde realistische reken-wiskundemethoden de onderwijsmarkt domineren en maakt de rekenmachine grote opgang. Daarmee verschuift het zwaartepunt van het rekenonderwijs geleidelijk aan steeds meer naar het hoofdrekenen – een ontwikkeling die nu nog in volle gang is.

De traditionele cijferalgoritmen zijn nog niet uit het onderwijsprogramma geschrapt. Maar vanaf 1985 voltrekken zich drie belangrijke wijzigingen:

1. cijferend optellen en aftrekken start een jaar later dan eertijds gebeurde, dus niet in groep 5 maar in groep 6
2. cijferend vermenigvuldigen wordt geleidelijk aan vanuit kolomsgewijs vermenigvuldigen ontwikkeld en wordt niet altijd tot de meest verkorte vorm herleid
3. cijferend delen gebeurt nu meestal niet meer volgens de meest verkorte procedure van de traditionele staartdeling, maar volgens een inzichtelijke voorvorm daarvan.

Toelichting.

1. Tot medio groep 6 komt nu het accent op hoofdrekenen te liggen, waartoe bij betrekkelijk kleine getallen ook het kolomsgewijs optellen en aftrekken kan behoren. Vroeger lag de nadruk op cijferen.
2. Een vermenigvuldiging als 7×46 bijvoorbeeld wordt thans niet meer meteen of zelfs helemaal niet tot het traditionele cijferalgoritme (c) verkort:

$$\begin{array}{ccc} \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \\ \begin{array}{r} 46 \\ 7 \times \\ \hline 280 \\ 42 \\ \hline 322 \end{array} & \begin{array}{r} 46 \\ 7 \times \\ \hline 280 \\ 42 \\ \hline 322 \end{array} & \begin{array}{r} 46 \\ 7 \times \\ \hline 322 \end{array} \end{array}$$

In tussenvorm (a) wordt $280 + 42$ samenvoegend uitgerekend via bijvoorbeeld $280 + 20 = 300$; $300 + 22 = 322$. Dit gebeurt veelal *hoofdrekenend*.

In de tussenvorm (b) worden de tussenuitkomsten genoteerd en vervolgens cijferend opgeteld. In (c) is dit alles tot één rekenhandeling verdicht, namelijk die van het cijferend vermenigvuldigen. Berekening (c) is korter, maar niet wezenlijk verschillend van (b). Om die reden noemen we (b) ook cijferen.



3. Bij het delen is de verkorting tot het traditionele cijferalgoritme (c) in de methoden zelfs hoge uitzondering.

$$\begin{array}{r}
 (a) \ 12 \overline{) 422} \\
 \underline{120} \quad 10x \\
 302 \\
 \underline{240} \quad 20x \\
 62 \\
 \underline{60} \quad 5x \\
 2 \quad 35x
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (b) \ 12 \overline{) 422} \\
 \underline{360} \quad 30x \\
 62 \\
 \underline{60} \quad 5x \\
 2 \quad 35x
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (c) \ 12 \overline{) 422} \setminus 35 \\
 \underline{36} : \\
 62 \\
 \underline{60} \\
 2
 \end{array}$$

Uit een en ander kan men concluderen dat het cijferen minder accent krijgt en dat de nadruk steeds meer op hoofdrekenen, schattend rekenen en het passende gebruik van de rekenmachine komt te liggen – een internationale trend. Tevens is duidelijk dat de positie van het cijferen thans nog niet precies is bepaald.

Positie van het cijferen

De vraag is echter wat de diepere beweegredenen zijn om het cijferen een minder prominente plaats toe te wijzen. Waarom zou het cijferen, dat van oudsher als het geraante van het rekenonderwijs beschouwd wordt, nu op korte termijn als basale vaardigheid ten dele of zelfs geheel plaats moeten maken voor kolomsgewijs rekenen?

De tegenstanders van het cijferen zullen hierop antwoorden dat de maatschappelijke relevantie van de vaardigheid in cijferen nihil is. Voor betrekkelijk moeilijke getallen en gevallen zet iedere volwassene tegenwoordig de rekenmachine in. En voor de minder complexe gevallen staat het kolomsgewijs rekenen of meer algemeen het hoofdrekenen ter beschikking – zo luidt hun slotsom.

De voorstanders van het cijferen vinden dit praktische argument echter te schraal. Zij wijzen vooral op de wiskundige waarde van het proces van algoritmiseren en de persoonlijke waarde die deze vaardigheid kan hebben, plus eventueel de voorbereidende waarde ervan voor het vervolgonderwijs.

De eerder gesignaleerde ontwikkelingen in Nederland kunnen echter tot een genuanceerdere beschouwing dan van louter pro of contra cijferen leiden.

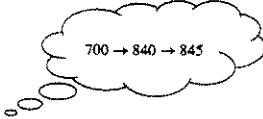
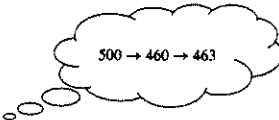
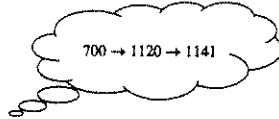
Enkele feiten:

- Het aanleren van de cijferalgoritmen kost, als daarin ook de genoemde complexe gevallen worden betrokken, minstens honderd lesuren. En in landen waar het primaat bij het cijferen ligt – zoals bijvoorbeeld in de Verenigde Staten – neemt het alles bij elkaar zelfs een heel rekenjaar in beslag, dus tegen de tweehonderd lesuren.
- Onderzoek wijst uit dat een vroege invoering van het cijferen en een uitgebreid vervolg erop een groot obstakel is voor de ontwikkeling van hoofdrekenen in de vorm van handig, gevarieerd rekenen, en van schattend rekenen. Of anders gesteld: deze nadruk op het cijferen vormt een blokkade voor de groei naar gecijferdheid.
- Kolomsgewijs rekenen bevordert het hoofdrekenen en het schattend rekenen, mede vanwege de gevolgde rekenrichting van groot-naar-klein, waardoor de orde van grootte van de uitkomst al in het begin van het rekentraject globaal bekend is.
- Kolomsgewijs rekenen is in die zin ‘natuurlijk’ dat het aansluit bij informele aanpakken van kinderen. Het is naast rijgend rekenen en gevarieerd, handig rekenen een van de hoofdstrategieën die kinderen spontaan hanteren. Het onderwijs kan daarop aansluiten en deze splitsaanpak stileren tot ordelijk genoteerd kolomsgewijs opereren.
- De cijferprocedure van optellen kunnen kinderen betrekkelijk makkelijk leren in relatief korte tijd – zeg zo’n vijf lessen – nadat ze goed vertrouwd zijn gemaakt met het kolomsgewijs optellen. Deze cijfervaardigheid kan ook worden toegepast bij het kolomsgewijs vermenigvuldigen. Hetzelfde geldt voor cijferend aftrekken en kolomsgewijs delen.

Deze overwegingen leiden tot een onderwijsprogramma waarin een passende plaats voor het cijferen is ingeruimd.



Overzicht van de tussendoelen

	Kolomsgewijs rekenen	Cijferen
+	$\begin{array}{r} 463 \\ 382+ \\ 700 \\ 140 \\ \hline 5 \\ \hline 845 \end{array}$ 	$\begin{array}{r} 463 \\ 382+ \\ 5 \\ 140 \\ \hline 700 \\ \hline 845 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1 \\ 463 \\ 382+ \\ \hline 845 \end{array}$
-	$\begin{array}{r} 845 \\ 382- \\ 500 \\ -40 \\ \hline 3 \\ \hline 463 \end{array}$ 	$\begin{array}{r} 714 \\ 845 \\ 382- \\ \hline 463 \end{array}$
×	$\begin{array}{r} 163 \\ \times 7 \\ \hline 700 \\ 420 \\ 21 \\ \hline 1141 \end{array}$  Idem 70×163	$\begin{array}{r} 163 \\ \times 7 \\ \hline 21 \\ 420 \\ \hline 700 \\ \hline 1141 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 42 \\ 163 \\ \times 7 \\ \hline 1141 \end{array}$ Idem 70×163 en 47×163
:	$\begin{array}{r} 422:12 = 35 \text{ rest } 2 \\ 422 \\ \underline{360} \quad 30 \times \\ 62 \\ \underline{60} \quad 5 \times \\ 2 \end{array}$  ○ controle via vermenigvuldigen	

De opgaven verwijzen naar communale doelen voor kolomsgewijs rekenen en cijferen.
Het kader met een stippellijn verwijst naar een differentieel doel.

Toelichting bij het schema.

De aangeduide standaardprocedures van kolomsgewijs rekenen voor de vier basisbewerkingen behoren tot de basale vaardigheden die de kinderen in de loop van de basisschool moeten leren.

Het zijn communale leerdoelen, dus doelen die alle leerlingen van de basisschool op het gebied van de hele getallen dienen te bereiken. Hetzelfde geldt voor de cijferalgoritmen van optellen, aftrekken en vermenigvuldigen (in minder verkorte vorm).



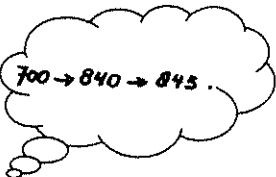
Korte karakteristiek:

- de nadruk ligt op de standaardprocedures van het kolomsgewijs rekenen
- cijferend optellen kost niet veel tijd en kan op natuurlijke wijze uit kolomsgewijs optellen worden afgeleid
- cijferend optellen is van belang voor het uitrekenen van tussenuitkomsten bij het cijferend vermenigvuldigen
- cijferend vermenigvuldigen hoeft niet in de meest verkorte vorm te worden uitgevoerd
- cijferend aftrekken wordt uitgesteld tot de kinderen goed kolomsgewijs kunnen aftrekken en het cijferend optellen volledig beheersen.

In het volgende zal eerst het kolomsgewijs rekenen nader worden toegelicht, gevolgd door een korte beschouwing over cijferen.

Kolomsgewijs optellen

In algemene zin wordt de splitsaanpak aangeduid met 'kolomsgewijs rekenen', ook al worden de opgaven niet alleen onder elkaar maar vaak ook naast elkaar genoteerd.

$$\begin{array}{r} 463 \\ 382 + \\ \hline 700 \\ 140 \\ 5 \\ \hline 845 \end{array}$$


Kenmerkend voor de *eindvorm* van deze rekenwijze is:

- dat met positiewaarden wordt geopereerd, werkend van groot-naar-klein, van links-naar-rechts ($700 + 140 + 5$)
- waarbij de tussenuitkomsten samenvoegend worden berekend (700; 840; 845)
- en de berekening volgens een vast schema naast elkaar dan wel onder elkaar wordt genoteerd
- of uit het hoofd gebeurt, binnensmonds sprekend "zevenhonderd, achthonderdveertig, achthonderdvijfveertig".

Er wordt hierbij geen strikt onderscheid gemaakt tussen kolomsgewijs uit het hoofd rekenen en schriftelijk kolomsgewijs rekenen, waarbij tussenuitkomsten genoteerd worden. In het eerste geval zou men over kolomsgewijs *hoofdrekenen* kunnen spreken. Zoals zal blijken, is het onderscheid met het schriftelijke kolomsgewijs rekenen niet wezenlijk. Ook in het laatste geval dient uit het hoofd te worden gerekend. Alleen heeft men daarbij steun van de genoteerde tussenuitkomsten. Dit is echter slechts een gradueel onderscheid. Van een essentieel verschil is geen sprake. De variatie van aanpakken kan men dan ook aanduiden met de omvattende term kolomsgewijs (hoofd)rekenen. Dit betekent dat de hier geschetste aanpak een nadere uitwerking en standaardisering is van wat op elementair niveau in het hoofdstuk 'Hoofdrekenen' is geschetst.

Zoals eerder gezegd, wordt in het laatste geval gesproken van kolomsgewijs *hoofdrekenen*.

Het kolomsgewijs rekenen stoelt onder andere op enkele *basale vaardigheden* die in de loop van groep 5 (6) verworven moeten worden:

- decimaal opsplitsen van getallen
 - vlot uit het hoofd optellen van deze positiewaarden.
- Deze vaardigheden kunnen ook apart worden geoefend:

- > Hoeveel is de 4 waard in 463? En hoeveel de 6? ...
- > Hoeveel is $700 + 140$? En hoeveel $840 + 5$? ...

Leerlingen moeten vlot samenvoegend kunnen rekenen. Ze doen dit mede op basis van hun kennis van de elementaire optellingen tot twintig die ze inzetten voor het optellen van honderdtallen, tientallen en eenheden, en later ook voor duizendtallen en zo verder rekenend met ronde getallen.

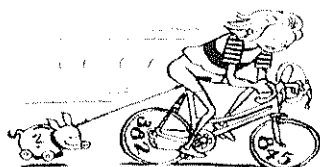
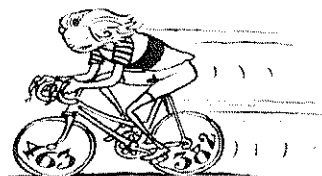
In het begin van de leergang kolomsgewijs optellen kan men geld als concrete grondslag laten fungeren.



➤ Anne spaart voor een nieuwe racefiets.

Vorig jaar spaarde ze 463 euro en dit jaar 382 euro.

Hoeveel heeft ze al gespaard?



Splitsen manifesteert zich hierbij als optellen van honderdjes, tientjes en euro's. Nadat in de nabespreking eerst de rijgaanpakken en varia-methoden kort zijn besproken, concentreert zich de les verder op de verschillende splitsstrategieën:

optellen van links-naar-rechts, dus van groot-naar-klein werkend met positiewaarden;

tussenberekeningen worden genoteerd:

$$400 + 300 = 700$$

$$60 + 80 = 140$$

$$3 + 2 = 5$$

bij elkaar 845

idem, maar zonder genoteerde tussenberekeningen:

700; 840; 845

optellen van rechts-naar-links, dus van klein-naar-groot werkend met positiewaarden;

tussenberekeningen worden genoteerd:

$$2 + 3 = 5$$

$$60 + 80 = 140$$

$$300 + 400 = 700$$

bij elkaar 845

– idem, maar zonder genoteerde tussenberekeningen:

5; 145; 845

– mengvormen zoals:

$$400 + 300 = 700$$

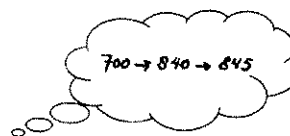
$$63 + 82 = 60 + 80 = 140 + 5 = 145 + 700 = 845;$$

die vooral in de eerste ronde voorkomen.

Wat in z'n algemeenheid opvalt is dat kinderen van groep 5 (6) bij het noteren het =-teken als tussenstop bij het berekenen inzetten en niet als een evenveel-teken (... 300 + 400 = 700 + 145 ...). Ze schrijven op hoe ze denken, en gebruiken daarbij de rekentaal op informele wijze. Meestal schrijven ze de berekeningen achter elkaar, maar verticale, kolomsgewijze notaties worden ook van meet af aan gehanteerd.

Uitgangspunt van de rekendidactiek is dat deze informele rekentaal gehonoreerd dient te worden en niet zonder meer als 'fout' wordt afgedaan. Maar het onderwijs moet er wel naar streven om de ordelijke en correcte beschrijvingswijzen te bevorderen. De leraar geeft met de eerder aangegeven verticale notatievorm het goede voorbeeld. Vooral bij getallen met meer dan drie cijfers springt het voordeel van de overzichtelijke kolomsgewijze notatie in het oog.

Overigens zijn er in de eerste lessen ook direct al leerlingen die het antwoord uit het hoofd berekenen.



Ze stapelen de tussenuitkomsten en spreken die zacht voor zichzelf uit. Uiteraard wordt uit het hoofd rekenen geleidelijk aan steeds meer gestimuleerd.

Medio groep 6 moet het overgrote deel van de leerlingen in staat zijn om optellingen van driecijferige getallen splitsend (uit het hoofd) te berekenen. Al zullen ze in voorkomende gevallen uiteraard ook de rijgmethode of de varia-aanpak inzetten.



Medio groep 6 kunnen de leerlingen kolomsgewijs optellen onder de duizend en zijn ze in staat deze standaardprocedure toe te passen in elementaire contextproblemen.
Eind groep 6 kunnen ze een en ander ook met getallen boven de duizend. Deze optelprocedure kan minder of meer verkort genoteerd en uitgevoerd worden.

Het onderwijs in groep 5 is behalve op het rijgende en handige optellen vooral ook op het splitsend rekenen gericht. Het kolomsgewijs optellen kan als een standaardisering van het splitsend optellen worden beschouwd. Aanvankelijk wordt volstaan met het kolomsgewijs opereren met driecijferige getallen. Dit vormt de grondslag voor het kolomsgewijs optellen met nog wat grotere getallen in groep 6 en daarna. Maar dat gebeurt spaarzaam, omdat voor de moeilijke gevallen als regel wordt gecijferd of de rekenmachine wordt ingezet.

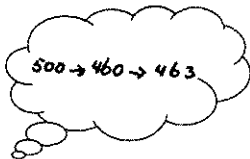
Basaal voor het kolomsgewijs optellen is dat leerlingen de verticaal genoteerde tussenuitkomsten van een opgave als $569 + 78$ vlot uit het hoofd kunnen samenvoegen via $500 + 130 + 17$. Deze vaardigheid dient vanaf groep 5 intensief te worden geoefend tijdens korte mondelinge rekensessies.

Overigens zullen de leerlingen in de hoogste leerjaren bij complexere opgaven niet meer kolomsgewijs optellen maar cijferend optellen, nadat zij dit algoritme in de loop van groep 6 hebben geleerd.

Kolomsgewijs aftrekken

De *eindvorm* van kolomsgewijs aftrekken ziet er als volgt uit:

$$\begin{array}{r} 845 \\ 382 - \\ \hline 500 \\ - 40 \\ 3 \\ \hline 463 \end{array}$$



Om op deze wijze te kunnen rekenen met positiewaarden moeten kinderen makkelijk met honderdtallen, tientallen en eenheden kunnen opereren. Nu niet alleen meer 'voorwaarts' zoals bij optellen gebeurt, maar ook 'terug' en 'vooruit' vanaf honderdtallen en tientallen ($500 - 40$; $460 + 3$).

De basale vaardigheden die eraan ten grondslag liggen, verschillen nauwelijks met die van het optellen. Kinderen moeten zich ook hier vlot over de mentale getallenlijn kunnen bewegen met de betreffende ronde getallen, mede op basis van kennis van de elementaire aftrekkingen tot tien.



Het kolomsgewijs aftrekken kan het beste concreet binnen een geldcontext worden geïntroduceerd die het opereren met honderdjes, tientjes en euro's op een natuurlijke wijze uitlokt.

- > Hanneke had 845 euro gespaard.
- Nu heeft ze 382 euro uitgegeven voor een tweedehands racefiets.
- Hoeveel euro heeft ze nog over?

Deze opgave wordt in groep 5 (6) gevarieerd opgelost met zowel optelstrategieën als aftrekstrategieën.

De optel-aanpakken waarin de afstand tussen 382 en 845 stapsgewijs wordt overbrugd, laten we hier onbesproken. En ook de niet-splitsende aftrekmethoden die kinderen bij dit probleem hanteren, blijven buiten beschouwing. Beide komen in de onderwijspraktijk bij de nabespreking natuurlijk wel uitgebreid aan bod. In videofragment 4 wordt hiervan een indruk gegeven.



De splitsstrategieën die de kinderen bij de start van de leergang hanteren zijn zeer divers. We bepalen ons hier tot de verkorte splitsstrategie die sommige leerlingen hanteren. Daarin worden de tussenberekeningen soms als volgt door kinderen genoteerd.

$$845 - 382 = 500 - 40 = 460 + 3 = 463$$

$$845 - 382 = 500 - 40 + 3 = 463$$

$$845 - 382 = 500 - 37 = 463$$

Wat eerder bij het optellen werd opgemerkt over de informele manieren van noteren, geldt in nog sterkere mate voor het splitsend aftrekken: kinderen rijgen de = tekens onbekommerd aan elkaar.

Maar ook bij het aftrekken is het zaak om deze informele notatiewijzen geleidelijk aan te stileren tot rekenkundig correcte en overzichtelijke schrijfwijzen achter elkaar of onder elkaar. Als overgang is ook een mengvorm mogelijk.

	845	
	382	-

800 - 300 →	500	
40 - 80 →	-40	
5 - 2 →	3	

	463	

Verder dient het uit het hoofd berekenen, dus zonder het maken van tussennotaties, steeds meer aangemoedigd te worden naarmate de kinderen vorderen met de gevolgde standaardprocedure. Kolomsgewijs rekenen wordt dan meer specifiek kolomsgewijs *hoofdrekenen*. Bij grote, complexere getallen zal het echter bij kolomsgewijs rekenen op papier blijven. Daar is uiteraard geen enkel bezwaar tegen.

Hoe dient het onderwijs te worden ingericht opdat de kinderen deze basale vaardigheid van kolomsgewijs rekenen met inzicht kunnen verwerven?

Bij de Hanneke-som ($845 - 382 =$) wordt de geldcontext in de didactische beschouwing betrokken. Hanneke heeft 845 euro: 8 honderdjes, 4 tientjes en 5 euro.

Als Hanneke van de 8 honderdjes er 3 uitgeeft houdt ze 5 honderdjes over: $800 - 300 = 500$.

Daarna moet ze van de 4 tientjes er 8 uitgeven, dan houdt ze er 0 over, en komt dan nog 4 tientjes tekort.

Of anders gezegd, dan moet ze straks nog 4 tientjes of 40 euro betalen: $40 - 80 = -40$.

Ten slotte haalt ze van de 5 euro er 2 af: $5 - 2 = 3$.

Ze houdt dus over 463.

$$\begin{array}{r} 500 \\ - 40 \\ 3 \\ \hline 463 \end{array}$$



Overigens blijkt dat na zo'n concrete, betekenisvolle introductie via de geldcontext, de kinderen het rekenen met tekorten betrekkelijk snel doorzien en kunnen toepassen.

Bovendien heeft de verticale notatie een belangrijk voordeel ten opzichte van de horizontale schrijfwijze met positiestrepen.

De genoemde werkwijze kan ook bij een moeilijke opgave worden toegepast:

$$\begin{array}{r} 7538 \\ 2842- \\ \hline 5000 \\ -300 \\ -10 \\ \hline 6 \\ 4690 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4700 \\ 4690 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |5000|-300|-10| \quad 6 \quad | \\ |4696| \end{array}$$

Ze kan namelijk verkort worden tot een half-cijferende aanpak ($50 - 3 = 47...$; 4690; 4696). Je laat bij de verticale berekening als het ware de waarde van de positiecijfers even los. Daardoor worden, zo blijkt uit kleinschalig onderzoek, minder snel fouten gemaakt.

2

Eind groep 6 kunnen de leerlingen kolomsgewijs aftrekken onder de duizend en deze vaardigheid bij het maken van elementaire contextproblemen toepassen.

Medio groep 7 kunnen ze een en ander ook met getallen boven de duizend. Deze aftrekprocedure kan minder of meer verkort genoteerd en uitgevoerd worden.

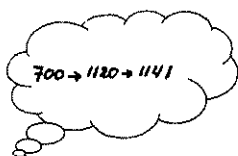
Het kolomsgewijs aftrekken met tekorten sluit aan op natuurlijke aanpakken die sommige kinderen zelf ontwikkelen en die in het onderwijs verder worden gestileerd. Dat geldt met name ook voor de overzichtelijke notatie van de tussenuitkomsten onder elkaar. Voor het vlot kunnen berekenen van de uitkomst is het allereerst noodzakelijk dat de kinderen de tussenuitkomsten vlot kunnen samenvoegen, onder meer door vaardig over de getallenlijn te bewegen. Ze moeten de volgende tussenuitkomsten vlot en makkelijk uit het hoofd kunnen berekenen: $100 - 20$; $600 - 70 + 3$; $1000 - 300 + 40 - 5...$ Bij grotere aftrekkingen met niet afgeronde getallen van meer dan vier cijfers zal in het algemeen gecijferd of de rekenmachine ingezet worden. De kinderen moeten uiteraard wel in staat zijn om de uitkomst daarvan in orde van grootte uit het hoofd te berekenen door van links-naar-rechts, van groot-naar-klein te werken.



Kolomsgewijs vermenigvuldigen

De *eindvorm* van het elementaire kolomsgewijs vermenigvuldigen ziet er als volgt uit:

$$\begin{array}{r} 163 \\ \times 7 \\ \hline 700 \\ 420 \\ 21 \\ \hline 1141 \end{array}$$



Als deze standaardprocedure aan de orde komt, hebben de leerlingen de volgende basale vaardigheden al via hoofdrekenen en schattend rekenen verworven:

- inzicht in de elementaire vermenigvuldigstructuur via herhaald optellen (sprongen, groepjes) en met het rechthoekmodel
- inzicht in de opbouw van het tientallige positiesysteem
- inzicht in de tientafel van ($10 \times \dots$ en $\dots \times 10$) met de bijbehorende ‘nulregel’ ($10 \times 23 = 23 \times 10 = 230$)
- vaardigheid in het splitsende, kolomsgewijs optellen
- vaardigheid in het samenvoegen van deeltkomsten ($700 + 420 + 21$)
- kennis van de tafels.

Deze vaardigheden worden in groep 5 en 6 verworven door het gedurig blijven oefenen van elementaire vermenigvuldigingen in het getallengebied tot honderd, en uiteraard ook via het kolomsgewijs optellen en het vlot leren bewegen over de getallenlijn.

Als modelcontext voor kolomsgewijs vermenigvuldigen kan men een geldecontext kiezen.

- > Oma is jarig.
- Ze trakteert op een etentje.
- 7 personen, ieder 23 euro.
- Hoeveel moet oma betalen?

Bij de start van de leergang in groep 6 wordt deze opgave gevarieerd opgelost.

De drie meest gebruikte splitsende rekenstrategieën, naast die van het rijgen en het varia-rekenen, zijn:

- herhaald optellen, kolomsgewijs rekenend van links-naar-rechts of van rechts-naar-links, veelal verticaal genoteerd
- herhaald optellen, gecombineerd met verdubbelen, naast elkaar of onder elkaar genoteerd
- splitsend vermenigvuldigen, gevarieerd genoteerd en berekend via 7×20 plus 7×3 , of 7×10 en 7×10 plus 7×3 , dan wel in omgekeerde richting werkend.

De keer-aanpak is een verkorting van de plus-methode. In de nabespreking komt dit nadrukkelijk naar voren. Daarbij wordt teruggegrepen op de geldecontext:

- Oma moet 7 keer 2 tientjes betalen en 7 keer 3 euro, en de betreffende bedragen kun je kort noteren met: 140 plus 21.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 7 \\ \hline 7 \times 2 \text{ tientjes} \quad 140 \\ 7 \times 3 \text{ euro} \quad 21 \\ \hline 161 \end{array}$$

Deze tussenvorm van noteren geeft de leerling in deze context houvast bij het zich realiseren hoe er betaald en gerekend wordt.

Maar zoals al eerder werd opgemerkt, is het didactisch niet verantwoord om te proberen de kinderen van meet af aan in het keurslijf van een dergelijke notatie te persen. Geleidelijk aan komen de ‘herhaalde optellers’ zelf tot het besef dat ze zowel de schrijfwijze als de berekening kunnen inkorten. Want ook al bij het herhaalde optellen zullen velen hun kennis van de tafels inzetten, zeker als ze daar in de interactieve nabespreking door hun groepsgenoten en de leraar op gewezen worden.

In de volgende lessen krijgen de leerlingen soortgelijke opgaven aangeboden, in context en in kale rekenvorm.



Het overgrote deel blijkt dan de 'makkelijke' verkortingen met direct vermenigvuldigen snel over te nemen. Voor een enkeling blijkt die overstap wat overhaast. Er zijn kinderen die nog problemen hebben met het vaststellen van positiewaarden.

$$\begin{array}{r} 65 \\ 7 \times \\ \hline 35 \\ 42 \\ \hline 77 \end{array}$$

De leraar herinnert deze leerling aan de concrete geldopgave van oma. De fout is dan direct duidelijk: 42 tientjes, dat is 420 euro ... Wat verderop in de leergang wordt een complexer geval aan de orde gesteld: elementair vermenigvuldigen met een drie cijfergetal.

- » Jantina is vandaag jarig.
- Ze is 7 jaar geworden.
- Hoeveel dagen is ze oud?

Het gaat bij dit probleem in de kern om 7×365 . Achteraf wordt de uitkomst ter discussie gesteld: "Is het antwoord tot op de dag nauwkeurig te geven? Hoeveel kan het hooguit schelen in verband met de schrikkeljaren?" Er is vrijwel geen leerling die nu nog herhaald gaat optellen: de meesten vermenigvuldigen kolomsgewijs. Daarbij verschijnt een nieuwe variant. Er zijn namelijk kinderen die bij deze splitsaanpak een tussenberekening maken bij het rekenen van groot-naar-klein of omgekeerd.

$$\begin{array}{r} 365 \\ 7 \times \\ \hline 7 \times 300 \quad 2100 \\ 7 \times 60 \quad 420 \\ \hline 2520 \\ 7 \times 5 \quad 35 \\ \hline 2555 \end{array}$$

Maar de meeste kinderen gebruiken hier de standaardnotatie.

$$\begin{array}{r} 365 \\ 7 \times \\ \hline 2100 \\ 420 \\ 35 \\ \hline 2555 \end{array}$$

Sommigen rekenen op soortgelijke wijze van klein-naar-groot. De uitkomst wordt voornamelijk samenvoegend bepaald. Er zijn echter ook leerlingen die per kolom ($\downarrow$) met cijfers rekenen ($5: 2 + 3 = 5; 1 + 4 = 5; 2$). Deze cijfermatige verkorting van het optellen van deelproducten is bij het cijferend optellen in groep 6 aan de orde geweest en kan vervolgens hier worden toegepast door verticaal per kolom te werken van rechts-naar-links.

Een voor de hand liggend vervolg op de Jantina-som is de volgende opgave.



- » Hoeveel dagen oud ben jij bij je volgende verjaardag?

Voor kinderen van groep 6 (7) duikt hiermee de kwestie van tien keer op. Hebben ze inzicht in de nulregel die bij het vermenigvuldigen met tien hier eenvoudig is toe te passen? Bij het handige hoofdrekenen is deze kwestie al diverse keren aan de orde geweest. Ze kan als volgt worden toegelicht: 10×365 is gelijk aan 365×10 , dus 365 tienden (tientjes) en dat is 3650 waard. Ook bij het berekenen van 11×365 en 12×365 voor de leeftijden van de oudere leerlingen kan de tienregel worden benut. Een uiteraard evenzeer voor het aantal dagen van de 40-jarige leraar via $10 \times 365 = 3650$ en vervolgens 4×3650 .



De kwestie van een tweecijferig getal maal een tweecijferig getal kan op vergelijkbare wijze aan de orde worden gesteld als die van een ééncijferig maal een meercijferig getal.

- > Oma is jarig. Ze trakteert op een etentje.
17 personen, ieder 23 euro. Hoeveel moet ze betalen?

Eerst berekenen kinderen op de aangegeven manier 7×23 . Daarna berekenen ze 10×23 met de nulregel die ze dan al kennen vanuit het hoofdrekenen. Moeilijkere opgaven komen bij de ontwikkeling van de procedure van het cijferend vermenigvuldigen aan bod, waarover straks meer.

3

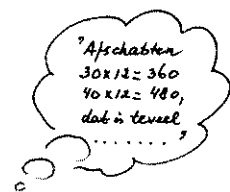
Eind groep 6 kunnen leerlingen vermenigvuldigingen van een ééncijferig getal met een driecijferig getal oplossen. Ze rekenen daarbij kolomsgewijs van groot-naar-klein. Medio groep 7 kunnen leerlingen een driecijferig getal met een tienvoud vermenigvuldigen. Tevens kunnen ze een en ander toepassen in contextopgaven met een elementaire vermenigvuldigstructuur.

Ook bij het kolomsgewijs vermenigvuldigen besteedt de leraar veel aandacht aan het overzichtelijk noteren van de tussenuitkomsten. De inzichtelijke grondslag van het kolomsgewijs vermenigvuldigen wordt vooral duidelijk via problemen die in een context van geld zijn geplaatst. Naast deze modelcontexten die speciaal fungeren om een nieuwe stap in de leergang te zetten, komen ook kale vermenigvuldigopgaven aan bod en rijke toepassingsproblemen met een vermenigvuldigstructuur. Om de tussenuitkomsten te kunnen samenvoegen, zijn dezelfde basale rekenvaardigheden vereist als voor optellen. Overigens zullen de kinderen van groep 8 de wat complexere vermenigvuldigopgaven van een ééncijferig met een meercijferig getal uitrekenen volgens het cijferalgoritme van vermenigvuldigen, dat ze in de loop van groep 7 leren.

Kolomsgewijs delen

De *cindvorm* van het elementaire kolomsgewijs delen ziet er als volgt uit:

$$\begin{array}{r} 422 : 12 = 35 \text{ rest } 2 \\ \hline 422 \\ \underline{360} \\ 62 \\ \underline{60} \\ 2 \end{array}$$



De basale vaardigheden die al eerder werden ontwikkeld, zijn:

- nulregel van vermenigvuldigen (en delen) kennen en kunnen toepassen
- getallen kunnen halveren en verdubbelen
- tafels van vermenigvuldiging kennen en elementair kolomsgewijs vermenigvuldigen kunnen toepassen bij het afschatten van zo groot mogelijke 'happen'.

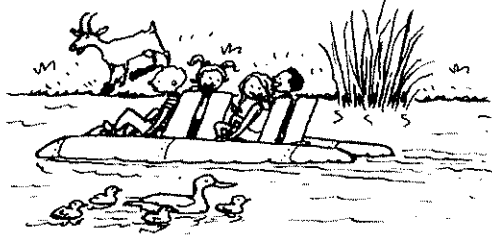
In de ongeveer vierduizend jaar oude papyrus Kahun werd de opgave $1120 : 80$ als volgt uitgerekend.



$$\begin{array}{r}
 1 (\times 80) \quad 80 \\
 + 10 (\times 80) \quad 800 \\
 2 (\times 80) \quad 160 \\
 + 4 (\times 80) \quad 320 \\
 14 (\times 80) \quad 1120
 \end{array}$$

Van Pelt was meer dan honderd jaar geleden ook al erg geporteerd voor dit 'Egyptische' rekenen. Maar men moet zo'n schema wel eerst leren lezen, of nog beter, zelf leren construeren met hulp van de leraar. In groep 5 kan hier al mee worden begonnen, zoals direct ter sprake komt. De berekening kan sterk worden ingekort als de kinderen het elementaire vermenigvuldig-algoritme kennen of in ieder geval vlot kolomsgewijs kunnen vermenigvuldigen. Dit alles betekent dat bij het kolomsgewijs delen via op-vermenigvuldigen verschillende fasen van schematisering en verkorting zijn te onderscheiden, waarover direct meer.

De leergang start met opgaven van opdelen die als modelcontext fungeren om het kolomsgewijs delen betekenis te geven. Een voorbeeld.¹



- > Er gaan 90 kinderen waterfietsen.
- Op één waterfiets mogen 4 kinderen.
- Hoeveel waterfietsen moeten ze huren?

Kinderen van groep 5 (6) lossen zo'n opgave op met:

- herhaald optellen ($4 + 4 + 4 \dots$ of via 4, 8, 12, ...)
- 10 keer en nog eens 10 keer nemen, en dan verder optellen (40, 80, 84, ...)

- direct 20 keer uitrekenen (80, 84, ...)
- en variaties daarop, bijvoorbeeld door eerst 25 keer te nemen en dan vanaf 100 met sprongen van 4 terug te tellen.

De meeste kinderen wijzen er nadrukkelijk op dat er bij de laatste waterfiets (nummer 23) nog 2 plaatsen over zijn. Hieronder is de aanpak van Marlijn te zien.

23 waterfietsen

Hoe heb je gerekend?

$$\begin{array}{l}
 10 \times 4 = 40 \\
 20 \times 4 = 80 \\
 2 \times 4 = 8 \\
 22 \times 4 = 88
 \end{array}$$

dan moeten er nog 2 op: fiets

De kern van de oplossingsstrategie bestaat uit het zo handig mogelijk (herhaald) afschatten van zoveel mogelijk viertallen. Dit gebeurt vaak via aanvullend op-vermenigvuldigen zoals bij Marlijn. Zij laat de kinderen successief met de waterfiets vertrekken.

Deze aanpak kan als volgt verder geschematiseerd en verkort worden door op-vermenigvuldigen met aftrekken te combineren:

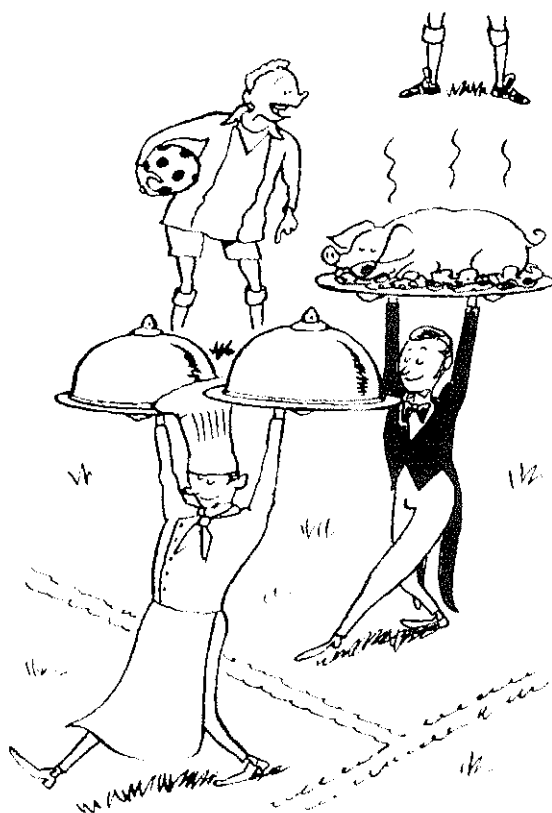
90 lln	90 : 4 =	
40 lln met 10 fietsen		
over 50 lln	90	10 fietsen
40 lln met 10 fietsen	40	
over 10 lln	50	10 fietsen
0 lln met 2 fietsen	40	
over 2 lln	10	2 fietsen
2 lln met 1 fiets	8	
0	2	1 fiets
	2	
	0	23 fietsen



Bij het noteren speelt het verwoorden van de berekening een belangrijke rol. De kinderen moeten zich realiseren welke rekenhandelingen ze uitvoeren in relatie tot de contextopgave. Kale delingsopgaven moeten ze vervolgens ook in dergelijke contexttermen van opdelen of van eerlijk verdelen kunnen interpreteren.

De verdergaande schematisering en verkorting wordt in het volgende kort getypeerd aan de hand van een andere contextopgave.

- > Twaalf leden van een sportteam gingen uit eten.
Dat kostte in totaal 420 euro.
Ieder betaalt evenveel. Hoeveel is dat?



De berekening via op-vermenigvuldigen verloopt schematisch voorgesteld in drie fasen.

- Eerst wordt op-vermenigvuldigen, zoals bij Marlijn, gecombineerd met het optellen van de deelproducten.
- Daarna wordt het verbonden met successief aftrekken. Indien de leraar bij deze aanpak systematisch een 'Egyptische' hulptabel betreft, kan het afschatten van deelproducten aanzienlijk worden verkort.
- En ten slotte wordt de delingsprocedure verder verkort en verdwijnt de hulptabel van het afschattend vermenigvuldigen.

(a)

$$\begin{aligned}
 10 \text{ euro's} \times 12 &= 120 \text{ euro's} \\
 20 \text{ euro's} \times 12 &= 240 \text{ euro's} \\
 * 30 \text{ euro's} \times 12 &= 360 \text{ euro's} \\
 * 5 \text{ euro's} \times 12 &= 60 \text{ euro's} \\
 35 \text{ euro's} \times 12 &= 420 \text{ euro's}
 \end{aligned}$$

In (a) wordt voornamelijk via tien-van-twaalf verdeeld. Wat ieder moet betalen wordt met benoemde getallen (euro's) genoteerd. De deeltuitkomsten worden opgeteld.

(b)

$$\begin{array}{r}
 420 : 12 = 35 \\
 \begin{array}{r}
 420 \\
 240 - \\
 180 \\
 120 - \\
 60 \\
 60 - \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 20 \times \\
 10 \times \\
 5 \times \\
 35 \times
 \end{array}
 \end{array}$$

In (b) wordt 'Egyptisch' gerekend met behulp van een vermenigvuldigtabel. De getallen zijn onbenoemd. De deeltuitkomsten worden achtereenvolgens van het totaal afgetrokken.



(c)

$$420 : 12 = 35$$

420	
360	30
60	
60	5
0	

In (c) wordt de eindvorm van kolomsgewijs delen bereikt, die als een inzichtelijke voorvorm van de klassieke staartdeling beschouwd kan worden.

Cijferend delen wordt in (b) en (c) via kolomsgewijs of cijferend aftrekken vereenvoudigd. Het hoogjes-teken geeft aan dat de uitkomst via vermenigvuldigen globaal gecontroleerd kan worden.

De laatste stap naar het traditionele algoritme wordt thans in de reken-wiskundemethoden niet meer onderwezen en is dan ook geen communiaal of differentieel doel.

Bij het kolomsgewijs delen leren de kinderen om de uitkomst globaal te *schatten*. Deze vaardigheid is van een hogere orde dan het louter leren van een cijferprocedure en rechtvaardigt tevens de onderwijstijd die aan het leren van het op-vermenigvuldigen wordt besteed. In de aloude staartdeling heeft dat schatten niet zo'n sterke functie.

$$12 \overline{) 6394} \setminus 5 \dots$$

60	:
39	:
..	:
..	:
..	:

Het delen begint met $63 : 12 = 5$, en die 5 noteren we rechtshoven. Wat er op die 5 volgt blijft vooralsnog ongewis. Er wordt 'kleinschalig' afgeschat. Daarin zit het wezenlijke verschil met het kolomsgewijs delen, waar met getallen wordt gewerkt, om te beginnen met 500. Dit geldt zeker in de laatste fase van de leergang. Daaraan voorafgaand moet de leerling in ieder geval denken in de orde van grootte van enkele honderden, en dat is ook een vorm van globaal (af)schatten.

Ziehier de meerwaarde van de kolomsgewijze aanpak: nadruk op schatten en ruimte bieden voor gedifferentieerde aanpakken en oplossingen. Ook de aandacht voor de restproblematiek is nieuw ten opzichte van de traditionele leergang van de staartdeling – waarover direct meer.

En ten slotte is de zorg nieuw waarmee het schema van het kolomsgewijs delen via op-vermenigvuldigen gezamenlijk wordt geconstrueerd vanuit overzichtelijk afschatten.

4

Eind groep 6 kunnen de leerlingen delingen van meercijferige getallen door een ééncijferig getal oplossen via een herhaald proces van afschattend vermenigvuldigen en aftrekken, zowel kaal als in toepassingssituaties.

Eind groep 7 kunnen ze elementaire delingen met meercijferige deeltallen en delers oplossen zowel met kale getallen als in toepassingssituaties waarin sprake is van verdelen, opdelen en afschattend vermenigvuldigen. Het gaat daarbij met name om contextopgaven waarin een rest verschijnt.



Schatten van delingsuitkomsten en kolomsgewijs delen zijn nauw met elkaar verbonden. Schatten via proberen (op)vermenigvuldigen vormt daarvoor de basis. In de eerste fase staat het ontwikkelen van het overzichtelijke rekenschema centraal. In de tweede fase wordt een voortschrijdende verkorting nagestreefd, waarbij verschillende strategieën toepasbaar zijn: afschatten van tientallen (honderdtallen), verdubbelen, halveren en gebruik maken van de 'Egyptische' vermenigvuldigtabel. In de derde fase ten slotte wordt de procedure verder verkort en gebeurt het afschatten van zo groot mogelijke happen zonder hulp van een vermenigvuldigtabel. Het onderwijs zal een grote mate van differentiatie te zien geven, afhankelijk van de rekenvaardigheid waarover de leerlingen op dat moment beschikken. De leraar stimuleert de niveauverhoging van steeds meer verkort rekenen, maar legt deze niet op. Ook wordt uitgebreid aandacht besteed aan de restproblematiek, die inzicht in het delen vergroot.

Cijferend optellen

Cijferend optellen, dat een *communaal* doel is, kan als volgt uit kolomsgewijs rekenen worden afgeleid:

$$\begin{array}{r} \text{(a)} \quad 467 \\ 378 + \\ \hline 700 \\ 130 \\ 15 \\ \hline 845 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(b)} \quad 467 \\ 378 + \\ 15 \\ 130 \\ 700 \downarrow \\ \hline 845 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(c)} \quad \overset{''}{4}\overset{''}{6}7 \\ \overset{''}{3}7\overset{''}{8} + \\ \hline 845 \end{array}$$

Kenmerkend voor (a) is:

- het rekenen met positiewaarden van groot-naar-klein;
- en het samenvoegend optellen van de tussenuitkomsten (700; 830; 845).

Kenmerkend voor (b) is:

- het rekenen met positiewaarden van klein-naar-groot;
- en het kolomsgewijs optellen van tussenuitkomsten.

Het standaardalgoritme van (c) is de ultieme verkorting van (b); er wordt uitsluitend per kolom met positiecijfers gerekend. De rekenwijzen van (a) en (c) zijn standaardprocedures. Alleen verschillen ze in de mate van abstractie en verkorting. De aanpak van (b) bevat wat van (a) en van (c) en kan daarom goed als intermediair fungeren.

Indien in groep 6 het cijferend optellen start, kan men het beste een geldcontext als concrete opstap kiezen en aansluiten bij het kolomsgewijs optellen. Na vijf lessen hebben de meeste leerlingen dit algoritme dan onder de knie.

Cijferend aftrekken

Cijferend aftrekken, dat eveneens een *communaal* doel is, kan in tegenstelling tot cijferend optellen niet uit kolomsgewijs rekenen worden afgeleid. De rekenhandelingen van (a)

verschillen essentieel van die bij (b). Bij het optellen kon de afstand tussen de splitsmethode en de cijferprocedure overbrugd worden door de rekenrichting om te keren.



Maar bij het aftrekken gaat dat niet omdat dan tekorten ontstaan: $4 - 7 = -3$.

$$(a) \begin{array}{r} 845 \\ 382 - \\ \hline 500 \\ - 40 \\ \hline 3 \\ \hline 463 \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{r} 845 \\ 382 - \\ \hline 463 \end{array}$$

Wil men naar het oude vertrouwde cijferalgoritme van (b) toewerken, dan kan dat het beste naar analogie van het eerder geleerde optelalgoritme gebeuren, te beginnen met het lenen bij de middelste 4. Ook hier wordt weer vanuit een geldcontext gestart.

Kolomsgewijs aftrekken biedt kinderen een standaardprocedure waarmee ze grotere aftrekkingen boven de honderd inzichtelijk kunnen oplossen. De waarde van de cijfers in de getallen blijft in beeld. Dit in tegenstelling tot het cijferen, waarbij kinderen volgens het algoritme met cijfers rekenen en de waarde uit zicht is. Dit cijferen staat pas in de tweede helft van groep 6 op het programma.

Voor zwakkere rekenaars die de inzichtelijke basis nodig hebben, kan dit cijferalgoritme om die reden belemmerend werken. In de klas zullen ze wel met dit cijferalgoritme in aanraking komen, omdat het voor de overige leerlingen een efficiënte, inzichtelijke werkwijze is. In het onderwijs dient men alert te zijn dat de zwakkere rekenaars het cijferend aftrekken in ieder geval niet trucmatig overnemen. Het is in dat geval beter deze leerlingen te stimuleren zich tot de handige, kolomsgewijze aanpak te bepalen.

Overigens kan men ook een (aantrekkelijk) *alternatief aftrekalgoritme* introduceren dat een verkorting is van het kolomsgewijze aftrekken.

Deze alternatieve cijferprocedure verloopt bij een opgave als $845 - 382$ als volgt.

$$\begin{array}{r} 845 \\ 382 - \\ \hline 503 \\ 463 \end{array}$$

De uitkomst van '4 min 8' met een tekort van 4 wordt gesymboliseerd als '4'. Daarna wordt van links-naar-rechts gerekend: van de 5 honderdjes wordt 1 honderdje ingewisseld voor 10 tienden en vervolgens verrekend met het tekort van 4 tienden...

Bij een opgave als $7538 - 2842$ moet twee keer worden ingewisseld, wat in één of twee stappen kan gebeuren.

$$\begin{array}{r} 7538 \\ 2842 - \\ \hline 5006 \\ 4706 \\ 4696 \end{array} \quad \text{of} \quad \begin{array}{r} 7538 \\ 2842 - \\ \hline 5006 \\ 4696 \end{array}$$

Aangezien dit algoritme zoals gezegd direct voortkomt uit het kolomsgewijs aftrekken, ziet het complete schema op dit onderdeel er als volgt uit.

$$\begin{array}{r} 845 \\ 382 - \\ \hline 500 \\ - 40 \\ \hline 3 \\ \hline 463 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{cloud} \\ 500 \rightarrow 460 \rightarrow 463 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 845 \\ 382 - \\ \hline 503 \\ 463 \end{array}$$

Deze verkorting zou evenals die bij het gangbare cijferend aftrekken pas in het begin van groep 7 aan de orde dienen te worden gesteld. Uit kleinschalig onderzoek is gebleken dat leerlingen weinig moeite hebben met het zich eigenmaken van deze aftrekprocedure. Deze manier van aftrekken wijkt echter wel af van de gangbare.



Cijferend vermenigvuldigen

De meest elementaire vorm van het communaal aangeboden kolomsgewijs vermenigvuldigen, die van een ééncijfergetal keer een meercijfergetal, kan als volgt tot het *communale* doel van cijferend vermenigvuldigen worden verkort.

$$\begin{array}{r}
 (a) \quad 365 \\
 \quad 7x \\
 \hline
 2100 \\
 420 \\
 35 \\
 \hline
 2555
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (b) \quad 365 \\
 \quad 7x \\
 \hline
 35 \\
 420 \\
 2100 \\
 \hline
 2555
 \end{array}$$

Maar deze verkorting hoeft niet zo ver te gaan als die van het traditionele cijferend vermenigvuldigen, waar de uitkomst van 2555 direct, dus zonder het noteren van tussenuitkomsten, wordt opgeschreven.

$$\begin{array}{r}
 43 \\
 365 \\
 \quad 7x \\
 \hline
 2555
 \end{array}$$

Deze verkorting is weliswaar differentieel, maar is vanuit het perspectief van de inzichtelijkheid na het cijferend optellen geen grote stap. Indien kinderen de procedure van (b) beheersen en de nulregel kennen dan zijn ze in staat tot (c).

$$\begin{array}{r}
 (c) \quad 365 \\
 \quad 60x \\
 \hline
 3650 \\
 3600 \\
 18000 \\
 \hline
 21900
 \end{array}$$

De nulregel vraagt trouwens wel de nodige aandacht, de kinderen moeten niet alleen weten dat 10×365 gelijk is aan 3650, maar moeten dit ook kunnen uitleggen (10×365 is 365×10 ofwel 365 tienën, is 3650). Verder moeten ze inzien dat 60 keer een getal gelijk is aan zes keer 10 keer dat getal.

Ook uitwerking (c) kan nog verder worden verkort, maar dit ter keuze. In principe zijn de kinderen ook in staat om 67×365 te berekenen door de uitkomsten in elkaar te schuiven en vervolgens cijferend op te tellen.

$$\begin{array}{r}
 (d) \quad 365 \\
 \quad 67x \\
 \hline
 2555 \\
 21900 \\
 \hline
 24455
 \end{array}$$

In elkaar schuiven betekent in dit verband het apart berekenen van 7×365 en 60×365 , en vervolgens de uitkomsten optellen.

5

Medio groep 6 kunnen leerlingen cijferend optellen en die cijferprocedure toepassen in elementaire contextproblemen. Eind groep 6 kunnen leerlingen cijferend aftrekken en die cijferprocedure toepassen in elementaire contextproblemen. Medio groep 7 kunnen leerlingen vermenigvuldigen door eerst de tussenuitkomsten te noteren en vervolgens cijferend op te tellen. Tevens kunnen ze deze vaardigheid toepassen in elementaire contextproblemen.



De meest verkorte vorm van cijferend vermenigvuldigen (eind groep 7) wordt als differentieel doel nagestreefd – de klassieke staartdeling daarentegen is binnen het rekenonderwijs al lange tijd geen communaal of differentieel doel meer. Waar houdt het kolomsgewijs opereren op en waar begint het cijferen? Dit is een van de kernkwesties die didactisch opgelost dient te worden. Voor het cijferend optellen ligt de oplossing voor de hand: de overgang van kolomsgewijs optellen naar cijferend optellen verloopt geleidelijk. Als die overgang te abrupt zou gaan, dan doet dit onvoldoende recht aan het kolomsgewijs (hoofd)rekenen, dat op zichzelf genomen een belangrijke nieuwe doelstelling is. Anders gezegd, een kind moet eerst goed kolomsgewijs kunnen optellen, dus de deeltkomsten vlot en correct kunnen samenvoegen, voordat het aan het verticale cijferend optellen begint – juist ook omdat dit cijferend optellen qua rekenwijze betrekkelijk eenvoudig is, maar begripsmatig nogal lastig. Hetzelfde geldt voor het cijferend vermenigvuldigen. Echter met deze aantekening dat het cijferend optellen van de deeltkomsten makkelijk kan verlopen, omdat de leerlingen het optelalgoritme op dat moment al beheersen. Of daarbij de overgang naar de meest verkorte vorm haalbaar is en wanneer dat het geval is, kan men aan de prestaties van de individuele leerling afmeten. De verschillen tussen verkort en minder verkort optellen binnen het cijferalgoritme zijn in feite niet groot, dus zal de overgang naar de meest verkorte procedure voor veel leerlingen zonder al te veel moeite gemaakt kunnen worden. Moeilijker is het om te bepalen hoe een leerling het communale doel van het aftrekken kan bereiken. Dit kan gebeuren naar analogie van het cijferend optellen, wat echter begripsmatig gezien niet zo eenvoudig is en in het algemeen ten minste toch zo'n vijf à tien lesuren zal vragen. In ieder geval kunnen de kinderen altijd terugvallen op het kolomsgewijs aftrekken met tekorten. Een alternatieve aftrekprocedure als verkorting van het kolomsgewijs aftrekken behoort ook tot de mogelijkheden.

Bijzondere opgaven Verdieping en plezier

De bijzondere opgaven die in het volgende worden beschreven, hebben tot doel het inzicht in het kolomsgewijs rekenen en speciaal de cijferalgoritmen te verdiepen. Maar ze fungeren vanwege het puzzelachtige karakter ook als onderdeel van (re)creatief rekenen, en stimuleren mede daardoor het verwerven van een

wiskundige instelling – althans indien dergelijke opgaven aanspreken en van een passende moeilijkheidsgraad zijn. Of anders gezegd, de relatie met de algemene doelstellingen van rekenen-wiskunde komt in het onderwijs met dit soort bijzondere opgaven duidelijk tot uitdrukking.



Drie soorten bijzondere cijferopgaven worden onderscheiden:

- vleksommen
- lettersommen
- toversommen.

Ieder type wordt kort besproken aan de hand van enkele voorbeeldopgaven.

Vleksommen

Vleksommen zijn opgaven met een vlek, waardoor de opgave getalsmatig niet compleet is weergegeven. Als gevolg daarvan kan de uitkomst niet exact worden vastgesteld. Het is echter wel mogelijk om via redeneren en rekenen de juiste keuze uit een aantal gegeven antwoorden te maken.

Enkele voorbeelden:

1) 	2) 	3) 
a. 112	a. 412	a. 3663
b. 108	b. 1412	b. 2336
c. 150	c. 2412	c. 9999

De moeilijkheidsgraad varieert. De eerste opgave bijvoorbeeld is betrekkelijk eenvoudig. Als men ervan uitgaat dat een van de antwoorden juist is, kan men de opgave zelfs precies reconstrueren.

De tweede en derde opgave zijn wat lastiger en niet exact te reconstrueren. De kinderen kunnen wel mogelijke opgaven samenstellen. Daarmee voegt men een nieuw element aan deze vleksommen toe: zelf opgaven maken met een bepaalde uitkomst.

Het belangrijkste doel is echter het leren doorzien van de algoritmen. Bij opgave 3 bijvoorbeeld gaat het om het inzicht dat de uitkomst groter moet zijn dan 3000 (10×300) en kleiner dan 8000 (20×400), dus blijft 3663 als antwoord over. De nulregel is hier de sleutel tot de oplossing, en ook het vlot kunnen aangeven van de orde van grootte vormt een essentieel onderdeel daarvan.

Lettersommen

Lettersommen zijn globaal genomen van een zelfde aard als vleksommen. De getallen achter de letters zijn net als bij de vlekken verborgen. Maar ze onthullen wel wat meer: gelijke letters representeren gelijke cijfers en verschillende letters stellen ook verschillende cijfers voor. Kortom, de verborgen opgave is toch wat meer gespecificeerd. Daardoor is het mogelijk om opgaven te maken die een grotere diversiteit aan redeneringen en berekeningen vragen om tot een juiste oplossing te komen dan bij de vleksommen het geval is. De complexiteit van de opgaven kan dus bij de lettersommen nog meer variatie vertonen dan bij de vlekopgaven. De moeilijkheidsgraad kan daardoor nog beter op het reken-wiskundeniveau van de kinderen worden aangepast. Neem bijvoorbeeld de volgende opgave.

> Zoek bij elke letter het juiste cijfer. De opgave moet wel kloppen

EEN
TWEET
DRIET

De kinderen ontdekken al rekenend wat de waarde van N is. Deze kan niet anders dan 0 zijn ($N + E = E$). Zo moet $E + W$ groter dan of gelijk aan 10 zijn, omdat er een 1 moet worden onthouden... Voor het overige blijken er vele oplossingen mogelijk. Een betrekkelijk makkelijke opgave dus – goed om mee te beginnen. De volgende is al heel wat lastiger, al zie je dat niet direct.

OP
TEL
SOM

Ook hier kom je al snel tot het inzicht dat, net als bij $N + E = E$, er een 0 in het spel is bij $O + E = O$ (E is 0). Aangezien echter T en S verschillen, zal er een 1 overgedragen moeten worden, en dat gaat niet met een 0 voor E. Probeer maar. Hoe is dit probleem op te lossen – als er al een oplossing mogelijk is? Ja, er is een uitweg ...! En als die is gevonden, loopt het vervolg makkelijk: er zijn vele wegen die naar het einddoel leiden. De volgende optelopgave in de vorm van een lettersom geldt als de mooiste die ooit is bedacht.



FORTY
 TEN
 TEN +
 SIXTY

In woorden klopt de som. Vertaald in het Nederlands: veertig plus tien plus tien is zestig. Voorts bevat de som tien verschillende letters, wat inhoudt dat alle cijfers van 0 tot en met 9 erin vervat zijn. Dan blijkt de oplossing eenduidig te zijn bepaald. Dat wil zeggen dat er maar één correcte som achter de letteropgave schuilt. En tenslotte zijn de redeneringen om tot de goede uitkomst te komen heel ingenieus. Hoe kan het dat FO en SI verschillen? Moet N hier per se 0 zijn, en hoe zit het dan met E? Misschien iets voor groep 8, maar dan wel voor de liefhebbers plus hulp van de leraar (en eventueel als thuisopgave). Men hoeft natuurlijk niet zo hoog te grijpen, zoals uit het voorgaande blijkt. En men hoeft zich uiteraard ook niet tot het cijferende optellen te beperken. Een voorbeeld van een vermenigvuldigopgave.

$$\begin{array}{r} ABCD \\ \times 9 \\ \hline DCBA \end{array}$$

Ook hierbij kunnen verschillende strategieën worden gevolgd. Een heel bijzondere, en wat omslachtige, is die via 'tien keer ABCD minus ABCD', welke leidt naar de volgende aftrekking.

$$\begin{array}{r} ABCD0 \\ - ABCD \\ \hline DCBA \end{array}$$

Toch is het handige rekenen hier wellicht niet zo handig. De directe aanpak van $9 \times A = D$, waaruit volgt dat $A = 1$ en $D = 9$, voert al een eind naar de oplossing. Hoewel...? Uit de aftrekking kan men dit ook direct afleiden. Dus verschillen de redeneringen per saldo niet zo sterk. In de nabespreking van zo'n opgave kunnen de diverse aanpakken de revue passeren, en kan men als leraar de geschetste afrekenaanpak ook zelf inbrengen met het oog op de verdieping van het inzicht in de structuur van het aftrekalgoritme, naast die van het cijferend vermenigvuldigen.

Toversommen

Probleem 1

Het bijzondere van dit probleem is dat de uitkomst van tevoren al vaststaat, terwijl de kinderen toch zelf het startgetal mogen kiezen.

- > Kies een getal met twee verschillende cijfers.
- Maak een nieuw getal door de cijfers ervan te verwisselen.
- Trek het kleinste getal van het grootste af. Verwissel de cijfers van de uitkomst en tel dit getal bij de uitkomst op.
- Verklaar de einduitkomst.



De leraar kent de getallen niet, maar weet wel dat de uitkomst 99 is. Zie het volgende voorbeeld.



Kan de leraar toveren? Nee, want de uitkomst is in alle gevallen 99. De vraag is hoe kan dat?

Het rekenen met tekorten biedt hier inzicht

$$\begin{array}{r} 74 \\ 47 - \\ \hline 3 \textcircled{3} = 30 - 3 = 3 \times 9 \\ 27 \\ \hline 72 + = 80 - 8 = 8 \times 9 + \\ 99 \qquad \qquad 11 \times 9 \end{array}$$

Dat de uitkomst van de aftrekking een 9-voud is, kan via het rekenen met tekorten worden ingezien. Indien kinderen weten dat de som van de cijfers van die tafels van negen steeds 9 is, dan komt er bij de optelling ($27 + 72$) zowel op de plaats van de eenheden ($7 + 2$) als de tientallen ($2 + 7$) ook een 9, dus 99.



Een soortgelijke opdracht kan gedaan worden met getallen van drie verschillende cijfers die van achteren naar voren worden geschreven en dan worden afgetrokken en vervolgens opgeteld. De uitkomst is dan 1089 (11×99).

Ook hier geeft rekenen met tekorten inzicht in de 99-vouden.

Probleem 2

Ook bij dit probleem lijkt het erop dat de leraar kan toveren.

- > Leerling en leraar bedenken samen een lange optelling van vijf driesijferige getallen. De leerling mag beginnen en twee getallen onder elkaar schrijven.

$$\begin{array}{r} 271 \\ 389 \end{array}$$

Vrijwel tegelijk weet de leraar de uitkomst al: 2269. De uitkomst wordt op een apart briefje genoteerd. Dan schrijft de leraar de derde term op.

$$\begin{array}{r} 271 \\ 389 \\ + 610 \end{array}$$

Nu is de leerling weer aan de beurt met een zelfgekozen getal (458).

$$\begin{array}{r} 271 \\ 389 \\ + 610 \\ 458 \end{array}$$

De leraar besluit met:

$$\begin{array}{r} 271 \\ 389 \\ + 610 \\ 458 \\ + 541 \end{array}$$

De leerling maakt de lange optelling, en ... de uitkomst blijkt inderdaad 2269 te zijn, zoals de leraar al direct aan het begin genoteerd had.

Kan de leraar toveren?

Als goed naar de getallen van de leraar wordt gekeken dan is te zien dat daar iets mee aan de hand is. Niets te vinden? Goed opletten dan wordt het optelspelletje nog een keer gedaan ...

Nu zijn er verschillende leerlingen die zien wat de leraar doet. Er is twee keer voor gezorgd dat de optelling met het getal erboven 999 is! Of anders gezegd, de uitkomst in het bovenste voorbeeld is dan $271 + (2 \times 999)$, oftewel $271 + 2000 - 2 = 2271 - 2 = 2269$. Aan de voorzijde van het begingetal voeg je een 2 toe en dan haal je een 2 aan de achterzijde af – niet moeilijk, dus heel vlug te noteren. Overigens kan men natuurlijk als leraar het eerste getal aanvullen tot 999, dan is die optelstrategie wat moeilijker te voorzien en wordt de uitkomst ... 2387. Misschien iets voor de kinderen om hun ouders voor te toveren, nadat ze er zelf in de klas mee geconfronteerd zijn en deze tovernarij ook kunnen verklaren. Ze mogen dan uiteraard ook met viercijferige of vijfcijferige getallen werken.

Probleem 3

Bij dit probleem neemt de leraar het op tegen de rekenmachine.

- > Kies een getal met drie cijfers, bijvoorbeeld 437. Vermenigvuldig dit getal eerst met 7, vervolgens met 11 en ten slotte met 13. Pak je rekenmachine en bereken de uitkomst. De leraar begint op hetzelfde moment te rekenen en weet al meteen de uitkomst: 437437. Kan de leraar toveren?

Reken eerst maar eens uit $7 \times 11 \times 13$. Dat is 1001. Nu moet er nog worden uitgezocht waarom 1001×437 de uitkomst 437.437 oplevert.

$$\begin{array}{r} 437 \\ 1001 \times \\ \hline 437 \\ 437000 \\ \hline 437437 \end{array}$$



Een ander voorbeeld van vermenigvuldigopgaven met een bijzondere uitkomst:

$$\begin{aligned} 9 \times 12345679 &= 111\ 111\ 111 \\ 18 \times 12345679 &= 222\ 222\ 222 \\ 27 \times 12345679 &= 333\ 333\ 333 \end{aligned}$$

Denk bij de verklaring aan 9 keer is gelijk 10 keer minus 1 keer en het afrekenalgoritme. De volgende serie is heel geschikt om het verkorte vermenigvuldigalgoritme te verduidelijken.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ \hline 121 \end{array} \times \begin{array}{r} 111 \\ 111 \\ \hline 12321 \end{array} \times \begin{array}{r} 1111 \\ 1111 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

Hoe komt het dat dit patroon ontstaat? Welke is de grootste vermenigvuldiging met dit patroon?

De nulregel komt met deze opgaven nog eens in het middelpunt van de aandacht te staan.

Probleem 4

Ten slotte een voorbeeld van een curieuze toversom die met delen te maken heeft. Eigenlijk is het meer een grap, maar wel een die leidt tot een probleem waarin ook weer een bepaald getallenpatroon moet worden opgespoord.

- > Zeven vrienden dronken samen wat.
In totaal moesten ze 28 euro betalen, ieder betaalt evenveel.
"Dat is 13 euro per persoon", zegt de ober.
Hij licht dit toe met een staartdeling:

$$28 : 7 = 13$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 7 \\ \hline 21 \\ 21 \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right.$$

Dat klopt niet, menen de vrienden.

"Nou," zegt de ober, "dan zal ik 't eens controleren":

$$\begin{array}{r} 13 \\ 7 \times \\ \hline 21 \\ 7 \\ \hline 28 \end{array}$$

"Nog niet duidelijk?", vraagt hij.

"Dan zal ik 't nog eens met optellen laten zien."

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ 13 \\ 13 \\ 13 \\ 13 \\ \hline 13 + \\ 21 \\ 7 + \\ \hline 28 \end{array}$$

Kan de ober toveren?

Een aardige grap... Maar was het alleen maar een grap?

Het is ook een van de veelvuldig waargenomen systematische fouten binnen de traditionele, formele aanpak van cijferend delen.

Voor leerlingen die hier geen last meer van hebben, kan er nog een schepje op worden gedaan. Dan wordt het echt ernst.

- > Met welke getallen kan deze grap worden toegepast?

Deze opgave vormt de afsluiting van het hoofdstuk over kolomsgewijs rekenen en cijferen. Zelfs verkeerd cijferen kan aanleiding geven tot probleemgeoriënteerd rekenen, net zoals de ophouw van de leergangen van kolomsgewijs rekenen en cijferen zelf dat ook doen.



Het zal duidelijk zijn dat niet alle problemen zonder meer aanleiding zullen geven tot verdieping en plezier bij de leerling. Met name problemen waarvan de oplossing op een goede inval of vondst berust die niet gemakkelijk te ontdekken valt, kunnen precies het tegenovergestelde bewerkstelligen. Om dit te voorkomen dienen de kinderen passende problemen voorgeschoteld te krijgen. Dit kan betekenen dat een probleem een hint bevat waardoor de kinderen een beetje op weg worden geholpen. Een andere mogelijkheid is ervoor te zorgen dat de problemen, zoals bij de lettersommen, in opvolgende moeilijkheidsgraad worden aangeboden. Voor al dit soort problemen geldt in ieder geval dat de leraar een cruciale stimulerende en motiverende rol speelt.

Samenvatting

Kolomsgewijs rekenen bestaat uit standaardprocedures van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen die dichter bij hoofdrekenen en schattend rekenen staan dan de traditionele cijferalgoritmen. De leerlingen leren de vaardigheden van dit verticale rekenen via een geleidelijk proces van schematisering en verkorting. Bij het onderwijs in kolomsgewijs rekenen is de leraar in het bijzonder de begeleider en leider die discussies aanstuurt, uitlegt, werkwijzen analyseert, blokkades signaleert en informele aanpakken honoreert als ze perspectief bieden voor verdere schematisering en verkorting. Tot de taak van de leraar en de methode hoort ook dat op de belangrijke markeringspunten in de leergang, die hiervoor zijn aangegeven, uitdagende en motiverende contextproblemen geplaatst worden. Speciaal rijke problemen als het om toepassing van het geleerde gaat, en vooral ook modelcontexten die als steunpunten fungeren om een nieuwe stap in de leergang te kunnen zetten. Het onderwijskader van het cijferen is wat gewijzigd nu het hoofdrekenen een zwaarder accent krijgt. De cijferprocedure van het optellen kan uit de standaardprocedure van het kolomsgewijs optellen worden afgeleid. Ze kan ook voor het cijferend vermenigvuldigen worden benut. Het cijferend aftrekken wordt als regel niet uit het kolomsgewijs aftrekken afgeleid, maar naar analogie van het cijferend optellen samengesteld. En deze vaardigheid kan bij het kolomsgewijs delen worden toegepast.

De nadruk van het gestandaardiseerde opereren ligt op het gestileerde, kolomsgewijs rekenen en minder op het cijferen. De leergangen van het kolomsgewijs rekenen en cijferen zijn verbonden met die van het hoofdrekenen en het schattend rekenen. Bij het optellen en aftrekken boven de tienduizend wordt meestal de rekenmachine ingezet. Dat gebeurt ook bij het vermenigvuldigen van meercijferige getallen met meercijferige getallen en de delingen die daaruit zijn af te leiden. Als samenvattend doel van het gestandaardiseerde rekenen geldt dat de rekenprocedures met inzicht gehanteerd dienen te worden. Dat wil zeggen dat soms juist niet kolomsgewijs gerekend of gecijferd wordt, omdat de betreffende opgaven zich beter lenen voor hoofdrekenen of schattend rekenen. Soms zijn de getallen zo groot dat het gebruik van de rekenmachine meer voor de hand ligt.

Ten slotte kunnen kolomsgewijs rekenen en cijferen ook met opgaven van (re)creatief rekenen worden verbonden. Daardoor bevordert men het inzicht in de standaardprocedures en kan het plezier in het oplossen van puzzelachtige rekenproblemen worden gestimuleerd. De relatie met de algemene kerndoelen van het reken-wiskundeonderwijs is duidelijk zichtbaar.



Cijf'ren is een schoone kunst;
En die dit niet kan,
Heeft er, 't gansche leven door,
Last en hinder van,
Maar de beste rekenaar, —
't Is met grond beweerd, —
Is de mensch, die, bij de rest,
Ook dit ééne leert:
Eigen fouten op te tellen, fouten
in verstand en zin,
En die reek'ning klaar te krijgen
zonder ééne fout er in.

Uit: *Vaderlandsch AB-boek*
met versjes van dr. E. Laurillard
(19^e eeuw)

Schattend rekenen

Inleiding

Globale plaatsbepaling vooraf

Schattend rekenen vormt een belangrijke grondslag voor gecijferdheid. In het rekenen van alledag is het bij uitstek de rekenvorm waarin het gecijferd-zijn zich het meest expliciet manifesteert. De volgende situaties zijn daar voorbeelden van.

- > Ik wil vier krentenbroden kopen van €1,98 per stuk. Heb ik aan €10,- genoeg?
- > Een skateboard kost €79,80. Ik denk dat ik elke week wel €5,- kan sparen. Hoelang zal het duren voordat ik het benodigde geld bij elkaar heb?
- > Tijdens de vakantie hebben we 2178 km gereden. In totaal hebben we 195 liter benzine gekocht. Volgens de fabriek rijdt onze auto 1 op 15. Klopt dit wel?

In tegenstelling tot bij het 'gewone' rekenen gaat het in deze situaties niet om het precies uitrekenen van:

- de totale prijs van de vier krentenbroden
- de periode dat er gespaard moet worden
- de afstand die de auto met 1 liter benzine kan afleggen.

Bij schattend rekenen is alles gericht op het vinden van de orde van grootte van de uitkomsten.

Het rekenen dat hiervoor nodig is, lijkt gemakkelijker te zijn dan het precieze rekenen. De uitkomsten hoeven immers niet nauwkeurig bepaald te worden. Dit scheelt nogal in het rekenwerk. Bij het schattend rekenen mag er met ronde getallen (tien-, honderd-, duizendtallen, enzovoort) worden gerekend. Voor de bovenstaande opgaven betekent dit het uitrekenen van:

- $4 \times €2,-$ in plaats van $4 \times €1,98$
- $€80 : €5,-$ in plaats van $€79,80 : €5,-$
- $2000 : 200$ in plaats van $2178 : 195$.

Rekenen voor beginners. Zo lijkt het althans, maar de werkelijkheid is anders. Ondanks het feit dat het rekenwerk veel makkelijker is, blijken schatopgaven voor veel leerlingen juist erg moeilijk te zijn.

Tessa, een leerling uit groep 5, laat hierover geen misverstanden bestaan.

Als aan haar een schatopgave wordt voorgelegd, laat ze meteen merken het een moeilijke opgave te vinden.

Op de vraag waarom ze dit vindt, is haar antwoord: "Omdat het ongeveer moet."¹

Behalve dat van zwakke rekenaars wordt gedacht dat ze helemaal niet aan schattend rekenen kunnen toekomen, blijken ook de gemiddelde rekenaars bij dit onderdeel maar magere resultaten te laten zien.

Bij een landelijke peiling van de rekenvaardigheid in 1997 kwam naar voren, dat slechts eenderde van de leerlingen in groep 8 de uitkomst kon schatten van een opgave waarin acht winnaars samen een prijzenpot van f 6.327,75 moeten delen.²

Afgezien van het feit dat bij opgaven zoals deze slechts weinig leerlingen met het goede antwoord komen, is er nog iets fundamenteels aan de hand. Veel kinderen gaan bij schatopgaven helemaal niet schatten. Ze doen dit zelfs niet als er uitdrukkelijk om een schatting wordt gevraagd. Dit is bijvoorbeeld duidelijk de ervaring bij de hiervoor genoemde opgave over de vier krentenbroden van €1,98 per stuk. Bij de vraag of €10,- genoeg is, gaat een groot deel van de leerlingen precies rekenen. Bovendien gaan de kinderen niet alleen hoofdrekenen, maar kiezen ze ook nog vaak een cijferende aanpak om de schatvraag te kunnen beantwoorden.

Deze leerlingresultaten weerspiegelen de plaats die het schattend rekenen lang in het rekenonderwijs heeft gehad.



Er is een traditie van precies rekenen. Leren rekenen was – en is vaak nog steeds – uitsluitend gericht op het nauwkeurig uitvoeren van bewerkingen. Getallen verwijzen hierbij altijd naar precieze aantallen en hoeveelheden. Geen wonder dat voor leerlingen schattend rekenen, waarbij met afgeronde getallen wordt gewerkt, eigenlijk geen echt rekenen is.

Roy uit groep 8 wil bij schatopgaven steeds precies gaan rekenen. Zijn leerkracht vraagt hem: "Is het dan nodig om precies te rekenen?"

Roy: "Nou ja, een beetje wel ..., want anders kun je het ook niet ongeveer uitrekenen." Hij voegt daaraan toe dat hij bij schatopgaven eerst precies rekent en daarna pas afrondt.³

Op basis van de hiervoor beschreven ervaringen zou men kunnen concluderen dat schattend rekenen in feite niet telt. Niets is echter minder waar.

Waarom schattend rekenen?

Als rekenen beperkt zou blijven tot precies rekenen, wordt geen recht gedaan aan het vak en kunnen er op wezenlijke punten hiaten ontstaan in de vaardigheden en inzichten van leerlingen. Een programma dat zich alleen richt op precies rekenen is niet toereikend, want:

- precies rekenen hoeft niet altijd
 - om te kunnen zeggen of een tientje genoeg is om vier krentenbroden te kopen van €1,98 per stuk, hoeft de totale prijs niet precies berekend te worden
- precies rekenen kan niet altijd
 - de vraag hoelang er gespaard moet worden om het skateboard te kunnen kopen, kan niet precies beantwoord worden, omdat het niet zeker is dat er elke week €5,- bij komt
- precies rekenen mag niet altijd
 - het gemiddelde benzineverbruik van een auto hangt van zoveel verschillende factoren af dat precies rekenen op basis van het verbruik tijdens één vakantie niet zinvol is (zelfs bij een schatting kan men dan vraagtekens plaatsen).

Behalve als aanvulling op het precies rekenen is het schattend rekenen ook belangrijk als doel op zichzelf.

Schattend rekenen als doel

Door schattend te rekenen krijgt men relatief snel greep op de getalsmatige werkelijkheid. Dit is een vaardigheid die in onze op informatie gerichte maatschappij niet meer gemist kan worden. In samenhang hiermee geldt voor alle leerlingen – maar speciaal voor zwakke rekenaars – dat het rekenen met (afge)ronde getallen bijdraagt aan het verhogen van de maatschappelijke redzaamheid. In plaats van te rekenen met getallen die nogal wat rekenwerk vergen, kan er gewerkt worden met gemakkelijke getallen. Voor veel praktische vragen is dit vaak toereikend. Behalve dat schattend rekenen toegang verschaft tot de alledaagse wereld, biedt het ook de mogelijkheid om beter greep te krijgen op de getallenwereld. Door globaal te rekenen worden verbanden op een hoger niveau zichtbaar. Het versterkt het inzicht in de structuur van de getallen en het begrip van de bewerkingen. Voor de leerlingen kan het afronden en alles wat ermee samenhangt, dan ook mogelijkheden verschaffen voor een verdere verdieping van het inzicht in ons getal- en rekensysteem.

Schattend rekenen draagt dus in belangrijke mate bij aan het bereiken van het algemene doel van gecijferdheid. Via het schattend rekenen wordt het vermogen ontwikkeld om zowel in het dagelijks leven als in pure reken-wiskundige contexten op een zinvolle manier om te gaan met getallen en getalsmatige gegevens. Dit houdt ook in dat de leerlingen een adequate keuze kunnen maken uit de verschillende rekenvormen en dat ze inzien dat een schatting soms beter is dan een precieze berekening.

Schattend rekenen als didactisch middel

Behalve dat schattend rekenen een belangrijk doel op zichzelf is, vervult het ook nog een didactische functie bij het precies leren rekenen. Zo kunnen door het vooraf laten maken van schattingen, handige (hoofd)rekenstrategieën worden aangereikt. Bij opgavenparen zoals

$$> 4 \times 195 \approx \quad \text{en} \quad 4 \times 195 =$$

kan de eerste opgave uitlokken, dat bij de tweede opgave de precieze uitkomst via $(4 \times 200) - (4 \times 5)$ wordt berekend.



Een belangrijke didactische functie van het schattend rekenen vloeit ook voort uit het achteraf controleren van de uitkomsten van precieze berekeningen.

Als bijvoorbeeld een opgave zoals 416×15 is uitgerekend op de rekenmachine met als uitkomst 624, dan is via een schatting snel in te zien dat dit niet kan kloppen. Afgezien van het feit dat het eindcijfer van de eenheden niet juist kan zijn, maakt een globale berekening (10×400 , en nog een keer de helft van deze uitkomst) duidelijk dat het antwoord boven de 6000 moet liggen.

Verschillende vormen van schattend rekenen

Er zijn verschillende vormen van schattend rekenen.

De twee belangrijkste zijn:

- het rekenen met afrondingen van precies gegeven getallen met de bedoeling een globaal antwoord te vinden
- het schattend rekenen waarbij de benodigde gegevens niet of niet volledig voorhanden zijn.

In het volgende worden beide vormen aan de hand van enkele voorbeeldopgaven kort toegelicht.

Deze terreinafbakening moet niet gezien worden als een allesomvattende en strikte indeling in soorten schatopgaven. De opgaven dienen alleen ter illustratie.

Schattend rekenen met precies gegeven getallen

Schattend rekenen met af te ronden – maar wel precies gegeven – getallen heeft in eerste instantie veel weg van het gewone, precieze rekenen. Het verschil is dat er met gemakkelijke getallen gerekend kan worden.

De eerder genoemde opgaven over

- de vier krentenbroden
- het skateboard
- het benzineverbruik

behoren tot deze vorm van schattend rekenen, maar ook kale opgaven zoals de volgende vallen daar onder.

- > $78 \times 81 \approx$
- > $7712 : 23 \approx$

Deze vorm van schattend rekenen houdt in dat de numerieke gegevens worden aangepast en dat vervolgens met afgeronde getallen precies wordt gerekend. Dit afronden betekent meestal dat wordt afgerond naar een tien-, honderd-, duizendtal, enzovoort. Behalve met deze *ronde getallen*, kan er bij het schattend rekenen ook met andere *moete getallen* worden gerekend. Dit zijn bijvoorbeeld getallen als 25 of veelvoud daarvan. Uitgangspunt bij schattend rekenen is dat precieze getallen worden omgezet in getallen waarmee gemakkelijk kan worden gerekend. Welke getallen dit zijn, hangt af van de eigen kennis van getallen en getalrelaties.

Schattend rekenen met onvolledige gegevens

De hiervoor genoemde opgaven verschillen wezenlijk van schatopgaven waarbij de precieze getallen niet zijn gegeven, zoals bij onderstaande opgave.

- > De prijs per houten sierletter is iets van drie euro-zoveel. Wat zouden zeven letters kunnen kosten?

Om dergelijke opgaven te kunnen oplossen is een goed inzicht vereist in het getalsysteem. Doorzien moet worden welke de onder- en bovengrens zijn van de prijs. Verder gaat het bij deze vorm van schattend rekenen om opgaven waarbij een beroep wordt gedaan op maatkennis. De volgende opgaven zijn hier voorbeelden van:

- > Hoeveel dagen ben je ongeveer oud?
- > Hoeveel mensen zouden in dit flatgebouw wonen?

De gegevens die nodig zijn om deze opgaven te maken

- het aantal dagen in één jaar
- het aantal personen dat in één appartement woont

verschillen echter wel in hun aard. De eerste opgave vraagt om bepaalde maatkennis die de leerlingen paraat moeten hebben, terwijl voor de tweede opgave eerst een bepaalde aanname moet worden gemaakt. Voor dit laatste is het beschikken over referentiegegevens belangrijk. Onbekende gegevens kunnen via bekende gegevens worden achterhaald.



Relatie met andere rekenvormen

Tussen het schattend rekenen en de andere rekenvormen bestaat een hechte relatie. Dit geldt vooral voor het hoofdrekenen. In feite vormt hoofdrekenen het belangrijkste bestanddeel van het schattend rekenen. Nadat de precieze getallen rond of mooi zijn gemaakt, is het schattend rekenen vaak een kwestie van hoofdrekenen. Ook het kiezen van ronde of mooie getallen wordt gestuurd door kennis en vaardigheden die ontwikkeld zijn bij het verkennen van de getallen en bij het hoofdrekenen. Als je de uitkomst van $7712 : 23$ moet schatten, kom je pas op het idee om dit te doen via het uitrekenen van $7500 : 25$, als je deze laatste opgave gemakkelijk hoofdrekenend kunt oplossen.

De relatie met het kolomsgewijs rekenen zit met name in het feit dat hierbij ook met ronde getallen wordt gerekend. Bij het schattend rekenen zijn dit de rond gemaakte getallen en bij het kolomsgewijs rekenen zijn het de positiewaarden die (afgezien van de eenheden) van zichzelf al rond zijn. Kenmerkend voor het kolomsgewijs rekenen is dat er van groot naar klein, ofwel van links naar rechts wordt gerekend. Het gevolg hiervan is dat de kinderen van het begin af aan zicht hebben op de grootte van de uitkomst. Ook bij het schattend rekenen wordt links gestart. Beter gezegd, schattend rekenen richt zich in eerste instantie op de orde van grootte van de getallen.

Verder heeft het schattend rekenen nog een specifieke functie voor het kolomsgewijs delen. Bij het delen moet namelijk steeds worden ingeschat hoeveel er maximaal van het deeltal kan worden afgehaald.

Ondanks het feit dat het schattend rekenen bijna als tegenpool van het cijferen kan worden beschouwd, heeft het hiervoor wel een belangrijke ondersteunende functie. Misrekeningen in de orde van grootte – die bij het cijferen gemakkelijk kunnen ontstaan omdat er met cijfers wordt gewerkt in plaats van met getallen – komen via het achteraf schatten van de uitkomst snel aan het licht.

Ook voor het rekenen op de rekenmachine dient schattend rekenen vooral als controlemiddel. Door te schatten ontstaat zicht op de orde van grootte van de uitkomst en kunnen fouten ten gevolge van foutief intoetsen worden voorkomen. Daarnaast is de rekenmachine een rekenhulp bij complexe schatopgaven.

Ofschoon de verschillende rekenvormen duidelijk een bepaalde eigenheid hebben, is het onderscheid dat hier wordt gemaakt toch maar betrekkelijk. In de praktijk van het rekenen worden de verschillende rekenwijzen door elkaar toegepast en vaak is er sprake van een combinatie van schattend rekenen en vormen van precies rekenen. Belangrijk is wel dat de leerlingen leren die manier van rekenen te kiezen die het best bij de opgave past.

Typering van de leerlijn

Naar een didactiek voor schattend rekenen

Ofschoon het schattend rekenen algemeen geaccepteerd is als een kerndoel van het reken-wiskundeonderwijs, is de didactische vormgeving ervan nog niet volledig uitgekristalliseerd. Dit heeft te maken met het feit dat het schattend rekenen vergeleken met het hoofdrekenen en het cijferen nog maar een korte onderwijsgeschiedenis heeft. Op enkele uitzonderingen na was het onderwijs vóór de introductie van de realistische reken-wiskundemethoden helemaal gericht op het exact leren rekenen. Met de komst van deze methoden veranderde dit. Schatopgaven gingen deel

uitmaken van het reken-wiskundeprogramma en het schattend rekenen werd als een doel op zichzelf beschouwd. De tegenwoordige methoden omvatten dan ook een breed aanbod van schatopgaven uiteenlopend van opgaven waarbij het schatten ten dienste staat van het precies rekenen ('maak eerst een schatting') tot opgaven waarbij alleen maar geschat kan worden, omdat de precieze getallen niet bekend zijn. Ondanks de rijkdom van dit aanbod ontbreekt het nog aan een duidelijke fasering in de wijze waarop de vaardigheid van het schattend rekenen geleidelijk kan worden opgebouwd. In dit hoofdstuk wordt een voorstel voor deze fasering gedaan.



Aspecten van schattend rekenen

Bij het schattend rekenen zijn verschillende aspecten te onderscheiden die in het onderwijs aan bod moeten komen:

- het *getalaspect*
 - getallen rond of mooi maken
 - van rond gemaakte getallen zeggen in welk gebied het oorspronkelijke getal gelegen kan hebben
- het *tautaspect*
 - gebruiken van de informele taal die past bij schattsituaties die zich in het dagelijks leven voordoen
 - hanteren van de formele, reken-wiskundige taal die hoort bij het afronden en schattend rekenen
- het *meetaspect*
 - hebben van maatkennis
 - relaties leggen met referentiegegevens
 - gebruik maken van verhoudingen
- het *rekenaspect*
 - operaties uitvoeren met ronde of mooie getallen
- het *redeneraspect*
 - zicht hebben op de effecten van bewerkingen
 - consequenties doorzien van afronden
- het *attitude-aspect*
 - alert zijn op situaties waarin schattend gerekend kan of moet worden
 - durf hebben om schattend te rekenen en kunnen omgaan met de onzekerheden die hieruit kunnen voortvloeien
 - het hebben van een controlehouding en gevoel voor gegevens die niet kloppen.

Fasering in schattend rekenen

De leerlijn van het schattend rekenen is in dit hoofdstuk in vier onderdelen uiteengelegd. Achtereenvolgens komen aan bod:

- afronden van getallen
- schattend optellen en aftrekken
- schattend vermenigvuldigen en delen
- schattend rekenen met onvolledige gegevens.

De hierbij gehanteerde volgorde weerspiegelt in globale zin het traject dat de kinderen doorlopen. De basis van het schattend rekenen wordt gevormd door het afronden van getallen. Daarna volgt het eigenlijke schattend rekenen. In eerste instantie houdt dit in het opereren met af te ronden getallen die precies gegeven zijn. Weer later omvat het ook het rekenen met onvolledige gegevens. Elk onderdeel wordt afgesloten met de formulering van de tussendoelen en een beschrijving van het onderwijs dat nodig is om de leerlingen tot deze doelen te brengen.

Ondanks de suggestie die van deze indeling uitgaat, is het echter niet zo dat het leren van deze onderdelen na elkaar plaatsvindt. In tegendeel, de vier onderdelen zijn sterk met elkaar verweven en grijpen voortdurend in elkaar. De onderdelen komen dan ook in elke groep terug, maar wel steeds op een hoger niveau. Naast een uitbreiding van het getalgebied waarin wordt gewerkt, houdt deze niveauverhoging vooral in dat bij het afronden en het schattend rekenen een steeds groter beroep wordt gedaan op het inzicht van de kinderen.

Om dit leerproces bij de leerlingen te realiseren is in deze leerlijnbeschrijving uitgegaan van een aanpak in fasen. Daarbij wordt informeel begonnen. Daarna wordt een standaardaanpak ontwikkeld die de leerlingen zich vervolgens door te oefenen steeds meer eigen maken. Als de kinderen zover zijn dat ze deze standaardaanpak goed beheersen, wordt geleidelijk aan toegewerkt naar een meer flexibele werkwijze waarbij ze zelf een passende keuze moeten maken bij het afronden.

Voor het leren afronden ziet de fasering er als volgt uit:

- de informele fase: in deze fase kunnen de leerlingen op een informele manier getallen rond maken
- de regelgeleide fase: in deze fase komen de leerlingen tot een standaardafpraak voor het afronden van getallen en leren ze deze toepassen
- flexibele fase: in deze fase kunnen de leerlingen passende keuzen maken bij het afronden en kritisch omgaan met afgeronde en precieze getallen.



De fasering voor het leren *schattend optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen* ziet er als volgt uit:

- informeel schattend rekenen: in deze fase kunnen de leerlingen uitkomsten globaal bepalen zonder dat ze daarbij de afrondingsregel hanteren
- regelgeleid schattend rekenen: in deze fase komen de leerlingen tot de standaardaf rondingsregel voor het opereren met getallen en leren ze deze toepassen
- flexibel schattend rekenen: in deze fase zijn de leerlingen in staat meer genuanceerde schataanpakken toe te passen bij het opereren met getallen.

Van de vier basisbewerkingen komen het optellen en aftrekken het eerst aan bod. Dit vloeit onder meer voort uit het feit dat bij het vermenigvuldigen en delen de consequenties van het afronden doorgaans minder gemakkelijk zijn te doorzien.

In het algemeen nemen bij het schattend rekenen het optellen en vermenigvuldigen een belangrijkere plaats in dan het aftrekken en delen. Met name deze laatste operatie wordt meestal uitgevoerd door op te vermenigvuldigen.

De rode draad van de leerlijn schattend rekenen wordt gemarkeerd door bepaalde typen opgaven. Meer in het bijzonder wordt hier bedoeld op de vragen die worden gesteld om schattend rekenen uit te lokken en zinvol te maken.

In feite gaat het steeds om drie typen vragen:

- *Is er genoeg?*
- *Kan dit kloppen?*
- *Hoeveel is het ongeveer?*

Het zijn deze vragen – welke op zichzelf weer allerlei verschillende vormen kunnen aannemen – die de stuwende kracht zijn van het leren schattend rekenen en die bovendien verankerd zijn in het schattend rekenen zoals zich dat in het leven van alle dag voordoet. Ofschoon deze drie vragen in elke groep gesteld kunnen worden, is het wel zo dat de eerste twee typen meer thuis horen in de eerste fasen van het leerproces en dat vragen van het derde type later meer op zijn plaats zijn.

In feite is bij dit laatste type vraag sprake van een directe schatvraag waarbij de kinderen zelf met een schatting moeten komen. De andere zijn meer indirecte schatvragen.

Het getaldomein waarin het afronden en schattend rekenen plaatsvindt, loopt parallel met de getalgebieden van de andere rekenvormen. In de nu volgende leerlijnbeschrijving zijn ter wille van het overzicht voornamelijk voorbeelden opgenomen van schatopgaven uit het getaldomein lopend van honderd tot in de miljoenen. De beschrijving concentreert zich daarmee op het aanbod van medio groep 6 tot medio groep 7 – bij uitstek de periode waarbinnen het schattend rekenen sterk tot ontwikkeling komt. Dat hierop het accent wordt gelegd, betekent geenszins dat het schattend rekenen zich tot deze periode moet beperken. Met opgaven in lagere getaldomeinen kan ook al eerder schattend worden gerekend. Op dezelfde manier kunnen de opgaven voor de leerlingen in groep 8 ook opgeschoven worden naar hogere getaldomeinen.

Schattend rekenen en het bijbehorende afronden is een rijk onderdeel binnen het reken-wiskundeonderwijs dat zich moeilijk binnen het raamwerk van deze leerlijnbeschrijving laat samenvatten. Volledigheid kon dan ook niet worden nagestreefd. Omwille van de duidelijkheid is de nadruk gelegd op de rekenkant van het schattend rekenen. Dit betekent dat de meetkant ervan grotendeels buiten beschouwing blijft. Er is voor gekozen om het maken van schattingen gerelateerd aan het meten niet in deze leerlijn op te nemen, maar in de leerlijn meten en meetkunde.

Binnen de rekenkant van het schattend rekenen ligt het zwaartepunt zowel bij het werken met benoemde getallen als kale getallen. De benoemde getallen betreffen aantallen en meetgetallen. Beide zijn gekoppeld aan de elementaire contextsituaties waarin deze voorkomen. Zo gaat het bij aantallen in veel gevallen om inwoners van een stad of land. Bij meetgetallen betreft het meestal geldbedragen of afstanden.



Afronden van getallen

De basis van het schattend rekenen bestaat allereerst uit het zicht hebben op de grootte van getallen en het ontwikkelen van de bijbehorende taal van 'ongeveer zoveel'. Basaal is dat de leerlingen weten bij welk rond getal een bepaald getal in de buurt ligt. In samenhang hiermee moeten de leerlingen ook de weg terug kunnen bewandelen. Dit houdt in dat ze van een afgerond getal kunnen aangeven in welk gebied het oorspronkelijke getal kan hebben gelegen.

Het afronden gebeurt in eerste instantie binnen herkenbare contexten. Daarna vinden ook puur getalsmatige verkenningen plaats.

Informeel afronden

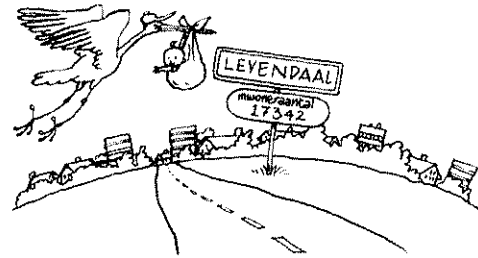
Bij het leren afronden wordt aangesloten bij de informele kennis die de leerlingen hebben over het globaal aangeven van aantallen en meetgetallen. In plaats van precieze getallen, zonder nullen aan het eind, worden dan ronde getallen gebruikt. Afhankelijk van de grootte van het getal kan dit een tien-, honderd-, duizendtal, enzovoort zijn.

Kenmerkend voor deze fase is dat nog niet expliciet met de afrondingsregel wordt gewerkt. De aard van de in deze fase gebruikte getallen, draagt hier in hoge mate toe bij. Bij 1003 verkochte loten ligt het bijvoorbeeld nogal voor de hand om te zeggen 'ongeveer duizend'. Op dezelfde manier wordt een bedrag van €489,- gemakkelijk gezien als 'bijna vijf honderd', zonder dat daar een regel aan te pas hoeft te komen.

Een belangrijk aangrijpingspunt voor het leren afronden vormen situaties uit het dagelijks leven waarbij met globale getalaanduidingen wordt gewerkt. Met name is het van belang dat dan ook de taal wordt gehanteerd die erbij past:

- in de buurt van ...
- omstreeks ...
- een dikke ...
- rond de ...
- ongeveer ...

Binnen het rekenen, waarbij doorgaans alles draait om nauwkeurigheid, is het van belang dat de kinderen leren dat een getal niet altijd hoeft te verwijzen naar een precies aantal, maar dat het ook een benadering ervan kan zijn. Het doel van het leren afronden is dat de kinderen thuis raken in het gebied van precieze en globale aanduidingen van getallen. Dit betekent dat de leerlingen een gevoel moeten ontwikkelen voor het gebruik van afgeronde en precieze getallen. Ze moeten leren beseffen dat het in sommige situaties veel zinnvoller is om met globale aanduidingen te werken dan met precieze getallen. De volgende situatie is daar een voorbeeld van.



Als aan het begin van de bebouwde kom van een stad of dorp een bord wordt geplaatst met informatie over het inwonertal dan heeft het geen zin om de omvang van de populatie op één inwoner nauwkeurig te vermelden. Afgezien van het feit dat het bijna onmogelijk is om het aantal inwoners op één bepaald moment precies te bepalen, houdt zo'n aantal ook maar korte tijd stand.

Naast het aantal inwoners van dorpen, steden en landen zijn nog tal van andere voorbeelden van contexten te noemen waarin het beter is om met afgeronde getallen te werken:

- aantallen verkochte mobiele telefoons in diverse landen
- aantallen bezoekers van films
- aantallen kilometers spoorrails in verschillende landen
- de capaciteit van voetbalstadions
- aantallen kilometers file op verschillende dagen.



Voordat de leerlingen getallen volgens de regel leren afronden, is het nodig dat ze een goed zicht hebben op de grootte van de getallen. In feite is het geven van een indicatie van die grootte een vorm van afronden waarbij nog niet met de afrondingsregel wordt gewerkt. De volgende opgave is daar een voorbeeld van.

- > Geef van de aantallen kilometers aan waar ze ongeveer liggen. Kies voor elk aantal een geschikte getallenlijn.

489 km
7378 km



Het afronden gebeurt bij deze opgaven impliciet. Het is immers op de getallenlijn niet eens zichtbaar of 7378 is afgerond naar het dichtstbijzijnde tiental of naar het dichtstbijzijnde honderdtal. Wel moeten de leerlingen een goede maat kiezen om de orde van grootte tot uiting te laten komen. Het is namelijk weinig zinvol om 7378 aan te geven op de lijn van honderdduizend. De afwegingen die de leerlingen bij opgaven zoals deze moeten maken, luiden het begin van het eigenlijke afronden in.

Een volgende stap is het ter discussie stellen van het aan het begin van de bebouwde kom vermelde inwonertal. Dit kan door te vragen wat er in plaats van 17.736 beter op het bord bij Levendaal had kunnen staan. Hierbij zijn verschillende getallen mogelijk:

- 17.000
- 17.800
- 17.850
- 17.900
- 18.000
- 20.000,

Het mooie van al deze antwoorden is dat ze in zekere zin allemaal goed zijn. Er bestaat hier in feite geen eenduidig antwoord. Toch kan er bij het inventariseren van de suggesties van de leerlingen verschil van mening ontstaan over hoe globaal het inwonertal in deze situatie aangeduid mag of moet worden. De context doet er dus ook toe. Iemand kan bijvoorbeeld denken aan de nieuwe wijk die bijna klaar is en dus kiezen voor 20.000 – want dat bord wordt immers niet ieder jaar vervangen. Door te vragen hoe de leerlingen bij een bepaald rond getal zijn uitgekomen, kan de afrondingsmanier expliciet worden gemaakt. Dit wordt in de volgende fase verder uitgewerkt.

Regelgeleid afronden

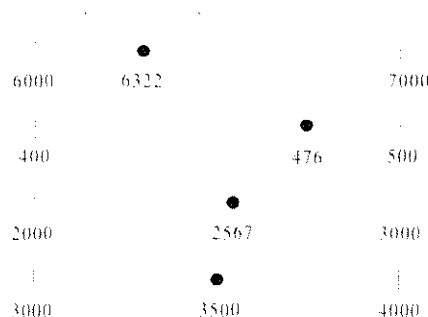
Afronden betekent vaak het kiezen van het dichtstbijzijnde ronde getal. Als de af te ronden getallen dicht bij een rond getal in de buurt liggen, gaat dit min of meer vanzelf.

- > Maak er een rond getal van.

1093 km is ongeveer ... km
€1007,- is ongeveer €...

Anders wordt het als een getal niet dicht bij een rond getal ligt. Dan treedt eigenlijk pas echt de afrondingsregel in werking die aangeeft wanneer naar boven wordt afgerond en wanneer naar beneden. De leerlingen kunnen zelf op deze regel komen als ze moeten beslissen wat de meest ‘eerlijke’ kant is om naar af te ronden.

- > Wat is de eerlijkste kant om naar af te ronden?





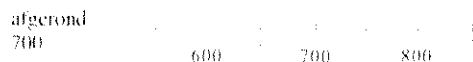
Getallen die rechts van het midden liggen, worden naar boven afgerond en getallen links ervan naar beneden. Het getal in het midden wordt na discussie, volgens afspraak, naar boven afgerond. Afhankelijk van de verfijning van de afronding ziet de afrondingsregel er steeds anders uit. Wordt afgerond naar het dichtstbijzijnde tiental, dan betekent dit dat er bij '5 of hoger' naar boven wordt afgerond en bij '4 of lager' naar beneden. Bij het afronden naar het dichtstbijzijnde duizendtal betekent deze regel dat '500 of hoger' naar boven wordt afgerond en '499 of lager' naar beneden. Door de leerlingen bij elke van de vier getallenlijnen getallen te laten bedenken die naar beneden, respectievelijk naar boven moeten worden afgerond, kunnen ze zelf deze precisering van de regel ontdekken.

Ook de volgende vlekopgaven kunnen uitlokken dat de kinderen zich de afrondingsregel bewust worden. Om deze niet volledig zichtbare getallen af te kunnen ronden, moeten de leerlingen immers eerst een aanname maken over het oorspronkelijke getal.

- > €3, Hoe zou je deze prijs afronden?
- > 8 Hoe zou je dit kilometeraantal afronden?

Als de leerlingen getallen naar het dichtstbijzijnde tien-, honderd-, duizendtal, enzovoort kunnen afronden, is de volgende stap dat ze van een afgerond getal weer een precies getal kunnen maken. Beter geformuleerd houdt dit in dat ze het gebied kunnen aangeven waarbinnen het oorspronkelijke getal kan hebben gelegen. Cruciaal is dat de kinderen hierbij inzien dat het gebied waarin het oorspronkelijke getal ligt, een boven- en ondergrens heeft en dat deze uiterste waarden samenhangen met de standaardregel van het afronden. Het afbakenen van deze grenzen kan in belangrijke mate worden ondersteund door op de getallenlijn te werken.

- > Er is afgerond naar het dichtstbijzijnde honderdtal. Geef op de getallenlijn aan welke getallen het kunnen zijn geweest.



Flexibel afronden

Nadat de leerlingen eerst voldoende ervaring hebben opgedaan met het afronden naar een gegeven dichtstbijzijnd rond getal, kan de stap gezet worden naar de fase waarin de leerlingen zelf beslissen naar welk dichtstbijzijnd rond getal ze afronden. Dit betekent dat ze rekening houden met de grootte van de getallen en de mate van nauwkeurigheid die de context vraagt.

- > Rond de volgende getallen af. Kies voor elk getal een afronding die het best bij het getal past.
788 192.912 5.188
- > Toen in 1994 in de Verenigde Staten een volkstelling werd gehouden, leverde dit de onderstaande getallen op. Omdat het aantal inwoners steeds verandert, zijn deze getallen niet geschikt om opgenomen te worden in een informatieboekje over Amerika.

Alaska	606.276
California	31.430.697
Florida	13.952.714
New Jersey	7.903.925
Texas	18.378.185
Verenigde Staten (totaal)	260.340.990

Hoe zou jij in dit boekje het aantal inwoners aangeven?

De grootte van de getallen speelt bij de keuze een belangrijke rol. Zo kan bij 788 worden gekozen voor een afronding naar het volgende honderdtal, terwijl bij 5188 naar het vorige duizendtal zal worden gegaan en bij 192.912 naar het volgende honderdduizendtal. Afgerond wordt dit dan 200.000. In het geval het hier gaat om een bepaalde telling van het inwonertal van een stad is dit wel een passende afronding. Betreft het echter de (netto) verkoopprijs van een huis dan is 'rond de 190.000' weer beter. De context waarop de getallen betrekking hebben, doet er dus ook toe. Bij getallen boven het miljoen, houdt het afronden vaak in dat wordt overgestapt op een grotere getaleenheid. Als 31.430.697 wordt afgerond op miljoenen, wordt dit vaak niet geschreven als 31.000.000, maar als 31 miljoen. Zijn bij het afronden meerdere getallen betrokken, zoals het geval is bij de lijst met het aantal inwoners van de Amerikaanse staten, dan stelt dit ook weer bepaalde eisen.



Wil men recht doen aan alle in het overzicht opgenomen aantallen dan schiet een afronding op hele miljoenen tekort. Een afronding op één plaats achter de komma is nodig om een grove indicatie te geven van de populatiegrootte van alle genoemde staten. Er wordt dan afgerond op honderdduizenden:

- Alaska	0,6 miljoen
California	31,4 miljoen
Florida	14,0 miljoen
New Jersey	7,9 miljoen
Texas	18,4 miljoen

Het totaal kan echter weer beter op hele miljoenen worden afgerond:

- Verenigde Staten (totaal)	260 miljoen
-----------------------------	-------------

Bij het omgekeerde van afronden, als de leerlingen van rond gemaakte getallen moeten aangeven in welk gebied het oorspronkelijke getal gelegen kan hebben, draait het eveneens om de gebruikte afrondingsmarge. Deze levert namelijk de sleutel om iets over het gebied te kunnen zeggen waarbinnen het oorspronkelijke getal heeft gelegen.

- > Ongeveer 2500 mensen hebben deelgenomen aan de demonstratie. Hoeveel kunnen het er precies zijn geweest?
- > Voor het openluchtconcert zijn ongeveer 2500 kaartjes verkocht. Hoeveel kunnen het er precies zijn geweest?

Na de inventarisatie van de verschillende antwoorden is het van belang te bespreken dat bij de ene schatting veel meer mogelijkheden zijn dan bij de andere.

Bij de eerste opgave zal de schatting vrij globaal tot stand zijn gekomen. Voor het precieze aantal, dat in feite niet te bepalen is, dient dan ook een brede marge te worden gehanteerd. Het aantal kan hebben gelegen tussen de 2250 en de 2750, of wellicht tussen de 2000 en de 3000.

Bij de opgave over het verkochte aantal kaartjes kan wel sprake zijn van een precies getal dat afgerond is. De globale aanduiding van 2500 zou (in theorie) kunnen zijn voortgekomen uit een afronding naar het dichtstbijzijnde tiental (2503) of honderdtal (2532). De kinderen zijn in deze fase zelf in staat een redelijke marge aan te geven waarbinnen het precieze getal kan hebben gelegen.

De laatste fase van het leren afronden houdt ook in dat de kinderen kritisch leren omgaan met afgeronde en precieze getallen. Dit betekent met name dat ze enig inzicht hebben in de nauwkeurigheid van ronde getallen. Sommige leerlingen komen daarbij zover dat ze beseffen dat als een getal op een duizendtal is afgerond, het dan minstens tot in de honderdtallen nauwkeurig is.

Bij dit kritisch omgaan met getallen hoort ook dat de leerlingen de aard van getallen herkennen. De volgende gegevens over de capaciteit van voetbalstadions kunnen hierbij als voorbeeld dienen.

- > Over de capaciteit van de Nederlandse voetbalstadions is op internet de volgende informatie te vinden.
Wat valt je op aan deze aantallen?

VOETBALSTADIONS	CAPACITEIT
Arena (Ajax)	51.324
Alkmaarderhout (AZ)	11.130
De Vijverberg (De Graafschap)	10.900
ECCO Stadion (FC Den Bosch)	4.500
Arke Stadion (FC Twente)	13.500
Nieuw Galgenwaard (FC Utrecht)	14.000
Stadion Feijenoord (Feyenoord)	51.117
De Baandert (Fortuna Sittard)	13.000
De Geusselt (MVV)	10.000
Philipsstadion (PSV)	30.000
Abe Lenstra Stadion (Heerenveen)	13.750
Gelredome (Vitesse)	26.650

Voor sommige stadions worden de aantallen tot op eenheden nauwkeurig gegeven, terwijl bij andere eerder sprake lijkt te zijn van een afronding. De ronde getallen suggereren dit. Strikt genomen echter kunnen de ronde getallen ook precieze getallen zijn. Wat verder opvalt, is dat de afrondingen op verschillende manieren tot stand zijn gekomen.



1

Eind groep 6 kunnen de leerlingen getallen tot tienduizend afronden volgens de standaardregel en kunnen ze van afgeronde getallen aangeven in welk gebied het oorspronkelijke getal gelegen heeft. Eind groep 8 kunnen de leerlingen afronden met getallen tot in de miljoenen. Ze kunnen dan ook een afronding kiezen die bij de grootte van de getallen en de context past. Ook kunnen ze kritisch omgaan met het gebruik van afgeronde en precieze getallen.

In het onderwijs moeten de mogelijkheden worden aangegrepen om in gepaste situaties aantallen met ronde getallen aan te geven. Hierbij moet aangesloten worden bij het globaal aanduiden van aantallen en maten zoals zich dat in het leven van alledag voordoet. Op deze manier kunnen de kinderen gevoel ontwikkelen voor situaties waarin het adequaat is om afgeronde getallen te gebruiken.

Behalve het betekenisaspect – wat is een zinvolle afronding in een bepaalde situatie – dient ook het technische aspect van het afronden aandacht te krijgen. De kinderen moeten vanuit hun inzicht in het getalsysteem de systematiek van het afronden leren begrijpen.

Dit betekent dat na de informele fase waarin de kinderen precieze getallen rond maken zonder dat ze hierbij expliciet regelgeleid te werk gaan, ruimschoots gelegenheid wordt gegeven om de afrondingsregel te ontdekken en ervaring op te doen met het regelgeleid afronden.

Het kunnen toepassen van de afrondingsregel spitst zich toe op het vinden van het omslagpunt.

Een ander aspect van het afronden betreft de orde van grootte van het afronden. Dit is niet in een algemene regel vast te leggen, maar hangt af van de grootte van het getal en de context. Het leren afronden moet erop zijn gericht dat de leerlingen geleidelijk aan flexibel kunnen afronden en zelf kunnen beslissen welke mate van verfijning gewenst is.

Een belangrijke stap hiertoe kan gezet worden door de toegepaste afronding in de klas ter discussie te stellen.

Mede door de reflectie die dit kan oproepen, kan een deel van de kinderen toekomen aan het kritisch omgaan met afgeronde en precieze getallen.



Schattend optellen en aftrekken

Met het leren afronden van getallen is de basis gelegd voor het schattend rekenen. Omgekeerd draagt het globaal bepalen van uitkomsten er ook toe bij dat leerlingen getallen gaan afronden.

Doordat bij het uitvoeren van bewerkingen meerdere getallen betrokken zijn en er bovendien rekening moet worden gehouden met het effect dat de bewerking op het afronden heeft, is het afronden bij het schattend rekenen doorgaans complexer dan bij afzonderlijke getallen.

In elementaire vorm houdt het schattend optellen en aftrekken in dat de leerlingen de volgende opgaven kunnen maken.

- Bepal snel of het totaal van 186,495 en 197 punten meer of minder is dan 1000.
- De prijs is teruggebracht van €0,57,- tot €0,89,-. Klopt het dat er meer dan €200,- korting is gegeven?

Omdat met ronde getallen gewerkt mag worden, komt het rekenwerk bij deze opgaven neer op de meest makkelijke manier van precies rekenen. Bij de eerste opgave kan volstaan worden met de berekening van $200 + 500 + 200$ en bij de tweede opgave met die van $600 - 400$.

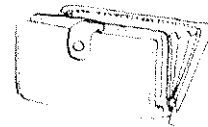
Om de schatvragen echter met zekerheid te kunnen beantwoorden, is ook nog enig redeneerwerk nodig.

Bij de opgave over het puntentotaal moet men doorzien dat het drie keer naar boven afronden, gevoegd bij het feit dat de optelling van de afgeronde getallen slechts op 900 uitkomt, ertoe leidt dat men er zeker van kan zijn dat het totaal onder de 1000 zit. Bij de opgave over de korting kan geredeneerd worden dat zelfs in het geval de prijs slechts tot €400 zou zijn teruggebracht er al meer dan €200 korting zou zijn gegeven.

Om de leerlingen tot schattend optellen en aftrekken te brengen, worden de getallen zo gekozen dat de afrondingen zeer voor de hand liggen: 397 bijvoorbeeld laat zich gemakkelijker afronden dan 357.

Behalve de keuze van de getallen draagt vooral de manier waarop de opgaven worden gepresenteerd ertoe bij dat een schattend aanpak wordt uitgelokt.

Met name opgaven waarbij de leerlingen alleen maar hoeven aan te geven of er genoeg van iets zijn, zijn hiervoor uitermate geschikt.



- Zeg iedere keer of je genoeg geld hebt. In je portemonnee zit €40,-.



Je koopt een t-shirt van €14,95 en een pet van €8,50. Genoeg geld?



Je koopt een t-shirt van €14,95 en een cd van €25,-. Genoeg geld?



Je koopt een boek van €29,- en bloemen voor €12,50.

Een variatie hierop vormen de opgaven waarbij aan de leerlingen wordt gevraagd of de uitkomst onder of boven een bepaald getal ligt.

- Kijk naar de som op het bord. Steek je duim omhoog als de uitkomst onder of boven een bepaald getal ligt.

3486 + 2500
765 + 267
907 + 110 = 50

- Licht het totaal aantal bezoekers box januari 47.312 februari 13.561 maart 26.897 april 107.348

Ook opgaven waarbij de leerlingen bepaalde uitkomst klopt, kunnen op manier tot een schattend aanpak leiden.

Meerkeuzevragen in allerlei variatie voorbeelden van – zeker als de leerling van de opgaven slechts beperkt tijd

- Kies snel het goede antwoord.

6973 + 3937 = a. 9910
b. 10.910
c. 11.910

843 - 178 = a. 365
b. 165
c. 665

- Waar kan het juiste antwoord staan? Bij a, b of c?

205 a. 80
+ 300 b. 490
c. 613

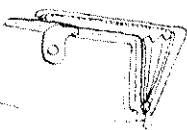
- Waar zal het juiste antwoord hebben? Bij a, b of c?

802 a. 29
398 b. 90
c. 1

a. 4 b. 885
b. 5 c. 185
c. 6 d. 305



in de getallen draagt vooral de manier worden gepresenteerd ertoe bij dat ak wordt uitgelokt, waarbij de leerlingen alleen maar of er genoeg van iets zijn, zijn geschikt.



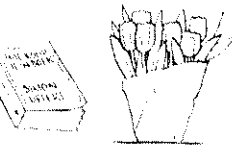
of je genoeg geld hebt.
e zit €40,-.



in van €14,95 en een pet van €8,50.



rt van €14,95 en een ed van €28,-.



, Van €29,- en bloemen voor €12,50.

onnen de opgaven waarbij aan de raagd of de uitkomst onder of boven t.

- Kijk naar de som op het bord.
Steek je duim omhoog als de uitkomst groter is dan 1000 en omlaag als de uitkomst kleiner is dan 1000.
3486 + 2500
765 + 267
907 + 110 = 50
- Licht het totaal aantal bezoekers boven het kwart miljoen?
januari 47.312
februari 13.561
maart 26.897
april 107.348

Ook opgaven waarbij de leerlingen moeten zeggen of een bepaalde uitkomst klopt, kunnen op een natuurlijke manier tot een schattende aanpak leiden.

Meerkeuzevragen in allerlei variaties zijn hier goede voorbeelden van – zeker als de leerlingen voor het maken van de opgaven slechts beperkt tijd krijgen.

- Kies snel het goede antwoord.
6973 + 3937 = a. 9910
b. 10.910
c. 11.910

$$543 - 178 = \text{a. } 365$$

$$\text{b. } 165$$

$$\text{c. } 665$$

- Waar kan het juiste antwoord staan?
Bij a, b of c?

$$\begin{array}{r} 2 \bullet 5 \\ + 3 \bullet \bullet \end{array}$$

$$\text{a. } 8 \bullet$$

$$\text{b. } 49 \bullet$$

$$\text{c. } 613$$

- Waar zal het juiste antwoord hebben gestaan?
Bij a, b of c?

$$\begin{array}{r} 8 \bullet 2 \\ - 398 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ - 50 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\text{a. } 4$$

$$\text{b. } 5$$

$$\text{c. } 6$$

$$\text{a. } 885$$

$$\text{b. } 18,5$$

$$\text{c. } 3,5$$

Directe schatvragen waarbij de kinderen moeten bepalen wat de uitkomst ongeveer is en waarbij ze dus zelf een schatting van de uitkomst moeten maken, komen later. Voor alle vragen geldt, dat de leerlingen ervaren dat ze toch een goed antwoord kunnen geven, ook al rekenen ze niet met precieze getallen.

Informeel schattend optellen en aftrekken

In de eerste fase van het schattend optellen en aftrekken worden de getallen zo gekozen dat met een zeer globale aanpak kan worden volstaan.

De vragen zijn doorgaans van de volgende twee typen:

Is er genoeg?
Kan dit kloppen?

Zo is het aanvankelijk al voldoende als de kinderen weten dat het puntentotaal van 2.113 en 3.389 boven de 5.000 ligt. Ook als de leerlingen alleen maar naar de grootste positiewaarden kijken, is dit al duidelijk.

$$\begin{array}{r} 2113 \\ + 3389 \end{array}$$

In plaats van naar het dichtstbijzijnde ronde getal af te ronden, wordt de oplossing dan gevonden door letterlijk of in gedachten – de andere positiewaarden met de duim te bedekken.

$$\begin{array}{r} 2 \bullet \\ + 3 \bullet \bullet \end{array}$$

Regelgeleid schattend optellen en aftrekken

Via opgaven waarbij de zeer globale werkwijze tot foutieve conclusies kan leiden, komen de leerlingen tot meer precieze afspraken voor het afronden bij het schattend optellen en aftrekken. De volgende opgave is daar een voorbeeld van.



* Verkochte televisies in twee jaar: 4896 en 5987.

Komt het totaal boven de 10.000 uit?

Door bij deze opgave de getallen af te kappen en dus alleen naar de duizendtallen te kijken, zou men tot de conclusie kunnen komen dat het totale aantal onder de 10.000 blijft.

$$\begin{array}{r} 48 \\ + 59 \end{array}$$

Wordt de duim echter naar rechts geschoven, dan is meteen te zien dat deze schatting te laag is, want 800 plus 900 gaat over de 1000 heen, waardoor het totaal boven 10.000 komt.

$$\begin{array}{r} 48 \\ + 59 \end{array}$$

Hoever de leerlingen moeten gaan bij dit naar rechts schuiven van de duim, hangt af van de vraag. In dit geval doen de positiewaarden van de tientallen en eenheden er niet toe. Na de honderdtallen is immers al duidelijk dat het totaal boven de 10.000 ligt.

Meer precieze afspraken bij het afronden zijn ook nodig bij vragen van het type:

Wat is het ongeveer?

Om bijvoorbeeld een schatting van het totaal van 4896 en 5987 te maken, leidt afkappen bij de duizendtallen niet tot een goede schatting. Beter is het om beide getallen naar het dichtstbijzijnde duizendtal af ronden. De afrondingsregel schrijft in dit geval afronden naar boven voor.

In de fase van het regelgeleid afronden wordt van de kinderen verwacht dat ze bij het schattend optellen en aftrekken kunnen afronden volgens de gangbare afrondingsregel.

Flexibel en kritisch schattend optellen en aftrekken

Weer een stap verder is de ontdekking dat deze afrondingsregel bij het schattend optellen en aftrekken niet altijd strikt moet worden toegepast. Met name als de getallen, waarmee schattend wordt opgeteld en afgetrokken, dicht bij het omslagpunt van de vijftig, vijfhonderd, enzovoort liggen, vergt dit een aanpassing van de procedure.

De volgende opgave maakt dit duidelijk.

- * Voor de finale zijn in de eerste week op drie verschillende verkooppunten in de stad de volgende aantallen kaartjes verkocht: 3587, 2574 en 3928. Hoeveel kaartjes zijn dat ongeveer in totaal?

Als bij deze getallen volgens de gangbare regel wordt afgerond

3587 wordt 4 duizend

2574 wordt 3 duizend

3928 wordt 4 duizend

komt het totaal op 11 duizend, terwijl 10 duizend een betere schatting is. Door de schattingen, waarmee de leerlingen komen, te vergelijken en deze ook te toetsen aan het precieze totaal, kunnen verfijningen van de afrondingsaanpak in beeld komen.

Voor het optellen houdt de aanpassing van de gangbare afrondingsregel in dat als twee getallen dicht bij het omslagpunt liggen het ene getal naar boven en het andere naar beneden wordt afgerond. Op deze manier kunnen de afwijkingen elkaar enigszins compenseren. Bij het aftrekken is het daarentegen juist zaak om het verschil constant te houden en de beide getallen in dezelfde richting af te ronden.

Behalve dat in deze fase van flexibel en kritisch schattend optellen en aftrekken de leerlingen rekening kunnen houden met de effecten van de bewerkingen, krijgen ze ook een beter zicht op de consequenties van het afronden. Dit betekent dat er ook uitspraken gedaan kunnen worden over de afwijking die door het afronden ontstaat.

In eerste instantie zullen deze uitspraken betrekking hebben op de richting van de afwijking. De leerlingen kunnen dan aangeven of de schatting groter of kleiner is dan de precieze uitkomst. Later kunnen ze ook een indicatie geven van de grootte van de afwijking en kunnen ze, als bestaat, hun eerste schatting bijstellen.

Tot het hoogste niveau van schattend rekenen is het inzicht dat het precies rekenen met afgeronde getallen kent.

Zo heeft het bijvoorbeeld geen zin om te zeggen dat de eerder genoemde aantallen van beschikbare Nederlandse voetbalstadions. Omdat duidelijk afgeronde getallen bevat, waar nogal verschillende marges in acht zijn te nemen, is het zinloos om die getallen nauwgezet op te tellen.

Een treffend voorbeeld van wat er mis kan gaan met afgeronde getallen precies gerekend wordt, wordt in het volgende krantenbericht zien.³

25.999 kippen bij brand omgekomen

Van onze correspondent

HELLENDORP - Bij een brand op een boerderij van de familie K. in Hellen zijn 25.999 kippen omgekomen. In de brand zijn 26.000 kippen bevonden, bevestigd door de brandweer. Een knikken kon aan de vlammen ontsnappen. De brand ontstond in een leegst schuur, vermoedelijk ten gevolge van kortsluiting en sloeg door de harde vloer naar de loodsen, waarin zich de kippen bevonden. De schade bedraagt ruim een miljoen.

Op het eerste gezicht lijkt het misschien niet zo precies weet hoeveel kippen er zijn of er. Maar al gauw zal duidelijk worden hoe hijs. Een ontsnapte kip en 26.000 kippen in de loodsen. Het verschil inderdaad 25.999 op. Toch wordt fout gemaakt.

kritisch schattend optellen en aftrekken
Op verder is de ontdekking dat deze
regel bij het schattend optellen en aftrekken
nauwkeurig moet worden toegepast. Met name als de
armee schattend wordt opgeteld en
het dicht bij het omslagpunt van de vijftig,
het evenzo voort liggen, vergt dit een aanpassing
te maken.
De opgave maakt dit duidelijk.

De finale zijn in de eerste week op drie
verschillende verkooppunten in de stad de volgende
aantallen kaartjes verkocht: 3587, 2574 en 3928.
Hoeveel kaartjes zijn dat ongeveer in totaal?

De getallen volgens de gangbare regel wordt

omdat 4 duizend
omdat 3 duizend
omdat 4 duizend

aantal op 11 duizend, terwijl 10 duizend een
afgeronde waarde is. Door de schattingen, waarmee de
cijfers worden, te vergelijken en deze ook te toetsen
aan de werkelijke totaal, kunnen verfijningen van de
cijfers in beeld komen.

De leerlingen houdt de aanpassing van de gangbare
regel in dat als twee getallen dicht bij het
aantal liggen het ene getal naar boven en het andere
naar beneden wordt afgerond. Op deze manier kunnen de
cijfers elkaar enigszins compenseren. Bij het aftrekken
tegen juist zaak om het verschil constant te
houden. Beide getallen in dezelfde richting af te ronden.

In deze fase van flexibel en kritisch schattend
aftrekken de leerlingen rekening kunnen
houden met de effecten van de bewerkingen, krijgen ze
een beter zicht op de consequenties van het afronden.
Het is belangrijk dat er ook uitspraken gedaan kunnen
worden over de afwijking die door het afronden ontstaat.

In eerste instantie zullen deze uitspraken vooral
betrekking hebben op de richting van de afwijking.
De leerlingen kunnen dan aangeven of de schatting groter
of kleiner is dan de precieze uitkomst.
Later kunnen ze ook een indicatie geven van de orde van
grootte van de afwijking en kunnen ze, als er aanleiding toe
bestaat, hun eerste schatting bijstellen.

Tot het hoogste niveau van schattend rekenen behoort het
inzicht dat het precies rekenen met afgeronde getallen zijn
grenzen kent.
Zo heeft het bijvoorbeeld geen zin om te gaan rekenen met
de eerder genoemde aantallen van beschikbare plaatsen in
de Nederlandse voetbalstadions. Omdat deze lijst
duidelijk afgeronde getallen bevat, waarbij klaarblijkelijk
nogal verschillende marges in acht zijn genomen, is het
zinloos om die getallen nauwgezet op te tellen.

Een treffend voorbeeld van wat er mis kan gaan als er met
afgeronde getallen precies gerekend wordt, laat het
volgende krantenbericht zien.⁴

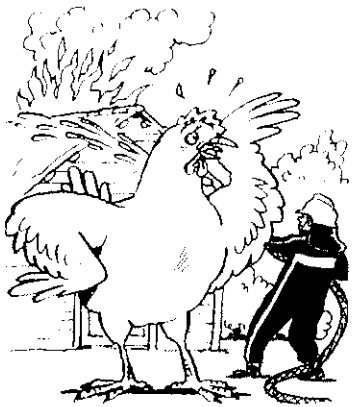
25.999 kippen bij brand omgekomen

Van onze correspondent
HELLENDORP— Bij een brand op de
boerderij van de familie K. in Hellendorp
zijn 25.999 kippen omgekomen. In de loods
waarin de brand woedde, bevonden zich
26.000 kippen. Een kuiken kon aan de
vlammen ontsnappen.
De brand ontstond in een leegstaande
schuur, vermoedelijk ten gevolge van
kortsluiting en sloeg door de harde wind
over naar de loodsen, waarin zich de kippen
bevonden. De schade bedraagt ruim een half
miljoen.

Op het eerste gezicht lijkt het misschien vreemd dat men
zo precies weet hoeveel kippen er zijn omgekomen.
Maar al gauw zal duidelijk worden hoe hier is gerekend.
Een ontsnapte kip en 26.000 kippen in de loods leveren als
verschil inderdaad 25.999 op. Toch wordt hier een grote
fout gemaakt.



Ook al staat het er in de krant niet met zoveel woorden bij,
het aantal van 26.000 staat natuurlijk voor 'ongeveer
26.000 kippen'. Waarschijnlijk is er afgerond op het
dichtstbijzijnde duizendtal. Vandaar dat het buiten de orde
is om van dit afgeronde aantal kippen die ene ontsnapte
kip af te trekken.



Kinderen die het lachwekkende van de berekening inzien,
zullen wellicht ook geen moeite met de volgende opgave
hebben.

Op te lossen: Leg uit dat deze uitkomsten kloppen.

ongeveer 1 miljard + 1 miljoen = ongeveer 1 miljard
ongeveer 1 miljard - 1 miljoen = ongeveer 1 miljard

Om te begrijpen dat deze uitkomsten inderdaad kloppen,
is nogal wat denkwerk nodig. De omschrijving 'ongeveer
1 miljard' geeft aan dat dit ronde getal een schatting is.
Dit laatste is nog vrij gemakkelijk te begrijpen.
Moeilijker te doorgronden is dat dit een schatting betref
met een afrondingsmarge van 100 miljoen en dat het voor
het totaal niet uitmaakt of aan de schatting van
1.000 miljoen één miljoen wordt toegevoegd of één
miljoen wordt afgehaald. Een getallenlijn kan hierbij
ondersteuning bieden.



Eind groep 6 kunnen de leerlingen schattend optellen en aftrekken in het getalgebied tot tienduizend waarbij ze afronden volgens de standaardprocedure.

Eind groep 8 kunnen de leerlingen schattend optellen en aftrekken met getallen tot in de miljoenen en daarbij zelf een bij de getallen en de bewerking passende afronding kiezen. Verder kunnen ze bepalen of een geschatte uitkomst meer of minder is dan de precieze uitkomst. Voor een deel van de leerlingen geldt dat ze ook zicht hebben gekregen op de orde van grootte van de afwijking.

Om de leerlingen tot schattend optellen en aftrekken te brengen, zijn opgaven nodig die dit globale rekenen uitlokken. Dit zijn bijvoorbeeld opgaven waarbij de leerlingen alleen hoeven aan te geven of er ergens genoeg van zijn. Andere geschikte opgaven zijn die waarbij de leerlingen uit een aantal gegeven antwoorden de goede uitkomst moeten kiezen of opgaven waarbij ze moeten aangeven of een bepaalde uitkomst kan kloppen. Later volgen ook opgaven waarbij de leerlingen zelf met een schatting moeten komen. Voor alle opgaven geldt dat voor de beantwoording ervan geen precies rekenen nodig is en dat de oplossing redenerend en globaal rekenend gevonden kan worden. Verder is het belangrijk dat in het begin de getallen zo worden gekozen, dat de te kiezen afronding nogal voor de hand ligt. Met het oog op de weerstand die sommige leerlingen kunnen hebben tegen een schattende aanpak, is het van belang ze te laten ervaren dat het rekenen met afgeronde getallen meestal een verwaarloosbaar effect heeft op de orde van grootte van de uitkomst en dan ook vaak geen invloed heeft op de beantwoording van de schatvraag.

In de beginfase van het leren schattend optellen en aftrekken krijgen de leerlingen opgaven waarbij volstaan kan worden met een zeer globale aanpak. Via opgaven die een bepaalde conflictsituatie oproepen komen ze tot een meer verfijnde manier van afronden waarbij ze de gebruikelijke afrondingsregel toepassen. Door te vragen of de schatting boven of onder de precieze uitkomst ligt en door verschillende schattingen te vergelijken – of anderszins ter discussie te stellen – kunnen de leerlingen tot bijstelling van de schattingen komen en kunnen ze bij de keuze van de afronding steeds meer rekening houden met de grootte van de getallen, de context waarin deze gebruikt worden en de uit te voeren bewerking.

Schatten

Als de leerlingen al flink wat ervaring hebben afronden van getallen en goed thuis zijn in het optellen en aftrekken, lijkt er niet zoveel meer zijn om ook het schattend vermenigvuldigen onder de knie te krijgen.

Dit is echter maar ten dele waar. Zolang uitsluitend een zeer globale schatting wordt gevraagd, is schattend vermenigvuldigen en delen inderdaad vergelijkbaar met het schattend optellen en aftrekken. Het wordt anders als het om een meer verfijnd gaat en de leerlingen ook zicht moeten hebben op de orde van grootte van de afwijking. Dat er dan een aanzienlijk verschil optreedt met het schattend optellen en aftrekken heeft alles te maken met het feit dat de effectieve afrondingen bij het schattend vermenigvuldigen niet zo doorzichtig zijn. Afwijkingen en onnauwkeurigheden worden opgeblazen. Een hiervan is dat het veel moeilijker is om te doorzichten of de afronding de beste schatting oplevert. Dit is nu het geval als in een opgave meerdere getallen moeten worden afgerond. Dan wordt het terrein van de betere betreden. Het leren schattend vermenigvuldigen en delen is een proces dat verder reikt dan de basisschool.

Wat wel van iedere basisschoolleerling verwacht kan worden, is het bereiken van de fase van het regelmatig schattend vermenigvuldigen en delen met opgaven waarbij maar één getal hoeft te worden afgerond. In deze fase geldt dat het schattend delen moeilijker is dan het schattend vermenigvuldigen. Daarom kan het delen ook later in de leerloop op vermenigvuldigen geassocieerd worden.

Informeel schattend vermenigvuldigen en delen

De vorm van schattend vermenigvuldigen en delen die eerst binnen het bereik van de leerlingen ligt is het informeel schattend vermenigvuldigen en delen. Hierbij zijn de getallen zo gekozen dat de rekeningen waarmee gerekend kan worden tamelijk voor de hand liggen. Van het expliciet toepassen van de afrondingsregels is nog geen sprake.



Schattend vermenigvuldigen en delen

n aftrekken in het
is de

en aftrekken met
getallen en de
ze bepalen of een
tkomst. Voor een
cregen op de orde

brengen, zijn
jn bijvoorbeeld
en of er ergens
rbij de leerlingen
moeten kiezen of
ntkomst kan
n zelf met een
oor de
dat de oplossing
Verder is het
n, dat de te kiezen
eerstand die
le aanpak, is het
ronde getallen
n grootte van de
twoording van de

ekken krijgen de
en zeer globale
oproepen komen
ze de
n of de schatting
hillende
te stellen
comen en kunnen
houden met de
kt worden en de

Als de leerlingen al flink wat ervaring hebben met het afronden van getallen en goed thuis zijn in het schattend optellen en aftrekken, lijkt er niet zoveel meer nodig te zijn om ook het schattend vermenigvuldigen en delen onder de knie te krijgen.

Dit is echter maar ten dele waar. Zolang uitsluitend naar een zeer globale schatting wordt gevraagd, is het schattend vermenigvuldigen en delen inderdaad vergelijkbaar met het schattend optellen en aftrekken. Het wordt anders als het om een meer verfijnde schatting gaat en de leerlingen ook zicht moeten hebben op de grootte van de afwijking. Dat er dan een aanzienlijk verschil optreedt met het schattend optellen en aftrekken heeft alles te maken met het feit dat de effecten van de afrondingen bij het schattend vermenigvuldigen en delen niet zo doorzichtig zijn. Afwijkingen en onnaauwkeurigheden worden opgeblazen. Een gevolg hiervan is dat het veel moeilijker is om te doorzien welke afronding de beste schatting oplevert. Dit is met name het geval als in een opgave meerdere getallen moeten worden afgerond. Dan wordt het terrein van de betere rekenaar betreden. Het leren schattend vermenigvuldigen en delen is een proces dat verder reikt dan de basisschool.

Wat wel van iedere basisschoolleerling verwacht kan worden, is het bereiken van de fase van het regelgeleid schattend vermenigvuldigen en delen met opgaven waarbij maar één getal hoeft te worden afgerond. In het algemeen geldt dat het schattend delen moeilijker is dan het schattend vermenigvuldigen. Daarom kan het delen ook het best met op-vermenigvuldigen geassocieerd worden.

Informeel schattend vermenigvuldigen en delen

De vorm van schattend vermenigvuldigen en delen die als eerste binnen het bereik van de leerlingen ligt, is die van het informeel schattend vermenigvuldigen en delen. Hierbij zijn de getallen zo gekozen dat de ronde getallen waarmee gerekend kan worden tamelijk voor de hand liggen. Van het expliciet toepassen van de afrondingsregel is nog geen sprake.

Bovendien is de vraagstelling zodanig dat een globale berekening volstaat. Dit houdt in dat de vragen doorgaans de volgende twee typen omvatten:

Is er genoeg?

Kan dit kloppen?

- Nieuw: Espressolepeltjes 1495 punten per stuk.
Ik heb 10.000 punten gespaard.
Heb ik genoeg voor 6 espressolepeltjes?
- In totaal is bij de verkoop van loten €1985,- opgehaald.
De loten kosten €5,- per stuk.
Hoeveel loten zijn er ongeveer verkocht?
- a. bijna 1000
b. bijna 750
c. bijna 500

Deze vorm van schattend vermenigvuldigen en delen houdt niet meer in dan het precies rekenen met rond gemaakte getallen:

- 6×1500 is 9000 of
- 2×1500 is 3000 en 3×3000 is 9000,
dus ik heb genoeg punten
- $5000 : 5$ is 1000 of
- 1000×5 is 5000,
dus "bijna 1000" is het beste antwoord.

Het bovenstaande lijkt eenvoudig, maar willen de kinderen dit rekenen met ronde getallen kunnen toepassen, dan moet er eerst op het gebied van het afronden van getallen een hechte basis zijn gelegd. Is dit niet gebeurd, dan is de kans groot dat ze in de volgende fase vastlopen.

Dat ook het benodigde redeneren voor deze opgaven niet onderschat moet worden, blijkt uit het volgende gesprekje met een leerling uit groep 7 over de prijs van zeven sierletters.⁵

ARLETTE

De houten sierletters kosten €3,95 per stuk.
ARLETTE koopt zeven letters voor op haar slaapkamerdeur.
Hoeveel gaat haar dit ongeveer kosten?

Leraar: "Als Arlette de letters gaat kopen, kan dat dan samen 28 euro zijn?"
Eveline: "... Ja ... 7 keer 3 is 21 en als je die 90 bij elkaar optelt, is het bijna 28 euro. Nou, misschien iets meer dan 28 euro."
Leraar: "Iets meer dan 28 euro?"
Eveline: "Ik denk het wel."

Nicole, een leerling uit een andere groep 7, reageert op dezelfde vraag heel anders.⁶ Zij weet zeker dat de zeven letters minder kosten dan €28,-.

Nicole: "7 keer 4 is 28. Eigenlijk moet het 7 keer 3,95 zijn en dat is minder dan 4 euro. Dus dan weet ik dat ik aan 4 euro genoeg heb."

Bij medeleerling Maddy leidt de discussie over de schatting - en enige sturing van de leraar daarbij - zelfs tot een handige strategie voor het vinden van de precieze uitkomst.

Leraar: "Heb ik genoeg aan 100 euro?"
Maddy moet lachen en zegt: "Ja."
Leraar: "Heb ik genoeg aan 50 euro?"
Maddy hoeft hier niet over na te denken: "Ja."
Leraar: "Heb ik genoeg aan 28 euro?"
Maddy: "Ik denk het wel."
Leraar: "Heb ik genoeg aan 21 euro?"
Maddy zegt onmiddellijk: "Nee."
Leraar: "Heb ik genoeg aan 27 euro?"
Maddy: "Eh, nee, ja ..., nee ..., niet genoeg. Want als ik 7 keer 3 doe dan heb ik 21 euro."
Maddy vervolgt met: "En dan heb ik nog 95 cent over."



Dat had je bewaard, zeg maar. Daar maak je 1 euro van. Dan doe je die euro ook nog 7 keer. Dan kom je op 7 euro uit. Dan doe je 21 plus 7, dat is 28. Maar dan had je nog te veel gedaan, 5 cent te veel gedaan. En je had het 7 keer, dus dan doe je 5 keer 7. Dat is 35 en dan trek je er 35 vanaf. Dat is, even kijken ... eh ... 27 euro 65."

Een andere leerling uit dezelfde groep formuleert deze manier van handig rekenen nog korter.

Patrick: "Ik heb eerst 7 keer 4 gedaan, is 28 ... eh ... dat is 28 euro. Toen had ik 7 keer 5 cent te veel gedaan. Die heb ik eraf gedaan."

Regelgeleid schattend vermenigvuldigen en delen

De volgende stap is dat bij het schattend vermenigvuldigen en delen de afrondingsregel wordt toegepast. Dit volgens recept werken is nodig als de ronde getallen waarmee gerekend kan worden niet voor de hand liggen - zoals bij de volgende opgave het geval is.

→ Er zijn verschillende soorten sierletters.

Houten letters: €3,85 per stuk

ANNEKE

Koperen letters: €5,35 per stuk

ANNEKE

Plastic letters: €2,55 per stuk

ANNEKE

ANNEKE koopt zes letters voor op haar slaapkamerdeur.

Zoek voor elke soort letter uit hoeveel dit ongeveer kost. Er mag met hele euro's worden gerekend.

Bij de nabespreking van de opgave worden verschillende schattingen vergeleken. Daar orde welke afronding bij de verschillende t meest 'eerlijke' is.

Een apart geval vormt de afronding van € de afrondingsregel moet hier naar boven v afgerond, maar een afronding op €2,50 k ook. Het maakt de schatting preciezer en b €2,50 heel handig te rekenen. Gekoppeld aan de gekozen afronding m kinderen ook kunnen zeggen of de schatti onder de precieze uitkomst ligt. Het kwalitatief 'meer-minder' en kwantit meer-minder' bijstellen van de schatting, laatste kan leiden tot een handige manier uitkomst te vinden, is voor de meeste lee basisschool alleen haalbaar indien bij ven deelopgaven maar één getal afgerond ho

Heel wat moeilijker wordt dit bijstellen, getallen in een opgave moeten worden af Als voorbeeld kan het volgende probleem c

→ In de zaal zijn 18 rijen met elk 32 stoelen. Hoeveel zitplaatsen zijn er ongeveer?

Op het eerste gezicht lijkt dit een eenvoud schatprobleem. Moeilijker wordt het eel wordt of deze schatting hoger of lager u precieze berekening van 18×32 . De volgende tekening laat zien dat de sel Deze toelichting is bedoeld als achtergro Een dergelijk inzicht kan van de kinderen verlangd.

Als 18 wordt afgerond tot 20 en 32 tot 30, d rechthoek van 18×32 een strook van twa komt er aan de onderkant een strook van tw De strook van twee die aan de rechthoek gehaald, is wat korter dan de strook van twee aan de onderkant.

waard, zeg maar. Daar maak je 1 euro van.
 7 euro ook nog 7 keer. Dan kom je op 7 euro
 21 plus 7, dat is 28. Maar dan had je nog te
 cent te veel gedaan. En je had het 7 keer, dus
 7. Dat is 35 en dan trek je er 35 vanaf. Dat
 t... eh ... 27 euro 65.”

ling uit dezelfde groep formuleert deze
 dig rekenen nog korter:

ch eerst 7 keer 4 gedaan, is 28 ... eh ... dat is
 had ik 7 keer 5 cent te veel gedaan. Die heb
 t.”

Schattend vermenigvuldigen en delen

p is dat bij het schattend vermenigvuldigen
 ndingsregel wordt toegepast. Dit volgens
 s nodig als de ronde getallen waarmee
 orden niet voor de hand liggen – zoals bij
 gave het geval is.

chillende soorten sierletters.

rs: €3,85 per stuk **ANNEKE**

terst: €5,35 per stuk **ANNEKE**

rs: €2,55 per stuk **ANNEKE**

oopt zes letters voor op haar slaapkamerdeur.

ke soort letter uit hoeveel dit ongeveer kost.
 hele euro's worden gerekend.

Bij de nabespreking van de opgave worden de
 verschillende schattingen vergeleken. Daarbij komt aan de
 orde welke afronding bij de verschillende bedragen de
 meest ‘eerlijke’ is.

Een apart geval vormt de afronding van €2,55. Volgens
 de afrondingsregel moet hier naar boven worden
 afgerond, maar een afronding op €2,50 kan natuurlijk
 ook. Het maakt de schatting preciezer en bovendien is met
 €2,50 heel handig te rekenen.

Gekoppeld aan de gekozen afronding moeten de
 kinderen ook kunnen zeggen of de schatting boven of
 onder de precieze uitkomst ligt.
 Het kwalitatief ‘meer-minder’ en kwantitatief ‘hoeveel
 meer-minder’ bijstellen van de schatting, waarbij het
 laatste kan leiden tot een handige manier om de precieze
 uitkomst te vinden, is voor de meeste leerlingen van de
 basisschool alleen haalbaar indien bij vermenigvuldig- en
 deelopgaven maar één getal afgerond hoeft te worden.

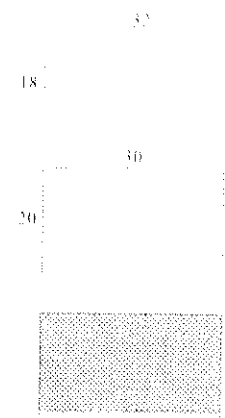
Heel wat moeilijker wordt dit bijstellen, als meerdere
 getallen in een opgave moeten worden afgerond.
 Als voorbeeld kan het volgende probleem dienen.

- » In de zaal zijn 18 rijen met elk 32 stoelen.
 Hoeveel zitplaatsen zijn er ongeveer?

Op het eerste gezicht lijkt dit een eenvoudig
 schatprobleem. Moeilijker wordt het echter als gevraagd
 wordt of deze schatting hoger of lager uitkomt dan de
 precieze berekening van 18×32 .
 De volgende tekening laat zien dat de schatting hoger ligt.
 Deze toelichting is bedoeld als achtergrondinformatie.
 Een dergelijk inzicht kan van de kinderen niet worden
 verlangd.

Als 18 wordt afgerond tot 20 en 32 tot 30, dan wordt aan de
 rechterkant van 18×32 een strook van twee afgehaald en
 komt er aan de onderkant een strook van twee bij.

De strook van twee die aan de rechterkant eraf wordt
 gehaald, is wat korter dan de strook van twee die er bijkomt
 aan de onderkant.

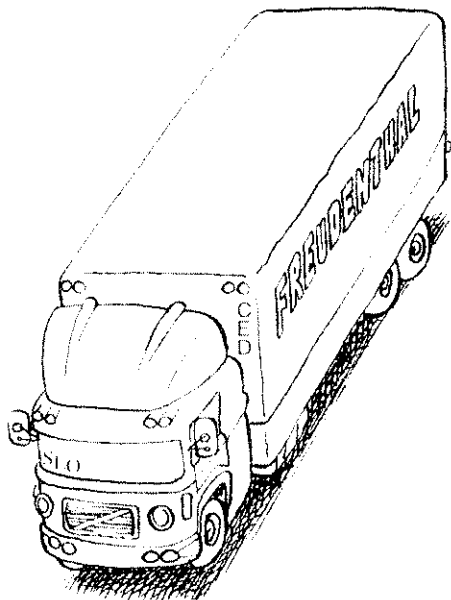


Als op basis van deze tekeningen nog wat wordt
 doorgedacht, is het te begrijpen dat de afwijking kleiner is
 naarmate de vermenigvuldiging meer ‘vierkant’ is.

Wat deze opgave duidelijk maakt, is dat schattend rekenen
 soms verraderlijk eenvoudig lijkt, terwijl het in feite
 behoorlijk moeilijk is. Vermenigvuldig- en deelopgaven
 waarbij meerdere getallen moeten worden afgerond,
 overstijgen het programma van de basisschool. Dat de
 leerlingen soms toch nog tot een goede schatting komen, ligt
 dan ook vaak aan de gebruikte getallen.
 Zo levert de afrondingsregel waarbij wordt afgerond naar
 het dichtstbijzijnde hele getal bij de volgende opgave een
 schatting op die aardig in de buurt ligt van de precieze
 uitkomst.

- » De laadruimte van de vrachtwagen is 8,92 m lang,
 2,09 m breed en 2,89 m hoog.
 Hoe kun je de inhoud van deze laadruimte het beste schatten?
- A. $8 \times 2 \times 2 \text{ m}^3 = 32 \text{ m}^3$
 B. $9 \times 2 \times 2 \text{ m}^3 = 36 \text{ m}^3$
 C. $9 \times 2 \times 3 \text{ m}^3 = 54 \text{ m}^3$
 D. $9 \times 3 \times 3 \text{ m}^3 = 81 \text{ m}^3$

Maar bij de nu volgende versie van de opgave is dit niet
 meer het geval.



- > De laadruimte van de vrachtwagen is 8,62 m lang, 2,09 m breed en 2,55 m hoog.
Hoe kun je de inhoud van deze laadruimte het beste schatten?
- A. $8 \times 2 \times 2 \text{ m}^3 = 32 \text{ m}^3$
 - B. $9 \times 2 \times 2 \text{ m}^3 = 36 \text{ m}^3$
 - C. $9 \times 2 \times 3 \text{ m}^3 = 54 \text{ m}^3$
 - D. $8 \times 2 \times 3 \text{ m}^3 = 48 \text{ m}^3$

De standaardaanpak brengt hier nogal een grote afwijking teweeg. De consequentie hiervan is immers dat er twee keer flink naar boven moet worden afgerond (bij 8,62 en 2,55). De betere leerlingen komen mogelijk op het idee om het ene getal naar boven af te ronden en het andere naar beneden.

Een andere geschikte aanpak die meer voor de hand ligt, is om de 8,62 naar boven af te ronden, de 2,09 naar beneden en de 2,55 om te zetten in 2,50. De schatting kan dan worden gemaakt via $9 \times 2 \times 2,5$ ofwel 9×5 . Deze laatste aanpakken vallen buiten het regelgeleide schattend vermenigvuldigen en delen, en markeren de overgang naar het flexibele schatten.

Flexibel schattend vermenigvuldigen en delen

Slechts een deel van de basisschoolleerlingen zal tot de meer verfijnde manieren van schattend vermenigvuldigen en delen kunnen komen.

Aanpassingen in de afrondingsrichting

Sommige leerlingen ontdekken dat bij het vermenigvuldigen – evenals bij het optellen – de beste schatting wordt verkregen als de afronding in tegenovergestelde richtingen plaatsvindt (het ene getal naar boven en het andere naar beneden). Bij het delen is het juist beter als deeltal en deler in dezelfde richting worden afgerond. Dit komt overeen met het afronden bij het schattend aftrekken. Zoals bij het aftrekken de afstand zoveel mogelijk constant moet worden gehouden, moet bij het delen de verhouding zoveel mogelijk gelijk blijven. Wel moet men erop bedacht zijn, dat deze vuistregel voor de richting van afronden alleen geldt als de getallen elkaar niet te veel in grootte ontlopen.

Aanpassingen in het afrondingsgetal

In plaats van naar het dichtstbijzijnde ronde getal, kan ook naar andere mooie getallen worden ‘afgerond’ waarmee handig kan worden gerekend.

Zo kunnen de uitkomsten van de opgaven

$$\times 7312 : 23 \approx$$

$$\times 5963 \times 23 \approx$$

$$\times 27 : 48 \approx$$

niet alleen geschat worden via

$$7000 : 20$$

$$4000 \times 20$$

$$30 \times 50$$

maar ook via bijvoorbeeld het uitrekenen van

$$7500 : 25$$

$$4000 \times 100 : 4$$

$$13 \times 100 \text{ (via halveren en verdubbelen).}$$

Deze voorbeelden laten zien dat de leerlingen die verder zijn in het hoofdrekenen ook via andere strategieën op de geschatte uitkomsten kunnen komen.

Eind groep 7 kun het getalgebied te standaardprocedt
Eind groep 8 kun met getallen tot i in acht nemen. V hoeft te worden a minder is dan de Voor een deel van de orde van groot verfijnde afrondin

Als de kinderen a schattend opteller schattend vermenigvuldigen en delen moeten schattend lenen om afgeron zodanige zekerhe het precies reken vermenigvuldigen ronde getallen me moet dit gebeuren nullen.

In vergelijking m vermenigvuldigen fasen van het leer de standaardwijze duidelijk te merke informele en rege binnen hun bereik aanpassen van de Deze fase van fle voor een deel van



tend vermenigvuldigen en delen

el van de basisschoolleerlingen zal tot de manieren van schattend vermenigvuldigen en komen.

in de afrondingsrichting
 lingen ontdekken dat bij het
 igen – evenals bij het optellen – de beste
 lt verkregen als de afronding in
 elde richtingen plaatsvindt (het ene getal
 het andere naar beneden). Bij het delen is
 als deeltal en deler in dezelfde richting
 nd. Dit komt overeen met het afronden bij
 aftrekken. Zoals bij het aftrekken de afstand
 jk constant moet worden gehouden, moet
 verhouding zoveel mogelijk gelijk blijven.
 erop bedacht zijn, dat deze vuistregel voor
 afronden alleen geldt als de getallen elkaar
 grootte ontfopen.

in het afrondingsgetal
 aar het dichtstbijzijnde ronde getal, kan ook
 ooie getallen worden ‘afgerond’ waarmee
 orden gerekend.
 uitkomsten van de opgaven

6

12

chat worden via

1

ijvoorbeeld het uitrekenen van

10 : 4

via halveren en verdubbelen.

den laten zien dat de leerlingen die verder
 fdrekenen ook via andere strategieën op de
 omsten kunnen komen.

Eind groep 7 kunnen leerlingen schattend vermenigvuldigen en delen in het getalgebied tot tienduizend waarbij ze afronden volgens de standaardprocedure.

Eind groep 8 kunnen de leerlingen schattend vermenigvuldigen en delen met getallen tot in de miljoenen en daarbij zelf een passende afronding in acht nemen. Verder kunnen ze bij opgaven waarbij maar één getal hoeft te worden afgerond, bepalen of een geschatte uitkomst meer of minder is dan de precieze uitkomst.

Voor een deel van de kinderen geldt dat ze ook iets kunnen zeggen over de orde van grootte van de afwijking en dat ze op basis hiervan meer verfijnde afrondingsstrategieën kunnen toepassen.

Als de kinderen al bekend zijn met het afronden van getallen en het schattend optellen en aftrekken, kan geleidelijk aan de overgang naar het schattend vermenigvuldigen en delen (of op-vermenigvuldigen) plaatsvinden. Om de leerlingen hiertoe te brengen is in beginsel hetzelfde nodig als voor het schattend optellen en aftrekken. De opgaven moeten schattend rekenen uitlokken, de getallen moeten zich ervoor lenen om afgerond te worden en de geschatte uitkomsten moeten een zodanige zekerheid bieden voor het beantwoorden van de schatvraag dat het precies rekenen ook los gelaten kan worden. Omdat het schattend vermenigvuldigen en delen een sterk beroep doet op het rekenen met ronde getallen moet hiervoor een goede basis zijn gelegd. Met name moet dit gebeuren op het gebied van het hoofdrekenen met getallen met nullen.

In vergelijking met het schattend optellen en aftrekken is het schattend vermenigvuldigen en delen wel aanzienlijk moeilijker. In de eerste twee fasen van het leerproces waarin de getallen zo zijn gekozen dat deze op de standaardwijze kunnen worden afgerond, is dit verschil nog niet zo duidelijk te merken. Voor de meeste kinderen valt de fase van het informele en regelgeleid schattend vermenigvuldigen en delen nog binnen hun bereik. Het eventueel bijstellen van de schatting en het aanpassen van de afrondingsprocedure, zijn minder gemakkelijk. Deze fase van flexibel schattend vermenigvuldigen en delen is slechts voor een deel van de leerlingen haalbaar.



Schattend rekenen met onvolledige gegevens

Het schattend rekenen met onvolledige gegevens vraagt naast het afronden en rekenen met ronde getallen nog iets meer van de leerlingen. De leerlingen moeten hierbij zelf passende getallen kiezen om mee te rekenen. In grote lijnen doen zich hierbij twee situaties voor:

de grootte van de getallen is globaal afgebakend doordat de grenzen zijn gegeven of doordat deze achterhaald kunnen worden
er wordt een beroep gedaan op maatkennis.

In de onderstaande beschrijving wordt geen onderscheid gemaakt in de uit te voeren bewerking. In de meeste gevallen gaat het om schattend vermenigvuldigen en schattend delen in de vorm van op-vermenigvuldigen.

Grenzen bepalen en grenzen gebruiken

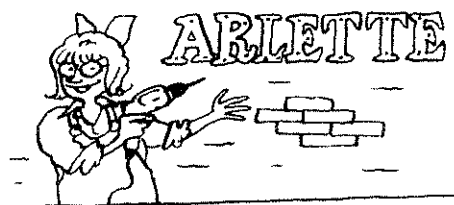
Opgaven waarbij de grootte van de getallen bij benadering is afgebakend doordat de grenzen zijn gegeven of doordat deze achterhaald kunnen worden, komen het dichtst in de buurt van het schattend vermenigvuldigen en delen dat in de vorige paragraaf aan de orde kwam. Het verschil is dat de getallen niet precies, maar in globale termen zijn gegeven. De volgende opgaven zijn daar voorbeelden van.



Anneke koopt vier sierstenen voor in de tuin.
Ze wegen elk tussen de twee en drie kilo.
Wat kan het totale gewicht zijn?



De prijs van de koeien ligt tussen €2100 en de €2950.
Hoeveel kan het kosten om vijf koeien te kopen?



De sierletters kosten per stuk iets van drie euro zoveel.
De precieze prijs is niet goed te lezen.
Wat denk je dat het kost om de naam ARLETTE te maken?

Om met deze globale aanduidingen een schatting te kunnen maken, is inzicht in het getalsysteem en de effecten van de bewerkingen van cruciaal belang. Een schatting kan alleen maar gemaakt of beoordeeld worden als men zicht heeft op het gebied waarbinnen het precieze getal gelegen kan hebben:

de vier sierstenen wegen samen tussen acht en twaalf kilo
de vijf koeien kosten samen tussen €10.000 en €15.000
de zeven sierletters kosten samen tussen €21 en €28

Alles draait steeds om wat het minstens en hoogstens kan zijn. Zelfs in de geldecontext waar de grenzen toch op een natuurlijke manier vastliggen, is dit voor sommige kinderen moeilijk. Dit geldt met name voor de bovengrens.

Het volgende voorbeeld laat zien hoe een leerling uit groep 7 hiermee worstelt.⁵

Nathalie, die bij $7 \times €2,95$ nog via $7 \times €3$ rekende en vervolgens van de uitkomst 35 eurocent aftrok, blijkt bij de volgende vlekopgave toch minder vat op de mogelijke uitkomsten te hebben.

$$7 \times €3 =$$

Bij deze vlekopgave hoeft Nathalie niet zelf een antwoord te bedenken. In plaats daarvan worden haar een aantal antwoorden voorgelegd:

- a. 75,25
- b. 11,90
- c. 26,20
- d. 28,35
- e. 40,25
- f. 27,65
- g. 28,00

Nathalie moet zeggen welke van deze antwoorden kunnen zijn.

Nathalie: "Ik doe eigenlijk $3 \times 7 = 21$, die daaronder zitten kunnen niet. 11,90 kan niet. Nee, voor de rest kan alles, volgens mij."

De leraar stelt voor de antwoorden even te bekijken. Nathalie stelt voor de antwoorden even te bekijken. Nathalie: "Kun je met 3×7 tot 75,25 komen? Nathalie verandert van gedachten en denkt dat 75,25 zou volgens Nathalie best kunnen. Maar ze aarzelt ook en wijst naar de antwoorden die wel een heel hoog getal zijn wat hier

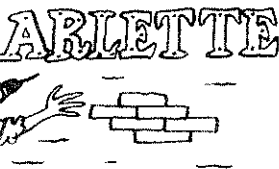
Dit voorbeeld maakt duidelijk hoe belangrijk het is voor leerlingen eerst de globale aanduiding van de opgave te begrijpen. Voordat wordt ingegaan op de uitvoering van een operatie, moet in de uitbreiding aandacht worden besteed aan het welk een heel hoog getal zijn wat hier

Welke prijs kan het zijn?
Laagste prijs ... Hoogste prijs ...

Ook voor het schattend rekenen met onvolledige gegevens ligt de basis weer bij het kunnen kiezen van passende getallen. De leerlingen moeten grip krijgen op het gebruik van getallen. Een belangrijk didactisch middel om dit te bereiken, is het discussiëren over mogelijke antwoorden. De leidende vraag hierbij is of het eerder genoemde bedrag kan zijn geweest.

De leerlingen die geen probleem met het schattend rekenen hebben, kunnen de volgende twee rekenopgaven maken:

evens



n per stuk iets van drie euro zoveel.
niet goed te lezen.
kost om de naam ARLETTE te maken?

aanduidingen een schatting te
leht in het getalsysteem en de
kingen van cruciaal belang.
en maar gemaakt of beoordeeld
heeft op het gebied waarbinnen het
r kan hebben:

vegen samen tussen acht en twaalf kilo
en samen tussen €10.000 en €15.000
s kosten samen tussen €21 en €28

r wat het minstens en hoogstens kan
ontext waar de grenzen toch op een
stliggen, is dit voor sommige
t geldt niet name voor de

d laat zien hoe een leerling uit groep 7

€2,95 nog via $7 \times €3$ rekende en
komst 35 eurocent aftrok, blijkt bij de
toch minder vat op de mogelijke
n.

hoeft Nathalie niet zelf een antwoord
s daarvan worden haar een aantal
gd:

- a. 75,25
- b. 11,90
- c. 26,20
- d. 28,35
- e. 40,25
- f. 27,65
- g. 28,00.

Nathalie moet zeggen welke van deze antwoorden goed
kunnen zijn.

Nathalie: "Ik doe eigenlijk $3 \times 7 = 21$, dus de getallen die
daaronder zitten kunnen niet. 11,90 kan niet. Ook kan ...

Nee, voor de rest kan alles, volgens mij."

De leraar stelt voor de antwoorden even na te lopen.

75,25 zou volgens Nathalie best kunnen als antwoord.

Leraar: "Kan je met 3×7 tot 75,25 komen?"

Nathalie verandert van gedachten en denkt nu dat het niet
kan. Maar ze aarzelt ook en wijst naar de vlek: "Dan moet
het wel een heel hoog getal zijn wat hier staat."

Dit voorbeeld maakt duidelijk hoe belangrijk het is dat de
leerlingen eerst de globale aanduiding van de prijs in zijn
volle omvang begrijpen. Voordat wordt overgegaan tot het
uitvoeren van een operatie, moet in de klas dan ook
uitgebreid aandacht worden besteed aan wat één sierletter
zou kunnen kosten.

- > €3, Welke prijs kan het zijn geweest?
- Laagste prijs ... Hoogste prijs ...

Ook voor het schattend rekenen met onvolledige
gegevens ligt de basis weer bij het kunnen afronden.
De leerlingen moeten greep krijgen op de grenzen van de
getallen. Een belangrijk didactisch middel om ze zover te
brengen, is het discussiëren over mogelijke bedragen.
De leidende vraag hierbij is of het een bepaald getal of
bedrag kan zijn geweest.

De leerlingen die geen probleem met de begrenzing
hebben, kunnen de volgende twee rekenaanpakken
hanteren:

Schattend rekenen



- eerst een rond getal/bedrag uitkiezen dat tussen de twee
grenswaarden ligt en dan hiermee gaan rekenen
eerst gaan rekenen met de beide grenswaarden ($7 \times €3$
en $7 \times €4$) en dan voor de schatting tussen deze twee
uitkomsten in gaan zitten.

Deze twee wijzen van rekenen en redeneren zijn
kenmerkend voor de opgaven waarbij schattend gerekend
moet worden met onvolledige gegevens.

Ook de opgaven waarbij maatkennis moet worden
ingezet, kunnen vaak vanuit twee invalshoeken worden
opgelost.

Inzetten van maatkennis

Het schattend rekenen waarbij de leerlingen op de een of
andere manier hun maatkennis moeten inzetten, hangt
nauw samen met het leerstofonderdeel meten.
De maatkennis kan op de eerste plaats betrekking hebben
op *weetjes*. Dit zijn maatgegevens zoals het aantal
minuten in een uur en het aantal uren in een dag, die de
leerlingen paraat moeten hebben om opgaven zoals de
volgende te maken.

- > Hoeveel minuten heeft een week ongeveer?
- Kies een van de volgende antwoorden.

- A. 1.200.000
- B. 10.000
- C. 10.000
- D. 130.000

Als de leerlingen de benodigde maatgetallen tot hun
beschikking hebben, kan hiermee vervolgens weer
schattend worden gerekend:

- 60×24 is ongeveer $60 \times 100 : 4$, ofwel $6000 : 4$ is 1500;
- 1500×7 is ongeveer 10.000 minuten in een week.

Naast opgaven waarbij gebruik gemaakt wordt van weetjes
zijn er ook opgaven waarbij gerekend moet worden met
maatgegevens waarvoor eerst nog bepaalde *aannamen*
moeten worden gemaakt en *schattingen* moeten worden
afgeleid.



- < Er is een file van 5 kilometer.
Hoeveel auto's zouden er in deze file staan?

> PLAKATIEELIJK NIEUWS

"In het nieuwe schooljaar zullen in Rokveen ongeveer 4000 leerlingen starten in 48 groepen." Kan dit kloppen?



Vaak komt dit erop neer dat op basis van referentiegegevens aannamen moeten worden gemaakt. In plaats van te rekenen met precieze gegevens die zijn afgerond, moet er dan met benaderingen worden gewerkt die van zichzelf meestal al rond zijn:

de lengte van een auto is rond de 5 m;
met een tussenruimte erbij is dat per auto ongeveer 10 m;
 $5000 : 10 \approx 500$;
dus ongeveer 500 auto's in een file van 5 km;
is de weg tweebaans, dan ongeveer 1000 auto's in de file

het is aan de hoge kant, maar stel dat er in één groep 40 leerlingen zitten: $4000 : 40 \approx 100$;
dan zouden er al 100 groepen nodig zijn;
dus dat van die 48 groepen klopt niet.

Kijkje in een klas

Aan het slot van deze leerlijnbeschrijving wordt een kijkje in een klas genomen.⁷ Een leraar in groep 7 vertelt dat hij een bericht in de krant heeft gelezen waarin staat dat er dit jaar in Rokveen ongeveer 4000 basisschoolleerlingen zijn en dat deze kinderen in 48 groepen zitten.

De leraar vraagt zich af of dit bericht wel kan kloppen en legt het probleem aan zijn leerlingen voor. Hij heeft het krantenknipsel op een werkblad gezet.

4000 Leerlingen in 48 groepen

Van onze verslaggever:

ROKVEEN. De vakantie is weer voorbij. De drukte op de fietspaden en op de stoep laat zien dat de negen basisscholen in Rokveen weer begonnen zijn. De bijna 4000 leerlingen in 48 groepen starten weer een nieuw schooljaar. Voor sommige leerlingen had de vakantie wel langer mogen duren, maar de meeste kinderen hebben wel weer zin om te beginnen.

Dit schatprobleem is op verschillende manieren op te lossen: door uit te gaan van de gegeven aantallen en op basis hiervan een schatting te maken van de groepsgrootte die daarbij hoort; dit kan via verschillende berekeningen:

- $4000 : 50 = 80$; dus ongeveer 80 kinderen in één groep
- $100 \times 48 = 4800$; dus ongeveer 100 kinderen in één groep door uit te gaan het aantal kinderen dat normaal gesproken in een groep zit en dan berekenen hoeveel groepen er nodig zijn voor 4000 leerlingen;
- $4000 : 25 = 160$; dus ongeveer 160 groepen nodig.

Beide aanpakken leiden tot de conclusie dat 4000 kinderen nooit in 48 groepen kunnen zitten.

Op videofragment 5 is te zien hoe dit probleem in de klas wordt aangepakt.



De leraar vertelt over het krantenknipsel 1 ervan nog eens duidelijk op het bord geschreven. Nadat het werkblad is uitgedeeld, gaan de leerlingen het probleem aan de slag. De leraar loopt een blik op de oplossingen. Het valt hem op dat de oplossingen nogal verschillen.

Zo heeft Bas precies gerekend en een sta gemaakt.

$$\begin{array}{r} 4000 : 48 = 83 \\ 4000 \\ 3840 \quad 80 \\ 160 \\ 144 \quad 3 \\ 16 \quad 83 \end{array}$$

Michiel laat zien dat hij een globale berel hoofd heeft gemaakt. Hij heeft opgeschre

"Ik weet zeker dat het niet kan, want van die 5 en 50 : 400 = 8, met een 0 erachter is 80 en zo zitten nooit in een groep bij elkaar."

De omkeringsfout die Michiel maakt, hin kennelijk niet. Dat blijkt later ook als hij hoe hij heeft gerekend.

Nadat de kinderen individueel aan de opg gewerkt, volgt de bespreking met de hele

De leraar begint met: "Ik ben heel erg benieuw het gedaan hebben. Want je hebt natuurlijk v mogelijkheden om zo'n som op te lossen."

Als eerste krijgt Stefan een beurt.

Stefan: "Ik doe eerst 100 keer 48, dan kom j Dan zouden er dus 100 kinderen in één klas t Maar het zijn er 4000, dus dat is 800 minder. En dan doe je 800 : 48, dat is ongeveer 20. En dan doe je er 20 af en dan kom je ongeveer 80 kinderen en dat kan dus nooit."

klas
in deze leerlijnbeschrijving wordt een kijkje
genomen.⁷ Een leraar in groep 7 vertelt dat hij
de krant heeft gelezen waarin staat dat er dit
jaar ongeveer 4000 basisschoolleerlingen zijn
kinderen in 48 groepen zitten.
gaat zich af of dit bericht wel kan kloppen en
hem aan zijn leerlingen voor. Hij heeft het
al op een werkblad gezet.

**4000 Leerlingen in
48 groepen**

De kleine verslaggever
VLEEN- De vakantie is weer voorbij.
rukte op de fietspaden en op de stoep
zien dat de negen basisscholen in
jaar weer begonnen zijn.
zijn 4000 leerlingen in 48 groepen
en weer een nieuw schooljaar. Voor
nige leerlingen had de vakantie wel
er mogen duren, maar de meeste
eren hebben wel weer zin om te
men.

men is op verschillende manieren op te lossen:
aan van de gegeven aantallen en op basis
schatting te maken van de groeps-grootte
toort; dit kan via verschillende
n:
= 80; dus ongeveer 80 kinderen in één groep
4800; dus ongeveer 100 kinderen in één groep
aan het aantal kinderen dat normaal
i een groep zit en dan berekenen hoeveel
odig zijn voor 4000 leerlingen:
= 160; dus ongeveer 160 groepen nodig.

men leiden tot de conclusie dat 4000
in 48 groepen kunnen zitten.

ment 5 is te zien hoe dit probleem in de klas
at.



De leraar vertelt over het krantenknipsel en heeft de kop
ervan nog eens duidelijk op het bord geschreven.
Nadat het werkblad is uitgedeeld, gaan de kinderen met
het probleem aan de slag. De leraar loopt rond en werpt
een blik op de oplossingen. Het valt hem op dat de
aanpakken nogal verschillen.

Zo heeft Bas precies gerekend en een staartdeling
gemaakt.

$$\begin{array}{r} 4000 : 48 = 83 \\ 4000 \\ 3840 \\ \hline 160 \\ 144 \\ \hline 16 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 80 \\ \\ 3 \\ 83 \end{array}$$

Michiel laat zien dat hij een globale berekening uit het
hoofd heeft gemaakt. Hij heeft opgeschreven:

“Ik weet zeker dat het niet kan, want van die 48 maak ik 50
en $50 : 400 = 8$, met een 0 erachter is 80 en zoveel kinderen
zitten nooit in een groep bij elkaar.”

De omkeringsfout die Michiel maakt, hindert hem
kennelijk niet. Dat blijkt later ook als hij mag vertellen
hoe hij heeft gerekend.

Nadat de kinderen individueel aan de opgave hebben
gewerkt, volgt de bespreking met de hele groep.

De leraar begint met: “Ik ben heel erg benieuwd hoe jullie
het gedaan hebben. Want je hebt natuurlijk verschillende
mogelijkheden om zo’n som op te lossen.”
Als eerste krijgt Stefan een beurt.
Stefan: “Ik doe eerst 100 keer 48, dan kom je op 4800.
Dan zouden er dus 100 kinderen in één klas moeten zitten.
Maar het zijn er 4000, dus dat is 800 minder.
En dan doe je $800 : 48$, dat is ongeveer 20.
En dan doe je er 20 af en dan kom je ongeveer per klas op
80 kinderen en dat kan dus nooit.”

Stefan heeft niet gedeeld maar vermenigvuldigd en daarna
heeft hij nog gecompenseerd voor het teveel.
Omdat de leraar vermoedt dat niet alle leerlingen de
manier van Stefan konden volgen, stelt hij nog enkele
vragen aan hem. Hierdoor wordt Stefans aanpak nog eens
stap-voor-stap nagelopen. Op deze wijze kan de leraar de
cruciale denkstappen van zijn oplossing wat meer
expliciteren.

Leraar: “... Jij hebt gezegd: Stel nou, dat ik 4800 kinderen
heb. Die heb je niet. Maar waarom heb jij 4800 genomen?”
Kun jij dat uitleggen?”
Stefan: “Ja, 100 keer, dan hoef je er alleen maar twee
nullen achter te doen.”
Leraar: “Jij hebt 4800 genomen, omdat je moest delen door
48 en dat was precies 100 keer. Dat was een beetje hoog.
En toen heb je gezegd, dat ga ik minderen.
Helemaal duidelijk.”

Daarna laat de leraar Michiel vertellen hoe hij heeft
gerekend.

Leraar: “Michiel, heb jij het ook zo gedaan?”
Michiel: “Ik heb van die 48, vijftig gemaakt.
En $400 : 50$ is 8 met een 0 erachter is 80.
En er kunnen geen 80 kinderen in een groep zitten.”

En weer loopt de leraar de stappen van de oplossing even
na. Hij zegt dat Michiel gedacht heeft dat hij in plaats van
met 48 ook wel met 50 mocht rekenen en dat hij zo op 80
kinderen per groep is gekomen. Overigens had de leraar de
verschillende denkstappen ook op het bord kunnen noteren.
Behalve voor het naar voren halen van cruciale
denkstappen gebruikt de leraar de nabespreking ook om
nog eens te benadrukken hoe lonend schattend rekenen bij
deze opgave is. Hij maakt dit duidelijk door erop te wijzen
dat Michiel door schattend te rekenen al heel snel wist dat
4000 leerlingen niet in 48 groepen kunnen zitten.
De werkbladen waren nog maar net uitgedeeld of hij wist
dit al. Bij Manon bijvoorbeeld duurde dat veel langer.
Haar precieze werkwijze contrasteert met de schattende
aanpak van Michiel.



Manon heeft evenals Bas een staartdeling gemaakt, maar haar manier is iets minder verkort. Ook aan Manons oplossing wordt aandacht besteed. Ze mag de staartdeling op het bord maken. Om te voorkomen dat dit te veel tijd in beslag neemt, maakt de leraar de rij met hulpgetallen.

4000 : 48 =		48
4000		1 48
3840	80	2 96
160		4 192
96	2	8 384
64		10 480
48	1	5 240
16	83	

rij met hulpgetallen

Als Manon klaar is, vat de leraar de tot nu toe besproken oplossingswijzen samen. Hij zegt dat het hem is opgevallen dat sommige kinderen gingen schatten en andere precies hebben gerekend. Bovendien heeft hij gezien dat er op verschillende manieren schattend is gerekend. In aansluiting daarop noemt hij de twee belangrijkste schataanpakken:

- de 48 afronden op 50
- de 4000 veranderen in 4800.

Beide aanpakken zijn erop gericht om globaal te bepalen wat dit voor de klassengrootte betekent. Op basis daarvan kan worden beslist dat 4000 kinderen nooit in 48 klassen kunnen zitten.

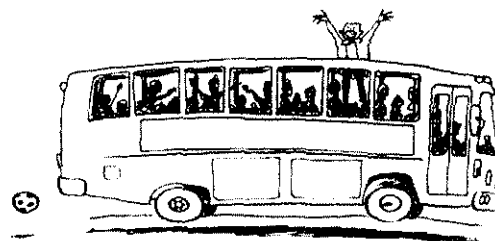
Ter afronding van de bespreking brengt de leraar via Jesse nog een geheel andere aanpak in. Jesse is uitgegaan van het aantal kinderen dat normaal in één klas zit. Hij heeft dit op 25 gesteld en komt dan uit op 160 groepen. Ook zijn conclusie is dat het krantenbericht niet kan kloppen.

Na de opgave over het krantenbericht volgt nog een opgave over een bericht op de regionale televisie.

PLAATSELIJK NIEUWS

"5981 supporters vertrekken in 297 bussen naar de Arena in Amsterdam."

Wat denk jij, zou dit bericht kunnen kloppen?



Bas en Manon hebben duidelijk wat opgestoken van de bespreking van het eerste probleem. Ze gaan nu wel schattend te werk.

- Manon: "Ik rond 5981 af tot 6000 en 297 tot 300. 6000 : 300 is 20. Het kan dus wel."
- Bas: "Van die 5981 maak ik 6000 en van die 297 maak ik 300 en dan doe ik 6000 : 300 is 20. Ja."

Beide leerlingen blijven bij hun oplossing hangen bij de vraag of het kan. Strikt genomen is er in één bus inderdaad plaats genoeg voor twintig supporters. Dus het zou kunnen. Het is echter niet aannemelijk dat de supportersbussen half leeg zijn vertrokken.

Jesse weet kennelijk uit ervaring dat één bus veel meer plaatsen heeft dan twintig en trekt daar zijn conclusies uit.

- Jesse: "Ik denk wel dat het kan, maar niet dat het klopt. Want ik maak van 5981, 6000 en van 297, 300. 6000 : 300 is 20. Dat betekent dat het kan, maar er zitten maar 20 mensen in één bus en dat is heel weinig. In één bus kunnen wel 40 mensen, dus ze hoeven maar de helft van de bussen te nemen."

Voor Manon en Bas is dit een stap die ze nog moeten zetten.

Eind groep 7 kunnen tienduizend schatp voorhanden zijn. Ze bepaalde schattinge te zetten en kunnen situaties bepaalde i. Eind groep 8 kunnen

In het schattend rel samen van het schat alleen hun kennis v ronde getallen nod getalsysteem en hu basis van het schat getalgevoeligheid : aandacht aan te be schatstrategieën. C is het van belang d klus worden bedisc een heel natuurlijk antwoorden goed. hebben bij het scha klassenklimaat is.



4

Eind groep 7 kunnen de leerlingen binnen het getalgebied tot tienduizend schatproblemen oplossen waarbij niet alle gegevens voorhanden zijn. Ze kunnen overweg met de grenzen waarbinnen bepaalde schattingen liggen. Verder zijn ze in staat basale maatkennis in te zetten en kunnen ze op basis van referentiegegevens in elementaire situaties bepaalde aannamen maken. Eind groep 8 kunnen de leerlingen dit tot in de miljoenen.

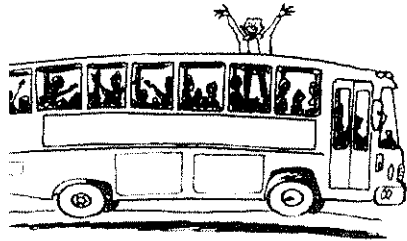
In het schattend rekenen met onvolledige gegevens komt in feite alles samen van het schattend rekenen. De leerlingen hebben hierbij niet alleen hun kennis van het afronden van getallen en het rekenen met ronde getallen nodig, maar ook moeten ze nog hun kennis van het getalsysteem en hun maatkennis gebruiken. Dit laatste vormt in feite de basis van het schattend rekenen. Veel leerlingen bouwen deze kennis en getalgevoeligheid niet vanzelf op. Het onderwijs dient hier regelmatig aandacht aan te besteden. Dit geldt ook voor het ontwikkelen van schatstrategieën. Om het schattend rekenen op een hoger plan te krijgen is het van belang dat de schattingen en de reken- en redeneerwijzen in de klas worden bediscussieerd. Het mooie van schatopgaven is dat dit op een heel natuurlijke manier kan. Er zijn doorgaans immers meerdere antwoorden goed. Juist vanwege het mindere houvast dat de leerlingen hebben bij het schattend rekenen, is het van groot belang dat er een veilig klimaat is.



ELKE NIEUWS

porters vertrekken in 297 bussen
rena in Amsterdam.”

ij, zou dit bericht kunnen kloppen?



n hebben duidelijk wat opgestoken van de
in het eerste probleem. Ze gaan nu wel
verk.

rond 5981 af tot 6000 en 297 tot 300.
is 20. Het kan dus wel.”

lie 5981 maak ik 6000 en van die 297 maak ik
doe ik 6000 : 300 is 20. Ja.”

gen blijven bij hun oplossing hangen bij de
an. Strikt genomen is er in één bus inderdaad
: voor twintig supporters. Dus het zou
s echter niet aannemelijk dat de
ssen half leeg zijn vertrokken.

melijk uit ervaring dat één bus veel meer
dan twintig en trekt daar zijn conclusies uit.

enk wel dat het kan, maar niet dat het klopt.
ak van 5981, 6000 en van 297, 300.
is 20

t dat het kan, maar er zitten maar 20 mensen in een
s heel weinig. In een bus kunnen wel 40 mensen
en maar de helft van de bussen te nemen.”

n Bas is dit een stap die ze nog moeten zetten.



Domein in ontwikkeling

Het nut en de waarde van schattend rekenen wordt inmiddels in brede kring onderkend, maar de didactiek ervan is nog wel een domein in ontwikkeling. Om die reden wordt in deze afsluitende paragraaf op een aantal didactische aspecten nader ingegaan.

Gradaties in moeilijkheid

De niveaus die bij schattend rekenen doorlopen worden, zijn gekoppeld aan de niveaus in het precies rekenen. Als een leerling nog niet precies rekt op het formele niveau – het rekenen waarbij gebruik wordt gemaakt van getalrelaties en rekeneigenschappen – dan heeft het in veel gevallen geen zin om op dit niveau schatvragen te stellen. Van de andere kant kan een schatvraag soms wel een soort wegbereider zijn om het rekenen op een hoger niveau te brengen. Als er alleen maar globaal gerekend hoeft te worden, ontlast dit de leerlingen van de getalsmatige rompslomp die het precies rekenen met zich meebrengt. Het voordeel hiervan is dat het de leerlingen richt op het effect van de bewerking (wordt het getal groter of kleiner) en dat ze bovendien getalrelaties kunnen ontdekken.

Hoewel schattend rekenen op alle niveaus van tellen en rekenen kan voorkomen, heeft het wel een sterke binding met het hoogste, formele niveau van rekenen. Dit vloeit voort uit het flexibele karakter dat schattend rekenen eigen is en dat eveneens kenmerkend is voor het precies rekenen op dit niveau. Hetzelfde geldt voor het reflectieve aspect bij schattend rekenen. Tijdens het schatproces moet vaak in de gaten worden gehouden of er nog een bijstelling moet plaatsvinden.

In de leerlijn is een globale opbouw van de moeilijkheidsgraad van schatopgaven terug te vinden. Dit betekent echter geenszins dat hiermee het onderwijsleertraject vastligt. Op het micro didactische niveau van het onderwijsleerproces zullen steeds aanpassingen nodig zijn van de schatopgaven die aan de leerlingen worden gepresenteerd.

Factoren die schatopgaven moeilijker of makkelijker maken, kunnen hiervoor als houvast dienen. Dit zijn onder meer de volgende factoren:

- de gewenste mate van nauwkeurigheid: schattend rekenen is meestal gemakkelijker als er meer globaal geschat mag worden en de uitkomsten minder precies mogen zijn; de leerlingen zijn dan vrijer in de keuze van de afrondingen
- de aard van de getallen: schattend rekenen met getallen die dicht bij een rond getal liggen is makkelijker, omdat de afrondingen dan nogal voor de hand liggen en de afwijkingen van de precieze uitkomst doorgaans kleiner zijn
- de grootte van de getallen: schattend rekenen met grote getallen is meestal moeilijker, omdat dan vaak met veel nullen moet worden gerekend; dit kan vooral bij het vermenigvuldigen en delen een bemoeilijkende factor zijn
- de aard van de bewerkingen: schattend vermenigvuldigen en delen zijn vaak moeilijker, omdat hierbij veelal met ingewikkelde vergrotings- en verkleiningseffecten rekening moet worden gehouden
- het aantal af te ronden getallen: vooral voor het schattend vermenigvuldigen en delen maakt het aantal af te ronden getallen nogal wat uit; als er slechts één getal afgerond hoeft te worden, is het effect ervan meestal nog goed te doorgronden; dit betekent dat vermenigvuldig- en deelopgaven met een ééncijferig getal doorgaans gemakkelijker zijn dan opgaven met twee meercijferige getallen
- de mate van openheid in de vraagstelling: schatopgaven waarbij de leerlingen zelf moeten beslissen over de manier van afronden en de nauwkeurigheidsgraad zijn doorgaans moeilijker; dit geldt ook voor schatopgaven waarbij de getalsmatige gegevens ontbreken of onvolledig zijn
- de mate van vanzelfsprekendheid dat het om schattend rekenen gaat: als de leerlingen echt zelf moeten beslissen dat een schatanapak de voorkeur verdient, is het moeilijker dan wanneer dit overduidelijk is.

Basiskennis

Wil het schattend rekenen zich kunnen ontwikkelen, is het nodig dat de leerlingen beschikken over voldoende basiskennis van getallen en operaties. Veel van deze kennis is van het hoofd rekenen en wordt al in de basisschool verworven.

Tietal- en maatkennis

Voor het schattend rekenen is het belangrijk dat de leerlingen besef hebben van de grootte van getallen. Het algemeen betekent dit dat ze de groonde referentiegetallen kunnen kennen. Tot honderd moeten ze bijvoorbeeld aangeven of het bij 10, 50 of 100 ligt. Een ander belangrijk aspect van de basiskennis dat hiermee samenhangt, is het beheers van het getalsysteem. Dit betekent vooral het herhalingskarakter van het getalsysteem (4, 5, ... herhaalt zich bij de tien en enzovoort) en het begrip van de daarbij behorende inwisselsysteem. Ook moeten de leerlingen basale rekenvaardigheden hebben of vlot kunnen reproduceren.

- de splitsingen van 10 en 20
- de aanvullingen tot 10, 100, en 1000
- verdubbelen en halveren
- relatienetwerken van bijzondere getallen (2 keer in 100, ... en 15 zit vier keer in 100)
- kennis van deelbaarheid (48 is de helft van 96 en 48 is de helft van 96)

Verder staat of valt het schattend rekenen met de kennis van basale maatkennis:

- in een uur loop je ongeveer vijf kilometer
- een verdieping van een huis is ongeveer 3 meter hoog
- in een emmer gaat ongeveer 10 liter water

Ook dit zijn zaken waar leerlingen (buitenschoolse) situaties mee te maken. Toch ontwikkelt zich deze maatkennis. Om maatkennis op te bouwen is het belangrijk dat de leerlingen deze kennis kunnen toepassen.



Basiskennis

Wil het schattend rekenen zich kunnen ontwikkelen, dan is nodig dat de leerlingen beschikken over basale kennis van getallen en operaties. Veel van deze kennis vormt ook de basis van het hoofdrekenen en wordt al hoofdrekenend ontwikkeld.

Getal- en maatkennis

Voor het schattend rekenen is het essentieel dat de leerlingen beseft hebben van de grootte van getallen. In het algemeen betekent dit dat ze de getallen aan bepaalde ronde referentiegetallen kunnen koppelen. In het gebied tot honderd moeten ze bijvoorbeeld van een getal kunnen aangeven of het bij 10, 50 of 100 in de buurt ligt. Een ander belangrijk aspect van de kennis over getallen dat hiermee samenhangt, is het hebben van inzicht in het getalsysteem. Dit betekent vooral inzicht in het herhalingskarakter van het getalsysteem (de rij van 1, 2, 3, 4, 5, ... herhaalt zich bij de tienen, de honderden, enzovoort) en het begrijpen van de plaatswaarde en het daarbij behorende inwisselsysteem. Ook moeten de leerlingen basale getalrelaties paraat hebben of vlot kunnen reproduceren, zoals:

de splitsingen van 10 en 20
de aanvullingen tot 10, 100, enzovoort
verdubbelingen en halveringen
relatienetwerken van bijzondere getallen als 25 (zit vier keer in 100, ...) en 15 (zit vier keer in 60, ...), enzovoort
kennis van deelbaarheid (48 is door veel getallen deelbaar en 47 niet).

Verder staat of valt het schattend rekenen vaak met het hebben van basale maatkennis:

in een uur loop je ongeveer vijf kilometer
een verdieping van een huis is ongeveer drie meter hoog
in een emmer gaat ongeveer 10 liter.

Ook dit zijn zaken waar leerlingen in allerlei (schoolse en buitenschoolse) situaties mee te maken kunnen krijgen, toch ontwikkelt zich deze maatkennis niet vanzelf. Om maatkennis op te bouwen is het belangrijk te beginnen

met kennis dicht bij de eigen ervaringswereld:

de afstand naar de eigen school
de lengte van de eigen straat, gang in het schoolgebouw
de afmetingen van de eigen slaapkamer, klas, speelplaats.

Vervolgens is het belangrijk dat de leerlingen leren de eigen maatkennis te gebruiken als referentie bij allerlei schattingen.

Basale rekenfeiten

Voor het schattend rekenen is het paraat hebben van basale rekenfeiten van groot belang. Deze bepalen immers mede met welke ronde en mooie getallen er bij het schattend rekenen gerekend kan worden. Voor een deel liggen de basale rekenfeiten al vervat in de hiervoor besproken getalkennis.

Welke basale rekenfeiten beheerst moeten worden, is afhankelijk van het getaldomein waarin schattend wordt gerekend. In het begin van de bovenbouw van de basisschool (in groep 5 en 6) zal deze basis vooral gevormd worden door optellingen en aftrekkingen tot honderd, vermenigvuldig- en deeltafels tot tien, de grote tafels, kennis over mooie getallen als 25 en de vermenigvuldigingen met en delingen door 10 en 100.

Kennis over operaties

Wat de rekeneigenschappen betreft, maakt het schattend rekenen gebruik van dezelfde eigenschappen die als basis dienen voor het (handig) hoofdrekenen.

Op dezelfde manier als bij het precies rekenen kan bij het schattend rekenen de *verwisselbaarheid* worden ingezet.

Zo kan de uitkomst van de opgave

$$498 \times 19 \approx$$

worden geschat via

$$500 \times 200$$

De *verdeelbaarheid* kan eveneens een handig middel

hat opgaven moeilijker of makkelijker hiervoor als houvast dienen. Dit zijn onder de factoren:

mate van nauwkeurigheid: schattend meestal gemakkelijker als er meer globaal worden en de uitkomsten minder precies le leerlingen zijn dan vrijer in de keuze van m
le getallen: schattend rekenen met getallen en rond getal liggen is makkelijker, omdat en dan nogal voor de hand liggen en de van de precieze uitkomst doorgaans

n de getallen: schattend rekenen met grote meestal moeilijker, omdat dan vaak met veel worden gerekend; dit kan vooral bij het digen en delen een bemoeilijkende factor

le bewerkingen: schattend digen en delen zijn vaak moeilijker, omdat l met ingewikkelde vergrotings- en ffecten rekening moet worden gehouden te ronden getallen: vooral voor het menigvuldigen en delen maakt het aantal getallen nogal wat uit; als er slechts één d hoeft te worden, is het effect ervan goed te doorgronden; dit betekent dat dig- en deelopgaven met een ééncijferig ms gemakkelijker zijn dan opgaven met ferige getallen
openheid in de vraagstelling; r waarbij de leerlingen zelf moeten r de manier van afronden en de eidsgraad zijn doorgaans moeilijker; dit r schatopgaven waarbij de getalsmatige breken of onvolledig zijn
anzelfsprekendheid dat het om schattend als de leerlingen echt zelf moeten een schat aanpak de voorkeur verdient, is r dan wanneer dit overduidelijk is.



vormen bij het schattend rekenen.

Dit betekent dat de uitkomst van de opgave

$$36 \times 711 =$$

kan worden geschat via

$$40 \times 700 \text{ plus de helft van } 7000.$$

De *schakeleigenschap* is de derde basale rekeneigenschap waarvan bij het schattend rekenen veelvuldig gebruik gemaakt kan worden.

Dit betekent dat het aantal uren in één jaar, ofwel

$$24 \times 365 =$$

geschat kan worden via

$$(25 \times 4) \times (360 : 4), \text{ ofwel } 100 \times 90.$$

Het voor het schattend vermenigvuldigen zo belangrijke *hulvenen en verdubbelen* is gebaseerd op deze eigenschap. De schakeleigenschap vormt eveneens de basis voor het handig bij elkaar nemen van getallen bij het maken van een lange optelling.

Zeer elementair voor het schattend rekenen is het *rekenen met nullen*. Dit komt vooral van pas bij het schattend vermenigvuldigen en delen.

Specifieke didactische vereisten

Naast de algemene uitgangspunten van realistisch reken-wiskundeonderwijs stelt het schattend rekenen ook nog haar eigen specifieke didactische eisen.

Schatten moet lonend zijn

Een belangrijke drijfveer om te gaan schatten en om te bewerkstelligen dat leerlingen kiezen voor een schattende aanpak, is dat het lonend moet zijn. Dit vraagt om bepaalde opgaven. Deze moeten zo zijn opgesteld dat men al rekenend met ronde of mooie getallen gemakkelijk tot een globaal antwoord kan komen, dat toereikend is om de

schatvraag te beantwoorden. Om deze reden nemen bij het schattend rekenen opgaven waarbij gevraagd wordt of er genoeg van iets is en of een bepaald antwoord klopt een belangrijke plaats in. Onder deze laatste categorie vallen met name meerkeuzevragen. De kracht ervan is dat het antwoord in feite al gegeven is. De leerlingen hoeven vaak alleen nog maar de orde van grootte van de uitkomst te bepalen om het juiste antwoord te kunnen aankruisen. Terugredeneren vanuit de gegeven alternatieven is ook mogelijk: '... kan nooit het goede antwoord zijn, want ...'.

Interactieve werkvormen

Schattend rekenen is vaak een proces van wikken en wegen, van aannamen maken die soms weer herzien moeten worden, van eerst globaal bepalen en dan weer verfijnen. Voor de dynamiek van dit proces spelen interactieve werkvormen een belangrijke stimulerende en ondersteunende rol. Groepsgewijze interactieve onderwijsvormen zijn dan ook bij uitstek geschikt om schatopgaven op te lossen. Door met de hele klas eraan te werken wordt reflectie uitgelokt. De leerlingen worden als vanzelf uitgedaagd om hun werkwijze toe te lichten en hun schatting te onderbouwen. Verder kunnen discussie en overleg met medeleerlingen een bijdrage leveren aan het mobiliseren en uitbouwen van maat- en getalkennis. De een weet dit en de ander dat, en samen kom je verder.

Veilig klassenklimaat

Schattend rekenen impliceert het loslaten van de precieze getallen. Dit kan voor de leerlingen onzekerheid met zich meebrengen met alle mogelijke gevolgen van dien. Het is duidelijk dat de leerlingen bij schattend rekenen bepaalde risico's moeten nemen. Dit kan alleen binnen een klassenklimaat dat als veilig wordt ervaren. De leerlingen moeten zich vrij voelen en moeten niet uitgelachen worden als ze bij een schatting er ver naast zitten. Daarnaast moet ervoor gezorgd worden dat de leerlingen een goede basis van getal- en maatkennis en rekenfeiten tot hun beschikking hebben, en dat ze voldoende leerkansen krijgen om schatstrategieën te ontwikkelen. Schattend rekenen is iets dat geleerd moet worden!

Ze had ons reket
me een lange op
hardop moest ve
schrifttoefening v
ik ook zei, en ik
tactiek was en di
geheim voor mij
mislukte, dat ik v
als ik haar vertel
want ik deed er i
zijn voor haar, w
om je voor in te
Mompelend van
opnieuw bij dat
mijn best deed e
was, met proefw
kwaad kon als je
beetje uitrekend
op te tellen en te
honderden nog c



beantwoorden. Om deze reden nemen bij het oplossen opgaven waarbij gevraagd wordt of er iets is en of een bepaald antwoord klopt een plaats in. Onder deze laatste categorie vallen keuzevragen. De kracht ervan is dat het niet al gegeven is. De leerlingen hoeven vaak naar de orde van grootte van de uitkomst te kijken om het juiste antwoord te kunnen aankruisen. En vanuit de gegeven alternatieven is ook wel kan nooit het goede antwoord zijn, want ...".

vervormen

Oplossen is vaak een proces van wikken en kiezen. Het is belangrijk om in te nemen maken die soms weer herzien moeten worden. Van eerst globaal bepalen en dan weer terugkijken naar de dynamiek van dit proces spelen. Het is belangrijk om te erkennen dat de leerlingen een belangrijke stimulerende en ondersteunende rol spelen. Groepsgewijze interactieve activiteiten zijn dan ook bij uitstek geschikt om problemen op te lossen. Door met de hele klas eraan te werken wordt reflectie uitgelokt. De leerlingen worden als volgt uitgedaagd om hun werkwijze toe te lichten en hun denken te onderbouwen. Verder kunnen discussie en samenwerking tussen leerlingen een bijdrage leveren aan het oplossen van problemen. Het is belangrijk om de leerlingen te laten uitbouwen van maat- en getalkennis. De een kan anders dat, en samen kom je verder.

klimaat

Oplossen impliceert het loslaten van de precieze eisen van voor de leerlingen onzekerheid met zich meebringend. Het is belangrijk om de leerlingen bij schattend rekenen bepaalde eisen te stellen. Dit kan alleen binnen een veilig klimaat. Het is belangrijk om te weten dat dat als veilig wordt ervaren. De leerlingen moeten vrij voelen en moeten niet uitgelachen worden. Het is belangrijk om bij een schatting er ver naast zitten. Het is belangrijk om ervoor gezorgd worden dat de leerlingen kennis van getal- en maatkennis en rekenfeiten hebben, en dat ze voldoende tijd krijgen om schatstrategieën te ontwikkelen. Het is belangrijk om te weten dat oplossen is iets dat geleerd moet worden!

Ze had ons rekenboek bij zich, gaf mij een pen en een blad papier en hield me een lange optelling voor. Ze zei dat ik de som moest maken en daarbij hardop moest vertellen hoe ik dat deed als het voor een gewone schrifttoefening was. Ze wekte de indruk alsof ze alles goed zou vinden, wat ik ook zei, en ik verkeerde in tweestrijd, want ik snapte wel dat dit haar tactiek was en dat ze teleurgesteld zou zijn als ik nu oneerlijk was en mijn geheim voor mijzelf hield en daarmee zou laten merken dat haar tactiek mislukte, dat ik ongevoelig was voor hoe aardig en begrijpend ze deed, maar als ik haar vertelde hoe ik die sommen maakte, dan stelde ik haar ook teleur, want ik deed er niet mijn best op en dat moest toch ook een soort belediging zijn voor haar, want dan zei je min of meer dat zij niet de moeite waard was om je voor in te spannen.

Mompelend van schaamte verklapte ik haar hoe ik het deed. Ik zei er steeds opnieuw bij dat ik het alleen deed als het niet voor serieus was, dat ik wel mijn best deed en de sommen op papier uitrekende als het echt voor serieus was, met proefwerken en zo, dat ik dacht dat het voor schrifttoefeningen geen kwaad kon als je die sommen niet op papier maakte, maar ze uit je hoofd een beetje uitrekende, een soort schatten, door alleen de honderdtallen bij elkaar op te tellen en te kijken of de tientallen hoog of laag waren en er dan bij de honderden nog een paar meer of minder bovenop te gooien.

Uit: *De Vriendschap* van Connie Palmen

Rekenmachine

Inleiding

Historie als wegwijzer

Zolang de mens rekt, is naar methoden en hulpmiddelen gezocht om het feitelijke rekenen zo efficiënt mogelijk te maken. Het zoeken naar methoden heeft geresulteerd in het ontstaan van allerlei algoritmen. Het bedenken van hulpmiddelen heeft geleid tot telramen, hulptafels, rekenlinialen, mechanische apparaten en ten slotte tot de nieuwste elektronische hulpmiddelen als computer en rekenmachine.

Methoden van rekenen of algoritmen zijn in het algemeen cultureel bepaald. Zo is in de oosterse wereld nog altijd de abacus in gebruik en wordt het westerse rekenen, vooral in het onderwijs, nog steeds gedomineerd door het rekenen op papier. Wel is men in het onderwijs verschillende praktische hulpmiddelen als didactische ondersteuning gaan gebruiken. De West-Europese cijfermethoden gaan terug op die van de late Middeleeuwen. Het bekende rekenboek *Cijfferinge* uit 1604 van meester Willem Bartjens is op de ontwikkeling van grote invloed geweest. Nog altijd wordt in het aanvankelijk rekenonderwijs een telraam gebruikt, zij het dat dit nu een rekenrek heet.

In de loop der tijden zijn de manieren van rekenen steeds geëvolueerd, maar gedurende de laatste halve eeuw heeft zich een spectaculaire ontwikkeling voltrokken. Het pure cijferen is in de dagelijkse praktijk van handel, techniek en wetenschap door elektronische apparatuur overgenomen. Nu eenvoudige rekenmachines overal voorhanden zijn, kan de vraag gesteld worden in hoeverre het technische en routinematige cijferen op papier nog van betekenis is voor het rekenonderwijs van de 21^e eeuw. In ieder geval stelt deze ontwikkeling ons voor de uitdaging het prachtige hulpmiddel dat de rekenmachine is, ook in het onderwijs op zinvolle wijze uit te buiten.

Misverstanden

Over het gebruik van de rekenmachine in het basisonderwijs bestaat anno 2000 nog steeds onduidelijkheid. Dit leidt soms tot hardnekkige misverstanden.

Allereerst wordt nog vaak gedacht dat rekenmachines op de basisschool niet zijn toegestaan. Hoezeer dit een misverstand is, blijkt wel uit het zesde kerndoel voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Volgens dit kerndoel moeten de leerlingen *de rekenmachine met inzicht kunnen gebruiken*. Dit betekent niet alleen dat het gebruik van een rekenmachine niet meer tegengegaan wordt, maar zelfs dat de kinderen dit apparaatje moeten leren gebruiken en wel met inzicht. Inzicht is de boodschap van deze doelstelling. Wat dit precies betekent, wordt in dit hoofdstuk verduidelijkt.

Een tweede misverstand is dat de rekenmachine in het onderwijs de oplossing zou zijn voor elk rekenprobleem. De volgende eenvoudige opgave laat echter direct zien dat gebruik van een rekenmachine soms contraproductief werkt.

De trein van 8.57 uur uit Den Helder komt om 11.41 uur in Nijmegen aan. Hoe lang duurt deze treinreis?

Bij deze opgave komt het aan op gewoon hoofdrekenen, dat overigens voor het inzichtelijk gebruik van de rekenmachine een belangrijke voorwaarde is. De noodzakelijke samenhang van hoofdrekenen, schattend rekenen, kolomsgewijs rekenen en cijferen, en het gebruik van de rekenmachine zal de kern van het onderwijs moeten zijn. Dit uitgangspunt bepaalt derhalve de rode draad van dit hoofdstuk. Vanuit dit perspectief hoeft er dan ook geen zorg te bestaan dat de kinderen bij elk sommetje naar de rekenmachine grijpen. Integendeel, lessen met de rekenmachine kunnen juist een geweldige verrijking betekenen voor het reken-wiskundeonderwijs.



Verschillende functies

Sinds het begin van de jaren zeventig is al in het basisonderwijs geëxperimenteerd met de rekenmachine. Uit nationale en internationale onderzoeken komen drie hoofdfuncties van de rekenmachine naar voren. Allereerst kan de rekenmachine als louter *rekenhulpmiddel* ingezet worden bij vraagstukken die tijdrovend en lastig rekenwerk vereisen. Het volgende probleem is daar een voorbeeld van.

- Maatschappij RingRing vraagt voor telefoneren 7 cent per 27 seconden of een deel daarvan. Hoeveel kost een gesprek van 33 minuten en 5 seconden?

Bij de machine als hulpmiddel fungeert het apparaatje vooral als 'rekenslaafje'. Deze functie kan de machine echter pas hebben als de kinderen inzien hoe de berekening georganiseerd moet worden en als zij de bediening van de machine behoorlijk beheersen. Verder heeft het apparaatje ook nog een *didactische functie*. Zo kan de rekenmachine ingezet worden om de structuren van ons getalsysteem en de operaties op een nieuwe manier te onderwijzen en de leerlingen tot een hoger niveau van inzicht te brengen. Een voorbeeld van een dergelijke inzet van de rekenmachine is het maken van getalpatronen.

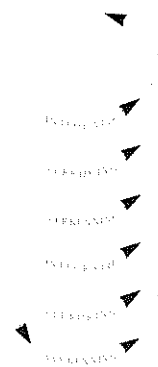
- Druk achtereenvolgens de toetsen + en 3 in en daarna steeds de =-knop.

Deze opdracht is met elk eenvoudig apparaatje uit te voeren en heeft als resultaat dat de tabel van 3 in het venster verschijnt. Een eenvoudige activiteit als deze biedt tal van interessante variaties, die voor het begrip van vermenigvuldigen een didactische verrijking betekenen. Ook kan het apparaatje voor de leerlingen een *object van onderzoek* zijn. Een voorbeeld hiervan is het vergelijken van verschillende rekenmachines. Zo blijkt de ene machine voor de opgave $4 \times 5 - 4 \times 5$ als uitkomst 0 te produceren, maar laat een ander apparaatje 80 in het venster verschijnen.

Al deze functies, waarvan met name de laatste twee nauw verweven zijn, worden aan de hand van voorbeelden in de volgende paragrafen verder verduidelijkt.

Geleidelijke inpassing

Hoewel het een maatschappelijk feit is dat de meeste kinderen de rekenmachine al kennen uit het dagelijks leven, komt hij in het algemeen pas vanaf groep 7 aan de orde. Vanaf dat tijdstip wordt er in de realistische reken-wiskundemethoden systematisch aandacht aan besteed. Ook in dit hoofdstuk wordt van deze fasering uitgegaan. Dit wil overigens niet zeggen dat het apparaatje niet eerder gebruikt kan worden. Dit kan inderdaad het geval zijn, maar dan wel als onderzoeksobject of als didactisch middel. Het is niet de bedoeling dat de kinderen de rekenmachine gaan gebruiken bij basisvaardigheden, die onder hoofdrekenen, kolomsgewijs rekenen, cijferen of schattend rekenen vallen. De kinderen moeten het machientje gaan zien als een apparaatje waarmee lastig rekenwerk gedaan kan worden. Ze dienen te beseffen dat je daarvoor inzicht moet hebben in de structuur van het rekensysteem. Tevens zullen ze een toepassingsprobleem moeten kunnen analyseren en omzetten in een rekenschema. Om dit proces zo goed mogelijk te laten verlopen, is een geleidelijke en behoedzame inpassing aan te bevelen. In dit hoofdstuk worden met het oog hierop de fasen van *verkenning*, *verrijking* en *integratie* onderscheiden, die zich enkele malen in het onderwijsleerproces kunnen herhalen.



Uiteraard zal eerst een algemene gebruik van het apparaatje moeten echter geen eenmalige aangelegenheid, want elke nieuwe activiteit wordt gestart, k verkenning nodig zijn. Met verrijking extra stof voor de betere leerling rekenmachine als didactische verrijking rekenonderwijs. Ook deze fase zal terugkomen. Ten slotte zal de machine van integratie, waarin met name belangrijke rol speelt, een steeds in het onderwijs verwerven. Er is uiteraard geen scherp onderscheid, maar er is wel een zekere chronologie te kennen, met name in die zin dat op een steeds hoger niveau zal functioneren.

Het uiteindelijke doel is dat de machine vanzelfsprekend gereedschap van de leerling zij kunnen inzetten als zij dat zelf willen. Bij het verwerven en oefenen van de gebruik van de rekenmachine niet vaak ook onhandig. Het zelfstandig inzetten van de machine is dan van attitudevorming, hetgeen een voorwaarde is voor het gebruik van de machine.

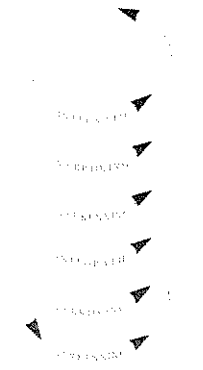
Om het onderwijsleerproces dat tot het gebruik van de machine moet leiden te structureren, worden welke accenten worden gelegd bij verschillende fasen. In de loop van deze tabel ingevuld.

	verkenning
onderzoeksfunctie	
didactische functie	
rekenhulpmiddel	

De tussendoelen worden aan het einde van het hoofdstuk geformuleerd.

vaarvan met name de laatste twee natuurden aan de hand van voorbeelden in de en verder verduidelijkt.

sing
aatschappelijk feit is dat de meeste achine al kennen uit het dagelijks leven, meen pas vanaf groep 7 aan de orde, vordt er in de realistische reken- r systematisch aandacht aan besteed, ik wordt van deze fasering uitgegaan, iet zeggen dat het apparaatje niet eerder en. Dit kan inderdaad het geval zijn, nderzoeksobject of als didactisch e bedoeling dat de kinderen de r gebruiken bij basisvaardigheden, die n, kolomsgewijs rekenen, cijferen of vallen. De kinderen moeten het en als een apparaatje waarmee lastig kan worden. Ze dienen te beseffen dat je oet hebben in de structuur van het ens zullen ze een toepassingsprobleem ifyseren en omzetten in een dit proces zo goed mogelijk te laten leidelijke en behoudzame inpassing aan oofdstuk worden met het oog hierop de *og, verrijking en integratie* zich enkele malen in het s kunnen herhalen.



Uiteraard zal eerst een algemene introductie op het gebruik van het apparaatje moeten plaatsvinden. Dit is echter geen eenmalige aangelegenheid. Wanneer een nieuwe activiteit wordt gestart, kan een hernieuwde verkenning nodig zijn. Met verrijking wordt niet bedoeld extra stof voor de betere leerlingen, maar de rekenmachine als didactische verrijking van het rekenonderwijs. Ook deze fase zal op ieder niveau weer terugkomen. Ten slotte zal de machine zich tijdens de fase van integratie, waarin met name het toepassen een belangrijke rol speelt, een steeds vanzelfsprekender plaats in het onderwijs verwerven. Er is uiteraard geen scherp onderscheid tussen deze fasen, maar er is wel een zekere chronologische volgorde aan toe te kennen, met name in die zin dat het verworven inzicht op een steeds hoger niveau zal functioneren.

Het uiteindelijke doel is dat de rekenmachine een vanzelfsprekend gereedschap van de kinderen wordt, dat zij kunnen inzetten als zij dat zelf nodig achten. Bij het verwerven en oefenen van de basisvaardigheden is het gebruik van de rekenmachine niet alleen ongewenst, maar vaak ook onhandig. Het zelfstandig beslissen over het al dan niet inzetten van de machine is dan ook vooral een kwestie van attitudevorming, hetgeen een doel van hogere orde is.

Om het onderwijsleerproces dat tot de beoogde integratie moet leiden te structureren, wordt in een tabel aangegeven welke accenten worden gelegd bij de functies in de verschillende fasen. In de loop van het hoofdstuk wordt deze tabel ingevuld.

	verkenning	verrijking	integratie
onderzoeksfunctie			
didactische functie			
rekenhulpmiddel			

De tussendoelen worden aan het eind van het hoofdstuk geformuleerd.



Eenvoudige traditionele machine

In alle voorbeelden is gebruik gemaakt van een traditionele rekenmachine.¹ Bijna alle didactische en methodische ontwikkelingen hebben zich op grond hiervan voltrokken. Kenmerkend voor deze rekenmachines is dat ze gemakkelijk te bedienen zijn. Een specifiek probleem van de traditionele machine is wel dat niet zichtbaar is wat de machine doet. Er wordt een getal ingevoerd, gevolgd door een operatie en dan weer een getal. Dit nieuwe getal verdrijft echter het vorige uit het venster, waarna met het intoetsen van de =-knop het antwoord verschijnt. Men moet voor zo'n enkelvoudige operatie dus zelf de opgave onthouden. Dit is de reden dat er een aparte notatievorm is ontstaan, die bekend staat als de *strokentaal*, waarover straks meer. Het zou een groot voordeel zijn wanneer na het intypen van bijvoorbeeld $5 + (2 \times 3) =$ de rekenformule in het venster zou verschijnen.



Daarmee zou de strokentaal voor dit soort opgaven overbodig worden. Tegenwoordig bestaan er al zulke venstermachines, maar deze hebben vaak veel meer toetsen dan voor het gebruik op de basisschool noodzakelijk is. De ideale rekenmachine zou een traditionele machine zijn, aangevuld met een venster waarin de opgave afgebeeld wordt én waarop zich bovendien twee toetsen bevinden voor het plaatsen van haakjes. De huidige reken-wiskundemethoden maken gebruik van de nu voorhanden zijnde machientjes en hebben daarop hun handleidingen gebaseerd. Daarom wordt ook in dit hoofdstuk uitgegaan van deze traditionele machientjes.

Hoe simpel de machine ook is, toch heeft elk apparaatje buiten de vier hoofdbewerkingen zoveel extra functies en verborgen mogelijkheden, dat het nodig is om in het volgende een en ander aan de orde te stellen.



Herhaalde verkenning

Of de kinderen door buitenschoolse ervaringen de rekenmachine nu al kennen of niet, er komt een moment in het onderwijs dat een zekere systematische introductie moet plaatsvinden. Het tijdstip hiervoor ligt bij begin groep 7.

De wijze waarop dit gebeurt, hangt ten nauwste samen met de algemene onderwijsopvatting van school en leraar. Tegenover een strak geleide klassikale instructie staat een vrije, probleemgeoriënteerde onderwijsleersituatie, waarin de kinderen het apparaatje zelfstandig verkennen. In de reken-wiskundemethoden wordt in het algemeen aanbevolen om van een tamelijk geleide aanpak uit te gaan, waarbij alle kinderen over hetzelfde type machientje met een zo eenvoudig mogelijk toetsenbord beschikken. In de hierna volgende beschrijving van activiteiten zal ook de achterliggende onderwijsopvatting herkenbaar zijn. Er is echter geen sprake van een voorschrijvende methodiek. Indien gewenst zijn de open activiteiten door de leraar eenvoudig in een meer geleide onderwijsaanpak om te zetten. Evenzo geldt het omgekeerde.

Eerste verkenning

Hoewel een van de belangrijkste doelen van het rekenmachinegebruik is dat de kinderen leren het apparaatje niet in te zetten voor eenvoudige berekeningen of het maken van oefenrijtjes ter memorisering van de basisvaardigheden, start de introductie toch met voor de kinderen *bekende rekenfeiten*. Ze ervaren dan ook meteen de relatieve betekenis van de rekenmachine, immers 10×3 is sneller uit het hoofd berekend dan met de machine.

- » Bedenk opgaven waarvan je de uitkomst zo weet. Bijvoorbeeld optel-, aftrek-, vermenigvuldig- en deelopgaven waar 100 uitkomt.
- Ga nu met de rekenmachine na of je antwoord klopt.

Het zogenaamde *woordjes maken* kan een grappig begin zijn. Zo levert $499 + 38$ als antwoord 537, maar lezen we

de uitkomst op z'n kop dan staat er LEE.

Een ander voorbeeld is $707 + 707 = 1414$, dat op z'n kop leidt tot LOI + LOI = hhl.

De cijferopgave $12345678 + 60738056$ levert op dezelfde manier hLEEBOL op.



Er zijn tal van rekenmachine-woordjes te maken, zoals LEE, LEELE, OLLEBOL, ShELLELE, waarbij allerlei opgaven zijn te bedenken door de leerlingen.

Bij het *cijfers poetsen* gaat het om inzicht in de positionele schrijfwijze van getallen. Laat de leerlingen 'driehonderdeenenvijftig' intypen. Het getal moet als het ware gezien worden om de goede volgorde van cijfers in te toetsen: eerst 3, daarna 5 en dan 1. De cijfers van het getal worden dus van links naar rechts ingetypt, maar in het venster verschuiven de cijfers in de posities van rechts naar links.

- » Er staat 351 op de rekenmachine. Hoe kun je zonder opnieuw te beginnen er 301 van maken?

Om de kinderen direct bewust te maken van het feit dat het rekenen met een machine op een bepaalde manier gedefinieerd is, kan ook het al eerder genoemde vraagstukje $4 \times 5 - 4 \times 5$ dienen. Vrijwel iedereen meent dat het antwoord hierop 0 moet zijn, maar de meeste machines geven 80 als antwoord, waarmee het machine-rekenen meteen in zijn volle omvang aan de orde is gesteld.

Knoppen en strokentaal

Rekenmachines hebben een eigen (onzichtbare) rekenwijze, een specifieke weergave van de uitkomsten, er zitten vreemde knopjes op, ze veroorzaken soms onverwachte effecten bij bepaalde handelingen en vereisen

een aparte manier voor het noteren. Zo laat de traditionele rekenmachine zien. Wat de rekenmachine wel 1 voor de opgave $4 + 3$ weergegeve

Druk op deze knoppen:	In het venster komt:
ON/C	0
1	1
+	4
3	7

Links staat wat er achtereenvolgens midden staat steeds het resultaat het venster verschijnt. Dit laat di verschil zien met de gebruikelijk Het ingetoetste plusteken blijft v daarna wordt ingedrukt, verschij moeten we zelf onthouden dat er Na intoetsen van het =-teken ver Rechts is alles nog eens horizont Deze manier van afbeelden wordt

Via een interactieve onderwijsaan deze strokentaal ontwikkelen. Ee eerst een eigen 'handleiding' te l daarover dan te laten discussiëre bieden de strokentaal op een unif klassikale besprekingen efficiënt

	MRC	M	M+
getallen	7	8	9
	4	5	6
komma	1	2	3
aan/uit	0	➡	7
	ON/C	=	



'n kop dan staat er LIES.
 zeld is $707 + 707 = 1414$, dat op z'n kop
 .OL = hllh.
 12345678 + 60738056 levert op dezelfde
 El. op.



kenmachine-woordjes te maken, zoals
 EBOL, SHELOLIE, waarbij allerhande
 sedenken door de leerlingen.

tsen gaat het om inzicht in de positionele
 getallen. Laat de leerlingen
 'nvijftig' intypen. Het getal moet als het
 den om de goede volgorde van cijfers in
 3, daarna 5 en dan 1. De cijfers van het
 , van links naar rechts ingetypt, maar in
 huiven de cijfers in de posities van rechts

op de rekenmachine. Hoe kun je zonder
 eginnen er 301 van maken?

direct bewust te maken van het feit dat
 een machine op een bepaalde manier
 an ook het al eerder genoemde
 $5 = 4 \times 5$ dienen. Vrijwel iedereen meent
 hierop 0 moet zijn, maar de meeste
 80 als antwoord, waarmee het machine-
 in zijn volle omvang aan de orde is

kentaal
 hebben een eigen (onzichtbare)
 pecifieke weergave van de uitkomsten, er
 nopjes op, ze veroorzaken soms
 eten bij bepaalde handelingen en vereisen

een aparte manier voor het noteren van de rekentaal.
 Zo laat de traditionele rekenmachine niet de opgave zelf
 zien. Wat de rekenmachine wel laat zien, is hieronder
 voor de opgave $4 + 3$ weergegeven.

Druk op deze knoppen:	In het venster komt:	In strokentaal:
ON/C	0	
4	4	
+	+	
3	3	
=	=	

Links staat wat er achtereenvolgens is ingetoetst. In het
 midden staat steeds het resultaat dat na een handeling in
 het venster verschijnt. Dit laat direct het essentiële
 verschil zien met de gebruikelijke formuletaal.
 Het ingetoetste plusteken blijft verborgen en als de 3
 daarna wordt ingedrukt, verschijnt dit laatste getal. In feite
 moeten we zelf onthouden dat er $4 + 3$ is ingetoetst.
 Na intoetsen van het =-teken verschijnt het antwoord.
 Rechts is alles nog eens horizontaal afgebeeld.
 Deze manier van afbeelden wordt de *rekenstrook* genoemd.

Via een interactieve onderwijsaanpak kunnen de kinderen
 deze strokentaal ontwikkelen. Een mogelijkheid is ze
 eerst een eigen "handleiding" te laten schrijven en ze
 daarover dan te laten discussiëren. De meeste methoden
 bieden de strokentaal op een uniforme wijze aan, opdat de
 klassikale besprekingen efficiënter verlopen.

	MRC	MC	MC	√	1/x	1/y
getallen	7	8	9	÷		
	4	5	6	×		
	1	2	3			
komma	0	.	1/x			
aan/uit	ON/C	=	1/x	+		

Voor de elementaire berekeningen kan in totaal volstaan
 worden met zeventien toetsen: tien voor de getallen en de
 'punt' voor de komma, dan nog vier voor de operaties en
 dan nog twee toetsen voor 'aan/uit' en de '=opdracht'.
 Natuurlijk moet in ieder geval de functie van het ON/C-
 knopje (aan/uit) bekend zijn (de C komt van 'clear').

Kennen de kinderen de werking van de toetsen en kunnen
 ze verwoorden en noteren wat ze ingetoetst hebben, dan is
 bijvoorbeeld het *minste stappen-spel* of het *kapotte
 rekenmachine-spel* een mooie activiteit om het gebruik te
 oefenen. De routine in het technisch omgaan met de
 rekenmachine wordt zo aan een inhoudelijk
 rekenprobleem gekoppeld.

- Je mag alleen de knoppen 7, +, =, 1/x en 1/y gebruiken.
 Maak nu 22.
 Ben deed het in 10 stappen: $7 : 7 + 7 + 7 + 7$
 Lies deed het in 8 stappen: $77 + 77 : 7$
 Speel het spel nu zelf.

Zijn de kinderen eenmaal vertrouwd met de meest
 eenvoudige functies van het machientje, begrijpen ze de
 werking van de knoppen en de strokentaal en kunnen ze
 de getallen goed aflezen, dan kan een verdere verkenning
 van de machine plaatsvinden.

Verdere verkenning

Punt en komma

Hoewel deze leerlijnbeschrijving alleen het domein van
 de hele getallen omvat, is het toch noodzakelijk iets over
 de kommagetallen te zeggen, omdat deze zich via de
 rekenmachine als het ware vanzelf aanbieden.
 Vooral dient opgemerkt te worden dat de komma zich op
 de rekenmachine onder de punt-toets bevindt en dat deze
 in het venster ook als punt wordt afgebeeld. Ook in het
 gewone leven komt deze schrijfwijze van decimale
 breuken als een 'puntgetal' veelvuldig voor.
 De punt komt voort uit de Amerikaanse schrijfwijze, waarbij
 de cijfers van een groot getal in groepjes van drie van rechts
 naar links steeds door een komma gescheiden worden.



Zoals in de volgende voorbeelden is te zien, gebruiken wij hiervoor juist een punt:

	Amerikaans	Europees
een miljoen	1.000.000	1.000.000
zeven komma vijftiendertig	7.35	7,35
tweeduizend en eentiende	2.000.1	2.000,1

Op sommige rekenmachines wordt de cijfergroepering in drieën ook wel aangegeven met komma's bovenaan: $1'023'769$.

Melding van E bij grote getallen

Bijzonder interessant is het onderzoek naar het grootste getal op de rekenmachine, zoals uit het volgende lesprotocol blijkt. Op videofragment 6 is het begin van de les te zien.²



Groep 6 vindt unaniem dat 99.999.999, acht negens, het grootste getal op de rekenmachine is.

“Maar als je er dan eentje bijdoet”, zegt Stefan.

Leraar: “Doe dat eens.”

Alle kinderen vinden op hun machine (van hetzelfde type): E 1.0000000.

“Wat is dat?” vraagt de leraar.

Een meisje legt uit dat 99.999.999 en 1 samen honderd miljoen is en ze vergelijkt dat met het antwoord op de rekenmachine.

De leraar vraagt naar meer vergelijkingen en schrijft die op het bord:

E 1.0000000 op de machine is: 100.000.000
 $10.000.000 \times 100 = 1.000.000.000$ (een miljard);
 op de rekenmachine wordt dit: E 10.000000
 $10.000.000 \times 1000 = 10.000.000.000$ (tien miljard);
 op de rekenmachine wordt dit: E 100.00000

Martijn doet nu een ontdekking en formuleert de nieuwe notatie van de rekenmachine als volgt:

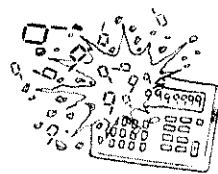
“Staat de punt achter een getal (hij bedoelt: achter het eerste cijfer) dan is een getal (hij bedoelt een nul) weggelaten. De punt achter twee getallen dan zijn twee getallen erachter weggelaten. En zo door.”

De leraar vindt het een prachtvondst.

Maar er is ook onrust in de klas.

“Hoe weet je nou”, vraagt een meisje, “welke getallen hij weglaat?”

En een jongetje vraagt bedremmeld: “Maar meester, is 99.999.999 dan niet het grootste getal op de rekenmachine?”



Terecht constateert de leraar dat dit een prachtvondst van Martijn is. Deze ziet namelijk hoeveel laatste cijfers de machine weglaat. Martijn weet kennelijk dat het om nullen gaat, iets dat niet voor alle kinderen duidelijk is. Het grappige is dat Martijn als het ware van de nood een deugd maakt, want in feite meldt de machine een fout door middel van de letter E in het venster. Tegelijkertijd bevat de melding ook nog verborgen informatie. Door de plaats van de punt wordt de orde van grootte van de uitkomst aangegeven. Als men hier oog voor heeft, kunnen bij dit intrigerende vraagstuk tal van uitbreidingen bedacht worden met opgaven als: 100.001×100.001 of 100.005×100.005 en dergelijke.

Het moge duidelijk zijn dat deze activiteit rond grote getallen niet tot de eerste introductie behoort, maar in een later stadium als een verdere verkenning kan plaatsvinden.

Wat de kinderen vooral uit dit soort activiteiten kunnen leren, is dat de rekenmachine in feite maar een beperkt bereik heeft en dat inzicht nodig is in het tientallige positiesysteem om dergelijke rekenmachine-overschrijdende procedures te kunnen verklaren.

Inzicht in de werking

Het nu volgende verrassende probleem dat het machine-rekenen niet alleen maar indrukken is, maar dat je inzicht moet in de werking van het apparaat.

→ Wat komt er uit $2 \times 6 = 3 \times 4 = ?$

Nul natuurlijk!

Doe dit nu eens op je rekenmachine.

He, 36! Is die machine wel goed?

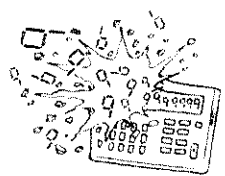
De ‘fout’ die bij deze opgave naar voren het lineaire rekenen van het machientje: uitgerekend; daarna wordt hiervan 3 afget 9 op: maal 4 is 36. Om deze kale som op aftrekking van twee producten moeten v duidelijkheid haakjes worden gebruikt: (De eenvoudige machientjes hebben mee: toetsen. Wel is het mogelijk zo’n meervo met de geheugenknoppen ineens in te toe 3: $\times$; 4: M $\rightarrow$; MRC. Voor de onderwijspr eenvoudiger en inzichtelijker om de tuss even op papier te noteren. Vooral bij ber lastige en grote getallen, zoals (18×152) een half-schriftelijke aanpak te preferere:

18×152	4864
$\begin{array}{r} 18 \\ \times 152 \\ \hline 36 \\ 90 \\ 180 \\ \hline 2736 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 152 \\ \hline 36 \\ 90 \\ 180 \\ \hline 2736 \end{array}$
	noteren
	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 152 \\ \hline 36 \\ 90 \\ 180 \\ \hline 2736 \end{array}$

Overige knoppen

Behalve de geheugenknoppen (M+, M $\rightarrow$ op de traditionele machine nog meer bijz zoals de toetsen voor tekenwisseling ($\pm$) ($\div$) en procent-berekening (%).

punt achter een getal (hij bedoelt: achter het 20) dan is een getal (hij bedoelt een nul)
n. De punt achter twee getallen dan zijn twee achter weggelaten. En zo door.”
vindt het een prachtvondst.
ook onrust in de klas.
t je nou”, vraagt een meisje, “welke getallen hij
ngetje vraagt bedremmelt: “Maar meester, is 99 dan niet het grootste getal op de hline?”



istateert de leraar dat dit een prachtvondst van Deze ziet namelijk hoeveel laatste cijfers de eglaat. Martijn weet kennelijk dat het om iets dat niet voor alle kinderen duidelijk is. ge is dat Martijn als het ware van de nood een kt, want in feite meldt de machine een fout el van de letter E in het venster. Tegelijkertijd elding ook nog verborgen informatie. Door de de punt wordt de orde van grootte van de angegeven. Als men hier oog voor heeft, dit intrigerende vraagstuk tal van uitbreidingen orden met opgaven als: 100.001 of 100.005×100.005 en dergelijke.

duidelijk zijn dat deze activiteit rond grote et tot de eerste introductie behoort, maar in een m als een verdere verkenning kan en, ideren vooral uit dit soort activiteiten kunnen at de rekenmachine in feite maar een beperkt -ft en dat inzicht nodig is in het tientallige teem om dergelijke rekenmachine- dende procedures te kunnen verklaren.

Inzicht in de werking

Het nu volgende verrassende probleem maakt duidelijk dat het machine-rekenen niet alleen maar knopjes indrukken is, maar dat je inzicht moet hebben in de werking van het apparaat.

- Wat komt er uit $2 \times 6 + 3 \times 4 = ?$
Nul natuurlijk!
Doe dit nu eens op je rekenmachine.
Hé, 36! Is die machine wel goed?

De ‘fout’ die bij deze opgave naar voren komt, schuilt in het lineaire rekenen van het machientje: eerst wordt 2×6 uitgerekend; daarna wordt hiervan 3 afgetrokken; dat levert 9 op; maal 4 is 36. Om deze kale som op te vatten als aftrekking van twee producten moeten voor de duidelijkheid haakjes worden gebruikt: $(2 \times 6) - (3 \times 4)$. De eenvoudige machientjes hebben meestal geen haakjes-toetsen. Wel is het mogelijk zo’n meervoudige berekening met de geheugenknoppen ineens in te toetsen: 2; $\times$; 6; M+; 3; $\times$; 4; M- ; MRC’. Voor de onderwijspraktijk is het eenvoudiger en inzichtelijker om de tussenberekeningen even op papier te noteren. Vooral bij berekeningen met lastige en grote getallen, zoals $(18 \times 152) - (4864 : 32)$ is een half-schriftelijke aanpak te prefereren.

$$\begin{array}{r} 18 \times 152 \\ \times \\ \hline 96 \\ 90 \\ 36 \\ \hline 2736 \end{array}$$

noteren

$$\begin{array}{r} 4864 : 32 \\ \div \\ \hline 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2736 \\ - 152 \\ \hline 2584 \end{array}$$

Overige knoppen

Behalve de geheugenknoppen (M+, M-, MRC’) zitten er op de traditionele machine nog meer bijzondere knoppen, zoals de toetsen voor tekenwisseling ($\pm$), worteltrekken ($\sqrt{}$) en procent-berekening (%).



Als verrijkingsstof voor de betere leerlingen kunnen deze aan het eind van de basisschool aan de orde worden gesteld. Met name bij de laatste knoppen kan men zich afvragen of deze eigenlijk wel nodig zijn voor het rekenen op de basisschool. Vandaar ook dat deze knoppen hier buiten beschouwing worden gelaten.

Al met al kan worden gesteld dat zelfs de traditionele machine eigenlijk voor de elementaire operaties te veel knoppen bevat, terwijl de bruikbare haakjes-toetsen juist ontbreken en ook de ingetoetste rekenopgave niet te zien is in het venster. Hopelijk laten nieuwe technologische verbeteringen in deze richting niet lang meer op zich wachten.

Samenvattend advies voor de verkenningfase

- Voor de verkenningfase met de traditionele rekenmachine geldt het volgende advies:
 - maak slechts gebruik van de hoogstnoodzakelijke knoppen
 - gebruik één type rekenmachine (indien mogelijk met doorzichtig model op overheadprojector)
 - wees alert op de andere manier van noteren (getallen verdwijnen uit het venster)
 - besteed aandacht aan de wijze van rekenen van de machine
 - laat de kinderen de relatieve waarde van de rekenmachine ervaren.

De nadruk in de verkenningfase ligt dus met name op het onderzoeken van de machine en in zekere mate op het didactische aspect van de machine. Uiteraard is de verkenningfase niet een eenmalig gebeuren.

	verkenning	verrijking	integratie
onderzoeksfunctie	++		
didactische functie	+		
rekenhulpmiddel			



Verrijking

Hoewel de rekenmachine niet specifiek ontwikkeld is voor het onderwijs kan het gebruik ervan voor het hoofdrekenen, schattend rekenen, kolomsgewijs rekenen en cijferen, het inzicht in het positie-systeem en de operaties, een didactische verrijking zijn. In deze paragraaf volgen een aantal voorbeelden hiervan. Deze zijn niet beschreven als doelen, maar als activiteiten die passen bij de genoemde domeinen en die onder leiding van de leraar met de gehele groep uitgevoerd kunnen worden. Ze zijn bedoeld als voorbeelden van opgavetypen. Het zijn dus geen eenmalige activiteiten, maar ze kunnen herhaald en gevarieerd worden volgens de eerder beschreven spiraalsgewijze opbouw. Een impliciet doel hierbij is dat de kinderen zich bewust worden van de kracht van het rekenapparaat als hulpmiddel, maar ook van de relatieve betekenis voor het feitelijke rekenen. Leraar en leerlingen dienen begrip van het rekenstelsel te hebben om de rekenmachine met inzicht te kunnen gebruiken. *Wie de basiskennis van het rekenen ontbeert, kan niet verstandig met de rekenmachine omgaan.* Dit betekent dat een aantal basisvaardigheden (rekenen tot honderd, tafels, rekenen met nullen) redelijk geconsolideerd dient te zijn alvorens de rekenmachine in zijn volle omvang ingepast kan worden. Anderzijds kunnen via de machine die basisvaardigheden juist didactisch verdiept worden.

Hoofdrekenen en de rekenmachine

In feite zijn hoofdrekenen en machinerekenen totaal tegengestelde activiteiten. Het gaat er in het onderwijs juist om deze twee manieren van rekenen met elkaar te confronteren om daaruit te leren besluiten welke werkwijze in elk specifiek geval de beste is. Enerzijds is een zekere basiskennis nodig om de rekenmachine verstandig te kunnen bedienen, anderzijds moet voor elke berekening telkens beslist worden of er met het hoofd of met de machine wordt gerekend. Dit kan per persoon en per opgave sterk verschillen, maar juist de bewustmaking van verschillende aanpakken kan de getalgevoeligheid en het flexibel omgaan met getallen versterken.

Zo is het bij de volgende opgaven handiger om te hoofdrekenen dan om naar de rekenmachine te grijpen.

- Een schaatser doet over een ronde 2 minuten en 11 seconden. Hij rijdt met constante snelheid. Hoe lang doet hij over 60 ronden?
- Wat is de rest van de deling $5743 : 9$?
- Een zak aardappels van $2\frac{1}{2}$ kilo kost €1,50. Hoeveel is dat per kilo?
- Stel dat elke Nederlander gemiddeld €25,- voor hulp bij een aardbeving geeft. Hoeveel geeft men dan samen in totaal?

Wie bij het vraagstuk over de schaatser naar de rekenmachine grijpt, zal een fiks aantal rekenhandelingen moeten uitvoeren om uiteindelijk, als hij goed gerekend heeft, te ontdekken dat de uitkomst 2 uur en 11 minuten is en dat je dat binnen enkele seconden al hoofdrekenend had kunnen zeggen, omdat elke minuut maal 60 één uur en elke seconde maal 60 één minuut oplevert.

Ook bij het vraagstuk over de rest zal heel wat organisatorisch rekenwerk bij gebruik van de rekenmachine vereist zijn. En dat terwijl een gevorderde hoofdrekenaar hopelijk aan de eigenschap voor deelbaarheid door 9 zal denken: de som van de cijfers van 5743 is 19, oftewel $18 + 1$. Splits 5743 derhalve in $5742 + 1$. De eerste term is deelbaar door 9, de rest is dus 1.

De aardappelprijs kan met de machine berekend worden $1,5 : 2,5 = 0,6$; dus €0,60 per kilo. Dit had echter ook gemakkelijk uit het hoofd gekund door deeltal en deler evenredig te vergroten tot €6,- voor een zak van 10 kilo. Er zijn 16 miljoen Nederlanders. Maar $16.000.000 \times 25$ geeft de melding E op de machine. Ook deze berekening kan echter gemakkelijk uit het hoofd: $16 \times 25 = 8 \times 50 = 4 \times 100$; dus 400 miljoen euro.

Een eenvoudig middel om de hoofdrekenen of de rekenmachine zogenoemde *reken(mach)ine* aloude hoofdrekenmethode. Het kortdurende activiteit, die re kan worden gedaan.

- Reken(mach)ine
1. $1200 : 6 =$
 2. $6 \times 249 =$
 3. $250 \times 40 =$
 4. $1495 : 5 =$
 5. 120 kauwgomballen in z.
 6. $5 \times 257 =$
 7. $1201 - 1197 =$
 8. $1275 + 1275 + 1275 + 1$
 9. $499 + 499 =$
 10. De rekenles begint om 8.
- De les duurt 55 minuten.

Zo'n dictée bevat een aantal rekenmondelingen of op een blaadje ge De kinderen noteren alleen het i de rekenmachine gebruikt heb de hoofdrekenen en schattend rekenkundig denken dienen te , 3, 5, 7 en 9 van dit rekendictée hiervan gezien worden. Opgave van een opgave waarbij de rekt werkt. Ook de overige opgaven rekenaars uit het hoofd bereken inschakelen van de machine is l antwoorden via schattingen gec



Videofragment 7 laat een voor wordt aangepakt in groep 7: v de rekenmachine.³

de volgende opgaven handiger om te
dan om naar de rekenmachine te grijpen.

atser doet over één ronde 2 minuten en
den. Hij rijdt met constante snelheid.
doet hij over 60 ronden?

rest van de deling $5743 : 9$?

aardappels van $2\frac{1}{2}$ kilo kost €1,50
is dat per kilo?

Ike Nederlander gemiddeld €25,- voor hulp bij
geving geeft. Hoeveel geeft men dan samen in

raagstuk over de schaatser naar de
grijpt, zal een fiks aantal rekenhandelingen
eren om uiteindelijk, als hij goed gerekend
kken dat de uitkomst 2 uur en 11 minuten is
sinnen enkele seconden al hoofdrekenend
eggen, omdat elke minuut maal 60 één uur
de maal 60 één minuut oplevert.

raagstuk over de rest zal heel wat
h rekenwerk bij gebruik van de
vereist zijn. En dat terwijl een gevorderde
r hopelijk aan de eigenschap voor
door 9 zal denken: de som van de cijfers van
ewel $18 + 1$. Splits 5743 derhalve in $5742 + 1$.
n is deelbaar door 9, de rest is dus 1.

rijs kan met de machine berekend worden
; dus €0,60 per kilo. Dit had echter ook
it het hoofd gekund door deeltal en deler
ergroten tot €6,- voor een zak van 10 kilo,
joen Nederlanders. Maar $16.000.000 \times 25$
ing E op de machine. Ook deze berekening
nakkelijk uit het hoofd:
 $50 = 4 \times 100$; dus 400 miljoen euro.

Een eenvoudig middel om de beslissing over
hoofdrekenen of de rekenmachine te activeren, is het
zogenaemde *reken(machine)dietee* als variant van het
aloude hoofdrekendietee. Het gaat daarbij om een
kortdurende activiteit, die regelmatig met de hele groep
kan worden gedaan.

- Rekenmachinedietee-----
1. $1200 : 6 =$
 2. $6 \times 249 =$
 3. $250 \times 40 =$
 4. $1495 : 5 =$
 5. 120 kantwomballen in zakjes van 8. Hoeveel zakjes?
 6. $8 \times 257 =$
 7. $1201 - 1497 =$
 8. $1275 + 1275 + 1275 + 1275 =$
 9. $499 + 499 =$
 10. De rekenles begint om 8.45 uur.
De les duurt 55 minuten. Hoe laat is de les afgelopen?

Zo'n dietee bevat een aantal relatief eenvoudige opgaven die
mondeling of op een blaadje gegeven kunnen worden.
De kinderen noteren alleen het antwoord én tekenen aan of ze
de rekenmachine gebruikt hebben of niet. Vanuit de gedachte
dat hoofdrekenen en schattend rekenen de pijlers van het
rekenkundig denken dienen te zijn, moeten de opgaven 1, 2,
3, 5, 7 en 9 van dit rekendietee als typische voorbeelden
hiervan gezien worden. Opgave 10 is een schoolvoorbeeld
van een opgave waarbij de rekenmachine contraproductief
werkt. Ook de overige opgaven (4, 6 en 8) zouden door goede
rekenaars uit het hoofd berekend kunnen worden, maar het
inschakelen van de machine is hier begrijpelijk, zeker als de
antwoorden via schattingen gecontroleerd worden.



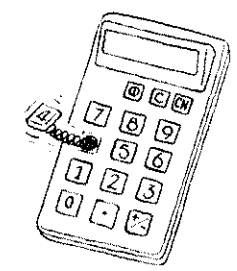
Videofragment 7 laat een voorbeeld zien van hoe 6×249
wordt aangepakt in groep 7: vooral hoofdrekenend en met
de rekenmachine.³



Van groot belang bij zo'n rekenmachinedietee is de
nabespreking, waarbij de overwegingen van de kinderen
gehoord worden: *had het zin de rekenmachine in te zetten?*
Zoals uiteengezet in het hoofdstuk over hoofdrekenen
wordt bij deze rekenvorm veelvuldig gebruik gemaakt
van de innerlijke structuur van de getallen en van
eigenschappen van operaties. Het is een rijk gebied,
waaraan het gebruik van de rekenmachine een nieuwe
motivering kan geven. Dit moge ook duidelijk worden aan
de hand van de volgende voorbeelden.

Van de rekenmachine werkt de 4 knop niet.
Hoe kan je de volgende sommen toch met de machine
uitrekenen?

- $34 \times 676 =$
- $43 \times 676 =$
- $33 \times 674 =$
- $44 \times 676 =$
- $44 \times 444 =$



In dit soort vraagstukjes komt het aan op het doorzien van
de structuur van de getallen en het toepassen van
belangrijke eigenschappen van de operaties, zoals

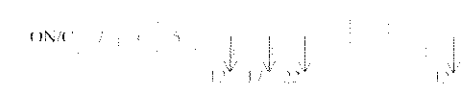
$$34 \times 676 = (33 \times 676) + (1 \times 676)$$

$$43 \times 676 = (33 \times 676) + (10 \times 676)$$

Maar ook het halverings/verdubbelings-principe kan hier
toegepast en geoefend worden:

$$44 \times 444 = 22 \times 888.$$

De eenvoudige traditionele rekenmachine is ook heel
geschikt om *getalpatronen* te maken.





De machine onthoudt als het ware de tweede term, het getal 5, als *constante opteller*. Telkens als de =-knop wordt ingedrukt, wordt dit getal bij het laatst verkregen resultaat opgeteld.

Tal van vragen, die met het inzicht in de structuur van dit patroon te maken hebben, dienen zich aan:

- Komt 118 in het patroon voor?
- Waarom kunnen andere einderijfers dat 2 en 7 niet voorkomen?
- Hoeveel keer moet de =-knop ingedrukt worden om 52, 77, 112, 1007 te krijgen? Kun je hiervoor een regel geven?
- Komt elk getal, dat op een 2 of een 7 eindigt, in dit getalpatroon voor?

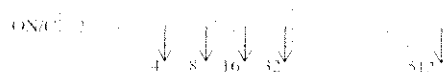
In het bijzonder is het interessant met 0 te starten en dan de tafels van vermenigvuldiging te genereren — ook van boven de tien. Hiermee wordt een rijk onderzoeksgebied blootgelegd.

- Bij welke tafels kunnen nooit oneven getallen als einderijfers voorkomen?
- Bij welke tafels komen alle tien de cijfers als einderijfer voor?
- Wat zie je voor mooi patroon in de tafel van 37?

Vanzelfsprekend kunnen ook dalende patronen gemaakt worden met een *constante aftrekker*. Laat de leerlingen voorspellen wat er gebeurt bij het passeren van de nul.

Ook kent het machientje een *constante vermenigvuldiger*. Deze is geschikt om bepaalde getallen telkens met een zelfde factor te vermenigvuldigen. Deze operatie werkt als volgt: ON/C: 3; $\times$. Daarna levert elk ingetoetst getal het product met 3 op. Dus het intoetsen van 15 en de =-knop levert 45 op. 22 en de =-knop leidt tot 66, enzovoort. Een mooie toepassing van dit "programma" is het onderzoek naar de machten van een getal door namelijk niet steeds nieuwe getallen in te voeren, maar door de =-knop te blijven intoetsen.

- De strook geeft aan hoe je machten van 2 kunt maken.



MaaK zelf rijen van machten van andere getallen.
De rekenmachine werkt hier als een constante vermenigvuldiger.

De *constante deler* is ook te programmeren. Let er daarbij op dat de deler ná het deeltal wordt genoteerd. Bij een vermenigvuldiging staat de vermenigvuldiger vóór het vermenigvuldigetal.

De gegeven voorbeelden maken duidelijk dat de rekenmachine ook een functie kan hebben bij het onderzoek van de getallen op zich. Hier dient zich dan wel een wat meer wiskundig gebied van het rekenen aan, zoals deelbaarheid, ontbinden, priemgetallen en getalpatronen.

- Deel getallen van de soort 611,611, 234,234, 819,819, achtereenvolgens door 7, 11 en 13.
Verklaar de verrassende uitkomst.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ON/C: } 611611 & \div & 7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 87 & 23 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ON/C: } 611611 & \div & 11 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 55 & 6 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ON/C: } 611611 & \div & 13 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 47 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Heel eenvoudig zijn vraagstukjes te genereren waarin een aantal cijfers is vervangen door open plaatsen. In het voorbeeld hieronder ligt de nadruk op het kloppend maken van het einderijfer van een vermenigvuldiging.

$$\begin{array}{l} 5 \ 6 \times 2 \square = 1 \square \square 8 \\ 3 \square \times 7 \ 3 = \square 7 \ 0 \ 1 \\ 8 \ 1 \times 2 \square = \square \square 2 \ 0 \\ \square 9 \times 2 \ 3 = 1 \ 5 \ 8 \square \end{array}$$

Mooi hoofdrekenen en gebruik van de machine zit ook in het volgende vraagstukje.

- Van welke twee opeenvolgende hele getallen is het product 1406?

Uit het hoofd kan ingezien worden dat het c getallenpaar moet zijn tussen 30 en 40. In de einderijfer 6 komen alleen de paren 32 en 37 in aanmerking. Schattend is in te zien dat 32 is. Dus moet het 37×38 zijn. Dit kan met c gecontroleerd worden.

Een les over deze opgave maakte duidelijk c kinderen allerlei vermenigvuldigingen nitsel totaal niet op het einderijfer letten. Voor deze bewustmaking van een andere aanpak bestist Anderzijds zou met de betere leerlingen een naar kwadraten en wortels mogelijk zijn. Ge worteltoets ($\sqrt{1406} = 37,49\dots$) levert de snel oplossing: 37×38 . Op het genoemde vraag gemakkelijk variaties te maken.

Schattend rekenen en de rekenmachine

Het controleren van de orde van grootte bij de een (enkelvoudige) operatie is een belangrijk bij het leren gebruiken van de rekenmachine. Stel, men wil de precieze uitkomst van 120,7 weten. De toetsen worden snel ingetoetst en als antwoord 195.853. Belangrijk is nu dat i dit wel fout moet zijn. Door duizend als ma dit glashelder: 120 duizend plus 750 duizen duizend op. Er moet hier dus iets zijn misg. Dit alerte controleren van de berekeningen, als achteraf, dient een essentieel punt te zij ontwikkelen van een kritische houding bij h de rekenmachine. Ook bij dit onderdeel ku oefeningen met de rekenmachine van diens Enkele voorbeelden volgen.

- Welke schatting is het beste?

Controleer met de rekenmachine.

$28 \times 71 =$	1500	2000	25
$36 \times 42 =$	1000	1500	20
$73 \times 79 =$	5000	5500	60

took geeft aan hoe je machten van 2 kunt maken.



zelf rijen van machten van andere getallen.
kenmachine werkt hier als een constante
menigvuldiger.

te deler is ook te programmeren. Let er daarbij
leler na het deeltal wordt genoteerd. Bij een
uldiging staat de vermenigvuldiger vóór het
uldigtal.

n voorbeelden maken duidelijk dat de
ine ook een functie kan hebben bij het
van de getallen op zich. Hier dient zich dan wel
er wiskundig gebied van het rekenen aan, zoals
id, onthinden, priemgetallen en getalpatronen.

getallen van de soort 611,611, 234,234, 819,819,
eenvolgens door 7, 11 en 13.
aar de verrassende uitkomst



udig zijn vraagstukjes te genereren waarin een
rs is vervangen door open plaatsen.
beeld hieronder ligt de nadruk op het kloppend
het eindcijfer van een vermenigvuldiging.

$$\begin{aligned} 8 \cdot 6 \times 2 \square &= 1 \square \square 8 \\ 3 \square \times 7 \cdot 3 &= \square 7 0 1 \\ 8 \cdot 1 \times 2 \square &= \square \square 2 0 \\ \square 9 \times 2 \cdot 3 &= 1 \cdot 5 8 \square \end{aligned}$$

frekenen en gebruik van de machine zit ook in
le vraagstukje.

> Van welke twee opeenvolgende hele getallen
is het product 1406?

Uit het hoofd kan ingezien worden dat het een
getallenpaar moet zijn tussen 30 en 40. In verband met het
eindcijfer 6 komen alleen de paren 32 en 33, of 37 en 38
in aanmerking. Schattend is in te zien dat 32×33 te klein
is. Dus moet het 37×38 zijn. Dit kan met de machine
gecontroleerd worden.
Een les over deze opgave maakte duidelijk dat veel
kinderen allerlei vermenigvuldigingen uitschreven en
totaal niet op het eindcijfer letten. Voor deze kinderen is
bewustmaking van een andere aanpak beslist noodzakelijk.
Anderzijds zou met de betere leerlingen een onderzoekje
naar kwadraten en wortels mogelijk zijn. Gebruik van de
worteltoets ($\sqrt{1406} = 37,49\dots$) levert de snelste weg tot de
oplossing: 37×38 . Op het genoemde vraagstuk zijn
gemakkelijk variaties te maken.

Schattend rekenen en de rekenmachine

Het controleren van de orde van grootte bij de uitkomst van
een (enkelvoudige) operatie is een belangrijk aandachtspunt
bij het leren gebruiken van de rekenmachine.
Stel, men wil de precieze uitkomst van $120.765 + 750.088$
weten. De toetsen worden snel ingetoetst en er verschijnt
als antwoord 195.853. Belangrijk is nu dat men beseft dat
dit wel fout moet zijn. Door duizend als maat te nemen, is
dit glashelder: 120 duizend plus 750 duizend levert al 870
duizend op. Er moet hier dus iets zijn misgegaan.
Dit alerte controleren van de berekeningen, zowel vooraf
als achteraf, dient een essentieel punt te zijn in het
ontwikkelen van een kritische houding bij het gebruik van
de rekenmachine. Ook bij dit onderdeel kunnen gerichte
oefeningen met de rekenmachine van dienst zijn.
Enkele voorbeelden volgen.

> Welke schatting is het beste?

Controleer met de rekenmachine.		
$28 \times 71 =$	1500	2000
$36 \times 42 =$	1000	1500
$73 \times 79 =$	5000	5500



Een variant hierop is het *kassabonnen-spel*.

> Schat de totalen. Controleer met de rekenmachine.

4,17	12,37
12,33	12,37
0,88	12,37
0,88	12,37
37,02	12,37
2,33	12,37
25,00	12,37
24,95	12,37
3,11 +	12,37
	12,37 +

De kinderen krijgen een werkblad met een aantal
kassabonnen en de leraar legt uit hoe het spel in tweetallen
wordt gespeeld.

“Elke speler schat wat alles samen kost op de eerste bon en
schrijft dat op. Je kan er boven of onder zitten. Dan
controleer je het op de rekenmachine. Wie er het dichtste bij
zit heeft gewonnen en krijgt een punt. Dan de volgende bon.”
Een leerling vraagt: “Meester, als we even ver van het
antwoord zitten, wie krijgt dan het punt?”
“Je moet wel eerst schatten, niet meteen op de
rekenmachine”, zegt een meisje tegen haar buurvrouw, die
alle opgaven op de machine wil doen.
De kinderen houden elkaar streng aan de spelregel om eerst
te schatten en dan te controleren met de rekenmachine. Er
wordt scherp gecontroleerd wie de winnende schatting
heeft gemaakt. Verrassend is het om ook eens een kassabon
te geven met precies tien artikelen van dezelfde prijs.

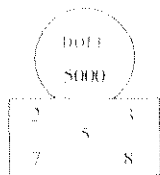
Een kijkje in de klas² leert dat Joost uit groep 6, schat dat hij
voor een van de kassabonnen aan duizend gulden te kort heeft.



Op videofragment 8 is te zien hoe getallen afgerond en
handig bij elkaar genomen worden en hoe er herhaald
wordt opgeteld.



Tot slot nog een ander voorbeeld van een schatspel: het *doel-spel*.



- Kies drie getallen uit de doos. Maak er een driecijferig getal van. Vermenigvuldig dat met zeven. Probeer zo dicht mogelijk bij het doel vijftienduizend te komen. Je mag twee keer proberen.

Bijvoorbeeld: $7 \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} = 5061$
 Dit levert een score van 61 op ($5061 - 5000$).

Herhaal dit met andere doelen, getalendozen en vermenigvuldigers.

Bijvoorbeeld:
 2000 als doel: kies uit 0, 2, 4, 5, 8; vermenigvuldig met 3;
 8000 als doel: kies uit 5, 6, 7, 8, 9; vermenigvuldig met 9;
 4500 als doel: kies uit 0, 2, 4, 6, 8; vermenigvuldig met 7;
 3500 als doel: kies uit 1, 3, 5, 7, 9; vermenigvuldig met 9.
 Probeer zo weinig mogelijk punten te scoren.

Cijferend rekenen en de rekenmachine

In het geval de exacte uitkomst van 98.765×4321 uitgerekend moet worden, is de kans groot dat dit op de rekenmachine tot problemen leidt.
 Dit is al direct te zien bij het maken van een eerste schatting:
 $4321 \times 98.765 \approx 4000 \times 100.000 = 400.000.000$.
 Het antwoord zit dus in ieder geval in de honderden miljoenen en kan dus met negen cijfers niet in het venster passen. Als het toch wordt geprobeerd, verschijnt op een eenvoudige machine: 14.2676356. Zoals eerder gezegd, is uit deze foutmelding en de plaats van de punt toch nog wel enige informatie te halen. Er is namelijk maar één cijfer aan het eind weggelaten. Dat dit eindcijfer 5 zou zijn, was van te voren al te bedenken. Het antwoord is dus 426.763.565.

In het geval van de vermenigvuldiging $100.000,123 \times 123$ helpt deze aanpak niet meer. De vermenigvuldiging wordt dan zo opgeschreven dat de deelproducten bepaald kunnen worden. Dit kan uit het hoofd (nulregel), op de machine (123×123) en op papier:

$$\begin{array}{r} 100.000,123 \times 123 = 100.000.000 + 123 \times 123 \\ 100.000.000 \times 123 \quad 123 \times 123 \\ \downarrow \quad \downarrow \text{om} \\ 12.300.000.000 \quad 15.129 \\ \hline 12.300.015.129 \end{array}$$

Om zo'n grote vermenigvuldiging te kunnen maken, zijn inzicht in het positiesysteem en in allerlei eigenschappen van de rekenoperaties een vereiste. Door de vele nullen in een van de factoren biedt de splitsing zich als het ware vanzelf aan.

Complexere variaties zijn eenvoudig te bedenken:
 $123.456 \times 123.456 = 15.241.383.936$.

Kenmerkend voor dit soort opgaven is het feit dat soms toch de noodzaak aanwezig is om een enkele (eenvoudige) berekening op papier uit te voeren. Uitgaande van de vorige activiteit kan de orde van grootte van een vermenigvuldiging onderzocht worden.

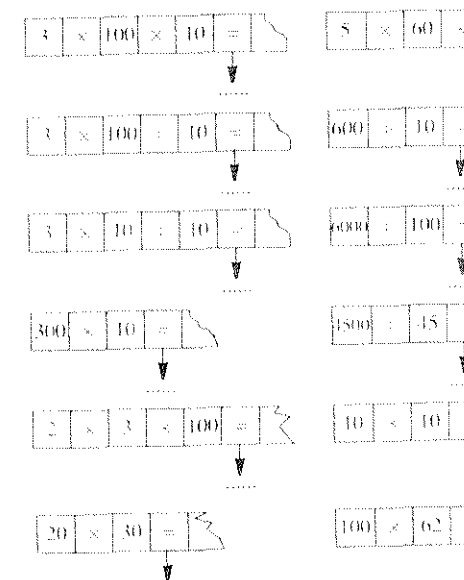
- Gebruik je rekenmachine of reken uit je hoofd.
 Noteer steeds het aantal cijfers van de uitkomst.

	Aantal cijfers van het product
$15 \times 67 =$	
$13 \times 876 =$	
$541 \times 2287 =$	
$4472 \times 1946 =$	
$100 \times 869 =$	
$12 \times 8 =$	

Probeer een regel te ontdekken voor het aantal cijfers van een product.

Uiteindelijk belangrijk voor het inzicht in het g en voor het vlot hoofdrekenen en schattend re *nulregel*: het kunnen rekenen met de machter Goed beschouwd komen er bij het vermenigv 100 niet twee nullen achter het getal 324, maar twee posities op naar links. Op de rekenmach ook werkelijk gebeuren. Enkele oefeningen met deze nulregel op de re zijn hieronder afgebeeld.

- Eerst invullen, daarna met de machine control



Inzicht in het positiestelsel kan verder versterkt worden via bijvoorbeeld de volgende opgave.

- Zet de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5 in de hokjes en in grootste en het kleinste product.





vermenigvuldiging $100.000,123 \times 123$ niet meer. De vermenigvuldiging wordt ten dat de deelproducten bepaald uit kan uit het hoofd (nulregel), op de 123) en op papier.

$$123 \times 123 = (100.000,000 + 123) \times 123$$

$$\begin{array}{r} 100.000 \times 123 \quad 123 \times 123 \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \text{rm} \\ 10.000.000 \quad 15.129 \\ 15.129 \\ \hline 1.015.129 \end{array}$$

menigvuldiging te kunnen maken, zijn iesysteem en in allerlei eigenschappen ties een vereiste. Door de vele nullen in n biedt de splitsing zich als het ware

ies zijn eenvoudig te bedenken:
 $s = 15,241,383,936$.

dit soort opgaven is het feit dat soms aanwezig is om een enkele kening op papier uit te voeren. orige activiteit kan de orde van grootte vuldiging onderzocht worden.

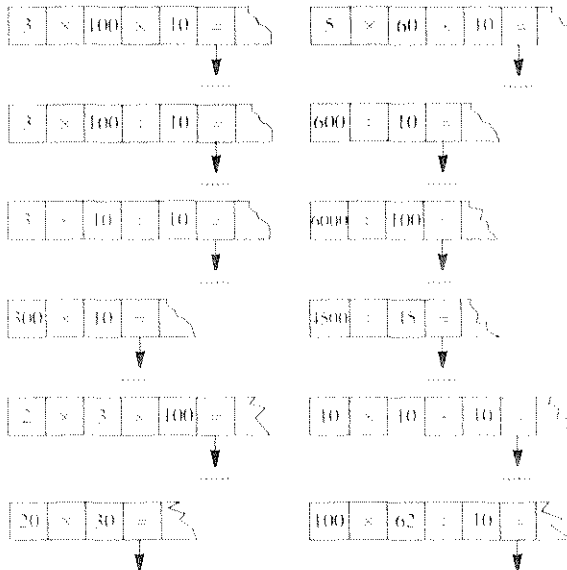
enmachine of reken uit je hoofd, het aantal cijfers van de uitkomst.

Aantal cijfers
 van het product

zel te ontdekken voor het aantal cijfers
 9).

Uitmate belangrijk voor het inzicht in het getalsysteem en voor het vlot hoofdrekennen en schattend rekenen is de *nulregel*: het kunnen rekenen met de machten van 10. Goed beschouwd komen er bij het vermenigvuldigen met 100 niet twee nullen achter het getal 324, maar schuift 324 twee posities op naar links. Op de rekenmachine zie je dit ook werkelijk gebeuren. Enkele oefeningen met deze nulregel op de rekenmachine zijn hieronder afgebeeld.

~ Eerst invullen, daarna met de machine controleren.



Inzicht in het positiestelsel kan verder versterkt worden via bijvoorbeeld de volgende opgave.

~ Zet de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5 in de hokjes en maak het grootste en het kleinste product.



Samenhang van de operaties en de rekenmachine

Bijder is al op de mogelijkheid gewezen om met de constante opteller (+ 5 = = ...) de vermenigvuldiging als herhaalde optelling te laten zien. Met de constante aftrekker kan nog eens in herinnering worden geroepen dat delen in feite herhaald aftrekken is, hetgeen weer met een of andere vorm van (staart)delen in verband kan worden gebracht.

Start bijvoorbeeld met 1342 en tel hoeveel maal je daar 72 af kunt halen ($1342 : 72 = = \dots$ tot rest 46).

Verder is ook al aandacht gevraagd voor het vermenigvuldigen met 10 en de effecten daarvan.

Een belangrijk inzicht in de operaties is de samenhang tussen de zogenoemde inverse operaties of omkeerbewerkingen: optellen tegenover aftrekken en vermenigvuldigen tegenover delen. Van oudsher wordt dit toegepast als proef op de som. Zo kan het antwoord van de aftrekking $3504 - 1645 = 1859$ gecontroleerd worden door het uitvoeren van de optelling $1859 + 1645$.

$$\begin{array}{r} 3504 \\ - 1645 \\ \hline 1859 \\ + 1645 \\ \hline 3504 \end{array}$$

Hier wordt in feite het principe van aftrekken als bijtellen of doortellen gehanteerd, hetgeen het aftrekken als omgekeerde bewerking van het optellen duidelijk zichtbaar maakt.

Voor delingen geldt iets analoogs. De kinderen moeten aan het eind van de basisschool een opgave als de volgende kunnen maken.

~ Met welke vermenigvuldiging kun je de uitkomst van de deling $1080 : 135 = 8$ controleren?

Juist bij het machinerekenen hebben deze controles zin en kunnen dit soort opgaven aan de orde worden gesteld.



Het inzicht in de samenhang tussen bewerkingen komt met name tot uiting in *stipopgaven* of *vraagtekenopgaven*. Ze kunnen het na te streven inzicht in de omkeerbewerkingen versterken. Daarmee vervullen deze opgaven ook een functie als voorbereiding op de algebra van het voortgezet onderwijs.

$$\begin{array}{rclcl} 19481 & : & ? & = & 847 \\ 3056 & : & ? & = & 201 \\ 183 & \times & ? & = & 23667 \\ ? & + & 246 & = & 543 \end{array}$$

In het bijzonder kunnen delingen met rest een onderwerp van onderzoek zijn.

➤ Bereken de rest van de deling $7852 : 23$.

Op de rekenmachine levert deze deling 341,3913 op. Om het antwoord te begrijpen, dient de structuur van het delen begrepen te worden. Het quotiënt (341,3913...) bevat in ieder geval het hele deel 341. De deler (23) is dus in ieder geval 341 maal van het deeltal afgetrokken, daarna is de rest tot een bepaald cijfer achter de komma doorgedeeld. De rest moet dus zijn: $7852 - (341 \times 23) = 9$. De formele omkering $23 \times 0,3913$ zou 8,9999 opgeleverd hebben, wat tot onderzoek kan leiden over het feitelijke rekenen van het machientje.

Op dit thema van delingen met rest zijn allerlei variaties mogelijk. Enkele uitdagende voorbeelden volgen hier.

$$\begin{array}{rclcl} 4586 & : & 26 & = & 176 \text{ rest } 10, \text{ controleer} \\ ? & : & 71 & = & 38 \text{ rest } 43 \\ 15317 & : & ? & = & 40 \text{ rest } 277 \\ 8347 & : & 8346 & = & ? \text{ rest } ? \end{array}$$

Samenvatting verrijkingsfase

Nadat de rekenmachine geïntroduceerd is, kan het simpele traditionele machientje zowel bij het hoofdrekenen als het schattend en cijferend rekenen een didactische verrijking zijn.

Bij het *hoofdrekenen* is het belangrijkste doel in feite het gebruik van het machientje zoveel mogelijk te vermijden. Dit komt vooral tot uiting bij het gebruik van het rekenmachine(dietee). Verder zijn er door de rekenmachine tal van nieuwe typen vraagstukken mogelijk, waarbij het aankomt op inzicht in de structuur van de getallen en eigenschappen van de operaties.

Voor het *schattende rekenen* geldt dat bij het gebruik van de rekenmachine, deze rekenwijze als het ware steeds in het achterhoofd moet werken. Klopt de orde van grootte? Is een schatting voldoende?

Het schattende rekenen kan en moet ook op zich geoefend worden. Een spelvorm is hierbij aan te raden.

Het *inzicht* in het *positiesysteem* en in het cijferen kan vooral verdiept worden via grote vermenigvuldigingen die niet direct op de rekenmachine zijn uit te voeren en waarbij een slim gebruik van de rekenmachine nodig is.

Bij een *terugblik* op het wezen van de *operaties* blijkt eens te meer dat de rekenmachine niet blind ingezet kan worden. Vooral de activiteiten rond delingen met rest kunnen een reflectie op de samenhang tussen vermenigvuldigen en delen teweegbrengen.

Tijdens de verrijkingsfase ligt de nadruk met name op de didactische functie van de rekenmachine. Is de onderwijsaanpak nogal open, dan kunnen enkele activiteiten ook als onderzoeksproblemen gepresenteerd worden. Tevens wordt in deze fase ook al aangestuurd op begrip van de betreffende waarde van de rekenmachine als hulpmiddel.

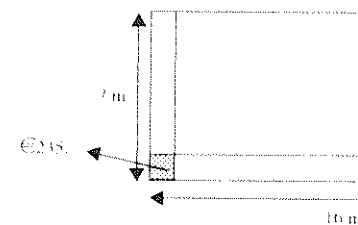
	erkenning	verrijking	integratie
onderzoeksfunctie	++	±	
didactische functie	±	++	
rekenhulpmiddel	...	±	

In de voorgaande fase is de rekent door de leraar ingezet om bepaalde in een nieuw didactisch licht te pl. Uitdrukkelijk is gesteld dat ermaar worden dat de kinderen de basisva machine beheersen. Het uiteindelijk basisschool is dat de leerlingen zelf bepaald vraagstuk het machientje v

Toepassingen met de rekenmachir

Het is vooral bij toepassingen met l rekenmachine als hulpmiddel wor Daarvoor is de rekenmachine oors ontwikkeld. Het apparaat neemt ni vervelend cijferwerk van ons over, tevens de kans op het maken van r Deze voordelen worden met name toepassingsopgaven met grote get procenten en metrieke maten, dus i basisschool. Ook in het gebied van van toepassingen te vinden.

➤ Er moet een nieuwe kunststofvloer gelegd worden. De maten van het l 16 meter. De prijs van de vloer is 4 meter. Hoeveel kost dit in totaal?



Zo'n halve eeuw geleden werd dit s eind van de basisschool gegeven o leerlingen de oppervlakteformule v konden toepassen, maar vooral ook accuraat werd gecijferd.



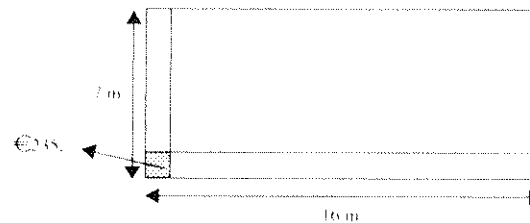
Integratie

In de voorgaande fase is de rekenmachine veelal bewust door de leraar ingezet om bepaalde handelingen of relaties in een nieuw didactisch licht te plaatsen. Uitdrukkelijk is gesteld dat ernaar gestreefd dient te worden dat de kinderen de basisvaardigheden zonder machine beheersen. Het uiteindelijke doel voor de basisschool is dat de leerlingen zelf beslissen of ze voor een bepaald vraagstuk het machientje wel of niet gebruiken.

Toepassingen met de rekenmachine

Het is vooral bij toepassingen met lastig rekenwerk dat de rekenmachine als hulpmiddel wordt ingeroepen. Daarvoor is de rekenmachine oorspronkelijk ook ontwikkeld. Het apparaat neemt niet alleen blind en vervelend cijferwerk van ons over, maar vermindert tevens de kans op het maken van rekenfouten. Deze voordelen worden met name goed duidelijk in toepassingsopgaven met grote getallen, kommagetallen, procenten en metrieke maten, dus aan het eind van de basisschool. Ook in het gebied van de hele getallen zijn tal van toepassingen te vinden.

- Er moet een nieuwe kunststofvloer in het gymlokaal gelegd worden. De maten van het lokaal zijn 7 meter bij 16 meter. De prijs van de vloer is €235,- per vierkante meter. Hoeveel kost dit in totaal?



Zo'n halve eeuw geleden werd dit soort sommen aan het eind van de basisschool gegeven om te toetsen of de leerlingen de oppervlakteformule van de rechthoek konden toepassen, maar vooral ook om te kijken of er accuraat werd geëcijferd.

Uiteraard, begrip van het oppervlaktemodel moet er zijn, maar de cijferprocedure zelf kan eenvoudig, snel en accuraat op de rekenmachine worden uitgevoerd:
 $7 \times 16 \times 235 = 26.320$.
Van groot belang is echter dat vooraf of achteraf de orde van grootte van dit bedrag geschat is via: 7×16 is meer dan 100. De prijs ligt dus zeker boven de €23.500.

Organisatie van de berekening

In het genoemde voorbeeld was de organisatie van de berekening en het noteren van het rekenschema (de vermenigvuldigformule) nog tamelijk eenvoudig, maar zodra iets ingewikkelder toepassingen aan de orde komen, worden aan het organiseren van de berekening hogere eisen gesteld. Met name komt dit tot uiting bij delingsproblemen. In de inleiding is het volgende voorbeeld al genoemd.

- Maatschappij RingRing vraagt voor telefoneren 7 cent per 27 seconden (een tik) of een deel daarvan.
Hoeveel kost een gesprek van 33 minuten en 5 seconden?

Eerst een formele oplossing. Men moet hierbij inzien dat het om het aantal tikken (eenheden) van 27 seconden gaat, dat op de totale gesprekstijd (33 minuten en 5 seconden) past. Oftewel 27 seconden moet gedeeld worden op 33 minuten en 5 seconden. Daartoe moet de gesprekstijd in seconden worden omgezet: $(33 \times 60) + 5 = 1985$ seconden. Nu kan de deling $1985 : 27$ uitgevoerd worden. De rekenmachine levert het kommagetal 73,518518 op. Dit betekent dat er in ieder geval 73 tikken zijn geweest en dat de 74-ste was ingezet. De kosten zijn dus $74 \times f0,07 = f5,18$.

In een vraagstuk als dit is de rekenmachine in feite onontbeerlijk. Maar de kinderen zullen het probleem eerst moeten analyseren en daarna de berekening moeten organiseren. Ten slotte dient de orde van grootte van de uitkomst kritisch bekeken te worden. Een schatting vooraf is hiervoor het aangewezen middel: 27 seconden passen bijna twee keer in één minuut. Het totaal aantal tikken zal dus zeker meer dan 66 (33×2) moeten zijn.

drekenen is het belangrijkste doel in feite het het machientje zoveel mogelijk te vermijden, oral tot uiting bij het gebruik van het inedittee. Verder zijn er door de ne tal van nieuwe typen vraagstukken aarbij het aankomt op inzicht in de structuur len en eigenschappen van de operaties.

attende rekenen geldt dat bij het gebruik van hine, deze rekenwijze als het ware steeds in ofd moet werken. Klopt de orde van grootte? ing voldoende?
de rekenen kan en moet ook op zich geoefend i spelvorm is hierbij aan te raden.

n het *positiesysteem* en in het cijferen kan pt worden via grote vermenigvuldigingen t op de rekenmachine zijn uit te voeren en slim gebruik van de rekenmachine nodig is.

blik op het wezen van de *operaties* blijkt eens le rekenmachine niet blind ingezet kan ral de activiteiten rond delingen met rest e reflectie op de samenhang tussen digen en delen teweegbrengen.

errijgingsfase ligt de nadruk met name op de imetie van de rekenmachine. Is de ipak nogal open, dan kunnen enkele ok als onderzoeksproblemen gepresenteerd ens wordt in deze fase ook al aangestuurd op e betrekkelijke waarde van de rekenmachine el.

	verkenning	verrijking	integratie
netie	++	±	
metie	±	++	
del	—	±	



Het is dus noodzakelijk dat de kinderen een toepassingsprobleem eerst analyseren (wat is het probleem?), daarna de berekening organiseren (wat moet er gedaan worden?), vervolgens in een rekenschema noteren (welke zijn de bijbehorende rekenhandelingen?) en ten slotte de feitelijke berekeningen uitvoeren:

ANALYSE → ORGANISATIE → REKENSCHEMA → UITVOEREN BEREKENING

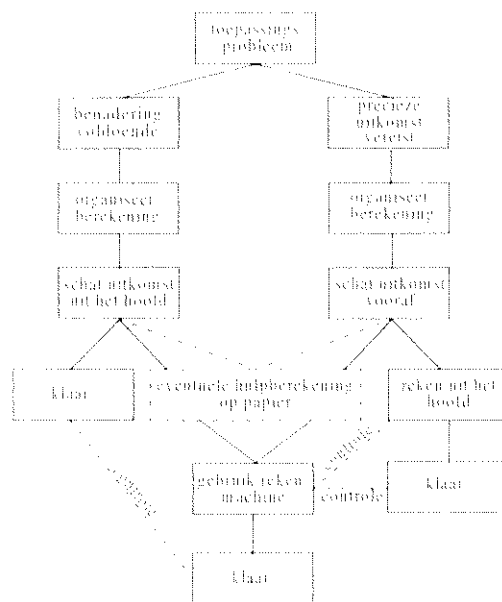
Ook moeten de kinderen hun oplossing schematisch noteren, omdat anders de gevolgde denkwijze niet meer te achterhalen is. Stella uit groep 8 deed dit bij de opgave over de telefoonkosten als volgt:

*Ik maak er eerst secondes van
 33×60 en 5 sec 1985
 hoe vaak gaat 17 in 1985
 $27 / 1985 \begin{array}{l} \text{RM} \\ 73,5 \end{array} 18518$
 Totaal: 74,66
 $14 \times 7 = 98 \text{ cent} = \text{f} 0,98$*

Houd je hoofd erbij

Deze mengeling van hoofdrekenen, schattend rekenen, schriftelijk rekenen en rekenmachinegebruik is vooral bij toepassingen een geschikte werkwijze. Het nemen van de beslissingen over de wijzen van rekenen en noteren zal voor ieder verschillend zijn. Hoe zo'n beslissingsproces in grote lijnen kan verlopen is hiernaast in schema gebracht.

De rol van het hoofdrekenen en het schattend rekenen is opnieuw overduidelijk. Voor het cijferend rekenen is in deze aanpak een mimeme, maar toch niet geheel weg te denken rol weggelegd, voornamelijk als er kleine eenvoudige tussenberekeningen uitgevoerd moeten worden.



Belang

Van welk een cruciaal belang het principe van het analyseren en organiseren is, moge blijken uit de resultaten van de PPON-peiling van 1997. Ook de beste leerlingen hebben moeite met het inzichtelijk gebruik van een rekenmachine bij bijvoorbeeld de volgende opgave:

- Waterverbruik in 1990: 87 m^3 .
- 1 m^3 kost 84,6 cent.
- Wat zijn de totale kosten?

Slechts 11% van de leerlingen bracht dit vraagstuk tot een goed einde. Nadere analyse van de werkwijzen van de kinderen leert dat de meesten wel de vermenigvuldiging $87 \times 84,6$ herkennen en konden intoetsen, maar dat zij de uitkomst 7360,20 niet goed kunnen duiden. Kennelijk is het vraagstuk vooraf niet voldoende geanalyseerd. Vooral ontbreekt het de leerlingen aan een kritische houding. Immers 87 'kuub' van elk minder dan f1,- kan toch onmogelijk f7360,20 opleveren.

Samenvatting integratiefase

In de fase van integratie is het streven beslissen of ze de rekenmachine als tijdrovende en ingewikkelde bereker onderwijst moet de nadruk dan liggen organiseren en schematisch noteren berekening. Uiteraard blijft ook de d deze fase een rol spelen. Voor de bet van het traditionele machientje de ge als onderzoeksactiviteiten worden a

Tus

Om het kerndoel *de rekenmachine n bereiken*, dient het onderwijs zo georg geleidelijke integratie van de rekenm Hoewel de nadruk in de meeste reke vooral op het toepassingskarakter li van het machientje als rekenhulp (t controleren), verschillen de schooll aandacht, suggesties en praktische name de mogelijkheden tot uitbuiti onderzoeksaspect en het didactisch machine zijn nog niet optimaal ger mogelijk via duidelijke en praktisch handleidingen, zo mogelijk onderst nascholing en begeleiding.

De lessen over en met de rekenmac punt individueel werk moeten leid moeten worden dat er een groepsac waarbij de kinderen ook van elkaar leraar is hierbij een centrale rol toe van de groepsactiviteit, het houden verschillende aanpakken en het bev houding bij de kinderen.

Deze attitudevorming ligt besloten i rekenmachine, die immers met *hzi* moeten worden. Het is om die reden steeds de nadruk is gelegd op de sa gebruik van de rekenmachine met l schattend rekenen en cijferend reke

toepassingsprobleem

analyse

precieze uitkomst vereist

organiseert berekening

schat uitkomst vooraf

eventuele hulpberekening op papier

gebruik rekenmachine

controle

klaar

reken uit het hoofd

klaar

ideaal belang het principe van het organiseren is, moge blijken uit de PON-peiling van 1997. Ook de beste moeite met het inzichtelijk gebruik van bij bijvoorbeeld de volgende opgave.

In 1990: 87m³ cement.
 Hoeveel kosten?

2 leerlingen bracht dit vraagstuk tot een analyse van de werkwijzen van de meesten wel de vermenigvuldiging en konden intoetsen, maar dat zij de niet goed kunnen duiden. Kennelijk is af niet voldoende geanalyseerd, en de leerlingen aan een kritische 57 'kuub' van elk minder dan f1,- kan 7360,20 opleveren.



Samenvatting integratiefase

In de fase van integratie is het streven dat de leerlingen zelf beslissen of ze de rekenmachine als hulpmiddel voor tijdrovende en ingewikkelde berekeningen inzetten. In het onderwijs moet de nadruk dan liggen op het analyseren, organiseren en schematisch noteren van de feitelijke berekening. Uiteraard blijft ook de didactische functie in deze fase een rol spelen. Voor de betere leerlingen kunnen van het traditionele machientje de geheugen- en worteltoets als onderzoeksactiviteiten worden aangeboden.

Een andere mogelijkheid is dat deze leerlingen verschillende rekenmachinetypes vergelijken naar aard en werking.

	verkenning	verrijking	integratie
onderzoeksfunctie	++	+	+
didactische functie	+	++	+
rekenhulpmiddel		+	++

Tussendoelen als houvast voor inpassing

Om het kerndoel *de rekenmachine met inzicht gebruiken* te bereiken, dient het onderwijs zo georganiseerd te worden dat geleidelijke integratie van de rekenmachine tot stand komt. Hoewel de nadruk in de meeste reken-wiskundemethoden vooral op het toepassingskarakter ligt en dus op het aspect van het machientje als rekenhulp (technisch rekenen en controleren), verschillen de schoolboeken toch qua aandacht, suggesties en praktische voorbeelden. Met name de mogelijkheden tot uitbuiting van het onderzoeksaspect en het didactische aspect van de machine zijn nog niet optimaal gerealiseerd. Dit is alleen mogelijk via duidelijke en praktische beschrijvingen in de handleidingen, zo mogelijk ondersteund door gerichte nascholing en begeleiding.

De lessen over en met de rekenmachine zouden niet tot puur individueel werk moeten leiden, maar zo ingericht moeten worden dat er een groepsactiviteit ontstaat, waarbij de kinderen ook van elkaar kunnen leren. Aan de leraar is hierbij een centrale rol toegedacht bij het leiden van de groepsactiviteit, het houden van overzicht over de verschillende aanpakken en het bevorderen van de juiste houding bij de kinderen.

Deze attitudevorming ligt besloten in het kerndoel over de rekenmachine, die immers met *inzicht* gehanteerd zal moeten worden. Het is om die reden dat in het voorgaande steeds de nadruk is gelegd op de samenhang van het gebruik van de rekenmachine met hoofdrekenen, schattend rekenen en cijferend rekenen.

Het gaat erom dat op den duur een situatie ontstaat waarin de leerling de machine altijd ter beschikking heeft en zelf beslist deze te gebruiken of niet. Dat is het ultieme inzicht! Vanwege het karakter als hulpmiddel en didactisch middel, kan de rekenmachine niet als doel op zichzelf beschouwd worden. Dit maakt het moeilijk om een aparte leerlijn ervoor op te stellen. Wel geeft de onderscheiding van verschillende fasen een zekere chronologie voor de invoering ervan. Doel is een behoedzame inpassing van een belangrijk rekenmiddel. Om dit proces te bevorderen, zijn voor de groepen 7 en 8 bij de fasen van verkenning, verrijking en integratie van de rekenmachine tussendoelen geformuleerd, die in samenhang met de tussendoelen voor hoofdrekenen, schattend rekenen en cijferen nagestreefd dienen te worden.

Tussendoel bij de fase van verkenning

In de paragraaf over de verkenningsfase zijn de kwesties omtrent verschillende machines, technische bediening en strokentaal besproken. De strokentaal is nodig bij de machientjes die de rekenformule niet afbeelden en is praktisch om het onderwijsleerproces enigszins uniform te laten verlopen. Op den duur worden de handelingen geautomatiseerd, hetgeen bij eenvoudige berekeningen de rekenstrook overbodig maakt. Wat blijft is, dat door de rekenstrook duidelijk wordt wat de rekenhandelingen zijn bij de oplossing.

Deze overwegingen leiden tot het eerste tussendoel.



Medio groep 7 kunnen de leerlingen een eenvoudige rekenmachine bedienen. Zij kunnen enkelvoudige berekeningen (bestaande uit een bewerking) met behulp van de meest elementaire operatietoetsen (+, -, $\times$ en $\div$) uitvoeren. Zij kunnen tevens samengestelde berekeningen (bestaande uit twee of meer bewerkingen) op de rekenmachine uitvoeren waarbij eventueel tussennotaties op papier worden gemaakt. Zij kunnen voor dergelijke berekeningen met de strokentaal werken.

Voor de modale onderwijspraktijk is het aan te bevelen de eerste introductie via klassikaal geleide groepsactiviteiten te laten verlopen. Gebruikmaking van een type rekenmachine verhoogt de kans op een efficiënt verlopend onderwijsleerproces. De strokentaal is hierbij voor de leraar een methodisch middel voor een eenduidige manier van noteren van een berekening met een rekenmachine. De leerling houdt daardoor zicht op wat hij/zij in de machine heeft ingevoerd. Tevens is de strokentaal zinvol om de leerlingen bewust te maken van de specifieke wijze van rekenen van de machine. Een transparante rekenmachine, die via de overheadprojector wordt geprojecteerd, kan de centrale instructie ondersteunen. Van meet af aan staat het onderwijs in het teken van het inzichtelijk gebruik van de rekenmachine. Dit betekent dat ook in de fase van verkenning al direct gewerkt wordt aan de bevordering van een goede attitude: wanneer gebruik je de rekenmachine wel en wanneer is dit onnodig of zelfs onmogelijk of ongewenst? Het reken(machine)dictee is hiertoe een geschikte activiteit. Het kunnen organiseren van een berekening voor een eenvoudige context-opgave zal reeds in de fase van verkenning aan de orde gesteld kunnen worden. De onderwijsfasen *verkenning*, *verrijking* en *integratie* zijn niet strikt te scheiden, maar vormen een spiraalsgewijze opbouw van de leerlijn, waarbij door de aard van de opgaven steeds verdere niveauverhoging wordt nagestreefd.

Tussendoel bij de fase van verrijking

In de verrijkingsfase ligt de nadruk op de vele nieuwe didactische mogelijkheden van de rekenmachine. Er komen meer geavanceerde onderwerpen aan de orde zoals de constante opteller, aftrekker, vermenigvuldiger en deler. Het gebruik van de geheugenknoppen en de worteltoets is een differentieel doel. Een terugblik op het cijferen, het positiesysteem en de samenhang van de operaties kan de toegevoegde waarde van de rekenmachine verduidelijken.

Het gaat erom dat de kinderen ervaren dat al het rekenen begint met denken en dat het klakkeloos indrukken van knopjes niet volstaat. Van groot belang is dat het gebruik van de rekenmachine in het verdere onderwijs onderhouden wordt. Het reken(machine)dictee is hiervoor een geschikt middel.

Al met al zal het onderwijs gedurende de tweede helft van groep 7 zo ingericht moeten zijn dat het volgende tussendoel bereikt wordt.

Tussendoel bij de fase van integratie

Het zal duidelijk zijn dat bij het gebruik van de rekenmachine onontbeerlijk is

- In het *Postbank Nieuws* staat: "De afrekeningen van mijn gij bedrag in guldens en in euro's guldens door 2,20 deelt, klopt. Het antwoord van de Postbank bedrag is en dat er door 2,203



ze rekenmachine bestaande uit één operatietoetsen bestelde berekeningen en machine uitvoeren gemaakt. Zij kunnen erken.

den de eerste te laten verlopen. gt de kans op een taal is hierbij voor de anier van noteren van houdt daardoor zicht is is de strokentaal scifische wijze van chine, die via de rale instructie n het teken van het ent dat ook in de fase dering van een goede n wanneer is dit en(machine)dictee is eren van een l reeds in de fase van onderwijsfasen e scheiden, maar . waarbij door de aard ordt nagestreefd.

m dat de kinderen ervaren dat al het rekenen lenken en dat het klakkeloos indrukken van volstaat. Van groot belang is dat het gebruik machine in het verdere onderwijs n wordt. Het rekent(machine)dictee is hiervoor middel. : het onderwijs gedurende de tweede helft van ngericht moeten zijn dat het volgende ereikt wordt.

Eind groep 7 kunnen kinderen elementaire contextopgaven met behulp van een eenvoudige rekenmachine oplossen. Zij kunnen de uitkomst van de berekening achteraf globaal door een schatting controleren. Als uitbreiding van het gebruik van de elementaire operaties kunnen de leerlingen nu ook de constante opteller en vermenigvuldiger toepassen. De leerlingen kunnen onder leiding van de leraar of zelfstandig een onderzoekje naar de structuur van getallen en het getalsysteem uitvoeren.

De leraar zal bij de interactieve hoofdreklessen in groep 7 af en toe de rekenmachine betrekken, waarbij het richtsnoer blijft dat eerst overwogen wordt of het inzetten van de machine nodig en/of nuttig is. De nadruk blijft derhalve gericht op hoofdrekken en schattend rekenen, eventueel ondersteund door tussennotaties op papier. Het gebruik van een rekenmachine biedt de mogelijkheid om het inzicht in de structuur van de getallen en in het getalsysteem te vergroten. Dergelijke didactische verrijkingen zijn te vinden in onderzoekjes over het voortzetten van de tafels van vermenigvuldiging, kenmerken van deelbaarheid, vermenigvuldigingen met te grote getallen (die niet meer in het venster passen), bepalen van de rest van een deling en de samenhang van de operaties (optellen versus aftrekken en vermenigvuldigen versus delen). Op deze wijze leidt het gebruik van de rekenmachine tot een toegevoegde waarde voor de didactiek. Hoewel er oefeningen met de rekenmachine zijn waarmee het schattende rekenen op zich geoefend kan worden, komt het nut hiervan toch vooral tot uiting bij context-opgaven. Een cruciale activiteit hierbij is: het achteraf controleren van een rekenmachine-uitkomst door middel van een schatting van de orde van grootte van de uitkomst. Herhaaldelijk worden eenvoudige toepassingen aangeboden, die het inzetten van de rekenmachine uitlokken. Ook nu weer geldt dat de leerlingen voortgaan om berekeningen van een toepassingsopgave vooral te organiseren en ordelijk te noteren.

Tussendoel bij de fase van integratie

Het zal duidelijk zijn dat bij het volgende vraagstuk de rekenmachine onontbeerlijk is.

- » In het *Postbank Nieuws* staat een vraag van een klant: "De afrekeningen van mijn girorekening vermelden het bedrag in guldens én in euro's. Wanneer ik het bedrag in guldens door 2,20 deel, klopt het bedrag in euro's niet." Het antwoord van de Postbank is dat f2,20 een afgerond bedrag is en dat er door 2,20371 gedeeld moet worden.

Controleer dit voor het volgende saldo:

$$f7246,05 = 3288,11 \text{ euro's.}$$

Hoeveel verschillen de twee berekeningswijzen?

Bedenk een handige vuistregel om het uit je hoofd te doen.

Hoe wordt in het onderwijs bepaald of het machientje ingezet mag of moet worden? Als de leerlingen hierover zelf moget beslissen, dan moet te allen tijde zo'n apparaatje beschikbaar zijn. Dit proces vereist een voorzichtige aanpak. Leraar en leerlingen moeten wennen aan het machinerekenen.



Daarom is het verstandig om zeker in het begin door middel van een logo aan te geven of de machine ingezet mag of moet worden. Langzaam zal de rekenmachine echter binnen het totale rekenen in groep 8 geïntegreerd worden.

Aanvankelijk kan dit via geleide groepsactiviteiten, maar op den duur moeten de leerlingen zelf bepalen of ze van dit hulpmiddel gebruik maken. Dit moet leiden tot het feitelijke einddoel voor het machinerekenen op de basisschool.

3

Eind groep 8 kunnen kinderen een eenvoudige rekenmachine met inzicht gebruiken. Dit betekent dat zij zelf beslissen of bij een toepassingsopgave of kale rekenopgave het gebruik van de machine passend is. Ze kunnen een toepassingsopgave analyseren, naar eigen inzicht in een begrijpelijk rekenschema noteren, de feitelijke berekening met de rekenmachine uitvoeren en de uitkomst controleren door middel van een schatting achteraf.

Nogmaals inzicht

In het voorgaande is inzicht opgevat als begrip van getallen, hun structuur, hun samenhang en de operaties in onderlinge samenhang. Het wordt via elkaar opvolgende niveaus ontwikkeld tot een steeds diepgaander begrip van het getalsysteem.

Daarnaast is als belangrijk doel de ontwikkeling van een persoonlijke attitude gesteld, welke de leerling in staat stelt beslissingen te nemen over de meest passende methode van rekenen bij een bepaald probleem.

Het is vooral bij delingsproblemen dat er een beroep wordt gedaan op het inzicht in het rekenen en het eventueel inzetten van de rekenmachine.

Daarom het volgende bekende voorbeeld.

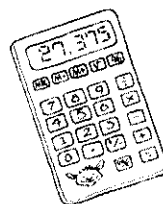
- Er gaan 1095 supporters mee naar de kampioenswedstrijd van hun geliefde club.
- Hoeveel bussen met elk 40 zitplaatsen zijn nodig?

Wanneer de leerling inzielt dat het hier om een delingsprobleem gaat en de bijbehorende rekenoperatie of rekenformule $1095 : 40 =$ kan noteren, is een correcte analyse van het probleem gemaakt.

Als de beslissing wordt genomen om de feitelijke berekening aan de machine over te laten, dan is vervolgens bepalend of de leerling de uitkomst 27,375 ook werkelijk begrijpt.

Heeft de leerling het inzicht dat het gedeelte achter de komma het resultaat is van de opdeling van de rest?

Zo ja, dan hoeft deze zich niet meer te bekommeren om de grootte van die rest en luidt de conclusie dat één bus aan de 27 bussen moet worden toegevoegd.



$$\begin{array}{r}
 1095 : 40 = 27 \text{ r. } 15 \\
 \begin{array}{r}
 1095 \\
 800 \\
 \hline
 295 \\
 280 \\
 \hline
 15
 \end{array}
 \end{array}$$

De vraag dringt zich dan op of het in dit geval ook nodig was de machine in te zetten. Juist bij het hoofdrekenen biedt dit vraagstuk een mooie gelegenheid om het delingsalgoritme op de meest natuurlijke manier uit te voeren. Dit kan namelijk via het op-vermenigvuldigen uit het hoofd: $20 \times 40 = 800$, over 295; $7 \times 40 = 280$, over 15; dus 27 bussen. Zo is ook meteen de rest van 15 supporters bekend die de extra bus nodig maakt.

Het hoeft geen betoog dat een staartdeling eveneens tot de beoogde oplossing zal voeren. Wanneer echter dergelijke delingsproblemen bij herhaling moeten worden uitgevoerd, is mechanisering van de bewerking aantrekkelijk en heeft de machine-aanpak de voorkeur.

Weliswaar wordt dan het e (cijferend staartdelen) verv routinematige handeling (n fouten is kleiner, het denke van de opgave en de tijdwi

He
eis
sle
het
dat
rek
de
van
rec
ter
om
aar
con

Kwalitatieve toetsing van c kan plaatsvinden door obsv rekengedrag van de indivie vooral gedacht worden aar rekenmachine niet helpt er Dergelijke opgaven bieden constateren of leerlingen n

wie de tafels van vermenig
 60×70 de rekenmachine g
wie $101 - 99$ machinaal
elementaire inzicht in de

Over de betekenis van reke
maatschappij van vandaag v
Dat er tegenwoordig compu



kan dit via geleide groepsactiviteiten, maar laten de leerlingen zelf bepalen of ze van dit gebruik maken. Dit moet leiden tot het feitelijke gebruik van machinerekenen op de basisschool.

Rekenmachine met inzicht in toepassingsopgave of niet. Ze kunnen een concreet en begrijpelijk gebruik van de rekenmachine maken en schatting achteraf.

Wat is het inzicht dat het gedeelte achter de komma voortvloeit uit de opdeling van de rest? Kan deze zich niet meer te bekommeren om de rest en luidt de conclusie dat één bus aan moet worden toegevoegd.

$$\begin{array}{r}
 1095 : 40 = 27 \text{ r. } 15 \\
 \begin{array}{r}
 1095 \\
 800 \\
 \hline
 295 \\
 280 \\
 \hline
 15
 \end{array}
 \end{array}$$

Wat is het inzicht dat het gedeelte achter de komma voortvloeit uit de opdeling van de rest? Kan deze zich niet meer te bekommeren om de rest en luidt de conclusie dat één bus aan moet worden toegevoegd.

Weliswaar wordt dan het ene routinematige rekenen (cijferend staartdelen) vervangen door een andere routinematige handeling (rekenmachine), maar de kans op fouten is kleiner, het denken wordt gericht op de essentie van de opgave en de tijdwinst zal op den duur enorm zijn.

Het bedoelde inzichtelijke gebruik van de rekenmachine stelt bepaalde eisen aan de inrichting van het onderwijs. De leraar vervult hierin een sleutelrol door de voorwaarden te scheppen om het uiteindelijke doel van het inzichtelijk gebruik van de rekenmachine te bereiken. Het gaat erom dat de leerlingen het zelfvertrouwen verwerven om voor een passende rekenwijze te kiezen. Voorzichtige voortgang naar volledige integratie van de rekenmachine binnen de totale rekenleerlijn, waarin aan alle aspecten van hoofdrekenen, schattend rekenen, kolomsgewijs rekenen en cijferen recht gedaan wordt, is van cruciaal belang. Hiervoor zijn korte, regelmatig terugkerende interactieve groepslessen met rekenmachine(dicties, onderzoeksmatige activiteiten en (eenvoudige) toepassingen, de aangewezen middelen. Aan het leren organiseren van berekeningen in complexere toepassingen dient daarbij aparte aandacht besteed te worden.

Kwalitatieve toetsing van dit hooggestelde onderwijsdoel kan plaatsvinden door observatie en bespreking van het rekengedrag van de individuele leerling. Hierbij moet vooral gedacht worden aan opgaven waarbij de rekenmachine niet helpt en zelfs contraproductief is. Dergelijke opgaven bieden aangrijpingspunten om te constateren of leerlingen niet-inzichtelijk te werk gaan:

wie de tafels van vermenigvuldiging beheerst en voor 60×70 de rekenmachine gebruikt, mist inzicht in de nulregel
wie $101 - 99$ machinaal wil berekenen, mist het elementaire inzicht in de ordening van de telrij

In de opgave over de supporters kwamen alle genoemde aspecten van het inzicht aan bod. Kernvraag is echter: *was het nodig de rekenmachine in te zetten?* Dit is eigenlijk het hoofddoel van het leren rekenen met de machine. Het gaat om het ontwikkelen van een goede attitude.

wie meent dat het berekenen van de rest van de deling $607 : 101$ direct met de traditionele machine gevonden kan worden, mist inzicht in het positief systeem en is zich niet bewust van de beperkingen van het rekenapparaat
wie de tijdsduur tussen 8.45 uur en 10.20 uur met een rekenmachine wil berekenen, bezit nog niet de goede attitude ten opzichte van het inzetten van rekenmachine.

Voor alles gaat het erom dat men zich bij een probleem eerst de structuur van de opgave voorstelt. Inzichtelijk handelen betekent dus voor alles: eerst denken en dan pas doen. Anders gezegd: de beste rekenmachine zit in je hoofd.

Tot slot

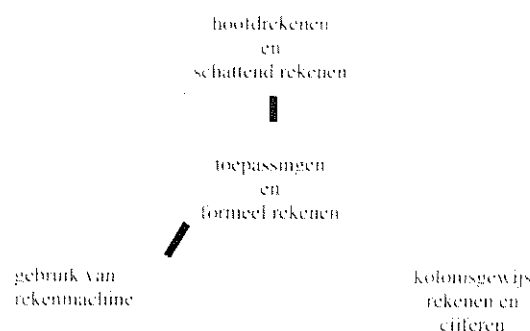
Over de betekenis van rekenen als schoolvak wordt in de maatschappij van vandaag vaak (te) makkelijk geoordeeld. Dat er tegenwoordig computers en rekenmachines bestaan,

kan bij oppervlakkige beschouwing het idee doen postvatten dat deze technologische aanwinsten in het rekenonderwijs veel problemen kunnen oplossen.



Natuurlijk zijn computer en rekenmachine maatschappelijk volledig geaccepteerd. Van niemand wordt nog verwacht dat men grote delingen kan uitvoeren. In winkels doet de computerkassa het vervelende rekenwerk. Maar hoe vaak gebeurt het niet dat er achteraf even handmatig gecorrigeerd moet worden? Dan gaat het meestal om een eenvoudige optelling, aftrekking, vermenigvuldiging of schatting. Dit betekent dat we niet zonder een aantal basale vaardigheden kunnen. Ook in het beroepsleven blijft rekenen een essentiële plaats behouden, echter niet in de zin van het traditionele cijferen. Het is deze *praktische waarde* van het rekenonderwijs, waartoe naast hoofdrekenen en schattend rekenen ook het gebruik van de rekenmachine hoort, die een onveranderlijk argument voor het belang ervan blijft. Een andere belangrijke motivering is gelegen in de zogenoemde *voorbereidende waarde*. Als voorbereiding op het voortgezet onderwijs is een goede beheersing van de basale rekenvaardigheden een absolute voorwaarde. De leerlingen komen in de problemen bij wiskunde, maar vooral bij natuur- en scheikunde, aardrijkskunde en economie, als er onvoldoende beheersing van het rekenen bestaat. Vooral in die vakken heeft de rekenmachine een belangrijke plaats, omdat het daar juist om toepassingen en inzichtelijk gebruik gaat. In de brugklassen zal eveneens verdere aandacht aan het rekenen besteed moeten worden met het oog op consolidering van de basisvaardigheden en verstandig gebruik van de rekenmachine. Ten slotte gaat van inzichtelijk rekenonderwijs een zekere *vormende waarde* uit. De bedoeling is immers dat zich bij de leerlingen een kritische attitude zal ontwikkelen in het omgaan met getalsmatige gegevens, hetgeen bij het gebruik van de rekenmachine een absolute voorwaarde is. In vroeger tijden, toen er nog geen rekenmachines waren, werd het onderwijs voornamelijk beheerst door het papieren cijferen. De hedendaagse elektronische apparatuur, waartoe ook de rekenmachine behoort, heeft een verschuiving van de genoemde waarden veroorzaakt. Pure snelheid en maximale accuratesse in het cijferen kunnen eenvoudig overgenomen worden door de rekenmachine. De praktische waarde van het rekenen wordt nu vooral bepaald door het organiseren van de rekenprocedures en door hoofdrekenen en schattend rekenen.

Dit betekent dus dat er in het rekenen op de basisschool vanaf groep 7 andere accenten gelegd zullen moeten worden, zoals uit het onderstaande schema duidelijk moge worden.

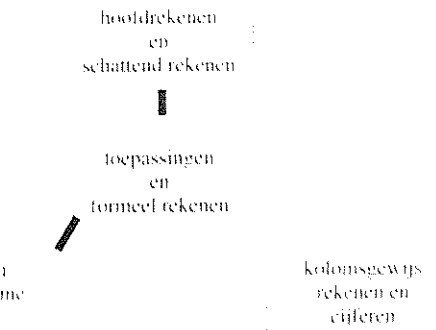


Het hoofdrekenen en schattend rekenen, maar ook het gebruik van de rekenmachine, zijn voor de toepassingen en het formele rekenen van het allereerste belang. Ofschoon alle rekenvormen met elkaar samenhangen, heeft het gebruik van de rekenmachine met name een betekenis bij het schattend rekenen. De belangrijkste boodschap van het schema is echter dat het pure cijferen een ondergeschikte rol behoudt in het onderwijsprogramma. Het onderwijs staat voor de uitdagende opgave om het routinematige cijferen terug te dringen. Dat kan door het hoofdrekenen en schattend rekenen een prominentere plaats toe te kennen, het cijferen als gestileerd hoofdrekenen te onderwijzen en... door de implementatie van de rekenmachine te bevorderen. De historie heeft geleerd dat het invoeren van nieuwe rekenwijzen vaak moeizaam verloopt. Niet zelden zijn het maatschappelijke argumenten geweest die de doorslag hebben gegeven voor een innovatieve doorbraak in het onderwijs. Er dienen in onderwijstechnische zin nog allerlei verbeteringen aan de huidige eenvoudige rekenmachines aangebracht te worden, zoals de ontwikkeling van een eenvoudige venstermachine, waarbij de opgave in het venster verschijnt. Nader didactisch onderzoek op dit gebied is nog nodig. Vooralsnog zijn echter de thans ter beschikking staande traditionele machines en de vigerende didactiek ruim voldoende om de 21^e eeuw met nieuwe rekenkracht in te gaan.

De president staart Shuman dat denkt. Want wie weet hoe Brant lachte welwi excellentie. Het se menselijke wezens rekenmachines uit betere rekenmacht 'Ja, ja. Ga door.' 'Het was Aubs hol terwijl hij daarmee ontdekking dat het bootsen. De vernik anders dan een mi 'Verbazingwekker Het congreslid knu over deze kwestie overheid zich te g onderhouden. Als overneemt, komt v vredesdoelinden hebben. Dat kan d 'Juist,' zei de pres zitten. Ik moet hik vermenigvuldigen begrijp.



dus dat er in het rekenen op de basisschool 7 andere accenten gelegd zullen moeten
Is uit het onderstaande schema duidelijk
n.



kenen en schattend rekenen, maar ook het
de rekenmachine, zijn voor de toepassingen en
rekenen van het allereerste belang. Ofschoon
men met elkaar samenhangen, heeft het
de rekenmachine niet name een betekenis bij
l rekenen. De belangrijkste hoofdschap van het
lter dat het pure cijferen een ondergeschikte rol
et onderwijsprogramma. Het onderwijs staat
igende opgave om het routinematige cijferen
gen. Dat kan door het hoofdrekenen en
kenen een prominentere plaats toe te kennen.
ds gestileerd hoofdrekenen te onderwijzen en...
lementatie van de rekenmachine te
De historie heeft geleerd dat het invoeren van
nwijzen vaak moeizaam verloopt. Niet zelden
tschappelijke argumenten geweest die de
ben gegeven voor een innovatieve doorbraak
vijs. Er dienen in onderwijstechnische zin nog
eteringen aan de huidige eenvoudige
es aangebracht te worden, zoals de
g van een eenvoudige venstermachine, waarbij
het venster verschijnt. Nader didactisch
p dit gebied is nog nodig. Vooralsnog zijn
ms ter beschikking staande traditionele
de vigerende didactiek ruim voldoende om de
et nieuwe rekenkracht in te gaan.

De president staarde in gedachten verzonken voor zich uit. Hij zei: "Als Shuman dat denkt, ben ik geneigd hem te geloven – in theorie temminste. Want wie weet hoe een rekenmachine in de praktijk werkt?"
Brant lachte welwillend. "Eerlijk gezegd heb ik me hetzelfde afgevraagd, excellentie. Het schijnt dat rekenmachines vroeger rechtstreeks door menselijke wezens ontworpen werden. Dat waren natuurlijk eenvoudige rekenmachines uit de tijd dat er nog geen rekenmachines bestonden om betere rekenmachines mee te ontwerpen."
"Ja, ja, Ga door."
"Het was Aubs hobby om die onderwetse rekenmachines te reconstrueren en terwijl hij daarmee bezig was en hun werking bestudeerde, kwam hij tot de ontdekking dat het mogelijk was om de principes waarop ze berustten na te bootsen. De vernieuwingsvuldiging die ik u zojuist heb voorgedaan is niets anders dan een imitatie van het werk van een rekenmachine."
"Verbazingwekkend!"
Het congreslid knikte beleefd. "Staat u mij toe, excellentie... Hoe meer we over deze kwestie te weten komen, des te minder inspanning hoeft de overheid zich te getroosten om rekenmachines te produceren en te onderhouden. Als de menselijke geest het werk van de rekenmachines overneemt, komt er een groter gedeelte van onze energie voor vredesdoeleinden vrij en zal de gewone man minder van de oorlog te lijden hebben. Dat kan de regeringspartij natuurlijk alleen maar ten goede komen."
"Juist," zei de president. "Ik zie waar u heen wilt. Ga zitten, congreslid, ga zitten. Ik moet hier even rustig over nadenken. Laat u me intussen dat vernieuwingsvuldigen nog eens zien. Misschien dat ik er dan wat meer van begrijp."

Uit: *Een robot droomt* van I. Asimov

Onderwijskader

Inleiding

In de voorafgaande hoofdstukken zijn de tussendoelen beschreven voor hoofdrekenen, kolomsgewijs rekenen en cijferen, schattend rekenen en het gebruik van de rekenmachine. Tevens is in het hoofdstuk 'Getallen en getalrelaties' ingegaan op de vraag hoe getallen zich manifesteren aan kinderen en hoe daarop in het onderwijs kan worden ingespeeld.

Tussendoelen mogen niet geïsoleerd worden opgevat. Vandaar ook dat ze zijn ingebed in een leerlijn. Aan de tussendoelen zijn beschrijvingen van onderwijssituaties verbonden waarmee is verhelderd op grond van welke didactiek, welke materialen en interacties de tussendoelen bereikt kunnen worden. Of deze bereikt worden bereikt, is afhankelijk van de kwaliteit van het onderwijs.

Minstens zo belangrijk is dat de tussendoelen als zodanig tegen de achtergrond van het algemene kerndoel van rekenen-wiskunde moeten worden gezien.¹

Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat de leerlingen:

verbindingen kunnen leggen tussen het onderwijs in rekenen-wiskunde en hun dagelijkse leefwereld

basiskaarigheden verwerven, eenvoudige wiskunde taal begrijpen en toepassen in praktische situaties, reflecteren op eigen wiskundige activiteiten en resultaten daarvan op juistheid controleren, eenvoudige verbanden, regels, patronen en structuren opsporen, onderzoek- en redeneerstrategieën in eigen woorden beschrijven en gebruiken.

In het volgende wordt eerst een typering gegeven van interactief, groepsgericht onderwijs als een onderwijskader dat past bij realistisch reken-wiskundeonderwijs en dat als een voorwaarde kan worden beschouwd om de tussendoelen en kerndoelen te bereiken. Voorts vindt een beschrijving plaats van de didactische drieslag die binnen dit onderwijskader voortdurend zichtbaar is: de gerichtheid op oefenen, toepassen en probleemoplossen. De rode draad van deze beschrijving bestaat uit opgaven die vooral op het niveau van de leraar zelf zijn afgestemd. Hierdoor kan de kern van rekenen-wiskunde nog eens aan den lijve worden ondervonden.

Het hoofdstuk eindigt met een samenvatting van het boek aan de hand van het 'EAL'-symbool.

Algemeen onderwijskader Interactief, groepsgericht onderwijs

Inleiding

In de voorafgaande hoofdstukken is een schets gegeven van het onderwijsleertraject dat leerlingen in de bovenbouw van de basisschool voor het vak rekenen-wiskunde in grote lijnen doorlopen. Daarbij zijn tussendoelen geformuleerd die voor het overgrote deel van de leerlingen als richtinggevend worden beschouwd.

Ze worden als mijlpalen gezien waar de leraar samen met de kinderen op kan afkoersen. Deze tussendoelen zijn ingebed in leerlijnen die opgevat worden als leerprocessen zoals die op langere termijn kunnen verlopen. In de leerlijnbeschrijvingen is bovendien aangegeven hoe het onderwijs aan het bereiken van die tussendoelen bijdraagt.



Er is beschreven welke concrete leeractiviteiten, welk soort oefeningen, welke contexten en modelsituaties belangrijk zijn voor het bereiken van de geformuleerde tussendoelen. Dit geheel is steeds samengevat in de aan de tussendoelen gekoppelde onderwijskaders. Kenmerkend voor het beschreven onderwijs is het interactieve, groepsgerichte karakter. Dit is behalve in de onderwijskaders ook herkenbaar in de typering van de kernactiviteiten die in de leerlijnbeschrijvingen zijn opgenomen en in de videofragmenten die bedoeld zijn als illustraties van de bijbehorende didactiek. Ook uit het voorbeeld dat straks volgt, komt duidelijk naar voren dat TAL uitgaat van een interactieve, groepsgerichte didactiek. Deze vormt in feite een voorwaarde om de tussendoelen te kunnen bereiken. Vandaar ook dat er in dit hoofdstuk nog een korte algemene beschouwing aan wordt gewijd. Typerend voor deze didactiek is dat de kinderen als gevolg van gezamenlijk overleg, hun eigen werkwijze maar ook die van anderen beter leren doorgronden en mede daardoor op een hoger niveau kunnen komen. Een belangrijk voordeel van interactief onderwijs is bovendien dat de taal wordt gestimuleerd die verbonden is met het samen bespreken van problemen. De ontwikkeling van het mathematisch denken steunt voor een groot deel op deze taalontwikkeling.

Onderwijsgeschiedenis

Zoals bekend was het onderwijs heel lang, tot ongeveer 1800, voornamelijk individueel ingericht. Die individuele organisatie werd wel getypeerd als *hoofdelijk onderwijs*. Elke leerling kreeg in principe aparte instructie van de leraar en elke leerling volgde dus zijn eigen leerweg. Die instructie was voornamelijk gericht op het leren hanteren van de standaardregels voor cijferen. De leraar hoefde in feite dan ook niet zoveel uit te leggen, hij (vrouwelijke leraren waren er nog niet) moest vooral controleren of de procedures door de leerlingen gememoriseerd waren en juist werden gebruikt. Dat is een stuk eenvoudiger dan nagaan of de geleerde handelwijzen ook echt worden begrepen. Toch kregen de leraren het niet voor elkaar om elke leerling voldoende aandacht te geven, zeker niet in klassen van soms wel honderd leerlingen.

Vandaar dat in de 19^e eeuw, als reactie op het hoofdelijk onderwijs, het klassikale onderwijssysteem steeds populairder werd. Als voordeel werd ervaren dat alle leerlingen de benodigde instructie van de leraar kregen. Deze hield ook beter overzicht op de vorderingen van de klas en op wat er wel en niet was behandeld. Met deze onmisbaar waren uiteraard de inhoud van het rekenonderwijs en de didactiek niet veranderd. Bovendien moest iedereen dezelfde leerstof leren, in vrijwel hetzelfde tempo en op hetzelfde niveau. Er was sprake van *frontaal, klassikaal onderwijs*.

Het is daarom te begrijpen dat in het begin van de 20^e eeuw weer aandacht werd gevraagd voor het individuele kind, wat geleid heeft tot het oprichten van zogenoemde (traditionele) vernieuwingscholen, scholen die 'vom Kinde aus' wilden werken. In een aantal van deze scholen is voor een systeem van individueel onderwijs gekozen, maar de uitwerking in de praktijk van dat systeem kan per schooltype weer erg verschillen.

Het klassikale systeem verdween daarmee niet van het toneel, integendeel, in het overgrote deel van de basisscholen is altijd een – klassieke dan wel een meer flexibele – vorm van klassikaal onderwijs blijven bestaan.

Nieuwe didactiek

Sinds de jaren zeventig is in het reken-wiskundeonderwijs een nieuw didactisch systeem ontstaan, dat getypeerd kan worden als *interactief, groepsgericht*. In interactief reken-wiskundeonderwijs wordt ervan uitgegaan dat het leren van en bezig zijn met rekenen-wiskunde een menselijke activiteit is, een activiteit die niet louter uit boekjes wordt geleerd, maar wortelt in het alledaagse sociale leven van mensen. Freudenthal heeft het rekenen-wiskunde leren van kinderen treffend getypeerd als 'common sense', het leren met gezond verstand op basis van alledaagse en vertrouwde ervaringen.² In realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt bovendien de gemeenschappelijke context benadrukt waarin rekenen-wiskunde wordt geleerd. Ook door Freudenthal werd al gewezen op het belang van taal en communicatie voor het leren van rekenen-wiskunde: dit leren de kinderen samen.

In veel opzichten zijn de kinderen bijvoorbeeld in belangstelling, sociaal ervaring. Als gevolg daarvan zullen aanpakken en oplossingen komen, niveaus aan het gezamenlijke leerproces. Daardoor doen zich steeds natuurlijk om onder leiding van de leraar over en denkwegen te overleggen. De kinderen zullen zelf mee. Op basis van dit van de leraar kunnen kinderen op handelen en denken geraken.

Interactief reken-wiskundeonderwijs

In de realistische didactiek wordt gehecht dat leerlingen hun eigen ideeën mogen volgen, althans indien die ideeën bieden met het oog op het verdere het echter belangrijk dat die werkwijze discussie zijn. Het beoogde effect is dat niveauverhoging wordt gestimuleerd. Het onderwijskader waarin dit model getypeerd als interactief, groepsgericht.

Voor de praktijk van het onderwijs onderscheid te maken tussen verticale interactie.

De *verticale interactie* heeft betrekking tussen leraar en leerlingen. Deze plaatsvinden:

- tussen de leraar en een individu
- tussen de leraar en een groepje – kan geleid op niveau en leeftijd (samenstelling zijn)
- tussen de leraar en de hele groep. Het begrip *horizontale interactie* is samenwerken en onderling overleg klein groepje (al dan niet heterogeen). In beide gevallen vindt de discussie leiding van de leraar plaats. Het begrip interactie dekt dus een onderwijsactiviteiten.



de 19^e eeuw, als reactie op het hoofdelijk klassikale onderwijssysteem steeds verd. Als voordeel werd ervaren dat alle leerlingen de nodige instructie van de leraar kregen, dat er beter overzicht op de vorderingen van de leerlingen wel en niet was behandeld. Met deze voordelen uiteraard de inhoud van het onderwijs en de didactiek niet veranderd. Bovendien bleef de zelfde leerstof leren, in vrijwel alle klassen op hetzelfde niveau. Er was sprake van *klassikaal onderwijs*.

Men begon te begrijpen dat in het begin van de 20^e eeuw aandacht werd gevraagd voor het individuele leerproces. Dit heeft tot het oprichten van zogenaamde vernieuwingscholen, scholen die 'vrij' konden werken. In een aantal van deze scholen werd een steem van individueel onderwijs gekozen. Het bleek in de praktijk van dat systeem kan per school erg verschillen.

Deze systemen verdween daarmee niet van het onderwijsveld, in het overgrote deel van de wereld is het altijd een - klassieke dan wel een meer - variant van klassikaal onderwijs blijven bestaan.

Interactief

In de jaren zeventig is in het reken-wiskundeonderwijs een interactief systeem ontstaan, dat getypeerd kan worden als *interactief, groepsgericht*. In interactief reken-wiskundeonderwijs wordt ervan uitgegaan dat het leren een sociaal proces is. Het leren met rekenen-wiskunde een menselijke activiteit die niet louter uit boekjes wordt geleerd, maar ook in het alledaagse sociale leven van de leerlingen plaats heeft. Het rekenen-wiskunde leren van de leerlingen wordt getypeerd als 'common sense', het leren wordt op basis van alledaagse en vertrouwde situaties. In realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt de gemeenschappelijke context benadrukt. Het reken-wiskunde wordt geleerd. Ook door de leerlingen werd al gewezen op het belang van taal en context voor het leren van rekenen-wiskunde: dit wordt benadrukt.

In veel opzichten zijn de kinderen echter verschillend, bijvoorbeeld in belangstelling, sociale achtergrond en ervaring. Als gevolg daarvan zullen ze - met diverse aanpakken en oplossingen komen, en op uiteenlopende niveaus aan het gezamenlijke leerproces deelnemen. Daardoor doen zich steeds natuurlijke aanleidingen voor om onder leiding van de leraar over de diverse aanpakken en denkwegen te overleggen. De kinderen komen er immers zelf mee. Op basis van dit overleg en via uitleg van de leraar kunnen kinderen op een hoger niveau van handelen en denken geraken.

Interactief reken-wiskundeonderwijs – een voorbeeld

In de realistische didactiek wordt er veel waarde aan gehecht dat leerlingen hun eigen individuele werkwijzen mogen volgen, althans indien die aanpakken perspectief bieden met het oog op het verdere leren. Tegelijkertijd is het echter belangrijk dat die werkwijzen onderwerp van discussie zijn. Het beoogde effect van zo'n bespreking is dat niveauverhoging wordt gestimuleerd.

Het onderwijskader waarin dit mogelijk is, kan worden getypeerd als interactief, groepsgericht onderwijs.

Voor de praktijk van het onderwijs is het belangrijk om onderscheid te maken tussen verticale en horizontale interactie.

De *verticale interactie* heeft betrekking op de interactie tussen leraar en leerling(en). Deze kan op drie manieren plaatsvinden:

- tussen de leraar en één individuele leerling
- tussen de leraar en een groepje leerlingen (dat groepje kan gelet op niveau en leeftijd heterogeen van samenstelling zijn)
- tussen de leraar en de hele groep.

Het begrip *horizontale interactie* houdt in dat de kinderen samenwerken en onderling overleggen. Dit kan in een klein groepje (al dan niet heterogeen) of met de hele klas. In beide gevallen vindt de discussie in principe onder leiding van de leraar plaats.

Het begrip interactie dekt dus een brede waaier van onderwijsactiviteiten.

Hieronder volgt, als voorbeeld van interactief, groepsgericht onderwijs, een opgave die werd voorgelegd aan leerlingen van groep 7. De leerlingen gingen na een korte voorbespreking individueel en zelfstandig aan de slag. Daarna mochten ze hun oplossingsmanier toelichten en werd er onder leiding van de leraar over de verschillende werkwijzen gesproken. Dat leverde heel wat discussie op, vooral omdat de leerlingen elkaar confronteerden met allerlei verschillende werkwijzen voor een en hetzelfde probleem.³

Het brodenprobleem

- Stel, je hebt €10,- en je wilt 4 broden kopen. Als een brood €1,98 kost, heb je dan genoeg aan die €10,-?

(1) $4 \times 1 = 4,00$ endan $4 \times 9 = 360$
endan $4 \times 8 = 320$

$$\begin{array}{r} 4,00 \\ 3,20 \\ \hline 7,80 \end{array}$$

(2) Ja $\begin{array}{r} 1,98 \\ 1,98 \\ 1,98 \\ 1,98+ \\ \hline 7,92 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1,98 \\ 1,98+ \\ \hline 3,96 \\ 3,96 \\ \hline 7,92 \end{array}$

(3) Ja $\begin{array}{r} 3 \\ 1,98 \\ \hline 4 \times \\ \hline 7,92 \end{array}$



(4)

ja

omdat 198 bijna 200 is en $4 \times 2 = 8$.
 $198 = \text{min}(4 \times 200) - 8 = \text{min}(800) - 8 = 792$

(5)

ja

WANT 198 is bijna
 8 gulden en
 $4 \times 2 \text{ gulden is } 8$

Zoals in het afgebeelde leerlingenwerk te zien is, worden er verschillende werkwijzen gevolgd.

Bij (1) wordt kolomsgewijs van links naar rechts gerekend: de honderden bij elkaar is 400. Dan de tientallen, dat is 360. Dan volgen de eenheden: 4 maal 8 is 32 (een foutje!).

Bij (2) is het werk van een leerling te zien die cijferend verdubbelt.

Bij (3) wordt cijferend vermenigvuldigd.

Bij (4) is een mooie hoofdrekenaanpak te zien.

En in (5) wordt een schattende oplossing weergegeven. Dan is er ook nog een leerling waarvan het werk niet is afgebeeld die met een totaal andere, originele oplossing kwam: voor €10,- kun je 4 broden van €2,50 kopen. Dus heb je aan €10,- meer dan genoeg als de broden €1,98 kosten. Een prachtige omgekeerde redenering en een eenvoudige berekening.

Knooppunt van leerlijnen

De leerlingen zijn in de nabespreking van oordeel dat de hoofdrekenaanpak (4) en het schattende rekenen (5) achteraf gezien de handigste rekenmanieren zijn.

Bij deze vaststelling laat de leraar het niet.

In een interactieve, samenvattende uiteenzetting in een volgende les laat de leraar zien hoe de verschillende rekenaanpakken samenhangen. Daarbij worden ook nog enkele nieuwe rekenvarianten opgevoerd.

Hiermee worden allereerst de geleidelijke overgangen van de verschillende vormen van kolomsgewijs rekenen en cijferen zichtbaar.

$\begin{array}{r} \cdot 198 \\ 198 \\ 198 \\ 198 \\ \hline 400 \\ 360 \\ 32 \\ \hline 792 \end{array}$	$\Rightarrow$	$\begin{array}{r} \cdot 198 \\ 198 \\ 198 \\ 198 \\ \hline 32 \\ 400 \\ \hline 792 \end{array}$	$\Rightarrow$	$\begin{array}{r} \cdot 198 \\ 198 \\ 198 \\ 198 \\ \hline 792 \end{array}$	$\cdot 4 \times 200 = 800$	$\cdot 4 \times 2 = 8$
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$		

Op deze wijze is voor de leerlingen de samenhang tussen de leerlijnen van kolomsgewijs en cijferend optellen en van kolomsgewijs en cijferend vermenigvuldigen te zien. Ook de relatie tussen de basish bewerkingen van optellen en vermenigvuldigen komt hierin tot uiting. Een dergelijke kaart van samenhangende standaard-rekenaanpakken wordt mede op aanwijzingen van de groep gemaakt. Daarna wordt tevens de hoofdrekenaanpak in de beschouwing betrokken. Deze aanpak blijkt sterk overeen te komen met de meest elementaire vormen van kolomsgewijs optellen en vermenigvuldigen. Alleen wordt 198 nu opgevat als $200 - 2$, en vervolgens wordt dit dan vier keer samengevoegd.

De schattende berekening gaat nog een stap verder - of eigenlijk een stap minder ver - door alleen het ronde 'bovengetal' in de berekening te betrekken. Kan bij de vraag 'Heb ik genoeg?' met een globale rekenwijze worden volstaan? Dit is de vraag die de leraar nog eens nadrukkelijk opwerpt en die in dit geval

natuurlijk vlot bevestigend wordt beantwoord. Het antwoord op de vraag is wat het antwoord plaats van een tientje maar €7,90 bij 2 ook zo schattend te werk kunnen zijn. Na een korte discussie vat de leraar het soort opgave van de getallen af en meer precies moet rekenen, en daaronder 'zomaar' gaan rekenen, maar eerst even rekenaanpak je zult kiezen, want dat is rekenwerk besparen, zoals we met elk

Hetzelfde brodenprobleem is ook in c besproken. Op videofragment 9 is te z verschillende werkwijzen van de kind en daarbij overzichtelijk op het bord t



Algemene typering

Op basis van de beschrijving van de 1 verschillende werkwijzen van de leer volgende meer algemene typering van groepsgericht reken-wiskundeonderw

De leerlingen construeren onder le hun eigen werkwijzen.

Verschillen in niveau zijn toegesta essentieel voor interactief onderwi De leerlingen worden met elkaars geconfronteerd. Daardoor ervaren werkwijzen mogelijk zijn en dat de doelmatiger zijn. Tevens worden z van de strategie die ze zelf hantere tussen de verschillende werkwijzen zijn dat, zoals gezegd, onder meer tussen kolomsgewijs optellen en ci vervolgens cijferend vermenigvult tussen hoofdrekenen en schattend De onderlinge uitwisseling van ide verschillende aanpakken, onder lei draagt ertoe bij dat leerlingen zich



natuurlijk vlot bevestigend wordt beantwoord. De vraag die daarop volgt, is wat het antwoord zou zijn als men in plaats van een tientje maar €7,90 bij zich had. Zou er dan ook zo schattend te werk kunnen zijn gegaan?

Na een korte discussie vat de leraar samen: "Het hangt bij zo'n soort opgave van de getallen af of je ongeveer of meer precies moet rekenen, en daarom moet je niet direct 'zomaar' gaan rekenen, maar eerst even nadenken welke rekenaanpak je zult kiezen, want dat kan je een hoop rekenwerk besparen, zoals we met elkaar hebben gezien."

Hetzelfde brodenprobleem is ook in een groep 6 besproken. Op videofragment 9 is te zien hoe de leraar de verschillende werkwijzen van de kinderen inventariseert en daarbij overzichtelijk op het bord meeschrijft.¹



Algemene typering

Op basis van de beschrijving van de les en de verschillende werkwijzen van de leerlingen, kan de volgende meer algemene typering van interactief, groepsggericht reken-wiskundeonderwijs worden gegeven.

- De leerlingen construeren onder leiding van de leraar hun eigen werkwijzen.
- Verschillen in niveau zijn toegestaan en zelfs essentieel voor interactief onderwijs.
- De leerlingen worden met elkaars werkwijzen geconfronteerd. Daardoor ervaren ze dat ook andere werkwijzen mogelijk zijn en dat deze misschien zelfs doelmatiger zijn. Tevens worden ze zich meer bewust van de strategie die ze zelf hanteren, en van de relatie tussen de verschillende werkwijzen. In dit voorbeeld zijn dat, zoals gezegd, onder meer de verbanden tussen kolomsgewijs optellen en cijferend optellen, en vervolgens cijferend vermenigvuldigen, alsmede die tussen hoofdrekenen en schattend rekenen.
- De onderlinge uitwisseling van ideeën over de verschillende aanpakken, onder leiding van de leraar, draagt ertoe bij dat leerlingen zich meer inzichtelijke

werkwijzen op een hoger niveau eigen maken. In het brodenprobleem gebeurde het dat de leerlingen zich realiseren dat een schatstrategie slim is en bovendien toereikend is om de gestelde vraag te beantwoorden. Ze worden zich bij dit soort problemen bewust van de voordelen van schattend rekenen ten opzichte van precies rekenen.

In realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt, zoals gezegd, grote waarde gehecht aan zowel de horizontale als de verticale interactie. Hierbij wordt aan de taal veel aandacht besteed. De aanpak van problemen en opgaven en het wiskundig denken steunt hier immers voor een belangrijk deel op. De kenze voor een didactisch onderwijskader, waarin de taal centraal staat, ligt dan ook voor de hand.

In een interactief systeem is bovendien ruimte voor zelfstandig leren en voor individuele werkvormen. Aan de hand van het brodenprobleem is geïllustreerd op welke wijze niveaudifferentiatie gerealiseerd kan worden.

Er wordt in principe uitgegaan van het leerstof- jaarklassensysteem en niet van een individualiserend systeem. Er is aandacht voor individuele kinderen en ruimte voor individualisering als didactische werkvorm. Dit betekent ten eerste dat de eigen informele werkwijzen van een individueel kind positief worden gewaardeerd. Ten tweede houdt dit in dat de leraar in de gaten houdt of er kinderen zijn die extra hulp nodig hebben, dan wel voorlopers die op hun niveau uitdagende leertaken aangeboden dienen te krijgen.

Er wordt zowel belang gehecht aan groepsgewijze activiteiten als aan zelfstandig werken. Er is dus geen sprake van een frontaal, klassikaal systeem, maar van flexibiliteit binnen het interactieve, groepsgerichte systeem.

Individueel leren en samen leren

Aan de hand van het brodenprobleem is zichtbaar gemaakt dat in realistisch reken-wiskundeonderwijs de individuele leerlingen aangesproken worden op hun eigen niveau en dat ze hun eigen denkproces mogen volgen.



Daarbij blijft het echter niet, want juist het gegeven dat die denkprocessen verschillen, is interessant om over te praten. Dat is wat in interactief onderwijs dan ook gebeurt. De leerlingen ervaren dat er andere – en wellicht meer efficiënte – werkwijzen zijn dan ze zelf volgden, waardoor de gelegenheid ontstaat om van andere leerlingen te leren. Om dat laatste te realiseren, moet de discussie door de leraar in goede banen worden geleid. Die moet ervoor zorgen dat niet steeds dezelfde leerlingen het woord krijgen, dat de juiste vragen worden gesteld, en vooral dat reflectie wordt uitgelokt. *Reflectie* wordt in de discussie opgeroepen doordat de kinderen zich beter bewust worden van hun manier van werken en als gevolg daarvan gaan anticiperen op het commentaar van anderen. Ze leren op den duur hun eigen denkprocessen en werkwijzen te bekijken door de bril van anderen. Men zou kunnen zeggen dat de externe dialoog die met anderen wordt gevoerd, overgaat in een interne dialoog. De interne dialoog voert een kind met zichzelf en dat wordt reflectie genoemd. Leren reflecteren is met andere woorden typerend voor de interactieve realistische didactiek en nauw verbonden met de algemene doelstellingen van het reken-wiskundeonderwijs. Interactief betekent niet dat iedereen – zoals in frontaal, klassikaal onderwijs het geval is – hetzelfde moet leren, maar dat er samen wordt geleerd. Met de term ‘individueel’ is in deze context niet bedoeld dat de leerling in ‘zijn eentje’ een individuele leerweg volgt, maar dat die leerling op eigen niveau aan de slag kan, om vervolgens kennis te nemen van andere oplossingsniveaus. Een bezwaar van te sterk individueel georganiseerd onderwijs wordt hiermee overwonnen, namelijk dat met name zwakkere leerlingen geïsoleerd raken van de groep en onvoldoende stimulans ervaren om een hoger niveau van aanpak en rekenvaardigheid te bereiken.

Varianten in interactief onderwijs

Onderwijzen op basis van een interactieve didactiek vraagt uiteraard vakmanschap van de leraar. Met interactief onderwijzen moet in de praktijk ervaring worden opgedaan. Er zullen meerdere varianten van deze didactische werkvorm in de praktijk voorkomen.

Zo moet de leraar bijvoorbeeld ervaren hoe de discussie met de leerlingen, maar ook tussen de leerlingen onderling, georganiseerd kan worden.

Het stellen van vragen, maar ook goed leren luisteren naar een vraag, is essentieel voor de interactie tussen leraar en leerling. Vragen stellen is weliswaar wezenlijk, maar voorkomen moet worden dat bij de leerlingen de neiging ontstaat op een standaardwijze op vragen te reageren. Dit kan bijvoorbeeld inhouden dat de kinderen de vragen niet opvatten als een aansporing om hun werkwijze nog eens goed te bekijken, maar als een middel van de leraar om te controleren of de leerling wel bij de les was. Bovendien krijgen de leerlingen snel door dat de leraar vragen stelt waar deze zelf het antwoord al op weet. En dat is het antwoord, zo denken de leerlingen, dat de leraar graag wil horen. De leerlingen doen daarom hun best het waarschijnlijk gewenste antwoord te geven. Het lijkt dan voor de leerlingen of de leraar niet erg is geïnteresseerd in hoe zij denken, of welke oplossingen ze hebben gevonden. Het gevolg is dat het vraag-en-antwoord-spel steeds meer volgens dit vaste patroon gaat verlopen: de leraar stelt de vraag, de leerling geeft het gewenste antwoord en de leraar evalueert dat antwoord (“Goed zo.”). De leraar kan echter ook vragen stellen waaruit echte interesse blijkt voor de denkwijzen van de leerlingen (“Vergelijk jouw manier van werken eens met die van Marian. Welke vind je dan makkelijker?”). Het met de kinderen ‘meeschrrijven’ als deze hun aanpakken verwoorden, kan hiertoe een belangrijke bijdrage leveren.

In de praktijk van het onderwijs komen vele varianten van interactief onderwijs voor. Mede afhankelijk van de fase van het leerproces en het doel van de les kan worden gekozen voor meer en minder gestuurde varianten. Bovendien is het makkelijker een gesprek te voeren met een kleine groep leerlingen (zeg vijftien) dan met een grote groep (van dertig). Met minder leerlingen in de groep kan de leraar vaker leerlingen het woord geven en beter overzien hoe een gesprek verloopt. Ook kunnen de leerlingen in een kleine groep beter op elkaar reageren.



Didactische drieslag

Het geschetste algemene onderwijskader bevat een didactische drieslag van het reken-wiskundeonderwijs die men in alle leerlijnen met bijbehorende specifieke onderwijskaders aantreft:

1. de cruciale rol van het gedurige oefenen
 2. de permanente gerichtheid op toepassen
 3. de voortdurende aandacht voor probleemoplossen.
- Deze didactische steunpunten dienen uiteraard, binnen het onderwijskader, tegen de achtergrond van de in het begin genoemde algemene doelstellingen te worden begrepen. In het volgende worden ze toegelicht aan de hand van enkele karakteristieke rekenopgaven.

Oefenen

Oefenen, wat houdt dat eigenlijk in?²⁵

Dat het inslijpen van de tafels tot het oefenen behoort, spreekt vanzelf. Maar als je bijvoorbeeld regelmatig rekenpuzzels, -raadsels en -problemen oplost, is dat dan ook oefenen?

Oefenen manifesteert zich in twee uiterste vormen: *inoefenen* en *beoefenen*. Hiertussen zijn ook verschillende overgangsvormen te onderscheiden.

Inoefenen heeft betrekking op het *reproductieve oefenen* dat gericht is op het uit het hoofd leren van rekenfeiten zoals de tafels, en op het aanleren en inslijpen van de rekenhandelingen van standaardprocedures zoals het cijferen. Kortweg getypeerd houdt deze vorm van oefenen in het automatiseren en memoriseren.

Beoefenen omvat het *productieve oefenen* dat verbonden is met het oplossen van specifieke problemen. Hierbij gebeurt het oefenen op een meer indirecte wijze. Deze vorm van oefenen kan kortweg worden aangeduid met probleemoplossend oefenen. Daartoe behoort ook het maken van eigen producties. Een mooi voorbeeld daarvan is het ontwerpen van een rekenboek voor andere kinderen. Tussen deze uiterste vormen staat onder andere het oefenen van elementair flexibel hoofdrekenen.

Aan de hand van één voorbeeld wordt in het volgende duidelijk gemaakt hoe reproductief oefenen via een kleine omzetting in productief oefenen of in een tussenvorm kan veranderen.

1. Reken uit:

$$\begin{array}{r} 37 \\ 36 : \end{array} \quad \begin{array}{r} 34 \\ 38 : \end{array} \quad \begin{array}{r} 39 \\ 32 : \end{array}$$

2. Reken uit:

$$\begin{array}{r} 37 \\ 36 : \end{array}$$

Bepaal daarna uit het hoofd de opgaven

$$37 \times 37 \text{ en } 38 \times 37$$

3. Ik vermenigvuldig twee getallen met elkaar.

Het ene getal is een groter dan het andere.

De uitkomst is 1406.

Welke twee getallen heb ik gebruikt?

4. Bedenk zelf ook eens zo'n puzzel voor een klasgenoot. Je kunt de getallen ook even groot nemen of twee laten verschillen of ...
Laat je klasgenoot maar eens pittig puzzelen.

Opgave 1 staat in het kader van het reproductieve oefenen, ervan uitgaande dat het kolomsgewijs of cijferend vermenigvuldigen inzichtelijk is geleerd en dat dit nu verder volgens een bepaald oefenritme wordt geautomatiseerd.

Via opgave 2 worden het automatiseren en het flexibiliseren verzorgd en onderhouden. Cijferen en hoofdrekenen zijn hier met elkaar verbonden.

Opgave 3 past bij het productieve oefenen. Een groot deel van de kinderen uit groep 8 die deze opgave kreeg voorggelegd, maakte – nadat ze eerst enkele andere vermenigvuldigingen afschattend hadden geprobeerd – zelf een opgaven-reeks zoals bij opgave 1.



Dit is dus duidelijk een kwestie van indirect oefenen binnen het kader van probleemoplossen. Opgave 4 behoort ook tot deze categorie en wordt aangeduid als "eigen productie".

Oefenen dient op alle niveaus van het rekenen te worden betrokken en richt zich op kennis, vaardigheden en inzichten. Het is belangrijk om hierbij een juiste variatie en balans te vinden. De basale vaardigheden binnen de onderscheiden leerlijnen nemen daarbij een speciale plaats in. Zij dienen dan ook gedurig geoefend te worden. Met name korte, flitsende oefensessies aan het begin van (vrijwel) iedere rekenles zijn daartoe geëigend. Meestal zullen dat mondelinge onderwijsactiviteiten zijn, bestemd voor de groep als geheel. De leraar heeft oog voor individuele verschillen en stemt daarop de vragen aan de leerlingen af.

Toe passen

In de door TAL beschreven doelen voor het rekenen met hele getallen komt veelvuldig de zinsnede voor: "... de leerlingen zijn in staat om ... toe te passen in contextsituaties." Rekenvaardigheden worden mede geleerd om ze te kunnen toepassen in praktische situaties van het leven van alledag en in de beroepsweld. Als hier over toepassen wordt gesproken, gaat het met name om toepassingen buiten het formele rekensysteem. Het is een van de didactische uitgangspunten van realistisch rekenonderwijs dat de toepasbaarheid wordt bevorderd indien toepassingsproblemen niet uitsluitend als 'toetje' aan het eind van de leergang fungeren, maar ook al in de 'eerste gang' van het leren van de rekenvaardigheden worden betrokken. Vandaar dat de TAL-leerlijnen van meet af aan doortrokken zijn met elementaire contextopgaven. Deze vormen mede de concrete grondslag van het rekenen en geven de betreffende rekenhandelingen betekenis. Dit kan daarom worden gezien als de *verticale modelfunctie* van contextproblemen. Zulke opgaven geven de kinderen houvast en helpen ze om het rekenen verder te schematiseren, te verkorten en te formaliseren, dus om hogerop te komen binnen het rekensysteem.

Met name benoemde getallen zoals lengtematen en geld fungeren in dergelijke elementaire contextopgaven als model, zoals in de leerlijnbeschrijvingen valt te constateren.

Er is echter ook nog een *horizontale verbinding* tussen rekenen en realiteit; kinderen moeten de verworven rekenvaardigheid op allerlei praktische problemen kunnen toepassen. Dit is uiteraard niet zo moeilijk indien die toepassingen verwant zijn met de elementaire contextproblemen die als concrete oriënteringsbasis dienen om de betreffende rekenvaardigheden te leren. Er zijn echter toepassingsituaties die daarvan sterk afwijken. Als leerlingen bijvoorbeeld "erf halen" als aftrekken leren duiden, zal het niet altijd eenvoudig zijn om het "verschil" ook met aftrekken te leren associëren. Bovendien kan in bepaalde situaties het "verschil" ook nog betrekkelijk verscholen zitten in de context.

Zo is de volgende opgave nog betrekkelijk eenvoudig.

- Hanneke is 61 jaar. Hoe oud was ze 37 jaar geleden?

Veel moeilijker is weer de volgende opgave.

- Hanneke is 61 jaar. Ine is 37 jaar. Hoe oud was Hanneke toen Ine werd geboren?

Ronduit complex wordt de onderstaande vraag.

- Staat het antwoord "24 jaar" op de laatste vraag vast?

En ook de volgende vraag is moeilijk.

- Wat is het geboortear van Hanneke en van Ine?

Allemaal aftrekopgaven, maar sterk variërend in moeilijkheidsgraad vanwege:

- de mathematische structuur van de context; aftrekken als weghalen of als verschil bepalen
- de complexiteit van de context waarin de aftrekking is ingebed.

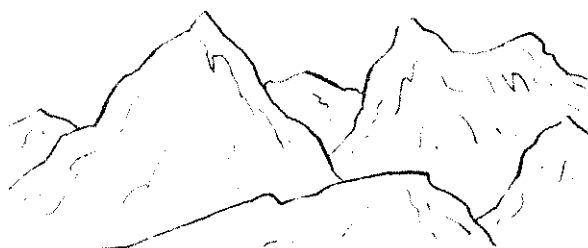


Operaties kunnen zich in contextsituaties in verschillende hoedanigheden voordoen:

bij optellen gaat het in elementaire contextopgaven om 'erbij' en 'samen' aftrekken kan – zoals hiervoor beschreven – verschijnen als 'eraf' en 'verschil' vermenigvuldigen doet zich voor als 'herhaald optellen', 'combineren' en in elementaire verhoudingsproblemen delen manifesteert zich als 'opdelen' en 'verdelen' en eveneens in verhoudingsopgaven; daarnaast worden delingsproblemen vaak via aanvullend op-vermenigvuldigen opgelost.

De contexten waarin zich deze verschijningsvormen van bewerkingen voordoen, kunnen aanmerkelijk verschillen en daardoor het rekenen sterk beïnvloeden. Zelfs het betrekkelijk eenvoudige optellen kan daardoor bemoeilijkt worden.

- De hoogste bergtop op aarde is de Mount Everest. Zijn hoogte is 8848 meter boven de zeespiegel. Het laagste punt van de aardkorst ligt in de Stille Oceaan 11.034 meter onder de zeespiegel. Hoe groot is het verschil tussen het diepste en het hoogste punt op aarde?⁶



'Zeespiegel' is een lastige context. Soortgelijke problemen doen zich algemeen voor bij verschillen tussen getichte getallen (temperaturen boven en onder nul, tegoeden en schulden, afstanden op richtingwijzers ...). De vraag over 'verschil' refereert aan 'min', maar er moet worden opgeteld. Moeilijk!

Bij de andere operaties kunnen nog complexere situaties worden gecreëerd. Neem bijvoorbeeld het delen.

Zo kan in een contextopgave de uitkomst van $6394 : 12$ nogal sterk variëren:

532
533
532 rest 10
 $532\frac{5}{6}$
532,83
532,83333
500 ongeveer

...

Kunnen bij deze uitkomsten verhaaltjes worden bedacht? Om te beginnen geeft de leraar zelf een voorbeeld bij 'ongeveer 500'.

"Onze auto rijdt 1 op 12. Dus op een lange vakantiereis van zo'n 6000 kilometer zullen we ongeveer 500 liter benzine verbruiken."

Dan komt een leerling met een suggestie voor 532,83333.

"Ik heb $6394:12$ op een rekenmachine uitgerekend."

Een situatie bedenken bij 532,83 is niet zo moeilijk. De gedachte aan een geldecontext waarin een bedrag eerlijk moet worden verdeeld, ligt tamelijk voor de hand. Dit 'vertalen en verhalen' dient er vooral toe om zich de rekenhandelingen te realiseren en de toepasbaarheid van de rekenprocedures te verhogen.

Tot besluit een rekenvoorbeeld op het niveau van de leraar waarmee alle leerlijnen samenkomen:

getallen en getalrelaties
hoofdrekenen
kolomsgewijs rekenen en cijferen
schatten
het gebruik van de rekenmachine.



Pioneer-10 uit 1972 laat weer van zich horen

The Guardian
LONDON

De op 2 maart 1972 gelanceerde Pioneer-10 blijkt met een snelheid van ruim veertigduizend kilometer per uur af te stevenen op de ster Aldebaran, 71 lichtjaren verwijderd van de aarde.

De ruimteverkenner wordt in leven gehouden door een plutonium-accu met een vermogen van 8 watt, vergelijkbaar met dat van een nachtlampje in een kinderkamer.

De Pioneer-10 is uitgerust met een foto van een blote man en een blote vrouw, een plaatje dat eventueel buitenaards leven moet informeren.

(Volkskrant, 6/3/2000)

> Wanneer zal de Pioneer ongeveer bij de ster Aldebaran aankomen?

Om deze Pioneer-vraag op de Pabo of in de nascholing te kunnen oppakken, dient men allereerst te weten wat een lichtjaar is. Welnu, een lichtjaar is geen tijdmaat maar een afstandmaat. Het is de afstand die het licht in één jaar overbrugt. Per seconde legt licht ongeveer 300.000 kilometer af. Ook dat moet je weten of opzoeken. Deze afstand is zo enorm dat je je er nauwelijks iets bij kunt voorstellen. Dat geldt misschien eveneens voor de 40.000 kilometer die de Pioneer per uur aflegt. Dit neemt niet weg dat er ook mensen zijn die dit getal direct associëren met de omtrek van de aarde: ongeveer ieder uur vliegt de Pioneer over.

Met al deze kennis kan het Pioneer-probleem worden aangepakt. Op het eerste gezicht lijkt er heel wat gerekend te moeten worden:

aantal seconden per jaar keer 300.000 kilometer keer 71
aantal uren per jaar keer 40.000 kilometer
en dan ...

Bij dit rekenen kan men cijfers of de rekenmachine inzetten, maar zelfs bij het laatste moet er nog heel wat gerekend en geredeneerd worden, want de uitkomsten passen niet in alle gevallen op de rekenmachine. Toch kan het probleem, zo blijkt uit de nabespreking, betrekkelijk eenvoudig worden opgelost:

zet de snelheid per uur van de Pioneer om in kilometer per seconde
via $40.000 \text{ km} : 3600$ kan dan worden berekend dat de snelheid van de Pioneer ruim 10 kilometer per seconde is dat is ongeveer 30.000 keer zo langzaam als het licht
→ aangezien het licht 71 jaar nodig heeft om de afstand van de aarde tot de ster Aldebaran te overbruggen, doet de Pioneer er 30.000 keer zo lang over
dit betekent dat de Pioneer ongeveer 2 miljoen jaar nodig heeft.

Uit dit voorbeeld blijkt nog eens dat je het maken van toepassingen eigenlijk alleen maar kunt leren door toepassingen te maken en de oplossingen daarvan met elkaar te bespreken om vervolgens de handigste aanpak te ontdekken. In het onderhavige voorbeeld ligt die bij het schattende rekenen, nadat eerst de snelheden onder dezelfde 'noemer' worden gebracht (per seconde). Achteraf bezien was dit een kwestie van één minuut rekenen, maar als je de lange weg via de afstanden 'per jaar' hebt gekozen, is dat een leerzaam voorbeeld geweest. Ook leerzaam is het om in te zien dat precies rekenen niet alleen omslachtig is, maar dat het hier ook niet zo goed past → zelfs niet als je (handig?) de rekenmachine inzet. Dat precies rekenen zijn beperkingen heeft, is ook al beschreven in het hoofdstuk 'Schattend rekenen'.



Een bezwaar dat men tegen deze opgave zou kunnen inbrengen is dat het toch wel een handicap is dat men zich bij deze grote getallen niets kan voorstellen. Welnu, deze opmerking richt de aandacht weer op het hoofdstuk 'Getallen en getalrelaties'. Het is namelijk heel goed mogelijk om een voorstelling te maken van deze getallen:

lees voor 71 lichtjaar de afstand van 71 kilometer,
 oftewel neem voor 1 lichtjaar 1 kilometer
 de afstand die de Pioneer per jaar aflegt is 30.000 keer
 zo klein
 dat is in zegg 30 jaar, sinds 1972, dus ongeveer 1 meter
 (30 km : 30.000)
 conclusie: de afstand die de Pioneer aflegt, is minuscule in
 verhouding tot die van het licht.

Dit was ook de manier van op-schaal-rekenen zoals die in het hoofdstuk over 'Getallen en getalrelaties' is beschreven. Duidelijk is dat bij toepassen dus niet alleen de rekenoperaties, maar ook de getallen en getalrelaties betrokken moeten worden. Overigens zijn rond het bericht over de Pioneer nog meer vragen te stellen:

Hoe lang zal die plutonium accu meegaan?
 Hoe lang is de halveringstijd van deze radio-actieve stof?
 Is het eigenlijk wel mogelijk om te zeggen dat de
 Pioneer 'afstevent' op een ster die zover verwijderd is?

Probleemoplossen

In het volgende worden de vaardigheden toegelicht die speciaal betrekking hebben op probleemoplossen en de reken-wiskundige attitude die daarvoor nodig is.⁷ Dit gebeurt met een serie opgaven over het opereren met 0 (nul). Dit is niet toevallig, want bij de voorgaande leerlijnbeschrijvingen is aan dit bijzondere 'hele' getal weinig aandacht besteed. Ook de daarmee samenhangende problematiek van het begrip oneindig kwam nog niet eerder aan bod. Vandaar de toespitsing van probleemoplossen op deze 'extremen' in het getaldomein van de hele getallen.

> Bereken de volgende opgaven en licht de uitkomst toe met een rekenverhaaltje.

$$0 + 1 =$$

$$1 + 0 =$$

$$0 \times 1 =$$

$$1 \times 0 =$$

$$0 : 1 =$$

$$1 : 0 =$$

Voorbeeld: $1 + 0 = 1$

"Ik heb 1 knikker en win er geen enkele bij, dan heb ik er aan het eind van het spel nog steeds 1."

Speciaal de vermenigvuldig- en deelopgaven kunnen aanleiding geven tot uitgebreide gedachtenwisselingen. Het concretiseren van dergelijke opgaven in rekenverhaaltjes blijkt nogal lastig. Veel leerlingen zijn van mening dat deze opgaven niet kunnen en dus geen antwoord hebben, ofwel dat het antwoord in alle gevallen 0 of 1 is.

Hoe het onderwijs over de problematiek van '0-1' kan verlopen, wordt aan de hand van de laatste opgave – de meest complexe – toegelicht.⁸

> Nicole heeft een rekenkundig probleem en vraagt via een brief iemand om raad. Probeer of je haar kunt helpen.

Ik heet Nicole, ben 11 jaar en zit in groep 8. In het rekenen vind ik iets onlogisch zitten. Namelijk dat de opgave $1 : 0$ geen oplossing heeft, ten minste niet in groep 8. Later leer je dat de uitkomst oneindig is, vertelde de leraar. Maar dat vind ik onlogisch. Ik denk dat $1 : 0 = 1$. Want als ik een taart heb en mensen uitnodig, en er komt niemand, dan hoeft de taart niet verdeeld te worden, dan blijft er 1 taart over. Wat vindt u daarvan? Graag zou ik antwoord op mijn vragen krijgen.

*Met vriendelijke groet,
 Nicole*



Hoe kun je als leraar Nicole nu helpen?

In feite is de kwestie voor haar een meerkeuze-vraag:

- (a) $1 : 0$ heeft geen oplossing
- (b) $1 : 0 = \infty$ (oneindig)
- (c) $1 : 0 = 1$

Welke keuze moet worden gemaakt? Motiveer het antwoord. Hoe kan dit aan Nicole uitgelegd worden? Beter nog, hoe kan Nicole geholpen worden om zelf het correcte antwoord te vinden?

Nicole concretiseert de opgave met de situatie van het taartverdelen: komt er niemand dan blijft de taart heel, dus $1 : 0 = 1$.

Delen concretiseren via eerlijk verdelen is op zich correct. De vraag is of haar redenering klopt. Een andere leerling kan hier tegenin brengen dat $1 : 1 = 1$. Want als er geen gasten komen, dan heb je de taart voor jezelf, en dan blijft deze ook in eerste instantie heel. Kloppen beide redeneringen, dan ontstaat de situatie dat $1 : 0 = 1$ en $1 : 1 = 1$.

Hebben beide leerlingen gelijk? Als dat zo zou zijn dan is dat een vreemde situatie. Wat zal een groep 8 hiervan vinden?

Dat $1 : 1 = 1$, daarover is iedereen het wel eens. Maar over Nicole's oplossing van $1 : 0 = 1$ bestaat minder eenstemmigheid.

Kan iemand die het met haar oneens is, overtuigend aantonen dat dit niet klopt?

Fred, één van de bollebozen, vult de redenering van Nicole aan en weerlegt daarmee tegelijkertijd haar slotsom:

"Nicole verdeelt eigenlijk niet eerlijk.

Bijvoorbeeld $1 : 2 = \frac{1}{2}$ betekent dat je verdeelt met 2'n tweeën en dan vraag je hoeveel ieder krijgt.

Wel, ieder krijgt in dat geval een halve taart.

Die vraag moet je ook bij $1 : 0$ stellen.

Aleen is dan de moeilijkheid dat er geen 'ieder' is, nult, niemand.

Dus kun je die vraag niet beantwoorden, wat bijvoorbeeld bij $1 : 1$ weer wel goed kan. Want die ene persoon krijgt dan 1 taart, dus $1 : 1 = 1$. Een goede aanvulling op de vraag is dus 'hoeveel krijgt ieder?'"

Met deze reactie wordt Nicole's redenering plus haar antwoord op losse schroeven gezet. Wat de uitkomst exact is, blijft echter ongewis. Er is geen 'ieder', er is niemand, dus kun je ook niet zeggen wat die 'niemand' krijgt. Nicole is hiermee nog niet echt geholpen.

Hoe nu verder?

Een 'gewone' som zonder uitkomst is ook gek.

Bekend is immers wel:

- $1 + 0 = 1$
- $1 - 0 = 1$
- $0 + 1 = 1$
- $0 - 1 = -1$ (kort)
- $0 \times 1 = 0$
- $1 \div 0 = 0$
- en zelfs $0 : 1 = 0$

Deze antwoorden blijken in een gesprek na enig groepsoverleg uit de bus te komen. Dus zou er ook iets over de uitkomst van $1 : 0$ gezegd moeten kunnen worden.

Ykie, ook al zo'n knapperd, heeft een ander idee.

Zij denkt bij delen niet zozeer aan eerlijk verdelen als wel aan opdelen. Bijvoorbeeld $18 : 3$ leest ze concreet als hoeveel keer een stuk van 3 m in 18 m past. Het antwoord is 6. In het geval van $1 : 0$ redeneert ze als volgt:

"Hoeveel keer past een stukje van 0 m in 1 m?

Nou dat past er ontelbaar vaak in. Ik kan namelijk altijd maar doorgaan. Het antwoord (c) van Nicole klopt dus niet, want het is niet 1 keer, maar ontelbaar keer meer. Daarom kies ik voor antwoord (b) $1 : 0$ is oneindig."

Heeft Ykie gelijk? Of met andere woorden, heeft de leraar gelijk die, zoals Nicole schrijft, zegt dat ze later zal leren dat $1 : 0 = \infty$?



Ellen heeft voor $1 : 0$ de staandeling gebruikt.

0 / 1A	
0	100x
1	
0	100x
...	

Zij vindt de uitkomst van Ykie, namelijk die van ∞ , ook goed, maar voegt er aan toe "rest 1". Dus $1 : 0 = \infty$ rest 1. Tsjé, wat moeten we hier nu weer mee?

De leraar laat die restkwestie nu maar verder rusten, omdat nauwkeurige analyse zou leiden tot $1 : 0 = \infty + \frac{1}{0}$, want je kunt de rest omzetten in een "toegevoegde breuk". (Denk aan $17 : 3 = 5$ rest 2 oftewel $17 : 3 = 5 + \frac{2}{3}$.) En dan ben je nog verder van huis ...

Het grootste deel van de groep gaat met Ykie's en Ellens redeneringen mee, maar Fred is niet overtuigd.

"Als $1 : 0 = \infty$ dan is $2 : 0$ ook ∞ . Dus is $1 : 0$ evenveel als $2 : 0$ of $1000 : 0$. En dat vind ik gek."

En daarin heeft Fred weer gelijk. Het doet zich bij soortgelijke opgaven verder nooit voor dat verschillende deeltallen en dezelfde delers dezelfde uitkomst geven.

Delen concreet interpreteren als "eerlijk verdelen" of als "eerlijk opdelen" weerlegt weliswaar de uitkomst $1 : 0 = 1$ die Nicole aandraagt, maar geeft vervolgens geen overtuigend uitsluitsel over de juistheid van (a) of (b). Sterker, de twijfel over de uitkomst is eigenlijk alleen maar groter geworden. Fred heeft vanuit eerlijk verdelen gezien dat je niets over de uitkomst kunt zeggen, of dat er eigenlijk geen uitkomst is. Tegen Ykie's en Ellens redeneringen valt echter ook weinig in te brengen. Hoewel? Wat Fred tegenwerpt is eigenlijk ook wel juist misschien.

Monique borduurt op Freds toepassing van het permanentieprincipe door:

"Ik neem nog even het voorbeeld van $18 : 3 = 6$. Maar je mag ook best $3 \times 6 = 18$ zeggen, dat maakt niet uit. Waar het om gaat is dat je de deling $18 : 3$ kunt omzetten in een vermenigvuldiging. Als Ykie gelijk heeft met $1 : 0 = \infty$, dan betekent dit dat $\infty \times 0$ of $0 \times \infty$ gelijk is aan 1 en de opgave $2 : 0$ leidt tot de uitkomst $\infty \times 0 = 2$, enzovoort. En dat vind ik haast nog gekker dan die wisselende antwoorden bij het delen. Je neemt geen enkele keer oneindig en dan krijg je als uitkomst toch 1 of 2 of 3, enzovoort. Dus zeg ik nu dat (b) niet goed kan zijn en dus blijft (a) over: geen antwoord."

Als dat niet overtuigend is, zie je de groep denken. "Monique heeft gelijk", zegt Dorris.

Nu gaat het natuurlijk niet zozeer om het goede antwoord. Het aardige van Monique's redenering is de uiterste consequentie ervan. Deze luidt: als je met ∞ gaat rekenen alsof het een natuurlijk getal is, dan krijg je uitkomsten die niet stroken met "gewone" rekenkundige opgaven. Bijvoorbeeld $\infty + \infty = \infty$, haal van beide kanten ∞ af, dan blijft er over $\infty = 0$. De conclusie moet dus zijn dat ∞ geen gewoon getal is. Je kunt er niet "gewoon" mee rekenen. Met dit uitstapje naar oneindig wordt de leerlijnbeschrijving over hele getallen passend beëindigd.

Tot zover het voorbeeld over een sessie probleemoplossen. Om een positieve denkhouding ten aanzien van probleemoplossen op te wekken is het van belang dat die problemen niet een te hoog "goede-inval"-gehalte hebben. Dat wil zeggen dat de oplossing ervan niet op één heldere inval moet berusten, want dat werkt erg demotiverend als je die niet krijgt. Positief gesteld, je moet direct aan het speurwerk kunnen beginnen, dus als het ware in het begin van het oplossingsalfabet: **A**. Een goed probleem moet verrassend zijn. In ieder geval moet het direct te denken geven: **AH**. De oplossing van het probleem bevat uiteraard enkele vondsten: **AHA**. Als het enigszins mogelijk is, moet je bij de discussies over de vermeende goede oplossing ook kunnen lachen: **HAHA**.



De genoemde opgaven, de verhaaltjes erbij en het beschreven onderwijs voldoen aan al deze voorwaarden: je kunt ermee aan de slag, de uitkomst is verrassend, de verschillende 'redelijke' oplossingen berusten ieder op doordachte vondsten en de tegenstrijdige uitkomsten

zorgen voor opwinding en hilariteit. Overigens voldoet een goede uitleg of presentatie ook aan de genoemde A-H combinaties. Uitleg en sturing zijn onlosmakelijk met probleemoplossen verbonden en dienen dezelfde elementen te bevatten.

Overzicht

In dit boek zijn de leerlijnen en tussendoelen beschreven voor het leerstofdomein van de hele getallen voor de bovenbouw van de basisschool. Deze dienen uiteindelijk naar de kerndoelen te voeren die als einddoelen voor het rekenonderwijs fungeren.

Voor het gebied van de hele getallen zijn acht kerndoelen geformuleerd: zeven doelen in het domein 'vaardigheden' en één doel in het domein 'cijferen'.

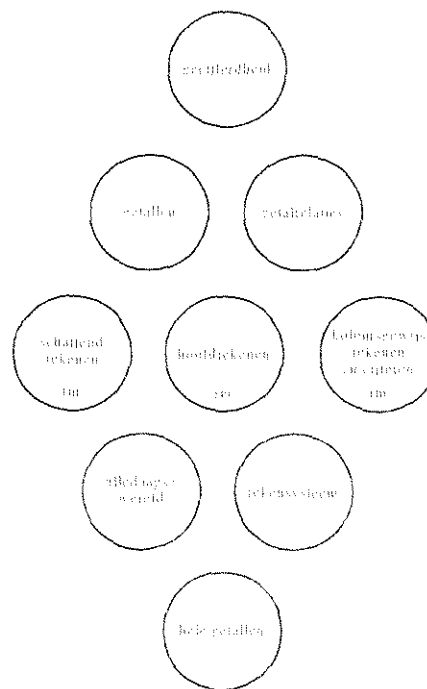
In de volgende opsomming zijn doelstelling 4 en 5 aangepast door daarin de verwijzing naar breuken en decimale breuken te schrappen.

1. De leerlingen kunnen met wisselende eenheden tellen en terugtellen.
2. De leerlingen kennen uit het hoofd optel- en vermenigvuldigingstabellen tot tien.
3. De leerlingen kunnen eenvoudige hoofdrekenopgaven vlot uitrekenen, waarbij ze verschillende bewerkingen inzichtelijk toepassen.
4. De leerlingen kunnen schattend rekenen door de uitkomst globaal te bepalen.
5. De leerlingen hebben inzicht in de structuur van de hele getallen en inzicht in het positiesysteem.
6. De leerlingen kunnen de rekenmachine met inzicht gebruiken.
7. De leerlingen kunnen een eenvoudige, niet in wiskundige taal aangeboden probleemstelling zelf in wiskundige termen omzetten.
8. De leerlingen kunnen de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens standaard-procedures of varianten daarvan uitvoeren en deze in eenvoudige situaties toepassen.

De doelen 1, 2 en 3 worden door sommige leerlingen in de onderbouw al bereikt. De doelen 6 en 8 zullen evenwel pas tegen het eind van de basisschool gehaald worden.

In de acht geformuleerde kerndoelen zijn de tussendoelen herkenbaar van de leerlijnen over getallen, hoofdrekenen, kolomsgewijs rekenen en cijferen, schattend rekenen en het gebruik van de rekenmachine.

In het TAL-symbool is een en ander ook zichtbaar gemaakt.





In enigszins aangepaste vorm wordt in het volgende de toelichting geciteerd die daarbij in het eerste TAL-boek werd gegeven.

Doel is het in brede zin ontwikkelen van gecijferdheid ofwel wiskundige geletterdheid.

Dit wil zeggen dat het onderwijs erop gericht is om bij kinderen het vermogen te ontwikkelen zin te geven aan getallen en getalsmatige gegevens uit het dagelijks leven en ze te leren er op een passende wijze mee om te gaan. Naast het verwerven van dit vaardigheidselement houdt dit ook in dat de kinderen gevoel krijgen voor getallen en plezier ontwikkelen in het werken met getallen.

Gecijferdheid omvat dus meer dan het beheersen van rekenprocedures. In die zin is gecijferdheid dan ook rekenen en wiskunde.

De centrale plaats van gecijferdheid als doel in de leerlijn hele getallen betekent dat alle tussendoelen in deze leerlijn vanuit dit doel begrepen moeten worden.

Om dit doel van gecijferdheid te bereiken dienen de kinderen zowel thuis te raken in de wereld van de getallen

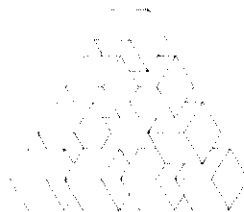
als in die van de operaties. Verder moeten ze overweg kunnen met de verschillende rekenvormen: hoofdrekenen, kolomsgewijs rekenen en cijferen, schattend rekenen, en hieruit een adequate keuze kunnen maken, inclusief het gebruik van de rekenmachine.

Vervolgens is gecijferdheid zowel gericht op het oplossen van getalsmatige problemen uit de alledagse wereld als op de vaardigheid om binnen het rekenstelsel verbanden te ontdekken en verkortingen te maken.

Dit alles wordt in deze leerlijn toegespitst op het gebied van de hele getallen.

Tot zover over 'rekenen met hele getallen' op de basisschool.

De volgende TAL-boeken zullen 'meten en meetkunde' tot onderwerp hebben. Misschien moet dan ook een nieuw TAL-logo met negen elementen worden overwogen. Bijvoorbeeld de volgende figuur⁹ die weliswaar niet realistisch is maar wel binnen het realistisch reken-wiskundeonderwijs past, waarvoor TAL een algemeen nationaal programma beschrijft.



Begrippenlijst

Automatiseren

Automatiseren is het verwerven en uitvoeren van standaardprocedures die rechtstreeks naar een oplossing voeren en zonder nadenken uitgevoerd kunnen worden. Bij het toepassen van geautomatiseerde vaardigheden is het inzicht in de werkwijze vaak naar de achtergrond verschoven.

Automatiseren slaat op het vrijwel routinematig uitvoeren van reken*handelingen*, in tegenstelling tot memoriseren dat op het uit het hoofd kennen van reken*feiten* slaat.

Een leerling heeft een opgave als $9 \div 12$ geautomatiseerd als vlot de uitkomst wordt gegeven door $9 \div 10$ en $9 \div 2$ uit te rekenen en de antwoorden op te tellen.

Algoritme

Een algoritme is een stapsgewijze rekenprocedure die volgens een vast voorschrift verloopt.

Voorbeelden van het gebruik van algoritmen zijn cijferen, het bepalen van de grootste gemeene deler, enzovoort.

Communaal doel

Communale doelen zijn doelen die voor vrijwel alle leerlingen gelden, in tegenstelling tot differentieële doelen.

Concretiseren

Concretiseren is het voorstelbaar maken van rekenhandelingen of rekenkundige redeneringen. Veelal gebeurt dit om het inzicht in dergelijke handelingen en redeneringen te verdiepen door middel van een inleefbare (context)situatie.

Een voorbeeld van concretiseren is:
het gebruik van een rechthoek om aanschouwelijk te maken dat $12 \div 25$ evenveel is als $6 \div 50$.

Context

Een context is een aan de realiteit ontleende situatie, gebeurtenis of problematiek, die voor kinderen betekenisvol of voorstelbaar is en die wiskundige, uit de ervaring voortkomende, werkwijzen oproept. Door zo'n context krijgen de betreffende wiskundige relaties of handelingen een concrete betekenis waaraan steun ontleend kan worden. Zulke situaties kunnen afkomstig zijn uit de alledaagse realiteit van bijvoorbeeld winkelsituaties met geldrekenen of vervoersituaties met bussen. Daarnaast zijn er ook contexten die voortkomen uit de rekenwereld, de wereld van de pure sommen en getalrelaties, zoals de context van de priemgetallen. Om verwarring te voorkomen, wordt in het laatste geval meestal gesproken van rekenkundige of wiskundige contexten.

Contextualiseren

Contextualiseren houdt in dat aan getallen en bewerkingen betekenis wordt gegeven door ze te relateren aan toepassingssituaties uit het leven van alledag, de realiteit en betekeniswereld van het kind.

Differentieel doel

Differentieële doelen zijn doelen die gelden voor specifieke groepen kinderen, zoals zeer goede rekenaars of juist zwakke.

Gecijferdheid

Gecijferdheid betekent dat op een adequate wijze wordt omgegaan met getallen en getalsmatige problemen op basis van gevoel voor getallen en inzicht in getalrelaties. Het omvat tevens het verstandig kiezen tussen hoofdrekenen, schattend rekenen, kolomsgewijs rekenen, cijferen en het gebruiken van de rekenmachine.

Getalaspecten

Getallen komen voor in verschillende hoedanigheden: aantal, naamgetal, telgetal, meetgetal en rekengetal.



Hoofdrekenen

Hoofdrekenen is inzichtelijk rekenen met getallen (en niet met cijfers) waarbij gebruik wordt gemaakt van parate kennis, relaties tussen getallen en eigenschappen van bewerkingen. Hoofdrekenen is niet hetzelfde als rekenen uit het hoofd. Er mogen best tussenberekeningen op papier worden gemaakt. Hoofdrekenen wordt dus niet opgevat als tegenpool van schriftelijk rekenen. Globaal gezien kunnen bij hoofdrekenen drie typen aanpakken worden toegepast: de rijmethode, de splitsmethode en de variamethode (handig rekenen).

Interactief onderwijs

Onder interactief onderwijs wordt verstaan een manier van onderwijzen waarbij het leren van de kinderen plaatsvindt door regelmatig met elkaar en met de leraar van gedachten te wisselen over bepaalde problemen, aanpakken en oplossingen.

Bij interactie kunnen twee vormen worden onderscheiden. Van horizontale interactie is sprake als de leerlingen met elkaar in gesprek zijn over bijvoorbeeld de aanpak van een probleem. Verticale interactie vindt plaats tussen leraar en leerlingen. Dit kan op individueel niveau, maar ook op het niveau van kleine groepjes of de hele groep. Deze interactie omvat een breed arsenaal van didactische handelingen, zoals het stellen van vragen, het geven van informatie, het sturen van de discussie en het samenvatten van de kern van het besprokene.

Kolomsgewijs rekenen

Kolomsgewijs rekenen is een rekenvorm tussen hoofdrekenen en cijferen. Bij kolomsgewijs rekenen wordt gewerkt volgens een vast patroon, splitsend, verticaal rekenend van links naar rechts, van groot naar klein. De deeltuikommen worden hoofdrekenend samengevoegd. In tegenstelling tot bij het cijferen wordt bij het kolomsgewijs rekenen met getallen gerekend en niet met cijfers.

Memoriseren

Memoriseren is het uit het hoofd leren en kunnen reproduceren van getalennis en rekenfeiten, zoals de

vermenigvuldigingen en delingen uit de tafels. Het memoriseren vormt veelal het sluitstuk van een leerproces waarin rekenhandelingen geleidelijk aan steeds efficiënter en op hoger niveau worden uitgevoerd.

Een leerling heeft bijvoorbeeld 7×8 gememoriseerd als direct gezegd kan worden dat het antwoord 56 is.

Modelcontext

Een modelcontext is een voorbeeldmatige rekensituatie die model kan staan voor een heel cluster van situaties waarin de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen betekenisvol worden weerspiegeld. Modelcontexten bieden houvast bij het rekenen en ontwikkelen van een procedure.

Geld is bijvoorbeeld een modelcontext voor het kolomsgewijs rekenen. Via het splitsen in honderdjes, tientjes en euro's krijgt het formele rekenen betekenis voor de kinderen.

Positiewaarde

De positiewaarde van een cijfer in een getal verwijst naar de waarde die dat cijfer in het getal vertegenwoordigt.

Zo heeft 6 in het getal 4643 een waarde van 600.

Positioneren

Positioneren of lokaliseren van getallen betekent het plaatsen van deze getallen in de telrij, op de getallenlijn of op de meetlijn. Deze plaatsing kan precies gebeuren op een gemarkeerde getallenlijn of globaal op een lege getallenlijn.

Reflectie

Onder reflectie wordt verstaan het beschouwen van het eigen handelen. Reflectie kan plaatsvinden voor, tijdens en na het oplossingsproces. Met name andere oplossingen van medeleerlingen en doordenkvragen van de leraar kunnen aanleiding geven tot reflectie. Routinehandelingen lokken meestal geen reflectie uit. Kenmerkend voor reflectie is een flexibele manier van denken.



Rijgmethode

Rekenen volgens de rijgmethode is een grondvorm van hoofdrekenen.

Bij optellen en aftrekken via de rijgmethode wordt het eerste getal in tact gelaten en het tweede gesplitst. Dit tweede getal wordt al of niet in delen (rijgend) aan het eerste getal toegevoegd of ervan afgehaald.

De lege getallenlijn kan hierbij als ondersteunend model dienen.

Een opgave als $325 - 249$ kan via de rijgmethode als volgt worden opgelost:

$$325 - 200 = 125; 125 - 40 = 85; 85 - 9 = 76$$

De rijgende aanpak kan met een pijlschema worden weergegeven:

$$325 \xrightarrow{200} 125 \xrightarrow{40} 85 \xrightarrow{9} 76$$

Bij rijgend vermenigvuldigen wordt het vermenigvuldigtal als geheel opgevat en een aantal keren samengenomen via herhaald optellen of verdubbelen.

Een opgave als 6×48 kan via de rijgmethode als volgt worden opgelost:

$$3 \times 48 = 144$$

$$3 \times 48 = 144$$

$$144 + 144 = 288$$

Bij rijgend delen wordt de deler een aantal keren van het deeltal afgetrokken. Dat kan via herhaald aftrekken of op vermenigvuldigen.

Een opgave als $78 : 6$ kan via de rijgmethode als volgt worden uitgerekend:

$$10 \times 6 = 60$$

$$3 \times 6 = 18$$

$$10 + 3 = 13$$

Ronde getallen

Ronde getallen zijn getallen met een of meer nullen aan het eind.

Schattend rekenen

Schattend rekenen is het rekenen met afgeronde getallen of geschatte waarden met als resultaat een globale uitkomst.

Splitsmethode

Rekenen volgens de splitsmethode is een grondvorm van hoofdrekenen.

Bij optellen volgens de splitsmethode worden beide getallen gesplitst. Dit kan in honderdtallen, tientallen en eenheden, of in andere splitsingen. De gesplitste onderdelen worden apart samengevoegd en daarna opgeteld.

Een opgave als $325 + 243$ kan via de splitsmethode als volgt worden opgelost:

$$300 + 200 = 500$$

$$25 + 43 = 68$$

$$500 + 68 = 568.$$

Ook bij aftrekken volgens de splitsmethode worden beide getallen gesplitst. Dit kan in honderdtallen, tientallen en eenheden, of in andere splitsingen. De gesplitste onderdelen worden apart van elkaar afgehaald. Daarna worden de resultaten hiervan bij elkaar genomen.

Een opgave als $385 - 249$ kan via de splitsmethode als volgt worden uitgerekend:

$$300 - 200 = 100; 85 - 49 = 36;$$

$$100 \text{ over en } 36 \text{ over, dus samen } 136 \text{ over.}$$

Bij vermenigvuldigen volgens de splitsmethode wordt het vermenigvuldigtal gesplitst. Dit kan in honderdtallen, tientallen en eenheden, of in andere splitsingen. De gesplitste onderdelen worden apart vermenigvuldigd en daarna opgeteld.

Een opgave als 6×48 kan via de splitsaanpak als volgt worden uitgerekend:

$$6 \times 40 = 240$$

$$6 \times 8 = 48$$

$$240 + 48 = 288$$



Bij delen volgens de splitsaankpak wordt het deeltal gesplitst. Dit kan in delen die aansluiten bij de deler. Eerst worden de afzonderlijke delingen uitgerekend, vervolgens worden de resultaten bij elkaar genomen.

Een opgave als $78 : 6$ kan via de splitsmethode als volgt worden uitgerekend:

$$60 : 6 = 10$$

$$18 : 6 = 3$$

$$10 + 3 = 13$$

Standaardprocedure

Een standaardprocedure is een vaststaande rekenwijze.

Een voorbeeld hiervan is het kolomsgewijs uitrekenen van een opgave als $325 + 243$:

$$\begin{array}{r} 325 \\ 243 + \\ 500 \\ 60 \\ 8 \\ \hline 586 \end{array}$$

Toepassingen

Toepassingen zijn rekenproblemen die vervat liggen in bijvoorbeeld krantenknipsels, verhaaltjes, spelsituaties en die ruimer opgevat dienen te worden dan 'aangeklede' rekenopgaven of redactiesommen.

Varia-methode

Onder de varia-methode vallen die aanpakken waar bij het oplossen van (context)opgaven handig gebruik wordt gemaakt van parate kennis, relaties tussen getallen en eigenschappen van bewerkingen.

Voorbeelden van deze aanpakken zijn:

compenseren met gebruikmaking van ronde getallen

$$253 + 198 = 253 + 200 - 2$$

$$19 \times 25 = (20 \times 25) - (1 \times 25)$$

transformeren

$$124 - 78 = 126 - 80$$

verwisselen

$$125 : 7 = 7 \times 125$$

aanvullen of overbruggen

$$301 - 298 \text{ uitrekenen via } 298 + 3 = 301$$

verdubbelen en halveren

$$16 \times 25 = 8 \times 50$$

gebruik maken van de inverse relatie

$$75 : 5 \text{ uitrekenen via } \dots \times 5 = 75$$

Noten

Voorwoord

1. De Resonansgroep kwam in het eerste ontwikkeljaar van de leerlijn 'hele getallen bovenbouw basisschool' enkele keren bijeen en gaf inhoudelijk commentaar op de leerlijnbeschrijving. In de Resonansgroep hadden de volgende personen zitting: R. de Jong (Universiteit Utrecht), M. Beishuizen (Universiteit Leiden), D. van Eerde (Erasmusuniversiteit Rotterdam), S. Huijtema (Hogeschool van Arnhem en Nijmegen en SABD Regio Arnhem), D. Janson (SABD Gelders Riviereengebied), J.M. Kraemer (Cito), A. Lek (NOB) en W. Vermeulen.

2. De consultatie bestond uit twee componenten: het vooraf peilen van opvattingen en het becommentariëren van conceptteksten.

Peilen van opvattingen

Op de Panama najaarsconferentie 1998 en op de Panama Voorjaarsconferentie 1999 is aan de deelnemers een vragenboekje voorgelegd. Daarin kwamen belangrijke vragen met betrekking tot de verschillende rekenvormen aan de orde. Zie voor resultaten:

- M. van den Heuvel-Panhuizen & E. de Goeij (1999).
De resultaten van een nationale bezinning op het rekenen in de bovenbouw van de basisschool (1). *Tijdschrift voor nascholings- en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 17, 4, p. 3-14.
- M. van den Heuvel-Panhuizen & E. de Goeij (1999).
De resultaten van een nationale bezinning op het rekenen in de bovenbouw van de basisschool (2). *Tijdschrift voor nascholings- en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 18, 1, p. 3-20.

Meerdere malen zijn deskundigen benaderd om hun opvatting over kolomsgewijs rekenen en cijferen kenbaar te maken. Men kon via een folder, internet en een vragenformulier in de speciaal van Willem Bartjens over het kolomsgewijs rekenen en cijferen (1999, jrg. 19, nr. 1) reageren op voorstellen van het TAL-team. Dit onderzoek droeg de naam 'Het ABC van het cijferen'. De folder is ook verspreid onder deskundigen op het gebied van het voortgezet wiskundeonderwijs.

Voor het peilen van opvattingen in de onderwijspraktijk zijn de volgende basisscholen geraadpleegd:

- Jhr. Mr. H.M.J. Asch van Wijkschool te Utrecht
Da Costaschool Kamaleneiland te Utrecht
Basisschool De Eekel te Utrecht
Kathedrale Koorschool te Utrecht
Basisschool St. Trudo te Stiphout

Basisschool Zeilberg te Deurne

Opvangschool Zuilen voor Neveninstromers te Utrecht.

Becommentariëren van conceptteksten

Naast leden van de Resonansgroep hebben de volgende personen uitgebreid gereageerd op één of meerdere hoofdstukken:

- D.E. van Amelsvoort, R. Apon-Brandsma, M. Baas,
J. van Batenburg, R. Blaas, W. Boom-Pelle, J. Bouman, H. Comvy,
C. van Doornen, E. van Galen, M. van Gijssel van Lierc,
J. de Groot, H. ter Heege, P. Hogendoorn, H. Jansen, R. Keijzer,
P. Landweer, J. Menne, M. Nijmeijer, A. Pijnenburg,
E. Pijnenburg, J. van Rooij, Sectie Rekenen Wiskunde Hogeschool
Ipabo Amsterdam, I. van Spanje, J.J. Stijter, J. van Stralen,
R. Tempelaars, E. Toes, H. Vermeer, A. Verstappen, A. Vrolijk en
L. van Zeeland.

3. De volgende scholen verleenden medewerking bij het maken van video-opnamen voor de cd-rom of bij onderzoekjes en observaties.

- Basisschool Biezenkamp te Beek
OBS De Gorzen te Schiedam
Basisschool De Hoeven te Benningen
Basisschool De Overhael te Driehuizen
Basisschool De Santenkrant te Amsterdam Zuidoost
OBS De Voorhout te Kruiningen
Basisschool Erve Hooverinck te Delden
Johannesschool te Utrecht
Basisschool Op Dreef te Utrecht
RK Basisschool Schuttevaer te Hamsweert.

4. De TAL-Begeleidingscommissie, bestaande uit J. van Dommelen (OC&W), P. Bemelen (PMPO), P. van Dam (Cito), J. Letschert (SLCO) en E. Kraaijenbrink (OC&W), heeft vooral de beleidsmatige inkadering voor het TAL-project aangebracht. Bovendien lopen via deze groep de contacten met het voor het vak Nederlandse taal opgezette TELL-project. De Begeleidingscommissie zorgt ook voor een goede afstemming tussen beide projecten. Namens het TELL-project hebben C. Aarnoutse en L. Verhoeven zitting in de Begeleidingscommissie.

In grote lijnen

1. Deze cd-rom vereist Windows 95 of Windows 98 met de Microsoft mediaspeler geïnstalleerd. De cd-rom is zelfstartend, maar kan ook opgestart worden door op het bestand 'Talexe' te klikken. Aan de ontwikkeling van de cd-rom hebben meegewerkt: A. Buter, A. Noteboom, H. Hermisen, Ch. Rauws, B. van Burck en



M. van den Heuvel-Panhuizen. De video-opnamen op de cd-rom zijn alle gemaakt door leden van het TAL-team. De teksten bij de video-opnamen zijn ingesproken door E. de Goeij.

Het door het TAL-team ontwikkelde prototype van de cd-rom is door Radarsoft BV te Alphen aan den Rijn omgezet in een professionele versie.

2. Deze opgave is ontleend aan een krantenknipsel dat Freudenthal tot leeringhe ende vermaeck onder zijn collega's verspreidde.
3. Het leerlingwerk bij de Zygumt-opgave is een aantal jaren geleden door A. Noteboom verzameld op verschillende scholen in Nijmegen. Het is verwerkt in A. Treffers (1990). *Hoofdrekenen toen en nu*. In M. Dolk en E. Feijs (eds.), *Panama Cursusboek 9. Deskundigheid*. Utrecht: HMN/TEO en OW & OC.

Getallen en getalrelaties

1. Deze video-opname is gemaakt in groep 8 van H. Kniest, Basisschool De Hoeven te Benningen.
2. Zie voor een uitgebreide verhandeling over het structureren van getallen, specifiek over ontbinden en kenschetsen: E. de Moor (1980). *Gevariëerd Rekenen. Wiskobasbulletin. Leerplandeel 11*. Utrecht: IOWO.
3. Deze observatie is gedaan in groep 7 van J. Hoekstra, Basisschool De Overhael te Driehuizen.

Hoofdrekenen

1. H. Jansen (1973). Wat hoofdrekenen is, weet iedereen. *Wiskobasbulletin*, 2, 3, 784-786.
2. Bij de omschrijving van hoofdrekenen is voortgeborduurd op soortgelijke omschrijvingen in de publicaties van het Speerpunt Rekenen en in de 'Proeve van een nationaal programma', deel 2.
3. Deze video-opname is gemaakt in groep 6 van I. Perk, Basisschool De Santenkraam te Amsterdam Zuidoost.
4. Het leerlingmateriaal van deze bladzijde is afkomstig van een onderzoek van A. Noteboom.
5. Met name het N.O.T.-programma 'Rekenwerk' (van P. Scholten en anderen) waarin hoofdrekenen in de vorm van een wedstrijd tussen scholen centraal stond, kreeg grote bekendheid.
6. Zie noot 2 bij Voorwoord.
7. Zie noot 3 bij Getallen en Getalrelaties.
8. De hier genoemde hoofdrekenstrategieën en de hier gehanteerde terminologie zijn grotendeels overgenomen uit het handboek bij de N.O.T.-serie 'Pluspunt', samengesteld door E. de Moor.

Kolomsgewijs rekenen en cijferen

1. Het leerlingwerk behorende bij het vraagstuk over de waterfietsen is afkomstig van een onderzoek van A. Noteboom uitgevoerd in groep 6 van D. Leenders, Basisschool De Biezenkamp te Beek.

Schattend rekenen

1. Dit is een observatie van E. de Goeij gedaan bij het interviewen van leerlingen uit groep 5 van de Johanneschool te Utrecht.
2. Dit gegeven is ontleend aan de IPON van 1997.
3. Deze observatie is gedaan door J. Verwaal toen zij in het kader van haar scriptieonderzoek over schattend rekenen leerlingen interviewde uit groep 8 van Openbare Basisschool De Voorhoutte te Kruiningen.
4. Het krantenbericht is ontleend aan: A. Treffers en E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijzen.
5. Deze observatie is gedaan door J. Verwaal toen zij in het kader van haar scriptieonderzoek over schattend rekenen leerlingen interviewde uit groep 7 van R.K. Basisschool De Schuttevare te Hansweert.
6. Deze observatie is gedaan door J. Verwaal toen zij in het kader van haar scriptieonderzoek over schattend rekenen leerlingen interviewde uit groep 7 van Openbare Basisschool De Voorhoutte te Kruiningen.
7. Deze video-opname is gemaakt in groep 7 van G. Booijsink, Basisschool De Hoeven te Benningen.

Rekenmachine

1. Een voorbeeld van zo'n rekenmachine is de TI-106 van Texas Instruments. Eenvoudige types van andere gangbare merken werken op vrijwel dezelfde manier. Deze apparatjes zijn al jarenlang gemeengoed. Bij het lezen van dit hoofdstuk is het aan te bevelen bovenstaande rekenmachine bij de hand te hebben. Door zelf de opgaven te maken, ervaart men op eigen niveau welke mogelijkheden de machine heeft. Tevens zal duidelijk worden welke vaardigheden en inzichten zich in dit nieuwe domein van het rekenonderwijs aandienen.
2. Deze video-opname is gemaakt in groep 6 van W. Strijk, Basisschool Erve Hooijermeek te Delden.
3. Deze video-opname is gemaakt in groep 7 van J. Hoekstra, Basisschool De Overhael te Driehuizen.

Onderwijskader

1. Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen (1998). *Kerndoelen basisonderwijs 1998*. Den Haag: NV Sdu.
2. H. Freudenthal (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
3. Dit brodenprobleem is door A. Noteboom aan leerlingen van groep 7 voorgelegd.
4. Deze video-opname is gemaakt in groep 6 van D. Leenders, Basisschool De Biezenkamp te Beek.



5. M. van den Heuvel-Panhuizen & A. Treffers (1998), *Oefenen. Module behorende bij de Nationale Cursus Rekencoördinator*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
6. Deze opgave is ontleend aan de PPON van 1997.
J. Janssen e.a. (1999), *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3*. Arnhem: Cito.
7. De tekst van de paragraaf 'Probleemoplossen' is eerder verschenen als bijdrage aan het vriendenboek ter gelegenheid van de 65^{ste} verjaardag van Prof. dr. F. Goffree.
A. Treffers (1999), Met de blik op oneindig. In M. Dolk e.a. (red.), *Verhalen van een leven lang ontwerpen*. Enschede: SLO.
8. De brief van Nicole was gericht aan Prof. dr. H. Spiegel.
Zie voor het rekenen met nul:
C. Selzer & H. Spiegel (1997), *Wie Kinder rechnen*. Düsseldorf: Ernst Klett.
R. Kaplan (2000), *Het paradoxe niets. Een geschiedenis van het getal nul*. Amsterdam: Bert Bakker.
9. Het symbool is in 1934 door Reutersvård ontworpen.