Thermodynamica leren onderwijzen

Probleemstellende gesprekssituaties voor docent en studenten, leidend tot thermodynamisch begrip en tot een gewijzigd Van Hiele niveauschema

Erratum

Het voorwoord bevat een onvergeeflijke fout, want daar ben ik Bart Nool vergeten te noemen, die gedurende twee jaar werkzaam was bij de werkgroep Didactiek der Scheikunde.

Met Bart Nool heb ik veel gediscussieerd over de beoordeling van onderwijssituaties als zijnde sluipend, expliciet of probleemstellend. Hij heeft dit beoordelingsschema verder uitgewerkt zodat het geschikt werd voor evaluatieonderzoek op wat grotere schaal, in opdracht van derden. De strengheid die hij bereikte in het gebruik van dit schema wordt in dit proefschrift niet geëvenaard.

CD-ß wetenschappelijke bibliotheek

Onder redactie van:
P.L. Lijnse
A. Treffers
W. de Vos
A.J. Waarlo

1. Didactiek in Perspectief - P.L. Lijnse, W. de Vos, eds.
2. Radiation and Risk in Physics Education - H.M.C. Eijkelhof
3. Natuurkunde-onderwijs tussen Leefwereld en Vakstructuur - R.F.A. Wierstra
4. Een Onverdeelbare Eenheid - M.J. Vogelezang
5. Betrokken bij Evenwicht - J.H. van Driel
6. Relating Macroscopic Phenomena to Microscopic particles: A Central Problem in Secondary Science Education - P.L. Lijnse, P. Licht, W. de Vos, A.J. Waarlo, eds.
7. Kwaliteit van Kwantiteit - H.E. Elzenga
8. Interactieve Video in de Nascholing Reken-wiskunde - F. van Galen, M. Dolk, E. Feijs, V. Jonker, N. Ruesink, W. Uittenbogaard
9. Realistic Mathematics Education in Primary Schools - L. Streefland, ed.
10. Ontwikkeling in Energieonderwijs - A.E. van der Valk
11. Methoden in het Reken-wiskundeonderwijs - K. Gravemeijer, M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, N. Reusink, L. Streefland, W. Vermeulen, E. te Woerd, D. van de Ploeg
12. De Volgende Opgave van de Computer - J. Zuidema en L. van der Gaag
13. European Research in Science Education - P.L. Lijnse, ed.
14. Realistic Mathematics Education - K. Gravemeijer
15. De Grafische Rekenmachine in het Wiskundeonderwijs - L.M. Doorman, P. Drijvers, M. Kindt
16. Making sense - Simulation-of-Research in Organic Chemistry Education - H. van Keulen
17. Perspectives on Research in Chemical Education - O. de Jong, P.H. van Roon, W. de Vos, eds.
18. A Problem-Posing Approach to Teaching the Topic of Radioactivity - C.W.J.M. Klaassen
19. Assessment and Realistic Mathematics Education - M. van den Heuvel-Panhuizen
20. Teaching structures in chemistry - An Educational Structure for Chemical Bonding - G.M. van Hoeve Brouwer
22. Over Natuurkundedidactiek, Curriculumontwikkeling en Lerarenopleiding - P.L. Lijnse en T. Wubbels
23. Integratie en Toepassing van Biologische Kennis - Ontwikkeling en Onderzoek van een Curriculum rond het thema 'Lichaamsprocessen en Vergift' - H. Roebertsen
24. Het thema 'reproductie' in het schoolvak biologie - P.C.F. Reygel
25. Teaching Electrochemical Cells - A study on Teachers Conceptions and Teaching Problems in Secondary Education - J.J.C. Acampo

26. The role of Context and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures - K. Gravemeijer
27. Thermodynamica leren onderwijzen - W.H. Kaper

Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen
Universiteit Utrecht
Postbus 80.008
3508 TA Utrecht

Thermodynamica leren onderwijzen

THESIS PUBLISHERS
AMSTERDAM 1997

ISBN 90-73346-34-7

Thermodynamica leren onderwijzen

Probleemstellende gesprekssituaties voor docent en studenten, leidend tot thermodynamisch begrip en tot een gewijzigd Van Hiele niveauschema

Learning to teach Thermodynamics
Discussions that are problem-posing to teacher and students, leading to thermodynamic understanding and to a modified Van Hiele level scheme
(With a summary in English)

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

ter verkrijging van de graad van doctor
aan de Universiteit van Amsterdam,
op gezag van de Rector Magnificus
prof. dr. J.J.M. Franse
ten overstaan van een door het college van dekanen ingestelde
commissie in het openbaar te verdedigen in de Aula der Universiteit

op woensdag 17 september 1997 te 15.00 uur

door Wolter Hendrik Kaper
geboren te Apeldoorn

BAND I: Tekst van het proefschrift

Bij dit proefschrift behoort een "Band II" die op diskette wordt meegeleverd. Deze diskette is aan de binnenzijde van het achterkaft bevestigd.

Faculteit der Scheikunde

Promotor:	prof. dr. A.H. Verdonk
Co-promotor:	dr. H.H. ten Voorde

Inhoudsopgave

Summary xiii

Voorwoord xvii

1. Inleiding 1
1.1. Thermodynamica-onderwijs en samenleving 1
1.2. De mogelijkheid van één of meer tussentalen 3
1.3. Problemen met axioma's als vertrekpunt 4
1.4. Opzet en indeling van dit proefschrift 7

Deel 1: **Empirische thermodynamica**.
Probleem verkennen: evaluatie van bestaande onderwijspraktijk, leidend tot een nieuw onderwijsontwerp waarin gestreefd wordt naar empiriegebonden voorstadia van thermodynamisch inzicht

2. Van 'energievormen' naar 'inwendige energie' 11
2.1. De 'energievormen'-taal 11
2.2. Het thermodynamisch gebruik van 'inwendige energie' 16
2.3. Overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' in een VWO schoolboek 17
2.4. Problemen met de overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' in het VWO 19
2.5. Problemen rond de eerste hoofdwet in WO chemieonderwijs 22
2.6. Is een 'energievormen' tussentaal acceptabel? 30
2.7. Is een energievormen tussentaal nodig? 34
2.8. Een onderwijsontwerp dat via 'ruilwaarden' leidt tot 'energie' in de thermodynamische betekenis 39
2.9. Conclusie 46

3. Energie: van nut naar behoud 47
3.1. 'Energie' in de omgangstaal 47
3.2. Van 'iets nuttigs' naar 'iets dat behouden blijft' 48
3.3. Is energie 'het vermogen om arbeid te verrichten'? 51
3.4. Fossiel woordgebruik in VWO onderwijs 56
3.5. Problemen rond de overgang van nut naar behoud 59
3.6. Is een 'energie = nuttig' tussentaal gewenst? 64
3.7. 'Ruilwaarde' van 'gebruikswaarde' onderscheiden 67
3.8. Conclusie 72

4. Analogieën op weg naar entropie 74
4.1. Analogie 74
4.2. Entropie en het deeltjesmodel in het VWO 74

4.4. Stromend water als analogon voor entropie 85
4.5. Analogieredenering leidend tot entropie 86
4.6. Relatie met andere onderwijsvoorstellen 92
4.7. Conclusie en vraag: analogieredenering en tussentaal 96

Deel 2: **Processen en Toestanden**.
Lerenden leiden tot het werken met energie en entropie als toestandsgrootheden, gebaseerd op ervaringen met processen; Veranderingen in taal en redeneren bij lerenden en bij de onderwijzende, in toenemende mate geleid door didactische gezichtspunten:
een leerproces in een onderwijssituatie georganiseerd volgens een gespreksmodel

5. Drie onderwijsexperimenten 101
5.1. Van nulde naar eerste experiment 103
5.2. Van eerste naar tweede experiment 103
5.2.1. Evaluatie: 'entropie' als toetsbare voorspelling? 104
5.2.2. Evaluatie: verwijzende betekenis van 'warmte' en 'arbeid'? 105
5.2.3. Keuze: probleemstellend onderwijs 108
5.2.4. Ontwerp: 'Thermische energie' als meetbare grootheid 109
5.2.5. Ontwerp: wanneer wordt q in de betekenis ΔU - w zinvol? 111
5.2.6. Evaluatie en herontwerp van een analogieredenering 113
5.3. Van tweede naar derde experiment 114
5.3.1. Evaluatie: 'entropie' als toetsbare voorspelling gelukt 115
5.3.2. Evaluatie: 'energievormen' niet toetsbaar geworden 117
5.3.3. Evaluatie: een lineaire aaneenschakeling van termen 119
5.3.4. Ontwerp: ruilwaarden (energievormen) als knooppunten 123
5.3.5. Ontwerp: van ruilwaarde naar energiewaarde 123
5.3.6. Ontwerp: van constante capaciteit naar veranderlijke capaciteit 124
5.4. Evaluatie derde experiment 126
5.4.1. Evaluatie: 'energievormen' als toetsbaar ordeningsmiddel 127
5.4.2. Evaluatie: een verwijzende betekenis voor 'even veel waard' 128
5.5. Conclusie 132

6. Tussentalen beschrijven: Termen en hun relaties 135
6.1. Concept mapping 136
6.2. Keuzen ten aanzien van 'concept mapping' 140
6.3. Bruikbaarheid 'concept mapping' voor onderwijs ontwerpen 144
6.4. Conclusie 153

7. Tussentalen beschrijven: Kwaliteit van redeneren 156
7.1. Situatiegebondenheid 156
7.2. Van Hiele niveaus 159
7.3. Relaties tussen de Van Hiele niveaus 163
7.4. Beschrijven en verklaren van onderwijsproblemen 165
7.5. Onmogelijkheids-uitspraken en Van Hiele niveaus 167
7.6. Bruikbaarheid Van Hiele niveaus bij evalueren en ontwerpen 170

7.7. Conclusie 174

8. Analogieredenering en ervaring 177
8.1. Gentners "structure mapping" 178
8.2. Gentners "systematicity principle" 181
8.3. Objecten en relaties? 185
8.4. Spraakverwarring rond 'analogie' 189
8.5. Een domein en de 'structuur van' een domein 191
8.6. Analogieredenering en Van Hiele niveaus 193
8.7. Bruikbaarheid bij ontwerpen van thermodynamica-onderwijs 195
8.8. Conclusie 201

9. De structuur van de onderwijssituatie 203
9.1. Welke situaties noemen we 'onderwijs'-situaties? 203
9.2. Bruikbaarheid van De Miranda's ABC-schema 208
9.3. Redenen voor een keuze 210
9.4. Het gesprek als prototype van de onderwijs(C)-situatie 211
9.5. Een verantwoording voor het gesprek als prototype? 212
9.6. Objectiviteit als een doorgaand proces 214
9.7. Rationaliteit als proces? 218
9.8. Conclusie 219

10. Onderzoeksthema: continuïteit en discontinuïteit in onderwijs-gesprekssituaties 221
10.1. Associëren en verwijzen 221
10.2. Gesprek en discontinuïteit 222
10.2.1. Niveauverandering 223
10.2.2. Niveau-invariante leerprocessen 229
10.3. Conclusie 231

Deel 3: **Associëren en verwijzen.**
Komen tot een gedisciplineerde beschrijving van het associëren en van het verwijzen in gespreksgroepen, hetgeen leidt tot wijzigen van het eerder geëxpliciteerd didactisch referentiekader

11. Kwaliteiten van verwijzen 235
11.1. Ongelijk verwijzen 235
11.2. Twee kwaliteiten van verwijzen 242
11.3. Storing door persoonlijk of door inconsequent woordgebruik 247
11.4. Storing door verwijzen volgens familiegelijkenis 250
11.5. Conclusies 254

12. Associëren en verwijzen 256
12.1. Kloppend netwerk van woordassociaties 257
12.2. Kloppend netwerk van relaties 262

12.3. 'Ruilwaarden' in een relatienet 266
12.4. Contextuitbreiding 273
12.5. Contextwisseling 279
12.6. Conclusies 292

13. Analogieredenering en contextwisseling 294
13.1. Ervaringsdomeinen 295
13.2. Ontstaan van geplande overkoepelende termen 298
13.3. Overkoepeld relatie- of associatienet 301
13.4. Overkoepelend relatienet 304
13.5. Niet-geplande overkoepelende termen 305
13.6. Overkoepelende termen in sluipend en probleemstellend onderwijs 308
13.7. Algebraïsch hanteren van fysische relaties 315
13.8. Algebraïsche 'vorm' en 'gelijkvormigheid' 317
13.9. Discontinue beschrijving van de analogieredenering 321
13.10. Analogieredenering en contextwisseling 324
13.11. Contextwisseling en analogieredenering 325
13.12. De rol van de infinitesimaalrekening 333
13.13. Een beschrijvende term wordt overkoepelend 335
13.14. Conclusies over discontinuïteit en crisis 338

14. Zaken benoemen in gesprek 340
14.1. Gespreksanalyse 341
14.1.1. Zaakgebondenheid 342
14.1.2. Fasering van zaakgebondenheid 343
14.1.3. Gespreksthema's 347
14.1.4. Over het onderscheiden van 'zaken' 353
14.1.5. Twee verschillende soorten 'zaken' 364
14.1.6. Conclusie: eigenschappen van gesprek 364
14.2. 'Gesprek' als overkoepelende didactische term? 365
14.2.1. Overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau 366
14.2.2. Contextuitbreiding 367
14.2.3. Contextwisseling 369
14.2.4. Analogieredenering 370
14.3. Conclusies 371

15. Conclusies: Continuïteit en discontinuïteit in onderwijsgesprekssituaties 372
15.1. Van Hiele niveaus 372
15.1.1. Een gewijzigd Van Hiele niveauschema 373
15.1.2. Relaties tussen de niveau-overgangen 377
15.1.3. Het gewijzigd niveauschema in praktijk 379
15.2. Niveau-invariante leerprocessen 384
15.3. Crisis in het leerproces 386
15.4. Nieuwe didactische onderzoeksvragen 387
15.5. Fysicadidactiek en didactiek leren 390

Slot

16.	**Opbrengst voor energie-onderwijs**	394
16.1.	Conclusies ten aanzien van een onderwijsplan	394
16.2.	Status van het ontwikkelde onderwijsplan	400
16.3.	Voorstel voor een volgend experiment	401
16.4.	Ontwikkelingstaken die nog wachten	407
16.5.	Een werkwijze voor onderwijs vernieuwen	407

Referenties 409

Indexen 417

Notatie 429

Gebruiksaanwijzing voor band II 431

Lijst van gebruikte lettersymbolen 433

BAND II: BIJLAGEN EN PROTOCOLLEN

BIJLAGEN

BIJLAGE 1: EERSTE EXPERIMENT 1
1.a. Inroostering (1), *1.b. Toelichting bij de ontworpen opgaven* (1), *1.c. Uitgevoerd* (2), *1.d. Ontwerp-opgaven (tekst)* (3), *1.e. Evaluerende opmerkingen bij uitgevoerde opgaven* (34)

BIJLAGE 2: TWEEDE EXPERIMENT 37
2.a. Inroostering (37), *2.b. Toelichting bij de ontworpen opgaven* (37), *2.c. Uitgevoerd* (38), *2.d. Ontwerp-opgaven* (40), *2.e. Evaluerende opmerkingen bij uitgevoerde opgaven* (100)

BIJLAGE 3: DERDE EXPERIMENT 103
3.a. Inroostering (103), *3.b. Toelichting bij de ontworpen opgaven* (103), *3.c. Uitgevoerd* (105), *3.d. Ontwerp-opgaven (tekst)* (106), *3.e. Evaluerende opmerkingen bij uitgevoerde opgaven* (127)

BIJLAGE 4: **Inroostering van de drie experimenten** 128

BIJLAGE 5: **Deelname en tentamenresultaat** 130

BIJLAGE 6: **Verantwoording van in opgaven aangeboden gegevens** 133

BIJLAGE 7: **Gebruikte computercode** 147

BIJLAGE 8: **Ontwerp van een route naar 'fysische grootheid'** 153

PROTOCOLLEN

Overzicht 167

Notatie 171

Protocollen 0.1 t/m 0.7, **evaluatie bestaande praktijk** 173

Protocollen 1.1 t/m 1.6, **eerste experiment** 190

Protocollen 2.1 t/m 2.11, **tweede experiment** 199

Protocollen 3.1 t/m 3.15, **derde experiment** 263

Summary

Learning thermodynamics in an educational setting is described here as a sequence of *changes of language*, where 'language' ultimately will be described by taking into consideration
- which words are mutually associated,
- the experiences to which a word refers,
- the quality of reference and of association.

First, the use of technical words is examined in current Dutch education concerning energy in pre-university education (in Dutch abbreviated VWO) and regarding thermodynamics in scientific education (abbreviated WO). As far as VWO is concerned only schoolbooks are examined and some literature on common teaching and learning problems is cited. Insofar as WO is concerned teaching and learning problems are shown using results of personal investigation. Three changes of language thus emerge as indicated in school- and textbooks, each accompanied with its own characteristic teaching problems.

- In VWO *energy* is mentioned that *exists* in different *forms*. Kinetic and potential energy (or gravitational energy) and chemical energy are mentioned. Also 'heat' is used to name a form in which energy is said to exist or be possessed by objects. In WO thermodynamics teaching, on the other hand, only one quantity is known termed 'energy', the *internal energy* of a system. This energy is not subdivided into different forms. Although different methods for changing the energy of system are distinguished, namely 'work' and 'heat', neither of these can be described as a form in which energy exists or is possessed by an object.
- In VWO and WO mechanics courses an *energy* is mentioned that is equal to the '*capacity to do work*'. Energy is associated with a possible useful application. In WO thermodynamics courses energy is mentioned that remains constant in total, while the total possible work that subsystems of an isolated system can do on one another diminishes in actual (irreversible) processes. Therefore 'energy' in thermodynamics can not be identical to the capacity to do work, at least not in the sense in which this statement applies in mechanics. The total mechanical energy ($E_{kin} + E_{pot}$) after all is not always conserved - at least not according to our macroscopic observation - and in the reversible case where indeed it is conserved, the capacity to do work is conserved also. Combining an absolute 'energy conservation' principle with a definition of energy as 'capacity to do work' leads to the inability to explain the social 'energy problem' in physically understandable terms, for instance as an entropy problem.
- In VWO entropy is introduced as the result of an argument in which an *amount of gas* is considered analogous to a collection of macroscopic *objects* (for instance checkers arranged on a checkerboard): a reasoning by analogy. In this introduction usually it is not discussed to what extent this analogy applies, or which properties of macroscopic objects (position, velocity, energy, distinguishability) can successfully be chosen to explain properties of a gas. In a WO statistical mechanics course this approach leads to a teaching problem as soon as a choice in favour of *'indistinguishable particles'* has to be made. Then it appears necessary that students experience the analogical reasoning as such - as analogical reasoning, including choices to be made - not as

some new facts being taught. Choices in this analogical reasoning however will not be sufficiently testable, unless entropy has first acquired meaning in a different way as a measurable quantity obeying $\Delta S = q_{rev}/T$. In order to achieve this result an analogical reasoning is proposed that uses experiences concerning work done by falling water as its point of departure. This reasoning is expected to prepare students for future analogical reasoning, because they learn to make choices and to test these choices.

In contemporary education, these changes of language often occur more or less suddenly and without the teacher or the author of the textbook drawing attention to them. The impression is formed that teachers do not see the consequences of these changes for learners. In this work an attempt is made to organize these changes of language in a more systematic way. In order to realise this, the position is taken that we may not expect to be able to immediately and understandably communicate the ultimate physical truth. Due to this standpoint, in education *intermediary languages* will be spoken. It is better to choose these languages in a deliberate and thought-out way, than to do it haphazardly and with a bad conscience. For the purpose of designing languages some requirements are proposed which can be applied to such languages. This leads to a new design of education concerning energy, in order to solve the problems indicated.

Three educational experiments were performed, each involving a small group (eight or less) of participants. The purpose of these experiments was first of all to find educational routes - sequences of intermediary languages - not to test a ready alternative by comparison to normal practice. As a result of these experiments a route is presented by which learners can make a transition from separate 'forms of energy' to 'internal energy' in such a way that they choose to make this transition in order to solve a problem to which they were led by the educational situation (problem posing education). Also it is shown how learners, by way of analogical reasoning using the experience of work by falling water, can predict entropy as a testable conjecture.
The designed education that, as expected, can lead to energy as a useful term in predicting the 'usefulness' or 'capacity to do work' of a system has not yet been sufficiently tested. An experiment in VWO is recommended for this purpose. The expectations are that the analogical reasoning previously tested can be integrated into this proposed experiment.

In designing the three teaching experiments which have been carried out, the following insights were involved which were taken from science-didactical and cognitive psychological literature. Purpose of the experiments performed was also to try out these insights and if necessary to supplement them.

- A technical language or intermediary language can be described with regard to the words being used and the combinations in which these words are used, in short, with regard to *association* of words. Various approaches to describing the association of words are known in the literature as 'concept mapping'. A choice is made from these various approaches.
- A technical language or intermediary language can be described also with regard to the quality of reasoning that it makes possible. Van Hiele has distinguished three qualities of reasoning, which coincide with three kinds of "objects of study" that can be *referred* to with words, that is: sensory experience, agreed properties as condition

for the use of a technical term (empirical generalisations), logical connections between properties. It is concluded that the Van Hiele level scheme describes the quality of reasoning as well as the reference function of words.

- With reference to Gentner, analogical reasoning is described as a one tot one mapping of terms which previously proved useful in describing one domain of experiences (in our case: work done by falling water), onto new terms meant for describing experiences from another, previously less well known domain (work associated with a difference in temperature).
- With reference to Klaassen and De Miranda, objectivity is accounted for as a result of the experience by participants in a discussion group that they can adjust their use of words in such a way that they realise that they are talking about more or less the same something. They then have adjusted in such a way that each time one participant finds his word x applicable, another uses the word y, whereafter both can agree that the meaning of x approximates the meaning of y. They can then be aware that something took place outside of both of them, something that approximates one person's meaning of 'x' and the others meaning of 'y'. This account of objectivity suits De Miranda's "discourse model of education" and also suits Ten Voordes' and Klaassens' "problem posing" education. Furthermore, in problem posing education it is necessary that the agreement of word usage be temporary and provisional.

For each of these four insights - except the last one - its usefulness with regard to the evaluation of teaching results and the design of renewed teaching is demonstrated. Problems encountered in applying these insights are reported. Next the compatibility of the designated insights is discussed, with the "discourse model of education" having a critical function. Some ten research questions emerge from this discussion, which are summarised here in two questions:

- Can a description of association be related to a description of reference in terms of Van Hiele levels?
- May a discontinuous description, like the Van Hiele level scheme or Kaper and Ten Voordes' 'change of context' be made to agree with a discourse model where 'discourse' supposes a common object or issue?

Protocols of discussions from each of the three teaching experiments are used to obtain answers to these questions.
It is shown how agreed upon properties, delimiting the collection of experiences to what a word x refers, after the agreement has been made, start functioning in reasoning as associations of x with other words. This conclusion relates association of words to their referring function. As soon as various words mutually have served in formulating agreed properties according to which these same words will be used in the future, we can say that the associations of these words have lost their spontaneous and personal character. These associations are then called 'relations'. A reasoning can then be mapped as a path in a network of relations. If the same conclusion can be reached by different pathways, the network of relations is called 'consistent' (Dutch 'kloppend'). A consistent network of relations is found to be precondition for understanding some new terms. This is demonstrated for: internal energy, energy value and heat capacity. The description arrived at demonstrates how an intermediary language can give rise to new terms.

Erik dank ik bijvoorbaat voor de lastige vragen die hij me zal stellen als mijn coach bij de voorbereiding op de openbare verdediging. Invloeden van Erik op de inhoud van dit proefschrift blijken uit de referenties.
Thom heeft uitvoerig commentaar geleverd op m'n eerste experimentele opgavenserie. Hij wees me erop dat 'gebruikswaarde' niet bijvoorbaat kwantitatief behoeft te worden opgevat.
Reinier de Jong werkte destijds aan de didactiek van de kwantitatieve scheikunde. Zijn ongepubliceerde resultaten, die betrekking hebben op massaverhoudingsgetallen bij chemische reacties, zijn door mij gebruikt in verband met de zogenaamde 'omzetting' van energie 'in een andere vorm'.
Aan Reinier en Thom samen dank ik enkele gesprekken over 'energievormen', in het bijzonder over de vraag of je kunt zeggen dat $q = mc\Delta T$ in het geval van een chemische reactie in een thermisch geïsoleerd vat.
Met Auke Jongbloed heb ik vaak over het gespreksmodel van De Miranda gesproken.
Geertjan Fluitman, destijds hoofdvakstudent bij didactiek, heeft samen met Henk mijn tweede opgavenserie doorgeworsteld. Hij heeft me erop gewezen dat een geïsoleerd systeem in tenminste drie subsystemen moet worden onderverdeeld om een efficiëntie < 1 te kunnen opmerken. Hieruit blijkt dat de gebruikelijke tweedeling systeem-omgeving in de thermodynamica niet altijd voldoet.
Samen met Olle van Sprang heb ik een tijd lang vol onbegrip mijn hoofd geschud over J.F. Roests introductie van entropie naar analogie met vallend water, totdat Olle een boek van Mach uit de kast trok waarna alles veel duidelijker werd. Met Olle heb ik de opgavenserie voor het eerste experiment uitvoerig kunnen bespreken waarbij ik van zijn kennis als docent thermodynamica profiteerde.

Auke, Erik, Martin (Goedhart) Olle, Reinier, Thom, en Adri, deze groep vormde met Henk ten Voorde gedurende enige tijd de werkgroep Didactiek der Scheikunde die vorm kreeg door de regelmatige maandagavondse werkbesprekingen onder leiding van Henk. Kees Klaassen bezocht van 1990 tot 1993 af en toe - als hij werd uitgenodigd - deze werkbesprekingen. De vragen die hij stelde leidden steeds tot heftige discussies in de toch al niet erg rustige Amsterdamse School. Kees' invloed op mijn vraagstelling blijkt hoop ik voldoende uit de rest van dit proefschrift.

Fred Korthagen en Bram Lagerwerf namen het initiatief tot een studiegroep (van het IVLOS, UU) die gedurende enige tijd het Van Hiele niveauschema bestudeerde. Ik dank deze groep voor de diverse visies op Van Hieles' schema die daar naar voren kwamen en ik hoop dat dit initiatief op één of andere wijze zal worden voortgezet.

Hans de Miranda heeft me in enkele soms moeizame tweegesprekken proberen te doordringen van de noodzaak van referentiekader C als gevolg van de overgang van een langzaam veranderende naar een snel veranderende maatschappij.
Pierre van Hiele, Hans de Miranda en Kees Klaassen hebben elk die fragmenten uit de op één na laatste versie van dit proefschrift gelezen waar hun werk wordt geciteerd. De bedoeling hiervan was, in ieder geval die misverstanden te vermijden die gemakkelijk vermeden kunnen worden. Ik dank hen voor hun commentaar. Wanneer ik hen desondanks nog misversta, dan is dit misverstaan voor mijn verantwoording. Zoals mijn copromotor

heeft gezegd: een proefschrift is het begin van een gesprek, niet het eind.

De collega's van de vakgroep chemiedidactiek in Utrecht en van het CDß aldaar dank ik voor de leerzame werk-, VF- en andere besprekingen en voor de samenwerking die er bestaan heeft met Didactiek der Scheikunde in Amsterdam.

Martin Goedhart, de opvolger van Henk ten Voorde in Amsterdam, dank ik voor de geboden gelegenheid dit proefschrift om te werken tot een serie artikelen.

1. Inleiding

In deze inleiding wordt de vraag gesteld naar een geschikte taakverdeling tussen secundair en tertiair onderwijs met betrekking tot thermodynamica. Hierdoor komt vereenvoudigen als didactisch probleem in het zicht (1.1). Om de richting aan te duiden waarin een oplossing zal worden gezocht, wordt de term 'tussentaal' geintroduceerd (1.2). Ook worden argumenten aangevoerd om te gaan zoeken naar empiriegebonden voorstadia als 'tussentalen' op weg naar thermodynamisch inzicht (1.3). Tenslotte wordt de opbouw van dit proefschrift geschetst (1.4).

1.1. Thermodynamica-onderwijs en samenleving

Thermodynamica-onderwijs is een regelmatig terugkerend onderwerp van aandacht en discussie onder docenten in wetenschappelijk onderwijs, zoals alleen al blijkt uit de inhoud van de *Journal of chemical education*[1,2,3,4]. Er worden ideëen uitgewisseld over de wijze waarop een onderwerp behandeld zou moeten worden[5,6,7,8], onduidelijkheden in studieboeken, al of niet vermeend, worden bekritiseerd[9,10,11,12] en soms wordt er gerapporteerd over misverstanden aangetroffen bij studenten[13]. Net als vrijwel elk ander onderwijs heeft dus ook thermodynamica-onderwijs zijn specifieke problemen die blijkbaar de moeite van regelmatige bespreking en discussie waard zijn. Als criterium voor goed onderwijs geldt in de genoemde artikelen de thermodynamische juistheid, waarover soms onenigheid bestaat[4].
In landen waar termen afkomstig uit de thermodynamica, zoals enthalpie en entropie, in secundair onderwijs aan de orde komen is ook dit secundair onderwijs onderwerp van discussie. Naast de juistheid van onderwezen[14,15,16] of geleerde[17,60,18,19] kennis wordt hier ook de persoonlijke of maatschappelijke relevantie van het geleerde als criterium genoemd voor een gekozen aanpak[20,21,22]. Wanneer in de omgangstaal van 'energie' gesproken wordt als van een oorzaak van verandering, als van iets dat opraakt en waar we zuinig mee moeten zijn, dan zouden we daaruit kunnen concluderen dat leken met 'energie' iets bedoelen wat thermodynamisch geschoolden 'vrije energie' zouden noemen (als we denken aan omstandigheden van constante temperatuur en druk) of dat we zouden kunnen weergeven op een omgekeerde entropie-schaal (als we denken aan een situatie zonder interactie met een buitenwereld) (vgl. Stylianidou[22]). Duit[23] opperde daarom het vermoeden dat wellicht de tweede hoofdwet eerder te begrijpen is dan de eerste.
In 1984 werden de termen entropie en enthalpie opgenomen in het examenprogramma van Nederlands secundair (VWO) chemie-onderwijs. Het daardoor ontstane gebruik van 'enthalpie' en 'warmte' als vrijwel synoniem is bekritiseerd door Van Sprang *et al.*[14], omdat het geen recht doet aan de redenen die thermodynamici hebben om beide te onderscheiden. Met betrekking tot entropie valt op dat hierover sinds 1984 vrijwel geen examenvragen zijn gesteld[24]. Gezien de nieuwe Advies Examenprogramma's[25] (1995) ziet het er naar uit dat entropie en enthalpie binnenkort uit het curriculum van het nederlands secundair onderwijs zullen verdwijnen.

Dit alles roept de vraag op of zulke beslissingen over de inrichting van onderwijs willekeurig zijn, of dat er een geschikte volgorde beargumenteerd kan worden voor de introductie van thermodynamische, of aan de thermodynamica ontleende termen. In het bijzonder roept het de vraag op naar een geschikte taakverdeling tussen secundair en tertiair chemieonderwijs, met betrekking tot thermodynamica.*),[26]

Vereenvoudigen
Wanneer we 'vrije energie' zouden introduceren vóór 'energie', vanuit het idee dat de betekenis van deze uitdrukking eenvoudiger te begrijpen zou zijn dan van 'energie', dan zal 'vrije energie' niet meteen U - $T.S$ kunnen betekenen. Zouden we zeggen 'vrije energie is de maximaal mogelijke arbeid', dan zal het niet eenvoudig zijn de - vanuit thermodynamisch standpunt - nodige voorwaarde 'bij constante temperatuur' voor leerlingen begrijpelijk te maken. We zouden dus voor de keuze gesteld worden om al dan niet de leerstof tijdelijk te vereenvoudigen. Maar iets dergelijks geldt voor de aanpak waarbij 'energie' vooraf gaat aan 'vrije energie'. Immers de wet van behoud van energie zónder een systematische beschrijving van energieontwaarding is óók een vereenvoudiging te noemen, een eenzijdige versie van wat we in de thermodynamica voor waar houden.
De twee tegengestelde tendensen om énerzijds de modernste, de meest wetenschappelijke (de meest juiste) termen en beweringen te willen gebruiken, anderzijds deze termen en beweringen voor elke burger al vroeg in zijn schoolloopbaan toegangelijk te willen maken, leidt dus gemakkelijk tot een gebruik van deze termen dat vanuit het vak niet als juist kan worden beoordeeld. Moeten we dat erg vinden?

De noodzaak van vereenvoudigen
Wanneer een natuurkundeleraar op het punt staat een begin te maken met mechanicaonderwijs dan zal hij hierbij onder andere de woorden plaats en snelheid nodig hebben om aspecten van het nieuwe onderwerp aan te duiden. Het gebruik van deze twee woorden kan gedurende de eerste lessen allerlei verfijningen ondergaan. Maar slechts weinigen zullen de leraar verstandig vinden die begint met te stellen dat het weliswaar *lijkt* alsof de precisie waarmee snelheid en positie van een voorwerp kunnen worden bepaald alleen begrensd is door onze meetmethoden, maar dat deze schijn slechts een gevolg is van de zeer kleine waarde van de constante van Planck, en dat het daarom juister is deze grootheden te beschrijven met een kansdichtheidsfunctie.
Intuïtief voelen we aan dat zo'n aanpak ongeschikt is. Men richt het onderwijs daarom eerst op $F=m.a$, waarbij $a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ waarbij $v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, waarbij snelheid v en plaats s op ieder tijdstip met één waarde te beschrijven zijn. Dit extreme en intuïtief duidelijke geval geeft ons een gegronde aanleiding om te vermoeden:

> *Bij het onderwijzen van een vak is het vaak niet mogelijk om meteen de volle waarheid te vertellen*

En daarmee is dan iets geformuleerd dat ik half-ernstig wel als een hoofdwet van de

---

(* Het onderzoeksprogramma waarbinnen dit onderzoek plaatsvond is getiteld: "De aard van de begrenzing in de chemische begripsontwikkeling bij de overgang VWO-WO"[26].

didactiek zou willen voordragen, ware het niet, dat de formulering hierboven nog niet de vereiste kwaliteit heeft om zo'n dure titel al waardig te zijn. We hebben bijvoorbeeld nog niet afgesproken wat we met 'volle waarheid' bedoelen, of met 'een vak'. Een verbeterde versie van het hier aangeduide vermoeden zal daarom later volgen (7.4).
Maar, goed geformuleerd of niet, ik verwacht dat u weet wat ik bedoel, omdat ik hierboven een voorbeeld heb gegeven. Als ons vermoeden juist is, dan hoeven we ons dus niet te schamen voor thermodynamische onjuistheden of onvolledigheden. Maar, als het vaak niet mogelijk is om meteen de volle waarheid te vertellen, betekent dit dan dat we moeten liegen?[27] Is leraarschap de kunst van het smoesjes verkopen? Is didactiek de wetenschap die uitzoekt hoe men anderen kan overtuigen met oneigenlijke middelen?

1.2. De mogelijkheid van één of meer tussentalen

Wanneer een leerling met 'energie' iets bedoelt waarmee we zuinig moeten zijn, zijn leraar daarentegen iets bedoelt wat niet verloren kan gaan, dan kunnen we zeggen dat beiden een verschillende taal spreken.
De leraar heeft zijn vaktaal nodig om precies te kunnen zeggen wat hij bedoelt, om de 'volle waarheid' te zeggen, dus. Maar hij weet dat zijn leerlingen hem dan niet verstaan, tenminste niet in het begin. Dus moet hij, wat hij bedoelt, vertalen in een taal die niet gemaakt is om uit te drukken wat hij zeggen wil. Vertaalt hij bijvoorbeeld zijn 'vrije energie' in 'energie', dan moet hij accepteren dat de betekenis $U - T.S$ niet overkomt.
Gaan we na hoe we met een dergelijke situatie om kunnen gaan, dan doen zich verschillende mogelijkheden voor. Als kenners van een vaktaal én van de omgangstaal kunnen we regelmatig heen-en-weer-pendelen tussen wetenschappelijk correct woordgebruik enerzijds, en aan de leerling aangepast woordgebruik anderzijds. Hierbij doet zich de vraag voor of leerlingen op deze wijze wel ooit streng zullen leren redeneren, aangezien de leraar zelf steeds het verkeerde voorbeeld geeft.
Wie over een dergelijke aanpak ontevreden is kan het volgende voorstel misschien accepteren als werkhypothese bij het zoeken naar een oplossing:

> Creëer een *tussentaal*, die noch lekentaal is, noch identiek aan de vaktaal en die:
> 1 - consequent gebruikt kan worden
> 2 - zinvol gebruikt kan worden op een beperkt ervaringsdomein, om dat domein te beschrijven of anderszins te ordenen.

Als we hieraan kunnen voldoen, dan hoeven we dus niet te liegen (want we kunnen 'liegen' omschrijven als: een zonde tegen criterium 1 of 2).
De mogelijkheid van een tussentaal wordt enigszins gedemonstreerd door de rol van de mechanica van Newton in universitaire fysica- of chemiecurricula. Op de leerroute naar de quantummechanica komt men immers steevast de klassieke mechanica tegen; ieder mij bekend curriculum waarin quantummechanica geprogrammeerd staat, heeft de eigenschap dat de klassieke mechanica hieraan vooraf gaat. De klassieke mechanica voldoet ook aan de genoemde twee eigenschappen: ze is intern consistent en er is een ervaringsdomein af te bakenen (snelheden niet te groot, voorwerpen niet submicroscopisch klein) waarop ze zinvol gebruikt kan worden.

Gezien enig recent didactisch onderzoek is het echter nog niet bevredigend gelukt om de klassieke mechanica in één stap te bereiken vanuit de omgangstaal[28,29]. In deze studie zal daarom als - in de loop van deze studie te verfijnen - *werkhypothese* worden gehanteerd dat, *telkens* als de stap van een door leerlingen gehanteerde taal naar een door de docent gewenste taal voor een deel van de leerlingen onoverkomelijke problemen oplevert, deze problemen kunnen worden opgelost door een tussentaal te ontwerpen met de genoemde twee eigenschappen. De ontworpen tussentaal moet dus bovendien voldoen aan de eis dat deze

> 3 - opgenomen kan worden in een reeks "tussentalen"[*)], die eindigt met de nagestreefde vaktaal en waarvan elk van de overgangen tussen twee opeenvolgende leden van deze reeks door een voldoende groot deel van de leerlingen meegemaakt kan worden.

Of een ontworpen tussentaal aan de eerste twee eisen voldoet, zal door fysisch redeneren worden nagegaan. Of een tussentaal aan de derde genoemde eis voldoet kan nog niet door een redenering tevoren worden bepaald, maar is een onderwerp voor didactisch onderzoek.

1.3. Problemen met axioma's als vertrekpunt

In 1955 rapporteerden de Van Hieles[30,31,32] een eerste succes behaald door het ontwerpen van wat ik hierboven noemde een "tussentaal". In die tijd was het in het middelbaar onderwijs nog gebruikelijk om de meetkunde te onderwijzen uitgaande van de axioma's van Euclides. De Van Hieles merkten op dat de bedoeling van deze axioma's en van het daarop gebaseerde systeem van stellingen door leerlingen niet werd verstaan zoals de leraar-wiskundige het bedoelde.
Geïnspireerd[32] door de kennispsychologie van Piaget[33] die gevonden had dat aan het "formeel logisch" (geaxiomatiseerd) denken steeds bepaalde goed beschrijfbare andere redeneervormen vooraf gaan met een meer "concreet" of *empirisch* karakter, hebben zij experimenteel nagegaan hoe men in onderwijs op dergelijke voorafgaande redeneervormen kan inspelen. Met betrekking tot de vraag of zulke "niveaus in het denken" aan leeftijd te koppelen zijn, verschilden zij met Piaget van inzicht. Zij vonden namelijk dat men bij mensen van geheel verschillende leeftijd eenzelfde stadium of "denkniveau" kan constateren, afhankelijk niet zozeer van de leeftijd als wel van het doorlopen-hebben van de voorafgaande stadia, waartoe het genoten onderwijs beslissend werd bevonden.
Opvallend aan de bijdrage van de Van Hieles is verder dat zij Piagets stadia in het "denken" (Piaget[33] spreekt van innerlijke handelingen of "operaties") hebben geherformuleerd gelet op het *woordgebruik* van leerling en leraar. Wat eerst "denkniveaus" heetten worden daarom ook wel "niveaus in de argumentatie" genoemd[34]. Bij onderwijs gericht op verandering van niveau merkten de Van Hieles soms het verschijnsel op dat[32]

[*)] Achter in deze band (p.428) is een notitie opgenomen waar een paar bijzondere conventies worden uiteengezet met betrekking tot de notatie. Hier wordt onder andere in gegaan op het gebruik van dubbele " en enkele ' aanhalingstekens.

> "de ene helft van de klas een taal spreekt die voor de andere helft nog onverstaanbaar is".

Ten Voorde[35] interpreteert Van Hiele[32] dan als volgt:

> "De docent alsmede de eerste helft van de klas zien het gedrag van de andere helft als 'dom' en/of 'lui'. Maar enige tijd later gaan ook deze leerlingen meedoen en dan blijken deze leerlingen helemaal niet dom of lui.
> Hier vindt dus niet een gelijkmatige toename in het kennisbezit plaats. De ongelijkmatigheid bij individuele leerprocessen in hun klassesituaties kan later door de Van Hieles worden geïnterpreteerd als discontinuïteit tussen niveaus in het leerproces." (Ten Voorde[35], p.13)

De verschillende "niveaus in de argumentatie" worden dus herkend aan het "spreken van verschillende talen". Door het ontwerpen en uitproberen van een empiriegebonden, maar niettemin gedisciplineerde redeneerwijze genoemd "beschrijvend niveau" en een bijbehorende proto-meetkundige tussentaal konden leraar en leerlingen elkaar gaan verstaan.

Thermodynamica-onderwijs volgens axioma's
Tijdens de cursus Fysische Chemie I aan de Universiteit van Amsterdam werd in 1992 van de 20 uur hoorcollege te besteden aan thermodynamica een heel uur besteed aan een bewijs dat het mogelijk is om op de procesgrootheid 'warmte' een toestandsgrootheid genoemd 'entropie' te baseren.

protocol 0.1[*)]

Blijkbaar wordt het belangrijk gevonden om van een procesgrootheid een toestandsgrootheid te maken. Gezien de lengte en zorgvuldigheid (vb. r.412-439)[+)] van het gegeven bewijs wordt het ook belangrijk gevonden dat studenten gaan inzien *waarom* deze nieuwe toestandsgrootheid mogelijk is. Tevoren (r.1-61) was de vraagstelling aangeduid in het kader waarvan de nieuwe grootheid, entropie, van belang is. Eén van de uitgangspunten voor het bewijs wordt met nadruk geformuleerd: de tweede hoofdwet, in de formuleringen van Kelvin en van Clausius (r.319-358). Enkele details in de formulering worden benadrukt (r.327 "énig", 340-341 "zonder meer"). Juist deze details maken de geciteerde uitspraak geschikt als uitgangspunt voor een sluitende redenering. Er is te zien dat één van deze details (r.340) vreemd overkomt voor een student (r.343-358). Ook is te zien dat studenten nog moeite hebben (r.176-250) met de beschrijving volgens gemaakte afspraken (r.182-189) waarop het bewijs voortbouwt.
Bij het afsluitend tentamen werd een opgave gegeven die tot doel had na te gaan of studenten entropie (en energie) als toestandsgrootheid hadden begrepen. Het bleek dat 11

(* Op deze wijze "protocol ..." (ingesprongen) wordt aangegeven dat hierna een protocol wordt besproken. Een protocol is de letterlijke weergave van gesproken tekst, in dit geval van een hoorcollege. Protocollen langer dan één bladzijde zijn alle verzameld in band II van dit proefschrift, welke op diskette wordt meegeleverd.

(+ Regelnummers verwijzen naar regels in het aangekondigde protocol.

van de 65 studenten een redenering kon geven waarin een beroep werd gedaan op entropie als toestandsgrootheid. 30 van de 65 studenten gaven berekeningen die in strijd waren met entropie als toestandsgrootheid.
We kunnen hieruit concluderen dat het gepresenteerde bewijs, ondanks de tijd en aandacht die eraan was besteed, voor het grootste deel van de studenten over de hoofden heen is gegaan. Een voor de hand liggende veronderstelling is dat dit bewijs niet aansloot bij de voorkennis waarover studenten in hun tweede studiejaar (chemie) beschikken.
Gezien dat zulke problemen niet onbekend zijn bij vakken die vanuit axioma's worden opgebouwd (vergelijk quantummechanica en chemische binding) lijkt het zinvol Van Hieles analyse van zulke problemen, hoewel opgesteld voor VWO-onderwijs, ook voor WO-onderwijs te overwegen.

> *We besluiten daarom dit didactisch onderzoek te richten op het vinden van geschikte empiriegebonden voorstadia van thermodynamische kennis.*

Dit houdt in dat we axioma's, in de uiteindelijke formulering die hen voor deductief redeneren geschikt maakt, zien als *eindpunten* van een leerproces waarbij naar aanleiding van ervaringen uiteindelijk steeds verdergaande generalisaties worden geformuleerd, die pas aan het eind de gesloten vorm krijgen, waardoor verder experimenteren overbodig wordt. Met 'empiriegebonden' wordt dus bedoeld dat redeneringen in deze voorstadia nog geen absolute (logische) zekerheden opleveren. Wel wordt verwacht dat er controleerbare vermoedens ontstaan.

'Niveaus in de argumentatie' voldoende?
In deze paragraaf werd één manier besproken waarop 'tussentalen' kunnen worden onderscheiden en gerangschikt in een reeks, namelijk door te letten op de kwaliteit van het woordgebruik in argumentaties, dus op het "argumentatieniveau".
Hoewel dus de Van Hiele niveaus bruikbaar zijn gebleken bij het beschrijven en ontwerpen van onderwijs, kan de vraag gesteld worden of we aan deze niveaus voldoende hebben, wanneer we de voor onderwijs nodige tussentalen willen onderscheiden en/of ontwerpen. Uit een eerder gebruikt voorbeeld blijkt het tegendeel, want we zagen de volgorde: van klassieke mechanica naar quantummechanica als een relevante volgorde van twee talen in een reeks. Beide talen verschillen echter niet van 'kwaliteit van de argumentatie' want beide kunnen axiomatisch worden opgezet. Deze talen verschillen eerder in het domein van ervaringen waarop ze te gebruiken zijn.
Er zijn daarom verschillende aanvullende methoden voorgesteld om nodige 'tussentalen' te karakteriseren en te rangschikken in een reeks[36,37]. Ook is er aanleiding de door Van Hiele genoemde "discontinuïteit" in discussie te brengen[38]. Deze discussies zijn nog gaande. Deel 3 van dit proefschrift heeft als doel om aan deze lopende discussies bij te dragen, met het doel een didactisch kader te verkrijgen dat bruikbaar is voor onderwijsvernieuwing.

1.4. Opzet en indeling van dit proefschrift

Het proefschrift is in drie delen verdeeld.*) In *deel 1* wordt de bestaande praktijk van thermodynamicaonderwijs verkend, in VWO en WO. Dit gebeurt door analyse van schoolboeken en studieboeken (VWO en WO), van verslagen van onderwijssituaties en van tentamenresultaten (WO chemieonderwijs) en door raadplegen van literatuur. Dit leidt tot het vinden van 'tussentalen' zoals die nu functioneren in onderwijs, en tot een beschrijving van onderwijsproblemen in verband met de overgangen tussen deze tussentalen. Deze beschrijving van opgemerkte problemen leidt tot een eerste versie van een nieuw onderwijsontwerp.

In *deel 2* wordt verslag gedaan van drie cycli van onderwijsvernieuwing, waarin het onderwijsontwerp uit deel 1 werd uitgeprobeerd, geëvalueerd, aangepast en opnieuw uitgeprobeerd in drie opeenvolgende onderwijsexperimenten. Er wordt getoond hoe onderwijservaringen aanknopingspunten opleveren voor het selekteren van gezichtspunten uit de didactische literatuur, om deze een rol te laten spelen in een volgend onderwijsontwerp. Nadat enige gezichtspunten op deze wijze geïntroduceerd en geëvalueerd zijn, wordt de verenigbaarheid van deze gezichtspunten besproken. Als resultaat van deel 2 hebben we dus:

- een derde-versie onderwijsontwerp, beargumenteerd met verwijzing naar bestaande didactische gezichtspunten uit de literatuur die in verband zijn gebracht met onderwijservaringen.
- een evaluatie van het ontstane didactisch begrippensysteem op onderlinge samenhang en duidelijkheid, hetgeen leidt tot het stellen van didactische onderzoeksvragen.

In *deel 3* worden onderwijservaringen bestudeerd uit dezelfde drie experimenten als waarvan sprake was in deel 2. Protocollen (zie p.5) van onderwijservaringen worden nu geanalyseerd met het doel om te komen tot antwoorden op de gestelde onderzoeksvragen. Dit leidt tot een herzien didactisch referentiekader. Het derde versie onderwijsontwerp wordt in dit gewijzigd kader opnieuw geëvalueerd, hetgeen onvermijdelijk leidt tot voorstellen voor verder onderzoek.

De eerste twee delen onderscheiden zich van het derde deel doordat ze toepassingsgericht didactisch onderzoek betreffen (tot en met hoofdstuk 8), het derde deel daarentegen betreft fundamenteel didactisch onderzoek, in die zin dat er een bijdrage wordt geleverd aan een didactisch begrippensysteem of theorie.
De eerste twee delen onderscheiden zich van elkaar doordat in deel 1 geen didactische ideëen worden gebruikt dan alleen de notie 'tussentaal' die in deze inleiding al werd geïntroduceerd, en bovendien doordat conclusies gebaseerd worden op ervaringen met gangbaar onderwijs. Conclusies van deel 1 zijn dus door praktiserende docenten te controleren aan de hand van eigen fysisch inzicht en onderwijservaring. Conclusies van deel 2 daarentegen zijn gebaseerd op niet-gangbaar onderwijs en op misschien minder

*) Ieder van de drie delen heeft een fijnstructuur die in het "vooraf" bij dat deel wordt toegelicht.

voor de hand liggende didactische inzichten. Om conclusies uit deel 2 te controleren moet men dus zelf met onderwijs gaan experimenteren.

Omdat het vernieuwd didactisch referentiekaderkader (zie deel 3) heeft bijgedragen aan het proces van onderwijsvernieuwen, volgt een overzicht van conclusies voor thermodynamicaonderwijs na deel 3, in hoofdstuk 16.

Deel 1:

Empirische thermodynamica

Probleem verkennen: evaluatie van bestaande onderwijspraktijk
leidend tot een nieuw onderwijsontwerp
waarin gestreefd wordt naar empiriegebonden voorstadia
van thermodynamisch inzicht

Vooraf

In dit deel wordt getoond hoe een nieuw onderwijsontwerp is voortgekomen uit een evaluatie van de bestaande praktijk met betrekking tot energieonderwijs.
Deze evaluatie wordt gebaseerd op:

- een analyse van nederlandse schoolboeken voor natuurkunde en scheikunde in het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs (VWO) en van twee internationaal gebruikte studieboeken voor fysische chemie in het wetenschappelijk onderwijs (WO),
- te beschrijven onderwijservaringen die betrekking hebben op de cursussen Fysische chemie I en II zoals die plaatsvonden in 1992 aan de Universiteit van Amsterdam (UvA),
- literatuur over onderwijs- en leerproblemen in secundair natuurkunde en scheikunde onderwijs met betrekking tot energieleer en in tertiair chemieonderwijs betreffende thermodynamica.

Ten behoeve van deze evaluatie heeft de onderzoeker in het jaar 1992 deelgenomen aan het verzorgen van werkcolleges in het kader van de genoemde cursussen. Om te verzekeren dat hierbij inderdaad een "bestaande praktijk" werd geëvalueerd, werd wederzijdse

observatie toegepast: een fysisch chemicus observeerde hoe de chemiedidacticus werkcollege gaf en de chemiedidacticus observeerde hoe deze fysisch chemicus werkcollege gaf. Verschillen met betrekking tot de interpretatie van de inhoud en met betrekking tot de stijl van lesgeven werden besproken, met als resultaat dat deze verschillen klein bleven. Deze werkwijze diende tevens als opleiding voor de chemiedidacticus, om hem voor te bereiden op het zelf ontwerpen van thermodynamica-onderwijs. Ter controle werden conclusies uit dit evaluatieonderzoek getoetst in een gesprek met de docent die verantwoordelijk was voor de hele cursus.[*)]
Ten behoeve van dit evaluatie-onderzoek werden ook de hoorcolleges behorende bij de genoemde cursussen geobserveerd en de antwoorden op het afsluitende tentamen waren beschikbaar voor dit onderzoek.

De analyse van schoolboeken en studieboeken wordt gericht op het vinden van aanzetten voor 'tussentalen' (zie 1.2) in bestaand onderwijs. Onderwijs- en leerproblemen zoals die blijken uit vragen tijdens werkcolleges en uit antwoorden op tentamenvragen worden geïnterpreteerd in het licht van gevonden tussentalen en in het licht van een beschrijving van de wijze waarop de overgang van een tussentaal naar de volgende wordt gemaakt.

Elk van de drie volgende hoofdstukken is gewijd aan een groep onderwijsproblemen, die volgens de te presenteren analyse als samenhangend is te zien.
Hoofdstuk 2 betreft het begrijpen van de eerste hoofdwet, hoofdstuk 3 betreft problemen met het combineren van eerste en tweede hoofdwet en hoofdstuk 4 betreft modelvorming in verband met entropie.

De drie hoofdstukken hebben een overeenkomstige opbouw. Ze beginnen elk met een analyse van schoolboeken en studieboeken. Dan volgt een bespreking van in dit onderzoek geconstateerde onderwijsproblemen, die in het licht van gevonden tussentalen worden geïnterpreteerd. Dit leidt tot voorstellen voor nieuw onderwijs, waarbij ook gebruik wordt gemaakt van literatuur. Tenslotte worden de gepresenteerde voorstellen voor nieuw onderwijs vergeleken met voorstellen van anderen.

[*)] In het geval van Fysische Chemie II was de fysisch chemicus wiens werkcollege werd geobserveerd tevens de verantwoordelijke docent voor de hele cursus. Bij Fysische Chemie I waren dit twee verschillende personen.

2. Van 'energievormen' naar 'inwendige energie'

In dit hoofdstuk wordt getoond hoe in secundair onderwijs een 'energievormen'-taal functioneert (2.1) die verschilt van de wijze waarop in de thermodynamica van 'energie' wordt gesproken (2.2). Gezien vanuit de thermodynamica zou ze dus als tussentaal kunnen functioneren. Ook de wijze waarop de overgang naar een thermodynamische 'inwendige energie' taal in secundair onderwijs wordt gemaakt, wordt bestudeerd (2.3).
Naar aanleiding van geconstateerde onderwijsproblemen in secundair (2.4) en tertiair chemieonderwijs (2.5) wordt overwogen of deze tussentaal acceptabel (2.6) en of hij nodig is (2.7). De eis dat een tussentaal een volgende nodige taalverandering niet mag hinderen (zie 1.2) leidt (in 2.8) tot het ontwerpen van een enigszins andere, minder dogmatische tussentaal, inclusief een ontworpen onderwijsroute naar deze tussentaal (2.8.1). Vervolgens wordt besproken hoe lerenden vanuit deze andere tussentaal tot 'inwendige energie' zouden kunnen komen (2.8.2).

2.1. De 'energievormen'-taal

In de onderwijsgang Chemie[39,40] verschijnt het woord 'energie' voor 't eerst in het deel bestemd voor de derde klas, in verband met 'ontledingsreacties':

> "Warmte, elektrische stroom en licht zijn vormen van *energie*. Ontledingsreacties verlopen alleen als we *voortdurend* energie blijven toevoeren. De reagerende stoffen nemen deze energie op. Dit type reacties noemen we *endotherme* reacties."
> (Chemie[39] p.61)[*]

Tegen het eind van het derde-klas deel, dus in tijd een paar maanden later, volgt een heel hoofdstuk getiteld "energie". Het begin van dit hoofdstuk is hieronder weergegeven:

> **7.1 Wat is energie?**
> "Het woord 'energie' gebruik je bijna dagelijks. Maar wat is energie eigenlijk? Die vraag is niet gemakkelijk te beantwoorden. Je komt al heel snel op omschrijvingen of voorbeelden van energie.
> Energie komt in verschillende vormen voor en kan van de ene vorm in de andere worden omgezet. Aan de hand van een paar voorbeelden zullen we dit toelichten.
> Een auto verbruikt benzine. In deze brandstof ligt energie opgeslagen. Deze vorm van energie noemen we *chemische energie*. Deze chemische energie wordt gebruikt om de motor te laten draaien. Hierdoor kan de auto gaan rijden. De auto heeft dan *bewegingsenergie*. Bij een auto zetten we dus chemische energie uit de brandstof om in bewegingsenergie. Hierbij ontstaat ook *warmte*, die we door de motor te koelen, moeten afvoeren.

[*] Cursivering in citaten is overgenomen uit het origineel, tenzij anders vermeld.

> Ook bij het fietsen zetten we chemische energie om in bewegingsenergie. (...)"
> (Chemie[39], p.160)

Waarneembare momentane eigenschappen van voorwerpen worden gebruikt om energie aan een voorwerp toe te schrijven. Zo is de eigenschap 'snelheid' reden om energie aan een voorwerp toe te schrijven en een verhoogde temperatuur eveneens. Ook de chemische samenstelling van een voorwerp (hier een portie vloeistof) kan blijkens de tekst een reden zijn om energie toe te schrijven.
Deze 'energie' wordt onderscheiden in verschillende 'vormen' zò, dat elke kwalitatief andere eigenschap van het voorwerp een eigen bijbehorende 'energievorm' krijgt. Telkens wanneer twee waarneembare veranderingen van zulke eigenschappen tezamen plaats vinden, kan dan gesproken worden van 'omzetting' van 'energie' in een andere 'vorm'. De beschrijving van het rijden van een auto is hiermee in overeenstemming.*)

Deze introductie van 'energie' in chemieonderwijs kan goed aansluiten bij eerder genoten natuurkundeonderwijs. In de natuurkunde-onderwijsgang "DBK-na"[41,42,43] verschijnt het woord 'energie' voor het eerst in het deel voor klas 2[41] in verband met een faseovergang, in een terloopse mededeling over "toevoeren" van "energie".
Enige bladzijden later begint een hoofdstuk getiteld "energie". Het begin van dit hoofdstuk is hieronder verkort weergegeven, waarbij geselecteerd is op betekenisgeving aan de woorden 'energie' en 'energievormen':

> **Energie in het dagelijks leven**
>
> *Wat is energie?*
> Energie is een moeilijk begrip. Je kunt het niet zien, niet voelen en niet ruiken. Toch weet je of je genoeg energie hebt om iets te doen. Als je geen energie meer hebt, ben je moe. Je hebt dan geen fut meer om iets te doen. Door te eten en te slapen krijg je weer nieuwe energie. Je hebt blijkbaar energie nodig om te kunnen leven. (..) om op temperatuur te blijven (..) om te ademen, lopen, werken, sporten, enzovoort.
>
> *Energiebronnen en energiesoorten*
> Mensen, maar ook dieren en planten halen hun energie uit voedsel. Voedsel is een *energiebron*. Het voedsel wordt verbrand met behulp van de lucht die we inademen. Dit is een chemisch proces. Daarom noemen we de energie die in voedsel zit *chemische energie*.
> De lichaamstemperatuur van mensen is 37°C. In bed (..) is het niet moeilijk op temperatuur te blijven. (..) Vandaar dat we de hulp inroepen van andere energiebronnen: een houtvuur (..). Hout, kolen, olie en gas bezitten, net als voedsel, chemische energie. Als je deze stoffen verbrandt komt er warmte vrij. Ook *warmte* is een energiesoort.
> (..) Als je 's avonds een lamp aansluit op een stopcontact, levert het stopcontact *elektrische energie*. Dank zij het licht van de lamp kun je zien. De lamp levert *stralingsenergie*. Fiets je 's ochtends naar school met de wind in de rug, dan helpt de wind je mee. De wind bestaat uit bewegende lucht. De lucht, maar ook andere bewegende voorwerpen bezitten *bewegingsenergie*.
> (..) Als we een kogeltje van een helling laten rollen, gaat het steeds sneller bewegen. Daar zorgt de zwaartekracht voor. Het kogeltje krijgt steeds meer bewegingsenergie.

*) Brandstof vermindert en snelheid neemt toe, of: brandstof vermindert en temperatuur van de doorstromende lucht ("motor koelen") stijgt.

> We nemen aan, dat het kogeltje deze energie in het begin al bezit in de vorm van *zwaarteenergie*.
> Ook een opgewonden veer bezit energie. De veerkracht kan ervoor zorgen dat een autootje gaat rijden. De energie in de veer noemen we *veerenergie*.
> Een magneet oefent een kracht uit op een stukje ijzer. Door de magnetische kracht komt het ijzer in beweging, en krijgt het bewegingsenergie. We zeggen dat het stukje ijzer in de buurt van de magneet *magnetische energie* bezit.
> In een kerncentrale wordt energie uit uranium omgezet in warmte. De warmte wordt gebruikt om elektriciteit op te wekken. De energie in uranium noemen we *kernenergie*. (DBK-na[41], p.168-169)

Net als in de geciteerde passage uit Chemie[39] worden de meeste van de genoemde energievormen gekoppeld aan een momentane eigenschap van een voorwerp: kunnen verbranden (chemische energie), in-beweging-zijn (bewegingsenergie), kunnen vallen (zwaarteenergie), opgewonden-zijn (veerenergie), in de buurt van een magneet zijn (magnetische energie), in staat zijn tot kernreactie (kernenergie).
Bij enkele van de genoemde energievormen kunnen we twijfelen. Bedoelt men warmte in verband te brengen met de momentane eigenschap van een verhoogde temperatuur van de lucht van de kamer waarin het houtvuur brandt? Soortgelijke twijfels zijn mogelijk bij elektrische energie en stralingsenergie. De na deze tekst volgende opgave is in dit opzicht verhelderend.

> "Hieronder staan een aantal voorwerpen genoemd. Deze voorwerpen bezitten een bepaalde soort energie.
> a) een kaars, b) een vallende steen, c) benzine, d) stromend water, e) een brok uranium, f) een accu, g) de zon, h) een batterij, i) een gespannen veer, j) wind, k) een staaf dynamiet, l) voedsel, m) een houtvuur, n) een boek op tafel
>
> (..) plaats de voorwerpen onder de juist energiesoort.
>
> | chemische energie | warmte | bewegingsenergie | kernenergie | elektrische energie |
> |---|---|---|---|---|
> | ... | ... | ... | ... | ... |
> | ... | ... | ... | ... | ... " |
>
> (DBK-na[41], p.169)

Voorwerpen "bezitten" diverse vormen van energie, dus op grond van de voorafgaande tekst mogen we antwoorden: de zon bezit kernenergie en warmte (eigenschappen: verhoogde temperatuur en in-staat-zijn-tot-kernreactie), het houtvuur bezit chemische energie en warmte (analoog), Accu en batterij bezitten elektrische energie (eigenschap: ze hebben "spanning", en net als bij de gespannen veer kan die spanning tot gevolgen leiden) naast wellicht chemische energie.

Het woord 'omzetten' komt in de geciteerde passages maar éénmaal voor, namelijk bij "kernenergie". Direct hierna volgt echter een paragraaf getiteld "energieomzettingen", waarin wordt voorgedaan hoe in al de besproken situaties van 'omzetting' gesproken kan worden. En hierop volgt een paragraaf "energie gaat nooit verloren". De vragen en opgaven die hierop volgen zijn merendeels niet-kwantitatief te noemen.
Meer kwantitatieve opgaven volgen in het deel van DBK-na voor de derde klas[42] bij het onderwerp "elektriciteit en energie" (p.28-33)[42] maar het hoofdstuk "temperatuur en

warmte" (p.172-189)[42] geeft nog geen kwantitatief verband tussen eigenschap (temperatuur) en energievorm (warmte). Wel valt op dat de nadruk verschoven is van "bezitten" van deze energievormen naar "afstaan" of "opnemen". De woorden 'afstaan' en 'opnemen', sluiten echter bezitten niet uit, integendeel, wie in gewoon nederlands iets 'afstaat', die 'bezat' datgene wat hij afstond alvorens hij het afstond.
In de vierde klas[43] wordt de warmtecapaciteit ingevoerd. Een voorbereidende alinea gaat aldus:

> "In blok 15 heb je al kennis gemaakt met warmte-energie. We hebben warmte-energie daar gedefinieerd als 'energie op transport'. Als je warmte-energie aan een voorwerp toevoegt, stijgt de temperatuur van het voorwerp. De *temperatuur* van een voorwerp is dus een maat voor de warmte-energie die het voorwerp bezit. De energie is in het voorwerp opgeslagen als (bewegings)energie van de moleculen.
> Die hoeveelheid *warmte-energie* die bij temperatuurdaling van een voorwerp vrijkomt (of voor temperatuurstijging nodig is), hangt af van:
> - de soort stof
> - de massa van de stof" (DBK-na[43], p.161)

'Transport', als verzamelterm voor 'afstaan' en 'opnemen' sluit dus in dat het getransporteerde voorafgaand aan of volgend op transport aanwezig was of 'bezeten' wordt door het voorwerp waaraan het werd toegevoegd etc.
Dit idee wordt kwantitatief gemaakt in de volgende passage:

> "Als van een hoeveelheid stof de toegevoerde energie, de temperatuurstijging en de massa bekend zijn, kun je daaruit de soortelijke warmte van die stof bepalen (...)
> $Q = c.m.\Delta T$
> Daarin is: Q de energie in J; c de soortelijke warmte in J/kg.K; m de massa in kg; ΔT de temperatuurverandering in K (of in °C)" (DBK-na[43], p.167)

Opvallend is dat hier het woord 'warmte-energie' vervangen is door "energie". Gezien de toelichting moet onder Q wel worden verstaan de "toegevoerde energie", niet de energie zonder meer.
Tijdens mijn tweede onderwijsexperiment leerde ik uit notities van studenten dat deze formule met hulp van de distributieve eigenschap zo kan worden uitgelegd:[*)]

$$Q_{\text{toegevoerd}} = c.m.(T_{\text{eind}} - T_{\text{begin}}) = cmT_{\text{eind}} - cmT_{\text{begin}} = Q_{\text{eind}} - Q_{\text{begin}}$$

In woorden gezegd: als temperatuurverandering evenredig is met aan een voorwerp toegevoerde warmte-energie, dan kunnen we dit begrijpen als logisch gevolg van evenredigheid van de temperatuur met de in een voorwerp aanwezige (of "bezeten") warmte-energie. Hoewel de auteurs van DBK-na[43] zo'n uitleg niet ronduit aanmoedigen is het toch een passende conclusie uit het voorafgaande.

[*)] Naar aanleiding van $C_V = a + bT + c/T^2$ noteerde een student onder andere: $Q = aT + \frac{1}{2}bT^2 - c/T$ en direct daaronder $\Delta Q = a\,\Delta T + \frac{1}{2}b\,\Delta T^2 - c/\Delta T$.
Afgezien van algebraïsche slordigheid zien we hier 'toegevoerde warmte' berekend als een verschil tussen twee 'bezeten' warmten (bijlage 2.e onder punt ▸f).

Bovendien wordt hierdoor de energievorm 'warmte' mooi analoog aan twee andere energievormen die ook weldra een kwantitatieve betekenis krijgen: de door een voorwerp bezeten bewegingsenergie en zwaarte-energie krijgen immers de formules $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ en $E_z = mgh$ toegekend (p.200-201) en hiermee wordt gerekend volgens

$$W = E_{k,\,eind} - E_{k,\,begin} = \frac{1}{2}mv_{eind}^2 - \frac{1}{2}mv_{begin}^2$$

De energievorm 'warmte-energie' wordt dus analoog aan de energievormen 'zwaarte-' en 'bewegingsenergie'.
De arbeid *"W"* wordt in DBK-na[43] geen 'energievorm' genoemd. Arbeid wordt wel in verband gebracht met 'energie-omzetting', ze wordt echter zelf niet 'omgezet':

> "Voor het verrichten van arbeid is energie nodig. In het geval van de speerwerper wordt er chemische energie gebruikt. Hij zet dus chemische energie om in bewegingsenergie (..) Als de verrichte arbeid gelijk is an 1 Nm, werd er 1 J energie omgezet" (DBK-na[43], p.197)

We zien dus dat 'arbeid' in verband wordt gebracht met 'omzetten' (een gebeurtenis) terwijl 'warmte' of 'warmte-energie' nog steeds is op te vatten als iets dat een voorwerp op zeker moment 'bezit'.

In de tot nu toe beschreven energievormentaal bezetten 'warmte' en 'arbeid' geen overeenkomstige posities. Daarentegen komt 'warmte' qua gebruik wel overeen met andere 'energievormen', zoals 'zwaarte-energie' en 'bewegingsenergie'.

We zagen een student redeneren volgens $Q_{toegevoerd} = Q_{eind} - Q_{begin}$, hoewel een dergelijke formule in de onderzochte schoolboeken niet is aangetroffen. We kunnen deze uitdrukkingswijze *consequent* noemen met het gebruik van andere 'energievormen' zoals zwaarte- en bewegingsenergie. Dus kunnen we concluderen dat lerenden soms in staat zijn de opgemerkte consequentheid van de energievormentaal zo nodig op eigen initiatief aan te vullen, ook waar dit wellicht niet de bedoeling was van de geciteerde schoolboek-auteurs.

Representativiteit van het besproken onderwijs
De onderwijsgangen Chemie[39,40] en DBK-na[41,42,43] zijn in het voorafgaande als voorbeelden gebruikt. Het volgende overzicht (Tabel I) laat zien in hoeverre een energievormen-tussentaal ook gehanteerd wordt in andere onderwijsgangen voor scheikunde- en natuurkunde-onderwijs in het nederlandse VWO. Bij deze controle beperkten we ons tot het nederlands VWO omdat deze evaluatie van bestaande praktijk diende ter voorbereiding van een in het nederlandse WO uit te voeren onderwijsexperiment.
Bij het maken van de tabel is gelet op de introductie van energie en op het verdere gebruik voorafgaand aan een eventuele overgang naar een meer thermodynamisch woordgebruik (zie 2.3). Onder "ja" zijn gerangschikt die onderwijsgangen waar energievormen of energiesoorten werden onderscheiden, gelet op *momentane eigenschappen van voorwerpen* zoals: hoogte, snelheid, temperatuur, chemische samenstelling etc.

Tabel I: energievormen in het VWO

Onderwijsgang	'energievormen'		
	ja	gemengd	?
Scheikunde			
Chemie[39,40]	x		
Chemie overal[44,45]		x	
Scheikunde[46,47]	x		
Natuurkunde			
DBK-na[41,42,43]	x		
Natuurkunde overal[48,49]		x	
Scoop[50]	x		
Basisvorming			
Nu voor Straks[51]	x		
BANAS[52]			x

Onder "gemengd" is gerangschikt de onderwijsgang Natuurkunde overal[48,49] omdat de auteurs in het 2MHV-deel betrekkelijk consequent proberen om "energiesoorten" te onderscheiden naar de "manier waarop" een "bron" zijn energie "levert". Deze energiesoorten hebben daardoor het karakter van *gebeurteniseigenschappen*, zij worden dus niet gekoppeld aan momentane eigenschappen van een voorwerp. In deel 4V wordt echter van kinetische energie, veerenergie en zwaarteenergie gesproken op een wijze die niet meer klopt met de eerder gegeven omschrijving als gebeurtenis-eigenschap, en die eerder overeenkomt met de energievormentaal in DBK-na[41,42,43].
Ook Chemie overal[44,45] is onder "gemengd" gerangschikt. Deze onderwijsgang besteedt pas laat uitgebreide aandacht aan energie namelijk in deel 5V, en hier worden naast twee "energievormen" (chemische- en elektrische energie) meteen ook twee "wijzen van energieoverdracht" onderscheiden, namelijk warmte en arbeid. Op deze wijze probeert men al meteen aan de eisen van goed thermodynamisch woordgebruik te voldoen.
De Onderwijsgang BANAS[52] is gerangschikt onder het vraagteken, omdat er maar één "vorm van energie" wordt genoemd en dat is te weinig om te kunnen beoordelen hoe men energievormen onderscheidt.

2.2. Het thermodynamisch gebruik van 'inwendige energie'

In studieboeken thermodynamica voor het WO komt men woorden en uitdrukkingen als 'energievorm', 'energiesoort' of 'vormen van energie' zelden tegen, maar als ze voorkomen, dan doorgaans in verband met 'warmte' en 'arbeid'.
Alberty en Silbey[53] omschrijven 'warmte' nadat eerst het experiment van Joule is besproken aan de hand van de hier gereproduceerde figuur. Hierna vervolgen ze:

> "A given change in state of a system can be accomplished in ways other than by the performance of work under adiabatic conditions. A change equivalent to that in the

> Joule experiment described in the preceding section may be obtained by immersing a hot object in the water. We should not say, however, that the water now has more heat any more than we should say it has more work after it has been heated with moving paddle wheels. In other words, heat and work are forms of energy, crossing a boundary. After the experiment, the temperature of the water is higher, and it has a greater internal energy *U*." (Alberty en Silbey[53] p.35)

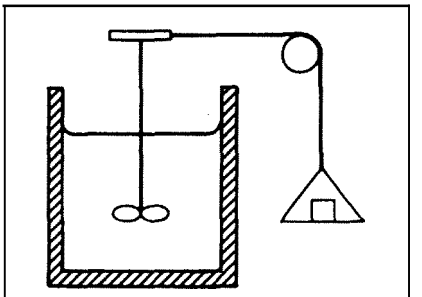


Figure 2.3 Joule heated water by performing work on it, in this case by rotating a paddle wheel, and found that the temperature rise depends only on the amount of work done on the system.

Afbeelding 1: uit Alberty en Silbey[53]

Hier wordt heel in 't algemeen voorgeschreven dat een voorwerp geen warmte "heeft", omdat we met 'warmte' voortaan iets zullen bedoelen wat een voorwerp niet hebben kan.
Als men warmte en arbeid 'energievormen' noemt, wordt met 'energievorm' dus niet meer bedoeld: een deel van de totale energie van een voorwerp, waarvan men de verandering kan aflezen aan de verandering van een (per energievorm verschillende) eigenschap van dat voorwerp, zoals zijn hoogte, zijn snelheid, zijn temperatuur of zijn samenstelling.
Tegelijk met 'warmte' als iets dat een voorwerp kan 'hebben' is dus bijvoorbeeld ook 'chemische energie' in onbruik geraakt, er wordt niet meer over gepraat.
Zowel de inwendige energie als de enthalpie hangen nu van meer dan één voorwerpseigenschap af. De relatie $dH = TdS + Vdp + \sum \mu dn$ zegt bijvoorbeeld dat de enthalpie zowel van temperatuur, druk als samenstelling afhangt.
Enthalpie is dus geen 'energievorm', immers de verandering van een energievorm was steeds zichtbaar aan een enkele eigenschap. De zegswijze 'reactieenthalpie', 'verdampingsenthalpie', 'vormingsenthalpie' etc. kan echter de indruk wekken dat er verschillende soorten enthalpie (enthalpie-vormen) bedoeld worden[13] en de oude schrijfwijze ΔH_r, ΔH_{vap} etc. bevestigde dit. De nieuwe schrijfwijze $\Delta_r H$, $\Delta_{vap} H$ geeft aan dat dit niet bedoeld wordt: we kennen maar één grootheid 'enthalpie' maar deze kan in verschillende processen een *verandering* ondergaan.*)

2.3. Overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' in een VWO schoolboek

Zojuist werd een studieboek voor wetenschappelijk onderwijs geciteerd omdat deze doorgaans consequent, of in ieder geval consequenter zijn in het hanteren van thermodynamisch woordgebruik. Om echter de overgang van energievormentaal naar thermodynamische taal te laten zien zullen we nu terugkeren naar VWO schoolboeken.

(* Beall[13] merkt op dat de betekenis van de "Δ" vaak niet wordt begrepen door studenten, "mogelijk als gevolg van onnauwkeurig woordgebruik door de docent, zoals 'enthalpy of fusion', 'enthalpy of formation'".

In de onderwijsgang Chemie[40] wordt met deze overgang een begin gemaakt in het vijfde-klas deel:

> "We hebben in de derde klas geleerd dat elke reactie een energie-effect heeft. Er zijn twee mogelijke energie-effecten.
> Bij een *exotherme* reactie staan de reagerende stoffen energie af aan de omgeving.
> Bij een *endotherme* reactie nemen de stoffen energie op uit de omgeving.
> (...)
> Energie kan in verschillende vormen voorkomen, zoals warmte, elektriciteit en licht.
> Voorlopig beperken we ons tot reacties waarbij warmte betrokken is.
> (...)
> Bij een exotherm proces staat de stof energie af: het teken is negatief.
> Bij een endotherm proces neemt de stof energie op: het teken is positief." (Chemie[40], p.12-14)

In de derde klas echter was bij *exotherm* sprake van "vrijkomen" van energie "vaak in de vorm van warmte" (p.61)[39].
Ook was er daar sprake van 'chemische energie' en van 'omzettingen' (p.160)[39]. Zo'n omzetting hoeft niet gepaard te gaan met energie-transport. Denk aan een vallende steen: tijdens de val wordt geen energie afgestaan of opgenomen, toch is het gebeuren beschrijfbaar als 'omzetting' van één energievorm in een andere.
Een soortgelijke beschrijving is in de energievormentaal mogelijk voor een chemische reactie: neem een thermoskan, laat daarin de reactanten zich mengen en noteer de temperatuurstijging. Ons voorwerp - thermoskan met inhoud - heeft niets afgestaan of opgenomen, toch zijn er twee veranderingen op te merken: de inhoud van de thermoskan is veranderd zowel van stofeigenschappen als van temperatuur.
Als we nu aan beide veranderingen een eigen energievorm toeschrijven dan kunnen we zeggen: chemische energie werd omgezet in warmte (waarbij 'warmte' dus de energievorm is die blijkt uit een verhoogde temperatuur).

"Vrijkomen" van energie "in de vorm van warmte" hoeft dan dus niet in relatie tot één of andere "omgeving" afgesproken te worden, het reactiemengsel zélf kan in temperatuur stijgen en hieruit blijkt de 'vrijgekomen warmte' even goed als wanneer deze warmte wordt afgestaan.
Binnen de energievormentaal is er geen reden om meer interesse te hebben in afgestane warmte dan in door omzetting ontstane warmte. Er is dus ook geen reden om met een tweedeling systeem-omgeving te werken. Deze keuze van Chemie[40] is gezien vanuit de energievormentaal willekeurig, en niet alleen dat, ze leidt tot tegenstrijdigheden bij de interpretatie van proeven, zoals getoond zal worden in de volgende paragraaf.

Ook hier werd Chemie[40] slechts als voorbeeld aangehaald. Van de overige bestudeerde scheikunde-onderwijsgangen bevat ook Scheikunde[46,47] een dergelijke *abrupte* overgang van energievormentaal naar meer thermodynamische taal (in deel 5V[47], p.160-162 energievormen, daarna min of meer thermodynamisch). Chemie overal[44,45] doet een poging de energievormentaal over te slaan en dus meteen thermodynamisch correct te spreken.
De onderzochte natuurkunde onderwijsgangen bevatten geen van alle een overgang naar thermodynamische taal, zij eindigen alle met 'energievormen'[41,42,43,48,49,50].
De opgave leerlingen via een of meer tussentalen van de omgangstaal naar de thermodyna-

mica te brengen (1.2), lijkt dus in geen van deze onderwijsgangen op bevredigende wijze te zijn opgelost. Alvorens tot een definitiever oordeel te komen zullen we echter eerst enige onderwijssituaties bezien die als resultaat van de genoemde plotselinge overgang zijn te interpreteren.

2.4. Problemen met de overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' in het VWO

▸ *a) problemen van leerlingen*
Een leraar aan het VWO die ook didactisch onderzoek verricht schreef ons[54], verwijzend naar de onderwijsgang Chemie[40] (deel 5 VWO, p.14 en 17):

> "De termen exotherm/endotherm slaan niet aan bij verschillende leerlingen. De definitie in §1.1 lijkt zo simpel. Maar bij proef 2 - zwavelzuur en water - zeggen sommigen: "het is warm geworden dus endotherm". Op mijn vraag "waar komt die warmte vandaan?" zegt een enkeling "van buiten" en verschillende anderen "van het zwavelzuur". Zou hier gezegd worden (zoals ik deed): "van de reactie van zwavelzuur met water" dan kun je dit proces exotherm noemen."[54]

Dit probleem in 't gebruik van de woorden exotherm/endotherm is ook opgemerkt door Terpstra[17]. Hoewel 'endotherm' omschreven is met behulp van het woord 'energie', doet de uitgang '-therm' aan warmte denken, in het bijzonder aan de niet-thermodynamische betekenis waarbij een voorwerp warmte 'bezit' hetgeen tot uiting komt in zijn temperatuur. Stijgt de temperatuur, dan is er meer warmte 'in' het voorwerp dan voorheen, dus in de energievormentaal is het passend zo'n gebeuren endotherm te noemen.
Veel leerlingen formuleerden dat de extra warmte niet "van buiten" het bekerglas kwam, maar "van het zwavelzuur". De leraar ziet als leerdoel dat zij kunnen gaan zeggen: "van de reactie". Voor beide partijen zou het dus passend kunnen zijn dit proces 'exo*cheem*' te noemen, want chemische energie neemt af bij deze gebeurtenis, terwijl warmte (in sommige boeken ook thermische energie genoemd) toeneemt. We zien immers een omzetting van chemische energie in warmte.

De door Chemie[40] gewenste benoeming 'exo*therm*' rust dus op een andere betekenis van 'warmte', namelijk de thermodynamische: energie die een systeemgrens passeert als gevolg van een temperatuurverschil. Wanneer men in de thermodynamica dit proces 'exotherm' noemt, dan denkt men namelijk aan de energie die het systeem (hier: het bekerglas) moet verlaten, waarbij de temperatuur daalt, teneinde terug te keren naar de oorspronkelijke temperatuur en druk.*)

(* Chemie[40] heeft ten tijde van de proef "oplosenergie van zwavelzuur" (p.17) de eis "meten bij gelijkblijvende temperatuur en druk" (p.19) nog niet geformuleerd.
Had men deze eis wèl geformuleerd, dan ontstond er wellicht een ander probleem, want bij deze proef zijn begin- en eindtemperatuur verschillend en van dit verschil maakt men nu juist gebruik om tot een bepaling van de 'oplosenergie' te komen.

Maar waarom zouden we willen terugkeren naar de oorspronkelijke temperatuur en druk? Dit is niet nodig om een 'omzetting van chemische energie in warmte' te constateren, immers volgens de energievormentaal constateren we die omzetting juist aan de temperatuurstijging!
Een reden voor thermodynamici zou kunnen zijn, dat men in de thermodynamica geïnteresseerd is geraakt in de inwendige energie U of de enthalpie H die men beide als niet in aparte vormen op te splitsen beschouwt, en die dus afhangen van zowel druk als temperatuur als chemische stof-samenstelling. Om nu de invloed van chemische stof-samenstelling op U te kunnen isoleren is het gewenst druk en temperatuur gelijk te houden, althans voor begin- en eindtoestand (want het procesverloop doet er niet toe in de evenwichts-thermodynamica).
Maar bij dit alles blijft een belangrijke vraag onbeantwoord: *waarom heeft men in de thermodynamica aparte energievormen - één energievorm per veranderlijke eigenschap van een voorwerp - afgewezen?*

Uit het in Chemie[40] (5 VWO) aangewezen gebruik van 'exotherm' en 'endotherm' valt dus te concluderen:
- Sinds het derde klas deel is de betekenis van 'warmte' gewijzigd van: een vorm van energie aanwezig in voorwerpen, waarvoor de temperatuur het zichtbare signaal is voor toe- of afname; naar: "a form of energy crossing a boundary" (Alberty & Silbey[53], zie 2.2).
- De betekenis van 'energie' is veranderd van: een optelsom van diverse energievormen (alle in een voorwerp aanwezig en apart te kwantificeren) naar: de toestandsfunctie U die een functie is van meer variabelen en die niet op te splitsen is in aparte energievormen (wel zijn er twee verschillende vormen van energieoverdracht: arbeid en 'warmte' in de nieuwe betekenis).
- Doordat deze betekenisveranderingen stilzwijgend zijn doorgevoerd kunnen leerlingen 'exotherm' en 'endotherm' niet als geschikte benoemingen ervaren (tenzij anders gebruikt dan wij wensen).

De eerder geciteerde leraar[54] spreekt als zijn wens uit dat Chemie[40] zou voortbouwen op wat eerder werd aangeleerd, namelijk op energievormen en hun omzettingen. Hij had dan ook geen bezwaren tegen het hanteren van de formule $q = m.c.\Delta T$ in het geval van het samenvoegen van water en zwavelzuur in een thermisch isolerend vat.

▸ *b) thermodynamica-leren door een leraar VWO*
Somers[55], destijs ook leraar scheikunde, vertelt hoe hij hernieuwde bezwaren kreeg tegen deze zelfde proef ("oplosenergie van zwavelzuur") toen hij zich realiseerde dat, wil de proef zinvol zijn, het bekerglas als thermisch isolerend moet worden beschouwd, zodat men - na keuze van bekerglas met inhoud als systeem - volgens de thermodynamica moet concluderen q=0 en eveneens*) ΔU=0, in strijd met q=$m.c.\Delta T$ en hierdoor werd het voor hem problematisch dat bij deze proef reactiewarmte dan wel reactieenergie zou zijn opgetreden. Hij concludeert dat 'warmte' en 'energieverandering' geen eigenschappen van

*) De arbeid op de atmosfeer is bij deze proef verwaarloosbaar.

chemische reacties te noemen zijn, tenzij het proces waarin deze warmte of energieverandering optreedt nader wordt omschreven.
In zijn verwerping van $q = m.c.\Delta T$ bij deze proef komt Somers niet tot een genuanceerde beoordeling van de energievormentaal. Dit is te begrijpen omdat hij, op het moment waarover hij vertelt, juist bezig is met het gaan begrijpen van de thermodynamica. Hierbij blijkt hij van 'energievormen' voornamelijk last te hebben en hij werpt ze dan ook zo ver mogelijk van zich af. Interessant is dat hij ons aanwijst waar en hoe ze hem stoorden, door te citeren uit twee eerder door hemzelf gemaakte notities:

Uit de chronologisch eerste notitie:

> "- de temperatuurstijging van de inhoud van het bekerglas is toe te schrijven aan energietransport (warmte)
> Vooral dit laatste punt verwarde mij. Enerzijds omdat er bij een geïsoleerd systeem geen sprake kan zijn van energietransport, anderzijds omdat ik het oplossen van zwavelzuur kende als een exotherm proces (proces waarbij het systeem energie aan de omgeving afstaat).
> Met de, door "Chemie" voorgestelde rekenwijze handel je feitelijk tegen de wet van behoud van energiell Of je geeft 'energie' en daarmee 'exotherm' en 'endotherm' ineens een andere betekenis." (Somers[55], p.19-20)

Een tweede notitie bevat kritiek op de eerste:

> "[In de eerste notitie] wilde ik nog $q = m.c.\Delta T$ hanteren om de gevraagde oplosenergie te berekenen. Hiermee stelde ik argeloos, 'warmte' en 'energie' aan elkaar gelijk en ontkende ik de eerste hoofdwet. In een geïsoleerd systeem kan 'warmte' alleen een waarde anders dan nul hebben wanneer er sprake is van 'arbeid' (die niet nul is). Bij de oplosenergie van zwavelzuur kunnen we de arbeid op nul stellen en is er dus geen sprake van 'warmte'." (Somers[55], p.21)

Uit Somers[55] eindoordeel over deze tweede notitie:

> "In de geciteerde regels suggereer ik dat er 'in' een geïsoleerd systeem sprake kan zijn van warmte en arbeid mits de som daarvan maar nul is. Deze stelling moet ik nu verwerpen" (Somers[55], p.24)

De betekenisverandering aangeduid in Somers eerste notitie heb ik hierboven omschreven: als q de *verandering van een energievorm* voorstelt dan kan q heel goed ongelijk nul zijn voor een geïsoleerd systeem. Men kan dan spreken van energie-omzetting "in" het systeem, en daarmee komt men niet in strijd met energiebehoud. Als q een *transport over de systeemgrens* voorstelt dan is ze voor een geïsoleerd systeem nul. Ook in dat gebruik van de letter q kan men consequent zijn. Maar worden beide betekenissen vermengd, zoals door Chemie[40] gestimuleerd wordt, dan ontstaan er allerlei tegenstrijdigheden.*)

(* Ook de auteurs van Chemie[40] slagen er niet in de door hen zelf uitgesproken regels te hanteren, want enerzijds wordt de betekenis van 'exotherm' gebaseerd op een tweedeling 'reagerende stoffen' en 'omgeving' die ook ruimtelijk gescheiden worden voorgesteld (figuur, p.12), terwijl men anderzijds proeven aanbiedt waarbij het de bedoeling is dat het water als 'omgeving' functioneert maar tegelijk ook als 'reagerende stof' deelneemt, waarmee de aangeduide tweedeling weer wordt

In zijn eindoordeel wordt een laatste tegenstrijdigheid opgeruimd en deze is beslissend, want de suggestie "dat er 'in' een geïsoleerd systeem sprake kan zijn van warmte en arbeid" is nog steeds geredeneerd volgens 'energievormen'.*),[56] Somers[55] wijst hier dus het moment aan waar hij afscheid neemt van wat ik noem de energievormentaal.

De gerapporteerde problemen van beide leraren zijn nu geïnterpreteerd in verband met de opzet van de onderwijsgang waarmee zij werkten. Deze onderwijsgang kenmerkt zich erdoor dat eerst in termen van 'energievormen' wordt geredeneerd terwijl vervolgens abrupt, en zonder dat de onderwijsgang daar de aandacht op vestigt of er redenen voor geeft, wordt overgestapt op een redeneerwijze die uitgaat van 'inwendige energie' en daaraan te relateren betekenissen van o.a. 'warmte'. Zowel leerlingen als leraar kunnen hierdoor in problemen komen, waarvoor deze onderwijsgang geen uitweg biedt.

2.5. Problemen rond de eerste hoofdwet in WO chemieonderwijs

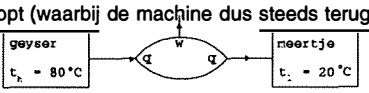
Hieronder worden enkele problemen beschreven, die tijdens de cursus Fysische Chemie I in 1992 zijn geconstateerd. Het betreft een eerste cursus in de thermodynamica, gegeven aan tweedejaars chemiestudenten. Per probleem wordt aangegeven in hoeverre dit probleem te verklaren is uit de overgang van een 'energievormen'-taal naar de thermodynamische taal.

▸ *a) Energie en entropie als toestandsgrootheden*
Sprekend volgens 'energievormen' wordt de totale energie van een voorwerp opgedeeld gedacht in verschillende porties, voor elke veranderlijke eigenschap van het voorwerp een aparte portie. Thermodynamisch gezien impliceert dit, dat de afzonderlijke energievormen als toestandsgrootheden worden gehanteerd, immers voor elke toestand van het voorwerp wordt een unieke waarde verwacht voor de portie energie die verkeert in energievorm A. Dit betekent niet, dat VWO scholieren warmte bewust 'als toestandsgrootheid' hanteren en zich daar op beroepen. Het is eerder zo, dat het onderscheid tussen toestands- en procesgrootheden voor hen nog geen punt van overweging is geweest.
Eén aspect van de overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' is dus dat we daarna met 'warmte' niet langer een toestandsgrootheid bedoelen terwijl we 'inwendige energie' wel als toestandsgrootheid gaan gebruiken.
Wanneer we bij het leren inzicht nastreven, dan zou een tweede aspect aan deze overgang zijn, dat men na deze overgang beide soorten grootheden aan hun eigenschappen kan onderscheiden (in plaats van slechts uit het hoofd te leren: pas op, warmte is geen toestandsgrootheid). Het zou dan dus onder andere duidelijk moeten zijn wat het betekent, dat inwendige energie een toestandsgrootheid te noemen is. Over entropie kan eenzelfde opmerking gemaakt worden (zie 1.3).
Tijdens het afsluitend tentamen van de cursus Fysische Chemie I werd aan studenten de

ondergraven.

(* Een vergelijkbare redenering is te vinden bij Pushkin en Zeng[56] als ze schrijven: $\Delta U=0 \Rightarrow Q=W$ voor een "adiabatisch systeem".

volgende vraag voorgelegd:

> "5) Een geiser op IJsland geeft water met een constante temperatuur van 80°C. Een naburig meertje bevat een grote hoeveelheid water met een constante temperatuur van 20°C. Het temperatuurverschil wordt benut om een machine arbeid te laten verrichten. q_h, q_l en w worden steeds bedoeld ten opzichte van de machine, die een cyclisch proces doorloopt (waarbij de machine dus steeds terugkeert in de uitgangstoestand).
>
> 
>
>
> 5a) Beredeneer dat na een geheel aantal cycli $q_h = - q_l - w$. Welke eigenschap van de grootheid "energie" heb je gebruikt?
> 5b) Na een uur heeft het hete water 100 kJ afgestaan aan de machine, die dan een geheel aantal cycli heeft doorlopen. Bereken de entropieverandering van de voorraad heet water.
> 5c) Geef de entropieverandering van de warmtemachine na een geheel aantal cycli.
> 5d) Leid een formule af die laat zien hoe de entropieverandering van de voorraad koud water afhangt van de geleverde arbeid, gedurende dat uur.
> 5e) Hoeveel arbeid kan er gedurende dat uur maximaal verricht zijn? Hint: Gebruik de tweede hoofdwet: $\Delta S_{tot} \geq 0$"

Subvragen 5a) en 5c) hadden de bedoeling na te gaan of studenten weten wat het betekent dat energie en entropie 'toestandsgrootheden' te noemen zijn, en of ze die kennis kunnen gebruiken in een redenering. Om deze vragen te beantwoorden moet het belang gezien worden van de voorwaarde "geheel aantal cycli" en zonodig van de toelichting tussen haakjes bij "cyclisch proces" in de voorafgaande tekst. Uit het gegeven dat de machine terugkeert in de uitgangstoestand, kan dan geconcludeerd worden dat de inwendige energie niet veranderd is, met als te noemen reden: een toestandsgrootheid heeft in dezelfde toestand steeds dezelfde waarde.
In het hoorcollege was ongeveer een uur (van de 20 uur totaal) gebruikt voor een klassiek bewijs dat entropie een toestandsgrootheid is, uitgaande van de Kelvin en Clausius formuleringen van de tweede hoofdwet (zie 1.3). Inwendige energie als toestandsgrootheid was in het gebruikte studieboek[57] (p.32-33, 60-62) benadrukt.

De antwoorden op de vragen a en c werden verdeeld in categorieën afhankelijk van de door studenten gegeven redeneringen. Tabel II geeft een overzicht.
9 studenten noemden zowel bij a als bij c "toestandsgrootheid" als reden voor het niet-veranderen van energie en entropie. Van hen kunnen we zeggen dat zij zowel 'entropie' en 'energie' als toestandsgrootheden gebruiken. Van de overige studenten kunnen we dat niet zeggen.
Opvallend was, dat bij vraag **a** "behouden blijven" veel vaker dan "toestandsgrootheid " als argument gebruikt werd. Een van de antwoorden:

> "Volgens de wet van behoud van energie kan er geen energie verloren gaan.
> De hoeveelheid opgenomen warmte q_h moet dus gelijk zijn aan de hoeveelheid afgestane warmte q_l en de hoeveelheid geleverde arbeid door de machine. De opgenomen warmte wordt positief genoteerd, afgestane warmte en geleverde arbeid door de machine negatief dus geldt: $q_h = -q_l - w$."

Tabel II: energie en entropie als toestandsgrootheden

Vraag 5a		
"Behoud van energie" genoemd als reden voor "even veel (energie) erin als er uit".		37
$\Delta U_{machine}=0$ genoemd		15
hiervan hadden als reden "energie is toestandsgrootheid":	11	
Andere antwoorden		6
Geen antwoord		7
Totaal		65
Vraag 5c		
$\Delta S_{machine}=0$ genoemd		20
hiervan hadden als reden "entropie is toestandsgrootheid":	11	
$\Delta S_{machine}$ niet nul		30
Geen antwoord		15
Totaal		65

Zo'n antwoord werd niet als onjuist maar wel als onvolledig beoordeeld. Immers "opgenomen warmte" enerzijds en "afgestane warmte" en "geleverde arbeid" anderzijds kunnen volgens de wet van energiebehoud best ongelijk zijn. In dat geval zou wel de energie van de machine veranderen. Deze mogelijkheid wordt in de meerderheid der antwoorden over het hoofd gezien. Deze nadruk op energiebehoud is begrijpelijk gezien de voorgeschiedenis in het VWO waar veel met de 'wet van energiebehoud' wordt gewerkt, maar waar het onderscheid tussen procesgrootheid en toestandsgrootheid geen aandacht kreeg.
We kunnen concluderen dat dit onderscheid nog steeds niet functioneel geworden is voor de meeste studenten, hoewel er in het onderwijs nogal wat aandacht aan besteed was. De overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' is in dit opzicht dus mislukt.

▸ *b) Plus- en mintekens bij warmte en arbeid*
Bij het corrigeren van tentamenvragen vindt men nogal eens antwoorden die goed zijn, op het teken van de rekenuitkomst na. Vaak is daarbij de achterliggende gedachtengang van de student niet te achterhalen. Mogelijk gaat het om algebraïsche vergissingen.
Vaak echter heeft juist het teken van een grootheid een fysische betekenis - iets gaat ergens in of uit, iets neemt toe of af - en vaak kan men het teken van een rekenuitkomst toetsen aan in woorden formuleerbare kennis van de situatie. Het voorkomen van een tekenfout wijst er dan op dat zo'n controle achterwege is gebleven, òf dat de relatie tussen woorden en algebra door studenten niet op dezelfde wijze als door ons wordt gelegd.

Tabel III toont de aantallen tekenfouten bij de in 2.5 onder a) geciteerde tentamenopgave.

Tabel III: tekenfouten bij opgave 5, 1992

Tekenfouten bij vraag 5	
Vraag	Aantal
5a	11
b	21
c	- *
d	37
e	7

* niet van toepassing

Bij de vragen 5b en d moest men, om tot het gewenste antwoord te komen, inzien dat de energieverandering-door-warmte van het reservoir het tegendeel is van de bijbehorende energieverandering-door-warmte van de machine. 21 respectievelijk 25 deelnemers hadden daarvan geen gebruik gemaakt.
Over de tekenfouten bij vraag 5a weten we meer, dankzij de redeneringen in woorden die deelnemers bij hun antwoord gaven. Deze antwoorden werpen ook enig licht op de antwoorden bij de vragen b, d en e.
Van de deelnemers die "energiebehoud" als argument voor $q_h=-q_l-w$ gebruikten luidden de meeste argumentaties ongeveer zoals in het eerder geciteerde antwoord (zie 2.5 onder a): "De opgenomen warmte wordt positief genoteerd, afgestane warmte en geleverde arbeid door de machine negatief dus geldt: $q_h = -q_l -w$."
Op het gebruik van mintekens is hier niets aan te merken. Toch gaat de redenering wat kort door de bocht: dat w een negatieve waarde moet worden toegekend, betekent niet dat er een minteken voor de w moet staan. De volgende formule is immers evenzeer juist: $-q_h = w + q_l$.

De onconventionele regel een grootheid met een negatieve waarde te noteren met een minteken voor het grootheid-symbool, leidt hier wel tot het gevraagde resultaat ($q_h=-q_l-w$), indien we de negatieve grootheden aan de ene kant, de positieve grootheden aan de andere kant van het gelijkteken zetten.
In andere gevallen noodzaakt deze regel tot afwijking van de conventionele algebra, om tot het gevraagde resultaat te komen:

> "Als er q_h uit bad I komt en er wordt w arbeid mee gedaan en q_l lekt naar het koude bad dan is
> $\Delta U_{\text{totale systeem}} = 0 = -q_h + w + q_l \Rightarrow q_h = -q_l - w$ "

en:

> "(..) machine na volle cyclus weer terug in begintoestand: dus: $\Delta U=0$
> ook: $\Delta U=q+w$
> $q = q_h - q_l$ (q_h systeem in, q_l systeem uit)

$q = -w$
$q_h = -q_l - w$ "

In deze antwoorden herkennen we de genoemde regel: "erin" wordt uitgedrukt door een plusteken voor het grootheid-symbool, "eruit" wordt uitgedrukt door een minteken. Om tot het gevraagde resultaat te komen moeten nu conventionele algebra-regels worden overtreden, zoals de regel: uitgaande van een ware vergelijking kun je een nieuwe ware vergelijking krijgen door bij linker en rechterzijde eenzelfde getal of grootheid*) op te tellen.
De onconventionele student-regel ("erin" vertalen in een plusteken voor het grootheid-symbool, "eruit" in een minteken) wordt echter begrijpelijk als we veronderstellen dat q en w voor hen hoeveelheden aanduiden. Een hoeveelheid water bijvoorbeeld, wordt ook in de fysica meestal aangeduid met een positieve massa of een positief volume. Wanneer een hoeveelheid water zich verplaatst van bak A naar bak B dan is het redelijk deze (positieve) waterhoeveelheid af te trekken van de hoeveelheid water in A, en hem op te tellen bij de hoeveelheid water in B. De geciteerde deelnemers hanteren q en w alsof deze symbolen voor zulke positieve hoeveelheden staan. Het woord 'negatief' duidt voor hen dan aan dat deze (positieve) hoeveelheid ergens van moet worden afgetrokken.

Dit spreken in 'hoeveelheden' is te begrijpen in verband met energievormen als reëel aanwezige kwantiteiten in (of in 'bezit' van) een voorwerp. Warmte en arbeid als gebeurtenis-eigenschappen (procesgrootheden) daarentegen geven in de thermodynamica aanleiding een gebeuren aan een systeemgrens te classificeren als een negatieve of positieve *bijdrage aan de energieverandering* van het systeem, waarbij het minteken dus de waarde van de procesgrootheid aangeeft, in plaats van als rekenoperator voor positieve hoeveelheden te functioneren. We kunnen dus verband leggen tussen gebruikte woorden die fysische ideeën uitdrukken enerzijds, en algebraïsche- en rekenhandelingen anderzijds.

Een tweede probleem met 'plus en min' heeft te maken met systeemkeuze, zoals blijkt uit de volgende antwoorden:

"De warmte die de geiser afstaat kan worden gebruikt om arbeid te leveren. (...).
Warmte geleverd door de geiser = $-Q_h$. Hij verliest namelijk die warmte.
Warmte geleverd door het meertje = $+Q_c$ (doorgestreept, veranderd in: $-Q_c$; WK) $w = -Q_h - Q_c \Rightarrow Q_h = -w - Q_c$. "

"(...) Omdat q_h aan de geiser wordt onttrokken is deze negatief. Omdat q_l naar het meertje toe gaat is deze positief.
$-q_h = q_l + w \Rightarrow q_h = -q_l - w$. "

"Na een geheel aantal cycli heeft de geiser $-q_h$ energie afgegeven. Het meertje q_l opgenomen en de machine w arbeid geleverd. (...) dus $-q_h = q_l + w \Rightarrow q_h = -q_l - w$. "

*) Deze 'algebra'-regel wordt ook gebruikt in de fysica. Daar wordt ze niet op getallen toegepast maar op grootheden. Het hoeft niet bijvoorbaat duidelijk te zijn dat een regel die zinvol is voor getallen ook zinvol is voor grootheden.

"(...) De warmte die de geiser verlaat bestaat dus uit de arbeid en de warmte die aan het koudere meer wordt toegevoegd. $\Rightarrow -q_h = q_l + w \Leftrightarrow q_h = -q_l - w$ "

Ook in deze antwoorden gaat steeds 'verliezen', 'onttrekken', 'afgeven' etc. samen met een minteken in de formule. Men lijkt een balans op te stellen door de "afgegeven" energiebedragen aan de ene kant, de "geleverde" energiebedragen aan de andere kant van een gelijkteken te zetten. De aanduidingen "afgegeven" en "geleverd" worden echter niet ten opzichte van één uitgekozen systeem bepaald: nu eens kijkt men ten opzichte van het meertje, dan weer ten opzichte van de geiser.

Wat we hier missen is het gebruik van procesgrootheden als bijdragen aan de toestandsverandering van een gekozen systeem.

Het grotere aantal fouten bij de subvragen b en d (25 resp 37) kan hieraan liggen dat men bij vraag 5a naar een bepaald resultaat ($q_h=-q_l-w$) toe kon redeneren. Het niet hanteren van q en w ten opzichte van een gekozen systeem, zoals bij vraag a uit een klein aantal antwoorden bleek, kan daarom wellicht ook het grotere aantal fouten bij de vragen b en d verklaren.

Dit onderwijsprobleem is in verband te brengen met de overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' als we ons afvragen waarom het kiezen van een systeem in de thermodynamica zo belangrijk is, terwijl een energievormentaal zo'n systeemkeuze niet nodig heeft (vgl. p.18). Immers: voor de energievorm $\frac{1}{2}mv^2$ kan geen onduidelijkheid bestaan met betrekking tot het 'systeem' waarop deze energievorm betrekking heeft: ze heeft betrekking op dát voorwerp dat beweegt met snelheid v en dat massa m heeft. Er is geen twijfel mogelijk, dus is 'systeem' hier geen punt voor discussie. Zo ook voor andere energievormen. Gaan we over van 'energievormen' naar 'inwendige energie' dan moet besloten worden welke procesgrootheden we meenemen in de optelsom. Het kiezen van systeemgrenzen is een manier om die beslissing controleerbaar te maken.

▸ *c) Integreren, wanneer en hoe*

Bij de docenten fysische chemie aan de UvA, 1992, stond integreren bekend als een groot onderwijsprobleem. Mijn eigen kennismaking met dit probleem is te zien in de protocollen 0.2 en 0.3.

protocollen 0.2 en 0.3

Er deed zich een opmerkelijke serie vragen voor, als gevolg van een min of meer toevallige opeenvolging van twee vraagstukken. Beide opgaven betroffen entropieberekeningen, de eerste bij constante temperaturen (koelmachine met warmtereservoirs), de tweede bij veranderende temperaturen (twee blokken in contact). Een aantal malen moest ik studenten er op wijzen dat ze nu niet de temperatuur als constant konden behandelen. De protocollen 0.2 en 0.3 geven elk een voorbeeld van deze gesprekjes.
Naar aanleiding van een tentamenvraag kon geconcludeerd worden dat ongeveer de helft van de 65 deelnemers "niet de gewoonte heeft om aandacht te besteden aan de vraag welke grootheden van de integratievariabele afhangen"[58]

Hoewel dit probleem - wanneer en waarom integreren? - algemener is dan de overgang van energievormen naar inwendige energie, kan ze wel in het kader van die overgang een zinnige rol spelen. Want juist de in het VWO gebruikelijke veronderstelling van een constante warmtecapaciteit maakt het mogelijk om te concluderen (zie p.14):

$$Q_{\text{toegevoerd}} = c.m.(T_{\text{eind}} - T_{\text{begin}}) = cmT_{\text{eind}} - cmT_{\text{begin}} = Q_{\text{eind}} - Q_{\text{begin}}$$

We kunnen dus niet tornen aan Q als toestandsgrootheid, zonder tevens te tornen aan een constante warmtecapaciteit. Het leren omgaan met niet-constante warmtecapaciteiten (integreren) zal dus vooraf gaan aan, of deel uitmaken van, de overgang van energievormen naar inwendige energie.

▸ *d) "Op nul graden houden", of "bevriezen"*
In de protocollen 0.4 en 0.5 wordt gesproken naar aanleiding van een opgave waar de nodige arbeid gevraagd was, verricht door een ideale koelmachine, om een portie water van 0°C te bevriezen.

protocollen 0.4 en 0.5

Hierbij is 'warmte' nodig in de betekenis $T.\mathrm{d}S$, dus met entropie als variabele. Uit de protocollen blijkt dat een aantal studenten moeite heeft met het idee van een 'warmte' ongelijk nul, in geval van een constante temperatuur (vergelijk Terpstra[17]). De student in protocol 0.4 zegt in een eerder deel van het gesprek "Je moet 't toch bevriezen, dan moet 't toch van warm naar koud." Als daarna eenmaal vastgesteld is dat de opgave spreekt van water van nul graden, dan weet de student niet wat de koelkast nog te doen heeft (begeleider, r.26: "Nee, 't gaat niet vanzelf. Nee hoor.").
Tijdens mijn eerste onderwijsexperiment ben ik dit zelfde probleem nog in een andere gedaante tegengekomen. Studenten hadden toen ernstige bezwaren tegen het toeschrijven van een warmte 'nul' aan een proces in een thermisch geïsoleerd systeem, indien daarbij de temperatuur verandert. Zij zeggen in zo'n geval: de verrichte arbeid wordt toch omgezet in warmte? Dat zie je toch, de temperatuur stijgt! De warmte is niet nul.
Uit dit alles blijkt niet alleen dat warmte voor hen een energievorm is, en geen procesgrootheid. Er blijkt vooral ook dat warmte de energievorm is met temperatuur als *de* karakteristieke variabele, terwijl in de thermodynamica eerder de entropie de karakteristieke variabele voor de (procesgrootheid) 'warmte' is geworden.

▸ *e) Literatuur*
Het gevonden probleem met de term 'toestandsgrootheid' (2.5 onder a) keert terug in fouten gemaakt door onderwijsgevenden. Van Sprang en Sluyters[59] bekritiseren een VWO-examenopgave waarin wordt gesuggereerd dat de standaardpotentiaal van het koppel H^+/H_2 van het elektrodemateriaal afhangt. Dezelfde fout is te vinden bij Feiner en Mc.Evoy[11] die een statistisch-mechanische afleiding van de Nernst-vergelijking prefereren omdat de klassieke afleiding volgens hen discutabel is door de aanname dat "all particles of species *i* are under constant electric field." Dit zou de afleiding onjuist maken omdat dit veld sterk plaats-afhankelijk is, met name "near an interface (..) the reaction site (which is the electrode surface)". Uit het gesuggereerde belang voor de evenwichtspotentiaal van de

eigenschappen van de "reaction site" bóven de bulk-eigenschappen van de betrokken vloeistof- en gasfase blijkt onbegrip voor de Gibbs energie als toestandsfunctie, onafhankelijk van het reactiepad.
In de literatuur wordt vaak gemeld dat leerlingen in secundair onderwijs de woorden temperatuur en warmte als synoniemen gebruiken[60,18]. Beall[13] heeft hetzelfde gevonden onder chemiestudenten in tertiair onderwijs. Een soortgelijk gebrek aan onderscheid is opgemerkt door Van de Berg *et al.* namelijk tussen 'spanning' en 'elektrische energie'[61]. Ook daar gaat het om een door de leraar gewenst onderscheid tussen een intensieve (spanning) en een extensieve grootheid (elektrische energie).[*)] De optelbaarheid van de energiewaarden van twee elektrische capaciteiten of van twee verwarmde voorwerpen, in contrast met de niet-optelbaarheid van hun temperaturen of spanningen, heeft dan nog geen aandacht getrokken.
In plaats van een vereenzelviging van temperatuur en warmte heb ik vooral de verwachting van een 1-1 duidig verband geconstateerd (2.5 onder d), dus warmte als energievorm, zoals ook opgemerkt door Terpstra[17]. Van Roon[62] heeft in gesprekprotocollen van Utrechtse chemiestudenten aangewezen hoe zowel 'warmte' als 'arbeid' als energievormen werden gebruikt (arbeid is dan synoniem met "mechanische energie"). Zijn beschrijving van de verschillen tussen een "energetische warmte-context" (energievormen) en de "thermodynamische warmte-context" was een van de belangrijkste aanleidingen tot de analyse die volgt in 2.6.

Conclusie
Er is gevonden dat studenten 'warmte' uniek aan temperatuur als variabele relateren, hetgeen volgens onze eerdere analyse (2.1) betekent dat ze 'warmte' als energievorm hanteren. Het betekent ook dat een onderscheid tussen procesgrootheid en toestandsgrootheid nog niet is gemaakt, hetgeen klopt met de bevinding dat studenten zich niet konden beroepen op 'inwendige energie' en 'entropie' als toestandsgrootheden.
Verder zijn nog twee problemen met de overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' in verband gebracht: het probleem van de systeem-keuze en de problematische beslissing om te gaan integreren. Het laatstgenoemde probleem is algemener, maar de stap naar niet-constante warmtecapaciteit (waardoor integreren nodig wordt) is nodig om 'warmte' als procesgrootheid te kunnen gaan gebruiken. Deze beide problemen zullen dan ook worden betrokken in het ontwerpen van onderwijs gericht op de overgang van 'energievormen'-taal naar een 'inwendige energie' taal.

[*)] Men noemt die grootheden *extensief* die voor twee voorwerpen kunnen worden opgeteld. Massa, volume en elektrische lading zijn voorbeelden hiervan: de massa van twee voorwerpen tezamen is de optelsom van de massa's van beide voorwerpen apart.
Voor de temperaturen van twee voorwerpen is zo'n optelling zinloos. Temperatuur is dus niet extensief. *Intensief* noemt men die grootheden die niet extensief zijn en die, vermenigvuldigd met een extensieve grootheid een (andere) extensieve grootheid opleveren. Temperatuur en spanning zijn intensief te noemen volgens deze omschrijving.

2.6. Is een 'energievormen' tussentaal acceptabel?

Nu getoond is welke problemen de overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' met zich meebrengt, kan de vraag gesteld worden of 'energievormen' acceptabel zijn als tussentaal.
Volgens het eerder uitgesproken standpunt (1.2) moeten we dan nagaan:
- of er een ervaringsdomein is aan te geven waar de energievormentaal zinnig en consequent gebruikt kan worden (criteria 1 en 2)
- of de energievormentaal zich laat opnemen in een reeks die eindigt met de thermodynamische taal (criterium 3).

Of aan de eerste twee criteria is voldaan zal door fysisch redeneren worden nagegaan. Of aan de derde eis is voldaan, kan later blijken uit een onderwijsexperiment. We beperken ons in deze paragraaf tot de eerste twee criteria.

2.6.1. Een ervaringsdomein voor 'energievormen'

Is er een domein aan te geven waar energievormen consequent en zinnig gebruikt kunnen worden? Deze vraag kunnen we beantwoorden door uit te gaan van de thermodynamica als (tot nu toe) meest volledige beschrijving, en na te gaan of er voorwaarden zijn aan te geven, waaronder de thermodynamica en de energievormentaal tot overeenkomstige voorspellingen leiden.
We hebben intussen al gezien dat onder de voorwaarde van een constante warmtecapaciteit men kan zeggen: $q_{\text{toegevoerd}} = c.m.(T_{\text{eind}} - T_{\text{begin}}) = cmT_{\text{eind}} - cmT_{\text{begin}} = Q_{\text{eind}} - Q_{\text{begin}}$
Daar is weinig tegen in te brengen.

Gaan we uit van de inwendige energie U als toestandsgrootheid:

$$dU = L.dX + M.dY + N.dZ + ...$$

De grootheden L, M en N worden in deze studie *capaciteiten* genoemd, in dit geval *energiecapaciteiten*. X, Y en Z, mits zij samen een kloppende beschrijving van de inwendige energie opleveren, noem ik (een volledige[*]) set) *energievariabelen*. Met 'energievariabelen' worden eigenschappen bedoeld die op ieder tijdstip een waarde hebben en die in die zin toestandsgrootheden te noemen zijn, waarbij 'toestand' nog geen 'evenwichtstoestand' hoeft te zijn. Voor een systeem dat uit twee subsystemen bestaat kan X de temperatuur zijn van subsysteem 1, Y de temperatuur van subsysteem 2. Twee energievariabelen kunnen dus van hetzelfde type zijn (bijvoorbeeld twee temperaturen) of van verschillend type (bijvoorbeeld temperatuur en druk). In het hierna volgende betoog is het type van de energievariabelen niet van belang.
Willen we het aantal variabelen beperken, dan kan het gewenst zijn 'toestand' te beperken tot 'evenwichtstoestand'. Dit is echter niet per se nodig, want we kunnen ook de minder sterke eis stellen dat het systeem ***binnen zekere foutmarges*** te beschrijven is met een beperkt aantal variabelen, dus met een beperkt aantal snelheden, hoogten, temperaturen,

[*] Welke variabelen nodig zijn om zo'n volledige set te krijgen, hangt van de concrete probleemsituatie af. Voor de beschouwing die ik hier wil houden doet het er echter niet toe.

drukken, etcetera.*)

Beperken we ons nu - naar aanleiding van het gevondene voor een constante warmtecapaciteit - tot die ervaringen waar een lineaire benadering goed opgaat, dat wil zeggen waar L, M en N als constanten kunnen gelden, dan kunnen we de uitdrukking voor dU integreren en krijgen we:

$$\Delta U \approx L.\Delta X + M.\Delta Y + N.\Delta Z$$

Met "≈" wordt bedoeld *een empirisch gelijkteken*. We beschouwen dus die set van ervaringen waar binnen de meetnauwkeurigheid geldt dat ΔU gelijk blijkt aan de genoemde som. We zien nu dat we de totale inwendige energie kunnen zien als een optelsom van drie energievormen (X-energie, Y-energie en Z-energie)

$$U = U_X + U_Y + U_Z$$

waarvoor geldt

$$U_X = L.X + U_{X0}$$
$$U_Y = M.Y + U_{Y0}$$
$$U_Z = N.Z + U_{Z0}$$

U_{X0}, U_{Y0} en U_{Z0} zijn willekeurige constanten die het gevolg zijn van de vrijheid van nulpuntskeuze en die men gemakshalve de waarde nul kan geven. Er blijft dan over dat elk van deze energievormen het produkt is van een constante energiecapaciteit en een energievariabele.
Men zal inzien dat elk van de onderscheiden energievormen zich apart als toestandsgrootheid gedraagt, omdat er bij iedere waarde van de variabele X maar één waarde U_X hoort, etc. We kunnen dus de totale inwendige energie opgedeeld denken in verschillende porties waarvan we mogen veronderstellen dat die ieder op elk moment een bepaalbare waarde hebben. Merk op dat ook de 'warmte' $C_v.T$ tot deze toestandsgrootheden kan behoren.
We hebben dan een taal met bijbehorend ervaringsdomein dat naadloos+) aansluit bij de mechanica, waar immers ook voor een systeem twee energievormen (potentiële- en kinetische energie) ieder op elk moment een bepaalde waarde hebben. Dit is mogelijk omdat in

---

(* Beschouw twee goed geleidende voorwerpen, verschillend van temperatuur, in contact via een dunne slecht geleidende (maar niet adiabatische) wand en samen thermisch geïsoleerd. De 'toestand' van dit systeem kan op ieder moment binnen een te bepalen foutmarge beschreven worden met *twee* temperaturen. Ze voldoet dus aan de gestelde "minder sterke" eis om van 'toestand' te kunnen spreken, terwijl het geen evenwichtstoestand betreft.

(+ "Naadloos": door met 'toestand' niet per se een evenwichtstoestand te bedoelen kunnen bewegende voorwerpen in één begrippensysteem met thermodynamische verschijnselen worden besproken. De situatie van twee bewegende voorwerpen met daartussen een dunne laag smeermiddel is bijvoorbeeld analoog aan de situatie van twee voorwerpen op verschillende temperatuur uit voetnoot (*, p.31: Zoals de bijna-adiabatische laag de overdracht van entropie en van energie als gevolg van temperatuurverschil beperkt, zo beperkt het smeermiddel de overdracht van impuls en van energie (steeds één energievorm met zijn extensieve variabele).

$\frac{1}{2}m.v^2$ de capaciteit $\frac{1}{2}m$ constant is.

Hiermee is duidelijk dat er in ieder geval *een* ervaringsdomein mogelijk is voor een energievormentaal.
Een voorbeeld uit de mechanica kan echter duidelijk maken dat de geldigheidsgrenzen van een energievormentaal hierboven nog niet maximaal ruim zijn aangegeven. Bij de zwaartekracht behoort een potentiële energie met capaciteit $m.g$ die we als een constante ervaren zolang we in onze proefnemingen geen al te grote hoogteverschillen bestuderen. Bestuderen we grotere hoogteverschillen dan kunnen we g niet meer constant noemen, g hangt dan af van de hoogte h. Toch kunnen we dan nog steeds van potentiële energie als afzonderlijke energievorm spreken.
Dit voorbeeld is te generaliseren: Als de capaciteit L een functie is van alleen de variabele X, M alleen van Y en N alleen van Z, dan kunnen we nog steeds de inwendige energie blijven zien als optelsom van drie energievormen, die elk apart een toestandsfunctie zijn. Immers uit

$$dU = L(X).dX + M(Y).dY + N(Z).dZ$$

volgt dan, door integratie:

$$\Delta U = \Delta P_L(X) + \Delta P_M(Y) + \Delta P_N(Z)$$

Hierin is P_L de primitieve van L, P_M die van M, etcetera.
Dus kunnen we nog steeds volhouden dat $U = U_X + U_Y + U_Z$, alleen zijn de verschillende energievormen nu niet meer te berekenen door vermenigvuldiging. Ze worden nu berekend door integratie.

2.6.2. Een grens aan het ervaringsdomein voor 'energievormen'

Wanneer echter twee capaciteiten niet (alleen) van hun eigen variabele afhangen, maar (ook) van elkaars bijbehorende variabele afhangen - hierna 'kruislingse afhankelijkheid' te noemen - dan wordt het geven van een rechtvaardiging voor afzonderlijke energievormen vanuit de thermodynamica problematisch. Als

$$dU = L(X,Y).dX + M(X,Y).dY$$

dan kan de vraag gesteld worden of er nog iets zinnigs bedoeld kan worden met:

$$U = U_X + U_Y$$

De vraag wordt dan, of X-energie en Y-energie per toestand van het voorwerp een duidelijke waarde kunnen krijgen. Om dit na te gaan stellen we de vraag hoe we de X-energie voor toestand D zullen berekenen, wanneer we toestand A als nulpunt voor beide energievormen kiezen.

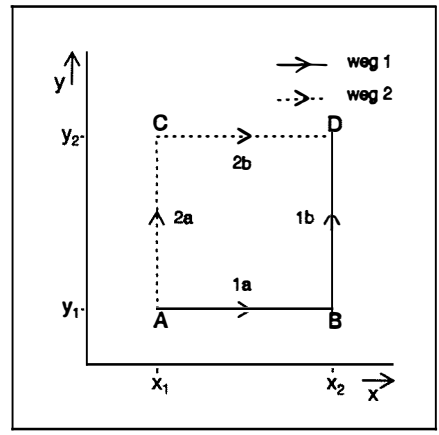
Als we met X-energie blijven bedoelen: de energievorm die verandert als X verandert, en die niet verandert als $dX=0$, dan kunnen we vaststellen: X-energie verandert alleen bij de

stappen 1a en 2b. Tijdens deze stappen geldt bovendien $dU = dU_X$, want $dU_Y=0$.
De X-energie voor toestand D is dan op twee manieren te berekenen. Gezien proces 1 is de X-energie van toestand D gelijk aan

$$U_X(X_2,Y_2) = \int_{X_1}^{X_2} L(X,Y_1).dX$$

en gezien route 2 is ze gelijk aan

$$U_X(X_2,Y_2) = \int_{X_1}^{X_2} L(X,Y_2).dX \ .$$



Afbeelding 3: twee wegen

De eerste integraal wordt uitgerekend bij constante Y gelijk aan Y_1, de tweede bij constante $Y=Y_2$. Er is geen wiskundige reden waarom daar hetzelfde uit zou komen. Het thermodynamisch uitgangspunt:

$$dU = L.dX + M.dY + N.dZ + ...$$

waarmee aangegeven was dat U als functie beschouwd wordt van de toestandsvariabelen X, Y en Z, biedt ons tot nu toe dus geen rechtvaardiging voor afzonderlijke energievormen, in het geval de energiecapaciteiten kruislings van elkaars variabelen afhangen.

2.6.3. De geldigheidsgrens van onderaf benaderd

Stel dat we *geen* algemene regel kennen die zegt dat waarden van U éénduidig te relateren zijn aan toestanden (X,Y,Z). Stel dat we in plaats daarvan een energievormentaal spreken die tot zijn maximale domein is uitgebreid (2.6.1). We kennen dan dus energievormen E_X, E_Y en E_Z met bijbehorende capaciteiten zoals L, M en N zodanig dat[*)]

$$dE_X = L.dX$$
$$dE_Y = M.dY$$
$$dE_Z = N.dZ$$

Bovendien weten we dat de capaciteit L een functie is van zijn eigen bijbehorende variabele X, en zo ook M van Y en N van Z. Stel dat deze beschrijvingswijze tot nu toe succesvol was.
Dan kunnen we door integratie controleren dat E_X van X afhangt, E_Y van Y en E_Z van Z.

[*)] Aansluitend bij de gewoonte in het VWO schrijven we 'E' voor energievormen die nog niet met de inwendige energie U in verband zijn gebracht.

Zouden we om één of andere reden (bijvoorbeeld om energiebehoud toe te passen) de drie energievormen bij elkaar optellen dan spreekt het vanzelf - maar het volgt ook uit wat we al weten - dat voor iedere combinatie van waarden voor X, Y en Z een (en zelfs: één) waarde gevonden kan worden voor de som der drie energievormen. Omdat er in deze beschouwingswijze geen procesgrootheid voorkomt, hoeft het *geen punt van overweging* te zijn, óf dat zo is. Niettemin zouden we verbaasd zijn als iemand hardnekkige pogingen ondernam om het tegendeel te betogen.
Brengen we nu een groep mensen met deze overtuigingen in de omstandigheid waar (naar onze beoordeling) capaciteiten kruislings afhankelijk zijn dan kan, door het vergelijken van meetresultaten voor twee wegen tussen dezelfde toestanden wellicht - dit zullen we moeten nagaan - worden besloten dat noch E_X noch E_Y een unieke waarde kan krijgen voor de eindtoestand.
Stel dat deze conclusie getrokken wordt. Men kan dan E_X en E_Y bijvoorbeeld procesgrootheden noemen. Wat weten deze mensen dan over de optelsom van beide energievormen E_X en E_Y?

> *Alvorens de optelling uit te voeren is er dan geen reden om te veronderstellen dat optellen van beide energievormen wél een unieke waarde oplevert voor de eindtoestand.*

Immers: de reden die men eerder had om na optellen een unieke waarde te verwachten, geldt nu niet meer. We kunnen concluderen dat de eerste hoofdwet, komende vanuit een energievormentaal, een wellicht verrassend *empirisch resultaat* zou zijn. Dit empirisch resultaat betreft inwendige energie als *toestandsgrootheid*. Het betreft *niet* 'energiebehoud', immers van 'energiebehoud' verwachtten we tot nu toe dat het in de voorafgaande energievormentaal al functioneerde (gezien VWO-schoolboeken, 2.1).

Om samen te vatten: ik heb laten zien dat de energievormentaal voldoet aan de criteria van consequentheid en toepasselijkheid op een beperkt ervaringsdomein (1.2). De energievormentaal betreft een fatsoenlijk grensgeval van de thermodynamica, zoals ook de klassieke mechanica een grensgeval is van de quantummechanica. We hoeven dus niet te "liegen" (1.2).
Daarna heb ik laten zien welke geldigheidsgrens men moet ontmoeten en welke niet-voorspelbare empirische ontdekking dan gedaan kan worden, om vanuit de energievormentaal te komen tot de thermodynamica, althans tot een aspect van de eerste hoofdwet.

2.7. Is een energievormen tussentaal nodig?

Nu zullen we de derde aan een tussentaal gestelde eis (1.2) gaan bespreken: een geschikte tussentaal moet zich laten voegen in een reeks tussentalen die begint bij de omgangstaal, eindigt bij de gewenste vaktaal en die verder zo kort of efficiënt mogelijk is. Dus: liefst helemaal geen tussentalen, als dat zou kunnen!
In thermodynamicaboeken voor tertiair onderwijs wordt doorgaans niet aangesloten bij een voorafgaande energievormentaal (waarin 'warmte'=C.T als een toestandsgrootheid te hanteren is). Integendeel, men bouwt het onderwerp thermodynamica opnieuw op, uit

eerste principes dat wil zeggen uit axioma's die de pretentie hebben om in zichzelf duidelijk te zijn, en die geen verdere onderbouwing nodig hebben: daar zijn het axioma's voor. De relatie met voorafgaande kennis loopt geheel via de term 'arbeid' waar men aansluit bij de ook in het VWO gehanteerde definitie $w = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$. De termen 'energie' en 'warmte' worden vervolgens beide omschreven in termen van 'arbeid' (waarbij ook nog de term 'adiabatisch systeem' nodig blijkt). Het is duidelijk dat men de thermodynamica zo kan **onderwijzen**.
Maar kan ze ook zo worden **begrepen**? Vollediger is deze vraag zo te stellen:

> Kan thermodynamica door mensen die de omgangstaal spreken en die bovendien de termen arbeid, kracht en weg in de samenhang $w = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$ kunnen hanteren, met behulp van aangeboden axioma's en definities worden begrepen?

Er zijn enige aanwijzingen dat het antwoord 'nee' zou kunnen zijn.
- Thermodynamicaonderwijs wordt doorgaans gegeven aan mensen die een uitgebreidere achtergrond in de natuurkunde hebben dan alleen "arbeid, kracht en weg in de samenhang $w = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$".
- Van degenen die thermodynamicaonderwijs volgen begrijpt maar een klein deel er iets van (zie 2.5).

Het is mogelijk dat degenen die er iets van begrijpen juist degenen zijn die er zonder hulp in slaagden, een uitgebreidere samenhang tot stand te brengen tussen hun thermodynamische taal en hun eerder verworven natuurkundige taal, waaronder de energievormen-taal.

Nadat ik deze mogelijkheid geopperd heb, wil ik nog enige intuïtieve redenen aanvoeren waarom het zinnig zou kunnen zijn deze mogelijkheid verder te overwegen.*) Dit wil ik doen door te overwegen wat we eigenlijk bedoelen met 'energie' - maar het gaat me nu niet om de vraag naar een definitie, het gaat me om de vraag naar de rol, de functie die 'energie' vervult binnen natuurkundig redeneren. Wat willen we dat onze leerlingen ermee kunnen **doen**? De lezer zal toegeven dat dit een andere en ruimere betekenis van 'bedoeling' is, dan de bedoeling zoals die blijkt uit een definitie.

Ernst Mach[63] schrijft in zijn "Principien der Wärmelehre":

> "Die Erfahrung lehrt, dass die *sinnlichen* Elemente α β γ δ... in welche die Welt zerlegt werden kann, der *Veränderung* unterliegen. Dieselbe lehrt weiter, dass einige dieser Elemente mit andern verknüpft sind, so dass sie *mit*einander erscheinen und verschwinden, oder dass eine Gruppe dieser Elemente auftritt, wenn eine andere verschwindet. *Die sinnlichen Elemente der Welt (α β γ δ...) erweisen sich als abhängig voneinander.* Thatsachen können sich so nahe stehen, dass sie dieselbe Art der α β γ... enthalten, nur dass die α β γ... der *einen* von jenen der *andern* durch die Zahl der gleichen Theile sich unterscheiden, in welche die α β γ... zerlegt werden können. Dann unterscheiden sich diese Thatsachen nur *quantitativ*. Dann lassen sich regeln finden, nach welchen aus der Zahl der Theile *einer* Gruppe der α β γ... die Zahl der

*) Een minder intuïtief antwoord op de gestelde vraag zal gegeven worden in 7.4, op grond van enige empirisch-didactische regels die dan geformuleerd zullen zijn.

> Theile einer *andern* Gruppe abgeleitet werden kann. Zwischen den ***Maasszahlen*** der $\alpha\ \beta\ \gamma$... bestehen dann *Gleichungen.*" (Mach[63], p.325)

Voorwerpen, op een bepaald moment waargenomen, kunnen we talrijke eigenschappen toeschrijven, onder andere een hoogte, een snelheid, een temperatuur, een kleur, een dichtheid.
Soms zien we een bepaalde groep eigenschappen verdwijnen, bijvoorbeeld een bepaalde kleur en een bepaalde dichtheid, waarbij een andere kleur en dichtheid verschijnen.
Of we zien een aantal eenheden hoogte verdwijnen waarbij een aantal eenheden snelheid verschijnt. Ook hierbij verdwijnt een groep eigenschappen, want tegelijk met de hoogte verdwijnt ook de mogelijkheid tot snelheidsverandering (ook een eigenschap) die tegelijk met die hoogte aanwezig was. Zo kan ik Mach verstaan.
Tussen het verdwenen aantal eenheden hoogte en het ontstane aantal eenheden snelheid, of algemener: tussen de twee groepen eigenschappen (hoogte, snelheid)$_{begin}$ en (hoogte, snelheid)$_{eind}$ bestaan dan vergelijkingen.
Over de interpretatie van die vergelijkingen valt nu iets bijzonders op te merken:

> Dass der Fall durch eine Höhe h eine Geschwindigkeit v erzeugt, dass mit dieser Geschwindigkeit die ursprüngliche Höhe wieder erstiegen werden kann, dass quantitativ $v = \sqrt{(2gh)}$ kann nur mit Hülfe der Erfahrung ermittelt werden. Darin liegt aber noch nichts von einer Aequivalenz; denn lange hat man die letzte Gleichung verwendet, ohne an eine Aequivalenz zu denken. Wenn ich aber sage, das *v soll mir so viel werth sein*, als das *h*, welches es zu überwinden vermag, so ist dies Sache einer *Form der Auffassung, die meinem Bedürfnis entsprechen kann.* (Mach[63], p.321)

Mach noemt "equivalentie" dus een manier om de empirisch gevonden, kwantitatieve relatie tussen een hoogte h en de daaruit ontstane snelheid v "op te vatten". Je gaat dan aan die hoogte en aan die snelheid een "gelijke waarde" toekennen, om uit te drukken dat beide tegen elkaar inwisselbaar zijn.

> Ich kann dieses Bedürfniss *empfinden* ohne demselben noch entsprechen zu können, wie es M a y e r geschehen ist, so lange er v und gh für gleichwerthig hielt. Erst wenn ich den Werth der Geschwindigkeit durch $v^2/2$, jenen der Fallhöhe durch gh messe, gelingt es mir, mein Bedürfniss zu befriedigen. (Mach[63], p.321)

Met dit alles heeft Mach het een en ander gezegd over de functie die 'energie' in de natuurkunde vervult, namelijk het vervullen van die behoefte die men kan ondervinden als men opmerkt dat eenheden van h en eenheden van v^2 wederzijds steeds in dezelfde verhouding tegen elkaar kunnen worden ingeruild.
Het is daarbij echter niet van belang of het om h en v^2 gaat, of om reactievorderingsgraad ξ en temperatuur θ, of om welk tweetal ook van die grootheden die ik eerder (2.6.1) *energievariabelen* noemde.
De *energiecapaciteiten*, zoals we deze eerder noemden, functioneren dan als middel om tot de toekenning van een gelijke waarde te komen, nadat men voor deze "vorm van opvatting" gekozen heeft: elke variabele wordt vermenigvuldigd met een zodanig gekozen capaciteit, dat de gewenste "gelijke waarde" kan worden berekend.
Gezien de functie die 'energie' dus uiteindelijk moet vervullen is het moeilijk anders voor te stellen dan dat de aandacht eerst uitgaat naar de afzonderlijke variabelen, en dat aan

veranderingen van deze variabelen vervolgens *waarden* worden toegekend zo dat twee tezamen optredende veranderingen een *gelijke waarde* krijgen toegekend. Hiertoe creëert men per variabele een geschikt gekozen *capaciteit*. Op deze wijze voorgesteld leidt de weg naar energie dus via energievormen, want het produkt van een bepaalde variabele en zijn bijbehorende capaciteit noemden we een energievorm.
Hiermee is niet aangetoond dat een energievormentaal "nodig" is, op weg naar thermodynamica. Er is slechts gezegd dat we, gelet op de functie die de term 'energie' in de fysica vervult, voorlopig geen kortere route zien dan via energievormen.[*)]

Eerdere pogingen in de aangeduide richting
In navolging van Mach kozen we om het functioneren van 'energie' te zien in nauwe relatie tot de zichtbare eigenschappen van voorwerpen (energievariabelen). Deze empirische trend wordt in balans gehouden door de erkenning dat de toekenning van gelijke (ruil)waarden een "Form der Auffassung" inhoudt. Mede onder invloed van de genetische kennisleer van Piaget, die nadruk legde op het handelen als bron van kennis[64], is een dergelijke genuanceerd-empirische benadering in diverse recente onderwijsontwerpen te herkennen, ook op het terrein van energieonderwijs[61,65,10]. Van Sprangs kritiek op het gebruik van 'enthalpie' in VWO-chemieonderwijs, in een stadium waar 'enthalpie' slechts als synoniem van 'warmte' kan worden begrepen[14], is ook in dit licht te verstaan: het introduceren van nieuwe of meer gedisciplineerde terminologie kan beter worden uitgesteld tot het domein van ervaringen zodanig is uitgebreid dat de redenen voor de nieuwe terminologie kunnen worden geformuleerd.
Met betrekking tot de integratie van 'energievormen' met 'inwendige energie' heb ik echter alleen een voorstel van G.S.M. Moore gevonden[10].

Om te komen tot een betere integratie van mechanica en thermodynamica werd door Moore[10] voorgesteld een onderscheid te maken tussen de totale energie en de inwendige energie van een systeem. De totale energie zou dan de som zijn van verschillende uit de mechanica bekende 'energievormen' en de 'inwendige energie'

$$E = U + E_k + E_p + ...$$

waarin E_k vermoedelijk de kinetische energie voorstelt behorende bij de snelheid van het massamiddelpunt van het systeem en E_p de potentiële energie behorende bij de plaats van dat massamiddelpunt. Als verdere mogelijke 'energievormen' (in te vullen op de "...") worden genoemd: "energy stored electrically, magnetically, as surface tension etc."
De eerste hoofdwet zou nu gelden voor de totale energie "E":

$$\Delta E = Q + W$$

De inwendige energie "U" wordt omschreven als "that form of stored energy which can be directly influenced by a heat transfer".

[*)] Zoals eerder gezegd (voetnoot, p.35) is de vraag van deze paragraaf nog niet beantwoord. In 7.4 zullen we op de gestelde vraag terugkomen.

Als voordeel van het onderscheiden tussen totale energie E en inwendige energie U wordt genoemd dat we dan kunnen beschrijven wat bedoeld wordt met 'dissipatie' van mechanische energie. Wanneer in een afgesloten Dewarvat een kogel door een stroperige vloeistof naar beneden valt dan spreken we van 'dissipatie'. Volgens Moore's voorstel is deze gebeurtenis nu als volgt te beschrijven: Omdat het systeem thermisch geïsoleerd is en er geen arbeid wordt verricht door een kracht die werkt op de systeemgrens, geldt Q=0 en W=0 ⇒ ΔE=0. Het massamiddelpunt van het systeem verplaatst zich naar beneden zo dat $\Delta E_p = mg\Delta h < 0$ en dus moet er een tweede energievorm zijn die een toename vertoont, om op een totale verandering gelijk 0 uit te komen. Uit een temperatuurstijging blijkt dat hier $\Delta U > 0$. Potentiële energie van het systeem wordt dus omgezet in inwendige energie, en dat is dus wat men bedoelt met 'dissipatie'. Hiermee heeft Moore m.i. een duidelijk voordeel aangewezen voor zijn gebruik van energievormen.

Zijn criterium om sommige energievormen al dan niet apart in de beschrijving op te nemen is echter onhelder. Het is mij bijvoorbeeld onduidelijk waarom hij 'energy stored bij applying pressure' niet heeft opgenomen in het rijtje mogelijke energievormen: misschien omdat hij weet dat de term $-p\mathrm{d}V$ conventioneel tot $\mathrm{d}U$ wordt gerekend?
Merk op dat als Moore schrijft: $E = U + E_k + E_p + ...$, deze schrijwijze impliceert dat elk van de nog toe te voegen energievormen tot de toestandsgrootheden behoort. Men kan immers voor elk van deze energievormen vragen in hoeverre de verandering van die energievorm bijdraagt aan de totale energie-verandering ΔE.
Of "energy stored electrically, magnetically, as surface tension" al dan niet als aparte toestandsgrootheden kunnen verschijnen, hangt echter van de situatie af. Bijvoorbeeld voor de elektrische energie van een geladen condensator geldt:

$$\Delta E_{el} = (1/2C).\Delta(e^2)$$

waarin C de ladingscapaciteit van de condensator en e de lading voorstelt.
Als nu deze capaciteit C van de temperatuur, dus ook van de entropie zou blijken af te hangen*), dan zou de geladen condensator als een thermodynamisch systeem beschreven moeten worden, waarbij ΔE_{el} vervangen zou moeten worden door w_{el} als procesgrootheid:

$$\mathrm{d}U = T.\mathrm{d}S + (1/2C).\mathrm{d}(e^2) \qquad đw_{el,\,rev} = (1/2C).\mathrm{d}(e^2)$$

Tussen de energiecapaciteiten $(1/2C)$ en T bestaan dan kruislingse afhankelijkheden (te beschrijven met een Maxwellrelatie) die verhinderen dat we ΔE_{el} apart als verandering van een toestandsgrootheid kunnen vermelden. Moore geeft echter niet aan wanneer een energievorm als E_{el} bruikbaar is en wanneer niet. De permanente bedachtzaamheid die nodig is om flexibel sommige energievormen nu eens apart te beschouwen, dan weer (als het nodig blijkt) ze als procesgrootheden in *'dU'* op te nemen, wordt door Moore's voorstel niet gestimuleerd.

Moore's voorstel kenmerkt zich erdoor dat hij probeert energievormen-taal en thermodyna-

*) De *Debye* vergelijking voorspelt dat dit soms het geval is (*Atkins* [57], p.650).

mische taal te verenigen. Hij merkt niet op dat de energievormentaal terugkijkend als een vereenvoudiging en als een bijzonder geval van de thermodynamische taal kan worden gezien (2.6.3). In zijn poging beide talen te verenigen blijft dan ook de vraag buiten beschouwing, hoe men van de eenvoudiger taal naar de meer gecompliceerde, meer algemeen-geldige taal kan komen. We zien in Moore's voorstel dus een poging om meteen "de volle waarheid" te vertellen, en we zien deze poging falen.
Door een energievormentaal *als tussentaal* te ontwerpen verwachten we het voordeel van Moore's voorstel te kunnen behouden en het getoonde bezwaar te kunnen ondervangen. Hiertoe wordt nu een nieuw onderwijsontwerp gepresenteerd.

2.8. Een onderwijsontwerp dat via 'ruilwaarden' leidt tot 'energie' in de thermodynamische betekenis

Met de keuze voor een energievormentaal is nog niet gezegd dat het woord 'energievormen' geschikt gekozen is, of dat de aanpak in het VWO bij de introductie van 'energievormen' de meest handige is.
Een "door ons toegekende waarde" (Mach[63], zie 2.7) is namelijk nog wel iets anders dan een in een stofportie aanwezig-gedachte realiteit. De wijziging die we hier voorstellen vertoont overeenkomst met wat De Vos[66] gezegd heeft over deeltjesmodellen. De Vos bespreekt het probleem dat leerlingen de hen gepresenteerde atoom- en molecuulmodellen opvatten als feiten. Gevolg is dat zij in de war raken zodra een model vervangen wordt door een volgend. Het model functioneert voor hen niet als model. Als oplossing stelt De Vos voor het toeschrijven van eigenschappen aan atomen en moleculen zoveel mogelijk door leerlingen zelf te laten verrichten, op basis van door hen opgedane ervaringen met macroscopische verschijnselen.
De tweedeling micro-macro is hier niet aan de orde, maar wel de keuze tussen eigen toekenning of medegedeeld feit. Als leerlingen de toekenning van "waarde" aan een eigenschap van een voorwerp zelf verricht hebben, dan zal die waarde niet te snel als een in de stofportie aanwezige realiteit worden gezien, zo verwachten wij. Men zal dan eerder kritisch kunnen zijn ten aanzien van zo'n waarde, dan wanneer men op gezag heeft moeten aannemen: energievormen bestaan. De volgende schets van een onderwijsontwerp geeft aan hoe men tot zo'n toekenning van 'ruilwaarden' aan momentane eigenschappen van voorwerpen zou kunnen komen.

2.8.1. 'Ruilwaarden'

Op grond van ervaringen die gedeeltelijk uit de leefwereld stammen, gedeeltelijk bij practicumproeven kunnen worden opgedaan lijkt het me mogelijk te komen tot de volgende generalisaties:

- als je hoogte hebt, kun je snelheid krijgen
- als je snelheid hebt, kun je hoogte krijgen

- als je snelheid hebt kun je temperatuur(verhoging) krijgen
- als je snelheid hebt kun je licht krijgen, *via elektriciteit*

(kan het ook via temperatuur?)
- als je snelheid hebt kun je lading/spanning (een geladen condensator) krijgen
- als je lading/spanning (condensator) hebt kun je licht krijgen
- als je licht hebt kun je temperatuur(verhoging) krijgen
- als je temperatuur(verhoging) hebt kun je snelheid krijgen
- als je brandstof en zuurstof hebt kun je temperatuurverhoging krijgen
- als je temperatuurverhoging en water hebt kun je waterstof en zuurstof krijgen

Dit rijtje is nog voor uitbreiding vatbaar.
Fietsen in heuvelig landschap is misschien al voldoende om tot de eerste twee van deze generalisaties te komen, die m.i. in nauwe aansluiting bij de omgangstaal te formuleren zijn. Hoewel 'verplaatsing' een gebeurtenis aanduidt is 'snelheid' ook in omgangstaal iets wat je op zeker moment 'hebt', dus een toestandseigenschap.
De volgende genoemde generalisaties vragen uitbreiding van de ervaring met behulp van practicumproeven, hoewel de derde en vierde ook nog met fietsen als thema in verband te brengen zijn.

Vergeleken met gebruikelijke introducties van 'energie' is mijn voorstel nauwelijks origineel te noemen. Een klein maar m.i. belangrijk verschil is dat ik overal het achtervoegsel '-energie' heb weggelaten. De gebruikelijke werkwijze is immers om leerlingen beweringen voor te zetten als:

- als je hoogte-energie hebt kun je snelheids-energie krijgen

of:

- hoogte-energie kan worden omgezet in snelheidsenergie

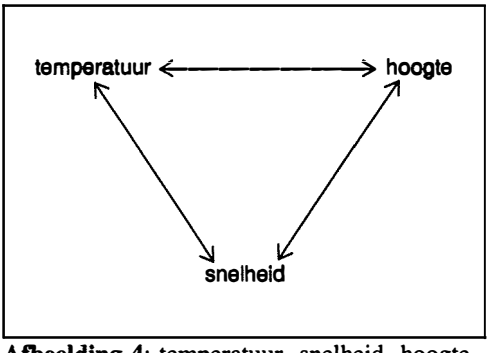
Ik zie echter niet wat deze 'energie'-achtervoegsels nu aan betekenis toevoegen, voor iemand die het energiebegrip nog niet kent.
De redenen om een nieuw begrip (energie) te gaan hanteren kunnen m.i. niet helder voor het voetlicht treden zolang dat (voor leerlingen onbekende) begrip al meteen in de gekozen woorden aanwezig wordt gesteld. We kunnen die 'energie'-achtervoegsels dus in het begin van het onderwijs gevoeglijk en zonder verlies aan betekenis weglaten.
De genoemde rij empirische generalisaties hoeft dan ook niet in een apart 'energie'-hoofdstuk ontwikkeld te worden. Ze kunnen elk apart ontwikkeld worden wanneer de betreffende onderwerpen (beweging, warmte, elektriciteit) aan de orde zijn.

Beschikt men eenmaal over zo'n rij generalisaties dàn is het misschien tijd voor een apart hoofdstuk, dat echter niet meteen 'energie' hoeft te heten. Een aardige titel zou zijn "als je ... hebt, kun je ... krijgen", of iets dergelijks.
Het op een rijtje zetten van deze regels kan leiden tot de opmerking dat sommige regels *elkaars omgekeerde* zijn.
De waarneming dat hoogte vermindert als snelheid vermeerdert -en vice versa- kan leiden tot de vraag hoe dat zit bij andere regels uit de rij. Als temperatuur ontstaat dankzij snelheid, dan zien we dikwijls de snelheid verminderen.

Omgekeerd: als snelheid ontstaat dankzij temperatuur (molentje boven CV-radiator), vermindert dan ook de temperatuur? Er is aanleiding om de vraag te stellen, maar het antwoord hoeft niet meteen duidelijk te zijn. Als licht (via elektriciteit) ontstaat dankzij snelheid, vermindert de snelheid dan ook? en zo ja, heeft die vermindering dan iets te maken met 't ontstane licht of komt het alleen "omdat de dynamo niet zo soepel loopt?" Is zo'n vraag eenmaal voor leerlingen tot vraag geworden, dan zullen ze wellicht proeven willen doen om tot een oplossing te komen.

Ook vallen uit de genoemde regels *drietallen en viertallen* te construeren zodanig dat uit hoogte uiteindelijk weer hoogte, of uit temperatuur weer temperatuur wordt verkregen. Dit alles kan de vraag oproepen: hoeveel hoogte uit een bepaalde hoogte?
Anders gesteld: kan dezelfde hoogte (of snelheid, of lading, of temperatuur) van een voorwerp meer dan ééns gebruikt worden om een gesloten ketting van gebeurtenissen te realiseren? Hoe vaak? Kun je de oorspronkelijke hoogte weer terugkrijgen? Precies? Bijna? Onder welke voorwaarden? Zou het fijn zijn als dat kon?

Als m'n vermoeden juist is dat deze vragen - op de aangegeven wijze voorbereid - de interesse van leerlingen kunnen wekken, dan is de weg geopend voor kwantitatieve proeven of experimenten.
Stel dat het drietal temperatuur-snelheid-hoogte wordt uitgekozen voor verder onderzoek.
De vraag 'hoeveel hoogte uit een bepaalde hoogte' kan het dan nodig / zinvol maken om eerst eens te onderzoeken:
- Hoeveel snelheid uit een bepaalde hoogte?
- Geldt hier *gelijk-opgaan*? Dat wil zeggen: leidt dubbele hoogte tot dubbele snelheid?*)
- Zo nee, kennen we een functie (wiskundig) van de ontstane snelheid die wel gelijk opgaat met de verdwenen hoogte?
- Geldt de gevonden relatie tussen snelheid en hoogte ook *wederzijds* d.w.z, geldt ze ook voor het ontstaan van hoogte uit snelheid?



Afbeelding 4: temperatuur, snelheid, hoogte

Besluit men na discussie tot 'ja', dan kan uit dit standpunt een eerste antwoord op de vraag 'hoeveel hoogte uit een bepaalde hoogte' worden beredeneerd: de oorspronkelijke hoogte kan volgens dit standpunt worden terug-verkregen. Proeven waarbij geprobeerd wordt de oorspronkelijke hoogte daadwerkelijk terug te krijgen kunnen noodzaken tot het formuleren van een voorwaarde.

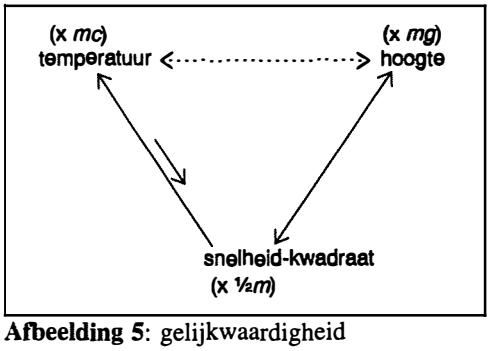
Het gevonden resultaat kan een uitdaging betekenen om een soortgelijke wederzijdse

(* De uitdrukking 'gelijk-opgaan' is ontleend aan De Jong[104].

relatie nu ook tussen snelheid en temperatuur, of tussen hoogte en temperatuur te vinden. Wanneer dan (anders dan hierboven) de veranderingen niet alle op één voorwerp betrekking hebben, dan zal het nodig worden om *evenredigheidsfaktoren* in te voeren die de verschillende *voorwerpen* karakteriseren.

Een wederzijdse relatie tussen snelheid en temperatuur kan bijvoorbeeld gevonden worden als de snelheid betrekking heeft op een vliegwiel en de temperatuur op een portie gas, opgesloten onder een zuiger.
De snelheid van het vliegwiel kan dan gebruikt worden om het gas samen te persen, waarbij de temperatuur stijgt. Vervolgens kan het gas gebruikt worden om het vliegwiel weer in snelheid te laten toenemen, waarbij de temperatuur van het gas daalt. De gevonden relatie tussen de verandering van snelheid-kwadraat en temperatuur blijkt wederzijds, zodat, wanneer het gas terug is op de begintemperatuur, het vliegwiel zijn oorspronkelijke snelheid weer terug kan hebben verkregen.
De situatie is analoog aan degene die we zagen bij hoogte en snelheid, in die zin dat de genoemde mogelijkheid om de beginsituatie te herstellen alleen onder bepaalde voorwaarden wordt gevonden, en dan nog alleen als een te benaderen limietgeval.

Wanneer deze ervaringen niettemin aanleiding zouden zijn om een *gelijke waarde* te willen toekennen aan de tegen elkaar inwisselbare hoogte en snelheid, respectievelijk snelheid en temperatuur, dan kan men proberen voor elk van deze 'variabelen' de 'ruilwaarde-per-eenheid' van die variabele te bepalen, dat is de 'ruilwaardecapaciteit' van die variabele. Een mogelijk resultaat is weergegeven in Afbeelding 5.



Afbeelding 5: gelijkwaardigheid

Binnen bepaalde trio's van temperatuur, hoogte en snelheid geldt nu gelijkwaardigheid in die zin dat, als je het ene trio hebt, je het andere kunt krijgen en vice versa. Deze gelijkwaardigheid is te controleren door temperaturen te vermenigvuldigen met warmtecapaciteit (*mc*), hoogten met *hoogte-ruilwaardecapaciteit* (*mg*) en snelheid-kwadraat met *kinetische ruilwaardecapaciteit* (*½m*).[*)]
En hiermee zien we dat de term 'ruilwaarde', als een door ons toegekende waarde (niet als een magisch iets dat overal aanwezig is) de functie gaat vervullen die 'energie' in de natuurkunde vervult: ze maakt het mogelijk te argumenteren over de *inwisselbaarheid van toestanden* die beschreven zijn met (combinaties van) variabelen.

(* De genoemde capaciteit-formules zijn maar één mogelijkheid uit velen. Evengoed mogelijk zijn: snelheidscapaciteit *m*, hoogtecapaciteit *2mg*, thermische capaciteit *mc* (met voor *c* andere waarden). Of ook: hoogtecapaciteit *m*, snelheidscapaciteit *m/2g*, thermische capaciteit *mc* (met opnieuw voor *c* andere waarden). Wel is het zo: als voor één voorwerp voor één variabele een capaciteit is vastgelegd, dan kunnen met behulp van het gezichtspunt "gelijke ruilwaarde toekennen" alle andere gewenste capaciteiten worden bepaald.

Ze doet dat echter op een, vergeleken met de thermodynamica, primitieve manier, omdat de aandacht nog gericht is op ruilwaarden van afzonderlijke variabelen, en niet zozeer op de ruilwaarde van een toestand als *combinatie* van variabelen. Men gaat er nog van uit dat als een voorwerp zowel een verhoogde temperatuur als een veranderde samenstelling heeft, dat dan aan beide eigenschappen een afzonderlijke ruilwaarde kan worden toegeschreven, althans: dat zal men willen proberen.
De verwachting is, dat wie over ruilwaarden spreekt als door ons toegekende waarden, eerder open staat voor bijstelling of verfijning van deze spreekwijze, dan wie geleerd heeft dat energievormen overal om ons heen aanwezig zijn. Merk op dat hierbij ook de uitdrukking 'energiebehoud' voorlopig door een andere is vervangen, namelijk 'gelijke ruilwaarde' voor twee toestanden die tegen elkaar blijken te kunnen worden ingewisseld.

2.8.2. Overgang naar 'inwendige energie'

In deze paragraaf kan ik meer doen dan schetsen, want ten behoeve van de overgang naar 'inwendige energie' is een serie opgaven ontworpen, die in het eerste jaar van de WO chemiestudie aan de UvA is uitgeprobeerd, in een experimentele groep van 5 studenten. Hier wordt verwezen naar de derde en laatste versie van deze opgavenserie (bijlage 3)[*)], omdat deze het best de huidige inzichten weergeeft. Hierna wordt deze opgavenserie in zoverre toegelicht als op grond van het voorafgaande mogelijk is, dus: in grove lijnen. Details waarvoor bijvoorbeeld kennis van eerdere onderwijsexperimenten (bijlagen 1 en 2) nodig is, worden toegelicht in deel 2.

Eerst wordt geprobeerd de groep studenten dáár te brengen waar onze vorige paragraaf (2.8.1) eindigde: bij een interpretatie van 'energievormen' in termen van 'ruilwaarden' (§1)[3]. Er worden enkele proeven (soms met, soms zonder hun resultaten) verteld[+)] die met energievormen of ruilwaarden naar verwachting bevredigend te beschrijven zijn. Bij de eerste daarvan, wordt gevraagd een reden te formuleren om van 'gelijke waarde' te spreken, zoals hierboven (2.8.1) al aan de orde kwam. Dan wordt uitgelokt tot verschillende keuzen bij het hanteren van 'capaciteiten' (1-2 t/m 1-4)[3]. Er kan blijken dat deze keuzen gevolgen hebben voor de resulterende eenheid van 'ruilwaarde'.
Nadat een eenheid is gekozen (1-4f)[3] volgt een opgave waarin de termen 'energievariabele', 'energiecapaciteit' en 'energievorm' worden aangereikt. Deze termen kunnen dan, zo wordt verwacht, door studenten gebruikt worden om een structuur in hun energievormentaal op te merken: van hoogte, snelheid-kwadraat en temperatuur kan worden opgemerkt dat ze de rol van energievariabelen vervullen, van 'warmtecapaciteit' dat het de rol van een energiecapaciteit vervult, enzovoorts (1-5)[3]. Hierna volgen nog enkele opgaven, waar de nu onder woorden gebrachte structuur kan worden uitgebreid met twee nieuwe variabe-

---

[*)] Naar opgaven uit de experimentele opgavenseries wordt verwezen door het nummer van de opgave te noemen, gevolgd door, in superscript, het nummer van de bijlage. Deze bijlagen zijn apart gebundeld in "band 2".

[+)] Overal waar in het vervolg sprake is van 'proeven' die worden aangeboden, verteld of beschreven (hier: zie 1-4[3], 1-6[3] en 1-7[3]), geldt dat het gaat om fictieve proeven, waarvan de resultaten door de ontwerper zijn berekend. Een verantwoording van deze aan leerlingen aangeboden gefingeerde 'resultaten' wordt gegeven in bijlage 5.

len (vorderingsgraad ξ van een reactie, en hoeksnelheid-kwadraat ω^2) met hun energiecapaciteiten: de reactie-energie, hier te noemen 'reactie-energiecapaciteit' en het halve traagheidsmoment $\frac{1}{2}I$, ook te noemen 'energiecapaciteit van de hoeksnelheid'.

Hierna is het de bedoeling om al binnen de energievormentaal te gaan onderscheiden tussen energievormen die het mogelijk maken een energie aan een toestand (d.i. een hoogte, of een snelheid, of een temperatuur) toe te schrijven, en energievormen waarbij dat niet lukt. Verplaatsing in een zwaartekrachtveld wordt daartoe vergeleken met verplaatsing tegen een wrijvingskracht in (§2)[3].
Hiertoe wordt een variant van de ruilwaardentaal ontwikkeld. Immers, in plaats van te zeggen: een hoogte wordt ingeruild voor een snelheid (toestanden), kan ook gezegd worden: een hoogteverandering wordt ingeruild voor een snelheidsverandering. Maar 'verandering' duidt een gebeurtenis aan. De ruilwaarde van een hoogteverandering zou dus een gebeurtenis-eigenschap kúnnen zijn. Het hoeft dus niet bijvoorbaat vanzelf te spreken dat de omhoog geheven steen deze ruilwaarde 'bezit'.
Na het vergelijken van verschillende 'wegen' door de ruimte wordt de conclusie verwacht dat het bij de omhoog geheven steen mogelijk is om energiewaarden toe te schrijven aan de steen op een bepaalde hoogte. Het woord 'energiewaarde' wordt nu dus gereserveerd voor een eigenschap van een *toestand* (steen op hoogte h). Bij de steen verplaatst over de tafel kan alleen gesproken worden over de ruilwaarde van deze *gebeurtenis.*[*),67]

Vervolgens worden ervaringen aangeboden - middels vertelde proeven (3-1, 3-3c en 3-6)[3]- waar de verandering van de twee variabelen niet evenredig is, en waar dus aanleiding is te zeggen dat één van beide capaciteiten niet constant is (3-1e)[3].
Hierna worden stapsgewijs de wiskundige termen 'gemiddelde', 'limiet', 'afgeleide' en tenslotte 'primitieve' geïntroduceerd om tot een oplossing te komen voor het probleem dat we enerzijds door meting wel eenduidige energiewaarden kunnen toekennen aan temperaturen als verschillende toestanden van het voorwerp (3-3c), maar dat we onze *voorspellingsmogelijkheid* voor energiewaarden (E = capaciteit maal variabele) verloren hebben. Na 3-8 kan deze voorspellingsmogelijkheid herwonnen zijn, met behulp van de techniek van het *integreren.*
Hiermee is het spreken over afzonderlijke energievormen uitgebreid tot zijn maximale domein (zie 2.6.1). Behalve 'warmte' kunnen ook andere energievormen gebruikt blijven worden in situaties waar de energiecapaciteit van zijn eigen bijbehorende variabele af-

---

(* Lanzara en Zangara[67] bespreken een interessante proef voor gebruik in elektriciteits onderwijs. Bij het meten van een spanningsverschil tussen twee punten in een elektrische schakeling verwachten studenten dat de uitslag van de voltmeter onafhankelijk zal zijn van het precieze verloop van de draden die de voltmeter met de twee punten verbinden waartussen men wil meten. Deze verwachting komt niet uit als de meting gedaan wordt in aanwezigheid van een veranderend magnetisch veld. De 'ruilwaarde' van de plaatsverandering van een Coulomb aan lading, blijkt dus in zo'n geval afhankelijk van details van de gevolgde route. Men kan dan aan de verschillende plaatsen in de schakeling niet langer een eenduidige 'potentiaal' toeschrijven, of althans geen potentiaal die het gedrag van de ladingdragers geheel beschrijft.
Wrijvingskracht en elektromagnetische EMF geven dus twee niet-thermodynamische analoga voor het verschijnsel 'procesgrootheid'.

hangt. Opgave 3-9[3] toont dit voor hoogte-energie.

Dan wordt er van proeven verteld, die aanleiding kunnen zijn op te merken dat de reactie-energiecapaciteit afhangt van de temperatuur (4-1 e en f, 4-2k en l)[3], dat is: van een variabele die niet zijn eigen bijbehorende variabele is. Dit is wat we eerder aanduidden als kruislingse afhankelijkheid (zie 2.6.2).
Er wordt dan gevraagd de inmiddels verwerkte meetresultaten weer te geven in een diagram, waarin nu voor het eerst een *'toestand'* kan worden onderscheiden door een *tweetal* variabelen tegelijk (4-3 en 4-4)[3], in plaats van door één variabele, zoals tot dan toe de gewoonte was (zie 2.8.1). In dit diagram kunnen twee 'wegen' worden afgebeeld, tussen dezelfde begin en eindtoestand. Voor beide wegen zijn meetresultaten beschikbaar uit de eerdere opgaven. Er kan dan gecontroleerd worden of het lukt afzonderlijke energiewaarden toe te schrijven aan de eindtoestand, voor beide betrokken energievormen afzonderlijk (4-5 en 4-6)[3].
Wanneer opgemerkt wordt dat deze beide energievormen betrekking hebben op dezelfde materieportie (4-7a)[3], dan kan dit naar verwachting een aanleiding zijn om de optelsom van de verschillende ruilwaarden der gebeurtenissen uit te proberen als mogelijkheid om energiewaarden toe te schrijven aan toestanden, die nu gekenmerkt zijn door een combinatie van variabelen. Hier wordt dus *inwendige energie als "empirisch resultaat"* verwacht (zie 2.6.3).

Tenslotte volgen er nog enkele opgaven die mikken op het doorzien van de rol van kruislingse afhankelijkheid als reden voor het procesgrootheid-zijn van de betrokken energievormen (4-9 en 4-11)[3], en van het belang van de keuze van *systeemgrenzen* (4-10)[3]. Hier kan men opmerken waarom energie-effecten niet meer door 'omzetting binnen een systeem' worden gemeten*), maar in principe door *energietransport* over de systeemgrens.

2.8.3. Naar energie als iets dat bestaat

Eerder (2.8.1) werd benadrukt dat ruilwaarde beleefd zou moeten worden als een door ons toegekende waarde. Volgens de daar geschetste opzet kan er geen sprake zijn van een *wet* van behoud van energie. Immers, volgens die opzet kiezen studenten zelf de capaciteiten zodanig dat een gelijke ruilwaarde (voor twee tezamen optredende veranderingen) het resultaat is. Deze gelijkheid wordt gekozen, ze wordt dus niet geconstateerd. Gevolg is, dat er voorlopig geen redenen zijn om over deze ruilwaarde te praten als over iets wat in een voorwerp aanwezig is - net zo min als het zin heeft te zeggen dat de prijs van een brood in het brood aanwezig is.
Als echter eenmaal de capaciteiten zo gekozen zijn dat een gelijke ruilwaarde het gevolg is, dan kunnen er daarná en op basis van die keuze wel feiten worden geconstateerd. Eén van die te constateren feiten is de niet-voorspelbare empirische constatering van de 'inwendige energie' als toestandsgrootheid, die mogelijk wordt na de keuze om de energievormen of ruilwaarden per systeem te sommeren.

(* Zoals we eerder zagen: water en zwavelzuur samenvoegen in een bekerglas, waarna men de temperatuurstijging meet.. (zie 2.4)

Deze constatering nu, zou aanleiding kunnen zijn om 'energie' wel als iets buiten ons te gaan zien, omdat ze een regelmatigheid blijkt te vertonen die wij er niet tevoren in hebben gelegd, maar die we constateren.

2.9. Conclusie

Er is geconstateerd dat in het VWO een 'energievormen'-taal functioneert (2.1) die verschilt van de taal die in wetenschappelijk thermodynamica-onderwijs wordt nagestreefd (2.2). Getoond werd dat de overgang tussen beide talen, zoals die op dit moment in VWO schoolboeken is georganiseerd (2.3), zowel bij leerlingen als leraren onbevredigend functioneert (2.4). Een aantal problemen in WO thermodynamica-onderwijs kon in verband worden gebracht met deze niet goed gerealiseerde overgang (2.5).
Het tussentaal-concept, geïntroduceerd in 1.2, is gebruikt om helderheid te scheppen over de aanvaardbaarheid (2.6) en gewenstheid (2.7) van een 'energievormen'-taal in onderwijs.
Naar aanleiding van deze analyse werden ontworpen (2.8):
a) een minder dogmatische variant van de energievormentaal, waarin sprake is van door ons toegekende 'waarden' in plaats van 'energie' als iets dat in verschillende vormen 'bestaat'. Van deze ruilwaardentaal wordt verwacht dat ze de overgang naar thermodynamische taal beter voorbereidt (2.8.1).
b) de wijze waarop de overgang van 'ruilwaarden'-tussentaal naar 'inwendige energie'-taal kan plaatsvinden (2.8.2).
Hierbij kon worden aangegeven hoe en wanneer het natuurwetenschappelijk spreken van 'energie' als iets dat 'bestaat' zinvol kan worden (2.8.3).

3. Energie: van nut naar behoud

In secundair onderwijs wordt dikwijls geprobeerd aan te sluiten bij het gebruik van het woord 'energie' zoals dat bekend is in de omgangstaal. Hierbij wordt 'energie' geassocieerd met levendigheid, beweeglijkheid, fitheid (als het over levende wezens gaat) of met een werkingsvoorwaarde voor apparaten, en daarmee ook met de rekeningen van de energiebedrijven die men moet betalen, of met de 'energiecrisis'.[29,68,69]
In de natuurkunde zijn deze associaties niet langer meer verbonden aan het woord 'energie', aangezien 'energie' dan iets aanduidt dat in een geïsoleerd systeem steeds constant blijft. De levendigheid, de waarneembare bewegingen en het nut daarentegen blijven in een vat dat van interactie met de buitenwereld is verstoken doorgaans niet constant: zij nemen af. Gesuggereerd wordt daarom dat, wat leerlingen 'energie' noemen (Solomon[20]: "energeticness"), beter gezien kan worden als voorloper van de natuurkundige termen 'entropie'[*)] of 'vrije energie'[+)], dan als voorloper van energie als behouden grootheid. Aangezien een voorloper van de natuurkundige 'energie' in de uitingen van leerlingen niet is aangetroffen, trekt men de conclusie dat bepaalde formuleringen van de tweede hoofdwet voor leerlingen eerder toegankelijk kunnen zijn dan de eerste hoofdwet[68,20,22,21,23]. Deze conclusie staat op gespannen voet met de gebruikelijke werkwijze, zowel in secundair als in tertiair onderwijs.
In dit hoofdstuk wordt eerst deze gebruikelijke werkwijze geëvalueerd. Tegen de achtergrond van het gebruik van 'energie' in de omgangstaal (3.1) wordt de introductie en de verdere ontwikkeling van 'energie' in een schoolboek voor VWO bezien (3.2). Dit leidt tot het vinden van een schijnbare tegenstrijdigheid (3.3) en daarmee van een tussentaal, die in verschillende schoolboeken is aan te wijzen (3.4). Onderwijsproblemen in zowel secundair als tertiair onderwijs laten zich hiermee begrijpen (3.5). De vraag wordt gesteld hoe het komt dat 'energie' ooit geassocieerd is geraakt met 'nut', en waar de redenen liggen om deze associatie los te laten (3.6). Een antwoord op die vraag leidt tot een schets voor een onderwijsgang (3.7), ter aanvulling op wat daarover al gezegd is in hoofdstuk 2.

3.1. 'Energie' in de omgangstaal

Van der Valk[29] laat met citaten van leerlingen zien dat, als gezegd wordt dat een batterij energie "geeft" aan een walkman, er niet bedoeld hoeft te zijn dat de batterij deze energie aanvankelijk "bezat" (p.58)[29]. Het werkwoord "geven" wordt namelijk ook gebruikt zoals in 'iemand een duw geven': wanneer gezegd wordt dat A aan B *een duw geeft*, wordt niet bedoeld dat A deze duw eerst 'had' en evenmin dat de ontvanger hem daarna 'heeft'. Een duw is immers niet 'iets' wat je kunt hebben. Op dezelfde wijze kan ook gezegd worden dat een batterij 'energie geeft' aan een walkman (p.56)[29].

(* indien het gaat om de veranderingsmogelijkheden (potentiële 'levendigheid') in een geïsoleerd systeem

(+ indien het gaat om veranderingsmogelijkheden van een systeem bij constante temperatuur en druk.

Solomon[20] signaleert eenzelfde woordgebruik:

T. Here's a piece of bread. Does it have any energy?
P's No, no... Only when you eat it (Solomon[20])

Van energie wordt gezegd dat ze wordt 'opgewekt', bijvoorbeeld in elektriciteitscentrales en dat ze wordt 'verbruikt', bijvoorbeeld thuis.
Het stopcontact, brandstof, voedsel 'geeft' energie; een walkman, een auto, een mens 'krijgt' energie (wordt energiek).
Een tweede gebruiksmogelijkheid voor 'energie' ziet Van der Valk zodra 'energie geven' ook zoiets als 'overhandigen' gaat betekenen, bijvoorbeeld wanneer 'energieverlies' (aangeboden in een onderwijstekst) wordt opgevat als "op de verkeerde plaats terecht komen". In dat geval is 'energie' wel *een 'iets'* geworden (p.55)[29], mogelijk een zeer kortlevend iets tussen opwekking en verbruik. Bijvoorbeeld een pan met water 'verbruikt' energie om warm te worden (p.53)[29]. Deze tweede gebruiksmogelijkheid voor 'energie' wordt door een deel van de leerlingen al vóór de aanvang van het onderwijs gehanteerd, een ander deel leert deze gebruiksmogelijkheid gedurende het onderwijs.
Voor beide groepen leerlingen houdt gebruik van het woord 'energie' verband met de bedoelingen van de *gebruiker* van een apparaat. In vrije valsituaties, waar een bedoeling en dus een menselijk nut afwezig is, willen veel leerlingen (aanvankelijk) dan ook niet van energie spreken (p.55)[29], wel bij een stuwdam (p.56)[29]. De warmte afgegeven door een centrale verwarming wordt met energie in verband gebracht, maar bij de warmte die wordt opgemerkt bij apparaten die niet als verhitters bedoeld zijn, twijfelen de leerlingen (p.54)[29].
Omkeerbaarheid, bijvoorbeeld de mogelijkheid om een ontladen batterij weer "op te laden" waarna hij weer gebruikt kan worden tot hij "leeg is", kan aanleiding zijn tot het toeschrijven van energie aan de batterij óók wanneer hij niet gebruikt wordt, maar wel 'opgeladen', en naar de ervaring leert, gebruiksklaar is (p.58)[29]. Ook Solomon noemt "the recharging of cells" als ervaring die leerlingen ertoe kan brengen te "accepteren" dat energie kan worden "*opgeslagen*", waarbij dus energie wordt toegekend aan een voorwerp, zonder dat dit voorwerp zich op dat zelfde moment 'energiek' gedraagt. Ook dan heet nog steeds de energie 'verbruikt' als na enige uren taak-vervulling de batterij leeg is[20].
Kesidou en Duit[60] (p.66) formuleren het zo dat het woord 'energie' gebruikt wordt als aanduiding van een oorzaak die tot een gevolg leidt. Heeft men energiebehoud onderwezen gekregen, dan wordt dit zo opgevat dat de energie voortbestaat in zijn gevolgen, maar niet als energie.
Hiermee is dan de beginsituatie voor VWO-onderwijs geschetst, tezamen met enige geconstateerde ontwikkelingsmogelijkheden die de omgangstaal biedt.

3.2. Van 'iets nuttigs' naar 'iets dat behouden blijft'

We zullen nu tonen op welke wijze een onderwijsgang, Natuurkunde overal[48], inspeelt op het gebruik van het woord 'energie' in de omgangstaal. Enkele trefwoorden (cursief in 3.1) die we daarbij gebruiken zijn ontleend aan Van der Valk[29].

▸ *a) aansluiten bij de omgangstaal*
Natuurkunde overal[48] introduceert het woord 'energie' in het deel voor klas 2 als volgt:

> "▸ Robin Peters is verhuizer. Marije van Zanten is lokettiste op het postkantoor. Beiden eten tussen de middag op hun werk.
> Robin heeft meer boterhammen meegenomen dan Marije. Een verhuizer moet immers veel meer slepen en sjouwen dan een lokettiste. Door te eten krijgen beiden de *energie* die ze nodig hebben om hun werk te doen.
>
> ▸ Bij een auto is het net zo. Ook die heeft 'voedsel' nodig om zijn werk te doen: om te kunnen rijden dus. Zijn voedsel komt uit de benzine. De benzine levert de *energie* voor de auto" (Natuurkunde overal[48], p.179)

Er worden situaties genoemd waar we in de omgangstaal het woord 'energie' gebruiken. Het betreft situaties waar mensen met hun bedoelingen de hoofdrol spelen (zie 3.1). Het spreken over energie als een 'iets' dat kan worden bezeten en vervolgens overhandigd kan men, als men wil, hier ook horen. Nodig is dat niet want "de benzine levert energie" kan ook worden opgevat in de zin van 'A geeft B een duw'.

▸ *b) naar 'energie' als een iets dat kan worden opgeslagen*
De eerste uitspraak die niet meer zo kan worden opgevat volgt twee bladzijden later:

> "Je ziet dat je batterijen en gas nodig hebt om allerlei dingen te doen. We spreken af:
> Een voorwerp of een stof heeft *energie* als het:
> - iets kan *laten bewegen* of in beweging kan houden;
> - iets kan verwarmen;
> - *licht* kan laten *geven*" (Natuurkunde overal[48], p.181)

Hier is bedoeld dat batterijen energie hebben, ook als ze niet functioneren (zich niet 'energiek' gedragen) maar wel kùnnen functioneren (geladen zijn). Een vraag is of men dit zomaar eenzijdig kan "afspreken". Van der Valk en Solomon noemden de ervaring van het opnieuw kunnen opladen van een ontladen batterij (d.i. omkeerbaarheid) als mogelijkheid om zo'n "afspraak" zinvol te laten worden. Van der Valk[29] (p.58) toonde daarbij een protocol waar een leerling een medeleerling overtuigde door zich op zo'n ervaring te beroepen. In bovenstaand citaat ontbreekt een beroep op een dergelijke ervaring. De geciteerde uitspraak zal dus begrijpelijk zijn voor die leerlingen die al buiten de school om tot 'energie' als 'een bruikbaar iets' waren gekomen, maar een deel van de leerlingen zal met deze uitspraak niet zonder meer kunnen instemmen.

▸ *c) 'energie' buiten gebruikssituaties*
Het toekennen van 'energie' aan voorwerpen in situaties waar geen menselijk gebruik van de situatie bedoeld is, wordt voor het eerst van leerlingen gevraagd in het deel voor klas 4, dus ongeveer twee jaar later.[*),49] Na een aantal proeven met een luchtkussenbaan laat

---

(* In het deel voor de derde klas zijn twee hoofdstukken gewijd aan 'warmte' als energievorm respectievelijk aan 'elektriciteit in huis'. Voor zover ik heb kunnen nagaan was het steeds mogelijk een bepaalde gebruikssituatie erbij te bedenken, bijv. bij het bepalen van de soortelijke warmte (p.49-50) kan men de proef zien als een laboratoriumversie van de gebruikssituatie 'eten koken' (p.49 bovenaan).

men grafisch zien dat de arbeid "$W=F.s$" uitgezet tegen mv^2 (v de ontstane snelheid van de glijder) een rechte lijn oplevert met richtingscoëfficiënt 0,500. Dit is dan aanleiding om opnieuw het woord 'energie' te gaan gebruiken:

> "De grootheid $\frac{1}{2}mv^2$ wordt de *kinetische energie* of *bewegingsenergie* van het voorwerp genoemd." (Natuurkunde overal[49], p.66)

Hier wordt energie aan een voorwerp toegekend omwille van zijn beweging, zonder dat daarbij sprake is van een menselijk doel dat door de beweging wordt gediend. Om deze nieuwe afspraak in overeenstemming te brengen met de eerder gemaakte "afspraak" "een voorwerp ... heeft energie als het: iets kan laten bewegen..." moet men zelf bedenken dat een bewegend voorwerp in staat is andere voorwerpen in beweging te brengen. Wie nog denkt aan zinvol werk moet bovendien zelf een mogelijke toepassing bedenken voor de beweging van een glijder aangedreven door een gewicht.
De keuze voor de formule $\frac{1}{2}mv^2$ wordt blijkbaar gemotiveerd door de samenhang met 'arbeid' die door die keuze mogelijk wordt:

> "Voor alle bewegingen langs een rechte lijn geldt:
> $\Delta U_{kin} = W$ met $W = F_{res}.s$" (Natuurkunde overal[49], p.68)

Deze samenhang wordt echter niet expliciet als reden voor de gemaakte keuze genoemd. In overeenstemming met deze samenhang wordt later gezegd dat 'arbeid' niet per se hoeft samen te hangen met 'overdracht' van energie. Arbeid kan ook betekenen dat "de ene soort energie wordt omgezet in een andere soort energie van het zelfde voorwerp"[*)] (p.72)[49]. En daarmee komt men voor 't eerst tot een definitie van 'energie':

> "Energie bezitten betekent arbeid kunnen verrichten. Door die arbeid kan de energie in een andere soort omgezet worden of kan energie op een ander voorwerp worden overgedragen" (Natuurkunde overal[49], p.73)

Hiermee is wel geabstraheerd van menselijk gebruik, in die zin dat een gebruikssituatie (voor de auteurs) niet meer nodig is om van 'energie' te spreken, maar de mògelijkheid van een nuttig gebruik ligt nog steeds besloten in de keuze van het woord 'arbeid' dat nog steeds te associëren is met het "werk" uit het eerste gepresenteerde citaat.

▸ *d) energiebehoud via omkeerbaarheid*
Een beschouwing van de omzetting van kinetische energie in zwaarte-energie en vice versa, d.i. een beroep op omkeerbaarheid, leidt vervolgens tot de eerste formulering van de "wet van behoud van energie" in deze onderwijsgang:

> "Je ziet dat in het eerste deel van de beweging kinetische energie verdwijnt en zwaarte-energie verschijnt. In het tweede deel gebeurt het omgekeerde: er verdwijnt

---

(* Hoewel deze aanpak op zichzelf consistent is wordt de aansluiting met de thermodynamica (waar arbeid wel steeds 'overdracht' inhoudt) erdoor bemoeilijkt. Moore's[10] voorstel ... + ΔE_k + ΔE_p = W + ... (zie 2.7) biedt een betere aansluiting, maar noodzaakt om aangetrokken voorwerp en Aarde samen tot één systeem te rekenen, omdat E_p niet aan één van beide apart kan worden toegeschreven zonder inconsequentheden.

> zwaarte-energie en er verschijnt weer kinetische energie. Bij proeven in vacuüm (dus zonder luchtwrijving) blijkt dat de snelheid waarmee de kogel weggeschoten wordt, even groot is als de snelheid waarmee de kogel op de grond komt. Dit heeft geleid tot de hypothese dat energie niet zomaar kan verdwijnen. Er komt altijd een andere energiesoort voor in de plaats. Daarbij geldt dat de hoeveelheid energie die verdwijnt even groot is als de hoeveelheid energie die verschijnt. Men noemt deze hypothese de *wet van behoud van energie.*" (Natuurkunde overal[49], p.79)

▸ *e) energiebehoud en niet-omkeerbaarheid*

Eén bladzijde later wordt gezegd dat er ook niet-omkeerbare veranderingen voorkomen en dit wordt in verband gebracht met "warmte":

> "Bij de opwekking van elektriciteit in een centrale ontstaat veel warm water. De warmte in dit water is bijna nergens meer voor te gebruiken.
>
> Het ontstaan van warmte voorkomt dat een aantal verschijnselen ook in omgekeerde volgorde voorkomen. Je glijdt langs een glijbaan naar beneden, je komt tegen een veer, deze wordt ingeduwd en de veer geeft jou weer kinetische energie. Toch bereik je niet meer het punt van de glijbaan waar je vertrokken bent.
> (...)
> Die energie (warmte) gaat altijd ten koste van de kinetische energie" (Natuurkunde overal[49], p.80)

En hier hebben we nu een tegenstrijdigheid. Want "Energie bezitten betekent arbeid kunnen verrichten", en uit het voorafgaande kan worden opgemaakt dat deze uitspraak kwantitatief mag worden opgevat (naar het voorbeeld van $\Delta E_{kin} = W$): een bepaalde hoeveelheid energie bezitten betekent dat een daaraan gelijk-waardige hoeveelheid Joules aan arbeid kan worden verricht.

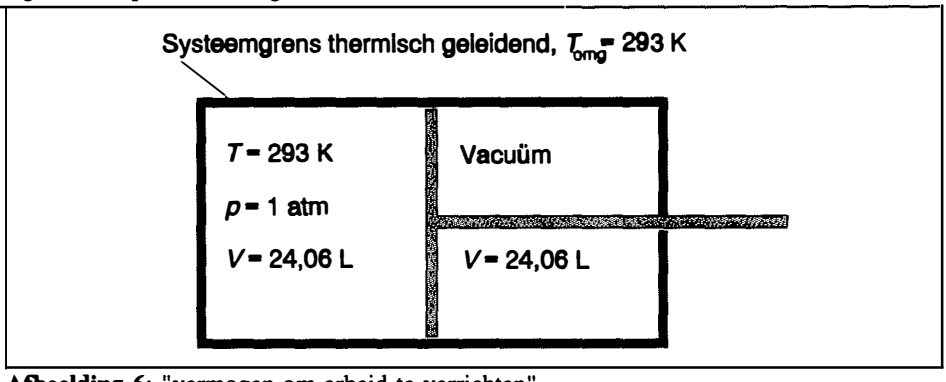
Als nu "energie" "niet kan verdwijnen" dan mogen we concluderen dat de mogelijkheid tot het verrichten van arbeid niet kan verdwijnen.
En dat wordt nu juist wèl betoogd. Is deze tegenstrijdigheid echt of is hij schijnbaar? We zullen nu nagaan of en zo ja hoe de zegswijze 'energie is het vermogen om arbeid te verrichten' houdbaar blijft na acceptatie van niet-omkeerbaarheid en tweede hoofdwet.

3.3. Is energie 'het vermogen om arbeid te verrichten'?

Al eerder hebben Lehrman[70] en Sexl[71] opgemerkt dat de definitie van energie als "the capacity to do work" in combinatie met de eerste hoofdwet leidt tot strijdigheid met de tweede hoofdwet. Zowel Warren[72] als Van der Valk[29] bestrijden dit, omdat: "Bij elke energiesoort kan *een* proces gevonden worden waarin deze geheel gebruikt wordt om arbeid te verrichten. Voor inwendige energie is dat bijvoorbeeld adiabatische expansie van een ideaal gas" (Van der Valk[29], p.28).
Dit meningverschil kan worden opgelost door duidelijkheid te scheppen over wat we bedoelen met 'vermogen om arbeid te verrichten'.

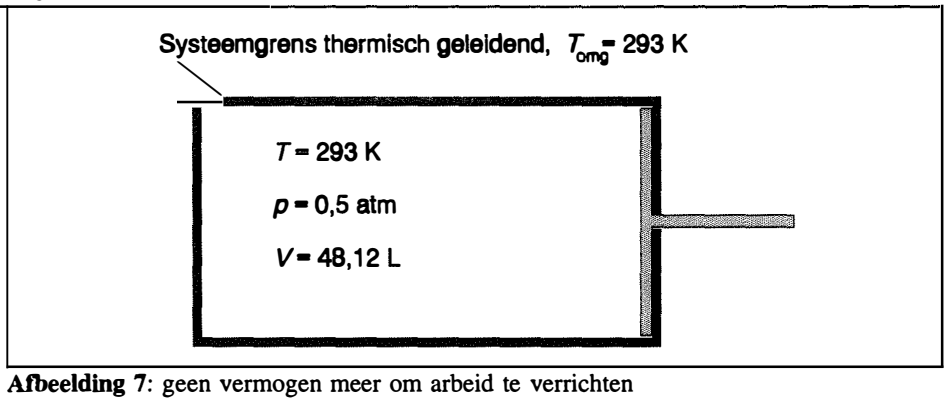
3.3.1. Afspraak 1: onder gekozen randvoorwaarden

Het systeem getekend in Afbeelding 6, in een omgeving van constante temperatuur, heeft een goed te bepalen vermogen om arbeid te verrichten.



Afbeelding 6: "vermogen om arbeid te verrichten"

Het vermogen tot arbeid van dit systeem zou geheel benut worden in een reversibel proces, en is dus te berekenen via integratie van $đw = -p.dV = -(nRT/V).dV$ waarbij T constant mag worden genomen, want bij een reversibel proces blijft ze gelijk aan $T_{omgeving}$. Het vermogen tot arbeid van het systeem in de getekende situatie is dus $-nRT.\ln 2 = -1689$ Joule.
Wanneer de volgende eindtoestand is ingetreden, dan is het vermogen tot arbeid afgenomen tot nul, omdat de enige beweegbare wand nu alleen nog maar naar links zou kunnen bewegen en dat *kost* arbeid.



Afbeelding 7: geen vermogen meer om arbeid te verrichten

Met 'vermogen tot arbeid' bedoelen we hier dus blijkbaar: de maximaal mogelijke arbeid die we kunnen winnen bij gegeven constructie van het systeem en gegeven omgevingseigenschappen, kortweg: bij gekozen randvoorwaarden.
Wanneer nu de maximale arbeid verricht zou zijn op een vliegwiel, dan kan gezegd worden dat het 'vermogen tot arbeid' behouden is gebleven, omdat het vliegwiel nu evenveel arbeid kan verrichten als waartoe ons systeem aanvankelijk in staat was, wat het nu niet meer is.

Wanneer we echter de zuigerstang vrij laten bewegen, zodat de verrichte arbeid op de buitenwereld nul is, dan verdwijnt ons 'vermogen tot arbeid' zonder dat het ergens anders weer verschijnt. Weliswaar valt er dan een extra (tijdelijke) temperatuurverhoging van de zuiger en van de wand (ter plaatse waar ze op elkaar zijn gestoten) te constateren, maar met deze temperatuurverhoging valt geen arbeid te winnen, *niet zonder de randvoorwaarden te veranderen.*
Dus als we met 'vermogen tot arbeid' bedoelen: de maximaal mogelijke arbeid die we kunnen winnen bij gekozen randvoorwaarden, dan kunnen we het eens worden dat voor dit 'vermogen tot arbeid' geen behoudswet geldt en dat dit 'vermogen tot arbeid' dus niet geschikt is om te zeggen wat we bedoelen met 'energie'.

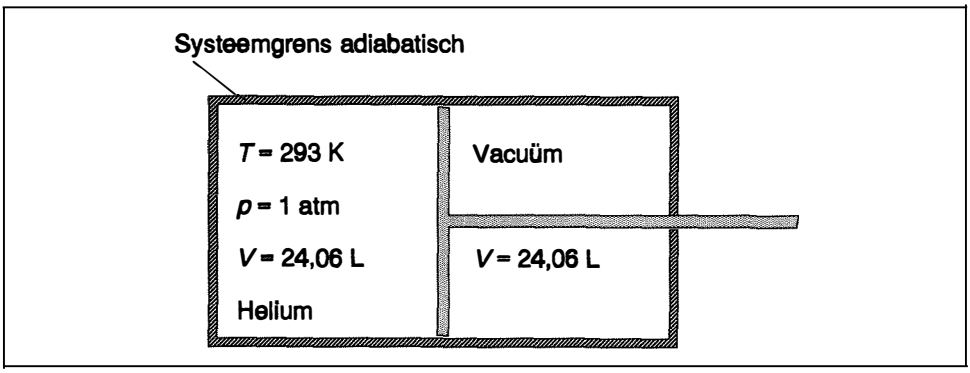
De zojuist gespecificeerde betekenis van 'vermogen tot arbeid' is in de thermodynamica niet ongebruikelijk. Wanneer we bijvoorbeeld zeggen dat voor een systeem in thermisch contact met een omgeving van constante temperatuur het vermogen tot arbeid gegeven wordt door de Helmholz vrije energie, dan is het precies de zojuist aangeduide betekenis van 'vermogen tot arbeid' die we bedoelen, namelijk: de maximaal mogelijke arbeid voor een systeem in een zekere toestand, en met beschreven randvoorwaarden.
In bovenstaand geval is de afname van de Helmholz vrije energie voor het systeem te berekenen door integratie van $dA = -S.dT - p.dV$ waarbij $dT=0$ zodat $\Delta A = -1689$ Joule, gelijk aan de mogelijke arbeid. Maar deze afname van de Helmholz vrije energie vindt plaats, ongeacht of de mogelijke arbeid werkelijk wordt verricht.
Wordt deze arbeid verricht, dan kan de afname van A voor het systeem gecompenseerd worden door een toename van A elders. Wordt echter minder dan de maximale arbeid verricht dan constateren we een afname van de totale A voor systeem en omgeving samen, die overeenkomt met het verlies aan 'arbeids-vermogen' waarover we kunnen beschikken.
De 'Helmholz vrije energie' kunnen we dus wel (onder voorwaarden) in verband brengen met 'vermogen tot arbeid', terwijl het nog maar de vraag is of dat voor 'energie' ook kan. Voor de Helmholz vrije energie geldt namelijk geen behoudswet.

3.3.2. Afspraak 2: onder adiabatische omstandigheden

Hierboven lieten we de keuze van de randvoorwaarden vrij. Wat nu volgt is een speciaal geval daarvan. We spreken af dat 'vermogen tot arbeid' voorlopig alleen toepasbaar is op de inhoud van een adiabatisch vat. In dat speciale geval bedoelen we met 'vermogen tot arbeid' opnieuw de maximaal mogelijke arbeid onder die speciale randvoorwaarde.
Het vermogen tot arbeid van het systeem getekend in Afbeelding 8 zou volledig benut worden in een adiabatisch reversibel proces, waarbij het volume links van de zuiger toeneemt van 24,06 tot 48,12 liter (en het vacuüm dus afneemt tot 0 liter). De temperatuur van het gas links daalt bij een reversibel adiabatische expansie volgens

$$T_2 = T_1.(V_1/V_2)^{\gamma-1}$$

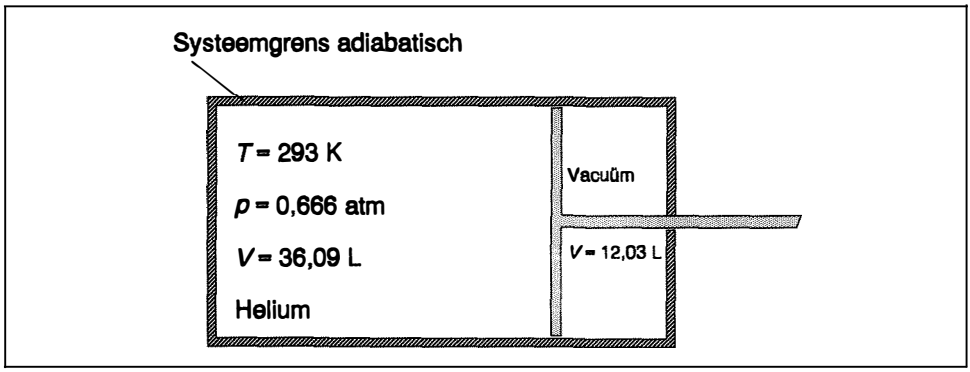
waarin γ het quotiënt van de twee warmtecapaciteiten C_p/C_v voorstelt. 'Adiabatisch' wil zeggen $q=0$ dus $w = \Delta U = C_v.(T_2 - T_1) = C_v.T_1.[(V_1/V_2)^{\gamma-1} - 1]$
Voor Helium is C_v=12,47 J K^{-1} mol^{-1} en γ=1,66. De maximaal mogelijke arbeid op de buitenwereld uitgaande van de getekende toestand is dus



Afbeelding 8: Begintoestand

$w_{omg,max} = -w_{max} = -C_V T_1.[(0,5)^{0,66} - 1] = +1342$ J

Hieronder is nog een toestand getekend van hetzelfde systeem (Afbeelding 9). De maxima-



Afbeelding 9: Eindtoestand

le arbeid uitgaande van deze tweede toestand is

$w_{omg,max} = -w_{max} = -C_V T_1.[(0,75)^{0,66} - 1] = +632$ J

Als we de eerste getekende toestand hebben, kunnen we de tweede toestand krijgen door de zuiger vrij te laten bewegen tot het volume links van de zuiger is geëxpandeerd tot 36,09 liter. Omdat de zuiger geen hinder ondervindt, wordt hierbij geen arbeid verricht, dus $\Delta U = 0$ voor dit proces, hetgeen klopt met de temperatuur die constant gebleven is. Er is dus geen arbeid verricht. Het *vermogen* tot arbeid is echter wel afgenomen!

Te weten: $\Delta(w_{omg,max}) = 632$ J - 1342 J = -710 J, terwijl $\Delta U = 0$.

En ook hier verdween 'vermogen tot arbeid' zonder dat dit vermogen elders opnieuw verscheen, immers er was ditmaal geen enkele invloed op de buitenwereld (q=0 en w=0). Het 'vermogen tot arbeid' bleef niet behouden, terwijl de energie wel behouden bleef, waaruit blijkt dat 'energie' ook volgens afspraak 2 niet 'het vermogen tot arbeid' mag heten, als we rekening willen houden met de mogelijkheid van een irreversibel proces.

De inwendige energie is dus, voor 'n adiabatisch systeem, niet (ook niet op een constante na) gelijk aan de arbeid die maximaal verricht *kan* worden, de *mogelijke* arbeid, wel is de verandering van de inwendige energie voor zo'n systeem gelijk aan de *werkelijke* arbeid. Met mogelijke arbeid zien we geen verband.
Aangezien 'vermogen' volgens Van Dale[73] betrekking heeft op datgene wat iets of iemand *kan* ("in staat is", p.3338), concluderen we dat als men zegt 'energie is het vermogen om arbeid te verrichten' minstens het woord 'vermogen' op ongewone en wellicht onduidelijke wijze wordt gebruikt.

3.3.3. Afspraak 3: bij gegeven omgevingstemperatuur en -druk

Een interessantere afspraak over wat we kunnen bedoelen met 'vermogen tot arbeid' is de volgende. Versta onder 'vermogen tot nuttige arbeid' de maximaal mogelijke arbeid die op de stang van een werktuig kan worden verricht, onder de randvoorwaarden van een gesloten systeem en een constante, gegeven omgevingstemperatuur en -druk.
Met 'nuttige' arbeid wordt dus bedoeld: arbeid die op de stang van een werktuig kan worden verricht. De arbeid voor zover die dient om bij een volumetoename de constante druk van de omgeving p_{omg} te overwinnen, wordt niet tot de nuttige arbeid gerekend.
Deze afspraak betekent voorts dat andere dan de genoemde randvoorwaarden niet worden erkend. De *begintoestand* mag gekenmerkt zijn door onbeweeglijke wanden en thermische isolatie tussen systeem en omgeving, maar bij het zoeken naar het "maximum" worden deze barrières als verwijderbaar beschouwd. In het gezochte proces waar de maximaal mogelijke arbeid wordt verricht zullen temperatuur- en drukverschillen verdwijnen, immers, elk overblijvend temperatuur- of drukverschil betekent dat er nog arbeid verricht kan worden, dus dat de maximale arbeid nog niet is verricht.
Wanneer behalve volumearbeid geen andere vormen van arbeid tussen systeem en omgeving een rol spelen, wordt de gezochte maximale arbeid gegeven door de Availability function (zie Tykodi[3]):

$$D = U_{sys} + p_{omg}.V_{sys} - T_{omg}.S_{sys}$$

Voor het bijzondere geval dat temperatuur en druk van systeem en omgeving aan elkaar gelijk zijn geldt, dat de Availability function gelijk is aan de bekendere Gibbs functie. Dus voor een proces bij die omstandigheden is ook $\Delta D = \Delta G$. Voor een proces bij constant volume en $T_{sys}=T_{omg}$ is ΔD gelijk aan de verandering van de Helmholz functie ΔA.
Voor beide typen omstandigheden geldt dus $w_{max,nut} = \Delta D$, maar bovendien geldt deze relatie ook nog voor omstandigheden waar geen voorwaarde is opgelegd aan de T, p of V van het systeem, mits maar de eerder genoemde voorwaarden gelden. In die zin biedt de Availability function dus een generalisatie die boven de bekendere functies G en A uit gaat.

3.3.4. Wat bedoelen we dan?

We hebben gevonden dat de uiting 'energie is het vermogen om arbeid te verrichten' niet kan betekenen dat energie gelijk is aan de maximaal mogelijke arbeid, onder één van de besproken omstandigheden. Zou dit toch bedoeld worden dan merken we een strijdigheid

met de tweede hoofdwet op, want de mogelijke arbeid neemt af volgens deze wet, tenminste in die gevallen waar het lukt de mogelijke arbeid te kwantificeren.
Maar leraren zijn verstandige mensen, dus deze tegenstrijdigheid kunnen ze niet bedoeld hebben. Wat wordt er dan wel bedoeld, als er gezegd wordt dat energie 'het vermogen om arbeid te verrichten' is?
Atkins[57] gebruikt in zijn vierde druk ook de omschrijving "Energy is the capacity to do work". Gelukkig wordt deze korte omschrijving gevolgd door een uitvoerige uitleg die ongeveer vier bladzijden beslaat (p.28-33). Ruwweg komt het hier op neer:

> "Work, heat, and energy are the basic concepts of thermodynamics, and of these the most fundamental is work. As we shall see, all measurements of heat and changes in energy amount to measurements of work." (Atkins[57], p.28)

Het gaat hier dus niet om de vraag: hoeveel arbeid kan *gewonnen* worden uit een systeem onder gegeven randvoorwaarden, maar de vraag is: hoe *meten* wij energieveranderingen, en in het bijzonder: hoe kunnen we 'warmte' meten met behulp van arbeid?
Wanneer een systeem door warmtegeleiding een energieverandering heeft ondergaan, dan kunnen we deze energieverandering meten met behulp van arbeid, door het systeem dezelfde toestandsverandering nogmaals te laten ondergaan, maar nu adiabatisch en gebruik makend van diverse soorten arbeid. Maar hierbij hebben we ingegrepen in de randvoorwaarden van het systeem: we hebben het systeem adiabatisch gemaakt terwijl het eerder tot thermisch contact in staat was en indien nodig hebben we aan het systeem mogelijkheden tot het ondergaan van arbeid toegevoegd: peddelwielen, dompelaars etcetera. Deze ingrepen zijn *niet* gericht op het verkrijgen van maximaal mogelijke arbeid (zoals bij de availability function), maar op het meten van een verschil in inwendige energie.
Hiermee is dan hopelijk vastgesteld dat als men in de thermodynamica zegt 'energie is het vermogen om arbeid te verrichten' de luisteraar geacht wordt te verstaan: energieverschillen zijn te meten met behulp van arbeid. Sterker nog: bij het meten van energieverschillen is arbeid steeds het uiteindelijke calibratiemiddel.
Maar als men dat bedoelt, waarom zegt men dan iets anders?

3.4. Fossiel woordgebruik in VWO onderwijs

Taalgebruik heeft een geschiedenis. Wanneer sprekers van een vakjargon systematisch iets anders bedoelen dan een niet-ingewijd spreker van de omgangstaal er in meent te horen, dan zou de oorzaak dus gelegen kunnen zijn in de geschiedenis van het vak.
Sutton[74] heeft opgemerkt dat het woord 'warmtecapaciteit' stamt uit de tijd waarin 'warmte' werd gebruikt als een behouden toestandsgrootheid, en zelfs als iets dat zich 'in' een systeem kan 'bevinden'. 'Warmtecapaciteit' betekende toen dus: de warmte die een voorwerp extra kan *bevatten* per graad temperatuurstijging[74]. Die suggestie ligt nog steeds in het woord 'warmtecapaciteit' besloten, en toch bedoelt men dat nu niet meer. Het woord is uit gewoonte in gebruik gebleven, maar betekent niet meer wat sprekers van

gewoon nederlands erin horen.*)
Op dezelfde manier kunnen we ook bij de bewering 'energie is het vermogen om arbeid te verrichten' een voorstadium aanwijzen waarin schrijvers echt bedoelden wat de woorden ook lijken te zeggen. Toen Clapeyron[75] schreef dat er een "verlies aan arbeidsvermogen" optreedt, indien een temperatuurverschil afneemt door thermische geleiding, werd hij bekritiseerd door Joule[76] die Clapeyrons 'arbeidsvermogen' (puissance motrice) opvatte als synoniem voor zijn eigen term 'energie' (vis viva) waarvan hij meende te kunnen zeggen dat daarvoor een behoudswet geldt (zie 4.4).
Maar ook wij kunnen nu nog een domein van ervaringen aangeven waar de woorden 'energie is het vermogen om arbeid te verrichten' hun voor de hand liggende betekenis kunnen hebben: de optelsom van kinetische en potentiële energie van een mechanisch systeem is daadwerkelijk gelijk aan de maximale arbeid die we daaruit kunnen winnen.+)
Maar voor deze optelsom geldt dan ook geen onvoorwaardelijke behoudswet. Steeds als deze optelsom constant is gebleven (limietgeval) is ook de arbeid waarover we kunnen beschikken constant gebleven. En steeds als we door wrijving vermogen tot arbeid verliezen, neemt ook deze optelsom af.
De natuurkunde onderwijsgang Natuurkunde overal[49] presenteert voorafgaande aan de bewering "Energie bezitten betekent arbeid kunnen verrichten" precies die (mechanische) situaties en ervaringen waarin deze omschrijving zinvol is, mits 'energie' betekent: de optelsom van kinetische en potentiële energie.

> *Gezien vanuit de thermodynamica spreekt men hier dus een tussentaal, die consistent gebruikt kan worden en die zinvol is op een beperkt domein van ervaringen.*

Zodra nu (p.80) warmte in de overwegingen wordt betrokken is echter de betekenis van 'energie' impliciet veranderd, want ook inwendige energie behoort nu tot de betekenis van 'energie'. Maar, zoals we zagen (3.3.2), kan "energie is het vermogen om arbeid te verrichten" dán niet meer de voor de hand liggende betekenis hebben, zonder in strijd te komen met de tweede hoofdwet.
De genoemde bewering is dan tot een taalfossiel geworden: dezelfde woorden worden nog gebruikt, maar deze betekenen niet meer wat men er eerst mee bedoelde. Natuurkunde overal[49] bedoelt misschien de door Atkins[57] (zie 3.3.4) omschreven betekenis, maar dit is uit de tekst niet op te maken. De betekenisverandering van zowel 'arbeid kunnen verrichten' als van 'energie' geschiedt stilzwijgend. Wat zich eerder voordeed als een tegenstrijdigheid (3.2 onder e) kan dus ook beschreven worden als een stilzwijgende betekenisverandering van woorden.

(* In het vorige hoofdstuk is daarom de suggestie gedaan om ten behoeve van onderwijs op een systematische manier van 'energiecapaciteiten' te gaan spreken.

(+ Mits de toestand met laagst-bereikbare $E_p + E_k$ als nultoestand is gekozen. Willen we de keuze van de nultoestand onafhankelijk maken van deze voorwaarde, dan kunnen we slechts zeggen dat de som $E_p + E_k$ *op een constante na* gelijk is aan de mogelijke arbeid. Een soortgelijke opmerking geldt als we de Helmholz vrije energie of de Availability function willen gelijkstellen aan een 'vermogen tot arbeid'.

Representativiteit van het besproken onderwijs
Natuurkunde overal[48,49] is hierboven en in 3.2 alleen gebruikt als voorbeeld.
DBK-na[41,42,43] verschilt van Natuurkunde overal[48,49] vooral hierin dat de afstand in tijd tussen de introductie van 'energie' en de introductie van 'energiebehoud' (bij Natuurkunde overal: twee jaar) veel korter is. Bij DBK-na volgt de "wet van behoud van energie" twee bladzijden na het begin van het hoofdstuk "energie" in het deel voor klas 2.
De bij Natuurkunde overal[48,49] opgemerkte fasering is echter ook bij DBK-na op te merken, zoals in Tabel IV puntsgewijs wordt samengevat.

Tabel IV: *Natuurkunde overal* vergeleken met *DBK-na*

fasering in de onderwijstekst	*Natuurkunde overal*[48,49]	*DBK-na*[41]
- enige uitspraken waarbij 'energie' niet per se 'iets' hoeft te zijn maar ook opgevat kan worden als kwaliteit ('energiek zijn, fut hebben') of als werkingsvoorwaarde voor apparaten	deel 2 MHV: p.179-180	deel 2e klas: p.168
- kort daarna: energie als 'iets', en wel als 'een bruikbaar iets'	p.181 e.v.	p.168-169
- daarna: 'energie als een (bruikbaar en) behouden iets', waarbij omkeerbaarheid als argument voor behoud werd gehanteerd.	deel 4 V: p.79	p.170-171
- kort daarna is de tekst schijnbaar tegenstrijdig door ook van 'behoud' te spreken in gevallen waar de bruikbaarheid tot nul afneemt en waar geen omkeerbaarheid geldt.	p.80	p.171

De kwantitatieve uitwerking van de vroeg geïntroduceerde "wet van behoud van energie" wordt ook in DBK-na[41,42,43] uitgesteld tot klas 4 en blijft daar, net als bij Natuurkunde overal[48,49] beperkt tot de som van kinetische en potentiële energie. Deze beperking wordt expliciet aangeduid door te spreken van de "Wet van behoud van mechanische energie" als een wet die alleen onder bepaalde voorwaarden geldt (DBK-na[43], p.204).

De overige drie bestudeerde (delen van) onderwijsgangen Scoop[50], BANAS[52] en Nu voor straks[51] introduceren energie snel in de betekenis 'een bruikbaar *iets*'. Een sterkere uitspraak, namelijk "energie is het in staat zijn arbeid te verrichten" werd in Nu voor straks[51] aangetroffen (deel 1 MHV, p.64). BANAS (deel 2, p.187) en Nu voor straks (deel 3HV, p.41) introduceren energiebehoud ex cathedra, zij geven geen motivering op grond van een waargenomen omkeerbaarheid.

De bestudeerde scheikunde-onderwijsgangen verschillen sterk in hun nadruk op bruikbaar-

heid als eigenschap van energie. Aangezien zij 'energie' pas in de derde klas introduceren (dus nadat introductie in de natuurkundelessen al heeft plaatsgehad) staan zij minder voor de noodzaak om bij de omgangstaal aan te sluiten. Een unieke relatie tussen 'energie' en 'arbeid' wordt in géén van de bestudeerde scheikunde-onderwijsgangen gelegd, steeds wordt naast arbeid ook warmte genoemd.
We concluderen dat alleen in het bestudeerde natuurkunde-onderwijs 'energie' wordt omschreven met woorden als 'nut' of (in drie van de vijf natuurkunde-onderwijsgangen) 'vermogen tot arbeid'. Dit leidt tot de genoemde schijnbare tegenstrijdigheid indien van 'energiebehoud' wordt gesproken in geval van een niet-omkeerbare verandering.

3.5. Problemen rond de overgang van nut naar behoud

Met betrekking tot begripsproblemen in secundair onderwijs wordt Solomon geciteerd. Met betrekking tot tertiair chemieonderwijs wordt geput uit eigen gegevens.

▸ *a) Secundair onderwijs*
Solomon[20] rapporteert een klassegesprek:

T. Can we run out of energy?
P. No you can't, can't destroy it.
T. Can you run out of fuel?
P's Yes, yes... Then you tum it back again.
T. Can you turn the energy of a moving car back into fuel?
P's No, no... Yes you can... If you could you would be a millionaire!... You could use a dynamo to turn it back. 'Yes..' 'No..' (Solomon[20])

Ook citeert ze leerlingen die gevraagd waren een opstel te schrijven over de energiecrisis:

> "An energy crisis cannot really occur. This is because energy cannot be created or destroyed only changed from one form into another. Therefore what energy is used up in one form can then be used up in another form. A fuel crisis can occur as once it is used up it cannot be replaced." (Solomon[20])

en

> "The world still has the same amount of energy that it used to, but now it is in different forms to what it used to be. We don't have much chemical energy but more kinetic energy, and we must change it back to forms we need to overcome the crisis" (Solomon[68])

Solomon[68] vermeldt dat juist de "top ability" scholieren veel schoolse kennis ("formal knowledge") in hun opstellen gebruikten om over de door hen aangevoelde tegenstrijdigheid tussen 'energiecrisis' en de 'wet van energiebehoud' te argumenteren, vaak zonder tot een voor fysici acceptabele oplossing te komen. Deze ervaringen waren voor Solomon aanleiding om een aangepaste versie van de tweede hoofdwet aan de orde te stellen voordat 'energiebehoud' aan de orde komt.

▸ *b) Tertiair chemieonderwijs*

De eerder besproken tentamenopgave uit 1992 (zie 2.5 onder a) had als doel de relatie tussen entropie en vermogen tot arbeid (tweede hoofdwet) te toetsen. Aangezien deze samenhang echter pas in de laatste subvraag e) aan de orde wordt gesteld, en de meeste studenten al eerder afhaakten, konden wel conclusies over eerste hoofdwet en over het gebruik van de term 'toestandsgrootheid' worden getrokken, maar nauwelijks over de samenhang tussen vermogen tot arbeid en tweede hoofdwet, zoals door studenten gehanteerd.

Middels een tentamenopgave aan het eind van de cursus 1993 werd geprobeerd het verstaan van de relatie tussen omkeerbaarheid, arbeid, vermogen tot arbeid en Helmholz vrije energie te toetsen, zoals dat toen onderwezen was met behulp van Atkins[57] *Physical chemistry.*[*)]

De opgave luidde als volgt:

> "a) Bereken de volumearbeid die verricht wordt bij het irreversibel bevriezen van 1 mol water van -5°C tot ijs van -5°C bij een constante externe druk van 1 atmosfeer.
> b) Bereken de verandering van de Helmholz vrije energie (ΔA) voor het bevriezen van 1 mol onderkoeld water van -5°C tot ijs van -5°C, bij 1 atm.
> c) Om deze toestandsverandering maximaal te benutten voor het winnen van arbeid moet een reversibele weg worden gevolgd. Een mogelijkheid is als volgt:
>
> 1. verhoog de druk op het onderkoelde water zodanig dat het bevriezen reversibel kan plaatsvinden bij -5°C
> 2. laat het water reversibel bevriezen bij -5°C en bij die druk
> 3. verlaag de druk weer tot 1 atm
>
> Welke vergelijking heb je nodig om de druk tijdens stap 2 te berekenen? Leg uit.
> d) Bereken de druk tijdens stap 2. Veronderstel dat ΔH en ΔV voor het bevriezen onafhankelijk zijn van de druk.
> e) Bereken de arbeid verricht op het water tijdens de stappen 1 t/m 3. Beschouw het ijs en het water als niet samendrukbaar.
> f) Vergelijk je antwoorden bij **b)** en **e)**. Verklaar overeenkomst en verschil.
>
> *Gegeven:* Voor het bevriezen van water bij -5°C en 1 atm geldt ΔG=-108.3 J mol^{-1} en ΔH=-5.82.10^3 J mol^{-1}. De molaire volumes van water en ijs zijn 18.02 resp. 19.63 cm^3 mol^{-1} bij -5°C. 1 atm.=1.01325 x 10^5 Pa." (Tentamen Fysische Chemie I, 1993)

Om de bespreking van de antwoorden in te leiden worden eerst de opgave en de verwachte antwoorden besproken.

Wanneer water bevriest dan zet het uit. Gebeurt dit in een afgesloten ruimte, zoals een waterleidingbuis, dan kan de druk zo hoog oplopen dat de buis het begeeft. Om een buis te breken is zowel een kracht nodig als een verplaatsing van het aangrijpingspunt. Er is dan dus sprake van arbeid, die hier verricht wordt door het bevriezende water.

Wanneer water in de open lucht bevriest is er van zo'n spectaculaire arbeidsprestatie niets te merken. De omstandigheden tijdens het proces (bevriezen) hebben dus invloed op de

---

(* In het jaar 1993 werd een eerste onderwijsexperiment gedaan (bijlage 1). De experimentele groep van 8 studenten beantwoordden de hierna te bespreken tentamenopgave niet anders dan de rest van de studenten, tenminste niet op de hierna te bespreken punten. Ik onderscheid hen in de volgende bespreking daarom niet van de grotere groep.

verrichte arbeid. Dit is het bedoelde onderwerp van de opgave. Er worden daarom verschillende processen vergeleken tussen dezelfde begin- en eindtoestand: 1 mol water bij -5°C en 1 atmosfeer wordt 1 mol ijs bij -5°C en 1 atmosfeer.
Bij vraag **a**) gaat het om irreversibel bevriezen bij een constante druk van 1 atmosfeer. Dit komt ongeveer overeen met bevriezen in de buitenlucht bij -5°C. Het proces heet "irreversibel" omdat bij -5°C en 1 atm. water wel bevriezen, maar ijs niet smelten kan. De verrichte arbeid wordt bepaald door de tegendruk van 1 atmosfeer die overwonnen moet worden, en is gelijk aan $p_{ex}.\Delta V$ = -0,16 Joule.
Bij vraag **b**) wordt gevraagd naar de verandering van de Helmholz vrije energie ΔA, voor de gegeven begin- en eindtoestand. Deze ΔA is te berekenen uit de gegeven ΔG. Het resultaat is ΔA = -108,5 Joule. Omdat begin- en eindtemperatuur gelijk zijn kan deze ΔA geïnterpreteerd worden als de maximaal mogelijke arbeid, in een omgeving van -5°C. We zien dus dat er heel wat meer arbeid verricht kán worden dan er bij een constante druk van 1 atmosfeer daadwerkelijk wordt verricht.
Opgave **c**) doet een suggestie om de maximale arbeid te winnen, door een andere "weg" te kiezen tussen dezelfde begin- en eindtoestand als bij vraag a). Net als in de waterleidingbuis wordt het bevriezende water onder een verhoogde druk gezet. Gevraagd wordt om de nodige druk te berekenen.
Om deze opgave te kunnen beantwoorden is het dus nodig dat men een samenhang kent tussen 'maximale arbeid' en 'reversibel'. Verder moet men 'reversibel' in verband kunnen brengen met 'evenwicht', en men moet de vergelijking kennen die vertelt bij welke temperatuur-druk-combinaties er 'evenwicht' is in een mengsel van ijs en water: de vergelijking van Clapeyron (Atkins[57] p.141).
Is de druk tijdens stap 2 eenmaal bekend dan kan de arbeid voor dit speciale proces berekend worden via $w=p_{ex}.\Delta V$. Voor de stappen 1 en 3 mogen we uitgaan van ΔV=0 ("niet samendrukbaar"). Blijft over w = 660 atm.(19,63 - 18,02).10^{-6}m^3 = -107,7 J. Volgens de berekening van de Helmholz vrije energie werd een arbeid van -108,5 J verwacht.
Bij vraag f) wordt gevraagd commentaar te leveren op het verschil. Wel: onder de gegeven omstandigheden is de verandering van de Helmholz vrije energie gelijk aan de maximaal mogelijke arbeid. Als het proces reversibel verloopt dan wordt maximale arbeid verricht. Het in de opgave beschreven proces is reversibel, dus in een proces dat voldoet aan deze beschrijving wordt 108,5 J arbeid verricht, geen 107,7 J. Het gevonden verschil is een gevolg van benaderingen en verwaarlozingen die bij opgaven d) en e) werden gesuggereerd ("veronderstel dat ΔH en ΔV..." en "Beschouw het ijs en het water als niet samendrukbaar").

Begrip naast rekenvaardigheid kan vooral blijken bij de opgaven c) en f), dus daartoe beperken we ons nu (Tabel V en VI).
Opmerkelijk was vooral dat de drie deelnemers die bij de vergelijking van Clapeyron een volledige argumentatie in woorden gaven, alle drie behoorden tot de vier deelnemers die het hele vraagstuk vrijwel[*)] volledig konden oplossen. Het in verband kunnen brengen van wiskunde enerzijds en fysische argumenten in woorden anderzijds, lijkt dus een

[*)] 2 van deze 3 hadden bij f niet het verwachte antwoord, en voor 1 van deze 2 was de oorzaak een fout bij b). Deze deelnemer signaleert zelf bij f) dat er iets mis is "maar wat?"

Tabel V: vraag c

vergelijking gevonden	15	
met argument: reversibel → evenwicht → (Clapeyron)		3
vergelijking niet gevonden	37	
goed idee: reversibel → evenwicht → $\mu_{water}=\mu_{ijs}$		2
wilde pogingen of vraag overgeslagen		35
Totaal	52	

betrouwbaar teken van begrip, en hangt ook samen met succes bij het rekenwerk.

Tabel VI: vraag f

hanteren $\Delta A = w_{max}$	6	
veronderstellingen bij d) en e) als reden voor afwijking		2
ontkenning $\Delta A = w_{max}$	14	
noch bevestiging, noch ontkenning	5	
geen poging tot verklaring	2	
geen antwoord	25	
Totaal	52	

De voor dit hoofdstuk interessante vraag was vraag f.
Eén conclusie is dat we onze studenten niet hebben leren omgaan met veronderstellingen en schattingen. Een "veronderstelling" in een opgave wordt niet als zodanig gezien en behandeld. Maar daar gaat het me nu niet om.
De helft van degenen die antwoordden (14 van 27) geeft aan het verschil te willen verklaren doordat de bij b) berekende ΔA betrekking zou hebben op het irreversibele proces bij constante druk uit vraag a) en dat deze ΔA niet zou slaan op het reversibele driestapsproces waarop vraag e) betrekking had. Voor deze deelnemers functioneert ΔA dus niet als aanduiding voor de maximale arbeid die mogelijk is bij een bepaalde toestandsverandering. Zij verstaan 'maximaal' niet als een maximum wat gezocht kan worden door de "weg" te variëren. Zij kennen per weg een andere ΔA of een andere (maximale?) arbeid toe.

> "Het verschil is dat in b een irreversibele weg gevolgd werd en bij e een reversibele. Bij b kost dit in één keer een grote hoeveelheid energie/arbeid en bij e gaat dit in kleine stapjes (...)" (student, in antwoord op subvraag f)

We concluderen dat een thermodynamisch begrip 'vermogen tot arbeid' of 'mogelijk nut' niet is ontwikkeld bij deze studenten, hoewel het gebruikte studieboek toch alle nodige relaties had aangegeven en toegelicht (Atkins[57], p.105). De behandeling tijdens het hoorcollege was daarmee in overeenstemming. Een experimentele groep (1993, zie voetnoot *, p.60), waar extra aandacht besteed was aan het vermogen tot arbeid, deed het niet beter

dan de rest.*)

Interpretatie
De antwoorden op de besproken tentamenopgave geven zelf niet veel aanleiding tot verdergaande interpretatie. Door combinatie met enige andere gegevens kunnen we verder komen.
Is het de tweede hoofdwet op zichzelf die problemen geeft?
In 1994 stelde ik mijn experimentele groep van 5 studenten de vraag:

> b Wanneer we een temperatuurdaling van het blok koper uit opgave 1-4 zouden kunnen realiseren zò, dat we in ruil daarvoor alleen een toename van snelheid-kwadraat van het vliegwiel krijgen, welke snelheid-kwadraat zou het vliegwiel dan krijgen, als de temperatuurdaling 7.6 °C bedroeg?
> c Zegt energie (energievormen) ook iets over de vraag *of* die ruil onder bepaalde omstandigheden mogelijk is? Beredeneer je antwoord. (uit 1-8)[2]

Dit was de eerste vraag waar een kwestie aan de orde gesteld werd die met de tweede hoofdwet in verband te brengen is. Eerder was steeds met 'energievormen' gewerkt waarbij 'energiebehoud' of 'gelijke ruilwaarde' werd toegepast. Hierbij was ook de ruil van snelheid-kwadraat van een vliegwiel voor temperatuurverhoging van een blok koper aan de orde geweest. In het hoorcollege was wel de tweede hoofdwet aan de orde geweest. Antwoorden op vraag c) waren alle negatief, bijvoorbeeld:

> "Nee, niet elk proces is omkeerbaar"
>
> "Nee, je weet niet of je met een irreversibel proces te maken hebt"

Bij de (korte) discussies naar aanleiding van deze opgave bleken *geen* tekenen van krampachtig napraten van wat men gehoord had. 'Niet-omkeerbaarheid' in de directe betekenis van het niet kunnen terugkrijgen van de oorspronkelijke toestand voor beide betrokken voorwerpen, lijkt dus een vertrouwde zaak te zijn.
Kesidou en Duit[60] hebben met behulp van interviews opgemerkt dat scholieren in secundair onderwijs het normaal vinden dat hete voorwerpen afkoelen, koude voorwerpen opwarmen en slingerende slingers tot rust komen. Waartoe scholieren bij deze interviews niet in staat bleken was de genoemde verschijnselen te beschrijven in termen van energiebehoud, gecombineerd met "energieontwaarding".
Zojuist zagen we bij de besproken tentamenopgave dat studenten hanteren $\Delta A = w$, in plaats van $\Delta A = w_{max}$. Ze hanteren dus niet het begrip dat het vermogen tot arbeid óók verdwijnt (en onterugwinbaar verdwijnt) als er geen arbeid tegenover staat. In het hanteren van $\Delta A = w$ (in plaats van w_{max}) kunnen we het schema $\Delta E = w$ uit Natuurkunde overal[49] herkennen. Dit is en blijft een behoudswet-achtig gebruik van 'vrije energie': er gaat precies zoveel vrije energie 'uit' als er aan arbeid 'geleverd' wordt. Het moeilijke punt is dus inderdaad de combinatie van energie-behoud met energie-ontwaarding, zoals dat tot uiting komt in een toename van de entropie S, waardoor de vrije energie A (= U - TS) afneemt, ook als er geen arbeid wordt verricht.

(* Op de mislukking van dit eerste experiment wordt verder ingegaan in hoofdstuk 5.

Het probleem is hier dus niet het hanteren van de tweede hoofdwet, maar het combineren van eerste en tweede hoofdwet.

Daarbij zijn twee aspecten van belang:
- 'behoud' van energie versus 'verlies' van vermogen tot arbeid,
- energie en entropie (dus ook vrije energie) als toestandsgrootheden.

Dit tweede aspect was al in hoofdstuk 2 geconstateerd maar speelde zojuist opnieuw een rol omdat studenten ook de vrije energie A ($=U-TS$) niet als toestandsgrootheid hanteren, zoals blijkt uit de besproken antwoorden (subvraag f, p.62).
Strong en Halliwell[9] bespraken dit probleem met eerste en tweede hoofdwet al in 1970. Als nadeel voor het gebruik van de uitdrukking 'vrije energie' noemden zij, dat studenten 'vrije energie' als een soort energie opvatten. Zij noemen deze studenten misleid, omdat 'vrije energie' bij sommige processen afneemt, zonder dat we daarnaast een tweede verandering waarnemen die ons toestaat te zeggen dat een andere 'energievorm' is toegenomen. Zij stellen daarom dat vrije energie als tweede hoofdwet-achtige grootheid meer verwant is aan entropie dan aan energie. Zij stellen voor in plaats van 'vrije energie' te gebruiken de entropie van systeem en omgeving samen, voor het bijzondere geval van een systeem bij constante temperatuur en druk:
$\Delta S_{totaal} = \Delta S_{sys} + \Delta S_{omg} = \Delta S_{sys} - \Delta H_{sys}/T_{sys}$.
Het resultaat is een toestandsfunctie van het systeem, die met "S_{tu}" wordt aangeduid. Gebruik van deze functie werd 't eerst voorgesteld door Planck en zoals men ziet is S_{tu} gelijk aan $-G/T$.

Een tweede onderwijsprobleem dat Kesidou en Duit[60] signaleren (zie ook Lewis en Linn[77]) heeft te maken met de temperatuur: scholieren verwachten niet dat een temperatuurverandering doorgaat totdat temperatuurgelijkheid bereikt is. Eerder verwachten zij dat voorwerpen uit zichzelf verschillende temperaturen zullen aannemen, waarbij metalen doorgaans kouder zullen worden dan bijvoorbeeld hout of wol. Een probleem is dus ook het in verband brengen van (niet-)omkeerbaarheid met (al of niet) evenwicht, en het formuleren van de evenwichtsvoorwaarde.
Zo geformuleerd is dit onderwijsprobleem in secundair onderwijs enigszins vergelijkbaar met het probleem van het vinden van de evenwichtsvoorwaarde voor een mengsel van water en ijs. Het probleem was immers niet dat men de nodige vergelijking niet **kende**, want bij de gebruikelijke vraagstukken gebruikt men hem wel. Probleem is dus de redenatie die hier tot 't gebruik van deze vergelijking had moeten leiden en die redenering loopt van 'omkeerbaarheid' en 'evenwicht' naar 'evenwichtsvoorwaarden'.

3.6. Is een 'energie = nuttig' tussentaal gewenst?

Gezien dat bruikbaarheid in de thermodynamica geen eigenschap is van dat wat we energie noemen (3.3), valt de vraag te stellen of een taal waarin 'energie' nog niet is onderscheiden van 'gebruikswaarde' (of van meer gesofistikeerde vervangers daarvoor: vrije energie, availability) geschikt is als tussentaal, op weg naar thermodynamica. Hierbij zijn twee deelproblemen te onderscheiden:

- Het door Van der Valk[29] genoemde probleem dat leerlingen de bruikbaarheid van bijvoorbeeld een omhoog geheven steen niet zien, en daarom ook niet van 'energie' willen spreken, wanneer niet expliciet een gebruikssituatie in de opgave is aangeboden. Dit probleem betreft het gaan toeschrijven van gebruiks*mogelijkheden* als eigenschappen aan voorwerpen (3.1). Hierbij gaat het erom de mogelijkheid te leren zien, ook waar niemand van plan is er gebruik van te maken.
- Het door Solomon[68] en mijzelf (3.3 en 3.5) genoemde probleem met $\Delta E=w$ of $\Delta E=w_{max}$, wanneer *'E'* meer omvat dan alleen kinetische en potentiële energie van macroscopische voorwerpen.

In het vorig hoofdstuk is voorgesteld gebruik te maken van momentane eigenschappen als hoogte en snelheid om hieraan ruilwaarden te gaan toekennen. Dit toekennen zou een eigen activiteit moeten zijn, en niet het geleidelijk gaan getuigen van een geloof in iets onzichtbaars. Verwacht wordt dat hierdoor de gebruiksmogelijkheden van voorwerpen als - met 'ruilwaarde' beschreven - eigenschappen van die voorwerpen gaan functioneren.
Het probleem dat het omgangstaalwoord 'energie' geassocieerd wordt met manifeste levendigheid, beweeglijkheid etcetera, hebben we dan door deze voorbereiding hopelijk ook vermeden. We verwachten dat bij het woord 'ruilwaarde' een dergelijk associatie ontbreekt. De soms gebruikelijke*) oplossing om te benadrukken dat sommige energie alleen maar 'potentieel' aanwezig is - terwijl de energie pas echt of zichtbaar aanwezig zou zijn als we iets zien bewegen - is ongewenst, omdat dan de vanzelfsprekende vereenzelviging van 'snelheid' (als toestand) met 'bewegen' (als activiteit) wordt bevestigd, hetgeen onder andere het verstaan van Newtons eerste wet verhindert. In de omgangstaal kennen we naast 'bewegen' echter de uitdrukking 'snelheid hebben' ("Toen ik van die berg af reed toen *had* ik me toch een snelheid!") die ook in de omgangstaal al een toestand lijkt aan te duiden. Van het streven naar generalisaties zoals

als je snelheid hebt kun je hoogte krijgen (zie 2.8.1)

als basis voor 'ruilwaarde', wordt dus verwacht dat hierdoor het eerstgenoemde probleem wordt voorkomen.
Wat betreft het tweede genoemde probleem moet echter worden toegegeven dat ook mijn 'ruilwaarde' een interesse in nut of gebruikswaarde impliceert. De generalisaties waarbij ik voorstelde aan te knopen zeggen immers welke (eventueel gewenste) toestanden je kunt krijgen als je ... hebt (2.8.1). Kortom deze generalisaties geven handelingsmogelijkheden aan. Ook de vraag die volgens mijn voorstel tot een eerste kwantitatieve interesse kan leiden:

> "kan dezelfde hoogte (of snelheid, of lading, of temperatuur) van een voorwerp meer dan éénsgebruikt worden om een gesloten ketting van gebeurtenissen te realiseren? Hoe vaak? Kun je de oorspronkelijke hoogte weer terugkrijgen? Precies? Bijna? Onder welke voorwaarden? Zou het fijn zijn als dat kon?" (uit 2.8.1)

verraadt een interesse in nut, en in... omkeerbaarheid. We zullen daarom nu eerst de mogelijke samenhang van deze beide woorden nagaan.

(* Zie bijvoorbeeld de leraar in Van der Valk[29], p.63

Gebruikswaarde en omkeerbaarheid
Zonder dat we nader hebben omschreven wat we met 'gebruikswaarde' bedoelen is het toch al mogelijk een samenhang met 'omkeerbaarheid' te formuleren.
Gaat u maar na of u met de volgende uitspraak kunt instemmen:

> Wanneer het lukt om een verandering A → B om te keren, zodat na de omkering de begintoestand A voor de betrokken voorwerpen geheel is hersteld zonder veranderingen elders, dan kan van de verandering A → B gezegd worden: de gebruikswaarde is voor en na deze verandering gelijk.
>
> Immers: ieder doel dat vóór de verandering bereikbaar was is na de verandering nog steeds bereikbaar, doordat we kunnen terugkeren naar de begintoestand, zonder veranderingen elders.

Deze redenering maakt expliciet waarom het zo prettig zou zijn als na een serie gebeurtenissen waarbij een hoogte afnam, de oorspronkelijke hoogte kan worden terugverkregen. Wanneer deze vraag (gesteld in 2.8.1) uw interesse wekte, dan is hierboven verklaard waarom deze vraag u boeien kon. Deze vraag boeit, omdat hij de mogelijkheid oppert van een serie gebeurtenissen zonder dat het iets kost. En bij 'iets' moet nu niet meteen gedacht worden aan energie (of een andere kwantiteit) maar aan: mogelijkheden. Na afloop van een omkeerbare gebeurtenis kunnen we niet alleen *even veel*, we kunnen nog *precies hetzelfde* als voorheen. De 'gebruikswaarde' (ongedefinieerd) is niet alleen kwantitatief*) maar vooral ook kwalitatief gelijk, identiek, voor begin- en eindtoestand.

Van deze (hopelijk) boeiende gedachte maakte ik in 2.8.1 gebruik om kwantitatieve proeven voor leerlingen te motiveren, waardoor zij zouden komen tot een begrip 'ruilwaarde' en daardoor ook later tot 'energie'.
Maar door die aanpak zijn 'ruilwaarde' (of later: energie) en 'gebruikswaarde' verknoopt geraakt, zoals dat ook het geval is in andere onderwijsgangen waar een beroep wordt gedaan op omkeerbaarheid om 'energiebehoud' te motiveren.+) Zaak is nu die knoop te ontwarren en na te gaan of zo'n verknoping (tijdelijk) nuttig kan zijn voor onderwijs, of dat hij moet worden vermeden. Anders gezegd:

> *het is na te gaan of de gelijkstelling (of de nauwe associatie) van 'ruilwaarde' en 'gebruikswaarde' een geschikt kenmerk is van een tussentaal, op de weg naar thermodynamische taal.*

Hiermee is de vraag, gesteld in 3.6, geformuleerd in de termen waarin ik meen dat hij kan

---

(* Er is nog geen omschrijving, en zeker ook nog geen kwantitatief begrip. Maar àls het zou lukken gebruikswaarde te kwantificeren, dan is het duidelijk dat de kwalitatieve gelijkheid meteen ook inhoudt dat de gebruikswaarde voor en na 'even groot' is.

(+ "Aannemelijk te maken" zegt men ook wel, maar díe formulering is op mijn ontwerp niet van toepassing, immers volgens mijn voorstel is "gelijke ruilwaarde" een eigen waarde-toekenning, en dus niet iets dat wordt aangenomen.

worden beantwoord. Beantwoorden kan gebeuren door te onderzoeken of een tussentaal met de genoemde eigenschap zich laat voegen in een reeks die leidt tot de vaktaal (derde eis uit 1.2). Immers aan de eisen van consequentheid en toepasselijkheid is op een beperkt domein zeker voldaan (zagen we in 3.4). Allereerst wordt nu zo'n reeks *ontworpen.*

3.7. 'Ruilwaarde' van 'gebruikswaarde' onderscheiden

Als de gebleken omkeerbaarheid van een ruil (bijvoorbeeld hoogte voor snelheid, of snelheid van een vliegwiel voor temperatuur van een gas) een reden is om te zeggen dat hoogte vóór en snelheid ná *voor ons even veel waard zijn* zoals Mach het uitdrukte, dan ligt het voor de hand om voor een gebeurtenis waarvan de omkering nog niet is gelukt minstens te betwijfelen of de situaties voor en na "even veel waard" genoemd kunnen worden.
In ieder geval ontbreekt dan de reden die we er eerder voor hadden. Misschien is er dan een andere reden te vinden, en misschien wordt het dan zinnig twee soorten "waarde" te onderscheiden, afhankelijk van de reden die we hebben om een "gelijke waarde" toe te kennen.

De ruil van hoogte voor snelheid-kwadraat
Voor hoogte en voor snelheid-kwadraat is het voldoende dat ze beide zijn gemeten ten opzichte van een bereikbaar nulpunt, om geheel te kunnen verdwijnen ten gunste van andere eigenschappen van hetzelfde voorwerp of van andere voorwerpen. Bijvoorbeeld hoogte kan geheel verdwijnen (tot nul afnemen) ten gunste van snelheid-kwadraat en ook andersom. Maar ook kunnen beide verdwijnen ten gunste van temperatuur.
Voor temperatuur is het daarentegen niet voldoende dat het gekozen nulpunt bereikbaar is (bijvoorbeeld kamertemperatuur) om geheel te kunnen verdwijnen ten gunste van andere eigenschappen. Wel lukt het ons als we een gas gebruiken dat door compressie zijn verhoogde temperatuur (ten opzichte van de omgeving) heeft verkregen: in dat geval kan de temperatuurverhoging geheel verdwijnen ten gunste van snelheid-kwadraat van een vliegwiel. De verhoogde druk lijkt daarbij een extra voorwaarde te zijn.
Beperken we ons dus eerst tot het eenvoudiger geval van hoogte en snelheid-kwadraat, dan vinden we door te gaan letten op de *verhouding* waarin beide tegen elkaar kunnen worden ingeruild de 'ruilwaarden' $mg.h$ en $\frac{1}{2}m.v^2$. De toekenning van een gelijke waarde werd daarbij gemotiveerd door het 'wederzijds' zijn van de verhouding, en dat betekende het kunnen terugkrijgen van de begintoestand (zie paragraaf 2.8.1).
Deze 'ruilwaarden' kunnen dáárom ook gelden als gebruikswaarden, omdat steeds als deze ruil gelukt is, er een omkeerbare gebeurtenis heeft plaatsgehad. Dus steeds als we voor en na dezelfde 'ruilwaarde' (beperkt tot $mg.h$ en $\frac{1}{2}m.v^2$, dus nog geen ruilwaarde voor T) toekennen is ook de gebruikswaarde voor en na gelijk. En steeds als zo'n ruil niet geheel gelukt is hebben we na afloop een kleinere ruilwaarde dan ervoor. Ook voor de gebruikswaarde hebben we dan geen reden te zeggen dat die gelijk is gebleven.

De mechanica biedt een ervaringsdomein voor een tussentaal waar ruilwaarde en gebruikswaarde niet worden onderscheiden.

We zouden dus kunnen spreken van *mg.h* als 'waarde' van een hoogte *h*.
Worden nu variabelen als temperatuur en druk in het onderzoek betrokken, dan zie ik twee manieren waarop de ontwikkeling zich zou kunnen voortzetten.

▸ *a) Voorlopig 'gelijke waarden' blijven toekennen*
Voor de verandering waarbij snelheid-kwadraat van een voorwerp verdwijnt en een evenredige temperatuurverhoging ontstaat door wrijving/botsing met andere voorwerpen is de omgekeerde verandering niet bekend. Tot een 'gelijke waarde' in de zin van: geen verlies aan gebruiksmogelijkheden (gebruikswaarde) kan dus niet worden besloten. Er kan echter ook niet positief worden vastgesteld dat de gebruikswaarden ongelijk zijn! Omkeerbaarheid kun je vaststellen (als limietgeval), niet-omkeerbaarheid stel je niet vast. Immers: dat we de omgekeerde verandering niet kennen betekent nog niet dat hij onmogelijk is.

Bij snelheid en hoogte speelde echter, naast de omkeerbaarheid, ook de *verhouding* waarin het verdwijnen en ontstaan plaatsvond een rol bij het toekennen van de 'waarde'.
Gelet op die verhouding kan ook voor temperatuur een 'waarde' worden vastgesteld, te weten $mc.\Delta\theta$. Deze waarde zouden we nu 'ruilwaarde' kunnen noemen, om te benadrukken dat verdwenen hoogte en ontstane temperatuur alleen gelet op de verhouding van verdwijnen en ontstaan een 'gelijke waarde' hebben. Aan het andere criterium om van gelijke waarde te spreken is (nog) niet voldaan. Men kan echter desgewenst (op grond van de ervaring eerder opgedaan bij snelheid en hoogte) geloven dat de omgekeerde verandering ooit nog wel eens ontdekt zal worden.
In dat geloof kan men gesterkt worden wanneer in bepaalde gevallen (volumeverandering van een gas) de ruil van snelheid-kwadraat voor temperatuur wel blijkt te kunnen worden omgekeerd, waarbij dezelfde ruilwaarde-functie $mc.\Delta\theta$ toepasselijk blijkt als bij wrijving. In dat geval kan dan weer wèl de gelijkheid van de 'ruilwaarden' samenvallen met een gelijkheid van de 'waarden' in ruimere zin die zowel ruilwaarde als gebruikswaarde omvatte.

Voor de omstandigheden waar een omgekeerde ruil niet bekend is kan men wel geloven maar nog niet wéten of 'ruilwaarde' een voldoende indicatie is voor 'waarde' in de ruimere zin. Een standpunt dat veel op Joules standpunt (zie 3.4 en 4.4) lijkt is in dit stadium dus mogelijk en verdedigbaar. Om ten aanzien van dit vraagstuk een open blik te behouden zal men echter wellicht willen toestemmen voorzichtigheidshalve van 'ruilwaarde' te spreken in de gevallen waar over de waarde in ruimere zin nog geen uitspraak mogelijk is. Dan is de weg open voor een verdergaand onderzoek naar omkeerbaarheid.
Hierboven betekende 'omkeerbaar' steeds:

> zodanig dat de begintoestand A kan worden hersteld voor alle bij het proces A → B betrokken voorwerpen, zonder veranderingen elders.

Carnot sprak ook in deze zin van omkeerbaarheid toen hij de onmogelijkheid van een

perpetuum mobile gebruikte in zijn redenering.*) [78]
Bekijken we de ruil van temperatuurverhoging van een gas tegen snelheidstoename van een vliegwiel wat nauwkeuriger (§8)^2. Naar aanleiding van een serie experimenten, waarin de grootte van een tandrad wordt gevarieerd, en daarmee de snelheid waarmee de volumeverandering verloopt, en daarmee de drukverschillen binnen de compartimenten, kan beredeneerd worden dat de precisie waarmee de begintoestand na een volumevergroting en een "poging tot omkering" kan worden hersteld zal samenhangen met de drukverschillen die zich binnen de twee compartimenten voordoen. Bij deze redenering is wel "arbeid" in kwantitatieve betekenis nodig, dus in relatie tot kracht en afgelegde weg, maar geen vermogen tot arbeid of vrije energie.
Na een soortgelijke redenering voor een situatie met "temperatuurverschil" en voor een verlopende chemische reactie (§9)^2 wordt het mogelijk de bovengenoemde (oudere) betekenis van 'omkeerbaar' in verband te brengen met 'evenwicht'. *Door te letten op omkeerbaarheid in de oude betekenis zijn dan drie evenwichtsvoorwaarden gevonden* (9-3)^2, *en daarmee is deze oudere betekenis uitgebreid tot de moderne betekenis.*+)
Hierna (9-8)^2 worden twee veranderingen opnieuw bekeken, waarvoor eerder was uitgesproken (7-1, 7-3e)^2 dat de omgekeerde verandering niet bekend of niet gelukt was. Voor elk van die veranderingen kan nu (9-8)^2 een intensieve grootheid worden genoemd die een significante gradiënt vertoont. Deze veranderingen waarvan de omkering niet bekend is blijken dus een positief vaststelbare eigenschap gemeen te hebben, waarin ze verschillen van de op dat moment beschreven omkeerbare limietgevallen. Deze bevinding kan het vermoeden wekken dat we misschien niet toevallig van deze veranderingen geen omkering kennen. Meer dan een vermoeden is het dan nog niet.#)

Als dat vermoeden of die overtuiging ontstaan is dan zal 'ruilwaarde' onderscheiden moeten worden van die andere waarde, die van dan af 'gebruikswaarde' genoemd zou kunnen worden&), waarvan we zeiden dat die gelijk blijft bij veranderingen die een terug-

---

(* "Par nos premières operations, il y avait eu à la fois production de puissance motrice et transport de calorique du corps A au corps B; par les operations inverses, il y a à la fois dépense de puissance motrice et retour du calorique du corps B au corps A.
(...) rétablir les choses dans leur état primitif (...)" (Carnot[78], p.77-78)

(+ Tegenwoordig wordt 'reversibel' vaak zo gedefinieerd dat een proces 'reversibel' heet als de veranderingen op ieder moment van richting kunnen worden omgekeerd door een infinitesimaal kleine verandering in de omstandigheden' (Atkins[57], p.36). Deze eis is equivalent met een afwijking van de evenwichtstoestand die gedurende het proces steeds infinitesimaal klein blijft. Aangezien de "oude" omschrijving zojuist equivalent bleek met deze zelfde eis, verwijzen beide omschrijvingen dus naar dezelfde processen.
We noemen de oude betekenis hier 'uitgebreid' omdat de oude betekenis pas na de genoemde redeneringen de moderne betekenis impliceert en vice versa. Merk op dat we de oude betekenis nodig hadden in verband met de "boeiende vraag" genoemd in 3.6.

(# Later is een opgave gepland waar dit vermoeden tot axioma kan worden gekozen (13-8h)^2. Deze axioma-keuze kan dan een logische samenhang van uitspraken mogelijk maken waaruit geconcludeerd kan worden dat de totale entropie niet kan afnemen.

(& In de opgavenserie (bijlage 2) zijn de woorden 'ruilwaarde' en 'gebruikswaarde' al vóór §9^2 gebruikt. Deze afwijking van het hier geschetste ideale onderwijsontwerp werd nodig gevonden als aanpassing aan het hoorcollege, dat ook door de experimentele groep studenten werd gevolgd.

keer naar de begintoestand toelaten.
Het onderscheid is nodig want 'ruilwaarde' werd steeds zo geconstrueerd, door geschikte ruilwaardefuncties op te stellen, dat het verdwenen en ontstane verschijnsel dezelfde ruilwaarde hebben. Dit bleek ook mogelijk voor veranderingen waarvoor geen omkering bekend is. 'Gebruikswaarde' daarentegen willen we voor het verdwenen en ontstane verschijnsel alleen gelijk noemen voor zover de verandering omkeerbaar is gebleken.

▸ *b) Geen "gelijke waarde" tenzij omkeren gelukt*
Volgens deze keuze, die (evenals die genoemd onder a) door lerenden gemaakt zou kunnen worden, mag bij een ruil van snelheid-kwadraat voor temperatuur de 'waarde' mc.θ voor temperatuur en mg.h voor hoogte alleen worden toegekend in situaties waar bijna-omkeerbaarheid is gebleken, dus in geval van de adiabatische expansie/compressie van een gas.
De toekenning van de gelijke 'waarde' berust dan weer, net als bij de ruil van hoogte voor snelheid, op de bestudering van het omkeerbare limietgeval.
Hiertoe is weer nodig een serie proeven plus redenaties naar aanleiding van die proeven (zie 3.7 onder a) om te komen tot een beschrijving van dat limietgeval.

Maar bij die zelfde proeven blijkt mc.Δθ óók geschikt te zijn om veranderingen te beschrijven die ver van het omkeerbare ideaal afwijken, gelet op de verhouding waarin temperatuur en snelheid-kwadraat veranderen.
Ze blijkt zelfs toepasbaar bij wrijving zonder volumeverandering.
De afspraak geen 'gelijke waarde' toe te kennen tenzij een omkering bekend is kan dan naar verwachting als knellend worden ervaren.

Dit kan wellicht aanleiding zijn om terug te blikken hoe we ertoe gekomen zijn om op de verhoudingen te gaan letten waarin verschijnselen verdwijnen en ontstaan: het toekennen van gelijke 'waarde' aan verdwenen hoogte en ontstane snelheid-kwadraat was eerst gemotiveerd door de omkeerbaarheid van deze ruil, maar de bepaling van de waardefuncties geschiedde door te letten op de constante verhoudingen waarin de ruil plaatsvond. Nu vinden we constante verhoudingen, zowel voor de ruil van snelheid-kwadraat voor temperatuur als voor de omgekeerde ruil. Dezelfde ruilwaarde-functie mc.θ blijkt in beide gevallen bruikbaar. Dus *àls* de ontstane temperatuur weer geheel kan verdwijnen waarbij snelheid-kwadraat ontstaat, dan gebeurt dat in zodanige verhouding dat de begintoestand wordt hersteld.
Maar hiermee is nog niet gezegd *òf* deze tweede ruil steeds mogelijk is.

En daarmee zijn dan de vragen onderscheiden waarop eerste en tweede hoofdwet uiteindelijk een antwoord geven. Want wat is gebeurd?

Studenten 'weten' al, dat energie steeds minder bruikbaar wordt. Een onderwijsexperiment kan onder deze omstandigheden niet méér opleveren dan een rechtvaardiging achteraf van wat men al wist.

Uit een meer algemene beginvraag:
(1) Wat kan je krijgen (qua snelheid, hoogte, temperatuur, fase, chemische samenstelling, lading etc.) als je ... hebt?

ontstaat op zeker moment een meer specialistische vraag:
(2) *Als* ... verdwijnt waarbij ... ontstaat, in welke verhoudingen gebeurt dat dan?

Een deel van de eerste vraag is hierin buiten beschouwing gelaten, namelijk
(3) *òf* onder de gegeven omstandigheden ... kan verdwijnen waarbij ... ontstaat?

Dit verschil in vraagstelling maakt het dan zinvol ook de antwoorden op die vragen te onderscheiden. De tot nu toe opgestelde 'waarde'-functies werden opgesteld gelet op de verhoudingen van verdwijnen en ontstaan, en blijken ook bruikbaar bij ruil waarvoor geen omkering bekend is. 'Ruilwaarde' lijkt daarvoor een geschikte benaming. Ruilwaarde heeft dan de bedoeling een antwoord te geven op vraag (2), maar de pretentie om iets te zeggen over (1) heeft ze niet langer.
Ter onderscheiding zou die 'waarde' die bij omkeerbare veranderingen gelijk blijft (en die dus een antwoord zou geven op vraag 1) 'gebruikswaarde' genoemd kunnen worden.

Keuzen voor leerlingen en leraar
Aangezien de besproken proeven (§8-9)[2] voor beide routes overeenkomen en ook de begripsontwikkeling van beide routes deel uitmaakt, die leidt van 'omkeerbaar' (oudere betekenis) naar 'reversibel', valt te overwegen de keuze tussen beide genoemde routes aan de lerenden over te laten. Wanneer groepen lerenden hierin verschillend kiezen, dan zullen hun taal en vraagstelling dus van elkaar verschillen. Aangezien het eindresultaat van beide routes naar verwachting overeenkomt, wordt verwacht dat zulke groepen tenslotte elkaar kunnen uitleggen tot welke conclusie ze gekomen zijn.

Volgens de opgavenserie waarnaar werd verwezen, wordt het onderscheid tussen 'ruilwaarde' en 'gebruikswaarde' pas gemaakt *nadat* de ontwikkeling geschetst in hoofdstuk 2 (van 'ruilwaarde' tot 'inwendige energie') zich heeft voltrokken. Uit de weergave hierboven blijkt echter, dat op de bijzonderheden van het begrip 'inwendige energie' geen beroep hoefde te worden gedaan, 'waarde' voldoet naar verwachting even goed om de geschetste ontwikkeling mogelijk te maken. De stap van 'gelijke waarde' naar 'ruilwaarde' en 'gebruikswaarde' kan dus naar verwachting ook voorafgaan aan de ontwikkeling van 'ruilwaarde' tot 'inwendige energie'. De vereenzelviging van 'energie' (of 'ruilwaarde') met 'nut' zou dan van veel kortere duur zijn dan bij gebruik van de gepresenteerde opgavenserie het geval kan zijn.[*)] Zoals eerder aangegeven (voetnoot &, p.69) is de gekozen volgorde in de opgavenserie een gevolg van een gewenste aanpassing aan het hoorcollege dat ook door de experimentele groep werd bezocht.

(* Zie echter opgave 1-8[2], die de bedoeling had om al eerder iets van dit onderscheid aan de orde te stellen.

Kwantificering van 'gebruikswaarde'
Het zoeken naar een geschikte maat voor de van ruilwaarde onderscheiden gebruikswaarde kan nu gebeuren door vast te houden aan de eigenschap dat ze bij omkeerbare veranderingen gelijk blijft. Ook kan worden beredeneerd dat gebruikswaarde bij niet-omkeerbare veranderingen afneemt (7-5 en 7-6)[2].
Om vermoedens te laten ontstaan betreffende verdere eigenschappen van een kwantitatieve maat voor gebruikswaarde, werd een analogieredenering ontworpen, dat is een empirische redeneerwijze die aparte belangstelling verdient. Dit aspect van het ontworpen onderwijs zal daarom in hoofdstuk 4 apart aan de orde komen.

3.8. Conclusie

In bestaand onderwijs is aangewezen hoe 'energie', aansluitend bij de omgangstaal (3.1) vaak in termen van nut of 'vermogen tot arbeid' wordt omschreven (3.2). Van nut of 'vermogen tot arbeid' kan men niet zeggen dat daarvoor een behoudswet geldt, tenminste niet wanneer we de mogelijkheid van een irreversibel proces erkennen (3.3). De mechanica beschrijft een ervaringsdomein waar het zinvol is te zeggen $E_k+E_p=w_{max}$, maar voor de zo gedefinieerde 'energie' ($=E_k+E_p$) geldt slechts behoud onder voorwaarden. Deze 'energie' behoort dus tot een tussentaal, welke verschilt van die taal waarin 'energie' altijd behouden blijft en waar ook de 'inwendige energie' toe behoort (3.4). Wordt de gelijkstelling van 'energie' met 'vermogen tot arbeid' niet expliciet maar stilzwijgend losgelaten, dan kan dit leiden tot de getoonde problemen bij het combineren van eerste en tweede hoofdwet, van energiebehoud en energieontwaarding (3.5). Dit leidt tot de vraag of een tussentaal waarin 'energie' nauw geassocieerd is met 'nut' of met 'vermogen tort arbeid' wel gewenst is. Deze vraag werd vervolgens geherformuleerd voor de termen 'ruilwaarde' (uit hoofdstuk 2) en 'gebruikswaarde', waarvan wordt verwacht dat deze komende vanuit de omgangstaal eerder verstaan kunnen worden (3.6).
Volgens het hier geschetste ontwerp (3.6) is het *zinvol* een meer specialistische vraag, waarop 'ruilwaarde' (later: energie) een antwoord geeft, te laten voortkomen uit een vraag die te maken heeft met 'gebruikswaarde', waarvan het belang naar verwachting eerder kan worden gezien. Deze tussentaal is niet alleen zinvol, maar voldoet ook aan criteria van consequentheid en toepasselijkheid op een beperkt ervaringsdomein. Wil natuurkunde echter een praktisch en voor de burger herkenbaar vak blijven, dan lijkt het juist om het stadium waarin de studie zich tot omkeerbare mechanische processen beperkt zo kort mogelijk te houden. De gelijkstelling van ruilwaarde met gebruikswaarde moet daarna worden losgelaten.
Er zijn twee routes aangegeven waarop dit "loslaten" zou kunnen gebeuren. Beide routes verschillen in de keuze waarmee ze aanvangen, maar komen overeen qua eindresultaat. De aanvankelijke keuze zou dus aan de lerenden kunnen worden overgelaten. Ook zijn er twee zeer verschillende momenten in het tot nu toe ontworpen curriculum (hoofdstuk 2) aangewezen, waar dit onderscheid zou kunnen ontstaan (3.7 onder b).
De hier voorgestane accentuering van een onderscheid tussen 'ruilwaarde' en 'gebruikswaarde' in secundair onderwijs komt qua bedoeling enigszins overeen met het voorstel van Strong en Halliwell om in tertiair onderwijs een duidelijker onderscheid te gaan maken tussen 'energie' en wat nu 'vrije energie' heet, door in plaats daarvan de "Planck functie"

S_{tu}=-G/T te gaan gebruiken (zie 3.5 onder b).

4. Analogieën op weg naar entropie

Doel van dit hoofdstuk is om te laten zien hoe entropie betekenis kan krijgen als een maat voor de 'gebruikswaarde' (veranderingsmogelijkheden) in een geïsoleerd systeem. Andere maten voor gebruikswaarde, zoals vrije energie en de Availability function (3.3.3) zijn daarmee dan ook voorbereid. We beperken ons in dit onderzoek echter tot entropie. Nadat is omschreven wat we bedoelen met 'analogie' (4.1) kan in bestaand onderwijs het gebruik van een analogie worden opgemerkt bij het introduceren van entropie (4.2). Getoond wordt dat dit analogie-gebruik een onderwijsprobleem met zich mee brengt. Dit leidt tot het formuleren van een eis die aan analogieredeneringen in onderwijs kan worden gesteld (4.3). Een discussie uit de vorige eeuw tussen Joule en Clapeyron leidt ons tot een analogie (4.4) waarvan verwacht mag worden dat hij aan de nieuw gestelde eis voldoet (4.5). Het ontworpen onderwijs wordt tot slot besproken in relatie tot enige andere onderwijsontwerpen (4.6).

4.1. Analogie

Een uit onderwijs bekend voorbeeld van een analogie betreft elektriciteitsleer en hydrodynamica. Hierbij worden hydrodynamische proeven gebruikt om bijvoorbeeld het vermoeden van het potentiaalverval over een weerstand te laten ontstaan, naar aanleiding van een getoond drukverval over een water leidende buis. Voor elk van de relaties $\phi=I.R$ (Ohm), $I_t=I_1 + I_2$ (Kirchhoff, parallelschakeling), $\phi_t = \phi_1 + \phi_2$ (serieschakeling) kennen we een analoge relatie op het terrein van de hydrodynamica.
Bij gebruik van een analogie wordt kennis van een bekend ervaringsdomein gebruikt om te komen tot een nadere analyse van een ander ervaringsdomein. Een beperkte opgemerkte overeenkomst tussen beide domeinen wordt aanleiding om verdergaande overeenkomsten te verwachten. Het bekende ervaringsdomein wordt wel het 'basisdomein' van de analogie genoemd, het andere domein het 'doeldomein' (vgl. Gentner[79], Duit[80]).
Het moge duidelijk zijn dat een analogie niet tot conclusies voert die logisch dwingend zijn. Gebruik van een analogie past dus niet in een stadium waar al een voldoende set axioma's is gekozen om bij het redeneren van uit te gaan. Ze zou daarentegen een rol kunnen spelen in een stadium waar nog geen axioma's gekozen zijn, dus in een 'empiriegebonden' stadium (zie 1.3).

4.2. Entropie en het deeltjesmodel in het VWO

In VWO chemie-onderwijs wordt 'entropie' meestal geïntroduceerd in een statistische betekenis.[*),81] In Chemie overal[45] lezen we na enkele inleidende zinnen de volgende

(* Van de 3 onderzochte natuurkunde-onderwijsgangen introduceert niet één de entropie. Van de 3 onderzochte scheikunde-onderwijsgangen introduceren 3 de entropie, alle drie in de statistische

vetgedrukte tekst:

> "Entropie is een maat voor de *spreiding* van energie over de kleinste deeltjes (atomen, moleculen, ionen) en van de kleinste deeltjes over de ruimte; Hoe groter deze spreiding, des te groter de entropie." (p.34)

In Chemie[40] wordt een hieraan verwante omschrijving ("aantal realiseringsmogelijkheden", p.47) geïntroduceerd na een meer uitgebreide voorbereiding. Eerst wordt o.a. opgemerkt dat een gasportie zich verdeelt over de beschikbare ruimte. Dan vervolgt de tekst:

> "Om een verklaring hiervoor te vinden gaan we een gedachtenexperiment doen. We stellen ons een dambord voor dat in twee helften is verdeeld. We nemen een stapel damstenen en gaan die op dat bord plaatsen. Voorlopig interesseert ons alleen of de schijven op de linker- of op de rechterhelft van het bord komen.
> Bij één damschijf heb je twee mogelijkheden: de schijf op de linkerhelft of de schijf op de rechterhelft van het dambord.
> Bij twee schijven zijn er vier mogelijkheden:
>
> ab | - a | b b | a - | ab
>
> De situatie met evenveel schijven op elke helft van het bord is een gelijkmatige verdeling.
>
> **Vragen en opgaven**
> 1. Er zijn vier damschijven a, b, c en d. Het dambord bestaat uit twee velden. Hoeveel mogelijke verdelingen zijn er bij vier schijven? Geef alle verdelingen. Ga na dat een gelijkmatige verdeling het meest voorkomt." (Chemie[40], p.43-44)

Vervolgens wordt nog aandacht besteed aan grotere aantallen schijven en aan een verdeling van de ruimte in meer dan twee velden, alvorens de conclusies bereikt voor "damstenen" worden toegepast op het ervaringsdomein waaruit de vraagstelling was voortgekomen, namelijk "gassen".
Pas daarna volgt de omschrijving voor entropie, in twee stappen:

> "Ook kan de snelheid van deeltjes zeer verschillend zijn, zowel in grootte als in richting. Iedere combinatie van plaats en snelheid is een mogelijkheid om zich in de ruimte te bevinden. Men spreekt van *realiseringsmogelijkheid*." (Chemie[40], p.46)

En na nog enige uitweiding over "gelijkmatige verdeling":

> "De natuurkundige Boltzmann voerde het begrip *entropie* in. De entropie *S* is een maat voor het aantal realiseringsmogelijkheden van een aantal moleculen." (Chemie[40], p.47)

We zien hier dus hoe de eigenschap "plaats" ontleend wordt aan een ervaringsdomein - te omschrijven als 'collectie voorwerpen' (damstenen) - om vervolgens te worden gebruikt op een ander ervaringsdomein, namelijk de expansie van een gasportie.
We noemen dit "een ander ervaringsdomein", omdat weliswaar een portie gas vele beschrijfbare eigenschappen met een voorwerp gemeen heeft, zodat we een portie gas ook

---

betekenis. Ook de engelse Nuffield scheikundecursus volgt deze aanpak, volgens Hadfield[81].

'een voorwerp' kunnen noemen*), echter dit voorwerp doet zich aan ons voor als homogeen. Onze ervaring met een portie gas betreft dus eventueel een voorwerp maar deze ervaring betreft geen collectie voorwerpen.
Toch weten we uit de geschiedenis van de fysica dat het op zeker moment nuttig kan worden om een portie gas te gaan beschouwen *als* een collectie voorwerpen, om verschillende empirische wetten zoals de ideale gaswet en de Brownse beweging vanuit één gezichtspunt te gaan beredeneren. Bij deze werkwijze worden empirische wetten die gevonden zijn voor macroscopische voorwerpen toegepast op een terrein waar directe toetsing (door waarneming van plaatsen en snelheden) niet mogelijk is omdat de empirische gasportie wel een plaats heeft maar geen 'plaatsen' en bovendien in rust verkeert.
Uit de gekozen beschouwingswijze worden echter consequenties afgeleid die wel toetsbaar zijn, en die de gekozen beschouwingswijze zin geven.

Wanneer men voor een dergelijke beschouwing kiest, zegt men wel dat men de gasportie beschrijft "met een deeltjesmodel". Een beperkte overeenkomst tussen twee ervaringsdomeinen - zowel een gasportie als een collectie bewegende elastische voorwerpen is in staat een kracht uit te oefenen op de wand van een vat waarin gas/voorwerpen zijn ingesloten - wordt dan gebruikt om te komen tot vermoedens van verdergaande overeenkomsten.

> *Zo'n deeltjesmodel voldoet dus aan de omschrijving die we eerder gaven voor een "analogie"* (4.1)

We zagen al, dat de door een deeltjesmodel gegenereerde vermoedens niet alle toetsbaar hoeven te zijn, mits maar via (eventueel lange) redeneringen uiteindelijk enkele toetsbare consequenties gevonden worden.

In geval van de redenering naar aanleiding van het dambord en de damschijven doelen de auteurs op de conclusie dat een "gelijkmatige verdeling" de grootste waarschijnlijkheid heeft. Toegepast op een gasportie beschouwd *zoals* een collectie damschijven moet deze conclusie leiden tot de verwachting van een uniforme dichtheid als meest waarschijnlijke toestand, een toestand waarbij gelijke compartimenten even veel gas bevatten.
Een inhomogeen model (analogon) kan dus verklaren waarom we drukverevening in een homogene gasportie waarnemen. Didactisch is dan wel de vraag wanneer men zo'n soort verklaring kan verstaan zoals hij bedoeld is. De volgende paragraaf toont een probleem dat we ontmoet hebben tijdens een cursus statistische thermodynamica (Fysische Chemie II aan de UvA in 1992).

4.3. Problemen met een gasportie als collectie voorwerpen

We beperken ons hier tot onderwijsproblemen in het WO, bij gebruik van een analogie die in het verlengde kan worden gezien van het zojuist getoonde gebruik in het VWO.

(* mits we voor 'voorwerp' een passende generaliserende omschrijving geven die niet de eigenschap 'vaste vorm' omvat.

Onderwijstekst
Atkins[57] introduceert de statistische interpretatie van entropie voor 't eerst met enige precisie in hoofdstuk 19, nadat eerder de macroscopisch thermodynamische betekenis van entropie aan de orde kwam in de hoofdstukken 4 tot en met 10. In de tussenliggende hoofdstukken zijn quantummechanica en quantumchemie aan de orde geweest (Atkins[57] deel getiteld "structure").[*)]
In plaats van een verdeling van moleculen over een in gelijke hokjes verdeelde *ruimte* wordt hier een verdeling van moleculen over discrete *energieniveaus* (quantummechanisch te verantwoorden) in beschouwing genomen. Moleculen hebben in deze beschouwing dus geen "plaats" (Chemie[40])! Afgezien van dit verschil komt de werkwijze echter goed overeen met die aangetroffen in Chemie[40]: deeltjes worden met namen onderscheiden en dit onderscheid speelt een rol bij het tellen of berekenen van het aantal realiseringsmogelijkheden, of, zoals Atkins[57] het noemt "the weight" W van een energieconfiguratie, zoals blijkt uit het volgende citaat.
Beschouwd wordt een collectie van N moleculen verdeeld over energieniveaus ε_0, ε_1, ε_2, etcetera. Met een "configuratie" bedoelt Atkins[57] een specificatie van de *aantallen* moleculen per energieniveau.

> "We can picture a large number of different instantaneous configurations. One, for example, might be {N, 0, 0, ...} corresponding to every molecule being in its ground state. Another might be {N-2, 2, 0, ...}, in which two molecules are in a higher state. The latter configuration is intrinsically more likely to be found because it can be achieved in more ways: {N, 0, 0, ...} can be achieved in only one way, but {N-2, 2, ...} can be achieved in ½N(N-1) different ways." (Atkins[57], p.568)

De juistheid van deze bewering wordt vervolgens toegelicht in een voetnoot:

> "One candidate for entering the upper state can be selected in N ways. There are then N-1 candidates for the second choice, corresponding to N(N-1) choices overall. However, we should not distinguish the choice (Jack, Jill) from the choice (Jill, Jack), and so only half the choices lead to distinguishable configurations". (Atkins[57], p.568)

"Configuratie" is hier inconsequent gebruikt, want eerst was een configuratie een specificatie van aantallen moleculen (ongeacht hun identiteit) per energieniveau. Eén zo'n "configuratie" kon op ½N(N-1) manieren worden *gerealiseerd*, heeft dus vele realiseringsmogelijkheden. In de laatste zin uit de voetnoot wordt met "configuratie" één zo'n realiseringsmogelijkheid van de "configuratie" {N-2, 2, ...} bedoeld.
Bij het tellen van de "onderscheidbare" realiseringsmogelijkheden van één configuratie, bijvoorbeeld van {N-2, 2, ...}, wordt een portie gas *als* een collectie voorwerpen behandeld, voor zover het de onderscheidbaarheid betreft. Immers bij het tellen van de "N ways" om één molecuul naar het hogere niveau aan te slaan, levert elk individueel molecuul een nieuwe realiseringsmogelijkheid op. Voor de eindtoestand doet de volgorde waarin moleculen Jack en Jill worden aangeslagen er niet toe, maar de keuze (Jack, Jill) wordt wel onderscheiden van de keuze (Romeo, Juliet) en ook van (Jack, Juliet), om het door At-

(* De tekst van Alberty en Silbey[53] heeft, afgezien van de nummers der hoofdstukken, eenzelfde opbouw.

kins[57] begonnen spel van naamgeving even voort te zetten.

De keuze voor onderscheidbare moleculen als model (analogie), welke ook door Chemie[40] (met "a" en "b") werd gehanteerd, krijgt bij Atkins[57] weinig nadruk. Deze keuze konden we opmerken door de geciteerde voetnoot kritisch te lezen. Vermoed wordt dat leerlingen deze keuze niet *als keuze* zullen opmerken. Atkins[57] maakt hier gebruik van de vanzelfsprekendheid dat dingen, of ze groot of klein zijn, nu eenmaal onderscheiden kunnen worden.
Ook Atkins[57] gebruikt dus een analogie waarbij een gasportie analoog wordt gezien aan een collectie macroscopische voorwerpen, zoals Chemie[40] dat (duidelijker) deed door naar damschijven te verwijzen. Hoewel Atkins[57] de keuze voor onderscheidbare moleculen niet duidelijk uitspreekt, zijn toch de volgende 17 bladzijden vol wiskundige afleidingen alle op deze keuze gebaseerd, want het hele betoog bouwt voort op zijn formule (1)

$$W = N! / (n_0!.n_1!.n_2!...n_m!)$$

Deze formule geeft het aantal realiseringsmogelijkheden W voor een configuratie van N objecten verdeeld over m bakjes - met n_0 objecten in bakje 0, n_1 in bakje 1, etcetera - *mits de objecten onderscheidbaar zijn* (Alberty en Silbey[53], p.551, Chandler[82], p.66-67.).

Dat deze verzwegen en toch voor zijn betoog belangrijke keuze niet altijd voldoet, wordt voor het eerst medegedeeld op bladzijde 584[57], dat is 17 bladzijden nadat de genoemde keuze voor 't eerst werd gehanteerd.
Ook op bladzijde 584 wordt niet vermeld sinds wanneer deze nu twijfelachtige keuze een rol speelde in het betoog, en dus is ook niet duidelijk welke formules en afleidingen er nu aangepast moeten worden, nu de gekozen analogie niet zonder meer als toepasselijk is te beschouwen. Atkins tekst[57] lezend kan men de indruk krijgen dat alleen Atkins laatste formule $Q = q^N$ correctie behoeft, en dat de rest van het voorafgaande betoog gehandhaafd kan blijven. We zullen nu een resultaat van deze onderwijsaanpak bezien.

Onderwijsproblemen
Een probleem met het spreken over een gasportie *als* over een collectie onderscheidbare voorwerpen bleek tijdens het werkcollege. Een studente was blijkbaar gaan twijfelen aan de geldigheid van de formule $W = N! / (n_0!.n_1!.n_2!...)$ voor niet-onderscheidbare deeltjes. Ze heeft de formule niet zonder meer toegepast maar vraagt "zijn alle deeltjes on-onderscheidbaar of... wel onderscheidbaar?" (r.10)

Protocol 0.6
Er wordt gewerkt aan de volgende opgave:

> "A sample consisting of five molecules has total energy 5ε. Each molecule is able to occupy states of energy $j\varepsilon$ with j=0, 1, 2,...
> (a) Calculate the weight of the configuration in which the energy is equally shared by the molecules. (b) Draw up a table with columns headed by the energy of the states and write beneath them all configurations that are consistent with the total energy. Calculate the weights of each configuration and identify the most probable configurations." (Atkins[57], p.589, problem 19.6)

D: Als ik de kans uitreken van voorkomen van dit (4 in niveau **0**, 1 in **5**)... is de kans 5-faculteit gedeeld door 4-faculteit, en dat is 5.

S1: Waarom zegt u vijf? Wat zijn die vijf mogelijkheden?

D: Ik heb.. gegeven, ik heb een systeem, van vijf deeltjes, met een totale energie van 5ε. Dat is m'n totale energie.

S1: ja

D: Als ik nou vier deeltjes in een energietoestand nul zet (**S**1: ja), dan moet het laatste deeltje dat overgebleven is.. (**S**1: ja) een energietoestand 5ε hebben.

S1: Ja. Maar zijn alle deeltjes ononderscheidbaar of.. wel onderscheidbaar

D: Eh.. ik denk dat die deeltjes ononderscheidbaar zijn

S1: Dan lijkt me maar één mogelijkheid. Vier in niveau nul en één in niveau 5ε.

D: De kans.. nee, het gaat om de kans dat deze dingen voorkomen. Die kans wordt bepaald door de verdeling (schrijft) W is... 't aantal onafhankelijke deeltjes, 't zijn onafhankelijke deeltjes, ik kan ze niet kennen... gedeeld door n_1-faculteit enzovoorts

(Op bord: $W = \frac{N!}{n_0!\ n_1!\ \ldots}$)

Het is simpel toepassen van deze formule.
Dus ik krijg hier een configuratie die er uit ziet als (wijst op bord)

4, 0, 0, 0, 0, 1

en die kan 5 keer voorkomen, die waarschijnlijkheid. Want ik kan...

S1: Waarom 5?

D: Omdat ik kan.. ik kan èlk deeltje, ik kan elk van die deeltjes, ik kan, als ik die deeltjes een nummertje geef, kan ik deeltje 1 of 2 of 3 of 4 of 5 hier in zetten (in niveau 5).

S1: Maar alle deeltjes zijn ononderscheidbaar

D: Jawel, jawel maar de kàns.. De deeltjes zijn ononderscheidbaar maar de kans dat dit gebeurt is wel 5 keer zo groot. Die deeltjes weten niet van elkaar, de kans dat een van die deeltjes op die laatste toestand gaat zitten, die is vijf keer zo groot als ik vijf deeltjes heb dan wanneer ik één deeltje heb.

De bepaling van W door **S1** hangt af van het antwoord dat de docent haar geeft: "*dan* lijkt me alleen maar één mogelijkheid" (r.12).
De reactie van de docent is m.i. zo te begrijpen:

- Hij weet dat moleculen meestal als niet-onderscheidbaar beschouwd moeten worden.
- Hij weet dat Atkins 't gebruik van de formule $W = N!/n_0!n_1!...$ beoogt. Een andere formule is niet gegeven.

Spontaan improviserend probeert hij het één met het ander te verenigen met een redenering die wel overtuigend klinkt maar waarvan hij na afloop vaststelde dat deze niet klopt: de bovenstaande formule voor W geldt alleen voor een verdeling van onderscheidbare deeltjes. Met zijn verzwegen analogie-keuze heeft Atkins[57] docent en student samen op een dwaalspoor geleid (de student geeft tenslotte toe).
Het volgende gespreksfragment uit een ander werkcollege illustreert het probleem van moleculen als analoog aan voorwerpen nog op een andere manier:

Protocol 0.7

D: Waar moet je die factor $1/N!$ hebben?
S1: Nou als je ononderscheidbare moleculen hebt
D: Als ze ononderscheidbaar zijn. In welk geval is dat?
S1: Eh..
D: Nou..
S1: Deeltjes
D: Jawel maar 't zijn moleculen. Moleculen daar heb ik er ontzettend veel van. Kan ik dus betrekkelijk snel zien. Als ik een gas heb zou ik dan de deeltjes uit elkaar kunnen houden?
S1: nee
D: Nee. Bedenk als ik een gas heb, die deeltjes bewegen alle kanten op. Als je even je ogen dicht doet en je kijkt weer dan zijn er ongetwijfeld wel eens twee van plaats gewisseld. Daar kan ik dat niet zien. Dus voor gassen, die (deeltjes) zijn absoluut on-onderscheidbaar. Dus voor gassen moet ik die factor gebruiken.
S2: (andere vraag)
D: (antwoord, daarna:)
Bij een vaste stof kun je ook de deeltjes niet onderscheiden in die zin dat je niet kunt zien dat deeltje heeft nummer 1 en dat heeft nummer 3. Maar het is wel zo dat de deeltjes op hun vaste plaatsen blijven zitten in een kristal en in een vaste stof. Dus daar blijven ze weliswaar heen en weer trillen in hun hokje, maar het zijn dus wel deeltjes die je zou kunnen onderscheiden als je oogjes maar klein genoeg waren. Als je lang niet geslapen hebt of zo, dan heb je dat...
Dus voor gassen komt die term er in. Voor vaste stoffen, voor vaste stoffen.. niet.
(verder met de opgave)

De niet-onderscheidbaarheid van moleculen is een vreemde zaak, het is iets dat niet voorkomt in de macroscopische wereld om ons heen. Stel dat we de beschikking hadden over glazen knikkers die door de knikkerfabrikant zo perfect waren gemaakt dat ze qua vorm, kleur etc. identiek waren. Dan zouden deze knikkers altijd nog te onderscheiden zijn door hun *plaats*. Bewegen de knikkers door elkaar, dan kunnen we elke knikker die we willen individualiseren door hem met de ogen te volgen. Inderdaad, als we onze ogen sluiten (r.11-13) dan lukt dat niet meer. Maar we hebben de mogelijkheid om onze ogen open te houden: macroscopische dingen zijn principieel onderscheidbaar. Als het onderscheiden soms niet lukt, dan hebben we slecht gekeken (ogen dicht gedaan).

Bij moleculen is dat misschien toch anders. Zou de onderscheidbaarheid van moleculen van de gekozen waarnemingsmethode afhangen, dan zou de entropie van een systeem niet alleen een functie van systeemvariabelen zijn, maar zou ook afhangen van deze waarnemingsmethode. Dit standpunt is in 1961 ingenomen door Grad[83] in een fysisch-mathematische publicatie. Naarmate we meer over een systeem te weten komen, zouden we een lagere entropie aan het systeem moeten toeschrijven, en zodra we alle posities en snelheden kennen zou er nog maar één realiseringsmogelijkheid verenigbaar zijn met onze beschrijving, waarbij volgens Grad's opvatting de entropie tot nul gedaald zou zijn, zonder dat er een proces heeft plaatsgevonden, alleen doordat onze waarnemingstechniek is voortgeschreden. Dit lijkt me een interessant standpunt, dat ik graag nader wil leren kennen. Maar uit fysisch chemische studieboeken blijkt dat Grad's visie nog geen algemene ingang heeft gevonden.
Willen we entropie blijven hanteren als een eigenschap van een systeem, in plaats van als een (omgekeerde) maat voor onze kennis over het systeem, dan is het blijkbaar nodig de onderscheidbaarheid of niet-onderscheidbaarheid van moleculen als eigenschap van die moleculen*) te kiezen - dus als eigenschap van het gekozen model voor een gasportie - in plaats van deze onderscheidbaarheid te laten afhangen van een waarnemingsmethode.
Een dergelijke niet-onderscheidbaarheid kennen we niet uit ons dagelijks leven. De uitleg die de docent in r.11-15 en 18-24 geeft is dan te zien als poging om deze vreemde, veronderstelde niet-onderscheidbaarheid te vergelijken met iets bekends: je kijkt naar bewegende voorwerpen en je doet even je ogen dicht.
Deze vergelijking begint al bij de vraag gesteld in r.7-9, die suggereert dat het antwoord 'nee' moet zijn vanwege de *praktische onmogelijkheid* om gasmoleculen van elkaar te onderscheiden. Inderdaad, het zal best moeilijk zijn om zoveel snel bewegende knikkertjes met de ogen te volgen! Door 'praktische onmogelijkheid' als reden te nemen kunnen we een gasportie als een collectie knikkertjes blijven beschouwen. Deze beeldspraak heeft hier de vorm van *metafoor*: het beeld (wegens oogknipperen niet traceerbare knikkertjes) vervangt datgene wat bedoeld wordt (niet-onderscheidbare moleculen als gekozen model). Die vergelijking gaat echter niet helemaal op, want in de vaste stof is het onderscheiden van afzonderlijke moleculen vaak evenzeer praktisch onmogelijk en toch mag ik ze daar wel *als onderscheidbaar beschouwen*. De juistheid van die beschouwing wordt gepresenteerd als onafhankelijk van de vraag of ik daadwerkelijk over een apparaat beschik waarmee ik de moleculen kan onderscheiden:

> "If identical molecules are in a crystal lattice, each one can be 'named' with a set of coordinates. Identical molecules in a lattice are therefore distinguishable and we use eqn. 21a." (Atkins[57] p.585)

Als we niet kiezen voor Grad's opvatting van entropie, maar voor die van o.a. Atkins[57], dan is de uitleg gegeven door de docent dus te zien als een poging de analogie tussen moleculen en macroscopische voorwerpen te ver door te voeren.

---

*) Eventueel: afhankelijk van de omstandigheden.

'Onderscheidbare moleculen' als tussentaal
Ook studieboeken die duidelijker dan Atkins[57] de keuze voor onderscheidbare moleculen introduceren, bijvoorbeeld Alberty & Silbey[53], bespreken eerst deze keuze, alvorens de alternatieve keuze uit te werken:

> "In applying statistical mechanics, we will primarily be interested in systems of indistinguishable particles, but it is easier to make derivations with distinguishable particles (for example, equation 17.1 applies to distinguishable particles) and correct for indistinguishability at the end" (Alberty & Silbey[53], p.552)

We zien dus dikwijls 'onderscheidbare moleculen' functioneren als tussentaal, op weg naar 'niet onderscheidbare moleculen'. Zoals we gezien hebben ontstaat deze tussentaal door de poging onze kennis van macroscopische collecties voorwerpen te gaan benutten op een nieuw ervaringsdomein (bijvoorbeeld betreffende een homogene portie gas), hetgeen we eerder een analogieredenering noemden.
Echter ook bij 'niet onderscheidbare moleculen' gebruiken we onze kennis van macroscopische collecties voorwerpen om te komen tot uitspraken over gasporties. Alleen kiezen we dan het type statistiek dat voortkomt uit ervaringen waarbij niet gelet wordt op de identiteit van de voorwerpen.

> *Ook bij 'niet onderscheidbare moleculen' kunnen we dus spreken van het gebruik van een analogie.*

De keuze voor 'niet onderscheidbare moleculen' komt, zo bezien, neer op de keuze van een ander ervaringsdomein als basisdomein*) voor de analogie. Er wordt bijvoorbeeld gekozen voor ervaringen met het verdelen van balletjes over verschillende doosjes, waarbij alleen op het aantal balletjes wordt gelet, niet op hun identiteit - en dat *ongeacht de vraag of we moleculen nu wel of niet kunnen zien*. De gemaakte keuze wordt bepaald door de eis van correcte beschrijving van het doeldomein van de analogie, bijvoorbeeld van de mengentropie van twee gasporties.

Toetsbaarheid van diverse analogieën
Eerder (4.2) noemden we als eigenschap van een bruikbare analogie (model) dat de analogieredenering leidt tot enige consequenties die toetsbaar zijn. Zowel 'onderscheidbare moleculen' als 'niet onderscheidbare moleculen' leiden tot consequenties die toetsbaar zijn. Sommige van die consequenties komen overeen: beide deeltjesmodellen (analogieën) leiden tot de consequentie dat een gasportie de beschikbare ruimte gelijkmatig zal vullen. Andere consequenties verschillen. Zo leidt 'onderscheidbare moleculen' tot de consequentie dat de entropie zal toenemen, als een schuif wordt weggetrokken tussen twee ruimten waarin zich zuurstof bevindt onder identieke omstandigheden. 'Niet-onderscheidbare moleculen' leidt daarentegen tot de consequentie dat in zo'n geval de entropie constant

*) Voor 'basisdomein' en 'doeldomein', zie 4.1.

blijft[*)] in overeenstemming met de conclusies van de fenomenologische thermodynamica, waar entropie wordt gedefinieerd door $dS=đq_{rev}/T$.

Wanneer 'entropie' niets anders betekent dan k ln *W, dan zijn echter beide voorspellingen oncontroleerbaar.*

We hebben dan geen middel om een keuze te maken uit de twee gedachtenspinsels die we onszelf hebben toegestaan.

Conclusies en keuze

Met het oog op onderwijs zijn nu de volgende conclusies getrokken:

- Het onderwijs waar 'entropie' betekenis wordt gegeven in termen van 'realiseringsmogelijkheden' laat zich analyseren als het gebruik van een analogie, waarbij statistische kennis, gewonnen uit ervaring met collecties voorwerpen wordt toegepast op een ander ervaringsdomein.
- Volgens deze analyse verbindt de vergelijking $S = k \ln W$ twee ervaringsdomeinen, waarbij de entropie S behoort tot het doeldomein (bijvoorbeeld ervaringen met gasporties) terwijl W behoort tot het basisdomein (ervaringen met collecties voorwerpen, bijvoorbeeld damstenen)
- Een nadere afbakening van het basisdomein bleek nodig, alvorens W een getalswaarde kan krijgen. *Welke* ervaringen met voorwerpen worden als basisdomein gekozen: die waarbij we letten op de voorwerpen als onderscheidbare individuen, of die waarbij we daar niet op letten? (verschillende keuzen leiden tot een andere statistiek).
- We kiezen dus of we de eigenschap 'onderscheidbaarheid' van macroscopische voorwerpen betrekken in de analogie, ja of nee. Ook wordt gekozen of de eigenschap 'plaats', die we kennen van macroscopische voorwerpen, een rol speelt dan wel 'energie', dan wel beide.
- Wanneer deze keuzen stilzwijgend worden gemaakt door de auteur van het studieboek, dan leidt dit tot onvruchtbare problemen.[+),84,85]

(* Om tot deze conclusie te komen is het nodig de 'partitiefunctie' te gebruiken, in plaats van een rechtstreekse telling van W.
De door mij gebruikte formule was: $S = U/T + nR(\ln q - \ln n - \ln N_A + 1)$
waarin U de inwendige energie, n de hoeveelheid stof, N_A het getal van Avogadro, en q de moleculaire partitiefunctie. Deze is evenredig met het volume waarin het molecuul zich bevindt (Atkins[57], p.585). Bij samenvoegen van twee porties gas bij gelijkblijvende druk krijgen we dan per molecuul een tweemaal zo grote q (meer volume ter beschikking) tegelijk met een verdubbelde n, waardoor de entropie precies de som is van de entropieën van beide gasporties vóór de samenvoeging. De totale entropie blijft dan dus constant bij zo'n samenvoeging.

(+ Een vergelijkbaar probleem met een deeltjesmodel wordt gemeld door Jones[84]. Hij vertelt hoe hij "geschokt" was toen in een bekend artikel over licht niet éénmaal het woord 'foton' voorkwam. Naar aanleiding van deze leerzame schok merkt hij op dat: **1)** in studieboeken niet de huidige quantummechanica wordt onderwezen maar wat heet de "oude quantummechanica", **2)** dat deze "oude quantummechanica" niet correct wordt onderwezen. Einstein heeft namelijk niet gezegd dat straling uit deeltjes bestaat, maar hij schreef: "Monochromatische Strahlung von geringer Dichte (innerhalb des Gültigkeitsbereiches des Wienschen Strahlungsformel) verhält sich in wärmetheoreti-

Het maken van de genoemde keuzen is wat we gewoonlijk noemen: het opstellen van een deeltjesmodel. In wetenschapsbeoefening geldt voor modellen de eis van toetsbaarheid aan ervaringen. De keuzen welke leiden tot een getalswaarde voor W zijn echter pas dan toetsbaar, als S al een meetbare grootheid voorstelt.*)

Als we willen dat studenten de zinnigheid van door het onderwijs geïntroduceerde keuzen kritisch kunnen nagaan, dan moet dus een macroscopisch thermodynamische introductie van de entropie vooraf gaan aan een statistisch mechanische interpretatie.

We besluiten dus een onderwijsaanpak te zoeken, waar leerlingen worden betrokken in de aktiviteit van het opstellen en toetsen van een model (=analogie), als alternatief voor het stilzwijgend inwisselen van een model voor een ander.
De zojuist getrokken conclusie kan op het bezwaar stuiten dat we leerlingen de voordelen van een visuele voorstelling lijken te willen ontzeggen. De fenomenologische betekenis van entropie, gesymboliseerd door $dS=đq_{rev}/T$ wordt dikwijls ervaren als abstract. Zo schrijft Atkins[57]:

> "One definition of entropy will be presented in detail in Chapter 19, but it is helpful to be aware of it from the outset since it helps us to visualize the thermodynamic definition on which we concentrate in this chapter. This **statistical definition** of entropy supposes that we can actually calculate the degree of disorder in a system." (Atkins[57], p.84)

Hierboven zagen we echter dat de vergelijking $S = k \ln W$ de grootheid entropie allerminst *vastlegt*, aangezien er nog diverse keuzen te maken zijn alvorens W en daarmee S een waarde krijgt toegekend. In een stadium waar deze keuzen nog gemaakt moeten worden is het dus misleidend om deze vergelijking als "definitie" te presenteren. Om tegemoet te kunnen komen aan de eis van een aanschouwelijke basis, kiezen we de volgende onderzoeksvraag:

Is het mogelijk een model (analogie) op te stellen dat leidt tot de voorspelling van een toestandsgrootheid S met bepaalde eigenschappen, waaronder $dS=đq_{rev}/T$, *zodanig dat*

---

scher Beziehung so, wie wenn sie aus voneinander unabhängigen Energiequanten von der Größe $R\beta\nu/N$ bestünde"[85]. Einstein[85] bereikt deze conclusie door de entropie van de straling tussen twee reflecterende wanden te vergelijken met de entropie van een gas. Jones[84] concludeert hieruit dat Einstein een analogieredenering gebruikt, waarvan Einstein de beperkingen heeft aangegeven. Leerboekauteurs presenteren het foton als feit op zichzelf, los van de voorzichtige redenering die deze term inhoud geeft.

(* De toetsing vindt plaats door na te gaan of k terecht een constante is genoemd. Verschillende goed te keuren deeltjesmodellen kunnen dan leiden tot verschillende (constante) waarden voor k. Wanneer bijvoorbeeld een opdeling van de ruimte in cellen wordt gekozen, dan zal k afhangen van de gekozen celgrootte. De ervaring dat we aan entropie een absolute waarde kunnen geven (entropieveranderingen van processen naderen naar nul als $T \rightarrow 0$, Atkins[57], p.94, 102), maakt het tenslotte mogelijk om aan één waarde van k de voorkeur te geven. De daarmee overeenkomende celgrootte blijkt ongeveer overeen te komen met de onzekerheid in plaats en impuls volgens Heisenberg's onzekerheidsrelatie (Chandler[82], p.191).

door lerenden kan worden getoetst in hoeverre de analogie (het model) opgaat en in hoeverre niet?

De eis van een mogelijke toetsing zien we hierbij als essentieel, want deze toetsbaarheid misten we in het geval van een statistisch mechanische introductie, indien deze voorafgaat aan een thermodynamische introductie.

4.4. Stromend water als analogon voor entropie

De analogie die we voorstellen te gebruiken werd geïntroduceerd door Carnot[78], als hulp aan de lezer bij het begrijpen van zijn argumentatie over het behoud van arbeidsvermogen ("puissance motrice") bij een omkeerbaar werkende machine:

> "D'après les notions établies jusqu'à présent, on peut comparer avec assez de justesse la puissance motrice de la chaleur à celle d'une chute d'eau: toutes deux ont un maximum que l'on ne peut pas dépasser, quelle que soit d'une part la machine employé à recevoir l'action de l'eau, et quelle que soit de l'autre la substance employée à recevoir l'action de la chaleur. La puissance motrice d'une chute d'eau dépend de sa hauteur et de la quantité du liquide; la puissance motrice de la chaleur dépend aussi de la quantité de calorique employé, et de ce qu'on pourrait nommer, de ce que nous appellerons en effet la hauteur de sa chute, c'est-à-dire de la différence de température des corps entre lesquels se fait l'échange du calorique." (Carnot[78], p.86)

Carnot was van mening dat deze analogie zo ver op gaat dat, evenals water tijdens een arbeidsverrichting qua hoeveelheid constant blijft, ook de hoeveelheid warmtestof ("calorique") niet verandert, wanneer op omkeerbare wijze arbeid wordt verricht.

> "La production de la puissance motrice est donc due, dans les machines à vapeur, non à une consommation réelle du calorique, *mais à son transport d'un corps chaud à un corps froid,* c'est-à-dire à son rétablissement d'équilibre, équilibre supposé rompu par chelque cause que ce soit, par une action chimique, telle que la combustion, ou par toute autre." (Carnot[78], p.68-69)

Op deze voorstelling van zaken werd later kritiek geuit door Joule[76]:

> "The principles which I have adopted lead to a theory of the steam-engine very different from the one generally received, but at the same time much more accordant with the facts. It is the opinion of many philosophers that the mechanical power of the steam-engine arises simply from the passage of heat from a hot body to a cold body, no heat being necessarily lost during the transfer. This view has been adopted by Mr.E.Clapeyron in a very able theoretical paper, (...). This philosopher agrees with Mr. Carnot in referring the power to *vis viva* developed by the caloric contained by the vapour in its passage from the temperature of the boiler to that of the condenser. I conceive that this theory, however ingenious, is opposed to the recognised principles of philosophy, because it leads to the conclusion that *vis viva* may be destroyed by an improper disposition of the apparatus: Thus Mr. Clapeyron draws the inference that "the temperature of the fire being from 1000° (C.) to 2000° (C.) higher than that of the boiler, there is an enormous loss of *vis viva* in the passage of the heat from the furnace to the boiler".
> Believing that the power to destroy belongs to the Creator alone, I entirely coincide

> with Roget and Faraday in the opinion that any theory which, when carried out, demands the annihilation of force, is necessarily erroneous. The principles, however, which I have advanced in this paper are free from this difficulty." (Joule[76])

Joule heeft hier Clapeyrons uitdrukking "puissance motrice" (vermogen tot arbeid) vertaald met "vis viva" hetgeen zijn woord is voor wat we nu "energie" noemen. Volgens Joule kan zulke vis viva of "force" niet verloren gaan. Clapeyron echter sprak over het vermogen tot arbeid, en dat vermogen neemt af als een temperatuurverschil door warmtegeleiding afneemt.
We zien hier dus twee tegenstrijdige voorvormen van eerste en tweede hoofdwet op elkaar botsen. De voorstanders van beide wetten begrijpen niet waar de ander het over heeft.
Om de opvattingen van Joule en Clapeyron te verenigen is er onderscheid gemaakt tussen 'energie' en 'vermogen om arbeid te verrichten' (zie 3.4). Ook is er onderscheid gemaakt tussen*),86,87

- iets wat we nu 'warmte' noemen, wat niet behouden blijft en wat zelfs geen eigenschap van een systeem meer is, maar van een proces
- iets wat we 'entropie' noemen, wat bij omkeerbare arbeidsverrichting inderdaad behouden blijft en waarvoor Carnots analogie met vallend water dus (onder die voorwaarde) opgaat.

De hier voorgestelde analogie is uitgewerkt door Mach[63] (p.328-338), en wordt momenteel in onderwijs gebruikt door Herrmann[88], echter niet geheel op de hier voorgestane wijze. We zullen nu eerst het hier voorgestelde gebruik van deze analogie bespreken.

4.5. Analogieredenering leidend tot entropie

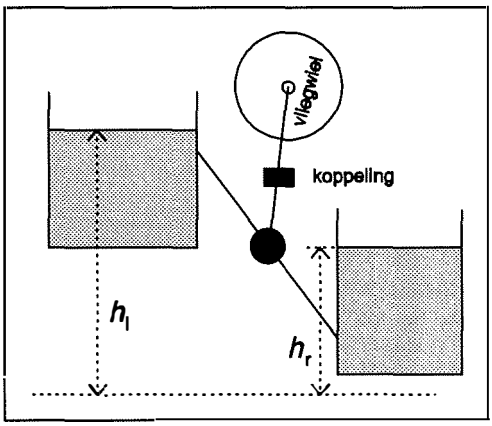
Het voorstel om via de analogie met arbeid verricht door stromend water te komen tot entropie als toetsbaar vermoeden wordt nu uitgewerkt, ter toelichting op het experimentele onderwijsontwerp (§11)[2].
In paragraaf 3.6 werd beredeneerd dat een geschikte maat voor 'gebruikswaarde' de eigenschap zal hebben dat ze in ieder geval in totaal constant blijft voor processen die kunnen worden omgekeerd. Het lijkt ook redelijk om te zeggen dat we met twee omhoog geheven stenen met gelijke massa en gelijke hoogte (boven een bereikbaar nulpunt) dubbel zoveel kunnen doen als met één van deze stenen, omdat, als een karwei met hulp van één van deze stenen gedaan kan worden (zonder veranderingen elders), dat karwei tweemaal gedaan kan worden met behulp van beide stenen. Een geschikte maat voor gebruikswaarde zal dus extensief (optelbaar) zijn: de gebruikswaarde van twee systemen is de optelsom

---

(* Thomson, de latere lord Kelvin, die zijn absolute temperatuurschaal had gebaseerd op Carnots theorie van de warmtemachine, raakte met Joule in discussie over diens kritiek op Carnot en Clapeyron. Uit hun onderlinge correspondentie blijkt dat het genoemde misverstand ook tussen hen beiden een rol speelde (brief[87] Joule aan Thomson, 6 oktober 1848 en het antwoord daarop, 27 oktober), totdat Thomson in zijn artikelenserie "*On the dynamical theory of heat*"[86] aangaf hoe beide visies verenigd kunnen worden. Zoals bekend kwam Clausius ongeveer gelijktijdig met een gelijkwaardige oplossing voor het getoonde probleem.

van de gebruikswaarde van beide systemen apart.*)
Om na te gaan wat het "in totaal constant" blijven van een extensieve grootheid zoal kan betekenen in een situatie die met energie en met nut te maken heeft, stel ik voor de hierna volgende drie situaties te beschouwen:

1 ● We hebben twee bakken met water, waarvan de waterspiegels in hoogte verschillen. Wanneer water van de ene bak naar de andere stroomt, dan kunnen we de beweging van het water gebruiken om een waterrad in beweging te zetten, dat op zijn beurt een vliegwiel aandrijft.
Een extensieve grootheid is hier de massa van het water m, immers de massa van het water in beide bakken is de optelsom van de massa's in beide bakken apart: $m = m_l + m_r$. Deze extensieve grootheid blijft in totaal constant:
$\Delta m_{totaal} = \Delta m_l + \Delta m_r = 0$ of te wel $\Delta m_l = -\Delta m_r$, de verandering van de waterhoeveelheid in beide bakken is in grootte gelijk maar tegengesteld.



Afbeelding 10: domein 'hoogteverschil en massatransport'

Met behulp van de eerder afgesproken ruilwaarden of energiewaarden kunnen we beredeneren dat voor een *kleine* verandering van de massa δm_l in de linkerbak, de energiewaarde voor de linkerbak verandert met een bedrag $\delta E_l = g h_l . \delta m_l$ (h_l de hoogte van de waterspiegel in de linkerbak, ten opzichte van een gekozen nulpunt) omdat dit de energiewaarde is van de waterportie die de bak heeft verlaten, terwijl de rest van het water, gelet op zijn hoogte, niet van energiewaarde is veranderd. We kunnen hier dus m_l een energievariabele noemen, met gh_l als bijbehorende energiecapaciteit (zie 2.6.1). Het betreft hier dus een energieverandering *door massatransport.*
Eenzelfde relatie geldt voor de rechterbak: $\delta E_r = g h_r . \delta m_r$. Omdat de veranderingen van de massa's in beide bakken gelijk maar tegengesteld zijn, zullen de energieveranderingen zich qua grootte verhouden als de hoogten, terwijl ze qua teken aan elkaar tegengesteld zijn: $\delta E_r : -\delta E_l = h_r : h_l$ of, anders opgeschreven,

$$\frac{\delta E_r}{h_r} = -\frac{\delta E_l}{h_l}$$

Kennen we $\frac{1}{2} I\omega^2$ als ruilwaarde van de hoeksnelheid ω (zie 2.8.2), dan kan opgemerkt worden dat $|\delta m_l . g h_l| = |\frac{1}{2} I\omega^2| + |\delta m_r . g h_r|$. Lerenden zullen dan wellicht zeggen dat de massaverandering δm_l die ruilwaarde oplevert in grootte gelijk is aan de ruilwaarde van beide veranderingen die ruilwaarde 'kosten' of 'nodig hebben'. Later is dit ook te formule-

*) Nog steeds: *als* het zou lukken een maat voor gebruikswaarde te vinden, *dan* verwachten we deze eigenschap. Het mag in dit stadium echter allerminst vanzelf spreken dat er zo'n maat zou bestaan. In een later stadium (§14 en 16)[2] zal in feite blijken dat we zo'n maat niet kennen, althans we kennen geen maat die voor alle gewenste situaties geschikt is.

ren als het constant blijven van de totale energie van de betrokken voorwerpen: $\delta E_{vliegwiel} + \delta m_l.gh_l + \delta m_r.gh_r = 0$.
We kunnen nu voorspellen hoe de aan het vliegwiel geleverde energie afhangt van de twee hoogten h_l en h_r, en van de hoeveelheid verplaatst water:

$$\delta E_{vliegwiel} = -\delta m_l.gh_l - \delta m_r.gh_r$$

en dit is te vereenvoudigen omdat $\delta m_l = -\delta m_r$ zodat

$$\delta E_{vliegwiel} = \delta m_r.gh_l - \delta m_r.gh_r = \delta m_r.g(h_l - h_r)$$

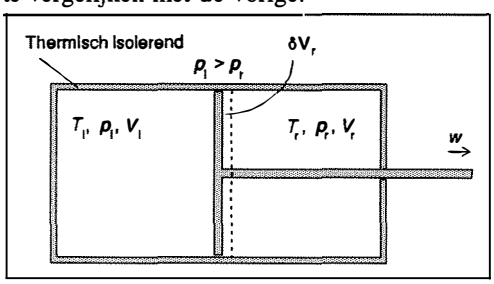
De aan het vliegwiel geleverde energie blijkt evenredig met het hoogteverschil, en met de hoeveelheid verplaatst water.
Benoemen we de linker waterbak als 'energiebron' en de snelheidstoename van het vliegwiel als 'taak' dan is de efficiëntie waarmee deze taak wordt verricht:

$$\varepsilon \equiv \frac{\delta E_{taak}}{-\delta E_{bron}} = \frac{\delta m_r.g(h_l - h_r)}{\delta m_r.gh_l} = \frac{h_l - h_r}{h_l}$$

De zo berekende efficiëntie is echter niet betekenisvol. Aangezien hoogte gemeten wordt ten opzichte van een gekozen nulpunt, kan de efficiëntie elke waarde aannemen tussen min oneindig en plus oneindig, afhankelijk van waar we ons nulpunt kiezen. De gevonden uitdrukking voor $\delta E_{vliegwiel}$ is wel zinvol, omdat ze alleen van het hoogteverschil afhangt. Het is dus de energieverandering van de energiebron die roet in het eten gooit: deze energieverandering is niet onafhankelijk van een gekozen nulpunt van hoogte te bepalen.

De volgende situatie is op een aantal punten te vergelijken met de vorige.

2 ● We hebben twee thermisch geïsoleerde hoeveelheden gas, gescheiden door een zuiger. De druk links van de zuiger is groter dan rechts. Via de zuigerstang kan daarom arbeid op een vliegwiel worden verricht.
Als veranderlijke extensieve grootheid hebben we hier het volume, immers $V_{totaal} = V_l + V_r$ en deze grootheid blijft in de getekende situatie in totaal constant, net als de massa van het water in het vorige geval. Dus we weten $\Delta V_l = -\Delta V_r$.



Afbeelding 11: domein 'drukverschil en volume-overdracht'

Wanneer de term 'arbeid' in verband gebracht is met 'inwendige energie' *) dan kan de energieverandering van beide gasporties worden berekend. Immers, de verandering van de

*) Zie 5-10[2] waar summier is aangegeven hoe arbeid in verband kan worden gebracht met inwendige energie. Mijn ontwerp leunt hier sterk op 'arbeid' zoals geïntroduceerd in het VWO en op de parallel aan mijn onderwijs lopende hoorcolleges waar Atkins' Physical chemistry[57] werd gebruikt.

inwendige energie geschiedt voor beide gasporties *door arbeid.* Dus vinden we:
$\delta U_l = -p_l.\delta V_l$
$\delta U_r = -p_r.\delta V_r$
mits de volumeveranderingen δV zo klein zijn, dat de druk links en rechts niet merkbaar verandert. Gebruik makend van $\delta V_l = -\delta V_r$ kunnen we nu voorspellen, op analoge wijze als bij de twee waterbakken dat de energieveranderingen van de twee gasporties zullen voldoen aan

$$\frac{\delta U_r}{p_r} = -\frac{\delta U_l}{p_l}$$

De arbeid geleverd op de buitenwereld is ook te berekenen:

$$w = -\delta U_l - \delta U_r = +p_l.\delta V_l - p_r.\delta V_l = \delta V_l.(p_l - p_r)$$

Benoemen we de linker gasportie als energiebron en arbeid op de buitenwereld als taak, dan is de efficiëntie waarmee deze taak wordt verricht

$$\varepsilon = \frac{p_l - p_r}{p_l}$$

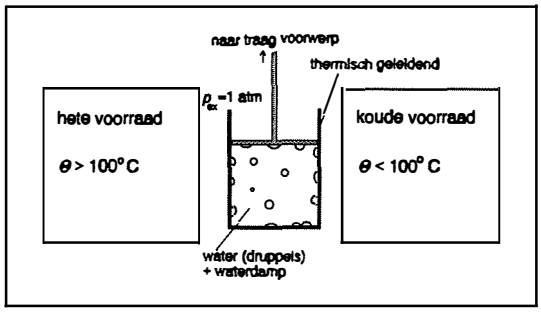
Aangezien de druk gemeten kan worden op een schaal met een betekenisvol nulpunt (vacuüm), is de hier voorspelde efficiëntie betekenisvol.

Hierboven hebben we een analogie kunnen constateren tussen de twee tot nu toe beschreven situaties. Zo valt op te merken dat de extensieve grootheid V in de tweede situatie eenzelfde rol speelt als m in de eerste situatie in relatie tot de arbeid w: de overgedragen hoeveelheid $|\Delta m_2|$ (in grootte gelijk aan Δm_1) is evenredig met w, zoals ook het overgedragen volume $|\Delta V_2|$ evenredig is met de arbeid. Ook is op te merken dat $-p$ in de tweede situatie eenzelfde rol speelt als gh in de eerste situatie: een verschil in druk tussen twee gasporties bepaalt de arbeid, zoals een verschil in gh tussen de beide waterbakken de arbeid bepaalde in de eerste situatie. De analogie wordt nog sterker als we opmerken dat $-p$ en gh beide intensieve grootheden zijn.

Tot nu toe hebben we wel twee analoge gevallen bestudeerd, maar we hebben nog geen *analogieredenering* nodig gehad, omdat elk van beide gevallen op zichzelf geanalyseerd kon worden.
Wanneer we echter de nu volgende derde situatie in beschouwing nemen, dan zal een analogieredenering ons enige baat kunnen opleveren:

3 ● We hebben twee grote voorraden water die van temperatuur verschillen. De één heeft een temperatuur boven 100°C, de ander een temperatuur onder de 100°C. Verder hebben we een thermisch geleidende cilinder, afgesloten met een zuiger, met daarin zowel water als waterdamp. De cilinder wordt beurtelings in contact gebracht met de hete en met de koude voorraad. De zuigerstang is gekoppeld aan een traag voorwerp (bijv. een vliegwiel) zo, dat het volume onder de zuiger slechts langzaam kan veranderen.

Met enige kennis van de evenwichtsdampdruk van water kunnen we voorspellen dat tijdens het contact met de hete voorraad de druk binnen de cilinder boven de 1 atmosfeer zal stijgen zodat via de zuigerstang arbeid verricht kan worden. Bij contact met de koude voorraad zal de druk onder de 1 atmosfeer dalen en ook dan kan er via de zuigerstang arbeid worden verricht op het trage voorwerp.



Afbeelding 12: domein 'temperatuurverschil'

Deze situatie lijkt dus op de vorige twee, in zoverre dat er weer een verschil is (hier een temperatuurverschil) waardoor arbeid kan worden gewonnen. Het verschil betreft, net als in de vorige gevallen, een intensieve grootheid. Zetten we de overeenkomsten met de vorige twee beschouwde situaties op een rij:

- Er kan arbeid verricht worden op een werktuig
- Er is een verschil in een intensieve grootheid en dit verschil is een voorwaarde voor eventuele arbeid.
- Er zijn twee voorwerpen te onderscheiden waarvan de energieverandering relevant is: de hete voorraad en de koude voorraad. Eén van beide is te benoemen als energiebron. De energieverandering van de andere voorraad komt in mindering op de energie besteed aan de taak en is daarom te benoemen als verlies.
- Er is een 'bemiddelend systeem' te onderscheiden dat per saldo niet van energie verandert (hier: omdat het een cyclisch proces doorloopt) en dat contact heeft met de beide systemen waartussen een verschil in een intensieve grootheid bestaat. Vergelijk de turbine en de zuiger in de vorige twee situaties.

Een verschil tussen de drie nu gepresenteerde situaties is, dat in elk de energieverandering van de twee 'voorraden' op andere wijze plaatsvindt: in de eerste situatie door *massatransport*, in de tweede situatie door volume*arbeid*, in de derde situatie door "*verwarmen*" (6-5 t/m 6-7 en 11-2, 11-3, 11-6)[2].

Op dit moment in het onderwijs kennen we voor de derde beschreven situatie nog geen extensieve grootheid die in totaal constant blijft *en* die wordt herverdeeld tussen de reservoirs *en* die evenredig is met de energieveranderingen van deze reservoirs. Zouden we niettemin veronderstellen - naar analogie met de vorige twee situaties - dat er een grootheid X met die eigenschappen bestaat, dan kunnen we voorspellen:

Uit $X_{totaal} = X_l + X_r$ (extensief) en $\Delta X_{totaal}=0$ (in totaal constant) volgt
$\Delta X_l = -\Delta X_r$

Uit: $\delta U_l = T_l.\delta X_l$ en $\delta U_r = T_r.\delta X_r$ volgt dan voor de beide energieveranderingen

$$\frac{\delta U_r}{T_r} = -\frac{\delta U_l}{T_l}$$

De arbeid geleverd op de buitenwereld is ook te berekenen:
$w = -\delta U_l - \delta U_r = T_l.\delta X_r - T_r.\delta X_r = \delta X_r.(T_l - T_r)$
En de efficiëntie waarmee deze taak wordt verricht is dus

$$\varepsilon = \frac{T_l - T_r}{T_l}$$

Het gebruik van temperaturen volgens de ideale gas-schaal is te motiveren doordat we een betekenisvolle uitdrukking voor de efficiëntie wensen. Ervaringen met gassen kunnen het *vermoeden* wekken dat de temperatuur een betekenisvol nulpunt kent, en van deze veronderstelling is dus ook gebruik gemaakt.
Van de drie voorspelde samenhangen zijn er twee toetsbaar, omdat ze niet de onbekende (veronderstelde) grootheid X bevatten.*) Hun voorspelling is echter wel op het bestaan van zo'n grootheid X gebaseerd. Bevestiging van deze verwachte samenhangen is dan op te vatten als een bevestiging van de op grond van analogie vermoede zinnigheid van X.
Bij de toetsing van de gedane voorspellingen (§12)[2] wordt echter gevonden dat de voorspelde efficiëntie alléén optreedt in het *limietgeval* van een omkeerbaar proces. Alleen voor dat limietgeval is dus de zinnigheid van een extensieve en in totaal constante X bevestigd. Dit kan naar verwachting de vraag oproepen of ook voor niet-omkeerbare processen zinnige uitspraken over X gedaan kunnen worden (13-5)[2]. Dit lukt naar verwachting zodra de keuze gemaakt wordt om vast te houden aan de eis dat *met X een toestandsgrootheid wordt bedoeld* (13-3 t/m 13-6)[2].

Tabel VII: drie interactiesoorten

interactiesoort	*extensieve energievariabele*	*intensieve energiecapaciteit*
transport potentiële energie door materietransport	massa	valversnelling × hoogte
volumearbeid	volume	druk
"verwarmen"	X	temperatuur

Tabel VII toont de geformuleerde samenhang tussen interactiesoorten, energievariabelen en

*) De energieverandering van de beide reservoirs is bepaalbaar zonder X te kennen. Als beide reservoirs als gevolg van de energieoverdracht een kleine temperatuurverandering zouden vertonen, dan zou $\Delta U = mc.\Delta T$ gebruikt kunnen worden. Een fraaiere werkwijze wordt beschreven in §12[2].

energiecapaciteiten. Gezien dit overzicht geldt $\delta U = T.\delta X$ alleen voor zover de energieverandering δU door thermisch contact tot stand komt. Voorts geldt ze alleen voor een reversibel proces. Men kan dus schrijven $\delta X = q_{rev}/T$ en dit leek me een geschikt moment om de naam entropie en het symbool S in te voeren (13-1 t/m 13-3)[2].
Nadat entropie ook voor een irreversibel proces bepaalbaar is geworden kan opgemerkt worden dat de totale entropie in zo'n geval toeneemt (13-7)[2] en ook, na de keuze om een perpetuum mobile als onmogelijk te beschouwen, dat de totale entropie *niet kan* afnemen (13-8)[2]. Hiermee is duidelijk dat de totale entropie, dat wil zeggen de entropie van een geïsoleerd systeem, een geschikte (omgekeerde) maat is voor gebruikswaarde, aangezien ze constant blijft als gebruikswaarde constant blijft, en toeneemt als gebruikswaarde afneemt. Precieser gezegd: entropie is een geschikte maat voor 'gebruikswaarde' omdat ze eenduidig samenhangt met de omvang van de verzameling der bereikbare toestanden van het geïsoleerde systeem (§14)[2].

4.6. Relatie met andere onderwijsvoorstellen

Voorstellen tot het onderwijzen van entropie laten zich in drie groepen indelen: **1)** voorstellen voor een statistisch mechanische introductie[81], **2)** voorstellen voor een verbeterde logisch deductieve afleiding uit formuleringen van de tweede hoofdwet in termen van warmte en arbeid[6], **3)** voorstellen voor een empirische introductie, gebruik makend van één of andere indeling van grootheden in intensieve 'drijvende krachten' en extensieve 'coördinaten'[1,88,21,89].
Over de statistisch mechanische introductie is een conclusie getrokken in paragraaf 4.3. De keuze om een alternatief voor een logisch deductieve afleiding te zoeken werd al genoemd in 1.3 en een aanwijzing voor de onverstaanbaarheid van zo'n afleiding voor beginners werd getoond in 2.5 onder a). Ons voorstel is te plaatsen in de derde genoemde groep. We zullen deze verwante voorstellen nu een voor een bespreken.

▸ *a. Bents voorstel voor een experimentele inleiding*
Bent[1] schetst een structuur voor thermodynamica-onderwijs uitgaande van de vraag "What properties must we attribute to S (entropie), if we are to obtain from S, *by deduction*, the facts and laws of experience?". Vervolgens keert hij de vraag om: "What facts and laws of experience lead us, *by induction*, to attribute to S certain properties?". Op de samenhang tussen beide vragen baseert hij zijn curriculum-planning:

> "This approach to thermodynamics - using experimental facts aggressively, to capture, via inductive reasoning, a set of axioms, or properties of S; then, in a reversal of that procedure, using deductive (..) reasoning and the axioms, or properties of S, to retrieve the experimental facts (..)." (Bent[1])

Deze aanpak om de "inductieve" formulering van empirische regels te gebruiken om te komen tot het toeschrijven van eigenschappen aan S, voorafgaand aan axiomatisering en deductieve toepassing van de axioma's is ook in mijn ontwerp te herkennen. Hierbij is

rekening gehouden met het verschil tussen 'inductie'[*)] en deductie, namelijk dat "inductief" redeneren wel tot verwachtingen maar niet tot zekerheid kan leiden, dus een empirische controle nodig heeft.
Een aantal van de empirische regels die door Bent gebruikt worden om tot toeschrijven van eigenschappen aan S te komen spelen ook in mijn opzet een rol, namelijk:

> "(4) Energy and volume are additive in *all* systems and conserved in *all* isolated systems.
> (5) Heat *always* flows of itself from high to low temperatures.
> (6) Volume *always* flows of itself from high to low pressures." (Bent[1])

Temperatuurverschil en drukverschil als drijvende krachten, gecombineerd met de additiviteit van energie en van volume zijn immers de essentiële bestanddelen van de in 4.5 voorgestelde analogieredenering. Bent gebruikt deze regels om het in totaal constant blijven van entropie, in het limietgeval van evenwicht, als eigenschap toe te kennen.[+)]
Het "bestaan" van entropie echter wordt op andere wijze geïntroduceerd, namelijk uitgaande van de volgende "summary of experience":

> "Any process or event whose net effect is the precise reversal of any natural, spontaneous, possible, real event is impossible." (Bent[1])

Ervan uitgaande dat toestanden elkaar in een "non-repeating sequence" opvolgen wordt de vraag gesteld of er een één-één-duidige afbeelding mogelijk is van toestanden (van een geïsoleerd universum) op getallen, zo dat latere toestanden een hoger getal krijgen. De hypothetische functie die deze afbeelding zou realiseren wordt entropie S genoemd. Hierna volgt het zoeken naar de nodige eigenschappen van S.
Deze introductie zou ik in tegenstelling tot Bent echter niet "empirisch" willen noemen, omdat er wordt uitgegaan van een onmogelijkheids-uitspraak (vergelijk protocol 0.1 r.345-384, besproken in 1.3). Ik verwacht hier dus dezelfde begripsproblemen als bij meer traditionele afleidingen, uitgaande van Kelvins of Clausius formulering. Een aanwijzing daarvoor noemde Niedderer[90]. Hij citeerde leerlingen die Carnots argumentatie "begrijpelijk" maar "niet doorslaggevend" vonden:

> "Dat je een uitgangspunt kiest betekent toch nog niet dat het dan ook zo is? Er zou toch altijd nog kunnen blijken dat er tòch een machine gemaakt wordt die arbeid verricht op kosten van warmte uit de omgeving?"[#)]

▸ *b. Sanchez en Vergenz over ervaring en wiskunde*
Sanchez en Vergenz[89] en Ogborn[21] gebruiken eveneens de ervaring van temperatuurver-

---

(* Ik vat deze uitdrukking van Bent op als verzamelterm voor empiriegebonden redeneerwijzen. De analogieredenering behoort dan ook daartoe.

(+ Zie mijn veronderstelling $\Delta X_1 = -\Delta X_r$. Voor deze toepassing is het absoluut niet hinderlijk om de cursieve woordjes 'always' (Bents cursivering) te vervangen door: doorgaans, meestal, voor zover we tot nu toe gezien hebben, ... De getrokken conclusies kunnen dan ook in die zelfde toon worden gezet.

(# Uit persoonlijke notities gemaakt tijdens de lezing van Niedderer[90].

schil, drukverschil,... (verschil in een intensieve grootheid) als voorwaarde voor het verlopen van een proces, om tot uitspraken over entropie te komen. Sanchez en Vergenz[89] beperken de tweede hoofdwet tot de ongelijkheid $dS > đq/T$. De gelijkheid $dS = đq_{rev}/T$ wordt samen met $dU = TdS - pdV$ tot de "eerste hoofdwet" gerekend, en de eigenschap 'toestandsfunctie' voor entropie zien ze als consequentie van de "*wiskunde* van reversibele cycli", waarmee ze de kwestie als fysisch oninteressant schijnen te willen afdoen. Zowel deductieve beschouwingen van reversibele cycli als de door mij voorgestelde analogieredenering laten echter zien dat het een *fysisch* vraagstuk betreft.

▸ *c. De chemische affiniteit als intensieve energiecapaciteit*

Het belang van het benoemen van drijvende krachten bleek me op nogal persoonlijke wijze uit een artikel van Gerhartl[2]. Gerhartl bestrijdt de mening aangetroffen in studieboeken dat de voorwaarde $\Delta_r G < 0$ voor het verlopen van een chemische reactie alleen toepasbaar is in geval van een constante T en P. Deze mening was ik tot voor kort ook toegedaan. De voorwaarde $\Delta_r G < 0$ is echter toepasbaar ongeacht de omstandigheden. De berekeningen die Gerhartl aanvoerde om zijn bewering te illustreren waren nogal uitvoerig. Een kortere redenering gaat als volgt. Omdat:

$$dU = T.dS - p.dV - \alpha.d\xi$$
$$dH = T.dS + V.dp - \alpha.d\xi$$
$$dA = -S.dT - p.dV - \alpha.d\xi$$
$$dG = -S.dT + V.dp - \alpha.d\xi$$

moet ook gelden:

$$-\alpha = (\partial U/\partial\xi)_{S,V} = (\partial H/\partial\xi)_{S,p} = (\partial A/\partial\xi)_{T,V} = (\partial G/\partial\xi)_{T,p}$$

Hierin is α de *affiniteit* van de chemische reactie en ξ de *vorderingsgraad*, een extensieve grootheid die aangeeft in hoeverre de reactie verlopen is. In plaats van $-\alpha$ echter wordt in de scheikunde meestal het symbool $\Delta_r G$ gebruikt, de 'Gibbs reactie-energie' genoemd, hetgeen een speciale connectie met de Gibbs vrije energie G suggereert. De affiniteit α is echter niet méér aan G gerelateerd dan ze aan U of aan H of aan A gerelateerd is, zoals blijkt uit bovenstaande gelijkheden. De voorwaarde voor het verlopen van een chemische reactie is dan ook:

$$-\alpha < 0$$

en deze voorwaarde is toepasbaar in elk van de vier genoemde omstandigheden. Men kan $-\alpha < 0$ naar believen interpreteren als $(\partial G/\partial\xi)_{T,p} < 0$ of als $(\partial A/\partial\xi)_{T,V} < 0$, of als... maar aangezien al deze afgeleiden gelijk zijn, lijkt het beter om α als zelfstandige grootheid met een eigen naam te behandelen.

De affiniteit is gelijk aan het verschil in (stoechiometrisch gesommeerde) chemische potentiaal tussen reactanten en produkten. De evenwichtvoorwaarde $\alpha = 0$ betekent dus dat de stoechiometrisch gesommeerde chemische potentiaal van de reactanten gelijk is aan die van de produkten, zoals thermisch evenwicht betekent dat de temperaturen van twee voorwerpen gelijk zijn. Niemand zal menen dat temperatuurgelijkheid als voorwaarde voor

thermisch evenwicht alleen onder bepaalde omstandigheden toepasselijk is, en bij de chemische affiniteit is de situatie analoog.

> *We kunnen hieruit concluderen dat aandacht voor de analogie tussen intensieve 'krachten' [*),91] en extensieve 'coördinaten' geschikt is om een bekend misverstand te vermijden.*

Hierbij is ook een passende naamgeving voor de verschillende grootheden nodig:

> *Het verdient aanbeveling de term 'affiniteit' in combinatie met een eigen symbool te gebruiken in plaats van $-\Delta_r G$, om de analogie met temperatuur, druk, oppervlaktespanning,... beter te laten uitkomen.*

▸ *d. Herrmanns 'hoeveelheidsachtige grootheden' en 'energiedragers'*

Herrmann[88] maakt in zijn onderwijsontwerp een zeer strak en consequent gebruik van analogie tussen diverse "hoeveelheidsachtige grootheden"[+)] in hun relatie tot intensieve drijvende krachten. De hoeveelheidsachtige grootheden zoals die voorkomen in $dU = T.dS$ +... worden door Herrmann 'energiedragers' genoemd, terwijl de geconjugeerde intensieve grootheden als "maat voor de belading van de energiedrager" worden geïntroduceerd. Dit komt overeen met Schaefers[5] voorstel om T te introduceren als de overgedragen energie per eenheid van overgedragen S, dus in algebraïsche notatie als $(\partial U/\partial S)_V$.

De verdienste van Herrmanns ontwerp is dat het laat zien hoe ver de analogie tussen hoeveelheidsachtige grootheden kan worden doorgetrokken. Zo krijgt ook de kinetische energie een analoge uitdrukking $v.dP$ (snelheid maal verandering van impuls) die past in het schema $T.dS + \phi.de$ (spanning en lading) + ... hetgeen ook bij verdere uitwerking allemaal verrassend en fraai blijkt te kloppen.

Een uitzondering is de volumeterm $-p.dV$ die zich niet makkelijk in Herrmanns schema laat voegjen. Dit probleem ontstaat doordat Herrmann zeer strak één bepaald analogisch schema hanteert, in plaats van zijn leerlingen te laten experimenteren met verschillende analogieën die in verschillende mate opgaan.

Een belangrijk verschil tussen Herrmans en mijn ontwerp hangt dan ook samen met de functie die de analogie vervult in het onderwijs. Bij Herrmann is de analogie geen middel

---

(* Intensieve energiecapaciteiten worden wel 'krachten' genoemd, extensieve energievariabelen 'coördinaten' (Chandler[82], p.5, Redlich[91]). Redlich[91] waarschuwt dat de indeling van grootheden in extensief en intensief niet samenvalt met de indeling in krachten en coördinaten.
De hier opgenoemde eigenschappen van een kracht, namelijk 'intensief' en 'energiecapaciteit' zijn nog voor aanvulling vatbaar (hoofdstuk 13).

(+ Herrmann[88]: "mengenartige Größen". Als eigenschap van 'mengenartige Größen' geldt niet alleen optelbaarheid (extensiviteit), maar ook het voldoen aan een continuïteitsvergelijking $dX/dt = I_X + C_X$, waarin dX/dt de verandering van X in de tijd aangeeft voor een ruimtelijk afgebakend systeem, I_X de influx van X in het systeem en C_X een creatie of vernietiging van X. Het betreft dus een subklasse van de extensieve grootheden. 'Volume' behoort er niet toe. Zijn analogie is daardoor qua betrokken domeinen beperkter dan de mijne, waardoor een groter aantal analoge relaties tussen de domeinen gevonden kan worden.

om leerlingen zelf tot hypothesen te laten komen, gevolgd door toetsing. Het is eerder een kapstok waaraan de leraar zijn beweringen kan ophangen, zodat deze beweringen een structuur krijgen die makkelijker te onthouden en te reproduceren is.
Om deze kapstokfunctie te kunnen vervullen kan het gewenst worden gevonden om de meest algemene termen het eerst te introduceren en de meer voor ervaring toegankelijke termen hierna te laten volgen. Dus vinden we bij Herrmann[88] 'energie' in hoofdstuk 1 terwijl snelheid, temperatuur, elektrische lading daarna volgen, precies omgekeerd aan de hier voorgestelde opzet. Als reden voor de door mij gekozen volgorde is aangevoerd dat we de algemenere term 'energie' wilden introduceren in zijn natuurkundige functie. Deze functie wordt pas gezien als al een aantal generalisaties met betrekking tot fenomenen beschikbaar is. Een achterliggend verschil in onderwijsopvatting speelt hierbij wellicht een rol. Wij proberen leerlingen tenminste een deel van het werk dat 'generaliseren' heet, zelf (samen) te laten verrichten, vanuit de hypothese dat een beter begrip wordt bereikt naarmate de lerende er zelf meer aan gewerkt heeft. Vanuit dit uitgangspunt volgen de algemenere termen dus nà de meer bijzondere, zoals in hoofdstuk 2 is geschetst.
Vanuit dit zelfde verschil in opvatting is ook te begrijpen dat Herrmann het bestaan van entropie poneert of als vanzelfsprekend probeert te laten gelden, terwijl in ons ontwerp van de lerende enige inspanning wordt gevraagd, waarbij hij met hulp van het onderwijs en van zijn medeleerlingen beargumenteerd tot deze hypothese kan komen.
Het is dus mogelijk om fysisch vrijwel dezelfde analogie op zeer verschillende wijzen in onderwijs in te zetten.

4.7. Conclusie en vraag: analogieredenering en tussentaal

We constateerden dat de statistische introductie van entropie berust op het gebruik van een analogie (4.2). We merkten op dat keuzen welke in dat verband gemaakt worden niet toetsbaar zijn, tenzij entropie al eerder betekenis heeft gekregen als meetbare grootheid. Zo kwamen we tot de vraag of het mogelijk is een analogie te ontwerpen welke leerlingen leidt tot de voorspelling van een toestandsgrootheid S met onder andere de eigenschap dat $dS=đq/T$, en die zodanig is dat door lerenden kan worden getoetst in hoeverre de analogie (het model) opgaat en in hoeverre niet (4.3).
Volgens het nu gepresenteerde onderwijsontwerp (4.5) gaan leerlingen beschikken over een model (analogie) voor entropie, sterker nog: ze gaan beschikken over twee modellen, een watermodel en een volumemodel. Een grootheid met de eigenschappen van entropie wordt op basis van een analogieredenering *verwacht*. Deze verwachting behoeft een toetsing die vervolgens ook plaatsvindt, waarbij de verwachting slechts gedeeltelijk (namelijk alleen voor het omkeerbare limietgeval) wordt bevestigd. Uit de noodzaak van toetsing blijkt duidelijk het verschil tussen een analogieredenering en een logisch deductieve redenering: uitgaande van de Kelvin- of Clausius-formulering van de tweede hoofdwet kan men het bestaan van een toestandsfunctie met de eigenschappen van entropie bewijzen. Na zo'n bewijs is geen empirische controle meer nodig. We vonden echter dat zo'n bewijs door beginners niet direct wordt begrepen (1.3 en 2.5 onder a). Ons gebruik van een analogieredenering moet dus gezien worden in het kader van het zoeken naar een geschikte empiriegebonden tussentaal (zie 1.3) met de bedoeling een groter aantal studenten aan te spreken.

Nieuwe vraag
Gelet op de niet-deductieve kwaliteit van redeneren doet de analogieredenering zich voor als gesteld in een enkele tussentaal (niet deductief). Gelet op de ervaringsdomeinen die in de analogieredenering op elkaar worden betrokken zou van meer dan één tussentaal gesproken kunnen worden. Taal en symbolen met betrekking tot het bekende domein 'stromend water' worden immers gebruikt om tot vermoedens te komen met betrekking tot een ander domein. Verschil in 'ervaringsdomein' werd in 1.3 genoemd als een mogelijk criterium om tussentalen te onderscheiden. We hebben dan hier de taal-verandering van 'stromend water' naar 'herverdeling van entropie' gezien.
Een verschil met de eerder (hoofdstukken 2 en 3) besproken veranderingen van taal is echter, dat nu geen woorden van betekenis veranderden, maar dat eenvoudigweg nieuwe woorden werden ingevoerd om de nieuwe betekenis (op het tweede ervaringsdomein) aan te duiden. Dit roept de vraag op naar een meer gedisciplineerde beschrijving van taalveranderingen dan met de tot nu toe gehanteerde term 'tussentaal' mogelijk is.

Deel 2:

Processen en Toestanden

Leerlingen leiden tot het werken met energie en entropie
als toestandsgrootheden,
gebaseerd op ervaringen met processen

Veranderingen in taal en redeneren bij lerenden en bij de onderwijzende,
in toenemende mate geleid door didactische gezichtspunten:
een leerproces in een onderwijssituatie georganiseerd volgens een
gespreksmodel
als te expliciteren referentiekader

Vooraf

In het voorgaande deel werd de werkhypothese van een reeks tussentalen tussen de omgangstaal en een vaktaal (1.2) gebruikt om te komen tot een interpretatie van een bestaande praktijk van energie- en thermodynamica-onderwijs en van ervaren problemen in die praktijk. Die interpretatie leidde steeds tot het vinden van aanzetten voor tussentalen in die bestaande onderwijspraktijk. Hierdoor ontstond perspectief op een consequenter ontwikkeling van zulke tussentalen *als tussentalen*, dat wil zeggen volgens de drie criteria genoemd in paragraaf 1.2. Van zo'n opzet wordt verwacht dat de "kloven van onverstaanbaarheid" (Ten Voorde[35], p.43-44) die zich tussen leerling-taal en vaktaal vaak voordoen (2.4, 2.5, 3.5) zodanig worden versmald dat een begaanbare route ontstaat.
Er werd echter ook opgemerkt (2.7) dat de plaatsing van beschreven tussentalen in een voor onderwijs aanbevolen *reeks* in het voorafgaande betoog nog op intuïtieve wijze

gebeurde. Vraag is nu of we gezichtspunten kunnen formuleren die het mogelijk maken tot een beschrijving van tussentalen te komen, zodanig dat daaraan argumenten voor een volgorde van gebeurtenissen in onderwijs kunnen worden ontleend. Zulke gezichtspunten en beschrijvingen noemen we *didactisch*.
In dit deel zullen we tonen hoe in een serie onderwijsexperimenten het concept-onderwijsontwerp, dat in het vorige deel werd beargumenteerd, wordt uitgeprobeerd en stapsgewijs verfijnd. Dit proces van stapsgewijs vernieuwen van onderwijs werd in toenemende mate geleid door gezichtspunten, die deels uit de literatuur afkomstig zijn, deels naar aanleiding van de experimenten ontstonden. Inzichten uit literatuur werden alleen gebruikt wanneer ze in verband konden worden gebracht met ervaring bij het evalueren en ontwerpen van onderwijs. In dit deel worden de gekozen didactische gezichtspunten geïntroduceerd, in verband met de ervaringen (bij het evalueren en ontwerpen van onderwijs) die er de aanleiding toe waren.

In hoofdstuk 5 wordt getoond hoe het experimenteren zelf aanleiding geeft tot vermoedens van didactische generalisaties. Ook wordt verteld hoe de bruikbaarheid van gerezen vermoedens steeds werd uitgeprobeerd in een volgend experiment, en hoe dat uitpakte.
In de hoofdstukken 6, 7, 8 en 9 worden deze - aan één of twee experimenten ontleende - vermoedens geconfronteerd met inzichten uit de literatuur, om te komen tot formuleringen die op een wijdere ervaringsbasis steunen. Ook van deze generalisaties wordt steeds besproken in hoeverre ze hebben bijgedragen aan het stapsgewijs vernieuwen van thermodynamica-onderwijs voor een kleine groep studenten.
De indeling van de hoofdstukken 6-9 is bepaald door het te introduceren gezichtspunt. In hoofdstuk 6 gaat het om de beschrijving van tussentalen naar hun *inhoud*: welke woorden komen voor, en in welke samenhang worden deze gebruikt? In hoofdstuk 7 worden tussentalen beschreven naar de *kwaliteit van redeneren* die zij mogelijk maken. Hierdoor ontstaat een rangorde in deze talen. In hoofdstuk 8 wordt de *analogieredenering* nader geanalyseerd, waarbij het mogelijk blijkt de beschrijvingen naar 'inhoud' en naar 'kwaliteit van redeneren' te combineren. In hoofdstuk 9 tenslotte wordt ingegaan op de verenigbaarheid van de geïntroduceerde gezichtspunten.
Dit leidt in hoofdstuk 10 tot didactische onderzoeksvragen die het onderwerp zullen zijn van deel 3.

5. Drie onderwijsexperimenten

In dit hoofdstuk wordt de geschiedenis verteld van drie onderwijs-experimenten, dat wil zeggen er wordt verteld hoe het ene experiment leidde tot het volgende. Hierbij beperken we ons tot wat nu als hoofdlijnen gezien kunnen worden. De opgave te komen tot een nadere beschrijving van 'tussentalen' - en van de veranderingen die van de ene tussentaal leiden naar de andere - wordt in dit hoofdstuk benaderd vanuit de praktijk van het evalueren van eerder onderwijs en het ontwerpen van nieuw onderwijs.
Er wordt getoond hoe deze activiteit aanleiding geeft tot

vermoedens van geschikte didactische gezichtspunten.

en ook tot

conclusies met betrekking tot een mogelijke volgorde van stappen in het onderwijsontwerp.

Deze twee soorten resultaten worden in dit hoofdstuk typografisch onderscheiden, zoals boven aangegeven.
Als vertrekpunt bij het bespreken van mogelijke volgorden van "stappen" gelden de drie tot nu toe onderscheiden veranderingen van taal, die in deel 1 werden ontworpen naar aanleiding van een evaluatie van bestaande onderwijspraktijken, te weten:

i - de overgang van 'energievormen' (of: 'ruilwaarden') naar 'inwendige energie' (hoofdstuk 2)
ii - van 'energie' als iets nuttigs, naar energie als iets dat niet per se nuttig is maar wel altijd behouden; Of: van 'waarde' in het algemeen naar 'ruilwaarde' en 'gebruikswaarde' als te onderscheiden grootheden, hoofdstuk 3).
iii - van massaoverdracht en volumeoverdracht via een analogieredenering naar 'entropie'-overdracht (hoofdstuk 4)

De relatie tussen deze drie veranderingen van taal en de drie onderwijsexperimenten waarover hier zal worden gerapporteerd, is aangegeven in de volgende tabel.

Tabel VIII: Uitgeprobeerde veranderingen van taal

Taalverandering ↓ \ Experiment →	1	2	3
i. Van energievormen naar inwendige energie	-	geprobeerd	geprobeerd
ii. Onderscheiden energie van gebruikswaarde	geprobeerd	ontworpen*	-
iii. Van $gh.\Delta m$ en $-p.\Delta V$ naar $T.\Delta S$	geprobeerd	geprobeerd	-

*Nieuw ontwerp op basis van vorig experiment, wegens tijdgebrek niet opnieuw uitgeprobeerd.

Het feit dat niet in elk van de drie experimenten alle drie gewenste taalveranderingen zijn uitgeprobeerd, is een gevolg van beperkingen in de beschikbare tijd, binnen de randvoor-

waarden (o.a. tentamenstof) van de cursus in het kader waarvan de onderwijsexperimenten plaatsvonden.

Plaats en gelegenheid
De uitgevoerde onderwijsexperimenten vonden plaats in het kader van het werkcollege, behorende bij een eerste cursus in de thermodynamica voor chemiestudenten aan de Universiteit van Amsterdam. In vier opeenvolgende jaren is door de onderzoeker deelgenomen aan het verzorgen van onderwijs in het kader van deze cursus. Het eerste jaar werd meegedaan aan het verzorgen van de werkcolleges zoals deze gewoonlijk in het kader van deze cursus plaatsvinden (zie deel 1, "Vooraf") in groepen van 20 tot 30 studenten, hetgeen leidde tot een evaluatie (gepresenteerd in deel 1) en tot een eerste ontwerp voor nieuw onderwijs.
Hierna werd driemaal een onderwijsexperiment gedaan in het kader van dezelfde cursus, in drie opeenvolgende jaren. In 1993 en 1994 betrof het tweedejaars chemiestudenten, in 1995 eerstejaars, wegens een wijziging in het curriculum van onze faculteit.
Ten behoeve van de experimenten werden steeds vrijwilligers gevraagd, met een maximum van 8 mogelijke deelnemers. Uit een populatie van ongeveer 60 studenten gaven er zich 8 op voor het eerste (1993) experiment, 5 voor het tweede (1994) en 5 voor het derde experiment (1995). Deze deelnemers volgden daarnaast ook nog het niet-experimentele hoorcollege. Om deelnemers de garantie van een adequate voorbereiding op het tentamen te kunnen bieden werd afgesproken dat in de experimentele groep tenminste ook alle opgaven gemaakt zouden worden, die in de parallelle groepen werden gemaakt. Daarnaast werden extra bijeenkomsten besteed aan het experimentele onderwijs.[*)] Deze opzet was gekozen omwille van het exploratieve karakter van het onderzoek. De bedoeling van de experimenten was immers om *mogelijke* leerroutes naar thermodynamisch begrijpen te vinden en te beschrijven. Het was niet de opzet om tot een vergelijkende toetsing met een controlegroep over te gaan.
Tijdens het experimentele onderwijs werkten de studenten in twee groepen van 2, 3 of 4 deelnemers aan het beantwoorden van de experimentele opgaven. Bij elk van deze groepen was een audiorecorder opgesteld. Hen was gevraagd om te proberen het eens te worden over de antwoorden op de vragen. Van de beide groepen werd er steeds één uitgekozen waarvan de bandopnamen werden uitgewerkt. Hiervoor werd die groep gekozen die qua aanwezigheid en zakelijke deelname het meest van zich liet horen.
Voorafgaand aan uitvoering werden bij de opgavenserie zowel de verwachte antwoorden in de vorm van redeneringen vastgelegd als een verantwoording van deze verwachtingen in didactische termen. Ter controle op de fysisch-chemische aanvaardbaarheid werden alle experimentele opgaven voorgelegd aan de docent die verantwoordelijk was voor de cursus.

Indeling
De opzet van dit hoofdstuk is als volgt. Nadat kort is aangegeven - met verwijzing naar deel 1 - hoe het eerste experiment tot stand kwam (5.1), worden resultaten van het eerste

[*)] De inroostering van de diverse onderdelen van de cursus is weergegeven in bijlage 5. Hieruit blijkt dat de tijd besteed aan het experimentele onderwijs achtereenvolgens bedroeg: 8 uur, 14 uur en 13 uur voor respectievelijk eerste, tweede en derde experiment.

experiment besproken welke leidden tot een gewijzigd onderwijsontwerp voor het tweede experiment (5.2).
Op soortgelijke wijze leidde het tweede experiment tot een gewijzigde opzet voor het derde (5.3). Tenslotte wordt het derde experiment geëvalueerd (5.4).

5.1. Van nulde naar eerste experiment

Aan het eerste (1993) onderwijsexperiment ging een evaluatie van de bestaande onderwijspraktijk vooraf (1992), waarover in deel 1 werd bericht (zie 2.5 en 4.3). Deze evaluatie van bestaande praktijk werd in latere jaren nog voortgezet (zie 3.5, met gegevens uit 1993) en uitgebreid met een literatuurstudie naar leerboeken in het VWO.
Voorafgaand aan het eerste experiment waren dus de onderwijsproblemen rond energie en entropie als toestandsgrootheden bekend (2.5 en 4.3). Gekozen werd om in eerste instantie het onderzoek te beperken tot *entropie* en tweede hoofdwet. Als ontwerptaak werd geformuleerd: *ontwerpen van een onderwijsroute welke via een analogieredenering leidt tot entropie als toetsbare voorspelling* (zie 4.3).
Het onderwijsexperiment van 1993 (Tabel VIII) was een eerste poging om deze taak te realiseren. De ontworpen opgavenserie (bijlage 1) omvatte de onderwijsroute naar 'entropie', ongeveer[*)] zoals besproken in de hoofdstukken 3 en 4.
Gepland was de eerste hoofdwet bekend te veronderstellen, dus het onderwijs zoals geschetst in hoofdstuk 2 maakte geen deel uit van dit eerste experiment. Aan de op dat moment al bekende problemen met *energie* als toestandsgrootheid werd aandacht besteed door in enkele opgaven[+)] (1-4, 2-1 en 2-5)[1] gelegenheid te geven tot oefenen van de in Atkins en in het hoorcollege gepresenteerde regels en definities. Er werd niet verwacht dat deze aanpak met betrekking tot energie zou voldoen. Verwacht werd dus dat we de problemen rond energie en entropie min of meer onafhankelijk van elkaar zouden kunnen aanpakken.
De volgende paragraaf (5.2) toont hoe evaluatie van ons eerste onderwijsexperiment ertoe leidde deze veronderstelling te herzien.[#)]

5.2. Van eerste naar tweede experiment

Het eerste experiment wordt geëvalueerd, gelet op het ontstaan van entropie als toetsbare

---

(* In de hoofdstukken 3 en 4 werd verwezen naar de recentste versie dus naar de opgavenserie van het tweede experiment (bijlage 2). Een overzicht van de verschillen tussen de opgavenseries in bijlage 1 (1993) en 2 (1994) is te vinden in bijlage 2 onder **b**.

(+ Bij verwijzingen naar opgaven wordt in het vervolg het nummer van de bijlage in superscript toegevoegd. Dus: "**(5-4)**[1]" wil zeggen opgave 5-4, te vinden in bijlage 1 "eerste onderwijsexperiment", onder "Ontwerp-opgaven (tekst)".

(# Verdere details over de opzet van het eerste onderwijsexperiment zijn gegeven in bijlage 1, in de vorm van een puntsgewijze toelichting bij de experimentele opgavenserie. Zulke toelichtingen zijn ook gegeven bij de opgavenseries van de experimenten 2 en 3. (Zie de inhoudsopgave van band II, "Bijlagen en protocollen").

voorspelling. De geconstateerde mislukking (5.2.1) leidt tot het zoeken naar een verklaring (5.2.2), tot een keuze (5.2.3) en tot enige overwegingen aangaande een nieuw ontwerp (5.2.4 t/m 5.2.6).

5.2.1. Evaluatie: 'entropie' als toetsbare voorspelling?

Als een belangrijk moment in het eerste onderwijsontwerp was tevoren aangewezen het moment waar de voorspelling van een grootheid met eigenschappen van entropie (5-4e t/m g)[1] moet worden getoetst (5-4 h en i, en heel §6)[1]. Het belang van die toetsing werd eerder benadrukt in hoofdstuk 4, waar we als bezwaar tegen een introductie van entropie via k ln W juist de niet-toetsbaarheid van consequenties getrokken uit een deeltjesmodel noemden, althans wanneer $S=k.\ln W$ vooraf gaat aan een empirische betekenis ($đq_{rev}/T$) voor entropie.

Van belang is in het bijzonder de opgave om zelf een toetsend experiment te ontwerpen (5-4h)[1] omdat, als studenten zo'n experiment niet zouden kunnen ontwerpen, ze in zekere zin niet weten wat ze hebben voorspeld. Althans: die voorspelling zou dan alleen uit symbolen op papier bestaan, ze zou niet naar mogelijke ervaringen verwijzen.

Dit bleek inderdaad het geval te zijn: mijn studenten waren niet in staat een experiment te ontwerpen ter toetsing van de door henzelf genoteerde "voorspelling" (5-4g)[1].

Protocol 1.5

D: Wat is dít nou weer voor een vraag..?!
C: Het rendement kun je toch wel testen dat is niet zo moeilijk
3 **D:** Zorgen dat we de temperatuur meten. Gewoon toch 't zelfde experiment maar dan met bepaalde grootheden?
C: Ja, en dan?
6 **D:** Rendement testen
C: Hoe kan je het rendement uitrekenen, wat is het rendement?
D: Nou! gewoon temperatuur van de éne (onderbroken)[*)]
9 **C:** Maar hoe kan je rendement méten bedoel ik eigenlijk veel meer. Van: het rendement moet zó veel zijn en dan doe je 'n experiment en... hoe meet je het dan?
12 **D:** Weet ik veel?
C: Hoe meet je het rendement
D: Ja, hoe moet je 'n rendement meten? (tot **WK**)
15 **WK:** Eh, ik denk dat je die arbeid kan meten die verricht wordt op dat vliegwiel of wat 't ook is, en eh, de energieverandering van de hete voorraad kan je ook meten. Dan meet je hoeveel warmte die verliest.

Te zien is dat de leraar (**WK**) snel voorzegt, als zijn leerlingen aangeven geen raad te weten met vraag 5-4h[1]. Dit voorzeggen was enerzijds een gevolg van tijdsdruk - nog maar 2 uur beschikbaar en nog 2 paragrafen te gaan - maar anderzijds blijkt daaruit ook dat

---

[*)] De bij 5-4f[1] genoteerde formule voor "rendement" luidde "$(T_h - T_k)/T_h$", waarin "h" staat voor heet, "k" voor koud. Deze opgave was volgens verwachting beantwoord. Zie 4.5 voor een argumentatie voor dit antwoord.

WK er op dit moment al niet meer in gelooft dat zijn studenten 5-4h[1] zelf zouden kunnen beantwoorden. Dit gebrek aan vertrouwen in de combinatie (deze opgave, deze studenten) zou een gevolg kunnen zijn van ervaringen opgedaan bij eerdere opgaven. Dus moet worden nagegaan, waarom de voorafgaande opgaven (1-1 t/m 5-4g)[1] studenten niet in staat hadden gesteld tot het ontwerpen van een toetsend experiment.

5.2.2. Evaluatie: verwijzende betekenis van 'warmte' en 'arbeid'?

Volgens de opgaven was 'rendement' gedefinieerd als "arbeid op omgeving" gedeeld door "energie geleverd door energiebron" (5-1)[1]. Dus om de voorspelling dat het rendement gelijk is aan $(T_l - T_r)/T_l$ te kunnen toetsen, zouden de arbeid op de omgeving en de energie geleverd door de bron gemeten moeten worden. Waarom kwamen mijn studenten niet op dat idee?
Daartoe moet ik me afvragen wat 'arbeid' en 'energie geleverd..' voor hen betekenen. Zijn dit voor hen meetbare grootheden? En wat betekent 'meten' dan: rechtstreeks aflezen op een instrument, of kan er ook rekenwerk, gebaseerd op bekende natuurkundige regels, aan te pas komen?
In dat tweede geval is het wel nodig dat de "formule" "afgeleid" bij 5-4f[1] wordt opgevat als hypothetischer dan de formules (bijvoorbeeld: arbeid = kracht.weg) die men ten behoeve van het "meten" zou kunnen gebruiken. Anders zal immers na afloop niet duidelijk kunnen zijn welke van de gebruikte formules men nu heeft getoetst. Welke aangrijpingspunten hadden mijn studenten om onderscheid te maken tussen een *hypothetische* regel, zoals degene afgeleid bij 5-4f[1], en *gegronde* regels, waarvan we bij het "meten" gebruik zouden kunnen maken?
Voor student **D** bestaat dit onderscheid blijkbaar niet (r.8), want zij wil het rendement bepalen door $(T_l - T_r)/T_l$ uit te rekenen na T_l en T_r te hebben gemeten. **C** zoekt een andere berekening (r.7-9), waaruit blijkt dat ze $(T_l - T_r)/T_l$ als hypothetisch opvat, maar ze slagen er niet in die andere berekening of meting te vinden (r.9-14).
Dat brengt me weer terug bij de betekenissen van 'arbeid' en 'energie geleverd..'. Stel dat 'arbeid' voor hen betekent: kracht maal weg. Stel dat 'kracht' betekent: massa maal versnelling. Stel dat versnelling betekent: de afgeleide van... etcetera. Ergens in zo'n netwerk van termen die via regels met elkaar in verband staan, moet men de termen kunnen vinden die geen verdere regels meer nodig hebben. Dat zouden dan termen zijn waarvan men weet wat men moet *doen* om ze in een getal en een eenheid te vatten. Immers zonder zulke termen is het onderscheid tussen een hypothetische en een gegronde regel niet te maken.

Vanuit dit verkregen gezichtspunt kunnen we nu de gesprekken bij eerdere opgaven nagaan om te bezien of er termen met zo'n *verwijzende betekenis* voorkomen in verband met 'arbeid' en met 'energie geleverd..'. Hierbij is het ook nog van belang om op te merken dat bij opgave 5-4[1] de "energie geleverd door de bron" volgens het voorschrift gegeven boven opgave 1-4[1] in verband te brengen is met de procesgrootheid 'warmte', een term waarvan ik toen meende dat deze via de calorimetrie is te bepalen.
Dit gebruik van 'warmte' als procesgrootheid had ik geprobeerd voor te bereiden door de tekst boven 1-4[1]:

"In de thermodynamica onderscheidt men twee *bijdragen aan de energieverandering van een systeem*: warmte en arbeid.
▸ "arbeid" wordt verricht als er op de grens tussen de systemen een kracht werkt die tot een verplaatsing leidt ("arbeid is kracht maal weg", Atkins p.28).
▸ "warmte" vindt plaats als het energietransport over de grens gebeurt dank zij een temperatuurverschil (Atkins, p.6 en 29).

Een bijdrage (warmte of arbeid) wordt positief genoemd als hij een energietoename betekent, negatief als hij een energieafname betekent, voor het betreffende systeem."

Hierna volgden enige opgaven die bedoeld waren als oefening in het spreken volgens de aldus uitgesproken norm (1-4, 2-1 en 2-5)[1]. Protocol 1.3 toont hoe 'arbeid', 'warmte' en 'energie' functioneren in discussies over deze opgaven (2-1d en 2-5a)[1].

Protocol 1.3[*)]

Bij de genoemde opgaven waren schetsen van proef-opstellingen afgedrukt. Wanneer getwijfeld wordt over de toepasselijkheid van het woord 'arbeid' op de geschetste situatie (r.21-23, 25-27), dan kunnen we zeggen: het woord 'arbeid' heeft voor hen, **D** en **C** samen, geen duidelijke verwijzende betekenis.
D lijkt wel zeker te weten dat 'arbeid' niet van toepassing is (r.26). De woorden "thermische isolatie" uit de opgave hebben bij haar de naam "adiabatisch systeem" voor de geschetste opstelling opgeroepen en ze verbindt hieraan de conclusie "geen arbeid" (r.26), "arbeid is nul" (r.38). Deze ketting van *woord-associaties* lijkt het dus mogelijk te maken een conclusie ("want", r.38) te trekken.
De uitdrukking "adiabatisch systeem" kan **D** gehoord hebben in het hoorcollege, in de opgavenreeks komt hij niet voor. Ook kan ze daar gehoord hebben dat er iets "nul" is bij een adiabatisch systeem (namelijk q of de "warmte"). Om één of andere reden herinnert ze zich deze regel anders dan hij op 't hoorcollege geformuleerd werd.
Een reden waarom ze zich die regel verkeerd herinnert zou kunnen zijn, dat de juiste versie in haar taal opgevat onzin oplevert. Immers: **D** weet dat bij 'n adiabatisch proces de temperatuur doorgaans verandert[+)], en dat is voor **D** reden om te zeggen dat er "warmte ontstaat" (r.48).
Als 'warmte' synoniem is met temperatuurverhoging, zoals al bleek uit het antwoord op 2-1d[1] (r.4-6), dan kan het uiteraard niet waar zijn dat q=0 bij een proces waarbij de temperatuur verandert (r.148-157).
Voor **A** zijn warmte en temperatuurverhoging geen synoniemen (r.53, reactie op 48). Hij probeert 'warmte' in de samenhang van de eerste hoofdwet te gebruiken (r.45, 70, 76), maar toch is ook hij onzeker of en zo ja hoe het woord 'warmte' toepasselijk is voor de situatie getekend bij 2-1[1]. Hoewel bij 2-1[1] net als bij 2-5[1] sprake is van 'thermische isolatie' en er m.i. dus bij beide opgaven om dezelfde reden tot q=0 geconcludeerd kan worden (r.43) wil hij nu van mij horen wat hij zeggen moet (r.94). De opmerking dat 'warmte' van 'temperatuur' moet worden onderscheiden, brengt geen oplossing voor zijn probleem (r.97-99).

(* Protocollen langer dan één bladzijde zijn gebundeld in band 2 bij dit proefschrift (zie verder voetnoot *, p.5)

(+ Op 't hoorcollege werd de adiabatisch reversibele expansie en compressie van een gas behandeld.

Dit kunnen we begrijpen wanneer we opmerken dat **A** en **B** (r.102, 113) een energievormentaal (zie hoofdstuk 2) spreken. Immers als 'warmte' een vorm van energie is, waarvan we de toename kunnen berekenen via $q=m.c.\Delta T$, dan blijft nog steeds onbegrijpelijk dat $q=0$ terwijl $\Delta T\neq 0$. **B** wil daarom concluderen dat er arbeid is "omgezet in" warmte (r.113).
WK merkt nu dat het door hem (r.77-84, 90-93) gegeven voorschrift: "twee *manieren*" om de energie van een systeem te veranderen, nog steeds niet wordt verstaan zoals hij het bedoelt. Voor hem is "omzetten in" niet op dezelfde manier toepasbaar op arbeid en warmte, als dat het toepasbaar is op (bijvoorbeeld) kinetische en potentiële energie: bij kinetische en potentiële energie kan men van toename en afname spreken omdat er voor ieder tijdstip een bepaalde kwantiteit van beide energievormen kan worden toegekend aan een voorwerp. Bij arbeid en warmte zou hij echter niet weten hoe hij van toename of afname zou moeten spreken, en daarom ook niet van "omzetting" (d.i.: gelijktijdige toename van de ene energievorm en afname van de andere). Daarom noemt hij de uitdrukking "omzetten van arbeid in warmte" "vaag" (r.115, 119).
Die "vaagheid" hoeft echter niet iedereen zo te ervaren. In hoofdstuk 2 liet ik zien dat ervaringen waarbij de warmtecapaciteit c als constante kan gelden goed te beschrijven zijn met een toestandsgrootheid $Q=m.c.T$.[*)] In dat geval kan men dus ook spreken van toename, van afname, en van omzetting. Om de "vaagheid" van een dergelijke grootheid Q te ervaren is nogal een gerichte proefneming nodig: het is nodig te experimenteren met omstandigheden waar c niet constant is en waar bovendien twee variabelen na elkaar veranderen, waarbij dan voor dezelfde toestandsverandering twee wegen vergeleken moeten worden. Dán ervaart men de "vaagheid" of onbruikbaarheid van een dergelijke Q en dan *wordt* het dus onmogelijk om te spreken van toename van Q, afname van Q, en van "omzetten in warmte".
WK zag geen kans voor zijn studenten een ervaring te organiseren waardoor de zin van de uitdrukking 'omzetten van a in b' ter discussie zou kunnen komen. Het bleef bij beweringen (r.115, 119, 124). Wel geeft hij een m.i. precieze definitie van wat hij met 'warmte' bedoelt (r.80-81, 92-93): namelijk, een bijdrage aan de energieverandering van een systeem "door een temperatuurverschil". Die definitie wordt later ook nog toegelicht aan de hand van een voorbeeld (r.126-135), maar het mag uiteindelijk niet baten (r.145-168). Uit deze gebeurtenis kunnen we concluderen:

Blijkbaar kan een verandering van taal niet steeds per decreet worden afgekondigd.

Deze conclusie maakt het zinvol om te onderscheiden op welke wijze een verandering van taal in onderwijs wordt nagestreefd.

[*)] De 'toegevoerde warmte' $q=m.c.\Delta T$ is dan te zien als verschil $Q_2 - Q_1$ van twee 'aanwezige warmten' voor en na het proces.

5.2.3. Keuze: probleemstellend onderwijs

Kaper en Ten Voorde[37] onderscheiden drie manieren waarop een onderwijzende een betekenisverandering van woorden kan proberen te realiseren:

- *sluipend*, dat is: zonder de aandacht van leerlingen op de gewenste betekenisverandering te richten (de betekenisverandering ligt dan verborgen in mededelingen van 'feiten' die zonder de nieuwe betekenis niet controleerbaar zijn),
- *expliciet*: als de betekenisverandering ook als zodanig naar voren wordt gebracht
- *probleemstellend*: als de onderwijzende probeert leerlingen te laten ervaren dat een vorige betekenis niet meer voldoet, alvorens met nieuwe voorstellen te komen.

Een poging tot een expliciete ("daarom noemt men") aanpak is te horen in r.126-135 van protocol 1.3, besproken in de vorige paragraaf. We kunnen zeggen dat die aanpak hier niet is gelukt.
Bedoeling van het eerste onderwijsexperiment was om op probleemstellende wijze te komen tot entropie. We hadden gehoopt dit eerste experiment te kunnen beperken tot de tweede hoofdwet. Eventuele begripsproblemen met de eerste hoofdwet hoopten we te kunnen oplossen met een expliciete aanpak, inclusief gelegenheid tot 'oefenen' van de gestelde norm. Nu dat niet gelukt was concludeerden we dat ook ten aanzien van de eerste hoofdwet een probleemstellende aanpak moest worden gezocht.

> Een expliciete aanpak bij taalverandering i (Tabel VIII) bleek onvoldoende voorbereiding voor de, probleemstellend ontworpen, taalverandering iii.

Probleemstellend onderwijs betekent dat uitspraken van leerlingen niet zonder meer kunnen worden verworpen (Vgl. Klaassen[38], p.10-17). Het is dan dus nodig om tot een genuanceerd oordeel over de bruikbaarheid van hun uitspraken te komen, om gericht te kunnen zoeken naar die ervaringen waardoor de zin van hun huidig woordgebruik ter discussie kan komen. Tot zo'n genuanceerd oordeel was ik tijdens m'n eerste experiment niet in staat (Pr.1.3, r.115,119,124).
Om positief op de uitspraken van m'n studenten in te kunnen gaan, was bezinning nodig op de relatie tussen 'energievormen'-taal enerzijds en thermodynamische taal anderzijds. Dat leidde tot de beschouwingen weergegeven in hoofdstuk 2. Bij terugkijken naar dat hoofdstuk kan men zien dat een erkenning van de grote collectie ervaringen die 'energievormen' zinvol maakt, meteen ook leidt tot de afbakening van een groep ervaringen die 'energievormen' niet bevestigen. In plaats van meteen een oordeel uit te spreken, kan ik na deze bezinning dus een ervaring organiseren voor m'n studenten, waarvan ik meen dat daarin de "vaagheid" zou kunnen blijken van hun opvatting van "warmte" (als apart te kwantificeren vorm waarin de energie aanwezig is, $Q=m.c.T$).
Of de door mij ontworpen ervaring hen overtuigt, zal nu moeten blijken in een volgend onderwijsexperiment. Het is immers mogelijk dat m'n eerste experiment te ruw is geweest om hun taal goed genoeg te leren kennen om er op in te kunnen gaan. Immers: ik kan datgene waarnaar hun woord 'warmte' verwijst niet waarderen en zij kunnen dat waarnaar mijn woord 'warmte' verwijst niet waarderen. Er is dus geen gemeenschappelijke *verwijzende betekenis*. Wel zijn er gemeenschappelijke *woord-associaties* op te merken, zoals van "thermische isolatie" met "adiabatisch systeem" of van "warmte" met "Joule"

(r.69-70). Voor zover zulke associaties door napraten ontstaan zijn - dat wil zeggen, voor zover ze voor studenten niet controleerbaar zijn aan de hand van een verwijzende betekenis - achten we zulke associaties niet bruikbaar om in onderwijs op voort te bouwen.

5.2.4. Ontwerp: 'Thermische energie' als meetbare grootheid

Nu moeten we terugkeren naar de mislukte poging om studenten te brengen tot het formuleren van een experiment om de door hen genoteerde uitdrukking $(T_i-T_r)/T_i$ voor het rendement te toetsen. Ik meende toen dat hiertoe nodig (en beschikbaar) zouden zijn de termen 'warmte', 'arbeid' en 'energie' in hun thermodynamische betekenis, dus gerelateerd volgens de eerste hoofdwet. Daarbij zag ik 'warmte' en 'arbeid' als dichter bij de ervaring staande dan 'energie'.
'Arbeid' zag ik als meetbaar via kracht (veerbalans etc.) en weg (meetlat), bij 'warmte' dacht ik aan calorimetrische meetmethoden. 'Energie' zag ik als een meer theoretische grootheid, ter verklaring van de constante som van q en w, bij vergelijken van verschillende processen tussen dezelfde begin- en eindtoestand (vergelijk Somers[92], p.28).
Door de overwegingen genoteerd in hoofdstuk 2 heb ik deze meningen herzien. Want is het werkelijk de thermodynamische *procesgrootheid* warmte die men kan meten in een calorimetrisch experiment? Ik zeg nu neen, want een calorimetrisch experiment wordt altijd zó opgezet dat er twee deelsystemen energie (door thermisch contact) uitwisselen, en wel zodanig dat voor één van beide geldt $q=\Delta U$ of $q=\Delta H$. Vervolgens gebruikt men de *toestandsverandering* van dat tweede systeem - bijvoorbeeld de temperatuurverandering, of de gesmolten hoeveelheid ijs - om daaruit de *'q'* van het proces in het eerstgenoemde systeem te bepalen. Dus is het eerder de toestandsgrootheid ΔU die ons helpt om q te bepalen, dan andersom.
Wanneer ik 'warmte' zie als dichter bij de ervaring dan 'energie', dan denk ik eigenlijk toch aan de relatie $q=m.c.\Delta T$... en wat ligt er meer voor de hand dan een relatie tussen 'warmte' en 'warmtecapaciteit'? Maar in de thermodynamica is de relatie $q=m.c.\Delta T$ nu juist *niet* meer essentieel voor wat we met 'warmte' bedoelen. Dit blijkt bijvoorbeeld als we vergelijken de volgende twee relaties, die algemeen gelden voor een systeem met geen andere onafhankelijke energievariabelen dan V en T:

$$\mathrm{d}U = C_V.\mathrm{d}T + (\partial U/\partial V)_T.\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}U = T.\mathrm{d}S - p.\mathrm{d}V$$

Voor het reversibele proces identificeren we de term $T.\mathrm{d}S$ met de procesgrootheid 'warmte'. Maar omdat p in het algemeen ongelijk is aan $(\partial U/\partial V)_T$ kan dan de term $C_V.\mathrm{d}T$ geen 'warmte' meer genoemd worden. De relatie tussen 'warmte' en 'warmtecapaciteit' is dus helemaal niet meer definiërend voor wat we met 'warmte' bedoelen.*)
De enige echt algemene relatie, die dus uitdrukt wat we met warmte bedoelen is bij mijn weten deze: $q = \Delta U - w$. Dat staat natuurlijk al lang in de boekjes: de arbeid w is in de

*) Dit blijkt alleen al hieruit dat de zogenaamde 'warmtecapaciteit' niet meer wordt gedefinieerd in termen van 'warmte', maar van 'energie' (of 'enthalpie').

eerste hoofdwet de enige meetbare grootheid.
Dankzij w kunnen we ΔU bepalen en dankzij ΔU en w samen kunnen we q bepalen. Dat was al bekend.

Maar nu kwam het er op aan daar de didactische consequenties van te vinden. Betekent het dat we moeten beginnen met zowel 'energie' als 'warmte' te omschrijven in termen van 'arbeid' (en niets dan arbeid)?
Maar dan zouden we al vanaf het begin mikken op een betekenis voor 'warmte', waarvan de zin pas in samenhang met de toestandsgrootheid U gezien kan worden, en die dus niet kan dienen als basis voor deze grootheid U. De controleerbaarheid *tijdens* het (langdurige) leerproces zou dan ontbreken. De definitie $q = \Delta U - w$ voldoet dus niet in een probleemstellende aanpak, althans niet in het begin.

In hoofdstuk 2 valt te lezen welke oplossing er - ook om de nu genoemde redenen - is gekozen: vertrekken vanuit grootheden zoals snelheid, hoogte, temperatuur (later te noemen: energievariabelen), om aan veranderingen van zulke grootheden ruilwaarden toe te schrijven. Zo blijkt dat ik nog steeds kan vasthouden aan calorimetrie ($m.c.\Delta T$) als deel van een basis voor de energieleer. Maar dat kan pas, nadat eerst erkend is dat het dan niet de thermodynamische 'warmte' is die we meten. Het is iets wat eerder lijkt op de energievorm 'warmte' bekend van het VWO! En nu kunnen we vermoeden:

Een eerder stadium is pas echt verlaten als je er waardering voor op kunt brengen.

Immers, toen ik geen waardering kon opbrengen voor 'warmte' in de betekenis $m.c.\Delta T$, gebruikte ik nog stilzwijgend deze relatie om *'q'* te kunnen opvatten als meetbare grootheid. De relatie tussen de 'energievorm' $m.c.\Delta T$ die ik vanaf nu *thermische energie* noem enerzijds, en de thermodynamische 'inwendige energie' anderzijds, was toen nog niet zo duidelijk geformuleerd als ik het in hoofdstuk 2 deed.

> 'Thermische energie' (m.c.ΔT) kan een meetbare grootheid worden voordat de thermodynamische 'warmte' (ΔU-w) een meetbare grootheid is.
> Dit bevestigt het vermoeden dat we taalverandering i nodig hebben op weg naar de thermodynamica.

In het nieuwe ontwerp is de energievorm $m.c.\Delta T$ gebruikt als deel van een empirische basis voor 'inwendige energie' en deze term is op zijn beurt gebruikt om te komen tot 'entropie'.[*)]

[*] In de opgavenreeks voor het tweede experiment is nog 'warmte' gebruikt om de energievorm $mc.\Delta T$ aan te duiden, althans in de paragrafen 1 t/m 4. Bij het derde experiment ben ik ertoe overgegaan om 'thermische energie' te zeggen voor $m.c.\Delta T$ om zo 'warmte' te reserveren voor $\Delta U - w$. Wel liet ik studenten vrij om 'warmte' te zeggen, d.i. mijn 'thermische energie' als synoniem voor hun woord 'warmte' op te vatten.

5.2.5. Ontwerp: wanneer wordt q in de betekenis ΔU - w zinvol?

Hierboven concludeerden we dat q in de thermodynamische betekenis niet geschikt is om tot een empirische grondslag voor 'inwendige energie' te komen, omdat deze q ($=\Delta U - w$) pas meetbaar *wordt* als we de toestandsgrootheid U al kennen. Deze U op zijn beurt wordt meetbaar via o.a. temperatuurveranderingen, dus via 'thermische energie' of 'ruilwaarde van temperatuur'. Maar als deze q niet geschikt is als basis voor U, waarom wordt deze term dan ingevoerd? Anders gezegd, waarom nemen we eigenlijk de moeite om het verschil ΔU - w een naam te geven?

Hebben we deze q bijvoorbeeld nodig om uit te rekenen hoeveel energie er nodig is om een gas bij constante druk te verwarmen? Immers, in zo'n geval wordt arbeid op de buitenwereld verricht (w negatief). De energie nodig voor verwarmen is dan ΔU - w. Komende vanuit 'energievormen' of 'ruilwaarden' ligt het echter meer voor de hand om te zeggen: er vinden twee veranderingen plaats, namelijk
- de 'thermische energie' van het voorwerp neemt toe ($m.c.\Delta T$),
- de 'hoogte-energie' van de atmosfeer neemt toe ($mg.\Delta h$, waarin m de massa van een gewicht dat overeenkomt met de uitwendige druk op de zuiger, Δh de verplaatsing van de zuiger).

De energie nodig voor het verwarmen is dus de som van deze beide energieveranderingen. We berekenen dus $m.c_V.\Delta T + mg.\Delta h$ (een som van twee energievormen) en niet ΔU - w. De tweedeling waarbij elke energieverandering wordt gezien als een som van ten hoogste twee bijdragen (een q en een w)[*] is niet gemakkelijk te motiveren, gezien de veelvormigheid van de verschijnselen - veranderingen van snelheid, hoogte, temperatuur, fase - die we onder de term 'energie' willen vatten. De hierboven aangeduide vraagstelling voldoet in ieder geval niet om die tweedeling te motiveren, aangezien de gestelde vraag evengoed met twee energievormen (twee van de *vele*) beantwoord kan worden als met q en w.

Dus blijft de didactische vraag welke vraagstelling voor studenten dan wél die tweedeling of driedeling (q, w en een term voor materietransport) zinvol kan maken. In plaats van een opdeling van de verandering der inwendige energie naar de betrokken *variabelen* verlangen we dan een opdeling waarbij gelet wordt op het gebeuren aan de systeemgrens, de *interactiesoort*: dat deel van de energieverandering dat is toe te schrijven aan het samengaan van een kracht op de systeemgrens met een verplaatsing van die systeemgrens noemen we 'arbeid', dat deel wat in verband te brengen is met een temperatuurgradiënt aan de systeemgrens noemen we 'warmte' en dat deel wat in verband te brengen is met materietransport over de systeemgrens wordt genoteerd als $\mu_i dn_i$; een naam voor deze derde term ontbreekt.

De gevraagde motivering voor deze nieuwe opdeling van de verandering der inwendige energie hebben we gezocht in dezelfde analogieredenering, die in het eerste experiment alleen diende om 'entropie' zin te geven. Immers bij het vergelijken van de drie situaties

---

[*] Of: ten hoogste *drie* als ook open systemen in de beschouwing worden betrokken: arbeid, warmte en materietransport.

gepresenteerd in 4.5 kan opgemerkt worden dat de verrichte arbeid bepaald is door een - *verschil* in een intensieve grootheid en niet zozeer door verandering van een intensieve grootheid. Naast temperatuurverandering *van* een systeem als aanwijzing voor 'thermische energie' (inmiddels een procesgrootheid) kan dus interesse ontstaan voor temperatuurverschil *tussen* aangrenzende systemen als mogelijke reden voor het spreken van 'verwarmen' als interactiesoort.*)
Ook kan daar opgemerkt worden dat in twee van de drie situaties het energietransport samengaat met transport van een andere extensieve grootheid dan energie. Voor de derde situatie wordt een grootheid X (later entropie) met overeenkomstige eigenschappen verwacht. De combinatie van een overgedragen 'extensieve grootheid' met een verschil in een 'intensieve grootheid' kan dan, naar verwachting, gekozen worden als criterium voor het onderscheiden van drie verschillende 'interactiesoorten'.

Als uiteindelijke reden om het verschil ΔU - w een naam te geven vinden we dan, na bevestiging van de geformuleerde vermoedens over 'X' (§12)[2], dat voor het bijzondere geval van een reversibel proces dit verschil gelijk is aan de energievorm $T.\mathrm{d}S$, welke energievorm al eerder kwalitatief in verband was gebracht met de interactiesoort 'verwarmen'.
Aangezien we tot nu toe geen andere aanleiding hebben gevonden om interesse te hebben in het verschil ΔU - w, dan precies déze samenhang tussen 'verwarmen' en $T.\mathrm{d}S$, kunnen we niet eerder interesse van studenten vragen voor deze thermodynamische 'q' dan nadat deze samenhang tussen ΔU - w enerzijds en $T.\mathrm{d}S$ anderzijds in 't zicht is gekomen (dus na §11 en 12)[2]. De thermodynamische betekenis van 'warmte' wordt daarom nu geïntroduceerd bij opgave 13-1[2].

> *We verwachten dat de nieuwe term 'q' betekenis kan krijgen als knooppunt van twee (wiskundig geformuleerde) relaties, namelijk enerzijds* $q = \Delta U - w$ *en anderzijds* $q = T.\mathrm{d}S$

Deze verwachting zou generaliseerbaar kunnen zijn. Immers: hoe kan een term zinvol zijn, anders dan als 'knooppunt' voor meer dan één relatie? We kunnen dus vermoeden dat een definitie (d.i. één relatie) niet voldoende is om een nieuwe term zin te geven.

Een motivering om de verschillende soorten arbeid (elk met een andere overgedragen extensieve grootheid) alle 'arbeid' te noemen ontbreekt nog. Die motivering ontstaat pas door de tweede hoofdwet, die immers voor één term ($T.\mathrm{d}S$) uit de energievergelijking een ongelijkheid formuleert ($q \leq T.\mathrm{d}S$) waarvoor geen analogon te vinden is voor de andere termen uit de energievergelijking, hetgeen rechtvaardigt om deze termen alle 'arbeid' te noemen zodat we kunnen generaliseren: $w \geq w_{rev}$. Dus in het hier voorgestelde onder-

---

(* Zie opgaven 11-3c t/m e; 11-6, 11-7a t/m d[2].
Deze introductie van 'interactiesoorten' in §11[2] werd al voorbereid in §6[2] en 7[2]. Bij opgave 6-7[2] kan al worden uitgesproken dat we 'verwarmen' herkennen niet zozeer aan temperatuurverandering als wel aan *een* verandering veroorzaakt door temperatuur*verschil*. Door 'verwarmen' te gebruiken hoeven studenten niet meteen in conflict te komen met hun betekenis van het woord 'warmte' (sinds §4[2] geen toestandsgrootheid meer, maar nog steeds wel de integraal van $c(T).\mathrm{d}T$, zie §3[2]).

wijsontwerp zou een indeling in twee - en niet meer dan twee - interactiesoorten pas te motiveren zijn na 13-8[2].

Natuurlijke variabelen
De inwendige energie kan op verschillende manieren als een som van energievormen worden geschreven. Zo noemden we in 5.2.4 al de twee uitdrukkingen:

$$dU = C_V.dT + (\partial U/\partial V)_T.dV$$

$$dU = T.dS - p.dV$$

In de eerste uitdrukking functioneren T en V als energievariabelen, in de tweede uitdrukking S en V. In de thermodynamica wordt aan de variabelen S en V in relatie tot de inwendige energie een bijzondere rol toegekend. Men noemt deze set variabelen $\{S, V\}$ de 'natuurlijke variabelen' van de inwendige energie.
Het hierboven voorgestelde onderscheid tussen 'energievormen' en 'interactiesoorten' maakt het nu mogelijk te formuleren waarin de keuze $\{S, V\}$ zich onderscheidt van andere mogelijke keuzen: *De set natuurlijke variabelen van de inwendige energie is die speciale set variabelen waarvoor, bij een reversibel proces, de energievormen geschikt zijn om de interactiesoorten te kwantificeren.* Bij keuze van een andere set variabelen dan $\{S, V\}$ ontbreekt deze mogelijkheid.

De analogieredenering welke kan leiden tot entropie (taalverandering iii), kan naar verwachting eveneens leiden tot het onderscheiden van interactiesoorten, waardoor het mogelijk wordt de energievormen $T.dS$ en $-p.dV$ te verkiezen naast of boven thermische energie $C_V.dT$.

5.2.6. Evaluatie en herontwerp van een analogieredenering

Tijdens het eerste onderwijsexperiment werden de drie situaties naar aanleiding waarvan een 'analogie' geformuleerd moest worden aan studenten voorgelegd in drie opgaven die qua indeling en woordkeus grote overeenkomst vertoonden (5-1, 5-2 en 5-4)[2]. Blijkbaar achtte ik de overeenkomst tussen de verhaalde situaties toen niet voldoende duidelijk; om die overeenkomst naar voren te halen leek het me nuttig om min of meer gelijkluidende vragen naar aanleiding van deze situaties te stellen.
Dit leidde ertoe dat bij de tweede opgave in deze reeks studenten verveeld raakten en hun interesse verloren. "Het is gewoon precies hetzelfde", "het is een beetje te makkelijk" en "beetje gezeur is dit" waren hun oordelen over deze opgaven.
Bovendien viel het me op dat de antwoorden op de tweede opgave in de reeks (5-2)[2] min of meer automatisch 'analoog' aan de antwoorden op 5-1[2] werden geformuleerd, dus zonder de nieuwe situatie zelf te beoordelen. Er werd namelijk bij deze tweede opgave veel minder geredeneerd en getwijfeld dan bij de eerste. De 'analoge' antwoorden werden dus eerder ingegeven door de overeenkomstig geformuleerde vragen dan doordat men zelf een analogie in de verhaalde situaties (5-1 en 5-2)[2] opmerkte.
Ontevredenheid over dit resultaat leidde tot het opnieuw overdenken van wat we een

'analogieredenering' kunnen noemen.

Is het wel juist bij een analogieredenering de aandacht alleen op overeenkomsten te richten en niet daarnaast ook op verschillen?

Deze vraagstelling leidde ertoe om aan de opgaven enige vragen toe te voegen, waardoor een analoge beschrijving minder vanzelfsprekend wordt (11-4a t/m c)[2]. Een compressie van een gas kan namelijk nog steeds óók met thermische energie en volume-energie beschreven worden, hetgeen voor studenten vanuit hun voorgeschiedenis voor de hand kan liggen. Een beschrijving die analoog is met de beschrijving van vallend water (11-1)[2] ontstaat echter alleen als voor een beschrijving met 'arbeid' (een interactiesoort) wordt gekozen.
Een tweede kans om de te formuleren analogie minder vanzelfsprekend te maken houdt verband met de keuze van systeemgrenzen. Of een interactie tussen twee systemen 'arbeid' dan wel 'warmte' genoemd moet worden, kan afhangen van de keuze van de grens die beide systemen scheidt, zoals kan worden opgemerkt bij 11-3[2]. Of er analoge beschrijvingen voor de drie gepresenteerde situaties zullen ontstaan, hangt nu af van de keuze van het aantal te onderscheiden systemen en van hun grenzen. Door deze keuze eerst vrij te laten (11-3c, d en e)[2] en pas later suggesties te doen voor een analoge beschrijving (11-6)[2] wordt deze analoge beschrijving minder vanzelfsprekend en daardoor hopelijk ook minder "saai".

5.3. Van tweede naar derde experiment

Bij het evalueren van het tweede experiment wordt eerst gelet op entropie als toetsbare voorspelling (5.3.1), dan op de geplande toetsbaarheid van 'energievormen'. Dat laatste blijkt niet gelukt (5.3.2). Er wordt een verklaring gezocht (5.3.3) en dit leidt tot enige nieuwe keuzen met betrekking tot het derde experiment (5.3.4 t/m 5.3.6). Maar eerst moet een beperking worden toegelicht.

Beperkte uitvoering tweede experiment (zie Tabel VIII)
De opgavenreeks die voor het tweede experiment was ontworpen, is door tijdgebrek slechts gedeeltelijk beantwoord door studenten.
Beantwoord zijn wel die gedeelten die in de vorige paragrafen als belangrijk naar voren kwamen, te weten: het gedeelte waar de overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' was gepland, althans het belangrijkste deel daarvan (§§1-4)[2,*)] en het gedeelte waar de analogieredenering was gepland die zou moeten leiden tot entropie (§11)[2].
Niet beantwoord is het gedeelte van de opgavenreeks waar het onderscheid tussen energiewaarde en gebruikswaarde wordt ontwikkeld, in relatie tot omkeerbaarheid (§§6-10)[2]. De inhoud van deze paragrafen werd door mij in een hoorcollege-achtige voordracht van een

*) §3 was als huiswerk opgegeven en werd tijdens werkcollege alleen kort nabesproken.

uur samengevat*), met de bedoeling om in ieder geval een zinvolle beantwoording van §11[2] mogelijk te maken.

5.3.1. Evaluatie: 'entropie' als toetsbare voorspelling gelukt

Allereerst zullen we nagaan of na de extra voorbereiding met betrekking tot de overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' (§1 t/m 4)[2], nu 'entropie' als toetsbare voorspelling op grond van een analogieredenering (§11)[2] mogelijk is geworden.
Protocol 2.11 toont hoe studenten met hulp van **WK** kwamen tot het ontwerpen van een experiment ter toetsing van de door hen genoteerde uitdrukking voor het rendement, "$(T_1 - T_2)/T_1$". Deze uitdrukking was door studenten gebaseerd op de volgende eigenschappen van X (11-7g)[2]:

- X vervult de rol van variabele bij het berekenen van energie (met temperatuur als coëfficiënt)
- X is in totaal constant
- X is extensief

Protocol 2.11.

De behoefte de veronderstelde eigenschappen van X te toetsen in een experiment, moet door **WK** worden opgeroepen (M.1, WK.4, 8, 12), maar men is hiervoor wel aanspreekbaar. De veronderstelde eigenschappen worden met "aanname" aangeduid (K.5, M7).
De opgave waarvoor men staat wordt door **J** (J.14, 30, 35) een paar maal op verschillende manieren verwoord. T_1 en T_2 worden door hem (J.30) "bekenden" genoemd en het rendement een "onbekende" (J.31) omdat de formule die het rendement gelijk stelt aan $(T_1 - T_2)/T_1$ nu juist getoetst moet worden.
De "andere manier" om het rendement te testen (J.15) zou in zoverre "anders" moeten zijn dat ze niet van deze formule uit mag gaan. Omdat men geen tekenen vertoont die "andere manier" te gaan ontwerpen begint **WK** met de oorspronkelijke afspraak voor rendement (uit 11-1k)[2] op het bord te schrijven (WK.46).
Meteen komen **J**.49 en **K**.53 met voorstellen om "ΔE_{bron}" en "ΔE_{taak}" te bepalen, waaruit **WK**.54 stilzwijgend een selectie maakt.
Het voorstel "de energieverschil van het vliegwiel" te bepalen "met de hoeveelheid damp en.. vloeistof in de cilinder" begreep ik toen niet. Nu wel: zo lang de temperatuur in de cilinder constant blijft, is de energieverandering van de cilinder te bepalen door te letten op de verandering van de hoeveelheid damp (zoals bij 4-3)[2]. Is bovendien de energieverandering bekend van het reservoir waarmee de cilinder in contact is, (warmtecapaciteit maal temperatuurverandering), dan kennen we ook de energieverandering van het vliegwiel, wegens energiebehoud. Uitwerken van dit idee zou nogal ingewikkeld worden omdat de verschillende stadia die de cilinder doorloopt+) dan eerst netjes moeten worden onderscheiden. De stadia waarin de temperatuur van de cilinder verandert moeten dan immers

---

(* Een schriftelijke versie van het gehouden praatje werd een bijeenkomst later uitgereikt aan de deelnemers. Zie bijlage 2, p.93-99.

(+ constante temperatuur gelijk aan voorraad 1, temperatuurverandering, constante temperatuur gelijk aan voorraad 2, temperatuurverandering, en weer van voren af aan..

nog apart aandacht krijgen.
In het andere voorstel (K.53) zien we energie als meetbare grootheid eveneens als een resultaat van eerdere opgaven (vgl. 1-3, 1-4, 3-1)[2]. Dit voorstel begreep **WK** wel en nam hij over. Het feit dat **B** en **A** nu met deze voorstellen kunnen komen kunnen we dus in verband brengen met voorafgaande opgaven, die in het eerste experiment ontbraken.

In de door **WK** op het bord genoteerde formules is nu een dubbelzinnigheid geslopen omdat de bovenste formule uitgaat van een bepaald, dus gedurende het experiment constant, temperatuur*verschil* tussen beide reservoirs (T_1-T_2). Om de energieverandering van het hete reservoir (de "bron" genoemd) te bepalen wordt echter de temperatuur*verandering* (ΔT) van dat reservoir gebruikt, volgens het voorstel van **J**.49.
M.65 leest de formules niet in samenhang met de woorden waarin **J**.49 zijn voorstel deed, want hij interpreteert "ΔT" als een andere schrijfwijze voor "T_1-T_2". Dit misverstand wordt door **WK** pas later opgemerkt (WK.133), maar het speelde vanaf **WK**.54 steeds een rol voor **M** (M.94), die op een blaadje in stilte iets algebraïsch aan 't uitwerken is.
WK.66 ziet "ΔT" alleen als een verstoring van de meetmethode, waarvan hij meent dat hij die samen met z'n studenten voor ogen heeft. Hij ziet die ΔT niet als bron voor misverstanden. In plaats van het probleem van de "verstoring" aan **J** voor te leggen, die immers het voorstel deed om "warmtecapaciteit en temperatuur" te gebruiken voor ΔE_{bron}, geeft **WK** zelf twee oplossingen (WK.69, 74, 78, 84). Toch slaagt **L** er nog in een aanvullende (L.83) of kritische (L.70, 88) bijdrage te leveren.
Hoewel dit centraal geleide 'klassegesprek' momenten bevat waar **WK** teveel voorzegt (WK.69, 74, 78, 84) en te weinig luistert (naar **M**), gaven toch **J**, **K** en **L** er blijk van voorstellen te kunnen doen, een resultaat dat eerder niet werd bereikt.

In zoverre als studenten in staat zijn ervaringen vooraf te ontwerpen die zij zelf als bevestiging van hun vermoedens omtrent X zouden willen opvatten (bijv. K.95-103) - dat wil zeggen onderscheid te maken tussen ervaringen die X zinnig maken, en ervaringen die X weerleggen - kunnen wij zeggen dat de term X ergens naar *verwijst*, namelijk naar die (ontworpen) ervaringen die de term X, met z'n eigenschappen, zinnig zouden maken.
Dit resultaat werd mogelijk doordat termen gebruikt bij het ontwerpen, zoals C_v en $\frac{1}{2}I$ een verwijzende betekenis hebben gekregen als resultaat van voorafgaande opgaven (1-3 en 1-4)[2]. Immers, zonder zo'n verwijzende betekenis had men niet kunnen besluiten welke van de genoteerde relaties hier nu wordt getoetst (K.95-103).

> *Een toetsbaar vermoeden wordt geformuleerd in termen die eerder een naar ervaringen verwijzende betekenis kregen.*

Toch valt op dat zo'n verwijzende betekenis hier niet meer hoorbaar is: er wordt niet gepraat over wat we zouden moeten doen om C_v en $\frac{1}{2}I$ te bepalen. In die mate blijft het 'ontwerp' voor een experiment dus schematisch. Pas bij een opdracht om het ontwerp te gaan uitvoeren zou blijken of de verwijzende betekenis van in het ontwerp gebruikte termen voldoet om tot een daadwerkelijke uitvoering van de ontworpen proef te komen.

5.3.2. Evaluatie: 'energievormen' niet toetsbaar geworden

Nieuw in het tweede onderwijsexperiment was een poging om de bruikbaarheid aan de orde te stellen van 'energievormen' (zoals 'warmte') als apart kwantificeerbare voorraden. De houdbaarheid van dit woordgebruik wordt aan de orde gesteld naar aanleiding van een beschouwing van twee verschillende wegen tussen dezelfde begin- en eindtoestand (zoals uiteengezet in 2.8.2). Proeven met kwantitatieve resultaten die relevant zijn voor beide wegen werden eerder gepresenteerd (4-1 t/m 4-3)[2]. Dan wordt onder andere gevraagd:

> "Als we aan de begintoestand (ξ=0, 125°C) een bepaalde hoeveelheid 'warmte' toekennen, kunnen we dan ook een bepaalde hoeveelheid 'warmte' toekennen aan de toestand (ξ=1 mmol, 325°C)?" (4-5n)[2]

Het volgende protocol toont hoe vreemd de verwachte (ontkennende) conclusie nog steeds blijft voor deze studenten.

Protocol 2.5

Opmerkelijk aan dit gesprek is dat de assistent, **WK**, al heel vroeg bij **M** en **L** woorden hoort waaruit hij concludeert dat ze het probleem op dezelfde wijze zien als hij (M.29, L.40, 47, 102, 115, 166), terwijl veel later blijkt dat dit toch niet het geval is (vanaf L.185).

WK's optimisme houdt verband met iets wat eerder gebeurde: **WK** had eerder betoogd (bij 4-1 en 4-2)[2] dat als energievormen 'voorraadkarakter' hebben, dit inhoudt dat een berekening gebaseerd mag worden op een "verzonnen weg". **M** en **L** trokken daaruit toen de conclusie dat men er dan ook van uitgaat dat beginstoffen en produkten gelijke warmte-capaciteit hebben. Immers: anders is de verandering van de 'warmte' niet gelijk voor verzonnen en werkelijke weg. Ze vroegen aan **WK** of hij hun kon garanderen dat die warmtecapaciteiten gelijk zijn. Toen **WK** daarop ontkennend antwoordde concludeerden ze (terecht) dat de door mij voorgestelde berekening, gebaseerd op een verzonnen weg, voor warmte niet deugen kon.

Nu trekt men uit de gevonden weg-afhankelijkheid (4-5j en k)[2] de conclusie dat warmte en chemische energie geen 'voorraadkarakter' hebben (L.47), hetgeen in **WK**'s ogen klopte met de kritische opmerkingen die **M** en **L** eerder gemaakt hadden (WK.66). **WK** had dus redenen om te menen dat hij zijn studenten begreep.

Maar dat blijkt toch niet het geval. Voor **WK** betekent "geen voorraadkarakter" dat warmte en chemische energie niet meer opgevat kunnen worden als voorraden die toe en afnemen (WK.80). Maar **L** hanteert warmte en chemische energie juist wél als zulke 'voorraden', als hij in antwoord op vraag 4-5m[2] beargumenteert dat het punt in het diagram waar beide routes eindigen meer dan één toestand symboliseert (L.203, 211, 281, 328-331).

Hij houdt vast aan 'warmte', niet als een eigen toekenning - waarbij je zou kunnen vragen: waaráán ken ik die warmte toe, aan de toestand of aan het proces? - maar aan warmte als een aanwezige realiteit: een deel van de energie is in de vorm van warmte aanwezig (L.221). De kwantiteit van de in die vorm aanwezige warmte moet dus een bepaalde waarde ***hebben***, ook als het niet lukt die waarde netjes te meten (L.376). De gewenste toetsbaarheid wordt door deze opvatting geblokkeerd.

De blokkering die we hier zien bij deelnemer **L** is te vergelijken met de blokkering die

Ten Voorde[35] opviel, wanneer 'moleculen' direct als bestaande realiteiten worden geïntroduceerd, in plaats van als een hypothetisch ordeningsmiddel voor ervaringen. Hoewel er van warmte geen plaatjes worden getekend (wat bij moleculen wel gebeurt) wordt er wel beeldend over warmte gesproken ('warmte stroomt') waardoor het een in de stof geprojecteerde realiteit kan worden.

> *Net als bij 'moleculen', wanneer ze niet als ordeningsmiddel ter discussie staan, kunnen we dus ook bij 'warmte' van naïef realisme spreken* (vergelijk Ten Voorde[35], p.80-81, 163, 189-190).

Een inconsequentheid in de opgaven (4-5m t/m q)^2 verhinderde **WK** om produktief op dit onderwijsprobleem in te gaan. Sommige van deze opgaven (m en p) en ook de tekst boven m staan namelijk toe te spreken van de twee eindtoestand*en* van de routes a en b. Ze staan ook toe de eindtoestand van route b te zien als identiek aan de eindtoestand van a. Deze keuzevrijheid is terecht zolang 'warmte' en 'chemische energie' als eventuele toestandsgrootheden (voorraden) ter discussie staan. Daarentegen is in de opgaven n, o en q sprake van "de toestand (ξ=1 mmol, 325°C)", hetgeen impliceert dat dit punt in het twee-variabelen-diagram één toestand symboliseert. Hier wordt uitgegaan van één bepaald antwoord op vraag m ("Zou je zeggen dat het punt in je diagram waar beide routes eindigen één toestand symboliseert, of meerdere toestanden?"), zoals **WK** zich tijdens 't gesprek realiseert (WK.273).*)
De tekst boven 4-5m^2:

> "Tussen de eindtoestanden van beide routes zijn tot nu toe nooit verschillen geconstateerd. Ook de uitgangstoestand was voorzover we weten voor beide routes gelijk."

was bedoeld om studenten een argument in handen te geven om voor "één toestand" te kiezen, dus om het verwachte antwoord (4-5m)^2 te bevorderen.
De geciteerde bewering blijkt nu echter ondeugdelijk. Men kan immers zeggen, zoals **L** (L.308, 328-331) doet, dat er zojuist een verschil is geconstateerd; immers er is door meting vastgesteld dat er in de eindtoestand van route b meer warmte aanwezig is dan in de eindtoestand van route a. Dit argument van deelnemer **L** is alleen te weerleggen wanneer studenten een onderscheid zouden ervaren tussen grootheden die niet meer ter discussie staan (hier: temperatuur, druk, volume) en nieuwe grootheden (hier: energievormen, waaronder 'warmte') die dienen ter ordening van ervaringen met deze 'gemeten grootheden'. 'Warmte' zou dus de status moeten hebben van *een nog in de testfase verkerend ordeningsmiddel.* Dan immers kan men eisen dat dit ordeningsmiddel de beschrijving vereenvoudigt, in plaats van die te compliceren door toestanden te onderscheiden die op grond van de 'gemeten grootheden' gelijk zijn.

(* Ook **M**'s kritiek op de formulering van **WK**'s vraag naar "bepaalde hoeveelheid" versus "zelfde hoeveelheid" is nu te begrijpen (M225 e.v.). Immers: als we de eindtoestand*en* van de routes a en b willen vergelijken, dan moet vraag 4-5n luiden: kunnen we aan die eindtoestanden "dezelfde" hoeveelheid warmte toeschrijven. Maar omdat het voor **WK** al om één toestand gaat, en van vergelijken van toestanden dus geen sprake is, meende hij te kunnen vragen of we "een bepaalde hoeveelheid..." kunnen toekennen.

Een probleemstellende onderwijssituatie ten aanzien van 'energievormen' vereist een onderscheid tussen enerzijds 'gemeten grootheden', en anderzijds grootheden die nog als ordeningsmiddel (voor ervaringen beschreven met de gemeten grootheden) in de testfase verkeren.

Het is gelukt entropie of *'X'* inderdaad als zo'n in de testfase verkerend ordeningsmiddel te laten functioneren (zie 5.3.1), maar met 'warmte' is dat nog niet gelukt. Wel realiseert **WK** tenslotte een expliciete onderwijsaanpak (WK.337), nadat eerst veel van wat **WK** zei over **L**'s hoofd heen gezegd moet zijn (WK.80, 159, 162). Vanaf **L**.358 verstaat **L WK** enigszins.

5.3.3. Evaluatie: een lineaire aaneenschakeling van termen

Zowel het relatieve succes met betrekking tot de toetsbaarheid van entropie (§11[2]) als het mislukken van een probleemstellende aanpak ten aanzien van 'warmte' (§4[2]) zouden we nu willen begrijpen vanuit het voorafgaande onderwijs. Wat maakte het één mogelijk en wat ontbrak er aan die voorgeschiedenis, waardoor 'warmte' niet door een probleemstellende aanpak van de onderwijzende ter discussie kon komen? §1[2] van het onderwijsontwerp had tot doel dat studenten hun 'energievormentaal' zodanig scherp formuleren dat deze toetsbaar zou worden. We zullen nagaan waarom deze paragraaf niet aan zijn doel beantwoordde.

De opzet was studenten eerst te laten handelen op de wijze die zij in het VWO geleerd hebben (1-1 t/m 1-4)[2]; vervolgens is het de bedoeling dat ze een patroon in hun handelen opmerken (1-5)[2]. Er worden dan algemene termen aangereikt (energievorm, variabele, coëfficiënt[*]) waarmee dat patroon geformuleerd zou kunnen worden.
In het handelen (hier: rekenen) bij deze opgaven was een lijn ontworpen zodanig dat telkens een nieuwe energievorm wordt onderzocht, met gebruikmaking van een inmiddels bekende energievorm, met een bekende coëfficiënt voor een bekend voorwerp of een bekende stof. Deze coëfficiënt zou volgens plan juist in de voorafgaande opgave bepaald zijn. Bij elk van de geschetste proeven heeft men dus te maken met een empirisch bepaalde constante verhouding tussen twee veranderingen, en daarnaast nog met een bekende 'coëfficiënt' (uit de vorige opgave) en met een onbekende 'coëfficiënt'. Een dergelijke situatie lijkt me wezenlijk voor energie-metingen (zie voetnoot p.42).

Stap 1
Protocol 2.1 toont één van de stappen uit deze lineaire ketting van energievormen, namelijk die waar de energievorm 'rotatie-energie' wordt verkend met behulp van de bekende energievorm 'hoogte- (of 'potentiële') energie'. Rotatie-energie was gekozen omdat vermoed werd dat een formule hiervoor niet zonder meer als aangeleerd feit beschikbaar zou zijn. Dit boodt de gelegenheid om studenten de constructie van een voor hen nieuwe energievorm te laten meemaken, een energievorm waarvoor variabele en coëfficiënt nog

[*] Wat ik toen 'coëfficiënt' noemde ben ik na het tweede experiment 'capaciteit' gaan noemen, of voluit 'energiecapaciteit'. Voor een toelichting op 'energiecapaciteit' zie men 2.6.1, 2.7 en 2.8.1.

moeten worden bepaald.
Er werd verwacht dat de keuze van een formule voor deze energievorm (1-3g)^2 zou worden gebaseerd op de antwoorden op eerdere vragen en uiteindelijk op de vertelde proef met aangeboden meetgegevens.

protocol 2.1

In protocol 2.1 is te zien dat studenten bij het beantwoorden van de vraag naar de "formule" voor de kinetische energie van dit vliegwiel (1-3f)^2 geen gebruik maken van de "constante verhouding" die zij eerder uit de meetresultaten hadden berekend, na het vinden van een "functie van de (...) hoeksnelheid" die deze constante verhouding mogelijk maakte (1-3d)^2.*)
In plaats van deze door hen genoteerde empirische gegevens te gebruiken, proberen ze een formule voor de rotatieenergie af te leiden uit de hen wel bekende formule voor de energie van een lineaire beweging.
Zo'n afleiding is mogelijk, maar dan moet men wel rekening houden met de verschillende lineaire snelheden of "baansnelheden" (I.41) van de verschillende delen van het vliegwiel. Het is dan nodig het vliegwiel op te delen in verschillende infinitesimaal dunne ringen met elk een eigen snelheid, en daarna is er een integratie nodig om al deze infinitesimale energiebijdragen weer samen te nemen. Een dergelijke deductieve oplossing was door mij niet bedoeld en de studenten slagen er ook niet in deze deductieve aanpak uit zichzelf tot een goed einde te brengen.
Als **K**.48 toegeeft dat zijn voorstel (K.3) op onzekere veronderstellingen berust, is hij wel bereid om de gepresenteerde meetgegevens (althans één rij uit de tabel) te gebruiken om zijn formule te toetsen (r.49-52 en 62). Als het gedane voorstel onjuist blijkt wordt er een nieuwe formule opgesteld. De evenredigheid van de energiewaarde met het kwadraat van de hoeksnelheid ω wordt daarbij als uitgangspunt genoteerd (J.94, vgl. eerder r.58-59). Deze evenredigheid wordt dus niet expliciet gebaseerd op de bevinding van de constante verhouding, genoteerd bij 1-3d^2. Als rol voor de empirie blijft dan alleen over het berekenen van de constante waarmee ω^2 nog moet worden vermenigvuldigd (K.65-69 en J.86-88).

Alleen deelnemer **I** heeft een afleiding genoteerd waarbij wel de evenredigheid van E met ω^2 volgt uit de gevonden constante verhouding tussen Δh en ω^2.

Stap 2
In protocol 2.2 is een volgende stap uit de geplande ketting van energievormen aan de orde. Hier wordt een coëfficiënt voor de energievorm 'warmte' bepaald met behulp van de inmiddels bekende energievorm 'rotatie-energie'.

protocol 2.2

I, die eerder al (Pr.2.1, I.136) de bekende constante mg vermenigvuldigde met de verhou-

*) Uit de genoteerde constante verhouding "$\omega_r^2 = \omega_0^2.\Delta h$" (**I**.79) tussen ω_r^2 en Δh kan men besluiten dat de kinetische energie van dit vliegwiel E_{kin} = (0,8099 N m^2).ω^2.
Zie **I**'s berekening in r.120-145, waarvoor het idee al geopperd was in **I**.76 en **I**.95-98.

ding van twee veranderingen ($\Delta h/\Delta\omega_i^2$) om de onbekende constante te krijgen, doet dat zelfde nu opnieuw (r.5) en maakt de opmerking (I.19-21) waarop **K** reageert met het noteren van drie constanten - twee 'coëfficiënten' en de constante verhouding tussen de 'variabelen' - in onderlinge samenhang. De *woorden* 'coëfficiënt' en 'variabele' zijn dan nog niet geïntroduceerd, maar de structuur in het rekenwerk, die met deze woorden wordt beschreven (zie 2.8.1), wordt door **K** nu opgemerkt, terwijl **I** volgens deze structuur werkte.

Samenhang formuleren
Bij 1-5[2] zou de genoemde samenhang tussen energievormen, variabelen, en coëfficiënten onder woorden gebracht moeten worden. De term 'energievorm' wordt bekend verondersteld. Voor 'variabele' en voor 'coëfficiënt' worden nu omschrijvingen gegeven. Verwacht werd dat studenten datgene, wat in die omschrijvingen wordt gezegd, zouden kunnen herkennen in hun eigen voorafgaande handelen (1-1[2] t/m 1-4[2]). In protocol 2.3 is te zien dat die verwachting **niet** wordt bevestigd, tenminste niet voor de omschrijving van 'coëfficiënt'.

protocol 2.3

De deelnemers twijfelen tussen twee interpretaties die geen van beide overeenkomen met wat bedoeld was. De ontwerper bedoelde een omschrijving van 'coëfficiënt' te geven waarin 'energie' niet bekend wordt verondersteld. Bedoeld was dus een omschrijving van 'coëfficiënt' die meteen ook de functie van 'energie' omschrijft, ongeveer zoals in dit proefschrift (2.7). De bij 1-5c[2] gegeven omschrijving blijkt hier (vanaf r.14) echter onvolledig, omdat onvermeld bleef dat er een "waarde" bedoeld werd, die onafhankelijk is van de keuze van de andere variabele, waartegen geruild wordt.
Dus inderdaad werd één coëfficiënt per variabele bedoeld (niet: één coëfficiënt per *paar* variabelen, K.14-15, 37-39), maar toch werd niet de vermenigvuldigingsfactor bedoeld die temperatuur omrekent in energie (K.6-7, 47-48), omdat bij die interpretatie 'energie' weer bekend is verondersteld.

Zoals gezegd werd verwacht dat de gegeven omschrijvingen begrijpelijk zouden worden, doordat men het gezegde zou herkennen in het eigen handelen (K.10). Het "ruilen" van eenheden van de ene variabele tegen eenheden van de andere wordt herkend (J.16-17). Dit is inderdaad wat met "ruilen" werd bedoeld. Ook zou ik "$g.h$" en "$\frac{1}{2}v^2$" geschikte ruilwaarden noemen in het licht van de proef beschreven bij 1-1[2]. Als aspecten van de gegeven omschrijving die niet werden verstaan blijven dan nog over:

- Met 'coëfficiënt' was de ruilwaarde per eenheid van de variabele bedoeld, dus niet $g.h$ maar g, in het geval van die proef (1-1)[2]
- Er werd een *generalisatie* over de verschillende proeven verwacht, dus niet $g.h$ (bruikbaar bij 1-1[2]) maar $m.g.h.$ (ook bruikbaar bij 1-3[2]), maar dan per eenheid van h, dus: mg.

Het komt er dus op neer dat ik toch die omrekeningsfactor van temperatuur/hoogte/etc. naar energie bedoelde, maar dan tegelijk ook nog wilde zeggen wat 'energie' inhoudt. Dit blijkt nu meer dan van een enkele opgave verwacht mag worden.
Tijdens een volgende bijeenkomst, na afluisteren van de bandopnamen, besluit **WK** dat hij

zijn bedoelingen mondeling moet toelichten (protocol 2.4).

protocol 2.4

Hieruit blijkt dat **WK** niet ziet hoe hij zijn opzet om studenten zelf te laten bijdragen aan het formuleren van de structuur in hun rekenhandelingen, nu nog zou kunnen realiseren. Wel blijkt vooral deelnemer **K** aanspreekbaar voor **WK**'s uitleg (r.129-140, 188-191). Zijn verstaan van **WK**.139, "je scheidt ze" is te zien als resultaat van **K**'s eigen formulering (protocol 2.2, K.32 en 2.3, K.14 "je kunt die samentrekken") van de structuur die hij met hulp van **I** in hun rekenwerk opmerkte. Desondanks moeten we concluderen dat studenten niet in die mate kunnen bijdragen aan de discussie als blijkens de opgaven van hen was verwacht, aangezien **WK** een groot deel van de beantwoording zelf moet geven.

Interpretatie
Dit ongewenst onderwijsresultaat kunnen we nu in verband brengen met de opgemerkte 'lineaire' opzet bij het aaneenschakelen van energievormen. In 1-1[2] tot en met 1-4[2] wordt steeds gevraagd uit te gaan van het bestaan van energievormen met hun formules als feiten. Weliswaar is er vanaf 1-3[2] steeds één onbekende energievorm die men deels nog kan construeren[*)], maar bij die constructie is het steeds de andere, bekende energievorm, tezamen met de in het VWO aangeleerde regel van energiebehoud, die de constructie determineert. Hiermee kunnen we begrijpen waarom deze opgaven de deelnemers niet hebben voorbereid op een situatie waar 'energievormen' en 'energie' als een "nog in de testfase verkerend ordeningsmiddel" (5.3.2) zouden moeten functioneren. Van zo'n testfase is immers geen sprake wanneer telkens één energievorm als onwrikbaar feit kan gelden, die dan ook nog de constructie van een volgende energievorm geheel determineert. Maar dat was nu juist de gekozen 'lineaire' opzet, waar vanuit een bekend beginpunt telkens een volgende energievorm wordt verkend.

De 'lineaire' aaneenschakeling van bekende aan onbekende energievormen is ongeschikt om energievormen als "in de testfase verkerend ordeningsmiddel" te laten functioneren.

Om alsnog energie als "in de testfase verkerend ordeningsmiddel" te laten functioneren, lijkt het nodig om eerder en langduriger (dan alleen bij 1-5c[2]) de aandacht te richten op vragen als: wat bedoelen we met 'energie', waarvoor dient die term, en welke keuzen zijn er te maken alvorens die rol is vervuld? Gezocht is dus een alternatieve structuur in de opgaven, welke deze vragen bespreekbaar kan maken - nog steeds naar aanleiding van eigen rekenwerk met betrekking tot navertelde experimenten.

[*)] Bij 1-4 is dat in mindere mate het geval, omdat de formule $m.c.\Delta T$ al bekend is. Bij 1-6 is er wel weer een nieuwe energievorm, althans één waarvoor men geen formule wist.

5.3.4. Ontwerp: ruilwaarden (energievormen) als knooppunten

De bedoelde term 'coëfficiënt' bleek een *generalisatie* over verschillende proeven te veronderstellen (zie hierboven). Deze nodige generalisatie houdt in dat een coëfficiënt voor energievorm A even goed bruikbaar moet zijn ter beschrijving van een proef waarbij A wordt ingeruild voor B als voor één waar A wordt ingeruild voor C. Anders gezegd:

> *De term 'energievorm A' moet zijn bruikbaarheid bewijzen als knooppunt van enkele relaties*

Om deze reden is de derde opgavenserie zo opgezet, dat verschillende alternatieve 'ruilwaarden' (naast de in het VWO aangeleerde 'energievormen') worden vergeleken op hun geschiktheid om als zo'n knooppunt te functioneren. Hierbij wordt nu expliciet aandacht gevraagd voor het kunnen functioneren in meer dan één relatie (1-4d en e)[3], nadat eerder verschillende mogelijkheden naar aanleiding van afzonderlijke proeven zijn geformuleerd door studenten (1-2 en 1-3)[3]. Deze toetsing van 'energievormen' volgens het eerder geformuleerde gezichtspunt 'ruilwaarde' (1-1g en h)[3] is nu gescheiden van en gaat vooraf aan de omschrijving van 'energiecapaciteit' (1-5)[3].

Hoewel de thermodynamische 'warmte' in de betekenis ΔU - w geen 'energievorm' te noemen is[*)], konden we voor zowel 'warmte' als 'energievorm' de verwachting beargumenteren dat elk van deze termen zin kan krijgen als "knooppunt van relaties". We zijn dus wellicht een didactische generalisatie op het spoor.

5.3.5. Ontwerp: van ruilwaarde naar energiewaarde

Het toekennen van 'gelijke ruilwaarden' aan twee tezamen optredende veranderingen als basis voor (formules van) energievormen, maakt het nu mogelijk om éérder dan in het vorige experiment de koppeling van energiewaarden aan toestanden ter discussie te stellen. Immers een verandering is een gebeurtenis. Uitgaande van 'ruilwaarden van veranderingen' hoeft het dus niet vanzelf te spreken dat ook toestanden door een aantal Joules te karakteriseren zijn. De conclusie dat een hoogteverandering van een voorwerp een ruilwaarde heeft, is niet bijvoorbaat identiek met de uitspraak dat het voorwerp deze ruilwaarde 'bezit', immers: de ruilwaarde zou een eigenschap kunnen zijn van de hoogteverandering als gebeurtenis, niet van de hoogte als toestand van het voorwerp.
De nieuwe opzet van §1[3] (conclusie 5.3.3) maakt het dus mogelijk om al in §2[3] een ervaring te bespreken waar wél van de ruilwaarde van een verandering gesproken kan worden, maar niet van 'energiewaarden van toestanden'. Als situatie werd gekozen het verschuiven van een voorwerp over een ruwe tafel: hierbij is de ruilwaarde van de horizontale plaatsverandering afhankelijk van de gevolgde 'weg' over de tafel (2-2 en 2-3)[3]. Er wordt verwacht dat studenten naar aanleiding van deze ervaring een voorwaarde kunnen formuleren om de kwantiteit van een energievorm aan een toestand toe te schrijven. Dit lukt namelijk als de 'ruilwaarde' die behoort bij de verandering van de variabele onafhan-

---

[*)] Ze is immers in het algemeen niet te schrijven als een produkt van één variabele met zijn coëfficiënt.

kelijk is van de wijze waarop deze verandering plaatsvindt (2-5[3]).
Een deel van de vraagstelling die eerder in §4[2] aan de orde kwam is daarmee verschoven naar §2[3]. Om precies te zijn: in §2[3] gaat het om verandering van een enkele variabele, de plaats p van een voorwerp. De energievorm waarom het gaat $C.\Delta p$ is uiteindelijk geen toestandsgrootheid te noemen omdat we voor Δp uiteindelijk niet de 'verandering van plaats' (p_2-p_1) invullen, maar de afgelegde weg: een *procesvariabele*. In §4[3] daarentegen gaat het ook in de nieuwe opzet nog steeds om de verandering van *twee* variabelen, die beide toestandsvariabelen te noemen zijn (temperatuur en reactievorderingsgraad). Het probleem dat de bijbehorende energievormen geen toestandsgrootheden te noemen zijn komt nu dus niet voort uit de aard van de betrokken variabele, maar uit de opmerking dat er nu twee variabelen veranderen.
In §4[3] wordt dus nog steeds iets nieuws geleerd ten opzichte van §2[3]. Niettemin verwachten we dat de conclusie verwacht in §4[3] voor studenten minder vreemd zal zijn, wanneer men eerder, in een minder gecompliceerde opzet (slechts één variabele) een proces-afhankelijke energievorm heeft opgemerkt, door analyse van een situatie waarmee men vertrouwd is. Verschuiven van een voorwerp via verschillende routes behoort immers eerder tot de alledaagse ervaring dan het experiment met twee "routes" zoals omschreven in opgave 4-5[2]. Door consequent uit te gaan van 'ruilwaarden van veranderingen' kan de vanzelfsprekendheid dat energie steeds in een bepaalde vorm aanwezig is, (of 'bezeten wordt') naar verwachting dus worden voorkomen.

Verwacht wordt dat de overgang (i) van energievormen naar inwendige energie wordt bevorderd, indien eerder de 'energiewaarde' (per energievorm) van een 'toestand' (bijv. een hoogte) is gebaseerd op 'ruilwaarden van veranderingen'.

5.3.6. Ontwerp: van constante capaciteit naar veranderlijke capaciteit

Het toekennen van een 'gelijke ruilwaarde' voor twee tezamen optredende veranderingen wordt mogelijk wanneer een constante verhouding tussen beide veranderingen wordt opgemerkt. Immers wanneer voor ΔX en ΔY binnen bepaalde grenzen geldt

$$\Delta X : \Delta Y = M : L \quad (M \text{ en } L \text{ constant})$$

kunnen we volgens de wiskunde concluderen dat dan eveneens geldt:

$$M.\Delta Y = L.\Delta X$$

zodat toekennen van een 'gelijke ruilwaarde' mogelijk blijkt: we kunnen dan immers M als energiecapaciteit kiezen bij variabele Y en L als energiecapaciteit bij variabele X. De uitdrukkingen voor de energievormen nemen dan de eenvoudige vorm aan van een produkt. Dit zijn de redenen waarom het onderwijzen van energievormen doorgaans begint met het beschrijven van situaties waarin zo'n evenredigheid geldt. Wanneer een energievariabele X niet aan een dergelijke constante verhouding voldoet, kan men een functie $f(X)$

zoeken die alsnog deze eenvoudige aanpak mogelijk maakt*) (voor snelheid v voldoet $f(v)=v^2$). De mogelijkheden om zo'n functie door uitproberen te vinden zijn echter beperkt: succes kan alleen verwacht worden als een eenvoudige functie voldoet om het probleem op te lossen.

De onderwijsopzet voor zowel tweede als derde onderwijsexperiment begint met het constateren van dergelijke evenredigheden.
Nu in het derde experiment echter de mogelijkheid van 'energiewaarden' al vanaf het begin als een vraag en niet meer als zekerheid kan gelden, kan het ook niet meer vanzelf spreken dat toekennen van 'gelijke ruilwaarden' en vervolgens van 'energiewaarden' mogelijk *blijft* in het geval het niet lukt een constante verhouding tussen twee variabelen te formuleren. De redenering die ik hierboven formuleerde om deze mogelijkheid te verwachten gaat dan immers niet op.
Om deze reden werd ook §3[3] aangepast. Er wordt gevraagd het toekennen van 'energiewaarden' minstens te "proberen" (3-2a)[3] en er volgt een experimentele controle of de gevonden energiewaarden onafhankelijk zijn van het proces (3-3)[3]. Een bij §2[3] verwacht leerresultaat, namelijk het 'onafhankelijk van de weg' zijn van 'energiewaarden' (nog steeds: per energievorm), wordt hier dus gebruikt om een bevestiging te krijgen dat 'energiewaarden' toch zinvol zijn, ondanks de niet-constante verhouding van de veranderingen. Vervolgens wordt - via gemiddelde, limiet en afgeleide (3-5 en 3-6)[3] - het integreren geïntroduceerd ter vervanging van de simpele vermenigvuldiging, om energiewaarden te kunnen voorspellen (3-8)[3].

Deze aanpak is echter alleen te verdedigen in een situatie waar studenten al de toepasselijkheid van 'energiewaarden' per energievorm verwachten (omdat hen dat op 't VWO verteld is). Immers, wanneer 'ruilwaarden van veranderingen' als basis worden genomen voor 'energiewaarden van toestanden', dan moet in probleemstellend onderwijs een reden opgemerkt kunnen worden waarom we aan 'ruilwaarden van veranderingen' niet genoeg hebben.
Die reden is in het geval van constante capaciteiten moeilijk te vinden, althans ik ken hem niet. Waarom zouden we energiewaarden toekennen aan hoogten of snelheden als toestanden van een voorwerp, in plaats van aan hoogte*veranderingen*? Of anders gezegd: wat kunnen we met $E=mg.h$ méér dan met $R = mg.(h_B - h_A)$?

In geval van niet-constante capaciteiten is de overeenkomstige vraag wel te beantwoorden. Immers, bij een niet-constante warmtecapaciteit staan we voor de opgave de ruilwaarde van een temperatuurverandering te bepalen. Deze ruilwaarde is een functie van zowel begin- als eindtemperatuur en mogelijk ook nog van de wijze waarop het experiment wordt uitgevoerd: $R = R(T_A, T_B, \text{proces})$. Wanneer deze ruilwaarde nu onafhankelijk van het proces blijkt, dan ontstaat daarmee de mogelijkheid het zoeken naar een functie van twee veranderlijken $R(T_A, T_B)$ te vervangen door het zoeken naar een functie van één veranderlijke $E(T)$, omdat we dan kunnen beredeneren dat $R(T_A, T_B) = E(T_B) - E(T_A)$.

(* Vergelijk de aanpak van *Natuurkunde Overal*[48], besproken in 3.2, daar waar men kiest om $F.\Delta s$ grafisch uit te zetten tegen $m.v^2$ om een lijn te vinden met richtingscoëfficiënt 0,5.

Energiewaarden bieden dan een merkbare vereenvoudiging, die in het geval van constante capaciteiten niet optreedt.
De overgang van 'ruilwaarde van een verandering' naar 'energiewaarde van een toestand' is in geval van constante capaciteiten dus niet gemotiveerd.
In een probleemstellende onderwijsopzet die begint vanaf het eerste energieonderwijs in het VWO zou dus de stap naar 'energiewaarden' gemotiveerd kunnen en - tenzij men alsnog een andere reden vindt*) - moeten worden nádat is opgemerkt dat een constante verhouding tussen veranderingen niet steeds (door uitproberen van eenvoudige functies) kan worden gevonden.

De overgang van 'ruilwaarde van een verandering' naar 'energiewaarde van een toestand' is te motiveren wanneer ze samenvalt met de overgang van constante naar niet-constante 'capaciteit'.

De opzet van mijn derde experiment, waarbij de stap naar energiewaarden vooraf gaat aan het opmerken van de eerste niet-constante verhouding, is bij een daarop gericht experiment in het VWO dus niet te handhaven.

5.4. Evaluatie derde experiment

Het derde experiment wordt geëvalueerd gelet op de term 'energievormen' als al dan niet toetsbaar ordeningsmiddel (5.4.1). De gebleken toetsbaarheid wordt vervolgens in verband gebracht met de veranderde opzet (5.4.2).

Beperking derde experiment (zie Tabel VIII)
Gezien het tijdgebrek bij het vorige experiment dat zelfs leidde tot een gebrek aan training voor het tentamen, werd het derde experiment sterk beperkt, in vergelijking met het tweede. Aangezien de stap naar entropie gelukt was, in ieder geval wat betreft de analogieredenering en de toetsbaarheid daarvan, werd besloten deze stap niet nog eens uit te proberen. Het derde experiment beperkte zich dus tot wat in 5.3 als problematisch werd aangewezen: de stap van 'energievormen' naar 'inwendige energie', waarbij nu 'ruilwaarde van veranderingen' als basis wordt genomen om tot toekenning van energiewaarden te komen.

(* Een bijzondere kans biedt de scheikunde, omdat we hier een reactie-route (een opeenvolging van na elkaar uit te voeren reacties, zoals een syntheseroute) kunnen formuleren waar enerzijds verschillende reactie-energiecapaciteiten Γ_T (in: $\Delta U = \Gamma_T.\Delta\xi$) optreden - dus geen 'constante capaciteit' over het hele proces - terwijl per reactie deze capaciteit wel constant kan zijn, bijvoorbeeld bij reacties in ideale gasmengsels of bij reacties waarbij de betrokken stoffen zich spontaan scheiden in afzonderlijke fasen.
De stap van 'ruilwaarde van een proces' naar 'energiewaarde van een toestand' kan daarom in de scheikunde aan de orde komen zonder dat integreren aan de orde hoeft te komen. In de fysica daarentegen zal de stap van 'ruilwaarden' naar 'energiewaarden' wellicht moeten samenvallen met de stap van het produkt $C.\Delta\nu$ naar de integraal van $C(\nu)$ naar $d\nu$.

5.4.1. Evaluatie: 'energievormen' als toetsbaar ordeningsmiddel

Gezien het vorige experiment is het van belang na te gaan of de overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' nu meer probleemstellend is verlopen dan in protocol 2.5 het geval was. Protocol 3.15 toont hoe studenten tot de conclusie kwamen dat 'thermische energie' en 'chemische energie' geen toestandsgrootheden zijn.

protocol 3.15.

Er is te zien dat de nieuwe opgaven (4-3^3 en 4-4^3) nog niet direct leiden tot een behoefte aan een betekenis voor 'toestand' als zijnde te beschrijven met meer dan één variabele (vgl. r.90 en r.117-137). Ook blijkt onvoldoende te zijn aangegeven *waarvan* we de toestand nu willen bespreken (r.19-34). Een systeemkeuze blijkt nodig om de vragen te beantwoorden maar de opgaven (4-3^3 en 4-4^3) bieden daarbij onvoldoende leiding en de leraar introduceert sluipend de nodige keuze (r.23-28).

> De term 'toestand', bepaald door meer dan een variabele vooronderstelt een *systeem*keuze. De volgorde gepland in de opgave waarbij deze keuze pas later wordt uitgesproken, voldoet niet.

Nadat **WK** middels de getekende figuur heeft aangewezen wat hij nu met 'toestand' benoemt en met 'overgang' (WK.132, 137) kan er wel in termen van zulke toestanden, gekarakteriseerd door een temperatuur èn een reactievorderingsgraad (O.131, P.138-139), worden geredeneerd. Er wordt dan een nulpunt van 'chemische energie' gekozen, en vervolgens een richting in het diagram waarvan we zeggen dat in die richting de chemische energie verandert (O.154) en ook een richting waarbij geen chemische energie is betrokken (O.158, 172-173).
O.257 merkt de geplande analogie met de situatie van plaatsverandering op een ruwe tafel op (zie 5.3.5) en **P** trekt hieruit de conclusie dat de chemische energie een procesgrootheid te noemen is (P.261). In verband met de thermische energie wil **O**.354 met eenzelfde redenering eenzelfde conclusie trekken. Maar **P**.364-367 hoort in **O**'s woorden, misschien geleid door **WK**'s vraag, nu iets anders dan de analogie met de situatie van verplaatsing tegen een wrijvingskracht in. Hij wijst op de niet-lineariteit van de thermische energieschaal, waarmee zij zich eerder (§3)^3 intensief hebben beziggehouden. **WK**.375-378 herinnert aan een oplossing die daar toen voor was gevonden, met name door **P**.
Als **P** dan het verschil opmerkt waar het **WK** (en vermoedelijk ook **O**) om te doen is, herhaalt **WK**.387-389 de redenering die hij eerder - in verband met 'chemische energie' - van **O** heeft gehoord (O.257).
Tenslotte wordt via dit zelfde 'onafhankelijk van de weg' criterium (P.463-464) ook nog bepaald dat de optelsom van thermische en chemische energie (P.444) in dit geval wel een toestandsgrootheid te noemen is (P.551-555). Bij deze laatste berekening valt op dat **P** tevoren denkt te kunnen zeggen dat deze optelsom ook een procesgrootheid zal zijn, aangezien thermische energie en chemische energie elk apart procesgrootheden zijn (P.451-454). Hij is echter bereid de berekening "te proberen" (WK.456) nadat hij door een redenering - waaraan hij zelf veel bijdraagt (r.462-468) - overtuigd is geraakt dat er nog een andere mogelijkheid is dan degene die hij verwacht.

We zien hier 'inwendige energie' ontstaan als een niet-verwacht empirisch resultaat (vgl. 2.6.3)

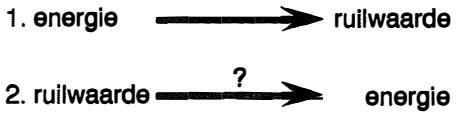
In vergelijking met beide eerdere experimenten valt op dat de verwerping van thermische energie (toen 'warmte') als toestandsgrootheid hier plaatsvond zonder het verbaasde ongeloof dat we eerder hoorden bij **L** (protocol 2.5), en zeker zonder de boosheid van **D** uit experiment 1 (protocol 1.3). Studenten konden door zelf te redeneren tot een voor hen acceptabele conclusie komen.

Taalverandering i werd gerealiseerd in een probleemstellende onderwijssituatie, met uitzondering van de nodige term: toestanden van een *systeem*.

Dit maakt het zinvol na te gaan of dit nieuwe onderwijsresultaat in verband gebracht kan worden met de andere opzet van de voorafgaande paragrafen, in het bijzonder met de grotere aandacht voor 'ruilwaarde' in het nieuwe ontwerp (zie 5.3.3).

5.4.2. Evaluatie: een verwijzende betekenis voor 'even veel waard'

We zullen nu kijken naar enige gesprekken aan het begin van de opgavenserie, waar nu de nieuwe uitdrukking 'ruilwaarde' wordt gebruikt om de betekenis van 'energie' ter discussie te stellen (protocol 3.1 en 3.2).
De ervaring van een constante verhouding tussen twee veranderingen ΔX en ΔY - hetgeen ook impliceert dat omkering van ΔY zal leiden tot een omgekeerde ΔX - noemden we als mogelijke aanleiding voor lerenden om een 'gelijke waarde' te willen toekennen aan beide veranderingen ("equivalentie", Mach[63], zie 2.7). Deze keuze op zijn beurt kan leiden tot formules voor 'energievormen' zoals studenten die al kennen van het VWO, althans dat was de verwachting.
Om 'ruilwaarde' op de aangeduide wijze uit ervaringen te laten voortkomen, zonder gebruik te maken van het al aangeleerde energie-begrip, zou echter nog al wat tijd vergen. We zouden dan pogen het VWO-onderwijs met betrekking tot energie geheel over te doen. Daar is niet voor gekozen. Gevolg is een wat dubbelzinnige aanpak, waarbij éérst van studenten gevraagd wordt om uit te gaan van de hen bekende 'energievormen' (van toestanden)[*], om daarachter het primitiever idee 'ruilwaarden van veranderingen' te ontdekken. Vervolgens wordt van hen gevraagd deze 'ruilwaarden' nu als basis te nemen en van daaruit kritisch naar de aangeleerde energieformules te kijken.



[*] Deze toevoeging 'van toestanden' wordt in het VWO niet als zodanig uitgesproken, ze is impliciet in bekende spreekwijzen zoals: voorwerp A 'bezit' zo-en-zoveel energie in die-en-die vorm.

Deze manoeuvre was nodig om enerzijds studenten in staat te stellen gebruik te maken van hen aangeleerde kennis, anderzijds die kennis toch niet bijvoorbaat geheel voor zoete koek te slikken. De ontworpen opgavenserie gaat ervan uit dat deze *omkering van de vraagstelling* in de loop van §1[3] heeft plaatsgevonden, want in §2[3] wordt gevraagd kritisch na te gaan onder welke voorwaarde het mogelijk is 'energiewaarden van toestanden' op 'ruilwaarden van veranderingen' te baseren. Het toewerken naar deze bedoelde omkering is te zien in de begeleiding door **WK** in protocol 3.1.

protocol 3.1

Opgave 1-1g[3] vraagt welke ervaringen ons aanleiding kunnen geven om de twee bij 1-1e[3] genoemde *verschijnselen* "even veel waard" of "gelijkwaardig" te noemen. Bij 1-1e[3] worden genoemd: een verandering van snelheid-kwadraat van 1 m^2/s^2 en een hiermee "gelijkwaardige" hoogteverandering. De grootte van deze hoogteverandering was gevraagd uit te rekenen. Om dit te doen moest men het woord 'gelijkwaardig' op één of andere wijze opvatten. Studenten hadden dus al, op mijn verzoek, bepaalde veranderingen ("verschijnselen") "gelijkwaardig" genoemd vóórdat zij bij 1-1g[3] voor de vraag gesteld werden:

> "Welke ervaringen kunnen ons nu aanleiding geven om de twee bij 1-1e genoemde verschijnselen 'even veel waard' (gelijkwaardig) te noemen?" (1-1g)[3]

Uit protocol 3.1 blijkt dat studenten 'gelijkwaardig' bij 1-1e[3] hebben opgevat als gelijkheid van twee energie-waarden of van twee energieveranderingen, "beide kanten van het = teken" zoals **P** het, wijzend naar zijn antwoord bij 1-1e[3], formuleert (r.6-14). Vraag 1-1e[3] heeft dus volgens bedoeling voorbereidend gefunctioneerd, want er wordt uitgegaan van de aangeleerde 'energievormen'. Nu wordt gevraagd deze 'gelijkwaardigheid' op een ervaring te gronden.
Er komen voorstellen voor een antwoord: één van **P**.34 en hierop aansluitend één van **N**.38, die beide worden verworpen door **O**.40,43 want **O**.27,29,43 wil een bevestiging van "deze formule", $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, of $mg\Delta h = \frac{1}{2}m\Delta(v^2)$. De parabool zou het gebruik van v^2 bevestigen, maar de parabool "zie je niet" (O.40).
In tegenstelling tot **O** ging het **WK** hier echter nog niet om een bevestiging van de gebruikte formules, maar om een reden voor het willen toekennen van een gelijke waarde aan twee veranderingen, een keus die volgens zijn ontwerp vooraf zou moeten gaan aan het opstellen van deze formules.*) **WK**.307 zegt dit ook en nog duidelijker in r.318 en in protocol 3.2 r.43-47. Maar in 't begin van dit gesprek (protocol 3.1) was het verschil in gerichtheid tussen hem en **O** voor **WK** nog niet duidelijk.
Gevraagd om goedkeuring (P.61) pakt **WK** **P**'s voorstel, dat deze inmiddels herhaald heeft (P.55) op. Hierbij herformuleert hij **O**'s uitdrukking "formules, die je aan elkaar gelijk stelt" (O.53) tot "snelheidsverandering en die hoogteverandering" die je "even veel waard noemt" (WK.69), waarmee hij probeert de woorden uit 1-1g[3] alsnog te laten functioneren. Even later laat **WK** zich door **O**.113 eventjes op diens spoor zetten (r.117-122). **WK** zoekt met **N**, **O** en **P** naar een proef die zou kunnen bevestigen dat de formules kloppen (r.123-126). De uitdaging "dan moet je me toch eens uitleggen hoe je dat doet" (WK.132) wordt

*) Zie Mach[63], geciteerd in 2.7

door **WK** niet consequent volgehouden. In plaats van aan **P**.133 nog eens te vragen hoe hij die meting wil uitvoeren, komt **WK** zelf met suggesties (WK.136 en 145), deels aansluitend bij bijdragen van **A** en **B** (r.141-144). Maar deze "meet"-methoden hebben alle het bezwaar dat ze al uitgaan van één van de te bevestigen formules (WK.142) en van de te bevestigen gelijkheid (WK.152).
O.143 ziet dit bezwaar en komt met een voorstel dat hij misschien heeft opgepikt van **P**.125: een evenredigheid tussen Δh en $\Delta(v^2)$ kan worden getoetst zonder dat we 'energie' hoeven te meten. Daarmee is dan een consequentie (P.125: "dus") van energie-gelijkheid getoetst, maar niet de energiegelijkheid zelf. Vandaar wellicht **P**'s (r.152) bezwaar.
Al dit vruchteloze zoeken bevestigt de aanvankelijke veronderstelling, dat éérst op grond van ervaring besloten moet worden dat men aan beide veranderingen een gelijke waarde *wil* toekennen. Hoewel deze *keuze* op grond van ervaring gemotiveerd kan worden, is er geen ervaring die ons tot deze zienswijze (Mach[63]: "Form der Auffassung") dwingt. Door mee te gaan in **O**'s voorstel zowel de gebruikte formules als de gelijkheid daartussen te willen toetsen is dus de groep (tijdelijk) voor een onmogelijke opdracht geplaatst.

> In een probleemstellende route naar 'energie' gaat een (te motiveren) *keuze* voor het toekennen van 'gelijke waarden' vooraf aan het opstellen van formules voor deze 'ruilwaarden'.

Na nog een poging (**P**.153) slaagt **WK** er in de opgave beter te stellen. Dit gebeurt in twee stadia: r.187-196 en 197-208. Ten eerste is de volle omvang van de vraag nog niet verstaan (187-196), maar dat lijkt nu wel te gebeuren; ten tweede moet de vraag toch ook weer bescheidener worden opgevat (197-208). Essentieel is nu de vervanging van "blijkt" door "een reden om het te doen", want met "blijkt", of "uitrekenen dat de wetten kloppen" (r.113) zaten we juist op 'n dood spoor. Deze vervanging wordt niet meteen verstaan, want **WK**.197 probeerde het ook al, maar toen kwam **N** nog met "niet kunnen" en "moeten", uitspraken die voor zover ik weet niet getoetst kunnen worden. **P** kwam met "blijkt".
"Een reden om het te doen" (WK.205) lijkt wel verstaan te worden, want men antwoordt met "het appeltje van Newton" en dat is inderdaad wat **WK** bedoelt: een ervaring die als aanleiding zou kunnen dienen. Een goede reden, een overtuigende aanleiding om Δh en $\Delta(v^2)$ 'even veel waard' te noemen. Meer niet.
WK praat de groep vragenderwijs in kleine stapjes naar de door hem voorziene "ervaring" toe (r.211-233). Vervolgens: bingo! **P** is in staat een redenering te houden die geen bewijskracht heeft, maar die wel overtuigt (r.236-277). Tenminste, het overtuigt **WK**. Maar dat is niet zo vreemd, omdat het een redenering is die veel lijkt op de redenering die **WK** hoopte te horen. Maar **N** en **O** zijn nog niet overtuigd.
Dit is te begrijpen omdat **WK** hen niet heeft kunnen richten op de vraag: waarom noemen we deze Δh en deze $\Delta(v^2)$ (uit 1-1e)[3] "even veel waard"? Zij zitten nog met hun interpretatie van de opgave, namelijk "waarom zijn ze aan elkaar gelijk" (N.28) waarbij 'ze' verwijst naar $mg.\Delta h$ respectievelijk $\frac{1}{2}m.\Delta v^2$. Men wil dus nog steeds praten over een verantwoording van de complete formules, inclusief de daarin voorkomende "constanten" (N.279, O.331).

"de constanten"
In het volgende protocol wordt gesproken over de vraag hoe je de constanten bepaalt. **WK**

had deze vraag willen uitstellen tot na 1-6[3] en 1-7[3], omdat hij verwachtte dat een discussie over hoe je in het algemeen de "constanten" bepaalt, dan pas grond onder de voeten zou hebben (zie 1-8)[3]. Maar **WK** zag niet hoe hij de kwestie nu uit de weg kon gaan, de pogingen die hij daartoe ondernam (protocol 3.1 WK.303-308, 315-321) en ook **P**'s poging (r.309-313) overtuigden **N** en **O** niet.

protocol 3.2

WK's inbreng is steeds bepaald door de wens de volgorde van de vraagstellingen om te keren, namelijk éérst kiezen voor 'even veel waard' op basis van **P**'s argumenten (Pr.3.1) en dan de keuze van de constanten èn voor het kwadraat te maken in het licht van deze voorafgaande keuze. (WK.43-52).
Vervolgens probeert **WK** de constante '2' zo empirisch mogelijk te duiden (WK.66, 86 en 96). Een empirische verantwoording voor 2,00 of voor 2,001±0,002 lijkt me nog steeds mogelijk. Immers: door $\Delta h : \Delta(v^2)$ te bepalen vinden we een verhouding $1 : C$, waarin C een empirische constante is. Door de meting op verschillende plaatsen te herhalen (WK.90) kan opgemerkt worden dat C samenhangt met g volgens C=2,00.g bijvoorbeeld. **O** merkt dus terecht op dat een wiskundige 2 (in plaats van 2,00) zo niet verantwoord kan worden (O.25,57,84). Uit **WK**'s antwoorden aan **O** blijkt dat **WK** toen geen oor had voor het verschil tussen een wiskundige en een natuurkundige 2.
Wanneer we energiewaarden willen baseren op ervaringen, en nog niet op deductieve afleidingen, dan past in zo'n onderwijsaanpak wel

$$\Delta h : \Delta(v^2) = 1 : C \text{ met } C=19{,}62 \text{ m/s}^2$$

maar niet

$$\Delta h : \Delta(v^2) = 1 : 2g \text{ met } g=9{,}81 \text{ m/s}^2.$$

Een subtiel verschil waar **WK** nog geen rekening mee hield.

Verwijzende betekenis
Om de gebleken toetsbaarheid van energiewaarden per energievorm (5.4.1) te begrijpen is het (gezien 5.3.1) van belang na te gaan of we kunnen zeggen dat de term 'even veel waard' of 'gelijkwaardig', *een verwijzende betekenis* heeft gekregen.
Als criterium voor een verwijzende betekenis hanteerden we eerder (5.3.1), dat men dan in staat is een ervaring te ontwerpen die een term (hier 'even veel waard') zin geeft of toetst. Een eerste ontwerp is gemaakt als men onderscheid heeft gemaakt tussen ervaringen waarbij men wel, en waarbij men niet van 'even veel waard' wil spreken (Pr.3.1, r.23, 72-99). Maar hierbij wordt nog uitgegaan van het aangeleerde energiebehoud. Er klinkt nog geen reden om voor energiegelijkheid te kiezen. Die reden is wel te horen in **P**'s voorstel (Pr.3.1, P.234-302), waarbij van het aangeleerde 'energie' maar niet van 'energiebehoud' wordt uitgegaan. We kunnen dus zeggen dat voor **P** de term 'gelijkwaardig' of 'even veel waard' (nog wel in de context van het aangeleerde 'energie') naar een ervaring is gaan verwijzen.

protocol 3.3

In aansluiting op de vorige twee protocollen toont protocol 3.3 hoe de uitdrukking 'ruilwaarde' (1-1h^3) door studenten werd opgevat. Te zien is dat deelnemer **P** de analogie met geld formuleert (P.45-48, P.83-N.87, P.99), die **WK** tijdens het tweede onderwijsexperiment zelf moest formuleren in een uitleg-situatie (Pr.2.4, WK.110-128). Deze door **P** geformuleerde analogie wordt nu door **O**.74-79 begrepen, hetgeen hieruit blijkt dat **O**.95 een consequentie van deze zienswijze formuleert, die door **P** nog niet geformuleerd was. De gebleken toetsbaarheid van 'energievormen' (5.4.1), kan dus in verband worden gebracht met de gewijzigde opzet, waarin de koppeling van energiewaarden aan toestanden minder vanzelfsprekend wordt gemaakt door uit te gaan van 'ruilwaarden van veranderingen'.

De gebleken toetsbaarheid kon in verband worden gebracht met een eerder ontstane naar ervaring verwijzende betekenis.

namelijk met een naar ervaring verwijzende betekenis voor 'ruilwaarde'.
Men zie 5.3.1 waar eenzelfde conclusie getrokken werd voor 'entropie'.

5.5. Conclusie

Zoals aangekondigd is in het nu afgelopen hoofdstuk de geschiedenis van het evalueren en ontwerpen van de drie onderwijsexperimenten alleen in hoofdlijnen verteld. De bedoeling was om er voldoende van te vertellen zo dat later toe te voegen details in het kader van de nu vertelde hoofdlijnen kunnen worden begrepen.
Analyse van bestaande onderwijspraktijk leidde in deel 1 tot het beschrijven van drie gewenste veranderingen van taal. Conclusies die betrekking hadden op deze taalveranderingen werden in dit hoofdstuk onderscheiden door een kader. Deze conclusies worden nu samengevat.

In het afgelopen hoofdstuk werd getoond hoe deze drie veranderingen van tussentaal in verschillende onderwijsexperimenten werden uitgeprobeerd en hoe twee ervan tenslotte werden gerealiseerd (Tabel IX).

Tabel IX: Taalveranderingen uitgeprobeerd in de drie uitgevoerde onderwijsexperimenten (vgl. Tabel VIII).

Taalverandering ↓ \ Experiment →	1	2	3
i. Van energievormen naar inwendige energie	-	geprobeerd	gelukt
ii. Onderscheiden energie van gebruikswaarde	geprobeerd	-	-
iii. Van $gh.\Delta m$ en $-p.\Delta V$ naar $T.\Delta S$	geprobeerd	gelukt	-

Met betrekking tot verandering **i.** is opgemerkt dat deze verandering mogelijk werd toen hieraan de volgende stappen vooraf gingen (5.4.2):

1- keuze voor 'gelijke waarde' van twee tezamen optredende veranderingen
2- keuze van geschikte capaciteiten en daarmee van een eenheid van 'ruilwaarde'

Door van 'ruilwaarde van een verandering' te spreken hebben we een minder dogmatische variant van de energievormentaal ontwikkeld, die beter geschikt bleek als vertrekpunt voor taalverandering i. Wel moet de rol van de term 'toestand' nog verder worden opgehelderd in verband met het kiezen van een systeem (5.4.1). Gezien de moeite die het kost de aangeleerde VWO-leerstof te ontdogmatiseren (5.4.2), zou het gewenst zijn als de voorafgaande keuzen (1 en 2) al tijdens het VWO zouden worden georganiseerd.

Ten aanzien van taalverandering **i.** kan verder worden opgemerkt dat deze taalverandering inmiddels is beschreven als drie elkaar opvolgende veranderingen, namelijk:

3- van 'ruilwaarde van een verandering' naar 'energiewaarde van een toestand' (5.3.5)
4- van constante capaciteit naar veranderlijke capaciteit (5.3.6)
5- van 'toestand' als bepaald door een enkele variabele (per energievorm) naar 'toestand' beschreven door een combinatie van variabelen (2.8.2 en 5.4.1)

Nader onderzoek leidde dus tot extra 'tussentalen'. Zo'n resultaat was al voorzien bij de omschrijving van 'tussentaal' in 1.2. Met betrekking tot de veranderingen 3 en 4 is opgemerkt dat de uitgeprobeerde volgorde naar verwachting niet meer zal voldoen wanneer tijdens het VWO energievormen niet langer als naïeve realiteiten (5.3.2) worden onderwezen (5.3.6). De uitgeprobeerde volgorde bleek wel een kritische beoordeling van energievormen *achteraf* mogelijk te maken (5.4.1).

Ten aanzien van taalverandering **iii** is opgemerkt dat de term 'warmte' in de betekenis $\Delta U - w$ een resultaat van deze taalverandering kan zijn. Deze nieuwe term ontleent zijn zin dan aan een relatie met entropie (5.2.5).
Verder werd geconcludeerd dat deze term 'warmte' *geen* deel kan uitmaken van een empirische basis voor de toestandsgrootheid U, de inwendige energie. Thermische energie of ruilwaarde van temperatuur ($mc.\Delta T$) bleek wel bruikbaar om tot inwendige energie te komen, een aanwijzing dat we taalverandering i inderdaad nodig hebben (5.2.4).

Het evalueren en ontwerpen van onderwijs leidde in dit hoofdstuk ook tot didactische vermoedens, die cursief werden weergegeven. De bruikbaarheid van deze vermoedens werd doorgaans uitgeprobeerd in een volgend experiment. Op deze wijze werd het ontwerpen in toenemende mate geleid door didactische vermoedens.
Deze vermoedens werden deels ingegeven door de literatuur en door de traditie waarin ik werk. Die literatuur en die traditie werden echter in dit hoofdstuk nog niet voorop gezet. De formulering van deze voorlopige conclusies is dus nog niet geijkt aan didactische vaktaal zoals die in literatuur te vinden is. In plaats daarvan zijn formuleringen gekozen die na beschouwen van een enkel geval toepasselijk leken. Slechts enkele malen (p.123 en 132) bood de gelegenheid voor een poging tot generalisatie zich aan. In hierna volgende hoofdstukken zal wél gebruik gemaakt worden van literatuur, om zo doende tot meer algemeen bruikbare formuleringen te komen.

De hier cursief gezette vermoedens zullen in volgende hoofdstukken dienen als grond voor een kritische beoordeling van gezichtspunten aangetroffen in de literatuur.

6. Tussentalen beschrijven: Termen en hun relaties

In hoofdstuk 5 werd bij twee verschillende gelegenheden opgemerkt dat een term zinvol kan worden als snijpunt of "knooppunt" van twee relaties (5.2.5 en 5.3.3). De term q gerelateerd aan ΔU-w konden we motiveren niet eerder dan dat een tweede interessante relatie ($dq_{rev}=T.dS$) hierdoor constateerbaar wordt. We kunnen zeggen dat beide relaties elkaar snijden in de term *'q'* en we kunnen zeggen dat deze term slechts áls knooppunt zinvol wordt. Immers voordat een tweede relatie wordt opgemerkt is de gekozen omschrijving (ΔU-w) volstrekt willekeurig.
Uiteraard moeten er dan nog verdergaande redenen zijn waarom we de combinatie van beide relaties interessant vinden. De analogieredenering bood zo'n verdergaande zingeving (5.2.5) en de verwachte relatie met 'gebruikswaarde' een nog verdergaande zingeving. Het knooppunt *'q'* ontleent dus zijn zin aan de plaats die het kan gaan innemen in het web van relaties, zoals dat tot dan toe is ontstaan.
Met betrekking tot de 'energievormen' zoals die in het VWO worden aangeleerd kwamen we tot een soortgelijke conclusie, namelijk dat een formule voor een energievorm gemotiveerd kan worden zodra deze energievorm in relatie tot meer dan één andere energievorm wordt beschouwd, dus bijvoorbeeld 'hoogte-energie' (of liever: ruilwaarde van hoogte, $mg\Delta h$) zowel in relatie tot kinetische ($0{,}5m.\Delta v^2$) als tot thermische ($mc.\Delta T$) ruilwaarde (5.3.3). Van beide voorlopige conclusies is al getoond hoe ze gefunctioneerd hebben bij het ontwerpen van thermodynamica-onderwijs.

> *Er is aanleiding om een tussentaal te beschrijven met behulp van een netwerk van relaties tussen termen.*

In dit hoofdstuk bekijken we de literatuur die zich met zulke beschrijvingen bezighoudt en wordt de toepasbaarheid kritisch nagegaan van de daar gevonden inzichten. Dit kritisch nagaan blijft wel beperkt tot het evalueren en ontwerpen van thermodynamica-onderwijs.
'Relatie' is in de bespreking tot nu toe nog niet streng omschreven. Er is aangeknoopt bij het gebruik van dit woord zoals dat bij beoefenaren van natuurwetenschappen gebruikelijk is. In psychologische en onderwijskundige literatuur wordt vaak gesproken van 'associaties' of 'woordassociaties' als men wil nagaan welke woorden of termen met elkaar in verband worden gebruikt door proefpersonen. Hierbij wordt dus geen expliciet onderscheid gemaakt tussen een 'woord' een 'term' of een 'vakterm'. Evenmin wordt onderscheiden tussen een associatie zoals die blijkt uit het samen voorkomen van woorden in een zin, en een associatie zoals die blijkt uit het samen voorkomen van symbolen (=, q, $\int$, T) in een algebraïsch geformuleerde relatie. We zullen nagaan in hoeverre deze nogal generaliserende aanpak bruikbaar is en eventueel zullen we de nodige onderscheidingen later invoeren, naar behoefte. Wél zullen we de aandacht richten op die woorden en andere symbolen die voor ons interessant zijn, dus op woorden die in de thermodynamica of in de chemie als vakterm in gebruik zijn. Daarmee is echter nog niet gezegd dat dan ook het gebruik van

zo'n woord door een leerling de kwaliteit van een vakterm heeft. Het is dus voorlopig veiliger deze woorden als 'woorden' aan te duiden, om ze niet bijvoorbaat al een speciale kwaliteit toe te dichten.

Onder een 'woord-associatie' of kortweg 'associatie' wordt in het vervolg verstaan het regelmatig of in ieder geval niet-toevallig samen gebruiken van (twee of meer) woorden of andere symbolen in uitspraken, waarbij 'uitspraak' kan slaan op een zin, een formule, of welke uiting van beperkte omvang dan ook (per geval nader te specificeren door de onderzoeker).
Het in kaart brengen van zulke 'woord-associaties' staat in de literatuur bekend als 'concept mapping'.
In 6.1 worden enkele typerende voorbeelden van 'concept-mapping' onderzoek in detail geciteerd. In 6.2 volgt een vergelijkende bespreking van de aanpak van de geciteerde onderzoekers. Nadat enkele conclusies als mogelijk bruikbaar zijn beoordeeld wordt getoond hoe deze conclusies gebruikt zijn bij het nader detailleren en verantwoorden van het ontworpen thermodynamica-onderwijs (6.3). Hierna worden de beperkingen inherent aan 'concept-mapping' op een rijtje gezet (6.4).

6.1. Concept mapping

De hierna te citeren artikelen hebben gemeen dat het samen voorkomen van woorden in *uitingen van leerlingen* wordt beschreven. De te bespreken artikelen zijn ingedeeld naar de manier waarop de 'gemapte' uitspraken zijn verkregen. Andere verschillen worden besproken in 6.2. Geprobeerd is om de diversiteit in 'concept-mapping' technieken enigszins recht te doen.

▸ *a) een onderwijstekst en een associatietest*
Karpinski[93] heeft een tekst over chemische thermodynamica voor A-level leerlingen onderzocht. Eerst werden vijftien woorden en uitdrukkingen uitgekozen waarop de analyse zich richtte.*) Iedere zin uit de tekst die twee of meer van deze woorden bevatte, werd afgebeeld als een verbindende streep tussen deze woorden. Zo ontstond een figuur met daarin 15 woorden en 53 strepen daartussen. Vervolgens werd elk woord gekenmerkt door een serie "afstanden" tot elk van de andere woorden, zijnde het kleinste aantal strepen dat beide woorden met elkaar verbindt. Deze 'afstanden' worden in een 15 x 15 matrix geplaatst.
Aan 297 leerlingen die met behulp van de onderzochte tekst waren onderwezen werden 15 vellen papier uitgereikt met bovenaan elk vel één van de gekozen woorden. Hen werd gevraagd onder dit woord die andere woorden (van de 15) te noteren die ermee verband houden. Het voorkomen van een woord in respons op het gegeven woord op een vel papier wordt nu behandeld zoals eerder het samen voorkomen van twee woorden in een

*) Gekozen werden: "inwendige energie, toestandsfunctie, enthalpie, entropie, thermodynamisch evenwicht, spontaan proces, niet-spontaan proces, chemische potentiaal, reversibele warmte, vrije energie, maximale arbeid, thermodynamische potentiaal, warmte Q_V, warmte Q_p, reversibel proces".

zin: het resultaat is per leerling een 15 x 15 afstandenmatrix.
De afstandenmatrix van elke leerling wordt nu vergeleken met de afstandenmatrix verkregen uit de tekst, door de "euclidische afstand" tussen beide matrices te berekenen. Er bleek een significante correlatie tussen deze 'euclidische afstand' enerzijds en een tentamenachtige toets met rekenopgaven anderzijds: een hoge score op de rekentoets ging samen met een kleine 'afstand' tussen leerling-matrix en tekst-matrix, dat wil zeggen leerlingen met een hoge score op de rekentoets associëren die woorden die ook in de tekst geassocieerd werden. Karpinski meent hieruit te kunnen concluderen dat leerlingen met een "coherente kennis-structuur" beter presteren. Blijkbaar gaat hij er van uit dat een taal die qua aangetroffen associaties verschilt van de taal in het door hem gebruikte studieboek niet "coherent" kan zijn.

▸ *b) leerlingen maken hun eigen 'map'*
Wilson[94] deed een enigszins vergelijkbaar onderzoek. Aan 54 leerlingen die onderwijs hadden gekregen in chemisch evenwicht werden kaartjes uitgedeeld met op elk kaartje een woord, tezamen 24 woorden[*)] die door de onderzoeker waren uitgekozen als relevant voor chemisch evenwicht. Leerlingen werd gevraagd de kaartjes te rangschikken op een vel papier met 1) het "meest omvattende" woord bovenaan, 2) zo dat de rangschikking de "relaties" tussen de woorden weergeeft, 3) deze "relaties" af te beelden met pijlen tussen de woorden en 4) iedere pijl te labelen met een omschrijving van de bedoelde "relatie".
Bij de verwerking werd alleen gelet op de aanwezigheid of afwezigheid van pijlen tussen paren van woorden. Per deelnemer werd een 24 x 24 matrix gemaakt die de aan- of afwezigheid van pijlen tussen woorden representeerde. Tussen elk paar deelnemers werd een onderlinge 'afstand' berekend, waarbij elke afstand een functie is van 24 x 23/2 = 276 ja/nee variabelen. Verwacht wordt dat deze 276 variabelen niet onafhankelijk zijn, omdat overeenstemming in het associëren van woorden A en B kan samenhangen met overeenstemming in het associëren van woorden C en D. Met behulp van een rekenmethode voor reductie van het aantal variabelen bleek het mogelijk 50% van de "variantie" in gevonden afstanden te beschrijven met 3 variabelen. Wilson concludeert hieruit dat de verschillen tussen deelnemers niet willekeurig maar "systematisch" zijn, dus dat de verwachte samenhang in het associëren is gevonden. De genoemde drie variabelen beschrijven dus de voornaamste *onafhankelijke*[+)] verschillen tussen deelnemers.
Vervolgens werd geprobeerd deze drie variabelen te interpreteren door visueel het werk van deelnemers te vergelijken die volgens de berekening op één van de drie dimensies sterk verschilden. De eerste van de drie variabelen bleek samen te hangen met de keuze van het door leerlingen als "meest omvattend" aangegeven woord en met de woorden die daar direct mee verbonden waren (de "bovenste helft" van hun concept map). De derde[#)] variabele werd in verband gebracht met verschillen tussen deelnemers in de minder

---

(* Te weten: chemical equilibrium, steady state, volume, equilibrium constant, ions, vapor pressure, dynamic, Le Chatelier's principle, pressure, molecules, gas phase, direction, solubility, condensation, temperature, phase change, endothermic, reversibility, reactants, evaporation, exothermic, concentration, products, equation.

(+ 'Onafhankelijk' zoals gebruikelijk in de wiskunde: als je twee van de drie variabelen kent, dan ligt daarmee de derde nog niet vast.

(# 'derde' in volgorde van afnemende voorspellende waarde voor de 273 afhankelijke variabelen.

centraal geplaatste woorden (de "onderste helft"). De tweede variabele tenslotte werd door de onderzoeker in verband gebracht met de al of niet "hiërarchische structuur" in een concept map. Deelnemers die laag scoorden op deze variabele hadden hun concept map georganiseerd rond "abstracter" woorden met concretere woorden aan de periferie.*) Ook hadden zij in het algemeen een groter aantal associaties tussen de 24 woorden. Dit waren tevens de deelnemers met hogere scores op een conventionele toets. Deelnemers die hoog scoorden op deze variabele en laag op een conventioneel tentamen hadden woorden als 'evenwichtsconstante' en 'vergelijking' een centrale rol gegeven. Wilson concludeert hieruit dat deze deelnemers gericht waren op aangeleerde algoritmen, zonder begrip van de fysische woorden waarop deze zijn gebaseerd.

▸ *c) interviews*

Pendley, Bretz en Novak[95] hebben deelnemers geïnterviewd aan een cursus in fysische en analytische chemie (chromatografie). De interviews vonden plaats zowel vóór de cursus als 14 weken na de laatste lessen, zodat verwacht mocht worden dat resultaten van uit-het-hoofd-leren verdwenen waren. De interviews hadden het karakter van een gesprek over de chemische inhoud van de cursus, wellicht vergelijkbaar met een mondeling tentamen. Van de interviews werden bandopnamen gemaakt en dezen werden na afloop verwerkt door uitspraken van de leerling waarin twee of meer vaktermen voorkwamen af te beelden als lijnen in een 'concept map'. Door vergelijken van concept maps verkregen uit de gesprekken vóór en na het reguliere onderwijs concludeerde men dat "misconcepties" persistent bleken: studenten "bouwen" nieuwe kennis "op" eventueel aanwezige misconcepties. Studenten die voor aanvang van het onderwijs zich correct uitdrukten daarentegen hadden na afloop hun taal op eveneens correcte wijze uitgebreid.

Lybeck *et al.*[96] hebben aan leerlingen mondeling een vraagstuk voorgelegd. Aan elke individuele leerling werden drie groepen van drie maatcilinders getoond, elk drietal gevuld met respectievelijk tin, aluminium en zwavel. Hierbij werd de vraag gesteld: "Welke groep bevat 1 mol van elk van deze elementen?" Van de maatcilinders was er één groep steeds gevuld tot gelijk volume, een andere groep tot gelijk gewicht en de derde tot het gewicht van een mol stof, voor elk van de genoemde niet-ontleedbare stoffen. Leerlingen mochten de maatcilinders bekijken en oppakken om ze desgewenst te wegen op de hand. De interviewer moedigde geïnterviewden aan om te redeneren over de gestelde vraag. Als een leerling een vakterm gebruikte werd om een toelichting gevraagd. Bij het uitwerken van de audio-opnamen van de interviews werd gelet op associaties door leerlingen van het woord 'mol' met andere woorden zoals 'massa', 'volume' en 'aantal deeltjes'. Uitspraken van verschillende individuen, zoals:

- "..you divide the mass in grams by the mass in u, and get the number of moles."
- "Use a formula, weigh it, find out the mass and compare with the molar mass."

werden geïnterpreteerd als handelend over eenzelfde "relatie", die door de onderzoekers

*) Als "abstract" worden door Wilson genoemd: Le Chateliers principle, chemical equilibrium, steady state and equilibrium constant; als "concrete" o.a.: temperature, phase change, evaporation, direction, products, reactants, concentration.

genoteerd werd als "*m=M.n*".*),[97] Dit is merkwaardig te noemen, omdat de auteurs ook betogen dat voor leerlingen *m=M.n* niet equivalent is met *m=n.M* of met *n=m/M*. De uitdrukking *m=M.n* (de "A-vorm") zoals gebruikt door geïnterviewden wordt beschreven als "evenredigheid", met *M* als evenredigheidsconstante uitgedrukt in gram per mol. De deling *n=m/M* (de "B-vorm") daarentegen wordt door geïnterviewden geassocieerd met 'de mol' als een bepaalde hoeveelheid stof met een massa *M* in gram, zodat *n* een eenheidsloos getal wordt.
Ondanks dit opgemerkte verschil in betekenis werden verschillende uitspraken van leerlingen samengenomen en in wiskundige vorm geherformuleerd als één "relatie". Deze wiskundig geformuleerde associaties van symbolen werden vervolgens afgebeeld in een "collectieve kaart" voor de geïnterviewde leerlingen, door symbolen (zoals *M*, *n* en *m*) te verbinden. Redeneringen van individuele leerlingen werden afgebeeld als "paden" in deze collectieve kaart. Beperkingen in de redeneermogelijkheden van leerlingen konden op deze wijze worden opgemerkt. Een eventueel nodige herordening van taal kan aan de 'paden' van leerlingen niet worden afgelezen. Dit komt omdat alle uitspraken van leerlingen zo zijn geherformuleerd, dat ze zonder schijnbare tegenspraken bij elkaar en bij de gewenste vaktaal passen. Op deze wijze kan men enerzijds leerlingen 5 verschillende betekenissen voor het woord 'mol' toeschrijven, en toch deze 5 betekenissen afbeelden door één knooppunt in de collectieve kaart. Een verandering van betekenis kan in deze kaart dan niet worden afgebeeld.

▸ *d) onderwijstekst en onderwijsgesprekken*
Kaper, De Vos en Ten Voorde[98] beschrijven een methode voor de analyse van een onderwijstekst (vergelijk Karpinski[93]). Ook zij beginnen met de keuze van een aantal woorden en uitdrukkingen waarop de analyse zich richt. Uitspraken waarin deze woorden voorkomen worden gemarkeerd. Vervolgens wordt per woord een betekenisomschrijving opgesteld, die

- zo mogelijk ontleend is aan de tekst,
- in ieder geval gesteld is in woorden die in (het begin van) de tekst in gebruik zijn, in de betekenis die voor die andere woorden is omschreven,
- het mogelijk maakt een zo groot mogelijk deel van (het begin van) de tekst als 'consequent' op te vatten.+)

Wordt bij verder lezen een woord vervolgens aangetroffen in een uitspraak waarvoor het niet lukt deze uitspraak met eerdere uitspraken onder één omschrijving te vatten, dan wordt een nieuwe omschrijving opgesteld, ter beschrijving van het gebruik van dat woord in het vervolg van de tekst. Aan de nieuwe omschrijving worden overeenkomstige eisen gesteld, maar nu met betrekking tot het nieuwe tekstgedeelte. Op deze wijze werden in een onderwijstekst 6 verschillende betekenissen voor het woord 'stof' opgemerkt, elk in samenhang met een aantal bijpassende betekenissen van andere woorden (o.a. 'mengsel', 'scheiden', 'reactie', 'zuiver', 'opgelost').

(* Waarin *m* de massa van een portie stof, *n* de hoeveelheid stof ("Amount of substance", IUPAC[97]) en *M* de molmassa van het stofindividu voorstelt.

(+ Toepassing van dit derde criterium berust onder andere op chemisch inhoudelijk redeneren (zie de hoofdstukken 1 t/m 5).

Deze zes clusters van bij elkaar passende betekenissen zijn te zien als beschrijvingen van tussentalen die de bedoeling hebben om leerlingen te leiden van de omgangstaal naar de vaktaal.
Om een scherper onderscheid tussen 'bij elkaar passende' en niet bij elkaar passende betekenissen mogelijk te maken kiezen Kaper en Ten Voorde[37] het voorkomen van schijnbaar strijdige beweringen als criterium. Wanneer een onderwijstekst eerst beweert "alle stoffen bestaan uit moleculen" en later "niet alle stoffen bestaan uit moleculen" dan kunnen we concluderen dat het woord 'molecuul' hier in twee niet bij elkaar passende betekenissen wordt gebruikt. Met andere woorden: een overgang van de eerste naar de tweede betekenis van 'molecuul' is geen betekenis*uitbreiding* te noemen. Clusters van bij elkaar passende *termen*[*)] zijn volgens dit criterium gedisciplineerd te onderscheiden.
Zulke bij elkaar passende termen zijn voor hun betekenis-omschrijving van elkaar afhankelijk en functioneren in die zin voor elkaar als "context". De onderscheiden clusters van termen die tezamen consequent gebruikt kunnen worden werden daarom *contexten* genoemd.
Onderwijs- en leerproblemen zoals die bij observaties werden waargenomen in klassen waar de onderzochte tekst werd gebruikt, konden in verband worden gebracht met *wisselingen van context* in de uitspraken van de leraar of van de onderwijstekst.[98,99,37]
Later[100] kon ook worden opgemerkt hoe een 'contextwisseling' door een groep lerenden tot stand werd gebracht, nadat zij door het onderwijs in een probleemsituatie waren geplaatst waarvoor hun huidige taal niet toereikend was. Het voorkomen van schijnbaar strijdige uitspraken (nu niet door een individu, maar door een groep) functioneerde daarbij weer als aanwijzing.[100]
De tussentalen die in deel 1 werden onderscheiden zouden wellicht ook met 'contexten' te beschrijven zijn, gezien dat ze van elkaar af te bakenen zijn door te letten op schijnbare strijdigheden, zoals: voorwerpen bezitten een bepaalde hoeveelheid 'warmte', en: 'warmte' is niet iets dat kan worden bezeten. Of: 'energie' is het vermogen om arbeid te verrichten, en: 'energie' blijft behouden, terwijl het vermogen tot arbeid verloren gaat. Deze tussentalen onderscheiden zich echter niet alleen door hun context, maar ook doordat ze elk op een ander ervaringsdomein bruikbaar zijn.[+)]

6.2. Keuzen ten aanzien van 'concept mapping'

De besproken onderzoekingen verschillen in de manier waarop uitingen worden verzameld, in de verwerking die leidt tot de 'concept map' als onderzoeksresultaat en daardoor ook in de soort conclusies die uit deze 'maps' getrokken kunnen worden. Enkele verschillen worden nu besproken, waarbij telkens een keus wordt gemaakt.

(* Met een 'term' werd bedoeld een woord, gebruikt in een bepaalde betekenis. Dus in de twee schijnbaar strijdige uitspraken zien we wel tweemaal hetzelfde woord 'molecuul' maar niet tweemaal dezelfde *term*.

(+ Zie bijvoorbeeld 3.4: 'energie is vermogen tot arbeid' is bruikbaar in de mechanica, maar wordt onbruikbaar (òf verandert van betekenis, 3.3) zodra onder 'energie' ook zoiets als 'inwendige energie' wordt verstaan.

▸ *a) de situatie waarin taaluitingen worden verzameld*
Karpinski[93] vroeg woorden te noteren in respons op een gegeven woord. Sutton[101] heeft zulke associatietests bekritiseerd omdat ze geen onderscheid maken tussen "woorden die geassocieerd worden omdat ze qua klank op elkaar lijken (..) antoniemen, woorden die qua betekenis op elkaar lijken, of woorden die samen gebruikt worden (door volwassenen) maar het kind weet niet waarom (..)". Aan deze kritiek kan enigszins tegemoet worden gekomen door, zoals Wilson[94], leerlingen te vragen niet alleen woorden samen te noemen (te associëren) maar ook "de relatie" te formuleren. De uiting waarin de associatie wordt aangetroffen begint dan meer te lijken op een uitspraak, zij het dat deze uitspraak nog steeds gedaan wordt in een situatie die weinig overeenkomt met situaties waarin uitspraken gewoonlijk in onderwijs functioneren. Dus blijft ook onduidelijk of de onder deze omstandigheden opgeroepen uitingen iets zeggen over het taalgebruik in een onderwijssituatie. Hoewel de onderzoekers dit zelf niet uitspreken hebben de besproken interviews (door Novak, Pendley en Bretz[95] en Lybeck *et al.*[96]) wel eigenschappen van een onderwijssituatie doordat de interviewer om redeneringen vraagt, zoals ook een leraar dat doen kan. De verkregen 'maps' kunnen daardoor gelden als beschrijving van het taalgebruik in zo'n onderwijssituatie. Dit geldt a fortiori voor de beschrijvingen door Kaper en Ten Voorde[37,100] die 'contexten' beschrijven op grond van uitspraken gedaan in een als onderwijs bedoelde situatie.
Wanneer een beschrijving van tussentalen wordt verlangd, die het mogelijk maakt deze talen te plaatsen in een mogelijke, in onderwijs te realiseren reeks, dan lijkt het gewenst dat de 'gemapte' uitspraken ook uit opzettelijk georganiseerde onderwijssituaties afkomstig zijn.

▸ *b) toestandsbeschrijving en procesbeschrijving*
Het afbeelden van redeneringen als 'paden' in een concept-map (Lybeck *et al.*[96]) suggereert een verklaring voor mijn (5.2.5 en 6, inleiding) conclusie dat een term pas zinvol wordt als knooppunt van associaties. Immers, een term zal een doorgaande redenering niet ondersteunen, tenzij die term als knooppunt van meer dan een enkele associatie functioneert. Deze manier van afbeelden lijkt ons daarom relevant.
In vergelijking tot andere onderzoekers valt op dat zo'n 'pad' een aspect van een redenering als gebeurtenis beschrijft, terwijl andere onderzoekers met behulp van een 'map' eerder een toestand weergeven. Deze bedoeling een toestand weer te geven is bijzonder duidelijk bij Novak, Pendley en Bretz[95] die het begin en eind van een leerproces vergelijken door voor beide momenten 'concept-maps' te vervaardigen. Weliswaar worden deze maps verkregen uit interviews, maar de gang van het interview als gebeurtenis verdwijnt in de beschrijving buiten beeld.
Hoewel de concept-maps van Novak, Pendley en Bretz[95] geen redeneringen beschrijven kan wel gezegd worden dat deze maps de *redeneermogelijkheden* beschrijven zoals die voor en na de cursus werden geconstateerd. De maps waren immers gebaseerd op gesprekken waar studenten tot redeneren werden aangezet. Strikt genomen moet dan het 'interview' zelf óók nog tot 'de cursus' gerekend worden omdat het niet uitgesloten is dat deelnemers tijdens het gesprek nog nieuwe redeneermogelijkheden ontwikkelen, daartoe aangezet door de gestelde vragen. Omdat we er niet van mogen uitgaan dat er geen leerproces meer gaande is, moeten we met 'toestand' dus een momentopname bedoelen (hier: aan het eind van het interview).

Kaper en Ten Voorde[37,100] beschrijven leerprocessen door aan te geven op welke wijze de 'wisseling van context' plaatsvindt, namelijk sluipend, expliciet of probleemstellend (zie 5.2.3). 'Context' beschrijft bij hen dus een toestand als momentopname.

▸ *c) interne versus externe norm*
Als een tweede verschil tussen Wilsons[94] werk en dat van Karpinski[93] wordt hier genoemd dat Wilson geprobeerd heeft om de kwaliteit van een taaluiting (hier de concept map zelf) te bepalen met behulp van eigenschappen van die uiting, in plaats van door te vergelijken met een als norm gehanteerde referentie-uiting. Door Wilson[94] genoemde eigenschappen waren: het aantal associaties tussen de gegeven 24 woorden en de al of niet "hiërarchische structuur" waarneembaar in de 'map'. Deze tweede eigenschap rust op een intuïtieve beoordeling door de onderzoeker van woord-betekenissen als meer of minder "abstract". Wilson[94] ontkomt hierdoor toch niet helemaal aan het hanteren van een externe referentie bij het beoordelen van de maps. Bijvoorbeeld, wanneer ze zegt dat het woord 'evenwichtsconstante' in sommige maps een "inappropriate dominance" heeft dan wijst die beoordeling toch op een vergelijking met een (impliciet gebleven) ideale map, waarin dit woord blijkbaar een minder grote dominantie heeft.
Novak, Pendley and Bretz[95] hebben hun conclusies, gezien de formulering van die conclusies, getrokken door toetsing van uitspraken van studenten aan gewenste uitspraken volgens het vak (externe norm). Hun conclusies zijn echter ook onafhankelijk van een externe norm te formuleren, wanneer we hun twee conclusies tot één samenvatten: uitbreiden van een taal vindt gemakkelijker of vaker plaats dan wijzigen van een taal. Zowel de studenten met "misconcepties" als de correct sprekende studenten hadden namelijk hun taal wel uitgebreid, maar niet gewijzigd, volgens de conclusies van Novak, Pendley and Bretz[95]. Ontwerpen van probleemstellend onderwijs maakt het nodig om een tussentaal volgens interne norm te kunnen beoordelen, immers: het is dan nodig om aan kenners van een tussentaal de beperkingen van deze taal te laten ervaren. Eerder werd getoond hoe moeilijk dit voor een onderwijzende kan zijn (5.2.1 t/m 5.2.4). Karpinski's[93] werkwijze, waarbij leerlingen als minder "coherent" worden beoordeeld, enkel omdat hun taal afwijkt van die in een leerboek, is dan onbruikbaar geworden. Kaper en Ten Voorde[37,100] constateren een "context" aan het onderling "kloppen" van relaties tussen woorden: een interne norm. Wanneer op deze manier diverse tussentalen elk als context (kloppende samenhang) zijn beschreven, dan is daarmee echter nog niet aangegeven hoe deze tussentalen zijn te plaatsen in een voor onderwijs geschikte reeks.

▸ *d) uitbreiden en wijzigen van taal*
Gezien de resultaten van Novak, Pendley and Bretz[95] (zie onder c) kan het belangrijk zijn om te onderscheiden tussen uitbreiden en wijzigen van een taal. Dit onderscheid wordt door Lybeck's[96] (*et al.*) werkwijze onzichtbaar gemaakt. Doordat schijnbare tegenstrijdigheden tussen uitspraken van verschillende studenten worden weggeïdealiseerd kan men slechts taaluitbreidingen afbeelden, geen taalwijzigingen.
Omdat een dergelijke idealisatie bij hen ontbreekt zouden de door Karpinski[93], Wilson[94] of Novak (*et al.*)[95] verkregen maps wel geschikt kunnen zijn om zowel uitbreiding als wijziging van individueel taalgebruik op te merken. Wilson[94] bijvoorbeeld bespreekt verschillen in inhoud en structuur van de maps, nadat eerst deze verschillen door kwantitatieve analyse waren afgebeeld in een driedimensionale ruimte. Wanneer op deze wijze een reeks

momentopnamen gemaakt zou worden, dan zou een wijziging in het taalgebruik zichtbaar worden als een verschuiving in een of meer dimensies.
Kaper en Ten Voorde[37,100] zijn in hun werkwijze er op gericht, een scherp onderscheid tussen uitbreiding en wijziging van een taal mogelijk te maken, door het voorkomen van schijnbaar strijdige beweringen op te vatten als aanwijzing voor iets dat geen 'uitbreiding' te noemen is, namelijk voor wat zij noemen een 'contextwisseling'. Kaper en Ten Voorde[37,100] gebruiken evenals Wilson[94] een geconstateerde consequentheid in de uitspraken van deelnemers*) om te komen tot een reductie van het aantal te beschrijven 'talen' d.i. van het aantal te beschrijven relevante taalverschillen tussen deelnemers. Zo konden diverse veranderingen in het gebruik van de woorden 'stof', 'reactie', 'molecuul', 'atoom' in een onderwijstekst worden teruggevoerd op één contextwisseling, dat wil zeggen op een verschil tussen slechts twee contexten+), die ieder op zich als consequent konden worden opgevat[37]. Ook konden twee gesprekssituaties in groepen leerlingen waarin zich onderlinge misverstanden voordeden elk worden beschreven met behulp van een verschil tussen twee contexten[100], waarbij opnieuw schijnbare inconsequentheden werden gebruikt als aanwijzing voor een 'contextwisseling'.
Kaper en Ten Voorde[37,100] verschillen van Wilson[94] hierin dat zij verschillen in woordgebruik tussen leerlingen beschrijven met een klein aantal 'contexten' die als *discrete* entiteiten worden besproken. Bij Wilson worden de verschillen tussen leerlingen beschreven met een beperkt aantal dimensies die elk worden voorgesteld door een *continue* schaal. Net als bij Kaper en Ten Voorde[37,100] gebruikt Wilson een bij leerlingen opgemerkte consequentheid ("systematische verschillen") om tot een reductie van het aantal te beschrijven verschillen te komen. De keuze twee woorden A en B te verbinden is blijkbaar *niet onafhankelijk* van de keuze de woorden X en Y te verbinden, indien A, B, X en Y staan voor betekenisvolle woorden uit een (vak)taal. De reductie van 276 tot 3 variabelen is volgens dit standpunt te interpreteren als het constateren van drie onafhankelijke keuzen die leerlingen blijkbaar gemaakt hebben, die tezamen hun 'map' in hoofdzaak bepalen. Het niet-onafhankelijk zijn van de diverse associaties tussen woorden betekent dus dat leerlingen op één of andere wijze consequent zijn geweest. Uit het feit dat toch 3 of meer onafhankelijke variabelen uit de datareductie tevoorschijn kwamen blijkt, dat leerlingen niet alle op dezelfde manier consequent waren, maar dat er aan hun uitingen (minstens) 3 onafhankelijke keuzen ten grondslag kunnen worden verondersteld. Het continue karakter van de drie schalen is volgens deze interpretatie te begrijpen doordat elk van de drie keuzen in meer of mindere mate kan zijn uitgewerkt (uitgebreidheid) of doordat een keuze meer of minder

---

(* Gemakshalve wordt de onderwijstekst hier ook tot de 'deelnemers' gerekend. Immers ook deze 'deelnemer' vertoont een ontwikkeling/verandering in zijn taal, gedurende de opeenvolging van lessen, welke ontwikkeling met termen als 'uitbreiding' en 'wisseling van context' te beschrijven is.

(+ Wordt ook het woord 'ionen' in de beschouwing betrokken, dan is het mogelijk dat er drie talen onderscheiden moeten worden, aangezien het gebruik van het woord 'ionen' in samenhang met 'vaste zouten' verschilt van het gebruik van 'ionen' in verband met 'electrolyt oplossingen'. Zie Kaper en Ten Voorde[37], bladzijde 13, 17 en 22-23. Deze kwestie werd destijds niet nader besproken omdat de vraagstelling meer gericht was op de *aanpak* bij het wisselen van context, en minder op de vraag welke context-individuen we minimaal nodig hebben om het gebeuren te beschrijven.

consequent kan zijn uitgewerkt.*) Enigszins speculatief verder redenerend zouden er dan bijvoorbeeld 8 (=2^3) kwalitatief verschillende 'contexten' in de uitspraken van deze populatie aan te treffen zijn, die elk in meerdere of mindere uitgebreidheid gerealiseerd kunnen zijn.
Op deze wijze lijkt het mogelijk de analysemethoden en van Kaper en Ten Voorde[37,100] en van Wilson[94] met elkaar in verband te brengen. Een verschil blijft dat Kaper en Ten Voorde[37,100] 'samenhang' tussen uitspraken opmerken door inhoudelijk de uitspraken te interpreteren, terwijl Wilson[94] 'samenhang' indirect constateert, via de statistische eigenschappen van een groot aantal uitingen, waarbij tijdelijk van de inhoud wordt afgezien.

Conclusies
Ten aanzien van de verschillende werkwijzen die in de literatuur gevonden zijn bij het 'mappen' van uitspraken van leerlingen zijn inmiddels de volgende keuzen gemotiveerd:

a▸ Om een beschrijving van tussentalen te verkrijgen die het mogelijk maakt deze talen te plaatsen in een mogelijke, in onderwijs te realiseren reeks, wordt gekozen de af te beelden uitspraken in opzettelijk georganiseerde onderwijssituaties te verzamelen.

b▸ Omdat we gericht zijn op het ontwerpen van een leerproces wordt het afbeelden van redeneringen als 'paden' in een map verkozen boven het afbeelden van vrije associaties.
Om tot een beschrijving te komen die het mogelijk maakt tussentalen te plaatsen in een reeks is het nodig de concept-map op te vatten als een momentopname van een doorgaand proces.

c▸ Om de overgang van een tussentaal naar een volgende op probleemstellende wijze te kunnen ontwerpen is het gewenst talen ook te kunnen bespreken in termen van hun eigen kwaliteiten, zonder verwijzing naar een externe norm.

d▸ Het onderscheid tussen 'uitbreiden' en 'veranderen' van een taal wordt belangrijk gevonden. Zo'n onderscheid lijkt mogelijk door te letten op de consequentheid, dat wil zeggen op de onderlinge afhankelijkheid van gelegde relaties. We verwezen naar een statistische en een interpreterende werkwijze om zulke 'afhankelijkheid' te constateren.

6.3. Bruikbaarheid 'concept mapping' voor onderwijs ontwerpen

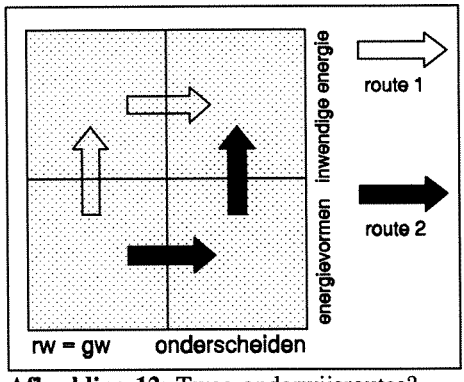
Eerst wordt getoond dat het zoeken naar een klein aantal onafhankelijke keuzen die het spreken over een ervaringsdomein bepalen[94,37,100], relevant kan zijn voor het ontwerpen van onderwijs (6.3.1). Daarna wordt ingegaan op het ontwerpen van een netwerk van relaties (6.3.2).

(* De drie variabelen beschreven tezamen 50% van de "variantie".
Dit betekent dat er nog ruimte is voor a) een vierde, vijfde etc. onafhankelijke variabele of b) toeval, d.w.z. niet als 'consequent' op te vatten aspecten van de maps.

6.3.1. (on)afhankelijke keuzen

In hoofdstuk 3 is een onderwijsontwerp geschetst waarin eerst een term 'waarde' ontstaat die zowel de betekenissen van 'ruilwaarde' als 'gebruikswaarde' omvat, naar aanleiding van ervaringen met mechanische veranderingen. Worden vervolgens temperatuurveranderingen en chemische veranderingen in de beschouwing betrokken, dan kan dit aanleiding zijn 'ruilwaarde' te gaan onderscheiden van 'gebruikswaarde': een keuze (taalverandering ii. uit 5.5, Tabel IX). Als we ons nu afvragen hoe deze keuze te combineren is met de overgang van 'energievormen' naar 'inwendige energie' (taalverandering i. uit 5.5) dan doen zich de volgende mogelijkheden voor.

- Het lijkt mogelijk eerst 'ruilwaarde' (de minder dogmatische variant van 'energievormen') in een aantal stappen te ontwikkelen tot 'inwendige energie' en pas daarna een onderscheid te maken tussen 'energie' en 'gebruikswaarde', of een kwantitatieve variant daarvan: vrije energie. Deze volgorde - eerst de eerste hoofdwet dan pas de tweede - is gebruikelijk (route 1).
- In hoofdstuk 3 werd getoond dat het primitievere woordenpaar 'ruilwaarde' versus 'gebruikswaarde' kans biedt om een aspect van de tweede hoofdwet al veel eerder aan de orde te stellen, namelijk voordat de ontwikkeling van 'ruilwaarde' naar 'inwendige energie' zich heeft voltrokken (route 2).



Afbeelding 12: Twee onderwijsroutes?

We zouden hier dan te maken hebben met twee keuzen:

- 'gebruikswaarde' al dan niet onderscheiden van 'ruilwaarde'/'energiewaarde'[*)]
- keuze voor totale 'inwendige energie' versus afzonderlijke 'ruilwaarden' per variabele[+)] (energievormen).

Deze twee keuzen zijn wellicht in die zin 'onafhankelijk' te noemen dat zij, afhankelijk van de volgorde waarin deze keuzen worden gemaakt, vier verschillende (tussen)talen mogelijk maken, waardoor de twee routes die ik net noemde beschrijfbaar zouden worden. Afbeelding 12 symboliseert deze suggesties.

Inmiddels is echter de taalverandering van 'ruilwaarden' (of energievormen) naar 'inwendige energie' nader beschreven als een opeenvolging van enkele taalveranderingen. In hoofdstuk 2 werd getoond hoe een keuze voor 'niet-constante capaciteiten'[#)] nodig is om te komen tot inwendige energie als zijnde niet in energievormen op te splitsen. Door deze samenhang tussen beide keuzen meende ik aanvankelijk dat beide keuzen tot één context-

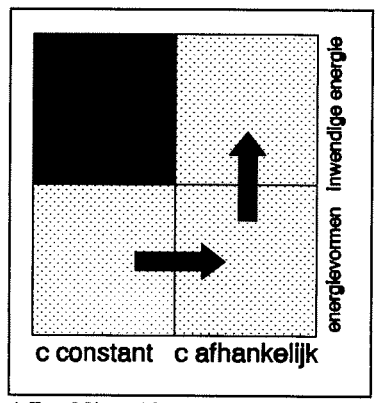
---

(* Eén van twee is van toepassing, afhankelijk van de andere te maken keuze. Vergeleken met 'gebruikswaarde' geven de termen 'ruilwaarde' en 'energiewaarde' eenzelfde interessegebied aan: 'energiewaarde' is een meer geavanceerde vervanger voor 'ruilwaarde'.

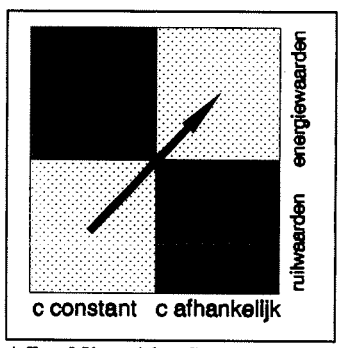
(+ Deze 'ruilwaarden' zijn al of niet vereenzelvigd met 'gebruikswaarden', afhankelijk van de andere gemaakte keuze.

(# De keuze voor $C(\nu) = E'(\nu)$ in plaats van $C = \Delta E/\Delta\nu$ (is constant).

wisseling te rekenen zijn. Tijdens het onderwijs zag ik echter dat men kan werken met capaciteiten als functie van de eigen variabele, en toch zonder inconsequentheden over energievormen blijven spreken.
Het bleek dus om twee keuzen te gaan, die in zekere zin onafhankelijk zijn. Hieruit trok ik de conclusie dat de keuze voor niet-constante capaciteiten een tijd lang apart de aandacht van studenten moet krijgen (5.3.6), zodat dit stuk onderwijs in twee perioden georganiseerd werd, in een beargumenteerde volgorde (Afbeelding 13).
Deze twee keuzen zijn afhankelijk in de zin dat de tweede keus pas mogelijk is na de eerste. Ze zijn onafhankelijk in de zin dat de eerste keus op zichzelf nog geen motivering oplevert voor de tweede. We spreken hier daarom van half-afhankelijke keuzen.



Afbeelding 13: half-afhankelijke keuzen



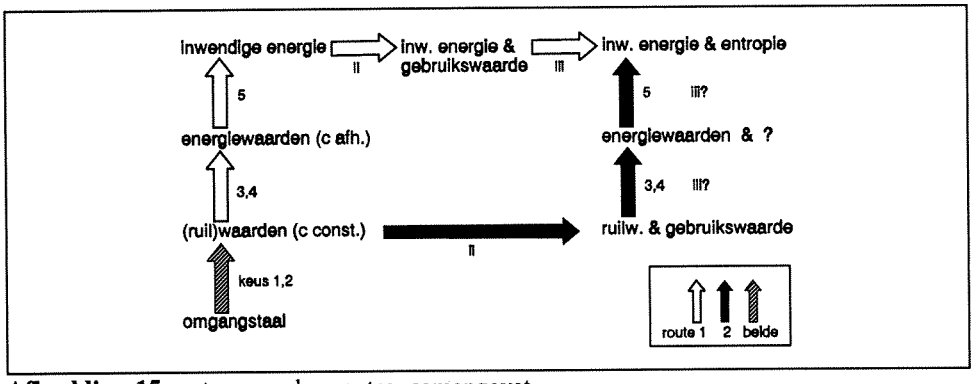
Afbeelding 14: afhankelijke keuzen

In 5.3.6 werd ook beargumenteerd dat een keuze voor 'energiewaarden' per energievorm gemotiveerd kan worden na het opmerken van een niet-constante capaciteit.
Een andere motivering is vooralsnog onbekend. Omgekeerd wordt de keuze voor 'niet-constante capaciteit' beter hanteerbaar na keuze voor 'energiewaarden' (5.3.6). Ze levert dus een motivering voor deze tweede keus. Beide keuzen zijn dus afhankelijk, in de zin dat de ene keuze de andere met zich meebrengt. Deze voor ontwerpen interessante mogelijkheid (5.3.6)is schematisch weer te geven zoals in Afbeelding 14. Een 'tussentaal' zou dan ontbreken.

We hebben nu dus drie mogelijkheden gezien waarop contextkeuzen kunnen samenhangen: ze kunnen onafhankelijk zijn, half-afhankelijk of afhankelijk. Twee afhankelijke keuzen beschrijven één verandering van taal, omdat er in zo'n geval geen 'tussentaal' is die voldoet aan de eis dat ze enige tijd zinvol gebruikt wordt (1.2).

Met betrekking tot de verschillende 'taalveranderingen' genoemd in 5.5 kunnen we nu de volgende conclusies trekken:
- Keuzen 1 en 2 zijn afhankelijk te noemen. Weliswaar moet 1 vooraf gaan aan 2 (5.4.2), maar keuze 1 blijft zinloos als 2 er niet direct na volgt. De mogelijkheid van een keuze 2 wordt dus al vermoed (op basis van de geconstateerde constante verhoudingen, zie 5.3.6).
- Keuzen 3 en 4 zijn vermoedelijk afhankelijk te noemen (Afbeelding 14).
- De keuzen 1 en 2 zijn nodig om keuzen 3 en 4 zin te geven, maar niet andersom, dus een tussentaal bepaald door 1+2 gaat vooraf aan keuzen 3 en 4 (halve afhankelijkheid)
- Keuzen 3 en 4 zijn nodig om keuze 5 zin te geven, maar niet andersom, dus een tussen-

taal bepaald door 3+4 gaat vooraf aan die keuze 5.
▸ Keuze i, nader te ontleden in keuzen 3 t/m 5 leek tot nu toe onafhankelijk van keuze ii., dus de gewenste combinatie van keuzen (i. èn ii.) zou zowel via een tussentaal bepaald door i maar nog niet door ii. als via een tussentaal bepaald door ii. maar nog niet door i bereikbaar zijn: route 1 respectievelijk route 2.
▸ Keuze iii ontleent zijn zin aan het zoeken naar een maat voor gebruikswaarde (keuze ii), maar deze keuze leidt niet vanzelf tot een analogieredenering, dus een tussentaal bepaald door keuze ii gaat vooraf aan keuze iii.



Afbeelding 15: ontworpen leerroutes, samengevat

Deze conclusies zijn samengevat in Afbeelding 15. Bovenstaande conclusies laten - zoals getoond - nog verschillende mogelijkheden open met betrekking tot de plaats van keuze iii in route 2.
Route 2 heeft onze voorkeur, omdat langs deze route de aandacht langer gericht blijft op de vraag naar praktische gebruiksmogelijkheden, waarbij een (onpraktische) vereenzelviging van inwendige energie met gebruikswaarde wordt voorkomen, in plaats van achteraf ter discussie gesteld. Op deze wijze kan het onderwijs in het begin (VWO) dichter bij de dagelijkse ervaring blijven (zie 3.8). Toch is ten behoeve van de onderwijsexperimenten, die zich beperkten tot het WO, gebruik gemaakt van route 1, omdat deze route beter aansloot bij hoorcollege en studieboek.
Overwegingen met betrekking tot mogelijke volgorden van taalveranderingen, zoals hier gepresenteerd, hebben dus een praktische rol gespeeld bij het ontwerpen en organiseren van het experimentele onderwijs.

> *Een grofmazige planning van onderwijs is bespreekbaar te maken door een tussentaal te kenmerken door een opeenvolging van keuzen, via welke deze tussentaal (in probleemstellend onderwijs) naar verwachting bereikt worden kan.*

Bij een meer fijnmazige planning van onderwijs kunnen de verschillende woorden en hun associaties aparte aandacht krijgen.

6.3.2. Een netwerk van associaties ontwerpen*)

Elk van de tussentalen in het ontworpen schema (Afbeelding 15) is nader te ontwerpen door woorden te noemen die naar verwachting een rol kunnen spelen, en door verwachte associaties tussen deze woorden te specificeren. Immers het idee een tussentaal te karakteriseren door enkele (on)afhankelijke keuzen kwam voort uit de verwachting dat het samen voorkomen van woorden in uitspraken op een of andere wijze consequent of samenhangend zal zijn[94,37,100]. In eerdere hoofdstukken hebben we ons al door fysische argumenten verzekerd van de samenhang van de ontworpen tussentalen. Het komt er nu alleen op aan na te gaan, of 'concept mapping' een bruikbare manier is om de samenhang te beschrijven, waarvan we ons eerder al overtuigden.
Om de bruikbaarheid van 'concept mapping' na te gaan stel ik voor nog eens terug te keren naar de fysische argumenten die kunnen leiden tot de 'ruilwaarden' tussentaal (dus tot keuze 1 en 2 uit Afbeelding 15), maar nu met de bedoeling daarbij te letten op de bedoelde termen en hun relaties.+)

Scharf[102] heeft eens gewezen op de bijzondere moeilijkheid in chemieonderwijs het woord 'omzetting' betekenis te geven. Leerlingen en leken spreken enerzijds van "vernietiging", wanneer ze bijvoorbeeld een voorwerp zien verbranden, anderzijds van "reiniging", wanneer ze opnieuw koper zien verschijnen bij reactie van koperoxide met methanol.#) In de eerste formulering ontbreekt het constant blijvende (wat we in de chemie wel kennen: de elementen, de massa), in de tweede formulering ontbreekt de verandering (wat we noemen: het verdwijnen van 'koperoxide' en opnieuw ontstaan van de stof 'koper').
Scharf[102] interpreteert dit onderwijsprobleem als volgt. Bij het aanleren van de omgangstaal worden 'dingen' benoemd op basis van herkenning van hun constant blijvende eigenschappen. In de chemie zijn het echter niet de waarneembare eigenschappen die constant blijven. Het constante is in de chemie volgens Scharf alleen te vinden "in structuren en relaties".
Daarbij gaat het om "relaties" van de vorm: als een groep eigenschappen genoemd 'A' ontstaat, dan verdwijnen de groepen eigenschappen genoemd 'B' en 'C'.&) De betekenis van de naam 'A' is daarbij bepaald door deze relaties. Immers 'water' hoeft niet vloeibaar te zijn en hoeft geen dichtheid van 1,0 kg/liter te hebben. Wel heeft 'water' steeds de eigenschap dat het kan verdwijnen waarbij de stoffen 'waterstof' en 'zuurstof' ontstaan. Elementnamen maken het mogelijk een structuur in zo'n web van relaties tussen stofnamen te formuleren (Ten Voorde[35], Vogelezang[103], De Jong[104]).

(* Met 'ontwerpen' wordt aangegeven dat een onderwijsexperiment nodig is om te zien inhoeverre het ontwerp zich laat realiseren.

(+ Wanneer fysische argumenten de hoofdrol spelen, houd ik vast aan het in de fysica gebruikelijke intuïtieve gebruik van de woorden 'term' en 'relatie'. Zodra het erop aankomt didactische conclusies te trekken vervang ik voorzichtigheidshalve 'term' door 'woord' en 'relatie' door 'associatie' om te voorkomen dat de kwaliteit van 'vakterm' wordt toegedicht voordat we netjes kunnen omschrijven wat we daarmee bedoelen (inleiding hoofdstuk 6).

(# Het koperoxide was blijkbaar in het bijzijn van leerlingen geprepareerd uit koper en een oxidatiemiddel.

(& Vergelijk Mach[63], geciteerd in paragraaf 2.7.

Op overeenkomstige wijze is ook 'energie' niet herkenbaar aan bepaalde constant blijvende eigenschappen. Wel kan 'energie', of in een eerder stadium 'ruilwaarde', betekenis krijgen ter beschrijving van relaties tussen veranderingen. Bekijken we bijvoorbeeld de verhouding tussen de temperatuurveranderingen voor twee voorwerpen in contact met elkaar, dan vinden we voor een paar voorwerpen (A, B) een bepaalde verhouding:

$$(\theta_{begin,A} - \theta_{eind,A}) : (\theta_{eind,B} - \theta_{begin,B}) = C_1 : C_2$$

De gevonden verhoudingsgetallen C_1 en C_2 zijn los van elkaar niet betekenisvol. Tezamen zijn ze een eigenschap van het voorwerpen*paar* (A, B), niet van één van beide voorwerpen afzonderlijk. Pas wanneer een derde voorwerp C in het onderzoek wordt betrokken kan men een reden vinden om capaciteits-waarden aan *voorwerpen* te gaan toeschrijven.*) Er blijkt dan bijvoorbeeld:

$$(\theta_{begin,B}' - \theta_{eind,B}') : (\theta_{eind,C}' - \theta_{begin,C}') = C_3 : C_4$$
$$(\theta_{begin,A}'' - \theta_{eind,A}'') : (\theta_{eind,C}'' - \theta_{begin,C}'') = C_5 : C_6$$

De vraag kan dan gesteld worden of er een verband bestaat tussen deze drie relaties, zodat men uit twee van de drie, de derde zou kunnen voorspellen. Er kan dan worden gevonden dat

$$C_5 : C_6 = \frac{C_1}{C_2} : \frac{C_A}{C_3}$$

Deze relatie maakt het zinvol te kiezen+): $C_1 = C_4$ omdat deze beide C-waarden betrokken kunnen worden op voorwerp B. Immers als we kiezen $C_1 = C_4$, dan vinden we ook $C_5 = C_3$ en $C_6 = C_2$, zodat we kunnen zeggen dat de waarde C_1 ($=C_4$) steeds terugkeert als sprake is van voorwerp B, terwijl C_3 ($=C_5$) steeds terugkeert als sprake is van voorwerp C en C_2 ($=C_6$) als sprake is van voorwerp A.
Pas dan hebben we een reden te schrijven:

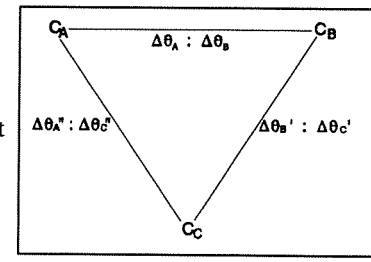
$$\Delta\theta_A : -\Delta\theta_B = C_B : C_A$$

en dus ook:

(* Deze structuur hoorde ik eerder in De Jongs[104] beschrijving van zijn onderwijsontwerp: Ervaring met twee verschillende reacties kan tot het vermoeden leiden dat een stoffen*paar* gekenmerkt kan worden door een verhouding (De Jong[104], p.39). Een derde reactie (p.40) blijkt vervolgens nodig om leerlingen te overtuigen dat men de verhoudingsgetallen ook los van dit specifieke *paar* mag toeschrijven aan de stof*individuen*.

(+ Deze keuze leidt tot c-waarden als *capaciteiten*, dat wil zeggen tot factoren waarmee men de verandering $\Delta\theta$ moet vermenigvuldigen om gelijke ruilwaarden te krijgen. Een alternatieve keuze is: $C_2 = C_3$ waarna beide betrokken kunnen worden op voorwerp B. Immers als we kiezen $C_2 = C_3$, dan vinden we ook $C_5 = C_1$ en $C_6 = C_4$, zodat we kunnen zeggen dat de waarde C_2 ($=C_3$) steeds terugkeert als sprake is van voorwerp B, C_1 ($=C_5$) keert terug als sprake is van voorwerp A en C_4 ($=C_6$) keert terug als sprake is van voorwerp C. De zo verkregen C-waarden zijn dus eveneens voorwerpseigenschappen. Het zijn geen capaciteiten maar reciproken van capaciteiten: om gelijke ruilwaarden te krijgen moet men erdoor delen, in plaats van ermee te vermenigvuldigen.

$$C_A.\Delta\theta_A = -C_B.\Delta\theta_B \quad \text{of} \quad R(\Delta\theta_A) = -R(\Delta\theta_B)$$



Het wordt dan mogelijk om een gelijke ruilwaarde toe te schrijven aan beide veranderingen, waarbij de ene ruilwaarde geheel betrekking heeft op het gebeuren met voorwerp A, het andere op het gebeuren met voorwerp B.

De voorwerpseigenschappen C_A, C_B en C_C ontstaan dus als termen die in een net van relaties van minimaal drie termen betekenis kunnen hebben.

Het overgaan van een paareigenschap op een voorwerpseigenschap is een kwestie van economie: het is minder werk 5 voorwerpen elk van een waarde te voorzien, dan om dit te doen voor de 5x4/2=10 mogelijke paren die deze voorwerpen kunnen vormen. Dit voordeel van een voorwerpseigenschap boven een *paar*eigenschap wordt pas merkbaar vanaf 4 voorwerpen.
Op eenzelfde wijze zouden naast ruilwaarden van temperatuur ook aparte relatienetten voor 'ruilwaarde van hoogte' en 'ruilwaarde van snelheid-kwadraat' gevormd kunnen worden. Uit botsingsproeven kan men vinden:

$$\Delta(v^2)_A : -\Delta(v^2)_B = m_B : m_A \quad \Rightarrow \quad R(\Delta(v^2)) = m.\Delta(v^2)$$

en uit proeven met gewichten aan katrollen:

$$\Delta h_A : -\Delta h_B = m_B : m_A \quad \Rightarrow \quad R(\Delta h) = m.\Delta h$$

Dergelijke afzonderlijke systemen van ruilwaarden hebben in het verleden inderdaad bestaan voor de variabelen temperatuur ('warmte') en voor snelheid-kwadraat ('vis viva'). Zou men deze verschillende relatienetten nu onderling willen verbinden, dan zou het probleem dat we daarnet bij twee voorwerpen zagen zich opnieuw voordoen, maar nu tussen twee ruilwaarde-soorten.
Tussen twee ruilwaardesoorten vinden we dan immers een verhouding die in eerste instantie te zien is als eigenschap van dat *paar*, bijvoorbeeld tussen warmte $mc\Delta\theta$ en hoogte-ruilwaarde $m.\Delta h$ kan men vinden:

$$C_A.\Delta\theta_A : -m_B.\Delta h_B = 1 \text{ calorie} : (0{,}426 \text{ kg m}).r^{*)}$$

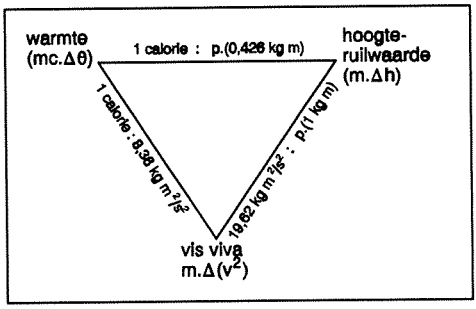
ongeacht de keuze van de voorwerpen A en B. De gevonden verhouding is echter nog wel specifiek voor dit ruilwaardesoorten-paar. Ook hangt ze enigszins af van de plaats op aarde. Deze invloed van plaats kan strikt genomen niet bij één van beide ruilwaardesoorten gelokaliseerd worden zonder een derde ruilwaardesoort in de beschouwing te betrekken.

Net als eerder tussen drie voorwerpen, kunnen we nu drie verhoudingen bepalen voor drie

*) In deze formule is r een constante die enigszins afhangt van de plaats op aarde. In bovenstaande formule is uitgegaan van r=1 in Amsterdam.

ruilwaardesoort-paren.
Omdat de drie gevonden verhoudingen voldoen aan

$$C_5 : C_6 = C_1/C_2 : C_4/C_3$$



is het mogelijk om equivalentiewaarden toe te schrijven per ruilwaardesoort: Zo kan de equivalentiewaarde 8,36 kg m^2/s^2 karakteristiek genoemd worden voor 'vis viva' (mv^2), 1 calorie voor 'warmte' en (0,426 kg m).r voor ruilwaarde van hoogte. Men krijgt algemeen bruikbare ruilwaarden door deze ruilwaarden, die elk aan een ervaringsdomein (bijv. hoogteveranderingen) zijn gebonden, te delen door hun 'equivalentiewaarden'. Hierbij ontstaan ruilwaarden die alle in dezelfde eenheid worden uitgedrukt (Tekstkader 1).

Omdat de 'equivalentiewaarden' verhoudingswaarden zijn mag men ze met gekozen constanten vermenigvuldigen, zoals hieronder is gedaan:

Ruilwaardesoort	equivalentiewaarden			
	set 0	set 1	set 2	set 3
van hoogte: $m.\Delta h$ van v^2: $m.\Delta v^2$ van temp.: $mc.\Delta\theta$	r.0,426 kg.m 8,36 J 1 cal.	r.0,426 kg m cal^{-1} 8,36 J cal^{-1} 1	r.0,0510 $m^{-1}s^2$ 1 0,119 cal J^{-1}	r.1 19,26 $m.s^{-2}$ 2,35 $cal.kg^{-1}m^{-1}$

(J staat als afkorting voor kg m^2s^{-2}).

Gebruik van de equivalentiewaarden uit set 1 leidt tot 'calorieën' als algemeen bruikbare eenheid van ruilwaarde, set 2 leidt tot halve 'Joules' en set 3 leidt tot kilogram-meters (vergelijkbaar met de "ponden water (..) over één engelse voet geheven" uit Carnot[78], p.175).
Men kan de tabel ook zo lezen dat telkens de ruilwaardesoort met equivalentiewaarde 1 als norm is verkozen voor wat we bedoelen met 'energie'. Bij keuze van set 3 wordt energie gezien als bij uitstek meetbaar via $\Delta h.m/r$ ($F.\Delta s$). Bij gebruik van set 2 wordt energie gedefinieerd via $m.\Delta(v^2)$ en bij gebruik van set 1 via $mc.\Delta\theta$. De voor en nadelen van de verschillende eenheden en de meet-standaarden die ze impliceren zouden vervolgens besproken kunnen worden.
Men ziet dat zonder enig beroep op de Newtonse mechanica, puur door hanteren van 'ruilwaarden', men toch zeer dicht bij de 'Joule' als eenheid kan komen. Men blijft echter een factor 2 ervan verwijderd.

Tekstkader 1: mogelijkheden bij het kiezen van een eenheid

De hierboven geschetste ontwikkeling verschilt van die geschetst in hoofdstuk 2 doordat nu eerst alleen veranderingen van hetzelfde type (bijv. alleen temperatuurveranderingen) met elkaar in verband worden gebracht.
Hierdoor verloopt de ontwikkeling van ruilwaarden in twee stadia, waarbij eerst specifieke ruilwaarden per verschijnsel worden ontwikkeld, en pas later meer algemene. Een kortere route, geschetst in hoofdstuk 2, wordt mogelijk als we eerst veranderingen van verschillend type met elkaar in verband brengen. De ruilwaarden van verschillende variabelen worden dan meteen op elkaar afgestemd. Gebeurtenissen waarbij twee variabelen van hetzelfde type betrokken zijn, laten zich met deze 'afgestemde' ruilwaarden even goed

beschrijven als met de niet-afgestemde. De geschetste geleding in twee stadia is dus overbodig. Hieruit blijkt dat een route die (in grove trekken) met de historische route overeenkomt wel een mogelijke en ook een probleemstellende route te noemen is, maar dat dit niet de meest efficiënte route hoeft te zijn.
Bovenstaande beschouwing - een didactische reconstructie van de historische begripsontwikkeling - toont echter een belangrijke 'didactische eigenschap' van *verhoudingen*, namelijk:

> *Het toekennen van verhoudingswaarden aan individuen wordt pas betekenisvol wanneer tenminste drie individu-namen met elkaar worden geassocieerd.*

Hierboven zagen we dit tweemaal, namelijk eenmaal voor voorwerp-individuen en eenmaal voor ruilwaardesoort-individuen.[*)]

Pas in zo'n samenhang namelijk kan worden opgemerkt dat de drie *associaties* (hier: verhoudingen) tussen de drie *woorden of symbolen* (hier: individu-namen) op een bijzondere wijze met elkaar *kloppen*, waardoor het mogelijk wordt de individuen te kenmerken door verhoudingswaarden. Die verhoudingswaarden, als eigenschappen van de individuen, ontlenen hun betekenis aan dit kloppende *netwerk van associaties* waarin ze staan: hun *'context'* [37,100].

Hoewel dus een probleemstellende onderwijsroute naar energie niet via de twee stappen hoeft te verlopen die ik hierboven schetste, dient wel voldaan te worden aan de hierboven genoemde didactische eigenschap van verhoudingen. Deze eigenschap geeft aan hoe, in geval van verhoudingen, voldaan kan worden aan de (minder sterke) eis dat een "term" pas "als knooppunt van enkele relaties" zinvol wordt (5.3.3).
Omdat mijn studenten 'energievormen' al in het VWO onderwezen hebben gekregen, achtte ik het niet mogelijk om de ontworpen (2.8.1, 5.3.4) stap naar energievormen met hen uit te proberen. Om deze reden is in mijn onderwijsontwerp de driehoek van associaties die nodig zou zijn om 'ruilwaarde' op probleemstellende wijze te laten *ontstaan* dan ook niet terug te vinden. Wel wordt voor twee van de drie knooppunten het functioneren "als knooppunt" gecontroleerd, op de wijze zoals werd aangegeven in 5.3.3 (zie Afbeelding 16).

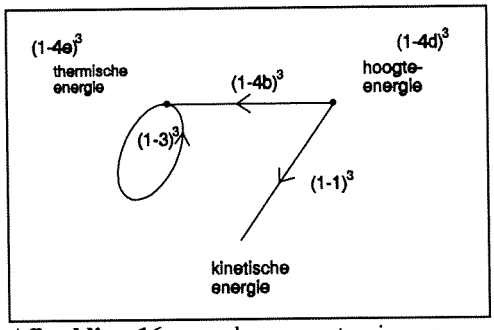
Doordat bij opgave 1-1[3] al uitgegaan werd van de aangeleerde energievormen, is het aantal mogelijkheden waaruit men de kans krijgt te kiezen zo klein (vergelijk tekstkader 1), dat de 'Joule' al na controle van één knooppunt als beste mogelijkheid overblijft. Controle van het tweede knooppunt bevestigt deze keuze alleen maar. Bij afwezigheid van voorkennis zou elk van de drie knooppunten nodig zijn om tot een beargumenteerde keuze te komen, zoals zojuist werd beredeneerd.

We zagen hierboven dat het ontwerpen van woord- of symboolgebruik volgens een 'net-

---

[*)] Dat deze didactische eigenschap van verhoudingen bovendien ook geldt bij het komen tot chemische stof-individuen, kan men zien in het werk van De Jong[104] (voetnoot, bladzijde 149).

werk van associaties' leidde tot een vermoeden van een didactische generalisatie met betrekking tot 'verhoudingen'. Deze generalisatie leidde tot een argumentatie voor een probleemstellende onderwijsopzet op weg naar 'ruilwaarde'. Uitproberen van deze opzet vereist een onderwijsexperiment in het VWO.



Afbeelding 16: twee knooppunten in een netwerk van associaties

6.4. Conclusie

De diverse technieken die in de literatuur met 'concept mapping' worden aangeduid hebben gemeen dat er gelet wordt op *associaties*, dat wil zeggen op het niet-toevallig samen voorkomen van paren woorden (of symbolen)*) in uitingen. Hierbij wordt doorgaans afgezien van details van de formulering die beide woorden verbindt.
Ook wordt afgezien van de rol die ervaringen kunnen spelen in wat we noemen de betekenis van een woord. Dit laatste betekent bijvoorbeeld dat 'concept mapping' geen onderscheid kan maken tussen associaties die op napraten berusten+) (Sutton[101], geciteerd in 6.2 onder a) en 'relaties' die een aantal ervaringen samenvatten, zoals dat het geval was voor de relaties ontworpen in 6.3.2. Met 'relatie' bedoelen we dus kennelijk een associatie die aan nog enige extra voorwaarden voldoet. Concept-mapping biedt echter geen kader om die extra voorwaarden te formuleren.

> *Gezien het belang van een naar ervaringen verwijzende betekenis (5.2.2, 5.3.1) kan met deze beperking geen genoegen worden genomen.*

Ondanks deze beperking hebben we op de volgende manieren gebruik kunnen maken van inzichten ontleend aan 'concept mapping' bij het komen tot een nadere beschrijving van eerder ontworpen tussentalen:

- De opmerking, afkomstig uit statistisch onderzoek, dat het samen noemen van woorden A en B *niet onafhankelijk* is van het samen noemen van woorden C en D leidde ertoe een tussentaal te zien als zijnde bepaald door een klein aantal *keuzen*. De statistisch gevonden afhankelijkheid verklaren we dus door te veronderstellen dat deelnemers op één of andere wijze consequent zijn. Het classificeren van zulke keuzen als afhankelijk, half-afhankelijk of onafhankelijk leidde tot een overzichtelijke beschrijving van de tot nu toe ontworpen stappen, en tot een beperking van het aantal te onderscheiden tussentalen (door te letten op afhankelijke keuzen, zie Afbeelding 14).
- Het letten op de associaties, nodig om een uitdrukking (o.a. 'warmtecapaciteit van voorwerp A') betekenis te geven, leidde tot het ontwerpen van een minimaal netwerk van associaties, waarbuiten we ons de gewenste betekenis niet kunnen voorstellen. De

---

(* Gemakshalve zal ik de toevoeging 'of symbolen' vanaf nu weglaten.
(+ eventueel op foutief napraten, vergelijk 5.2.1 de associatie van "adiabatisch" met "geen arbeid".

getrokken conclusie kon gegeneraliseerd worden naar die gevallen waar we *verhoudingswaarden* aan *individuen* (voorwerpen, energievormen, stoffen) willen toekennen.

Bij elk van deze conclusies moet een opmerking worden gemaakt.
Het feit dat we bij het beredeneren van de didactische eigenschap van verhoudingen gebruik maakten van het woord 'relatie' in plaats van 'associatie' wijst erop dat hier in de fysische argumentatie nog didactische argumenten verscholen kunnen liggen. Immers we maakten gebruik van een woord waarvan de betekenis gedeeltelijk nog intuïtief moest blijven, omdat in het kader van 'concept mapping' de betekenis van 'relatie' slechts gedeeltelijk kon worden omschreven, namelijk voor zover ze overeenkomt met 'associatie', d.i. het (niet-toevallig) samen voorkomen van woorden.

De statistiek maakt het mogelijk te constateren dat het samen voorkomen van woorden inderdaad niet-toevallig is, zonder dat we de redenen hoeven te kennen waarom deze woorden samen voorkomen. We kunnen dus constateren dát een collectie taalgebruikers op een of andere wijze consequent is, dus dát aan hun taal een beperkt aantal keuzen ten grondslag kan worden verondersteld. Het is echter niet eenvoudig om vervolgens deze 'keuzen' dan ook te formuleren. Wilson[94] moest immers terugkeren naar een intuïtieve beoordeling om de door haar onderscheiden drie "variabelen" van een interpretatie te kunnen voorzien.
Met deze statistische techniek is ook niet te onderscheiden of de geconstateerde consequentheid een gevolg is van inzicht, of dat men een taal imiteert die weliswaar consequent is, maar waarvan men de consequentheid niet zelf doorziet. We hebben dus een beschrijving nodig van tussentalen naar de mogelijkheden die ze een leerling bieden om individueel of samen een redenering tot stand te brengen: een beschrijving van tussentalen naar de kwaliteit van de redeneringen die zij mogelijk maken.

Zoals we zagen bij Novak, Pendley en Bretz[95], Lybeck *et al.*[96] en Kaper en Ten Voorde[37,100] is een statistische verwerking niet nodig om door 'concept mapping' tot een beschrijving van tussentalen te komen. In dat geval rust echter de beoordeling van het 'niet-toevallig' of 'consequent' samen noemen van woorden door een leerling, op een intuïtieve (bijvoorbeeld fysisch-inhoudelijke) beoordeling van een leerlinguitspraak.
Ook de beoordeling van paren 'keuzen' als afhankelijk, half-afhankelijk of onafhankelijk, welke het mogelijk maakte een volgorde voor deze keuzen te beargumenteren (6.3.1), rustte op een niet-uitgesproken notie van consequentheid. Deze beoordelingen werden immers gerechtvaardigd door naar fysisch-inhoudelijke argumentaties in hoofdstuk 5 te verwijzen. Dus werd nog steeds impliciet de fysica gebruikt als norm voor consequentheid, zoals Karpinski[93] expliciet deed door een studieboektekst als bron voor een referentieconceptmap te nemen. Willen we dit niet (6.2 onder c), dan is het nodig in didactische termen, onafhankelijk van deze of gene bijzondere (tussen)taal, te omschrijven wat met 'consequent' wordt bedoeld.

In volgende hoofdstukken (7 en 8) zullen we nagaan in hoeverre de daar aangevoerde nieuwe gezichtspunten een oplossing bieden voor de hier gesignaleerde problemen:
‣ rekening houden met ervaringen als bron voor een *verwijzende betekenis* van woorden (of: wat is een 'relatie' meer dan een 'associatie'?)

- een beschrijving van tussentalen naar *'kwaliteit van het redeneren'*.
- een *'interne norm'* voor consequentheid, d.i. 'consequentheid' als constateerbare eigenschap van een taal, niet als resultaat van het vergelijken van twee talen.

7. Tussentalen beschrijven: Kwaliteit van redeneren

Als een nog op te lossen probleem kwam uit het vorige hoofdstuk naar voren dat het wenselijk zou zijn tussentalen te kunnen beschrijven naar de kwaliteit van redeneren die zij mogelijk maken. In 1.3 was al aangekondigd dat het door Van Hiele opgestelde niveauschema in ieder geval onderscheid maakt tussen redeneringen die vertrekken vanuit axioma's enerzijds en "empiriegebonden redeneerwijzen" anderzijds.
Als voorbeelden van empiriegebonden redeneren kunnen we inmiddels aanwijzen:
▸ Wanneer het opmerken van een constante verhouding tussen twee veranderingen ΔX en ΔY het zinvol maakt om een gelijke 'ruilwaarde' toe te kennen aan beide veranderingen, dan is daarmee nog niet duidelijk of toekennen van ruilwaarden ook zinvol is in geval er geen constante verhouding wordt gevonden (5.3.6).
▸ Wanneer de ruilwaarde van een verandering van X onafhankelijk van het proces blijkt, dan is daarmee over de ruilwaarde van een andere variabele nog niets gezegd (5.3.5).
▸ Wanneer de ruilwaarden van twee veranderingen (van X en van Y) elk van het proces afhangen, dan kan het verbazing wekken dat de som van beide ruilwaarden niet van het proces blijkt af te hangen (2.6.2, 5.4.1). Over een andere combinatie van twee (of meer) variabelen is daarmee nog niets gezegd.
Empiriegebonden redeneerwijzen onderscheiden zich dus van het redeneren vanuit axioma's, door het stapsgewijs ontstaan van generalisaties met een steeds groter geldigheidsbereik, in plaats van meteen alle mogelijkheden en onmogelijkheden in één formulering te vatten en van daar uit consequenties te trekken.
We kunnen ons afvragen of we aan deze indeling in twee kwaliteiten voldoende zullen hebben. Paragraaf 7.1 bespreekt enige onderwijservaringen waaraan we argumenten kunnen ontlenen. Hierna wordt een indeling in drie kwaliteiten geïntroduceerd, ontleend aan Van Hiele[105] (7.2). Vervolgens worden de relaties tussen deze drie kwaliteiten besproken (7.3) en er wordt een standpunt geïntroduceerd van waaruit men sommige van deze relaties als noodzakelijk kan gaan zien (7.4). Als aanvulling op Van Hieles schema wordt een nieuwe eigenschap geformuleerd die de derde kwaliteit in chemie- en fysica-onderwijs kenmerkt (7.5). Hierna wordt de bruikbaarheid van het aldus aangevulde niveauschema getoond bij het evalueren en ontwerpen van onderwijs (7.6) waarna, bij wijze van conclusie, een beperking en een vraag worden genoemd (7.7).

7.1. Situatiegebondenheid

Van der Valk[29] (eerder geciteerd in 3.1) heeft in zijn onderwijsexperimenten geprobeerd rekening te houden met het gebruik van het woord 'energie' dat leerlingen meebrengen vanuit de omgangstaal. Zijn experimentele onderwijsgang bestond uit een 'thema'-deel, waarin menselijk energiegebruik centraal stond en een 'blok'-deel, waarin de nadruk lag op energie als natuurkundige vakterm, los van menselijk gebruik. Hij concludeert dat het

'thema'-deel achteraf als mislukt moet worden beschouwd omdat leerlingen hier de kans kregen allerlei met de natuurkunde strijdige denkbeelden uit te bouwen en te bevestigen. Het is nuttig Van der Valks[29] "reconstructie" van die "denkbeelden" hier te citeren. Ter toelichting: in het volgende citaat betekent "gedwongen" dat iets door mensen met technische middelen is georganiseerd, terwijl "natuurlijk" betekent dat iets vanzelf of door natuurkrachten plaatsvindt.

> "- Bij 'gedwongen' processen wordt energie 'verbruikt'; die energie is na afloop van het proces verdwenen.
> - Afkoelen, tot stilstand komen en vallen zijn 'natuurlijke' processen. Ze gaan niet gepaard met het ontstaan van energie(soorten) of met het afgeven van energie aan de omgeving. Slechts het mogelijk maken van deze processen ('loslaten' bij vallen) en het bevorderen ervan (koelen, remmen) wordt met energie in verband gebracht en wel met energie*verbruik*.
> - Het leveren van energie door een energiebron betreft een proces dat niet in verband wordt gebracht met het veranderen van de toestand van de betreffende energiebron. (...)
> - Het 'gereed maken' van een opslagmedium (verwarmen of omhoog brengen van water, in beweging zetten van een vliegwiel), dat 'vooraf gaat aan de opslag zelf', gaat gepaard met energieverbruik. De 'verbruikte' energie moet als 'verloren' worden beschouwd omdat het proces waarmee het vrijkomen van de 'opgeslagen' energie gepaard gaat (afkoelen, vallen, tot stilstand komen) 'vanzelf' plaatsvindt.
> - Het 'warm worden' van werkende apparaten gaat (volgens sommige leerlingen) 'vanzelf'. Volgens andere leerlingen gaat dat gepaard met 'verbruik' van een deel van de toegevoerde energie zonder dat er warmte/energie aan de omgeving wordt afgegeven." (Van der Valk[29], p.182-183)

Van der Valks bedoeling was "denkbeelden" te "reconstrueren". Het valt op dat hij dat niet kon doen, tenzij door (minstens gedeeltelijk) de taal van de betrokken leerlingen te gaan spreken. Want 'gedwongen' betekent hier niet $w>0$ en 'energie' in deze uitspraken voldoet niet aan de definitie $\Delta U=q+w$. Aangezien deze woorden niet betekenen wat ze in de natuurkunde betekenen, kan hoogstens tot een schijnbare strijdigheid met in de natuurkunde gangbare beweringen worden geconcludeerd.
Aan deze reconstructie valt op dat het woord 'energie' geen situatie-onafhankelijke *eigenschap* van een voorwerp aangeeft. Hetzelfde voorwerp in (natuurkundig) dezelfde 'toestand' wordt nu eens wel, dan weer geen energie toegeschreven, afhankelijk van de situatie waarin het voorwerp zich bevindt. In die situatie spelen mensen en hun *doelgericht handelen* de hoofdrol. Immers een waterval heeft - volgens dit woordgebruik - alleen met energie te maken, als iemand er gebruik van maakt (om elektriciteit op te wekken, Van der Valk[29], p.56).
Ten Voorde[35] (p.199, 404) heeft opgemerkt dat leerlingen aanvankelijk 'chemische reactie' opvatten als een 'reactie' van het materiaal op de handelingen die ermee worden verricht. De eigen doelgerichte handelingen staan dan centraal. Pas later wordt het mogelijk om reactiemogelijkheden als eigenschappen van stofindividuen te formuleren. Deze eigenschappen, waaraan men een stof herkent, zijn dan onafhankelijk geworden van de vraag of iemand er gebruik van maakt. Voordat dit het geval is, spreekt Ten Voorde van het "contextgebied 'gebruik en verbruik'"[106].
Tijdens een onderwijsexperiment werd, ter voorbereiding op de introductie van 'entropie', de vraag aan de orde gesteld aan welke voorwaarden een proces moet voldoen, wil zo'n

proces kunnen worden omgekeerd (band II, opgaven 3-3, 3-5 e.v.)[1]. Zo'n proces werd "omkeerbaar" en later ook wel "reversibel" genoemd (3-11)[1]. Later (7-6a)[1] bleek dat deze woorden door studenten anders waren opgevat dan ze bedoeld waren.

Protocol 1.6

C: Als je 't reversibele wilt maken dan moet je deze (de voorraad met gesmolten ijs) weer bevriezen.

WK: Dat was niet m'n bedoeling met deze vraag!

(lachen)

WK: Is die vraag zo onduidelijk? Ik vraag ze de zèlfde toestandsverandering te laten ondergaan, maar dan op reversibele wijze. Dus: je brengt ze weer in hun begintoestand en dan laat je ze dezelfde toestandsverandering ondergaan.

C: Maar dan smelt er toch nog meer ijs, dan wordt 't toch eerder irreversibeler?

WK: Nee het is reversibel omdat 't bij nul graden Celsius gebeurt. Er is geen temperatuurverschil (...)

(later:)

C: (..) die warmte die wil je weer terugkrijgen

WK: Nee die wil ik niet terugkrijgen, ik wil alleen hetzelfde nog een keer doen, maar dan onder reversibele omstàndigheden

C: Dus dan doe je alleen het eerste stukje van een reversibel proces: alleen die kant op.. en niet terug..

WK: een omkeerbare uitvoering zonder 'm om te keren..

C: ..en dan ga je dit vergelijken

WK: Als iets omkeerbaar is wil dat nog niet zeggen dat je 't ook omkeert

C: Nou dan vind ik 't heel erg ingewikkeld uitgelegd voor iets wat erg eenvoudig is.

Het blijkt dat **C** een proces alleen omkeerbaar of reversibel noemt, wanneer daadwerkelijk een poging tot omkeren wordt ondernomen. 'Reversibel' staat dus niet voor een mogelijkheid die als eigenschap aan het proces toe te kennen is, ongeacht of iemand er gebruik van maakt.

We zien hier dus een derde geval van hetzelfde fenomeen dat eerder door Van der Valk[29] en door Ten Voorde[35] werd opgemerkt: Er is een leerproces nodig alvorens woorden een betekenis krijgen gebaseerd op de gebruiks*mogelijkheden als eigenschappen* van voorwerpen, stoffen, processen - los van de vraag of deze voorwerpen zich in een situatie bevinden waar mensen daadwerkelijk van plan zijn die mogelijkheid te gebruiken. Uit Van der Valks[29] werk blijkt, hoe moeilijk het kan zijn om onderwijs te organiseren dat het mogelijk maakt om de beperkingen van zulk *situatiegebonden* woordgebruik te overwinnen.

Het nu opgemerkte kwaliteitsverschil tussen twee soorten taalgebruik valt niet samen met het verschil tussen axiomatisch en empiriegebonden redeneren. Immers ik kan een proces 'reversibel' noemen omdat ik de eigenschappen constateer waarvan ik bij eerdere gelegenheden heb gemerkt dat een proces met die eigenschappen kan worden omgekeerd. De redenen (redenering) om een proces 'reversibel' te noemen zijn dan wel gebonden aan een

(eventueel ruime) collectie ervaringen, maar zijn niet situatiegebonden meer in de hierboven aangeduide zin.
We kennen nu dus drie kwaliteiten van redeneren. Het zou gewenst zijn als we konden beargumenteren hoe deze drie kwaliteiten zich tot elkaar verhouden, in het bijzonder: hoe de één uit de ander kan ontstaan.

Situatiegebondenheid in een onderzoek-situatie
Wiser en Carey[107] stellen de vraag welke verschillen en welke relaties er zijn aan te wijzen tussen een moderne term (temperatuur) en zijn historische voorgangers. In het bijzonder vragen zij of deze termen verschillend van kwaliteit genoemd kunnen worden.*) Na lezing en interpretatie van een tekst uit 1650+) concluderen zij dat dit inderdaad mogelijk is. De door "de experimenteerders" gebruikte termen 'hitte' en 'kou' zien zij als gebonden aan "concrete objecten", de "bronnen" van hitte of kou, zoals de zon, een vuur en ijs. Ze merken op dat de moderne termen 'temperatuur' en 'warmte' niet op zo'n manier aan bepaalde objecten gebonden zijn:

> "(..) the entities are the concepts of modern physics, the properties of these entities are localised to them (i.e. independent of the particular circumstances instantiated in the problem)"

Wiser en Carey verwijzen naar Larkin[108] die een dergelijk verschil ook heeft aangetroffen tussen novices en experts in mechanica-*onderwijs*.

> "Such similarities [tussen onderzoeks- en onderwijs-leerproces, WK] raise the generality of such a progression: Will we allways see these features in change from earlier conceptual systems to more advanced ones?" (Wiser & Carey)[107]

In ieder geval kunnen we ons nu afvragen of het mogelijk is een algemene formulering te geven voor deze meermalen opgemerkte volgorde van kwaliteiten. Het niveauschema van Van Hiele[105] heeft de bedoeling dit mogelijk te maken.

7.2. Van Hiele niveaus

Van Hiele[105] onderscheidt verschillende kwaliteiten in het woordgebruik, die door hem werden genummerd: het eerste, het tweede en het derde niveau.#) Deze drie kwaliteiten worden nu geïntroduceerd, waarbij steeds aan Van Hieles tekst[105] wordt gerefereerd. De weergave is enigszins vrij. Dit was nodig om deze collectie essays samen te vatten in een doorlopend betoog.

(* "that the undifferentiated concept is different in kind from its descendants, and somehow deficient with respect to them"

(+ De *Saggi di Naturali Esperienze dell' Accademia del Cimento*, een verslag van verrichte experimenten door de Academia del Cimento (Toscane, Italie) rond 1650. Onder de leden waren leerlingen van Galilei en van Torricelli.

(# Soms is bij Van Hiele nog sprake van een vierde niveau[105] (p.45). Later[105] (p.52-53) wordt besproken hoe dezelfde gebeurtenissen beter beschreven worden met "niveaureductie".

De *eerste* kwaliteit wordt door Van Hiele[105] als volgt geïntroduceerd:

> "At the first level you can say: 'this is a rhombus'.
> It is an important phenomenon that without further explanation (how would such an explanation be possible!) another person can say: 'and this also is one'." (Van Hiele[105], p.49)

Woorden kunnen betekenis krijgen doordat iemand aanwijst wat hij bedoelt. Al na één zo'n aanwijzing kan ik vermoeden wat de ander bedoelt. Maar ik kan me vergissen. Door zelf een voorbeeld aan te wijzen, en te letten op de reactie van de ander, kan ik proberen na te gaan of m'n vermoeden klopt. Discussies over hoe we bijvoorbeeld een hond onderscheiden van andere viervoeters zijn overbodig, zolang we het door aanwijzen eens kunnen worden. Deze kwaliteit van taalgebruik kenmerkt zich dus door afwezigheid van redeneren. Beschrijvingen worden niet getoetst op consequent woordgebruik in verschillende situaties. Wanneer twee mensen het oneens zijn over de beschrijving van een ding of gebeurtenis, dan heeft die onenigheid een "welles-nietes" karakter.
Onvrede met zulke onbevredigende discussies kan leiden tot de *tweede* kwaliteit van woordgebruik:

> "When there are differences of opinion at the base level there can follow an analysis leading to the second level: 'This is not a rhombus, for the four sides are not equal'; 'Neither is this one, for it is a square'." (Van Hiele[105], p.50)

Woorden gaan nu gebruikt worden volgens afgesproken eigenschappen. Als een ervaring niet voldoet aan de afgesproken eigenschappen, is het woord niet van toepassing. Na zo'n analyse kunnen meningsverschillen over de beschrijving van een ding of gebeurtenis worden beslecht door te redeneren.

Het zoeken naar geschikte eigenschappen voor een afspraak leidt ertoe, dat het samen-voorkomen van eigenschappen wordt opgemerkt. Bijvoorbeeld: steeds als een figuur vier gelijke zijden heeft, dan heeft ze ook twee diagonalen die loodrecht op elkaar staan en die elkaar middendoor delen. Dit samen-voorkomen van eigenschappen wordt opgemerkt, terwijl men er nog geen redenen voor kan geven. Wel kan men ervaren dat dit samen-voorkomen van eigenschappen geen toeval is, bijvoorbeeld op de volgende wijze:[*)]

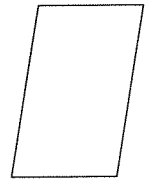
Scheur een stuk papier van willekeurige vorm. Vouw het stuk papier eenmaal dubbel. Vouw het stuk een tweede maal, zo dat een rechte hoek ontstaat. Neem een schaar en knip een schuine zijde die de twee rechte zijden verbindt (rechthoekige driehoek). Vouw het stuk papier open: het resultaat is een ruit.

Het is nu mogelijk de ruit te zien als gevolg van onder andere de door ons opgelegde rechte hoek tussen de diagonalen. Het 'ik' met zijn doelgericht handelen staat dan nog centraal: eerste niveau (vergelijk 7.1). Dit kan veranderen zodra is afgesproken aan welke eigenschappen we een ruit herkennen. Bijvoorbeeld:

[*)] Onleend aan D. Van Hiele-Geldof, mondelinge overlevering.

> "A rhombus is a quadrangle with four equal sides (a), in which the diagonals intersect each other perpendicularly (b), in which the diagonals bisect the angles (c), and in which opposite angles are equal (d)." (Van Hiele[105], p.111)[*)]

Een meer afstandelijke formulering wordt dan mogelijk: steeds als eigenschap c optreedt, merken we ook a, b en d (tweede niveau). In de overgang van eerste naar tweede niveau ontstaan dus wat we kunnen noemen *beschrijvende generalisaties*. Het tweede niveau wordt daarom ook wel "beschrijvend niveau" genoemd[105] (p.53).
Omdat er voorlopig geen reden is de ene eigenschap te bevoordelen boven de andere, kan de lijst eigenschappen die de 'afspraak' voor een bepaalde term formuleert tamelijk lang worden.[+)] Een lijst eigenschappen is op het tweede niveau dus open voor toevoegingen. De structuurloosheid van zo'n lijst kan aanleiding geven tot ontevredenheid, te meer naarmate blijkt dat sommige van de genoemde eigenschappen meer samenhangen dan andere. Zo blijken eigenschappen a en c elk op zich voldoende om een 'ruit' te constateren, want als een van deze eigenschappen aanwezig is, dan vinden we de andere eigenschappen ook.
De gelijkheid van overstaande hoeken (d) daarentegen gaat (in een vierhoek) wel steeds gepaard met gelijke overstaande zijden, maar niet per se met vier gelijke zijden. De lijst eigenschappen van de 'ruit' is dus op te delen in eigenschappen specifiek voor 'ruit' (a en c) en eigenschappen die ook tot andere figuren kunnen behoren, waaronder een figuur die men op het eerste niveau al als resultaat van handelen heeft leren herkennen.[#)]



Door het opmerken van empirische generalisaties krijgt de lijst eigenschappen voor 'ruit' dus een structuur. Die structuur kan worden geformuleerd door te zeggen: de ruit is ook een parallellogram, want de eigenschappen van een parallellogram zijn aanwezig. Wie zo'n structuur kan opmerken is volgens Van Hiele al op weg naar het derde niveau[105] (p.50, 63). De lijsten met eigenschappen voor diverse termen moeten een zekere uitgebreidheid hebben bereikt, voordat dergelijke structuren in die lijsten eigenschappen kunnen worden opgemerkt.

Het opmerken van zulke structuren - nu niet in ervaringen maar in de afspraken die eerdere ervaringen beschrijfbaar maakten - kan aanleiding zijn tot een nieuw type vraagstelling, dat voortkomt uit de intuïtie dat sommige eigenschappen 'niet toevallig' samengaan. Dit kan leiden tot de behoefte te beredeneren waarom deze eigenschappen - niet 'steeds' maar altijd (d.i. noodzakelijk) samengaan. Dit type probleemstelling kan volgens Van Hiele[105] leiden tot de *derde* kwaliteit van redeneren.

> "The sense of 'following from' may be discovered by an analysis of the intrinsic meaning of the properties of a geometric figure. To recognize a geometric figure, it is not necessary to trace all its properties; it can be recognised by only a few of its

---

(* markeringen tussen (haken) toegevoegd

(+ In geval van een ruit kan nog worden toegevoegd: (e) diagonalen delen elkaar middendoor, (f) overstaande zijden zijn evenwijdig, (g) twee lijnen van symmetrie, (h) een punt van inversie, ...

(# Sommige boekenkasten nemen (van voren gezien) spontaan de hier bedoelde vorm aan, als men het lattenkruis weglaat dat bedoeld is om een meer rechthoekige vorm te forceren.

> properties. Such a set of properties we will call 'characteristics.' For example, it is possible to recognize a parallelogram because it is a quadrilateral with diagonals bisecting each other. In consequence of this, other properties of parallelograms become certain: for instance, the property that opposite sides are parallel. From the first-mentioned properties of the figure (quadrilateral, diagonals bisecting each other) one can deduce the latter property (opposite sides parallel)." (Van Hiele[105], p.63-64)

Om zo'n redenering mogelijk te maken is het nodig enkele uitspraken uit te kiezen, om daaruit de rest af te leiden. Met andere woorden, het is nodig een axiomatische structuur in de eigen uitspraken aan te brengen.

> "[..] to give such a proof [..] one must have learned the language of this theoretical [=third] level. To be able to understand such a language, one must have made a study of arguments at the descriptive level and have understood that it is possible to arrange such arguments in an order in which each statement, except those at the beginning, is the outcome of previous statements." (Van Hiele[105], p.84)

De "theoretische taal" die hiertoe nodig is bevat nieuwe termen, die het mogelijk maken de relatie tussen verschillende stappen in zo'n afleidingsketting te bespreken. Het betreft termen als: nodig, voldoende, stelling, definitie, axioma, volgen uit, equivalent, impliceert, 'er is een x waarvoor..', 'voor alle x waarvoor..', 'één en slechts één', en dergelijke.
De derde kwaliteit van redeneren is die kwaliteit waar deze nieuwe termen gebruikt worden ter ordening en ter toetsing van uitspraken gedaan op het tweede niveau. Het gebruik van deze nieuwe termen is zelf geen onderwerp van analyse maar deze termen zijn een middel tot analyse van het gebruik van termen ontstaan door afspraken op het tweede niveau.*) Door deze analyse van eerder gemaakte 'afspraken' ontstaan *definities* waarin slechts die eigenschappen genoemd worden die nodig en voldoende zijn om de andere (eerder gevonden) eigenschappen te kunnen afleiden.
Nu zou het in zekere zin consequent zijn een vierde niveau te onderscheiden waarop de nieuwe termen uit de taal van het derde niveau zelf onderwerp van onderzoek en verantwoording worden. Dit gebeurt zoals bekend bij de studie van de logica. Van Hiele[105] (p.53) noemt deze mogelijkheid vier of zelfs vijf niveaus te onderscheiden, maar hij laat zien dat een andere didactische beschrijving voordelen heeft[105] (p.52-53). In dit proefschrift is de vraag naar de bruikbaarheid van een beschrijving met vier of meer niveaus geen onderwerp van onderzoek. We gaan er daarom niet verder op in.

De drie onderscheiden kwaliteiten van woordgebruik (niveaus) zijn dus samenvattend als volgt te kenmerken: op het eerste niveau wordt het gebruik van woorden bepaald door *onmiddelijke herkenning*, op het tweede niveau door (eventueel vele) *afgesproken eigenschappen*, op het derde niveau door een *definitie*. Elk van deze drie kwaliteiten van woordgebruik onderscheiden zich bovendien door verschillende mogelijkheden tot redeneren: op het eerste niveau zijn redeneringen afwezig of persoonsgebonden (welles-niets discussies), op het tweede niveau kan men elkaar overtuigen door een beroep op afgesproken eigenschappen, op het derde niveau is het redeneren gestructureerd volgens gekozen

*) "pupils experience the intrinsic *value* of deduction [but not yet] the intrinsic meaning of this concept"[105] (p.64).

axioma's en daaruit afgeleide stellingen. De genoemde 'kwaliteiten van woordgebruik' beschrijven dus ook de mogelijkheid en de kwaliteit van het redeneren.

7.3. Relaties tussen de Van Hiele niveaus

Uit de hiervoor (7.2) gegeven beschrijving van de drie onderscheiden kwaliteiten van woordgebruik zullen nu enige nieuwe regelmatigheden naar voren worden gehaald, waardoor relaties tussen deze drie kwaliteiten formuleerbar worden.
Ten eerste kenmerken beide niveau-veranderingen zich elk door een eigen *probleem* dat als aanleiding voor die verandering functioneert: de overgang van eerste naar tweede niveau door onenigheid over gegeven beschrijvingen, de overgang van tweede naar derde niveau door een vraag naar het "waarom" van het steeds-samengaan van opgemerkte eigenschappen.
Van Hieles term *structuur*[*)] maakt een tweede regelmatigheid formuleerbaar. De ervaring dat een structuur kan worden gezien en herkend[105] (p.28) zonder dat men woorden heeft om hem te beschrijven, is van belang voor het begrijpen van het eerste niveau. Deze ervaring laat (in)zien hoe het mogelijk is dat iemand mij iets aanwijst en daarbij een kreet slaakt ("ruit"), hetgeen mij in staat stelt even later iets anders aan te wijzen onder het slaken van dezelfde kreet, en dat bij voortzetting van dit spel wij elkaar (enigszins) zullen gaan begrijpen, zonder dat we elkaar hebben hoeven uitleggen wat we bedoelen. Deze ervaring wordt door Van Hiele als volgt omschreven: "structures have an objectivity"[105] (p.23), of zo: "people see the same structure and express their harmony by continuing the structure in the same way"[+)] (p.24)[105]. De structuren die op het eerste niveau van een naam ("rhombus") worden voorzien, zijn volgens Van Hiele dus structuren die we opmerken "in de wereld waarin we leven"[105] (p.10), dat wil zeggen: in een wereld die we schijnbaar of blijkbaar met andere mensen delen[105] (p.137-139). Het zijn ook structuren die *direct*, zonder te redeneren of te beschrijven, worden ervaren.[105] (p.12).
Nu wordt de beloofde regelmatigheid formuleerbaar. Aan Van Hieles beschrijving kunnen we immers aflezen dat ook op de andere niveaus nieuwe symbolen ontstaan, door woorden te kiezen om nieuw opgemerkte structuren te benoemen. Het betreft dan echter geen structuren meer die we in "de wereld waarin we leven" opmerken[105] (p.139-140). Op het tweede niveau immers, worden structuren opgemerkt in het woordgebruik dat eerder spontaan is ontstaan. Dit leidt tot afspraken: steeds als we eigenschappen a, b, c en d aantreffen gebruiken we het woord X. Zulke afspraken impliceren beschrijvende generalisaties: de eigenschappen a, b, c en d komen regelmatig samen voor (anders was het niet zinvol er een woord X voor in te voeren). Zoals eerder woorden werden gekozen om structuren "in de wereld (...)" te benoemen, zo worden nu woorden gekozen om structuren in het eigen, eerder ontstane, woordgebruik te benoemen, namelijk de bundel eigenschap-

---

(* Van Hiele[105] (p.11) kiest ervoor om structuur niet te omschrijven, maar om te laten zien wat hij bedoelt. Later noemt hij wel een aantal eigenschappen van structuur (p.28) maar hij vermijdt een definitie (p.31).

(+ Dat dit niet altijd meteen zo probleemloos gaat, blijkt uit de eerdere bespreking van getallenreeksen (Van Hiele[105], p.13-16 en p.20).

pen a, b, c, d die door analyse van eigen woordgebruik werd opgemerkt.

Met een uitdrukking uit hoofdstuk 5 zouden we kunnen zeggen dat eenzelfde woord op een volgend niveau niet meer naar een zintuiglijk waarneembaar ding *verwijst* (voor 'verwijzen' zie 5.2.1 en 5.3.1). Van Hiele[105] zegt in plaats daarvan dat op verschillende niveaus verschillende "objecten van studie" aan de orde komen (p.94) of dat een symbool op het ene niveau iets "heel anders" betekent als op het andere.

> "Here [at the next level] the language symbols express quite different things than they did at the first level. They no longer relate to visual structures, but to certain relations with other language symbols." (Van Hiele[105], p.97)

en ook:

> "The figure he refers to *is* a collection of properties, *properties* he has learned to call 'rhombus'" (Van Hiele[105], p.109, cursivering toegevoegd)

Het woord 'figuur' verwijst dus niet meer naar een zichtbare figuur. Ze verwijst dan ook niet meer naar iets dat eigenschappen 'heeft', (immers van een zichtbare figuur kunnen we zeggen dat hij eigenschappen heeft) maar naar iets dat eigenschappen 'is'. We zagen zojuist hoe deze spreekwijze als consequentie voortkomt uit de keuze het woordgebruik *op* een niveau te onderscheiden, gelet op wat ik noemde de verwijzende betekenis.
Zoals op het tweede niveau symbolen ontstaan voor structuren in het eigen (eerder ontstane) woordgebruik van het eerste niveau, zo worden op het derde niveau structuren benoemd die worden opgemerkt in het woordgebruik van niveau 2. Immers volgens Van Hieles beschrijving zijn in de ontstane lijsten met eigenschappen structuren op te merken die kunnen worden benoemd met: 'volgt uit', 'is equivalent met', 'is nodig om af te leiden dat..', 'is voldoende om..', etcetera.

> *De Van Hiele niveaus beschrijven het 'verwijzend' functioneren van woorden: op een volgend niveau verwijzen de woorden naar een structuur opgemerkt in uitspraken van het voorafgaande niveau.*

Een derde regelmatigheid wordt formuleerbaar als we letten op het handelen van de lerenden.
De eerste kwaliteit van het woordgebruik gaat samen met het be-handelen van aanwijsbare, tastbare dingen: papieren ruiten. In deze wereld van dingen of van gebeurtenissen wordt door te handelen een ordening aangebracht die onder andere tot uiting komt in naamgeving.*) Maar "door te handelen een ordening aanbrengen" beschrijft ook het leren dat behoort bij de tweede en derde kwaliteit van het woordgebruik. Verschil is wel dat dit handelen dan geen betrekking meer heeft op aanwijsbare dingen. De hiervoor genoemde ordening, geformuleerd in termen van 'verwijzen' (benoemen, aanduiden, representeren) kan dus ook geformuleerd worden in termen van het *ordenende handelen* van de lerenden,

*) Joling[36] (p.135-139) heeft een systeem uitgewerkt om het handelen van lerenden (toegesneden op een bijzondere onderwijssituatie) te noteren, teneinde een samenhang tussen handelen en woordgebruik met Van Hiele niveaus te kunnen beschrijven (p.139-159, vooral p.157).

waardoor de nieuwe kwaliteit van woordgebruik tot stand komt: op het tweede niveau wordt 'gehandeld met' uitspraken met de kwaliteit van het eerste niveau, op het derde niveau wordt gehandeld met uitspraken met de kwaliteit van het tweede niveau. Van Hiele[105] zegt het zo:

> *"At each level one is explicitly busy with the internal ordering of the previous level"*
> (Van Hiele[105], p.96)

Op te merken is ook dat bij elk van de drie beschreven kwaliteiten het ordenende handelen gebeurt op een wijze die in dat stadium zelf niet (althans niet expliciet) ter discussie komt. Wel worden er bij dat ordenen keuzen gemaakt, die dus, dat kan niet anders, 'intuïtief' worden gemaakt, zonder expliciete redenering:
- op het eerste niveau worden sommige structuren in de wereld opgemerkt en van namen voorzien, andere niet
- op het tweede niveau worden sommige eigenschappen opgenomen in de afspraak voor een term, andere niet
- op het derde niveau worden sommige uitspraken tot beginpunten voor deductief redeneren gekozen.

We kunnen het dus zo zeggen: op elk van de niveaus wordt iets *gedaan* waarover men op dat niveau niet (niet systematisch) spreekt.
Op elk van de hogere niveaus echter, wordt het handelen en de daarbij gemaakte keuzen van het voorafgaande niveau bespreekbaar: op het tweede niveau worden inconsequenthe-den bij het geven van namen (eerste niveau) bespreekbaar en oplosbaar. Op het derde niveau worden de empirische generalisaties van het tweede niveau toetsbaar op hun logische samenhang en verenigbaarheid.

Op elk van de volgende niveaus wordt het handelen met de daarbij intuïtief gemaakte keuzen van het voorafgaande niveau tot onderwerp van analyse.

7.4. Beschrijven en verklaren van onderwijsproblemen

Tot nu toe is gevonden dat de Van Hiele niveaus in ieder geval een consequente beschrijving bieden van enkele veel opgemerkte onderwijsproblemen:
- het probleem opgemerkt door Van der Valk[29], Ten Voorde[35] en mijzelf (7.1) dat een woord aanvankelijk 'situatiegebonden' wordt gebruikt is beschreven doordat het eerste Van Hiele niveau voorafgaat aan het tweede. Ook de bevindingen van Wiser en Carey[107] (7.1) met betrekking tot een onderzoek-leerproces zijn hiermee te beschrijven.
- het probleem dat onderwijs waarbij uitgegaan wordt van axioma's en definities slechts bij weinig leerlingen tot inzicht leidt (1.3), indien niet expliciet wordt aangesloten bij eerder onderwijs (2.7), is beschreven doordat het derde Van Hiele niveau voortkomt uit het tweede.

Hoewel dus de Van Hiele niveaus zelf zijn opgemerkt in onderwijs dat als geslaagd kon worden beschouwd, in de zin dat de bedoelde kwaliteit van redeneren werd bereikt, bieden deze niveaus ook een beschrijving voor situaties waar een bedoelde kwaliteit niet werd gehaald.

We zouden nog een stap verder kunnen gaan en ons afvragen of de Van Hiele niveaus ook verklaren *waarom* een onderwijsopzet mislukt. De relaties tussen de Van Hiele niveaus (7.3) suggereren immers dat de volgorde van eerste, tweede en derde niveau niet toevallig zo optreedt. Er zou dus wellicht een reden te geven zijn waarom deze volgorde mogelijk is *en een andere niet.*

> *Waarom kan iemand die een taal van het eerste niveau spreekt, niet meteen de redelijkheid van een axiomatische opzet appreciëren?*

In 7.3 formuleerden we, Van Hiele volgend, als constateerbare regelmatigheid in een geslaagd leerproces: "Op elk van de volgende niveaus wordt het handelen met de daarbij gemaakte keuzen van het voorafgaande niveau tot onderwerp van analyse". Om de gestelde vraag te beantwoorden zouden we hypothesegewijs deze uitspraak tot een uitgangspunt voor deductief redeneren kunnen omvormen:

> *Men moet gehandeld hebben alvorens dat handelen tot onderwerp van analyse te kunnen maken.*

Deze uitspraak is aanzienlijk gewaagder dan de empiriegebonden uitspraak die eraan vooraf ging. Immers eerder werd alleen gezegd: deze volgorde constateren we. Nu wordt gezegd: het kan niet anders.
Als we dit nu eens veronderstellen, welke redenering wordt dan mogelijk?

Wel:
Op het derde niveau wordt het handelen van het tweede niveau tot onderwerp van analyse gemaakt.
Heeft men niet gehandeld op het tweede niveau, dan lukt het dus niet dat handelen tot onderwerp van analyse te maken. Dus wordt dan het derde niveau niet bereikt.

Daarmee is verklaard waarom het derde niveau niet bereikt kan worden zonder aansluiting bij een geschikt voorafgaand leerproces.*)
Ik kan geen ervaring noemen die ertoe *dwingt* het hierboven gekozen uitgangspunt te accepteren. Accepteren we het niet, dan vervalt ook de gegeven verklaring. Het blijft dan nog steeds mogelijk de Van Hiele niveaus te gebruiken als *een* geschikte manier om onderwijs te ontwerpen.

(* Hiermee is het beloofde "minder intuïtieve antwoord" gegeven op de vraag die in het begin van 2.7 werd gesteld (voetnoot * op blz. 35). Ook kan men in het hierboven gekozen uitgangspunt een nauwkeuriger versie zien van het vermoeden, geformuleerd in 1.1. "De volle waarheid vertellen" kan immers onder andere inhouden: een streng bewijs leveren.

Hoewel ik van het hierboven geformuleerde uitgangspunt overtuigd ben, wil ik me voorlopig niet van die overtuiging afhankelijk maken, temeer daar het geformuleerde uitgangspunt - voor zover ik nu zie - qua deductief redeneren niet veel méér mogelijk maakt dan wat hierboven in vier regels werd gepresteerd. In wat volgt wordt daarom op het genoemde uitgangspunt voorlopig geen beroep gedaan (zie echter 15.1.2). We beperken ons dus voorlopig tot het opmerken van empirisch-didactische regelmatigheden, zonder uit te sluiten dan het ook anders kan.

7.5. Onmogelijkheids-uitspraken en Van Hiele niveaus

Ten Voorde[35] (p.204) merkt op dat hij in gesprekken met leerlingen geen geldige empirische argumenten kan aanvoeren om hen te overtuigen dat "magnesium nooit eens zal ontleden". Voor hem is dit een reden om het chemisch elementbegrip te gaan zien als resultaat van een redenering met de kwaliteit van het derde niveau[35] (p.248-249, 307).[*)]
De termen 'stof' en 'reactie' daarentegen bleven beschrijfbaar als resultaat van afspraken op het tweede niveau.
Niedderer[90] berichtte van onderwijsexperimenten waar geprobeerd werd leerlingen van Duits secundair onderwijs te interesseren voor de vraag of er een bovengrens kan worden gesteld aan het rendement van een warmtemachine. Een gepresenteerd bewijs voor zo'n bovengrens werd door leerlingen "begrijpelijk" gevonden, "maar niet doorslaggevend". "Er zou toch altijd nog kunnen blijken dat er tóch een machine gemaakt wordt die arbeid verricht op kosten van warmte uit de omgeving?", ongeveer zo citeerde Niedderer deze leerlingen.[+)]
Beide onderwijservaringen suggereren een bijzondere moeilijkheid die lijkt samen te hangen met het afkondigen van een onmogelijkheid.[#)] We zullen daarom nagaan hoe zulke uitspraken te plaatsen zijn in het Van Hiele niveauschema.
Als typerend voor het tweede niveau zagen we eerder het constateren van het samenvoorkomen van eigenschappen, waarbij een reden voor dit samen-voorkomen nog niet geformuleerd kan worden. Wel wordt dit samen-voorkomen *benoemd*, bijvoorbeeld het samen voorkomen van *) vier hoeken, *) gelijke zijden, *) diagonalen loodrecht op elkaar, *) diagonalen delen elkaar middendoor... wordt benoemd met het woord 'ruit'.
Zulke constateringen hebben een positief karakter: de gelijkheid van de zijden, het loodrecht op elkaar staan van de diagonalen, zijn ieder op zich te controleren door te handelen met uitgeknipte stukken papier, door dezen te vouwen of op elkaar te leggen waarbij o.a. de gelijkheid van zijden te controleren is doordat zij met elkaar tot dekking kunnen worden gebracht.
Een empirische generalisatie zegt nu dat *steeds* als we eigenschap a constateren, we ook b

---

(* Eerder had hij gemeend het derde niveau van de chemie te kunnen aanwijzen in het gebruik van corpusculaire termen zoals 'atoom', 'ion', 'molecuul', ter verklaring van macroscopische verschijnselen.[35]

(+ Overgenomen uit persoonlijke aantekeningen gemaakt van Niedderers voordracht[90] (geen proceedings beschikbaar).

(# Zie ook protocol 0.1, r.319-358, besproken in 1.3.

constateren. Is het toevallig dat deze eigenschappen a en b positief geformuleerd zijn, of zouden ook negatief geformuleerde generalisaties denkbaar zijn? Dus: steeds als we eigenschap a constateren vinden we eigenschap b **niet**?*)
Om tot een oordeel hierover te komen zouden we een andere eigenschap van het tweede niveau erbij kunnen betrekken, namelijk de eigenschap dat de lijst met eigenschappen open is voor toevoegingen. Een criterium voor een 'voldoende' set eigenschappen ontbreekt immers, op dit niveau (zie 7.2). Dit betekent o.a. dat we de empirische generalisatie

steeds wanneer we eigenschap a constateren, constateren we ook b

niet zo mogen lezen dat a een 'voldoende' voorwaarde zou zijn voor het optreden van b. Er zou immers een nog niet opgemerkte eigenschap c kunnen zijn, die eveneens nodig is voor het optreden van b. Deze c zou zo vanzelfsprekend of onopvallend kunnen zijn dat hij niet als eigenschap van de tot nu toe onderzochte situaties werd opgemerkt.
De genoemde empirische generalisatie zegt dus niet meer of minder dan dat, voor het beperkte aantal onderzochte gevallen, steeds als a voorkwam ook b voorkwam, en daarbij is dus *niets uitgesloten* met betrekking tot het eventueel nodig of niet-nodig zijn van toevoegingen aan de lijst eigenschappen. Het is dus heel goed mogelijk dat c, d, e,... nog moeten worden toegevoegd, alvorens b een logische conclusie kan worden (uit a, c, d, e, ...). Dit is nu juist wat we bedoelen als we zeggen dat op het tweede niveau het samenvoorkomen van eigenschappen wel kan worden opgemerkt, maar nog niet beredeneerd.

Wat dit betekent voor de mogelijkheid van negatieve generalisaties zullen we verkennen aan de hand van een situatie bekend uit het chemieonderwijs (verwant aan de situatie genoemd door Ten Voorde[35], p.204).
Wanneer we in de chemie een reactie constateren en beschrijven dan kiezen we een beperkt aantal eigenschappen van de waargenomen gebeurtenis om die in de beschrijving op te nemen. Typischerwijs noteren we de stoffen die we voorafgaand aan de gebeurtenis constateren, en ook degenen die we na afloop constateren. Deze keus leidt tot wat we het tweede (Van Hiele) niveau van de scheikunde kunnen noemen, want stofnamen worden dan gebruikt volgens afgesproken eigenschappen. Van de omstandigheden waarbij de reactie verliep hebben we een beeld, maar de beschrijving van die omstandigheden is onvolledig (een criterium voor volledigheid ontbreekt immers op het tweede niveau). Er wordt bijvoorbeeld vermeld 'we hebben verhit', maar niet hoe lang dat duurde, of wat de temperatuur was, de luchtdruk, de stand van de maan, de valversnelling ter plaatse, etcetera.
Deze onvolledigheid in de beschrijving van omstandigheden leidt ertoe dat het wel-constateren van een reactie een andere status krijgt dan het niet-constateren ervan. We kunnen opmerken: steeds als we calciumcarbonaat op een bepaalde niet nader beschreven wijze verhitten, ontstaan een witte vaste stof en een gas. Calciumcarbonaat heeft dus de eigenschap: kan ontleden. De onvolledigheid in de beschrijving van de omstandigheden hindert ons niet bij het constateren van deze eigenschap. Maar hoe is dit nu gesteld wanneer we

(* Bijvoorbeeld: steeds als we de eigenschappen van magnesium vinden (reageert met zuurstof tot een witte stof, met zoutzuur tot een kleurloos gas), vinden we **geen** ontledingsreactie.

iemand er van zouden willen overtuigen dat stof S *niet kan* ontleden?
De waarneming dat stof S niet ontleedde bij de omstandigheden $x_1=x_1$' en $x_2=x_2$' voldoet hiertoe niet. Niet alleen zouden we meer dan één paar waarden voor de variabelen x_1 en x_2 moeten uitproberen, maar ook zouden we ons op één of andere manier ervan moeten verzekeren dat er behalve x_1 en x_2 geen andere relevante eigenschappen van de situatie meer te noemen zijn. Met andere woorden, we zouden ons ervan moeten verzekeren dat met x_1 en x_2 een *voldoende* beschrijving van de situatie is gegeven, om de vraag naar ontleedbaarheid te kunnen beantwoorden. Maar daarmee is duidelijk dat deze niet-ontleedbaarheid tot het derde niveau is te rekenen, omdat het nodig blijkt te redeneren over het al of niet 'voldoende' zijn van een set eigenschappen van een situatie.
Hiermee is dan (op het tweede niveau didactiek) een verantwoording gegeven waarom het verstandig zou zijn om het voorkomen van een bepaald type negatieve uitspraken toe te voegen aan de eigenschappen van het derde niveau, ter onderscheiding met het tweede niveau. Maar om welk type uitspraken gaat het nu precies?
De woordcombinatie 'niet kunnen' lijkt kenmerkend te zijn. Valt bovenstaande redenering, die nog specifiek was voor het vak chemie, te generaliseren? Letten we op het gebruik van het werkwoord 'kunnen' dan valt het volgende op. Wanneer we zeggen 'calciumcarbonaat kan ontleden' dan wordt met het werkwoord 'kunnen' aangegeven, dat de voorwaarden voor het ontleden van calciumcarbonaat in deze uitspraak niet volledig zijn aangegeven. Immers als we van zo'n volledigheid wel zeker zijn dan kunnen we zeggen: 'calciumcarbonaat ontleedt bij 1300°C en CO_2-druk van 1 atmosfeer'. Zouden we in onzekerheid verkeren of wellicht een derde eigenschap (naast druk en temperatuur) nog van belang zou kunnen zijn, dan zouden we zeggen: calciumcarbonaat *kan* ontleden bij 1300°C en CO_2-druk van 1 atmosfeer. Het werkwoord 'kunnen' wordt dan gebruikt om een voorbehoud te maken, namelijk het voorbehoud dat er nog onbekende eigenschappen een rol zouden kunnen spelen, naast de twee genoemde eigenschappen. Laten we een dergelijke bewering schematiseren tot:

O kan als x, y

waarin O, x en y eigenschappen van een situatie voorstellen. Het woord "kan" geeft dan aan dat de opsomming "x, y" als wellicht onvolledig wordt beoordeeld. De logische ontkenning van een dergelijke bewering impliceert dan ook de ontkenning van dit gemaakte voorbehoud.

O kan niet als x, y

Deze bewering impliceert dus dat met x en y wél een voldoende beschrijving gegeven is, om tot het niet-optreden van O te kunnen beslissen. Dus kunnen we concluderen dat 'kan niet' uitspraken behoren tot het derde Van Hiele niveau, terwijl we 'kan'-uitspraken kunnen rekenen tot het tweede Van Hiele niveau, althans voor wetenschappen zoals chemie en fysica, waarin een empirisch voorbehoud zoals hier bedoeld een rol zou kunnen spelen.
Zolang nog niet duidelijk is of dit empirisch voorbehoud zich ook bij het tweede niveau van het wiskunde-leren voordoet, stel ik voor de 'kan niet' uitspraken voorlopig aan te duiden als uitspraken over *fysische onmogelijkheden.*

Na deze toevoeging van een eigenschap aan de eigenschappen waaraan we het derde niveau herkennen, kunnen we de eigenschappen van eerste, tweede en derde Van Hiele niveau voorlopig samenvatten als in tekstkader 2. In deze figuur zijn de nummers (eerste, tweede en derde niveau) vervangen door namen die geïntroduceerd zijn door Ten Voorde[35] (p.130, vgl. 184-185) en die door Van Hiele soms ook worden gebruikt[105] (p.53). Vanaf hier zullen we deze namen gebruiken.

Grondniveau	- Woordgebruik gebaseerd op onmiddellijke herkenning - Woordgebruik is situatie-afhankelijk
	Probleem 1: onenigheid over correcte beschrijving of generalisatie
Beschrijvend niveau	- Woordgebruik volgens afgesproken eigenschappen waaraan het benoemde 'iets' wordt herkend - De lijst eigenschappen is open voor toevoegingen - Woordgebruik voldoende nauwkeurig voor het formuleren van empirische generalisaties - Voorspellingen onzeker
	Probleem 2: waarom gaan deze eigenschappen steeds samen?
Theoretisch niveau	- Woordgebruik volgens definities: sommige eigenschappen zijn uitgekozen als zijnde nodig en voldoende om de overige eigenschappen af te leiden - Er zijn axioma's gekozen die sommige combinaties van eigenschappen uitsluiten (fysische onmogelijkheden) - Afleidingen, gebaseerd op axioma's en definities, maken expliciet waarom sommige eigenschappen noodzakelijk samengaan - Voorspellen met zekerheid wordt mogelijk - Formuleringen van empirische generalisaties worden gecontroleerd op hun verenigbaarheid met de gekozen axioma's en definities

Tekstkader 2: eigenschappen Van Hiele niveaus voor fysica/chemie-onderwijs

Na deze aanvulling kan het opvallen dat het ontstaan van de wetenschappen chemie en thermodynamica meestal wordt gedateerd op het moment dat een onmogelijkheid onder woorden wordt gebracht. De keuze om het maken van (bijvoorbeeld) goud uit lood als onmogelijk te beschouwen, veranderde 'alchemie' in 'chemie' en Carnots keuze om de onmogelijkheid van een perpetuum mobile als fundamenteel te beschouwen wordt vaak gezien als begin van de thermodynamica. Als de eerste thermodynamici noemen we immers meestal niet Newcomen en Watt die de eerste goedwerkende stoommachines bouwden, maar we noemen eerder Carnot, die over zulke machines een onmogelijkheidsuitspraak deed. Misschien toont dit alleen maar aan, dat we geneigd zijn het theoretisch niveau als 'het ware' te zien en de voorgeschiedenis die dit mogelijk maakte te verwaarlozen.

7.6. Bruikbaarheid Van Hiele niveaus bij evalueren en ontwerpen

Als aanleiding voor de beslissing om dit onderzoek te richten op het vinden van empirie-

gebonden voorstadia van thermodynamische kennis werd eerder protocol 0.1 genoemd (zie 1.3). We zullen nu aangeven hoe het niveauschema (tekstkader 2) gebruikt is om te komen tot een verdere interpretatie en evaluatie van dit eerder besproken protocol (▸a) en hoe we op basis daarvan kwamen tot een nieuw ontwerp van de stap naar theoretisch niveau (▸b). Vervolgens wordt nog kort aangegeven in hoeverre rekening is gehouden met een overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau (▸c).

▸ *a) bruikbaarheid bij evalueren*
We gaan na in hoeverre het niveauschema (tekstkader 2) een nadere interpretatie oplevert, in vergelijking met wat eerder gezegd is (1.3) over dit protocol.

protocol 0.1

Ten eerste kan nu opvallen dat het geleverde bewijs (r.314-504) in z'n geheel zich beroept op een beschrijving in afgesproken termen (*'w'* en *'q'*, r.182-189) van een situatie (r.77-114) die in het daarna volgende bewijs onderwerp wordt van beschouwing. Deze volgorde: eerst beschrijvende termen afspreken, dan bewijzen, is in overeenstemming met het niveauschema. Op te merken valt ook dat studenten grote moeite hebben de afspraken van beschrijvend niveau te accepteren (r.176-250). Er was binnen de opzet van dit hoorcollege geen gelegenheid om het 'bewijs' uit te stellen tot de gewenste beschrijvend-niveau kwaliteit van het redeneren voor studenten was ontstaan, alvorens met het stellen van uitgangspunten te beginnen. Het 'bewijzen' kon dus voor studenten niet functioneren als: het vinden van een logische ordening in een eerder ontstane beschrijvende taal, want zo'n taal was voor hen nog niet ontstaan.
Er is te zien dat voor de docent het bewijs wel zo functioneert. Als aanleiding voor het daarna volgende bewijs noemt hij immers enkele empirische generalisaties (r.20, 31, 40-43), althans hij doet uitspraken die gemakkelijk in de empiriegebonden vorm terugvertaald kunnen worden (door 'altijd' te vervangen door 'steeds' zoals gebruikt in 7.5, blz.168). Elk van deze beweringen noemt een eigenschap van een gebeuren. De genoemde eigenschappen vertonen een overeenkomst ("toenemende uniformiteit", r.54). Het vermoeden wordt gewekt dat deze overeenkomst geen toeval is, dus dat er een reden voor te geven zal zijn. De daar na volgende beschouwing heeft dus tot doel die reden te geven.
Volgens Van Hieles beschrijving verwachten we nu dat elk van de genoemde processen nog minstens een tweede empirisch constateerbare eigenschap vertoont, en dat er een logische samenhang wordt opgemerkt waarbij de ene (verklarende) eigenschap als 'voldoende reden' voor de andere (te verklaren) eigenschap blijkt te kunnen gelden. In de loop van de volgende drie hoorcolleges blijkt 'entropietoename' die rol te gaan vervullen. Ervan uitgaande dat de entropie van een geïsoleerd systeem niet kan afnemen, wordt afgeleid dat processen plaatsvinden in de richting van afnemend temperatuurverschil, drukverschil, en verschil in chemische potentiaal. De vraagstelling die hierboven in regel 10-61 van protocol 0.1 werd aangewezen, is daarmee beantwoord.
De eigenschap 'entropietoename' die als verklaring van de te verklaren eigenschappen blijkt te kunnen functioneren, is echter in het begin van protocol 0.1 nog onbekend. Het betoog in protocol 0.1 is er allereerst op gericht de mogelijkheid van de nieuwe eigenschap 'entropietoename' aan te tonen. Daarbij wordt eerst uitgegaan van één van de te verklaren uitspraken, namelijk van de tweede hoofdwet in Clausius formulering (r.337,

vergelijk r.20-23).
Beschikken we eenmaal over entropie, en over de eigenschap dat $dS > đq/T$ voor processen die verlopen, dan kan hieruit de temperatuurgelijkheid als evenwichtsvoorwaarde terug worden afgeleid.

> "Vertel me iets nieuws, zult u zeggen, want dit veronderstelden we al bij thermisch evenwicht" *)

De docent geeft er blijk van te weten een cirkelredenering te hebben gegeven. Toch is er een verklaring gegeven, want behalve het eerder gekozen uitgangspunt zijn nu ook enige van de andere uitspraken over de "richting" van processen afgeleid uit entropietoename, en daarmee verklaard.
De meeste van de tot nu toe gemaakte opmerkingen kloppen met Van Hieles beschrijving van een overgang van beschrijvend naar theoretisch niveau: een vermoeden met betrekking tot het niet-toevallig voorkomen van een eigenschap (empirische generalisatie), is aanleiding om een deductieve structuur in de uitspraken te gaan expliciteren. Hiertoe worden een of meer van wat eerst empirische generalisaties waren, tot axioma's omgeformuleerd.

Van Hieles beschrijving van de overgang van beschrijvend naar theoretisch niveau zegt echter dat van de eigenschappen die tot elkaar in een "als... dan" relatie komen te staan er vóór de overgang al meer dan één bekend is.
Een geschikte aanleiding voor deze overgang zou dus niet zijn om een eigenschap te verklaren uit een nog onbekende andere eigenschap, maar om een vermoede samenhang tussen twee eigenschappen die beide al bekend zijn, te gaan verklaren door een redenering waarbij de één als voldoende reden voor de ander blijkt te kunnen gelden. Hiermee is niet gezegd dat er geen tevoren onbekende eigenschappen worden afgeleid, maar wel dat de vraag die aanleiding is tot de overgang betrekking heeft op het samengaan van verschillende tevoren bekende eigenschappen.
De bundels eigenschappen die resultaat zijn van beschrijvend niveau, dienen dus zodanig uitgebreid te zijn dat door middel van deductieve logica een merkbare ordening kan worden gebracht in deze bundels. Maar in een 'bundel' van één eigenschap kan men geen ordening brengen. De ervaringsbasis die door de docent in r.10-61 is geschetst als basis voor een overgang van beschrijvend naar theoretisch niveau is dus te smal, immers, er wordt per proces maar een enkele eigenschap genoemd. Men kan op zo'n smalle basis de *functie* van deductief redeneren niet ervaren: men merkt niet de ordening, de vereenvoudiging die het biedt. Ook kan er nog geen behoefte zijn aan zo'n ordening of vereenvoudiging. In de lange redenering die volgt*), kan men daardoor moeilijk een richting bespeuren.

(* Uit het hoorcollege van 17-9-'92 waar de evenwichtsvoorwaarden $T_1=T_2$, $p_1=p_2$, $\mu_1=\mu_2$ en $C_V \geq 0$ werden afgeleid uit $\delta S \geq 0$ voor een geïsoleerd tweefasen systeem.
Sinds het hoorcollege weergegeven in protocol 0.1 (d.d. 14-9-'92) zijn dan inmiddels 4 hoorcolleges verlopen, waarin onder andere de chemische potentiaal werd ingevoerd.

(+ De verklaring van de drie in r.10-61 genoemde eigenschappen is pas drie hoorcolleges later geleverd. De nieuwe eigenschap 'entropie' die deze verklaring mogelijk maakt is pas aan het eind van dit hoorcollege in zicht.

▸ *b) ontwerpen: overgang van beschrijvend naar theoretisch niveau*

De aangewezen remedie is dus: streven naar een meer uitgebreid netwerk van empirische generalisaties, alvorens de overgang naar een axiomatische ordening wordt gemaakt. Gekozen is om te proberen 'entropie' betekenis te geven zonder een beroep te doen op logische bewijsvoering. Geprobeerd is om 'entropie' meetbaar of tenminste bepaalbaar te laten worden, zodat 'entropietoename' (geïsoleerd systeem) tot de empirische generalisaties van het beschrijvend niveau zou kunnen gaan behoren (13-7)[2].
Pas nadat deze generalisatie is uitgesproken, wordt een vraag (13-8)[2] aan de orde gesteld waarvoor een axiomakeuze nodig is om tot een antwoord te komen (zie 13-8h)[2]. Deze keus wordt pas gevraagd op een moment dat men kan zien waarvoor hij dient, namelijk *kort voor* de conclusie die de gestelde vraag beantwoordt.[*)] De te maken keus levert de ontbrekende schakel waardoor de al vermoede conclusie "zeker" wordt. Of beter gezegd: het vermoeden van een steeds toenemende totale entropie wordt in een *zekere* (nl. logische) relatie gebracht met het vermoeden dat een perpetuum mobile niet voorkomt.
Opgave 13-8[2] houdt dus rekening met de volgende eigenschappen van een overgang naar theoretisch niveau: 1) er is een net van empirische generalisaties beschikbaar als basis voor de overgang, 2) de axiomakeuze wordt door studenten zelf gedaan, 3) deze keuze wordt pas gevraagd op een moment dat men zo'n keuze in zijn functie kan doorzien.
Desondanks houdt opgave 13-8[2] niet maximaal rekening met de eigenschap van een overgang naar theoretisch niveau, dat hierbij een ordening in empirische generalisaties ontstaat. De vraagstelling in de inleiding tot de opgave: "*kan* de totale entropie afnemen?" bouwt immers slechts expliciet voort op één empirische generalisatie (die uit 13-7)[2].
Overige benodigde empirische generalisaties worden in het vervolg van de opgave aangedragen (o.a. 13-8c)[2]. Zoals ik de Van Hiele niveaus nu begrijp, zou ik aan 't begin van opgave 13-8 een vraag naar de relatie tussen twee of meer empirische generalisaties willen formuleren.
De volgende empirische generalisaties zouden daarbij een rol kunnen spelen:

- Een proces in een geïsoleerd systeem komt na enige tijd tot rust. (nog niet geformuleerd vóór 13-8)[2]
- Bij een proces in een geïsoleerd systeem neemt de entropie van het systeem toe, of, in het limietgeval van een omkeerbaar proces, blijft gelijk. (uit 11-7, 12-5e en 13-7d)[2]
- Bij vergelijken van een omkeerbaar en een niet-omkeerbaar proces tussen dezelfde twee toestanden van een systeem blijkt $w > w_{rev}$. (te formuleren naar aanleiding van proeven zoals in §5, 8 en 9, vgl. 8-2h en o)[2].

▸ *c) ontwerpen: overgang grondniveau naar beschrijvend niveau*

Vrijwel overal in de experimentele opgavenseries wordt de beschrijvende kwaliteit van redeneren beschikbaar verondersteld. Er zijn slechts enkele momenten waar rekening wordt gehouden met de mogelijkheid, dat studenten wellicht het gewenste beschrijvend niveau -

---

(* Vergelijk Carnots[78] (p.79-80) presentatie van zijn keuze om de onmogelijkheid van een perpetuum mobile als uitgangspunt te nemen, waarna direct zijn voornaamste conclusie volgt, namelijk dat de maximale arbeid onafhankelijk is van de werkende substantie. Het grootste deel van zijn redenering is aan de presentatie van deze axiomakeuze voorafgegaan.
Een dergelijke volgorde (waarbij de beslissende keuze nog niet aan het begin van de redenering wordt uitgesproken) is doorgevoerd in opgave 13-8[2].

met betrekking tot energieleer - nog niet hebben bereikt. Deze momenten worden hieronder kort genoemd.
In deel 3 zal blijken in hoeverre voldoende rekening gehouden is met deze overgang.

Er wordt rekening mee gehouden dat studenten geen ervaring hebben met de verschillende mogelijkheden bij het kiezen van energiecapaciteiten, en daarmee van een eenheid, om te voldoen aan de voorafgaande keuze, aan twee veranderingen een 'gelijke waarde' te willen toekennen (5.3.3, 5.4.2 en 6.3.2). Deze keuzen zijn te rekenen tot de overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau, omdat consequent gebruik van 'ruilwaarde' (en later 'energiewaarde') pas na deze keuzen verwacht kan worden. Er wordt rekening mee gehouden dat de keuze gelijke waarden te willen toekennen, niet eerder op een ervaring is gegrond, of dat zo'n empirische basis inmiddels vergeten is (1-1g)[3]. De keuzen 1 en 2 uit Afbeelding 15 (zie 5.5) maken dus deel uit van een overgang van grond- naar beschrijvend niveau.
De opgaven (1-1 t/m 1-5)[3] die "rekening houden met" deze overgang van grond- naar beschrijvend niveau veronderstellen echter meer bekend dan alleen een grondniveau. Behalve op ervaringen wordt ook voortgebouwd op aangeleerde formules voor energievormen, waarvan de bruikbaarheid slechts in beperkte mate ter discussie wordt gesteld (zie 6.3.2). De eigenschappen van een overgang van grond- naar beschrijvend niveau zullen zich hier dus naar verwachting niet onvermengd voordoen.

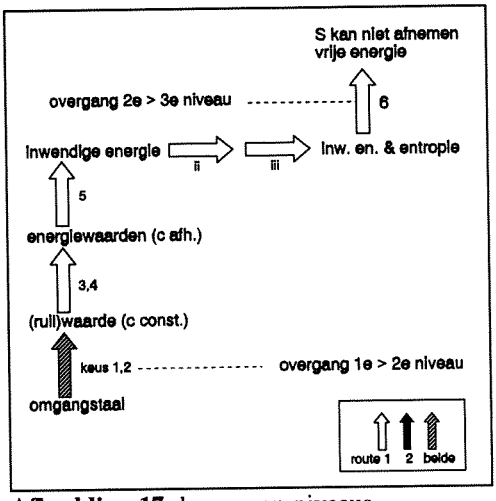
Er is ook rekening mee gehouden dat de term 'warmte' in de betekenis 'energieverandering voor zover niet door arbeid' zodanig nieuw is voor studenten dat voor deze term de aansluiting met de niet-geanalyseerde omgangstaal nog tot stand moet worden gebracht. Dit gebeurt door enkele opgaven die aansporen tot een afspraak gebaseerd op het gebruik van het werkwoord 'verwarmen' in de omgangstaal (6-5 t/m 6-7)[2], waarop in volgende opgaven (11-2, 11-3, 11-6)[2] wordt voortgebouwd.
De term 'reversibel' wordt ontwikkeld uitgaande van 'omkeerbaar' in de zin van een meetbare (niet infinitesimale) verandering die ongedaan gemaakt kan worden voor de betrokken voorwerpen. Andere eigenschappen van een reversibel proces (later samen te vatten in de term: evenwicht) worden als empirische generalisaties hieruit ontwikkeld (§§8-9)[2], zoals eerder aangegeven in 3.7 onder a).
Bij de introductie van energiewaarden (per energievorm) als mogelijke 'toestandsgrootheden' wordt gebruik gemaakt van een naar verwachting vanzelfspekende betekenis van het woord 'voorraad' uit de omgangstaal (2-5c)[3].

7.7. Conclusie

Een samenvatting van het Van Hiele niveauschema zoals dat hiervoor werd besproken en gebruikt is gegeven in tekstkader 2 (p.170). Van dit schema is getoond hoe het gebruikt kan worden bij het evalueren en ontwerpen van onderwijs (7.6) en bij het verklaren van sommige onderwijsproblemen (7.4).
Zoals eerder aangegeven is in het experimentele ontwerp een overgang naar theoretisch niveau pas gepland aan het eind (opgave 13-8)[2]. De kwaliteit van het beschrijvend niveau daarentegen wordt, ten aanzien van de meeste termen, al vlug (na 1-5)[3] beschikbaar

verondersteld. Dit betekent dat vrijwel de gehele ontworpen opgavenserie (§1[3] t/m §12[2]) zich kenmerkt door de veronderstelling: men blijft redeneren met de kwaliteit van het beschrijvend niveau (uitzonderingen hierop zijn genoemd in 7.6 onder c).
Deze stand van zaken is aangegeven in Afbeelding 17. Een eerdere versie van deze figuur werd gepresenteerd in het hoofdstuk over 'concept mapping'
(Afbeelding 15). Introductie van de Van Hiele niveaus heeft tot een verfijning geleid: keuze iii (Afbeelding 15) is nu onderscheiden in de keuzen iii en 6.

De ontworpen stap naar theoretisch niveau (7.6 onder b) kon door beperkingen in de beschikbare cursustijd niet worden uitgeprobeerd. De stap van grondniveau naar beschrijvend niveau is, zoals gezegd, maar in beperkte mate nagestreefd. De Van Hieleniveaus zijn dus bruikbaar om de randvoorwaarden te beschrijven die aan het uitgevoerde experiment zijn opgelegd. De Van Hiele niveaus zijn echter te weinig onderscheidend om de taalveranderingen te kunnen benoemen die wél in een onderwijsexperiment zijn uitgeprobeerd: de taalveranderingen aangeduid met de nummers 3, 4, 5, ii en iii worden immers in het Van Hiele niveauschema niet onderscheiden.



Afbeelding 17: keuzen en niveaus

Hiermee is duidelijk dat we behalve de Van Hiele niveaus nog andere middelen voor de beschrijving van onderwijs nodig hebben. Van Hieles spreken over termen als knooppunten in netwerken van relaties doet vermoeden dat zijn schema goed te verenigen zal zijn met de inzichten die we eerder aan 'concept mapping' ontleenden. Met betrekking tot de drie eerder genoemde beperkingen van 'concept mapping' (6.4) kunnen we inmiddels opmerken:

- Van Hiele niveaus beschrijven *het verwijzend functioneren van woorden* inclusief de rol van handelen en daarbij opgedane ervaring (zie 7.3)
- Van Hiele niveaus verbinden kwaliteiten van woordgebruik met *kwaliteiten van redeneren* (zie 7.2, slot)
- Van Hiele niveaus benoemen de kwaliteit van een taal *volgens interne norm*, want er wordt gelet op het consequent gebruik van eerder door deelnemers gemaakte afspraken. Daarbij worden twee soorten 'afspraken' onderscheiden (7.5): namelijk open lijsten eigenschappen (beschrijvend niveau) respectievelijk definities en axioma's (theoretisch niveau). Op het grondniveau zijn er geen afspraken waaraan 'consequentheid' kan worden getoetst, een eventuele consequentheid is dan geheel impliciet, of zoals van Hiele zegt "intuïtief".

Met betrekking tot de verenigbaarheid van Van Hiele niveaus met concept mapping is echter nog wel een vraag te stellen.

In het kader van 'concept mapping' wordt de betekenis van een term bepaald door de *associaties* van een term met andere termen te beschrijven. In het kader van de Van Hiele niveaus echter ontlenen de termen die op een zeker niveau functioneren hun betekenis ook hieraan dat ze *verwijzen naar* structuren opgemerkt in "de wereld" of in het woordgebruik van het voorafgaande niveau. Daarbij is het schema zo opgezet dat uiteindelijk alle termen (direct of indirect) ten dienste staan van, dus hun betekenis ontlenen aan, het omgaan met de tastbare "wereld waarin we leven" (7.3).
Maar nu is het woord 'betekenis' tweemaal gebruikt, namelijk éénmaal in verband met het associëren van een term met andere termen, gebruikt op eenzelfde niveau enerzijds, en éénmaal in verband met het verwijzen naar structuren ontstaan op het voorafgaande niveau anderzijds. Dus kan de volgend vraag worden gesteld:

> *Hoe hangt de 'betekenis' die we onderzoeken door op het associëren te letten samen met de 'betekenis' gelet op het verwijzen? Is het terecht om in beide gevallen eenzelfde woord 'betekenis' te gebruiken?*

Voordat deze vraag de volle aandacht krijgt zullen we echter eerst aandacht besteden aan een min of meer praktische vereniging van concept mapping en Van Hiele niveaus, die mogelijk wordt door de inzichten van Gentner[79] en Joling[36] over de analogieredenering. Bedoeling is om daarmee de ontworpen analogieredenering naar entropie een plaats te kunnen geven in de didactische beschrijving.

8. Analogieredenering en ervaring

In hoofdstuk 4 werd getoond dat een "deeltjesmodel" te beschrijven is als een analogie, zoals omschreven in 4.1:

> "Bij gebruik van een analogie wordt kennis van een bekend ervaringsdomein gebruikt om te komen tot een nadere analyse van een ander ervaringsdomein" (4.1).

Gebruik van zo'n deeltjesmodel *ter introductie* van entropie werd afgewezen, omdat vermoedens die op dit model gebaseerd kunnen worden niet toetsbaar zijn, indien entropie niet eerst op andere wijze betekenis heeft gekregen (4.3). Er werd daarom een alternatieve analogieredenering voorgesteld, om 'entropie' concreet, voorstelbaar en meetbaar te laten worden voor studenten, maar dan een analogieredenering die al meteen een toets van ontstane vermoedens zou toestaan (4.5).
Gentner[79] omschrijft een analogieredenering in termen van "relational structure", hetgeen doet denken aan concept mapping. In 8.1 zullen we deze verwantschap verder nagaan. Daarmee is de vraag betreffende de verenigbaarheid van 'concept mapping' en Van Hiele niveaus aan de orde.

- Biedt Gentners analyse van analogieën in termen van "relational structure" een geschikte aanvulling op de Van Hiele niveaus?
- Bieden de Van Hiele niveaus een geschikte oplossing voor het eerder gesignaleerde bezwaar dat 'concept mapping' geen rekening houdt met een naar ervaringen verwijzende betekenis?

Eerst introduceren we Gentners[109] opvatting van analogie aan de hand van twee door haar verrichte experimenten (8.1). Dan komt een generaliserende formulering van haar analysemethode[79] aan de orde in 8.2. De eerder gepresenteerde onderwijsroute naar 'entropie' wordt in Gentners termen geanalyseerd, waarbij het nodig blijkt Gentners voorstellen te amenderen (8.3). Uit verdere literatuur blijkt een onduidelijkheid in de betekenis van het woord 'analogie' (8.4), die we proberen op te lossen door te letten op het verwijzen naar ervaringen. De bruikbaarheid van de Van Hiele niveaus wordt hierbij nagegaan (8.5). Joling[36] heeft als aanvulling op Van Hieles niveauschema de door hem zo genoemde 'niveau-invariante contextwisseling' geïntroduceerd. We zullen nagaan in hoeverre het door Joling zo genoemde gebeuren zich ook in aan Gentner[79,109] ontleende termen laat beschrijven (8.6). De bruikbaarheid van de bereikte conclusies (8.6) wordt nagegaan door een beargumenteerd antwoord te zoeken op de vraag (uit 5.2.6):

> *Is het wel juist bij een analogieredenering de aandacht alleen op overeenkomsten te richten en niet daarnaast ook op verschillen?*

In een tweede versie van de opgavenserie werd meer aandacht gevraagd voor verschillen tussen de drie te beschrijven situaties (5.2.6). Resultaten van dit tweede onderwijsexperiment worden geïnterpreteerd in het dan geformuleerde, deels aan Gentner[79,109], Joling[36] en Van Hiele[105] ontleende kader (8.7). Tenslotte wordt opgesomd welke vragen nog onopge-

lost bleven (8.8).

8.1. Gentners "structure mapping"

Onze eerdere omschrijving van 'analogie' (4.1) was deels ontleend aan de volgende omschrijving door Gentner:

> "an analogy is an assertion that a relational structure that normally applies in one domain can be applied in another domain" (Gentner[79])

Gentner omschrijft een analogie dus als een bewering. Als voorbeeld geeft ze het volgende citaat uit een populariserende uiteenzetting:

> "An electrical system can be compared to a water system. Water flows through the pipes of a water system. Electricity can be considered as 'flowing' through the wires of an electrical system.
> Wire is the pipe that electricity 'flows' through. Volts is the term for electrical pressure. Milliamperes is the term for electrical 'volume'." (Gentner[109], ontleend aan "Illinois Hobbycraft Inc., 1976") *)

Met dit citaat illustreert Gentner haar werkwijze, waarbij een analogie-bewering geanalyseerd wordt als een één-op-één afbeelding van "objecten" uit het "basisdomein" op objecten uit het "doeldomein" (Gentners termen):

> "Here the base domain is a plumbing system and the object mappings are that a water pipe is mapped onto a wire, a pump or reservoir is mapped onto a battery, a narrow constriction is mapped onto a resistor and flowing water is mapped onto electric current." (Gentner[109])

Gentner probeert een streng onderscheid te maken tussen een analogiebewering en wat zij noemt een *bewering van gelijkenis*.
Wanneer iemand op een bewering:

> Het waterstof atoom is als het zonnestelsel

zou antwoorden

> Maar de kern van het atoom is niet geel en niet heet

dan kunnen we zeggen dat die toehoorder de "pointe" heeft gemist. Gentner zegt in dat geval, dat deze hoorder de bewering heeft opgevat als een bewering van gelijkenis terwijl een analogiebewering bedoeld was.
Om het onderscheid tussen beide soorten beweringen te verhelderen wordt eerst onderscheid gemaakt tussen twee soorten eigenschappen van "objecten":
Een eigenschap die twee of meer objecten verbindt wordt een "relatie" genoemd (vb. A draait rond B), een eigenschap die aan een enkel object wordt toegekend (A is geel) wordt

*) Deze referentie van Gentner heb ik niet kunnen traceren.

een "attribuut" genoemd.
Met behulp van dit onderscheid formuleert Gentner wat we doen, wanneer we een bewering als analogiebewering opvatten:

> Wanneer we een bewering als analogiebewering opvatten, dan leidt die bewering ons ertoe een één-op-één afbeelding van basisdomein naar doeldomein te zoeken of te vinden, zodanig dat voor twee beeld-objecten (grotendeels) dezelfde "relaties" kunnen gelden als voor de bijbehorende originelen.*)

Wanneer we zo'n afbeelding vinden dan kunnen we instemmen met de als analogiebewering opgevatte bewering. Een goede verstaander van een analogiebewering verwacht volgens Gentner dus geen overeenkomst in attributen tussen beeld en origineel.
Nu is opmerkelijk dat volgens Gentners voorstel een analogiebewering zich onderscheidt door hoe deze wordt opgevat - niet door hoe deze geformuleerd is. Immers dezelfde uitspraak "het waterstofatoom is als het zonnestelsel" kan volgens Gentner ook als een bewering van gelijkenis worden opgevat.

Gentner[110] heeft mensen van diverse leeftijden beweringen voorgelegd, zoals:
- de maan is als een gloeilamp
- pannekoeken zijn als stuivers
- een meertje is als een spiegel

Aan de proefpersonen werd gevraagd deze beweringen uit te leggen. De geschreven interpretaties van proefpersonen werden geanalyseerd door voor iedere kernzin in de geschreven uitleg te beoordelen of er een relatie dan wel een attribuut werd toegeschreven aan een object. Hierbij werd geconstateerd dat het gehalte aan "relaties" in de geschreven interpretaties toeneemt met de leeftijd van de proefpersonen. De geneigdheid om een bewering op te vatten als analogiebewering komt uit deze psychologische proefnemingen dus naar voren als een eigenschap van de hoorder. Een leraar zou geïnteresseerd kunnen zijn in de vraag hoe hij een bedoelde analogiebewering kan formuleren zo dat ze meer volgens zijn bedoeling wordt opgevat. Deze vraagstelling ontbreekt echter bij Gentner.

Gentner[109] wil nagaan welke rol analogieën spelen in redeneringen die de natuurwetenschap betreffen. Ze citeert de fysicus Sheldon Glashow die een getuigenis aflegt over de rol van "analogie" in zijn werk[111]. Ook noemt ze het gebruik van analogieën in onderwijs als aanwijzing voor het belang van analogieën voor menselijk redeneren. Op deze wijze komt ze tot de volgende vraagstelling:

> "When people discuss electricity (and other complex phenomena) in analogical terms, are they thinking in terms of analogies, or merely borrowing language from one domain as a convenient way of talking about another domain? If analogies are to be taken seriously as part of the apparatus used in scientific reasoning, it must be shown that they have real conceptual effects." (Gentner[109])

(* Mijn samenvatting van Gentners[109] "interpretation rule" nummer 1 (vgl. Gentners[79] "interpretation rules", nummers 1 en 2).

en verder:

> "It could be that (...) the underlying thought processes proceed independently of analogy and that analogies merely provide a convenient terminology for the results of the process. This hypothesis, the Surface Terminology Hypothesis, contrasts with the Generative Analogy hypothesis that analogies are used in generating inferences." (Gentner[109])

Om tot een keuze tussen beide hypothesen te komen werden twee experimenten uitgevoerd. In beide experimenten spelen twee analogieën voor elektriciteit een rol: stromend water en bewegende objecten ("moving crowds"). Het tweede experiment kan een onderwijsexperiment genoemd worden, het eerste niet.
In het eerste experiment werd aan proefpersonen gevraagd spanning en stroomsterkte te vergelijken in verschillende situaties met serie- en parallelschakeling van batterijen en van weerstanden. Vervolgens werd gevraagd "te beschrijven hoe ze over elektriciteit dachten, in hun eigen woorden" en vervolgens werd in het bijzonder gevraagd of men aan stromend water of aan bewegende objecten heeft gedacht, of aan iets anders. Gentner constateert een significante correlatie tussen de uitspraken over spanning en stroomsterkte enerzijds en de door proefpersonenen gerapporteerde analogie. Proefpersonen die aan stromend water hadden gedacht deden betere voorspellingen over serie- en parallelschakeling van *batterijen*. Proefpersonen die aan bewegende objecten hadden gedacht deden daarentegen betere voorspellingen over serieschakeling van *weerstanden*.
Proefpersonen die een analogie legden tussen elektriciteit en een bewegende mensenmassa konden het toevoegen van een parallelle weerstand afbeelden op het openen van een tweede poort in een muur waarvoor de massa staat te dringen. Deze analogie leidde meer deelnemers tot de voorspelling van een grotere totale stroomsterkte dan bij gebruik van stromend water als analogie.
Bij gebruik van stromend water echter bleek serie-schakeling van batterijen te worden afgebeeld op het boven elkaar plaatsen van met elkaar verbonden waterreservoirs terwijl parallelschakeling wordt afgebeeld op het naast elkaar plaatsen van reservoirs. Deze analogie leidde meer deelnemers tot de voorspelling van een groter drukverschil als analogon voor potentiaalverschil bij serieschakeling en tot een gelijk potentiaalverschil bij parallelschakeling.
In een tweede experiment werd onderwijs in elektriciteitsleer georganiseerd voor high-school en college studenten met weinig of geen voorkennis van het onderwerp. Het onderwijs bestond uit een vel A4 waar spanning, stroomsterkte, batterij en weerstand aan de hand van een analogie werden geïntroduceerd. Dit vel papier werd individueel doorgelezen, waarna direct een aantal vragen individueel werden beantwoord om het onderwijsresultaat vast te stellen. De analogie gebruikt in de uitleg werd gevarieerd: van de 18 proefpersonen kregen er 7 uitleg met behulp van een massa muizen als analogon*) en 11 met behulp van stromend water (6 met "pomp" als analogon voor batterij en 5 met "reservoir"). Opnieuw bleek de bewegende massa (muizen) als analogon significant vaker te

*) Als analogon voor weerstand: een poortje; als analogon voor de batterij: "a loudspeaker shouting encouragement". Onduidelijk bleef hoe zulke aanmoedigingen in serie- of parallel geschakeld kunnen worden. (Ook bleef onvermeld hoe muizen reageren op zo'n aanmoediging)

leiden tot voorspelling van een hogere totale stroomsterkte bij parallelle weerstanden. De verwachting op grond van interviews en vorig experiment dat het watermodel met reservoirs tot betere voorspellingen zou leiden met betrekking tot serie- en parallelschakeling van batterijen werd echter niet bevestigd. Bij controle bleek dat de 5 studenten die uitleg hadden gekregen in termen van 'reservoirs' het onderscheid tussen serie- en parallelschakeling van reservoirs niet hadden begrepen, dit in tegenstelling tot de deelnemers aan het eerste experiment die zelf hun analogon hadden gekozen.
Gentners[109] conclusies uit beide experimenten zijn als volgt samen te vatten: 1) verschillende analogieën leiden tot een verschillend inzicht in het doeldomein, 2) een analogon is alleen nuttig in onderwijs, voor zover de (door de leraar) gewenste relationele structuur aanwezig is in de representatie van het basisdomein door de proefpersoon*), 3) het georganiseerde onderwijs was in dit opzicht onvoldoende. Gentners[109] waarneming dat verschillende analogieën leiden tot verschillende inzichten wordt door haar geïnterpreteerd als bevestiging van de hypothese "that analogies are used in generating inferences".

Aan Gentners proefnemingen kunnen we aflezen wat zij bedoelt met de door haar gebruikte woorden doeldomein en basisdomein.+) Het *doeldomein* van een analogie is het domein waarover degene die de analogiebewering gebruikt in een redenering tot voor hem nieuwe conclusies probeert te komen. Het *basisdomein* is het domein waarvan de relationele structuur wordt gebruikt - al dan niet op instigatie van een leraar - om hypothesen over het doeldomein te genereren. De noodzaak van een toetsing wordt door Gentner als volgt geformuleerd:

> "[..] these analogical predications are attempted predications, [..]; they must be checked against the person's existing knowledge of the target domain." (Gentner[109])

Deze formulering lijkt me in strijd met Gentners bewering dat analogieën "generatief" gebruikt kunnen worden, dat wil zeggen tot nieuwe kennis kunnen leiden. In plaats van te zeggen dat gegenereerde vermoedens vergeleken moeten worden met "existing knowledge" kunnen we daarom beter zeggen dat gegenereerde vermoedens kunnen leiden tot gericht experimenteren, dat is gericht opdoen van nieuwe ervaring. In Gentners experimenten kregen de proefpersonen daartoe geen gelegenheid.

8.2. Gentners "systematicity principle"

Gentners analyse van de analogiebewering "het waterstofatoom is als het zonnestelsel" leidt haar naar een volgende vraag[109]. Stel we kennen op het basisdomein de volgende relaties:

> "Distance (sun, planet)

(* "(..) an analogy is only useful to the extent that the desired relational structure is present in the person's representation of the base domain."

(+ Gentner[109] zelf omschrijft deze termen zeer terloops: ".. a known domain B (the *base* domain) ... the domain of inquiry (the *target* domain).." (Gentners cursivering).

Attractive force (sun, planet)
Revolves around (planet, sun)
More massive than (sun, planet)
Hotter than (sun, planet)"

Wanneer iemand nu zegt "het waterstofatoom is als het zonnestelsel", hoe weten we dan welke van deze relaties hij bedoelt af te beelden naar het doeldomein? Hoe kunnen we bijvoorbeeld weten dat de relatie "heter dan" niet is bedoeld?
Een mogelijk antwoord op deze vraag is dat, gezien onze kennis van het basisdomein, de relatie "heter dan" heel goed bedoeld zou kunnen zijn en dat de spreker (bij beperkte kennis van het doeldomein) deze relatie wellicht zelfs bedoelt. Een experimentele toetsing zou dan moeten volgen.
Gentner geeft daartegenover een ander antwoord. Wanneer we (impliciet) zouden weten dat een analogiebewering de bedoeling heeft om het afbeelden van *systemen van relaties* te verkennen, in plaats van losse relaties, en wanneer onze kennis van het basisdomein ook zou omvatten de volgende "hogere orde" relaties:[*)]

OMDAT [Aantrekkende kracht (zon, planeet), Draait om (planeet, zon)]
OMDAT [Massiever dan (zon, planeet), Draait om (planeet, zon)]

dan zou onze kennis van het *basisdomein* ons in staat stellen de drie onderling gerelateerde relaties "draait om", "massiever dan" en "aantrekkende kracht" prioriteit te geven boven de tot nu toe geïsoleerde relatie "heter dan".
Structurele kenmerken van het basisdomein en van de gehoorde analogiebewering zouden dan in eerste instantie de "candidate set of inferences" (kandidaat-conclusies) bepalen en pas daarna zou een toetsing op "correctheid" plaats vinden. Gentner[79]:

"Unless we distinguish the structural rules for generating the candidate set from other conceptual criteria (such as appropriateness, insightfulness or correctness) that can be applied to the candidate set, we rob analogy of its power to convey new information. Just as we can perform a syntactic analysis of what a sentence conveys, even when the information it conveys is semantically novel or implausible (e.g., "Man bites dog"), so we must be able to derive a structural analysis of an analogy that does not depend on a priori conceptual plausibility. Of course, our ultimate acceptance of the analogy will depend on whether its candidate set of inferences is plausible; but this is a separate matter." (Gentner[79], voetnoot 11)

De interpretatie van een analogiebewering moet volgens Gentner dus in eerste instantie als onafhankelijk van aanwezige kennis van het doeldomein beschreven worden, omdat, als interpretatie-mogelijkheden meteen worden getoetst aan bestaande kennis van het doeldomein, de analogiebewering niet tot voor ons nieuwe conclusies kan leiden. Pas in tweede instantie is daarom een toetsing voorzien.
Samengevat kunnen we zeggen dat volgens Gentner[79,109] het interpreteren van een analogiebewering als volgt gebeurt:

(* Gentners notatie laat zich zo vertalen: OMDAT de zon de planeet aantrekt, draait de planeet om de zon. In deze bewering heet "OMDAT" een tweede-orde relatie, omdat enkele eerste-orde relaties met elkaar in verband worden gebracht.

- objecten uit het basisdomein worden één op één afgebeeld op objecten uit het doeldomein,
- attributen van deze objecten worden niet (of nauwelijks) afgebeeld,*)
- er wordt geprobeerd relaties tussen objecten in het basisdomein af te beelden op gelijknamige relaties tussen corresponderende objecten in het doeldomein,
- met voorkeur worden die relaties afgebeeld die betrokken zijn in hogere orde relaties,
- tenslotte worden de kandidaat-conclusies beoordeeld op plausibiliteit of correctheid.

In deze schematische beschrijving is verondersteld dat het afbeelden van de objecten geheel voorafgaat aan het afbeelden van de relaties. Gentner[79] geeft in een voetnoot aan dat deze schematisering de werkelijke volgorde wellicht niet goed weergeeft:

> "In this discussion I have made the simplifying assumption that, in comprehension of analogy, the hearer starts with the object correspondences and then maps accross the relations. The actual order of processing is clearly variable. If the object assignment is left unspecified, the hearer can use knowledge about matching relations to decide on the object correspondences. Therefore, it is more accurate to replace the statement that the object correspondences are decided before the relational mappings *begin* with the weaker statement that the object correspondences are decided before the relational mappings are *finished*. (Gentner[79], voetnoot 10)

Het beschrijven van de "werkelijke volgorde" wordt door Gentner dus niet erg belangrijk gevonden. Belangrijk is voor haar om een zodanige reconstructie van het proces te geven dat begrijpelijk wordt, hoe een analogiebewering soms een verrassend licht kan werpen op iets dat we nog niet zo goed kennen.
De "werkelijke volgorde" wordt belangrijker als we ons de situatie proberen voor te stellen waarin een analogiebewering functioneert. Verschillende situaties zijn denkbaar. Als één extreem kunnen we noemen: een situatie met een leraar voor een klas, die nieuwe informatie probeert over te brengen (Gentner "convey new information", voetnoot 11) aan zwijgende maar oplettende leerlingen. Als tweede extreem: een onderzoeker die in stilte een redenering opstelt, of een groep onderzoekers die beraadslaagt over een probleem.

> "I was lead to the group SU(2) x U(1) by analogy with the approximate isospin-hypercharge group which characterizes strong interaction [...]
> Part of the motivation for introducing a fourth quark was based on our mistaken notions of hadron spectroscopy. But we also wished to enforce an analogy between the weak leptonic current and the weak hadronic current." (Sheldon Glashow[111], ook geciteerd door Gentner[109])

Welke van deze situaties kunnen we ons voorstellen bij "the statement that the object correspondences are decided before the relational mappings *begin*" (Gentner[79], voetnoot 10) ?
Wel: als het afbeelden van relaties nog niet begonnen is, maar al wel objecten uit beide domeinen op elkaar zijn afgebeeld, dan is die afbeelding niet gemotiveerd door overeenkomst in attributen (want de hoorders richten zich op het interpreteren van een analogie -

---

(* Gentner[79], afbeeldingsregel 1: "Discard attributes of objects", Gentner[109], regel 1: "attributes (..) are not strongly predicated".

nemen we aan), en ze is ook niet gemotiveerd door overeenkomst in relaties. Een motivering voor deze object-correspondenties ontbreekt dan, in Gentners beschrijving. Deze beschrijving kan juist zijn voor een situatie waarin de spreker de objectcorrespondenties dicteert (zie het citaat afkomstig van "Illinois Hobbycraft Inc." in 8.1). Het gaat dan om eenrichtingverkeer, zoals dat in onderwijs wel eens kan voorkomen. De onderwijsaanpak is dan niet *probleemstellend* te noemen (5.2.3) omdat de "nieuwe voorstellen" met betrekking tot het nieuwe domein niet worden gemotiveerd.
De situatie dat "the object correspondences are decided before the relational mappings are *finished*" (Gentner[79], voetnoot 10) daarentegen kunnen we ons proberen voor te stellen in een onderzoekssituatie, als volgt. Zonder analogieredenering, wellicht door ervaring, zijn er al enige relaties geformuleerd die betrekking hebben op het doeldomein. Vervolgens heeft een overeenkomst met relaties uit een beter bekend domein de aandacht getrokken. Zodra die overeenkomst in woorden is gevat kunnen we de overeenkomstige relaties "gelijknamig" noemen. Er is dan immers een naam (bijvoorbeeld "draaien om") voor hun overeenkomst beschikbaar. De verschillende objecten in beide gelijknamige relaties zijn daarmee één op één op elkaar afgebeeld ("object correspondences are decided"). Aangezien het basisdomein "beter bekend" is dan het doeldomein, kent men tussen de afgebeelde objecten uit het basisdomein ook enige relaties waarvoor nog géén gelijknamige relatie op het doeldomein is geformuleerd ("relational mappings" nog niet voltooid). Het bij wijze van hypothese afbeelden van déze relaties op het doeldomein leidt dan tot de "candidate set of inferences" die vervolgens getoetst worden. In de hier geschetste situatie zijn de objectcorrespondenties wel gemotiveerd, namelijk door de gelijk-genoemde relaties.

Aangezien het Gentners bedoeling was, te laten zien dat analogiebeweringen serieus te nemen zijn als wetenschappelijke "tools of thought" mogen we concluderen dat haar beschrijving te algemeen is voor dit doel. Door de werkelijke volgorde der gebeurtenissen weg te schematiseren blijft een beschrijving over die geen onderscheid maakt tussen de analogiebewering als onderdeel van een serieus te nemen redenering en de analogiebewering als onderdeel van een demagogisch*) betoog, zoals dat in onderwijs wel eens voor kan komen.
Aan een analogiebewering als serieus te nemen deel van een redenering of discussie stellen we daarom de extra eis dat objectcorrespondenties gemotiveerd worden door verwijzing naar gelijknamige relaties in beide domeinen. Dit betekent dat *niet alle* relaties die uiteindelijk het doeldomein gaan beschrijven als resultaat van de analogie gevonden kunnen worden, immers er moeten al enige relaties bekend zijn op het doeldomein, om de objectcorrespondenties te kunnen motiveren.
We zien daarom een dubbele rol voor de ervaring: ten eerste moet men op het doeldomein al enige ervaring hebben opgedaan. Deze ervaring kan leiden tot formuleren van enige relaties, welke het mogelijk maken een analogiebewering te doen, welke het nieuwe ervaringsdomein in verband brengt met een ander, beter bekend domein. Vervolgens is opnieuw ervaring nodig om de via deze analogiebewering ontstane vermoede relaties te toetsen.

(* We noemen een betoog "demagogisch" als een spreker zijn beweringen niet motiveert (op voor de toehoorders controleerbare wijze).

8.3. Objecten en relaties?

In hoofdstuk 4 (4.5) introduceerden we een analogieredenering die leidde tot het vermoeden van een grootheid X met de eigenschappen van entropie. Om de bruikbaarheid van Gentners terminologie te beoordelen, analyseren we deze analogie-redenering hier in haar termen.
Als basisdomein kunnen we aanwijzen de situatie waar water stroomt van een hoger naar een lager gelegen reservoir via een turbine. De turbine verricht arbeid op een vliegwiel.
Als "objecten" komen in aanmerking: de twee waterreservoirs, de turbine en het vliegwiel.
We introduceerden een tweede situatie die eveneens als basisdomein functioneerde, met objecten: twee gasporties (de linker en de rechter), een zuiger en een vliegwiel.
Als doeldomein moeten we die situatie aanwijzen, waar de aanvankelijk onbekende grootheid X met zijn relaties eerst wordt vermoed op grond van de analogieredenering, alvorens dat vermoeden wordt gecontroleerd. Deze rol van doeldomein werd vervuld door de situatie met twee reservoirs (heet en koud), een cilinder met inhoud en een "traag voorwerp".
Door de volgorde van de opsomming zijn de correspondenties tussen de objecten hierboven al aangegeven. In 4.5 werden deze correspondenties gemotiveerd door de volgende gelijknamige relaties te noemen:

A - zowel tussen de twee gasporties als tussen de twee waterbakken als tussen de hete en de koude voorraad bestaat *een verschil in een intensieve grootheid.*
B - zowel tussen de twee gasporties als tussen de twee waterbakken als tussen de hete en de koude voorraad geschiedt *overdracht van energie.*
C - zowel tussen de twee gasporties als tussen de twee waterbakken geschiedt *overdracht van nog een andere extensieve grootheid.* Voor de situatie met temperatuurverschil is zo'n grootheid nog niet bekend.
D - Zowel de turbine als de zuiger als de cilinder-met-inhoud *hebben contact met* de beide objecten waartussen het verschil in intensieve grootheid bestaat.
E - Zowel de turbine als de zuiger als de cilinder-met-inhoud *verrichten arbeid op* een vierde object (een vliegwiel of ander "traag voorwerp").

Nadat de objectcorrespondenties werden gemotiveerd, volgde een redenering waarin niet zozeer het afbeelden van objecten op andere objecten een rol speelt, als wel het afbeelden van grootheden op andere grootheden.
Wanneer we eenmaal de hooggeplaatste bak met inhoud een "object" hebben genoemd, dan is de hoogte van het water in deze bak een eigenschap van dat "object", en wel in Gentners termen een "attribuut", omdat het een eigenschap betreft die aan een enkel object wordt toegekend.
Attributen worden in onze analogieredenering (4.5) dus wel afgebeeld. Ze worden afgebeeld op andere attributen (hoogte wordt afgebeeld op druk) van andere objecten (hoogte van de waterbak wordt afgebeeld op druk van de gasportie). De volgende attributen werden met elkaar in verband gebracht:

hoge/lage bak water	beide gasporties	hete/koude voorraad
hoogte waterspiegel	→ druk	→ temperatuur
massa water	→ volume	→ ?
potentiële energie	→ inwendige energie	→ inwendige energie

De attribuut-correspondenties tussen het waterdomein en het gasdomein werden, net als de objectcorrespondenties, gemotiveerd door het formuleren van gelijknamige relaties die gelden voor verschillende attributen van verschillende objecten in beide domeinen:

P - De energieverandering van de linker/rechter waterbak *is gelijk aan het produkt van* de hoogte van de waterspiegel van die waterbak en de verandering van de massa water van die bak. Een gelijknamige relatie geldt tussen (respectievelijk): de energieverandering van de linker/rechter gasportie, de druk van die gasportie en het volume.

Q - De verandering van de massa water van de linker bak *is in grootte gelijk, maar tegengesteld aan* de verandering van de massa water van de rechter bak. Een gelijknamige relatie geldt tussen de volumes van de beide gasporties.

R - De energieveranderingen van de beide waterbakken *verhouden zich qua grootte zoals* de hoogten van hun waterspiegels, *maar zijn tegengesteld.* Een gelijknamige relatie geldt voor: de energieveranderingen van de beide gasporties en de drukken van deze gasporties.

O - De arbeid op het vliegwiel *verhoudt zich tot* de energieverandering van de linkerbak *zoals het verschil van* de hoogten van de waterspiegels *tot* de hoogte van de waterspiegel in de linkerbak. Een gelijknamige relatie geldt voor: de arbeid op het vliegwiel, de energieverandering van de linker gasportie en de drukken van deze gasporties.*)

(* In verkorte, aan Gentner[79.109] ontleende notatie:

P (E_{bak}, m_{bak}, h_{bak})	→ P (U_{gas}, V_{gas}, $-p_{gas}$)	→ P ($U_{voorraad}$, $?_{voorraad}$, $T_{voorraad}$)
Q ($m_{bak\ links}$, $m_{bak\ rechts}$)	→ Q ($V_{gas\ l}$, $V_{gas\ r}$)	→ Q ($?_{voorraad\ l}$, $?_{voorraad\ r}$)
R ($E_{bak\ l}$, $E_{bak\ r}$, $h_{bak\ l}$, $h_{bak\ r}$)	→ R ($U_{gas\ l}$, $U_{gas\ r}$, $-p_{gas\ l}$, $-p_{gas\ r}$)	→ R ($U_{v\ l}$, $U_{v\ r}$, $T_{v\ l}$, $T_{v\ r}$)
O (w_{vlieg}, $E_{bak\ l}$, $h_{gas\ l}$, $h_{gas\ r}$)	→ O (w_{vlieg}, $U_{gas\ l}$, $-p_{gas\ l}$, $-p_{gas\ r}$)	→ O (w_{traag}, $U_{v\ l}$, $T_{v\ l}$, $T_{v\ r}$)

waarin P, Q, R en O relaties zijn die als volgt zijn te omschrijven onafhankelijk van het domein waarop ze worden betrokken:

P (x,y,z) :	$\delta x = z.\delta y$
Q (x,y) :	$\delta x = -\delta y$
R (x,y,z,a) :	$\delta x/z = -\delta y/a$
O (x,y,z,a) :	$x/(-\delta y) = (z-a)/z$ (=efficiëntie)

Deze voetnoot demonstreert dat Gentners notatie geschikt is voor het overzichtelijk noteren van relaties. We zijn echter niet van deze notatie afhankelijk als we de mogelijkheid van gelijknamige relaties willen onderzoeken, zoals we hierboven lieten zien.

Voor de beide basisdomeinen werden de boven opgesomde relaties tevoren bekend verondersteld of zonder gebruik van analogie beredeneerd (4.5). Hierdoor werd een correspondentie tussen attributen (m→V, h→-p) beredeneerd, die echter niets nieuws opleverde, omdat de betrokken relaties al op andere wijze gevonden waren.
Voor het doeldomein waren géén van de relaties P, Q, R, O tevoren bekend. Wel werden als bekend genoemd de opgesomde relaties A, B, D, E tussen objecten, waarbij ook de objecten uit het doeldomein betrokken waren (relatie C ontbrak voor het doeldomein). Twee van deze relaties:

"-Er is een verschil in een intensieve grootheid" (A)
"-Er kan arbeid verricht worden op een werktuig" (E) (zie 4.5)

werden in samenhang genoemd: het temperatuurverschil (verschil in een intensieve grootheid) is in het doeldomein voorwaarde voor het optreden van arbeid.

OMDAT [temperatuurverschil (linkervoorraad, rechtervoorraad), arbeid (cilinder, traag voorwerp)]

Deze relatie motiveert het afbeelden van h respectievelijk p in de beide basisdomeinen op T in het doeldomein, immers in de beide basisdomeinen kenden we h_l - h_r respectievelijk p_l - p_r als voorwaarde voor arbeid.

We hebben op dat moment dus een gemotiveerde afbeelding van de objecten uit beide basisdomeinen op het doeldomein en bovendien een gemotiveerde afbeelding van een enkel attribuut gerealiseerd.
Voor de attributen van de objecten in de beide basisdomeinen waren de gelijknamige relaties P, Q, R en O geformuleerd, waarvoor nog geen beeld in het doeldomein bekend was. We veronderstelden in 4.5 vervolgens dat de gemotiveerde correspondenties van de objecten en van een enkel attribuut voor de lezer een voldoende motivering zou opleveren, om ook het afbeelden van deze relaties *als hypothese te willen proberen*. Hiertoe werd een tot nu toe onbekend attribuut X van de beide voorraden verondersteld, als beeld voor de attributen $m_{\text{bak water}}$ en V_{gas}. Onze analogieredenering (4.5) voldoet dus aan de extra voorwaarde (zie 8.2) dat het afbeelden van objecten (en attributen) wordt gemotiveerd door enkele relaties die men al kende met betrekking tot het doeldomein.

We hebben intussen opgemerkt dat Gentners[79,109] voorstel dat in een analogieredenering *attributen niet* (of nauwelijks) *worden afgebeeld* onnodig beperkend is. Belangrijk is, dat attributen niet op gelijknamige attributen worden afgebeeld, terwijl relaties wél op gelijknamige relaties worden afgebeeld.
Attributen gedragen zich hierbij zoals objecten: die worden immers ook niet op gelijknamige objecten afgebeeld. Hoewel Gentner bij de formulering van regels het afbeelden van attributen uitsluit of als onbelangrijk voorstelt, blijkt uit een door haar gegeven voorbeeld

dat ze met deze mogelijkheid toch rekening houdt.*)
Aangezien 'attributen' en 'objecten' beide kunnen worden afgebeeld op ongelijknamige andere attributen en objecten, en aangezien in beide gevallen een overeenkomst in *relaties* (tussen objecten, of tussen attributen van objecten) als motivering nodig is, kan de vraag gesteld worden of het nodig is objecten van attributen te onderscheiden.
Gentner zelf omschrijft de betekenis van 'object' als volgt:

> "These 'objects' may be clear entities (e.g., 'rabbits'), component parts of a larger object (e.g., 'rabbits ear'), or even coherent combinations of smaller units (e.g., 'herd of rabbits'); the important point is that they function as wholes at a given level of organisation'" (Gentner[79])

en in het andere artikel:

> "The important point is, once the objects are determined they will be treated as objects in the mapping." (Gentner[109])

De rol van objecten bij het afbeelden is volgens Gentner: **1)** dat zij één op één worden afgebeeld naar het andere domein, **2)** dat objecten binnen een domein samen voorkomen in relaties. Beide eigenschappen kunnen echter ook worden toegeschreven aan attributen van objecten, zoals we zagen. We concluderen daarom dat het onderscheiden tussen objecten en attributen niet relevant is voor een analogieredenering.
In plaats van te spreken over objecten en attributen kunnen we spreken over *termen* die voorkomen in *relaties*. Of de term naar een solide object verwijst, dan wel naar een natuurkundige grootheid of naar nog iets anders doet voor Gentners beschrijving van de analogieredenering uiteindelijk niet ter zake. Deze door mij voorgestelde schematisering klopt goed met sommige van Gentners uitspraken:

> "Knowledge is represented here as propositional networks of nodes and predicates (..). The nodes represent concepts treated as wholes; the predicates applied to the nodes express propositions about the concepts". (Gentner[79])

Gentner spreekt hier van 'concepten' die als knooppunten optreden in een netwerk van uitspraken. Het zijn deze 'knooppunten' die volgens haar bij de interpretatie van een analogiebewering worden afgebeeld. In volgende alinea's is echter steeds sprake van "object nodes" (object-knooppunten) waarmee wordt gesuggereerd dat alleen sommige concepten (degenen die naar objecten verwijzen) de rol van knooppunt vervullen. Deze suggestie is zowel onduidelijk als overbodig.+)
Gentners verwantschap met de 'concept-mapping' traditie komt nu duidelijk naar voren, immers ook daar wordt kennis voorgesteld als een netwerk met concepten als knooppunten van relaties. Hoofdstuk 6 eindigde met de vraag naar de rol van ervaringen bij het formuleren van wat we in de fysica een 'relatie' noemen. Daar werd opgemerkt dat 'concept

---

(* Bij Gentner[79] vinden we "discard attributes of objects" als regel. Bij Gentner[109]: "attributes (..) are not strongly predicated", maar bij een gegeven voorbeeld blijkt het zinvol om attributen wél af te beelden "onto arbitrarily *different* attributes in the target" (Gentners[109] voetnoot 4).

(+ Onduidelijk: omdat 'objecten' o.a. omschreven worden als ietsen die bij het afbeelden als object worden behandeld.

mapping' zich met deze vraag niet bezighoudt, omdat alleen op het samen gebruiken (het associëren) van woorden wordt gelet. We concludeerden dat in concept mapping 'relaties' alleen als 'associaties' worden beschreven. Eenzelfde opmerking geldt voor Gentner, als zij de interpretatie van een analogiebewering beschrijft door alleen te letten op structurele eigenschappen (Gentners voetnoot 11, geciteerd in 8.2).

Samengevat kunnen we zeggen dat de volgende beschrijving bruikbaar is gebleken voor de in 4.5 gepresenteerde analogieredenering die (naar we veronderstellen) door de lezer als fysisch acceptabel is beoordeeld:

- Termen uit het basisdomein worden één op één afgebeeld op termen uit het doeldomein.
- Er wordt geprobeerd relaties tussen termen in het basisdomein af te beelden op gelijknamige relaties tussen corresponderende termen in het doeldomein.
- Met voorkeur worden die relaties afgebeeld die betrokken zijn in hogere orde relaties.*)
- Het afbeelden van relaties gaat deels vooraf aan (en motiveert dan) het afbeelden van termen.
- Die relaties waarvoor in het doeldomein nog geen gelijknamige relatie door ervaring is gevonden worden bij wijze van hypothese afgebeeld. Dit gebeurt na het afbeelden der termen, geleid door de eerder gemotiveerde correspondenties.
- Tenslotte worden de kandidaat-conclusies aan de ervaring getoetst.

Vergelijken we deze beschrijving met de eerder aan Gentner ontleende beschrijving (p.183) dan blijkt dat we de volgende aan haar ontleende ideeën tot nu toe hebben kunnen beamen: 1) een analogieredenering beschrijven met een één-op-één afbeelding, 2) de voorkeur voor hogere orde relaties, 3) de "generatieve" rol van analogiebeweringen in een redenering, 4) het spreken van kandidaat-conclusies die nog moeten worden getoetst.

8.4. Spraakverwarring rond 'analogie'

Wong[112] heeft kritiek geuit op de door Gentner[109] getrokken conclusie (zie 8.1) dat een reeds "goed gestructureerd" (Wong) basisdomein nodig is om tot een "generatief" gebruik van een analogiebewering te komen. Wong[112] meent dat analogieredeneringen ook produktief kunnen zijn "in afwezigheid van een tevoren gevormd schema, dat wil zeggen, wanneer voorkennis incompleet en slecht georganiseerd is". Om deze bewering te staven presenteert hij resultaten van interviews waarbij geïnterviewden de beschikking kregen over een gasmeetspuit, waarmee zij konden constateren dat, als de zuiger wordt ingeduwd met de opening afgesloten, de kracht toeneemt die moet worden uitgeoefend om de zuiger ingeduwd te houden. De interviewer vroeg de geïnterviewden onder andere "een analogie te creëren met het doel te komen tot een beter begrip en tot oplossing van hun zelfgestelde

*) In beide basisdomeinen werden de besproken relaties onderling gerelateerde door een afleiding (zie 4.5).

vragen". De door de geïnterviewden naar voren gebrachte analogieën ("moleculen zijn als rubberballen", "..als mensen op een goed bezocht feestje") vertonen sporen van eerder onderwijs. Wat Wong benoemt als "veranderingen in het begrip", als gevolg van het hanteren van zelfgekozen analogieën is bijna steeds ook te interpreteren als reconstructie van een halfvergeten maar langzaam weer bovenkomend verhaal dat men ooit heeft aangehoord. Ik ben dus niet overtuigd dat het hier "generatief" gebruik van analogieën betreft, het zou bijna steeds ook reproduktief kunnen zijn.

Een oorzaak van het getoonde meningsverschil zou erin gelegen kunnen zijn dat het woord 'analogie' in verschillende betekenissen wordt gebruikt, waarbij niet steeds de nodige duidelijkheid wordt geschapen.
Een groot aantal onderzoekers[113,74,114,115,116] spreekt van 'analogie' in gevallen waar leerlingen voor het eerst een aantal verschillende ervaringen gaan benoemen als in zeker opzicht hetzelfde (waarna de overeenkomst eventueel wordt benoemd), daarmee tot uitdrukking brengend dat ze in die ervaringen eenzelfde eigenschap zijn gaan opmerken, die ze wellicht eerder niet zagen.
Zowel Clement[114] als Brown[115] bespreken het probleem dat leerlingen niet willen spreken van een opwaartse kracht uitgeoefend door een tafel op een boek, wanneer het boek op de tafel ligt. Wanneer daarentegen een metalen veer wordt ingedrukt met de hand, zeggen ze wel dat de veer een kracht uitoefent op de hand. Clement en Brown ondernemen nu allerlei activiteiten waardoor leerlingen overeenkomstige eigenschappen in beide situaties gaan opmerken: door via een spiegeltje op de tafel een lichtbundel te projecteren op een wand, wordt bijv. zichtbaar gemaakt dat de tafel enigszins deformeert als er iets zwaars op wordt gelegd. Verder worden allerlei situaties getoond en besproken die alle zo'n deformatie vertonen, maar in verschillende mate, zodat er een continuüm aan mogelijkheden zichtbaar wordt met aan de ene kant de goed zichtbare uitwijking van de veer en anderzijds de nauwelijks waarneembare deformatie van de tafel. Zodra leerlingen dan uitspreken dat al deze situaties weliswaar in verschillende mate toch alle dezelfde kwaliteit 'veerachtigheid' vertonen, zeggen Clement en Brown dat er een analogie tussen de verschillende situaties is opgemerkt.
Gick en Holyoak[113] hebben aan proefpersonen *verhalen* verteld, waarna gevraagd werd een opgave op te lossen. Deze opgave vertoonde een (te beschrijven) overeenkomst met een probleem dat door de held uit het verhaal was opgelost. Het verhaal ging bijvoorbeeld over de verovering van een burcht met meer dan één toegangsweg, en de opgave betrof de keuze van een methode ter bestrijding van een tumor (bestraling met meer dan één röntgenbundel). Gick en Holyoak vonden dat de gewenste oplossing van het probleem vaker gevonden werd wanneer aan de proefpersonen *twee* verhalen waren verteld, die elk op andere wijze de voor de oplossing nodige eigenschap vertoonden. Zij concludeerden hieruit dat "schemavorming" nodig is om tot een oplossing te komen en dat zulke schemavorming wordt bevorderd door afstand te nemen van een enkele verhaalde situatie.
Zowel bij Clement[114] en Brown[115] als bij Gick en Holyoak[113] wordt een collectie ervaringen voor 't eerst geanalyseerd op het vóórkomen van een eigenschap waarop de experimentator de aandacht probeert te richten. Bij het afstand nemen van de bijzonderheden van de verschillende situaties ontstaat een eerste generalisatie die meteen 'bronsituaties' en 'doelsituatie' beide omvat (Holyoak's termen). Didactisch verschilt deze situatie van diegene waarover Gentner het heeft, waar op het 'basisdomein' al een stel samenhangende

relaties geformuleerd is. Hierbij is afstand genomen van de bijzonderheden van de diverse ervaringen op dat domein, immers aandacht krijgen vooral de relaties en hun samenhang. Dit blijkt uit de wijze waarop de analogiebewering (zoals door Gentner omschreven) wordt opgevat (zie 8.1 en 8.2).
Duit[80] sluit zich in zijn overzichtsartikel zowel bij Gentner als bij de andere genoemde onderzoekers aan. Hij doet dit door een analogie te omschrijven als "a comparison of structures between two domains", waarbij hij in het midden laat wat "structures" hier inhoudt. In veel van de hierboven (ook door Duit) besproken voorbeelden van "analogie-en" voldoet de omschrijving "a comparison of two domains" immers beter.

Stavy en Tirosh[116] hebben leerlingen twee vraagstukken voorgelegd die oppervlakkige gelijkenis vertonen namelijk: "Consider a *line segment*, Divide it into two equal parts. Divide one half into two equal parts. Continue dividing in the same way. Will this process come to and end?" en vervolgens dezelfde vraag nog eens voor "*a piece of copper wire*" in plaats van het lijnstuk. Volgens Stavy en Tirosh zijn de juiste antwoorden 'neen' voor een geometrische object (het lijnsegment) en 'ja' voor het materiële object. Beide vragen werden gesteld op verschillende stukken papier, het eerste vraagstuk temidden van geometrische vraagstukken, het tweede temidden van natuurkundige vraagstukken. Niettemin gaf 67% van de leerlingen op beide vragen een gelijkluidend antwoord, 27% gaf de twee goedgekeurde antwoorden en 6% antwoordde verkeerd-om. Stavy en Tirosh concluderen dat 67% van de leerlingen hier een analogie ziet, waar de betreffende wetenschappen een dergelijke analogie ontkennen.
Er hoeft echter van een 'analogie' in de zin van een 'structuurafbeelding' (Gentner) geen sprake te zijn. Het kan zijn dat leerlingen eenvoudig een gelijkenis tussen beide vraagstukken opmerken en op grond daarvan gelijkluidend antwoorden. Dat wij beide termen 'lijnstuk' en 'stuk koperdraad' situeren in twee netwerken van relaties betekent niet dat leerlingen dit ook doen. Wanneer Stavy en Tirosh spreken van

> "situations that are not analogical from a scientific point of view, but have similar perceptual properties and might thus be perceived as analogical by students"[116]

dan is "analogical" dus vermoedelijk gebruikt in twee betekenissen, die door de auteurs niet worden onderscheiden.
Het niet streng onderscheiden tussen een 'domein' of 'situatie' enerzijds en de "structuur van" dat domein of die situatie anderzijds leidt dus soms tot conclusies die meer suggereren dan wordt waargemaakt, zoals we bij Wong[112] en bij Stavy en Tirosh[116] opmerkten. Gentner[109] heeft tot zo'n onderscheid minstens een bruikbare aanzet gegeven (8.1 t/m 8.3).

8.5. Een domein en de 'structuur van' een domein

De volgende uitspraak van Van Hiele werd in 7.3 geciteerd:

> "At each level one is explicitly busy with the internal ordering of the previous level"[105] (p.96)

Deze uitspraak doet vermoeden dat de twee betekenissen van 'analogie' betrekking hebben

op verschillende momenten in het leerproces en dat deze momenten zich laten onderscheiden in termen van Van Hiele niveaus.
Brown[115] bekritiseert Gentners analyse van analogie. Hij meent dat volgens Gentner een analogie de student ertoe leidt om de doel-situatie op een meer "abstracte" wijze te gaan zien. Brown vervolgt dan:

> "Although this is arguably an important point for the student to eventually reach, recent research on bridging analogies paints a different picture of why, *at least initially*, bridging analogies are effective" (Brown[115], cursivering toegevoegd)

Brown[115] kritiseert dus Gentners analyse, maar hij houdt wel de mogelijkheid open dat Gentners analyse zinvol zou kunnen zijn voor een later moment in het leerproces. We zullen nu met behulp van Van Hiele niveaus beredeneren dat dit inderdaad het geval is. Wanneer bij het vergelijken van ervaringen - of van verhalen over ervaringen - de aandacht getrokken wordt door een nog niet eerder opgemerkte overeenkomst (zoals de 'veerkracht' van zowel springveren als tafels) waarna woorden gezocht worden om die overeenkomst gedisciplineerd te benoemen, dan noemen we dat stadium: begin van overgang naar beschrijvend niveau, voor die klasse van ervaringen (zie 7.2).
In Gentners beschrijving van analogie speelt ervaring een geringere rol. Volgens het hier verdedigde voorstel (8.2) gaat ervaring vooraf aan de analogieredenering (om voldoende relaties op het basisdomein en enkele relaties op het doeldomein te leren kennen) en ervaring volgt op de analogieredenering (om gerezen vermoedens te toetsen) maar de analogieredenering zelf houdt zich niet direct bezig met handtastelijke ervaringen, maar met de al dan niet overeenkomstige vorm van eerder geformuleerde en van vermoede relaties. We kunnen ook zeggen dat hier ervaring wordt opgedaan met structuren in *eigen, eerder gedane uitspraken*, dus een structuur in het eigen handelen van het voorafgaande niveau. Daarmee is Gentners analogieredenering geplaatst op een 'volgend niveau' dan dat, waar generalisaties uit het vergelijken van belevenissen voortkomen, dus: op beschrijvend niveau.
We kunnen een analogiebewering nu dus op twee manieren onderscheiden van een bewering-van-gelijkenis, namelijk:

- door te letten op het soort overeenkomsten dat wordt gezocht: attributen of relaties (8.1).
- door te letten op datgene wat vergeleken wordt: verhaalde ervaringen (grondniveau) of regels die elk generaliseren over een domein van ervaringen (beschrijvend niveau).

In 8.3 lieten we zien dat in Gentners zuiver "syntactische" werkwijze geen onderscheid tussen objecten en attributen kan worden gemaakt. Wel kunnen attributen/objecten worden onderscheiden van relaties. Zodra via de Van Hiele niveaus aandacht wordt besteed aan de verwijzende betekenis ("datgene wat", tweede criterium) is deze zuiver syntactische werkwijze verlaten.
In dat geval kan wellicht ook het onderscheid tussen objecten en attributen opnieuw zin

krijgen.*)

Aangezien Holyoak's (Clement, Brown, etc.) betekenis van 'analogie' ook gevat kan worden met het meer gebruikelijke woordje 'gelijkenis' of 'overeenkomst' stellen we voor 'analogie' hier alleen te gebruiken voor een structuur-afbeelding zoals eerder geanalyseerd (zie 8.3, slot), waarbij de relatie met ervaringen wordt gelegd via de Van Hiele niveaus.

8.6. Analogieredenering en Van Hiele niveaus

In Gentners experimenten (8.1) werd geen aandacht besteed aan de rol van ervaringen bij een analogieredenering. Joling[36] rapporteerde een onderwijsexperiment waarbij expliciet gebruik werd gemaakt van de Van Hiele niveaus. Onder zijn leiding realiseerden studenten iets waarvan we zullen tonen dat het een 'analogieredenering' genoemd kan worden. Joling zelf sprak van een "niveau-invariante contextwisseling". We zullen laten zien dat Jolings conclusies zich deels laten vertalen in de termen die we eerder (8.1 t/m 8.3) aan de hand van Gentners werk ontwikkelden.

In zijn onderwijsexperiment heeft Joling[36] ervaringen met het stapelen van pingpongballen gebruikt om te komen tot een analyse van de ervaring dat er anorganische stoffen (zouten) bestaan met een identieke chemische samenstelling, maar verschillend van kleur, dichtheid en vormingsenthalpie.
De eerder geanalyseerde ervaringen met pingpongballen leidden studenten ertoe verschillende kristalstructuren te gaan toeschrijven aan zulke zouten. In zo'n kristalstructuurbeschrijving functioneren 'ionen' voor studenten als wat Joling noemt "niet-afzonderbare structuurelementen". Hij bedoelt hiermee dat bijvoorbeeld het natriumion in het NaCl-rooster door zijn ruimtelijke relaties met omringende structuurelementen is bepaald, waardoor we terecht kunnen spreken van 'het' natriumion in 'het' NaCl-rooster.
Om dit onderwijsresultaat voor te bereiden werden de eigenschappen van pingpongballenstapels door studenten handelend verkend tot aan het moment dat enige eigenschappen van verschillende typen 'stapelingen' konden worden benoemd. Hierbij werd afstand genomen van de toevallige vorm van de visueel waarneembare en hanteerbare stapels, omdat de onderscheiden 'stapelingen' oneindig uitgebreid werden gedacht. Een 'stapeling' wordt dan gekenmerkt niet meer door zijn vorm maar door een klein aantal 'structuurelementen' die elk gekenmerkt worden door hun (hier: ruimtelijke) relaties met elk van de andere structuurelementen. Via het handelen met pingpongballen ontstaat zo voor studenten 'de bol' als structuurelement, hier in het bijzonder als element in verschillende typen oneindig uitgebreide 'bolstapelingen'.+)

(* In de scheikunde vormen relaties tussen stoffen (kan ontstaan uit, kan reageren met) een onderwerp van studie. Aan elk van de gebruikte stoffen kunnen ook attributen worden toegeschreven (kookpunt, kleur, ..) maar deze attributen worden in de scheikunde pas interessant zodra men ze onderling gaat vergelijken - waarbij dan weer relaties ontstaan. Dit wijst erop dat relaties (als onderscheiden van attributen) wellicht bruikbaar zijn als een kenmerk van beschrijvend niveau.

(+ Het is dus een bepaalde soort meetkunde die hier ontstaat. 'Meetkunde' als vak in het VWO hebben de studenten al gehad, maar deze door Joling beoogde meetkunde kenden zij nog niet.

Het kostte enige tijd en moeite om los te komen van de concrete vorm van de gebouwde stapels, dat is, het kostte moeite om in die stapels bijvoorbeeld 'de hexagonale stapeling' te gaan zien, en Joling spreekt diverse malen zijn twijfel uit of de vereiste kwaliteit van argumenteren wel geheel is bereikt[36] (p.150, 172). Nadat de ontstane stapelingen als 'roostertypen' zijn toegeschreven aan anorganische zouten ter beschrijving van de geconstateerde verscheidenheid in eigenschappen van zulke zouten, merkt Joling een begripsprobleem op: sommige studenten schrijven een vaste straal toe aan ionen, terwijl het onderwijs op zeker moment uitgaat van puntladingen waartussen de onderlinge afstand bepaald wordt door een evenwicht tussen aantrekken en afstoten[36] (p.163-165). Joling concludeert hieruit dat het gebruik van pingpongballen heeft geleid tot ongewenste toepassing van een voorwerps-eigenschap 'straal' in plaats van wat hij noemt het "relatiebegrip" 'afstand' dat "geen eigenschap is van een afzonderlijk ion", maar van het ion als structuurelement van een chemisch individu.
Hieruit trekt hij de conclusie[36] (p.172) dat de geplande (p.129-131) "niveau-invariante contextwisseling" niet slaagt indien de context "ruimtelijke ordening" niet de kwaliteit van een beschrijvend niveau heeft gekregen, dat wil zeggen wanneer de ervaringen met ruimtelijke ordening van ballen niet beschreven zijn in termen van meetkundige objecten en hun "relatie-eigenschappen".

Het door Joling[36] gemaakte onderscheid tussen de straal als voorwerpseigenschap en afstand als "relatie-eigenschap" laat zich ook formuleren met Gentners[79,109] onderscheid tussen attribuut en relatie. Immers een straal wordt toegekend aan een enkel "object".
Er is Joling veel aan gelegen dat alleen "relatie-eigenschappen" en daarmee alleen de "structuur" gevonden bij pingpongballenstapelingen wordt toegepast op kristalroosters. We kunnen dus spreken van een structuurafbeelding in de zin van een één-op-één afbeelding van objecten van het domein 'pingpongballen-stapel' naar het domein 'kristalrooster', zodanig dat alleen relaties (omringingsgetal, afstand) gelijknamig worden afgebeeld. Daarmee kunnen we Jolings "niveau-invariante contextwisseling" ook een 'analogieredenering' noemen.
Jolings[36] "contexten" komen dan ruwweg overeen met Gentners[79,109] "domeinen", met dit verschil dat het doeldomein ná controle van de op grond van analogie verwachte relaties bij Joling een nieuwe naam krijgt. "Ruimtelijke ordening" is Jolings naam voor het basisdomein van de door hem geplande analogieredenering. "Samenstelling" is de naam van het doeldomein (ervaringen met 'stoffen') *voorafgaand* aan de analogie. De nieuwe naam "kristalstructuur" geeft aan dat dit doeldomein na afloop op een andere of ruimere wijze wordt gekend. Daarmee is meteen een kritische vraag gesteld: Kan er wel van eenzelfde 'doeldomein' gesproken worden vóór en na de analogieredenering? Of algemener:

> *Hoe onderscheiden we de 'ervaringsdomeinen' of 'contexten' betrokken in een analogieredenering?*

Om het proceskarakter van Gentners 'analogie' duidelijker weer te geven stel ik voor vanaf nu minstens te spreken van 'analogieredenering'.
Ondanks dat Joling aanzienlijk meer heeft gedaan dan het uitreiken van een A4-tje (Gentners 'onderwijs', zie 8.1) komt hij toch tot een conclusie die goed klopt met de hare, namelijk dat het ontworpen onderwijs niet geheel voldeed, omdat (in Gentners termen) een

relationele structuur in het basisdomein van de analogie niet geheel was bereikt.
Joling[36] voert echter ook aanwijzingen aan voor het minstens gedeeltelijk slagen van de genoemde contextwisseling, of te wel voor de produktiviteit van de door studenten ontwikkelde analogieredenering. Een belangrijke toets voor de zinnigheid van het toeschrijven van 'roostertypen' aan chemische individuen was de mogelijkheid te komen tot het voorspellen van vormingsenthalpieën. Studenten blijken daar inderdaad toe in staat[36] (p.185), waarbij het basisdomein (materieel aanwezige stapelbare voorwerpen) nog steeds een rol speelt om redeneringen te ondersteunen. Het voorwerpelijke karakter van de aanwezige polyeders hindert de studenten hier dus niet, hetgeen klopt met enige andere aanwijzingen voor een beschrijvende kwaliteit ten aanzien van 'ruimtelijke ordening'. De bereikte kwaliteit van redeneren ten aanzien van 'vormingsenthalpieen' is zelfs zodanig, dat studenten in staat waren om, vertrouwend op eigen redeneringen, geldigheidsgrenzen voor het ionogene bindingsmodel[*)] te verkennen. Ook konden studenten sommige stapelingsmogelijkheden van pingpongballen beargumenteerd afwijzen als ongeschikt ter beschrijving van een chemisch individu[36] (p.186-191), dus ook in dat opzicht ontstond er een kritische toetsing van resultaten van de analogieredenering.
We concluderen dus dat een analogieredenering mogelijkheden biedt voor studenten om in een onderwijssituatie een eerder door ervaringen verkregen relationele structuur (beschrijvend niveau) kritisch te gaan gebruiken om te komen tot een analyse van een ander ervaringsdomein. Voor zover aan de voorwaarde van 'beschrijvend niveau' niet is voldaan, is een produktieve analogieredenering (structuurafbeelding) niet te verwachten.

8.7. Bruikbaarheid bij ontwerpen van thermodynamica-onderwijs

In 5.2.6 werd de vraag gesteld of het wel "juist is om bij het organiseren van een analogieredenering de aandacht alleen op overeenkomsten te richten en niet daarnaast ook op verschillen". Zo gesteld gaat de vraag er nog van uit dat de analogie die volgens plan zou leiden tot entropie kan worden opgemerkt door vergelijken van *situaties*.
Nu de conclusie is geformuleerd dat op één van beide ervaringsdomeinen de kwaliteit van beschrijvend niveau al is bereikt, valt te verwachten dat het eerder zal gaan om *gekozen beschrijvingen* van situaties. Immers bij het komen tot dit beschrijvend niveau worden keuzen gemaakt (7.3).
De nieuw toegevoegde opgaven, waarin minder op analoge beschrijving wordt aangedrongen (zie 5.2.6), maken het mogelijk deze verwachting - uitgesproken op grond van de bevindingen van Gentner[79,109], Joling[36] en Van Hiele[105] - te controleren. Hieronder worden onderwijsresultaten van deze opgaven besproken.

(* Ook een analogie, namelijk van 'ionen' met macroscopische *geladen* voorwerpen. Deze analogie wordt m.i. gerealiseerd in de tweede door Joling geformuleerde niveau-invariante contextwisseling, namelijk van 'kristalstructuur' en 'coulombinteractie' naar 'ionenrooster'[36] (p.130).
Van deze drie contexten vereist namelijk het leren kennen van 'coulombinteractie' m.i. het experimenteren met macroscopische geladen voorwerpen, vergelijkbaar met het experimenteren met pingpongballen voorafgaand aan de eerste Jolingse contextwisseling.

8.7.1. Systeemgrenzen en interactiesoorten als probleem

Het opmerken van keuzemogelijkheden blijkt uit het hierna volgende protocol 2.9.
Dit gesprek vindt plaats naar aanleiding van de derde van de drie beschouwde situaties (zie 4.5). Zoals uit 4.5 blijkt ging het in elk van de drie situaties om een gedachtenexperiment, dat wil zeggen een beschreven proef, waarvan door te redeneren het resultaat kan worden voorspeld. Ervaringen op beide basisdomeinen die dit mogelijk maken zouden dus eerder zijn opgedaan (zie opgaven §§1-2[2] en 5[2]).[*)] We beperken ons hier tot een gesprek dat betrekking had op het derde gedachtenexperiment (4.5). Het betreft twee voorraden water van verschillende temperatuur, beurtelings in contact met een cilinder gevuld met water en waterdamp, afgesloten door een zuiger die gekoppeld is aan een vliegwiel.
Bij eerdere opgaven is uitgesproken dat de betrokken voorwerpen op verschillende manieren in 'systemen' kunnen worden ingedeeld. Studenten merkten dat een indeling in twee systemen steeds leidt tot een rendement van 100%. Om 'verlies' en daarmee rendementen kleiner dan 100% bespreekbaar te maken, bleek een indeling in tenminste drie systemen nodig te zijn (11-1k en l)[2]. De beschrijving van een proef in termen van 'verschillende soorten interacties' tussen 'systemen' bleek af te hangen van een keuze betreffende de locatie van de systeemgrens: hetzelfde gebeuren kon als 'arbeid' en ook als 'verwarmen' worden beschreven, afhankelijk van waar men de grens trekt (11-3)[2].
De opgave waarover gesproken wordt is hieronder weergegeven.

> Opgave 11-7
> a Welke systemen wil je onderscheiden ten behoeve van het beschrijven van mogelijke overeenkomsten met de proeven uit 11-1 en 11-4? Teken een schema van de systemen en hun interacties.

Protocol 2.9

M: Dus dan heb je vijf systemen
J: Vijf? hoezo, hoe kom je aan die vijf?
M: Omdat je d'r één meer hebt door het verwarmen
(bij opgave 11-5 waren vier systemen onderscheiden voor de situatie getekend bij opgave 11-4)
J: Nou je hebt die linker hete voorraad, je hebt de rechter koude voorraad, je hebt die voorraad in die zuiger met
K: (onverst.)
J: Ja nu moet je eigenlijk die zuiger en dat vliegwiel als één nemen dan kom je op vier. Smokkel je eigenlijk 'n beetje, maar, ach..
(gesprek gaat enige tijd over de vraag óf de temperatuur van water wel hoger dan 100°C kan zijn)
K: Dus maar hoeveel systemen heb jij, vijf
J: Vier, ten minste ja, ik dacht laat ik die zuiger en dat vliegwiel maar als eentje nemen

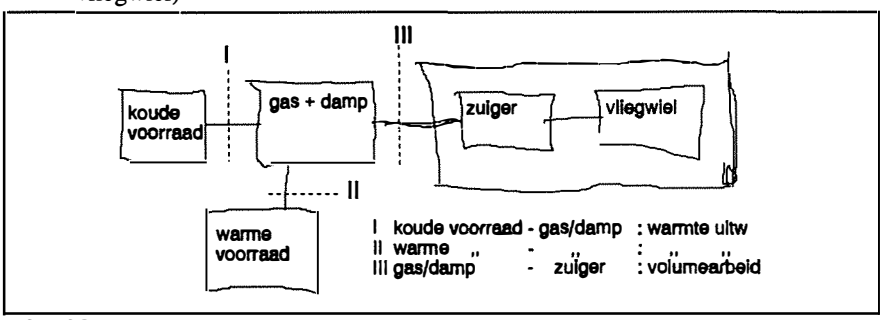
[*)] Over de vraag of deze opgaven aan hun doel beantwoordden is al iets gezegd in hoofdstuk 5, (5.3.1 en 5.3.3). Een uitvoeriger evaluatie volgt in de hoofdstukken 11 en 12.

K: ja want je doet gewoon dit inderdaad, omdat 't verder niet zo relevant is wat er nou gebeurt, ja

18 **M**: Ja hoe zet je ze neer

K: Want ik heb ze zo getekend (Afbeelding 18) maar ja, dus dat is eigenlijk omdat er toch niet echt iets interessants gebeurt (d.i.: tussen zuiger en

21 vliegwiel)



Afbeelding 18: Schema door **K** getekend als antwoord op 11-7a en b

J: Nee, dacht het niet. En je moet, als je 't op de vorige wil laten lijken

M: Hoe heb jij ze neergezet

24 **K**: Je hebt, da's dat gas, nou die gaat naar die zuiger toe, naar dat vliegwiel toe, en déze.. dat hangt er gewoon af of je nou die koude voorraad of die warme voorraad doet, kant

27 **M**: Ik heb het nu zó! Die hete voorraad met die damp en water en die koude voorraad met de damp en water

K: ja, ja precies ja

30 **M**: en water met die damp met de zuiger en het vliegwiel

K: ja, dat heb ik ook ja, er staat hier 't zelfde

M: Nah, ja je hebt 't in andere volgorde geschreven

33 **K**: Ja, maar 't is in ieder geval zo dat déze, dit ding heeft alleen 'n verbinding hier mee en deze, dat heb jij hier ook

M: Ja ik zie het, dat is 't zelfde

36 (stilte)

K: Hola, precies.. Want wát is nu die interactie tussen laten we zeggen de koude voorraad en het gas?

39 **L**: warmtetransport

M: Jjj.. warmteui-

K: ja warmteuitwisseling

42 **J**: warmtestraling, warmteuitwisseling, hoe je 't maar noemt

(stilte)

M: Die van eh.. van deze naar die dat is eh.. volumearbeid. Dan hebben we

45 dus maar twee soorten interacties

J: Ja dat hadden we net ook steeds. We hadden wel drie interacties, maar maar twee soorten, dat hebben we nu weer

48 **M**: ja inderdaad: twee keer volumearbeid en één keer.. (bij opgave 11-6c en d)

K: Herken een patroon in deze opgaven!

J: (lacht)
51 **M**: Nu heb je twee keer warmteuitwisseling, één keer volumearbeid

De keuze die hier gemaakt wordt betreft het onderscheiden van systemen met het oog op het onderscheiden van interacties.
Bij de eerste gepresenteerde situatie (hoogteverschil tussen twee bakken met water) had men onderscheiden: de linker bak met water, de rechter bak, de turbine en het vliegwiel (4 systemen). Bij de tweede situatie (drukverschil tussen twee gasporties) waren onderscheiden: de linker gasportie, de rechter gasportie, de zuiger en het vliegwiel. Om tot een vergelijkbare beschrijving (4 systemen) te komen was toen (11-6b)[2] de keuze gemaakt zuiger en vliegwiel als twee systemen te onderscheiden. Dit was ook nodig om te komen tot een vergelijkbare beschrijving in termen van interacties: "twee keer volumearbeid" (r.48) namelijk tussen linker gasportie en zuiger én tussen rechter gasportie en zuiger, "en één keer" arbeid die geen volumearbeid genoemd kon worden, namelijk tussen zuiger en vliegwiel.
Nu, met betrekking tot een derde situatie (temperatuurverschil) komt de vraag op of zuiger en vliegwiel nu wel of niet als 'systemen' moeten worden onderscheiden. Enerzijds lijkt dit consequent met de keuze gemaakt bij de vorige opgave (r.10), anderzijds wordt de vergelijkbaarheid van de drie situaties daardoor geschaad, omdat er in de derde situatie dan vijf systemen zouden zijn onderscheiden (r.1-5, 13). Deelnemer **J** stelt daarom voor (J.22) om zuiger en vliegwiel nu niet te onderscheiden (J.9-10, 14-15). Deelnemer **K** noemt als mogelijke reden voor die keus dat het gebeuren (de interactie) tussen zuiger en vliegwiel minder relevant zou zijn (K.16-17, 19-20). Daar zou ik het mee eens kunnen zijn als deze relevantie beoordeeld werd in het licht van de te construeren analogie. **J**.22 spreekt dit uit: "als je 't op de vorige wil laten lijken".
Waarnaar verwijst nu "'t" in deze uitspraak? Zijn het de drie verhaalde *situaties* die hij op elkaar wil laten lijken? Nee, want deze situaties waren in de opgave gegeven. Het zijn de *beschrijvingen* in termen van 'systemen' en 'interacties' die **J** op elkaar wil laten lijken. Maar deze beschrijvingen worden niet geheel door de te beschrijven situaties gedicteerd, ze zijn ook bepaald door de keuze van de te onderscheiden 'systemen'. Hierdoor kan men kiezen de beschrijving zó in te richten dat de drie situaties maximaal vergelijkbaar worden.
De keuze voor '4 systemen' (zuiger en vliegwiel als één in de derde situatie, daarentegen als twéé in de tweede situatie) wordt bevestigd als blijkt dat als gevolg hiervan nu 'drie interacties' kunnen worden onderscheiden (r.27-30) waarvan twee van dezelfde 'soort' en één van een andere soort (r.44-51). Ook gelet op deze aantallen benoemde interacties zijn de drie beschrijvingen nu vergelijkbaar geworden.
Hoewel er nog steeds (vgl. 5.2.6) een "patroon" in de opgaven wordt opgemerkt (r.50) kan ik zeggen dat dit patroon nu minder door de opgaven wordt aangereikt, en meer door eigen beslissingen tot stand komt dan tijdens de vorige versie van mijn onderwijs het geval was. Wel spelen de opgaven in zoverre een leidende rol, dat nu expliciet wordt gevraagd de systemen zó te kiezen dat de "overeenkomsten" "zo duidelijk mogelijk" beschreven kunnen worden (opgaven 11-6b en 11-7a)[2]. Klachten dat het saai, vervelend of te makkelijk was heb ik in verband met de tweede versie van deze opgaven niet gehoord.

8.7.2. Een onverwachte analogieredenering

Een andere keuze die nodig blijkt om tot analoge beschrijvingen te komen voor de genoemde drie situaties trok de aandacht na het schrijven van de paragrafen 1 t/m 5[2]. Toen viel het namelijk op dat in de situatie van drukverschil (11-4)[2] de energieverandering van de beide gasporties niet per se in termen van 'arbeid' ($dU = -p.dV$) beschreven hoeft te worden. Een beschrijving met behulp van twéé 'energievormen' is ook mogelijk ($dU=C_V.dT + \pi_T.dV$).[*)]
Een analogie van de 'drukverschil'-situatie met de situatie van hoogteverschil tussen twee bakken ($dE_{pot,\,bak} = gh.dm$) wordt echter alleen beschrijfbaar als voor een beschrijving wordt gekozen met één energievorm die overeenkomt met de verrichte arbeid ($dU = -p.dV$). Gezien vanuit een geschiedenis van 'energievormen' ligt deze keuze echter juist niet voor de hand.[+)] Ook deze keuze was in de eerste versie voor studenten onzichtbaar gebleven doordat de opgaven uitsluitend de aandacht op overeenkomsten richtten. Het nieuwe thema 'interactiesoorten' (arbeid, verwarmen, materietransport) naast het eerdere thema 'energievormen' werd nu bij het ontwerpen pas goed zichtbaar[#)], *als gevolg van de verwachting dat een analogieredenering vertrekt vanuit gekozen beschrijvingen (beschrijvend niveau).*

De keuze tussen beide beschrijvingsmogelijkheden voor de energieverandering van een gasportie wordt eerst opengelaten (opgave 11-4 a t/m c)[2], vervolgens wordt de nieuwe mogelijkheid, namelijk beschrijven met 'arbeid', toch met enige nadruk naar voren gebracht (11-4 d t/m h)[2]. Dit leek me nodig omdat de mogelijkheid van een analoge beschrijving hier nog door studenten moet worden opgemerkt, dus nog niet als argument vóór een van beide keuzen kon gelden, zoals dat later (bij 11-7a)[2] wel bleek te kunnen (8.7.2). Het volgende protocol toont een discussie van deelnemer **K** met **WK** waarin de keuze tussen beide genoemde beschrijvingen een rol speelt.

protocol 2.6

Nadat **WK** enkele malen heeft uitgesproken dat een berekening van de energieverandering via de arbeid volgens $dU = -p.dV$ alleen juist is voor 'n reversibel proces, trekt deelnemer **K** daaruit de conclusie dat er voor 'n irreversibel proces nog wat "bij" moet (K.120). Deze conclusie zal ten eerste gebaseerd zijn op het hoorcollege, waar de uitdrukking $dU = T.dS - p.dV$ al werd gepresenteerd (M.144). Ten tweede zijn **K** en **M** om één of andere reden

---

(* Waarin $\pi_T = (\partial U/\partial V)_T$. Voor een ideaal gas geldt $\pi_T = 0$. Voor een reëel gas bij normale druk (1 bar) is $\pi_T << p$. In verband met de *Van der Waals* vergelijking wordt π_T soms aangeduid als de 'interne druk' van een gas (Atkins[57], p.63-64). In het experimentele onderwijs, versie 2, werd π_T geïntroduceerd als 'de coëfficiënt van het volume' zoals C_V wel 'de coëfficiënt van de temperatuur' werd genoemd (§5)[2]. In de derde versie werd in plaats van 'coëfficiënt' steeds gezegd: 'energiecapaciteit', dus bijv. 'thermische energiecapaciteit', 'volume-energiecapaciteit'.

(+ Voor de energievormen $\int C_V.dT$ en $\int \pi_T.dV$ weten studenten sinds §5[2] dat beide weliswaar procesgrootheden zijn, maar dat hun som een toestandsgrootheid kan opleveren. Voor de 'arbeid' $\int p.dV$ is nog niet bekend hoe men door optelling met een tweede procesgrootheid tot een toestandsgrootheid kan komen.

(# Opgaven 11-2[2] en 11-3[2] geplaatst vóór 11-4[2].

overtuigd dat de temperatuur*verandering* van belang is voor de energieverandering, zodat zij argwaan hebben tegen het volledig weglaten van dT (K.17-19,39,137,141), waardoor ze zich de formule gehoord op het hoorcollege verkeerd herinneren (M.144, met S.dT in plaats van T.dS).

Maar er kan nog een derde reden zijn om te concluderen dat er nog wat "bij" moet (K.120) en deze derde reden kan men ook horen bij **K**.
Namelijk: bij het werken aan de opgaven van §4[2] hebben deze studenten korte tijd geleden opgemerkt dat de 'thermische energie' $\int C_V.dT$ zich niet als toestandsgrootheid gedraagt, tenminste niet in een situatie waar naast de temperatuurverandering nog een tweede verandering - een voortgang van een chemische reactie (variabele: ξ) - plaatsvond. De 'chemische energie' $\int \Gamma_T.d\xi$ bleek daar evenmin een toestandsgrootheid.[*)] De optelsom van beide 'energievormen' bleek echter wel onafhankelijk van het proces (protocol 2.5, r.6-44, 177-206).
Tijdens het vorige werkcollege was bovendien de inhoud van §5[2] kort verteld, waar sprake was van het gelijktijdig veranderen van volume en temperatuur voor een reëel gas. Daarbij was verteld dat onder deze omstandigheden zowel $\int C_V.dT$ als $\int \pi_T.dV$ van de 'weg' afhangen, terwijl hun som onafhankelijk van de weg blijkt. Bij het bespreken van opgave 11-4b[2] werd deze samenhang opnieuw genoemd door **WK**.51-53, nadat **K** hiertoe aanleiding had gegeven door 'wegfunctie' te noemen in verband met 't gebruik van één variabele, 'toestandsfunctie' in verband met twee variabelen (K.47-50). **WK**'s opmerking dat $dU = -p.dV$ alleen geldt voor een 'reversibel' proces (r.56-64) leidt **K** tot de vraag hoe de berekening dan moet veranderen om onafhankelijk van het proces te worden (K.68-69). **WK** weet dat hij daarop nu nog geen antwoord kan geven en gaat er dus niet op in. Nadat er enige tijd over iets anders (de voorwaarden voor 'reversibel') is gepraat (r.83-117) komt **K** dan met zijn voorstel dat er iets "bij" zou moeten komen (K.120).

We kunnen dit nu zien als resultaat van het voorafgaande onderwijs. We kunnen interpreteren dat **K** op grond van twee voorafgaande situaties tot de hypothese is gekomen dat telkens als één energievorm (behorende bij één energievariabele) afhankelijk van de weg blijkt, er wellicht een tweede[+)] energievorm gevonden kan worden zó dat de optelsom niet meer van de weg afhangt. Dit is wat we noemen een analogieredenering, immers een relatie tussen twee termen (hier namen van energievormen) die op een eerder ervaringsdomein is gevonden wordt als verwachte relatie naar het nieuwe domein overgedragen. Het is bovendien een analogieredenering die niet was gepland, noch verwacht (WK.121-125), hoewel hij misschien voor de hand lag.
Waar het me nu om gaat is, dat deze discussie mogelijk werd door aan de vorige versie van de opgavenserie vragen toe te voegen die *níet* pasten in de tevoren ontworpen analogie met de situaties uit opgave 11-1[2] en 11-7[2]. Immers: in 11-1[2] is (voor zover ik zie) geen beschrijving met twéé energievormen (analoog aan $C_V.dT + \pi_T.dV$) te geven voor het

---

(* Onder de omstandigheden van de besproken proef (constant volume) is de 'chemische energiecapaciteit' Γ_T voor thermodynamici te vertalen met $(\partial U/\partial \xi)_{V,T}$. Deze notatie - partiële afgeleiden - is gedurende §4[2] echter nog niet in gebruik bij studenten.

(+ waarbij de beperking tot 'twee' niet principieel is, dus als het met twee niet lukt, dan kan men vermoedelijk opnieuw vragen: wat moet er nog bij?

reversibele geval. Juist deze niet-passende toevoeging (11-4a t/m c)[2] ten opzichte van het eerste experiment, maakte de getoonde discussie mogelijk.

8.7.3. Conclusie: een analogie wordt niet gezien maar gemaakt

De eerste versie van de besproken serie opgaven (§5)[1], die door studenten werd ervaren als saai (5.2.6) was geschreven vanuit de opvatting dat een analogie kan worden opgemerkt door vergelijken van *situaties*. Immers vanuit die opvatting lijkt het gerechtvaardigd om over beide situaties gelijksoortige vragen te stellen, waardoor de lerende opmerkzaam wordt gemaakt op een zichtbare overeenkomst: na raadplegen van de verhaalde ervaringen - en eventueel redeneren - noteert hij dat ze in dit of dat opzicht overeenkomen.
De 'analogieredenering' welke leidt tot entropie bleek echter met meer succes beschreven te kunnen worden volgens de hier gekozen (8.3, 8.5), deels aan Gentner[79,109], Joling[36] en Van Hiele[105] ontleende omschrijving van 'analogie' als structuurafbeelding. Een analogieredenering in deze zin is pas te verwachten als op één van beide domeinen al een beschrijvende kwaliteit in het woordgebruik is ontstaan. Maar dit betekent dat op het basisdomein het vergelijken van 'situaties' en het (gestuurd door opgaven) opmerken van overeenkomsten tussen situaties al achter de rug is: door het maken van keuzen is er een gedisciplineerde beschrijvingswijze ontstaan voor dat domein.
De uitdaging aan studenten kan nu zijn, na te gaan in hoeverre voor het nieuwe domein een isomorfe *beschrijvingswijze gekozen* worden kan, en in hoeverre niet. Een analogie wordt dan niet gezien (tussen situaties), maar wordt gemaakt (tussen gekozen beschrijvingen). Volgens dit nieuwe gezichtspunt is het stellen van overeenkomstig-geformuleerde vragen te interpreteren, niet als aandachtselectie voor een zichtbare overeenkomst, maar als het uitoefenen van dwang bij het kiezen voor een analoge beschrijvingswijze, waar in feite diverse beschrijvingen mogelijk zijn, die niet alle in de richting van 'analogie' wijzen. Een analogieredenering dient dus steeds een waagstuk te zijn, waarbij het erom gaat uit te zoeken tot hoever de analogie doorgedreven kan worden.
De genoemde opgaven uit versie 1 (§5)[1] waren dus niet alleen te makkelijk of te kinderachtig, volgens het nu gekozen gezichtspunt waren ze ook gebaseerd op een naïeve opvatting van de 'analogie' die kan leiden tot entropie.

8.8. Conclusie

Een kritische beschouwing (8.1 en 8.2) van Gentners[79,109] voorstellen leidde in 8.3 tot de volgende schematische beschrijving van een analogieredenering: **1)** Termen uit het basisdomein worden één op één afgebeeld op termen uit het doeldomein. **2)** Er wordt geprobeerd relaties tussen termen in het basisdomein af te beelden op gelijknamige relaties tussen corresponderende termen in het doeldomein. **3)** Met voorkeur worden die relaties afgebeeld die betrokken zijn in hogere orde relaties. **4)** Het afbeelden van relaties gaat deels vooraf aan (en motiveert dan) het afbeelden van termen. **5)** Die relaties waarvoor in het doeldomein nog geen gelijknamige relatie door ervaring is gevonden worden bij wijze van hypothese afgebeeld. Dit gebeurt na het afbeelden der termen, geleid door de eerder gemotiveerde correspondenties. **6)** Tenslotte worden de kandidaat-conclusies aan de ervaring getoetst.

De term 'analogie' wordt in verschillende betekenissen gebruikt (8.4). Deze betekenissen laten zich onderscheiden zowel gelet op Gentners onderscheid tussen attribuut en relatie, als door te vragen waarop een analogieredenering betrekking heeft: op ervaringen of op gekozen beschrijvingen van een ervaringsdomein. Dit onderscheid liet zich formuleren met Van Hiele niveaus (8.5): *een analogieredenering als 'structuurafbeelding' vereist een voorafgaande overgang naar beschrijvend niveau.* Al eerder (4.1 en 4.7) was opgemerkt dat een analogieredenering "niet [past] in een stadium waar al een voldoende set axioma's is gekozen", dus niet past na bereiken van theoretisch niveau. Een analogieredenering zoals hier bedoeld behoort dus tot het beschrijvend niveau (zie stap III in Afbeelding 17, p.175).
De zo verkregen *minder "naïeve"* (8.7.3) opvatting van analogie maakte de onderwijsresultaten mogelijk werden die in 8.7 werden getoond, een verbetering ten opzichte van het eerste onderwijsexperiment.

Omdat Gentners[79,109] analyse van een analogieredenering expliciet uitgaat van associaties tussen woorden (haar "relaties" die alleen "syntactisch" worden beschreven), terwijl Joling[36] en Van Hiele[105] aangeven hoe woorden betekenis krijgen aan de hand van ervaringen, is hiermee minstens een voor de onderwijspraktijk nuttige vereniging van 'concept mapping' en Van Hiele niveaus getoond. Het vermoeden dat zo'n vereniging mogelijk zou zijn, was al eerder aangegeven (7.7) en is nu bevestigd.
De daar gestelde vragen ten aanzien van die verenigbaarheid zijn echter nog niet beantwoord: de twee betekenissen van 'betekenis' (7.7) zijn noch door Gentner[79,109], noch door Joling[36] onderscheiden of expliciet met elkaar in verband gebracht. Daarbij ontstond in 8.6 de nieuwe vraag hoe we 'ervaringsdomeinen' onderscheiden.

9. De structuur van de onderwijssituatie

De vorige hoofdstukken 6, 7 en 8 waren gewijd aan het beschrijven van tussentalen en aan het plaatsen van tussentalen in een beargumenteerde reeks. Ook de analogieredenering als afbeelding van een set termen op een andere set kon worden geplaatst in een met Van Hiele niveaus beschreven reeks. In dit hoofdstuk zullen we ons bezighouden met de manier waarop een overgang naar een volgende taal in de geplande reeks wordt nagestreefd.
Naar aanleiding van onze bevinding dat "een verandering van taal niet steeds per decreet [kan] worden afgekondigd" (5.2.1) maakten we onderscheid tussen drie manieren waarop een onderwijzende een verandering van taal kan proberen te realiseren: sluipend, expliciet of probleemstellend (5.2.3). Er werd daar gekozen om de mogelijkheid van probleemstellend onderwijs verder te onderzoeken.
Bij deze discussie bleef het vanzelfsprekend dat elk van de drie aanpakken toch onder het werkwoord 'onderwijzen' kan worden gerekend, zodat dus 'sluipende onderwijsaanpak' een aanvaardbare uitdrukking zou zijn. Als we met 'onderwijs' datgene bedoelen wat een als 'docent' aangesteld persoon tijdens door een rooster aangewezen uren onderneemt, dan is daartegen geen bezwaar in te brengen. In de didactiek echter zouden we kunnen proberen een omschrijving voor onderwijzen te geven die datgene omvat wat tot 'leren' leidt. En daarmee is dan de discussie geopend, want ook van 'leren' is tot nu toe geen omschrijving gegeven.
In dit hoofdstuk worden enkele opvattingen verkend met betrekking tot de vraag hoe 't gebruik van woorden als 'leren' en 'onderwijzen' zinvol kan worden afgeperkt. Dit leidt tot een indeling van opvattingen in drie referentiekaders (genoemd A, B en C) waarin het woord 'onderwijs' betekenis kan krijgen (9.1). Er wordt ingegaan op de bruikbaarheid van deze indeling (9.2), waarna een kader wordt gekozen (9.3). Als prototype van de onderwijssituatie in kader C wordt het zakelijk gesprek (De Miranda[117]) gekozen (9.4). Een beschouwing van Klaassen[38] wordt geïnterpreteerd als een verantwoording van de keuze voor een gespreksmodel (9.5). Dit leidt tot een vraag naar de verenigbaarheid van Van Hiele niveaus en gespreksmodel (9.6) en tot een vraag of 'rationaliteit' alleen als voorwaarde voor, of ook als resultaat van leren (C) geformuleerd kan worden (9.7).

9.1. Welke situaties noemen we 'onderwijs'-situaties?

▸ *a) "overdracht van kennis en kunde"*
In een gezaghebbend nederlands woordenboek[73] vinden we onder de titel 'onderwijs':

> "1. (..) het systematisch, volgens aangenomen beginselen, georganiseerd overbrengen van (..) kennis en kunde door daartoe aangestelde, bevoegde leerkrachten, aan afzonderlijke of daarvoor bijeenzijnde (jonge) personen."[73] (p.2029)

Onderwijs wordt hier omschreven als een relatie tussen leerkracht, leerling, en één of

andere "kennis en kunde", een 'body of knowledge' zoals de engelssprekenden zeggen. Zo'n omschrijving leidt gemakkelijk tot het zender-ontvanger model van onderwijzen, waar het overgedragen iets benoemd kan worden met 'informatie'. In dat kader kan men ook systematisch beschrijven en theoretiseren, waarbij termen als 'ruis', 'redundantie' en 'terugkoppeling' kunnen vallen[118,119]. De hoeveelheid overgedragen informatie kan men proberen te meten (in bytes). Problemen zoals het optimale aantal woorden per zin en de maximale tijd dat een gehoor zonder pauze kan luisteren, zijn in dit kader te bespreken. De situatie die het meest typerend als 'onderwijssituatie' naar voren komt is er één waar leerlingen luisteren naar een leraar, waarna zij vragen beantwoorden ('feedback').

▸ *b) "enculturatie"*

Brown, Collins en Duguid[120] omschrijven onderwijs als "een proces van enculturatie". Ze bekritiseren de scheiding tussen 'weten' en 'doen' en de opvatting van "knowledge as an integral, self-sufficient substance, theoretically independent of the situations in which it is taught and learned". Hiertegenover stellen ze dat woorden hun betekenis (deels) ontlenen aan de situaties waarin ze worden gebruikt. Een groot deel van de betekenis kan onuitgesproken blijven, doordat ze blijkt uit de situatie waarin het gesprek plaatsvindt. Ze stellen dat hetzelfde gezegd kan worden van kennis.

> "Knowledge, we suggest, similarly indexes the situation in which it arises and is used. The embedding circumstances efficiently provide essential parts of its structure and meaning." (Brown *et al.*[120])

Als voorbeeld geven ze o.a. het verhaal van een weight watcher, die volgens een voorschrift 3/4 deel van zijn dagelijks rantsoen (zijnde 2/3 kop) aan kwark moest afmeten voor een gerecht. In plaats van de berekening in gedachten of op papier uit te voeren (3/4 x 2/3 kop = 1/2 kop) werd ze met de hand uitgevoerd: 2/3 kop werd afgemeten, de kwark werd cirkelvormig uitgespreid op een plank en 1/4 deel van de cirkel werd weggehaald. Een deel van het 'denkwerk' werd uitbesteed aan de omgeving, die meewerkt omdat het materiaal zich inderdaad zo gedraagt als de wiskunde beschrijft[*)] - waardoor het dus dikwijls niet nodig is die beschrijving te kennen! We herkennen deze werkwijze als behorend tot Van Hieles grondniveau. Het beschrijvend niveau is dan dat niveau waar het gedrag van het materiaal, althans een aspect ervan (hier: hoeveelheid) in woorden of andere symbolen is gevat, zodanig dat de relaties tussen de symbolen uitsluitsel geven. Hierdoor kan het denken 'met de handen' dan achterwege blijven. De beschrijving kan echter het tastbare materiaal niet geheel vervangen, omdat het slechts een aspect daarvan beschrijft.[+)]

(* Zulk "uitbesteden aan de omgeving" is ook op te merken bij het gebruik van een telraam, een rekenliniaal, ... of het gebruik van een condensator, een spoel en een weerstand om door analogie een differentiaalvergelijking op te lossen omdat men langs analytische weg de oplossing niet vindt. Jolings[36] (p.181-185) studenten besteden hun redenering weliswaar niet uit aan hun omgeving, maar wel laten ze zich in hun redenering ondersteunen door aanwezige plexiglazen polyeders.

(+ Zo merkte Joling[36] (p.96 e.v.) op dat een beschrijving van mineralen in termen van hun elementaire samenstelling en reactiemogelijkheden ertoe leidt dat de mineralen zinkblende en wurtziet worden beschreven als één 'chemische stof' zinksulfide. Wil men vervolgens aandacht vragen voor verschillende kristalstructuren, dan is het essentieel dat leerlingen nog weten dat deze ene stofnaam

Zo bezien lijkt het essentieel dat de lerende in staat is om 'terug' te keren naar het handelen met de tastbare dingen die eerder op een gekozen wijze werden beschreven. Men kan vrezen dat zo'n terugkeer wordt bemoeilijkt als de 'kennis' in de vorm van beweringen rechtstreeks was overgedragen van leraar naar leerling.
Brown *et al.* zeggen het zo:

> "(..) situated cognition suggests that activity and perception are importantly and epistemologically prior - at a nonconceptual level - to conceptualisation and that it is on them that more attention needs to be focused." (Brown *et al.*[120])

Deze beschouwing suggereert dat we 'onderwijs' beter kunnen omschrijven als een relatie tussen leraar, leerling en één of ander *object van handeling en van waarneming*. De relatie van dit drietal is anders dan van het eerder besproken drietal. Het is eerder een kwestie van 'samen bezig zijn met' dan van 'overdragen'. Als prototype voor de onderwijssituatie noemen Brown *et al.*[120] dan ook de stage ("apprenticeship").
Maar hiermee is nog niet gezegd *op welke manier* dan leerling en leraar samen met hun object bezig zijn, en ook niet met welk type object zij bezig zijn.[*)] Brown *et al.* beschouwen het als wenselijk dat leerlingen vanaf het begin worden betrokken in "een beoefenarencultuur" en daarmee bedoelen ze een cultuur zoals die ook buiten de schoolmuren gepraktizeerd wordt, een maatschappelijk zinvolle activiteit. Scheikunde-leren betekent dan betrokken worden in maatschappelijk zinvolle scheikundige activiteit (vgl. Van Aalsvoort[121]). Browns[120] (*et al.*) vergelijking met de stage zoals die voorkomt bij het leren van een ambacht suggereert dat de leraar dan die delen van de activiteit overneemt die voor de leerling nog te moeilijk zijn. Dit standpunt is ook expliciet ingenomen door Van Oers[122] in navolging van de Russische activiteiten-theoretici (vgl. Mettes en Pilot[123]).

▸ *c) "students use their own ways of deciding"*
Palincsar[124] merkt op dat Brown *et al.*[120] inconsequent zijn geweest in hun keuze voor een schoolcultuur als kopie van een beoefenarencultuur, door Lamperts[125] werk te noemen als een voorbeeld van het onderwijs dat zij voorstaan.
Lampert echter schreef:

> "I made it a requirement that students use their own ways of deciding whether something was mathematically reasonable in doing the work."[125]

Palincsar[124] concludeert hieruit: "It is, in fact, the culture of Lamperts classroom that distinguishes her teaching from good, traditional mathematics instruction." en verder:

---

materialen van verschillend uiterlijk vertegenwoordigt.
Aangezien dit uiterlijk (kristalvorm) tot nu toe niet gedisciplineerd in samenhang met samenstelling werd beschreven betekent een hernieuwd beroep op 'uiterlijk' een terugkeer naar grondniveau - waarna wellicht opnieuw niveauverhoging mogelijk is om het eerder genegeerde aspect in de beschrijving op te nemen.

(* Eerder (p.164) werd beargumenteerd dat volgens Van Hiele het ordenende handelen zich richt op verschillende typen objecten: aanwijsbare objecten (eerste niveau) of een niet aanwijsbaar object (tweede en derde niveau), namelijk het woordgebruik van het voorafgaande niveau.

"What we expect of students is substantially different from what we expect of practitioners, with good reasons".
Lampert[125] streeft dus niet naar een klas-cultuur als getrouwe kopie van een beoefenarencultuur. Lampert streeft naar een klascultuur waar zowel leraar als leerlingen zich kunnen en moeten verantwoorden op een wijze die de ander overtuigt. Impliciet is daarmee uitgesloten dat de leraar een voor leerlingen nog onbegrijpelijk deel van de activiteit overneemt.
De kritiek van Palincsar[124] op Brown *et al.*[120] vertoont overeenkomst met een kritische opmerking van Van Hiele[30] (p.106) aan het adres van De Miranda[126] (p.59), die in zijn onderwijs geprobeerd had leerlingen vanaf het begin te laten functioneren als "qua intentie chemicus". Dit wijst er op dat de hierboven geciteerde drie opvattingen van onderwijs niet incidenteel zijn.

▸ *Drie referentiekaders*
Van Hieles kritiek leidde De Miranda tot het onderscheiden van de hiervoor besproken drie opvattingen van onderwijzen (gepubliceerd in Ten Voorde[35], p.55). Hij sprak van drie verschillende referentiekaders waarin het woord 'onderwijzen' betekenis kan krijgen:[*)]

A. 'Cultuuroverdracht': overdracht van kennis en kunde
B. 'Vorming' naar een vaststaand ideaal, de beoefenaar, expert
C. 'Uitleidend onderwijs'

Zoals we hiervoor al zagen onderscheidt kader *A* zich van zowel *B* als *C* door een opvatting van het te leren iets (wetenschap) als zijnde in de eerste plaats een stroom tekens (bytes) die dient te worden overgedragen van leraar op leerling. De relatie leraar-leerling-informatie is er één van 'overdracht'. Het doel van leren is het bezitten van (veel) informatie door de student.
Kaders *B* en *C* stemmen hierin overeen dat wetenschap allereerst wordt gezien als een activiteit, waardoor de relatie leraar-leerling-object zich laat formuleren als: samen bezig zijn met. Het einddoel van leren is in beide kaders *B* en *C*: kunnen deelnemen aan een beoefenarencultuur (vgl. Van Aalsvoort[127] en Van Keulen[128], p.72).
Kader *C* onderscheidt zich van *A* en *B* door de rol die het gewenste eindresultaat speelt in het proces. In kaders *A* en *B* worden lerenden (zoveel mogelijk)[+)] rechtstreeks met het gewenste eindresultaat geconfronteerd: in kader *A* zijn dat gewenste beweringen (beweringen in een taal die aan 't front van de research op dit moment als adequaat wordt beoordeeld), in kader *B* zijn het - maatschappelijk of wetenschappelijk - gewenste werkwijzen, de werkwijzen van experts. De eis in kader *C* dat "students use their own ways of deciding" betekent daarentegen dat het direct ten voorbeeld stellen van gewenste uitspraken of werkwijzen is uitgesloten. Zoals Klaassen[38] (p.96) zegt: in het huidige begrippenapparaat van leerlingen moet plaats ontstaan voor een nieuwe term, alvorens deze wordt geïntrodu-

(* Ik beperk me hier tot wat De Miranda noemt de 'synchronische' versie van zijn schema. Er is ook een 'diachronische' versie.
(+ In elk kader worden compromissen gesloten met 'de werkelijkheid', met wat studenten aan blijken te kunnen, met wat de minister verlangt etc.

ceerd (vgl. Lijnse[129]). In probleemstellend onderwijs is dus steeds de huidige situatie van leerlingen het (bekende) vertrekpunt, van waaruit men verder gaat naar een volgende stap die in principe *niet* volledig bekend is, aangezien verschillende groepen leerlingen verschillend kunnen reageren (vgl. Klaassen[38], p.128 en 196-202).
Wanneer overgang naar een andere (tussen)taal wordt nagestreefd dan betekent dit dat de redenen voor een verandering worden besproken *in de te verlaten tussentaal* en vandaar de naam 'uitleidend onderwijs'. Deze eis leidt ertoe dat de tweedeling novice-expert ontoereikend wordt, want in plaats van een (langdurig) éénstaps-proces waarin de novice direct wordt geschoold tot expert, ontstaat de vraag naar een route die langs diverse tussentalen voert.

▸ *In hoeverre sluiten de kaders A, B en C elkaar in dan wel uit?*
In kader *B* is informatieoverdracht omwille van de informatieoverdracht geen 'onderwijs' te noemen. Maar tijdens een vormende stage kan naast en tijdens het samen werken aan iets, wel informatieoverdracht plaatsvinden. Iemand die spreekt in kader *B* zal zulke informatieoverdracht opvatten als *ten dienste staande van* de 'vorming tot beoefenaar' die immers zijn criterium is om van onderwijs te spreken.
In kader *A* zijn vormende activiteiten om zichzelfs wille geen onderwijs te noemen. Maar ter illustratie van overgedragen informatie kan er wel een practicum worden georganiseerd, dat men dan ziet als ten dienste staande van de informatieoverdracht.
Door uitleidend onderwijs (kader *C*) hoopt men leerlingen uiteindelijk ook in staat te stellen tot deelname aan een beoefenarencultuur. Het laatste deel van de route zal dan ook doorgaans de vorm kunnen hebben van een stage in die beoefenarencultuur. Zo'n stage wordt dan gezien als ten dienste staande van een kritische meningsvorming. Door met zo'n stage te wachten tot de leerling kritisch kan meepraten met de beoefenaren, wordt voorkomen dat de zeden en gebruiken van de beoefenarencultuur als onbegrepen normen worden overgenomen.
Ook is er in uitleidend onderwijs een plaats voor informatieoverdracht. Een geslaagde informatieoverdracht kan plaatsvinden voor zover zender en ontvanger dezelfde symbolen in (ongeveer) dezelfde betekenis gebruiken. Uitgesloten bij zo'n overdracht zijn dus die processen waarbij één van de deelnemers probeert een taalverandering bij de ander teweeg te brengen (hetzij niveauverhoging, hoofdstuk 7, of een wisseling van context, zie 6.1 onder d). Aangezien begripsproblemen vrijwel steeds met taalveranderingen in verband kunnen worden gebracht (zie deel 1) mogen we verwachten dat informatieoverdracht vrijwel steeds zonder hulp van de leraar kan geschieden.
Zuivere informatieoverdracht (zonder taalverandering) merkt men bijvoorbeeld bij het raadplegen van een tabellenboek: voor zover men de termen boven de kolommen begrijpt - en daar is heel wat voor nodig - kan men de numerieke informatie die daaronder staat zonder hulp gebruiken. Begrijpt men die termen niet, dan is er van informatieoverdracht geen sprake. Dan moet er iets anders plaatsvinden, dat geen 'informatieoverdracht' te noemen is. 'Informatieoverdracht' zien we daarom als een relatief onbelangrijk (want niet problematisch) deelaspect van onderwijs. Door dit te zeggen heb ik mezelf al geclassificeerd als in ieder geval géén spreker in kader *A*. Niettemin speelt informatieoverdracht een rol in het ontworpen onderwijs, namelijk overal waar 'papieren proeven' worden gepresen-

teerd.[*)] Er wordt namelijk aangenomen dat leerlingen de mededelingen over het verloop van deze 'proeven' verstaan, dus dat de gebruikte symbolen in deze vertelsels door hen ongeveer zo opgevat worden als de auteur ze bedoelde.

> *De drie referentiekaders A, B en C zijn dus alleen strijdig voor zover ze elk een criterium formuleren voor wat we nog 'onderwijs' noemen en wat niet meer.*

Aspecten van de andere twee kaders kunnen voorkomen in 'onderwijs' voor zover deze als ten dienste staande van het gekozen criterium gezien worden.

9.2. Bruikbaarheid van De Miranda's ABC-schema

Als doel voor het onderwijs van de faculteit scheikunde aan de universiteit van Amsterdam werd onlangs geformuleerd:

> "(..) studenten een goede academische vorming geven in het vak scheikunde, die hen voorbereidt op de maatschappelijke praktijk als onderzoeker, een baan in het toepassingsgebied (..) een baan in het beleid/management of als leraar."[130].

In een verwant stuk[131] werd bepleit het aantal contacturen voor hoorcolleges terug te brengen ten gunste van de tijd besteed aan werkcollege en zelfstandige studie. Hieruit blijkt een accentverschuiving van wetenschap als het kennen van feiten naar wetenschap als te leren activiteit. We horen daar dus een verschuiving van kader *A* naar *B/C*. Deze trend is ook op te merken in publicaties van andere faculteiten, gezien bijvoorbeeld de stap naar "projectonderwijs" door de faculteit Chemische Technologie in Twente (Kramers-Pals *et al.*[132]).
Maar dat wij nu de overdracht van feiten in dienst *willen* stellen van de vorming tot chemie-beoefenaar betekent nog niet, dat we ook weten hoe dat zou kunnen. Neem het thermodynamica-onderwijs. Welke docent zou niet willen dat zijn studenten 'thermodynamisch leren denken'? (kader *B* of *C*). Maar in de praktijk wordt er nog steeds dikwijls genoegen mee genomen dat studenten de nodige formules kennen en kunnen toepassen op een beperkt aantal standaardopgaven die tevoren herhaaldelijk zijn voorgedaan. In 2.5 en 3.5 zagen we dat enkele centrale thermodynamische inzichten niet gebruikt konden worden in een redenering. Toch hebben deze studenten in meerderheid hun tentamens gehaald: niet door te leren redeneren maar door 'formules stampen' zoals het wel eens genoemd wordt. Deze situatie valt niet te veroordelen zolang er geen alternatief beschikbaar is - en zo'n alternatief is er nog niet. Ook het hier gerapporteerde onderzoek stelt geen gebruiksklaar thermodynamica-curriculum beschikbaar.
Er mag dus best een discrepantie zijn tussen wat we zouden willen en wat we op dit moment blijken te kunnen. Zo'n discrepantie blijkt soms te beschrijven met het ABC-schema: we wilden 'vorming' (kader *B*) maar we realiseerden overdracht van tekenreeksen (kader *A*). In zo'n geval is het nodig om ook de taal van kader A te gaan spreken. We beredeneren dan de juistheid van de in meerderheid voldoende tentamenuitslag door te

---

[*)] 'Papieren proeven': 1-4[3], 1-6[3], 1-7[3], 2-2[3],... zie ook 12-2[2].

wijzen op het percentage correcte antwoorden. Dat de genoemde studenten hun eigen, merendeels correcte, antwoorden niet *begrepen kunnen* hebben, omdat ze één van de twee hoofdwetten niet begrijpen, is geen argument in kader A (kader A spreekt niet over 'begrip' maar over een hoeveelheid juiste informatie).

Voor dit onderzoek was probleemstellend onderwijs (kader *C*) als doel gekozen (5.2.3), maar het gerealiseerde onderwijs voldeed dikwijls niet aan dit doel (5.2.1, 5.3.2). In zo'n geval zien we de docent (en dat was ik) zijn toevlucht nemen tot een werkwijze die past in kader *A* of *B*:

> "Tijdens een volgende bijeenkomst, na afluisteren van de bandopnamen, besluit **WK** dat hij zijn bedoelingen mondeling moet toelichten (protocol 2.4). [...] Hieruit blijkt dat **WK** niet ziet hoe hij zijn opzet om studenten zelf te laten bijdragen aan het formuleren van de structuur in hun rekenhandelingen, nu nog zou kunnen realiseren." (uit 5.3.3).

De beschikbare opgaven bleken er niet toe te leiden "studenten zelf te laten bijdragen aan [...]" en de docent **WK** ziet (hier) binnen de beschikbare tijd geen gelegenheid om improviserenderwijs tot andere opgaven te komen. Dus gaat hij voorzeggen (kader *A*) en voordoen (kader *B*), een werkwijze die in kader *C* geen 'onderwijs' mag heten. Aangezien **WK** dit voordoen toch zinvol vond, moeten we concluderen dat hij redeneerde in kader *A* of *B* - en niet onterecht, aangezien het één van **WK's** taken was om studenten een goede kans te bieden om voor hun tentamen te slagen.

Meer algemeen kunnen we opmerken dat bij aanvang van een didactisch leerproces met betrekking tot een onderwerp (bijv. thermodynamica) er twee dingen bekend kunnen zijn, namelijk enerzijds de kenmerken van binnenkomende studenten (veelgemaakte fouten, legendarische verkeerde antwoorden die de ronde doen onder docenten) en anderzijds het vak, zoals dat door afgestudeerden (in de fysische chemie) wordt begrepen. Met deze twee gegevenheden kan men weinig anders doen dan redeneren in kader *B*, immers, het zoeken naar tussentalen moet dan nog beginnen en bij dat zoeken zijn er in eerste instantie geen andere criteria dan enerzijds het vak en anderzijds de studenten. We kunnen dus het éénstaps-proces dat we eerder (9.1) kenmerkend noemden voor kader *B* ook zien als een nodig vertrekpunt voor didactisch onderzoek.

We hebben nu de bruikbaarheid getoond van het *ABC* schema bij het beschrijven van maatschappelijk-historische trends (van *A* naar *B*) en van didactische leerprocessen (van *A* naar *B* of van *A/B* naar *C*).
Onbruikbaar is het ABC schema naar mijn ervaring in discussies tussen didactici die een verschillende keuze zijn toegedaan. Het heeft in een discussie weinig zin om tegen iemand te zeggen: 'dat vind ik nu typisch een opmerking in kader *B*', tenzij men eerder samen een ontevredenheid over kader *B* heeft uitgesproken. Zo'n opmerking gaat immers niet in op wat de ander gezegd heeft, maar geeft er slechts een naam aan.

9.3. Redenen voor een keuze

Op dit moment kan een keuze voor kader *C* door een docent niet zonder voorbehoud worden gemaakt (9.2), omdat niet duidelijk is of het mogelijk zal zijn om leerlingen voortdurend in staat te stellen "to use their own ways of deciding" en toch - binnen de beschikbare tijd - het einddoel (deelname aan beoefenarencultuur) te halen. Op dit moment ontbreken daartoe vaak de nodige onderwijsmiddelen.
Door een didactisch onderzoeker echter kan wel zonder voorbehoud gekozen worden om de mogelijkheid van 'onderwijs' in kader *C* te onderzoeken. Voor deze keuze zijn de volgende redenen te noemen:

1 - De ervaring dat "een verandering van taal niet steeds per decreet [kan] worden afgekondigd" (5.2.1) geeft reden om minstens daar waar dat nodig is gebleken naar alternatieven te zoeken voor rechtstreeks voordoen hoe het moet (voor 'modelleren van expert-gedrag' zoals men zegt in kader *B*). Dit is een *onderwijs-pragmatische* reden.

2 - In kader *B* wordt terecht de wetenschapsbeoefening als activiteit ('expert-gedrag') benadrukt, tegenover 'weten' als 'een hoeveelheid kennis bezitten'. Immers dit kennisbezit kan tegenwoordig snel verouderen. Wanneer nu de beoefenarencultuur wél als constant gezien kon worden, dan zou er tegen voordoen van expert-gedrag weinig bezwaar te maken zijn - behalve dat het soms niet werkt (zie onder 1). We menen echter dat expert-gedrag tegenwoordig eveneens veroudert, en daarmee is een *maatschappelijke reden* aangevoerd waarom het rechtstreeks overnemen van een 'gewenst handelingsverloop' (Mettes en Pilot[123]) nu of binnenkort ongewenst zou kunnen worden als onderwijsresultaat.

3 - Processen waarbij nieuwe kennis ontstaat staan wetenschappelijk (psychologisch, sociologisch) in de belangstelling, maar zulke processen zijn moeilijk onderzoekbaar. De filosofische kennisleer (epistemologie) kwam in een crisis toen sommige epistemologen opmerkten dat hun theorieën een toetsing nodig hebben (Lakatos[133], Kuhn[134]). Zij meenden die toetsing te vinden in de wetenschaps-historie. De historie zelf blijkt echter voor meerdere uitleg vatbaar[135.136], zodat historische interpretaties zelf een toetsing nodig hebben. In plaats van een verklaring van het verleden is dus het uitspreken van toetsbare verwachtingen nodig om uit deze problemen te komen. Om verwachtingen te toetsen moet men kunnen experimenteren. Het ontstaan van nieuwe kennis in *onderzoek*-leersituaties pleegt zich echter niet in door epistemologen gecontroleerde omstandigheden af te spelen.
Nu zouden we de mogelijkheid willen opperen dat *didactiek* gezien kan worden als de experimentele tak van de kennisleer (epistemologie). Immers, de didactiek die zoekt naar 'probleemstellend onderwijs' houdt zich bezig met het ontstaan (niet: de overdracht) van voor deelnemers nieuwe kennis, onder omstandigheden die ten dele[*)] door de experimenterende didacticus worden bepaald. Hiermee is een *funda-*

---

[*] De eis van een 'kritische discussie' stelt grenzen aan de mate waarin de experimenterende didacticus zijn experiment in de hand kan houden. In probleemstellend onderwijs stuurt de didacticus wel (ten dele) de vragen die deelnemers zich stellen, maar hij bepaalt niet de antwoorden waartoe zij komen. Deze antwoorden bepalen mede de wijze waarop volgende vragen worden opgevat.

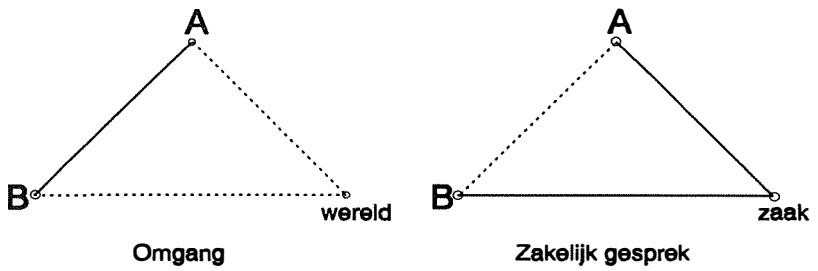
menteel-wetenschappelijke reden genoemd voor interesse in 'onderwijs' volgens referentiekader *C*.

Tenslotte is er nog een reden te noemen om als onderzoeker een keuze 'zonder voorbehoud' te maken, namelijk dat dit de duidelijkheid van de bespreking ten goede komt. Deze reden geldt alleen voor fundamenteel-didactisch onderzoek, immers in toegepast didactisch onderzoek kan het juist heel belangrijk zijn om na te gaan hoe diverse kaders vreedzaam en produktief kunnen coëxisteren in een onderwijsinstituut. Zo'n produktieve samenwerking is mogelijk aangezien de diverse betekenissen van 'onderwijs' elkaar overlappen (zie 9.1). De persoonlijke keuze van de onderzoeker doet dan minder terzake.

9.4. Het gesprek als prototype van de onderwijs(*C*)-situatie

Voor de referentiekaders *A* en *B* werden situaties genoemd die als prototypisch kunnen gelden voor onderwijs in die twee opvattingen: respectievelijk het hoorcollege (kader *A*) en de stage (kader *B*). Voor kader *C* werd nog geen prototype genoemd.
De Miranda[117] kwam op de volgende manier tot een afbakening van de situaties die we 'onderwijssituatie' kunnen noemen in kader *C*.
Hij ging uit van de situatie waarin twee mensen samen met iets bezig zijn en daarover spreken. Wanneer deze twee mensen nu vrienden zijn, dan kan het voorkomen dat het object van hun activiteit er niet zo veel toe doet: of ze nu een fietstocht maken of samen een museum bezoeken, het is allemaal even prettig. In zo'n geval is de relatie tussen de deelnemers hoofdzaak, en de relatie met het object is bijzaak. Deze situatie wordt 'omgang' genoemd.
Is daarentegen het doel om samen materieel of immaterieel verder te komen, dan gaat het om een gezamenlijke gerichtheid op het object (de te ordenen materie). Deze situatie wordt door De Miranda 'zakelijk gesprek' genoemd. Deze benaming kan vreemd overkomen als men bedenkt dat een 'zakelijk gesprek' op het grondniveau in volledige stilte kan geschieden.*) Zien we het grondniveau echter als vertrekpunt om naar het beschrijvend niveau te komen, dan zal er wel een gesprek (óók in de gewone zin des woords) op gang moeten komen.
Met dit alles is nog niets gezegd over de gelijkwaardigheid of ongelijkwaardigheid van de deelnemers. Een 'zakelijk gesprek waarin een overgang van beschrijvend naar theoretisch niveau plaatsvindt' kan dus evengoed verwijzen naar een gesprek tussen twee fysici op een congres, als naar een onderwijssituatie. We kunnen dus kiezen om de onderwijssituatie te omschrijven als een bijzonder zakelijk gesprek, namelijk één waar de deelnemers ongelijkwaardig zijn.
Door zo'n soort gesprek in plaats van de stage als prototypisch voor 'onderwijs' te kiezen, geven we aan dat het ons niet te doen is om invoeging in een bestaande praktijk, maar om overleg, waarbij elk der deelnemers voor de opgave staat de ander te overtuigen (bijv. van de zinvolheid van een bepaalde opgave, of van een gedane suggestie). De leraar kan door

*) Het samen handelen is dan immers de hoofdzaak. Bij dat samen handelen kan aanwijzend woordgebruik een ondersteunende rol vervullen (7.3).



Afbeelding 19: Omgang en zakelijk gesprek (figuren ontleend aan De Miranda[117])

zijn groter overzicht een leerroute ontwerpen, maar tijdens de uitvoering van dit onderwijs moet hij afwachten hoe zijn leerlingen zijn voorstellen opvatten. De keuze van 'gesprek' boven 'stage' geeft ook onze belangstelling voor het woordgebruik van deelnemers aan. Uit de omschrijving van het grondniveau van woordgebruik (p.164) blijkt echter dat woordgebruik niet los van het handelen kan worden gezien, daarom dient 'gesprek' hier ook 'samen handelen' te omvatten.*)

9.5. Een verantwoording voor het gesprek als prototype?

Het vraagteken in de titel van deze paragraaf geeft aan dat ik niet zeker weet of het verstandig is om nu al te streven naar een verdergaande verantwoording voor de gemaakte keuze (9.3). Niettemin zie ik in het werk van Klaassen een poging daartoe[38], die het beantwoorden waard is.
Klaassen[38] verwacht dat het beantwoorden van de vraag "wat maakt het mogelijk dat mensen elkaar gaan begrijpen?" van belang zal zijn voor de methodologie van bèta-didactisch onderzoek en van sociaal wetenschappelijk onderzoek in het algemeen. Een nog onvolledige+) poging tot beantwoorden van deze vraag vindt hij bij de filosoof Davidson (o.a. Davidson[137,138]).
Aangezien het vooral Klaassens samenvatting en verwerking is, die me het mogelijk belang van Davidsons filosofie voor de didactiek heeft laten zien en omdat ik eerder Klaassen dan Davidson als gesprekspartner zie, ga ik alleen in op Klaassens[38] weergave van Davidson.

Als poging tot antwoord op de vraag "wat maakt het mogelijk dat mensen elkaar gaan begrijpen" schetst Klaassen twee "interpretative devices" die hij noemt[38]:
- "A sharing of basic norms of rationality" (p.59), of te wel de veronderstelling "that others share my basic norms of rationality" (p.54, zie p.54-58 en Appendix 1 voor

(* Joling heeft hieruit de consequentie getrokken door voor het eerst (systematisch) het handelen op te nemen in de beschrijving van een gesprek.[36] (p.132 e.v.)
(+ Zie Klaassens[38] p.54 en appendix 1

een schets van wat met 'normen van rationaliteit' bedoeld zou kunnen worden)
- "[the] idea that in the most basic cases what a belief (or desire) is about is determined by what regularly causes the belief (or desire)" (p.59).

Het veronderstelde samenspel tussen beide "devices" wordt toegelicht aan de hand van de denkbeeldige situatie van twee mensen die elkaars taal niet spreken en die elkaar ontmoeten op een onbewoond eiland (p.60-64)[38], en aan de hand van de bekende situatie van een kind dat z'n moedertaal leert (p.64-72)[38]. De vraag wordt gesteld of een kind dat voor 't eerst 'tafel' zegt in aanwezigheid van een tafel, nadat de moeder dit een aantal keren heeft voorgedaan, of zo'n kind inderdaad de bedoeling heeft om te zeggen dat er een tafel aanwezig is. Of algemener: onder welke voorwaarden kunnen we zeggen dat iemand iets bedoelt met een geluid dat zij maakt? Dan volgt de beschouwing waarop ik hier zal ingaan:

> "One requirement for a creature's experienced sensations to be related to simple perceptual beliefs is that it has the concept of the cause (the stimulus) - the idea that its experienced sensations are caused by some stimulus that exists independently of its experiencing the sensations. Having this idea, the creature can then take itself as reacting differentially to stimuli - as responding similarly to what it takes to be similar stimuli. But this requirement is not enough and it is even doubtful whether a single creature by itself could have the concept of the stimulus. The problem is that the single creature has no way of locating the stimulus: is it reacting to a brain state or change, to events in its nervous system, to arrays of light striking its retina and sound waves striking its ear-drum, to objects or events further away from its skin and if so, to which of them?; where in the causal chain is it to locate the relevant cause? Or to put it another way: "[t]he criterion on the basis of which a creature can be said to be treating stimuli as similar, as belonging to a class, is the similarity of the creature's responses to those stimuli; but what is the criterion of the similarity of the responses?" [Davidson]. Without a second creature that is in interaction with the first, there can be no answers to these questions; only the responses of the second creature to the responses of the first creature (and *vice versa*) can provide the criterion. What is needed is that each creature comes to note (and by means of the right sort of interaction with the other comes to note that the other comes to note, etc) that whenever it takes itself as responding to similar stimuli, the other's responses are similar as well. So the criterion is the establishment of a base line: both creatures' awareness (and awareness of the other's awareness) that their similarity responses match. Once a base line has been established, once they share, and know they share, for example the disposition to utter 'Table', each creature can then take an utterance of 'Table' (both by itself or by the other) as a response to a *common* stimulus - a stimulus that is located, because it is common, in a world that is external to what is going on inside each of them and that they share. This is what gives them their sense of objectivity" (Klaassen[38], p.67-68)

Hieruit valt te concluderen dat de woorden 'ik', 'jij' en 'wereld' qua betekenis elkaar veronderstellen. Of, zoals Klaassen zegt:

> "The subjective, objective and intersubjective -or knowledge of one's own mind, knowledge of the world, and knowledge of other minds- are irreducibly related: none can be based on one or both of the others, they all presuppose each other, and they

> emerge together" (Klaassen[38] p.69)[*]

De prestatie die Davidson en Klaassen hier leveren is m.i. dat ze de taal van het behaviorisme, dat mensen als aparte stimulus-respons-mechaniekjes bespreekt, tot aan zijn grens consequent doorvoeren (r.1-19), om vervolgens over die grens heen te stappen (r.20). Hiermee hebben zij mijns inziens een verantwoording voor het gesprek als object voor sociale wetenschap gegeven. Immers, als we sociale wetenschap omschrijven als die wetenschap die menselijk gedrag begrijpelijk wil maken voor mensen, dan blijkt de situatie 'samen gericht zijn op iets' funderend te zijn, waarbij bovendien het 'iets' (de tafel) pas ontstaat doordat ik merk dat jij er ook mee bezig bent, doordat we op elkaars woorden, in relatie tot de situatie, reageren. Zo'n situatie werd door De Miranda (9.4) aangeduid als 'zakelijk gesprek'. Aangezien de verschillende delen van een gesprekssituatie (ik, jij, iets) los van elkaar niet begrepen kunnen worden (r.37-41), *moet* dus de gesprekssituatie zelf object van sociaal wetenschappelijk onderzoek zijn.
Nadat Klaassen aannemelijk heeft gemaakt dat beide "devices" tezamen niet alleen nodig[38] (p.55, 59) maar ook voldoende[38] (p.64) zijn om tot een wederzijdse interpretatie van elkaars taal en gedrag te komen[38] (p.60-64), concludeert hij dat het onderling begrip van mensen beschreven kan worden zonder dat een beroep op fysisch-biologische kennis nodig is[38] (p.64). Daarmee is dan ook gezegd dat sociale wetenschap een eigen terminologie nodig heeft, die niet in fysische termen vertaalbaar is[38] (p.79-81).

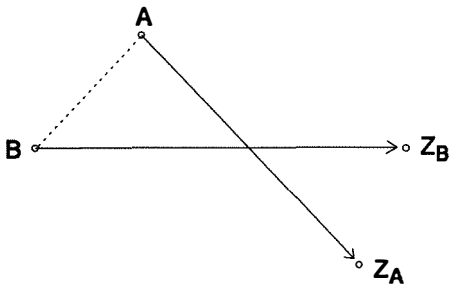
9.6. Objectiviteit als een doorgaand proces

In zijn beschouwing over het proces van eerste taalverwerving vergelijkt Klaassen[38] (p.64) uiteindelijk de kenmerken van twee toestanden, namelijk de toestand voordat "de driehoek" is ontstaan[38] (p.66-67) en de toestand daarna, welke zich kenmerkt door een gemeenschappelijk "gevoel van objectiviteit"[38] (p.68). De wijze waarop deze verandering plaatsvindt wordt nadrukkelijk "een *mysterie*" genoemd[38] (p.69). De lezer kan hierdoor achterblijven met de indruk dat gemeenschappelijke objectiviteit een kwestie is van ja of nee - dus van een plotselinge overgang? - terwijl niet uitgesloten is dat het een kwestie zou kunnen zijn van meer of minder.
De Miranda[117] heeft, onmiddelijk nadat hij de driehoek "A-B-zaak" (9.4) presenteerde, afstand van deze figuur genomen, als volgt:

> "[..] stelt Z de zaak, b.v. dat schilderij van Rubens voor, A en B zijn beschouwers [..], Z_A en Z_B duiden aan, hoe zij dit schilderij zien, Z_A is b.v. "de geculmineerde herontdekking van het menselijk lichaam" en Z_B is "de overvloed van rose vlees". Door deze voorbeelden kan duidelijk worden dat Z_A en Z_B *niet* verschillende deelaspecten van de zaak Z zijn (b.v. A ziet de voorkant en B de zijkant), maar ontstaan door de subjectieve visies van A en B. In de visie Z_A drukt A iets van zijn persoon uit. -Tijdens het gesprek brengt A zijn visie Z_A naar voren en B is in gedachten gericht op Z_B. Dit betekent echter dat Z in eerste instantie helemaal niet voorkomt in het gesprek! We moeten de gesprekssituatie dus als volgt tekenen." (De Miranda[117], p.41)

---

[*] Hiermee is dan m.i. ook een afdoend antwoord gegeven op de filosofische problematiek waar Van Hiele[105] (p.137-139) mee speelt (vgl. Klaassen[38] p.73).



Afbeelding 20: Gesprekssituatie, gecorrigeerde tekening door De Miranda[117]

Hiermee komt De Miranda tot een beschrijving van 'gesprek' die diametraal tegenover die van Klaassen lijkt te staan, namelijk één waarin we ***niet*** uit mogen gaan van "a world that is shared" (Klaassen[38], p.59). Integendeel, het heeft er veel van weg dat we hier het standpunt verdedigd zien "that there is a subjective world prior to everything else" (Klaassen[38], p.73).
Welnu, in zekere zin was die subjectieve wereld er in Klaassens uiteenzetting ook al: dat was de wereld van de baby vóórdat een "base-line" met andere mensen tot stand kwam. Terecht kan opgemerkt worden dat het woord 'wereld' daar geen toepassing heeft, omdat de baby weliswaar allerlei sensaties heeft, maar het hebben van sensaties is niet voldoende om 'zichzelf' van 'de wereld' te kunnen onderscheiden.
Niettemin: daar was iets. Je zou het 'pure subjectiviteit' kunnen noemen, omdat er niets mededeelbaar of controleerbaar aan is, of juist 'puur object-zijn' omdat de sensaties niet samengaan met bedoelingen. Je zou kunnen zeggen: 'een dier is een wereld op zichzelf' - want het dier is niet betrokken in een driehoek waardoor het 'zichzelf' van 'de wereld' zou kunnen onderscheiden.
Nu, dat is ook wat De Miranda[117] beweert: de twee beschouwers van het schilderij maken nog onvoldoende onderscheid tussen het schilderij en de sensaties (o.a. misselijkheid) die zij daarbij ondervinden. Voor zover dat onderscheid nog niet gemaakt is, behoren zowel het schilderij als de misselijkheid nog niet geheel tot de bespreekbare wereld (de wereld die we gemeen hebben).[*)]
Door een gesprek aan te gaan, kan deze situatie veranderen. Er wordt dus niks méér beweerd dan dat de situatie van het kind dat voor 't eerst in 'de driehoek' betrokken wordt, niet uniek is: zoiets komt in 't latere leven ook nog regelmatig voor. Het onderscheiden tussen 'ik', 'jij' en 'wereld' is een eindeloos doorgaand proces.
Maar nu moeten we precies worden. Verkeren de twee beschouwers van het schilderij werkelijk ieder in 'een wereld op zichzelf' in de extreme zin zoals ik dat net uitsprak voor twee dieren? Neen, want beiden kunnen desgewenst vragen: 'wat vind je van dat schilderij?' en beiden weten dat de ander van deze vraag niet vreemd op zal kijken. Behalve van Z_A, "de geculmineerde herontdekking van het menselijk lichaam" en Z_B, "de overvloed van roze vlees" kunnen we dus ook spreken van Z: 'schilderij', want met deze aanduiding van

[*)] Evenmin behoren ze tot de wereld waarover we helder kunnen denken.

datgene waar ze beiden naar kijken, hoe arm ook, kan de ander instemmen. Omdat deze gemeenschappelijke aanduidingsmogelijkheid al bestaat vóórdat de vraag gesteld wordt - hoewel ze op dat moment pas blijkt - kunnen we zeggen: een gemeenschappelijke zaak was er al. Het weglaten door De Miranda[117] van het snijpunt Z kunnen we nu zien als een *kleine* overdrijving. Immers: de gemeenschappelijke aanduiding 'schilderij' voor Z is zeer arm in vergelijking met de niet gemeenschappelijke aanduidingen 'Z_A' en 'Z_B'. Ze is echter ook te zien als een *grote* overdrijving, als we de situatie van deze twee mensen vergelijken met de situatie van twee dieren, waar de omschrijving 'ieder een wereld op zichzelf' in zekere zin radicaal juist is.
Of De Miranda[117] dus veel dan wel weinig heeft overdreven, hangt van ons gezichtspunt af, maar overdreven heeft hij! Tenzij hij me van het tegendeel overtuigt.

Komt het in onderwijs ooit voor dat een gemeenschappelijke zaak tussen leraar en leerling radicaal ontbreekt? Uiteraard ja: als leerlingen onderling gaan keet-schoppen. Er is dan geen gesprek, tenminste niet tussen leraar en leerling.
Een voor de didactiek relevantere situatie werd gerapporteerd in 5.2.1., waar werd opgemerkt dat het woord 'warmte' voor studenten **A**, **B**, **C** en **D** niet naar datgene verwees dat **WK** ermee bedoelde. Doordat **WK** het woord 'warmte' bleef gebruiken in de door hem gewenste betekenis, bleven **WK** en zijn studenten gericht op verschillende zaken. Ook een omschrijving van **WK**'s 'warmte' in andere woorden mocht niet baten. We zouden kunnen kiezen om ook hier niet van een 'gesprek' te spreken, hoogstens van pogingen daartoe. We blijven dan in overeenstemming met de zojuist aan Klaassen[38] ontleende eis dat in communicatie gebruik gemaakt wordt van, of gezocht wordt naar de gemeenschappelijke "basislijn" van de driehoek, dat wil zeggen naar gemeenschappelijke uitdrukkingen voor datgene in de gemeenschappelijke wereld *waarover* men van inzicht verschilt.
Het kan nu opvallen dat er in dit geval geen zintuiglijk object (schilderij) aanwezig was, waarop de verschillende verwoordingen (voor Z_{WK} en Z_{stud}) betrokken konden worden.

Het Van Hiele niveauschema, zoals verwoord in 7.3, suggereert dat het vóórkomen van zulke "kloven van onverstaanbaarheid" in onderwijs te verwachten is. De zaak waarnaar deelnemers met hun woorden verwijzen heet bij Van Hiele "object van studie". Zo'n object van studie heet bij Van Hiele ook een "structuur". Drie soorten structuur werden genoemd (7.3):

- visuele structuren, die we opmerken "in de wereld" en die benoemd worden;
- structuren opgemerkt in het woordgebruik betreffende visuele structuren, te formuleren met open lijsten eigenschappen, die empirische generalisaties inhouden;
- structuren opgemerkt in eerder geformuleerde empirische generalisaties, te formuleren als logische samenhang tussen stellingen.

Aangezien de drie soorten structuren kwalitatief verschillen is er geen sprake van een glijdende schaal. Deelnemers die 'op' twee verschillende niveaus spreken, verwijzen met hun woorden dus naar verschillende zaken (Van Hiele: objecten, structuren). Dit was bij

de twee beschouwers van het schilderij ook het geval. Van hun twee zaken*) Z_A en Z_B zouden we kunnen zeggen dat deze elkaar 'overlappen', om daarmee aan te geven dat, naast benoemingen van hun beider zaken waarover zij het niet direct eens worden, zij ook beschikken over een benoeming ('schilderij'), waarover ze het al eens waren. Dit maakt het hen mogelijk hun verschillende uitspraken op te vatten als een verschil van mening *over iets* dat tot hun beider wereld behoort. Nu kunnen we vragen:

> *Is zo'n **gemeenschappelijke zaak** als overlap van twee **persoonlijke zaken** ook mogelijk voor twee deelnemers die spreken op een verschillend Van Hiele niveau?*

Merk op dat een negatief antwoord een axiomakeuze zou inhouden. We zouden dan immers kunnen concluderen dat in geval van niveauverschil deelnemers elkaar *niet kunnen* verstaan (7.5). De uitdrukking "kloof van onverstaan*baarheid*", gebruikt door Ten Voorde[139], kan de suggestie wekken dat deze keuze al is gemaakt. Ook het spreken van "discontinuïteit" tussen de Van Hiele niveaus (Van Hiele[105], p.49) kan die suggestie wekken.
Als inderdaad tot een negatief antwoord zou worden besloten, dan moet de vraag gesteld worden of deze opvatting verenigbaar is met onderwijs volgens het gespreksmodel, aangezien we in 9.5 een redenering zagen die - volgens mijn interpretatie+) - inhoudt dat een gesprek een gemeenschappelijke zaak vereist. Achter de gestelde vraag ligt dus deze volgende vraag:

> *Is het Van Hiele niveauschema in overeenstemming met een gespreksmodel op te vatten?*

Hierbij heb ik 'gespreksmodel' dan inmiddels zó opgevat dat van *een* gemeenschappelijke zaak gesproken kan worden.
Wanneer we een 'gemeenschappelijke zaak' kunnen zien als overlap van 'persoonlijke zaken', dan kunnen we ook Klaassens[38] 'gedeelde wereld' opvatten als een overlap van 'persoonlijke werelden'. De 'gedeelde wereld' is dan de wereld voor zover we er al samen over kunnen spreken. De 'persoonlijke wereld' is de wereld voor zover we hem persoonlijk ondervinden, waarbij het onderscheid tussen 'ik' en 'wereld' gedeeltelijk nog moet ontstaan. Allicht kan er nu opgemerkt worden dat 'persoonlijke wereld' een contradictie is. Maar dat heb ik al toegegeven: door te zeggen dat het onderscheid tussen 'ik' en 'wereld' daar nog moet ontstaan.
Het voordeel van deze spreekwijze is niettemin dat het dan gemakkelijker wordt om objectiviteit te formuleren als een doorgaand proces.

(* In plaats van "hun zaken" kunnen we ook zeggen: "de zaak voor A", en "de zaak voor B", of "A's zaak" en "B's zaak". Maar niet: "de zaak, zoals A die ziet", want dan spreken we al van een gemeenschappelijke zaak die verschillend gezien wordt en deze formulering staat nu juist ter discussie.

(+ Klaassen wees mij er op het woord 'zaak' nooit gebruikt te hebben in dit verband. Ook 'gesprek' komt niet voor in de geciteerde redenering. (mondelinge mededeling)

9.7. Rationaliteit als proces?

Hierboven kwamen we via Klaassens[38] analyse van objectiviteit (9.5) tot een kritische vraag met betrekking tot de Van Hiele niveaus (9.6). Omgekeerd zijn ook uitgaande van de Van Hiele niveaus (zoals door mij opgevat, zie tekstkader 2) vragen te stellen aan Klaassen.
De Van Hiele niveaus impliceren dat de criteria voor goed redeneren zich kunnen ontwikkelen, zo dat de set criteria waaraan een redenering op beschrijvend niveau voldoet, verschilt van de set criteria waaraan een redenering van theoretisch niveau voldoet. Klaassen daarentegen spreekt uitsluitend over 'normen' die voor ieder die als subject aan gesprek deelneemt gemeenschappelijk verondersteld moeten worden, willen we 'begrijpen' begrijpen[38] (p.55, 58-59).
Daarmee is opnieuw de vraag te stellen hoe we de overgang moeten beschrijven naar deelname aan onderling begrijpen, maar nu gelet op het ontstaan van wat Klaassen noemt de 'normen van rationaliteit' als structuur die in het handelen van anderen aanwezig moet zijn (die we moeten veronderstellen) wil dat handelen zich laten begrijpen. Hoe moeten we ons de overgang voorstellen van gedrag dat deze structuur niet vertoont naar gedrag dat die structuur vertoont? Er doen zich enige mogelijkheden voor:

1 - Rationaliteit is een kwestie van ja of nee: er wordt gehandeld naar de normen van rationaliteit, en dan ook meteen naar *alle* normen, of dit is niet het geval.[•)]
2 - Rationaliteit is een kwestie van meer of minder: de mate waarin naar de normen (alle normen) gehandeld wordt neemt geleidelijk toe.[+)]
3 - Rationaliteit is een kwestie van kwaliteit: 'normen van rationaliteit' laten zich indelen in elkaar omsluitende klassen $\alpha < \beta < \gamma$..., waarbij de normen β de normen α veronderstellen, maar niet andersom.

In het derde geval zou ook 'elkaar begrijpen' in verschillende kwaliteiten voorkomen: deelnemers die wederzijds de normen β bij het begrijpen van elkaars gedrag gebruiken begrijpen elkaar 'beter' dan deelnemers die wederzijds de normen α gebruiken.
Het is uiteraard mogelijk om bij wijze van definitie vast te leggen dat we met 'normen van rationaliteit' uitsluitend die normen bedoelen die voor *elk* onderling begrip als voorwaarde moeten gelden (p.59?)[38]. Gevraagd wordt hier of dit een verstandige definitie is, wanneer we leerprocessen willen beschrijven.

(• De beslissing ligt bij de toehoorder: deze probeert de normen te herkennen in iemands uitingen - en dan ook meteen *alle* normen - of hij doet dat niet (bij een baby of hond zal hij kiezen voor "niet").

(+ Aan de kant van de volwassen toehoorder zou nog steeds van een ja/nee beslissing sprake kunnen zijn. De vraag kan dan gesteld worden of deze mogelijkheid zich empirisch van de vorige laat onderscheiden.

Is het mogelijk en voor de beschrijving van onderwijs (C) zinvol 'normen van rationaliteit' in te delen in elkaar omsluitende klassen $\alpha < \beta < \gamma$*... zo dat de normen in klasse* β *de normen* α *veronderstellen, maar niet andersom?*[*)]

De Van Hiele niveaus zoals door mij opgevat (9.6), impliceren een positief antwoord op deze vraag. In een redenering op theoretisch niveau, bijvoorbeeld, wordt gestreefd naar zuinigheid bij het poneren van definities en axioma's. Men streeft er dan immers naar een *groot* aantal eigenschappen van een term af te leiden uit een *zo beperkt mogelijke* definitie (9.6). Merken we in een redenering niet deze zuinigheid bij het kiezen van definities en axioma's, dan is het waarschijnlijk onterecht om te zeggen dat onze gesprekspartner met 'definities' en 'axioma's' bezig is. Wellicht is hij dan bezig met een redenering van beschrijvend niveau, waarbij alle bekende eigenschappen gebruikt kunnen worden in de omschrijving van een term (7.2). We kunnen dan zijn redenering nog steeds als verstandig gedrag begrijpen, en toch is die redenering niet 'verstandig' volgens de normen die aan een geaxiomatiseerd systeem te stellen zijn.
Zoals gezegd: de Van Hiele niveaus, zoals hier begrepen, veronderstellen een positief antwoord op de gestelde vraag. Door de bruikbaarheid van deze Van Hiele niveaus te toetsen, kan dan ook de bruikbaarheid van dit antwoord worden getoetst. Aangezien de gestelde vraag voortkwam uit een kritische beschouwing van Klaassens werk wil ik de beantwoording in eerste instantie aan hem overlaten.
De in 9.6 gestelde kritische vraag ten aanzien van de Van Hiele niveaus reken ik tot mijn eigen problemen, en daaraan zal dus in volgende hoofdstukken worden gewerkt. Om misverstanden in verband met de zojuist aan Klaassen gestelde vraag te vermijden zal ik hierna het beladen woord 'rationaliteit' vermijden.

9.8. Conclusie

De eerder gemaakte keuze voor probleemstellend onderwijs is in dit hoofdstuk geplaatst temidden van diverse meningen over leren en onderwijzen. Een indeling van opvattingen in drie referentiekaders (9.1) bleek bruikbaar bij het beschrijven van een maatschappelijke trend en van het eigen didactisch leerproces (9.2). Er werden redenen genoemd om in didactisch onderzoek te kiezen voor onderwijs waarin beide partijen (leraar en leerlingen) gelijke rechten en plichten hebben als het erom gaat elkaar inhoudelijk (zakelijk) te overtuigen (9.3). Zo'n onderwijssituatie werd nader geanalyseerd als bijzonder geval van een gesprekssituatie (9.4).
Een beschouwing van Klaassen werd geïnterpreteerd als een verantwoording voor de keuze voor het gesprek als object voor didactiek als sociale wetenschap (9.5). De vraag ontstond of de Van Hiele niveaus verenigbaar zijn met 'gesprek' zoals zojuist geanalyseerd. Enerzijds werd bij Klaassens beschouwing de vraag gesteld of zijn beschouwingswijze ook toelaat (of in de toekomst zal toelaten) dat objectiviteit en rationaliteit als resultaten van

---

[*)] De door Klaassen[38] genoemde "normen van rationaliteit" (p.54-57) zou ik bij wijze van eerste gok alle indelen in de laagste (minst omvattende) klasse, hetgeen overeenstemt met Klaassens benoeming van deze normen als "*minimal* standards of rationality"[38] (p.55, cursivering toegevoegd).

een leerproces, in plaats van alleen als voorwaarden vooraf, kunnen worden beschreven (9.6 en 9.7). Anderzijds werd gevraagd of de Van Hiele niveaus toelaten dat een gesprek steeds mogelijk blijft, ook in geval van niveauverschil tussen deelnemers:

> *Is een **gemeenschappelijke zaak** als overlap van twee **persoonlijke zaken** ook mogelijk voor twee deelnemers die spreken op een verschillend Van Hiele niveau?*

Aangezien tot nu toe slechts ruw is aangeduid wat met 'gemeenschappelijke zaak' en met 'persoonlijke zaak' kan worden bedoeld, is deze vraag tegelijk op te vatten als vraag naar een verdere opheldering van de hierin voorgestelde uitdrukkingen.

10. Onderzoeksthema: continuïteit en discontinuïteit in onderwijs-gesprekssituaties

De vorige hoofdstukken hadden tot doel didactische gezichtspunten te introduceren en hun bruikbaarheid bij het ontwerpen van onderwijs te laten zien. Een tweede, daarmee samenhangend doel was, om beslissingen genomen in het ontwerpproces (hoofdstuk 5) nader te verantwoorden.
Deze doelen golden slechts gedeeltelijk voor hoofdstuk 9, immers daar werden geen wijzigingen in het ontworpen onderwijs meer beredeneerd. Dat was eerder wel gebeurd met behulp van de term 'probleemstellend onderwijs' zoals omschreven in 5.2.3. Hoofdstuk 9 bracht een nadere opheldering over probleemstellend onderwijs, waarbij een kritische blik werd geworpen op gezichtspunten geïntroduceerd in de voorafgaande hoofdstukken.
Een kader is niet compleet geschetst als niet ook de opvallende open plekken en problemen zijn verkend. Daarom eindigt deel 2 met een bespreking van de tot nu toe gevonden problemen. We beginnen met de problematische relatie tussen Van Hiele niveaus en concept-mapping (10.1). Daarna komt de verenigbaarheid aan de orde van het gekozen gespreksmodel met discontinue beschrijvingswijzen (10.2). Waar nodig zullen we een beroep doen op literatuur om de gevonden problemen zo helder mogelijk te stellen. Dit leidt tot de onderzoeksvragen die in deel 3 zullen worden beantwoord.

10.1. Associëren en verwijzen

Als eerste probleem merkten we op (7.7), dat het bepalen van de 'betekenis' van een woord door te letten op associaties met andere woorden (concept-mapping) nog niet netjes in verband is gebracht met de 'betekenis' bepaald door te letten op de structuren waarnaar een woord verwijst (Van Hiele niveaus).
'Associëren' betreft woorden die samen gebruikt worden. Het betreft dus wellicht woorden die met eenzelfde kwaliteit gebruikt worden. Daarentegen 'verwijzen' woorden op hogere niveaus naar structuren opgemerkt in het woordgebruik van het voorafgaande niveau.

> "*At each level one is explicitly busy with the internal ordering of the previous level*"
> (Van Hiele[105] p.96)

Met betrekking tot het samengaan van associëren en verwijzen heeft Van Hiele opgemerkt:

> "the junctions of the network of relations lose a part of their contents by transferring them to the connections between the symbols."[105] (p.62)

Deze opmerking dat er "betekenis" (content) wordt "overgedragen" van de symbolen naar de verbindingen (connections) tussen de symbolen helpt me echter niet verder. Ik begrijp hieruit dát de associaties tussen de symbolen belangrijker worden bij bereiken van beschrijvend niveau, maar er wordt niet gezegd hoe dit toegenomen belang gezien moet

worden in relatie tot de oorspronkelijke verwijzende betekenis, die blijkbaar in belang afneemt.
Dit "afnemen" is discutabel als we volhouden dat elk van de niveaus zijn eigen object heeft (7.3). In dat geval hebben immers ook de termen op de hogere niveaus een verwijzende betekenis (zie 7.3: de verwijzende betekenis van "nodig", "impliceert" etc.), die niet minder hoeft te zijn dan de verwijzende betekenis van woorden op grondniveau.
De vraag naar de verhouding tussen de twee betekenissen van 'betekenis' is meer operationeel te formuleren, als volgt:

1. We kunnen de 'betekenis' van een woord op twee manieren onderzoeken:
- *door te letten op associatie met andere woorden, en*
- *door na te gaan waarnaar dat woord verwijst.*

Vraag is of, en zo ja hoe de resultaten van deze beide werkwijzen met elkaar in samenhang te brengen zijn.

In verband hiermee is in het bijzonder te vragen naar de betekenisveranderingen zoals die in leerprocessen werden aangewezen.

2. Welke van de twee criteria genoemd in vraag 1 moeten we gebruiken bij het opmerken van 'betekenisverandering' in een probleemstellende onderwijssituatie (gesprekssituatie)? Is het mogelijk beide te gebruiken, zo dat consistente en voor onderwijsontwikkeling bruikbare resultaten worden verkregen?

Deze vraag is wellicht apart te beantwoorden voor verschillende soorten leerprocessen, bijvoorbeeld 'niveauverhoging' en 'analogieredenering'.

10.2. Gesprek en discontinuïteit

In verband met de Van Hiele niveaus worden uitdrukkingen als 'kloof van onverstaanbaarheid' en 'discontinuïteit' gebruikt (9.6). Over Kaper en Ten Voorde[37,100] werd opgemerkt dat zij ernaar streven hun contexten "scherp" te onderscheiden (6.1 onder d). Zij spreken dan ook van "contextwisseling", een uitdrukking die ook bij Joling[36] voorkomt. Al deze auteurs bespreken problemen met de verstaanbaarheid (in onderwijssituaties) waarbij uitdrukkingen worden gebruikt waarin we iets van discontinuïteit kunnen horen.
Voor elk van deze manieren om tussentalen te onderscheiden valt dus de vraag te stellen die in 9.6 alleen gesteld werd voor de Van Hiele niveaus:

4. Houdt de gekozen beschrijvingswijze voor een taalverschil rekening met een ***gemeenschappelijke zaak*** *als overlap van* ***persoonlijke zaken*** *of niet?*

Het gaat bij deze vraag om de verenigbaarheid van de genoemde beschrijvingswijzen met het gespreksmodel, zoals na discussie opgevat in 9.6.
We spraken daar van de 'zaken' waarnaar een woord verwijst, voor twee verschillende deelnemers aan een (poging tot) gesprek.
Beantwoording van de gestelde vraag kan dus afhangen van nadere opheldering over

'verwijzen' (vragen 1 en 2). De volgende vraag gaat dus vooraf:

3. Zijn de termen 'gemeenschappelijke zaak' en 'persoonlijke zaak' houdbaar? (na beantwoorden vragen 1 en 2)

Om meer toegespitste onderzoeksvragen te krijgen zullen we vraag 4 nu apart verkennen, eerst voor de Van Hiele niveaus (10.2.1) en vervolgens voor Jolings[36] 'niveau-invariante contextwisseling', en voor Kaper en Ten Voordes 'contextwisseling'[37,100] (10.2.2).

10.2.1. Niveauverandering

Om meer opheldering te krijgen over de bedoeling van 'discontinuïteit' in verband met de Van Hiele niveaus, wordt nu getoond waar en hoe deze uitdrukking door Van Hiele[30] en door Van Hiele-Geldof[31] werden geïntroduceerd.
Bij Van Hiele verschijnt het woord 'discontinu' voor 't eerst in zijn proefschrift:

> "Wanneer wij inzicht opvatten als een structurering van het waarnemingsveld, dan zal een leren, dat over verschillende inzichten loopt, discontinu zijn. We merken op, dat het leerproces bij een kind, dat de meetkunde bestudeert, een zeer duidelijk discontinu verloop heeft." (Van Hiele[30], p.37)

Hierna volgt een uiteenzetting dat de 'discontinuïteit' bij het meetkundeleren niet voortkomt uit een veranderende structurering van het waarnemingsveld. Hierbij wordt het woord 'discontinu' gebruikt alsof de betekenis hiervan direct duidelijk is. Het lijkt me dan het beste om aan te nemen, dat er niets gewichtigs mee bedoeld is. Enige bladzijden later:

> "Bij het tot stand brengen van een meetkundig inzicht hebben we dus te maken met drie structureringen: een aanschouwelijke structurering, een taalstructurering en een logische structurering. Zij werken gedeeltelijk samen, vullen elkaar aan, maar op den duur verdringt de later genoemde de voorafgaande. Zo nodig zal een woord of later een symbool een aanschouwelijke voorstelling oproepen, maar dit zal steeds minder dikwijls plaatsvinden (..)". (Van Hiele[30], p.41)

In de drie "structureringen" herkennen we de drie kwaliteiten van woordgebruik: aanschouwinggebonden verhalen, empirische generalisaties in woorden met een afgesproken betekenis, deductieve ordening van stellingen (eerste, tweede en derde niveau, toen nog niet zo genoemd). Discontinuïteit betekent blijkbaar niet dat de ene kwaliteit meteen geheel verdwijnt als de volgende verschijnt. Wel is sprake van "op den duur verdringen".
Even later op dezelfde bladzijde is sprake van "onregelmatig verloop", van "plotselinge stijgingen in de leercurve" en van "horizontale stukken in de leercurve, waarin het meest gebeurt". Omdat niet gezegd is wat er op de assen is uitgezet, neem ik aan dat het om een indruk van de leraar gaat betreffende het leerproces van zijn leerlingen: soms hollen, soms moeizaam voortploeteren. Opnieuw heb ik geen reden een principiëlere betekenis te veronderstellen.
Wèl worden de "plotselinge stijgingen" in verband gebracht met de drie eerder genoemde "structureringen":

> "[op de horizontale stukken] vindt de reorganisatie plaats (..). Pas, wanneer de

> leerling het gevoel krijgt, dat hij het terrein voldoende beheerst, kunnen de woorden of symbolen in een nieuwe structurering als zelfstandige eenheden gaan optreden, men constateert dan een plotselinge stijging in de leercurve: er is een nieuw inzicht geboren. Maar daarvoor is noodzakelijk, dat deze woorden en symbolen zich zozeer bevrijd hebben van de structuren, die zij vertegenwoordigen, dat deze niet meer in de nieuwe structurering storend kunnen optreden." (Van Hiele[30], p.41)

Deze gelegde samenhang tussen subjectieve 'leercurve' enerzijds en de eerder genoemde 'structureringen' lijkt wel principiële trekjes te hebben, want er wordt blijkbaar verklaard hoe deze plotselinge stijging 'kan' optreden. Een interessante vraag is nu: *in hoeverre* moeten de woorden, om in een nieuwe structurering te kunnen optreden, zich bevrijd hebben van de structuren die zij (blijkbaar nog steeds) vertegenwoordigen, en wat betekent dan "bevrijden", gezien dat zij die structuren nog steeds vertegenwoordigen?
Deze vraag is in verband te brengen met de onderzoeksvraag gesteld in 10.1, als we "structuren die zij [woorden] vertegenwoordigen" opvatten als datgene, waarnaar een woord verwijst en als we de nieuwe structurering, waarin een woord of symbool "optreedt" opvatten als de samenhang van woorden, waarin dat woord voorkomt. In mijn eigen woorden is deze vraag ("in hoeverre..") dus zo te stellen:

> *5a. In hoeverre en in welke zin moeten de woorden, om in een kloppende samenhang met andere woorden te kunnen functioneren, van hun verwijzende betekenis worden "bevrijd"?*

Het antwoord "zozeer..., dat deze niet meer in de nieuwe structurering storend kunnen optreden" laat de mogelijkheid open dat die bevrijding zowel heel ingrijpend als ook veel minder ingrijpend zou kunnen zijn. Dat hangt er van af of de (blijkbaar soms opgemerkte) storende werking van de (oude) structurering voor het functioneren van het woord in de nieuwe structurering vermeden kan worden, zonder de relatie met het voorafgaande geheel te negeren.
Van Hiele geeft aan zulk negeren ongewenst te vinden:

> "Ook is het mogelijk, dat door de veranderde instelling bepaalde aanschouwelijke structureringen niet meer gemakkelijk waargenomen worden [in latere stadia van het leren], iets, wat voor de toepassing van de meetkunde ongunstig kan zijn. De leraar zal dus naar bepaalde middelen moeten zoeken om de natuurlijke gang van zaken tegen te gaan en de rationele en de aanschouwelijke basis, die voor het denken op hoog niveau overbodig geworden zijn en daar zelfs een belemmering voor vormen, weer in de herinnering terug te roepen." (Van Hiele[30], p.42)

Eenzelfde conclusie valt te trekken als we uitgaan van de keuze voor probleemstellend onderwijs. Een nadeel van woorden die hun betekenis uitsluitend ontlenen aan onderlinge relaties zou namelijk zijn, dat er geen reden meer te vinden is om het gebruik van deze woorden te veranderen, als eenmaal een kloppende samenhang van termen is bereikt. Zo'n kloppende samenhang kan immers pas weer ter discussie komen, wanneer nieuwe ervaringen daar aanleiding toe geven. Dit betekent dat probleemstellend onderwijs steeds ook een naar ervaringen verwijzende betekenis van woorden moet blijven veronderstellen en nastreven. Bij mijn introductie van de Van Hiele niveaus benadrukte ik daarom vooral het nodig-zijn van de lagere niveaus voor de overgang naar de hogere (7.4). In dat licht kan

de vraag opkomen hoe we de door Van Hiele genoemde 'storing' of 'belemmering' dan moeten begrijpen:

> *5b. Is er iets in de 'lagere' kwaliteiten van redeneren dat zich fundamenteel tegen een 'hogere' ordening verzet, er strijdig mee is? Of zijn die storingen en belemmeringen van bescheidener omvang, van minder principiële aard?*

De vraag naar de reikwijdte van 'discontinuïteit' lijkt nu dus samen te hangen met de vraag hoe we die 'storende werking' begrijpen, die de voorgaande structurering, of de aanschouwelijke basis blijkbaar kunnen hebben ten opzichte van de nieuwe structurering of het hoge niveau.

Van Hiele-Geldof stelt in haar voorwoord[31] de vraag: "Is het mogelijk door materiaalaanbieding een didactiek te volgen, waarbij het aanschouwelijke denken van het kind *continu* wordt ontwikkeld tot het exacte denken, dat vereist is voor het logische systeem van de meetkunde?"[31] (p.VIII)
Het woord 'continu' of 'discontinu' komt in deze dissertatie echter verder niet meer voor*), zodat een antwoord dat letterlijk ingaat op de gestelde vraag ontbreekt. Ik veronderstel daarom dat ik het opmerken van de niveaus zelf als (negatief) antwoord op de gestelde vraag moet opvatten. Maar dit houdt in dat 'discontinu', althans voor Van Hiele-Geldof[31], blijkbaar niet veel toevoegt aan de constatering dat er niveaus kunnen worden onderscheiden.
Geformuleerd wordt een verschil tussen 'objecten' waar achtereenvolgens mee gewerkt wordt:

> "De objecten waar nu+) mee gewerkt wordt, zijn de meetkunde-stellingen (relaties) zelf. Deze objecten zijn ontstaan tijdens de visuele meetkundige structurering.#) Het zijn de in meetkundige taal omgezette wetmatigheden (relaties), die de empirie geleverd heeft. Het is de speciale empirie (vouwen, draaien, enz.), die gebruikt werd bij het visuele meetkundige structureren der meetkundige objecten." (Van Hiele-Geldof[31], p.141)

Hier is tweemaal sprake van 'objecten' waar mee gewerkt wordt. De eerste maal betreft het wetmatigheden, waarin een ordening gezocht wordt, daama betreft het figuren, waarin regelmatigheden gezocht worden door te vouwen, te draaien, enzovoorts. De nieuwe objecten (wetmatigheden) zijn ontstaan tijdens het werken met de eerdere objecten (figuren die men kan vouwen, draaien..).

> "[In gangbaar onderwijs] worden twee soorten objecten door elkaar gebruikt en men legt daar niet voldoende de nadruk op. In het gegeven en het te bewijzen denkt de leerling, dat de figuur waarop dit gegeven en te bewijzen slaat, het meetkundig object is. Tijdens het bewijs echter moet hij zich bewust kunnen maken, dat de bewezen stellingen zijn objecten zijn. Zodra de stelling voor het meetkundige object (=figuur)

(* behalve in een verwijzing naar Van Hiele[30] (p.37). "Discontinu" staat ook hier in verband met verandering van "tempo" (Van Hiele-Geldof[31] p.34).
(+ op weg naar het derde niveau (noot toegevoegd)
(# overgang van eerste naar tweede niveau (noot toegevoegd)

> bewezen is, is een nieuw object van een ander bouwwerk ontstaan. Voordien mocht deze nieuwe bouwsteen echter nog niet als steen gezien worden." (Van Hiele-Geldof[31], p.141)

Nu is het niet geheel duidelijk welke soorten objecten er worden onderscheiden. Want in het eerste citaat werden 'wetmatigheden' en 'meetkundestellingen' gebruikt als twee verschillende omschrijvingen van dezelfde objecten-soort. Anderzijds werd van de 'wetmatigheden' gezegd dat ze door de empirie geleverd werden, terwijl nu van de 'stellingen' gezegd wordt dat ze pas (als nieuw type object) ontstaan zijn zodra ze een plaats in een logisch deductieve ordening hebben gevonden, dat wil zeggen, zodra ze bewezen zijn. Maar empirisch constateren en bewijzen zijn twee verschillende activiteiten. Resultaten van de empirie kunnen dus niet zonder meer gelijk worden gezet aan resultaten van een bewijs.
Het lijkt daarom het eenvoudigst om te veronderstellen dat er nu drie typen objecten onderscheiden zijn, genoemd: figuren, wetmatigheden en stellingen (overeenkomend met eerste, tweede en derde niveau). Deze interpretatie lukt als ik bovendien aanneem dat "figuur" in het vorige citaat slaat op de *geanalyseerde* figuur[•)], waarvan de combinatie van eigenschappen als een geconstateerde "wetmatigheid" geformuleerd is. Deze wetmatigheden (of te wel geanalyseerde figuren) vormen dan de basis voor een "ander bouwwerk", namelijk een bouwwerk van bewezen stellingen. Ook het bewijzen kan dan beschreven worden als het ontstaan van een nieuw soort object (bewezen stellingen) door te handelen met een eerder object (wetmatigheden, of geanalyseerde "figuren"). Volgens deze interpretatie is het onderscheiden van objecten consequent te noemen: een nieuwe soort objecten ontstaat door te handelen met objecten van een eerdere soort.
Belangrijk voor de vraag naar discontinuïteit lijkt me, dat hierbij dit eerdere object niet uit de aandacht verdwenen is, volgens Van Hiele-Geldof. Een van de (cursief gezette) conclusies luidt namelijk:

> "*Uit het resultaat van de test blijkt dat het kunnen beschikken over visueel meetkundige structuren de overgang naar de logische denkstructuren vergemakkelijkt (...)*" (Van Hiele-Geldof[31], p.145)

Met "visueel meetkundige structuren" wordt hier bedoeld het resultaat van "de analyse van de meetkundige objecten in een meetkundige context [waardoor] het globaal gestructureerde waarnemingsveld [...] in meetkundige zin [wordt] gestructureerd"[31] (p.142). Het betreft dus geen "visuele structuren" zoals Van Hiele[105] (p.11, 49-50) ze later omschreef (grondniveau), maar eerder structuren *gevonden in* visuele structuren, door een proces van analyse (beschrijvend niveau).

Om samen te vatten: 'discontinuïteit' bij Van Hiele-Geldof[31] lijkt samen te vallen met het constateren van de 'niveaus', en deze 'niveaus' berusten onder andere op het opmerken van verschillende soorten 'objecten' waarop het ordenende handelen zich richt. Het gemaakte onderscheid tussen verschillende soorten objecten is kwalitatief, dus niet gradueel. Daarnaast hebben we de door de leraar subjectief opgemerkte tempoveranderingen gezien

---

(• D.i. eerder 'de driehoek' dan een papieren driehoek.

als deel van een basis voor de niveaus.
Met 'discontinu' is blijkbaar niet bedoeld dat de aandacht voor de eerdere objecten verdwenen is, zodra de nieuwe objecten ontstaan. De aandachtsverschuiving wordt als geleidelijk (continu) beschreven. Met 'discontinu' is dus misschien niet meer bedoeld dan dat de objecten waarop het ordenende handelen zich achtereenvolgens richt, zich kwalitatief laten onderscheiden, niet gradueel.

In verband met de genoemde continue aandachtsverschuiving kan echter ook de vraag gesteld worden of de 'nieuwe objecten', zolang zij bezig zijn te ontstaan, al 'object van ordenend handelen' mogen heten. Ze zijn dan eerder resultaat van ordenend handelen. Het is dan de vraag of het wel juist is te zeggen dat, bij het leveren van een bewijs, de eerder bewezen stellingen de 'objecten' zijn, die het ordenend handelen ondergaan. Is het niet eerder de empirische 'wetmatigheid' die *nog niet* zijn plaats in het stelsel van bewezen stellingen heeft gevonden, die we als 'object van het ordenende handelen' mogen aanwijzen bij het leveren van een bewijs?
Als nu tijdens het ontstaan van de 'nieuwe objecten' de eerdere objecten nog de aandacht hebben en als die 'nieuwe objecten' tijdens hun ontstaan nog geen 'object van het handelen' (dus eigenlijk nog geen 'object') mogen heten, dan ligt de volgende vraag voor de hand:

> *6. Wanneer de 'nieuwe objecten' -nadat ze zijn ontstaan- 'object van ordenend handelen' worden*(*), hebben dan de eerdere objecten nog de aandacht?* (Zo niet, dan zou dit ook tot de betekenis van 'discontinuïteit tussen de niveaus' kunnen behoren.)

Ten Voorde[35] gebruikt in verband met de Van Hiele niveaus de volgende uitdrukkingen die kunnen wijzen op discontinuïteit. Hij spreekt van "kloof van onverstaanbaarheid", over een noodzakelijke "crisis" in niveauverhogend leren en over "objectwisseling".
De "kloof van onverstaanbaarheid" wordt meestal genoemd in verband met een te hoge "anticipatiespanning", dus in verband met een ongewenste onderwijssituatie, waarna de leraar zijn gedrag zou willen bijsturen[35] (p.82, 335-336, 437), soms echter is sprake van onverstaanbaarheid tussen leerlingen (p.415). Van de kloof van onverstaanbaarheid wordt soms gezegd, dat hij in niveauverhogend onderwijs wordt "overbrugd"[35] (p.44, 82), maar ook wordt soms gezegd dat hij in niveauverhogend onderwijs wordt "voorkomen"[35] (p.119, 332, 335). Van onvermijdbare kloven lijkt dus geen sprake te zijn.
Principiëlere uitspraken vind ik uitgedrukt met behulp van het woord 'crisis':

> "nu kan n i v e a u v e r h o g i n g (..) worden herkend als een v e r a n d e r i n g v a n r e f e r e n t i e k a d e r. Leerlingen moeten het nieuwe referentiekader ontdekken. In onderwijssituaties moeten dus k r i s i s -achtige toestanden in gespreksgroepen voorkomen. In de bekende en vertrouwde taalwereld moet een ongenoegen ontstaan, omdat bepaalde vragen niet beantwoord en bepaalde opgaven niet gemaakt kunnen worden. Aangesproken vanuit een andere taalwereld, kunnen leerlingen deze vragen en opgaven niet verstaan. Hieruit kan een toestand van grote onzekerheid voortkomen, waarin men 'het allemaal niet meer ziet zitten'." (Ten Voorde[35], p.43)

(* In termen van de niveaus: bij de volgende niveau-overgang.

Maar wanneer dan zo'n situatie zich voordoet, waarin leerlingen de opgave niet verstaan[35] (p.335, 437), dan concludeert Ten Voorde niet dat een gewenste situatie gerealiseerd is, integendeel. Wel worden als positief onderwijsresultaat beoordeeld een situatie die beschreven werd met 'onzekerheid' gevolgd door een 'doorbraak'[35] (p.402) en een andere situatie die beschreven wordt als "keerpunt of k r i s i s", waar leerlingen een problematiek ontmoeten die aanleiding wordt tot een 'objectwisseling'[35] (p.424-425).
Ik herinner me discussies tussen Ten Voorde en Redeker, waarbij Redeker het standpunt innam dat "im Umlernen mit der vertrauten (..) Phänomene und der Verläßlichkeit der sinnlichen Wahrnehmung 'gebrochen' werden muß"[140]. Om de omstandigheden voor zo'n breuk te scheppen zou een leraar nodig zijn die de "immer wieder ins Spiel kommenden lebensweltlichen Verweisungsbezüge aufnimmt (..), indem er sie ebenfalls immer wieder in einen Widerstreit mit nicht erwarteten Wahrnehmungen führt und so außer Geltung setzt"[140]. Doel hiervan is, de leerlingen in een toestand van radeloosheid of niet-weten te brengen[*),141], waardoor zij open staan voor een nieuwe "Hinsicht", die vervolgens door de leraar kan worden geopperd, of die hen zelf kan invallen.[+),142,143] Ten Voorde stemde hier destijds[140] niet mee in.
Wanneer we uitgaan van het gekozen gespreksmodel (9.6), dan kan een toestand van radeloosheid zoals door Redeker geschetst geen onderwijssituatie heten. Als kenmerk van een gesprek noemden we immers dat hierbij twee (of meer) deelnemers elk vanuit hun eigen gezichtshoek moeten kunnen spreken, over een zaak waarbij ze beiden - elk op een andere manier - betrokken zijn. Juist door de combinatie van twee gezichtshoeken wordt hetgeen waarover we spreken gelokaliseerd, geobjectiveerd. Het kan dan niet zo zijn dat één van beide gezichtshoeken buiten spel (außer Geltung) moet worden gezet. Het gespreksmodel stelt dus grenzen aan wat we kunnen bedoelen met discontinuïteit of 'crisis' bij de overgang tussen twee niveaus, of algemener, tussen twee opeenvolgende tussentalen.

Anderzijds werd probleemstellend of uitleidend onderwijs zo omschreven, dat lerenden hierbij behoefte krijgen aan verandering van taal (5.2.3). Een volledige tevredenheid met het huidig taalgebruik is dus evenmin verenigbaar met uitleidend onderwijs. De eerder gestelde vraag 4 is nu dus ook zo te concretiseren:

7. In hoeverre zijn "crisis-achtige toestanden" nodig voor / verenigbaar met uitleidend onderwijs?

Als eigenschappen voor 'crisis' werden genoemd: ongenoegen, niet-verstaan (van de opgave), onzekerheid en "het niet meer zien zitten". Ook werden genoemd: het leiden tot een doorbraak, keerpunt of 'objectwisseling'. We zullen nagaan welke van deze uitdrukkingen bruikbaar blijven.

(* Redeker spreekt van de "aporetische Situation", uit het grieks[141]: **aporeutos**: onbegaanbaar. **apore-oo**: zonder doortocht, zonder uitweg zijn, in verlegenheid, twijfel zijn, niet goed weten hoe. **aporia**: verlegenheid, radeloosheid, moeilijkheid, twijfel, wetenschappelijke kwestie, gebrek, tekort.

(+ Van Redeker kan men dit niet zeggen, maar sommige auteurs die een conflict tussen leerlingen en natuurkunde concipiëren lijken de situatie van het cognitieve conflict te zien als een middel om daarna alsnog een informatieoverdracht mogelijk te maken. (Posner en Strike[142], vgl. Licht[143] die opmerkt dat de fase na het conflict nog nauwelijks is overdacht).

10.2.2. Niveau-invariante leerprocessen

Joling[36] gebruikt 'discontinuïteit' alleen in verband met een onderwijssituatie, waar de leraar onverstaanbaar is omdat hij geen rekening houdt met de noodzaak van gezichtspuntskeuzen (p.30). Joling heeft zich dus niet uitgesproken over de (dis)continuïteit van de door hem beschreven niveau-invariante contextwisseling. Als criterium voor 'niveau-invariante contextwisseling' hanteert hij dat hierbij de combinatie van kernthema's verandert waarover men spreekt, terwijl de kwaliteit van de argumentatie gelijk blijft[36] (p.201,202,205). Daarmee heeft hij een antwoord gegeven op de vraag (zie 8.6 en 8.8) hoe hij 'contexten' onderscheidt in wat we een analogieredenering noemden.
Maar hierbij blijft gedeeltelijk onuitgesproken wanneer we dan zullen zeggen dat de combinatie van kernthema's veranderd is. Aan 'kernthema' wordt namelijk geen andere eis gesteld dan dat hiermee één of andere "verbinding" tussen verschillende (opeenvolgende) "contexten" (tussentalen) wordt aangegeven[36] (p.204). Zulke verbindingen kunnen talrijk zijn. Telkens wanneer een term voorbereid blijkt door een andere term kan ik volgens het geciteerde criterium van 'kernthema' spreken - bijvoorbeeld wanneer 'constante energiecapaciteit' voorbereidend blijkt voor 'veranderlijke energiecapaciteit' (zie 5.3.6), zou ik 'capaciteit' als kernthema mogen voorstellen, omdat het een verbinding tussen twee tussentalen aangeeft. Als voorbeelden van 'kernthema's noemt Joling echter 'samenstelling', 'structuur' en 'energie': drie woorden die samen het hele chemisch onderzoek dekken. Het zou me dus verbazen als het door mij gegeven voorbeeld ('energiecapaciteit' als kernthema) door hem als legitiem zou worden herkend, hij bedoelt thema's van grotere reikwijdte (vandaar 'kern'). Maar dit betekent dat 'kernthema' nog een scherpere afbakening behoeft.
Als nu het onderscheid tussen thema's en kernthema's gradueel zou zijn doordat deze bijvoorbeeld verschillen in 'reikwijdte', dan is ook het onderscheid tussen een contextuitbreiding en een (niveau-invariante) contextwisseling, zoals door Joling voorgesteld[36] (p.202), gradueel. Het is dan aan ons om te bepalen, waar we de grens trekken; zo'n grens wordt ons dan niet door het gespreksverloop gesuggereerd.*) In zo'n geval wil ik spreken van een *continue* beschrijvingswijze. Probleem wordt dan hoe we de genoemde grens zo standaardiseren, dat uitspraken door verschillende onderzoekers vergelijkbaar worden.
Het is echter niet uitgesloten dat we contextuitbreiding van contextwisseling kunnen onderscheiden door te letten op het gespreksverloop. Keren we even terug naar de vraag of het wel juist is, bij een analogieredenering de aandacht alleen op de overeenkomsten te richten en niet daarnaast ook op verschillen (8.7). Er doet zich dan de volgende mogelijkheid voor om de ervaringsdomeinen te onderscheiden die in een analogieredenering op elkaar betrokken worden: als we een stel samenhangende generalisaties vinden die wel gelden voor de ervaringen a, b, c, maar niet voor d, e, f, dan hebben we een reden om deze ervaringen te rekenen tot verschillende ervaringsdomeinen. *Als* het zou lukken om op deze wijze de twee domeinen, betrokken in een analogie, te onderscheiden *dan* is het 'niet volledig opgaan' van een analogie essentieel voor wat we 'analogie' noemen. Zou het op

*) De markeringsstreep tussen 'uitbreiding' en 'wisseling' functioneert dan ongeveer zoals de getallen 1, 2, 3 op de schaalverdeling van een thermometer: het verschil tussen 'boven de 3' en 'onder de 3' is gradueel, dat wil zeggen de scheidslijn is willekeurig (maar daarom niet minder handig).

deze manier lukken de beide ervaringsdomeinen scherp van elkaar af te grenzen, dan hebben we een *discontinue* beschrijvingswijze voor Jolings niveau-invariante contextwisseling gevonden.*)
We komen dus tot de volgende onderzoeksvraag:

8. Is de analogieredenering discontinu te noemen, gelet op de mogelijkheid ervaringsdomeinen te onderscheiden, gelet op het ontstaan en functioneren van (sets samenhangende) generalisaties van beperkte geldigheid?

Een tweede mogelijkheid om Jolings 'contexten' nader te beschrijven wordt gesuggereerd door de overeenstemming in de beschrijvingen door Gentner[79] en Joling[36] van hun onderwijs. Joling echter onderscheidt drie 'contexten' waar Gentner slechts twee 'domeinen' onderscheidt. Deze domeinen worden door deelnemers beschreven, waarbij netwerken van woordassociaties functioneren. Volgens Gentner ontstaat door de analogieredenering een (nieuwe) analyse van het doeldomein. Het netwerk van woordassociaties zal dus voor het doeldomein ná de analogieredenering anders zijn dan ervóór. Dit suggereert dat Jolings drie 'contexten' te onderscheiden zijn door te letten op netwerken van woordassociaties, zoals Kaper en Ten Voorde[37] deden. Jolings[36] 'contextwisseling' zou dan tevens voldoen aan Kaper en Ten Voordes[37] omschrijving van 'contextwisseling'.

9. Beschrijven Jolings[36] 'niveau-invariante contextwisseling' en Kaper en Ten Voordes 'contextwisseling'[37,100] - voor zover optredend in probleemstellend onderwijs - verschillende aspecten van hetzelfde leerproces, of beschrijven ze verschillende leerprocessen?

Nu moet de vraag naar discontinuïteit ook voor Kaper en Ten Voordes[37] 'contextwisseling' gesteld worden.
Kaper en Ten Voorde[37] hebben geprobeerd om taalveranderingen te beschrijven gelet op het voorkomen van "schijnbaar strijdige uitspraken" (zie 1.3. Dit leidde tot een beschrijving van tussentalen met 'contexten' in de zin van clusters geassocieerde termen die tezamen consequent gebruikt kunnen worden. De wisseling van context kenmerkte zich dan door schijnbare inconsequentheid. In deze beschrijvingswijze werd afgezien van de 'verwijzende' betekenis van woorden; er werd alleen gelet op het associëren.
Bij Kaper en Ten Voorde[37] valt te lezen: "Bij een verandering in het gebruik van één woord verwacht ik dat dit andere veranderingen met zich meebrengt, voordat opnieuw sprake is van een kloppend geheel. Van een context zeg ik [daarom] niet dat hij verandert, wel zeg ik dat hij wordt ingewisseld voor een andere".+) Kaper en Ten Voorde[37] vermoeden dus een discontinuïteit, in die zin dat bij een overgang tussen twee contexten het taalgebruik gedurende de overgang niet met 'context' te beschrijven is. De controle van dit vermoeden hangt af van het constateren van "schijnbaar strijdige" uitspraken.
De mogelijkheid om ervaringsdomeinen te onderscheiden (onderzoeksvraag 8) doet vermoeden dat de genoemde 'schijnbare strijdigheid' nader te omschrijven is door de erva-

(* De scheidslijn tussen 'domeinuitbreiding' en 'domeinwisseling' functioneert dan ongeveer zoals de nul-streep op de schaal van Celsius: het studieobject biedt een aanleiding om die streep zó te trekken.

(+ De bruikbaarheid van dit vermoeden werd onderzocht (Kaper en Ten Voorde[37], conclusie 1).

ringsdomeinen waarop de uitspraken betrekking hebben in de didactische beschrijving te betrekken. Wellicht zijn de zo genoemde uitspraken alleen "schijnbaar strijdig" zolang men niet opmerkt dat ze op verschillende ervaringsdomeinen betrekking hebben (Vergelijk Klaassen[38], p.253). Dit leidt nu tot de volgende vraag:

10. Is de discontinuïteit tussen Kaper en Ten Voordes[37] 'contexten' terug te voeren op een discontinuïteit tussen 'ervaringsdomeinen'? (zie vraag 8)

We hebben intussen gezien dat de keuze voor een discontinue beschrijving kan voortkomen uit de wens om controleerbaar te zijn. Wanneer immers een onderscheid tussen 'contextuitbreiding' en 'contextwisseling' gradueel zou zijn, dan wordt het bijzonder moeilijk om tot een onderlinge ijking van woordgebruik te komen. Kunnen we daarentegen een scheidslijn afspreken met verwijzing naar ons studieobject, dan wordt zo'n onderlinge ijking wel mogelijk. Deze pragmatische reden om naar een discontinue beschrijving te zoeken moet ons ervoor waarschuwen, uit de gezochte discontinuïteit te snel zwaarwichtige conclusies te willen trekken.
We zoeken naar een beschrijving van 'tussentalen'. De zin van het onderscheiden van tussentalen is het beschrijven van problemen in de onderlinge verstaanbaarheid. Een al dan niet 'discontinu' onderscheid tussen twee (tussen)talen moet dus minstens gepaard gaan met problemen in het onderling verstaan, anders vervult ze niet de functie waartoe we aan deze onderneming begonnen. Een 'discontinu' onderscheid, zoals nu bedoeld, betekent echter geen 'totaal' onderscheid. Het betekent slechts een beschrijvingswijze die, gelet op één of ander kenmerk van taalgebruik, het mogelijk maakt om twee groepen sprekers - of hun uitspraken - scherp te onderscheiden (bij voldoende onderzoeksmateriaal). De keuze voor een discontinue beschrijvingswijze betekent dus *niet bij voorbaat* een negatief antwoord op onderzoeksvraag 4.
Beantwoorden van de vragen 8, 9 en 10 moet leiden tot voldoende opheldering over 'analogieredenering' en 'contextwisseling' om vervolgens vraag 4 te beantwoorden voor deze 'niveau-invariante' leerprocessen. De vraag in hoeverre discontinuïteit een 'crisis' impliceert (vraag 7) zal hierbij betrokken worden.

10.3. Conclusie

Er zijn vragen gesteld over de bruikbaarheid van het letten op associëren en op het verwijzen bij het zoeken naar 'betekenisverandering' in probleemstellend onderwijs (10.1). Verwacht wordt dat hierdoor vragen met betrekking tot de Van Hiele niveaus (10.2.1), zowel als vragen met betrekking tot analogieredenering en contextwisseling beantwoordbaar worden (10.2.2). Deze vragen hebben als centraal thema de houdbaarheid van (dis-)continue beschrijvingswijzen in het licht van de keuze voor een gespreksmodel van onderwijzen (9.6). Naast de verschillende specifieke vragen werd dit thema algemeen aan de orde gesteld in onderzoeksvraag 4 (10.2).

Deel 3:

Associëren en verwijzen

Komen tot een gedisciplineerde beschrijving
van het associëren en van het verwijzen in gespreksgroepen,
hetgeen leidt tot wijzigen van het eerder geëxpliciteerd
didactisch referentiekader

Vooraf

In dit deel wordt gewerkt aan het beantwoorden van de onderzoeksvragen die we als resultaat van deel 2 konden stellen.

Er wordt begonnen met de vraag in hoeverre woorden van hun verwijzende betekenis moeten worden bevrijd (vragen 5a en 5b). Bij het beantwoorden van deze vragen ontstaat een manier om het verwijzende aspect van woordgebruik te beschrijven: hoofdstuk 11. Vervolgens wordt nagegaan hoe deze beschrijving van het verwijzen in samenhang gebracht kan worden met eerder voorgestelde beschrijvingen van het associëren (vragen 1 en 2). Dit leidt tot een beschrijving van termgebruik waarin beide aspecten - verwijzen en associëren - verenigd zijn: hoofdstuk 12.
Vervolgens wordt gewerkt aan de gestelde vragen met betrekking tot niveau-invariante leerprocessen (vragen 8, 9, 10). Hierbij valt de aandacht op een bijzondere soort termen,

genoemd 'overkoepelende termen'. De twee niveau-invariante leerprocessen 'contextwisseling' en 'analogieredenering' laten zich beide hiermee beschrijven en organiseren. Door deze overkoepelende termen te plaatsen in het niveauschema komen we bovendien tot een antwoord op vraag 6: hoofdstuk 13.
Tenslotte wordt nagegaan of het voorgestelde gebruik van 'persoonlijke zaak' en 'gemeenschappelijke zaak' houdbaar is gezien het voorgaande (vraag 3) en of dit gebruik verdedigbaar is gezien onze keuze voor het gespreksmodel. De tot nu toe opgestelde beschrijvingen worden dan kritisch bezien in het licht van deze keuze (vraag 4). Dit leidt tot enige aanvullingen en wijzigingen: hoofdstuk 14.

Hierna kunnen de conclusies van deel 3 worden besproken en samengevat, waarbij de nadruk ligt op de centraal gestelde vraag naar de verenigbaarheid van gegeven 'continue' of 'discontinue' beschrijvingen met een gespreksmodel (vraag 4). Bovendien wordt ingegaan op de vraag naar de vermijdbaarheid van een crisis (vraag 7). Bij de samenvattende bespreking van deze vragen komen enige nieuwe vragen naar voren: hoofdstuk 15.

Daarmee zijn dan de eerder gestelde vragen beantwoord en enige nieuwe vragen gesteld.

11. Kwaliteiten van verwijzen

De onderzoeksvragen 5a en 5b zijn het onderwerp van dit hoofdstuk:

> *5a. In hoeverre en in welke zin moeten de woorden, om in een kloppende samenhang met andere woorden te kunnen functioneren, van hun verwijzende betekenis worden "bevrijd"?*
>
> *5b. Is er iets in de 'lagere' kwaliteiten van redeneren dat zich fundamenteel tegen een 'hogere' ordening verzet, er strijdig mee is? Of zijn die storingen en belemmeringen van bescheidener omvang, van minder principiële aard?*

Deze vragen werden gesteld in verband met Van Hieles opmerking, dat woorden of symbolen pas "in een nieuwe structurering" (van een hoger niveau) kunnen gaan optreden, als zij zich in zekere mate "bevrijd" hebben van "de structuren (van een lager niveau), die zij vertegenwoordigen".
Een antwoord op deze vragen zal minstens recht moeten doen aan de constatering (zie 5.3.1 en 5.4.2) dat een vermoeden, ontstaan in een redenering die zich baseert op eigenschappen (beschrijvend niveau) nog steeds een empirische toetsing nodig heeft. Zo'n toetsing kan slagen als het vermoeden geformuleerd is in woorden met een verwijzende betekenis (5.3.1).

In hoofdstuk 5 merkten we hoe nuttig of nodig een "verwijzende betekenis" kan zijn. Maar de "belemmering" (zie 10.2.1) door al te concrete associaties bij een woord zal ook menig leraar bekend voorkomen, men zie bijvoorbeeld Jolings[36] probleem met het verstaan (door studenten) van het woord 'straal' in een context van voorwerpen waar het om 'ionen' als niet-afzonderbare structuurelementen zou moeten gaan (zie 8.6).
Laten we dus eerst enkele gevallen bekijken waar we zouden willen spreken van "een belemmering" van de nieuwe structurering door een verwijzende betekenis. Een nadere afspraak over hoe we 'verwijzende betekenis' onderzoeken kan wellicht leiden tot een gedisciplineerde beschrijving van zulke belemmeringen, en van de nodige "bevrijding", waarmee de onderzoeksvragen beantwoord zouden zijn.
Eerst bekijken we situaties waar de getoonde belemmering door de deelnemers niet wordt overwonnen (11.1). Dan bekijken we situaties waarin wel een vooruitgang zichtbaar is (11.2) en tenslotte komen we tot de gevraagde beschrijving van zowel "belemmering" als "bevrijding" (11.3 en 11.4), waarmee de onderzoeksvragen zijn beantwoord (11.5).

11.1. Ongelijk verwijzen

Eén van de situaties waarbij een leraar geneigd zou kunnen zijn om van storing of belemmering door een verwijzende betekenis te spreken is die, waarbij leraar en leerling met eenzelfde woord naar verschillende zaken verwijzen. Dit is wellicht niet de "belemmering"

die Van Hiele (zie 10.2.1) bedoelde omdat hierbij niet het verwijzen zélf als reden van de storing kan worden aangewezen.
Omdat ik echter niet zeker ben òf hij bedoelde wat ik versta, lijkt het me nuttig om zoveel mogelijk verschillende gevallen te inventariseren waar een leraar (bijvoorbeeld **WK**) van storing of belemmering van een hogere kwaliteit van redeneren door verwijzende betekenissen zou willen spreken. Voor de volledigheid begin ik dus met situaties waar leraar en leerling met eenzelfde woord naar iets anders verwijzen, zoals ik dat opmerkte na afloop van m'n eerste onderwijsexperiment.

Op een vraag naar een verbeterde "formule" voor "bruikbaarheid" (1-8)[1]

> 1-8 Ga na of jullie formule voor "bruikbaarheid" voldoet aan de volgende eisen:
> ▸ Bij het omkeerbare proces (a) -> (b) uit opgave 7 blijft de "bruikbaarheid" gelijk.
> ▸ Indien er wrijving zou zijn, zodat omkeren zonder arbeid van buitenaf niet meer lukt, neemt de "bruikbaarheid" af.
> a Voldoet jullie voorstel uit 1-6.c?

hadden studenten als antwoord genoteerd:

"$E_{tot} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + E_{wrijving}$"

De term "$E_{wrijving}$" is nieuw ten opzichte van een eerder door hen genoteerde formule (bij 1-6c)[1]. Naar aanleiding van dit antwoord wil **WK** de vraag aan de orde stellen of dit antwoord voldoet aan de in de opgave voorgeformuleerde "eisen".

Protocol 1.2

WK: Dus het probleem is: moet je die toename in de inwendige energie*) helemaal erbij tellen als je een formule voor bruikbaarheid wil opstellen, als dit nou bruikbaarheid is (ik wijs naar de "eisen" bij 1-8)
A: Ja.. inwendige energie. Volgens mij moet je die wel bij betrekken of niet?
B: Ja maar dan gaat die wet+) niet meer op
A: Ja hij gaat toch altijd op
B: Dan moet je 't ergens van aftrekken dan, als je 't optelt?
WK: De wet van energiebehoud gaat altijd op
B: Ja, dus als je 't hier moet optellen dan moet je 't ergens anders vandaan aftrekken, anders dan klopt 't niet.
'k Weet niet.
WK: Als je de wet van energiebehoud wil opschrijven dan moet je 'm er optellen, daar zijn we 't over eens
D/A: Ja, je
B: Ja maar als je 't erbij optelt dan kan 't zijn dat 't dan meer wordt en eh.. dan het was, dus dan moet je 't ergens anders vandaan aftrekken toch? bijvoorbeeld van potentiële of kinetische

---

(* D.i. **WK**'s interpretatie destijds van hun term "$E_{wrijving}$"
(+ Gezien wat volgt: de wet van energiebehoud.

Ten eerste zie ik hier een verschil in vraagstelling tussen **WK** en **B**. **WK**'s vraag of de toename van de inwendige energie (hun "E_{wrijving}"?) "helemaal erbij geteld" moet worden is gericht op een mogelijk verschil in betekenis tussen 'energie' en 'bruikbaarheid', gezien de "eisen" die in de tekst van opgave 1-8 waren voorgeformuleerd en die bij een eerdere opgave deels door studenten waren beredeneerd. **WK** twijfelt dus niet aan de juistheid van de genoteerde formule op zich, maar aan de juistheid van het genoteerde "E_{tot}" als antwoord op een vraag naar "bruikbaarheid". Door hun "E_{wrijving}" te vertalen met zijn "toename van de inwendige energie" kan hij de genoteerde formule als een correcte toepassing van eerste hoofdwet of wet van energiebehoud opvatten.
B gaat niet in op **WK**'s bedoeling, maar twijfelt juist wèl of hier energiebehoud correct is toegepast. Immers (r.15): "als je 't erbij optelt dan kan 't zijn dat 't dan meer *wordt*" en om te voldoen aan energiebehoud zou E_{wrijving} dan ergens anders vandaan afgetrokken moeten worden.
Hieruit blijkt een verschil in verwijzende betekenis voor de gebruikte symbolen: voor **WK**[*)] verwijzen alle symbolen in de geciteerde vergelijking naar één toestand, dat is één momentopname uit een proces (aangezien het geen evenwichtstoestand betreft). De "+" vertaal ik dus niet met "meer *worden*". Voor **B** daarentegen verwijzen de symbolen "+" en misschien ook "E_{wrijving}" blijkbaar naar een gebeurtenis (gezien "meer wordt"). **B**'s opmerking over "meer worden" was voor mij destijds onbegrijpelijk en ik ging er dan ook niet op in. Dit kan ik nu ook zo formuleren: doordat het verschil in verwijzende betekenis tijdens het weergegeven gesprekje door de deelnemers niet werd opgemerkt, bleven ze *langs elkaar heen praten.*

In verband met onze onderzoeksvraag is het nu nuttig na te gaan of er iets naders te zeggen valt over de aard van de "verwijzende betekenis" van het plus-symbool voor **B** en voor **WK**. Hoe kunnen we datgene noemen, waarnaar dit symbool verwijst? Voor **B** noemde ik "een gebeurtenis", of een aspect daarvan ("meer worden"), voor **WK** noemde ik "toestand", maar dan wel als momentopname van een proces. Dat zou ook "een aspect van een gebeurtenis" genoemd kunnen worden, maar dan wel een ander aspect.
Nu kan de vraag gesteld worden of **B** en **WK** dan spreken over verschillende aspecten van dezelfde gebeurtenis? Hiermee vraag ik dan naar de bruikbaarheid van het schema van De Miranda dat ik in 9.4 introduceerde en van Klaassens verantwoording voor dat schema (zie 9.5): kunnen we zeggen dat gesprek voortgaat indien/zodra we iets gemeenschappelijks opmerken in datgene waarnaar we verwezen?
Het zojuist geciteerde gesprekje is echter ongeschikt om daarover uitsluitsel te krijgen, want dat gesprekje ging niet voort, het eindigde met de laatste geciteerde regel. Dit kan ermee samenhangen dat bij de geciteerde opgave (1-8)[1] al niet meer een bepaalde gebeurtenis of proef aan de orde was gesteld, wat bij eerdere opgaven (1-1 t/m 1-6)[1] wel het geval was. De vraag of **B** en **WK** over verschillende aspecten van dezelfde zaak praten is

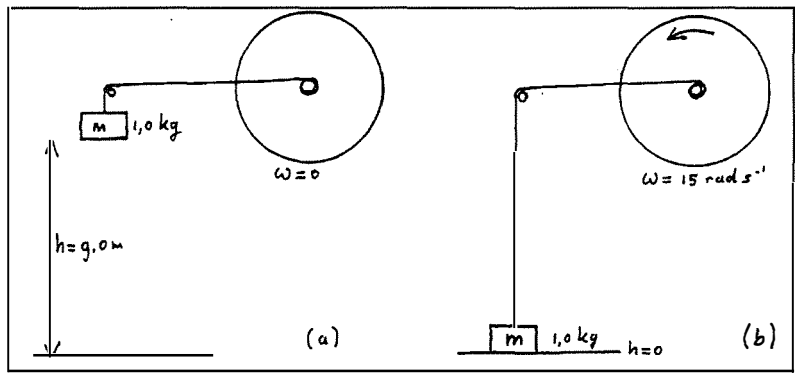
---

(* Dit blijkt niet uit het protocol. Ik herinner me niet meer wat **WK** op dat moment precies dacht en bedoelde; daarom doe ik de plausibele veronderstelling dat ik toen die "+" opvatte zoals ik het nu nog zou doen bij afwezigheid van aanwijzingen dat de student er iets anders mee bedoelt. Deze veronderstelling wordt bevestigd door de waarneming dat **WK** de bezwaren en zorgen van **B** niet deelt en niet verstaat.

alleen al daardoor moeilijk te beantwoorden. Het valt te vermoeden dat **WK** - en misschien ook **B** - helemaal niet over een bepaalde gebeurtenis spreekt, maar dat hij wil generaliseren.

Het volgende protocol maakt het mogelijk om iets naders te zeggen over de verwijzende betekenis van symbolen in geval van een generalisatie.
Aan de orde is de volgende opgave:

1-5 Gegeven de volgende twee situaties, die jullie al kennen uit de opgaven 1-1 en 1-2:



a Kun je situatie (b) krijgen als je situatie (a) hebt zonder arbeid of warmte van buiten af? Zo ja, onder welke voorwaarden? Zo nee, waarom niet?
b Kun je situatie (a) krijgen als je situatie (b) hebt zonder arbeid of warmte van buiten af? Zo ja, onder welke voorwaarden? Zo nee, waarom niet?
c Zouden jullie het proces a -> b "omkeerbaar" noemen?

Protocol 1.1

WK: Wat hebben jullie bij 1-5b?
[onverst. door elkaar]
A: [nee] want hij gaat tegen de zwaartekracht in
B: je moet 'm toch eh.. omhoog.. draaien, of niet? Als ik het zo bekijk moet je dit toch
A: Ja je moet 'em toch
B: Of niet? Moet je dat niet zelf doen?
WK: (lacht)
B: Ik denk toch niet dat-ie vanzelf omhoog zal komen
WK: (lacht) ik denk dat je 't niet zelf hoeft te doen hoor
B: Niet?
WK: Je kan 'm een flink eind omhoog krijgen
D: Maar niet vanzelf
A: Maar niet vanzelf
B: Ik denk dat je

C: Dat vliegwiel heeft toch een snelheid, op een gegeven moment haal je 't weer op en dan, hij kan
18 **B:** Oh ja, het effect van een jojo, nee, dan moet je toch
WK: Dit ding draait, dit ding draait al
D: Ja dat draait toch de verkeerde kant op om het omhoog te draaien?
21 **WK:** Nou, dan kan je toch wel iets verzinnen zonder dat je veel arbeid hoeft te verrichten, eigenlijk niks
D: Ja maar hij kan niet helemaal naar boven toe
24 (gesprek gaat verder over wrijving)

De tekening bij de opgave blijkt op verschillende manieren gezien te kunnen worden. Het is een nogal schematische tekening, waarin bepaalde eigenschappen van een proefsituatie zijn aangegeven (waaronder niet direct zichtbare eigenschappen, zoals de hoeksnelheid in rad s^{-1}) en andere niet. Zo geeft de tekening geen uitsluitsel of het touwtje aan de as van het vliegwiel vast zit, zodat na het afwikkelen van het touw vanzelf het opwikkelen begint - zoals bij een jojo (r.18) - dan wel, of het touwtje los zit en na afwikkelen op de grond zal vallen.
Dezelfde tekening kan dus voor verschillende deelnemers naar verschillende situaties verwijzen (vgl.r.18 en 20). We kunnen daarom zeggen: de tekening functioneert hier als een symbool, immers bij symbolen verwachten we een verwijzende betekenis.[*)]
Voor de onderwijzende zie ik nu ruwweg twee mogelijkheden om te handelen, wanneer hij dit verschil in verwijzende betekenis van de tekening tussen deelnemers zou hebben opgemerkt. Wanneer hij merkt dat het voor deelnemers relevant is om te weten of het touwtje vastzit ("jojo", r.18) dan wel los zit ("draait verkeerde kant op", r.20), dan zou hij de tekening kunnen aanvullen door het ontbrekende en blijkbaar nodige gegeven mede te delen. Hij zou dan kunnen zeggen: sorry mensen, die tekening is wat onduidelijk, maar ik bedoelde een proef waarbij dat touwtje vastzit (of: los zit).
Maar als ik eerlijk ben dan moet ik toegeven dat het mij niet uitmaakt of dat touwtje vast zit of los zit. Immers: als het los zit dan kan degene die de proef doet het touwtje oppakken en weer om het asje leggen, een ingreep "zonder dat je veel arbeid hoeft te verrichten, eigenlijk niks" (r.22). Uit **WK**'s "Nou, dan kan je toch wel iets verzinnen" (r.21) blijkt dat **WK** vindt dat ze hier zelf op hadden moeten komen. De opgave "Kun je (..) krijgen als je (..) hebt?" was dus bedoeld als een uitnodiging om "je" verschillende handelingsmogelijkheden voor te stellen bij het zoeken naar een antwoord op de gestelde vraag, zoals: oppakken van het touwtje en om het asje leggen, dan wel om als experimentator zelf een variant van de schematisch aangeduide proef te kiezen (touwtje tevoren vastmaken). Zo'n - vrijheid bij taakgericht experimenteren was voor mij blijkbaar vanzelfsprekend. Het blijkt hier dat zo'n handelingsvrijheid voor de studenten niet vanzelf sprak, dan wel dat zij zo'n handelingsvrijheid in verband met de gestelde vraag niet aankonden.
Een tweede handelingsmogelijkheid voor de onderwijzende zou dus zijn, om te weigeren

[*)] Woorden reken ik tot de symbolen, maar niet ieder symbool is een woord te noemen. Bijvoorbeeld de "+" die een rol speelde in protocol 1.2 noemde ik een symbool omdat we, net als bij een woord de vraag naar een verwijzende betekenis kunnen stellen. Nu noem ik om dezelfde reden deze tekening een symbool. Eerder al (inleiding 6 en 6.4) bleek het zinnig woorden en symbolen gelijk te behandelen gelet op 'associaties'.

de situatie in de tekening nader te specificeren, aangezien hij juist wil dat ze opmerken dat het niet uitmaakt. Wanneer een bepaald detail ("jojo" of geen jojo) voor studenten wèl belangrijk blijkt, dan zou hij hen kunnen vragen beide mogelijkheden redenerend na te gaan.

Maar hiermee hebben we iets geleerd over datgene waarnaar een symbool verwijst. Deze tekening (als symbool) verwees voor **WK** niet naar één unieke uitvoering van een proef, maar naar een groot aantal variaties waarmee deze proef kan worden uitgevoerd. Deze variaties zijn voor **WK** afgebakend door de eigenschappen die **WK** in de tekening had aangegeven. De tekening (als symbool) verwees dus voor **WK** niet naar een eenmalige ervaring maar naar een *collectie ervaringen*, afgebakend door eigenschappen.
De verschillende bedoelde uitvoeringen van de proef (ervaringen) kunnen dus nog van elkaar verschillen met betrekking tot al die eigenschappen (o.a.: de stand van de maan, de luchtvochtigheid,...) die niet gespecificeerd waren. Aangezien **WK** tevoren niet wist welke nadere specificaties voor zijn studenten van belang zouden blijken was het nodig om ter plekke te kiezen uit de twee mogelijkheden die ik hierboven noemde.
De eerstgenoemde mogelijkheid: de proef-situatie nader detailleren, zouden we *gebonden oriëntatie* kunnen noemen, de tweede genoemde mogelijkheid - waar studenten zelf beslissen welke varianten van de schematisch aangeduide situatie zij overwegen - *vrije oriëntatie.*[*)]
De keus uit deze mogelijkheden is niet onschuldig. Om de suggestie (r.21) "dan kun je toch wel iets verzinnen zonder dat je veel arbeid hoeft te verrichten, eigenlijk niks" te kunnen uitwerken is het nodig te overwegen dat het oprapen van het touwtje weliswaar arbeid betekent, maar dat die arbeid verwaarloosbaar zou kunnen zijn in vergelijking met de energiebedragen (eerder berekend) waar het in deze proefsituaties om gaat, dat het touwtje heel dun en licht kan zijn... Een keuze voor 'vrije oriëntatie' zou dus de verwachting inhouden dat studenten uit zichzelf een uitdrukking als "verwaarloosbaar" of "limietgeval" (touwtje steeds dunner - en ook steeds steviger!) in een redenering kunnen gebruiken. Wanneer daarentegen de leraar zou mededelen dat het touwtje vastzit aan het asje (gebonden oriëntatie), dan wordt dit probleem vermeden - in ieder geval met betrekking tot de arbeid "van buitenaf" verricht door de "jij" (die gevraagd wordt zich deze proef voor te stellen). De opgave wordt dan minder uitdagend. De keus uit beide alternatieven zou dus hier bepaald moeten zijn door de inschatting of studenten al uit zichzelf in staat zijn termen als 'verwaarloosbaar' of 'limietgeval' in een redenering te gebruiken.

De hierboven geformuleerde conclusie dat een symbool naar een *collectie ervaringen* kan verwijzen is vatbaar voor generalisatie. Immers in 5.3.1 merkten we op dat studenten in staat waren te onderscheiden tussen ervaringen die *X* met z'n eigenschappen zouden weerleggen en ervaringen die *X* zouden bevestigen. Hierdoor konden zij een experiment ontwerpen om de zinnigheid van *X* met zijn eigenschappen te toetsen. Net als hierboven kunnen we daar dus spreken van een symbool *'X'* dat verwijst naar een collectie (ontwor-

[*)] De termen "gebonden oriëntatie" en "vrije oriëntatie" ontleen ik aan van Van Hiele[105] (p.53-55). Aan het eind van dit hoofdstuk (11.5) wordt kort aangegeven hoe mijn introductie van deze termen klopt met zijn gebruik.

pen) ervaringen, welke is afgebakend door eigenschappen.

> *Door te zeggen dat een woord, gebruikt volgens afgesproken eigenschappen (beschrijvend niveau) naar een collectie ervaringen verwijst, kunnen we de toetsbaarheid van uitspraken waarin dat woord voorkomt beschrijven.*

Hiermee wijk ik af van Van Hieles voorstel dat een woord gebruikt op beschrijvend niveau niet meer naar zintuiglijke ervaringen verwijst, maar naar een verzameling eigenschappen (7.3). Dit voorstel van Van Hiele biedt immers niet de hier getoonde mogelijkheid om uitspraken met de kwaliteit van beschrijvend niveau als 'toetsbaar' te beschrijven. In plaats van te zeggen dat een beschrijvende term naar een verzameling eigenschappen *verwijst* zeg ik daarom liever dat een beschrijvende term *gebruikt wordt volgens* afgesproken eigenschappen.

De hier gemaakte keuze roept opnieuw de vraag op hoe we de verschillen tussen de Van Hiele niveaus formuleren, gelet op de rol van ervaringen. Als we zeggen dat woorden gebruikt met de kwaliteit van beschrijvend niveau verwijzen naar collecties ervaringen, zoals hierboven is voorgesteld, dan ligt het voor de hand te zeggen dat woorden gebruikt met de kwaliteit van grondniveau verwijzen naar unieke, enkelvoudige ervaring - namelijk naar 'deze' ervaring, die 'nu' wordt beleefd of die in verhaalvorm ('en toen..') wordt verteld. Van zulke 'ervaring' zouden we kunnen zeggen dat ze uniek is naar tijd, plaats en persoon. Deze keuze zou in overeenstemming zijn met de eerder getoonde eigenschap van situatiegebonden woordgebruik (7.1).
Als woorden op grondniveau naar enkelvoudige ervaringen verwijzen, woorden op beschrijvend niveau daarentegen naar collecties ervaringen, dan wordt de overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau beschreven door het samenvoegen van unieke ervaringen tot een 'collectie'. Deze beschrijving geeft echter geen probleem aan voor de overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau. Immers, wat kan er problematisch zijn aan het bijeenvoegen van ervaringen die al een formuleerbare overeenkomst vertonen: waar ligt de kloof tussen 'dit ijzer' en 'ijzer' als het een kwestie van collectioneren van ervaringen zou zijn?
Er kan nog een tweede bezwaar worden ingebracht. De samengestelde uitdrukking 'dit ijzer' kan weliswaar verwijzen naar een hoopje poeder dat nu voor mij ligt, maar waarnaar verwijst het woord 'ijzer' in deze samengestelde uitdrukking? Als zij ook alleen naar dat hoopje verwijst, dan is de toevoeging 'dit' overbodig. Door het woord 'ijzer' te kiezen naast 'dit' geven we aan dat we 'zoiets' al eens eerder meegemaakt hebben, dan wel erover hebben gehoord. Er zijn dus goede argumenten om te zeggen dat ook woorden gebruikt met de kwaliteit van grondniveau naar collecties ervaringen kunnen verwijzen (vgl. Scharf[144] "Die Marktfrau schimpft abstrakt"). De toevoeging van een aanwijzend voornaamwoord dient dan om uit die collectie er één naar voren te halen, namelijk degene waar ik 'nu' over spreek. Zo blijf ik in overeenstemming met situatiegebonden woordgebruik als eigenschap van grondniveau. Is ook de moeilijkheid genoemd in de vorige alinea nu op te lossen?
Als zowel bij grondniveau als bij beschrijvend niveau gesproken kan worden van 'collectie ervaringen' als datgene waarnaar een symbool verwijst, dan is de overgang van grond- naar beschrijvend niveau niet meer te beschrijven als collectioneren van ervaring. We

zouden dan opnieuw (met Van Hiele, zie 7.2) kunnen spreken van 'analyse' van verwoorde ervaring. Hoe is die analyse nu te beschrijven, gelet op 'de collectie ervaringen waarnaar een woord verwijst'? Wel, we zouden misschien kunnen letten op de wijze waarop deze 'collectie' is afgebakend. Immers, als we zeggen dat op beschrijvend niveau de collectie ervaringen waarnaar een term verwijst is afgebakend door afgesproken eigenschappen, dan zou voor een woord gebruikt op grondniveau een andere wijze van afbakening (of afwezigheid van afbakening) geformuleerd kunnen worden. Dit voorstel wordt in de volgende paragraaf uitgeprobeerd.

11.2. Twee kwaliteiten van verwijzen

De vorige paragraaf had tot onderwerp "ongelijk verwijzen". We bespraken onderwijsproblemen die te beschrijven zijn door te zeggen dat deelnemers met hetzelfde symbool niet naar hetzelfde verwijzen. Hierbij waren er allerlei inhoudelijke (in fysische termen te formuleren) verschillen op te merken tussen datgene waarnaar de één verwees, vergeleken met datgene waarnaar de ander verwees. Pas aan het eind kregen we een aangrijpingspunt om te gaan letten op de kwaliteit van het verwijzen.
Aan het begin van de vorige paragraaf noteerde ik dat de onderwijsproblemen die daar besproken werden misschien niet diegenen waren die Van Hiele aanleiding hadden gegeven tot zijn uitspraak dat termen enigermate "bevrijd" moeten worden van "de structuren die zij vertegenwoordigen", aangezien bij de besproken gevallen het feit dát er iets "vertegenwoordigd" wordt (dat er 'verwezen' wordt) niet als het probleem kan worden aangemerkt. Aangezien ik echter niet precies kon vaststellen naar welke soorten "belemmeringen" Van Hiele verwees, leek het toch nuttig deze protocollen in het kader van de gestelde onderzoeksvraag te bespreken - wellicht alleen om het terrein van de gestelde vraag nader af te bakenen. Met dezelfde omzichtigheid wil ik nu opperen dat de "belemmeringen" die ik in deze paragraaf bespreek misschien meer lijken op diegenen die Van Hiele bedoelde toen hij over de noodzaak van zo'n "bevrijding" sprak.

Het volgende gespreksfragment vond plaats tijdens het derde experiment naar aanleiding van de vraag: "Zou je zeggen dat de 'wrijvingsenergie' of 'plaatsenergie' (op een tafel) zich *als een voorraad* gedraagt? Zou je zeggen dat de 'hoogteenergie' zich als een voorraad gedraagt?" (2-5c)[3]

Protocol 3.8

O: Kun je mij "voorraad" even uitleggen?
P: Nou voorraad is dat als je iets optilt, hè, dat dan de voorraad energie die dat voorwerp nu heeft is m.g.h ten opzichte van
O: Voorraad doe je dus van potentiële energie
P: Ja.. ja.
O: Mm.. vind 'k een leuke term
P: ..en van wrijving.. ja..
O: Als je het eh.. als het toestanden zijn, dan kun je toch niet eens beschouwen als voorraad of zo?

P: Ik vind dat je hoogte-energie wel als voorraad kunt beschouwen. Maar.. kijk, wrijvingsenergie, werkt altijd tegen de beweging in.. Daarom kun je
12 dat niet als.. voorraad beschouwen. Dus waar je ook bent, welke kant je ook op gaat, hij werkt altijd tegen.
O: Die term "voorraad" vind 'k een beetje vreemd.
15 **P**: Voorraad is gewoon potentiële energie. Daar 's toch niets.. Je kunt toch zeggen, als je hier (legt pen op tafel) zegt: energie is nul, dan heeft-ie hier (pen ergens boven de tafel) een bepaalde energievoorraad. Die wordt nu
18 (laat pen vallen) omgezet in bewegingsenergie.
O: Jaja (niet overtuigd)
P: Maar waar 't om gaat is dus dat, wrijving altijd tegen de beweging in
21 werkt, zodat je niet kunt spreken..
Ja d'r is wel wrijvingsenergíe, maar het is geen voorraad.
O: Ja.. ja volgens mij moet je 't anders beschrijven.
24 Als jij eh.. als jij op een bepaalde plaats bent, dan heeft-ie níet een bepaalde energie, en daarmee dus een bepaalde energie-voorraad.
Dat heeft die hoogte wel degelijk.
27 **P**: Ja.. dat kan je ook..
O: Nou goed schrijven we dat op.
P: Ja omdat, dan heb je gelijk, ja omdat.. je niet aan een plaats één bepaalde
30 energie toe kunt kennen, als het over wrijving gaat, kun je ook niet zeggen dat een plaats één voorraad heeft...
Ja maar sowieso niet omdat 't altijd tegen in werkt.
33 **O**: Daar kom je nou ineens mee op de proppen
P: Ja dat is toch ook zo?
O: Omdat jij dat vindt, oké.

Zoals verwacht bij een overgang naar beschrijvend niveau, wordt hier het eigen woordgebruik onderwerp van discussie. Dit was ook de bedoeling van de gestelde vraag. Hier gaat het om het gebruik van het omgangstaal-woord "voorraad". Ik verwachtte dat analyse van 't gebruik van dit woord zou kunnen bijdragen aan het ontstaan van een onderscheid tussen 'toestandsgrootheid' en 'procesgrootheid'.*) Bovendien is zo'n analyse van belang omdat in de omgangstaal gemakkelijk van 'energievoorraden' wordt gesproken. Hier is dus ook de relevantie van fysische termen voor problemen uit de actualiteit in het geding. Gevraagd werd in welke gevallen men het woord 'voorraad' zou willen gebruiken, bij 'hoogte-energie' of ook bij 'wrijvingsenergie'. Wanneer beantwoorden van deze vraag zou leiden tot een afgesproken betekenis van 'voorraad' kunnen we tevens zeggen dat daarbij een *'empirische generalisatie'* is ontstaan (vgl. 7.2). Immers we verwachten dan een uitspraak zoals: hoogte-energie gedraagt zich, voor zover we weten, als voorraad. **O** en **P** komen hier echter nog niet tot zo'n afgesproken betekenis.
Gezien de voorgaande opgaven mag verwacht worden dat 'hoogte-energie' verwijst naar proefsituaties waarbij een hoogte verdwijnt of verschijnt, in ruil voor een andere variabele

*) Van een extensieve toestandsgrootheid ervaar ik de omgangstaal-verwoording 'als een voorraad' als passend, bij een procesgrootheid als niet passend.

(1-1, 1-4, 1-7 (tekening) en 2-1)[3], terwijl 'wrijvingsenergie' verwijst naar proefsituaties waarbij een plaatsverandering van een voorwerp op een tafel gebeurt in ruil voor een andere variabele (2-2 en 2-3)[3]. Gaande het gesprek wordt er nog een ervaring toegevoegd aan de collectie waarnaar 'hoogte-energie' verwijst (r.15-19). We zien hoe weinig moeite een dergelijke toevoeging kost.

> *Bij het komen tot een intersubjectief controleerbare generalisatie is inductie - vele ervaringen samennemen in één symbool - niet het probleem.* (Vgl. Scharf[145])

Ook hebben **O** en **P** geen onenigheid over de vraag, in welke proefsituaties zij van 'voorraad' zouden willen spreken: ze zijn het eens dat voor die ervaringen (o.a. de val van de pen) waar van 'hoogte-energie' gesproken kan worden, ook van 'voorraad' gesproken kan worden (**P** vanaf r.2, **O**, r.26). Onenigheid is er over het criterium dat deze afbakening van de collectie ervaringen waarnaar 'voorraad' verwijst, tot stand moet brengen.
Blijkbaar leidt het tot onvrede (**O**.35) als voor de gemeenschappelijke afbakening niet ook een gemeenschappelijke reden geformuleerd kan worden (**P**.34-**O**.35).

De vraag waarmee **O** en **P** bezig zijn is dus zo te formuleren: welke eigenschappen kunnen we formuleren voor een 'voorraad', zodanig dat we onze intuïtie kunnen beredeneren dat voor die ervaringen waar van 'hoogte-energie' sprake is wel, bij 'wrijvingsenergie' daarentegen niet van 'voorraad' gesproken kan worden?
O beroept zich in zijn voorstel (O.24-26) op een eigenschap van 'voorraad': voor **O** heeft een voorraad steeds één waarde.
Ook in **P**'s uitspraken kan ik een eigenschap van 'voorraad' zoeken. Wellicht bedoelt hij: een voorraad staat ter beschikking van een gebruiker. Als ik dat veronderstel, kan ik begrijpen waarom het 'altijd tegenwerken' van de wrijvingskracht voor hem dé reden is om daarbij niet van 'voorraad' te willen spreken. Maar omdat **P** zijn beweringen over 'altijd tegenwerken' (P.11-13,20,32) niet expliciet in verband brengt met een gekozen eigenschap van wat we 'voorraad' willen noemen - zoals ik deed in: een voorraad staat ter beschikking van een gebruiker - blijft mijn interpretatie een gok. Wellicht om dezelfde reden zijn **P**'s uitspraken (r.11-13, 20,32) niet duidelijk voor **O**.

> *Het probleem bij het komen tot een intersubjectief controleerbare generalisatie is: het analyseren van de collectie ervaringen waarnaar een symbool verwijst op eigenschappen die we kunnen kiezen om daarmee deze collectie af te bakenen.*

Een vergelijkbaar gesprek, waar eveneens een analyse van een woord uit de omgangstaal werd nagestreefd, is te vinden in protocol 3.3, dat eerder kort werd besproken in 5.4.2. Een verschil tussen protocol 3.3 en het vorige is echter dat in protocol 3.3 uiteindelijk wel overeenstemming wordt bereikt.

protocol 3.3

Zoals in het vorige protocol een analyse van het woord 'voorraad' uit de omgangstaal zou kunnen leiden tot een beschrijvende term 'toestandsgrootheid' (**O**.25 - **P**.32), zo leidt in

protocol 3.3 een analyse van het woord 'ruilwaarde' uit de omgangstaal[*)] tot een beschrijvende term 'energie'.
Eerder hebben de deelnemers een ervaring ontworpen waar zij een verandering van hoogte en een verandering van snelheid-kwadraat 'even veel waard' zouden willen noemen, en ze hebben onderscheid gemaakt met ervaringen waar ze niet van zo'n gelijke waarde zouden willen spreken.
Naar aanleiding van opgave 1-1h[3] wordt nu het voorstel gedaan om deze speciale 'waarde' waarvan eerder sprake was 'ruilwaarde' te noemen (**WK**.25-27). Het is weer deelnemer **O** die als eerste op zoek gaat naar eigenschappen van het woord 'ruilen': "iets moet iets inruilen" (O.15), "dus wat blijft achter" (O.9), waarbij hij wordt aangevuld door **N**.12 "moet iets voor terugkrijgen".
Deze eigenschappen, en dus het woord 'ruilen', ziet **O** niet direct als toepasselijk op de ervaringen waarvan zojuist was gesproken (nog hoorbaar in **P**.6-7: "zie je, grote snelheid, grote massa"), vanwege het ontbreken van het "iets" (O.15) dat iets anders ruilt.[+)] **P**.6-8 vindt 'ruilwaarde' wel van toepassing op deze ervaringen maar hij beroept zich daarbij niet op eigenschappen voor het woord 'ruilen', zodat hij **O** niet direct overtuigt (tot O.80).

De oplossing van dit langs-elkaar-heen-praten (eenzelfde woord, verwijzend naar ongelijke collecties ervaringen) ontstaat nu doordat **P** opmerkt dat hij ook bij 'geld' van ruilwaarde zou willen spreken (P.47). Hierdoor wordt een ruimere collectie ervaringen in 'ruilwaarde' vertegenwoordigd dan eerder in het gesprek bleek. Daarna volgt meteen (r.50-89) de analyse van de aldus uitgebreide collectie, waarbij de volgende eigenschappen voor 'ruilwaarde' worden genoemd:

- het is een waarde waar je in rekent (**P**.56),
- het maakt verschillende ietsen vergelijkbaar (**P**.59),
- verschillende ietsen kan men ruilen "via" de ruilwaarde (**N**.87: "via het geld").

De poging om genoemde eigenschappen toe te passen op de verandering van hoogte die samen gaat met een verandering van snelheid-kwadraat leidt **O** tot de voor hem verbazende conclusie: "dan heb je dus altijd maar één en dezelfde energie!" (**O**.89, vgl. **P**.58-59). Zijn verbazing hangt samen met het spreken in termen van energievormen, welke in zijn taal een wezenlijker rol vervulden (**O**.50-51, 53, 55, 67, 76) dan nu door **P** en door **N** wordt voorgesteld (**P**.90-94). Gezien het feit dat **O** deze conclusie formuleert, kan hij toch met **N** en met **P** in gesprek blijven, immers hij kan een consequentie van het door **N** en **P** gekozen gebruik van 'energie' als 'ruilwaarde' onder woorden brengen. Een verdere aanwijzing dat de blokkering door naïef realistisch taalgebruik (O.50-51)[#)] hier (O.89) overwonnen wordt zie ik in protocol 3.15 (O.257-262), waar **O** zonder moeite of verbazing constateert dat de chemische energie geen toestandsgrootheid is, wat - vergeleken met

---

(* 'Ruilwaarde' zal in de omgangstaal minder voorkomen dan 'voorraad', maar de twee samenstellende delen 'ruilen' en 'waarde' zijn wel woorden waarmee vertrouwdheid verondersteld mocht worden. Zie o.a. r.16 en 91.

(+ De ontwerper van de opgave dacht aan degene die de proef doet: hij ruilt hoogte voor snelheid-kwadraat (in overeenstemming met de handelinggebondenheid van het grondniveau).

(# Vergelijk 5.3.2 waar ik de uitdrukking 'naïef realisme' introduceerde naar aanleiding van het spreken van energievormen in protocol 2.5, en naar aanleiding van het spreken over 'moleculen' gerapporteerd door Ten Voorde.

de resultaten van eerdere onderwijsexperimenten - een opmerkelijk resultaat is (zie 5.4.1).

Gezien de analyse van boven besproken twee onderwijs-gebeurtenissen kunnen we zeggen dat het eerder gedane voorstel tot nu toe zinvol is gebleken:

> *Zowel vóór- als nadat er eigenschappen voor het gebruik van een woord geformuleerd zijn, kunnen we spreken van een 'collectie ervaringen' waarnaar dat woord 'verwijst'.*

We kunnen dus niet spreken van verandering van "studieobject" in de zin dat na de afspraak naar "geheel andere zaken" verwezen wordt (Van Hiele, "quite different things", geciteerd in 7.3). Toch werd een verandering beschreven: na het afspreken van eigenschappen kan over het eigen woordgebruik geredeneerd worden, er kunnen consequenties getrokken worden (aangewezen bij **O**.89). Vóór het afspreken van eigenschappen zien we zulk redeneren niet optreden, we zien dan een welles-nietes situatie (vb. "omdat jij dat vindt, oké"). Omdat het gesprek vóór en na het afspreken van eigenschappen voor een term een kwalitatief verschil vertoont, en omdat we de betreffende verandering kunnen localiseren in een korte periode (r.51-95)[*)] kunnen we spreken van een *discontinuïteit* in de pragmatische betekenis geïntroduceerd in 10.2.2.

> *We kunnen het moment waar afgesproken eigenschappen ontstaan, benoemen als discontinuïteit in de kwaliteit van het verwijzen.*

We zagen afgesproken eigenschappen ontstaan in een samenspel tussen de deelnemers, waarin men op elkaars uitspraken ingaat. Verschillende bijdragen aan de uiteindelijke afspraak worden zo door verschillende deelnemers aangedragen en in-elkaar-gepast (protocol 3.3: **O**.89 na **N**.87 na **P**.85, en die opeenvolging was voorbereid door **N**.42 "via" -> **P**.46 "er zit toch niks tussen?" enzovoorts). Doordat men op elkaar ingaat wordt de zo ontstane afspraak iets gemeenschappelijks.
Behalve de kwaliteit van het verwijzen kan ook de collectie ervaringen waarnaar een woord verwijst veranderen in de zin dat sommige ervaringen die er eerst toe behoorden, er na de afspraak niet meer toe gerekend worden, of andersom. Dit behoeft echter niet te gebeuren, zoals we zagen op blz. 242 e.v., waar **O** en **P** het al wel eens waren welke ervaringen zij onder 'voorraad' wilden rangschikken, maar niet over de eigenschappen die deze collectie ervaringen zouden moeten afbakenen.
Op te merken valt nog dat het niet per se nodig is om al van de juistheid of geschiktheid van het voorgestelde woordgebruik overtuigd te zijn. We kunnen twijfelen of **O**.89 overtuigd is van het door **P** en **N** voorgestelde gebruik van 'energie'. Maar hij heeft wel de mogelijkheid van dit woordgebruik gezien en hij kan er consequenties uit trekken.

[*)] Nog korter wordt deze periode als we op *paren* deelnemers letten. In r.46-47 komt **P** met **WK** tot een afspraak, en r.87 komt **N** met **P** tot een afspraak, in r.89 komt **O** met **P** tot een afspraak.

11.3. Storing door persoonlijk of door inconsequent woordgebruik

Van de twee kwaliteiten van verwijzen die in 11.2 werden onderscheiden is er één al nader omschreven door te zeggen dat woorden verwijzen naar een collectie ervaringen, welke is afgebakend door afgesproken eigenschappen. Van de kwaliteit die daar aan voorafgaat is gezegd dat woorden eveneens verwijzen naar collecties ervaringen, terwijl een afbakening door afgesproken eigenschappen ontbreekt.
Aangezien we bij ontbreken van een expliciete afspraak ons eigen en andermans woordgebruik niet als volstrekt willekeurig ervaren kan de vraag gesteld worden hoe dit aan de afspraak voorafgaande woordgebruik nader te beschrijven is. De vraag in hoeverre dit eerdere woordgebruik zich als "storing" en "belemmerend" laat beschrijven (onderzoeksvraag 5a) zullen we hierbij betrekken.
In 11.1 zagen we twee situaties waar het gesprek belemmerd werd door een verschil in verwijzende betekenis voor een symbool tussen leraar en leerlingen. Van enige aanzet tot een oplossing was geen sprake. In 11.2 zagen we eveneens storingen in de voortgang van het gesprek, maar nu tussen deelnemers onderling. Verder zagen we daar ook al meteen pogingen om het eigen woordgebruik tot onderwerp van gesprek te maken, hetgeen in het ene geval lukte (tot een afspraak leidde), in het andere geval niet. Dat er in beide gevallen wel een poging werd gedaan, houdt misschien verband hiermee dat in beide gevallen een woord uit de omgangstaal ter discussie was gesteld in de opgaven. In plaats van te zeggen - zoals in onderzoeksvraag 5b - dat de ontwikkeling van de vaktaal belemmerd wordt door taal van een lager Van Hiele niveau kunnen we dus in al deze gevallen wellicht spreken van storing door *persoonlijk woordgebruik*. Maar als we de conclusie van blz. 107 serieus nemen dat een verandering van taal "niet steeds per decreet kan worden afgekondigd", dan is persoonlijk woordgebruik niet alleen storend, het is ook (soms) een nodig vertrekpunt.*)

Hierboven werd de vraag gesteld hoe zich dit persoonlijk woordgebruik nader laat beschrijven. Op het eerste gezicht doen zich enkele mogelijkheden voor: als het verwijzen naar collecties ervaringen niet consequent is volgens *afgesproken* eigenschappen, dan is het wellicht consequent volgens eigen, individueel gehanteerde eigenschappen. Een andere mogelijkheid zou zijn, dat het woordgebruik meer of minder *inconsequent* genoemd zou kunnen worden. Als beide beschrijvingsmogelijkheden reeël blijken kan de vraag opkomen of de storing van de gespreksvoortgang nu aan het persoonlijke (niet-afgesproken) dan wel aan het inconsequente (geen eigenschappen) is toe te schrijven.
Maar eerst zullen we nagaan in hoeverre het mogelijk is iemands woordgebruik als inconsequent te beschrijven. We zullen dit nagaan aan de hand van de onderwijssituatie welke ontstond naar aanleiding van de volgende opgave:

> "Hoe noemt men de energiecapaciteit die hoort bij de reactievoortgang als variabele?+) (zie de omschrijvingen bij 1-5)" (1-6e)[3]

(* Daarmee is op zich niets nieuws gezegd, want dit idee lag steeds al ten grondslag aan Van Hieles niveauschema (zie 7.2).

(+ Hier 'vorderingsgraad van de reactie' genoemd, in de onderwijstekst echter overal 'reactievoortgang'.

Protocol 3.6

O: (leest opgave 1-6e[3] hardop en zegt dan)
't Heeft niet zoveel te maken met eh.. met de reactievoortgang, nee. Dus
3 hoe berekenen we nu uit de reactievoortgang.. vía de energiecapaciteit.. een energie?
(stilte)
6 **WK:** Dat is de vraag (zacht)
O: 't Gaat dus om.. het aantal bindingen die verbroken zijn, en 't aantal bindingen die ontstaan, en de hoeveelheid energie die die kosten..
9 **N**: of opleveren.. of het saldo daarvan..
O: 't Saldo, uiteraard
N: ja..
12 **O**: Maar.. als we erg moeilijk gaan doen.. Hoe haal je uit die bindingen een energie? ..Dat hebben wij nooit geleerd geloof ik
P: bindingsenergie?
15 **O**: Hoe bereken je bindingsenergie?
P: Dat is toch ehm..
N: Dissociatie-energie min en dan weer de vormingsenergie
18 **O**: Nee maar eh.. hoe bereken je dat.. Heb jij een formule daarvoor?
P: Je hebt daar toch de eenheden, in elk geval?
Dat is in.. Joule per mol of zo?
21 **O**: Wat mij betreft.. je hebt een binding, die kost een bepaalde hoeveelheid energie om 'm te breken of te maken, en hoe bereken je die bepaalde hoeveelheid energie?
24 **P**: Ja maar ze vragen dus om de capaciteit hè? energiecapaciteit.
O: Daar heb je eerst een formule voor nodig
P: Waarmee je.. dat je één Joule reactie-energie één Joule hoger wordt.. als
27 die andere één eenheid verandert. Dus de..
O: Nee je hebt de variabele, je hebt die energiecapaciteit, die samen geeft een formule voor de energie.
30 Dan heb je dus die formule voor die energie nodig.
P: Ja.. dat is wat **N** zei.
O: Heb je ook wat gezegd?
33 **N**: Oehh!!
(lachen)
N: Nee: dissociatie-energie en vormingsenergie
36 **O**: Ja maar dan heb ik toch nog geen capaciteit? Ik heb voor capaciteit heb ik een formule nodig
N: Ja kan.. eh.. als je weet hoeveel water er is gevormd, dan weet je hoeveel
39 zuurstof en waterstof er weg is, dan weet je dus hoeveel bindingen er nog kùnnen worden verbroken, ..of gevormd, dus ook gevormd, dan heb je dan nog de capaciteit die eventueel nog vrij kan komen.

In de laatste regel is een gebruik van "capaciteit" te horen dat vanuit de omgangstaal herkenbaar is. Er wordt bijvoorbeeld gesproken over iemand die veel capaciteiten heeft, en dan bedoelen we dat die persoon heel wat kan. Een dergelijke samenhang tussen 'capaci-

teit' en 'kunnen' is ook te horen in r.41. Het gaat daar (N.41) ook om het totale 'kunnen', mede gelet op de hoeveelheid stof die nog kan reageren. Vergelijk: wanneer men zegt dat de capaciteit van een ziekenhuis 420 bedden bedraagt, bedoelt men dat er in totaal 420 patiënten in kunnen - niet: dat er 420 patiënten *bij* kunnen *per*... Ik versta **N**.41 dus zo dat voor hem de 'capaciteit' afneemt als de 'reactievoortgang' toeneemt.
Sinds opgave 1-5 (bijlage 1) is in de opgaven een ander gebruik van 'capaciteit' bedoeld, namelijk niet het totale 'kunnen' (energie, ruilwaarde), maar het 'kunnen' (de ruilwaarde) per eenheid van de variabele. Uitspraken van **O** en van **P** zijn hiermee in overeenstemming (**O**.28-29, **P**.20,24,27). Ook **N**'s voorstel "dissociatie-energie min (..) vormingsenergie" (**N**.17) is in overeenstemming met deze bedoelde betekenis van 'capaciteit' op te vatten, zoals **P**.31 opmerkt, omdat zowel dissociatie-energie als vormingsenergie in "Joule per mol" (**P**.20) worden uitgedrukt.
Dus ofwel **N**.41 is niet consequent met **N**.17, of zowel **P** als schrijver dezes verstaan **N**.41 of **N**.17 niet zoals **N** het bedoelde. In dat laatste geval zou **N**'s woordgebruik dus zowel consequent als persoonlijk (want niet begrepen door mij en door **P**) kunnen zijn. Maar hoe zouden we daar dan achter kunnen komen, als dat het geval was?
Nu, een manier om er achter te komen zou als volgt zijn. Het hierboven geciteerde gesprek zou kunnen worden voortgezet, waarbij **WK** bijvoorbeeld **N** om opheldering vraagt, waarbij na enige tijd beiden ertoe komen eigenschappen voor het gebruik van 'capaciteit' te formuleren waarmee zowel **N**.17 als **N**.41 consequent zijn. Deze eigenschappen zouden dan 'afgesproken' zijn, want gemeenschappelijk, en het formuleren ervan zou ongeveer zo kunnen plaatsvinden als in protocol 3.3 de afspraak voor 'ruilwaarde' geformuleerd werd, dus in zo'n soort samenspel waarbij **WK** iets in **N**'s woorden hoort, dat uitspreekt (zoals in protocol 3.3, **O**.89: "Dan heb je dus altijd maar één en dezelfde energie!") waarna **N** reageert met een bevestiging of een aanvulling.
We zien dus dat het voor het gesprek niet uitmaakt of **N**'s woordgebruik nu consequent en persoonlijk is, dan wel inconsequent en persoonlijk. Pas nadat dit woordgebruik niet meer strikt persoonlijk is, kan een eventueel opgemerkte consequentheid van **N** invloed hebben op het verdere verloop van het gesprek. Als ondubbelzinnige aanwijzing voor zo'n consequentheid hebben we een verslag van zo'n gesprek nodig, waarin de door **N** gehanteerde eigenschappen worden uitgesproken op voor anderen verstaanbare wijze - met andere woorden: een gesprek waarin een afspraak ontstaat. Het maakt daarbij niet uit of **WK** dan wel **P** als gesprekspartner voor **N** optreedt.
Beschikken we niet over een verslag van zo'n voortzetting van het gesprek - en dat is hier het geval - dan kan degene die het voorliggende verslag moet interpreteren niet beter doen dan een plausibele gok wagen.[*)] Zo'n situatie waarbij de interpreet moet gokken zagen we eerder op blz. 244, waar ik wel vermoedde dat **P** consequent was geweest in zijn

---

[*)] Mijn gok in het voorliggende geval zou zijn dat **N** hier inconsequent was, doordat hij aangeleerde, maar niet 'eigen' gemaakte taal vermengde met taal die wel zijn eigen taal is.
- Maar daar gaat het me nu niet om. Waar het me nu om gaat is dat deze interpretatie een gok moet blijven, aangezien er geen gesprek is gevolgd waarin **N** om opheldering werd gevraagd op de zojuist beschreven wijze. Zo'n gok hoeft overigens niet nutteloos te zijn, want zijn bruikbaarheid kan worden beproefd in een volgend onderwijsexperiment. Met betrekking tot het leren van de student om wie het hier ging is de interpretatie dan echter wel nutteloos - nl. niet langer toetsbaar - geworden.

gebruik van 'voorraad', maar zonder daarover zekerheid te kunnen krijgen, omdat het gesprek dat ik daar interpreteerde zelf niet tot een afspraak had geleid.
We zien dus dat het in de praktijk van onderwijs en van onderzoek van onderwijs niet uitmaakt of we iemand willen bevrijden van 'persoonlijk woordgebruik' dan wel van 'inconsequent woordgebruik'. Daarbij is het eerlijker om te zeggen dat we hem van 'persoonlijk woordgebruik' willen bevrijden, aangezien het - vóórdat die bevrijding heeft plaatsgehad - geen uitgemaakte zaak is, of hij consequent dan wel inconsequent sprak. Bovendien betekent 'bevrijding van persoonlijk woordgebruik' dat beide partijen zich samen bevrijden, terwijl 'bevrijding van inconsequent woordgebruik' suggereert dat slechts één van tweeën iets aan zichzelf zou moeten doen. Met deze conclusies heb ik Van Hieles "bevrijden" (onderzoeksvraag 5a) geplaatst in het gespreksmodel (9.4).

11.4. Storing door verwijzen volgens familiegelijkenis

We zochten naar een geschikte beschrijving van de 'kwaliteit van het verwijzen' die voorafgaat aan het verwijzen naar collecties ervaringen afgebakend volgens afgesproken eigenschappen. Hierbij merkten we op dat het in eerste instantie plausibele onderscheid tussen 'persoonlijk woordgebruik' en 'inconsequent woordgebruik' niet kan worden gemaakt (11.3). De intuïtie dat ons woordgebruik, voorafgaand aan het maken van expliciete afspraken, niet volstrekt willekeurig te noemen is, is hiermee echter niet weggenomen. Bij het afspreken van eigenschappen voor een woord kan ik de indruk hebben precies uit te spreken hoe ik dat woord steeds al gebruikte. Juist daarom leidt discussie over woorden uit de omgangstaal wellicht eerder tot een afspraak (zie 11.2), omdat deelnemers zich dan bezinnen op structuren in het eigen voorafgaande woordgebruik (Van Hiele, geciteerd in 7.3). Anderzijds kan ik in een discussie over woordgebruik het gevoel krijgen op een 'inconsequentheid' betrapt te zijn, waar ik eerder geen weet van had.
We missen dus nog een beschrijving van het voorafgaande woordgebruik die aan deze intuïties recht doet door de (gedeeltelijke) structuur of 'consequentheid' te beschrijven die voorafgaat aan *en vergeleken kan worden met* een door deelnemers zelf geëxpliciteerde consequentheid.

Zolang we met 'consequent' iets bedoelen als: volgens eigenschappen, volgens een regel (al dan niet uitgesproken, maar wel uitspreekbaar), stuiten we op het onderzoeksmethodisch probleem dat in 11.3 werd getoond en waarvan ik nu een algemenere schets zal geven.
Hoe toetsen we de genoemde subjectieve indrukken en verwoordingen van indrukken (betrapt worden op 'inconsequentheid', expliciteren wat je steeds al bedoelde) die we gedurende een gesprek kunnen opdoen? Merk op dat we ons ongeanalyseerde woordgebruik, voorafgaand aan de afspraak, zouden willen vergelijken met het geanalyseerde woordgebruik daar na. Misschien zouden we als volgt te werk kunnen gaan: We laten een waarnemer een groep mensen observeren die geen speciale noodzaak hebben om zich op hun eigen woordgebruik te beraden. Die waarnemer zou dan tot een beschrijving moeten komen van het woordgebruik van deze mensen. Vervolgens zou er iets moeten gebeuren waardoor die groep mensen wèl tot uitspraken over het eigen woordgebruik komt. En dan zouden we die uitspraken willen vergelijken met wat de waarnemer daar tevoren over

gezegd had: is de taal van de groep veranderd doordat men zich over de eigen taal beraden heeft? Of heeft men slechts uitgesproken wat men toch al deed?
Maar we waren geïnteresseerd in de vraag of de groep na het maken van de afspraak wellicht meer 'consequent' zou zijn gaan spreken dan ervoor. Dus zou het nodig zijn dat de waarnemer inconsequenthéden kan opmerken - en wel zónder dat groepsleden zelf zich uitspreken over hun woordgebruik. Maar we zagen (11.3) dat dit op z'n best kan leiden tot hypothesen, die te toetsen zijn in een voortzetting van het gesprek *waarbij afspraken ontstaan* in de groep. Van een onafhankelijke beschrijving door de waarnemer, die met de gemaakte afspraak *vergeleken* worden kan, kan dan geen sprake zijn.
Als mogelijkheid blijft dan over: te accepteren dat het onderzoeksobject al bezig is te veranderen, terwijl wij nog bezig zijn om tot een beschrijving ervan te komen. Als we dit accepteren, dan is er niets op tegen om als onderzoeksmateriaal de uitspraken van de groepsleden te accepteren die zich over hun taal uitspreken *terwijl ze hem* (wellicht) *veranderen*. In dat geval zouden we degene mogen geloven die zegt dat hij zojuist heeft uitgesproken, waar hij impliciet de hele tijd al naar handelde in zijn gebruik van woord 'A' - en we zouden ook degene mogen geloven die zegt zojuist betrapt te zijn op een inconsequentheid, waarvan hij eerder geen weet had gehad. Een onafhánkelijke toetsing van zulke getuigenissen zagen we daarnet immers als onmogelijk.
Maar daarmee is nog niet elke toetsing uitgesloten. Aan degene die zegt zojuist te hebben uitgesproken waar hij de hele tijd al naar handelde (die zichzelf als consequent voorstelt), zouden we kunnen vragen, hoe dat in overeenstemming te brengen is met die uitspraak die hij toen-en-toen deed. Maar dit betekent: deelnemen aan het gesprek. Het betekent geen onafhankelijk oordeel.

Nu dan, vanuit didactisch oogpunt interesseren ons de situaties waar iemand merkt consequenter geworden te zijn, immers: diegene leert. Dit betekent dan ook dat hij zijn vooraf-gaand woordgebruik, of uiteindelijk de omgangstaal, als minder consequent beoordeelt.
Bij m'n studenten heb ik geen uitspraken gevonden met de nu verlangde duidelijkheid (bijv. 'tóen was ik inconsequent'). Een reden zal zijn, dat ik met mijn studenten steeds over *fysica* heb gepraat, en wilde vermijden hen met mijn sociaal-wetenschappelijke interessen lastig te vallen. Vragen als 'vind je dat je nu iets geleerd hebt', of 'vind je dat je consequenter bent geworden' werden daarom steeds vermeden. Nu blijkt, dat een dergelijke vraag toch gesteld had moeten worden in verband met onze huidige vraagstelling (maar was dat nog goed fysica-onderwijs geweest?).
Ik wijk daarom nu uit naar ander onderzoeksmateriaal.

Wittgenstein[146] analyseerde zijn eigen gebruik van het woord 'spel'. Hij deed dat als deelnemer aan de omgangstaal, zoals blijkt uit zijn gebruik van het woord "wij":

> *66* Kijk bijvoorbeeld eens naar de bezigheden die wij "spelen" noemen. Ik bedoel bordspelen, kaartspelen, balspelen, Olympische Spelen. Wat hebben ze allemaal
> 3 gemeen? - Zeg niet: "ze *moeten* iets gemeen hebben, anders zouden ze geen 'spelen' heten" - maar kijk of er iets is dat ze gemeen hebben. - Want wanneer je kijkt, zul je niet iets zien dat ze *allemaal* gemeen hebben, maar je zult gelijkenissen,
> 6 verwantschappen ontdekken, en niet zo weinig ook. Zoals gezegd: denk niet, maar kijkl - Kijk bijvoorbeeld naar de bordspelen met hun veelvoudige verwantschappen. En nu naar de kaartspelen: hier vind je vele overeenkomsten met de eerste groep,

maar een groot aantal gemeenschappelijke eigenschappen valt af, om plaats te maken voor weer andere. Wenden we ons nu tot de balspelen, dan blijft er veel gemeenschappelijks over, maar gaat er ook weer veel verloren. - Zijn het allemaal 'gezelligheidsspelen'? vergelijk schaken met boter-melk-kaas. Of vind je bij allemaal winnen en verliezen, of rivaliteit tussen de spelers? Denk aan patience. Bij balspelen is er sprake van winst en verlies, maar als een kind zijn bal tegen de muur gooit en weer opvangt, is die eigenschap verdwenen. Kijk eens naar de rol die bekwaamheid en geluk spelen; en hoe verschillend is bekwaamheid bij schaken en bij tennis. Denk nu aan spelletjes als Jan-Huygen-in-de-ton: het element 'gezelligheid' is hier nog aanwezig, maar hoevele van de andere karakteristieke eigenschappen zijn er niet verdwenen? En zo zouden we de vele, vele andere groepen van spelen kunnen afwerken, en zien hoe gelijkenissen zichtbaar worden en weer verdwijnen.
En de slotsom van deze beschouwing luidt nu: we zien een gecompliceerd net van gelijkenissen die elkaar overlappen en kruisen; nu eens fundamentele gelijkenissen, dan weer gelijkenissen in details.

67 Ik weet deze gelijkenissen niet beter te karakteriseren dan met het woord "familiegelijkenissen"; want op deze wijze overlappen en kruisen de verschillende gelijkenissen tussen de leden van een familie elkaar: bouw, gelaatstrekken, kleur van de ogen, manier van lopen, temperament, etc. etc. - Daarom zeg ik: 'spelen' vormen een familie. (Wittgenstein[146])

Als we deze overwegingen vanuit onze ervaringen met 't gebruik van de omgangstaal kunnen beamen, dan kunnen we dus met Wittgenstein concluderen dat voor zover we weten niet één bundel eigenschappen precies díe collectie ervaringen afbakent, waarop wij het woord 'spel' van toepassing vinden. Op de vraag wat dan wel de samenhang in ons gebruik van dat woord brengt (immers we ervaren ons woordgebruik toch niet als willekeurig) geeft Wittgenstein het antwoord: 'familiegelijkenissen' en hij omschrijft wat hij daarmee bedoelt: "een gecompliceerd net van gelijkenissen die elkaar overlappen en kruisen" (r.21-23).
Als deze beschrijving van de kwaliteit van de collectie ervaringen waarnaar een woord verwijst, ook voor andere woorden uit de omgangstaal toepasselijk zou zijn, dan mogen we verwachten dat het ontstaan van een afspraak, waarbij eigenschappen worden vastgelegd, dikwijls niet mag worden opgevat als een explicitering van hoe men het woord steeds al gebruikte, maar eerder als een goed voornemen: hoe men het woord, gelet op de opgaven waarvoor men nu staat, vanaf nu wenst te gaan gebruiken. Daarmee is niet ontkend dat daarbij wel het eerdere woordgebruik als aanleiding en als materiaal heeft gediend voor de analyse die leidde tot de afspraak. Wittgenstein zegt het zo:

75 Wat betekent: weten wat een spel is? Wat betekent: het weten en het niet kunnen zeggen? Is deze kennis het een of andere equivalent van een niet uitgesproken definitie? Zodat ik die, wanneer zij zou worden uitgesproken, als de uitdrukkingsvorm van mijn kennis zou kunnen erkennen? Komt mijn kennis, mijn begrip van 'spel', niet volledig tot uitdrukking in de toelichtingen die ik zou kunnen geven? Namelijk daarin dat ik voorbeelden van verschillende soorten spelen beschrijf; laat zien hoe je naar analogie daarvan alle mogelijke soorten andere spelen kunt construeren; zeg dat ik dat en dat toch nauwelijks meer een spel zou willen noemen; en dergelijke dingen meer.

76 Wanneer iemand een scherpe grens trekt, kan ik die niet erkennen als de grens die ik zelf ook altijd al had willen trekken of in gedachten getrokken heb. Want ik heb er helemaal nooit een willen trekken. Je kunt dan zeggen: zijn begrip is niet hetzelfde

als dat van mij, maar ermee verwant. En de verwantschap is die van twee schilderijen, waarvan het een uit vaag begrensde gekleurde vlekken bestaat, en het andere uit
45 soortgelijke vlekken, die echter wel scherp begrensd zijn. De verwantschap is in dat geval even onmiskenbaar als het verschil. (Wittgenstein[146])

Het kwaliteitsverschil tussen de collectie ervaringen waarnaar een woord verwijst vóórdat de afspraak gemaakt werd, en de kwaliteit daar na, is hier op beeldende wijze aangeduid (r.43-45).
Terugkijkend naar het protocol op bladzijde 247 kunnen we nu nog een derde beschrijvingsmogelijkheid noemen voor **N**'s gebruik van het woord 'capaciteit'. In plaats van te willen kiezen uit 'consequent' versus 'inconsequent' zouden we kunnen zeggen: misschien gebruikt hij 'capaciteit' consequent volgens de familiegelijkenis tussen de ervaringen waar 'capaciteit' gewoonlijk gebruikt wordt.
Immers, zien wij niet ook een familiegelijkenis tussen de ervaringen vertegenwoordigd in de volgende bekende gebruikswijzen van 'capaciteit':

1 - "iemand met veel capaciteiten"
2 - "de capaciteit van een ziekenhuis" (uitgedrukt in aantal bedden)
3 - "de capaciteit van een vat"
4 - "de warmtecapaciteit"

De nummers 1, 2 en 3 zouden we 'integrale' capaciteiten kunnen noemen, 4 een 'differentiële' capaciteit. Maar even goed zouden we 1 apart kunnen zetten en 2 t/m 4 samennemen, omdat 'capaciteit' bij 2 t/m 4 iets te maken heeft met 'hoeveel er in kan' en bij 1 gaat het daar niet om. Ziedaar: overlappende en elkaar kruisende gelijkenissen.

We hebben nu een beschrijving van de kwaliteit van het verwijzen die voorafgaat aan het verwijzen volgens afgesproken eigenschappen:

> *Voorafgaand aan het afspreken van eigenschappen verwijst een woord naar een collectie ervaringen afgebakend door 'familiegelijkenis'*

Deze beschrijving doet zowel recht aan de ervaring dat we bij het afspreken van eigenschappen gebruik maken van een ordening die er (impliciet) al was, als aan de ervaring 'consequenter' te worden door het afspreken van eigenschappen.

> De ervaring *'consequenter te worden'* kunnen we nu als volgt beschrijven: *van verwijzen volgens familiegelijkenis gaan we over tot verwijzen volgens afgesproken eigenschappen.*

Daarmee is een continue beschrijvingswijze (consequent*er*) vervangen in overeenstemming met de discontinue beschrijving waarvoor eerder werd gekozen (11.2).
Als het klopt dat het gebruik van de meeste woorden, vóórdat hun gebruik door een afspraak wordt geregeld, bepaald is door de 'familiegelijkenis' tussen de ervaringen waarop we dat woord gewoonlijk toepassen, dan kunnen we zeggen dat 'storing door persoonlijk woordgebruik' vaak neerkomt op 'storing door verwijzen volgens familie-

gelijkenis'. De benoeming "persoonlijk woordgebruik" benadrukt de storing door het elkaar-niet-verstaan. De benoeming "storing door verwijzen volgens familiegelijkenis" benadrukt de wens om zelf met een andere kwaliteit te gaan spreken - maar dan toch om beter verstaan te worden door de ander. Dus inderdaad komen beide benoemingen op hetzelfde neer.

11.5. Conclusies

De onderzoeksvragen 5a en 5b zijn nu als volgt te beantwoorden, met hulp van de in dit hoofdstuk geëxpliciteerde termen:

Onderzoeksvraag 5a:
Om tot een woordgebruik te komen dat gedisciplineerd is door afgesproken eigenschappen, is het niet nodig dat woorden van hun verwijzende betekenis worden "bevrijd". Het bleek immers zinvol te zeggen dat woorden zowel vóór als na een dergelijke afspraak naar 'collecties ervaringen' verwijzen. Het toeschrijven van zulk 'verwijzend' functioneren bleek bruikbaar om de rol van het 'toetsen' van in beschrijvende termen geformuleerde voorspellingen in een leerproces te kunnen beschrijven.
Bij het maken van de afspraak verandert de wijze waarop de collectie ervaringen is afgebakend, waarnaar het betreffende woord verwijst. We vonden redenen te zeggen dat de kwaliteit van de afbakening verandert van afbakening 'door familiegelijkenis' naar afbakening door afgesproken eigenschappen. Bij deze discontinue verandering (twee kwalitatief verschillende afbakeningen) blijft er ook iets constant: woorden blijven naar collecties ervaringen verwijzen. Dus, hoewel het eigen woordgebruik al onderwerp van discussie geworden is kunnen we nog niet van object*wisseling* spreken.

Onderzoeksvraag 5b:
De storingen in de voortgang van gesprekken zoals die in onderwijs plaatsvinden kunnen, voor zover we in dit hoofdstuk hebben gezien, steeds geformuleerd worden in termen van 'persoonlijk woordgebruik'. Hierin storen niet zozeer de zintuiglijke ervaringen waarnaar het woord verwijst, als wel de afbakening van deze collectie ervaringen 'volgens familiegelijkenis'. De storing kan worden opgeheven door het ontstaan van een afspraak in een groep (zoals verwacht volgens de Van Hiele niveaus).

Bij deze conclusies twee aantekeningen:
- De geformuleerde conclusies worden in hun geldigheid beperkt, doordat in dit hoofdstuk alleen onderwijsgebeurtenissen zijn bekeken die te beschrijven zijn in verband met de overgang van grond- naar beschrijvend niveau. In hoofdstuk 13 zullen we nagaan in hoeverre ook bij het ontstaan van een overkoepelende structuur (Van Hiele[105], p.52) deze conclusies nog opgaan.
- De discontinue verandering bij het afspreken van eigenschappen van een woord is te vereenzelvigen met de 'expliciteringsfase' volgens Van Hiele[105] (p.53-55), bij de overgang van grond- naar beschrijvend niveau. Immers, zoals we op bladzijde 240 zagen is het zinvol te zeggen dat hieraan voorafgaand 'gebonden oriëntatie' nodig, en erna 'vrije oriëntatie' mogelijk is. Een kritische toetsing van de onderwijsfasen was echter niet het

doel van dit hoofdstuk.

De in dit hoofdstuk gemaakte keuze voor een beschrijving waarin een 'discontinuïteit' (in de kwaliteit van het verwijzen) samengaat met een continuïteit (woorden blijven naar collecties ervaringen verwijzen) kan van belang zijn voor de vraag hoe diep of hoe fundamenteel we ons de 'crisis' bij een niveau-verandering moeten voorstellen (onderzoeksvraag 7).
Ook konden we in dit hoofdstuk ingaan op een kritiek van Scharf[145], die de discontinuïteit tussen eerste en tweede niveau ontkende, omdat hij opmerkte dat mensen al in de omgangstaal woorden gebruiken die naar "Klassen" van dingen verwijzen, in plaats van naar unieke ervaringen. We konden beamen dat de overgang van uniek geval naar "Klasse" inderdaad niet het probleem is bij de overgang van eerste naar tweede niveau, en we konden aangeven in welk opzicht deze overgang dan wel als discontinu is te zien.

12. Associëren en verwijzen

We concludeerden zojuist dat, zolang we ons beperken tot de overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau, de verwijzende betekenis van woorden beschreven kan worden met 'collecties ervaringen'. Daarbij bleek het nuttig te letten op de kwaliteit van de afbakening: door familiegelijkenis of door afgesproken eigenschappen.
Met deze beantwoording van de onderzoeksvragen 5a en 5b is een beantwoording van de vragen 1 en 2 al enigszins voorbereid.

1. We kunnen de 'betekenis' van een woord op twee manieren onderzoeken:
- *door te letten op associatie met andere woorden, en*
- *door na te gaan waarnaar dat woord verwijst.*

Vraag is of, en zo ja hoe de resultaten van deze beide aandachtselecties met elkaar in samenhang te brengen zijn.

2. Welke van de twee criteria genoemd in vraag 1 moeten we gebruiken bij het opmerken van 'betekenisverandering' in een probleemstellende onderwijssituatie (gesprekssituatie)? Is het mogelijk beide te gebruiken, zo dat consistente en voor onderwijsontwikkeling bruikbare resultaten worden verkregen?

Immers, in het vorige hoofdstuk heeft het onderzoek naar 'verwijzende betekenis' gestalte gekregen, terwijl de werkwijze voor het beschrijven van woordassociaties al enigszins beproefd is in eerder onderzoek[98,37,100] (zie 6.1 onder d.). Beantwoorden van de vraag hoe deze beide beschrijvingswijzen met elkaar in samenhang te brengen is zodoende voorbereid.
Vraag 2 stelt daarbij de eis dat een antwoord op vraag 1 bruikbaar dient te zijn bij het realiseren van probleemstellend onderwijs. Aangezien de eerder (6.1) besproken onderzoekingen naar 'netwerken van woordassociaties' of te wel 'contexten' niet per se betrekking hadden op probleemstellend onderwijs, is het mogelijk dat deze nieuwe eis moet leiden tot bijstellen van de wijze waarop het samen gebruiken van woorden (het associëren) beschreven wordt. We beginnen daarom met twee onderwijssituaties te vergelijken waarbij telkens het associëren beschreven wordt: één situatie waar dit associëren niet als resultaat van voorafgaand probleemstellend onderwijs is te zien (12.1), en een paar situaties waar dat wel kan (12.2 en 12.3). We letten hierbij ook op het verwijzen, voor zover mogelijk. Dit leidt tot een antwoord op onderzoeksvraag 1 (12.2) dat vervolgens getoetst wordt in een tweede situatie (12.3).
Nadat het bereiken van een beschrijvend niveau is beschreven door op associëren en verwijzen te letten, worden er twee niveau-invariante veranderingen van taal bezien, namelijk contextuitbreiding en contextwisseling zoals onderscheiden door Kaper en Ten Voorde[37] (zie 6.2). We zullen nagaan of het geformuleerde antwoord op vraag 1 ook bruikbaar is bij het beschrijven van deze niveau-invariante veranderingen van taal (12.4 en 12.5). Door ook hierbij de eis van probleemstellend onderwijs te stellen komen we tot een antwoord op onderzoeksvraag 2, zowel met betrekking tot niveauverhoging, als met

betrekking tot contextuitbreiding en -wisseling (12.6).

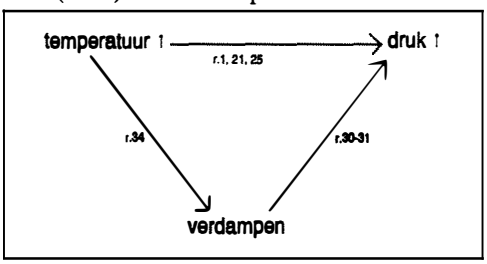
12.1. Kloppend netwerk van woordassociaties

We bekijken een situatie waar het redeneren van studenten niet als resultaat van voorafgaand probleemstellend onderwijs is te zien. In het bijzonder weten we niet in welke mate de door studenten gedane uitspraken op ervaringen berusten.

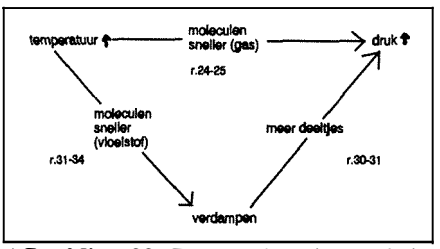
protocol 1.4, r.1-41

Een groep studenten probeert te beredeneren hoe de druk zal veranderen, wanneer de cilinder (5-4a)[1] met daarin water en waterdamp beurtelings in contact wordt gebracht met de koude en met de hete voorraad. Deze studenten proberen een ketting van oorzaken en gevolgen te formuleren, waarbij telkens een verandering van één grootheid als oorzaak genoemd wordt voor verandering van een tweede grootheid, die dan eventueel weer als oorzaak voor een volgende verandering kan gelden. Deze manier van redeneren is "lineair causaal redeneren" genoemd door Rozier en Viennot[147].
Eerder werd aangewezen hoe de woorden "thermische isolatie" bij een student de woorden "adiabatisch systeem" en vervolgens "arbeid nul" opriepen (5.2.1). We spraken daar van een ketting van *woordassociaties*. Zo'n ketting van woordassociaties zou kunnen worden afgebeeld in een concept-map (hoofdstuk 6). Gezien bijvoorbeeld r.1 ("cilinder koud.. minder druk.. meer vloeistof") ligt een dergelijke analyse ook bij protocol 1.4 voor de hand.
Tekstkader 3 geeft een opsomming van de associaties rond de woorden temperatuur, druk en verdamping die door studenten worden overwogen.

Sommige van deze associaties worden als alternatieven genoemd (**C**.2) en ook andere staan ter discussie (**C**.8,10,14,31). De voor **C** twijfelachtige associatie van "minder druk" met "meer vloeistof" (**C**.2,8) of van "hogere druk" met "verdampen" (**C**.31) wordt uiteindelijk vervangen door een andere (r.33-37) en daarbij lijkt een interpretatie in modeltermen (**A**.33) een rol te spelen.



Afbeelding 21: "de druk neemt om twee redenen toe" (**C**.41).



Afbeelding 22: Twee redeneringen, beide afgebeeld als ketting van woordassociaties

De door **C** uiteindelijk geaccepteerde woordassociaties tussen 'temperatuur', 'druk' en 'verdampen' kunnen dan tezamen worden afgebeeld zoals weergegeven in Afbeelding 21.

C,	r.1	cilinder koud ... minder druk
	r.1-2	minder druk .?. meer vloeistof
		minder druk .?. (minder vloeistof)
D,	r.3	(cilinder koud) ... meer vloeistof
	r.5	meer vloeistof ... druk lager
C,	r.8	minder druk .?. meer vloeistof
	r.10	minder druk .?. minder volume
	r.14	temperatuur lager .?. volume toenemen
D,	r.15	warmer ... verdampen
	r.16	verdampen ... druk hoger
C,	r.21	*T* hoger... druk hoger
	r.22	druk hoger ... meer gas (zie r.31)
	r.24	temperatuur hoger ... moleculen sneller
	r.25	moleculen sneller ... hogere druk
A,	r.30	(verdampen) ... meer deeltjes
		meer deeltjes ... druk groter
C,	r.31	hogere druk .?. (verdampen)
A,	r.33	kinetische energie toeneemt ... (verdampen)
C,	r.34	temperatuur hoger ... (verdampen)
	r.36	(verdampen) ... (hogere druk)

Legenda
... geassocieerd
.?. idem, met twijfel of als vraag
() niet letterlijk

Tekstkader 3: associaties van 'temperatuur', 'druk' en 'volume' in protocol 1.4.

Als we bovendien letten op het gebruik van modeltermen ("moleculen sneller"), dan kunnen nog enige tussenliggende schakels in de redenering worden afgebeeld (Afbeelding 22). Deze associaties tezamen leiden **C** tot de conclusie dat de druk zal toenemen (r.40-41) als de temperatuur stijgt (r.21). Voor die toename zijn inmiddels twee "redenen" genoemd, zoals **C** zelf opmerkt (r.41).
Een eerste reden, genoemd in r.21, betreft de invloed van de temperatuur van een gas op de druk van dat gas, volgens de gaswetten. Als we ons alleen op deze gaswetten beroepen dan betreft het hier een redenering van één schakel - dus nauwelijks een redenering. Door een beroep op "moleculen sneller" (gasfase) ontstond een redenering van twee schakels (r.24).
De tweede genoemde reden of redenering voor de toename van de druk gaat via het "verdampen" (r.16) van vloeibaar water. Dit "verdampen" of "vloeistof naar gas" leidt hen tot "meer gas" (r.22) of tot "meer deeltjes" (r.30) en zo tot "hogere druk" als tweede reden (r.41, "zorgt ook daarvoor", r.36).
Elk van beide genoemde "redenen" is dus af te beelden als een *ketting van woord-associaties*. Hierbij zullen we een ketting van één schakel ook nog als ketting meetellen.
Met 'woordassociatie' bedoelden we het niet toevallig samen gebruiken van woorden (inleiding 6). Uit de zojuist gegeven analyse blijkt dat we het samen gebruiken van woorden 'niet toevallig' noemen, omdat we in de opeenvolging van woorden een redenering herkennen. Dit is dus onze voorlopige operationalisatie van 'niet-toevallig'.

Met een 'woord-associatie' bedoelen we een combinatie van woorden die als herkenbare 'reden' in een redenering functioneren, en die zelf op een bepaald moment niet

nader beredeneerd wordt.

Hierbij is op te merken dat een associatie - dus een niet nader beredeneerde reden (r.21 "*T* hoger, druk hoger") - even later alsnog nader beredeneerd kan worden (r.24), hetgeen wil zeggen dat wat eerst een associatie te noemen was, nu als aaneenschakeling van twee associaties te beschrijven is (vergelijk Afbeelding 21 met 27).

Eerder spraken we van toetsing van uitspraken aan ervaringen. Ook in protocol 1.4 wordt uitkomst gezocht en gevonden voor een gerezen twijfel, immers de twijfel die **C**.1-2, 8-10, 31-32 uitsprak wordt in **A**.33-**C**.37 beëindigd. We zien niet meer dan dat een door **C** betwijfelde woordassociatie "meer... omdat de druk hoger wordt?" (C.31) vervangen wordt door één of twee andere (**A**.33, **C**.34) die blijkbaar door **C** als geldig worden herkend en bovendien als passend voor het voorliggende probleem. Hiermee verandert de aanvankelijk lineair-causale[147] redenering

temperatuur ↓ --> druk ↓ --> condenseren (r.1-2)

in de vertakte redenering zoals weergegeven in Afbeelding 21 of Afbeelding 22. Dit wordt door **C** zelf als iets bijzonders opgemerkt ("twee redenen", C.41).
Maar nu moeten we ons nog afvragen wat het in dit verband kan betekenen dat **C** de door **A**.33 aangedragen woord-associatie als geldig en als passend herkent. Het protocol biedt geen aanleiding te spreken van toetsing aan ervaringen. Nu zou het kunnen zijn dat zo'n toetsing al eerder heeft plaatsgehad - zo dat **A** zich beroept op een eerder tussen hen beiden ontstane afspraak - maar het is ook mogelijk dat **A C** herinnert aan een hen beiden bekende uitspraak van een autoriteit, bijvoorbeeld een leraar. Omdat echter 'verdampen' hier voor 't eerst in deze opgavenserie ter sprake komt, moet de oorzaak van de gebleken eensgezindheid (**A**.33-**C**.37) in een verder verleden worden gezocht, zodat we niet kunnen beslissen welke van de twee het geval is.
Dit wat betreft de geldigheid van de door **A** gedane suggestie. Wat **C** hier verrast, of wat "spannend" (C.41) gevonden wordt is echter niet de woord-associatie die **A** aanbiedt - of de daarin al dan niet vertegenwoordigde ervaring - maar het is de vertakte redenering die daardoor mogelijk wordt: twee "redenen" die leiden tot dezelfde conclusie. Haar interesse heeft dus betrekking op de eigen redenering, en niet zozeer op de associaties waaruit deze is opgebouwd.[*)]
In het tweede deel van het protocol (r.42-206) ontstaat een nieuw probleem. Opnieuw wordt een grootheid met meer dan één andere grootheid in verband gebracht (r.200-204), maar nu werken de verschillende factoren niet in dezelfde richting: gelet op de volumevergroting (r.159) of de drukvermindering (r.154-155) kan 'verdampen' verwacht worden,

[*)] *Als* de gebruikte associaties nu op ervaring zouden berusten, dan zouden we hier wellicht kunnen spreken van 'objectwisseling' (één van de kenmerken van een niveau-overgang volgens Van Hiele, zie 7.3), maar aangezien de relatie tot ervaringen hier onduidelijk is, mogen we deze conclusie niet trekken.

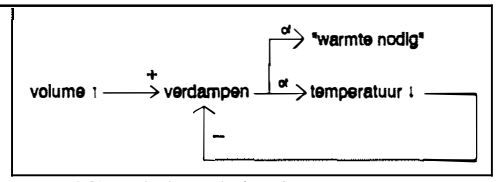
maar gelet op de temperatuurdaling is eerder condensatie te verwachten (r.178).*) Omdat beide redenen nu niet tot dezelfde conclusie leiden kan er geen conclusie getrokken worden. Dit brengt me tot het volgende voorstel:

> *We kunnen zeggen dat een collectie associaties 'klopt' wanneer langs verschillende wegen eenzelfde conclusie kan worden bereikt.*

'Weg' is hier metaforisch gebruikt voor een aaneenschakeling van woordassociaties, oftewel een redenering. Deze metaforische uitdrukking sluit aan bij de gekozen afbeeldingswijze (Afbeelding 21).
De 'didactische eigenschap' van verhoudingen die in paragraaf 6.3 geformuleerd werd is nu te zien als een bijzonder geval van wat we een *kloppend netwerk van associaties* zullen noemen. Immers ook daar was sprake van drie woorden (namen van voorwerpen: A, B, C, of namen van energievormen: thermische energie, hoogte-energie, kinetische energie) die op bepaalde wijze tezamen gebruikt worden. Er was sprake van telkens drie associaties tussen deze woorden, en deze associaties (hier: verhoudingen) waren zodanig dat de derde kon worden beredeneerd (hier: berekend) uit de andere twee. Wanneer we in zo'n geval aan individu A een verhoudingswaarde toekennen, dan kunnen we de verhoudingswaarde voor individu B beredeneren langs twee wegen: direct, gebruik makend van de verhouding $C_1 : C_2$, of indirect, gebruik makend van de twee verhoudingen $C_3 : C_4$ en $C_5 : C_6$ en beide redeneringen leiden tot dezelfde conclusie. Wanneer beide wegen niet tot dezelfde conclusie zouden leiden, zou 'warmtecapaciteit' als voorwerpseigenschap zinloos zijn.
Een tweede en binnen de thermodynamica tamelijk voor de hand liggende toepassing van dit didactische idee, is de invoering van de term 'toestandsgrootheid' (§2)[3]. Twee toestanden kan men met elkaar in verband brengen door te letten op de ruilwaarde R_{AB} van verandering A → B die toestand A doet overgaan in toestand B. Wanneer voor drie van zulke toestanden A, B en C gevonden wordt dat $R_{AB} = R_{AC} + R_{CB}$ dan kan dit aanleiding zijn een nieuwe grootheid 'energiewaarde' in te voeren die op toestand-individuen betrek-

---

(* Omdat **WK** de temperatuurdaling zelf ziet als een gevolg van de verwachte verdamping meende hij zeker te weten dat géén condensatie zal optreden, immers: de temperatuurdaling kan de eerder in de redenering bereikte conclusie 'verdamping' niet ongedaan maken, omdat de temperatuurdaling zijn eigen oorzaak niet ongedaan kan maken. **WK**'s redenering is dus als volgt af te beelden:



Afbeelding 1: iteratief redeneren

Een iteratieve berekening volgt zo'n zelfde (niet vicieuze) cirkel. Door redeneren in woorden lukt het vaak om de uitkomst van zo'n berekening enigszins te voorspellen (de richting waarin het eindresultaat zal afwijken van de eerste gok, hier: er zal *minder* water verdampen dan wanneer de temperatuur constant zou worden gehouden) en zo de uitkomst te controleren. Een zwakke plek die ik destijds niet zag in deze redenering is, dat de temperatuurdaling behalve door de verdamping ook nog bepaald is door de externe arbeid (**D**.147-149). **WK** gaat hier niet adequaat op in.

king heeft, precies zoals de relatie $C_5 : C_6 = C_1/C_2 : C_4/C_3$ het mogelijk maakte de nieuwe grootheid 'warmtecapaciteit' in te voeren (6.3). Kennen we immers aan één toestand A een energiewaarde E_A toe, dan kunnen we voor een tweede toestand B een energiewaarde beredeneren langs twee wegen, één direct, gebruik makend van R_{AB} en één indirect, gebruik makend van R_{AC} en van R_{CB}. Wanneer beide wegen niet tot dezelfde conclusie leiden is de term 'energiewaarde van een toestand' zinloos.
Hiermee is fysisch niets nieuws gezegd. Wel nieuw is, dat we de introductie van 'warmtecapaciteit' en van 'energiewaarde' kunnen zien als verschillende gevallen van eenzelfde didactisch fenomeen, namelijk van het tot stand komen van een kloppend netwerk van associaties, net zoals we dat zagen bij deelnemer **C** toen ze opmerkte dat de druk om twee redenen toenam.

Redeneren in woorden en redeneren via symbolen met een kwantitatieve betekenis kunnen beide worden beschreven in termen van een kloppend netwerk van associaties.

In deze paragraaf beperken we ons tot beschrijven van het associëren van woorden of symbolen, en van de kettingen (genoemd redeneringen) die door het aaneenschakelen van associaties ontstaan. Protocol 1.4 bood aanleiding tot zo'n beperking, omdat de voorgeschiedenis van de door studenten in het gesprek ingebrachte associaties niet meer kon worden nagegaan. Met name kon niet worden nagegaan welke rol ervaringen bij het ontstaan van deze associaties hadden gespeeld. We zijn dus niet geïnformeerd over een 'verwijzende betekenis' van de gebruikte woorden.*)
In verband met de gestelde onderzoeksvragen (1 en 2) kunnen we ons echter afvragen welke verwijzende betekenis we kunnen ontwerpen voor de in protocol 1.4 gebruikte woorden 'druk', 'temperatuur', 'verdampen'. Door welke eigenschappen zouden we de collecties ervaringen, die voor ons in deze woorden zijn vertegenwoordigd, kunnen afbakenen met het oog op thermodynamica-onderwijs?
Het kan dan opvallen dat de volgende twee zogenoemde 'woord-associaties'

C, r.10 minder druk .?. minder volume
r.21 *T* hoger... druk hoger

ook 'eigenschappen' genoemd zouden kunnen worden. We herkennen 'hoge druk' immers onder andere aan het vervormen of ontploffen van een vat. Zoeken we naar een verwijzende betekenis voor de kwantitatieve term 'druk', dan zouden we die collectie van ervaringen willen afbakenen waarvoor we zouden willen zeggen: wat dáár gemeten werd noemen we 'druk'. Bij nader onderzoek van de instrumenten die we bereid zijn 'manometer' te noemen, zou dan blijken dat minstens sommigen onder hen berusten op een associatie van 'druk' met 'volume' (bijvoorbeeld van een elastisch vat).
Het hoeft dus niet zo te zijn dat wij eerst expliciet weten wat druk is, en wat volume is, en dat we vervolgens een samenhang tussen beide grootheden (die al los van elkaar

*) Waar **WK** probeert een associatie van 'verdampen' met 'afkoelen' te gronden op alledaagse ervaring (r.75) of labtafel-ervaring (r.80) krijgt hij geen reactie. Wel komt er reactie op **WK**'s "verdampt zonder dat er warmte toegevoerd wordt" (r.72), namelijk met woorden als "adiabatisch", "endotherm", en "dat heb ik gisteren nog gelezen" (r.76-79).

bestaan) experimenteel constateren. Nee: het opmerken van een associatie - in het gebruik van *nog niet* geanalyseerde woorden (11.4) - zou nodig kunnen zijn om de collectie ervaringen, vertegenwoordigd in het woord 'druk', af te bakenen. Maar dit suggereert ander onderwijs dan C in het VWO vermoedelijk gehad heeft.

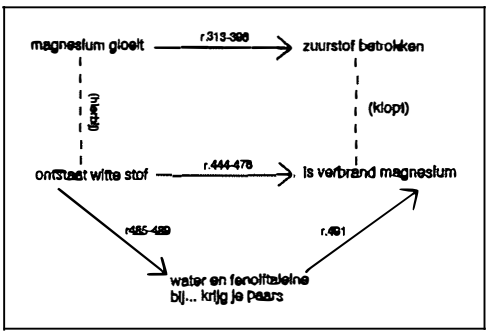
12.2. Kloppend netwerk van relaties

We bekijken nu een onderwijssituatie waar de associaties, gebruikt in een redenering, als resultaat van voorafgaand probleemstellend onderwijs zijn te zien. Daarbij zullen we de bruikbaarheid nagaan van de zojuist gedane suggestie. We zullen dus nagaan of er een verband te leggen is tussen enerzijds de associaties, zoals die functioneren in redeneringen van leerlingen, en eerder afgesproken eigenschappen die de collectie ervaringen afbakenen waarnaar een woord verwijst anderzijds.
Zoals eerder gezegd (7.7) is in dit onderzoek de overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau nauwelijks onderzocht. We bespreken daarom eerst een protocol uit het proefschrift[35] van Ten Voorde, die wel uitgebreid aandacht aan deze eerste stap in een (chemie)leerproces heeft besteed.

Ten Voorde[35] bespreekt een protocol[*)] van vier leerlingen die zojuist een proef hebben gezien waar stoom werd geleid over een stuk magnesiumlint, dat gelijktijdig met een brander werd verhit. Bij deze proef werden door leerlingen opgemerkt: een vuurverschijnsel, het ontstaan van een brandbaar gas dat "knalgas" of "waterstof" wordt genoemd en van een witte stof die met water en fenolftaleïne een paarse kleur geeft.
Op het moment dat deze proef gedaan werd, werkten deze leerlingen al één (school)jaar en drie maanden samen, sinds het begin van hun scheikundeonderwijs. Aan de hand van opdrachten zijn zij ertoe gekomen een aantal zelf meegemaakte gebeurtenissen te gaan beschrijven als "reacties" in de betekenis: "verdwijnen" van stoffen en "ontstaan" van andere stoffen, waarbij een "stof" gekend wordt aan eigenschappen, waartoe ook veranderingsmogelijkheden ("reactie"-mogelijkheden) van die stof kunnen behoren. Naar aanleiding van een eerdere proef waarbij magnesium aan de lucht werd verbrand hebben zij als eigenschap voor "zuurstof" genoteerd dat het kan verdwijnen met "magnesium" waarbij een witte stof, "verbrand magnesium", ontstaat, die met water en fenolftaleïne een paarse kleur geeft. We kunnen dus zeggen dat de collectie ervaringen waarop zij het woord "zuurstof" van toepassing vinden is afgebakend door een afgesproken eigenschap.
Wanneer nu bij het overleiden van stoom over verhit magnesium opnieuw magnesium verdwijnt, gepaard aan een vuurverschijnsel, waarbij weer een witte stof ontstaat die met water en fenolftaleïne een paarse kleur geeft, dan zijn dit voor hen redenen te concluderen dat het gaat om "dezelfde" witte stof, en dat "zuurstof" bij de reactie betrokken moet zijn. We zien dus een redenering waarin eigenschappen functioneren die eerder gekozen werden om het gebruik van de betrokken woorden af te bakenen.
Nauwkeuriger kijkend zien we dat éérst (r.313-396) het "gloeien" van magnesium als

[*)] Ten Voorde[35], protocol 34. Regelnummers in de hierna volgende bespreking verwijzen naar dit protocol.

argument wordt gebruikt dat "zuurstof" aanwezig is. Dit "gloeien" is dus ook een eigenschap van zuurstof te noemen. Later (r.485-491) wordt de identificatie van de "witte stof" met water en fenolftaleïne als bevestiging aangevoerd.
We zien hier dus het 'kloppen' van enkele associaties, in de zin dat langs twee wegen eenzelfde conclusie wordt bereikt. Bovendien kan van elk van beide zo genoemde 'associaties' worden gezegd dat ze functioneert als eigenschap die de collectie ervaringen afbakent waar deze leerlingen van 'zuurstof' willen spreken.



Afbeelding 23: afgesproken eigenschappen, associaties in een redenering.

Afgesproken eigenschappen die de collectie ervaringen waarnaar een woord verwijst afbakenen, functioneren na de afspraak in redeneringen als associaties van dat woord met andere woorden

Aangezien we met 'term' of 'vakterm' (hoofdstuk 6) een knooppunt in een netwerk van associaties bedoelen waaraan een speciale kwaliteit wordt toegekend, kunnen we nu afspreken:

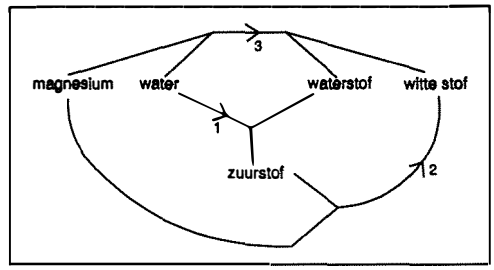
Met 'term' wordt bedoeld een combinatie van een woord met de afgesproken eigenschappen, die de collectie ervaringen afbakenen waarnaar dat woord verwijst.

Er geldt voor deze leerlingen nog geen beperking tot chemische stofeigenschappen, want "gloeien" van magnesium wordt gebruikt als argument, maar "gloeien" is op zichzelf geen beschrijving van wat in de scheikunde geldt als een "reactie".
Ook valt op dat weliswaar termen met afgesproken eigenschappen als knooppunten in de ketting van associaties functioneren, maar omdat deze eigenschappen zelf (gloeien, ontstaat witte stof, met fenolftaleïne paars) deels in woorden geformuleerd zijn, waarvoor nog niet zo'n afspraak is gemaakt, zien we naast afgesproken termen ook woorden functioneren waarvan de zintuiglijke betekenis nog voor zich spreekt. Ten derde kan opvallen dat de bevestiging (dus het 'kloppen') door de identificatie met fenolftaleïne weliswaar wordt gewaardeerd, maar dat dit 'kloppen' zelf niet wordt uitgesproken[*] terwijl deze controle ook niet op eigen initiatief wordt nagestreefd - dit was namelijk gevraagd in de opgave.
Voor één van deze vier leerlingen kan echter nog een enigszins ander netwerk van associaties worden getekend. Deze leerling ("Leo" in Ten Voordes[35] weergave) werd door de andere drie leerlingen geïnformeerd over een proef die ze de vorige dag hadden meegemaakt, waarbij waterstof aan de lucht werd verbrand. Hierbij werd ook opgemerkt dat waterstof alleen dáár brandt waar het in contact is met de lucht.[+] Verder herinneren

[*] Vergelijk deelnemer **A** geciteerd in 12.1: "twee redenen".
[+] r.229: een brandende kaars in een buis met waterstof dooft uit.

sommigen zich het ontstaan van "waterstof" bij "elektrolyse van water" (r.152) en het ontstaan van "knalgas" bij "verhitten van waterdamp" in een vlamboog (r.250). Deze ervaringen tezamen geven voor Leo inhoud aan een uitspraak die hij in de opgavenserie aantreft "waterstof is een ontledingsprodukt van water" (r.197). Géén van de anderen reageert op het woord "ontledingsprodukt" zoals Leo. Voor hem betekent deze uitspraak nu, dat er bij elektrolyse van water of bij verhitten van waterdamp behalve "waterstof" ook "zuurstof" moet ontstaan. Met deze voor hem nieuwe eigenschap van "zuurstof", namelijk dat het samen met "waterstof" kan ontstaan waarbij "water" verdwijnt, komt hij tot een nieuwe interpretatie van de proef met magnesium en stoom.

De eigenschap (3) dat magnesium kan verdwijnen, waarbij ook water betrokken is, en waarbij waterstof en een wit poeder ontstaan, wordt door hem in verband gebracht met twee inmiddels bekende eigenschappen (1 en 2), namelijk dat water kan verdwijnen waarbij waterstof en zuurstof ontstaan (1), terwijl zuurstof met magnesium kan verdwijnen waarbij een wit poeder ontstaat (2). Deze *verklaring* van een nieuwe associatie door aaneenschakeling van twee bekende associaties doet denken aan het opstellen van een reactiemechanisme, met zuurstof als intermediair. In plaats daarvan kunnen we ook zeggen dat de zojuist door een proef gevonden associatie (3) 'klopt' met de associaties (1) en (2), want aaneenschakeling van (1) en (2) leidt tot dezelfde conclusie als een beroep op associatie (3).



Afbeelding 24: Verklaren van een nieuwe reactie uit bekende reacties

Aan Leo's redenering valt op dat deze geformuleerd kán worden met weglating van woorden als 'gloeien', 'knallen', 'paars worden'. Elk van de betrokken *termen* (magnesium, water, waterstof, witte stof, zuurstof) heeft eigenschappen (1, 2 en 3) die zelf ook weer met behulp van uitsluitend deze vijf termen te formuleren zijn. Een beroep op woorden zonder afgesproken betekenis (zonder eigenschappen) is dus niet nodig in deze redenering.

Zo een 'associatie' die :
- twee of meer termen verbindt
- voor elk van deze termen als 'afgesproken eigenschap' heeft gefunctioneerd bij het afbakenen van de collectie ervaringen vertegenwoordigd in die term,
(en die dus in die zin geen toevallig, spontaan of persoonlijk karakter meer draagt)
wordt in het vervolg een 'relatie' genoemd.

Hiermee zijn de aanvullende eisen geformuleerd waardoor we een 'relatie' nu kunnen onderscheiden van een 'associatie' zonder meer (vgl. 6.4).
Betekent de bij "Leo" opgemerkte verminderde afhankelijkheid van woorden als 'gloeien' nu ook dat de termen niet langer naar zintuiglijke ervaring verwijzen (onderzoeksvraag 5a)? Preciezer gezegd: verwijzen de termen niet langer naar collecties ervaringen op het moment dat het netwerk van relaties *gesloten* raakt in de zin dat redeneringen mogelijk worden waarin geen beroep op niet-afgesproken associaties meer wordt gedaan?

Hierover kunnen we verschillende opmerkingen maken, afhankelijk van waar we op letten. Ten eerste kunnen we opmerken dat *aanwijzend woordgebruik* geen rol speelt in Leo's redenering, waarbij we met 'aanwijzend woordgebruik' bedoelen: het gebruik van aanwijzende voornaamwoorden (deze, dit), of van een verhalende vorm (en toen...) om van de collectie ervaringen, vertegenwoordigd in een woord (magnesium), er één naar voren te halen, zoals wanneer ik praat over 'dit magnesium' dat nu voor mij ligt (zie 11.1). Maar dit behoeft niet te betekenen dat termen niet meer naar *collecties* ervaringen verwijzen. Het verhaal van een proef dat aan Leo verteld wordt, wordt door hem met belangstelling ontvangen (r.70), en we kunnen veronderstellen dat dit verhaal, tezamen met de eerder opgedane ervaringen met elektrolyse en met de vlamboog, inhoud geven aan de uitdrukking "ontledingsprodukt van water" die hem opvalt in de onderwijstekst. Dus kunnen we ook zeggen dat deze ervaringen met 'water' nog steeds in de term 'water' vertegenwoordigd zijn, of ook dat de term water nog steeds naar deze ervaringen verwijst (maar: niet naar één ervan in het bijzonder). Hiermee kunnen we dan Leo's belangstelling voor zulke verhalen en herinneringen begrijpen.
Ten Voorde heeft erop gewezen[148,*)] dat Karel, Rob en Wim niet de gelijktijdige aanwezigheid van waterstof en zuurstof in de buis willen aanvaarden die door Leo werd verondersteld, omdat zij de 'knal' misten die volgens hen dan zou moeten optreden (r.504-561). Ten Voorde interpreteerde dit zo dat voor hen een gebondenheid aan zintuiglijke indrukken beslissend was, terwijl Leo een dergelijke zintuiglijke gebondenheid had verlaten. Dit was voor Ten Voorde reden om te spreken van een kloof van onverstaanbaarheid als gevolg van een verschil in Van Hiele niveau tussen Leo en zijn groepsgenoten.[+)]
We kunnen echter ook zeggen dat Leo zowel het knallen van knalgas als het (zonder knal) ontstaan van waterstof en zuurstof in één ruimte (de vlamboog) had ervaren. In plaats van te zeggen dat Leo niet, of minder aan zintuiglijke ervaringen gebonden is zouden we dus ook kunnen zeggen dat hij aan een ruimere collectie ervaringen gebonden is, en bovendien dat hij deze collectie ervaringen anders analyseert dan zijn groepsgenoten.
Wanneer we deze tweede mogelijkheid verder overwegen, dan is vooral het 'anders analyseren' interessant in verband met het organiseren van onderwijs. Als bijzondere eigenschap van Leo's analyse zagen we wat we hierboven 'geslotenheid' noemden: het in elkaar gaan grijpen van de afgesproken eigenschappen der termen, zodat men hieraan genoeg heeft. Maar deze 'geslotenheid' doet zich alleen voor als het gaat om het opstellen van een redenering zoals hierboven geschetst. Als Leo wil beargumenteren dat de 'witte stof' dezelfde stof is als degene die ontstaat bij verbranding van magnesium aan de lucht, is hij voor een verdere bevestiging van zijn vermoeden ook aangewezen op de paarskleuring met fenolftaleïne (r.485-495). Bij het beoordelen van de aanwezigheid van waterstof zal ook voor hem het 'plofje' een rol kunnen spelen. Door te zeggen dat termen als

---

(* Ook: mondelinge discussie van Ten Voorde met Klaassen en anderen d.d. 10-08-92, tijdens een werkbespreking bij Didactiek der Scheikunde, Amsterdam. Een protocol van deze bijeenkomst kan worden opgevraagd.

(+ Hierbij was hij wellicht geïnspireerd door Van Hieles nadruk op de overgang van 'deze driehoek' naar 'de' driehoek (Plato) die niemand kan tekenen (Vgl. Van Hiele[105], p.97, geciteerd in 7.3). Zo is ook het gebruik van 'waterstof' voor Leo niet meer gebonden aan één bepaalde zintuiglijke gestalte (de knal), maar dit hoeft niet als afwezigheid van binding aan zintuiglijke gestalte*n* (meervoud) beschreven te worden, zoals ik inmiddels heb beargumenteerd.

'waterstof' nog naar collecties ervaringen verwijzen, geven we ons hiervan rekenschap. Het verschil tussen Leo en zijn groepsgenoten zou, gelet op de hierboven genoemde 'geslotenheid' van de ontstane samenhang van termen, te formuleren zijn als een verschil in *onderwijsfase* bij de overgang van grond- naar beschrijvend niveau. Zo'n 'geslotenheid' is door Van Hiele wel eens[149] genoemd als aanwijzing voor bereiken van beschrijvend niveau.
Er wordt dan ook wel gesproken van *integratiefase*, d.i. de laatste fase in de overgang van grond- naar beschrijvend niveau. Deze benaming lijkt me daarom zeer passend omdat nu de termen-in-wording voor elkaar wederzijds bij het afspreken van 'eigenschappen' functioneren: de diverse eigenschappen gaan in elkaar grijpen, en wel zo volledig dat een redenering zonder niet-afgesproken (spontane) associaties kan worden gegeven. Bij Leo's groepsgenoten zien we wel voor enkele termen ('waterstof', 'zuurstof') afspraken functioneren, die ook nog tijdens het gesprek worden uitgebreid en aangescherpt, zonder dat daar de leiding van de leraar bij nodig was, dus *vrije oriëntatie* zoals verwacht mag worden voor thema's ('waterstof', 'zuurstof') waarvoor men kennelijk al tot afgesproken eigenschappen is gekomen (waarvoor een *expliciteringsfase* is gerealiseerd).
Ten Voordes[148] analyse volgend kan ook onderscheid gemaakt worden tussen twee thema's, te weten: a) stofindividu en b) reactietype. Er kan dan opgemerkt worden dat Leo's groepsgenoten ten aanzien van reactietype als thema nog niet tot explicitering zijn gekomen, hetgeen hieruit blijkt dat ze uit zichzelf het woord 'ontledingsreactie' niet gebruiken, en als Leo het gebruikt, ze er niet op in gaan. Ten aanzien van dat thema kunnen we eventueel spreken van een 'kloof' tussen Leo en z'n groepsgenoten, aangezien ik (in 11.2) het maken van de afspraak (de explicitering) als discontinu moment heb aangewezen. Er is echter nog geen reden om uit het elkaar niet-verstaan te concluderen dat men elkaar *niet kan* verstaan ("kloof van onverstaanbaarheid", vgl. 9.6).
Om samen te vatten: we zagen in deze paragraaf het 'bereiken' van beschrijvend niveau, in de zin van het gesloten raken van een kloppend netwerk van relaties tussen termen, die naar collecties ervaringen verwijzen. Het eerder gegeven antwoord op onderzoeksvraag 5a (11.5) bleef hierbij bruikbaar.

12.3. 'Ruilwaarden' in een relatienet

Zoals eerder gezegd (7.7) is de overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau in dit onderzoek maar in beperkte mate nagestreefd. Met het hierdoor beperkte onderzoeksmateriaal zullen we nu nagaan of de relatie tussen associëren en verwijzen, beschreven in de vorige paragraaf, gegeneraliseerd kan worden naar thermodynamica-onderwijs.
In 11.2 werd getoond hoe voor de term 'ruilwaarde' een collectie ervaringen werd afgebakend door de volgende eigenschappen af te spreken:

1 - het is een waarde waar je in rekent,
2 - het maakt verschillende ietsen vergelijkbaar,
3 - verschillende ietsen kan men ruilen "via" de ruilwaarde.

Deze studenten hadden bovendien al eerder uitgesproken dat twee "verschijnselen" "evenveel waard" genoemd kunnen worden als beide tezamen optreden zonder verdere veranderingen (zie 5.4.2). Ook was uitgesproken dat - in geval 'energie' wordt opgevat als 'ruil-

waarde' - met "verschijnsel" ($1\text{-}1h^3$) een verandering wordt bedoeld. Als vierde eigenschap voor 'ruilwaarde' kunnen we dus noemen:

4 - gelijk voor twee veranderingen die tezamen optreden zonder andere veranderingen

Direct nadat deze afspraken zijn gemaakt wordt er gewerkt aan opgaven die vragen verschillende mogelijke "eenheden" uit te proberen voor ruilwaarde van hoogte, en van snelheid-kwadraat.

> Opgave $1\text{-}2c^3$ en d^3
> c Is de massa van de steen nodig om een geschikte ruilwaarde te kunnen berekenen voor de verdwenen hoogte van de steen en de daarbij ontstane snelheid-kwadraat?
> Zo ja, waarom? Zo nee, laat zien hoe het ook anders kan.
> d Welke eenheden zijn geschikt om de ruilwaarde van verdwenen hoogte en ontstane snelheid-kwadraat in uit te drukken, zolang we ons beperken tot het vallen van een steen? (Noem er minstens twee).

Hiermee werd ook gevraagd verschillende berekeningswijzen uit te proberen voor deze ruilwaarden (met of zonder de massa). Naast de Joule als mogelijke eenheid van ruilwaarde is er dus één voor de hand liggend alternatief. De geschreven antwoorden tonen, dat de verwachte twee keuzemogelijkheden door studenten **N**, **O** en **P** zijn genoteerd:

> Antwoorden op $1\text{-}2c^3$ en d^3
> **N**: c Nee, massa kan weggedeeld worden. Je kunt rekenen in J kg^{-1} of in m^2s^{-2} (massa = constant)
> d in J kg^{-1} of m^2s^{-2}. J.
>
> **O**: c Als je in energie wilt omrekenen en dus in Joule, dan heb je de massa nodig, in m^2/s^2 dan zonder massa
> d in J/kg of m^2/s^2, Nm/kg of J.
>
> **P**: c Nee, massa kan weggedeeld worden, en je kunt de energie dan uitrekenen in J/kg of m^2/s^2 mits de massa constant blijft.
> d Vallen van één steen → J/kg of m^2/s^2
> en J

Het volgende gespreksfragment naar aanleiding van opgave 1-2c toont hoe hierbij een eerder gemaakte afspraak functioneerde voor deelnemer **P**.

Protocol 3.4

O: Wat bedoelen ze hier nou met die ruilwaarde? Is dat nou dat, d.. Δh of $\Delta(v^2)$?

3 **P**: Waarin je kan omrekenen dus. ..Daar hebben we 't toch de hele tijd over gehad? Je kan Δh kan je omrekenen, wat er verandert kun je omrekenen in een bepaalde eenheid, daar kun je $\Delta(v^2)$ ook in omrekenen. Ruilwaarde is

6 dus energie.

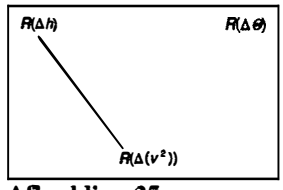
(stilte)

P: Maar (in de energie) kan toch gewoon massa weggedeeld worden?

9 **O**: (onverst.) ..Já, éigenlijk wel.

Als je die twee los van elkaar houdt.. Als jij apart de gebruikte energie om op een bepaalde hoogte te komen, dan heb je die massa d'r wel bij nodig.
12 Als je die twee formules uit elkaar haalt, dus het =-teken even vergeet, dan heb je die twee formules om de energie te berekenen. En om die energie te berekenen heb je wel degelijk massa nódig. Ga je ze aan elkaar gelijkstel-
15 len, dan kun je die massa wegdelen.
P: Maar da's de vraag hier: als je één steen omhoog gooit
O: Nee, er staat
18 **WK:** Dat is: als je (onverst.) als het al een uitgemaakte zaak is dat je dat in Joule wil doen. Hè, dus als je al.. als er.. We hebben 't er net over gehad, redenen om een gelijke waarde toe te kennen aan die twee veranderingen.
21 En nou is eigenlijk de vraag: moét die gelijke waarde per se energie zijn, moet dat per se een aantal Joule zijn of kan het ook anders
(...)
24 **O**: Ja dus als je energie in Joule wil uitrekenen dan heb je massa nodig. Bereken je 'm in m^2/s^2 dan heb je geen massa nodig.

Deelnemer **P** (r.6) wil zelfs zo ver gaan om ook van 'energie' te spreken wanneer deze grootheid niet in Joule is uitgedrukt en niet wordt berekend volgens $m.g.h$ maar volgens $g.h$. Als eigenschap van 'energie' hanteert hij (r.4-5) dat er sprake is van een gemeenschappelijke eenheid, waarin twee verschillende veranderingen ("wat er verandert") kunnen worden "omgerekend". Hierin kunnen we de eerder uitgesproken eigenschap 2 van 'ruilwaarde' herkennen.
O.9-15 is meer gehecht aan de gebruikelijke opvatting van 'energie'. Door de twee energievormen "apart" te willen bekijken hanteert hij ze als feiten-op-zich, in plaats van als termen die in gekozen relaties functioneren. In r.24 gaat hij echter mee met **P**, wellicht onder druk van **WK**'s ingreep (r.18-22). In zijn geschreven antwoord keert hij weer terug naar 'energie' in Joule, maar merkt wel op dat deze 'energie' niet de enig mogelijke ruilwaarde voorstelt, waarbij 'ruilwaarde' dan blijkbaar níet los van het gelijkteken (vgl. O.12) gezien wordt.
De getoonde opgave was niet gericht op 'ruilwaarde' in het algemeen. Ze was gericht op de specifiekere uitdrukkingen 'ruilwaarde van hoogte' en 'ruilwaarde van snelheid-kwadraat' en op het formuleren van een relatie daartussen.
De gelijkheid van 'ruilwaarde van hoogte' aan 'ruilwaarde van snelheid-kwadraat' (een associatie, Afbeelding 25) blijkt te kunnen functioneren als eigenschap die afbakent wat we een 'ruilwaarde van hoogte' mogen noemen. Als we vasthouden aan de eigenschap dat een woord of term naar een collectie ervaringen verwijst, kunnen we ook zeggen dat de gelijkheid van 'ruilwaarde van hoogte' aan 'ruilwaarde van snelheid-kwadraat' die ervaringen afbakent waarvan we willen zeggen dat dáár een 'ruilwaarde van hoogte' werd bepaald. Merk op dat we dan genoodzaakt zijn om onder 'ervaring' niet alleen de verrichte proefneming en daarbij opgedane ondervinding te rekenen, maar ook de uitgevoerde berekening naar



Afbeelding 25: Associatie i

aanleiding van die ondervinding.*)

De genoemde associatie, gehanteerd als eigenschap die afbakent wat we 'ruilwaarde van hoogte' noemen, blijkt verschillende berekeningswijzen toe te staan. In een volgende opgave worden soortgelijke vragen gesteld over 'ruilwaarde van temperatuur' (1-3c en d)[3]:

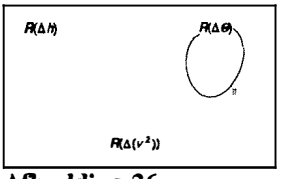
Opgave
- c Bedenk twee of meer geschikte eenheden om ruilwaarden van temperatuurveranderingen in uit te drukken, voor bovengenoemde proef.
- d Heb je een voorkeur voor één van deze eenheden?
  Zo ja, leg uit waarom. (Zijn er varianten van deze proef te bedenken waar één van deze eenheden onbruikbaar wordt?)

Antwoorden
N: c kg.K kg.K . J $kg^{-1}K^{-1}$ = J
d J: als je met verschillende stoffen werkt kan kgK niet gebruikt worden.

O: c warmtecapaciteit in J/K.kg ⇒ eenheden: Kg K of J
d Joule heeft de voorkeur; bij verschillende stoffen wordt Kg K onbruikbaar.

P: c kg.K of kg. K. J/kg.K = J
d Ja, als je met verschillende stoffen werkt (met verschillende warmtecapaciteiten) is de eenheid kg.K onbruikbaar

De hier gehanteerde associatie van twee 'ruilwaarden van temperatuur' (Afbeelding 26) blijkt verscheidene berekeningswijzen voor 'ruilwaarde van temperatuur' toe te staan.
Nadat nog een derde associatie ('ruilwaarde van hoogte' gelijk aan 'ruilwaarde van temperatuur') in de overwegingen is betrokken wordt gevraagd een keuze te maken uit de verschillende opgemerkte mogelijkheden.

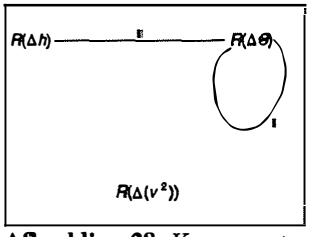


Afbeelding 26: Associatie ii

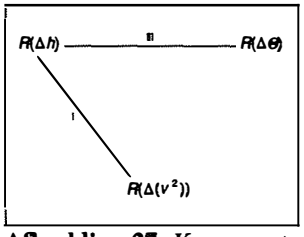
opgave 1-4d, e en f
- d Bij 1-2d noemde je meerdere eenheden waarin de ruilwaarde van een hoogte kan worden uitgedrukt, bij inruilen tegen snelheid-kwadraat. Zijn beide eenheden ook bruikbaar als hoogte uiteindelijk wordt ingeruild tegen temperatuurverhoging?
  Zo ja, laat zien. Zo nee, welke wel/niet?
- e Bij 1-3c noemde je twee eenheden waarin de ruilwaarde van een temperatuurverandering kan worden uitgedrukt, bij inruilen tegen een temperatuurverandering van een ander voorwerp.
  Zijn beide eenheden ook bruikbaar om de ruilwaarde van een temperatuurverhoging uit te drukken, bij inruilen van hoogte tegen temperatuurverhoging?
- f Is er een "ruilwaarde van hoogte" te berekenen onafhankelijk van het tweede verschijnsel dat in die ruil is betrokken? Leg uit.

(* Tot nu toe (hoofdstuk 11 en 12.2) hadden we een dergelijke uitgebreide betekenis van 'ervaring' niet per se nodig. In hoofdstuk 13 zullen we hierop terugkomen.

De beide opgaven d en e vragen elk om voor één uitdrukking beide eerder gehanteerde associaties van die uitdrukking te overwegen. Hiermee hopen we 'ruilwaarde van hoogte' tot knooppunt van twee relaties te laten worden en daarmee tot term in een relatienet (Afbeelding 27). Hetzelfde kan gezegd worden voor 'ruilwaarde van temperatuur' (Afbeelding 28). Protocol 3.5 toont het gesprek over deze opgaven.



Afbeelding 28: Knooppunt R(Δθ)



Afbeelding 27: Knooppunt R(Δh)

Protocol 3.5

Begonnen wordt met 1-4e[3] (volgorde per ongeluk verwisseld).

P: Je hebt eh.. Joule kun je inderdaad wel gebruiken, maar die andere niet, volgens mij

N: Snap je? (lachen) Die andere niet... waarom.

P: Omdat je hier het om moet rekenen naar die.. hoe noemen ze 't?, dat wisselgeld, de energie dus.. eh ja, en dat kan alleen als je weet hoeveel energie d'r nodig is om bijvoorbeeld een kilo koper een graad warmer te maken.

N: ja

P: Dus we hebben de Joule met verschillende..

N: (onverst.)

P: ja

N: met kilogram per Kelvin, ja

(stilte)

O: (mompelt voor zich uit, bladert) Klopt deze eenheid, **P**?

P: Hoe bedoel je? Eh..?

O: Als ik m_{totaal} maal c gedeeld door m_1 maal g doe.. nou ja, die eenheden van m die vallen tegen elkaar weg (..) de soortelijke warmte was J/kg K.. g is in m/s^2 dus dan haal je meter beneden en s^2 omhoog.

P: Ja.. 'k denk 't wel.. Maar, je hebt 't toch helemaal niet over.. Ben je al bij de volgende vraag?

O: Nou, ik weet niet, eh.. ik bedacht even een nieuwe eenheid, in plaats van Joule.. maar dat klopt helemaal niet. Want ik heb nou de eenheid van die verhouding (Δh:$\Delta\theta$) heb ik uitgerekend. (n.t.z.)

(stilte)

N: Waarom kan die kilogram per Kelvin nou niet eh.. (n.t.z.)

P: (n.t.z.) En het kan niet, omdat je dan eh, andere eenheden voor die hoogte, heb je m.g.h.. in Joule, en.. voor die andere..

N: jaja

O: die 's ook in Joule

30 **P**: Ja dat is ook in Joule. Maar dit, omdat die *c*, dat is ehm, wat is dat? Joule per kilogram per Kelvin. Dus dit is kilogram maal Joule.. Dit is allebei Joule, maar de eenheid hiervan is geen Joule.

33

["dit": bij 1-2c: $m_{bal}.g.\Delta h$ en $m_{tot}c.\Delta T$ (eenheid Joule)
"hiervan": bij 1-3c: m_1T_1, m_2T_2 en $m_{tot}T_{tot}$ (eenheid kg K), aangenomen dat
36 **P** in gaat op de vraag gesteld door **N**.]

N: Nee
39 **P**: Dus dat kan je niet dan met elkaar vergelijken of in elkaar omrekenen
(n.t.z.)
(1-4d in stilte)
42 (antwoorden oplezen)
N: De ruilwaarde van hoogte? (begin 1-4f)
P: Gewoon *m.g.h*
45 **N**: Welk tweede verschijnsel wordt bedoeld?
O: Dat-ie omgezet wordt in wrijving en dus in temperatuurverhoging
P: *m* maal *g* maal *h*? ja
48 **O**: Jaja, dus dan heb je dan dus die ruilwaarde mee berekend en dan kun je d'r daarna mee beslissen wat je d'r mee gaat doen
P: Ja.. 't is in ieder geval in de goeie eenheden dan.

De keuze voor ruilwaarde in 'Joule', die tweemaal wordt genoteerd (éénmaal na discussie, de tweede maal in stilte), wordt gebaseerd op de eigenschap 3 van 'ruilwaarde' (r.6 "wisselgeld"), dat hierdoor tezamen optredende veranderingen vergelijkbaar worden (r.29-39). Hierbij worden steeds twee 'ruilwaarden' met elkaar in samenhang gebracht. De ruilwaarden worden niet los van elkaar gezien, niet zonder het "is-teken" (vorige protocol). Maar bovendien wordt nu een eenheid die in één associatie bruikbaar bleek, getoetst op zijn bruikbaarheid in een tweede associatie. Op deze wijze kan dan toch een individuele 'ruilwaarde van hoogte' worden geformuleerd, volgens de opgave "onafhankelijk van het tweede verschijnsel dat in de ruil is betrokken", of, zoals **O** het nu zegt: "dan kun je d'r daarna mee beslissen wat je d'r mee gaat doen" (r.49). Een berekende ruilwaarde vertegenwoordigt nu dus diverse handelings- en redeneer-mogelijkheden.

Hiermee hebben we getoond hoe in onderwijs twee termen elk als 'knooppunt van associaties' ontstonden (vgl. hoofdstuk 6).

Omdat de associatie van $R(\Delta h)$ met $R(\Delta\theta)$ voor beide termen heeft gefunctioneerd als eigenschap die bepaalt wat te doen om een ervaring te verkrijgen die behoort tot de collectie waarop studenten de term $R(\Delta h)$ van toepassing vinden, mogen we deze associatie iii (Afbeelding 27) ook 'een relatie' noemen.

Er is getoond hoe een associatie van twee ruilwaarden de kwaliteit 'relatie' kreeg. Dit resultaat werd bereikt door:
▸ discussie over de toepasselijkheid van diverse uitdrukkingen op voorstelbare proefsituaties (papieren ervaringen),

- *zoeken naar afspraken voor deze uitdrukkingen zo dat deze in verschillende associaties functioneren kunnen: zoeken naar termen als knooppunten van relaties.*

Vergelijken we de hier besproken protocollen met die besproken in 12.1 en 12.2, dan valt op dat studenten hier nog niet komen tot het *uit zichzelf* aaneenrijgen van verschillende associaties. Eerst is er telkens niet meer dan één associatie van twee energievormen aan de orde. Daarna wordt tweemaal telkens één term als knooppunt van twee associaties beoordeeld. De 'driehoekige' structuur, die door **C** spontaan tot stand werd gebracht, functioneert hier nog niet voor studenten. Studenten merken dus niet op dat het nu mogelijk wordt om langs twee wegen tot eenzelfde conclusie te komen, zoals **C** ("dus de druk neemt om twee redenen toe") wel opmerkte. Zo'n controle was ook niet gepland, om redenen die eerder zijn genoemd (6.3.2). Geformuleerd met behulp van de in 12.2 geïntroduceerde leerfasen zien we hier dus nog geen integratiefase (gesloten netwerk) maar al wel een vrije oriëntatiefase (redeneren volgens afgesproken eigenschappen).

Vergelijken we ons derde onderwijsexperiment met het tweede, waar een vraag naar "ervaringen" die "ons aanleiding kunnen geven om de twee (..) verschijnselen 'even veel waard' te noemen" nog ontbrak, dan valt op dat **WK** destijds er niet in slaagde om de betekenis van 'energie' aan de orde te stellen zoals hij wilde (protocol 2.4). Zowel de analogie met geld als de opsplitsing van één constante verhouding in twee algemeen bruikbare 'capaciteiten' moesten door **WK** worden voorgezegd (Pr.2.4, r.110-128); maar uit de reactie van **K** (Pr.2.4, 129-131) blijkt dat de betekenis van het woord "algemeen" in **WK**'s uitleg niet is overgekomen. Ook kon geen afstand genomen worden van 'energievormen' als feiten (Pr.2.4, r.172-173). Bij de opzet van het derde experiment werd verondersteld dat 'even veel waard' tenminste naar een ervaring zou moeten gaan verwijzen, zodat deelnemers de functie (het nut) van de term 'energie' zouden kunnen ondervinden. Daarna zou dan een discussie mogelijk worden over verschillende alternatieven voor het vervullen van die functie, en dus het opheffen van 'energie' als ondoorzichtig en daarom vaststaand feit. Die veronderstelling is bevestigd, aangezien studenten nu konden uitspreken in welke zin ruilwaarden "algemeen" te noemen zijn, namelijk: "dan kun je d'r daarna mee beslissen wat je d'r mee gaat doen" (zie hierboven: **O**.49).
De in 12.2 voorgestelde samenhang tussen '*verwijzen* naar collecties ervaringen' enerzijds en 'redeneren in een netwerk van *associaties*' anderzijds is dus bruikbaar gebleken bij het organiseren van probleemstellend thermodynamica-onderwijs. Hiermee is onderzoeksvraag 1 beantwoord:

De term 'relatie' (omschreven in 12.2) geeft aan hoe het associëren en het verwijzen in samenhang beschreven kunnen worden, op een wijze die geschikt bleek bij het ontwerpen van probleemstellend onderwijs.

Hiermee is een begin gemaakt met het beantwoorden van onderzoeksvraag 2. Daarbij zijn echter de volgende beperkingen te noemen.
Ten eerste betrof het hier een leerproces waarin nieuwe termen ontstaan, dus in Van Hieles termen een overgang naar beschrijvend niveau. Andere leerprocessen zijn nog niet aan de orde geweest.
Ten tweede is het functioneren van de ontstane relatie in een redenering van meer dan een

schakel nog niet getoond, dus wat we in 12.2 het *bereiken* van beschrijvend niveau noemden is nog niet getoond. Op grond van de resultaten getoond in 12.2 verwachten we dat dit bij een uitvoeriger experiment in het VWO, rekening houdend met de 'didactische eigenschap van verhoudingen' (6.3.2) ook mogelijk zal blijken.
Het geformuleerde antwoord op onderzoeksvraag 1 (12.2) is tot nu toe dus bruikbaar gebleken bij een nadere beschrijving van de overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau. Omdat de overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau hier slechts in beperkte mate is onderzocht, is dit antwoord voor thermodynamica-onderwijs slechts beperkt getoetst.

12.4. Contextuitbreiding

In de vorige paragrafen werden veranderingen van taal besproken die te beschrijven waren als een (gedeeltelijke realisatie van) een overgang van Van Hiele-grondniveau naar beschrijvend niveau. Zoals aangekondigd in de inleiding zullen we nu een verandering van taal bezien die geen contextwisseling te noemen is omdat geen 'schijnbare tegenstrijdigheden' voorkomen (6.2) en die evenmin niveauverhoging te noemen is omdat nieuwe termen hier niet ontstaan door discussie van ongeanalyseerd woordgebruik. Het betreft het ontstaan van de term 'energiewaarde' (van een toestand) uitgaande van 'ruilwaarde' van veranderingen (5.3.5).
We zullen deze verandering van taal 'contextuitbreiding' noemen en we zullen de bruikbaarheid nagaan van de term 'relatie' (12.2) bij het beschrijven van deze verandering gelet op zowel het associëren als het verwijzen.
Eerst presenteren we het bedoelde gebeuren tegen de achtergrond van de ontworpen opgavenserie en van de verwachtingen die we daar vooraf van hadden. Dan volgt een interpretatie in termen van 'relaties'.

Geplande versus gerealiseerde 'contextuitbreiding'
Tijdens de verandering van taal die we hier bespreken blijven 'energievormen' nog bruikbaar, dus 'toestanden' worden steeds gelet op een enkele variabele onderscheiden. 'Toestand' staat dan dus voor een hoogte van een voorwerp, of een snelheid, of een temperatuur. Anders gezegd: elke energievorm krijgt voorlopig zijn eigen ééndimensionale toestandenruimte.
Opgave 2-5 luidde als volgt:

a Kunnen we de gemeten ruilwaarden van hoogte*veranderingen* gebruiken om energiewaarden toe te schrijven aan *hoogten* van een bepaalde steen, als we een bepaalde hoogte als nulpunt van hoogte kiezen?
Zo ja, leg uit hoe je dat doet.
Zo nee, waarom lukt het niet?

b Kunnen we de gemeten ruilwaarden van plaats*veranderingen* van een bepaalde steen over een bepaalde tafel gebruiken om energiewaarden toe te schrijven aan *plaatsen* van die steen op die tafel, als we een bepaalde plaats als nulpunt (oorsprong) kiezen?
Zo ja, leg uit hoe je dat doet.
Zo nee, waarom lukt het niet?

c Zou je zeggen dat de "wrijvingsenergie" of "plaatsenergie" (op een tafel) zich

> *als een voorraad* gedraagt? Zou je zeggen dat de "hoogte-energie" zich als een voorraad gedraagt? Leg uit.*)

Deze opgave was voorbereid door opgaven waar geredeneerd werd naar aanleiding van beschreven proeven, waarbij telkens een draaiend vliegwiel gebruikt werd als meetinstrument (geijkt bij 1-7[3]) om de 'ruilwaarde' te bepalen van plaatsveranderingen van een steen bij schuiven over een ruwe tafel (2-2 en 2-3)[3] en van hoogteveranderingen van een steen van 10 kg (2-1 en 2-4)[3].+) Deze veranderingen waren geordend in drietallen aangeboden zó, dat twee veranderingen (A → B en B → C) na elkaar uitgevoerd qua begin- en eindtoestand overeenkomen met de derde (A → C).
Met behulp van de term 'ruilwaarde' zijn er naar verwachting relaties te formuleren tussen de drie termen A, B en C ('toestanden'), immers A en B zijn te relateren door de ruilwaarde R_{AB}. De aangeboden ordening in 'twee wegen' kan vanuit het gezichtspunt 'ruilwaarde' (van een verandering) willekeurig lijken.#) Maar voert men de drie bepalingen uit, dan blijken de drie ruilwaarden van hoogteveranderingen op een bijzondere wijze te kloppen, namelijk: $R_{AB} = R_{AC} + R_{CB}$. Zoals eerder betoogd (12.1) verwachten we dat juist dit 'kloppen' het mogelijk maakt 'energiewaarde' betekenis te geven, doordat de mogelijkheid ontstaat drie termen E_A, E_B en E_C in een kloppend netwerk van relaties op te nemen.
Hoewel in 12.3 slechts voor één van de drie betrokken associaties (genoemd iii) het ontstaan van de kwaliteit 'relatie' kon worden aangewezen zullen we aannemen dat de andere betrokken associaties (i en ii) eveneens in deze kwaliteit gebruikt kunnen worden door studenten. Met andere woorden we nemen aan dat de kwaliteit van 'knooppunt' die voor twee ruilwaardesoorten (energievormen) expliciet werd gerealiseerd, ook beschikbaar zal komen voor andere ruilwaardesoorten. Volgens die veronderstelling mogen we spreken van een netwerk van relaties, dat echter nog niet als 'kloppend' noch als 'gesloten' te beschrijven is (geen integratiefase, zie 12.3).
Omdat de ruilwaarden al een netwerk van relaties vormen spreken we van een *uitbreiding*, in termen van Kaper en Ten Voorde[37] een 'contextuitbreiding' want het is de bedoeling dat de nieuwe term 'energiewaarde' betekenis krijgt door te redeneren met een eerdere term 'ruilwaarde' die al deel uitmaakt van een netwerk van relaties. Deze geplande stap betekent de afsluiting van de opzet, de in het VWO aangeleerde term 'energie' te gaan baseren op de (bij 1-1h[3]) geanalyseerde term 'ruilwaarde', waarmee de 'omkering van de vraagstelling' (zie 5.4.2) zou zijn voltooid.
Het verwachte antwoord op 2-5a[3] was tevoren als volgt genoteerd:

> "'hoogte' meten we steeds ten opzichte van een gekozen nulpunt. Als we de ruilwaar-

---

(* Het gesprek over opgave 2-5c[3] is al besproken in 11.2.

(+ Voor zover redeneren mogelijk was werd er niet alleen gemeten maar ook geredeneerd, voorspeld. Het ging dus deels om gedachtenexperimenten (2-1, 2-3, 2-4) deels om een experiment met beschreven resultaat (2-2).

(# Immers: 'ruilwaarde' richt de aandacht niet zozeer op veranderingen in *dezelfde* variabele die na elkaar plaatsvinden, maar eerder op veranderingen in *verschillende* variabelen die simultaan plaatsvinden. De term 'ruilwaarde' maakt dan ook geen onderscheid tussen verplaatsing over een tafel tegen een wrijvingskracht in, of verplaatsing in verticale richting in een zwaartekrachtveld. Aan beide veranderingen kan men ruilwaarden toeschrijven, mits in het woord 'verandering' het procesverloop (bijvoorbeeld de genomen route over de tafel) inbegrepen is.

de van een verandering die begint op hoogte h en eindigt in het gekozen nulpunt als 'energiewaarde' toekennen aan de hoogte h, dan kunnen we op die manier aan iedere gewenste hoogte h een bepaalde 'energiewaarde' toekennen, aangezien een hoogteverandering een bepaalde ruilwaarde heeft, onafhankelijk van de gevolgde weg.
Met de 'energiewaarde' van een hoogte bedoelen we dan de 'ruilwaarde' van een verandering waarbij die hoogte geheel wordt ingeruild, dat wil zeggen: waarbij die hoogte afneemt tot z'n gekozen nulpunt."

Dit antwoord leek me plausibel, gezien de voorafgaande opgaven. Daarbij had dit antwoord de prettige eigenschap (voor de ontwerper) dat het ook ná het opmerken van een niet-constante warmtecapaciteit nog bruikbaar zou blijven, zodat het zoeken naar E als functie van T zijn zin zou kunnen ontlenen aan het hanteren van deze door mij verwachte afspraak (3-2 en 3-3)[3].
Het gesprek naar aanleiding van opgaven 2-5a[3] en b toont echter, dat in geval van een constante capaciteit een ander antwoord mogelijk is.

protocol 3.7

Ten eerste zien we in protocol 3.7, dat het **WK** nog steeds grote moeite kost om de geplande omkering van de vraagstelling (5.4.2, vgl. WK.61) te realiseren. Hoewel 'ruilwaarde' inmiddels naar ervaringen verwijst (5.4.2) en volgens afgesproken eigenschappen gebruikt kan worden (O.60, P.73-75), blijft het gegeven dat studenten al 'energiewaarden' kennen een rol spelen (r.49-62,112,116). Ook **WK** laat zich meeslepen in dit woordgebruik waar energiewaarden al vanzelfsprekend bestaan (WK.117,133) want hij spreekt van 'energieverschillen' waar hij volgens zijn plan van 'ruilwaarden van gebeurtenissen' had moeten spreken. Het kost grote moeite om achteraf aan te geven in welk opzicht de term 'energiewaarde' nog een nadere rechtvaardiging behoeft (r.42, 46, 61, 79, 95, 97, 105, 125) en het lukt daardoor nauwelijks om studenten te interesseren voor zo'n rechtvaardiging (r.127). Een discussie zoals die hier gepland was, zou dus beter in het VWO plaats kunnen vinden voorafgaand aan de introductie van energiewaarden.

Als we de naïef realistische opvatting van 'energievormen' (5.3.2) willen voorkomen, is het gewenst om al in het VWO 'ruilwaarde van een gebeurtenis' te ontwikkelen als basis voor 'energiewaarden'.

Ook in **P**'s uiteindelijke antwoord (P.134-146) is het niet duidelijk of nu 'energiewaarde' op gemeten 'ruilwaarden' wordt gebaseerd, of andersom: dat de mogelijkheid van ruilwaarden wordt afgeleid uit bekende energiewaarden. Toch is er wel een resultaat bereikt, want de woorden 'ruilwaarde' en 'energiewaarde' die eerst ruwweg als synoniemen waren geïntroduceerd (§1)[3], zijn nu qua eigenschappen onderscheiden doordat voor 'energiewaarde' de keuze van een nultoestand van energie nodig is (P.52-53). Bovendien wordt beredeneerd dat verschillende hoogten "verschillende energiewaarden" toegekend krijgen (P.138). Deze "eenduidige" (vgl. P.145) relatie tussen hoogte en energiewaarde wordt beredeneerd met een beroep op evenredigheid, en daarmee wordt ook het verschil tussen een hoogteverandering en een plaatsverandering bij schuiven over een tafel formuleerbaar (P.141-146).

Een tweede verschil tussen **P**'s antwoord en het door mij verwachte antwoord is dus, dat in het verwachte antwoord "evenredigheid" geen rol speelde.
Er is in de tot nu toe ontwikkelde samenhang echter geen reden om het door mij verwachte antwoord te prefereren boven een beroep op "evenredigheid" (Klaassen[38] "seeing the point", p.250). Om probleemstellend onderwijs te realiseren moest **WK** dit antwoord dus uiteindelijk wel accepteren (WK.156).

Samenhang en verwijzen bij contextuitbreiding
Hierboven was herhaaldelijk sprake van de richting van een redenering. **WK** hoopte dat 'energiewaarden' zouden worden "gebaseerd op" 'ruilwaarden' (r.72), maar zijn studenten redeneerden "andersom" (r.61). Als argument voor de gewenste volgorde werd genoemd dat we voor 'energie' tot nu toe geen andere ervaringsbasis kennen dan het waarnemen van *veranderingen* en dus van gebeurtenissen (5.3.5 en 6.3.2).
Als we redeneren nu beschrijven met associaties en relaties (12.1), kunnen we daarmee dan ook de didactische intuïtie dat van twee termen er één "gebaseerd" kan worden op de andere strenger formuleren?

Misschien is deze vraag te beantwoorden door aan 'associaties' een richting toe te schrijven. Maar is dat verstandig? We merkten eerder op dat relaties tussen termen tevens functioneren als eigenschappen die voor die termen waren afgesproken. Zo kunnen we 'zuurstof' onder andere herkennen aan de eigenschap dat het met waterstof kan reageren, en deze eigenschap kunnen we opnemen in de afspraak betreffende het gebruik van de term 'zuurstof'. Maar even goed kan ook 'waterstof' worden herkend aan de eigenschap dat het met zuurstof reageert. Dit suggereert dat het wellicht niet verstandig is om aan zulke 'relaties' een richting toe te kennen.
Letten we op de associaties zoals die tot uiting komen in het aan elkaar schakelen van symbolen in een (al of niet 'kloppende') redenering, dan kunnen we vragen of het zinnig is om de associatie $C_1 : C_2$ te onderscheiden van $C_2 : C_1$, of om de associatie "cilinder koud ... minder druk" te onderscheiden van "minder druk... cilinder koud" (12.1). In dat laatste geval is wel een verschil in formulering te verwachten, bij omkering van de volgorde der schakels:

- "cilinder koud ..(daardoor).. minder druk" (12.1, stilzwijgend: geen andere veranderingen)
- de lagere druk komt misschien door afkoelen

Ondanks de verschillende formulering zouden we in zulke gevallen misschien liever spreken van een omgekeerd gebruik van *dezelfde* associatie.

De gestelde vraag betrof het "baseren" van een term ('energiewaarde'), door die term te laten ontstaan in relatie met een term waarvoor eerder een verwijzende betekenis ontstond ('ruilwaarde'). Het is denkbaar dat 'energiewaarde' op soortgelijke wijze gegrond zou worden als eerder voor 'ruilwaarde' gebeurde, namelijk door studenten te vragen een ervaring te ontwerpen die de zinnigheid van deze term met zijn eigenschappen bevestigt. Gepland was echter dat de term energiewaarde "gebaseerd" zou worden op het gebruik van ruilwaarden.

Het klinkt aannemelijk dat een nieuwe term "gebaseerd" kan worden door 'm in *relatie* te brengen met een term die al naar ervaringen verwijst (die al "gebaseerd" is). Is dit gebruik van 'term' en 'relatie' te verantwoorden, gelet op de eerder genoemde eigenschap dat termen verwijzen naar collecties ervaringen afgebakend door afgesproken eigenschappen en dat 'relaties' tot deze afgesproken eigenschappen behoren?
In protocol 3.7 wordt 'energiewaarde' van 'ruilwaarde' onderscheiden, waarbij dan 'energiewaarde' de bijzondere eigenschap krijgt dat er een nulpuntskeuze voor nodig is. 'Energiewaarde' is dus de nieuwe term (althans voor **P** die deze eigenschap uitspreekt) en 'ruilwaarde' is -nu de synonymie is opgeheven- de term die eerder (protocol 3.1, 5.4.2) gebaseerd werd, dat wil zeggen: die daar naar ervaringen ging verwijzen.

Wat we hier een 'relatie' zouden willen noemen betreft een verbijzondering, namelijk: met *energiewaarde* bedoelen we een bijzondere *ruilwaarde* met de extra eigenschap (vandaar: verbijzondering) dat ze betrekking heeft op een verandering die eindigt in het gekozen nulpunt van de energievariabele (bijv. nulpunt van hoogte).
Als nu *ruilwaarde* naar een collectie ervaringen verwijst, afgebakend door de afgesproken eigenschappen voor deze term, dan kunnen we ons het ontstaan van een collectie ervaringen, te vertegenwoordigen door 'energiewaarde' als volgt voorstellen: de collectie vertegenwoordigd in 'ruilwaarde' wordt geschift op ervaringen met bepalingen gedaan ten opzichte van éénzelfde punt (voortaan te noemen: nulpunt). Een deel van deze collectie voldoet aan de extra eigenschap, een deel voldoet niet. De ervaringen die voldoen vormen een kleinere (minder omvattende) collectie waarnaar met 'energiewaarde' kan worden verwezen. Met behulp van 'collectie ervaringen' als datgene waarnaar een term verwijst valt dus de intuïtie te beredeneren dat men 'energiewaarde' kan baseren op 'ruilwaarde', zonder dat er op dat moment nieuwe ervaringen nodig zijn.*)
Anderzijds brengt deze redenering ook een mogelijke voorwaarde aan het licht voor het slagen van deze stap:

> *De collectie ervaringen, vertegenwoordigd in 'ruilwaarde' moet voldoende uitgebreid zijn.*

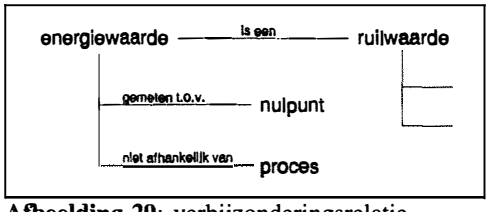
In het bijzonder moet ze ervaringen omvatten die de nieuwe af te spreken eigenschap vertonen. Ze moet dus ervaringen omvatten met verschillende (hoogte)veranderingen die in eenzelfde punt (te kiezen als nulpunt) eindigden. Anders kan men niet door "schiften" tot een collectie ervaringen voor de nieuwe term 'energiewaarde' komen: er zou dan toch eerst nieuwe ervaring moeten worden opgedaan.
Daarbij stelt *probleemstellend onderwijs* als tweede eis dat de collectie ervaringen waarop een beroep gedaan wordt (hier: die waarnaar 'ruilwaarde' verwijst) het mogelijk maakt de *zin* van de nieuwe term 'energiewaarde', met zijn extra eigenschap, te controleren. Als

---

(* Het "schiften" van de collectie ervaringen in de zin van sorteren van met name genoemde gebeurtenissen is in protocol 3.7 niet aanwijsbaar. We doen hier dus een veronderstelling met het doel een redenering mogelijk te maken: als we veronderstellen dat woorden nog steeds naar collecties ervaringen verwijzen, dan kunnen we beredeneren onder welke voorwaarden het mogelijk zou zijn een woord te "gronden" (te laten verwijzen) door dat woord in samenhang te brengen met een woord (woorden) dat reeds een verwijzende betekenis heeft.

immers de introductie van 'energiewaarde' geen ander resultaat opleverde dan dat de collectie vertegenwoordigd in 'ruilwaarde' in tweeën wordt verdeeld, waarbij het ene deel (vertegenwoordigd in 'energiewaarde') vanaf nu meer aandacht gaat krijgen dan het andere deel, dan is daarmee nog niets nuttigs verricht, tenzij men iedere nadere selectie, ongeacht welke, als toespitsing zou willen toejuichen.

Met deze tweede voorwaarde, te stellen aan de collectie ervaringen vertegenwoordigd in 'ruilwaarde', was rekening gehouden door voorafgaand aan de genoemde opgave (2-5)[3] ervaringen te organiseren waarin het 'kloppen' van drie relaties tussen toestanden (A→B, B→C en A→C) kan worden opgemerkt (2-1 t/m 2-4)[3].
De keuze voor 'energiewaarden' als díe ruilwaarden die betrekking hebben op veranderingen die eindigen in het gekozen nulpunt (zodat $\Delta h=h$), maakt het mogelijk om de 'ruilwaarden' die men **niet** als 'energiewaarden' heeft geclassificeerd, te zien als een verschil van telkens twee energiewaarden, dankzij het opgemerkte patroon, dat twee verschillende wegen tussen dezelfde begin- en eindtoestand een gelijke ruilwaarde vertegenwoordigen: $R_{AC} = R_{AB} + R_{BC}$. Immers, we kunnen dan toestand C als nulpunt kiezen. De 'ruilwaarde' R_{AC} is dan ook 'energiewaarde' van toestand A te noemen en R_{BC} energiewaarde van toestand B. De ruilwaarde R_{AB} die geen energiewaarde te noemen is, is gelijk aan het verschil van deze twee energiewaarden.
Als zin van 'energiewaarden' zien we dus de ordening die deze term brengt in de ruilwaarden die juist **niet** voldoen aan de extra eigenschap $\Delta h=h$.
Ondertussen is nu wel het 'onafhankelijk van de weg' gevonden als tweede extra eigenschap waaraan een ruilwaarde moet voldoen, alvorens 'energiewaarde' te mogen heten.
Om samen te vatten: 'energiewaarde' E_A betreft een ruilwaarde R_{AC} die
1) betrekking heeft op een verandering die eindigt in het gekozen nulpunt C van de variabele en
2) onafhankelijk is van de manier waarop de verandering A → C wordt uitgevoerd. (Deze tweede eigenschap is ook te horen in protocol 3.7, r.140-149.)



Afbeelding 29: verbijzonderingsrelatie

Aangezien de ervaringen waarop we 'energiewaarde' van toepassing vinden ook begrensd worden doordat we met 'energiewaarde' een ruilwaarde bedoelen, kunnen we de associatie van 'energiewaarde' met 'ruilwaarde' ook een eigenschap noemen en is de term 'relatie' dus in zoverre ook van toepassing.
Deze speciale verbijzonderings-relatie (te herkennen aan de woordcombinatie "is een") houdt in dat de eigenschappen die eerder het gebruik van 'ruilwaarde' afbakenden, ook behoren tot de eigenschappen die de collectie ervaringen voor 'energiewaarde' afbakenen.
Redenerend met de genoemde drie eigenschappen van 'energiewaarde' kunnen we beredeneren dat een ruilwaarde van een verandering A → B gelijk is aan het verschil van de energiewaarden E_A en E_B. Vanaf dat moment werkt de relatie van 'ruilwaarde' met 'energiewaarde' in twee richtingen. Immers 'energiewaarde' heeft de eigenschap dat het een 'ruilwaarde' betreft, maar evengoed heeft 'ruilwaarde' nu de eigenschap dat ze te bereke-

nen is als verschil van twee energiewaarden. Zodra 'energiewaarde' als term in associatie met 'ruilwaarde' functioneert, functioneren beide termen dus voor elkaar ter formulering van een eigenschap, zodat we deze associatie ook in dat opzicht een 'relatie' mogen noemen (vgl. 12.2).
Er is nu getoond dat redeneren met 'collecties ervaringen' als datgene waarnaar een term verwijst, het mogelijk maakt te beredeneren onder welke voorwaarden een term 'energiewaarde' gebaseerd kan worden op redeneringen in termen van 'ruilwaarden'.

Er is getoond hoe redeneren met 'collecties ervaringen' als datgene waarnaar een term verwijst, het mogelijk maakt te zeggen hoe een nieuwe term - in probleemstellend onderwijs - kan ontstaan 'in relatie' tot een eerder ontstane term: contextuitbreiding.

In het bijzonder konden we beredeneren naar welke ervaringen de term 'ruilwaarden' zou kunnen verwijzen om een term 'energiewaarde' mogelijk te maken (uitgebreidheid van de collectie).
Van een 'relatie' verwachten we inmiddels dat deze redeneren in twee 'richtingen' mogelijk maakt: van ruilwaarden naar energiewaarden en ook andersom. Opmerkelijk aan protocol 3.7 blijft nu dat deelnemers vooral voor één van beide richtingen in de argumentatie aanspreekbaar blijven, namelijk die waar ruilwaarde een resultaat is van redeneren met energiewaarden. Deze aanspreekbaarheid voor slechts één van beide richtingen is onbevredigend omdat de opzet, een kritische kijk op 'energiewaarden' mogelijk te maken daardoor gedeeltelijk is mislukt.

12.5. Contextwisseling

We spraken eerder van 'contextwisseling' wanneer enkele onderling geassocieerde woorden tezamen van betekenis veranderen. Een verandering van betekenis werd daarbij herkend aan het voorkomen van eenzelfde woord in schijnbaar tegenstrijdige beweringen (6.1 onder d). Hierbij werd gelet op het samen gebruiken van woorden in uitingen, dus op het associëren. We zullen nu een gebeurtenis, die 'contextwisseling' te noemen blijkt volgens de zojuist genoemde eigenschappen, tevens bestuderen gelet op het verwijzen.
We bekijken de eerder besproken stap van een constante energiecapaciteit naar een energiecapaciteit als functie van zijn eigen variabele (5.3.6). Hierbij zou volgens plan het gebruik van de wiskundige termen 'afgeleide' en 'primitieve' zinvol kunnen worden voor studenten, om het toekennen van afzonderlijke energiewaarden per energievorm uit te breiden naar een meer omvattend domein van ervaringen (2.6.1).

12.5.1. Schijnbare tegenstrijdigheid

Het volgende protocol toont een moment tegen het einde van de genoemde stap naar 'afgeleide' en 'primitieve'. Het woord 'primitieve' valt hier eerder (bij 3-6h)[3] dan gepland was (3-8)[3].

Protocol 3.13

O: Ja dus eh.. even kijken.. het verschil tussen twee energiewaarden kan opgevat worden als de eh.. de energie, even zien hoor, ja als de afgeleide van

die functie dus, die je door die twee punten heen tekent.
N: Nog een keer
O: Als je die twee punten hier hebt, dan is de afgeleide is de richtingscoëfficiënt
N: Door welk punt
O: Door twee energiewaarden
N: De richtingscoëfficiënt van de lijn door die twee punten, dat bedoel je
O: Dus 't energieverschil, nee dat is wat we, dat is de limiet ΔT gaat naar nul $mc\Delta T$ is ΔE, dat hebben we opgeschreven.
Dat moet nu eh, onder woorden gebracht worden of zo.
P: c is dus..
c is dus een functie van T
ja, dus... c
O: Wat heeft dat er nou weer mee te maken?
P: Ja, dat, dáár moet je de afgeleide d'r van nemen
WK: niet de afgeleide van c
O: Nee, ΔT
WK: Ehm, of wel
O: Van die functie
P: Denk 't wel. Bedoel, 't is toch $\Delta E/\Delta T$, dat is de afgeleide v..
O: Nee waar 't nu even om gaat
WK: van..?
O: 't Gaat hier toch om ΔE, niet om c
P: van ΔE dan
WK: of van E, ja
P: ja..
O: Hm..
P: Dus c is dan dus.. $1/m$ maal de afgeleide van E naar T
O: E naar T
P: Dus de afgeleide van E naar T is c maal m, dus $E(T)$ is... cmT..?
O: (lacht) 't Komt mij enigszins bekend voor. ..Wat zit je daar nou allemaal mee joh?
P: Jah!
WK: Nee want c is niet constant!
P: Dus c is óók afhankelijk van T!
WK: Dat! ja.. c eh.. als je deze afgeleide neemt krijg je wéér een functie hè!
P: c is ook afhankelijk van T, hoor je dat?
WK: Als je afgeleide neemt van een functie, hoeft geen constante uit te komen. Da's alleen zo als de functie a plus b maal T is.
P: Dus: c 's ook, als c óók afhankelijk is van T
WK: Ja, dan moet je hier dus voor de zekerheid even een (T) tussen haakjes achter schrijven om je daar aan te herinneren
P: Maar dan..
WK: Dan is de primitieve niet dít (wijst: mcT)
P: Nee dan is de..

48 **WK**: Dan moet je eigenlijk eerst die c als functie van T te weten komen voordat je de primitieve kan uitrekenen.

P: Ja, dus de.. primitieve van.. (schrijft)

51

Intussen is er in **P**'s schrift het volgende gebeurd:

P had:	**WK** corrigeerde:	**P** corrigeert:
54 $c = E'(t).1/m$	$c(t) = E'(t).1/m$	
$E'(t) = cm$	$E'(t) = c(t)m$	
$E(t) = cmT$		$E(t) = C(t)m$

57

WK: (leest **P**'s laatste regel en interpreteert de hoofdletter C als "primitieve van c")

60 **P**: Oké

N: Ik weet niet wat er nou oké is maar

Deelnemer **P** komt niet zelf met het woord 'primitieve'. Wel voert hij uit zichzelf een integratie uit (r.32). De regel in zijn schrift

$$E'(t) = cm$$

was aanleiding om te schrijven: $E(t) = cmT$. Het ene symbool $E'(t)$ leidt tot het andere $E(t)$. Omdat we dit samen voorkomen van symbolen herkennen als niet-toevallig, namelijk als schakels in een redenering, mogen we van een associatie spreken. Bij **WK** roept deze associatie het woord 'primitieve' op (r.46) en **P** vindt dat woord ook van toepassing (r.50, 60). We zien dus de woorden 'functie', 'afgeleide' en 'primitieve' in een netwerk van associaties: resultaat van eerder wiskunde-onderwijs.

Bij de integratie werd de warmtecapaciteit *'c'* behandeld als een constante. Dit verbaasde **WK** enigszins, omdat studenten **N**, **O** en **P** al sinds opgave 3-1[3] spreken over het probleem van een veranderlijke warmtecapaciteit. **WK**.36 meent dus niet iets nieuws te berde te brengen. **P** echter reageert alsof er iets heel nieuws is gezegd (r.37,39,42,45) dat hem niet alleen verbaast, maar dat hem ook bijzonder belangrijk toeschijnt. **WK** begrijpt niet wat hij voor bijzonders heeft gezegd (r.38, 40). Nog merkwaardiger wordt de geschiedenis als we zien dat **P** zelf kort tevoren heeft gezegd "c is dus een functie van T" zonder daar verder veel ophef over te maken (r.14).

Als we aannemen dat **P** meent wat hij zegt, dan is deze situatie vergelijkbaar met de situatie die we zagen in 11.3, waar we moesten kiezen uit twee mogelijkheden: of deelnemer **N**'s uitspraken zijn tegenstrijdig, of we verstaan hem niet. Later zagen we nog een derde mogelijkheid: spreken volgens familiegelijkenis. We konden daar echter niet kiezen, omdat er geen voorgeschiedenis en geen vervolg van het gesprek beschikbaar waren die ons in staat zouden stellen een keuze te maken. Voor de hier aangewezen uitspraken van deelnemer **P** zijn echter zowel voorgeschiedenis als vervolg beschikbaar.

Kijken we eerst kort naar het vervolg.

protocol 3.14

In protocol 3.14 is te zien dat deelnemer **P** al tijdens het werken aan opgave 3-7[3] gericht is op het berekenen van $E(T)$, ook vóórdat daar in de opgaven naar gevraagd wordt (r.340-353). Zodra er wel naar gevraagd wordt (3-8)[3], blijkt **P** aan de anderen te kunnen uitleggen wat de bedoeling van de nieuwe opgave is (r.372-396). We hebben dus een aanwijzing dat **P**'s verbaasde uitroepen samenhangen met een leerresultaat, waardoor hij met betrekking tot het thema 'energiewaarde als primitieve' tijdelijk voorligt op zijn groepsgenoten. Van inconsequentheid ten aanzien van het al dan niet constant zijn van *'c'* is niets meer te merken.
Dit maakt het interessant te gaan zoeken naar de voorgeschiedenis van **P**'s schijnbaar tegenstrijdige uitspraken. We zullen nagaan of we kunnen zeggen dat meer dan een enkel woord van betekenis verandert (eigenschap van 'contextwisseling') en we zullen letten op het verwijzen naar ervaringen.

12.5.2. Evenredigheid als afgesproken eigenschap

De overgang van constante naar veranderlijke energiecapaciteit was als volgt ontworpen (vgl. 5.3.6):

1 - Naar aanleiding van een proef waarbij veranderingen van temperatuur en hoeksnelheid géén constante verhouding vertonen wordt verwacht dat de energiecapaciteit van de temperatuur niet-constant wordt genoemd (het gebruikte vliegwiel had eerder bij vergelijkbare snelheden wel een constante kinetische energiecapaciteit vertoond).
2 - Vervolgens wordt gevraagd te "proberen" energiewaarden aan temperaturen (als toestanden) van een voorwerp toe te kennen (3-2a)[3], gebaseerd op de genoemde proeven met verandering van temperatuur en hoeksnelheid.
3 - Van deze toegekende 'energiewaarden' wordt achteraf nagegaan of ze al dan niet afhangen van de manier waarop een toestand (temperatuur) wordt bereikt. Hier wordt dus een beroep gedaan op een eerder uitgesproken eigenschap van 'energiewaarde' (zie 12.4).
4 - Omdat de capaciteit 'niet-constant' is genoemd, wordt verwacht dat men het quotiënt $\Delta E/\Delta\theta$ zal willen aanduiden als 'gemiddelde capaciteit' en dat men deze zal opvatten als eigenschap van het temperatuurtraject $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ (3-5)[3].
5 - Er wordt verwacht dat de vraag naar de mogelijkheid van een "warmtecapaciteit die géén gemiddelde is" (3-6e)[3] kan leiden tot het willen gebruiken van de wiskundige termen limiet en afgeleide (3-6f en h).

Nadat stap 1 volgens verwachting was verlopen, ontstond over het kunnen toekennen van 'energiewaarden' (stap 2) de discussie die is weergegeven in protocol 3.9.

Protocol 3.9

De opgave waarover gesproken wordt, luidt:

3-2 Bij opgave 2-5.a heb je ruilwaarden van hoogteveranderingen gebruikt om energiewaarden toe te schrijven aan hoogten (als toestanden) van een steen.
a Kun je op dezelfde manier ook energiewaarden toeschrijven aan de temperaturen 393.59°C en 611.45°C van het blokje alfa-ijzer? Probeer het.

In protocol 3.9 is te zien dat deze studenten de gestelde vraag ontkennend beantwoorden. Daarbij blijken zij zodanig overtuigd van de onmogelijkheid van het toekennen van energiewaarden in het geval van een niet-constante capaciteit, dat ze de opgave "probeer het" niet direct kunnen uitvoeren (**N**.2, **P**.72, 75, 95, **O**.114, 137).
De opgave ging ervan uit dat het toekennen van energiewaarden wel discutabel zou kunnen zijn, maar dat minstens een poging gedaan zou kunnen worden. Die verwachting was gebaseerd op het verwachte antwoord bij opgave 2-5a[3], waarin 'evenredigheid' geen rol speelde (zie p.274). Op deze opgave was echter een ander antwoord gegeven dan verwacht: deelnemer **P** had daar de mogelijkheid van een unieke energiewaarde per hoogte van een voorwerp beredeneerd met een beroep op evenredigheid. We kunnen dus verwachten dat 'evenredig met variabele' voor hem behoort tot de eigenschappen van 'energiewaarde' en inderdaad blijkt hij deze term niet van toepassing te vinden op een ervaring (papieren proef 3-1)[3] waar deze eigenschap ontbreekt. De anderen kunnen hem hierin goed volgen (r.1-2).
WK had deze consequentie van het eerder gegeven antwoord (2-5a)[3] niet voorzien (p.274) en hij wil maar nauwelijks toegeven dat het "op dezelfde manier" (r.95) als eerder werd afgesproken hier niet lukt. Blijkbaar redeneert hij volgens andere eigenschappen dan in de groep **N-O-P** zijn afgesproken voor 'energiewaarde', want hij geeft aan 'energiewaarde' wél van toepassing te vinden op de ervaring (3-1)[3] waarover nu gesproken wordt (WK.56). Nadat **WK** heeft aangegeven welk gedeelte van het eerder gegeven antwoord (2-5a)[3] hier wellicht wél gebruikt zou kunnen worden (r.62-69, 98), ontstaat er wel een mogelijkheid om de vraag te beantwoorden (r.99-159). De eigenschap dat voor een derde proces A → C de energieverandering de som is van de energieveranderingen van de processen A → B en B → C blijkt hierbij een rol te spelen (zie r.154-159: optellen, "het geheel eens gaan bekijken", "relatieve toestand"). **N**'s subtiele hint "je hebt de délta.. uitgerekend" (N.153) is de aanleiding om deze eigenschap te gaan gebruiken. We zien hier dus een redenering in een relatienet van drie termen (E_A, E_B en E_C), waarbij verwacht wordt dat de relaties tussen deze termen met elkaar 'kloppen' (zie 12.1). De derde van de drie gebruikte relaties (R_{AC}) berust echter nog niet op een ervaring met een proces A → C. Er kan dus terecht getwijfeld worden of de optelling (r.154-159) al dan niet een zinnig resultaat zal geven.
Voor deelnemer **P** is dit niet zeker (P.165). Hij hecht een speciaal belang aan de beperking tot twee gevraagde temperaturen (P.225) waarvan hij er één als nulpunt van energiewaarde wil kiezen (r.210-217). **WK**'s eerdere opmerking dat we niet weten "wat er bij tussenliggende temperaturen allemaal gebeurt" (WK.91-94) is door **P**.99 op een speciale manier opgevat. De beperking tot twee is voor hem veel essentiëler dan **WK** dit bedoelde (r.104-111, 116-125). Achteraf valt nu op te merken dat de opgave had moeten vragen aan *drie* temperaturen (20°, 393.59° en 611.45°C) een energiewaarde toe te schrijven, en daarbij naar keuze één van deze drie als nulpunt te nemen (r.225-233). Deelnemers **N** en **O** zijn in staat de opgave op te vatten zoals hij bedoeld is - niet zoals hij geformuleerd is! - omdat ze het kloppen van het netwerk van drie termen (E_A, E_B en E_C) al verwachten, terwijl een ervaring met de derde van de drie relaties nog ontbreekt.

Zo'n ervaring, nodig om het 'kloppen' van het netwerk van drie termen te controleren, was wel gepland, maar achteraf (stap 3, hierboven). Dat plan was gebaseerd op het verwachte antwoord bij een eerdere opgave (2-5a)[3] waar geen beroep op evenredigheid werd verwacht. Nu gebleken is dat zo'n beroep op evenredigheid mogelijk en redelijk is (12.4), zou in een situatie waar zo'n evenredigheid niet geldt een voorzichtiger aanpak op z'n plaats zijn, waarbij eerst met elk van de drie ruilwaarden R_{AB}, R_{BC} en R_{AC} ervaring wordt opgedaan, alvorens te vragen ervan uit te gaan dat deze ruilwaarden gaan functioneren als kloppende relaties tussen 'energiewaarden'. Het hoeft immers niet vanzelf te spreken dat deze drie relaties nu nog kloppen volgens $R_{AC} = R_{AB} + R_{BC}$.
In protocol 3.10 is de discussie weergegeven naar aanleiding van de opgave waar gevraagd werd de zinnigheid van de voorspelde energiewaarden na te gaan (stap 3, hierboven):

Stel dat de proef wordt uitgevoerd om je voorspelling uit 3-2.d te controleren.
a Zie je een overeenkomst met de proeven die we bespraken bij 2-1 en 2-4 en/of met 2-2 en 2-3?
b Zou je op grond van de uitkomst van de proef kunnen beslissen of "thermische energie" zich hier als toestandsgrootheid gedraagt? Leg uit.
c Vraag je assistent om de uitkomst van deze proef en trek (indien mogelijk) je conclusie.

Bij 3-2.d[3] was een snelheidsverandering van het tot nu toe steeds gebruikte vliegwiel voorspeld, nodig om de derde temperatuurverandering "in één keer" te realiseren. Deze voorspelling was gebaseerd op de door deelnemers **N** en **O** door optelling verkregen energiewaarde bij 611.45°C (protocol 3.9). In het volgende protocol 3.10 is te zien dat deelnemer **P** voorspelt dat de door **N** en **O** gedane voorspelling niet juist zal blijken (r.26-32, 42)

Protocol 3.10

P baseert zijn voorspelling dat 't "niet lukt" (P.32) op de constatering van een niet-constante warmtecapaciteit. Deze vergelijkt hij met de niet-constante energiecapaciteit die eerder werd opgemerkt bij de proeven met verplaatsingen over een ruwe tafel (r.20-23, 63-66, 83-93, 98-110).[*] **O** baseert zijn voorspelling op de gemaakte optelling (O.67) en op de "gemiddelde capaciteit" (O.79, 111-115, 119) die **N** eerder opmerkte in de door **O** gemaakte berekening. De benoeming "gemiddeld" door **N** werd daar opgeroepen door **O**'s opmerking dat de door hem berekende "capaciteit" voor de temperatuurverandering A → C tussen de twee eerder berekende capaciteiten (voor A → B en B → C) in ligt (Pr.3.9, r.170-183). Op deze wijze kon de uitdrukking 'gemiddelde capaciteit' dus eerder worden gebruikt dan volgens de opgavenreeks gepland was (bij 3-5)[3]. Deze 'gemiddelde capaciteit' is echter op zijn beurt ook weer gebaseerd op het kloppende netwerk van drie termen (E_A, E_B, E_C) waarvan **P** de mogelijkheid met recht kan betwijfelen, omdat er nog geen ervaring is opgedaan die bevestigt dat toestand C een unieke energiewaarde toegekend kan

[*] Bij verplaatsing over een tafel past de energiecapaciteit F die behoort bij de verplaatsing Δp zich qua teken aan bij het teken van Δp. Deze veranderlijkheid van F was door **P** opgemerkt als relevant in verband met het optreden van verschillende ruilwaarden voor eenzelfde verandering van plaats, afhankelijk van de gevolgde route over de tafel.

krijgen.
WK vraagt tenslotte (r.121, 127, 133) opnieuw (vgl. WK.43) of ze de voorgestelde proef zien als geschikt om hun meningsverschil op te lossen. Na een bevestigend antwoord (P.129, O.130, N.141) deelt **WK** het resultaat van de proef mee, namelijk dat de door **N** en **O** voorspelde hoeksnelheid van 29,7 (rad/s) inderdaad geschikt is om "die derde temperatuur" (611.45°C) te bereiken voor het blokje alfa-ijzer (WK.168). Zoals eerder gezegd zou het in de nieuwe situatie - na het onverwachte antwoord door **P** op een eerdere opgave (zie 12.4) - eerlijker geweest zijn als deze medegedeelde ervaring beschikbaar was geweest vóórdat om toepassing van de term 'energiewaarde' werd gevraagd, maar **WK** was niet in staat geweest om de opgavenserie zo snel improviserend aan te passen.
Dit verschil tussen **N** en **O** enerzijds en **P** anderzijds waarbij **P** gebruik maakt van 'constante capaciteit' als veronderstelling, **N** en **O** daarentegen van 'gemiddelde capaciteit' blijft hierna nog een rol spelen in hun gesprekken, zoals blijkt uit de protocollen 3.11 en 3.12:

uit protocol 3.11 (opgave 3-5[3], stap 4 hierboven)

	N:	Is dat nou zo dat de gemiddelde capaciteit, dat dat de capaciteit is die je
141		aanneemt, dat je zeg maar constant neemt tussen één punt en het andere punt, en daar mee gaat rekenen naar dat punt toe. Dus bijvoorbeeld 20 graden en driehonderdzoveel graden..?
144	**WK**:	Constant neemt, eh..
	N:	Dat je 'm daarna ineens 'n hele andere warmtecapaciteit neemt. Dat je dat bedoelt met gemiddelde capaciteit, of?
147	**O**:	Nou, als jij een andere energievorm neemt, zoals dat vliegwiel, dan hou je 'n energie over.. en je weet die temperaturen.. Dus je, krijg je er een capaciteit uit, en dat blijkt de gemiddelde capaciteit te zijn, over het hele tra-
150		ject.
	N:	Ja over het hele traject
	O:	Ja
153	**N**:	Dus je neemt 'm eigenlijk over het traject, overal 't zelfde.. of niet?
	WK:	Nou je weet dat-ie verandert
	N:	Je weet dat-ie verandert maar je kàn 'm niet berekenen
156	**O**:	Je kan alleen het gemiddelde (onverst.)

We kunnen vermoeden dat **N** hier meegaat in **P**'s woordgebruik waarbij 'energiewaarde' slechts gebruikt wordt in geval van een - desnoods ten onrechte te hanteren - constante capaciteit. Enige tijd later, in verband met de term 'limiet', horen we:

uit protocol 3.12 (opgave 3-6f[3], stap 5)

171	**N**:	Hee **O**, ΔE bij een bepaalde temperatuur, dat gaat op een andere manier naar nul, als T naar nul gaat, als bij een andere temperatuur.. sneller naar nul of langzamer naar nul.
174		(geen reactie van **O** op dit punt, hij praat met **WK**)
	P:	Nee die blijven altijd in dezelfde.. de temperatuur en de energie zijn toch evenredig?
177	**N**:	zodat c nul wordt

P: je hebt toch, hier, dit geldt toch, die zijn toch evenredig, er zit alleen de richtingscoëfficiënt tussen, en die richtingscoëfficiënt verandert. Daar gaat
180 't juist om. Snap je? Oh, sorry.

Eerder is de warmtecapaciteit 'niet constant' genoemd, en ook: een functie van de temperatuur (protocol 3.9, **N**.44). Nu ziet **N** een mogelijkheid om warmtecapaciteit zo te omschrijven dat het mogelijk wordt om te spreken van een andere warmtecapaciteit bij een andere temperatuur - dus om het eerder uitgesproken vermoeden te realiseren. **P** ziet deze mogelijkheid niet. Hij houdt vast aan 'evenredigheid' als voorwaarde om van 'energie' te kunnen spreken. Hij is echter wel bereid de "richtingscoëfficiënt" van de kromme waarover **N** spreekt veranderlijk te noemen.*) We zien hier dus iets wat doet denken aan de eerder gesignaleerde 'schijnbare tegenstrijdigheid' (12.5.1) in het spreken van **P**, met betrekking tot het al dan niet 'constant' noemen van de warmtecapaciteit. Immers **P** noemt *E* en *T* evenredig, terwijl **N** in onze ogen toch duidelijk een niet-evenredigheid van *E* en *T* heeft afgebeeld, hetgeen **P** lijkt te beamen door de richtingscoëfficiënt veranderlijk te noemen.
Meer uitspraken die in verband met deze tegenstrijdigheid relevant zouden kunnen zijn heb ik niet gevonden. We moeten dus nu tot een interpretatie zien te komen, op basis van het nu gepresenteerde gespreksverloop, dat uiteindelijk leidde tot **P**'s verbaasde uitroep "dus *c* is óók afhankelijk van T!", waarna hij eerder dan de anderen de energiewaarde als primitieve van de warmtecapaciteit bleek te kunnen gebruiken (12.5.1).

12.5.3. Onvrede als drijfveer voor contextwisseling

Misschien kunnen we **P** begrijpen als we in de bekeken onderwijssituatie een probleem opmerken dat ook voor **WK** (en wellicht voor **N** en **O**) een probleem is of zou moeten zijn, en waarvoor nog geen 'nette' oplossing in 't zicht is. Immers dan kunnen we begrijpen dat onnette oplossingen worden uitgeprobeerd. Consequent zijn, of je houden aan afgesproken eigenschappen (11.4), is immers alleen zinvol zolang die afspraken goed functioneren.
Ten eerste kunnen we dan opmerken dat het consequent spreken volgens afgesproken eigenschappen gestoord wordt door **WK**, omdat hij 'evenredigheid' als afgesproken eigenschap eenzijdig voor ongeldig verklaart, door zonder meer te vragen 'energiewaarde' te gebruiken in verband met een ervaring waar deze afgesproken eigenschap ontbreekt. Het was niet zijn bedoeling geweest om op deze manier te storen, maar hij had in het eerder gegeven antwoord, waar **N** de mogelijkheid van 'energiewaarden' beredeneerde met een beroep op evenredigheid, een onvolmaakte verwoording van het door hem gewenste antwoord (zie p.274) gehoord. Vervolgens nam hij aan dat dit gewenste antwoord, weliswaar onvolmaakt geformuleerd, nu toch als afspraak zou kunnen gelden.
Gezien het verdere gespreksverloop kunnen we nu achteraf vaststellen dat **WK** de door **N**, **O** en **P** afgesproken betekenis voor 'energiewaarde' op *sluipende wijze* (5.2.3) inwisselt voor een andere betekenis, die dus vooreerst niet duidelijk wordt uitgesproken. Van deze andere betekenis is voorlopig slechts duidelijk dat **WK** hem van toepassing vindt op een

*) Een kromme, uit de losse hand getrokken door de drie 'energiewaarden', uitgezet tegen de drie temperaturen.

door hem aangewezen ervaring, waar **N**, **O** en **P** tot een niet-constante capaciteit hadden besloten. We kunnen dus **P**'s schijnbaar inconsequente uitspraken allereerst begrijpen door ze in verband te brengen met **WK**'s schijnbaar inconsequente gedrag - eerst **P**'s beroep op evenredigheid te accepteren (12.4) en nu dit zelfde argument niet te accepteren.
Nadat dit probleem van **P** met een ongewenste onderwijssituatie is toegegeven blijft er echter ook nog een fysisch probleem over, dat hij blijkbaar de moeite waard vond om op te lossen. Immers anders kunnen we nog steeds niet begrijpen waarom "dus c is óók afhankelijk van T!" ineens zo'n belangrijke opmerking voor hem werd (12.5.1).
Dit fysisch probleem zullen we reconstrueren door het gespreksverloop (12.5.2) in verband te brengen met het voorafgaande onderwijs. In 12.4 werd genoteerd:

'energiewaarde' E_A betreft een ruilwaarde R_{AC} die
1) betrekking heeft op een verandering die eindigt in het gekozen nulpunt C van de variabele en
2) onafhankelijk is van de manier waarop de verandering A $\rightarrow$ C wordt uitgevoerd.

De twee hier genoemde eigenschappen noemden we 'extra', waarmee we bedoelden dat een energiewaarde de eigenschappen van een ruilwaarde heeft, en bovendien nog de extra eigenschappen 1) en 2).

Gaan we na welke eigenschappen van 'ruilwaarde' zijn ontwikkeld, dan vallen onder andere te noemen:
3) even groot voor twee veranderingen die tezamen optreden zonder andere veranderingen (zie 12.3)
4) evenredig met verandering van de variabele (opgaven 1-5b en d)[3]

Deze vierde eigenschap trok eerder in dit hoofdstuk geen aandacht, maar nu **P** volgens deze eigenschap blijkt te redeneren, kunnen we dit redeneren als resultaat van eerder onderwijs zien, namelijk van de genoemde opgaven (zie ook 5.3.6).
Toen **N**, **O** en **P** de warmtecapaciteit (3-1)[3] 'niet constant' noemden, hanteerden zij daarbij eigenschap (3) van 'ruilwaarde'. De opgave gaf daartoe aanleiding, gevraagd was immers: "Is de warmtecapaciteit van alfa-ijzer constant te noemen?". Was er gevraagd: 'zijn de ruilwaarden van temperatuurverandering en snelheidsverandering gelijk te noemen', dan had men de eigenschap van de constante capaciteit (4) kunnen hanteren om tot de uitspraak te komen dat bij minstens één van beide metingen de ruilwaarden ongelijk te noemen zijn. Men kan dus òf eigenschap (3) van ruilwaarde hanteren, en met behulp daarvan vaststellen dat eigenschap (4) hier niet opgaat, maar evengoed lijkt het mogelijk om vast te houden aan eigenschap (4) om vast te stellen dat eigenschap (3) hier niet geldt. Door de vraagstelling werd één van beide mogelijkheden voorgeselecteerd, waardoor deze keuze uit twee mogelijkheden voor de studenten onbereikbaar bleef.
Wanneer echter 'gelijke ruilwaarde' het centrale gezichtspunt is om twee samen optredende veranderingen te beschrijven, en toekennen van een 'constante capaciteit' een middel is om hier aan te voldoen, dan kan het terecht zijn om eerder dit middel ter discussie te stellen dan het gezichtspunt 'gelijke ruilwaarde'. Dus dan zou de vraagstelling bij 3-1[3] ten aanzien van 'ruilwaarde' niet sluipend zijn, maar in overeenstemming met eerder gekozen

prioriteiten (zie 5.4.2).[*)]
Is eenmaal de 'niet-constante capaciteit' geformuleerd (3-1e)[3] dan zou de vraag gesteld kunnen worden of we nog wel kunnen blijven spreken van 'ruilwaarde'? Na weglaten van eigenschap (4) blijft er immers maar één eigenschap over. Deze eigenschap is dan echter niet meer controleerbaar, tenminste niet zonder daarbij de zojuist verworpen eigenschap te gebruiken.

In de opgavenserie werd gevraagd naar de hanteerbaarheid van 'energiewaarde' (3-2a)[3], niet van 'ruilwaarde', maar hierbij kan de vraag naar de hanteerbaarheid van 'ruilwaarde' inbegrepen worden, immers energiewaarde betreft bijzondere ruilwaarde. Totaal heeft 'energiewaarde' dan dus de vier bovengenoemde eigenschappen.
Van deze vier is op de nieuwe ervaring (3-1)[3] één eigenschap niet van toepassing, naar keuze (3) of (4). Is eenmaal uitgesproken dat we op deze ervaring eigenschap (4) niet van toepassing vinden, dan moet de vraag gesteld worden of (1), (2) en (3) tezamen een zinnige term opleveren. Met betrekking tot 'energiewaarde' zou dus de vraag gesteld moeten worden: willen we 'energiewaarde' hier wel blijven gebruiken, gezien dat één van de afgesproken eigenschappen hier afwezig is? Het niet onderkennen door **WK** van deze vraag, die door **P** toch met nadruk naar voren werd gebracht, is hierboven sluipend genoemd.
Maar nu zouden er (anders dan bij 'ruilwaarde' alléén) redenen kunnen zijn voor een positieve beslissing. Wanneer namelijk de overblijvende drie eigenschappen steeds samengaan bij sommige energievormen[+)], ongeacht de afwezigheid van de vierde eigenschap, dan kan dit een reden zijn deze vierde eigenschap niet langer meer als afgesproken te laten gelden voor het woord 'energiewaarde'.

We merkten al op dat aan het stellen van deze vraag (3-2a)[3] dan wel een ervaring vooraf zou moeten gaan, waar het samengaan van de eigenschappen (1), (2) en (3) te constateren valt (3-3c)[3].
Aangezien zo'n ervaring aan het eind van de discussie in protocol 3.10 mondeling werd aangeduid, kunnen we vermoeden dat de door **WK** sluipend geïntroduceerde betekenis van 'energiewaarde', met eigenschappen (1), (2) en (3) na deze discussie alsnog naar een ervaring is gaan verwijzen. In dat geval zouden we kunnen zeggen: er is een nieuwe *term* 'energiewaarde' ontstaan, welke verwijst naar ervaringen afgebakend door de eigenschappen (1), (2) en (3).

(* Dan echter is de beschrijving 'een term met twee eigenschappen' voor 'ruilwaarde' enigszins onbevredigend, omdat deze beschrijving het prioriteitsverschil tussen beide eigenschappen niet aangeeft, dat ik net aangaf met "centraal gezichtspunt" versus "middel om .. te voldoen".

(+ Van de drie genoemde eigenschappen is er één ("nulpuntskeuze") die men zelf aan een ervaring (experiment!) kan opleggen. Van de overige twee moet men er één kiezen om de andere te kunnen constateren.
"Steeds samengaan van drie eigenschappen" is dus preciezer uit te drukken: steeds als we een gekozen nulpunt hanteren èn uitgaan van 'gelijke ruilwaarde..' dan constateren we de derde genoemde eigenschap. 'Eigenschappen' lijken hier in drie soorten onderscheiden te kunnen worden: die je door eigen handelen aan een ervaring oplegt, die je kiest, en die je constateert.

De eerder door **N** en **O** gegeven redenering (protocol 3.9, r.150-169), waarin de eigenschappen (1), (2) en (3) werden gebruikt om energiewaarden toe te schrijven aan temperaturen van een voorwerp, is dan achteraf (dus toegegeven: te laat) gerechtvaardigd voor die ervaringen waarbij een temperatuurverandering samengaat met een andere verandering, bij voorkeur een verandering waarvoor wél een constante energiecapaciteit bekend is. Zie deelnemer **O** in protocol 3.11: Hij gaat terug naar de meetsituatie met **twee** energievormen, om uit te leggen wat hij met 'gemiddelde capaciteit' bedoelt. Van de twee betrokken energievormen vertoont er maar één het problematische gedrag van een niet-constante capaciteit, zodat de onproblematische energievorm als meetlat kan dienen voor de problematische.

Accepteren we deze interpretatie tot zover, dan kunnen we het volgende probleem vermoeden voor deelnemer **P**:

> Het is nu weliswaar mogelijk om energiewaarden aan temperaturen te koppelen *door te meten*, maar de mogelijkheid om energiewaarden te voorspellen dank zij een formuleerbare relatie met de variabele ('evenredigheid') is er niet meer.

Deze functie, die eerder door eigenschap (4) werd vervuld, is in de nieuwe situatie nog vacant. Vanuit zijn geschiedenis is **P** meer gericht op deze functie van eigenschap (4) dan de anderen (**N** en **O**), juist omdat hij eigenschap (4) eerder nadrukkelijk gebruikte in redeneringen. Het is daarom voor hem niet genoeg energiewaarden te meten, ze moeten ook in een formuleerbare relatie staan tot de eigen variabele en capaciteit, wil er van 'energiewaarde' sprake zijn voor hem.
Enerzijds noemt **P** soms "functie", "met een boogje" als mogelijkheid om tot een nieuwe formuleerbare relatie te komen (Pr.3.9, P.122). Zolang we die "functie" (wisk.) nog niet kennen, blijft hij echter terugvallen op evenredigheid. Deze schijnbare inconsequentheid is nu dus te begrijpen **a)** omdat er nog geen alternatief voor evenredigheid beschikbaar is tot hij zelf met "primitieve" komt, **b)** omdat hij meer dan de anderen de relatie met variabele en capaciteit als voorwaarde om van 'energiewaarden' te spreken (als eigenschap) gehanteerd heeft en daarom wil blijven hanteren.
We begrijpen nu waarom voor **P** het moment waarop hij de warmtecapaciteit als 'niet constant' kan accepteren, samenvalt met het moment waarop 'primitieve' een bruikbare term wordt voor hem, namelijk: omdat 'primitieve' de functie kan overnemen die eerder door 'evenredigheid' werd vervuld.

Omdat beide woorden 'capaciteit' en 'energiewaarde' nu volgens andere eigenschappen worden gebruikt - immers 'capaciteit' hoeft niet meer constant te zijn en 'energiewaarde' niet meer evenredig met een energievariabele - kunnen we zeggen dat beide woorden van betekenis veranderd zijn. Aangezien enkele (twee) onderling geassocieerde woorden tezamen van betekenis veranderden spraken we terecht van 'contextwisseling'. Deze contextwisseling door deelnemer **P** kunnen we begrijpen als antwoord op een fysisch zinvol probleem, waarvoor hij zich gesteld zag.

12.5.4. Evaluatie en nieuw ontwerp

Hierboven constateerden we een contextwisseling, volgens de eerder genoemde eigenschap dat hierbij enkele woorden tezamen van betekenis veranderen. De betekenisveranderingen waren te constateren door te letten op 'schijnbaar tegenstrijdig' woordgebruik, zoals eerder voorgesteld. De betekenisverandering voor 'energiewaarde' was op te merken in schijnbaar tegenstrijdig gebruik van dit woord door de onderwijzende - dit was reden te spreken van een sluipende onderwijsaanpak bij het nastreven van deze contextwisseling.
De betekenisverandering voor 'capaciteit' ging gepaard met schijnbaar tegenstrijdig gebruik van dit woord door een korter lerende. Deze schijnbare tegenstrijdigheid konden we begrijpen als zoeken naar woorden om een voor hem ontstaan probleem op te lossen. Bij korter lerenden spreken we dus niet van 'sluipende aanpak' - het is immers niet hun eerste taak om te onderwijzen! Dit zoeken naar woorden, zoeken naar een nieuwe afspraak, kortom de hier gevonden 'inconsequentheid' bij deelnemer **P** was dus uiteindelijk positief te waarderen.
Ook het eerdere spreken over 'afhankelijke keuzen' (6.3.1) in verband met een wisseling van context is hier van toepassing, we kunnen immers zeggen dat voor deelnemer **P** de keuze voor 'veranderlijke capaciteit' afhankelijk bleek van de keuze voor 'primitieve': pas tezamen leverden deze twee keuzen een hanteerbare nieuwe tussentaal, 'context' of 'netwerk van relaties' op. Veel van wat eerder gezegd is kon dus bevestigd worden.
De onderwijssituatie die we hier bespraken doet ook denken aan Ten Voordes[35] uitspraak over de noodzaak van een crisis (vgl. 1.3): "In onderwijssituaties moeten dus k r i s i s - achtige toestanden in gespreksgroepen voorkomen. In de bekende en vertrouwde taalwereld moet een ongenoegen ontstaan, omdat bepaalde vragen niet beantwoord en bepaalde opgaven niet gemaakt kunnen worden. Aangesproken vanuit een andere taalwereld, kunnen leerlingen deze vragen en opgaven niet verstaan. Hieruit kan een toestand van grote onzekerheid voortkomen" (Ten Voorde[35], p.43). Dit citaat beschrijft treffend de situatie van deelnemer **P** voordat hij 'primitieve' als oplossing voor zijn probleem opmerkte.
Maar voordat we nu concluderen dat crisisachtige situaties dus nodig of tenminste gunstig zijn (onderzoeksvraag 7) moet worden toegegeven dat we de door Klaassen[*)] eerder geformuleerde twijfel niet helemaal hebben kunnen wegnemen, of 'crisissen', 'kloven van onverstaanbaarheid' en 'inconsequentheid' als eigenschap van een verandering van taal al dan niet verenigbaar zijn met probleemstellend onderwijs. Een sluipende onderwijsaanpak was immers duidelijk aanwijsbaar. Er kan terecht gevraagd worden in hoeverre het probleem, dat **P** aanzette tot een verandering van taal nu dankzij, dan wel ondanks de aanpak van de onderwijzende ontstond.

Hoewel we tot nu toe een 'contextwisseling' herkenden gelet op de veranderende associaties (schijnbare inconsequentheid) waarin een woord gebruikt wordt, hebben we in de voorgaande bespreking tevens gelet op de collectie ervaringen waarnaar een woord verwijst. We constateerden **WK**'s sluipende aanpak doordat hij een woord wilde toepassen op een ervaring, hoewel een van de afgesproken eigenschappen ontbrak. Ook merkten we dat een ervaring met de 'derde' temperatuurverandering nog ontbrak, terwijl zo'n ervaring nodig was om de bundel eigenschappen (1), (2) en (3) inhoud te geven (te laten verwij-

[*)] Mondelinge discussies, 1991.

zen).

We kunnen nu de 'contextwisseling' beschrijven als een verandering van taal, waarbij diverse nieuwe termen ontstaan uit termen die eerder in gebruik waren.

De oude termen energiewaarde *'E'*, capaciteit *'C'* en variabele *'v'* waren gerelateerd middels: $E = C.v$, terwijl de nieuwe termen genoemd *'E'* en *'C'* te relateren zijn middels $E(v) = \int C(v).dv$. Van deze tweede relatie kunnen we zeggen dat hij een collectie ervaringen afbakent die de collectie waarop de oude term E van toepassing was mede omvat.[*)] De nieuwe termen onderscheiden zich dus van de oude zowel qua collectie ervaringen waarnaar ze verwijzen als qua onderlinge 'relaties' die als eigenschappen de collecties afbakenen.
Zoals we in 12.4 formuleerden hoe het ontstaan van een nieuwe term uit een eerdere term door toevoegen van extra eigenschappen samengaat met het 'schiften' van de collectie ervaringen waarnaar de eerdere term verwees, zo kunnen we hier zeggen dat het weglaten van de oude eigenschap (4) samengaat met een poging om met hetzelfde woord naar een ruimere collectie ervaringen te gaan verwijzen, hetgeen in eerste instantie bleek uit **WK**'s voortijdige poging het woord 'energiewaarde' van toepassing te verklaren op een ervaring waar dat volgens afspraak niet mocht.
De 'contextwisseling' kenmerkt zich dus door het ontstaan van nieuwe termen uit termen die eerder in gebruik waren. Een bijzonderheid hierbij (die bij 'contextuitbreiding' ontbrak, zie 12.4) is, dat de nieuwe termen worden aangeduid met dezelfde woorden die ook de oude termen aanduidden. Juist hierdoor ontstaan de spraakverwarring en het 'schijnbaar inconsequent' woordgebruik.
Het spreken van *termen* (die naar ervaringen verwijzen) leidt nu tot het volgende alternatief, dat eerder niet formuleerbaar was voor mij: gebruik nieuwe woorden voor nieuwe termen. Als **WK** zichzelf had kunnen verplichten een nieuw woord (in plaats van energiewaarde) te introduceren voor dat wat voldoet aan de eigenschappen (1), (2) en (3) dan had hij de nieuwe term niet *sluipend* of te wel stilzwijgend kunnen introduceren. Daar staat tegenover dat er een overeenkomst in 'functie' is tussen de oude relatie $E = C.v$ en de nieuwe relatie $E(v) = \int C(v).dv$. Het in-gebruik-blijven van de oude woorden om de nieuwe termen aan te duiden gebeurt dus niet zomaar, er is vermoedelijk een reden voor te geven. Het introduceren van nieuwe woorden voor nieuwe termen zou dus ook nadelen kunnen hebben. We moeten daarom als een nieuwe onderzoeksvraag het volgende noteren:

11. Verloopt een wisseling van 'netwerk van relaties' minder crisisachtig en meer in overeenstemming met probleemstellend onderwijs, wanneer de nieuwe termen met nieuwe woorden worden aangeduid?

[*)] De primitieve $E(v)$ in het bijzondere geval dat $C(v)$ gelijk is aan een constante, is immers een produkt: $E(v) = C.v$. Vanuit de nieuwe afspraak kunnen we dus de oude afspraak begrijpen, maar niet andersom.

Voor de wisseling van constante capaciteit naar veranderlijke (ja, welk woord nu te kiezen?) is deze vraag niet meer te beantwoorden, omdat het derde onderwijsexperiment m'n laatste was.
Onderzoeksvraag 9 vraagt echter naar een samenhang tussen Kaper en Ten Voordes 'contextwisseling' en Jolings 'contextwisseling' die we met Gentners analogieredenering in verband brachten. Bij een analogieredenering ontstaan immers ook nieuwe termen (Joling: ion, roostertype) uit eerdere termen (bol, bolstapeling).*) Hierbij worden nieuwe woorden gebruikt voor de nieuwe termen, die op een ander domein van ervaringen worden toegepast dan de termen welke als 'basis' functioneren. Ons onderzoek naar een analogieredenering die leidt tot entropie, zal dus de mogelijkheid bieden op de hierboven gestelde vraag terug te komen.

12.6. Conclusies

Met betrekking tot onderzoeksvraag 1 concludeerden we dat enerzijds het associëren van woorden en anderzijds het met woorden verwijzen naar ervaringen als volgt met elkaar in samenhang te brengen zijn, voor woorden die op weg zijn term in een vaktaal te worden:

> *Nadat de collectie ervaringen waarnaar een woord verwijst is afgebakend door afgesproken eigenschappen, functioneren deze eigenschappen in redeneringen als associaties van dat woord met andere woorden. (12.3)*

Deze conclusie legt dus geen verband tussen het associëren en het verwijzen bij woorden gebruikt met de kwaliteit van grondniveau: dat is immers hier niet onderzocht.
Een woord tezamen met de voor dat woord afgesproken eigenschappen noemden we een *term*. Indien bij het formuleren van eigenschappen woorden gebruikt worden waarvoor al eerder zo'n afspraak was gemaakt, dan gaan beide termen wederzijds voor elkaar ter formulering van een 'eigenschap' functioneren, en dan kunnen we spreken van 'een *relatie*'. Verschillende van zulke relaties kunnen tezamen een *'kloppend'* netwerk van relaties gaan vormen, waarmee bedoeld wordt dat langs meerdere wegen eenzelfde conclusie kan worden bereikt. Heeft men in een redenering aan zulke afgesproken relaties voldoende, dan noemen we het relatienet *'gesloten'*, hetgeen dus inhoudt dat in een redenering geen beroep meer gedaan hoeft te worden op niet-afgesproken associaties (12.2 en 12.4). Dit moment benoemden we met verwijzing naar Van Hiele als 'bereiken van beschrijvend niveau' of 'integratiefase'.

Met betrekking tot onderzoeksvraag 2 kunnen we concluderen dat tot nu toe de volgende te onderscheiden veranderingen in het woordgebruik werden geformuleerd:
a - *het ontstaan van afgesproken eigenschappen voor een woord.* Dit betekent het afbakenen van de collectie ervaringen waarnaar een woord verwijst door het afspreken van eigenschappen, vertrekkend vanuit woorden die verwijzen volgens familiegelijkenis (11.5). Het formuleren van eigenschappen impliceert het tot stand komen van afgesproken woord-

*) Gentner: (kern elektron) uit (zon, aarde), zie 8.2.

associaties, en later van 'relaties' tussen 'termen' (12.2 en 12.3). Deze verandering noemden we: overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau (in overeenstemming met Van Hiele).
b - *het afspreken van een nieuwe term door een eerder afgesproken term te nemen en hieraan eigenschappen toe te voegen.* Dit betekent uitbreiding van een bestaand netwerk van relaties tussen termen. De collectie ervaringen van de oudere term wordt geschift op vóórkomen van extra te kiezen eigenschappen, waarbij een minder omvattende (toegespitstere) collectie ontstaat voor de nieuwe term (12.4). Deze verandering noemden we 'contextuitbreiding'.
c - *het afspreken van een nieuwe term door een eerder afgesproken term te nemen en een eigenschap hiervan als niet meer bruikbaar - in een nieuwe situatie - terzijde te schuiven.* De nieuwe term gaat naar een meer omvattende collectie ervaringen verwijzen, die de collectie waarnaar de oude term verwees mede omvat. In de casestudie die we zagen ontstond de nieuwe term in een relatie tot een tweede nieuwe term. Beide werden aangeduid met woorden die al in gebruik waren, zodat de twee nieuwe termen de twee oude vervangen. Dit was reden te spreken van een 'contextwisseling' (12.5).

Hoewel de conclusies **b)** en **c)** elk rusten op slechts één casestudie kunnen we met betrekking tot onderzoeksvraag 2 nu zeggen:

> *Het antwoord op onderzoeksvraag 1 (zie boven) heeft het mogelijk gemaakt drie verschillende veranderingen in het woordgebruik te beschrijven zowel gelet op relaties tussen termen - en daarmee op het associëren - als op de collecties ervaringen waarnaar een term verwijst.*

Het lijkt er dus op dat onze term 'context' (6.1) een uitbreiding (**b**) heeft ondergaan, dat wil zeggen een eigenschap erbij heeft gekregen, namelijk de eigenschap dat de termen in een 'context' niet alleen onderling geassocieerd zijn, maar ook naar ervaringen verwijzen. Onderzoeksvraag 2 had echter betrekking op probleemstellend onderwijs.

> *Van de drie beschreven veranderingen in het woordgebruik zijn (a) de overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau en (b) de contextuitbreiding tot nu toe beschreven in overeenstemming met probleemstellend onderwijs.*

Ten aanzien van 'contextwisseling' (c) als didactische term zijn er echter nog twijfels ten aanzien van de verenigbaarheid met probleemstellend of uitleidend onderwijs. In het volgende hoofdstuk wordt onder andere de eerder geopperde (10.2.2) relatie tussen contextwisseling en analogieredenering onderzocht. De gestelde vraag ten aanzien van 'contextwisseling' zal daarbij aan de orde komen.

13. Analogieredenering en contextwisseling

In het vorige hoofdstuk is getoond hoe een 'contextwisseling', welke eerder herkend werd aan schijnbaar inconsequente uitspraken door een deelnemer (vergelijk 6.1 en 12.5.1), nu ook herkend kan worden aan een verandering van de collectie ervaringen waarnaar een term verwijst: de nieuwe collectie omvatte de oude, in het besproken geval (12.5.4). Nu het gebruik van de term 'context' op deze wijze is uitgebreid met een extra eigenschap, moet het mogelijk worden om de vermoede relatie tussen 'contextwisseling en 'analogieredenering' op te helderen, welk vermoeden tot uiting kwam in de volgende onderzoeksvragen (10.2.2):

> *9. Beschrijven Jolings[36] 'niveau-invariante contextwisseling' en Kaper en Ten Voordes 'contextwisseling'[37,100] - voor zover optredend in probleemstellend onderwijs - verschillende aspecten van hetzelfde leerproces, of beschrijven ze verschillende leerprocessen?*
>
> *10. Is de discontinuïteit tussen Kaper en Ten Voordes[37] 'contexten' terug te voeren op een discontinuïteit tussen 'ervaringsdomeinen' (zoals genoemd in vraag 8)?*

Deze vragen zullen worden beantwoord in 13.11. Dit zal ook leiden tot een antwoord op de nieuwe vraag die in hoofdstuk 12 naar voren kwam:

> *11. Verloopt een wisseling van 'netwerk van relaties' minder crisisachtig en meer in overeenstemming met probleemstellend onderwijs, wanneer de nieuwe termen met nieuwe woorden worden aangeduid?*

Als voorbereiding op een beantwoording van deze vragen is echter eerst nadere opheldering nodig betreffende het onderscheiden van 'ervaringsdomeinen' (zie vraag 10). Daarom wordt begonnen met de vraag naar 'ervaringsdomeinen', welke voortkwam uit een analyse van de analogieredenering:

> *8. Is de analogieredenering discontinu te noemen, gelet op de mogelijkheid ervaringsdomeinen te onderscheiden, gelet op het ontstaan en functioneren van (sets samenhangende) generalisaties van beperkte geldigheid?*

Bij het onderscheiden van ervaringsdomeinen (13.1) zal het functioneren van een nieuw type termen worden opgemerkt, welke 'overkoepelende termen' worden genoemd. Hun ontstaan (13.2) en functioneren (13.6) wordt beschreven. Dit leidt tot een antwoord op onderzoeksvraag 8 (13.9). Omdat van deze overkoepelende termen gezegd zal worden dat zij naar een 'nieuw object' (Van Hiele-Geldof[31]) verwijzen, zal er ook gelegenheid zijn in te gaan op de volgende onderzoeksvraag (13.9).

6. Wanneer de 'nieuwe objecten' -nadat ze zijn ontstaan- 'object van ordenend handelen' worden, hebben dan de eerdere objecten nog de aandacht?

Vervolgens wordt nagegaan in hoeverre de verkregen beschrijving van een analogieredenering te generaliseren is naar de gebeurtenis die we eerder een 'contextwisseling' noemden. Dit leidt tot antwoorden op de vragen 9 en 10 (13.11), tot een vermoeden over de plaats van wiskunde in een didactische beschrijving van fysicaonderwijs (13.12) en tot conclusies over discontinuïteit en crisis (13.14) waarbij vraag 11 wordt beantwoord.

13.1. Ervaringsdomeinen

Een analogieredenering konden we omschrijven als een gebeuren waarbij een ervaringsdomein, waarvoor al een beschrijvende kwaliteit van het woordgebruik is ontstaan, wordt gebruikt om door 'afbeelden' van termen en relaties te komen tot een toetsbare analyse van een tweede ervaringsdomein, dat duidelijk van het basisdomein verschilt (4.1 en 8.6). Het was hierbij niet direct een probleem om de twee betrokken ervaringsdomeinen te onderscheiden, immers ervaringen met elektriciteit onderscheiden zich duidelijk van ervaringen met stromend water (4.1) en stapels pingpongballen verschillen goed zichtbaar van kristallen (8.6). We spraken van een analogie tussen vallend water, herverdeling van volume en herverdeling van entropie, omdat de relatienetten waarmee we deze ervaringen beschrijven een benoembare structuur-gelijkheid vertonen, terwijl deze ervaringen anderzijds toch verschillen (4.5). Intuïtief leek dit een voldoende reden voor een onderscheid: massa is immers duidelijk iets anders dan volume. Een verschil tussen Jolings[36] en Gentners[79] analyse van wat wij hier een analogieredenering noemen, was aanleiding de vraag te stellen hoe we 'ervaringsdomeinen' onderscheiden (8.6).
Maar we kunnen nu een dringender reden formuleren: wanneer 'massa' steeds in dezelfde (of overeenkomstige) relaties zou voorkomen als 'volume', dan zouden we kunnen kiezen om massa en volume als *termen* niet langer te onderscheiden. Immers voor een gesloten relatienet geldt dat de collectie ervaringen waarnaar een term verwijst is afgebakend door de relaties van die term (12.6). Zo kiest men in de scheikunde om water en waterdamp niet te onderscheiden (men noemt ze beide 'H_2O') omdat ze in dezelfde scheikundige relaties (zoals $H_2O \rightarrow H_2 + \frac{1}{2}O_2$) voorkomen, hoewel beide visueel en qua fysische eigenschappen van elkaar verschillen.[*)] Dus hoeft het ook niet vanzelf te spreken dat we 'massa' van 'volume' zouden moeten onderscheiden, enkel omdat zwaarte en grootte een verschillende indruk op ons maken. In plaats van een relatienet af te beelden naar een relatienet ter beschrijving van een *ander* ervaringsdomein zouden we dan termen vormen die generaliseren over een *meer omvattend* ervaringsdomein.
Het onderscheid dat we in 8.5 maakten tussen een analogieredenering volgens Gentner enerzijds en een gewone empirische generalisatie anderzijds, is dus pas houdbaar als we kunnen zeggen hoe wij de ervaringsdomeinen in een analogieredenering van elkaar onder-

[*)] Zo kiest men in de fysica om tafels en springveren beide te vatten onder 'elastische voorwerpen', een generalisatie die voor leerlingen pas mogelijk is na een leerproces (Clement[114] en Brown[115], geciteerd in 8.5).

scheiden. Want een geformuleerde overeenkomst tussen ervaringen noemden we een 'empirische generalisatie'. Door het formuleren van zo'n generalisatie gaan verschillende ervaringen tot een 'ervaringsdomein' behoren, immers er geldt voor deze ervaringen dan een relatie, die eventueel in een analogieredenering 'afgebeeld' zou kunnen worden naar 'een ander ervaringsdomein'. Als op het oog zeer verschillende ervaringen tot eenzelfde ervaringsdomein te rekenen zijn, zodra een geformuleerde relatie deze ervaringen omvat, wordt de vraag urgent volgens welk criterium we dan (intuïtief) van 'een ander ervaringsdomein' meenden te kunnen spreken.
Het gaat nu echter niet om de hele *collectie ervaringen* waar we 'massa' ('volume') van toepassing vinden, maar het gaat om ervaringen zoals aangeduid in de eerder besproken opgaven (4.5). Het gaat dus om ervaringen waarbij 'massa' wordt 'overgedragen' tussen 'systemen' die in 'hoogte' verschillen, waarbij 'arbeid' wordt verricht op een derde systeem (vliegwiel), en waarbij we letten op het 'rendement'. Het gaat nu dus niet om de collectie ervaringen vertegenwoordigd in een term (zoals in 11.2), maar het gaat om een *ervaringsdomein* waarop we verschillende termen tegelijk van toepassing vinden.

We noemden de relatie $\Delta U_{pot,sys}=gh.\Delta m$ 'analoog' aan $\Delta U_{inw}=-p.\Delta V$ omdat elk van beide relaties deel uitmaakt van een relatienet:

$\Delta U_{pot,sys}=gh.\Delta m$	$\Delta U_{inw}=-p.\Delta V$
gh is 'intensief'	$-p$ is 'intensief'
m is 'extensief'	V is 'extensief'
$\Delta m_1 + \Delta m_2 = 0$	$\Delta V_1 + \Delta V_2 = 0$
$\Delta U_{pot,1} + \Delta U_{pot,2} + \Delta U_{kin,vliegwiel} = 0$	$\Delta U_{inw,1} + \Delta U_{inw,2} + \Delta U_{kin,vliegwiel} = 0$

en omdat deze relatienetten zo zijn, dat we overal in deze relaties gh kunnen vervangen door $-p$, m door V en E_{pot} door E_{inw}. Dit is wat we noemden het 'afbeelden' van termen op andere termen zó dat gelijknamige relaties gelden tussen beelden en originelen.*)
Maar nu zouden we ook kunnen kiezen om m en V niet langer te onderscheiden. We zouden m en V beide kunnen aanduiden als E (extensieve grootheid) en gh en $-p$ beide als I, U_{pot} en U_{inw} beide als U.
Voor deze 'overkoepelende termen' I, E en U gelden dan de volgende relaties:+)

(* Voor "gelijknamige relaties" zie 8.2 en 8.3.
Wie vanuit een wiskundige achtergrond hier liever van '*gelijkvormige* relaties' zou willen spreken mag voorlopig overal 'gelijkvormig' lezen waar 'gelijknamig' staat. In 13.8 wordt nader ingegaan op algebraïsch beschreven gelijkvormigheid tussen fysische relaties.

(+ Hier staat E dus niet voor 'de extensieve grootheid' maar voor: de extensieve grootheid, die bovendien in totaal constant blijft en die de rol van variabele heeft bij het berekenen van de energie van het systeem.
'I' staat voor: de intensieve grootheid, die verschilt voor twee deelsystemen en waarvan het verschil samenhangt met de arbeid op een vierde deelsysteem (zie 8.3). Eerder in dit proefschrift (zie 4.6) spraken we van 'intensieve drijvende kracht' voor I en van 'extensieve coördinaat' voor E.

$$\Delta U = I.\mathrm{d}E$$
I is 'intensief'
E is 'extensief'
$$\Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$$
$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_{\text{vliegwiel}} = 0$$

zodat we kunnen spreken van een 'overkoepelende structuur', of een 'overkoepelend relatienet' (Van Hiele[105], p.52 en Van Hiele[150], p.100). Wanneer we alleen letten op deze relaties en wanneer we ervaringen sorteren op het al dan niet voldoen hieraan, dan moeten we van één ervaringsdomein spreken, waar we eerder geneigd waren van twee domeinen te spreken. Dit éne domein is niet voldoende om van een analogieredenering te kunnen spreken.

Deze beschouwing is tot nu toe in de 'zou'-vorm, omdat tijdens het experimentele onderwijs het niet de bedoeling was dat 'overkoepelende termen' de plaats zouden innemen van druk, hoogte, massa en volume. Immers als we ons tot dit 'overkoepelend relatienet' zouden beperken, dan zou 'entropie' ook niet als *nieuwe* grootheid (die verschilt van massa en volume) in het zicht kunnen komen en dat was juist wel de bedoeling.
Dus kunnen we vragen: wat maakt entropie als nieuwe term mogelijk? De opmerking dat een ervaring met arbeid door temperatuurverschil zichtbaar verschilt van een ervaring met arbeid dankzij een drukverschil voldoet hiertoe niet. Immers ook water en waterdamp verschillen zichtbaar, evenals een tafel en een metalen veer. Zulk zichtbaar verschil verplicht ons niet om ervaringen onder verschillende termen te vatten.
Voor ervaringen met volume-herverdeling tussen gasporties kan worden opgemerkt (8.7.2) dat de energieverandering van een gasportie niet alleen kan worden voorgesteld door $\mathrm{d}U_{\text{inw}} = -p.\mathrm{d}V$, maar ook door $\mathrm{d}U_{\text{inw}} = C_V.\mathrm{d}T + \pi_T.\mathrm{d}V$. Voor deze tweede relatie is echter geen zinvol analogon gevonden voor ervaringen met massa-herverdeling tussen bakken met water. De relatie $\mathrm{d}U_{\text{inw}} = C_V.\mathrm{d}T + \pi_T.\mathrm{d}V$ kan dus als empirische generalisatie gebruikt worden om aan te geven waarin ervaringen met volumeherverdeling onderling overeenkomen, terwijl ze van ervaringen met massaherverdeling verschillen. Door deze niet-analoge relatie toe te voegen aan het relatienet met termen p, V en U_{inw} krijgen we dus een relatienet dat zich qua geldigheidsdomein van het domein der overkoepelende termen (I, E, U) onderscheidt en dat een deeldomein daarvan is.

Op eenzelfde manier kan de opmerking dat voor ervaringen met arbeid door temperatuurverschil de relatie $\Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$ alleen geldt in het geval van een reversibel proces, terwijl voor massa en volume geen analoge voorwaarde bekend is, een reden opleveren om deze *'E'* te onderscheiden van massa en volume, en dus ook van de overkoepelende term *'E'*. We hebben dan een reden voor entropie *'S'* als nieuwe term naast massa en volume. Door de genoemde voorwaarde (reversibel proces) toe te voegen aan de relatie $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$ kunnen we dus beargumenteren dat gesproken kan worden van een derde ervaringsdomein naast de eerder genoemde twee.
En dus kunnen we terecht spreken van een 'analogieredenering' die leidt tot de verwachting van een nieuwe grootheid (entropie) welke te gebruiken is op een domein van ervaringen dat van het basisdomein verschilt, mits 'analogieredenering' inhoudt, dat niet uitsluitend analoge relaties worden verwacht.

De 'ervaringsdomeinen' betrokken in een 'analogieredenering' kunnen we onderscheiden voor zover het afbeelden van een relatienet op een tweede relatienet niet geheel lukt.

De relatienetten betrokken in een 'analogieredenering' moeten dus voldoende uitgebreid zijn of worden om ook niet-gelijknamige relaties te omvatten. Juist daardoor kunnen we spreken van 'twee relatienetten' die elk op een te onderscheiden domein van ervaringen bruikbaar blijken, en dus van een analogieredenering.
We begrijpen nu waarom een meer open onderwijsaanpak (besproken in 8.7.3) nodig was om een analogieredenering te realiseren, als we met 'analogieredenering' bedoelen het afbeelden van termen naar *nieuwe* termen, bruikbaar op een *ander* ervaringsdomein.

13.2. Ontstaan van geplande overkoepelende termen

In de vorige paragraaf werd beredeneerd dat de 'overkoepelende termen', zojuist genoemd *'I'*, *'E'* en *'U'*, niet bedoeld waren om de hierdoor overkoepelde termen - druk, hoogte, massa, volume, potentiële energie, inwendige energie - te vervangen. Toch spelen deze overkoepelende termen wel een rol in het geplande onderwijs.
In de volgende opgave wordt naar overeenkomsten gevraagd tussen de beschrijvingen van arbeid door hoogteverschil tussen bakken met water (11-1)[2] en van arbeid door drukverschil tussen gasporties (11-4)[2]:

11-5 Waarschijnlijk heb je een aantal overeenkomsten opgemerkt tussen je antwoorden bij de opgaven 11-1 en 11-4. We gaan die overeenkomsten nu op een rijtje zetten.
- a In 11-1 speelde de hoogte van de waterspiegel een rol. Welke grootheid uit 11-4 vertoont de meeste overeenkomsten met de hoogte uit 11-1, gelet op de rol die beide spelen in je antwoorden?
- b Maak een lijst van de overeenkomsten. Formuleer ze (ook) in woorden.
- c Zijn de twee overeenkomstige grootheden van dezelfde soort, gelet op de indeling in intensief en extensief?
- d In 11-1 speelde de massa van het water een rol. Welke grootheid uit 11-4 vertoont de meeste overeenkomst met de massa uit 11-1, gelet op de rol die beide spelen in je antwoorden?
- e Maak een lijst van de overeenkomsten.
- f Zijn deze twee overeenkomstige grootheden ook van dezelfde soort, gelet op de indeling in intensief en extensief?

Deze opgave heeft de bedoeling studenten aan te zetten tot het één op één afbeelden van termen (hoogte en massa) die gebruikt waren bij de beschrijving van vallend water, naar termen gebruikt bij de beschrijving van herverdeling van volume. Gevraagd is ook deze afbeelding te motiveren door "overeenkomsten" te noemen. Verwacht werd dat overeenkomsten in relaties zouden worden benoemd.

Van diverse verwachte benoemingen worden er één aangereikt: extensief. Het woord 'extensief' benoemt een optelbaarheid

$$m_{totaal} = m_1 + m_2 \qquad V_{totaal} = V_1 + V_2 \qquad \text{waar '1' en '2' staan voor twee}$$

systemen. Met 'extensief' kan dus een overeenkomst in relaties worden benoemd. Het afbeelden van *m* op *V* zou dan gemotiveerd kunnen worden door een *gelijknamige relatie*. 'Intensief' noemt daarentegen de afwezigheid van een optelbaarheids-relatie over systemen.*)
Protocol 2.7 toont het gesprek naar aanleiding van opgave 11-5.

protocol 2.7

Aan het eind van dit gesprek zijn de volgende "overeenkomsten" geformuleerd tussen "hoogte van de waterspiegel" bij 11-1 en "druk" bij 11-4:
- "ze dienen allebei als coëfficiënt", **M**.11, 200
- "ze bepalen beide (..) 't rendement", **J**.27 **M**.200
- "zijn allebei intensieve grootheden", **M**.206

Ook zijn er overeenkomsten geformuleerd tussen "de massa van het water" bij 11-1 en het "volume" bij 11-4:
- "dienen allebei als variabele", **M**.13, 199
- "zijn allebei extensieve grootheden", **M**.205
- "de totale verandering is nul", "in totaal constant", **J**.179, 191, **WK**.214

Elk van deze uitspraken noemt een overeenkomst in relaties, of noemt een overeenkomstige rol van een term in een relatie.
De woorden 'coëfficiënt' en 'variabele' wijzen (sinds §1[2]) op twee verschillende rollen die een term kan hebben in relatie tot een energiewaarde:

$$\Delta U_{pot} = mg.\Delta h \qquad\qquad \Delta U_{inw} = -p.\Delta V$$

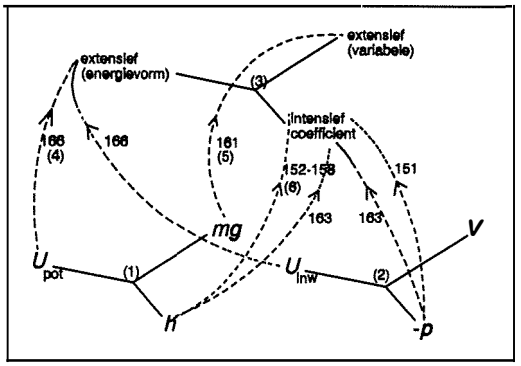
'Variabele' noemt de overeenkomstige rol van *h* en *V*, 'coëfficiënt' noemt de overeenkomstige rol van *mg* en *-p*.+) Tezamen benoemen ze een overeenkomst tussen beide relaties: beide zijn nu immers te schrijven zijn als
ΔU = coëfficiënt.Δvariabele.
Gelet op extensieve en intensieve grootheden, dus gelet op de mogelijkheid van een optelrelatie (r.147-158) wordt een volgende overeenkomst formuleerbaar tussen beide bovengenoemde relaties, namelijk "die extensieve maal een intensieve grootheid" (r.165). Dit leidt

---

(* De woorden 'intensief' en 'extensief' waren twee werkcolleges eerder geïntroduceerd, tijdens de hoorcollege-achtige samenvatting van de paragrafen over gebruikswaarde en omkeerbaarheid. Zie 9-3[2] t/m 9-7[2]. Voor een uitgereikt dictaat van deze hoorcollege-achtige samenvatting, zie bijlage 2d onder ii. Sindsdien waren deze woorden nog niet veel gebruikt, vandaar dat er hier expliciet naar gevraagd wordt.

(+ vanaf experiment 3: 'energiecapaciteit'

tot de generalisatie "coëfficiënt is intensief" (r.163) en die generalisatie "klopt" (r.164) met een regel die ik hen twee werkcolleges eerder in een ander verband gedicteerd had (r.167).[*)] Om na te gaan of het inderdaad "klopt" overtuigt **C** zich kort dat hij zowel "potentiële energie" als "die andere... ΔU" ook extensief kan noemen (r.169).
Met "kloppen" wordt hier dus bedoeld dat de eerder gehoorde regel (3) kan worden bevestigd door uitgaande van (1) of (2) de optelbaarheid van betrokken grootheden (4, 5, 6) na te gaan.



Afbeelding 30: overkoepelende term 'I' als knooppunt van afgesproken associaties.

De uitspraak "coëfficiënt is intensief" (**J**.163) noemt twee eigenschappen waarin *h* overeenkomt met *-p* en motiveert daarmee het afbeelden van *h* op *-p*. Ook kunnen we zeggen dat met het tezamen noemen van beide eigenschappen de overkoepelende term *'I'* is aangeduid als knooppunt van afgesproken associaties. Hieraan wordt nog toegevoegd dat h en *-p* "bepalen beide 't rendement" (**J**.27, **M**.200) waarmee verwezen wordt naar de eerder afgeleide uitdrukkingen $\varepsilon = (h_1 - h_2)/h_1$ en naar $\varepsilon = (p_1 - p_2)/p_1$. Met deze relaties (**J**.63) kan **M** nog niet zonder meer instemmen (r.30-104).

Op eenzelfde manier kunnen we zeggen dat de overeenkomstige eigenschappen "variabele", "extensief" en "totale verandering is nul" het afbeelden van *m* op *V* motiveren, of (dit komt op hetzelfde neer) dat hiermee de overkoepelende term *'E'* is aangeduid als knooppunt van afgesproken associaties.

Wat nog ontbreekt, is een eigen woord of symbool voor de overkoepelende termen. In de opgaven was vermeden om aparte woorden of symbolen in te voeren voor *'I'* en *'E'*. In plaats daarvan werden omschrijvingen gebruikt zoals "de overeenkomstige rol (..) van de waterhoogte uit opgave 11-1 en van de druk uit opgave 11-4" (zie 11-7c)[2]. Dit was gedaan om te voorkomen dat de overkoepelende termen teveel nadruk zouden krijgen (13.1).
Na afloop meent **M**.218 dat 'in totaal constant' hetzelfde is als 'extensief'. In de thermodynamica is 'extensief' een voorwaarde om van 'totaal' te kunnen spreken. Daarmee is nog niet gezegd dat de verandering van dat totaal nul is. Wanneer we echter zien dat steeds als een grootheid 'extensief' is, hij ook 'in totaal constant is' (zoals deelnemers nu in twee gevallen hebben gezien) dan kan blijkbaar behoefte ontstaan om een woord in te voeren voor de combinatie van beide eigenschappen, zoals **M** hier doet. Zijn gebruik van 'extensief' gaat dus in de richting van de term *'E'* die alle drie de boven genoemde

[*)] r.167: "een intensieve grootheid maal een extensieve grootheid is een extensieve grootheid", vgl. opgaven 9-4[2] en 9-5[2] en zie voetnoot * op blz. 299.

eigenschappen heeft. Het was dus wellicht mogelijk geweest om wél woorden aan te reiken voor de overkoepelende termen *I* en *E*.

13.3. Overkoepeld relatie- of associatienet

Bij onze conclusie dat de overkoepelende termen ontstaan zijn als knooppunt van afgesproken associaties kan de vraag gesteld worden of de genoemde associaties de kwaliteit 'relatie' hebben bereikt. Eenzelfde vraag kan gesteld worden voor de beide overkoepelde associatienetten. We zullen hier nu op in gaan.

Hiertoe is eerst nog een nadere opheldering nodig over ons gebruik van 'relatie'. Tot nu toe werd gezegd dat de *relaties* waarin een term voorkomt, tevens functioneren als *eigenschappen* die de collectie ervaringen afbakenen waarop we die term van toepassing vinden (12.2). Denken we hierbij aan de 'relatie'

$$\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$$

dan geldt voor de term *'h'* echter een andere eigenschap (de verandering is evenredig met de verandering van U_{pot}) dan voor *'mg'* (is evenredigheidsfactor). Elk van de drie termen U_{pot}, *mg* en *h* heeft een eigen plaats in de geformuleerde relatie, de drie termen zijn immers niet verwisselbaar. Wanneer we $\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$ een 'relatie' kunnen noemen dan staat deze relatie dus voor drie verschillende eigenschappen van drie te onderscheiden termen.

> Een geformuleerde relatie functioneert voor elk van de betrokken termen als een eigenschap, *door namelijk de specifieke plaats van die term in die relatie aan te geven.* (vergelijk 12.2)

Wanneer we een eigenschap van deze kwaliteit in woorden formuleren, door bijvoorbeeld te zeggen 'de hoogte is *variabele* in de berekening van potentiële energie' dan benoemen we daarmee de *plaats* van een term in een relatie.
Van de genoemde eigenschappen die de afbeelding ($m \rightarrow V$, $h \rightarrow -p$) motiveren en die de overkoepelende termen (E, I) vormen, kunnen we nu zeggen: deze eigenschappen benoemen een relatie of zij benoemen een plaats in een relatie. Hierbij wordt over twee relatienetten gegeneraliseerd. Relaties uit beide netten krijgen een gelijke naam ('extensief', 'in totaal constant', 'bepaalt het rendement') of *plaatsen* in relaties krijgen een gelijke naam ('variabele', 'coëfficiënt'). Deze gelijke namen benoemen wat men in de wiskunde de 'gelijke vorm' van op elkaar af te beelden relaties zou noemen en hun overeenkomstige fysische interpretatie.

In bovenstaande beschouwing over de term 'relatie' werd ervan uitgegaan dat we bijvoorbeeld $\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$ en $\varepsilon = (h_1 - h_2)/h_1$ relaties mogen noemen. Om na te gaan of dat inderdaad mag, moeten we volgens afspraak nagaan of de associatie $\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$ twee of meer termen verbindt, en of deze associatie voor elk van de betrokken termen als

eigenschap heeft gefunctioneerd die de collectie ervaringen afbakent waarnaar die term verwijst (12.2).
Welnu, dit is vrijwel zeker niet het geval voor de studenten die met elkaar spreken in protocol 2.7. De uitdrukking 'potentiële energie' is ter discussie geweest en de associatie $\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$ heeft daarbij als eigenschap gefunctioneerd. De woorden massa, valversnelling en hoogte zijn echter in deze werkcolleges geen onderwerp van discussie geweest. De kwaliteit van een afgesproken term mag dus niet worden verwacht voor deze uitdrukkingen. En dus mag $\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$ geen relatie heten.
Voor het woord 'hoogte' bijvoorbeeld is het wellicht vanzelfsprekend gebleven dat hoogte gemeten wordt met een meetlat. De associatie $\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$ heeft dus niet gefunctioneerd bij het expliciteren van wat we kunnen bedoelen met 'hoogte'. Een stadium waarin $\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$ wel relatie mag heten is echter goed voorstelbaar, als volgt. Wanneer we in bergachtig landschap een hoogteverschil willen constateren dan is één van methoden die we kunnen gebruiken: zet op beide plaatsen een bak met water neer, verbind beide met een flexibele slang gevuld met water en noteer de stroomrichting. Deze werkwijze is te motiveren door te wijzen op de associatie $\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$, maar dan wordt deze associatie 'omgekeerd' gebruikt (vgl. 12.4), namelijk om af te spreken wat we - onder omstandigheden waar een meetlat niet toepasbaar is - bedoelen met 'hoogteverschil', ervan uitgaande dat we potentiële energie al begrijpen.
Uit de geschiedenis van de thermodynamica is een dergelijke omkering bekend: eerst werden gemeten temperaturen θ volgens Celsius, Fahrenheit gebruikt om te verifiëren dat Carnots voorspelling [die we tegenwoordig schrijven als: $\varepsilon = (f(\theta_1) - f(\theta_2))/f(\theta_1)$] zinvol is, daarna werd de maximale efficiëntie als meetbare grootheid gebruikt om een temperatuurschaal af te spreken onafhankelijk van de keuze van een bijzondere stof.*)
De afspraak dat een 'relatie' voor elk van de betrokken termen (ε, T) ter afbakening heeft gefunctioneerd, geeft dus inderdaad een gewenste kwaliteit - te noemen: wendbaarheid - aan, maar voor de hier te bespreken associaties is deze kwaliteit zeldzaam. Wel kunnen we zeggen dat voor verschillende van de in deze associaties betrokken uitdrukkingen de kwaliteit van *term* werd bereikt. Hieronder volgt een overzicht, met verwijzing naar eerder besproken protocoldelen (Tabel X).

In deze tabel+) is te zien dat de meeste van de genoemde associaties ten hoogste voor één van de daarin voorkomende termen als eigenschap hebben gefunctioneerd. Alleen van de associaties $\Delta U_{pot} = -\Delta U_{kin}$ en $\Delta U_{pot} = -\Delta U_{warmte}$ kunnen we zeggen dat zij elk voor beide betrokken termen als eigenschap functioneren, dus als relatie. Van $C_v = (\partial U_{warmte}/\partial T)_V$ kan vermoed worden dat deze associatie voor twee van de betrokken symbolen (C_v en de energievorm U_{warmte}) als eigenschap functioneert.

(* De nieuwe afspraak houdt in dat in plaats van θ gekozen wordt om voortaan $f(\theta)$ 'temperatuur' te noemen, doorgaans aangeduid met de letter T. Voor geïnteresseerden: zie protocol 0.1, r.371-464.

(+ Het onderscheid tussen procesgrootheid en toestandsgrootheid is niet begrepen tijdens dit tweede experiment (5.3.2). U_{inw} is dus een som van twee of meer energievormen en heeft geen speciale prioriteit boven deze energievormen: de reden om energievormen per systeem te sommeren is immers niet begrepen. (zie deelnemer **K** in Pr. 2.6 als uitzondering hierop).

Tabel X: termen voor een analogieredenering naar entropie

woord / symbool	term?	associaties	"heeft gefunctioneerd als eigenschap bij het afbakenen van..." het woord/symbool in kolom 1. (zie 12.2)
U_{pot}	kan	$\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$ $\Delta U_{pot} = -\Delta U_{kin}$ $\Delta U_{pot} = -\Delta U_{warmte}$	ja: Pr.2.3, 27 (**K**), zie 5.3.3 ja: Pr.2.1, 26 , zie 5.3.3 ja: Pr.2.2, 26 , zie 5.3.3
m, g, h	neen	$\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$ $\Delta m_1 + \Delta m_2 = 0$	nee nee (Pr.2.7)
U_{inw}	ja	$\Delta U_{inw} = C_\xi.\Delta T + \Gamma_T.\Delta\xi$ $\Delta U_{inw} = C_V.\Delta T + \pi_T.\Delta V$ $\Delta U_{inw} = -p.\Delta V$ $\Delta U_{inw,1} = -\Delta U_{inw,2}$	ja: Pr.2.5, zie 5.3.2(* kan: Pr.2.6 (**K**), zie 8.7.2 kan: Pr.2.6 (**K**), zie 8.7.2 ja: 'behoud' geërfd van eerdere energiebegrip, zie U_{pot}
C_v	op weg	$C_v = (\partial U_{warmte}/\partial T)_V$	kan: §3[2] als huiswerk gemaakt en nabesproken
extensief	ja	U, V, m: extensief optelbaar.. systeem	ja: Pr.2.7, r.160-168 ja: Pr.2.10, r.172-193
systeem	neen	optelbaar..extensief	nee
p, T, V	neen	$\Delta U_{inw} = -p.\Delta V$ $\Delta U_{inw} = C_\xi.\Delta T + \Gamma_T.\Delta\xi$ $\Delta U_{inw} = C_V.\Delta T + \pi_T.\Delta V$	nee nee nee
effici-entie	op weg	$\varepsilon = \Delta U_{taak}/\Delta U_{bron}$ $\varepsilon = (h_1 - h_2)/h_1$ $\varepsilon = (p_1 - p_2)/p_1$	kan: Pr.2.7 (**J**), zie 13.2 nee nee

Legenda: in kolom 1 worden woorden en symbolen genoemd; in kolom 2 wordt beoordeeld of van een 'term' gesproken kan worden. Kolom 3 noemt de relevante (al dan niet *afgesproken*) associaties; in kolom 4 wordt per associatie beoordeeld of deze gefunctioneerd heeft als eigenschap bij het afbakenen van de collectie ervaringen waarnaar het woord/symbool verwijst. Hierbij wordt verwezen naar eerder besproken protocollen (Pr.), naar een deelnemer in het protocol (**K**) en naar paragrafen in dit proefschrift (zie..).

Wanneer we hier toch zouden willen spreken van twee 'relatienetten' dan kunnen deze niet de kwaliteit 'gesloten' toegekend krijgen, want een beroep op symbolen met een vanzelfsprekende betekenis (m, g, h, p, T, V, systeem) zal nog regelmatig nodig zijn. Voorzichtigheidshalve zullen we hierna spreken van het overkoepelde 'associatienet'. Het gaat echter in veel gevallen wel om *afgesproken associaties*, die voor tenminste één term als eigenschap hebben gefunctioneerd bij het afbakenen van een collectie ervaringen waarnaar die term verwijst. Uitgedrukt in Van Hiele niveaus: voor de beide basisdomeinen van de beoogde analogieredenering is een overgang naar beschrijvend niveau voor de genoemde associaties gevorderd tot aan een vrije oriëntatiefase. De integratiefase (zie

12.2) ontbreekt echter nog.

Het onderscheid tussen een analogieredenering als structuurafbeelding enerzijds en een empirische generalisatie anderzijds konden we helder formuleren door te zeggen dat een structuurafbeelding veronderstelt dat een beschrijvend niveau bereikt is (8.5). Hierbij werd in het midden gelaten in hoeverre een beschrijvend niveau 'bereikt' zou moeten zijn. Door na te gaan of we het gerealiseerde onderwijs als structuurafbeelding kunnen beschrijven, zullen we controleren of de kwaliteit van 'afgesproken associaties' (vrije oriëntatiefase) voldoet als vertrekpunt.

13.4. Overkoepelend relatienet

De vraag of de kwaliteit 'relatienet' al dan niet is bereikt kan ook gesteld worden voor de drie termen *U*, *I* en *E* die we overkoepelende termen noemden (13.1 en Afbeelding 30). Hieronder staan nog eens de eigenschappen die reden waren om h en p op elkaar af te beelden, opgevat als benoeming van een plaats in een (afgesproken) associatie.

genoemde eigenschap:	benoemt plaats I in:
"ze dienen allebei als coëfficiënt", **M**.11, 200 "ze bepalen beide (..) 't rendement", **J**.27, **M**.200 "zijn allebei intensieve grootheden", **M**.206	$\Delta U = I.\ \Delta E$ $\varepsilon = (I_1 - I_2)/I_1$ (geen optelrelatie)

Zo ook de eigenschappen die reden waren m en V op elkaar af te beelden.

genoemde eigenschap:	benoemt plaats E in:
"dienen allebei als variabele", **M**.13, 199 "zijn allebei extensieve grootheden", **M**.205 "in totaal constant", **J**.179, 191, **WK**.214	$\Delta U = I.\ \Delta E$ $E_{t\ of} = E_1 + E_2$ *) $\Delta E_{tot} = 0$

Zowel *I* als *E* kunnen we overkoepelende *termen* noemen, omdat hun gebruik is afgebakend door enkele afgesproken associaties met andere overkoepelende uitdrukkingen (*I*, *E*, *U* en ε).
Het betreffen nu echter geen collecties zintuiglijke ervaringen die worden afgebakend. Immers bij het beantwoorden van de opgave geciteerd in 13.2 worden niet zozeer handtastelijke ervaringen geordend. Dat wat geordend wordt betreft fysische grootheden (hoogte, massa). We kunnen ook zeggen: uitdrukkingen ('hoogte') worden gesorteerd op hun - te benoemen - plaats in relaties. Als resultaat kunnen we daarom noemen de *overkoepelende term E* welke verwijst naar de collectie uitdrukkingen {*m*, *V*} en zo ook: de overkoepelende term *I* welke verwijst naar de collectie {*h*, *p*}.

(* Er kan niet gezegd worden dat de associatie $m_{tot} = m_1 + m_2$ voor studenten heeft gefunctioneerd bij het afbakenen van een collectie ervaringen waarnaar *m* of 'massa' verwijst. We kunnen $m_{tot} = m_1 + m_2$ daarom geen *afgesproken* associatie noemen. Wel functioneert $E_{tot} = \Delta E_1 + E_2$ bij het afbakenen van de collectie uitdrukkingen {*m*, *V*}.

Met een 'overkoepelende term' bedoelen we een uitdrukking welke verwijst naar een collectie uitdrukkingen welke is afgebakend door afgesproken eigenschappen.

Ook U mag een overkoepelende term heten, omdat in een eerder stadium (§1[2]) het gebruik van 'energievormen' was getoetst aan de mogelijkheid een relatie met een variabele en een coëfficiënt te formuleren (1-5[2]). De collectie uitdrukkingen $\{U_{pot}, U_{kin}, U_{warmte}, ..\}$ is dus afgebakend door $\Delta U = I.\Delta E$ als afgesproken eigenschap van een overkoepelende term *'U'*.

Nu mogen we de associatie

a. $\Delta U = I.\Delta E$

een 'relatie' noemen omdat voor elk van de betrokken termen U, I en E de collectie uitdrukkingen waarnaar deze term verwijst is getoetst aan de genoemde associatie.
Van de andere associaties tussen overkoepelende termen

b. $\varepsilon = (I_1 - I_2)/I_1$
c. $\Delta E_{tot} = \Delta E_1 + \Delta E_2$
d. $\Delta E_{tot} = 0$

mogen tenminste c en d 'relaties' heten, omdat van elk van de betrokken (overkoepelende) termen I en E het gebruik is getoetst aan de genoemde associaties. We kunnen dus spreken van een overkoepelend relatienet.
In het bijzonder kunnen we spreken van E als knooppunt van relaties (a, c, d) en van I als knooppunt van relatie a en associatie b.
We mogen daarom verwachten dat van een nieuw toe te voegen uitdrukking (X, entropie) aan de collectie uitdrukkingen waarnaar E verwijst, meer dan een enkele relatie geëist zal worden en dat de nieuwe uitdrukking dus als knooppunt van relaties zal kunnen functioneren in een redenering (vgl. 12.1 en 12.2).

We mogen verwachten dat het afbeelden $m \rightarrow X$ en $V \rightarrow X$ kan leiden tot gebruik van X met de kwaliteit van term.

Omdat het overkoepelend relatienet tot nu toe alleen gebaseerd is op de beide ervaringsdomeinen die als basisdomeinen voor de ontworpen analogieredenering waren bedoeld, kunnen we Jolings eis dat beschrijvend niveau is bereikt voor het basisdomein van een analogieredenering ook zo interpreteren dat er aan deze eis voldaan is, als we letten op dit overkoepelend relatienet.

13.5. Niet-geplande overkoepelende termen

Uit onze eerdere analyse in hoofdstuk 8 (8.3) kunnen we nu concluderen dat nog enige overkoepelende termen mogelijk van belang zijn. We formuleerden daar de volgende "gelijknamige relaties" (hier veiligheidshalve 'associaties' te noemen):

1 - zowel tussen de twee gasporties als tussen de twee waterbakken als tussen de hete en de koude voorraad bestaat *een verschil in een intensieve grootheid.*
2 - zowel tussen de twee gasporties als tussen de twee waterbakken als tussen de hete en de koude voorraad geschiedt *overdracht van energie.*
3 - zowel tussen de twee gasporties als tussen de twee waterbakken geschiedt *overdracht van nog een andere extensieve grootheid.* Voor de situatie met temperatuurverschil is zo'n grootheid nog niet bekend.
4 - zowel de turbine als de zuiger als de cilinder-met-inhoud *hebben contact met* de beide objecten waartussen het verschil in intensieve grootheid bestaat.
5 - zowel de turbine als de zuiger als de cilinder-met-inhoud *verrichten arbeid op* een vierde object (een vliegwiel of ander "traag voorwerp").

Het cursief gezette deel geeft hier de "gelijke naam" aan die aan verschillende associaties gegeven kan worden.
Wanneer gevraagd was de overeenkomsten tussen hoge waterbak en linker gasportie te noemen, dan had een overkoepelende term 'a' kunnen ontstaan op eenzelfde manier als eerder getoond werd voor *I*, *U* en *E*: door de plaats 'a' in bovengenoemde relaties te benoemen. Een dergelijke vraag is echter niet gesteld. Wel komen in de opgaven enkele uitdrukkingen voor die wellicht tot zo'n overkoepelend associatienet zouden kunnen behoren. Zo wordt in de opgaven een gemeenschappelijke rol van hoge waterbak en linker gasportie aangeduid met "energiebron" (11-1i en 11-4m)[2]. Hiermee kan men plaats a benoemen in de relaties

2 - Energie wordt overgedragen van a naar b

De functie van het vliegwiel op zijn beurt werd met "taak" aangeduid bij 11-1k[2]. Hiermee kan plaats d benoemd zijn in

5 - c verricht arbeid op d

Totaal zijn er in elk van de drie situaties vier systemen onderscheiden (8.3), waarvan de plaats in onderlinge relaties met een overkoepelende term zou kunnen worden benoemd. De namen van deze systemen zijn dan op elkaar af te beelden zoals aangegeven in de volgende tabel.

Tabel XI: namen van systemen afbeelden

vallend water		*drukverschil*		*temperatuurverschil*	Overkoepelende term
hoge waterbak	→	linker gasportie	→	hete voorraad	a
lage waterbak	→	rechter gasportie	→	koude voorraad	b
turbine	→	zuiger	→	cilinder-met-inhoud	c
vliegwiel	→	vliegwiel	→	"traag voorwerp"	d

De overkoepelende termen a, b, c, d zijn dan bijvoorbeeld te noemen: **a** bron, **b** afvoerput[*], **c** centraal (of arbeid-verrichtend) systeem, **d** taak.

De betekenis van "energiebron" en "taak" wordt in de opgaven echter niet geproblematiseerd en voor de overkoepelende termen b en c ontbreekt elke aandacht. Destijds werd vooral gedacht aan het afbeelden van *grootheden* op andere grootheden, voor andere mogelijke termen was minder aandacht bij de ontwerper. De analyse in paragraaf 8.3 was toen nog niet geschreven.

protocol 2.7

Uit protocol 2.7 (r.30-104) blijkt dat de proefopstelling op verschillende manieren kan worden ingedeeld. Wordt een indeling in twee systemen (genoemd "bron" en "taak") gekozen, dan wordt een rendement van 1 of -1 gevonden wegens energiebehoud. Voor de specifieke betekenis van 'bron' (a) en 'taak' (d) in relatie tot een verliespost (b) was nog geen motief gegeven. Een aanwijzing om een indeling in 4 systemen uit te proberen (zoals in 11-6[2]) had dus vooraf moeten gaan. Ook hadden opgaven gesteld kunnen worden gericht op het doen ontstaan van de wens het verlies te kwantificeren. Dit had een motief kunnen opleveren voor de hier bedoelde vier termen: bron, afvoerput, taak en arbeid verrichtend systeem.
Een aanzet tot de term 'arbeid verrichtend systeem' is te vinden in het volgende protocol.

protocol 2.8

In **J**.4 "dan heeft die zuiger heeft dan de functie van de turbine overgenomen" wordt uitgesproken dat zuiger en turbine een gelijke plaats of "functie" hebben in beide opstellingen. Daarmee is die gelijke plaats echter nog niet benoemd. Ook kan van woorden als 'turbine' en 'zuiger' nog niet gezegd worden dat deze deel uitmaken van een netwerk van afgesproken associaties. En dus kan niet verwacht worden dat *plaatsen* in zo'n associatienetwerk benoemd zullen worden, zoals we zagen gebeuren voor woorden als massa, hoogte,... bij het ontstaan van de overkoepelende termen *I*, *U* en *E*.
Het begin van een netwerk van afgesproken associaties voor het ervaringsdomein 'drukverschil' kan wel worden aangewezen: er wordt gezocht naar gedisciplineerd afbakenen van diverse onderdelen van de opstelling door afgesproken "grenzen" (WK.1, M.21) en naar het onderscheiden van verschillende "interacties" aan deze grenzen (M.32, J.34). Met elk van de genoemde interacties worden twee onderdelen van de opstelling ("systemen") geassocieerd (r.35-36):

M: Jal linkergas en zuiger heb ik, zuiger en vliegwiel, zuiger en rechtergas
J: Nou, dat zijn de drie interacties

Voor deze interacties worden omschrijvingen gezocht (r.15,46,53,68,71-73). Er kan echter niet gezegd worden dat deze omschreven interacties functioneren als eigenschap die de

[*] In engelstalige literatuur noemt men de twee reservoirs betrokken bij een Carnot kringproces wel de 'source' en de 'sink' (afvoerputje).

ervaringen afbakent waar men 'zuiger' van toepassing vindt: woorden als 'zuiger', 'linkergas' komen niet ter discussie en dit was ook niet gepland. Zouden wel enige van deze woorden de kwaliteit van term bereiken, dan zou (gezien 13.3 en 13.4) het ontstaan van a, b, c en d als overkoepelende termen zijn voorbereid.

We kunnen ons echter ook voorstellen dat woorden als 'zuiger' op vanzelfsprekende wijze gebruikt blijven worden. De term **a** zou dan kunnen ontstaan in een eerste gedisciplineerde generalisatie over ervaringen opgedaan in de drie verschillende opstellingen:

Energie wordt overgedragen van **a** naar **b**

a en **b** hebben dan de kwaliteit van term, aangezien ze elk naar een collectie ervaringen verwijzen, welke ervaringen ook met woorden als 'zuiger' *verteld* (niet: gedisciplineerd beschreven) kunnen worden. Omdat met betrekking tot de termen **a** en **b** de ervaringen met de drie verschillende opstellingen dan tot één ervaringsdomein te rekenen zijn, kunnen deze termen niet functioneren in een analogieredenering in de zin van een structuurafbeelding: het zouden dan geen overkoepelende termen zijn.
We kunnen ons het gebruik van de termen a, b, c en d dus op twee manieren voorstellen: als gewone beschrijvende termen of als overkoepelende termen. De relevantie van deze niet-geplande termen zal ook blijken uit de nu volgende bespreking van het ontstaan van de term entropie (13.6).

13.6. Overkoepelende termen in sluipend en probleemstellend onderwijs

Het plan voor een analogieredenering, dat eerder in 4.5 werd weergegeven, kan nu zo worden samengevat: Door vergelijken van gekozen beschrijvingen voor twee ervaringsdomeinen ('arbeid door hoogteverschil' en 'arbeid door drukverschil') worden enkele overeenkomsten opgemerkt tussen de plaats van m in het ene associatienet en die van V in het andere. Zo ook tussen de plaats van hoogte h in het ene associatienet en druk p in het andere. De bundel gelijknamige plaatsen noemen we een overkoepelende term (*'E'* respectievelijk *'I'*). Deze overkoepelende termen functioneren als volgt in de geplande analogieredenering: de uitgezochte overeenkomsten tussen m en V (genoemd *'E'*) hebben de geplande functie om ten aanzien van een derde ervaringsdomein, waar een grootheid al bekend is die voldoet voor de plaatsen genoemd *'I'*, de verwachting te laten ontstaan dat er tevens een term geformuleerd kan worden die voldoet aan de plaatsen genoemd *'E'*. De overkoepelende term *'E'* dient dus om uit alle eigenschappen van m of van V een voorselectie te maken, om daarmee tot een meer gerichte verwachting te komen ten aanzien van dit derde ervaringsdomein.
Daarbij moet aangetekend worden dat de meer 'open' aanpak bij het vergelijken van de twee eerstgenoemde ervaringsdomeinen gewenst is om te zorgen dat men ten aanzien van deze term X ook open staat voor niet-verwachte eigenschappen (13.1).
Eerder bespraken we een protocol waaruit bleek dat entropie als vermoeden was ontstaan voor studenten. Het bleek daar bovendien om een *toetsbaar* vermoeden te gaan, want

studenten konden bijdragen aan het ontwerpen van een proef om hun vermoeden te toetsen (5.3.1). Het volgende protocol toont hoe dit toetsbare vermoeden ontstond in een analogieredenering.

protocol 2.10

Door te letten op het functioneren van overkoepelende termen kan dit nogal lange protocol een structuur krijgen:

- Een beredeneerde keuze voor 'temperatuur' als grootheid die de plaatsen *'I'* kan vervullen (r.1-126, 172-201, opgave 11-7c[2])
- Zoeken naar een berekening voor de energie, waarbij eerdere keuzen worden losgelaten: de keuze voor 'temperatuur' als *'I'* en de keuze voor een indeling in 4 systemen (r.127-166, 202-212).
- Ontstaan van 'overdracht' als overkoepelende term bij het formuleren van een eigenschap voor *'E'* (r.213-333, 343, 351, opgave d)
- Nagaan of 'hoeveelheid vloeistof' in de cilinder de plaatsen *'E'* kan vervullen in een berekening van 'energie', waarbij de keuze voor 'temperatuur' als *'I'* en de keuze voor 4 systemen wordt losgelaten. Na een opmerking van **WK** wordt dit inconsequent gevonden (r.202-212, 334-407, 721-736, opgaven e-f).
- Nagaan of 'warmte' de plaatsen *'E'* kan vervullen (r.415-490, **L-WK**.621-645, **L-J**.676-714, opgaven e-f)
- Noteren van eigenschappen voor de gezochte grootheid *'X'*, die de plaatsen *'E'* zou vervullen in relatie tot *T* op de plaatsen *'I'* (r.495-546, 552-605, opgave g)
- Raden naar *'X'*; al weten wat *'X'* is; zoeken in *Atkins* naar bevestiging dat *'X'* niets anders kan zijn dan entropie (r.478, 535-540, 547-551, **K-M**.615-621, **K-M**.688-695, 715-721, **K-M**.872-894, r.1084, 1090, 1102)
- Nagaan of 'warmtecapaciteit' de plaatsen *'E'* kan vervullen (r.559-563, **L-J**.779-921, vgl. **K-M**.895-900, 911-926, opgave f)
- Voorspellen van een 'rendement' op basis van genoteerde eigenschappen van *'X'* (r.115-134, **J-K**.645-659, **J-M**.927-936, 961-1099, opgave h-i)

Het voorspelde rendement maakt vervolgens een toetsing mogelijk van de term *'X'* met zijn verwachte eigenschappen (zie 5.3.1).

Een groot deel van het protocol wordt dus besteed aan het zoeken naar een grootheid die de plaatsen *'E'* kan vervullen op het nieuwe ervaringsdomein. Hierbij worden achtereenvolgens uitgeprobeerd: de hoeveelheid water in de cilinder, warmte, warmtecapaciteit, entropie.
Voorkennis van entropie blijkt niet direct een voordeel te zijn. Iets dergelijks zagen we eerder voor 'energiewaarde' (12.4, na protocol 3.7). In plaats van tevreden te zijn dat de hen bekende entropie inderdaad de plaatsen *'E'* kan vervullen, zoeken **K** en **M** enige tijd vruchteloos in *Atkins* naar een bewijs dat *geen andere grootheid dan entropie* deze plaatsen kan vervullen (r.872-880). Zij doen dit onderling en betrekken **J**, **L** en **WK** daar niet in. Deelnemer **J**, die niet door dergelijke vermoedens werd gehinderd, kwam eerder tot een toetsbare voorspelling van het rendement.

Het voorstel van studenten dat de hoeveelheid waterdamp in de cilinder de plaatsen *'E'* kan vervullen wordt door hen beargumenteerd door de volgende eigenschappen te noemen:
- extensief (r.203, 345)
- in totaal constant (r.210, 348?, 390)
- het is mogelijk twee systemen te onderscheiden zó dat van 'overdracht' kan worden gesproken (r.340, 395-398)
- er is een relatie met energie of arbeid te leggen (r.127, 146-165, 382-387)

Echter, om deze gelijknamige eigenschappen te kunnen formuleren is de eerder gekozen beschrijving met vier systemen opgegeven, en ook de keuze van temperatuur als *'I'* is opgegeven, immers: de genoemde twee systemen waartussen water wordt overgedragen (vloeistof en gas in de cilinder) verschillen niet van temperatuur, of in ieder geval bedoelde men niet déze systemen toen gesproken werd over 'temperatuurverschil' als bepalend voor de arbeid (r.9-10, 44-56).

WK's ingreep (WK.403-405) kán opgevat worden als een poging om hen te herinneren aan de eerder gemaakte keuze van vier systemen, welke keuze gemaakt was met de bedoeling te komen tot analoge beschrijvingen.[*)] Hij doet immers een impliciet beroep op de termen a en b (13.5). Deelnemer **L** (r.436) reageert hierop door te herinneren aan de overeenkomstige "functie" (protocol 2.8, r.4) van cilinder en turbine (Afbeelding 18), dus impliciet een beroep op term c. Deelnemer **L** lijkt **WK** hier dus te verstaan. **WK**'s uitspraak kan echter ook anders worden opgevat, niet als een herinnering aan eerder gemaakte keuzen, maar als het ongemotiveerd dicteren van de gewenste afbeelding.[+)]

Noch **WK**, noch **L** kunnen zich beroepen op afgesproken eigenschappen van de termen a, b, c en d, want deze termen waren niet afgesproken (13.5). We zien hier dus een ***sluipende*** introductie van deze termen, aangezien een beroep op deze termen verscholen ligt in de mededeling van een schijnbaar feit ("de analogie is zo dat..", vergelijk 5.2.3). Deze sluipende onderwijsaanpak had kunnen worden voorkomen als het relatienet a-b-c-d beschikbaar was geweest voorafgaand aan de nu gewenste toepassing op het derde ervaringsdomein, immers, dan hadden **L** en **WK** zich kunnen beroepen op afgesproken relaties voor deze termen, om het afbeelden van (hoge en lage) "waterbakken" op "bakken van verschillende temperatuur" (**WK**) en van "turbine" op "dat hele cilindertje" (**L**.407) te motiveren. We zien bovendien hoe tot de nodige eigenschappen van a en b behoort dat de systemen genoemd a en b zich onderscheiden (van c en d) doordat tussen hen de overdracht plaatsvindt van de grootheid die de plaatsen *'E'* vervult (**WK**.409-410). Deze benodigde relatie verbindt het net a-b-c-d met het overkoepelend relatienet *I-E-U*. Ons vermoeden uit 13.5 dat de termen a, b, c en d als overkoepelende termen kunnen functioneren is dus relevant.

De resterende twee voorstellen van studenten om de plaatsen *'E'* te vervullen ('warmte' r.415-490 en 'warmtecapaciteit' r.559-563) leiden wel tot een poging tot probleemstellende onderwijsaanpak. **WK** beroept zich op de tot dan toe ontwikkelde taal (r.441-448, 559-563[#)]), om te laten zien dat er aan die taal nog iets ontbreekt (r.486-490, 569): de term *X*.

(* Zie protocol 2.8 in 13.5 en protocol 2.9, besproken in 8.7.1.

(+ Vergelijk mijn kritische bespreking van Gentners "objectcorrespondenties" in 8.2.

(# Vergelijk de voorafgaande discussie welke leidde tot een afgesproken eigenschap voor 'overdragen' in r.233-326.

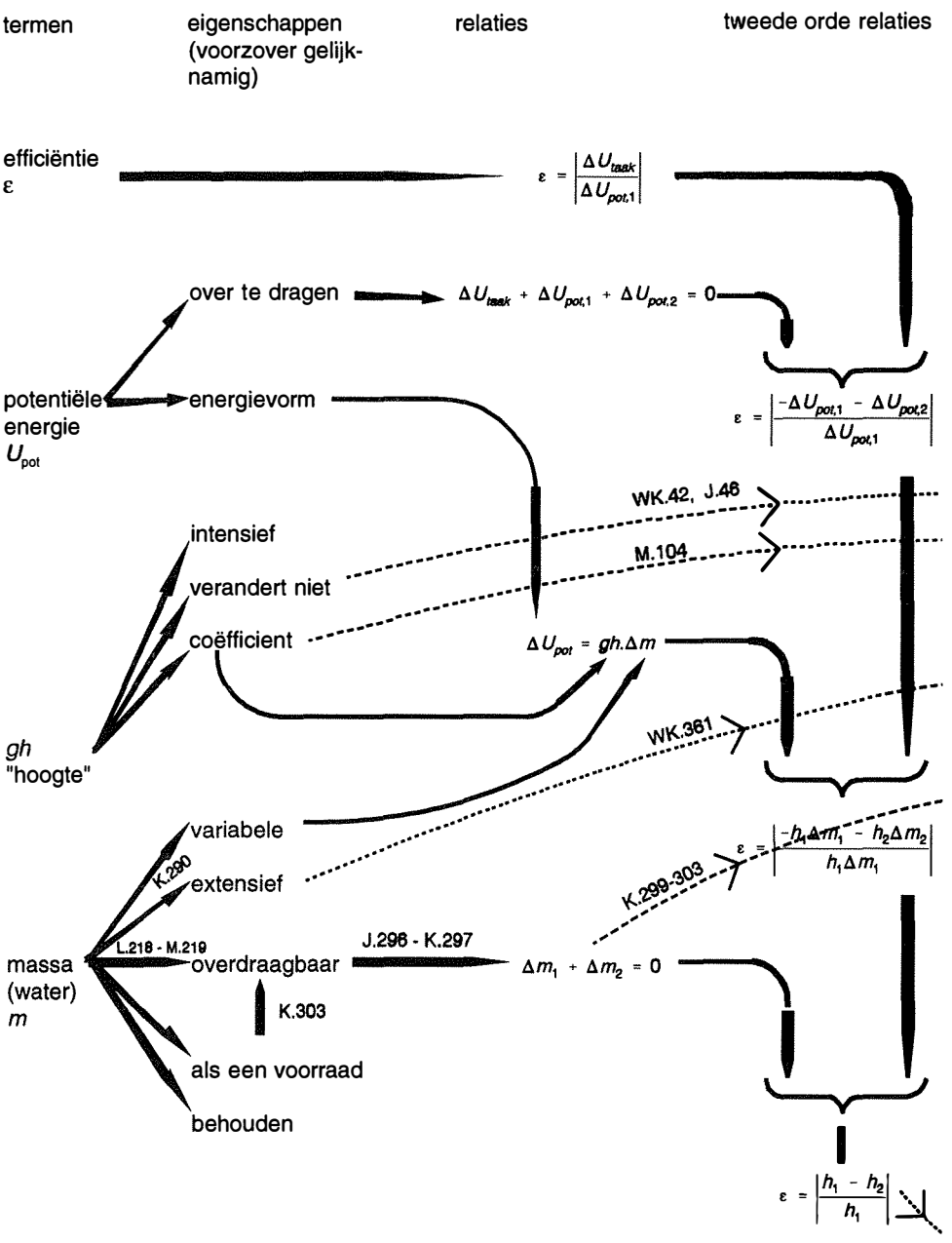
Deze poging tot probleemstellende aanpak leidt bij deelnemer **L** niet tot het ontstaan van een voor hem zinvol probleem (r.570, 911-920). In de voorafgaande discussie (r.779-921) beroept **L** zich op een stellingname over (fysische) *grootheden* - namelijk "wanneer grootheden dezelfde eenheid hebben, dat ze dan dezelfde grootheid zijn" (L.848) - om te beredeneren dat de gezochte grootheid X gelijk is aan de warmtecapaciteit. **WK**'s aanpak bij het weerleggen van deze stellingname is niet probleemstellend te noemen, omdat hij zich beroept op termen (enthalpie, "$\partial U/\partial V$") die wel in het hoorcollege aan de orde waren geweest, maar waarover in deze werkcollegegroep nog geen afspraken waren ontstaan. **WK** was niet goed voorbereid op een discussie over de eigenschappen van 'grootheid' en 'eenheid' als termen. Verdere analyse van dit probleem volgt in 13.8.

Deelnemers **J**, **K** en **M** accepteren dat zij een grootheid die op het nieuwe ervaringsdomein de plaatsen *'E'* kan vervullen nog niet kennen.[*)] We kunnen zeggen dat het voor hen zinvol wordt om m en V bij wijze van vermoeden af te beelden naar het nieuwe ervaringsdomein, waarbij ze zich laten leiden door de eerder benoemde plaatsen ("variabele", "extensief", "overdraagbaar" r.495-542) die we hier *'E'* noemen. Bij **K** en **M** speelt hierin mee dat zij "al ruiken wat er nu gaat gebeuren" (r.478, 493, 535-540, 549), dat wil zeggen, zij verwachten dat de nu gevraagde redenering hen tot 'entropie' zal leiden, waar ze via het hoorcollege al één en ander van gehoord hebben. Voor de deelnemers **J**, **K** en **M** kunnen we het zoeken naar grootheid *'X'* daarom een resultaat noemen van een gelukte probleemstellende aanpak (5.2.3).

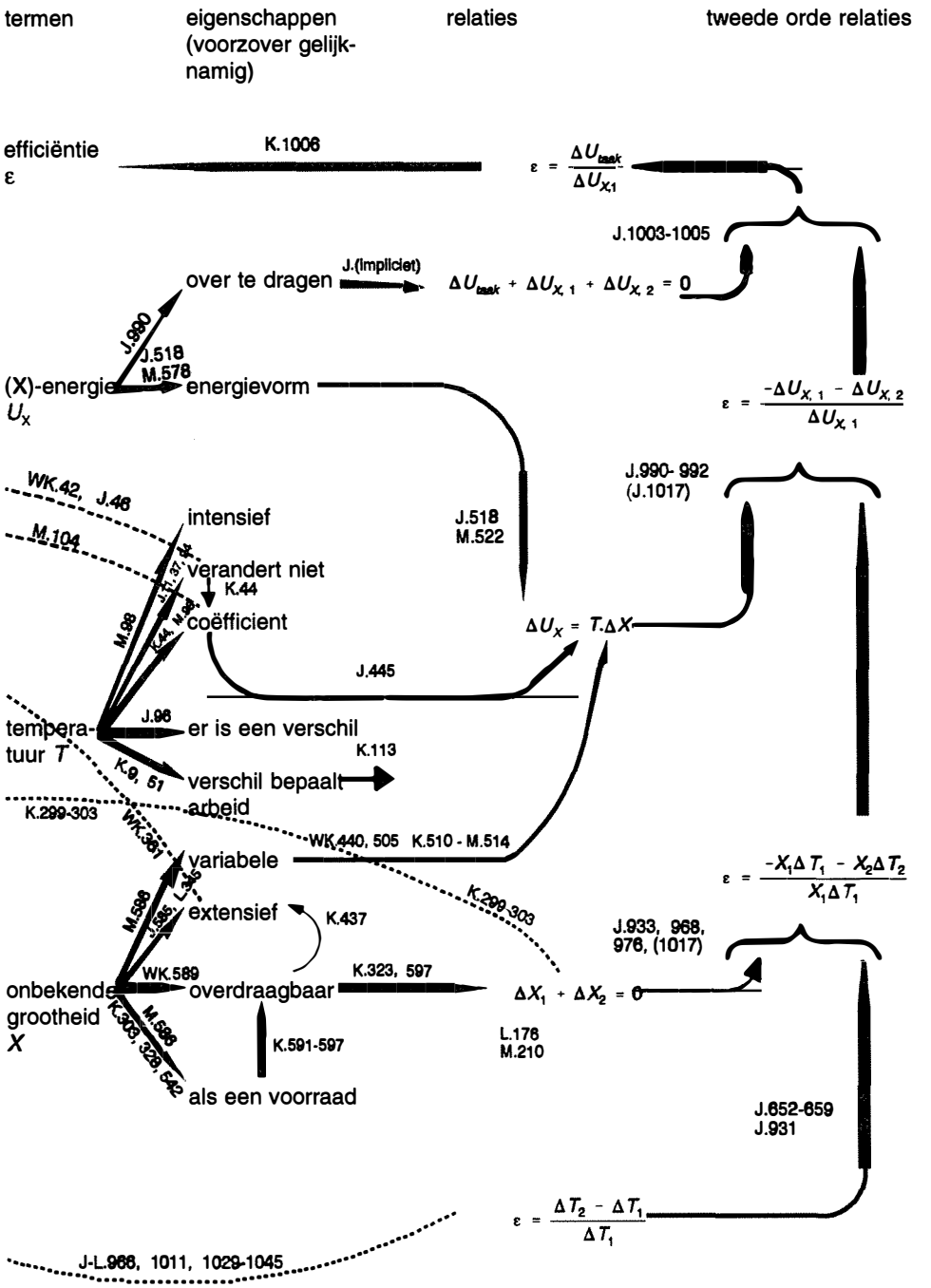
Een toetsbare voorspelling ontstaat voor **J**, **K** en **M** door op basis van de verwachte eigenschappen van *'X'*, verwacht volgens de overkoepelende term *'E'*, een rendement te voorspellen. **J** komt als eerste tot zo'n voorspelling (J.652-659), vermoedelijk door in eerder afgeleide uitdrukkingen voor het rendement h of p te vervangen[+)] door "ΔT", dus als consequentie van de eerder (r.9, 44-56, 94-113) gemotiveerde keuze om temperatuur de plaatsen *'I'* te laten vervullen.
Deze voorspelling kan door hem met de verwachte eigenschappen van *'X'* in verband worden gebracht (r.961-1018). **J** lijkt **WK** "je hebt nu overal gelijkvormige uitgangspunten, en die uitgangspunten kun je gebruiken (voor een afleiding)" te verstaan (r.963-973). In plaats van de rendementsformule "af te leiden" gaat hij "terugwerken" (**J**.1003), met als resultaat dat hij, gebruik makend van $\Delta U_{inw}=T.\Delta X$ en van $\Delta X_1=-\Delta X_2$, uitkomt op de definitie van rendement: "de energie die naar het trage voorwerp is gegaan, gedeeld door de energie die hieruit komt" (J.1004-1005, vgl. 1 1-1k^2). Hiermee heeft hij getoond dat zijn uitdrukking voor het rendement in overeenstemming is met deze definitie van rendement, mits X de verwachte eigenschappen heeft.
J's afleiding is consequent op het gebruik van 'Δ' tekens na: in r.977-978 gaat hij van ΔX_1 over op X_1. Het onderscheid tussen coëfficiënt en variabele (r.505-514) functioneert dus niet consequent in zijn redenering. Na aanwijzingen gegeven door **J** (J.1022) komen **K** en

---

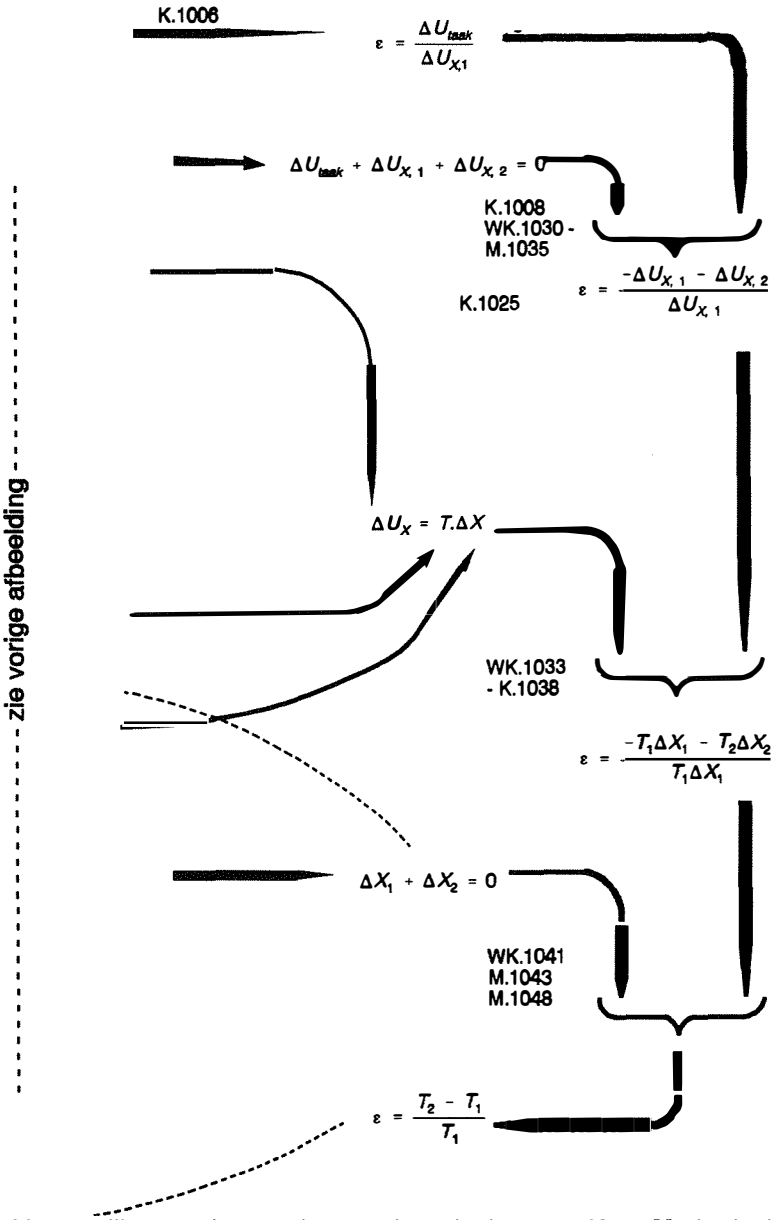
[*)] Deelnemer **J**: r.518; Deelnemer **K**: r.478, 493, 499, 510 e.v.; Deelnemer **M**: r. 500-514.
[+)] **L**.966 "dat heb je gewoon van die andere vragen afgespiekt"



Afbeelding 31: Analogieredenering deelnemer **J**, met gezamenlijke voorgeschiedenis. (Regelnummers verwijzen naar protocol 2.10, overige afgebeelde



relaties zijn resultaat van eerdere gesprekken - zie Tabel XI)



Afbeelding 32: Voorspelling van het rendement door deelnemers **K** en **M** als deel van een analogieredenering (voorgeschiedenis in Afbeelding 36).

M tot een afleiding die ook consequent is gelet op de onderscheiden rol van coëfficiënt en variabele (r.1056-1063).

In Afbeelding 31 en Afbeelding 32 is schematisch de voorspelling van het rendement door **J**, **K** en **M** weergegeven, met de analogieredenering die deze voorspelling mogelijk maakte. Alleen die uitspraken zijn opgenomen in de figuur, die aanwijsbaar bijdragen aan de voorspelling.
In Afbeelding 31 is **J**'s redenering afgebeeld met de voorgeschiedenis, waaraan **K**, **L** en **M** hebben bijgedragen. In Afbeelding 32 is de redenering afgebeeld waartoe **K** en **M** kwamen. Voor deze redenering kunnen dezelfde uitspraken als relevante voorgeschiedenis worden aangewezen als voor **J**'s redenering, dus dit deel van Afbeelding 31 is in Afbeelding 32 niet herhaald.

De getekende figuren verschillen van eerdere afbeeldingen van relatienetten omdat in de hier afgebeelde redenering niet alleen termen maar ook relaties als knooppunten functioneren. De algebraïsche afleiding (r.927-1006) waarmee **J** zijn redenering afsluit, is immers het eenvoudigst te beschrijven door te zeggen dat steeds twee relaties worden gecombineerd tot een derde relatie. De "volgt uit"-pijl die men in zulke afleidingen wel gebruikt symboliseert dus wat Gentner een 'tweede-orde relatie' noemde: een relatie tussen relaties. Verder is in Afbeelding 31 aangegeven hoe een beroep op gelijknamige eigenschappen - dat is: op benoemde plaatsen in afgesproken associaties - functioneert bij het afbeelden van termen van het eerder ontstane (U_{pot}, mg, h) naar het nieuwe (U_x, T, X) associatienet. Dit is steeds aangegeven met een onderbroken pijl die beide helften van Afbeelding 31 verbindt. Elk van deze afbeeldings-pijlen kan men ook lezen als een beroep op een overkoepelende term (zie 13.2).

13.7. Algebraïsch hanteren van fysische relaties

Het algebraïsch combineren van twee (eerste orde) relaties tot een derde kan ook met alleen termen als knooppunten worden afgebeeld. Wanneer we bijvoorbeeld zeggen dat:

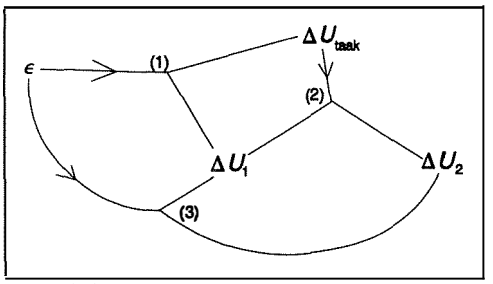
$$(3)\ \varepsilon = (-\Delta U_1 - \Delta U_2)/\ \Delta U_1$$

volgt uit:

$$(1)\ \varepsilon = \Delta U_{taak}/\ \Delta U_1$$

en $(2)\ \Delta U_{taak} + \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$

dan is die redenering af te beelden zoals in Afbeelding 33.
Immers: vanuit ε als ingang kom ik via (1) op U_{taak} en U_1. Zoekend naar een vervanging voor U_{taak} kom ik via (2) op U_1 en U_2. Door aaneenschakelen van relaties (1) en (2) ben ik dan gekomen op relatie (3), die rechtstreeks ε verbindt aan U_1 en U_2.
Het onderling 'kloppen' van relaties in een algebraïsche afleiding verschilt, zo bezien, niet van het kloppen van een redenering zoals we dat eerder analyseerden (12.1 en 12.2). Als



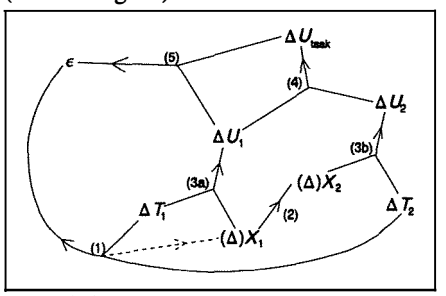
Afbeelding 34: kloppende algebraïsche redenering

J.974 zegt "Ja, dus deze formule zou moeten kloppen als de rest allemaal klopt", dan bedoelt hij dat zijn uitdrukking voor ε - die hij voorspelde door de hoogte af te beelden op een temperatuur (of temperatuurverschil) - dat deze uitdrukking "moet kloppen" met een eerdere uitspraak die over ε werd gedaan, namelijk "de energie die naar het trage voorwerp is gegaan, gedeeld door de energie die hieruit komt" (5). Dit blijkt althans uit zijn redenering (Afbeelding 34).

Legenda:

(1) $\varepsilon = (\Delta T_1 - \Delta T_2)/\Delta T_1$	**J**.931, **L**.961
(2) $\Delta X_2 = -\Delta X_1$	**J**.976 (1017)
(3a) $\Delta U_1 = X_1 \Delta T_1$	
(3b) $\Delta U_2 = X_2 \Delta T_2$	**J**.990-992 (1018)
(4) $\Delta U_{taak} = -\Delta U_1 - \Delta U_2$	**J**.1004-1005 (1023)
(5) $\varepsilon = \Delta U_{taak}/\Delta U_1$	**K**.1006

Met haakjes is een inconsequent gebruik van 'Δ' aangegeven.



Afbeelding 35: "kloppen" volgens **J**.974

Uitgaande van de door afbeelden ($h \rightarrow \Delta T$) gevonden uitdrukking (1) wordt eerst X_1 ingebracht. Hierdoor ontstaat de mogelijkheid om via (2) ook X_2 aan ε te relateren. Hierbij is **J** gericht op het produceren van combinaties van symbolen die dankzij (3) als "energie" kunnen worden herkend. De combinatie van energiewaarden '$-\Delta U_1 - \Delta U_2$' kan via (4) worden vervangen door ΔU_{taak}, zodat de bekende uitspraak (5) is "terug" (r.1003) gevonden, waarmee **J**'s vermoeden bevestigd is dat het "zou moeten kloppen".

We zien in **J**'s redenering dus fysische termen als knooppunten van relaties functioneren: het gebruik van een term in een relatie roept een volgende relatie op waarin deze zelfde term voorkomt. Dit maakt het mogelijk relaties aanéén te schakelen, waarbij uit twee relaties een derde relatie voortkomt welke minstens 'klopt' met de andere twee (en zelfs: eruit volgt). Maar dit 'kloppen' of 'volgen' zelf is een relatie tussen relaties te noemen, een tweede-orde relatie.

In deze algebraïsche redenering komt de uitdrukking X voor als knooppunt van telkens twee relaties: een relatie $\Delta X_2 = -\Delta X_1$ en een relatie $\Delta U = X.\Delta T$ (bij **K** en **M**: $\Delta U = T.\Delta X$). Beide relaties worden verwacht, als resultaat van de voorafgaande analogieredenering (Afbeelding 31): '$\Delta X_2 = -\Delta X_1$' wordt verwacht door in de nieuwe situatie een relatie te eisen die 'overdracht' kan worden genoemd, die dus *gelijknamig* is aan eerder benoemde relaties op de twee basis-ervaringsdomeinen. De relatie $\Delta U = X.\Delta T$ wordt verwacht omdat hierin minstens een 'energievorm' kan worden herkend. In de analogieredenering welke leidt tot het afbeelden van $m \rightarrow X$ en $V \rightarrow X$ zien we dus *fysische benamingen* van relaties functioneren. We kunnen daarom zeggen: X functioneert als fysische term, dat wil zeggen als knooppunt van fysisch te interpreteren (benoemde) relaties. Dit knooppunt maakt de tweede-orde relaties (kloppen, volgen uit) mogelijk die in dit geval een algebraïsch karak-

ter vertonen.
Omdat het echter een verwachte term met verwachte relaties betreft, kunnen we niet zeggen dat *X* naar een collectie reeds opgedane ervaringen verwijst. Deelnemers bleken echter in staat bij te dragen aan het ontwerpen van een toetsend experiment (5.3.1). We zeiden daarom (11.1) dat *X* naar een collectie *verwachte* ervaringen verwijst, namelijk die resultaten van de ontworpen proef die de verwachte eigenschappen van *X* zouden bevestigen.

De verwachting dat X als term in een redenering zou kunnen functioneren (zie 13.4) is bevestigd.

Onze omschrijving van 'kloppen' ziet af van de specifieke vorm der relaties (1) t/m (5). Ze ziet dus ook af van het gehoorzamen aan algebraïsche regels, die de vorm betreffen, zoals: 'je mag links en rechts van het gelijkteken eenzelfde term aftrekken'. We hebben de algebraïsche redenering dus slechts beschreven voor zover hij overeenkomt met andere redeneringen die we eerder beschreven. Het specifiek algebraïsche bleef tot nu toe buiten de beschouwing.

13.8. Algebraïsche 'vorm' en 'gelijkvormigheid'

Het is niet zo dat **J** hier algebra leert. De algebra, voor zover **J** daar gebruik van maakt, beheerste hij al. Met de didactiek van de algebra zullen we ons hier dan ook zo min mogelijk bemoeien. Bij de bespreking van een analogieredenering kunnen we echter het begrip 'gelijkvormigheid' (isomorfie) uit de wiskunde moeilijk negeren. De lezer kan al hebben opgemerkt dat hier hardnekkig het woord 'gelijknamig' werd gebruik waar hijzelf (als wiskundig geschoold persoon) wellicht liever 'gelijkvormig' had gezegd. We zullen hierover nu opheldering geven.
Tot nu toe was het onze strategie om bij het beschrijven van redeneringen zo min mogelijk te onderscheiden tussen een redenering in woorden, een berekening, een afleiding. Deze strategie bleek tot nu toe bruikbaar. Geformuleerde associaties zoals:

de aarde *draait rond* de zon

en

het elektron *draait rond* de kern

noemden we 'gelijknamig' omdat de associatie van beide termen die op elkaar worden betrokken met dezelfde woorden 'draait rond' wordt geformuleerd. Daarmee laten we in het midden of beide associaties inderdaad *gelijk* of identiek kunnen heten. Immers: heeft 'draaien om' in beide gevallen dezelfde betekenis? We weten dat voor kern en elektron de woorden 'positie' en 'snelheid' niet exact de betekenis hebben die we voor macroscopische voorwerpen gewend zijn te hanteren. Dus mag ook niet vanzelf spreken dat 'draaien om' in beide gevallen dezelfde betekenis heeft.

Wanneer het om verschillende ervaringsdomeinen gaat, dan mag het niet vanzelf spreken dat gelijke woorden een gelijke betekenis hebben.

Wanneer echter een analogieredenering tussen verschillende ervaringsdomeinen wordt gezocht, dan mogen we wel verwachten dat de keuze van gelijke woorden opzettelijk gebeurt. Het is dan een beslissing van de spreker om in beide gevallen dezelfde woorden te gebruiken. 'Gelijkvormigheid' kunnen we constateren op grond van de gegeven vorm van de beweringen.

Met 'gelijknamigheid' geven we onze interpretatie aan dat de spreker niet toevallig een gelijke formulering heeft gekozen.

Deze interpretatie is te toetsen door te letten op toelichtingen die eerder of verderop in het gesprek worden gegeven bij de gekozen woorden.
Hoe is dit echter gesteld bij 'associaties' zoals:

$$\Delta U_{pot} = mg.\Delta h$$

$$\Delta U_x = T.\Delta X$$

In plaats van de woorden 'draait rond' hebben we hier de rekenkundige operatoren: "Δ", "=" en ".".

Zijn deze rekenkundige symbolen nog voor verschillende uitleg vatbaar (zoals we dat opmerkten voor 'draait rond') ?

Verschillende reacties op deze vraag zijn mogelijk, waaruit blijkt dat de vraag nog niet nauwkeurig is gesteld:

1 - Nee, deze symbolen zijn niet voor verschillende uitleg vatbaar, want hun betekenis is in de algebra uitputtend vastgelegd.
2 - Ja, in een fysica-leerproces zijn deze symbolen nog voor verschillende uitleg vatbaar, want *fysische grootheden* zijn geen getallen (wel kan men zeggen: ze zijn gelijk aan een getal maal een eenheid - nu blijft echter die *eenheid* beslist ongelijk aan welk getal dan ook) en dus kan de "+" of de "." operator niet precies die betekenis hebben die men er bij het rekenen met getallen aan geeft. In een fysica-leerproces zal dit verschil in betekenis een rol kunnen of moeten spelen.
3 - Ja, want als het begrip 'fysische grootheid' (in de betekenis: gelijk aan een getal vermenigvuldigd met een eenheid) eenmaal is ontstaan en rekenhandelingen met zulke grootheden eenduidig zijn vastgelegd, dan nog zijn er diverse *fysische interpretaties* voor dezelfde rekenhandeling met zulke grootheden. Bijvoorbeeld: een "+" kan fysisch verwijzen naar het na-elkaar-optreden van stappen in een proces ($q = q_1 + q_2$), maar kan ook verwijzen naar het samen beschouwen van twee deelsystemen als een systeem ($V = V_1 + V_2$).

Reactie (1) hoeft ons hier niet verder bezig te houden, immers dit is een zaak voor wiskundigen. De intuïties (2) en (3) betreffen echter de didactiek van de fysica. We zullen

daarom de vermoedens (2) en (3) analyseren in verband met de 'gelijkvormigheid' of 'gelijknamigheid' zoals we die zagen functioneren in een analogieredenering.

Bij 3. Gelijkvormigheid kunnen we zo definiëren: we noemen twee relaties gelijkvormig als er een één-op-één afbeelding te formuleren is van termen (bv. grootheden, indexen) uit de ene relatie naar termen uit de andere relatie zo dat het beeld van de ene relatie gelijk is aan de andere. De volgende twee relaties A en B zijn dan 'gelijkvormig' te noemen:

A: $\Delta T = (\Delta T)_1 + (\Delta T)_2$

B: $\Delta V = (\Delta V)_a + (\Delta V)_b$

want de afbeelding F: $\{T, 1, 2\} \rightarrow \{V, a, b\}$ heeft de eigenschap dat F(A) gelijk is aan B.

Nu geef ik als toelichting: in A wordt een netto temperatuurverandering berekend voor twee processen 1 en 2 die *na elkaar plaatsvinden*, terwijl in B een volumeverandering wordt berekend voor een systeem dat *uit* twee deelsystemen a en b *is samengesteld*. We kunnen dan zeggen dat de "+" in beide vergelijkingen een verschillende fysische interpretatie heeft (hier aangegeven met "na elkaar plaatsvinden" en "samenstellen uit"). Dit tast de boven gedefinieerde gelijkvormigheid van beide relaties niet aan. Toch ervaren we de 'analogie' tussen beide relaties nu als 'minder mooi' dan de analogie tussen:

B: $\Delta V = (\Delta V)_a + (\Delta V)_b$

C: $\Delta m = (\Delta m)_i + (\Delta m)_{ii}$ (waarbij i en ii systemen voorstellen)

Dit gevoel kunnen we onder woorden brengen door te zeggen: A en B zijn weliswaar gelijkvormig maar ongelijknamig want "na elkaar plaatsvinden" is niet gelijk aan "samenstellen uit". We rekenen dan de fysische toelichting tot de algebraïsch-geformuleerde relatie. B en C kunnen we dan behalve gelijkvormig ook gelijknamig noemen, omdat voor de operatorsymbolen in beide relaties eenzelfde fysisch gemotiveerde benaming (samenstellen uit) is gegeven.
In de fysica functioneert de benaming 'behoudswet'. Een behoudswet kan men steeds schrijven in de vorm:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta X_i = 0$$

Echter niet elke vergelijking van deze vorm formuleert een behoudswet. Immers: als X de temperatuur voorstelt en als de waarden van i genummerde stappen uit een kringproces voorstellen, dan staat hierboven geen behoudswet meer. In plaats daarvan staat er een andere benoembare relatie. Deze vergelijking zegt ons dan: "temperatuur is een toestandsgrootheid".

We willen daarom 'gelijknamigheid' als volgt formaliseren:

We noemen twee relaties gelijknamig als er een één-op-één afbeelding te formuleren is

van termen uit de ene relatie naar termen uit de andere relatie, zo dat het beeld van de ene relatie gelijk genoemd wordt aan de andere.

Twee relaties worden *gelijk genoemd* als niet alleen dezelfde tekens in dezelfde volgorde voorkomen maar ook bij navraag aan deze tekens eenzelfde toelichting wordt gegeven door de deelnemers.
'Gelijknamigheid' is dus een sociaal wetenschappelijke categorie: gelijknamigheid hangt af van wat deelnemers zeggen (op zeker moment in hun leerproces). Niettemin is er de volgende relatie met 'gelijkvormigheid' zoals we die kennen uit de wiskunde: als twee door deelnemers uitgesproken relaties (op zeker moment) gelijknamig zijn, dan zijn ze ook gelijkvormig[*], maar twee formeel gelijkvormige relaties hoeven niet gelijknamig te zijn (voor een groep op een moment). Op deze wijze blijven we er rekening mee houden dat gelijke symbolen gebruikt voor verschillende ervaringsdomeinen niet bijvoorbaat een gelijke betekenis hebben.

Bij 2. De benaming "samenstellen" (van systemen) voor het symbool "+" is mogelijk wanneer links en rechts van dit plusteken symbolen staan zoals *m*, *V*, *S*, *U* (symbolen van extensieve grootheden). Deze benaming voor het plusteken is niet mogelijk wanneer links en rechts symbolen staan als *p* of *T*. De fysische interpretatie van het plusteken is dus afhankelijk van de omringende symbolen.
We kunnen echter ook een betekenis van plusteken en gelijkteken formuleren die niet afhangt van omringende symbolen en die als het ware de harde kern vormt van hun betekenis. Immers de bewering $X = X_a + X_b$ betekent steeds dat, gegeven drie waarden voor X, X_a en X_b, na *optellen* van de waarden voor X_a en X_b en vergelijken met X de conclusie zal luiden: ze zijn gelijk. Het plusteken staat dan voor een handeling 'optellen van grootheden' welke kan worden omschreven zonder te zeggen om welke grootheden het gaat.[+]
Deze betekenis hangt echter nog wel hiervan af dat X, X_a en X_b *grootheden* voorstellen, want zouden deze symbolen voor ruimtelijke translaties staan, dan is de betekenis van de "+" niet meer dezelfde (de "+" staat dan bijvoorbeeld voor een parallellogramconstructie). Ook voor getallen hebben het plus-, min-, maal- en deelteken niet de betekenis die ze voor grootheden hebben, immers de manipulatie van eenheden ontbreekt dan.
Een ervaringsdomein-overstijgende betekenis van de rekenkundige tekens in de fysica hangt dus af van de term *fysische grootheid*. Van de relaties die deze term inhoud geven lijkt minstens de volgende vereist:

fysische grootheid = getal . eenheid

Maar dit betekent: gelet op de genoemde relatie moet de fysica al tot één ervaringsdomein (zie 13.1) geworden zijn, er is dan immers een relatie geformuleerd die generaliseert over

---

[*] Eerder (8.3) lieten we zien dat genoemde operatoren (zoals "is gelijk aan het produkt van") deel uitmaken van de *naam* van een relatie.

[+] Immers uitgaande van een grootheid als produkt van een getal en een eenheid kan men zeggen: de som van twee grootheden is gelijk aan de som van de bijbehorende getallen, vermenigvuldigd met de eenheid - die voor beide grootheden gelijk is (als voorwaarde).

de vele verschillende ervaringen die bij het meten en bij het rekenen met meetresultaten kunnen worden opgedaan. Omdat 'fysische grootheid' als term behalve naar ervaringen (met metingen) ook naar een collectie termen {m, V, h, p, T, U, S, ϕ, ...} kan verwijzen, zouden we bij wijze van didactisch vermoeden kunnen spreken van 'fysische grootheid' als overkoepelende term. Er is dus wellicht al een analogieredenering vóóróndersteld - namelijk één die leidt tot de term 'fysische grootheid' - alvorens we kunnen zeggen dat de rekenkundige symbolen in de volgende relaties

$\Delta m_1 + \Delta m_2 = 0$ (domein: vallend water)

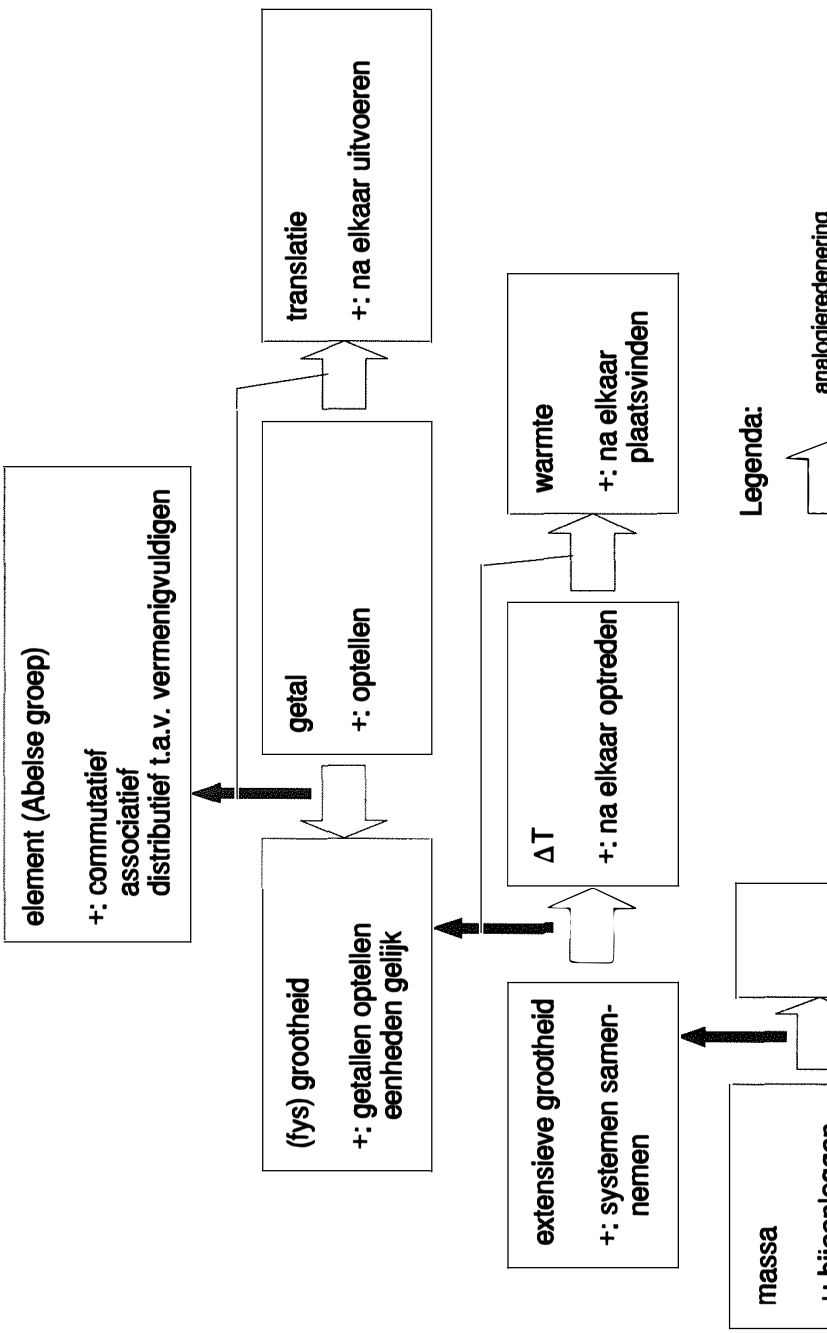
$\Delta V_1 + \Delta V_2 = 0$ (domein: drukvereffening)

een betekenis (of 'harde kern') hebben die in beide domeinen gelijk is.
Een analogieredenering welke leidt tot 'fysische grootheid' was echter in het hier gerapporteerde experiment niet georganiseerd. Het ontbreken van een afgesproken term 'fysische grootheid' blijkt in het gesprek **J-L-WK** in protocol 2.10 (r.779-910) waar **WK** niet tot probleemstellende aanpak in staat is.

Samenvattend komen we tot het volgende schema (Afbeelding 35) als suggestie, om de afhankelijkheid van rekenkundige symbolen van het hen omringende relatienet te beschrijven. Dit schema is niet meer dan een schets van een ontwerp. Bijlage 8 geeft een, ook nog schetsmatige, uitwerking van de stap naar 'fysische grootheid'. Hierbij wordt het optellen en vermenigvuldigen van grootheden ontwikkeld in een analogieredenering die vertrekt vanuit het rekenen met getallen. De wiskunde van de Abelse groep is hierbij betrokken als overkoepelende structuur - die dus zijn zin zou kunnen ontlenen aan een gewenste afbeelding van het getal naar de grootheid.

13.9. Discontinue beschrijving van de analogieredenering

Van woorden die op weg zijn term te worden met de kwaliteit van een beschrijvend niveau hebben we gezegd dat ze naar 'collecties ervaringen' verwijzen. Deze conclusie konden we ook nog volhouden voor het moment waar een beschrijvend niveau wordt 'bereikt' in de zin dat geen beroep op niet-afgesproken woordassociaties meer hoeft te worden gedaan (12.6). We konden daardoor de uitspraken van de Van Hieles eerder niet beamen, dat een woord gebruikt met de kwaliteit van beschrijvend niveau naar "heel andere dingen" of naar een "ander object" verwijst, dan een woord gebruikt met de kwaliteit van grondniveau (zie 7.3 en 10.2.1).
Maar nu kunnen we de analogieredenering in de overweging betrekken. Kunnen we hier spreken van een "ander object"? Toen deelnemer **J** opmerkte dat een indeling in vier systemen de voorkeur had "als je 't op de vorige wil laten lijken" (p.197), merkten we op dat het woordje "'t" in deze uitspraak niet verwijst naar één van de drie verhaalde situaties, immers die waren gegeven. We merkten op dat het **J** te doen was om gekozen beschrijvingen van deze situaties, die hij op elkaar wil laten lijken. Deze beschrijvingen worden niet gedicteerd door de verhaalde situatie - immers bij het komen tot een gedisciplineerde terminologie werden steeds keuzen gemaakt (11.2, 11.4). Nieuw aan **J**'s uit-



Afbeelding 36: rekenkundige symbolen in (overkoepelende) relatienetten

spraak is, dat er voor zo'n keuze nu een reden wordt gegeven, namelijk: het willen uitproberen of het nieuwe domein zich op overeenkomstige manier beschrijven laat als het vorige, waarbij dan ook woorden beschikbaar zijn om die 'manier' - de gekozen beschrijvingswijze - nader te specificeren (4 'systemen', 3 'interacties', waarvan 2 van dezelfde 'soort'). Er komen dus woorden in gebruik[*)] die niet zozeer naar situaties of ervaringen verwijzen, maar naar de gekozen beschrijvingswijze voor die situaties of ervaringen.[+)] Deze woorden verwijzen naar het beschrijvende woordgebruik dat eerder, door het maken van afspraken (waarover *nog niet* kon worden geredeneerd) is ontstaan. Van Hiele[151] volgend zouden we dan kunnen zeggen: een volgende niveau-overgang is begonnen. Of: het beschrijvend niveau is nu gepasseerd[151]. Om straks eventueel nodige wijzigingen in het niveauschema te kunnen voorstellen is het echter nuttig deze uitdrukkingen nog even te vermijden.
Wel kunnen we dit beamen: er verschijnen woorden die verwijzen naar een nieuw type 'object' (Van Hiele-Geldof[31], zie 1.3). Als object waarnaar "'t" verwijst, zagen we hierboven immers niet meer een collectie ervaringen, maar: een zelf gekozen beschrijvingswijze. Sommige van de uitdrukkingen (zoals "'t") welke naar dit nieuwe object verwijzen, krijgen de kwaliteit van term en van deze termen konden we zeggen (13.4) dat zij naar een collectie uitdrukkingen verwijzen, welke is afgebakend door afgesproken eigenschappen: overkoepelende termen. Met deze termen kan een structuur-overeenkomst tussen twee relatienetten worden beschreven en vervolgens kan deze benoemde structuurgelijkheid opzettelijk worden uitgebreid: een analogieredenering. Het 'beschrijven' van de eigen beschrijvingswijze is daardoor zinvol.

Verschillende *discontinuïteiten in onze beschrijving* van de analogieredenering zijn nu zinvol gebleken (onderzoeksvraag 8, vgl. 10.2.2):

- De ervaringsdomeinen betrokken in een analogieredenering onderscheiden zich 'discontinu': nadat de analogieredenering voltooid is kunnen we de betrokken uitspraken indelen in drie ervaringsdomeinen (13.1). Het was niet nodig de drie ervaringsdomeinen te construeren als willekeurig gekozen markeringen op een continue schaal (vgl. 10.2.2).
- Voor zover uit het gesprek blijkt dat sommige uitdrukkingen **niet** naar fysieke ervaringen verwijzen, maar naar het eigen spreken over die ervaringen, kunnen we twee soorten uitdrukkingen onderscheiden (die beide de kwaliteit van term kunnen bereiken): gewone en **overkoepelende** uitdrukkingen. Het was tot nu toe niet nodig deze twee soorten uitdrukkingen te construeren als uitersten op een continue schaal.

(* Namelijk: "'t" in J.22, protocol 2.9 op blz. 197 maar ook: "vier" (systemen) (J.14) en "twee soorten interacties" (M.45)

(+ Een dergelijke uitspraak zagen we eerder in 12.1, in protocol 1.4 r.41, "dus de druk wordt om twee redenen hoger, da's wel even spannend". De uitdrukking "twee redenen" verwijst naar (of beschrijft) de zojuist gevonden redenering. We kunnen ook zeggen: C noemt hier een eigenschap van het door haar gehanteerde 'relatienet' (door mij getekend in Afbeelding 21). Een reden om daar nog niet van een niveauovergang te willen spreken was het ontbreken van aanwijzingen voor een naar ervaringen verwijzende betekenis (ontbreken van een voorafgaand grondniveau), zie voetnoot * op p.259.

Termen en overkoepelende termen functioneren tegelijkertijd. Gezien dat een analogieredenering leidt tot een verwachting die nog een empirische toetsing behoeft kunnen we bovendien concluderen:

> *Voor een analogieredenering is het nodig dat termen welke verwijzen naar ervaringen en termen welke verwijzen naar het eigen woordgebruik tezamen functioneren.* (antwoord op onderzoeksvraag 6)

In die zin is er dus *geen* sprake van een breuk, noch van een plotselinge overgang. In het geschetste leerproces merkten we enkele momenten waar leraar en leerlingen elkaar niet verstonden. Het optreden van deze momenten werd echter **niet** toegeschreven aan de overgang van termen naar overkoepelende termen, maar kon worden toegeschreven aan het ontbreken van enkele nodige overkoepelende termen waar de leraar geen aandacht voor had gehad.
De gevonden misverstanden kunnen we tot nu toe dus zien als vermijdbaar.

Met betrekking tot het 'discontinue' onderscheid tussen term en overkoepelende term merkten we op, dat we ons het gebruik van de termen **a-b-c-d** op twee manieren konden voorstellen (13.5):

1) zo dat elk van deze termen een collectie *ervaringen* ordent, die ook met woorden als 'turbine' kunnen worden *verteld*, en

2) zo dat elk van deze termen de plaatsen ("functie", Pr.2.8, r.4) beschrijft van 'turbine', 'zuiger' als beschrijvende termen in afgesproken associaties.

In het tweede geval kan ook gezegd worden dat de overkoepelende term een collectie termen ordent, of ook, dat ze ervaringen met eigen termgebruik (in een relatienet) ordent. En dus mag 'ervaring' (onder 1) dan niet 'ervaring met eigen termgebruik' omvatten, omdat anders het hier voorgestelde onderscheid tussen 'term' en 'overkoepelende term' onformuleerbaar wordt. Het is echter niet nodig uit te sluiten dat 'ervaring' (onder 1) het eigen woord- of symboolgebruik omvat.
Als voorwaarde om term a overkoepelend te noemen stelden we dat 'turbine' en 'zuiger' de kwaliteit van beschrijvende term gekregen hebben. In dat geval is zelfs niet uit te sluiten dat beide gebruiksmogelijkheden (1 en 2) tegelijk voorkomen, dus dat een woord 'a' tegelijk een ordening in ervaringen én een ordening in het gebruik van andere woorden aangeeft. Hoewel we voor de tot nu toe opgemerkte overkoepelende uitdrukkingen (inclusief "'t") het onderscheid met andere uitdrukkingen goed konden maken, kan dus niet bijvoorbaat gezegd worden dat dit steeds mogelijk zal zijn.

13.10. Analogieredenering en contextwisseling

Als we vasthouden aan de eigenschap dat bij een contextwisseling dezelfde woorden een andere betekenis krijgen, dan behoeft een analogieredenering niet gepaard te gaan met een contextwisseling. In de onderwijssituaties waarover hier werd bericht zijn zulke betekenisveranderingen niet aangewezen. Wanneer de aandacht wisselt van het ene ervaringsdomein naar een ander, dan werden in het bestudeerde onderwijs steeds nieuwe woorden gebruikt om de gelijknamige plaatsen te vervullen, bijvoorbeeld: 'hoogte' en 'massa' werden

vervangen door 'druk' en 'volume'. De overkoepelende termen op hun beurt kregen geen eigen namen maar bleven aangeduid worden met uitdrukkingen als: 'de overeenkomsten tussen druk en hoogte'. Er was dus niet voor gekozen om een reeds in gebruik zijnd woord (bijvoorbeeld 'massa') van betekenis te laten veranderen om de rol van overkoepelende term te gaan spelen.
In hoofdstuk 12 (12.6) zagen we aan één case-studie dat het herroepen van een eerder afgesproken eigenschap voor een term kan gebeuren met het doel de collectie ervaringen waarnaar die term verwijst uit te breiden. We zagen ook dat dit herroepen van een eigenschap voor 'energiewaarde' (evenredig met variabele) samenging met het herroepen van eigenschappen van capaciteit (capaciteit is een differentiequotiënt, capaciteit is constant), hetgeen reden was om te spreken van een 'wisseling van context' omdat enkele termen tezamen van betekenis veranderden.
We kunnen ons afvragen of de overgang van 'hoogte' en 'massa' naar de overkoepelende termen *'I'* en *'E'* ook als contextwisseling te organiseren zou zijn, wanneer we de term *'I'* zouden gaan aanduiden met 'hoogte' en *'E'* met 'massa'.[*)] Immers de overgang van 'hoogte' naar *'I'* (of: 'hoogte' in tweede betekenis) houdt in dat we die eigenschappen (relaties) die hoogte van druk onderscheiden niet langer belangrijk vinden. Door alleen vast te houden aan die eigenschappen die overeenkomen zou 'hoogte' naar een meer omvattende collectie ervaringen gaan verwijzen. Omdat echter het niet de bedoeling was dat de drie ervaringsdomeinen hun identiteit zouden verliezen (13.1), werd een dergelijke aanpak niet zinvol geoordeeld in het geval van een analogieredenering die moest leiden tot entropie. Een analogieredenering vertoont dus genoeg overeenkomst met een contextwisseling, om hem als contextwisseling vorm te geven, maar daarbij gaat ook iets verloren, namelijk de identiteit van de ervaringsdomeinen.
We zullen nu nagaan of, omgekeerd, de gebeurtenis die we in 12.6 als 'contextwisseling' benoemden, of deze overeenkomsten vertoont met het gebeuren dat we hier benoemden met 'analogieredenering' en met 'redeneren volgens een overkoepelende structuur'.

13.11. Contextwisseling en analogieredenering

In 12.5.2 werd verteld hoe het gebruik van de woorden 'energiewaarde' en 'capaciteit' problematisch werd voor deelnemer **P**, nadat uit een medegedeelde proef was gebleken dat niet gesproken kon worden van een 'capaciteit' met de eigenschap constantheid. Daarbij werd meteen ook de mogelijkheid van 'energiewaarden' discutabel voor hem. Tot dan toe waren variabele, capaciteit en energiewaarde verbonden in een relatienet, waarbij de capaciteit een quotiënt was (de verandering van de energiewaarde/verandering van de variabele) en de energiewaarde een produkt.
De gerezen problemen bleken te kunnen worden opgelost zodra het termenpaar (energiewaarde, capaciteit) uit de fysica in verband gebracht werd met het termenpaar (primitieve,

[*)] Er zij aan herinnerd dat Carnot voorstelde om "het temperatuurverschil tussen de twee voorwerpen waartussen de uitwisseling van warmtestof uiteindelijk plaatsvindt" aan te duiden met "valhoogte van de warmtestof" (zie het Carnot-citaat in 4.4). 'Hoogte' stond daar dus voor de gegeneraliseerde betekenis *'I'*.

afgeleide) uit de wiskunde.*) Dit doet denken aan een analogieredenering, omdat er twee relatienetten bij betrokken zijn, die eerst apart functioneerden, totdat een probleem in één van deze twee relatienetten kon worden opgelost door beide relatienetten te verbinden. Daarbij ontstaat een één-op-één afbeelding tussen de termen uit beide relatienetten: 'primitieve' wordt afgebeeld op 'energiewaarde' en 'afgeleide' op 'capaciteit'. Daarbij ontstaan maar liefst twee nieuwe termen (vgl. één nieuwe term 'entropie') want zowel energiewaarde als capaciteit veranderen van eigenschappen, zoals eerder (12.5.3) vermeld. Het afbeelden geschiedt zó dat de relatie tussen de nieuw ontstane termen in het doeldomein (fysica) gelijknamig wordt aan de relatie van de betrokken termen in het basisdomein (wiskunde). Tot zover constateren we de eigenschappen van een analogieredenering.
Maar nu komen er een paar vragen en problemen. Ten eerste: kan het wiskundige relatienet waarin 'afgeleide' en 'primitieve' functioneren in verband worden gebracht met een ervaringsdomein? Zo ja, welke ervaringen behoren daar dan toe en welke niet? Brengen deze termen een structuur in ervaringen of in het gebruik van andere termen?
Een tweede probleem betreft de beperkte geldigheid van generalisaties, waardoor het mogelijk wordt om 'ervaringsdomeinen' van elkaar af te bakenen: welke generalisaties betreffende 'afgeleide' en 'primitieve' gelden *niet* in het beoogde doeldomein? Zulke generalisaties ken ik niet. Omgekeerd wel: de fysische generalisatie dat 'energiewaarde' een toestandsgrootheid is, heeft voor de term 'primitieve' geen algemeen geldig beeld. Het lijkt daarom eenvoudiger om de wiskundige termen 'afgeleide' en 'primitieve' hier als overkoepelende termen aan te wijzen. Immers: voor druk en volume gelden relaties die niet gelden voor *'I'* en *'E'*, namelijk: die relaties waardoor het ervaringsdomein 'volumeoverdracht' zich onderscheidt (bijv. $dU = C_V.dT + \pi_T.dV$). Omgekeerd geldt echter wel voor alle relaties van de overkoepelende termen *'I'* en *'E'* een gelijknamige relatie voor druk en volume (op het aangeduide domein), omdat de overkoepelende relaties nu juist zo gekozen zijn dat ze het gemeenschappelijke van de drie overkoepelde relatienetten aanduiden. Wanneer we 'afgeleide' en 'primitieve' als overkoepelende termen aanwijzen, dan hoeven we voor deze wiskundige termen niet rechtstreeks een collectie ervaringen aan te geven waarnaar ze verwijzen. 'Afgeleide' en 'primitieve' zouden dan verwijzen naar een collectie (o.a. fysische) termen welke is afgebakend door afgesproken relaties van 'afgeleide' en 'primitieve'.

Een derde probleem betreft de rol van het *te verlaten* relatienet, d.i. het relatienet waarin de 'capaciteit' constant is, en 'energiewaarde' een produkt van capaciteit en variabele. In een analogieredenering is er geen 'te verlaten' relatienet, tenminste niet in die zin dat sommige eigenschappen van een term terzijde worden geschoven, zoals gebeurde met eigenschap (4) van 'energiewaarde' (zie 12.6). De reden hiervan is, dat bij een analogiere-

---

(* Bovendien speelt in beide relatienetten nog een derde term mee in de analogie, die verwarrenderwijs in beide relatienetten de naam 'variabele' heeft gekregen (in de door mij ontworpen fysische tussentaal ook wel: 'energievariabele'). De betekenis van beide termen is echter niet identiek. Met *'energievariabele'* wordt bedoeld een fysische grootheid, waarvan de *verandering* steeds samen gaat met veranderingen van één of meer andere energievariabelen, en wel zo dat in geval van twee veranderingen aan beide eenzelfde ruilwaarde kan worden toegekend (zie 12.4).
Met *'variabele'* wordt in de wiskunde bedoeld een symbool dat staat voor de getallen waarop een 'functie' (omschreven als rekenvoorschrift) kan worden toegepast.

denering de betrokken ervaringsdomeinen zich door hun bijzonderheden *blijven* onderscheiden (13.1).
Zou het mogelijk zijn onderwijs te ontwerpen waarin het domein van 'constante capaciteiten' zich blijft onderscheiden van een domein voor 'veranderlijke capaciteit'? En zo ja, zou dan in die andere opzet van een analogieredenering gesproken kunnen worden?
In dat geval zouden op het nieuwe domein andere woorden/symbolen gebruikt moeten worden, net als we voor T en S andere symbolen kozen (namelijk *'T'* en *'S'*) dan voor h en m of p en V. Laat ik dit nieuwe ontwerp even ruw uitwerken, zodat tot een analyse kan worden overgegaan.
Op het 'constante capaciteiten' domein hadden we de termen energiewaarde, capaciteit en variabele (E, C en v) met afgesproken eigenschappen:*)

Voor **energiewaarde**
1 - heeft betrekking op een verandering die eindigt in het gekozen nulpunt van de variabele
2 - is als eigenschap toe te kennen aan de hoogte waarop de verandering begon. (of: energiewaarde is onafhankelijk van de gevolgde weg naar het nulpunt; of: $R_{AB} = R_{AC} + R_{CB}$)
3 - is even groot voor twee veranderingen van variabelen, als deze samen plaats vinden zonder andere veranderingen
4 - is evenredig met verandering van variabele (klopt met: evenredigheidsfactor 'capaciteit' is constant)

Voor **energiecapaciteit**
i - is constant
ii- geeft de 'energiewaarde' per eenheid van de variabele, of: is evenredigheidsfactor bij de berekening van de energiewaarde

Voor **energievariabele** (voorbeeld: hoogte)
a - Constateerbare verandering die steeds samen gaat met andere constateerbare veranderingen
b - Aan waarden van de energievariabele (bijv. 'hoogten') zijn één op één energiewaarden toe te kennen

Om door middel van een analogieredenering tot het resultaat te komen dat deelnemer **P** (zie 12.5.1) bereikte, zouden hierbij de volgende nieuwe termen (met andere eigenschappen) moeten ontstaan, waarvan de geldigheid dan - aangezien het een analogieredenering betreft - voorlopig beperkt wordt gedacht tot het domein van niet-constante capaciteiten of 'capaciteiten*':

Voor '**energiewaarde***'
1* - heeft betrekking op een verandering die eindigt in het gekozen nulpunt van de variabele*
2* - is als eigenschap toe te kennen aan de hoogte waarop de verandering begon. (of: energiewaarde* is onafhankelijk van de gevolgde weg naar het nulpunt; of: $R_{AB}^* = R_{AC}^* + R_{CB}^*$)
3* - is even groot voor twee veranderingen van variabelen*, als deze samen plaats

(* Zie 12.5.2, waar protocollen werden besproken en 12.5.3, waar naar aanleiding van deze protocollen wordt nagegaan volgens welke eigenschappen het gebruik van 'energiewaarde' door studenten nu gedisciplineerd is. Deze of een dergelijke voorgeschiedenis is hier verondersteld.

vinden zonder andere veranderingen
4* - is te berekenen als de primitieve van de capaciteit*, als functie van de variabele*

Voor '**energiecapaciteit***'
i* - is afhankelijk van (is een functie van) de energievariabele
ii*- geeft de verandering van de energiewaarde* per eenheid van de verandering van de variabele* in het limietgeval van kleine veranderingen, of: is de afgeleide van de energiewaarde*, als functie van de variabele*

Voor '**energievariabele***'
a* - Constateerbare verandering die steeds samen gaat met andere constateerbare veranderingen
b* - Aan waarden van de energievariabele* (bijv. 'hoogten') zijn één op één energiewaarden* toe te kennen

Het sterretje * wordt hier gebruikt om provisorisch een nieuw woord te maken uit een eerder gebruikt woord.
In bovengeformuleerd ontwerp van een nieuw relatienet zijn sommige eigenschappen qua formulering onveranderd gebleven, met als enig verschil dat nu naar nieuwe termen (gemarkeerd *) wordt verwezen. Hiermee is voldaan aan de eigenschap van een analogieredenering, dat termen uit het basisdomein worden afgebeeld op termen uit het doeldomein, zo dat beeld en origineel gaan voorkomen in gelijknamige relaties. Voor enkele van de geformuleerde eigenschappen lukt dit niet, namelijk voor die relaties waardoor de twee domeinen zich onderscheiden (die het rechtvaardigen van twee domeinen te spreken). Wanneer we nu de volgende overkoepelende termen ontwerpen[*)], dan kunnen we daarmee toch een relatie tussen deze deels ongelijknamige eigenschappen formuleren:

Voor '**energiewaarde+**'
4+ - kan berekend worden uit capaciteit+ en variabele+
en bovendien de eigenschappen 1, 2 en 3 die qua formulering niet veranderen

Voor '**energiecapaciteit+**'
i+ - (geen overkoepelende eigenschap voor i en i*)
ii+- functioneert als middel om aan twee tezamen optredende veranderingen van variabelen+ een gelijke 'ruilwaarde+' d.i. verandering van energiewaarde+ toe te kennen. (zie eigenschap 3 en 4 van 'energiewaarde')

Voor '**energievariabele+**'
de eigenschappen a en b die qua formulering niet veranderen

(* Let wel: wij ontwerpen overkoepelende termen voor leerlingen. Hierbij gebruiken we onze kennis van het gewenste doeldomein. Maar hier geldt wat steeds geldt bij de voorbereiding van een didactisch experiment: we moeten nog maar afwachten of studenten tot deze overkoepelende termen zullen komen.
Zij kennen het doeldomein nog niet, althans niet met betrekking tot de problematische eigenschappen (4*, i*, ii*). Hun redenen voor het komen tot overkoepelende termen zullen dus hierin van de onze verschillen. De redenering hierboven is dus ontwerpend, en aangezien wordt aangenomen dat we het onderwijsdoel kennen, ook inleidend. Bij het vooraf ontwerpen van een opgavenserie kàn dit niet anders zijn. Het uitleidende ontstaat dus pas, als we tijdens het onderwijs reageren op dat wat anders is dan we verwachten.

Hierbij overkoepelt de uitdrukking 'kan berekend worden' in eigenschap 4+ van 'energiewaarde+' de eigenschappen 4 en 4* geformuleerd met 'produkt', respectievelijk 'primitieve'. Ook overkoepelt 'middel om toe te kennen' in eigenschap ii+ van 'energiecapaciteit+' de eigenschappen ii en ii* geformuleerd in termen van 'evenredigheidsfactor', respectievelijk 'afgeleide'.
Nu blijkt er een verschil met de analogieredenering die leidde tot entropie, want welke redenen kunnen lerenden hebben om deze overkoepelende termen te vormen? Bij het komen tot entropie kon de juistheid van de overkoepelende termen door het vergelijken (objectiveren) van twee relatienetten *geconstateerd* worden, waarna men voor een derde, nog onvolledig relatienet de juistheid van de overkoepelende termen als hypothese (achteraf te toetsen) kon hanteren.
In de onderwijssituatie die we nu ontwerpen kan op het nieuwe ervaringsdomein (geen constante capaciteit) het samengaan van de eigenschappen 1*, 2* en 3* empirisch worden geconstateerd, welke overeenkomen met 1, 2 en 3 op het oude ervaringsdomein. Deze overeenkomst kan - zo wordt volgens dit ontwerp verwacht - reden zijn te verwachten dat ook de plaats vervuld door eigenschap 4 kan worden overgenomen door een nog te formuleren eigenschap 4*. De overkoepelende eigenschap 4+ benoemt deze plaats ("functie" in 12.5.3, p.289), die zowel 4 als (nog te formuleren) 4* vervullen.*) De eigenschap 4+ van de overkoepelende term 'energiewaarde+' stelt dus een eis aan de nog te formuleren eigenschap 4*, net zoals de eigenschappen van *'E'* voor lerenden als eisen gingen functioneren voor een nog te construeren term *X* die bruikbaar zou zijn op het nieuwe ervaringsdomein (temperatuurverschil in plaats van drukverschil).
Verschil is dat nu één eigenschap van een term 'energiewaarde*' kan worden vermoed op grond van de constatering dat de overige eigenschappen overeenkomen, terwijl bij het komen tot entropie een hele term, met verschillende eigenschappen, kon worden vermoed op grond van de constatering dat op twee eerder bestudeerde ervaringsdomeinen diverse termen volgens overeenkomstige eigenschappen overeenkomstig geformuleerd konden worden.

Uit de analyse tot nu toe blijkt dat nog niet geheel is voldaan aan de eigenschap van een analogieredenering dat originelen, beelden en overkoepelende termen in gelijknamige relaties voorkomen. Immers, we kunnen

- 4 - is evenredig met verandering van variabele (klopt met: evenredigheidsfactor 'capaciteit' is constant)
- 4* - is te berekenen als de primitieve van de capaciteit*, als functie van de variabele*
- 4+ - kan berekend worden uit capaciteit+ en variabele+

nog niet 'gelijknamig' noemen. En evenmin:

- ii - geeft de 'energiewaarde' per eenheid van de variabele, of: is evenredigheidsfactor bij de berekening van de energiewaarde
- ii*- geeft de verandering van de energiewaarde* per eenheid van de verandering

) Hetzelfde kan gezegd worden van de eigenschap ii+ van de overkoepelende term 'energiecapaciteit+' in relatie tot de eigenschap ii en de nog te formuleren eigenschap ii.

van de variabele* in het limietgeval van kleine veranderingen, of: is de afgeleide van de energiewaarde*, als functie van de variabele*

ii+- functioneert als middel om aan twee tezamen optredende veranderingen van variabelen+ een gelijke 'ruilwaarde+' d.i. verandering van energiewaarde+ toe te kennen. (zie eigenschap 3 en 4 van 'energiewaarde)

Aan dit bezwaar is tegemoet te komen door de eigenschappen genummerd 4 te herformuleren als volgt:

Voor **energiewaarde**

4a - kan berekend worden uit capaciteit en variabele

4b - en de berekening (4a) voldoet hieraan: de energiewaarde is evenredig met verandering van variabele, met 'capaciteit' als evenredigheidsfactor

We kunnen dan eigenschap 4a afbeelden naar het doeldomein. De eigenschap 4b is dan een eigenschap waardoor het ene domein zich van het andere blijft onderscheiden. Op dezelfde wijze kan ook 4* worden geherformuleerd tot twee eigenschappen waarvan er één gelijknamig is met 4a en de andere niet. Voor ii en ii* lukt zo'n herformulering eveneens. Er is dan voldaan aan de eigenschap van de analogieredenering dat originelen, beelden en overkoepelende termen in gelijknamige relaties optreden. Bovendien is voldaan aan de eigenschap dat daarnaast sommige eigenschappen van termen niet gelijknamig afgebeeld kunnen worden, waardoor de betrokken ervaringsdomeinen zich van elkaar blijven onderscheiden.
Ondertussen hebben we kunnen opmerken, dat het streven naar een overkoepelende structuur ook een hernieuwde analyse van het basisdomein met zich mee kan brengen. Immers: wat eerst als een enkele eigenschap van 'energiewaarde' geformuleerd was, is nu geformuleerd als twee eigenschappen.[*)]
Ook bij het komen tot entropie is het voorkomen van gelijknamige 'a'-eigenschappen naast niet-gelijknamige 'b'-eigenschappen aan te wijzen: de overkoepelende termen *I*, *E*, *U* tezamen bepaalden de nieuwe term *X* slechts voorlopig en alleen wat zijn gelijknamige eigenschappen betreft. Naast de verwachte gelijknamige eigenschap $\Delta X_{totaal} = 0$ wordt immers empirisch gevonden dat deze verwachte eigenschap alleen voor reversibele processen opgaat, terwijl algemeen $\Delta X_{totaal} \geq 0$. Dus ook hier zien we een eigenschap in het doeldomein die is te splitsen in een door afbeelding verwachte 'a'-eigenschap en een niet door afbeelden te vinden 'b'-eigenschap.

We hebben nu (in 13.10 en hierboven) gezien dat een analogieredenering en een contextwisseling nauw verwant zijn, maar niet identiek.

Een ontwerper van onderwijs kan een ontwerp voor een analogieredenering omwerken tot een ontwerp voor een contextwisseling, en vice versa.

Zoals we zagen komt dit neer op de keuze om al dan niet nieuwe woorden in te voeren voor de nieuwe termen die gelden op het nieuwe ervaringsdomein. Deze keuze hangt

---

[*)] Vergelijk 11-6[2] waar ook een heroverweging van een bij 11-3.e[2] gegeven analyse (van het basisdomein) wordt gevraagd, met het oog op het komen tot gelijknamige relaties.

samen met de bedoeling van de ontwerper: is het de bedoeling dat basisdomein en doeldomein door sommige relaties van elkaar onderscheiden blijven, dan is het nodig nieuwe woorden in te voeren, zoals *T* en *S* naast *p* en *V*, zodat beide termenparen onderscheidend gebruikt kunnen blijven worden.
Is het echter de bedoeling dat beide domeinen tot één domein worden dan kan het wenselijk lijken de oude woorden te blijven gebruiken: immers dan *vervangen* de nieuwe termen de corresponderende oude, die daarna niet meer gebruikt hoeven te worden. Het lijkt dan geen bezwaar dezelfde woorden te blijven gebruiken, die dan, zo wordt wel gezegd, een "gegeneraliseerde betekenis" hebben gekregen. Een voordeel van deze werkwijze kan zijn dat de gelijke woordkeus de geschiedenis van een term aangeeft, die de groep lerenden heeft meegemaakt, waardoor die term hen vertrouwd is. Bij deze overweging is echter de volgende vraag te stellen: op welk moment kan een lerende beoordelen dat het zinnig is basisdomein en doeldomein niet langer te onderscheiden?

In 12.5.2 zagen we dat deelnemers aanvankelijk weigerden om 'energiewaarden' toe te schrijven aan temperaturen, nadat gebleken was dat van een constante capaciteit geen sprake kon zijn. Wanneer dan medegedeeld wordt dat beide voorgestelde uitvoeringen van de proef dezelfde temperatuurstijging tot gevolg hebben (protocol 3.10 r.166-169) zodat dus het samengaan van de eigenschappen 1*, 2* en 4* voor energiewaarde* is geconstateerd, dan blijft **P** problemen ervaren met het gebruik van het woord 'capaciteit', wanneer daarmee geen constante wordt bedoeld. Zodra echter de term 'afgeleide' en daarmee ook het integreren (protocol 3.13, r.30-32) beschikbaar is gekomen zijn deze problemen voor hem verdwenen en kan hij een niet-constante 'capaciteit' begrijpen (r.37-42).
Dit plotselinge begrijpen konden wíj begrijpen als we veronderstellen dat **P** geleid werd door een overkoepelende eigenschap zoals 3+ voor 'energiewaarde+': "kan berekend worden uit capaciteit+ en variabele+".[*] Zodra hij ziet hoe aan deze overkoepelende eigenschap voldaan kon worden, kon hij het gebruik van de oude woorden 'energiewaarde' en 'capaciteit' in een nieuwe betekenis (energiewaarde* en energiecapaciteit*) accepteren.
Door te gaan spreken over een analogieredenering als een onvolledige afbeelding van een relatienet op een ander relatienet konden we dus ophelderen wat we bedoelen met het in 12.5.3 nog intuïtief gebruikte woord 'functie'. Zo'n 'functie' is te beschrijven als een benoemde (gelijknamige) plaats in twee of meer relatienetten, benoemd met een overkoepelende term.
We vinden dus dat we **P**'s leerproces kunnen beschrijven in de termen waarin we eerder een analogieredenering beschreven. Maar dan moet ook gevraagd worden naar de eigenschappen die de beide betrokken ervaringsdomeinen blijvend onderscheiden.

Wel, zo'n blijvend onderscheid is in dit geval niet nodig. Want als eigenschap 3b* voor

---

[*] Overkoepelende eigenschap ii+ voor 'energiecapaciteit+' kan ook deze rol gespeeld hebben. We weten niet precies waaraan **C** heeft gedacht toen hij 'capaciteit' in de nieuwe betekenis begreep. Waar het om gaat is, dat we de door hem gezette stap moeilijk anders begrijpen kunnen dan via een beroep op één of andere overkoepelende eigenschap, die de plaats (of "functie" in 12.5.3) benoemt, die de termen uit het 'constante capaciteiten' relatienet gemeen hebben met te vormen termen voor het 'capaciteiten als afgeleide' relatienet.

'energiewaarde*' eenmaal geformuleerd is:

> energiewaarde* is te berekenen als de primitieve van de capaciteit*, als functie van de variabele*

dan kunnen we ons afvragen wat deze regel oplevert in het bijzondere geval dat $C(v)$ gelijk is aan een constante. Via de wiskunde valt dan te beredeneren dat de primitieve van $C(v)$ in dat geval gelijk is aan $C.v$ (als we de integratieconstante nul nemen). En dat komt overeen met eigenschap 3b voor 'energiewaarde':

> de energiewaarde is evenredig met verandering van variabele, met 'capaciteit' als evenredigheidsfactor

Dus eigenschap 3* kan eigenschap 3 geheel vervangen. De twee domeinen onderscheiden zich nu niet meer.[*)]
Volgens de nu ontworpen beschrijving van **P**'s leerproces (beschrijving als analogieredenering) kan dit echter pas worden ingezien nádat eigenschap 3* (inclusief 3b*) geformuleerd is, in een poging om te voldoen aan de overkoepelende eigenschap 3+. En dus begrijpen we **P**'s weerstand tegen de aandrang om al eerder de oude woorden op het nieuwe domein te gaan gebruiken.

Het leerproces dat leidde van constante capaciteiten tot capaciteiten als afgeleiden was **niet ontworpen** als analogieredenering. Wel leefde het vermoeden dat hier van een contextwisseling sprake zou kunnen zijn, maar ook die stond me toen niet duidelijk voor ogen (zie 12.5.2). Nadat ik de "sprong in de leercurve" (Van Hiele[30], zie 10.2.1) bij deelnemer **P** had opgemerkt, was ik overtuigd dat het gebeuren een 'contextwisseling' mocht heten, en deze overtuiging werd bevestigd toen kon worden aangewezen hoe twee woorden tezamen van betekenis veranderden, waarbij de ene verandering de andere met zich meebracht (zie 12.5.4).
Nu zien we dat de bedoelde stap van constante capaciteiten naar capaciteiten als afgeleide ook als analogieredenering ontworpen had kunnen worden. Vanuit dat gezichtspunt is er kritiek uit te oefenen op de opgaven, want als analogieredenering is ze niet goed georganiseerd. Ten eerste zijn er geen opgaven aan te wijzen die apart aandacht besteden aan het ontstaan van overkoepelende termen. Ten tweede zou het onjuist kunnen zijn om al tijdens het leerproces de nieuwe termen (die bezig zijn te ontstaan) aan te duiden met de oude woorden, terwijl pas na afloop geconstateerd kan worden dat beide domeinen zich niet meer onderscheiden. Dat laatste is immers bij een analogieredenering in het algemeen niet het geval.

We kunnen nu onderzoeksvraag 9 beantwoorden door de volgende samenhang te formuleren tussen contextwisseling en analogieredenering:
- Een contextwisseling (in onderwijs) kan ook worden georganiseerd als analogieredenering, en vice versa.

[*)] Strikt genomen moeten we nog nagaan of ook de onderscheidende eigenschap iib* geheel iib kan vervangen. De lezer kan dit zelf nagaan.

- Beide verschillen van elkaar in de keuze: de nieuwe 'beeld'-termen al dan niet met dezelfde woorden aan te duiden als de 'originelen', die van toepassing waren in het basisdomein (kiest men hiervoor, dan zijn er misverstanden mogelijk die bij de andere keuze niet voorkomen).
- Beide verschillen van elkaar in hun resultaat: een contextwisseling heeft als resultaat één relatienet dat van toepassing is op één ervaringsdomein, dat basisdomein en doeldomein beide omvat; een analogieredenering heeft als resultaat een nieuw relatienet van toepassing op een nieuw ervaringsdomein dat van het basisdomein onderscheiden blijft. (Wel zijn beide dan verbonden door het 'overkoepelend relatienet').
- Wanneer de beslissing om basisdomein en doeldomein niet langer te onderscheiden pas tegen het eind van de contextwisseling genomen kan worden, dan behoeft het begin van een contextwisseling zich niet te onderscheiden van een analogieredenering.
- Wanneer de beslissing om basisdomein en doeldomein niet langer te onderscheiden pas tegen het eind van de contextwisseling/analogieredenering genomen kan worden, dan is het 'sluipend' (5.2.3) te noemen om beeldtermen en origineeltermen alvast met eenzelfde woord aan te duiden. Het begin van een contextwisseling dient dan dus zo georganiseerd te worden als een analogieredenering.

Hiermee is de contextwisseling, evenals de analogieredenering (13.9), beschreven met een discontinu onderscheid tussen ervaringsdomeinen (onderzoeksvraag 10).

P's plotselinge leerresultaat beschreven we hierboven door te veronderstellen dat een overkoepelende eigenschap[*)] voor hem richtinggevend was. In de opgavenreeks waren echter geen opgaven aan te wijzen die op het ontstaan van 'overkoepelende termen' gericht waren. Vanuit het *ontworpen* onderwijs kan het functioneren van een overkoepelende eigenschap voor **P** dus als een toevalstreffer worden gezien. Daarmee begrijpen we dat bij **N** en **O** deze zelfde produktiviteit bij het komen tot energiewaarde als een primitieve niet werd opgemerkt (zij waren op andere wijzen produktief).
Gelet op de verschillende *voorgeschiedenis* der deelnemers was er echter geen sprake van toeval, zoals we eerder opmerkten (12.5.3). In hoofdstuk 14 zal een methode worden uitgeprobeerd om deze gespreksgeschiedenis systematisch te analyseren.

13.12. De rol van de infinitesimaalrekening

Hierboven is de rol van de differentiaal- en integraalrekening bij het komen tot energiewaarde als primitieve van de warmtecapaciteit als functie van de temperatuur, nog onderbelicht gebleven. Voordat daar nader op wordt ingegaan, is het nodig om een beperking aan te geven van de experimenten waarover hier werd bericht. Op grond van het opgemerkte leerproces bij deelnemer **P** kunnen we zeggen hoe wiskundige termen kunnen gaan functioneren in de fysica, wanneer er voor studenten een probleem is ontstaan waarvoor

[*)] Een eigenschap die we konden zien als eigenschap van een overkoepelende term in een analogieredenering.

die termen een oplossing bieden. Wanneer dat gebeurt is de onderwijssituatie dus *probleemstellend* te noemen voor zover het de rol van de fysica betreft. Immers, er ontstaat een probleem met het gebruik van een eerder ontstaan fysisch relatienet op een nieuw ervaringsdomein (geen constante capaciteiten). Dat probleem is aanleiding tot het ontstaan van een nieuw fysisch relatienet, waarbij een wiskundig relatienet te hulp werd geroepen. Hierbij werd aangenomen dat dit wiskundig relatienet beschikbaar was. Er kon geconstateerd worden dat de nodige wiskundige relaties minstens *verbaal* beschikbaar waren *en ook* ingezet konden worden ter oplossing van een fysisch probleem. Er is echter niet nagegaan of de nodige wiskundige termen al naar ervaringen verwezen, en zo ja naar welke ervaringen, of zo nee, waarnaar ze dan wel verwezen. Het is mogelijk dat de nodige wiskundige termen tot nu toe alleen in verbale associaties*) functioneerden en dus hier voor het eerst een verwijzende betekenis kregen als een overkoepelende term die verwijst naar een collectie fysische termen.+) In dat geval is de onderwijssituatie in zoverre sluipend te noemen dat de juistheid van de nodige wiskundige relaties door leerlingen moest worden gehanteerd alvorens die juistheid voor hen controleerbaar werd. Pas achteraf vond enige controle plaats, namelijk door de gebleken bruikbaarheid bij het ontstaan van de fysische term 'energiewaarde*'.
We kunnen dit ook zo zeggen dat ten aanzien van fysische termen wel een probleemstellende situatie ontstond (voor deelnemer **P**, en ondanks dat het onderwijs daar niet maximaal op gericht was), maar dat ten aanzien van de nodige wiskundige relaties geen controle heeft plaatsgevonden of deze ook probleemstellend tot stand gekomen waren. Met deze beperking in gedachten moeten we het voorstel bezien, gedaan in 13.11 (p.328) dat de wiskundige termen 'primitieve' en 'afgeleide' het best als overkoepelende termen te beschrijven zijn.
Aan de daar gegeven argumenten vallen nu nog enige overwegingen toe te voegen. Als overkoepelende termen werden eerder (13.11) o.a. genoemd:

'**energiewaarde+**'
4+ - kan berekend worden uit capaciteit+ en variabele+
en bovendien de eigenschappen 1, 2 en 3 die qua formulering niet veranderen

'**energiecapaciteit+**'
i+ - (geen overkoepelende eigenschap voor i en i*)
ii+- functioneert als middel om aan twee tezamen optredende veranderingen van variabelen+ een gelijke 'ruilwaarde+' d.i. verandering van energiewaarde+ toe te kennen. (zie eigenschap 3 en 4 van 'energiewaarde)

Deze termen functioneren *gedurende* de in 13.11 ontworpen analogieredenering, dus in een stadium dat 'primitieve' en 'afgeleide' nog niet als oplossing voor het probleem zijn herkend. Zodra dit wel het geval is, kan de minder specifieke uitdrukking "kan berekend worden uit" vervangen worden door een formulering in termen van 'primitieve' die zowel de relatie van capaciteit en variabele, als van capaciteit* en variabele* beschrijft. Het 'overkoepelend 'relatienet' ontwikkelt zich dan gedurende de analogieredenering.

(* zoals: als er staat *"E'(T) = mc"* dan mag er na volgen *"E(T) = mcT"*.
(+ De term 'primitieve' verwijst naar de termen energiewaarde en energiewaarde*, in relatie tot energiecapaciteit en energiecapaciteit* respectievelijk.

Hiertegen valt echter in te brengen dat, zodra dit eenmaal is opgemerkt, beide domeinen zich niet meer onderscheiden en er dus ook niets meer te overkoepelen valt. Dus zodra 'primitieve' en 'afgeleide' tot het 'overkoepelend relatienet' kunnen gaan behoren, vervalt de reden die we hadden om dit relatienet 'overkoepelend' te noemen.
Men kan zich echter de volgende uitbreiding van het verzorgde onderwijs voorstellen. Er wordt een nieuw probleem gesteld, dat enige gelijkenis vertoont met het eerdere probleem, maar er ook van verschilt:

> Bij een constante snelheid v weten we dat voor de positie *s* langs een lijn geldt:
> $s = s_0 + v.t$
> Welke relatie zouden we kunnen formuleren voor een niet-constante *v*?

Om tot de conclusie te komen dat de eerder gevonden oplossing, in termen van 'afgeleide', 'primitieve' en 'variabele' hier eveneens voldoet zou men overeenkomsten moeten formuleren (overkoepelende termen vormen) tussen E in het vorige probleem, s in het nieuwe, en zo ook tussen capaciteit C en snelheid v, en tussen de energievariabele T en de tijd t. Na het formuleren van enkele overeenkomstige eigenschappen kunnen de overkoepelende termen benoemd worden als (respectievelijk): primitieve, afgeleide, variabele. Het gebruik van de overkoepelende relaties op het nieuwe domein (kinematica) is dan als resultaat van een analogieredenering te zien.
Omdat voor dit nieuwe stuk onderwijs geldt dat het doeldomein (kinematica) zich van het basisdomein (energieleer) blijft onderscheiden, omdat E niet identiek wordt met s - hetgeen bij energiewaarde en energiewaarde* wel het geval was - kunnen we door dit didactisch gedachtenexperiment dus vermoeden dat 'primitieve', 'afgeleide' en 'variabele' ook als overkoepelende termen kunnen *blijven* functioneren. We kunnen ons nu afvragen of deze conclusie te generaliseren is naar wiskundige termen in het algemeen:

> *Wellicht kan de wiskunde didactisch beschreven worden als een relatienet dat vakspecifieke (fysische, economische, ..) relatienetten overkoepelt.*

Dit zou inhouden dat wiskundige termen de 'plaatsen' van vakspecifieke termen in relaties beschrijven - voor zover de betreffende wetenschap dit zelf niet doet (vgl. Afbeelding 35). Daarmee zou dan het probleem opgelost zijn dat wiskundige termen geen eigen ervaringsdomein lijken te hebben, waarnaar ze verwijzen. Het voldoet niet te zeggen dat de algebraïsche termen naar 'ervaringen bij het omgaan met getallen' verwijzen, immers getallen zijn zelf symbolen waarvoor de vraag gesteld moet worden waarnaar ze verwijzen. Het vermoeden dat wiskundige termen als 'overkoepelende termen' beschreven kunnen worden, zou in een onderwijsexperiment nader te onderzoeken zijn - bijvoorbeeld in een onderwijsexperiment waar de ontwikkeling van de term 'fysische grootheid' wordt nagestreefd (bijlage 8).

13.13. Een beschrijvende term wordt overkoepelend

Eerder signaleerden we dat de termen a, b, c en d (13.5) wellicht kunnen functioneren als beschrijvende termen die naar collecties ervaringen verwijzen, maar ook als overkoepelen-

de termen die naar collecties termen verwijzen. Deze mogelijkheid dat een term op beide wijzen zou kunnen functioneren zullen we nu onderzoeken door het ontstaan van de term 'ruilwaarde' opnieuw te bezien.
In 5.4.2 werd geconcludeerd dat in probleemstellend onderwijs een keuze voor het toekennen van 'gelijke waarden' vooraf moet gaan aan het opstellen van formules voor deze 'ruilwaarden'. Om hieraan te voldoen werd deelnemers eerst gevraagd een ervaring te noemen waar zij twee tezamen optredende veranderingen "even veel waard" zouden willen noemen. In het uitvoerige gesprek over deze opgave (5.4.2) werd uiteindelijk niet alleen zo'n ervaring als herinnering opgehaald, maar werden ook de volgende voorwaarden genoemd voor zo'n ervaring (protocol 3.1):

1 - geen wrijving (protocol 3.1, r.23, 79)
2 - niet meer dan twee veranderingen (energievormen) op te merken (r.30, 161, 191, 199)
3 - terugkeer naar zelfde hoogte en snelheid (beginsituatie) blijkt mogelijk (r.34, 213-215, 230, 284-300)

We kunnen dus zeggen dat deze eigenschappen de collectie ervaringen afbakenen waarnaar 'ruilwaarde' of 'even veel waard' op dat moment verwijst. Deze term verwijst dan dus naar ervaringen, het is een (gewone) beschrijvende term te noemen.
Direct hierna volgden opgaven waar enkele verschillende berekeningswijzen voor zulke 'ruilwaarden' worden uitgeprobeerd, welke elk leiden tot een andere eenheid van ruilwaarde. Deze stap is eerder besproken in 12.3. We bespraken daar het ontstaan van twee termen 'ruilwaarde van hoogte' en 'ruilwaarde van temperatuur' als knooppunten in een relatienet waar, bij een opzet beginnend vanaf grondniveau (in het VWO) ook de derde term 'ruilwaarde van snelheid-kwadraat' een rol in zou moeten spelen (zie 6.3.2). Het gaat dan dus om verschillende termen die elk 'ruilwaarde' te noemen zijn.
Elk van deze 'ruilwaarden' staat in een relatie tot twee andere ruilwaarden, welke relaties algemeen te formuleren zijn als volgt:

a - gelijkheid onder de voorwaarden 1, 2 (en 3)[*], boven genoemd

Daarnaast staat elk van deze ruilwaarden in relatie tot een eigen variabele en tot een eigen capaciteit. Ook deze relaties zijn als eigenschappen te formuleren, die een correct gebruik van elk van deze ruilwaarden afbakenen.

b - evenredig met de eigen 'variabele' (1-5c)[3]
c - evenredigheidsfactor heet een 'capaciteit'

De woorden 'ruilwaarde' 'variabele' en 'capaciteit' duiden nu plaatsen in relaties aan, die elk door verscheidene termen vervuld worden. Wanneer dan een nieuw variabele-individu in studie genomen wordt (1-7)[3] nádat deze plaatsen benoemd zijn (1-5)[3] dan verwachten

[*] Eigenschap 3 werd bij volgende opgaven niet meer gehanteerd door de deelnemers, waaruit blijkt dat stilzwijgend 'ruilwaarde' al onderscheiden wordt van wat we in hoofdstuk 3 'gebruikswaarde' noemden. In het 1994-onderwijsexperiment werd dit onderscheid meer expliciet nagestreefd (zie 1-8[2] en vanaf §6[2]).

we dat deelnemers een eigen capaciteit-individu en een eigen ruilwaarde-individu zullen willen formuleren voor dit variabele-individu. De eigenschappen van een nieuw ruilwaarde-individu worden dan verwacht, op eenzelfde manier als ook de eigenschappen van de term *X* (entropie) verwacht waren, geleid door de eigenschappen van 'ruilwaarde', welke term als overkoepelende term functioneert. Er worden dus nieuwe termen gevormd door het afbeelden van eerdere termen, geleid door uitgesproken 'overkoepelende termen', namelijk: ruilwaarde, variabele en capaciteit.
Bijzonder is dat hier de diverse 'ruilwaarden' onderling gerelateerd zijn door gelijkheden (eigenschappen vereist volgens overkoepelende eigenschap a), zodat dus het 'afbeelden' nu niet geschiedt tussen termen uit te onderscheiden relatienetten, maar tussen termen uit één relatienet. We zouden kunnen zeggen dat de overkoepelende termen hier een (niet-ruimtelijke) 'symmetrie-eigenschap' van dit relatienet verwoorden, omdat ze aangeven hoe dit relatienet op zichzelf kan worden afgebeeld.

Ten aanzien van de vraag, wat we nu wel en niet rekenen onder 'ervaring' (zie 13.9) valt op te merken dat de eigenschappen 1, 2 en 3 geschikt lijken om 'ervaringen' te sorteren, waarbij 'ervaring' nog geen analyse van eigen woordgebruik veronderstelt.*) In het bijzonder hoeft de 'ervaring' hier niet te omvatten dat er iets berekend wordt (geen hanteren van relaties). Uiteraard impliceren de genoemde eigenschappen *wel* dat er analyse van eigen woordgebruik gaande is. Deze analyse kan echter naar verwachting geschieden door sorteren van ervaringen die kunnen worden opgedaan *zonder* dat al zo'n analyse heeft plaatsgehad. Laten we zulke ervaringen 'ervaringen(1)' noemen.
Van de eigenschappen genoemd a, b en c kunnen we zeggen dat deze ongeschikt zijn om ervaringen(1) te sorteren. Immers om na te gaan of een ervaring aan zowel a "gelijkheid" als b "evenredigheid" voldoet, moet deze ervaring minstens tot een getal geleid hebben. Deze 'ervaring(2)' omvat een berekening, dus het hanteren van een afgesproken associatie. Zulke 'ervaring' veronderstelt wel voorafgaande analyse van woordgebruik.
De eigenschap van 'ruilwaarde van hoogte', dat deze term naar een collectie ervaringen(2) verwijst (zie 12.3), kan nu in verband worden gebracht met onze opmerking dat gebruik van deze term al gestructureerd wordt door de overkoepelende term 'ruilwaarde'. Gebruik van een overkoepelende term houdt immers in, dat niet alleen analyse van eigen woordgebruik gaande is, maar ook dat al regelmatigheden in eigen *term*gebruik zijn opgemerkt en afgesproken (13.9).
Hiermee is niet gezegd dat termen die naar ervaringen(2) verwijzen alleen het eigen woordgebruik 'tot object' hebben. Van 'ruilwaarde van hoogte' konden we immers zeggen dat deze term verwijst naar die ervaringen(2) waarvan we willen zeggen dat dáár een ruilwaarde van een hoogte werd bepaald. Zo'n ervaring(2) omvat nog steeds ook: iets doen en daarvan de gevolgen ondervinden. Bovendien omvat ze het maken van een berekening naar aanleiding van die ondervinding (12.3).

(* Geschikt 'lijken': dit betreft een verwachting, gebaseerd op de eigenschappen 1, 2 en 3 zoals geformuleerd door deelnemers. We hebben niet *geconstateerd* dat het hanteren van deze eigenschappen kan voorafgaan aan het hanteren van afgesproken relaties - daartoe zou immers een onderwijsexperiment in het VWO nodig zijn.

Tot nu toe zijn de volgende drie soorten 'objecten' onderscheiden waarnaar een woord kan verwijzen:

▸voor woorden die op weg zijn 'term' te worden
een collectie ervaringen(1), waarbij 'ervaring' inhoudt: iets doen en daarvan de gevolgen ondervinden

▸voor overkoepelende termen
een collectie termen welke een gelijknamige plaats vervult in één of meer relatienetten.
Of: ervaring(3) met eigen term-gebruik

▸voor overkoepelde termen
een collectie ervaringen(2), waarbij 'ervaring' inhoudt: iets doen en daarvan de gevolgen ondervinden en deze ondervinding verwerken volgens afgesproken relaties

Objecten van de twee laatstgenoemde soorten zagen we in de ontwikkeling van 'ruilwaarde' tegelijk en in samenhang ontstaan. Objecten van de eerstgenoemde soort verwachten we in een periode die hieraan voorafgaat en die er op voorbereidt.
Deze voorafgaande periode is hier nauwelijks onderzocht omdat een overkoepelend relatienet al heel snel in de experimentele opgavenserie (vanaf 1-5)[3] beschikbaar wordt verondersteld. Wel hebben er gesprekken plaatsgevonden die het karakter hadden van inhaalmanoeuvres ("omkering van de vraagstelling", 5.4.2), waardoor het toch mogelijk werd enkele conclusies ten aanzien van deze voorbereidende periode te trekken (hoofdstuk 11). De verwachting hierboven uitgesproken voor ervaringen(1) zou echter nog door onderzoek in het VWO getoetst moeten worden. Wel is het functioneren van zulke ervaringen(1) bij het ontstaan van een eerste chemisch te noemen relatienet aan te wijzen in het werk van Ten Voorde[35] (zie 12.2).
We merkten eerder op dat, om het hier voorgestelde onderscheid te kunnen maken het nodig is om onder 'ervaring(1)' in ieder geval geen ervaringen met eigen term-gebruik te vatten. Het was echter niet nodig om ervaring met *woord*-gebruik uit te sluiten. Het spontaan - niet volgens afgesproken relaties - verwoorden van opgedane ondervinding kan dus tot de ervaring(1) gerekend worden, zonder dat het hier voorgestelde onderscheid daardoor wordt gehinderd.

13.14. Conclusies over discontinuïteit en crisis

Bij het stellen van de onderzoeksvragen werd opgemerkt dat 'discontinuïteit' en 'crisis' niet als synoniemen hoeven te worden opgevat. Voor een discontinue beschrijving (zie 10.2.2) noemden we als voordeel dat we als onderzoekers gemakkelijker of beter tot een onderlinge ijking van woordgebruik kunnen komen, bij het beschrijven van een verschil in opeenvolgende tussentalen in een onderwijssituatie. Zo'n discontinue beschrijving dient tevens problemen met het onderling verstaan begrijpelijk te maken, maar daarmee is niet gezegd dat een discontinue beschrijving een 'totaal misverstand' impliceert, gesteld al dat we zouden kunnen zeggen wat we met een totaal misverstand bedoelen.

In onze beschrijving van de analogieredenering functioneren twee discontinue onderscheidingen:
- het onderscheiden van ervaringsdomeinen
- het onderscheiden van de verschillende soorten 'objecten' waarnaar met woorden verwezen wordt. (onderzoeksvraag 8)

Verschillende soorten objecten hebben gelijktijdig de aandacht en het is voor een analogieredenering ook nodig dat dit zo is (onderzoeksvraag 6), in die zin kan er niet gesproken worden van een breuk of plotselinge verandering.

Ten aanzien van de mogelijkheid te spreken van 'crisis' in probleemstellend onderwijs (onderzoeksvragen 7 en 11) zijn we tot de volgende bevindingen gekomen. Wat we eerder een 'contextwisseling' noemden, gaat inderdaad gepaard met een 'crisis' in de volgende betekenis: een periode van onzekerheid, welke blijkt uit schijnbaar tegenstrijdig gebruik van enige woorden, systematisch gedurende langere tijd, en uit onderlinge misverstanden. Deze periode ving aan met het stellen van een opgave die door de deelnemers niet werd verstaan.
Bij de analogieredenering zijn deze eigenschappen niet opgemerkt. Een analogieredenering is dan ook niet identiek met een contextwisseling maar wel werd een nauwe relatie tussen contextwisseling en analogieredenering geformuleerd (13.11, onderzoeksvraag 9). De crisis welke optreedt bij een contextwisseling is in verband gebracht met het niet langer onderscheiden van basisdomein en doeldomein (onderzoeksvraag 10), die bij een analogieredenering wel onderscheiden blijven.
De mogelijkheid die we zagen, een contextwisseling om te werken tot een analogieredenering, gevolgd door een te motiveren beslissing om basisdomein en doeldomein niet langer te onderscheiden (13.11) impliceert de verwachting dat een 'crisis' in de zin zoals we die formuleerden voor een 'contextwisseling' vermijdbaar is. De gepresenteerde schets van een onderwijsontwerp (13.11) zal echter nog moeten worden uitgeprobeerd in een onderwijsexperiment, om tot een bevestiging van deze verwachting te komen.

14. Zaken benoemen in gesprek

In de vorige hoofdstukken is beschreven hoe in onderwijssituaties nieuwe termen kunnen ontstaan in een groep lerenden, bijgestaan door een leraar en door een opgavenserie.
In hoofdstuk 11 letten we op het ontstaan van woorden waarvan het gebruik is afgebakend door afgesproken eigenschappen, door analyse van eigen woordgebruik in relatie tot de 'collectie ervaringen' waarnaar een woord verwijst. In hoofdstuk 12 werd gevonden dat de afgesproken eigenschappen van enkele woorden tezamen een 'netwerk van relaties' kunnen gaan vormen waarbinnen redeneren mogelijk wordt. Deze opeenvolging van gebeurtenissen noemden we met Van Hiele: 'niveauverhoging van grondniveau naar beschrijvend niveau' (12.6). Vervolgens werden nog drie processen beschreven waarin nieuwe termen ontstaan, genoemd: contextuitbreiding (12.6), contextwisseling (12.6) en analogieredenering (13.14). Deze processen hebben gemeen dat er al een eerste netwerk van relaties (beschrijvend niveau) ontstaan moet zijn, alvorens ze kunnen plaatsvinden.
De bedoeling van het nu volgende hoofdstuk is na te gaan, of de vier onderscheiden leerprocessen nog meer gemeen hebben dan de genoemde eigenschap dat er "nieuwe termen ontstaan". Deze vraag is ook zo te stellen: wat maakt deze gebeurtenissen tot 'onderwijs'? Het voorstel ontleend aan De Miranda[117], Ten Voorde[35] en Klaassen[38] (zie 9.4 en 9.5), dat de onderwijssituatie als een verbijzondering van de gesprekssituatie is te beschrijven, zal worden nagegaan. Hierdoor hopen we te komen tot een antwoord op onderzoeksvraag 3:

> *3. Zijn de termen 'gemeenschappelijke zaak' en 'persoonlijke zaak'* (uit 9.6) *houdbaar?* (gezien antwoorden op vragen 1 en 2).

In het eerste deel van dit hoofdstuk wordt een methode voor gespreksanalyse uitgeprobeerd die ontleend wordt aan Ten Voorde[35]. Deze methode wordt aangevuld met een voorstel voor het beschrijven van 'zaken' waarmee onderzoeksvraag 3 kan worden beantwoord. Tenslotte kan de opvatting van 'gesprek' welke uit deze analysemethode naar voren komt worden samengevat in vier eigenschappen (14.1).
Hierna zal worden getoetst in hoeverre beschrijvingen van eerder onderscheiden leerprocessen (niveauverhoging, contextuitbreiding, contextwisseling, analogieredenering) verenigbaar zijn met 'gesprek' als overkoepelende term (14.2). Hierbij wordt speciaal gelet op de wijze waarop de zaak is beschreven waarnaar deelnemers met hun woorden verwijzen. Daarmee wordt gewerkt aan het beantwoorden van onderzoeksvraag 4.

> *4. Houdt de gekozen beschrijvingswijze voor een taalverschil rekening met een* ***gemeenschappelijke zaak*** *als overlap van* ***persoonlijke zaken*** *of niet?*

Conclusies worden samengevat in 14.3.

14.1. Gespreksanalyse

In 9.5 werd die wetenschap 'sociale wetenschap' genoemd die zich bezighoudt met het elkaar-gaan-verstaan. Daar werd ook een redenering, gegeven door Klaassen[38] geciteerd, waaruit ik (in mijn woorden) concludeerde dat de situatie 'samen bezig zijn met iets' voor zo'n wetenschap als fundamenteel gezien moet worden, waarbij bovendien het 'iets' pas voor ons ontstaat doordat ik merk dat jij er ook mee bezig bent, doordat we op elkaars woorden (in relatie tot de situatie) reageren.*),[152]
Ten Voorde[35] noemt als aandachtspunten bij het bestuderen van een gesprek daarom: groep (wie), taal (in welke woorden) en zaak (waarover) en dan het veranderen van deze drie-eenheid. Ten Voorde zegt het zo:

> "Met deze vier letters (VGTZ: Veranderende Groep-Taal-Zaak) worden vier 'momenten' van een 'Gestalt' aangeduid. Onder 'moment' wordt dan een onzelfstandig deel van een geheel verstaan:
> -het gaat alleen om zaken, voorzover ze ter sprake komen,
> -het gaat alleen om taal, voorzover die gesproken wordt en daardoor aan zaken gestalte geeft,
> -het gaat alleen om een groep mensen, voor zover zij in het gesprek aan zaken gestalte geven,
> -het gaat alleen om 'een GTZ', voorzover deze verandert, produktief is." (Ten Voorde[35], p.481)

Ten Voorde[35] toont vervolgens enkele technieken voor protocolanalyse die in 't bijzonder rekening houden met deze VGTZ, namelijk:
- Benoemen van uitspraken van lerenden als al dan niet groepsgebonden, opdrachtgebonden, zaakgebonden (p.485-485). Hierbij gaat het erom na te gaan, of leerlingen geboeid worden door een 'zaak' en in hoeverre een opdracht daar (al dan niet) toe heeft bijgedragen.
- Geleden van een periode van zaakgebondenheid in: zaakinformatie, zaakgebonden oriëntatie, zaakbenoemen (p.491-492). Hierbij gaat het om het vaststellen van voortgang (verandering) in de zaakgebondenheid.
- Relateren van uitspraken door lerenden, door te letten op het overnemen van woorden (p.495-497). Zo kan men gespreksthema's onderscheiden, waarbij elk thema te kenmerken zou zijn door gebruik van bepaalde woorden én door een bepaalde zaak ("datgene waarover").

Van deze drieëenheid van groep, taal en zaak is alleen de 'zaak' aanleiding geweest een onderzoeksvraag te stellen voor dit hoofdstuk, en dat niet zonder reden. Immers, groep en taal lijken we, tenminste in eerste instantie, goed te kunnen waarnemen. Tot een 'groep' kunnen we diegenen rekenen die met elkaar spreken en die naar elkaar luisteren. De 'taal'

(* Dit kan ook zo worden gezegd: ik, jij en wereld moeten gezien worden als onzelfstandige geledingen van een geheel (vgl. De Miranda[152], p.135).
Of zo: "The subjective, objective and intersubjective -or knowledge of one's own mind, knowledge of the world, and knowledge of other minds- are irreducibly related: none can be based on one or both of the others, they all presuppose each other, and they emerge together" (Klaassen[38], p.69)

kunnen we horen. Ook is het niet moeilijk een 'groep' te beschrijven gelet op de 'taal': tot een groep rekenen we dan diegenen die dezelfde woorden in dezelfde associaties gaan gebruiken - d.i. die associaties van elkaar overnemen. Tot verschillende groepen rekenen we deelnemers die systematisch sommige aan te wijzen associaties niet van elkaar overnemen (vgl. Ten Voorde[35], p.489-490, 495-496).
Lastiger is het om 'de zaak', datgene waarover gesproken wordt, datgene waarnaar de gebruikte woorden verwijzen, in deze beschrijving op te nemen. De lezer ziet, dat we al sinds hoofdstuk 11 met dit probleem bezig zijn. We willen nu nagaan hoe we kunnen spreken van 'zaken' in relatie tot 'groep' en 'taal' als vooropgesteld is dat we onderwijssituaties willen beschrijven als een gesprek. In het bijzonder willen we nagaan of het zinvol is te spreken van een 'gemeenschappelijke zaak' naast diverse 'persoonlijke zaken' (onderzoeksvraag 3).

Om tot een antwoord te komen zullen we om te beginnen de door Ten Voorde voorgestelde werkwijzen voor analyse van een gesprek uitproberen, gelet op de gebeurtenis die we eerder een 'contextwisseling' noemden (12.6) en die behalve in 12.5 ook ter sprake kwam in 13.11.
Gezien vanuit het ontbreken van aandacht voor overkoepelende termen in het onderwijs zoals tevoren ontworpen moesten we **P**'s leerresultaat een "toevalstreffer" noemen (p.333). We konden dit resultaat echter ook begrijpelijk noemen (dus niet-toevallig) gelet op de voorgeschiedenis van het gesprek (12.5.3). Dus ontstond de vraag of zo'n 'geschiedenis' zich ook in meer algemene termen analyseren laat. Daarom kozen we dit onderzoeksmateriaal voor de hierna volgende gespreksanalyse.

14.1.1. Zaakgebondenheid

Iedere leraar kent wel de situatie waar een leerling woorden die eerder door de leraar gebruikt zijn lijkt op te hoesten zonder te weten waarover hij het heeft (vgl. 5.2.3). Nauwkeuriger zou het dan zijn te zeggen dat die leerling, naar we vermoeden, het nog nergens over heeft, maar alleen probeert of hij woorden op een goedgekeurde wijze kan gebruiken. Als we willen letten op de 'zaken' die in een groep lerenden aan de orde komen dan is dus een eerste vraag die we kunnen stellen: is er wel een zaak aan de orde? Ten Voorde[35] zegt het zo: "Houdt een leerling zich aan de gedrukte opgave van de onderwijsgang, of aan de door de leraar gestelde vraag dan kan van opdrachtgebondenheid worden gesproken". Van zaakgebondenheid spreekt Ten Voorde pas als "hij/zij aangesproken wordt door iets dat niet direct in de opdracht gegeven is". Door uitspraken van leerlingen te benoemen als opdrachtgebonden of zaakgebonden kunnen we proberen na te gaan in hoeverre een gegeven serie gedrukte opgaven geschikt is om zaakgebondenheid te bereiken, of: hoe gebondenheid aan ontworpen opgaven kan leiden tot zaakgebondenheid.
Een dergelijke overgang van alleen opdrachtgebondenheid naar zaakgebondenheid is bijvoorbeeld te zien in het begin van protocol 3.11, waar begonnen wordt aan het beantwoorden van de volgende opgave:

> **opgave 3-4**[3]
> Voldoet E = c.θ hier? Zo ja, wat moeten we invullen voor c? Hoe zou een tabel met de nodige c-waarden er uit kunnen zien?

De bespreking van deze opgave begint als volgt.

Uit protocol 3.11

O: Is er al iets opgeschreven? (begin opgave 3-4)
.. Nou, $E = c.\theta$ zou kunnen voldoen denk ik
P: Ja, als c dus niet constant is
O: Dat staat er ook
P: Wat moeten we invullen voor
O: We maken dus een tabel
P: c is, een functie afhankelijk van de temperatuur
O: Dat niet alleen
P: Ja temperatuur
O: c hangt af van eh
P: temperatuur, stof, ..
O: temperatuurverschíllen
P: Ja.. ja maar dat heb je als je
O: En daarbij dan nog: bij welke temperatuur je begint
P: Moet je 'n nulpunt definiëren ja

In r.1-6 vinden we uitspraken die erop wijzen dat men de opgave wil gaan beantwoorden. Gebruikte woorden ("voldoen", r.2; "moeten we invullen voor", r.5; "tabel", r.6) zijn overgenomen uit de opgave. "Als c dus niet constant is" (r.3) verwijst naar een omstandigheid die direct boven de gedrukte opgave stond vermeld.
Daarentegen is de uitdrukking "een functie van..." sinds opgave 1-7 niet meer voorgekomen in de opgaven. De nieuwe opgave 3-4 bevat geen expliciete verwijzing naar 1-7 en bevat ook geen 'hints' die specifiek naar 1-7 verwijzen. Wel is het woord 'functie' kort geleden (bij opgave 3-1) gebruikt door deelnemers **N**, **P** en door **WK** (protocol 3.9, resp. r.45, 86 en 93), waarbij **WK** het woord 'functie' overnam van **P**. Het feit dat **P** hier met een bijdrage komt die niet door de letterlijke tekst van de opgave is ingegeven, is reden om zijn uitspraak r.7 als 'zaakgebonden' te benoemen. Hetzelfde kan gezegd worden voor de uitspraken die volgen (r.8-15). In het bijzonder de nadruk op "temperatuurverschillen" (**O**.12) naast "de temperatuur waarmee je begint" (**O**.14) komt niet voort uit de opgave. Deze eigen inbreng van **O** bepaalt vervolgens een deel van het daarna volgende gesprek (protocol 3.11, r.16-47).

Een dergelijke overgang van opdracht- naar zaakgebondenheid komt meermalen voor in de protocollen van het gebeuren dat we 'contextwisseling' noemden (protocollen 3.9 t/m 3.13). In totaal zijn negen van zulke overgangen aangetroffen (Tabel XII).

In het 'zaakgebonden' gespreksgedeelte na elk van deze negen overgangen zullen we nu proberen een nadere structuur op te merken.

14.1.2. Fasering van zaakgebondenheid

Vanaf het moment dat een groepje leerlingen zaakgebonden wordt kunnen we letten op de drieëenheid van groep, taal en zaak en het veranderen daarvan. Deze verandering zou volgens Ten Voorde[35] (p.491) te beschrijven zijn door een karakteristieke fasering op te

Tabel XII: Overgang van opdrachtgebondenheid naar zaakgebondenheid

	Overgang	Opgave
1	Pr.3.9, r.2	3-2a
2	r.23	3-2b
3	r.153	3-2a en b
4	Pr.3.10, r.5	3-3a
5	Pr.3.11, r.7	3-4
6	r.62	3-5b
7	r.176	3-6c
8	Pr.3.12, r.3	3-6d
9	Pr.3.13, r.12	3-6h

merken in zaakgebonden gespreksperioden:

- Het begin van een zaakgebonden gespreksperiode zou zich onderscheiden doordat lerenden komen tot een concretisering van de gedrukte opgave, door deze te relateren aan eerdere ervaringen. Deze fase wordt "zaakinformatie" genoemd, omdat lerenden elkaar wederzijds informeren over welke 'zaak' zij in de woorden van de opgave herkennen.
- Hierna kan een intensief gesprek ontstaan, doordat elke leerling een eigen zienswijze naar voren brengt.*) Verschillende "zienswijzen" worden getoetst aan ervaringen, en leerlingen verlangen van elkaar een nauwkeurig woordgebruik. Deze "kritisch schiftende meningsvorming" mondt uit in een groepsmening. Deze fase wordt "zaakgebonden oriëntatie" en ook "analyse" genoemd.
- Het moment, waarop de groepsmening wordt uitgesproken wordt "benoemen" genoemd.
- Het gebruiken van de uitgesproken groepsmening door lerenden in voor hen nieuwe situaties wordt "vrije oriëntatie" genoemd.

Om aan te geven hoe de genoemde fasen hier worden opgevat, zullen deze fasen worden aangewezen in de zaakgebonden gespreksperiode die volgde op het gespreksfragment geciteerd in de vorige paragraaf.

protocol 3.11, r.1-47

Direct na de 'opdrachtgebonden' periode (r.1-6, zie 14.1.1) zien we 'zaakinformatie' (r.7-15), immers hier informeert men elkaar over de verschillende zienswijzen die in het vervolg van het gesprek een rol blijken te spelen. De verschillende bijdragen (speciaal r.7, 12, 14) geven blijk van eerdere ervaringen, waarin de deelnemers onderling van elkaar verschillen. Voor één van deze bijdragen (r.7) is al een voorgeschiedenis aangewezen (zie 14.1.1). Voor twee andere uitspraken (r.12 en 14) kunnen we aannemen dat deze verwijzen

(* Anders gezegd: omdat niet voor iedere leerling dezelfde 'zaak' is ontstaan (Ten Voorde). Nog anders: omdat de woorden uit de opgave niet voor ieder naar dezelfde collecties ervaringen verwijzen (in de terminologie van mijn hoofdstuk 11 e.v.).

naar de vertelde proef bij opgave 3-1, naar aanleiding waarvan deelnemers opmerkten dat de warmtecapaciteit niet constant is.
Na deze 'zaakinformatie' zien we 'zaakgebonden oriëntatie' (r.16-43), omdat hier de eerder genoemde zienswijzen kritisch tegenover elkaar worden geplaatst, waarbij men van elkaar een nauwkeurig woordgebruik vraagt. Sommige uitspraken (bv. P.25 "rond 20 graden is het ànders") kunnen worden opgevat als verwijzing naar de proef verteld bij opgave 3-1, zodat ook kan worden gezegd dat uitspraken worden getoetst aan ervaringen. Vervolgens wordt een 'benoeming' aangereikt door de leraar, tot tevredenheid van beide groepsleden (r.44-47). Hoewel deze benoeming niet van de deelnemers **O** en **P** afkomstig is, kan hun gesprek toch produktief worden genoemd, omdat het gesprek in r.20-46 deze groepsmening mogelijk maakt. **WK** deed namelijk in r.19 vrijwel hetzelfde voorstel als in r.45, maar in r.19 kwam dit voorstel blijkbaar te vroeg.*)

protocol 3.9, r.1-20

Een zaakgebonden gespreksperiode die eindigde met 'benoemen' door de lerenden is te vinden in protocol 3.9 (r.20). Over de argumentatie bestaat onenigheid, maar over "het kan niet" (r.20) is men het eens. Daaraan voorafgaand zien we "zaakinformatie" (r.2-6 en 9) en "zaakgebonden oriëntatie" (r.8 en 10-19) volgens dezelfde criteria als eerder genoemd.
Van de negen zaakgebonden perioden waarvan in 14.1.1 het moment van aanvang werd aangewezen (p.343) zijn er nu twee geanalyseerd volgens fasen in de zaakgebondenheid. In de volgende tabel zijn voor elk van de eerder genoemde negen perioden deze fasen aangewezen.

Tabel XIII: Fasering van zaakgebonden gespreksperioden

	Pr.	O	z_i	z_g	z_b
1	3.9	r.1	r.2-6, 9	r.8,10-19	r.20
2	3.9	r.21-22	r.23-25	r.26-27	--
3	3.9	r.28-152	r.153-162	r.163-226	r.232-250
4	3.10	r.1-4, 8	r.5-7, 9-12	r.13-120	r.121-143
5	3.11	r.1-6	r.7-15	r.16-43	r.44-47
6	3.11	r.60, 63	r.62, 66-72	r.73-160	--
7	3.11	r.161-173	r.176-185	r.186-215	r.216-224
8	3.12	r.1, 11, 14	r.2-6,8, 13, 15-16	r.17-191	r.192-229
9	3.13	r.1-7, 11	r.8-10, 12-24	r.25-28 r.43	r.29-38 r.42-67

(Pr.=protocol; O=opdrachtgebonden, nog niet zaakgebonden; z_i=zaakinformatie; z_g=zaakgebonden oriëntatie; z_b=zaakbenoemen; --=ontbreekt)

Bij het komen tot deze fasering hebben we, volgens Ten Voordes[35] voorstel, de 'opdracht-

*) Ook de herformulering door **WK** kan als resultaat van r.20-43 worden gezien (r.44-45 verschilt qua formulering namelijk enigszins van r.19). In dat geval zien we **WK** als deel van de produktieve gespreksgroep, in plaats van als iemand die van buitenaf tweemaal dezelfde ingreep poogt uit te voeren.

gebonden' perioden gebruikt om de 'zaakgebonden' perioden van elkaar af te grenzen. De meeste van de zo onderscheiden zaakgebonden perioden lieten zich vervolgens opdelen in de drie fasen genoemd zaakinformatie, zaakgebonden oriëntatie en zaakbenoemen. Enkele problemen welke zich voordeden worden hieronder besproken.
De benoeming "opdrachtgebonden, nog niet zaakgebonden" voor protocol 3.9, r.28-152 is discutabel. In deze lange periode probeert **WK** studenten te "binden" aan de tekst van de opgave "probeer het" (3-2a)[3]. Uiteindelijk lukt dit (r.128-152). Deze periode is dus wel te beschrijven met: leerlingen worden opdrachtgebonden. De toevoeging "nog niet zaakgebonden" is echter onterecht. Ze zijn gebonden aan het resultaat van gesprekspériode 1 "het kan niet", waarvoor zij allerlei zaakgebonden argumenten aandragen. Ze zijn dus wel zaakgebonden, maar nog niet gebonden aan die zaak die **WK** nu juist door deze opgave ("probeer het") hoopt te laten ontstaan. Na r.152 ontstaat wel aanspreekbaarheid voor deze nieuwe zaak, hetgeen hieruit blijkt dat leerlingen het willen "proberen" (opgave) én daarbij in eigen woorden deze opgave concretiseren (r.153-162). Om de verwachte fasering hier te kunnen doorvoeren is het dus nodig te onderscheiden om welke zaak het in deze periode te doen is. Letten we op de zaak die in periode 3 uiteindelijk wordt benoemd, dan is het wel juist om te zeggen dat men aan déze zaak in r.28-152 nog niet was gebonden.

Voor een fasering van de zaakgebondenheid is het soms nodig de 'zaken' welke in opeenvolgende zaakgebonden perioden worden benoemd te onderscheiden.

De verschillende gespreksfasen zoals omschreven door Ten Voorde[35] formuleren echter geen onderscheid tussen 'zaken', maar deze fasen benoemen verschillende manieren waarop lerenden met hun zaak bezig kunnen zijn.
De fase genoemd 'benoemen' ontbreekt in twee van de onderscheiden zaakgebonden perioden (nummers 2 en 6). In beide gevallen blijkt uit het protocol, dat de zaakgebondenheid werd onderbroken door de leraar (**WK**), die mondeling een aanvullende opdracht stelde (2), dan wel aandrong op verdergaan met de opdrachtenserie (6), waarna in beide gevallen een opdrachtgebonden periode ("O") volgde.
In de overige zeven periodes van doorlopende zaakgebondenheid kon een fasering in drie fasen worden opgemerkt, welke overeenkomen met de eerste drie fasen voorgesteld door Ten Voorde[35]. We kunnen dus zeggen dat deze fasering in zoverre generaliseerbaar is gebleken.
De vierde door Ten Voorde[35] genoemde fase, "vrije oriëntatie", werd binnen geen enkele (ononderbroken) zaakgebonden periode aangetroffen. Wel wordt in volgende zaakgebonden perioden soms een beroep gedaan op de "groepsmening" uitgesproken in één van de vorige zaakgebonden perioden. Zo beroepen deelnemers tijdens de opdrachtgebonden fase van periode 3 zich op de groepsmening ("het kan niet") uitgesproken in periode 1. De volgende tabel wijst aan waar zo'n 'vrije oriëntatie' werd gevonden.

Om deze 'vrije oriëntatie'-fasen te kunnen vinden is het nodig een beroep op een "groepsmening" (een "benoemde zaak") uit een eerdere periode te kunnen herkennen in een volgende periode. Op deze manier kan dus worden aangegeven in hoeverre een resultaat van een zaakgebonden periode produktief is gebruikt in volgende perioden.

Tabel XIV: Vrije oriëntatiefasen in perioden 1, 3 en 5 (Tabel XIII)

Pe.	vrije oriëntatie	valt samen met
1	P3.9:r28-150; P3.10:r14,32; P3.11:r140	O(3), z_g(4), z_g(6)
3	P3.10:r15-18,67,79,111-120; P3.11:r146-150	z_g(4), z_g(6)
5	P3.11:r71,109,119-122,134,203-221; P3.12:r22,40	z_i(6), z_g(6), z_g(8)

(Notatie: "O(3)"=de "O"-fase uit periode 3, zie Tabel XIII.)

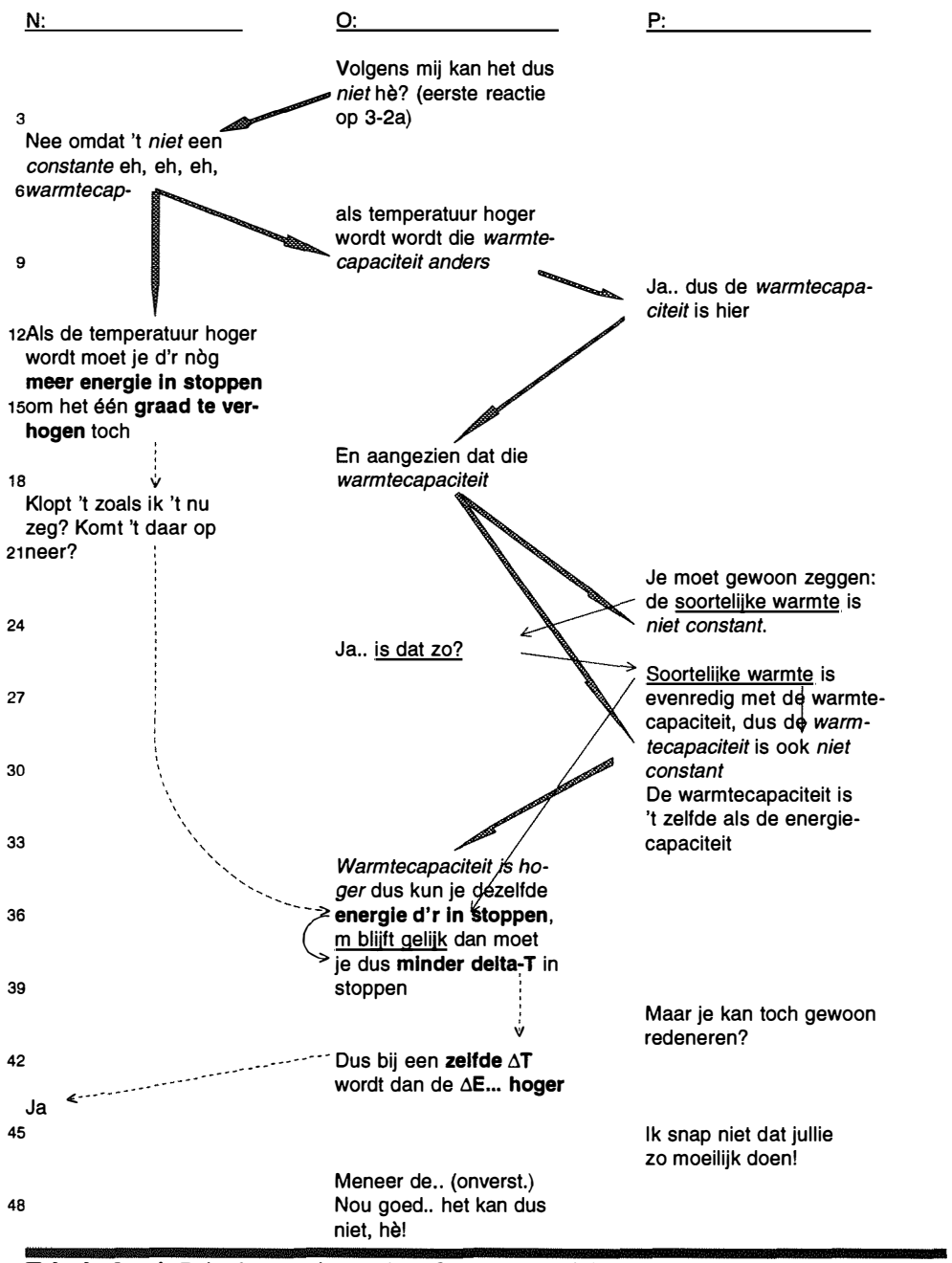
14.1.3. Gesprekstheма's

Tot nu toe ging het ons erom allereerst op te merken óf deelnemers ergens over spreken (zaakgebonden zijn), dan wel of zij nog bezig zijn uit te zoeken waar de leraar het over hebben wil (opdrachtgebonden zijn). Vervolgens werd een manier uitgeprobeerd om verandering in de zaakgebondenheid te beschrijven. Dit alles gebeurde zonder expliciet de verschillende 'zaken' waarover deelnemers spreken te onderscheiden. Wel bleek zo'n onderscheid te kunnen worden aangewezen (periode 3 in Tabel XIII) en ook bleek het onderscheiden van 'zaken' die in opeenvolgende zaakgebonden perioden worden 'benoemd' daar nodig om de voorgestelde opeenvolging van gespreksfasen (O, z_i, z_g, z_b) te kunnen formuleren.
Om het onderscheiden van 'zaken' mogelijk te maken zouden we allereerst kunnen letten op de twee andere momenten van de GTZ (14.1), dus op groep en taal. We merkten al op (14.1) dat deze twee momenten van een gesprek makkelijker zijn waar te nemen. Ten Voorde[35] (p.495) stelt voor te letten op "de samenhang van 'datgene, waarover' (de zaak) en de 'woorden waardoor' men deelneemt aan het gesprek". Deze samenhang wordt door hem zichtbaar gemaakt in een protocol, door met pijlen aan te geven welke uitspraken tezamen als een doorgaande lijn in het gesprek gezien kunnen worden (V.496). Zo'n lijn noemt hij een 'thema' en zo'n thema zou dus volgens hem een twee-eenheid van taal en zaak aangeven. Bovendien is zichtbaar welke deelnemers aan deze Taal-Zaak deelnemen. We zien dus volgens hem een GTZ, en we zien hoe deze zich ontwikkelt.
Hieronder wordt deze werkwijze uitgeprobeerd voor twee gespreksfragmenten die elk eindigen met een fase van 'zaakbenoemen' en die dus leiden tot een duidelijk resultaat. Het betreft achtereenvolgens de zaakgebonden periode 1 en het slot van periode 9 uit Tabel XIII.

Voor zaakgebonden periode 1 is het resultaat van de zojuist omschreven werkwijze weergegeven in Tekstkader 4. Aan het eind van het weergegeven fragment (r.40-49) valt op dat **P** de redenering die zojuist door **O** is gegeven (r.34-39) niet als redenering kan waarderen. Kennelijk verstaan zij elkaar niet.

- Letten we op het verstaan zoals dat blijkt uit het op-elkaar-ingaan, dan blijkt dat in het thema "warmtecapaciteit niet constant" alle drie de deelnemers op elkaar in kunnen gaan, dus in dit thema verstaan zij elkaar. Tot dit thema reken ik dan ook de uitdrukkingen: "warmtecapaciteit anders" (r.9), en "warmtecapaciteit hoger" (r.34).

Zoeken we, ter verklaring van het gebleken niet-verstaan, naar uitdrukkingen die **niet** in de



Tekstkader 4: Drie thema's in regel 1-20 van protocol 3.9

hele groep (drie personen) gebruikt worden, dan valt op:

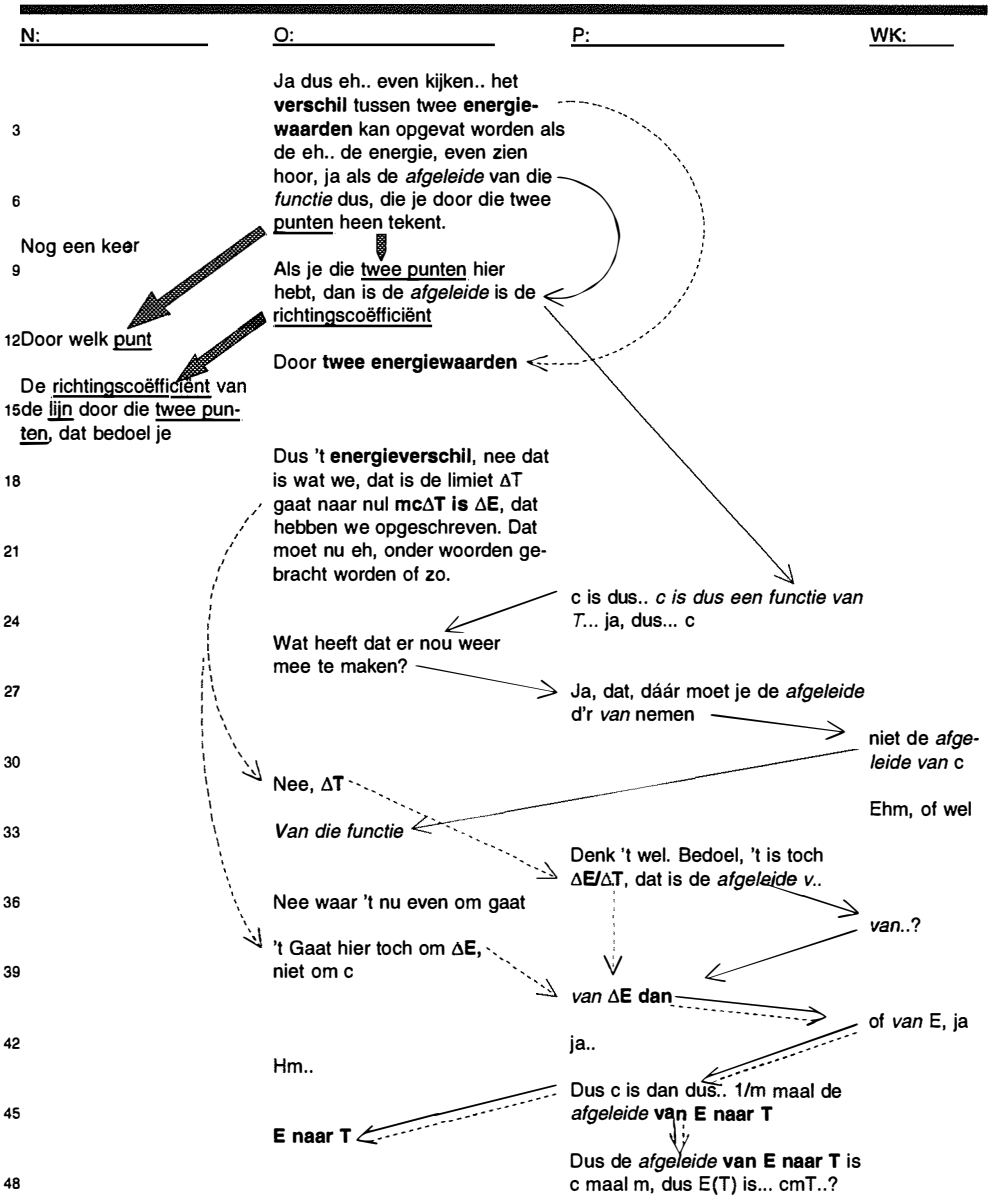
Alleen **P** gebruikt "soortelijke warmte" (r.23, 26). Alleen **O** (niet **N**) gaat hier op in, en dan nog alleen vragend (**O**.25). Ook "*m* blijft gelijk" (**O**.37) kan als tegemoetkoming aan het door **P** gewenste onderscheid tussen 'soortelijke warmte' en 'warmtecapaciteit' worden verstaan.

- Alleen **N** en **O** gebruiken "[hoeveelheid] energie in stoppen", steeds in verband met een 'temperatuurverandering'. Op dit woordgebruik wordt door **P** niet zakelijk ingegaan.

Gelet op het gebruik van groepen vak-uitdrukkingen kunnen we in dit protocolfragment dus drie verschillende thema's onderscheiden. Deze thema's onderscheiden zich tot nu toe a) door woordkeus, b) door de groep die deze woorden gebruikt.
Beide criteria zijn nodig, omdat áls deelnemer **P** het gebruik van "energie in stoppen" (in relatie tot een temperatuurverandering) zou accepteren, er geen reden zou zijn om dit woordgebruik níet tot het gemeenschappelijke thema (warmtecapaciteit niet constant) te rekenen. Bekijken we bijvoorbeeld alleen deelnemer **N** dan kunnen we niet zeggen dat het hier om twee verschillende thema's gaat, voor hem 'volgt' het "meer energie in stoppen" (per graad) uit de "niet constante warmtecap-" (N.6). Bekijken we deelnemer **P** op zichzelf, dan is er geen reden om 'soortelijke warmte' tot een ander thema te rekenen dan 'warmtecapaciteit'. Het is dus de gebleken onenigheid (r.40-49), tezamen met het gebleken niet-overnemen van bepaalde uitdrukkingen waardoor het zinvol wordt om naast het gemeenschappelijk thema (**NOP**) twee andere thema's te onderscheiden, namelijk 'soortelijke warmte' (**P**) en 'energie in stoppen' (**NO**).
Van het gemeenschappelijk thema kan gezegd worden dat het voor beide partijen produktief is, het leidt namelijk zowel tot de redeneringen van **N** (r.12-16) en van **O** (r.34-43), als tot de redenering van **P** (r.22-30). De 'groepsmening' die tenslotte wordt uitgesproken (r.48) is geformuleerd in woorden van het gemeenschappelijk thema, namelijk dát het "niet kan" met als gemeenschappelijk genoemde reden de "niet constant[e]" "warmtecapaciteit" (r.5, 9, 23-30). Over details van de voorgestelde redeneringen blijft meningsverschil bestaan.

Ter vergelijking wordt nu een tweede gespreksfragment op thema's geanalyseerd, namelijk het fragment waar deelnemers **O** en **P** komen tot warmtecapaciteit als een afgeleide van de energiewaarde (protocol 3.13 r.8-39, vgl. periode 9 in Tabel XIII). In vergelijking met het vorige besproken fragment (Tekstkader 4) is hier de produktiviteit van het gesprek wat meer opvallend. De resultaten zijn weergegeven in Tekstkader 5.
In dit fragment zijn opnieuw drie thema's onderscheiden:

- Deelnemer **N** neemt van **O** over het spreken van 'punt', 'lijn', 'richtingscoëfficiënt', woorden die voor hen blijkbaar (gaan) samenhangen omdat ze tezamen worden overgenomen.
- Zo ook de woorden 'afgeleide' en 'functie' voor de deelnemers **O** en **P**: **P** neemt eerst 'functie' over (r.23) maar na een vraag om opheldering van **O** komt hij meteen met 'afgeleide'.
  O en ook **WK** verschillen echter van **P** met betrekking tot de vraag of het de afgeleide van de warmtecapaciteit is waarom het hier gaat (r.17, 29, 38).
- **O**'s gebruik van 'energieverschil' in relatie tot temperatuurverschil



Tekstkader 5: Drie thema's in regel 8-39 van protocol 3.13

(r.2,13,17,19,31,38) wordt pas later overgenomen door **P**.35 en leidt dan tot een oplossing (r.40) van de vraag om welke afgeleide ("afgeleide van...") het hier gaat. De toevoeging "naar *T*" komt van **P**, maar is wel te zien als voortzetting van **O**.31 (en eerder).

Van deze drie thema's wordt het 'punten' thema niet verder ontwikkeld in dit gespreksfragment. De thema's 'afgeleide' en 'energieverschil', die we konden onderscheiden doordat ze op ongelijke momenten thema werden in de groep **O-P**, ontwikkelen zich wel. Die ontwikkeling is hier te beschrijven door te zeggen dat ze samengaan, immers vanaf r.40 zijn deze twee thema's niet meer te onderscheiden. De groepsmening (r.34-45, groep **O-P**), dat het hier gaat om de afgeleide van *E* naar *T* is in woorden van dit ene thema geformuleerd.
Als resultaat van dit gespreksfragment is dan nog het begin van een vierde thema 'primitieve' te zien (r.48) dat zich vervolgens in de groep **P-WK** ontwikkelde (zie 12.5.1). Omdat het hier gaat om een groepsmening van een andere groep, in andere woorden geformuleerd, kunnen we deze z_b-fase waarin 'primitieve' wordt gebruikt (protocol 3.13, r.32-61) onderscheiden van de z_b-fase waarin 'afgeleide van *E* naar *T*' werd gebruikt. We onderscheiden dan twee z_b-fasen welke in de tijd niet of nauwelijks gescheiden zijn door een tussenliggende O, z_i en z_g-fase (Tabel XIII). Het ontbreken van 'zaakinformatie' en 'zaakgebonden oriëntatie' in het nieuwe gespreksthema kan verklaren dat deelnemers **N** en **O** niet meteen konden meepraten in dit thema.
Voor de groep **P-WK** kunnen we 'afgeleide' en 'primitieve' tot eenzelfde thema rekenen, aangezien het ene woord het andere oproept.[*)] Voor **N** en **O** daarentegen zijn beide woorden tot verschillende thema's te rekenen, omdat ze niet tezamen worden overgenomen van **P** en **WK**. Een samengaan van thema's, zoals we dat zagen voor 'afgeleide' en '$\Delta E/\Delta T$' (Tekstkader 5), zou voor 'afgeleide' en 'primitieve' dus nog moeten volgen om ook de andere deelnemers hierin te betrekken.

Aangezien een groepsmening wordt uitgesproken in woorden die door die groep geassocieerd worden, kunnen we een 'groepsmening' steeds in verband brengen met een enkel thema. Dit thema zouden we het centrale thema van de betreffende zaakgebonden periode kunnen noemen, omdat de deelnemers aan de Z_b-fase er blijkbaar op gericht zijn om in dit thema tot een conclusie te komen. De andere thema's van diezelfde zaakgebonden periode zijn dan te zien als pogingen om bij te dragen aan dit centrale thema. Immers: voor deelnemers **N** en **O** in Tekstkader 4 behoort 'energie in stoppen' tot het centrale thema 'warmtecapaciteit'. Doordat **P** deze bijdrage aan het gemeenschappelijk thema niet erkent, is er een reden beide thema's te onderscheiden. Aangezien een neventhema, door de deelnemers aan dat neventhema, als bijdrage aan het centrale thema wordt bedoeld, kunnen we zeggen dat een neventhema de bedoeling heeft om één te worden met het centrale thema, zoals we in Tekstkader 5 inderdaad zagen gebeuren.

Van de negen periodes van doorlopende zaakgebondenheid die in 14.1.2 met fasen werden

---

[*)] Van **P** kunnen we zeggen dat het woord 'afgeleide' de *handeling* integreren oproept (r.39). Als dit bij **WK** het woord 'primitieve' oproept (r.55), neemt **P** dat meteen over (r.57).

beschreven (Tabel XIII) zijn nu de perioden 1 en 9 geanalyseerd naar 'gespreksthema's', waarbij expliciet op groep en woordgebruik werd gelet. Hierbij werden centrale thema's aangewezen welke in een fase van zaakbenoemen tot een conclusie voeren.
Ook voor de overige zaakgebonden perioden waarin 'zaakbenoemen' plaatsvond zijn zulke centrale thema's aangewezen (Tabel XV).

Tabel XV: Centrale thema's van de zaakgebonden perioden waarin 'zaakbenoemen' plaatsvond.

Pe.	Groep	Woorden/uitdrukkingen	Protocoldelen
1	**N-O-P**	"het kan niet", "warmtecapaciteit niet constant", "warmtecapaciteit anders"	3.9: r1-20
3	**N-O-P**	"energiewaarde" onderscheiden van ΔE, "nulpunt kiezen", "geheel", "relatieve toestand"	3.9: r153-250
4	**N-O-P**	"afhankelijk van de weg", "of het uitkomt", "of het klopt"	3.10: r9-143
5	**O-P-WK**	zowel "begintemperatuur" als "eindtemperatuur", niet alleen "temperatuurverschil"	3.11: r14-47
7 (+6)	**N-O-P**	"alle capaciteiten, gemiddeld" versus "hoogste" en "laagste"	3.11: r66-225
8	**N-O-P**	"oneindig klein", "heel klein", "limiet", "gaat naar nul"	3.12: r2-229
9a	**O-P-WK**	"functie", "afgeleide", "ΔE" samen met "ΔT", "E naar T"	3.13: r9-39
9b	**P-WK**	"afhankelijk van", "afgeleide", "primitieve"	3.13: r39-67

Zaakgebonden perioden (Pe.) overgenomen uit 14.1.2.

Bij elk van deze centrale thema's zijn enkele neventhema's aan te wijzen, welke 'thema' te noemen zijn voor een subgroep van de groep waarin het centrale thema aan de orde is. Bijvoorbeeld in periode 4 gebruikt deelnemer **O** herhaaldelijk de woorden "gemiddelde" en "geheel" in verband met de vraag "of het klopt". Voor hem is dit gebruik van "gemiddelde" en "geheel" een resultaat van periode 3, maar voor **P** is dat niet het geval.

Ten Voordes voorstel[35] (p.496) om een 'thema' op te merken door in een protocol aan te geven welke uitspraken tezamen als een doorgaande lijn in het gesprek gezien kunnen worden is nu uitgeprobeerd. Hierbij is 'thema' tevoorschijn gekomen als een veranderende eenheid van groep en taal.
Een aanwijzing dat ook kennis van 'zaken' een rol speelde in bovenstaande analyse komt naar voren als we vragen naar het criterium om een pijl tussen twee uitspraken te trekken, wanneer niet exact dezelfde woorden worden gebruikt door beide deelnemers. Bijvoorbeeld: waarom is in Tekstkader 4 aangegeven dat "m blijft gelijk" (**O**.37) te verstaan is als ingaan-op het door **P** gemaakte onderscheid tussen soortelijke warmte en warmtecapaciteit

(**P**.26-30), hoewel beide uitspraken geen woorden gemeen hebben? Blijkbaar is hier kennis gebruikt van datgene waarnaar **O** en **P** met hun woorden verwijzen, volgens onze inschatting. Als één van de voorwaarden om diverse woorden tot een 'thema' te rekenen hanteren we dus blijkbaar ook, dat we het samen voorkomen van deze woorden als niet-toevallig (namelijk als op-elkaar-ingaan) beoordelen gezien een door ons vermoede verwijzende betekenis. Zolang we niet expliciteren hoe we zo'n vermoeden van een 'zaak' controleren, valt te vermoeden dat de fysica (of een door de onderzoeker ontworpen proto-fysische tussentaal) bij zulke beoordelingen impliciet als referentie-taal wordt gehanteerd, bij het analyseren van uitingen van lerenden.*)

De bedoeling van deze paragraaf was om door het onderscheiden van thema's nader tot het onderscheiden van 'zaken' te komen. Hierbij vertrouwden we erop dat twee te onderscheiden thema's - twee groepen deelnemers, die elkaar bij 't gebruik van bepaalde woorden niet verstaan, elkaars bijdragen niet waarderen, er niet op ingaan - wijzen op twee verschillende zaken, zoals Ten Voorde[35] (p.495) aangaf door te zeggen dat een thema zich zowel kenmerkt door de "woorden waardoor" als door "datgene waarover" men spreekt. Daarbij bleek echter, dat het onderscheiden van thema's soms ook het onderscheiden van zaken vooronderstelt.
De vraag wordt nu, in hoeverre we de door Ten Voorde[35] genoemde samenhang tussen 'woorden' en 'zaken' kunnen controleren, in plaats van deze als een veronderstelling te hanteren.

14.1.4. Over het onderscheiden van 'zaken'

Het onderscheiden van thema's door alleen te letten op de deelnemers en de woorden die zij van elkaar overnemen (groep en taal) stelde ons tot nu toe niet in staat tot het onderscheiden van de 'zaken' waarnaar deelnemers met hun woorden verwijzen, tenzij we de door Ten Voorde genoemde samenhang tussen woorden en 'zaken' als veronderstelling hanteren. We zullen nagaan in hoeverre we deze veronderstelling kunnen controleren. Daarmee zullen we komen tot een beoordeling van de voorgestelde uitdrukkingen 'persoonlijke zaak' en 'gemeenschappelijke zaak' (onderzoeksvraag 3).

Taal en zaak

Ten Voorde (p.486-487) wijst verschillende malen een opgave uit de onderwijsgang aan als 'de zaak' waarover een leerling spreekt. Als aanwijzing daarvoor noemt hij dat de leerling de opgave wil beantwoorden, dus opdrachtgebonden is. Maar 'opdrachtgebonden' houdt niet vanzelf 'zaakgebonden' in, dus kan men niet zeggen dat gebondenheid aan een opgave ook gebondenheid aan een zaak inhoudt, tenzij 'zaak' in twee betekenissen wordt gebruikt. We kunnen dus niet de opgave als 'zaak' aanwijzen. Met 'zaak' bedoelden we nu juist iets wat een leerling in de woorden van de opgave hoort, maar wat tegelijk meer is dan die gedrukte tekst, namelijk: wat die tekst bij hem oproept. Preciezer: de ervaringen die voor hem in de gedrukte woorden vertegenwoordigd zijn. Tijdens de 'zaakinformatie'-fase immers blijken leerlingen de opgave immers verschillend te "concretiseren" (Ten

(* Vergelijk onze kritiek op Karpinski[93] en Wilsons[94] "externe norm" in 6.2 onder c).

Voorde) door verschillende ervaringen te memoreren.
Wel consequent is dus om zulke verwijzingen naar ervaringen te gebruiken als aanwijzingen voor 'de zaak' welke een deelnemer in de woorden van een opgave hoort. Dit doet Ten Voorde, zodra hij het 'zaakgebonden' deel van het protocol analyseert (p.487-488). Zulk verwijzen naar ervaringen echter geschiedt zelf ook weer in woorden. Wanneer de verwijzing naar een ervaring in omgangstaal verwoord is, zoals "boven op blijft drijven" (Ten Voorde, p.487), dan kunnen we onze eigen vertrouwdheid met de omgangstaal gebruiken om te verstaan welke ervaring daar bedoeld is. Nog duidelijker wordt de verwijzing, wanneer we weten dat de leerlingen kort geleden iets hebben meegemaakt (een practicumproef) dat voldoet aan het selectieve relaas dat zij ervan geven. Immers in dat geval kunnen we zelf aanvullen: oh, ze bedoelen díe proef ("een handeling in S2-2", Ten Voorde, p.487, waar "S2-2" een practicumopgave aanduidt.). Daarmee heeft dan de 'zaak' waarnaar werd verwezen, een traceerbare geschiedenis.

Het verwijzen naar een ervaring is controleerbaar voor zover:
- *het een ervaring betreft die we zelf ook hebben opgedaan (in het eenvoudigste geval: een activiteit waaraan zowel zij als wij deelnamen)*
- *het verwijzen gebeurt in woorden die we herkennen*

Dus om het verwijzen naar ervaringen te traceren heeft Ten Voorde zowel gemeenschappelijke ervaringen als gemeenschappelijke taal verondersteld. Daarmee is echter nog niet verondersteld dat ervaringen en taal geheel of zelfs maar 'grotendeels' (Klaassen[38], zie 9.6) gemeenschappelijk zijn. Voor Ten Voordes[35] analyse is het voldoende dat er enkele ervaringen gezamenlijk waren opgedaan, en dat er naast problematische woorden ook niet-problematische woorden en uitdrukkingen gebruikt werden in de groep van leraar en lerenden.

Vertelde proeven
De door Ten Voorde[35] gebruikte werkwijze bij het zoeken naar de 'zaak' kan door mij niet zonder meer worden overgenomen omdat in de door mij ontworpen opgavenserie geen opdrachten tot het uitvoeren van proeven voorkomen. De 'proeven' waarnaar een leerling in ons geval zou kunnen verwijzen zijn die proeven waarover in voorafgaande opgaven werd verteld. Gevraagd kan worden in hoeverre het lezen van zo'n 'vertelde ervaring' kan dienen als vervanging voor het zelf opdoen van ervaring.
Enkele eigenschappen van 'ervaring' ontbreken: het zelf handelen ontbreekt, het zelf waarnemen - dus selectie van wat als belangrijk geldt - ontbreekt en ook is de 'vertelde ervaring' al door de schrijver van de opdracht in woorden en andere symbolen (zoals een schematische tekening) gevat. Welke eigenschappen moet zo een tekst hebben, om als vervanging voor een 'ervaring' te kunnen dienen?*)

(* Ook belangrijk is de vraag in welk stadium de groep moet zijn, wil een tekst hen een ervaring kunnen 'meedelen'. Gezien het belang van "aanschouwelijk tastbare" ervaring in de onderwijsperiode die door Ten Voorde[35] (p.336 en 378-382) 'aandachtselectie' (ook 'P1') wordt genoemd, kunnen we verwachten dat een tekst nog geen ervaring kan 'meedelen' zolang deze periode van aandachtselectie niet is voltooid. Het zelf selecteren en koppelen van woorden aan wat met ziet,

We hebben hierbij vertrouwd op de eigenschap van taal dat ze geschikt is om iemand in te lichten over gebeurtenissen die hij niet zelf heeft meegemaakt. 'Inlichten' betekent dan, dat de gebeurtenis zodanig levendig of gedetailleerd wordt verteld, in woorden waarmee de ander onproblematisch vertrouwd is, dat deze zich een eigen oordeel over de gebeurtenis kan vormen. Een voorwaarde is dus dat bij het 'vertellen' geen woorden worden gebruikt die pas onlangs werden geïntroduceerd, of waarvan het gebruik nog problematisch is, en zeker geen termen waarvan de zinvolheid (als ordeningsmiddel voor ervaringen) in de komende opgaven nog ter discussie zal staan. Immers: in dat geval ontnemen we de lerende de mogelijkheid zich over die zinvolheid een eigen oordeel te vormen, omdat de 'ervaring' waarop hij gevraagd wordt zich te baseren niet onafhankelijk van de ter discussie staande termen is geformuleerd.
In ons geval betekent dit, dat als we met studenten over 'energievormen', 'energiecapaciteiten', 'energiewaarden' willen spreken, de aangeboden ervaringen niet in deze of hieraan verwante termen geformuleerd mogen zijn. Om deze reden heb ik bijvoorbeeld overal vermeden om 'meet'-resultaten in Joules aan te bieden. Bij het vertellen van proeven zijn wel fysische en chemische vaktermen gebruikt[*], maar het gaat dan steeds om termen die niet kortgeleden in de opgavenserie ter discussie stonden en waarmee een voldoende vertrouwdheid werd verwacht. Kort gezegd: van zulke termen werd verwacht dat ze tot de leefwereld van studenten zijn gaan behoren.

> *Bij het 'vertellen' van een ervaring wordt gebruik gemaakt van woorden, waarvan verwacht wordt dat ze tot de 'leefwereldtaal' van de lerenden behoren, dat wil zeggen woorden die hen vertrouwd (geworden) zijn, over het gebruik waarvan niet (meer) geargumenteerd hoeft te worden.*

De juistheid van deze verwachting is nagegaan door te letten op vragen en opmerkingen van studenten waaruit blijkt dat zij de 'vertelde ervaring' verschillend opvatten, dan wel onzeker zijn over hoe ze hem moeten opvatten. In hoofdstuk 11 werd een protocol besproken waar bleek dat soms nadere details over een 'vertelde proef' door **WK** moesten worden verstrekt (11.1, protocol 1.1). Dit kwam vaker voor. Verondersteld werd dat een 'eigen oordeel' van studenten over de vertelde gebeurtenis niet zou worden gehinderd, zolang als het **WK** lukte de gedrukte vertelling mondeling aan te vullen, tot gebleken tevredenheid van de vraagsteller. Ook kwam het een aantal malen voor dat studenten zelf zinnige (voor mij begrijpelijke) varianten opperden van de vertelde proef teneinde die proef voor hen concreter te maken. In zo'n geval kunnen we zeggen dat de gebruikte woorden zeker voldoende waren om een levendig beeld van een mogelijke proef op te roepen.[+]
Voor de 'vertelde proeven' die een voorname rol spelen als aanleiding voor de gesprekken

---

kan dan immers niet worden overgeslagen. Zo'n periode van aandachtselectie voor aanschouwelijke zaken is in het huidige onderzoek nog niet georganiseerd.

(* bijvoorbeeld in opgave 3-1[3]: temperatuur, hoeksnelheid, alfa-ijzer.

(+ Zie het protocol van de analogieredenering die leidde tot entropie voor zo'n moment: protocol 2.10, r.67-92.

besproken in de vorige paragrafen*) is noch het één noch het ander het geval: er werd niet om mondelinge aanvulling gevraagd, en studenten kwamen ook niet zelf met zo'n aanvulling. Ik veronderstel daarom dat de woorden gebruikt bij het 'vertellen' hier inderdaad onproblematisch waren.
Anders gezegd: ik veronderstel dat de vertelde proeven *ongeveer* zó opgevat zijn als ze bedoeld waren.

Gelijke betekenis?
In verband met onze vraag naar de bruikbaarheid van 'persoonlijke zaak' als didactische term mogen we echter niet vanzelfsprekend uitgaan van de mogelijkheid van een 'gelijke betekenis' voor verschillende deelnemers. We moeten dus nader uitspreken wat deze veronderstelling inhoudt, dat "de vertelde proeven ongeveer zo opgevat zijn als ze bedoeld waren".
Wel: Ik veronderstel dat studenten, als er werkelijk proeven gedaan zouden worden, zouden kunnen onderscheiden tussen een proef die voldoet aan mijn vertelling en een proef die daar niet aan voldoet, en dat deze door hen gemaakte indeling ongeveer zou overeenkomen met de indeling die ik zelf zou maken. Aangezien elke vertelling verenigbaar is met verschillende gebeurtenissen of toedrachten (omdat elke vertelling selecteert), en omdat woorden gebruikt met de kwaliteit van grondniveau verwijzen 'volgens familiegelijkenis' (11.4) geef ik met 'ongeveer' aan dat er voor een relatief klein aantal uitvoeringen van een proef een meningsverschil wordt verwacht (tussen hen en mij) met betrekking tot de vraag of de uitgevoerde proef aan de gegeven vertelling voldoet.
Hoewel we deze veronderstelling niet hebben kunnen controleren, leek het me toch zinvol hem zo precies mogelijk uit te spreken, om er bij redeneringen een beroep op te kunnen doen. Bovendien is hiermee een belangrijke beperking van mijn onderzoek scherp aangegeven.

Collecties ervaringen als 'zaak'
We zullen nu nagaan of deze veronderstelling "dat de vertelde proeven ongeveer zó opgevat zijn als ze bedoeld waren" het mogelijk maakt, uitspraken te doen over de 'zaak' waarnaar lerenden met hun woorden verwijzen.
Zoals eerder gezegd moeten we dan zoeken naar een samenhang tussen door leerlingen gesproken woorden en hun ervaringen. Gezien de beperkingen van dit onderzoek gaat het dan om de in opgaven 'vertelde ervaring'.
Hoe deze 'zaken' nu te beschrijven zó dat we kunnen beslissen of twee gespreksdeelnemers over een 'gemeenschappelijke zaak' spreken (elkaar verstaan) dan wel over verschillende zaken? Of zo, dat we kunnen zeggen dat de zaak gedurende het gesprek 'veranderd' is (produktiviteit)?

Vanaf hoofdstuk 11 vonden we het zinvol te zeggen dat deelnemers met hun woorden naar 'collecties ervaringen' verwijzen. We moeten dus nagaan of we bovenstaande vragen

*) Voor de zojuist besproken protocollen 7, 3, 8 en 4 zijn relevant de proeven verteld bij $3\text{-}1^3$ en $3\text{-}6^3$ en ook de door "je assistent" vertelde "uitkomst" van de proef genoemd bij $3\text{-}3c^3$ (zie protocol 3.10, r.168).

kunnen beantwoorden door de 'zaak' waarnaar deelnemers verwijzen nader te beschrijven als een collectie ervaringen. Het is dan gewenst die collecties te kunnen beschrijven, vooral wat hun begrenzing betreft, dus zó dat de lezer kan beslissen of een hem bekende ervaring ertoe behoort, of niet.
Als m'n veronderstelling juist is dat de woorden waarin ik 'vertelde ervaringen' aanbood aan m'n studenten door hen ongeveer zo verstaan werden als ik ze bedoelde, dan kan ik veilig diezelfde woorden gebruiken om de 'collecties ervaringen' te beschrijven (begrenzen) waarnaar *zij* volgens *mijn beste schatting* verwijzen, in hun gesprekken naar aanleiding van de opgaven die volgden op zo'n 'vertelde ervaring'. Wil er daarmee een controleerbare didactische beschrijving ontstaan dan is het nodig dat de woorden die ik gebruikte bij het vertellen van proeven ook tot de 'leefwereldtaal' (p.356) van de lezers behoren. De eerder uitgesproken veronderstelling is nu dus uitgebreid naar de lezers van dit verslag.

Voor de acht zaakgebonden perioden waarin een fase van "zaak-benoemen" werd aangewezen is nu in Tabel XVI aangegeven naar welke 'zaak' de uitspraken in het thema naar mijn beste schatting verwijzen.
In de linker kolom staan uitspraken van lerenden in woorden van het centrale thema van die periode (uit Tabel XV). Rechts staan omschrijvingen van dat aspect van de aangeboden 'vertelde ervaringen', dat ik in de gebruikte woorden herken.
We kunnen dit ook zo zeggen: links staan uitspraken in de nieuwe beschrijvende terminologie die lerenden bezig zijn te ontwikkelen om daarmee hun ervaringen te ordenen, rechts wordt geprobeerd de nog-te-ordenen ervaringen te omschrijven in woorden waarin de te bereiken ordening nog afwezig is: dezelfde woorden (temperatuurverandering, hoeksnelheid) die ook gebruikt werden om deze ervaringen te vertellen.[*)]
Wel is in de rechter kolom geprobeerd de "samenhang" in de aangeboden proeven aan te geven die door lerenden wordt benoemd, maar zonder zelf die samenhang te benoemen (immers daartoe zou ik woorden uit het thema nodig hebben: energiewaarde, warmtecapaciteit). Er is dus geprobeerd een zo consequent mogelijk onderscheid te maken tussen de ordening die bezig is te ontstaan (in woorden van het thema) enerzijds, en de te-ordenen-materie (de zaak) anderzijds.
'De zaak' is dus omschreven in woorden die, naar we veronderstellen, 'onpartijdig' zijn met betrekking tot de thematische meningsverschillen tussen de deelnemers. Dit is mogelijk juist ómdat en voor zover de nieuwe ordening - die bezig is te ontstaan - in deze woorden nog niet doorklinkt. Voor zover deze werkwijze deugt, kunnen we concluderen:

> *Het is mogelijk te spreken van verschillende visies (gezichtshoeken) op een gemeenschappelijke zaak.*

Ik begrijp dus dat De Miranda[117] (1962) aanvankelijk de driehoek leraar-leerling-zaak noteerde, alvorens daar kritische vragen bij te stellen en ik begrijp dat Klaassen[38] (1995) zo'n driehoek of "base-line" eveneens mogelijk acht (zie 9.4 en 9.5).

(* ..en waarvan is verondersteld dat zowel mijn lezers hier als mijn studenten ze on-problematisch verstaan..

Tabel XVI: Thema en zaak, voor de zaakgebonden periodes 1 t/m 9

Uitspraken in het thema waarin 'zaakbenoemen' plaatsvond*	'Zaak' waarnaar de woorden verwijzen (omschreven in woorden uit 'vertelde proef')
1. -"het kan dus niet" (opgave: "energiewaarden toeschrijven") (P3.9:r.1 en 20) -"Nee omdat 't niet een constante eh, eh, eh, warmtecap-" (P3.9:r.3)	**1.** Twee temperatuurveranderingen van een blok alfa-ijzer, elk in samenhang met een verandering van hoeksnelheid van een vliegwiel (proef verteld bij 3-1[3])
3. -"Je bedoelt dat we dan die twee delta's (ΔE) bij elkaar optellen en dan eh.. (..) dat geheel eens gaan bekijken?" (P3.9:r.157-159) -"nulpunt kiezen" (r.160) -"relatieve toestand" (r.168)	**3.** Twee opeenvolgende temperatuurveranderingen, nu in samenhang bezien, elk in samenhang met... (zie bij 1)
4. -"Nee, volgens mij waar het om gaat, is of jij eh, via die tussenstap op diezelfde waarde komt als dat je rechtstreeks zou komen." (P3.10:r.26) -"Overeenkomst (..) volgens mij, dat je gaat kijken of de berekening klopt, en dat je weet, als de berekening klopt, ehm, dat je dan.. hè, eenduidige energiewaarden toe kunt kennen aan een bepaalde temperatuur" (r.83-85)	**4.** Twee opeenvolgende temperatuurveranderingen, waarvan het netto-resultaat gelijk is aan een derde temperatuurverandering, elk van deze temperatuurveranderingen (van een blok alfa ijzer) in samenhang met een verandering van hoeksnelheid van een vliegwiel (proef verteld bij 3-1[3], in samenhang met een proef ontworpen bij 3-2d[3] waarvan nog geen resultaat is verteld, zie opgave 3-3[3])
5. -"Ja maar, het temperatuurverschil verandert juist. Hè, een temperatuurverschil van 10 graden is, hè, is rond eh, rond 20 graden is het ànders" (P3.11:r.24-25) -"Dat heb je toch gedefinieerd als je begintemperatuur en eindtemperatuur hebt" (r.26)	**5.** Een temperatuurverandering van een blok alfa-ijzer in samenhang met een verandering van hoeksnelheid van een vliegwiel. De afhankelijkheid van deze samenhang van: temperatuurverschil, begintemperatuur, eindtemperatuur.(proef verteld bij 3-1[3])
7. -"Dan is het gemiddelde van al die eh.. kleintjes is bijna 't zelfde als het gemiddelde van die grote. Dus dat zou dan de conclusie zijn, dat 't niet uitmaakt ehm, hoe nauw- (..) hoeveel trajecten je meet." (P3.11:r.218-223)	**7.** Een grotere temperatuurverandering, in samenhang met 4 temperatuurveranderingen waarin de grotere verandering kan worden "opgedeeld" (elk in samenhang met... zie 1) (proef bij 3-1[3] in samenhang met die bij 3-6[3])
8. -"Een oneindig klein trajectje" (P3.12:r.8) -"(..) en omdat je bij een klein temperatuurverschil werkt is die [richtingscoëfficiënt] constant want die c is constant bij een heel klein temperatuurverschil. Dus, gaat dit [$\Delta E=mc\Delta T$] gewoon op." (P3.12:r.192-194)	**8.** Een temperatuurverandering van een blok alfa-ijzer in samenhang met een verandering van hoeksnelheid van een vliegwiel, voor het bijzondere geval dat de verandering "klein" is.
9a. -"'t gaat hier toch om ΔE, niet om c" (P3.13:r.25) -"1/m maal de afgeleide van E naar T" (r.30)	?
9b. -"c is ook afhankelijk van T, hoor je dat?" (P3.13:r.39) -"Ja, dus de primitieve van.. " (r.50)	?

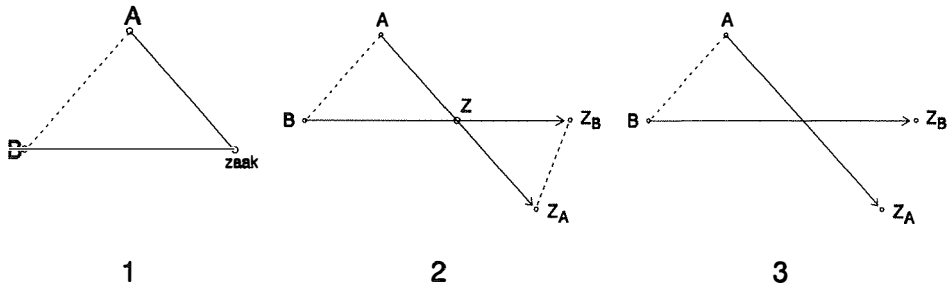
*'Centraal thema' uit tabel Tabel XV

Ongeveer verstaan
De mogelijkheid te spreken van een gemeenschappelijke zaak voor verschillende deelnemers, hoewel over een nieuwe, gedisciplineerde verwoording van die zaak nog meningsverschil bestaat, rust dus op de mogelijkheid die zaak te omschrijven in woorden welke de deelnemers al gemeen hadden voordat ze aan het gespreksthema begonnen en waarin de nieuwe ordening (die bezig is te ontstaan) nog niet is verondersteld. Voor zover er niet zo'n gemeenschappelijk woordgebruik kan worden aangewezen vervalt deze mogelijkheid dan ook.
Sterker nog: voor zover de woorden - waarin de nieuwe ordening nog niet is verondersteld - verwijzen 'volgens familiegelijkenis' is hun gebruik ten dele ook persoonsgebonden (11.4). Het nederlands van de één is dan niet gelijk aan het nederlands van de ander. Er kan dan niet zonder voorbehoud van een gemeenschappelijke zaak worden gesproken, en vandaar de noodzaak van de toevoeging 'ongeveer' (zie p.357).
Wanneer de 'zaak' een collectie ervaringen betreft dan kunnen we zeggen dat de 'zaken' welke door deelnemers met eenzelfde woord of omschrijving worden aangeduid elkaar *overlappen*, wanneer zij bij het beoordelen van een serie proeven gedeeltelijk overeenstemmen met betrekking tot de vraag of een proef al dan niet voldoet aan dat woord of die omschrijving. We kunnen zeggen dat de overlap 'groot' is als de deelnemers het voor een groot deel van de proeven eens zijn in hun beoordeling welke proeven voldoen aan de omschrijving. Mijn veronderstelling (p.357) dat deelnemers de vertelde proeven ongeveer zó opgevat hebben als ze bedoeld waren is nu dus ook zo te formuleren: verondersteld werd dat de 'vertellingen' voor deelnemers en ontwerper naar overlappende collecties ervaringen verwijzen, en dat de overlap 'groot' te noemen is.
Hiermee is dan gezegd wat we kunnen bedoelen met: elkaar *ongeveer* verstaan in het gebruik van een woord of omschrijving.

Persoonlijke zaken: gescheiden werelden?
Zojuist (Tabel XVI) werd een poging gedaan de 'zaken' waarnaar deelnemers met hun woorden verwijzen zó te omschrijven dat deze 'zaken' grotendeels gemeenschappelijk te noemen zijn. Dit werd gedaan door deze 'zaken' te omschrijven in woorden waarvan werd aangenomen dat deelnemers elkaar daarin ongeveer verstaan.
We kunnen echter ook het standpunt innemen dat de zaken van de deelnemers zeer verschillend zijn. Immers: er zijn thema's onderscheiden waarin zij elkaar niet verstaan. Door ervoor te kiezen de 'zaken' der deelnemers te omschrijven in woorden die de deelnemers gemeen hadden, omschrijven we hun 'zaken' slechts voor zover deze elkaar overlappen. We omschrijven dus 'de zaak' voor zover deze gemeenschappelijk te noemen is. Aangezien de gebruikte woorden (temperatuur, hoeksnelheid) gedurende het gesprek onproblematisch blijven[*)] kan bovendien gezegd worden dat 'de zaak' omschreven is voor zover deze in woorden met een (ongeveer) constant blijvende betekenis gevat kan worden. De rechter kolom suggereert dus niet alleen meer overeenstemming tussen de deelnemers, maar suggereert ook een grotere constantheid met betrekking tot de zaak dan

(* De woorden die ter discussie staan zijn immers: energiewaarde, energiecapaciteit, variabele, functie,... 'Temperatuur' en 'hoeksnelheid' functioneren steeds onproblematisch, als het ware op de achtergrond van het gesprek.

reëel is.*) Deze constantheid lijkt nu kunstmatig.
We zouden het standpunt kunnen innemen dat 'de zaak' van een deelnemer alleen juist omschreven kan worden in díe woorden die de deelnemer daarvoor kiest. Immers, waarom doet hij anders al die moeite om een nieuw thema te introduceren, als hij niet meent daardoor 'zijn zaak' beter te kunnen verwoorden?
Ik begrijp nu dus ook De Miranda[117] (1962), die vraagt of we de gesprekssituatie wel mogen afbeelden zoals in (1) dan wel of een afbeelding zoals in (2) of (3) niet beter zou zijn, omdat elk der deelnemers allereerst op zijn eigen zaak is gericht.



Afbeelding 36 (figuren ontleend aan De Miranda[117])

Dit standpunt leidt echter tot een probleem. Immers, de woorden waarin de deelnemer zijn thema aan de orde stelt, staan nog ter discussie. Er heeft nog geen onderlinge ijking van woorden plaatsgehad, of die ijking is nog gaande. Voor zover deelnemers elkaar niet verstaan (elkaars zaak niet kennen) zou het al heel hoogmoedig zijn om te menen dat ik daar wel uitspraken over kan doen. Immers ik ben (op dit moment) geen gesprekspartner en kan mijn 'verstaan' dus niet controleren door het gesprek voort te zetten (vgl. 11.3). Wanneer ik de 'persoonlijke zaak' van een deelnemer een rol zou willen laten spelen in mijn beschrijving van het gesprek, dan kan ik niet meer doen dan die deelnemer citeren - zoals ik in de linker kolom deed. Dáár staat dan de best mogelijke aanduiding van 'zijn zaak'. Maar omdat ik niet mag aannemen dat ik hem versta, met betrekking tot die woorden waarover het gesprek nog gaande is, levert dit geen didactische beschrijving op van 'zijn zaak'.

> *De 'persoonlijke zaak' van een deelnemer of subgroep* (die niet met **WK** tot verstaan is gekomen) *kan ik niet beschrijven, behalve door hun woordgebruik te beschrijven.*

De door Ten Voorde[35] (p.495) geformuleerde samenhang tussen 'taal' en 'zaak' functioneert dan als een empirie-overschrijdende veronderstelling. Immers: ik kan deze veronderstelling niet toetsen, ik moet ervan uitgaan. Nu moeten we nog vragen naar het nut van deze veronderstelling. Want welke zin heeft het om 'zaak' van 'woordgebruik' te onder-

(* De omschrijvingen in de rechter kolom lijken meer op elkaar (vertonen minder progressie) dan de uitingen van studenten in de linker kolom. Dit is een gevolg van de keuze rechts alleen woorden te gebruiken die voor aanvang van het gesprek al een betekenis hadden.

scheiden, wanneer ik over iemands zaak niets anders kan zeggen dan over zijn woordgebruik? Hiermee vragen we naar het nut van 'persoonlijke zaak' als term.

Voor de 'gemeenschappelijke zaak' waarover we het eerder hadden, hoeft deze vraag niet zo gesteld te worden. Immers de poging deze 'gemeenschappelijke zaak' te omschrijven met woorden waarvan ik met enige reden kon veronderstellen dat deze woorden zowel voor mijn studenten als voor mij naar ongeveer dezelfde collecties ervaringen verwijzen, leidde ertoe dat een onderscheid gemaakt kon worden tussen een te-ordenen-materie waarover men het al eens is (d.i. een gemeenschappelijke zaak) en de nieuwe ordening die men daarin wil aanbrengen, waarover men het nog niet eens is.
Dit onderscheid is functioneel, omdat daarmee kan worden beschreven hoe verschillende ordenings-voorstellen (d.i. thema's) getoetst kunnen worden op hun geschiktheid om de gemeenschappelijke 'zaak' te ordenen. Zonder zo'n 'gemeenschappelijke zaak' blijft onbegrijpelijk hoe men *samen* nieuw woordgebruik kan 'toetsen aan' ervaringen. Immers als die ervaringen om te beginnen al niet gemeenschappelijk te noemen zijn, hoe kan men er dan samen aan 'toetsen'?
We zagen echter dat het wél mogelijk is om ervaringen 'gemeenschappelijk' te noemen, voorzover die ervaringen zich ook laten 'vertellen' in taal waarin de nieuwe, ter discussie staande ordening, nog niet is verondersteld.

Als we het eens zijn dat *'gemeenschappelijke zaak'* een zinvolle didactische term is geworden, dan kunnen voor de uitdrukking *'persoonlijke zaak'* de volgende gebruiksmogelijkheden worden genoemd:

1 - Zoals boven aangegeven: om te begrijpen waarom iemand een nieuw thema introduceert (waarin hij niet meteen wordt verstaan) kunnen we veronderstellen dat hij iets onder woorden wil brengen, wat volgens hem tot nu toe nog niet voldoende onder woorden is gebracht. We veronderstellen dan een 'persoonlijke zaak', die ter sprake gebracht wordt als bedoelde aanvulling op de 'gemeenschappelijke zaak' voor zover die tot dan toe is ontstaan. Het is echter onduidelijk wat we hiermee nu precies beweren, behalve: iemand wilde nog wat zeggen.
2 - Wanneer we een 'zaak' als collectie ervaringen omschrijven, dan is te begrijpen waarom eenzelfde woord voor verschillende mensen steeds naar enigszins verschillende 'zaken' verwijst. De collecties ervaringen die mensen gedurende hun leven opdoen zijn immers doorgaans verschillend.
3 - Bij 'gemeenschappelijke zaak' moest een voorbehoud worden gemaakt: in hoeverre is die zaak 'gemeenschappelijk' en in welke zin is ze 'gemeenschappelijk' te noemen? Van de verschillende (persoonlijke) collecties ervaringen waarnaar eenzelfde woord verwijst konden we zeggen dat deze elkaar *overlappen* voor zover deelnemers een serie proeven gelijkluidend beoordelen met betrekking tot de vraag of dat woord van toepassing is op de proef of niet. Zo konden we de 'gemeenschappelijke zaak' formuleren als een overlap van 'persoonlijke zaken'.
4 - Al kunnen we iemands persoonlijke zaak ('collectie ervaringen') niet beschrijven of formuleren, de ongelijkheid van zulke 'collecties ervaringen' waarnaar eenzelfde uitdrukking verwijst is wel aanwijsbaar, namelijk telkens als twee mensen samen iets hebben meegemaakt en beide komen tot een verschillend oordeel over de toepasselijkheid van die uitdrukking.

Al kunnen we dus een 'persoonlijke zaak' niet beschrijven, het is wel mogelijk om de uitdrukking 'persoonlijke zaak' te gebruiken in redeneringen (2 en 3) en ook is dikwijls een verschil in persoonlijke zaken aanwijsbaar (4) zij het dan ook niet beschrijfbaar.

'Ervaring', uniek of gemeenschappelijk
Een nadere opheldering over 'ervaring' kan nodig zijn om op de voorgestelde wijze de uitdrukkingen 'gemeenschappelijke zaak' en 'persoonlijke zaak' tezamen te kunnen gebruiken zonder inconsequentheden. In (2) werd gezegd dat een zelfde woord voor verschillende mensen steeds naar enigszins verschillende zaken (collecties ervaringen) verwijst. Hiertegen kan ingebracht worden dat gesproken zou moeten worden van *totaal* verschillende collecties. Immers: zelfs als we samen iets meemaken, sta ik nooit precies daar waar jij staat, en letten we niet precies op hetzelfde. We kunnen dus met 'een ervaring' iets bedoelen wat absoluut uniek is naar tijd, plaats en persoon. Van 'overlap' tussen twee 'collecties ervaringen' van verschillende mensen kan dan geen sprake zijn: die overlap is leeg. Vrijwel alles wat we tot nu toe over het gezamenlijk afbakenen van 'collecties ervaringen' gezegd hebben, wordt onformuleerbaar als we 'ervaring' zo'n absolute uniciteit toeschrijven.
Wanneer we het zinvol vinden om te zeggen dat woorden verwijzen naar ervaringen, dan blijkt daaruit dat met 'ervaring' iets wordt bedoeld dat we minstens gemeen *kunnen* hebben of krijgen. Het heeft immers weinig zin om te zeggen dat iemand woorden gebruikt, met de bedoeling om daarmee alleen naar *zijn eigen* ervaringen te verwijzen: 'verwijzen' doe je toch voor iemand anders. Steeds als een persoonlijke zaak 'persoonlijk' blijft, is een poging tot gesprek mislukt.
Hierboven werd al aangegeven hoe we kunnen zeggen dat mensen ervaringen gemeen hebben (overlappende collecties), namelijk: wanneer zij samen iets beleefd hebben én allebei over woorden beschikken, of gaan beschikken, waarmee ze de ander aan die belevenis kunnen herinneren dan kunnen we die belevenis een 'ervaring' noemen, die zij gemeen hebben. 'Ervaring' veronderstelt dan, dat er woorden zijn waarmee naar deze gemeenschappelijke ervaring kan worden verwezen.

> *Door gezamenlijk benoemen van persoonlijke ondervindingen ontstaan 'ervaringen' waarnaar met woorden kan worden verwezen.* *),153

Met 'ervaring' bedoelen we dán blijkbaar iets dat niet uniek is, want we bedoelen nu iets dat we bij de ander kunnen oproepen. Maar als 'ervaring' iets is waarnaar met woorden verwezen kan worden, dan is ze ook in ander opzicht niet-uniek. Immers geen woord of uitdrukking is bedoeld om naar een eenmalige unieke belevenis te verwijzen (vgl. 11.1). We zien nu, dat we het woord 'ervaring' in zekere zin niet in het enkelvoud kunnen gebruiken.

> *Wat benoemd wordt is steeds al 'een collectie' ervaringen.*

(* Deze uitspraak is niet nieuw, en is dan ook alleen gecursiveerd omdat hij van belang is voor wat volgt (vgl. Roest[153], p.7 en vgl. Klaassen[38], geciteerd in 9.5)

En dus moeten we toegeven dat de vraag, waaruit nu die collectie bestaat ("wat is: één ervaring?") vermoedelijk geen zinvolle vraag mag heten. We spreken over de 'collectie ervaringen' waarnaar een woord verwijst, omdat we daarbij denken aan de veelheid van momenten waar we dat woord van toepassing vonden. Willen we het over één van deze momenten hebben dan zijn daarvoor verschillende mogelijkheden:

- we kunnen meer woorden (benoemingen) gebruiken, om daardoor het verwijzen specifieker te maken (maar ze wordt nooit zó specifiek dat ze naar die unieke persoonlijke belevenis verwijst)
- we kunnen aan de 'benoeming' van de ervaring een aanwijzend woordje (deze, nu, en toen..) toevoegen.

Aanwijzende woorden signaleren weliswaar, dat ik nu over dit of dat unieke moment spreek, ze maken ***mijn*** unieke belevenis van dat moment echter niet bespreekbaar. En ook het moment wordt niet in zijn uniciteit benoemd, het wordt slechts aangewezen. Vandaar dat we in zo'n geval niet van 'verwijzen' spreken maar van 'aanwijzen'. Woorden verwijzen dus steeds naar 'collecties ervaringen' of anders gezegd, ze verwijzen naar niet-unieke ervaring. Een lid van de 'collectie' kunnen we aanwijzen maar niet benoemen, bepalen, beschrijven of afgrenzen van andere 'leden'.

De hierboven cursief gezette afspraak met betrekking tot het spreken van 'ervaring' maakt het mogelijk te zeggen dat de (persoonlijke) collecties ervaringen waarnaar een woord verwijst elkaar 'overlappen', zoals voorgesteld in (3). Immers als deelnemers een serie proeven gelijkluidend beoordelen met betrekking tot de vraag of dat woord van toepassing is, dan kunnen ze dat woord gebruiken om zo'n soort proef (niet uniek) voor elkaar verstaanbaar aan te duiden, ernaar te verwijzen. Ook maakt deze afspraak het mogelijk te zeggen dat de (persoonlijke) collecties ervaringen waarnaar eenzelfde woord A verwijst 'verschillen', zoals voorgesteld in (4) namelijk steeds als een ervaring (die men met woorden B, C, D voor elkaar kan oproepen) leidt tot verschil van mening over de toepasselijkheid van woord A.
In voorgaande hoofdstukken hebben we getoond dat we zinvol kunnen zeggen dat een collectie ervaringen 'wordt afgebakend' (door familiegelijkenis, of door eigenschappen, 11.5). We vonden het zinvol te zeggen dat zo'n collectie kan worden 'geschift' (12.6) en dat de collectie waarnaar woord A verwijst de collectie waarnaar woord B verwijst kan 'omvatten' (12.6). Tenslotte vonden we het zinvol te zeggen dat twee collecties ervaringen elkaar kunnen 'overlappen'. Tot zover is het dus zinvol gebleken te spreken over 'ervaringen' als over dingen in een collectie.
We merkten echter al op dat de vraag wat nu die ervarings-dingen dan zijn, geen zin heeft: ervaringen zijn geen afgrensbare dingen. Uiteraard kan dit een reden zijn om het spreken van 'collecties ervaringen' te verwerpen.[*)] Dat vind ik prima, als dan maar wordt aangegeven hoe datgene, wat we tot nu toe met deze term konden doen, op andere wijze beter gedaan kan worden. In het bijzonder zou ik willen horen hoe men dan het samen 'toetsen' van uitspraken (11.1 en hierboven, p.362) didactisch wil beschrijven.

[*)] Met dank aan Hans de Miranda voor zijn kritische suggesties.

Het spreken over een 'gemeenschappelijke zaak' als overlap van 'persoonlijke zaken' is tot op zekere hoogte bruikbaar gebleken.

We hebben kunnen aangeven wat we ermee kunnen doen (Tabel XVI) en ook welke misverstanden (ervaring als afgrensbaar ding) mogelijk zijn. Daarmee is onderzoeksvraag 3 beantwoord.

14.1.5. Twee verschillende soorten 'zaken'

Voor woorden en uitspraken die niet, of niet in de eerste plaats naar ervaringen verwijzen, zoals we constateerden voor overkoepelende termen (13.9), is de hierboven getoonde werkwijze (Tabel XVI) niet geschikt. Voor de uitspraak dat c een 'afgeleide' te noemen is (periode 9) kunnen we zeggen dat de term 'c' hier de zaak is waarover een uitspraak wordt gedaan. 'Afgeleide' is dan de overkoepelende term die een structuur benoemt in het gebruik van een collectie termen waartoe 'c' behoort (13.12). De te ordenen materie oftewel de zaak is hier dus niet een collectie ervaringen, maar betreft het eigen beschrijvende termgebruik.

14.1.6. Conclusie: eigenschappen van gesprek

'Gesprek' heeft in 14.1 achtereenvolgens de volgende eigenschappen toegekend gekregen:

- In een (produktief en 'zakelijk') gesprek komen lerenden tot uitspraken die verder gaan dan alleen voldoen aan de letter van een gedrukte opgave. Men reageert uiteindelijk niet op de gedrukte tekst, maar op dat wat men in die tekst herkent ('de zaak') vanuit een eigen achtergrond van ervaringen.
- In een zakelijk gesprek constateren we voortgang doordat er enkele fasen kunnen worden opgemerkt: van een wederzijdse 'zaakinformatie' gaat men over tot een kritische 'zaakgebonden oriëntatie' waarbij verschillende thematische verwoordingen worden getoetst aan de gemeenschappelijke zaak voor zover die op dat moment bestaat, en vandaar komt men tot de keuze van een verwoording voor deze zaak ('zaakbenoemen').
- In een gesprek gaan deelnemers op elkaar in doordat ze groepen woorden (thema's) van elkaar overnemen om daarmee nieuwe uitspraken te doen. Thema's zijn te onderscheiden door te letten op *wie welke* woorden van elkaar overneemt en door het *moment waarop* een cluster woorden wordt overgenomen. Persoonlijk ingebrachte thema's zijn bedoeld als bijdrage aan het centrale thema, d.i. aan het thema waarin men een conclusie blijkt te willen trekken ('zaakbenoemen'). Lukt dit, dan zien we het persoonlijk ingebrachte thema ononderscheidbaar worden van het centrale thema.
- Het 'toetsen' van nieuw ingebrachte thema's aan een gemeenschappelijke zaak betekent dat het voorgestelde woordgebruik als ordeningsmiddel (thema) getoetst wordt op zijn adequaatheid jegens dat-wat-geordend-moet-worden (de zaak). In laatste instantie betekent dit toetsing aan een collectie ervaringen. De mogelijkheid van toetsing aan een 'gemeenschappelijke zaak' veronderstelt dat deze 'zaak', voor zover hij gemeenschappelijk te noemen is, ook *zonder* de nog ter discussie staande termen verwoord kan worden. Een taal met de kwaliteit van grondniveau (woorden met een vanzelfsprekende betekenis) is dus uiteindelijk nodig als vertrekpunt.

Bovenstaande generalisaties zijn nuttig omdat ze eisen stellen aan probleemstellend onderwijs. Immers: het is dan nodig te vertrekken vanuit een taal met de kwaliteit van grondniveau. En zo zijn er nog meer eisen te beargumenteren:
Willen we een overkoepelende term introduceren, dat wil zeggen een term die het functioneren van enige andere termen tot 'zaak' heeft, dan zullen eerst die 'andere termen' voor lerenden moeten gaan functioneren in relatie tot een zaak (en in laatste instantie*) zal het daarbij steeds om een collectie ervaringen gaan).

14.2. 'Gesprek' als overkoepelende didactische term?

Hoewel we over de zojuist genoemde eigenschappen van gesprek (14.1.6) niet ontevreden zijn, kan toch het gevoel bestaan dat we hieraan niet genoeg hebben bij het organiseren van onderwijs. Immers, als we onderwijs ontwerpen gaat het er niet alleen om te weten welke eigenschappen 'het gesprek' in het algemeen heeft, we moeten ook weten wélk gesprek we nu kunnen gaan voeren en welk gesprek daarna.
We zagen eerder dat een 'analogieredenering' toch in enkele eigenschappen verschilt van een 'contextwisseling' (13.14), en daarnaast formuleerden we ook nog 'contextuitbreiding' (12.4) en niveauverhoging van grondniveau naar beschrijvend niveau (11.5 en 12.6). De vraag dringt zich nu op of deze verschillende leerprocessen die zich in onderwijs kunnen voordoen zich ook laten beschrijven als 'verschillende soorten gesprek', anders gezegd, of de beschrijvingen die we eerder van deze leerprocessen gaven, zich laten overkoepelen door de zojuist genoemde eigenschappen van 'gesprek'. Daarbij zal enerzijds recht gedaan moeten worden aan de bijzonderheden van eerder beschreven gesprekssituaties, anderzijds zal er serieus naar gestreefd worden om die beschrijvingen te disciplineren volgens een gekozen didactisch gezichtspunt.
Hierbij zullen we ons bezighouden met onderzoeksvraag 4:

> *4. Houdt de gekozen beschrijvingswijze voor een taalverschil / -verandering rekening met een **gemeenschappelijke zaak** als overlap van **persoonlijke zaken** of niet?*

Nu voor het spreken over 'persoonlijke zaken' en het gekozen spreken over een zaak als 'collectie ervaringen' beperkingen zijn geformuleerd (14.1.4), moeten we hieraan als vraag toevoegen:

> *In hoeverre houdt de gekozen beschrijvingswijze voor een taalverschil /-verandering rekening met de geformuleerde beperkingen bij het spreken van 'persoonlijke zaken' (p.361) en van 'ervaringen' als dingen in een collectie (p.364)?*

We zullen nagaan of we het samenspel van 'persoonlijke' en 'gemeenschappelijke zaak' nu zo kunnen formuleren dat hierdoor zowel het stokken (taalverschil) als de gebleken

---

(* "in laatste instantie" omdat we ons kunnen voorstellen: een term A die het functioneren van de termen a en b beschrijft, die elk op hun beurt ook weer... etcetera. ('overkoepeling' zou iteratief opgevat kunnen worden)

produktiviteit (taalverandering) van een gesprek duidelijk naar voren komen.

14.2.1. Overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau

In hoofdstuk 11 en 12 werden enige gebeurtenissen besproken die gerekend werden tot een overgang van grondniveau naar beschrijvend niveau. Daarbij werd gesproken van 'collectie ervaringen' als datgene (de zaak) waarnaar een woord verwijst. Soms werd daarbij gesproken van eenzelfde woord ('ruilwaarde'), verwijzend naar "ongelijke collecties" voor verschillende deelnemers (p.245), in een ander geval werd zonder meer gesproken van "de collectie ervaringen waarnaar 'voorraad' verwijst" (p.244) zonder vermelding wie er verwijst of naar wiens collectie ervaringen er verwezen wordt. 'Collectie ervaringen' stond dus nu eens voor een persoonlijke zaak, dan weer voor de gemeenschappelijke zaak, zonder dat een verschil tussen beide gebruikswijzen werd uitgesproken.
Kijken we verder hoe deze twee gebruikswijzen zich onderscheiden dan valt het volgende op. Persoonlijke 'collecties ervaringen' werden alleen 'ongelijk' genoemd, meer werd er niet over gezegd. Aanleiding tot die opmerking is een situatie waar twee deelnemers samen een (papieren) proef bespreken, waarbij de één een woord ('ruilwaarde') van toepassing vindt en de ander niet.(*) Hieruit blijkt dat de persoonlijke collecties ervaringen, waarop zij dat woord van toepassing vinden (op dat moment) verschillen.
Over de gemeenschappelijke 'collectie ervaringen waarnaar een woord verwijst' kan meer gezegd worden. Deze kan worden omschreven in woorden die de deelnemers gemeenschappelijk gebruiken met betrekking tot die zaak. Zo wordt opgemerkt: "[**O** en **P**] zijn het eens dat voor die ervaringen (o.a. de val van de pen) waar van 'hoogte-energie' gesproken kan worden, ook van 'voorraad' gesproken kan worden". Daarmee is tenminste een deel van de collectie ervaringen waarnaar 'voorraad' voor hen (op dat moment) verwijst, op een voor **O**, **P** en mij (en hopelijk ook voor u) duidelijke manier omschreven.
Zo konden we daar spreken van "de" (gemeenschappelijke) collectie ervaringen waarnaar een woord 'voorraad' verwijst, zelfs nog voordat deelnemers het eens waren geworden over een *formulering* van de eigenschappen die hun gezamenlijk gebruik van 'voorraad' afbakenen. In die zin kunnen we hier dus spreken van een meningsverschil ten aanzien van een gemeenschappelijke zaak. In de woorden van 14.1.4: verschillende ordeningsvoorstellen worden getoetst op hun geschiktheid om de gemeenschappelijke zaak (de te ordenen materie) inderdaad te ordenen. In 11.4 werd, met hulp van Wittgenstein, opgemerkt hoe we kunnen begrijpen dat mensen het al (grotendeels) eens zijn over het gebruik van een woord, terwijl ze tegelijk moeite hebben, of het niet eens zijn, met betrekking tot het formuleren van de eigenschappen die hun gebruik van dat woord afbakenen. In geval de collectie ervaringen is afgebakend 'volgens familiegelijkenis' is er geen bundel eigenschappen te noemen die ons gebruik van het woord 'spel' afbakent en toch is de collectie ervaringen waarop we 'spel' van toepassing vinden in hoge mate gemeenschappelijk te noemen.
Inmiddels kunnen we zeggen dat het spreken van een 'gemeenschappelijke' collectie

(* Vergelijk p.239 waar opgemerkt werd dat deelnemers en "tekening" "op verschillende manieren gezien" hebben. Deze opmerking wordt onderbouwd doordat een deelnemer het woord "jojo" van toepassing vindt op de tekening en een andere deelnemer niet.

ervaringen waarnaar een woord verwijst, niet betekent dat de 'persoonlijke collecties' waarnaar dat woord verwijst identiek zijn. Er kan dus ieder moment alsnog een ervaring gezamenlijk worden opgedaan waar meningsverschil blijkt ten aanzien van dat woord. Wanneer we voor **O** en **P** spraken van "de" collectie ervaringen waarnaar 'voorraad' verwijst, wordt dus niet bedoeld dat hun persoonlijke collecties identiek zijn. Er is slechts bedoeld dat we tot nu toe een 'overlap' opmerken en dat er nog geen tekenen zijn gevonden van niet-overlap (maar die kunnen ieder moment komen). Aangezien er geen tekenen waren van niet-overlap, beperkten we ons tot het bespreken van de overlap: de gemeenschappelijke zaak, waarover *verschillende* uitspraken worden gedaan.*)

In hoofdstuk 11 wordt veel van 'collecties ervaringen' gesproken. Over de leden van die collecties - dus over wat we 'een ervaring' zouden kunnen noemen - wordt weinig gezegd, zoals we in 14.1.4 opmerkten met goede redenen. Waar wel sprake is van 'een ervaring' (p.244, "een ervaring toegevoegd aan de collectie"), wordt die 'ervaring' *aangewezen* ("r.15-19"). Het betreft een gebeurtenis, het vallen van een pen, waarbij **O** en **P** beiden aanwezig waren en die deel uitmaakt van hun gesprek. Zodra **P** deze ervaring benoemt ("die wordt nu omgezet in bewegingsenergie", p.243, r.18) wordt met ***nu*** een enkelvoudige ervaring aangewezen als lid van de collectie waarnaar 'omgezet in bewegingsenergie' verwijst. Dit klopt met wat we eerder zeiden: 'een ervaring' kunnen we aanwijzen, maar een ervaring wordt (in zijn enkelvoudigheid) niet benoemd, beschreven of afgegrensd van andere 'ervaringen'.

Daar waar we voortgang opmerkten, omdat deelnemers het eens werden over een gemeenschappelijke formulering van eigenschappen van 'ruilwaarde' (p.245) merkten we op dat hieraan een uitbreiding voorafging doordat **P** aangaf ook bij "geld" van "ruilwaarde" te willen spreken. Door deze 'uitbreiding' ontstond de gezamenlijke collectie ervaringen ('overlap'), waarvoor men tot een gezamenlijke afbakening kon komen door eigenschappen te formuleren.

We kunnen concluderen: met 'overlap' wordt het verstaan beschreven, waarbij steeds de mogelijkheid van niet-verstaan open blijft. Met 'uitbreiding van de overlap' kan ook het elkaar gaan verstaan worden beschreven.

14.2.2. Contextuitbreiding

De gebeurtenis die we in 12.4 'contextuitbreiding' noemden, werd ook beschreven door te zeggen dat daar de collectie ervaringen, waarnaar 'ruilwaarde' verwijst, werd geschift op het vóórkomen van twee extra eigenschappen. Op deze wijze konden we het ontstaan van de nieuwe term 'energiewaarde' beschrijven.

Hierbij leek het me nodig dit "schiften" van een collectie ervaringen als een "veronderstelling" te presenteren omdat (voetnoot, p.277) "het schiften [...] in de zin van sorteren van met name genoemde gebeurtenissen is in protocol 3.7 **niet** aanwijsbaar". Nu kunnen we zeggen dat het sorteren van *met name genoemde* gebeurtenissen zeer goed aanwijsbaar is in dit protocol, immers deelnemers merken meteen op: "dat kan met verplaatsing niet, dat kan met hoogte wel" (protocol 3.7, **O** in r.5). Hierbij worden de ervaringen, genoemd "met

*) En daaruit blijkt, dat voor enige andere woorden (naast 'voorraad') de collecties ervaringen verschillen.

hoogte" gerekend tot de collectie waar 'energiewaarde' van toepassing is. De ervaringen, genoemd "met verplaatsing" worden daar niet toe gerekend.
Bij het schrijven van 12.4 kon ik dit nog niet zo zeggen. Waarom niet? Blijkbaar meende ik met 'schiften van een collectie ervaringen' toch zoiets te moeten bedoelen als het sorteren van aparte belevenissen of gebeurtenissen, welke uniek zijn naar plaats en tijd. Inmiddels hebben we geconcludeerd dat zulke belevenissen nu juist niet "met name genoemd" kunnen worden, want zodra iemand ze met name noemt, zijn ze niet uniek meer: het betreft dan meteen collecties ervaringen. Wat we een 'lid' van zo'n collectie zouden willen noemen, kan dus hoogstens worden aangewezen, niet "met name genoemd".

De opmerking in de voetnoot kan nu worden herschreven: in protocol 3.7 ontbreekt aanwijzend woordgebruik. Er worden geen 'ervaringen' gesorteerd die worden aangewezen (op de wijze van: 'weet je nog wel, toen we werkten aan opgave x, toen...'). Zulk aanwijzen miste ik, omdat ik graag een relatie wilde leggen tussen het gesprek dat hier gevoerd wordt enerzijds, en ervaringen opgedaan bij voorafgaande opgaven anderzijds. Nu ze niets aanwijzen hoor ik alleen woorden! Dit 'tekort' meende ik door de gedane "veronderstelling" te moeten aanvullen. Merkwaardig is dan wel dat **WK** als leraar helemaal niet de behoefte had om aanwijzend woordgebruik hier te stimuleren: hij miste het niet.
De werkwijze gevonden in 14.1.4 maakt het mogelijk om ook zonder aanwijzend woordgebruik bij de lerenden toch een relatie met eerder in het onderwijs georganiseerde ervaringen te leggen. We maakten daar onderscheid tussen woorden waarvan het gebruik ter discussie staat (hier: 'energiewaarde' en wellicht ook nog 'ruilwaarde') en woorden waarvan het gebruik niet problematisch is (die tot de leefwereldtaal behoren). Van de woorden "hoogte" en "verplaatsing" kunnen we zeggen dat hun gebruik in protocol 3.7 niet problematisch is. Ook komen deze woorden voor in voorafgaande opgaven: in opgaven $2\text{-}1^3$ en $2\text{-}4^3$ zijn ervaringen met "hoogte" georganiseerd, in opgaven $2\text{-}2^3$ en $2\text{-}3^3$ met "verplaatsing" (over een tafel). Aangezien het gesprek in protocol 3.7 direct na het beantwoorden van deze opgaven volgt, mogen we de gebruikte woorden "hoogte" en "verplaatsing" zo verstaan dat ze (onder andere, of zelfs voornamelijk) naar de ervaringen opgedaan bij deze opgaven verwijzen.
Het gevoel een gewaagde veronderstelling te moeten doen was dus onterecht: het 'schiften' van zojuist opgedane 'ervaringen' is nu in dit protocol goed zichtbaar. De veronderstelling dat elk van de deelnemers in stilte persoonlijke indrukken zit te sorteren hebben we dus niet meer nodig [misschien dat een neuroloog nog iets nuttigs met zo'n veronderstelling kan doen, in een gesprekswetenschap is ze overbodig, vgl. 9.5].
Als we zien dat in dit protocol uiteindelijk twee extra eigenschappen (p.278) ontstaan welke 'energiewaarde' onderscheiden van 'ruilwaarde', dan is de kloof tussen **WK** en de overige deelnemers nu zo samen te vatten: één van de twee onderscheidende eigenschappen speelt al meteen een rol voor deelnemers, om de collectie eigenschappen waarnaar 'ruilwaarde' verwijst te schiften. De tweede onderscheidende eigenschap ontstaat pas veel later, en het blijft steeds wat onduidelijk of daarbij wordt vertrokken vanuit die ervaringen waarnaar 'ruilwaarde' in voorgaande opgaven ging verwijzen (protocol 3.7, r.96-166). Een noodzaak om vanuit 'ruilwaarden' te vertrekken, om van daar uit een (nu wel problematische) 'energiewaarde' te verantwoorden, ontstaat voor hen pas in het geval van een niet-constante capaciteit (12.5.3).

14.2.3. Contextwisseling

In 12.5 werden gebeurtenissen rond deelnemer **P** besproken die we 'een contextwisseling' noemden. Deze contextwisseling als onderwijsresultaat werd alleen bij deelnemer **P** opgemerkt. Weliswaar gingen de andere deelnemers korte tijd later ook het integreren gebruiken als middel om de energiewaarde in afhankelijkheid van de temperatuur van het voorwerp te berekenen (zie 12.5.1 onder protocol 3.14), maar hierbij kon ik niet onderscheiden of dit voor hen een zinvolle keuze betrof - een antwoord op een "fysisch zinvol probleem" (12.5.3), dan wel of **N** en **O** op voorschrift van **P** eenvoudig accepteren dat er bij dit type opgave nu eenmaal integralen uitgerekend moeten worden. Ik hoor hun reden niet om **P** hierin te volgen.

We hebben hier dus een leerresultaat toegeschreven aan een persoon. Datzelfde deed Ten Voorde[35] al eerder, toen hij Leo qua leerresultaat onderscheidde van Karel, Rob en Wim (zie 12.2). Gezien de uitgesproken onmogelijkheid om iets te zeggen over een 'persoonlijke zaak' die tijdens een gesprek persoonlijk bléék (14.1.4), moet de vraag gesteld worden of het gespreksmodel ons wel toestaat om een onderwijsresultaat toe te schrijven aan een persoon.

Maar natuurlijk is **P**'s resultaat niet persoonlijk te noemen, immers **wij** (auteur en lezers van dit proefschrift) kunnen **P**'s probleem en zijn oplossing voor dat probleem als fysisch zinvol herkennen. Als vraag blijft dan over waarop die herkenning is gebaseerd en hoe we die herkenning controleerden in 12.5. Wel, ik bood u een verslag aan van gesprekken waarin zowel **P** als ik[*)] als **N** en **O** betrokken waren.

Bij het bezien van het verslag van die gesprekken werd opgemerkt dat de sluipend geïntroduceerde term 'energiewaarde', welke is af te bakenen door de eigenschappen (1), (2) en (3) op zeker moment "naar een ervaring is gaan verwijzen" (p.288). Dit gebeurde nadat ik (**WK**) had opgemerkt dat er een ervaring ontbrak welke het mogelijk zou maken te kiezen uit de standpunten van **N** en **O** enerzijds, **P** anderzijds, en welke inhoud zou geven aan de door mij eerder sluipend geïntroduceerde term.

Als het al juist is dat hier voor **P** een zaak ontstaat voor de term 'energiewaarde', dan is het duidelijk dat hij deze zaak minstens gemeen heeft met **WK** - die zojuist leerde hoe hij de collectie ervaringen voor 'energiewaarde' uitbreiden moest - en met **N** en met **O**, wiens voorspelling door **WK** bevestigd werd. **N** en **O** zijn vervolgens tevreden met de nieuwe term 'energiewaarde' zoals die tot dan toe is ontstaan. Als enige aanwijzing *dat* 'energiewaarde' in de nieuwe betekenis nu voor **P** naar een zaak verwijst noem ik een probleem (p.289) waardoor we zowel **P**'s schijnbare inconsequentheden als zijn plotselinge produktiviteit konden begrijpen.

Omdat deze interpretatie nu geen gebruik meer maakt van een strikt persoonlijke zaak voor deelnemer **P**, maar van een gemeenschappelijke zaak (of overlappende zaken), is de twijfel die we eerder formuleerden verdwenen: deze interpretatie is niet in strijd met een gespreksmodel. Intussen bleek het voor de rechtvaardiging van deze interpretatie van belang dat ze ontstond uit een leer-ervaring van de leraar, die nog moest leren hoe hij de

---

[*)] Het voldoet nu niet om te zeggen dat daar **WK** betrokken was, tenzij ik erbij zeg: en **WK** dat ben ik.

term 'energiewaarde' qua omvatte ervaring moest uitbreiden, zo dat de 'overlap' groeit.*) In zekere zin moest die term voor hem dus ook nog ontstaan.
Het opdoen en in beschrijvende taal verwoorden van zulke leerzame ervaring van de leraar noemen we didactiek. We hebben gezien dat het voor zo'n ervaring nodig is de didacticus tot de groep te rekenen, waarin de onderwezen term geleerd wordt.

14.2.4. Analogieredenering

In hoofdstuk 13 werden gebeurtenissen besproken die we 'analogieredenering' noemden. Er werd opgemerkt dat hierbij een nieuw soort termen ontstaat, 'overkoepelende termen' genoemd. Lettend op datgene waarnaar deze overkoepelende termen verwijzen noemden we: de termen in verschillende+) relatienetten die (onvolmaakt) op elkaar worden afgebeeld in een analogieredenering. Dit werd ook wel zo gezegd dat een overkoepelende term (in de eerste plaats) naar een collectie termen verwijst (13.9).
Omdat we voor 'termen' al in 12.2 gezegd hebben dat zij intersubjectief functioneren hoeven we daarvoor nu niet de vraag te bespreken die we in dit hoofdstuk voor 'ervaring' bespraken: de vraag of de leden van de collectie 'strikt persoonlijk' te noemen zijn, doet zich voor overkoepelende termen niet voor. Ook een voorbehoud zoals bij 'collectie ervaringen', dat we bij gelegenheid wel een lid van de collectie kunnen *aanwijzen*, maar dat deze 'leden' niet door een beschrijving of benoeming van elkaar af te grenzen zijn - zo'n voorbehoud is bij een 'collectie termen' niet nodig, want termen zijn al benoemd en dus van elkaar onderscheiden.
Hoewel de 'termen' welke in een overkoepelende term geordend worden elk al intersubjectief te noemen zijn, zagen we toch de onderlinge verscheidenheid een rol spelen in een produktieve analogieredenering. Het bleek immers voor een produktieve analogieredenering nodig om verschillende beschrijvingsmogelijkheden - en afbeeldingen daartussen - te overwegen en daaruit te kiezen, met het oog op een gewenste analogie (8.7 en 13.1). Hierbij speelt een rol dat één van de ervaringsdomeinen betrokken in de analogie qua analyse nog aanvulling behoeft, zodat het afbeelden van termen naar dit nieuwe domein dus niet tevoren kan worden vastgelegd.
We kunnen dus generaliseren: zoals bij het ontstaan van een beschrijvende kwaliteit er een diversiteit in 'persoonlijke collecties ervaringen' een rol speelt - en moet spelen (vgl. 11.3), immers hierdoor leert de leraar hoe hij het nodige 'groeien van de overlap' kan organiseren (14.2.3) - zo is het bij het ontstaan van overkoepelende termen gewenst dat een diversiteit aan beschrijvingsmogelijkheden in de analogieredenering wordt betrokken. Door het ontstaan van overkoepelende termen te organiseren, kan zo'n diversiteit op ordelijke wijze bespreekbaar worden en kan een 'sluipende aanpak' door de leraar naar verwachting steeds meer worden vermeden (13.6, slot).

(* 'Groeit': die ervaringen waar van een constante capaciteit gesproken kan worden behoorden al tot de 'overlap' tussen de collecties ervaringen waarnaar 'energiewaarde' verwijst. Het gaat er nu om de overlap uit te breiden zo dat niet alleen ervaringen waar c 'niet constant' te noemen is er toe behoren, maar ook op zinvolle wijze ertoe behoren. Daartoe bleek een ervaring met de 'derde temperatuurverandering' te ontbreken, zie 12.5.2 en 12.5.3.

(+ Zie echter 13.13 waar we een aanleiding vonden om te spreken van afbeelden van een relatienet op zichzelf.

14.3. Conclusies

Een methode voor protocolanalyse van Ten Voorde[35] waarbij gelet werd op de veranderende eenheid van groep, taal en zaak, werd hier uitgebreid (14.1). Er werd een voorstel gedaan voor een nadere beschrijving van de 'zaken' waarnaar deelnemers met hun woorden verwijzen.

> *Het spreken over een 'zaak' in de overgang naar beschrijvend niveau als 'collectie ervaringen' maakte het mogelijk onze intuïtie (uit 9.6) te verantwoorden dat een gemeenschappelijke zaak kan worden geformuleerd als een overlap van persoonlijke zaken.* (onderzoeksvraag 3)

Bij het spreken van 'ervaringen' als over afzonderbare dingen in een collectie is echter ook een beperking geformuleerd (14.1.4).

Als resultaat van de aldus uitgebreide methode voor protocolanalyse konden vier eigenschappen van gesprek worden genoemd (14.1.6). Eerder opgestelde beschrijvingen van leersituaties werden kritisch getoetst aan deze eigenschappen (14.2), onder andere aan het spreken van 'gemeenschappelijke zaak' als overlap van persoonlijke zaken (onderzoeksvraag 4). Op deze wijze werd aandacht besteed aan de rol van diversiteit ('persoonlijke collecties') en eensgezindheid of gelijkgerichtheid ('overlap') in de verschillende beschrijvingen. Voor zover nagegaan bleek het mogelijk om eerder gegeven beschrijvingen te verantwoorden of te herformuleren volgens de gekozen eigenschappen van gesprek.
Een algemene redenering welke aantoont dat ons hele didactische relatienet in overeenstemming is met 'gemeenschappelijke zaak' als overlap van persoonlijke zaken, werd echter niet gegeven. In die zin is onderzoeksvraag 4 dus niet volledig beantwoord.

15. Conclusies: Continuïteit en discontinuïteit in onderwijsgesprekssituaties

Van de gestelde onderzoeksvragen zijn nu nog de volgende twee overgebleven:

> *4. Houdt de gekozen beschrijvingswijze voor een taalverschil rekening met een* ***gemeenschappelijke zaak*** *als overlap van* ***persoonlijke zaken*** *of niet?*

en:

> *7. In hoeverre zijn "krisis-achtige toestanden" nodig voor / verenigbaar met uitleidend onderwijs?*

Voor beide vragen zijn aanzetten tot beantwoording gegeven in vorige hoofstukken. In hoofdstuk 14 werden eerdere protocolanalyses kritisch onderzocht met betrekking tot de beschrijvingswijze van datgene waarnaar deelnemers met hun woorden verwijzen (de zaak). Voor zover we hebben nagegaan kon onderzoeksvraag 4 bevestigend worden beantwoord. Een algemene redenering, die boven het toetsen van enkele protocol-analyses uitgaat werd echter niet gegeven.
In hoofdstuk 13 werd de analogieredenering die leidde tot entropie vergeleken met de contextwisseling van constante capaciteit naar capaciteit als afgeleide (uit 12.5). Vergelijken van beide leerprocessen leidde tot de verwachting dat een 'crisis', zoals we die zagen bij de contextwisseling, te vermijden zou zijn door deze contextwisseling te herontwerpen tot een analogieredenering.
In dit hoofdstuk zullen we de resultaten van eerdere hoofdstukken samenvatten en bespreken, gelet op wat we nu kunnen zeggen over continuïteit en discontinuïteit in leerprocessen, ontworpen en beschreven volgens een gespreksmodel. Dit zal ons de gelegenheid geven om op bovengenoemde onderzoeksvragen verder in te gaan. Tot afdoende antwoorden op deze vragen zullen we echter niet komen.
Eerst worden de conclusies met betrekking tot het Van Hiele niveauschema besproken (15.1), waarbij we iets naders kunnen zeggen over onderzoeksvraag 4. Dan wordt ingegaan op de analyse van 'niveau-invariante' leerprocessen zoals contextwisseling en analogieredenering (15.2) waarna nader ingegaan wordt op onderzoeksvraag 7 (15.3). Tenslotte volgen enige nieuwe onderzoeksvragen (15.4) en een opmerking over de aard van didactisch onderzoek (15.5).

15.1. Van Hiele niveaus

Het Van Hiele niveauschema is in dit onderzoek uiteindelijk niet ongewijzigd overgenomen. Eerst worden de redenen voor een wijziging opgesomd en opnieuw ter discussie gesteld (15.1.1). Dan worden de 'relaties tussen de niveaus' (uit 7.3) opnieuw geformuleerd en er wordt nagegaan of het uitgangspunt "Men moet gehandeld hebben alvorens dat

handelen tot onderwerp van analyse te kunnen maken" (uit 7.4) nu nog van toepassing is (15.1.2). Tenslotte wordt getoond dat het gewijzigd niveauschema een verschil kan maken voor de onderwijspraktijk (15.1.3).

15.1.1. Een gewijzigd Van Hiele niveauschema

Aan de drie Van Hiele niveaus werden eigenschappen toegeschreven (7.3 en tekstkader 2, p.170). Zo werd gezegd dat 'beschrijvend niveau' inhoudt dat redeneren volgens afgesproken eigenschappen mogelijk wordt in een relatienet. Ook werd gezegd dat woorden gebruikt met de kwaliteit van beschrijvend niveau naar een 'ander object' verwijzen (7.3 en 1.3). De uitspraak dat een niveauovergang 'discontinu' verloopt, riep bij mij steeds het vermoeden op dat de eigenschappen van het ene niveau tezamen verdwijnen, terwijl die van het andere niveau verschijnen.
We hebben intussen echter redenen aangevoerd om te zeggen dat het moment waar we van een 'nieuw soort zaak' (13.9 en 14.1.5) willen spreken, niet behoeft samen te vallen met - zelfs naar verwachting later zal optreden dan - het redeneren volgens afgesproken eigenschappen. We zeiden immers pas bij 'overkoepelende termen' van een nieuw soort zaak te willen spreken en deze overkoepelende termen benoemen een structuur in *afgesproken* associaties[*] zodat we deze nieuwe soort zaak pas verwachten als er al enige termen als knooppunten ontstaan zijn.

Laten we nu de redenen voor deze keuzen nog eens kritisch bekijken.
Men kan terecht opmerken dat het eigen woordgebruik al eerder onderwerp van gesprek wordt, namelijk steeds als lerenden proberen te komen tot afgesproken eigenschappen. Door zulke afspraken ontstaan termen. In overeenstemming met Van Hieles of Ten Voordes versie van het niveauschema zouden we nu kunnen zeggen dat deze termen naar een 'nieuw object' verwijzen of dat ze een 'nieuw object' benoemen of aanduiden, namelijk: de structuur die men in het eigen woordgebruik heeft gebracht, of het oorspronkelijk woordgebruik, dat object van bespreking is geweest. Tegen deze zegswijzen werd het bezwaar aangevoerd (11.1) dat ze geen recht doen aan de rol van ervaringen bij het toetsen van uitspraken waarin een beschrijvende term functioneert.
Daarnaast zijn nog de volgende bezwaren aan te voeren:

- Als we zouden zeggen dat een term verwijst naar het voorafgaande woordgebruik, met als argument dat immers deze term ontstond door dit voorafgaande woordgebruik tot studieobject (tot gespreksonderwerp) te maken, dan kan de vraag gesteld worden welke zin het heeft om te zeggen dat een nieuwe term verwijst naar woordgebruik dat door de lerende niet meer als adequaat wordt beoordeeld. Wat heeft een lerende eraan om te verwijzen naar iets waar hij niet meer achter staat - of beter: wat hebben wij eraan om te zeggen dat een lerende op deze wijze 'verwijst'?
- Als we zouden zeggen dat een term verwijst naar de nieuwe structuur die lerenden in het eigen termgebruik hebben aangebracht, naar de gemaakte afspraak of naar de afgesproken eigenschappen, dan kan het bezwaar worden gemaakt dat het verwijzen

[*] Zie onze conclusie dat een analogieredenering als 'structuurafbeelding' het bereiken van beschrijvend niveau veronderstelt (8.6 en 13.3).

nu circulair lijkt te worden: de term verwijst naar zijn eigen gebruik, of heeft zijn eigen gebruik tot 'zaak' of benoemt zijn eigen gebruik. En dan is opnieuw de vraag: wat hebben we eraan om zoiets te zeggen?

- Deze circulariteit is misschien te vermijden door te zeggen dat de term verwijst naar zijn gebruik in relatie tot andere termen (Van Hiele[105], p.62, zie 10.1). Of korter: dat de term verwijst naar (zijn relaties met) andere termen.*) Maar dan lijken er twee verschillende aspecten van het woordgebruik door elkaar gehaald te worden: hoe we woorden tezamen gebruiken (associëren) en wat we met die woorden aanduiden (verwijzen).

Voor woorden gebruikt met de kwaliteit van grondniveau kan het laatstgenoemde onderscheid meteen duidelijk zijn: dat 'stoel' geassocieerd kan worden met 'tafel' vertelt iemand die geen nederlands kent nog niet naar welke ervaringen men met deze woorden verwijst. Met het associëren van grondniveau-woorden hebben we dus nog niet hun verwijzende functioneren beschreven. We hebben intussen laten zien dat ook voor beschrijvende en voor overkoepelende termen het associëren en het verwijzen kunnen worden onderscheiden. Voor beschrijvende termen deden we dit, door te zeggen dat deze nog naar collecties ervaringen verwijzen, waardoor het toetsen van empirische generalisaties beschrijfbaar werd. Voor overkoepelende termen konden we zeggen dat deze onderling *gerelateerd* zijn in een overkoepelend relatienet terwijl ze *verwijzen* naar het gebruik - naar benoemde *plaatsen* - van termen in overkoepelde associatienetten. We gebruiken 'verwijzen' dan zo, dat verwijzen niet circulair hoeft te zijn en zo dat niet naar een inmiddels verlaten woordgebruik wordt 'verwezen'.
Dus, hoewel het juist is te zeggen dat bij het afspreken van eigenschappen voor een woord het eigen woordgebruik object van studie is geworden, hoeven we daarom nog niet van de in dit gesprek ontstane beschrijvende termen te zeggen dat hun verwijzen geheel of voornamelijk dit nieuwe gespreksonderwerp betreft. Het eigen woordgebruik als nieuw gespreksonderwerp kan immers aanvankelijk in heel gewone woorden ("wat bedoel je?", "noem je dat zó?", "dus jij zegt dat..") aan de orde worden gesteld. Pas van de overkoepelende termen kan zinvol gezegd worden dat ze geheel of voornamelijk (13.9) naar het eigen woordgebruik verwijzen. Een "nieuw studieobject" vraagt dus niet meteen om vaktermen welks uitsluitende of voornaamste rol het is naar dit nieuwe studieobject te verwijzen.

Van Hiele liet dus terecht het moment dat een "nieuw studieobject" ontstaat samenvallen met het moment waar men kan redeneren volgens afgesproken eigenschappen. Het is echter niet terecht - of minder handig - "nieuw studieobject" te vereenzelvigen met 'nieuw object waarnaar de ontstane termen verwijzen'. Het valt nu op te merken dat wij hier steeds gezocht hebben naar datgene waarnaar een woord verwijst zodat we dus minder oog hadden voor Van Hieles "studieobject".
Aangezien het moment waarop woorden ontstaan die naar een nieuw type zaak verwijzen verschilt van het moment waar redeneren volgens eigenschappen mogelijk wordt, moeten

*) Een variant hiervan: dat de term verwijst naar (of staat voor, of aanduidt) een bundel eigenschappen (Van Hiele[105], p.109, geciteerd in 7.3; Ten Voorde[35], p.428). Immers een eigenschap, zodra men hem formuleert is ook een 'associatie' te noemen en in een later stadium een 'relatie' (12.2).

we nu kiezen welke van deze twee momenten we met 'bereiken van beschrijvend niveau' aangeven.
Het moment waar de kwaliteit van redeneren verandert, met betrekking tot een woord dat term wordt, konden we aangeven met Van Hieles expliciteringsfase. Deze expliciteringsfase plaatst men gewoonlijk halverwege de reeks 'fasen' welke tezamen een niveauverhoging beschrijven. De 'objectwisseling' daarentegen wordt door Ten Voorde pas verwacht na de vrije oriëntatiefase van de eerste niveauverhoging (Ten Voorde[35], p.414-417, vgl. 12.2). Dit klopt met Van Hieles opmerking dat een relatienet eerst gesloten moet raken alvorens zelf tot object te kunnen worden.[*)] Hieruit blijkt enigszins dat men er steeds al rekening mee hield dat de twee eigenschappen van de niveaus, namelijk 'kwaliteit van redeneren' enerzijds en 'de zaak waarnaar woorden verwijzen' ongelijktijdig veranderen. En dáár uit blijkt weer, dat er steeds al werd gelet op 'de zaak waarnaar woorden verwijzen' naast 'studieobject'. Beide werden alleen niet duidelijk onderscheiden.
We kunnen dus bij dit bestaande gebruik aansluiten en van '*passeren* van beschrijvend niveau' spreken zodra het nieuwe type zaak verschijnt, dus zodra we overkoepelende termen zien ontstaan. 'Passeren' is nu een betere uitdrukking dan 'bereiken' omdat het 'verwijzen naar' eigen term-gebruik, zoals dat gebeurt met een overkoepelende term, een zekere afstand tot dit eerder ontstane beschrijvende term-gebruik aangeeft en dit wordt passender uitgedrukt met 'passeren' van een niveau dan met 'bereiken'.

Inmiddels is in 13.13 gebleken dat we het spreken over 'collecties ervaringen' moesten nuanceren door onderscheid te maken tussen ervaringen(2) waarbij het hanteren van afgesproken relaties is inbegrepen en ervaringen(1) waarbij dat niet zo is.
We zouden kunnen vragen of dan bij ervaringen(1) wellicht het hanteren van spontane, vanzelfsprekende associaties inbegrepen is. Daar moeten we ja op zeggen, omdat naar een 'ervaring' die nog niet is benoemd, nog niet kan worden verwezen, zodat het nuttig lijkt om daar nog niet van 'ervaring' te spreken (14.1.4). We zagen dan tot nu toe drie soorten 'zaken' waarnaar een woord kan verwijzen en elk van de drie is te formuleren in termen van 'ervaring' (13.13):

a ▸ **voor woorden die op weg zijn 'term' te worden**
een collectie ervaringen(1), waarbij 'ervaring' inhoudt: *samen* iets doen en daarvan de gevolgen ondervinden *en benoemen* (*zie 14.1.4*)

b ▸ **voor overkoepelende termen**
een collectie uitdrukkingen welke gelijknamige plaatsen vervullen in één of meer associatienetten. Of: ervaring(3) met gezamenlijk afgesproken associaties (eigenschappen van termen).

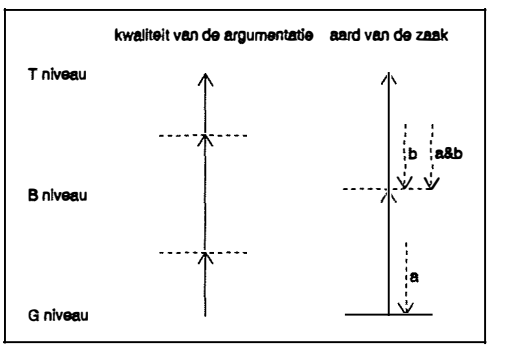
c ▸ **voor 'overkoepelde' termen**
een collectie ervaringen(2), waarbij 'ervaring' inhoudt: iets doen en daarvan de gevolgen ondervinden en deze ondervinding verwerken volgens afgesproken associaties

---

(* Zo versta ik nu zijn opmerking "Pas, wanneer de leerling het gevoel krijgt, dat hij het terrein voldoende beheerst, kunnen de woorden of symbolen in een nieuwe structurering als zelfstandige eenheden gaan optreden." (Van Hiele[30], p.41, zie 10.2.1).

Bij elk van de drie soorten zaak is in 'ervaring' tevens het gebruik van woorden inbegrepen. Bij b en c is bovendien analyse van woordgebruik voorondersteld. We hebben gevonden dat de twee soorten zaken b en c tegelijk functioneren in een gesprek, wat niet vreemd is omdat ze dezelfde kwaliteit van woordgebruik (beschrijvend) vóóronderstellen. Omdat 'ervaring(2)' zowel "iets doen en daarvan de gevolgen ondervinden" als ook het hanteren van "afgesproken relaties" omvat, kunnen we het soort zaak genoemd c opvatten als een combinatie van het soort zaak waarvoor eerder al aandacht bestond (a) met de nieuwe zaak (b). Hiermee is een continuïteit aangegeven.*)
Na het ontstaan van de nieuwe zaak (b) verwachten we volgens Van Hiele en Ten Voorde nog een tweede discontinue verandering in de kwaliteit van het redeneren te kunnen organiseren, namelijk de overgang naar logisch deductief redeneren, naar theoretisch niveau. Hierbij zou de nieuwe zaak (b) een her-ordening ondergaan, zoals dat ook het geval is voor de eerdere zaak (a) in de overgang naar beschrijvend niveau.
Zowel lettende op 'de aard der zaak' als op de 'kwaliteit van de argumentatie' kunnen we nu de ongelijktijdigheid van de verschillende discontinuïteiten in het leerproces schematisch afbeelden zoals in Afbeelding 37.

Met getrokken pijlen is de voortgang van het leren afgebeeld. Letten we op 'de zaak' dan houdt deze voortgang in het objectiveren (bespreekbaar maken, ordenen) van de zaak die is ontstaan.
Met de onderbroken pijlen wordt aangegeven dat men wel gebonden blijft aan *een zaak van dezelfde soort* als die welke eerder ontstond. Aan zo'n soort zaak wordt de nieuwe ordening, welke men bij een niveauverhoging tot stand brengt, steeds getoetst (14.1.4).



Afbeelding 37: Discontinuïteiten in een gewijzigd Van Hiele-niveauschema

Wanneer over de nieuw te scheppen orde nog onenigheid bestaat kan men de onderbroken pijlen ook zo opvatten dat nieuwe *voorstellen* voor ordenend woordgebruik worden getoetst aan de gemeenschappelijke zaak zoals die *eerder* in een *minder ver voortgeschreden* woordgebruik gemeenschappelijk kon worden verwoord (zie 14.1.4).

> *Hiermee is het niveauschema in overeenstemming gebracht met 'gemeenschappelijke zaak' als voorwaarde om van een gesprek te spreken* (onderzoeksvraag 4)

Hiermee is dan ook gezegd dat in deze variant van het niveauschema de situatie van hardnekkig misverstaan, genoemd "kloof van onverstaan*baarheid*" (9.6), als vermijdbaar wordt beschreven.
In dat verband is het van belang om op te merken dat telkens als van de twee eigenschappen van een gesprek er één verandert, kwaliteit van de argumentatie of aard van de zaak,

*) Zie 13.9, het antwoord op onderzoeksvraag 6, en zie ook 13.13.

dat dan de ander tijdelijk constant blijft. Als men wil kan men de (tijdelijke) constante opvatten als 'steun' die de verandering mogelijk maakt. Immers (14.1.4): de verandering in de kwaliteit waarmee we collecties ervaringen afbakenen wordt mogelijk doordat we voorstellen voor herordening wel blijven toetsen aan niet-unieke - in collecties geordende - ervaringen.

Aan het nu voorgestelde niveauschema kan verder opvallen dat er wel drie 'niveaus' zijn aangegeven, maar slechts twee soorten 'zaken': a en b. Dit is een consequentie van de keuze 'zaak' te omschrijven als nog-te-ordenen-materie (14.1.4). Met 'ordenen' bedoelen we een proces. Dit niveauschema kent weliswaar drie niveaus, maar slechts twee processen, de niveauveranderingen. Elk van deze processen krijgt (in dit voorstel) zijn eigen type 'zaak', waaraan het nieuwe ordenend woordgebruik wordt getoetst. Daar waar het ene proces overgaat in het andere, verandert 'de aard der zaak' in die zin dat er een kwalitatief nieuw type zaak verschijnt. Dit lijkt me consequent.
Wanneer er een derde soort termen gevonden zou worden dat een rol speelt bij het bespreken van de onderlinge relaties van verschillende axiomatische systemen (men zegt bijvoorbeeld wel eens dat twee axioma-systemen 'equivalent' zijn), dan zou er een derde type zaak onderscheiden zijn, waarnaar met woorden kan worden verwezen. Het zou dan zin hebben te zeggen dat theoretisch niveau is 'gepasseerd' aangezien men dan beschikt over diverse axioma-systemen welke men kritisch vergelijkt. De hier voorgestane variant van Van Hieles niveauschema heeft dus vergelijkbare mogelijkheden voor uitbreiding als het oorspronkelijke.

15.1.2. Relaties tussen de niveau-overgangen

In 7.3 formuleerden we een relatie tussen opeenvolgende Van Hiele niveaus, namelijk: "*op* elk van de niveaus wordt iets *gedaan* waarover men op dat niveau niet (niet systematisch) spreekt. Op elk van de hogere niveaus echter, wordt het handelen en de daarbij gemaakte keuzen van het voorafgaande niveau bespreekbaar". Deze relatie maakte het in 7.4 mogelijk een didactisch uitgangspunt te kiezen waarop een redenering kon worden gebaseerd.
In de zojuist voorgestelde versie van het niveauschema wordt elk van de niveau*overgangen* gekenmerkt door een eigen soort 'zaak' welke tijdens die overgang een ordening ondergaat. We spreken nu dus van het ordenende handelen tijdens een niveauovergang, in plaats van over ordenend handelen "op" een "niveau". Laat de in 7.3 geformuleerde relatie zich nu ook herformuleren in termen van "handelen tijdens een niveau-overgang"? Kunnen we het volgende zeggen?

> *Tijdens elk van beide overgangen wordt iets gedaan waarover men tijdens die overgang niet spreekt. Tijdens de volgende overgang worden het handelen en de daarbij gemaakte keuzen van de vorige overgang bespreekbaar.*

Als zaak b tijdens de tweede overgang formuleerden we: een collectie uitdrukkingen welke gelijknamige plaatsen vervullen in één of meer associatienetten, of: ervaring(3) met gezamenlijk afgesproken associaties.
Deze omschrijving leek tot nu toe bevredigend, maar nu kan een probleem blijken: hier wordt het *resultaat* van de vorige overgang als nieuwe zaak aangewezen, in plaats van

"het handelen en daarbij gemaakte keuzen" tijdens deze vorige overgang. Dit resultaat, de in de vorige overgang ontstane termen, lijkt daardoor als onveranderlijk gegeven tijdens de volgende overgang te worden voorgesteld.
Maar dit kan niet bedoeld zijn, omdat overkoepelende termen, welke in eerste instantie de nieuwe zaak (eigen termgebruik) vertegenwoordigen, het juist mogelijk maken om bij de vorming van nieuwe termen (entropie, capaciteit*) meer doelgericht te werk te gaan. Hierbij kan een eerder ontstane term (capaciteit) in onbruik raken.[*)] Deze eerdere termen gelden bij de nieuwe overgang dus niet als onveranderlijk gegeven.
Bij het ontstaan van beschrijvende termen wordt het samen-voorkomen van eigenschappen opgemerkt en in woorden gevat. Hierbij ontstaan termen zoals massa en volume. Overkoepelende termen formuleren een plan volgens welke nieuwe overkoepelde termen gevormd worden. Zoals een beschrijvende term slechts gedeeltelijk als explicitering van het eerdere (grondniveau) woordgebruik kan worden opgevat, omdat deze term deels ook steeds als "goed voornemen" zal functioneren (11.4), zo zullen ook overkoepelende termen slechts gedeeltelijk als explicitering van eerder handelen kunnen gelden, omdat de explicitering ook hier een verandering ten opzichte van het eerdere handelen kan inhouden (consequenter worden, 11.4). De resultaten van het eerdere handelen gelden dús in de tweede niveauovergang niet als onveranderlijk gegeven, evenmin als de resultaten van spontaan benoemen (grondniveau) een onveranderlijk gegeven vormen in de eerste niveauovergang.

Dus inderdaad is het consequent te zeggen dat de zaak (b) welke in de tweede niveauovergang wordt geordend, het ordenende handelen en daarbij gemaakte keuzen van de eerste niveauovergang betreft.

De zaak waarnaar een overkoepelende term verwijst kan nu dus beter als volgt worden geformuleerd (vgl. p.375):

b ▸ **voor overkoepelende termen**: Ervaring(3) met het vormen van termen die verschillende gelijknamige plaatsen vervullen in één of meer relatienetten.

We zouden het niveauschema nu naar onderen toe kunnen uitbreiden met een 'nulde niveauovergang' waarmee dan het ontstaan van een grondniveau-kwaliteit van woordgebruik wordt bedoeld, hetgeen overeenkomt met het leren van de omgangstaal. De zaak (a) welke in de eerste niveauovergang wordt geordend betreft dan het ordenende handelen tijdens deze nulde overgang (namelijk het spontaan handelen en samen benoemen). De genoemde 'nulde overgang' heeft dan echter geen eigen type 'zaak' want de ervaringen welke hier worden benoemd, zijn van de soort 'ervaring(1)' welke tijdens de overgang naar beschrijvend niveau worden geordend in collecties afgebakend volgens afgesproken eigenschappen.
We komen dan tot de volgende generalisatie, welke het 'plan' van het gewijzigd niveauschema expliciteert:

[*)] Hetgeen niet betekent dat hij 'verworpen' wordt. De keuze om een contextwisseling te herontwerpen als analogieredenering, betekent immers dat het eerdere relatienet juist niet verworpen of afgezworen wordt. Zodra men ziet dat het nieuwe relatienet ook voldoet op het ervaringsdomein dat als basis diende, is het eerdere relatienet wel overbodig geworden.

Tijdens elk van de hogere niveau-overgangen wordt het handelen en de daarbij impliciet gemaakte keuzen tijdens de voorafgaande overgang tot zaak van ordenend handelen in gesprek.

Deze generalisatie waarin 'niveau-overgang' en 'zaak' als overkoepelende termen optreden, staat ons toe het volgende principe te kiezen (vgl. 7.4):

Men moet gehandeld hebben alvorens dat handelen tot zaak (in 7.4: "onderwerp van analyse") te kunnen maken.

Hiermee kan een equivalent van de in 7.4 gegeven redenering worden geformuleerd, in enigszins andere bewoordingen:

Tijdens de tweede niveau-overgang wordt het handelen van de eerste niveau-overgang tot zaak gemaakt.
Heeft men aan het handelen van de eerste niveau-overgang niet deelgenomen, dan lukt het dus niet dat handelen tot zaak te maken. Dus zal dan de tweede niveau-overgang niet plaatsvinden en wordt het derde niveau niet bereikt.

Hiermee is verklaard waarom een gesprek tussen deelnemers die spreken met de kwaliteit van grondniveau en deelnemers die spreken met de kwaliteit van theoretisch niveau niet slaagt. Bovendien is er beweerd dat zo'n gesprek ook *niet kan* slagen. Het voorgestelde principe staat ons dus toe te spreken van een 'kloof van onverstaanbaarheid' tussen grondniveau en theoretisch niveau. Deze 'kloof' is echter vermijdbaar, indien de deelnemers die vragen van een theoretisch niveau aan de orde wensen te stellen, hiermee wachten tot eerst een beschrijvende kwaliteit in het woordgebruik is bereikt.

Door te laten zien dat de nieuwe versie van het niveauschema een overeenkomstig principe toestaat als door de vorige versie werd toegestaan, heb ik ook laten zien dat beide versies qua 'structuur' ('relaties' tussen de termen in het schema) dicht bij elkaar staan. Men kan dus zeggen dat het niveauschema eigenlijk nauwelijks veranderd is. Met het zoeken naar een achterliggend principe hebben we echter het verwijzend functioneren van de termen uit het niveauschema tijdelijk uit het oog verloren.
In de volgende paragraaf wordt daarom nagegaan of het gewijzigde niveauschema tot gewijzigde consequenties kan leiden voor de onderwijspraktijk.

15.1.3. Het gewijzigd niveauschema in praktijk

Ten Voorde[35] (p.419-) laat zien hoe een groepje leerlingen ertoe komt eerst oplossingen te sorteren in groepen met overeenkomstige reactiemogelijkheden, bijvoorbeeld 'zure' oplossingen. Ook worden de reactiemogelijkheden van een enkele oplossing gegroepeerd, gelet op het steeds-samen-voorkomen van die reactiemogelijkheden van oplossingen van verschillende stoffen. Zo'n groep oplossingen, afgebakend door een groep eigenschappen, dan wel die groep eigenschappen zelf wordt 'een reagens' genoemd door de leerlingen. In de opgavenserie waarmee deze leerlingen werken wordt het woord reagens gereserveerd voor een "groep gemeenschappelijke chemische eigenschappen". Wat chemici gewend zijn een 'ionsoort' te noemen - voor zover we die ionsoort kunnen leren kennen door reacties van

oplossingen te bestuderen - wordt hier dus 'reagens' genoemd.*)
Naar aanleiding van dit gebeuren waar leerlingen oplossingen sorteren in groepen concludeert Ten Voorde[35]:

> "[Er] is gebleken hoe, door toespitsing naar het gezichtspunt 'gemeenschappelijke eigenschappen', een verzamelnaam voor een bepaalde groep oplossingen [...] zinvol wordt. Zodra echter naar de disposities*) van elke oplossing afzonderlijk gekeken wordt, kunnen niet de oplossingen maar wel de disposities naar overeenkomstigheid bij meerdere oplossingen worden gesorteerd. Het reagensbegrip is in dat geval gebonden aan een groep oplossingen, niet aan één oplossing. Het aanschouwelijk-konkrete woord 'oplossing' en het onaanschouwelijk begrip 'reagens' behoren dus tot verschillende taalwerelden." (Ten Voorde[35], p.423)

Hier wordt een beroep gedaan op een tegenstelling tussen 'aanschouwelijk' en 'onaanschouwelijk', welke tegenstelling inmiddels werd gerelativeerd (11.5, 15.1.1). Door te zeggen dat het aanschouwelijk woord 'oplossing' en het onaanschouwelijke 'reagens' tot verschillende taalwerelden behoren, wordt de verwachting gewekt dat het tezamen gebruiken van beide woorden moeilijkheden zal geven. De conclusie lijkt te zijn dat we moeten kiezen: óf aanschouwelijke oplossingen sorteren, óf bundels eigenschappen (disposities) sorteren.
Uit Ten Voordes[35] protocol 38 blijkt dat leerlingen beide woorden 'oplossing' en 'reagens' wel degelijk tezamen kunnen gebruiken. In antwoord op een opgave

> S26-7 "Ga na in hoeverre de volgende uitspraken onze ervaring met oplossingen weergeven: (...)
> b een koperbromideoplossing kunnen we beschrijven als een mengsel van twee reagentia
> c een koperbromideoplossing kunnen we beschrijven als drie reagentia
> (...)" (Ten Voorde[35], onderwijsgang O2, opgave S26-7)

zegt deelnemer "Piet" onder andere:

> "Eén reagentia is al een groep.. of moet je zeggen: Hier bedoelen ze mee: behoort tot drie groepen van reagentia.. Kunnen we drie groepen bedenken waar deze in passen? (...)
> M'neer.. vraag 7.. zeker.. dat ze uit meerdere groepen kunnen bestaan?"
> (Ten Voorde[35], protocol 38a, r.105-125)

Reagens was enige opgaven eerder omschreven als

> "[een] groep gemeenschappelijke chemische eigenschappen van verschillende oplossingen" (Ten Voorde[35], onderwijsgang O2, opgave S26-4a)

Piet's uitspraak lijkt dubbelzinnig ten aanzien van het woord 'groep' want zijn voorstel "kunnen we drie groepen bedenken waar deze in passen" kunnen we zowel verstaan als:

(* Hierbij is een opdeling in een groot aantal 'deeltjes' nog niet direct nodig of zinvol, en vandaar de keuze deze tussentaal te ontwikkelen.

(+ 'Dispositie' is hier een verkorte aanduiding voor een reactiemogelijkheid als eigenschap van een stof of van een oplossing.

kunnen we drie groepen [oplossingen] bedenken waar deze [eigenschappen van koperbromide-oplossing] in passen, maar ook als: kunnen we drie groepen [eigenschappen] bedenken waar deze [oplossingen van koperbromide] in passen. Nog andere combinaties van interpretaties zijn mogelijk.
Waar het mij nu om gaat is, dat deze dubbelzinnigheid in het gesprek niet problematisch wordt voor de leerlingen. Wel formuleert Piet een probleem met de suggestie (uit de opgave: "mengsel van reagentia") dat een oplossing uit reagentia zou kunnen "bestaan". Dit probleem lossen Bob en Piet vervolgens op (r.140-245)[*)] door de formulering "bestaan uit" te vervangen door hun (of Bob's) formulering "dan heb je de hele oplossing beschreven" (r.245). Dus niet de oplossing 'bestaat uit' reagentia, maar de beschrijving van de oplossing maakt gebruik van reagentia.
Bij het komen tot deze beschrijving lijkt niet gekozen te hoeven worden tussen reagens als groep (aanschouwelijke) oplossingen enerzijds of als groep gemeenschappelijke eigenschappen van deze oplossingen anderzijds. We kunnen immers beide tegelijk doen: door een oplossing x zowel bij de groep oplossingen A als bij de groep B in te delen, wordt tegelijk onderscheid gemaakt tussen de eigenschappen die x gemeen heeft met de leden van A en de eigenschappen die x gemeen heeft met de leden van B.
Door te zeggen dat een beschrijvende term zowel *gebruikt wordt volgens* afgesproken eigenschappen áls *verwijst naar* een collectie ervaringen wordt rekening gehouden met dit (in de taal) spontane samengaan van 'sorteren van ervaringen' en van 'sorteren van eigenschappen'. Beide hoeven dus *niet* tot verschillende taalwerelden te behoren. Een beschrijvende term kan verwijzen naar ervaringen.
De vorige versie van het niveauschema kon dus aanleiding geven een tegenstrijdigheid of een botsing van 'taalwerelden' te verwachten waar we die nu niet meer verwachten. Zo'n verwachting kan consequenties hebben voor de praktijk. We horen dan in Piet's uitspraak bijvoorbeeld een dubbelzinnigheid of tegenstrijdigheid[+)] waarover we hem om opheldering zouden willen vragen. Ook zouden we teleurgesteld kunnen zijn dat er nog zo dubbelzinnig wordt gesproken (nog geen keus is gemaakt). Op een dergelijke wijze reageert de leraar V, als hij - een les later, dus niet speciaal naar aanleiding van Piet's geciteerde uitspraak, opmerkt:

> "..en nou voel ik nog steeds.. dat heb ik nog steeds gemist.. jullie hebben nog steeds.. óók in het laatste gesprek.. nog steeds niet het reagensbegrip ontwikkeld.."
> (Ten Voorde[35], protocol 38b, r.855-867)

Maar de leerlingen in dit groepje hebben wel oplossingen gesorteerd in groepen, waarbij op meerdere overeenkomstige eigenschappen werd gelet. Ook worden woorden gebruikt ('sulfaat') om de combinatie van zo'n groep oplossingen met meerdere overeenkomstige eigenschappen aan te geven. We kunnen dus zeggen: hier worden ervaringen met oplossingen beschreven, gedisciplineerd door afgesproken eigenschappen. De kwaliteit van het woordgebruik is dus in die zin 'beschrijvend' en analyse van woordgebruik, ook van 'reagens', heeft plaatsgehad. Daarbij is dus niet gekozen om met 'sulfaat' *alleen nog maar*

[*)] Zie Ten Voordes[35] protocol 38a.

[+)] ..die we nu niet meer horen, want de twee betekenissen van 'groep' die we in zijn woorden nog steeds kunnen horen, passen nu prachtig bij elkaar.

een bundel eigenschappen te bedoelen, maar, zoals net beargumenteerd, is er inmiddels geen reden meer om zo'n keuze te verwachten of te vragen. Wat mist de leraar hier dan? Dit kan blijken uit wat hij onderneemt. Eerst zegt hij:

> "En nou blijkt nou moet het toch wat duidelijker worden.. dat je wel over oplossingen kunt praten..als groepen eigenschappen."
> (Ten Voorde[35], protocol 38b, r.882-893)

'sulfaat' zou dan betekenis kunnen krijgen door analyse van deze groepen eigenschappen (van) oplossingen. Iets dergelijks zagen we gebeuren toen de overkoepelende term E ontstond door analyse van de relaties waarin massa en volume betrokken zijn. 'Sulfaat' zou dan, in onze woorden, een overkoepelende term worden, omdat ze een gelijke naam geeft aan enige eigenschappen (onderlinge relaties) van verschillende oplossingen a, b, c, d - waarbij a, b, c, d namen van oplossingen zijn die de kwaliteit van beschrijvende term bereikt hebben. We zagen echter daarnet dat 'sulfaat' ook als beschrijvende term kan functioneren, waarbij deze een ordening volgens afgesproken eigenschappen benoemt in ervaringen met oplossingen, waarvan de namen dan *nog niet* de kwaliteit van beschrijvende term hoeven te hebben.

Uit verdere acties van de leraar blijkt dat hij vooral de mogelijkheid van wat ik noem een *voorspellende redenering* mist bij deze leerlingen. Hierbij wordt van leerlingen gevraagd zich te overtuigen dat steeds als eigenschap 1 van reagens A is opgemerkt, ook eigenschap 2 verwacht mag worden, nadat men een aantal malen het samen voorkomen van deze eigenschappen 1 en 2 in oplossingen heeft opgemerkt en benoemd met de naam 'reagens A'. We kunnen spreken van een voorspelling als een eigenschap wordt genoemd in een nieuwe situatie, waar men deze eigenschap nog niet heeft geconstateerd. De leraar gaat voordoen hoe men tot zo'n uitspraak ten aanzien van een nieuwe situatie kan komen[35] (protocol 38c, r.275-355).
Maar dit is een stap welke niet onmiddellijk na een expliciteringsfase mogelijk hoeft te worden, zoals ik zelf merkte bij de term 'toestandsgrootheid'. Naar aanleiding van enige opgaven (§2)[2] merkten m'n studenten voor hoogte-energie op dat de energieverandering onafhankelijk van de weg is (eigenschap 1) hetgeen in verband werd gebracht met de bevinding dat eenduidige energiewaarden aan hoogten kunnen worden toegekend (eigenschap 2). Na dit onderwijsresultaat bereikt te hebben verwachtte ik dat studenten nu overal waar zij van 'energiewaarde' willen spreken, ook de voorspelling 'onafhankelijk van de weg' zouden willen doen. Maar dit bleek allerminst het geval: zij bleken deze samenhang van twee eigenschappen nog te willen controleren, in plaats van er van uit te gaan. We zouden kunnen zeggen dat de term 'toestandsgrootheid' als samenhang van twee eigenschappen voor hen nog "in de testfase" verkeerde (5.3.2). Omdat deze (gewenste) testfase volgde op een explicitering (twee eigenschappen), kunnen we hem vereenzelvigen met Van Hieles vrije oriëntatiefase. De 'integratiefase' zou dan die fase zijn, waar men een relatie ook zonder controle durft hanteren (vgl. Leo in 12.2). En dit is wat de leraar V van zijn leerlingen vraagt, als hij van hen vraagt enkele eigenschappen van een oplossing te voorspellen op grond van één genoemde eigenschap.
Met enige hulp blijken deze leerlingen tot de gevraagde redenering in staat, dus moeten we zeggen dat zij hier een integratiefase realiseren. De leraar gebruikt nu het resultaat van de redenering om te zeggen wat hij met 'reagens' bedoelt:

Myriam	Ja, als je er magnesium ingooit..ja(?)
Patrick	zink
Judith	Ja(?)
V	dat er met magnesium zink vrijkomt
	Die [eigenschappen]*) horen in ieder geval bij elkaar. Dat noem ik een reagens
Myriam	Twee, twee eigenschappen
V	Dit zijn er nou toevallig twee, maar als ik er één daarvan heb, moet die andere ook plaatsvinden..
Piet	Dus dát bedoelt u.. met.. (zachtjes)

(Ten Voorde[35], protocol 38c, r.335-359)

Enerzijds lijkt het alsof een explicitering van 't gebruik van het woord 'reagens' nu pas goed plaatsvindt, maar anderzijds geschiedt deze 'explicitering' na een redenering waarbij we van 'integratiefase' spraken. Uit een integratiefase echter, blijkt dat een explicitering en daar op volgende vrije oriëntatie ("testfase") al hebben plaatsgehad. Gezien vanuit de onderwijsfasen van Van Hiele is deze volgorde van gebeurtenissen dus vreemd te noemen.
Voorts kunnen we opmerken dat nu de keuze tussen reagens als 'groep oplossingen' enerzijds en 'groep eigenschappen' anderzijds wél is gemaakt, en wel door de leraar. Deze keuze bleek echter niet nodig om, zij het aarzelend, de gevraagde redenering te kunnen geven: het samen-voorkomen van eigenschappen kan dus worden opgemerkt, en kan reden zijn een woord beargumenteerd te gaan gebruiken zonder dat de zaak waarnaar dat woord verwijst een bundel eigenschappen *is*.
Welke gevolgen heeft het, nu (per decreet) een reagens wel een bundel eigenschappen is? Een resultaat kunnen we zien in Ten Voordes[35] protocol 42. Er blijkt een grote afstand te zijn ontstaan tussen redeneren met reagentia enerzijds en waamemen van stoffen anderzijds. Een leerling, Bob, gaat hierbij zover dat hij het ontstaan van 'kopersulfide' formuleert, waarna hij serieus verbaasd lijkt te zijn als iemand deze naam in verband brengt met een zwart neerslag dat visueel werd waargenomen[35] (protocol 42, r.1084-1170). De leraar lijkt deze kloof tussen redeneren en ervaren niet als positief te waarderen (r.1147-1162). Toch menen we nu te kunnen zeggen dat hij die kloof zelf heeft gecreëerd, door het woord 'reagens' naar eigenschappen te laten verwijzen, in plaats van naar een collectie ervaringen met oplossingen, afgebakend door eigenschappen.
Daarmee hebben we dit onderwijsresultaat in verband gebracht met het niveauschema volgens welk deze leraar handelde en waarin "het aanschouwelijk-concrete woord 'oplossing' en het onaanschouwelijk begrip 'reagens'" "tot twee verschillende taalwerelden" werden gerekend. Deze beschrijving van een niveauovergang met een enkele discontinuiteit leidde er bij de leraar toe dat hij, zolang hij het nieuwe object (bundel eigenschappen) nog niet hoorde, de explicitering die wél plaatsvond niet kon erkennen en niet kon waarderen ("jullie hebben nog steeds (...) niet het reagensbegrip ontwikkeld"). Doordat hij die explicitering niet waardeerde, kon hij er slechts met moeite op voortbouwen en neigde er daarom toe te forceren. Het gewijzigd niveauschema met twee discontinue veranderingen per niveau-overgang maakt het mogelijk om het stadium wel te waarderen waar het woordgebruik gedisciplineerd is door afgesproken eigenschappen, terwijl deze woorden

*) De leraar V trekt een streep tussen twee genoteerde eigenschappen, op het papier waar een overzicht van eigenschappen van oplossingen was gemaakt.

toch nog naar ervaringen verwijzen.
Een dergelijke kloof tussen redeneren met bundels eigenschappen en waarnemen van stofporties, zoals we zagen bij leerling Bob in Ten Voordes[35] protocol 42, werd ook opgemerkt door Vogelezang[103] in zijn eigen chemie-leren:

> "Wel raar wordt: we spraken af dat een stof een groep eigenschappen is. Wordt nu een eigenschap iets met een massa? Of moet je nu voor de kwantitatieve relaties op andere punten gaan letten dan op de kwalitatieve?" (p.19)

"Ik noem in regel 2 stof "*een niet-dingmatig abstractum*". Ik zie stof als het ware als een boven een voorwerp zwevende entiteit. Het is niet meer verbonden met een voorwerp en dat wijst Paul af." (Vogelezang[103], p.20)

Voor deze leer- en onderwijsproblemen menen we met het gewijzigd niveauschema een oplossing te hebben gegeven.

Aangezien de gewijzigde formulering schijnt te leiden tot enigszins andere aanwijzingen voor de onderwijspraktijk kunnen we terecht spreken van een gewijzigd niveauschema, in plaats van slechts een 'aangevuld' of 'verfijnd' schema. Hier kan men echter tegen inbrengen, dat ook het niveauschema van Van Hiele, Ten Voorde en Vogelezang al terminologische middelen bevatte om de 'crisis' of de (toen nog: één) discontinuïteit tussen opeenvolgende niveaus te relativeren: namelijk de onderwijsfasen. Immers volgens de onderwijsfasen konden we hierboven al constateren dat de explicitering van 'reagens' in een stadium waar lerenden blijk gaven van een integratiefase "vreemd" te noemen is. Dus valt ook het standpunt te verdedigen dat ik het niveauschema niet heb gewijzigd, maar slechts heb geëxpliciteerd wat men steeds al bedoelde.

15.2. Niveau-invariante leerprocessen

In het licht van het gewijzigd niveauschema (15.1) is het niet meer helemaal juist om een analogieredenering 'niveau-invariant' te noemen. Immers bij een analogieredenering ontstaan eerst overkoepelende termen en daarna pas nieuwe overkoepelde termen. Het ontstaan van overkoepelende termen hebben we 'passeren van beschrijvend niveau' genoemd en deze gebeurtenis is in Afbeelding 37 (rechterzijde) weergegeven als een pijl in verticale richting, dus 'niveauverhoging'.
Wanneer men echter eenmaal een analogieredenering heeft meegemaakt, dan is het ontstaan van overkoepelende termen in een volgende analogieredenering niet zo bijzonder meer. Ook voor een ontwerper/didacticus is dan de melding *dat* er overkoepelende termen ontstaan (niveauverhoging), niet zo informatief meer. Het wordt dan belangrijker te vragen: welke overkoepelende termen zijn er nu nodig, en welk nieuw ervaringsdomein kan er dan voor analyse toegankelijk worden? De aandacht verschuift dus naar vragen waarop het (oude of nieuwe) niveauschema geen antwoord geeft. We noemen daarom die leerprocessen 'niveau-invariant' waarbij het belangrijker is de *wisseling van ervaringsdomein* te beschrijven, door ervaringsdomeinen te benoemen, dan om aan te geven dat hierbij overkoepelende termen functioneren.

Ervaringsdomeinen zoals die in een analogieredenering analyseerbaar worden kunnen - zodra we de afloop van de analogieredenering kennen - van elkaar onderscheiden worden door te letten op de beperkingen bij het afbeelden van termen op andere termen, en daarmee op de geldigheidsgrenzen van de ontstane relatienetten. Ervaringsdomeinen kenmerken zich dus door een eigen relatienet. Zouden de betrokken relatienetten volmaakt op elkaar afgebeeld worden, dan is er geen geldigheidsgrens aan te geven en dus ook geen tweetal ervaringsdomeinen (13.1). We zouden beide relatienetten dan identiek kunnen noemen, waarmee we tot uitdrukking brengen dat we de keuze van een woord niet meer van belang vinden bij het onderscheiden van 'termen'.
Een 'term' hadden we omschreven als een woord inclusief de eigenschappen welke de collectie ervaringen afbakenen waarnaar dat woord verwijst. Termen onderscheidden zich tot nu toe dus van elkaar in drie eigenschappen:
1 - het woord waarmee wordt verwezen
2 - de collectie ervaringen (zaak) waarnaar wordt verwezen
3 - relaties of associaties met andere woorden, die deze collectie ervaringen afbakenen

We zien nu de mogelijkheid om termen niet langer te onderscheiden door het woord of symbool dat die term vertegenwoordigt, maar alleen nog door de collectie ervaringen waarnaar wordt verwezen en de *relaties* met andere *termen*, die deze collectie ervaringen afbakenen. De keuze van het woord behoeft immers geen verschil te maken voor het gebruik van de *term*, als eenmaal de afgesproken eigenschappen (woordassociaties) de kwaliteit van 'relatie' hebben gekregen. Met behulp van deze nieuwe omschrijving van 'relatienet' kunnen we twee geheel op elkaar af te beelden relatienetten met recht identiek (dus: één relatienet) noemen. Het moment waar deelnemer **P** ervoor koos om ook bij niet-constante capaciteiten van 'energiewaarde' te spreken, kan nu beschreven worden als zo'n eenwording van twee relatienetten, welke mogelijk werd nadat beide netten gelijkvormig waren geworden én deze gelijkvormigheid was opgemerkt.
Omdat een ervaringsdomein zich nu kenmerkt door één eigen relatienet kunnen we in plaats van 'wisseling van ervaringsdomein' evengoed zeggen *wisseling van relatienet.*

Van zo'n 'wisseling van relatienet' kennen we twee varianten welke beide gekenmerkt zijn door het afbeelden van termen op nieuwe termen, genoemd 'analogieredenering' en 'wisseling van context'. Beide onderscheiden zich onder andere (13.11) hierin:
- bij een 'wisseling van context' worden de nieuwe termen vertegenwoordigd door de woorden die eerder de overeenkomstige termen uit de 'basis'-context vertegenwoordigden,
- bij een 'wisseling van context' omvat het nieuwe ervaringsdomein het 'basis'-ervaringsdomein, waardoor de eerder gebruikte termen overbodig worden.
Eerder leek 'relatienet' een uitbreiding van de oudere term 'context' genoemd te kunnen worden, omdat de 'termen' in een relatienet niet alleen onderling geassocieerd worden ('context'), maar ook ergens naar verwijzen (12.6). In een 'context' werd echter het associëren van *woorden of symbolen* beschreven. Met 'term' werd niets meer bedoeld dan een woord dat in afgesproken associaties voorkomt. Doordat een geformuleerde relatie met ervaringen ontbrak, had het geen zin het woord 'term' los te maken van 'woord' want dan zou er niets overblijven dat 'geassocieerd' worden kan. Hierdoor kon 'contextwisseling' niet anders betekenen dan dat *dezelfde* woorden een andere betekenis krijgen. Immers: worden er nieuwe woorden gebruikt, dan is er helemaal geen formuleerbare relatie meer

met de basis-'context'. Door deze term 'contextwisseling' centraal te stellen leek het organiseren van betekenisverandering van woorden een belangrijk onderwijsdoel te worden (zie Kaper en Ten Voorde[37,100]).
Nu echter zien we wel het ontstaan van nieuwe betekenissen (nieuwe termen) als doel, maar het veranderen van betekenissen van woorden kan nu geen doel meer heten. Betekenisverandering van bestaande woorden is nu een afgeleide kwestie geworden, en de vraag moet gesteld worden of het gebruik van oude woorden het doel (het ontstaan van nieuwe termen) al dan niet dient. De term 'contextwisseling' verhinderde het stellen van deze vraag (12.5.4) en was in dat opzicht dus een hindernis.
Deze hindernis kon, zo blijkt, pas overwonnen worden door de zaak waarnaar met een woord wordt verwezen in het onderzoek op te nemen. Hierdoor kon 'term' een eenheid van drie eigenschappen worden waaruit tenslotte één van de drie (het woord) als minder belangrijk kon worden terzijde geschoven.
Wél belangrijk blijft de vraag of na een 'wisseling van relatienet' vervolgens beide relatienetten tot één kunnen worden, dan wel dat zij gescheiden moeten blijven. Om lerenden in deze beslissing te kunnen betrekken is het minstens nodig dat beide relatienetten enige tijd naast elkaar kunnen functioneren. Uit de resultaten met betrekking tot 'entropie' blijkt dat een analogieredenering deze mogelijkheid biedt (13.1). Het vanzelfsprekend in gebruik blijven van eerder gebruikte woorden blijkt eerder een hindernis dan een hulp (12.5.4).

Er schijnen dus goede redenen te zijn om ons eerdere gebruik van 'relatienet' (verkregen door uitbreiding van 'context') en van 'term' (nog gekenmerkt door een woordkeus) te verwerpen.
Toch zou dat onverstandig zijn. Want: kunnen wij het gebruik van 'termen' wel onderzoeken als 'termen' niet meer te onderscheiden zijn door op woorden te letten? Het lijkt me van niet. We moeten dus eerst de *drie* eigenschappen van 'term' (vorige betekenis) hanteren, vervolgens eventueel een afbeelding tussen twee relatienetten opmerken waarna we pas kunnen concluderen dat de keuze van een woord er niet toe doet: en dan wordt 'term' in de tweede betekenis pas bruikbaar. Om deze onderzoeks-route open te houden is het dus gewenst een nieuw woord in te voeren voor 'term' in de tweede betekenis (niet meer gekenmerkt door 'woord'). Ik stel voor hiervoor het woord *begrip* te gaan gebruiken omdat daarin ook een zekere onafhankelijkheid van gebruikte woorden tot uiting komt. 'Begrippen' echter worden onderzoekbaar door op 'termen' te letten. Een netwerk van relaties tussen 'begrippen' wordt beschrijfbaar door te letten op (wellicht op elkaar af te beelden) netwerken van relaties tussen 'termen'. En een netwerk van relaties tussen 'termen' is een uitbreiding van wat we eerder 'context' noemden. Een eerder stadium is pas echt verlaten als je er (opnieuw) waardering voor op kunt brengen.

15.3. Crisis in het leerproces

Voor twee verschillende onderwijssituaties, één in verband met niveauverhoging (15.1.3) en één waar we het leerproces niveau-invariant noemen (13.14), hebben we het vermoeden uitgesproken dat een onderwijssituatie minder crisisachtig had kunnen verlopen, wanneer de onderwijzende de didactische termen tot zijn beschikking had gehad welke we nu voorstaan.

Bij 'crisis' denken we dan aan Ten Voordes[35] (p.43) omschrijving: "In de bekende en vertrouwde taalwereld moet een ongenoegen ontstaan, omdat bepaalde vragen niet beantwoord en bepaalde opgaven niet gemaakt kunnen worden. Aangesproken vanuit een andere taalwereld, kunnen leerlingen deze vragen en opgaven niet verstaan. Hieruit kan een toestand van grote onzekerheid voortkomen."
We konden opmerken dat iemand, die van een eerdere formulering van het niveauschema overtuigd was, juist daardoor ertoe gebracht werd zo'n crisis te veroorzaken, welke we nu niet meer als nodig beschouwen, tenminste niet in die mate.
Ook konden we opmerken dat iemand, die van de noodzaak van 'contextwisseling' en dus 'betekenisverandering van woorden' als onderwijsdoel overtuigd was, daardoor een crisis veroorzaakte die we nu niet meer als nodig beschouwen, tenminste niet in die mate.
Kunnen we nu concluderen dat een 'crisis' overbodig is?
Wel: 'crisis' is in deze studie tot nu toe geen term geworden. Dus kunnen we evenmin scherp concluderen dat een crisis voorkomt als dat hij niet voorkomt, vandaar de enigszins vage formulering hierboven ("niet in die mate"). Wel kunnen we zeggen dat, als een gemeenschappelijke zaak steeds mogelijk is (9.6 en 15.1), het niet nodig is opgaven te stellen die *niet* worden verstaan. Een gedeeltelijk verstaan is waar we ons dan steeds op kunnen richten en in die zin is een crisis dan vermijdbaar.
Anderzijds hebben we steeds kunnen vasthouden aan de keuze voor probleemstellend onderwijs. Probleemstellend wil zeggen dat lerenden zelf behoefte krijgen aan nieuwe termen. Dit kan bijna niet anders betekenen dan dat ze hun huidige term-gebruik als ontoereikend ervaren in een of ander opzicht, dus in die zin is een crisis dan onvermijdbaar bij een keuze voor probleemstellend onderwijs.
Aangezien met 'crisis' een bijzonder moeitevolle en met gedeeltelijke misverstaan bezaaide periode wordt aangeduid, kunnen we terugkijkend nagaan welke tot nu toe als belangrijk beschouwde stap zich als bijzonder moeitevol voordeed. Het gebeuren dat we in 11.1 en 11.2 "analyse van eigen woordgebruik" zijn gaan noemen, dringt zich dan aan mij op. Deze 'analyse' komt, qua plaats in het niveauschema overeen met een kwalitatieve verandering in de kwaliteit van het redeneren (Afbeelding 37). Aangezien Ten Voordes[35] (p.424) 'crisis' een overeenkomstige plaats in het niveauschema lijkt te hebben - maar hiervan ben ik niet zeker - kunnen we wellicht zeggen:

> *Voor zover we 'crisis' nu verstaan, komt de betekenis wellicht ongeveer overeen met wat we hier 'analyse van eigen woordgebruik' (11.2) noemden.* (Onderzoeksvraag 7)

Hiermee eindigen voorlopig mijn pogingen om 'crisis' als didactische term te verstaan. Omdat de associaties met wanhoop en radeloosheid me ongewenst en overbodig lijken, zal ik dit woord uit mezelf niet meer didactisch gebruiken, tenzij iemand me alsnog de bruikbaarheid ervan toont.

15.4. Nieuwe didactische onderzoeksvragen

Dat de onduidelijkheden, welke we aan het eind van deel 2 formuleerden nu grotendeels zijn verdwenen, betekent niet dat het hiermee ontstane didactische relatienet geen onduidelijkheden meer bevat. Een lezer kan eventueel zelfs de indruk hebben dat er meer onduide-

lijkheden bijgekomen zijn dan er verdwenen. Hier volgen de vragen die ik nu enigszins duidelijk formuleren kan.

1. In hoofdstuk 13 kregen 'overkoepelende termen' eerst betekenis in relatie tot een 'analogieredenering', dat is een gebeuren waarbij twee of meer ervaringsdomeinen betrokken zijn, elk met een eigen relatienet. Later zagen we een mogelijkheid om ook met betrekking tot een enkel relatienet van 'afbeelden' en daarmee ook van 'overkoepelende termen' te spreken (13.13).
Het leek zinvol die mogelijkheid in ieder geval open te houden (zie ook: 14.2 en 15.1.3, bladzij 382), maar daarmee is wel een onduidelijkheid gecreëerd. Kan in zo'n geval ook van een analogieredenering worden gesproken? En zo ja, geldt dan ook de eigenschap dat het afbeelden (van dit relatienet op zichzelf) niet geheel lukt (13.1)? De reden die we hadden om deze eigenschap te formuleren - namelijk dat dan pas de twee ervaringsdomeinen onderscheidbaar worden - geldt dan immers niet. We zien dus een nieuwe keuzemogelijkheid: het functioneren van een overkoepelend relatienet (vb. ruilwaarde -capaciteit - variabele) ten aanzien van een enkel overkoepeld relatienet is ofwel met 'analogieredenering' te beschrijven - maar in dat geval is een analogieredenering niet meer correct omschreven als een relatie tussen twee te onderscheiden ervaringsdomeinen - of er moeten twee soorten gebruik van overkoepelende termen (of twee soorten overkoepelende termen) worden onderscheiden. Welke van deze mogelijkheden zich zowel bruikbaar als consequent laat uitwerken, is nog allerminst duidelijk.

2. In 12.5.3 stuitten we op het probleem dat we een verschil in prioriteit wilden aangeven tussen verschillende afgesproken eigenschappen voor eenzelfde term (bladzij 288, noot *). We formuleerden dit prioriteitsverschil door te spreken van "gelijke ruilwaarde" als *centraal gezichtspunt* en "constante capaciteit" als middel om aan dat gezichtspunt te voldoen. De uitdrukking 'gezichtspunt' is overgenomen van Ten Voorde[154] (p.54-58) die 'chemische reactie' in de betekenis "verdwijnen van stofindividuen en ontstaan van nieuwe stofindividuen" een beschrijvend gezichtspunt noemt, volgens welke het gebruik van stofnamen (als beschrijvende termen) gedisciplineerd worden kan. 'Chemische reactie' kan echter ook zelf een term worden genoemd, en in dat geval laat zich de vraag stellen hoe deze term 'chemische reactie' zich verhoudt tot de termen (stofnamen) waarvan het gebruik gedisciplineerd wordt door 'chemische reactie'. We horen daar dan immers ook een prioriteitsverschil tussen termen.
Zodra we opmerken dat stofindividuen gerelateerd worden in beschreven reactie-individuen en dat zowel stofindividu-namen als reactie-beschrijvingen zich door dit type relaties laat ordenen, kan behoefte ontstaan dit "type" relaties te omschrijven door bijvoorbeeld te zeggen: 'een stof kenmerkt zich door zijn reactiemogelijkheden' en 'een reactie is te beschrijven door te zeggen welke stoffen (namen) verdwijnen en welke ontstaan'. Daarmee zijn dan twee relaties uitgesproken die als eigenschappen funtioneren van *benoemde plaatsen* ('stof' en 'reactiemogelijkheid') van termen in het overkoepelde relatienet (stofnamen gerelateerd in reactie-beschrijvingen). Dus zien we nu 'chemische stof' enerzijds en een stofnaam zoals 'ijzer' anderzijds als overkoepelende term en overkoepelde term. Zodra een 'gezichtspunt' wordt uitgesproken, vormt zich dus wellicht een overkoepelend relatienetje (hier: tussen 'chemische stof' en 'reactie').
Het aangegeven probleem met een prioriteitsverschil tussen eigenschappen van een term

laat zich dus wellicht ook oplossen door de rol van overkoepelende termen bij het expliciteren van een 'gezichtspunt' aan te geven. Misschien wordt het woord 'gezichtspunt' daarbij dan overbodig. Dit moet echter nog wel worden nagegaan.
Merk op dat het zowel in geval van 'ruilwaarde' als van 'chemische stof' om een overkoepelende term gaat die een enkel relatienet overkoepelt, immers zowel de ruilwaarde-individuen als de stofnamen zijn onderling gerelateerd (ruilwaarde-individuen door gelijkheden, stofnamen door relaties te formuleren met 'verdwijnen' en 'ontstaan').

3. Niveau-invariante leerprocessen die meer omvatten dan uitbreiding van een enkel relatienet werden beschrijfbaar als een 'wisseling van relatienet' als gevolg van het in onderzoek nemen van een nieuw ervaringsdomein. Ervaringsdomeinen zoals die in een analogieredenering analyseerbaar worden kunnen we - zodra we de afloop van de analogieredenering kennen - van elkaar onderscheiden door te letten op de beperkingen bij het afbeelden van termen op andere termen, en daarmee op de geldigheidsgrenzen van de ontstane relatienetten.
Maar deze wijze van onderscheiden van 'ervaringsdomeinen' en 'relatienetten' is gebonden aan de afloop van de analogieredenering zoals die zich voltrekt. Komen leerlingen tot een andere analogieredenering dan degene die gepland was (zie 8.7.2), dan zal ook een andere indeling in 'ervaringsdomeinen' nodig zijn ter beschrijving.*) Deze 'ervaringsdomeinen' zijn dus geen dingen die onafhankelijk van het geplande of gerealiseerde leerproces 'bestaan' of bruikbaar zijn.
Dit hangt misschien samen met het volgende.
Wanneer verschillende 'niveau-invariante' 'wisselingen van relatienet' elkaar opvolgen, zoals beschreven door Joling (p.130) dan biedt mijn terminologie niet de mogelijkheid om te beredeneren in welke volgorde deze wisselingen van relatienet kunnen plaatsvinden, zoals we dat voor de niveau-overgangen wél kunnen. Hoewel Joling[36] zo'n argumentatie evenmin biedt+) is het toch goed mogelijk dat Jolings 'kernthema' hiertoe betere mogelijkheden biedt dan mijn 'ervaringsdomein', omdat met kernthema in ieder geval iets wordt bedoeld dat door verschillende 'wisselingen van relatienet' heen loopt. Het zou dus inderdaad de moeite waard zijn om 'kernthema' verder te expliciteren dan tot nu toe is gebeurd (vgl. 10.2.2).

4. In 15.1.1 werd aangegeven hoe het gewijzigd niveauschema rekening houdt met een gemeenschappelijke zaak als eigenschap van gesprek (onderzoeksvraag 4). Hierbij werden alleen niveau-termen en hun eigenschappen genoemd, er werd niet verwezen naar analyses van een protocol. Een verantwoording van die algemeenheid ontbreekt nog voor analogieredenering en contextwisseling.

Het wisselen van relatienet dient dus nog nader te worden beschreven (hierboven onder 1,

---

(* De ervaringsdomeinen betrokken in de alternatieve analogieredenering uit 8.7.2 kenmerken zich door een relatienet met termen (C_V, T, π_T, V) voor het basisdomein en een relatienet met termen (p, V) voor het doeldomein (wellicht uit te breiden met het termenpaar T en S).

(+ Immers, waarom komt uitgaande van kernthema 'samenstelling' eerst het kernthema 'structuur' erbij en dán het kernthema 'energie'? deze volgorde is alleen chemisch-inhoudelijk beredeneerd, niet volgens expliciete didactische gezichtspunten (Joling[36], p.124-130, 200-206).

3 en 4).

15.5. Fysicadidactiek en didactiek leren

In de vorige paragrafen kwam het didactiek leren nogal nadrukkelijk naar voren, doordat werd aangegeven hoe sommige termen waarover eerder tevredenheid bestond, nu niet meer als adequaat worden gezien en doordat werd aangegeven in hoeverre de nieuw gedane voorstellen als een verbetering ten opzichte van eerdere termen kunnen gelden. We kunnen dus zeggen dat er in dit onderzoek didactiek werd geleerd.
Als het leerresultaat daarbij een kwaliteit bereikt die 'beschrijvend' of hoger te noemen is en bovendien problemen zijn gesteld of opgelost die voor zover bekend nog niet elders zijn gesteld of opgelost dan heet zulk leren ook wel: onderzoek.
In 14.2.3 werd aangegeven wanneer we het leren 'didactisch' noemen, namelijk als hierbij ervaringen geordend worden die zijn opgedaan bij het onderwijzen, dus bij het organiseren van leerzame (probleemstellende) situaties voor anderen.
Maar hierbij formuleerden we een bijzonderheid (14.2.3):

> *Het bleek nodig de didacticus tot de groep te rekenen, waarin de onderwezen (hier: fysische) term geleerd wordt.*

Deze bijzonderheid lijkt wel funderend te zijn voor didactiek: wanneer mijn didactische kennis nog niet vaststaat - en dat is steeds het geval als ik 'onderzoek' doe - dan weet ik nog niet wélke term op het gegeven moment voor lerenden kan ontstaan. Uiteraard moeten wij daarover vermoedens hebben en we moeten deze kunnen toetsen. Leerzame ervaringen zijn die, waar zo'n vermoeden weerlegd wordt. Op zo'n moment zijn aanwijzingen welke term wél kan ontstaan te verkrijgen door naar bevind van zaken te handelen en te kijken wat er van komt: de nieuwe term ontstaat dan voor leerlingen en onderwijzende tegelijk, kortweg, ze ontstaat in de groep die deze *lerenden* tezamen vormen.
Pas als de nieuwe term ontstaat (zin krijgt, inhoud krijgt, gaat verwijzen) voor de lerenden leert de didacticus in welke relaties deze term kan functioneren of welke ervaringen nodig zijn om deze term te laten verwijzen, kortom: hij leert dan pas welke term nu mogelijk wordt, immers een term wordt gekenmerkt door zijn relaties en door een specifieke collectie ervaringen.
Het leren van fysica-didactiek gaat dus samen met het leren van fysica. Maar het is een enigszins bijzondere fysica die hier geleerd wordt. Het is niet de tijdloze 'uiteindelijke fysica' die in fysisch onderzoek wordt nagestreefd. Het is in plaats daarvan steeds de fysica die - op het gegeven moment, niet volgens de ervaring der mensheid maar volgens de voor studenten beschikbare ervaring - beargumenteerd blijkt te kunnen worden in die groep op dat (didactisch te beschrijven)[*)] moment. Het is dus een leertijd-afhankelijke en voorgeschiedenis-afhankelijke fysica die daar geleerd wordt.
We zien nu wat die ervaring dat het "in onderwijs vaak niet mogelijk [is] om meteen de volle waarheid te vertellen" (1.1), betekent. Het betekent niet dat we moeten liegen. Het

---

[*)] bijvoorbeeld met Van Hiele niveaus, onderwijsfasen, gespreksthema's en ervaringsdomeinen.

betekent ook niet dat we moeten vertellen wat later als onwaar blijkt te moeten worden herroepen, immers: de beschikbare ervaringen blijven beschikbaar, ze worden niet (of alleen in geval van een vergissing) 'onwaar'. Wel kan het gebeuren en in probleemstellend onderwijs wordt dat ook nagestreefd, dat eerdere verwoordingen van ervaringen worden verworpen als zijnde minder handig. En in dát opzicht is de fysica waarmee de didacticus zich bezighoudt en welke hij leert dus voorgeschiedenis-afhankelijk.
Daarnaast heeft de fysica-didacticus ook te maken met de fysica zoals die op dit moment aan het front van de wetenschap gezien wordt*), immers daarheen moet hij een onderwijsroute ontwerpen. Dit wil niet zeggen dat deze route *precies* daar moet uitkomen waar de huidige fysica is, immers: 'de huidige fysica' omvat ook vragen en is dus niet 'precies' vast te leggen. Het is voldoende als leerlingen aan het eind van de route kritisch kunnen meepraten, dus een eigen standpunt innemen over vragen waar de huidige fysica zich mee bezig houdt. Om dit te bereiken lijkt het een veelbelovende mogelijkheid om lerenden van begin af aan in situaties te brengen waar vragen en onzekerheden bestaan ten aanzien van hun kennis zoals zij die tot dat moment geleid door opgaven hebben opgebouwd. Hierbij gaat het niet om onzekerheid over de 'waarheid' van die kennis (want ervaringen hèb je, daar valt op zich niet veel aan te twijfelen), maar om onzekerheden met betrekking tot de generaliseerbaarheid, de handigheid van de gekozen opzet van het relatienet. Voor zover we zulk 'probleemstellend onderwijs' tot nu toe hebben onderzocht is die veelbelovende mogelijkheid inderdaad mogelijk gebleken: belangrijke stappen op de weg naar de fysica - zoals de overgang naar 'inwendige energie' als toestandsgrootheid - blijken door lerenden zelf te kunnen worden gezet, daartoe geholpen door geschikt gekozen opgaven.

Daarnaast zou probleemstellend onderwijs ook een voorwaarde kunnen zijn voor de ontwikkeling van een toetsbare didactiek als wetenschap. Immers: didactiek onderzoekt welke nieuwe kennis - op een gegeven moment - op een redelijke manier kan ontstaan in een groep lerenden. Met 'een redelijke manier' bedoelen we: gegrond op ervaring en beargumenteerd volgens redeneringen die voortbouwen op wat eerder werd gezegd. Maar hoe weten wij of wat we zeggen 'voortbouwt op wat eerder is gezegd' en hoe komen we erachter of wat we zeggen 'gegrond is op ervaring' die de ander bezit?
In probleemstellend onderwijs is een controle op deze vragen ingebouwd, doordat steeds als het antwoord negatief moet zijn, dit blijkt doordat de lerenden niet meegaan in de ontworpen stap. Deze controle wordt dus bereikt door het oordeel over 'voortbouwen' en over 'gegrond zijn' in laatste instantie bij hen of bij de groep te laten. En volgens het gespreksmodel zoals beredeneerd door Klaassen[38] (9.5) kán dat oordeel ook nergens anders gevonden worden dan in de driehoek van ik-jij-gemeenschappelijke zaak, tenminste zo begreep ik hem.
Vragen we nu hoe het leren van fysica-didactiek tot stand komt, dan kunnen we zeggen dat ervaringen met het leren van voorgeschiedenis-afhankelijke fysica door de onderwijzende tegelijk met en in een groep voor wie hij het leren probeert te organiseren, dat zúlke ervaringen de zaak vormen welke de didacticus in beschrijvende termen probeert te ordenen. Hiertoe moet de didacticus over zulke ervaringen beschikken, dus de didacticus

*) Niet: met de 'uiteindelijke fysica' die in onderzoek wordt nagestreefd! Die laten we aan de echte fysici over.

moet fysica onderwijzen.
Uit de opbouw van dit proefschrift kan blijken dat het door mij handig werd gevonden om zulke ervaringen eerst met zo min mogelijk didactische taal en met zoveel mogelijk fysische argumenten naar voren te brengen. Deze volgorde had ik ook in m'n onderzoek zo ervaren: eerst moet ik tijdens dat werkcollege merken dat de redenering 'klikt', zowel voor de studenten als voor mij, dus eerst komt het samen fysica leren, daarna komt de didactische analyse van wat er nu eigenlijk daar is gebeurd. Ik kan echter nu nog niet weten of deze volgorde, eerst fysische, dan didactische zaken aan de orde te stellen ook voor de lezer produktief was. Zoals het oordeel over een ontwikkelde fysische tussentaal bij m'n studenten ligt, zo ligt het oordeel over het hier ontwikkelde didactische relatienet bij m'n lezers, of liever gezegd: in de groepen waar hopelijk een gesprek over de gedane voorstellen zal plaatsvinden.

Slot

16. Opbrengst voor energie-onderwijs

Er is besproken hoe elk van de drie uitgevoerde onderwijsexperimenten rekening hield met eerder bereikte conclusies en hoe elk experiment, door niet-verwachte resultaten, aanleiding gaf tot nieuwe vermoedens die in een volgend experiment werden uitgeprobeerd (delen 2 en 3).
Men kan wellicht hopen dat zo'n ontwikkelingsproces op den duur tot stilstand komt door een geleidelijke toename van verwachte en afname van niet-verwachte resultaten. Op den duur zou dan de aanleiding tot een volgend experiment wellicht verdwijnen, aangezien er vrijwel geen reden voor ontevredenheid meer zou zijn. Of deze wens nu gerechtvaardigd is of niet, het huidige onderzoek gaf geen aanleiding te verwachten dat er binnenkort aan kan worden voldaan, want ook het laatste experiment gaf nog aanleiding ingrijpende wijzigingen in het onderwijsplan te ontwerpen (13.14).
Wel kunnen we zeggen dat diverse eerder ontstane vermoedens in latere experimenten een bevestiging kregen, zoals het vermoeden dat inwendige energie als toestandsgrootheid en als optelsom van procesgrootheden een verrassend *empirisch resultaat* zou kunnen zijn voor deelnemers die vertrekken vanuit een energievormentaal (5.4.1). Ook werd bevestigd dat entropie als *toetsbaar vermoeden* voor studenten zou kunnen ontstaan in een analogieredenering als empiriegebonden redeneerwijze (13.6). De 'toetsbaarheid' van hun vermoeden bleek daarbij uit hun vermogen om bij te dragen aan het ontwerpen van een experiment (5.3.1).
In deze zin kunnen we dus spreken van een toename van verwachte resultaten: sommige verwachtingen bleken tot nu toe produktief. Een afname van onverwachte resultaten daarentegen kunnen we niet onderbouwen. We hebben dus uit dit onderzoek nog geen aanwijzing dat het proces van onderwijs evalueren en opnieuw ontwerpen zou convergeren naar een tijdloos ideaal ontwerp voor energie-onderwijs.

We zullen daarom in dit hoofdstuk de conclusies noemen die in eerdere experimenten bruikbaar bleken. Ook zullen we de beredeneerde verwachtingen noemen die tot nu toe nog niet afdoende zijn onderzocht (16.1). Dit leidt tot een beoordeling van het tot nu toe ontwikkelde onderwijsplan (16.2). De genoemde conclusies en vermoedens zullen we vervolgens handen en voeten geven door te schetsen hoe ons volgende experiment eruit zou zien. Daarmee is tegelijk gezegd wat ***nu***, op grond van hier gepresenteerde resultaten, als mogelijk ideaal voor energie-onderwijs kan worden gezien (16.3).
Tot besluit worden enkele beperkingen genoemd van de uitgevoerde onderwijsontwikkeling (16.4) en er wordt een opmerking gemaakt over de gevolgde werkwijze, zoals die uit dit hoofdstuk blijkt (16.5).

16.1. Conclusies ten aanzien van een onderwijsplan

Hieronder volgen de conclusies die door experimenten werden onderbouwd. Deze zijn cursief gezet en worden gevolgd door een verwijzing. De resterende tekst geeft een

toelichting op deze conclusies. Hierbij worden ook beredeneerde verwachtingen uitgesproken die nog nader onderzocht moeten worden. Verwachtingen zullen zich door hun formulering ("dan zou...") onderscheiden. De volgorde van presentatie is ruwweg zo dat de eerder gerformuleerde conclusies een kader vormen om daarna volgende conclusies te verstaan.

▸ *a) De plaats van axioma's in energie-onderwijs*
Het onderwijzen van thermodynamica in wetenschappelijk onderwijs (WO) kenmerkt zich dikwijls door een aanpak waarbij uitgaande van de drie of vier thermodynamische hoofdwetten als axioma's, een groot aantal stellingen wordt afgeleid. Er werd getoond dat de *eerste en tweede hoofdwet door studenten niet worden begrepen en niet gebruikt kunnen worden in afleidingen* (2.5, 3.5). Dit resultaat is geïnterpreteerd met behulp van het Van Hiele niveauschema: de genoemde onderwijsaanpak gaat ervan uit dat studenten de axioma's in hun geschiktheid als gekozen uitgangspunten van deductief redeneren kunnen begrijpen en waarderen. Dit houdt in dat het derde Van Hiele niveau bereikt zou zijn, terwijl voor studenten het bereiken van het tweede niveau nog problematisch is (7.6). Ervan uitgaande dat men gehandeld moet hebben om dat handelen tot onderwerp van analyse te kunnen maken kunnen we begrijpen waarom een betoog dat vertrekt vanuit axioma's niet kan worden verstaan door lerenden die nog niet door analyse van eigen woordgebruik tot een netwerk van empirische generalisaties zijn gekomen (7.4). Daarom is besloten dit onderzoek te richten op het vinden van empiriegebonden voorstadia van thermodynamisch redeneren. Inmiddels kan geconcludeerd worden dat zowel inwendige energie (5.4.1) als entropie (13.6) op basis van empirische generalisaties zinvol en controleerbaar kunnen worden voor studenten zonder dat hierbij eerste of tweede hoofwet als axioma voorop worden gesteld. *Empiriegebonden redeneringen van studenten maken het mogelijk voor de onderwijzende om naar axioma's toe te werken*, alvorens daar vanuit te gaan.
Deze conclusie is onderbouwd door te tonen hoe aspecten van eerste en tweede hoofdwet begrijpelijk worden voor studenten. Er is nog niet getoond dat studenten op basis van deze voorbereiding zelf de stap naar axiomatiseren kunnen maken. Wel zijn opgaven ontworpen die naar verwachting zo'n overgang naar het derde Van Hiele niveau mogelijk maken. Voor de onderwijspraktijk doen zich daarom de volgende keuzemogelijkheden voor:

- als het gewenst is dat studenten in een eerste cursus thermodynamica in het WO inzicht krijgen in eerste en tweede hoofdwet als te kiezen uitgangspunten voor deductief redeneren, dan is het nodig dat in het VWO een daartoe geschikt beschrijvend relatienet ontstaat.
- als het VWO om welke reden ook zo'n beschrijvend relatienet niet wil of kan nastreven, bijvoorbeeld omdat het slechts voor een klein deel der leerlingen relevant zou zijn, dan zou een eerste cursus thermodynamica in het WO zich op zo'n relatienet kunnen richten.
- als het voor een grote meerderheid der studenten voldoende wordt gevonden dat zij enige precies voorgeschreven berekeningen kunnen uitvoeren, dan kan men het onderwijs laten zoals het is.

▸ *b) Energie en gebruikswaarde*
Er is gebleken dat onderwijs waarin energie wordt omschreven als "het vermogen om arbeid te verrichten", studenten *verhindert om een adequate relatie tussen energie en maximaal mogelijke arbeid te hanteren* (3.5). De gewraakte omschrijving tezamen met de wet van energiebehoud leidt tot een tegenstrijdigheid met de tweede hoofdwet. De tweede hoofdwet stelt immers dat voor een geïsoleerd systeem het vermogen tot verandering, dus ook het vermogen tot arbeid van een deelsysteem op een tweede, afneemt in geval van een irreversibel proces. Wordt deze afname niet erkend, dan kan het ontwikkelde energiebegrip niet adequaat in verband gebracht worden met een maatschappelijk verschijnsel als de 'energiecrisis', noch kan thermodynamische kennis worden ingezet voor de vraag naar de optimalisering van een reëel, dus irreversibel proces (3.5). Wat met de bewering "energie is het vermogen om arbeid te verrichten" gewoonlijk bedoeld wordt, zou dus met andere woorden uitgedrukt moeten worden, zoals: energie is te meten met behulp van arbeid. Of: bij meting van een verandering van de inwendige energie is steeds één of andere vorm van arbeid het uiteindelijke calibratiemiddel. De omschrijving van energie als "vermogen om arbeid te verrichten" is historisch bepaald en dateert uit een tijd dat de vereniging van eerste en tweede hoofdwet nog problemen opleverde (4.4).
Ook in hedendaagse leerprocessen kunnen we een tussentaal verantwoorden waar het onderscheid tussen 'energie' en 'vermogen tot arbeid' nog moet ontstaan, immers de optelsom van kinetische en potentiële energie van een macroscopisch voorwerp is inderdaad gelijk aan de nuttige arbeid die dit voorwerp maximaal kan verrichten. De hierboven gesignaleerde tegenstrijdigheid ontstaat pas wanneer we het energiebegrip uitbreiden van 'de optelsom van kinetische en potentiële energie' naar 'inwendige energie' of anders gezegd, zodra we mechanische energievormen in verband brengen met warmte. Er doen zich nu de volgende keuzemogelijkheden voor:

- Als in het VWO het woord 'energie' alleen in een cursus mechanica functioneert, dan kan men de omschrijving van energie als 'vermogen om arbeid te verrichten' wellicht handhaven. De opgave om vanuit dit energiebegrip te komen tot 'inwendige energie' wordt dan overgelaten aan het WO.
- Als men in het VWO maatschappelijke fenomenen zoals 'energieschaarste' of technische fenomenen zoals het 'opwekken' van 'energie' in motoren en elektriciteitscentrales in fysische termen begrijpelijk wil maken, dan wordt de genoemde omschrijving onjuist en contraproductief.

Wordt de tweede mogelijkheid gekozen dan doet zich didactisch de vraag voor of éérst een mechanisch energiebegrip moet ontstaan, dan wel of al in een eerder stadium een onderscheid tussen energie en vermogen tot arbeid - of tussen voorlopers van deze termen - kan worden nagestreefd.
Als aanzet tot een antwoord is een tussentaal ontworpen waarin 'ruilwaarde' als voorloper van energie wordt onderscheiden van 'gebruikswaarde' als voorloper van entropie en vrije energie (3.7). Er is beredeneerd dat beide termen kunnen ontstaan na een korte periode waarin besloten wordt een 'gelijke waarde' toe te kennen aan twee toestanden, dan wel aan twee veranderingen die wederzijds tegen elkaar ingeruild blijken te kunnen worden. Gebruikswaarde als vakterm kan naar verwachting ontstaan door vast te houden aan de eis dat de 'gebruikswaarden' van twee veranderingen gelijk te noemen zijn indien de ruil

omkeerbaar blijkt. Op deze wijze kan naar verwachting een samenhang tussen afnemende gebruikswaarde en niet-omkeerbaarheid worden beredeneerd, nog vóórdat arbeid en energie kwantitatieve termen zijn geworden. De gewenste kwantificering kan vervolgens hierop aansluitend plaatsvinden. Hiertoe is onder andere een route ontworpen van 'omkeerbaar' naar de term 'reversibel' welke in relatie staat tot chemisch, mechanisch en thermisch evenwicht (3.7).
Uitproberen van deze ontworpen tussentaal als deel van een route naar de thermodynamica vereist een onderwijsexperiment in het VWO. Het huidige onderzoek bleef beperkt tot het WO, toetsing in het VWO moet nog plaatsvinden. Wel is ervoor gezorgd dat de ontworpen proto-thermodynamische tussentaal aansluit bij volgende ontworpen taalveranderingen die wel zijn uitgeprobeerd en die hierna worden besproken.

▸ *c) Entropie zonder bewijs, als controleerbaar vermoeden*
Door de keuze geen gebruik te maken van logische afleiding uit axioma's kan de definitie van entropie via $đq_{rev}/T$ niet worden gemotiveerd door een bewijs dat deze definitie een toestandsgrootheid oplevert. Een tweede voorstelbare route naar entropie, welke begint met het voorstel een portie gas te beschouwen als een groot aantal zeer kleine voorwerpjes, is eveneens afgewezen als zijnde ongeschikt ter introductie van entropie (4.3). Immers dit betreft een analogieredenering die leidt tot een voorspelling van de entropieverandering. Deze voorspelling echter is oncontroleerbaar indien entropie niet eerst op andere wijze betekenis heeft gekregen als meetbare grootheid. Gemaakte keuzen bij het afbeelden van het domein 'collectie voorwerpen' naar 'gasportie' kunnen eerder niet voor studenten controleerbaar gemotiveerd worden. *In probleemstellend onderwijs moet daarom entropie als meetbare grootheid vooraf gaan aan een statistisch-mechanische interpretatie* (4.3).
Ter voorbereiding op een axiomatisch-deductieve redeneerwijze en ter voorbereiding op een statistisch mechanische interpretatie is voorgesteld entropie als vermoeden te laten ontstaan in een analogieredenering die vertrekt vanuit geanalyseerde ervaringen met vallend water en herverdeling van volume (4.4). Geëist werd dat entropie als toetsbaar vermoeden zou ontstaan voor studenten en dit resultaat werd uiteindelijk in een tweede onderwijsexperiment ook bereikt. *Een analogieredenering welke vertrekt vanuit geanalyseerde ervaringen met stromend water en herverdeling van volume is geschikt om entropie met eigenschappen: $\Delta S_{totaal}=0$ en $\Delta S=q/T$ als toetsbaar vermoeden te laten ontstaan* (5.3.1, 13.6). Bij toetsing kan blijken dat, anders dan verwacht, het voorspelde resultaat pas optreedt als het proces reversibel is, waarna men reden zou hebben om te kiezen voor $\Delta S_{rev,\ totaal} = 0$ en $\Delta S = q_{rev}/T$. In het hier gerapporteerde onderwijsexperiment werd het experimentele resultaat medegedeeld. Dit gebeurde aan het einde van het onderwijsexperiment, zodat niet meer kon worden nagegaan of dit medegedeelde resultaat nog probleemstellend functioneerde.
Zodra opgemerkt is dat de totale entropie alleen bij een reversibel proces constant blijft, terwijl al gezocht wordt naar een maat voor 'gebruikswaarde' die alleen bij een reversibel proces constant blijft, kan naar verwachting entropie als eenduidige maat voor de totale 'gebruikswaarde' in een geïsoleerd systeem worden gekozen. De aansluiting bij het ontworpen leerproces genoemd onder (b) zou dan zijn aangetoond, maar daarvoor is een meer omvattend onderwijsexperiment nodig dan hier werd verricht.

▸ *d) Van 'energievormen' naar 'inwendige energie'*
Als resultaat van het VWO (2.1) spreken studenten een energievormentaal waarin 'warmte' een energievorm voorstelt die afhangt van temperatuur als veranderlijke grootheid en van de warmtecapaciteit als constante voorwerpseigenschap (5.2.2). Aangezien de warmtecapaciteit constant wordt genomen gedraagt deze 'warmte' zich als een aparte vorm van energie die door voorwerpen wordt "bezeten" of die in voorwerpen "aanwezig" is, zoals studenten dat gewend zijn van andere energievormen zoals kinetische energie en zoals potentiële energie in een zwaartekrachtveld (2.6.1). Een thermodynamicus hoort hierin de onuitgesproken veronderstelling dat de totale energie van een voorwerp op te delen zou zijn in verschillende 'energievormen', één per veranderlijke eigenschap van een voorwerp, welke zich elk apart als toestandsgrootheid gedragen. De eerste hoofdwet als "wet van energiebehoud" is wel onderwezen in het VWO maar *de eerste hoofdwet, zijnde de wet die zegt dat inwendige energie als toestandsgrootheid gelijk is aan een som van procesgrootheden, is bij aankomende studenten nog onbekend* (2.5). De reguliere hoorcolleges en (Atkins) werkcolleges bleken bovendien onvoldoende om het onderscheid tussen toestands- en procesgrootheid alsnog functioneel te laten worden voor studenten (2.5). Omdat de thermodynamische warmte q geen meetbare grootheid voorstelt zolang de inwendige energie U niet als toestandsgrootheid begrepen wordt, werd naar andere grootheden gezocht ten behoeve van een voldoende brede empirische basis om een toestandsgrootheid U op te baseren (5.2.4).
Er werd getoond dat een energievormentaal - hierboven omschreven - zinvol en consequent gebruikt kan worden zolang de energiecapaciteiten zich als constanten gedragen, dan wel functies zijn van hun eigen bijbehorende energievariabele (2.6.1). Ook werd getoond dat in een situatie waar energiecapaciteiten kruislings van elkaars energievariabele afhangen, een empirische aanleiding bestaat om 'energievormen' als aparte toestandsgrootheden ter discussie te stellen (2.6.2). Het kan dan verbazing wekken dat de optelsom van deze energievormen zich wél als toestandsgrootheid gedraagt. *Komende vanuit een energievormentaal kan de eerste hoofdwet ontstaan als een verrassend empirisch resultaat* (5.4.1), gebaseerd op meting van energievariabelen (temperatuur, volume, samenstelling) en bijbehorende energiecapaciteiten. Zo bezien is de energievormentaal dus een bruikbare tussentaal te noemen op weg naar thermodynamische taal. Het is dan wel nodig om probleemstellend aan te sluiten bij deze energievormen tussentaal in plaats van direct U, q en w in hun thermodynamische betekenis te poneren.

▸ *e) Energievormen en energiecapaciteiten*
Arbeid, warmte en materietransport onderscheiden zich als interactiesoorten doordat ze elk zijn te omschrijven in termen van eigenschappen van de systeemgrens, terwijl energievormen die zich "in" een systeem "bevinden" zich onderscheiden door hun eigen energievariabele. Omwille van de duidelijkheid is voorgesteld de energievorm die behoort bij de temperatuur als variabele ($= C_V.\Delta T$) die in het VWO met *'q'* en met 'warmte' wordt aangeduid voortaan als **verandering van de thermische energie** aan te duiden en deze te schrijven als ΔE_{th}, om daarmee ruimte te laten voor **warmte** of q als gekwantificeerde interactiesoort, gelijk aan ΔU - w (5.2.4).
Wat we gewend zijn de 'warmtecapaciteit' C_V te noemen kan dan **thermische energiecapaciteit** heten, in overeenstemming met de later te introduceren definitie $(\partial U/\partial T)_V$. De naam 'warmtecapaciteit' is ongelukkig omdat:

- er tussen thermodynamische warmte (ΔU - w) en 'warmtecapaciteit' geen onvoorwaardelijke relaties bestaan maar alleen incidentele relaties, zoals bijvoorbeeld blijkt uit q = 0 en $w = C_V.\Delta T$ voor een adiabatische compressie van een ideaal gas (5.2.4),
- de naam 'warmtecapaciteit' suggereert dat met warmte iets wordt bedoeld dat zich in een voorwerp kan bevinden (3.4). Dit kan correct zijn voor thermische energie zolang C_V constant is, maar kan niet gelden voor warmte als interactiesoort.

De naam 'warmtecapaciteit' is historisch bepaald en dateert uit de periode dat men meende de calorimetrisch bepaalde warmte als toestandsgrootheid te kunnen gebruiken[74] (3.4).
Met de introductie van thermische energiecapaciteit ontstaat een mogelijkheid van systematische naamgeving aan energiecapaciteiten: hoogte-energiecapaciteit mg, kinetische energiecapaciteit $\frac{1}{2}m$ en later te introduceren: volume-energiecapaciteit $(\partial U/\partial V)_T$, chemische energiecapaciteit $(\partial U/\partial \xi)_T$.
Deze voorstellen voor systematische naamgeving aan individuele energiecapaciteiten zijn tot nu toe niet uitgeprobeerd omwille van de gewenste aansluiting bij het huidige VWO, bij het gebruikte studieboek en bij het parallel gegeven hoorcollege. *Wel zijn 'ruilwaarde', 'energiecapaciteit' en 'energievariabele' bruikbaar gebleken als overkoepelende termen* waarmee het functioneren van termen als $mg\Delta h$, h, mg, T, C_V kan worden benoemd (12.3, 13.4, 13.13).

▸ *f) Energievormen in relatie tot interactiesoorten*

Warmte als gekwantificeerde interactiesoort (= ΔU - w) kan naar verwachting bruikbaar worden voor studenten zodra een samenhang is opgemerkt tussen dit - tot dan toe oninteressante - verschil enerzijds, en de energievorm $T.\mathrm{d}S$ anderzijds (5.2.5). Deze verwachting kan worden getoetst door de ontworpen opgavenserie voor het tweede experiment alsnog volledig uit te voeren (§13[2]).
Het is gebleken dat een kwalitatieve interesse in interactiesoorten al eerder kan ontstaan, namelijk bij het vergelijken van beschrijvingen voor de drie ervaringsdomeinen die een rol spelen bij het komen tot entropie: vallend water, drukvereffening en temperatuurvereffening. Thermodynamisch gezien spelen hier respectievelijk materietransport, volumearbeid en warmte een rol. In probleemstellend onderwijs is deze indeling in drie - en niet meer dan drie - interactiesoorten echter niet direct te motiveren. *Wel ontstaat een indeling in interactiesoorten welke voldoet om te komen tot entropie* (8.7.1, 13.6). Een beperking tot twee en niet meer dan twee interactiesoorten, dus het ontstaan van een term 'arbeid' als generalisatie over diverse termen $I.\mathrm{d}E$, (zie 13.1) is naar verwachting alleen te motiveren door de tweede hoofdwet als ongelijkheid: $w \geq w_{rev}$ terwijl $q \leq q_{rev}$, immers door dit verschil in het ongelijkteken onderscheidt de warmteterm zich van alle andere termen in de energievergelijking.

▸ *g) Energievormen baseren op ruilwaarden van veranderingen*

In ons tweede onderwijsexperiment werd vertrokken vanuit energievormen met eerder aangeleerde formules ($E_{kin}=\frac{1}{2}m.v^2$) als gegeven feiten. Weliswaar bestond het vermoeden dat deze energievormen zelf nader te motiveren zijn door uit te gaan van de keuze een gelijke waarde toe te kennen aan twee toestanden die wederzijds inwisselbaar zijn (2.7). Maar aangezien studenten al energievormen hanteren leek het mogelijk daarop voort te bouwen. Deze aanpak leidde tot het volgende onderwijsprobleem. Als 'thermische energie' een grootheid voorstelt die meetbaar is dankzij $\Delta E_{th}=mc.\Delta T$ als afspraak, dan kunnen leerlingen

niet constateren dat E_{th} afhangt van het proces door vergelijken van verschillende processen tussen dezelfde begin- en eindtoestand (5.3.2). In plaats daarvan wordt namelijk geconcludeerd: de eindtoestanden van deze processen zijn ongelijk, want zie, ze hebben een ongelijke thermische energie. Energievormen als gegeven feiten voldoen daarom bij nader inzien niet als vertrekpunt voor de stap naar 'inwendige energie'. *Probleemstellend onderwijs gericht op energievormen als mogelijke procesgrootheden vereist een onderscheid tussen enerzijds meetbare grootheden, en anderzijds grootheden die als ordeningsmiddel voor ervaringen nog in de testfase verkeren* (5.3.2). Dan kan men namelijk vragen dat energievormen de beschrijving vereenvoudigen, in plaats van die te compliceren door toestanden te onderscheiden die op grond van de gemeten grootheden (hoogte, snelheid, temperatuur) gelijk zijn.
In plaats van de lineaire opzet waarbij telkens een nieuwe energievorm wordt verkend via een relatie met een bekende energievorm (5.3.3) werd daarom gekozen de 'energievormen' bekend van het VWO eerst te laten uitleggen als 'ruilwaarde van een verandering' (5.3.4). *Zulke 'ruilwaarden' kunnen dan getoetst worden op hun geschiktheid als knooppunt van gelijkheidsrelaties* (12.3), bepaald door de voorafgaande keuze twee veranderingen 'even veel waard' te noemen wanneer beide wederzijds tegen elkaar kunnen worden ingewisseld.

Vervolgens kan een overgang gemaakt worden van 'ruilwaarde van een verandering' naar 'energiewaarde van een toestand' (12.4), waarbij 'toestand' staat voor een hoogte of een snelheid of een temperatuur van een voorwerp, dus toewerkend naar aparte energievormen. Doordat uitgegaan wordt van een verandering als proces, spreekt het niet langer vanzelf dat aan een toestand aparte energiewaarden per energievorm kunnen worden toegekend. Zo ontstaan energievormen die als ordeningsmiddel "in de testfase verkeren": na deze voorbereiding bleek inwendige energie te kunnen ontstaan als een toestandsgrootheid, waarvan de verandering te berekenen is als som van procesgrootheden (conclusie genoemd onder d).

16.2. Status van het ontwikkelde onderwijsplan

Hoewel elk van de drie verrichte onderwijsexperimenten bepaald werd door eerder bereikte conclusies gaf ook elk van deze experimenten, door onverwachte en deels onbevredigende resultaten aanleiding tot nieuwe verwachtingen en voornemens voor een volgend experiment (hoofdstuk 5). Zo leidde ons eerste experiment tot de verwachting dat het nodig is om probleemstellend aan te sluiten bij de energievormentaal die studenten in het VWO hebben aangeleerd, wil entropie als toetsbaar vermoeden kunnen ontstaan. Er volgde een analyse van thermodynamische kennis die leidde tot de verwachting dat, komende vanuit een energievormentaal, de inwendige energie als toestandsgrootheid een verrassend empirisch resultaat zou kunnen zijn. Deze analyse maakte het mogelijk de energievormentaal positief te waarderen, hetgeen nodig bleek om er zinvol op in te kunnen gaan.
De genoemde verwachting werd uiteindelijk bevestigd, echter niet eerder dan nadat energievormen verontfeitelijkt werden door ze te baseren op de keuze om aan twee veranderingen een gelijke ruilwaarde toe te kennen. Dit resultaat werd pas twee experimenten later bereikt.
Hoewel de genoemde verwachting uiteindelijk een conclusie kon worden (16.1 onder d), was deze verwachting op zichzelf dus onvoldoende als richtlijn om tot het verwachte

resultaat te kunnen komen. De later ontstane verwachting, inmiddels conclusie (16.1 onder g) bleek eveneens nodig om "inwendige energie als empirisch resultaat" met studenten te bereiken.

Deze ervaring kan ons waarschuwen: *eerder bereikte conclusies en verwachtingen geven weliswaar richting aan een volgend experiment, zij dicteren het volgende experiment echter niet.*
De tot nu toe geformuleerde conclusies noemen onderwijsresultaten die bereikt *kunnen* worden als het onderwijs de in die conclusies genoemde eigenschappen heeft. Daarmee is echter niet gezegd dat met deze conclusies een afdoende opsomming van nodige eigenschappen is gegeven: de lijst van conclusies is dus open voor aanvulling. Een volgend experiment kan noodzaken tot expliciteren van aanvullende eigenschappen van een probleemstellende route naar energie.

Gezien de laatste experimentele resultaten is aanvulling tenminste gewenst op de volgende punten, als gestreefd wordt naar probleemstellend onderwijs:
- Bij de overgang naar inwendige energie als toestandsgrootheid ging de overgang naar toestand als combinatie van variabelen gepaard met een sluipende introductie van 'systeem' als zijnde bepaald door afgesproken systeemgrenzen (5.4.1).
- Bij de overgang van constante naar variabele energiecapaciteiten was het handhaven van de woorden 'energie' en 'capaciteit' door de onderwijzende sluipend te noemen, aangezien een door studenten afgesproken eigenschap van beide termen in de nieuwe situatie ontbrak (12.5.2, 13.11).
- De analogieredenering welke leidde tot entropie geschiedde slechts gedeeltelijk op probleemstellende wijze, want deze ging gepaard met een sluipende introductie van de termen: bron, taak, afvoerput en arbeid verrichtend systeem (13.5, 13.6).

Voor zover de tot nu toe geformuleerde conclusies een volgend experiment niet dicteren, is er dus ruimte voor didactische verwachtingen, intuïties en vooroordelen, nodig om de gewenste aanvullingen te kunnen zoeken.

16.3. Voorstel voor een volgend experiment

We presenteren hier onze aanbevelingen voor een volgend experiment. Daarmee presenteren we tevens een ideaal voor energie-onderwijs, zoals dat op basis van eerder bereikte conclusies en verwachtingen nu gezien kan worden. De lezer kan nagaan in hoeverre het nu volgende onderwijsontwerp gebaseerd is op conclusies en beredeneerde vermoedens (zie 16.1). In hoeverre tevens ongegronde intuïties een rol spelen kan blijken zodra het experiment wordt uitgevoerd.

Een andere voorbereiding in het VWO
Het bleek dat de energievormentaal zoals die in het VWO wordt aangeleerd uiteindelijk toch niet voldeed als vertrekpunt om tot inwendige energie als toestandsgrootheid te komen. Het bleek immers gewenst om aangeleerde beweringen over energie die in verschillende vormen "voorkomt" achteraf te baseren op ervaringen, waarbij aan waarge-

nomen veranderingen ruilwaarden worden toegekend. De ruilwaarde als een door ons toegekende waarde - in plaats van energie als iets wat in diverse vormen "voorkomt" - bleek bruikbaar als vertrekpunt voor verder onderwijs.
Het VWO heeft niet als eerste opdracht voor te bereiden op WO-thermodynamica-onderwijs. Men zou echter de eis kunnen formuleren dat *wat* er ook geleerd wordt in het VWO, zo gegrond en zo flexibel zou moeten zijn dat later gewenste aanvullingen en nuanceringen niet worden gehinderd. Kortweg, men zou zich kunnen voornemen om geen dogma's te onderwijzen.

Vanuit dit gezichtspunt zou het gewenst zijn te onderzoeken of in het VWO een ruilwaardentaal kan worden gegrond op ervaringen met veranderingen, gepaard aan de keuze twee veranderingen 'even veel waard' te noemen die wederzijds tegen elkaar blijken te kunnen worden ingewisseld. De interesse in zulke gelijk-waardige veranderingen kan naar verwachting ontstaan doordat de mogelijkheid van een eeuwigdurende beweging in zicht komt (2.8.1, 3.6), van een serie veranderingen zonder dat het iets kost.
Is deze interesse eenmaal onstaan, dan is naar verwachting een kwantitatief onderzoek naar verhoudingen tussen meetbare veranderingen gemotiveerd. Zodra hierbij diverse voorwerpen betrokken zijn, kan het nodig worden deze voorwerpen te karakteriseren door (constante) voorwerpseigenschappen die de gevonden verhoudingen blijken te bepalen. Hierdoor wordt het naar verwachting mogelijk de gewenste 'gelijke waarde' voor twee veranderingen kwantitatief uit te drukken als een produkt van een verandering en een constante: te noemen de variabele en zijn bijbehorende waarde-capaciteit, de waarde per eenheid van de verandering.

Twee routes naar energie en entropie
Vanaf dit moment kunnen we ons twee onderwijsroutes voorstellen. In de eerste voorstelbare route blijven we aandacht vragen voor omkeerbare 'ruil' en uitsluitend daarvoor. Er doet zich dan geen noodzaak voor onderscheid te maken tussen ruilwaarde - berekend gelet op de verhouding van twee veranderingen - en gebruikswaarde. 'Ruilwaarde' kan zich dan ontwikkelen tot uiteindelijk een term 'inwendige energie' welke nog steeds met nut vereenzelvigd kan blijven. De totale potentie voor verandering, dus ook voor arbeid, blijft in zo'n gedacht universum van reversibele processen immers constant: er heerst behoud van nut zowel als behoud van energie.
Vervolgens, dus nádat de eerste hoofdwet tot aan een begrip inwendige energie is ontwikkeld, zou men kunnen beginnen aan het karwei om studenten te overtuigen van de tweede hoofwet als **on**gelijkheid, en daarmee van de mogelijkheid dat 'vermogen tot arbeid' onterugwinbaar verdwijnt. Deze route noemden we route 1 (6.3.1) en de hier gerapporteerde experimenten volgden deze route: de vraag naar gebruikswaarde en de analogieredenering welke leidde tot entropie volgden ná de ontwikkeling van een term inwendige energie als toestandsgrootheid.

Wanneer in een onderwijsexperiment in het VWO de keuze om aan twee veranderingen een gelijke 'waarde' toe te schrijven gemotiveerd wordt door een opgemerkte omkeerbaarheid, dan ligt het voor de hand direct daarna de vraag aan de orde te stellen hoe we dan die gebeurtenissen beschrijven waarvan we de omkering nog niet kennen (3.7).
Het ligt dan voor de hand om voor die gebeurtenissen minstens te betwijfelen of in zo'n

geval aan twee veranderingen een 'gelijke waarde' kan worden toegeschreven. Kennen we tóch een gelijke waarde toe, gelet op de verhouding waarin de ruil plaatsvindt, dan ligt het wellicht voor de hand om voorzichtigheidshalve de toegekende 'ruilwaarde' te onderscheiden van de 'gebruikswaarde' die dan wellicht ongelijk te noemen is voor de twee betrokken veranderingen.
Vertrekkend vanuit deze ruilwaarde die nu niet meer vereenzelvigd is met nut of gebruikswaarde, kan men naar verwachting via aparte energiewaarden per energievorm komen tot inwendige energie (16.1 onder g). Het zoeken naar een geschikte maat voor gebruikswaarde kan naar verwachting tot een eerste oplossing komen via de analogieredenering welke leidt tot entropie. Deze route, waarbij energie op geen moment vanzelfsprekend wordt vereenzelvigd met nut of vermogen tot arbeid, noemden we route 2 (6.3.1). Het is deze route die we hier voorstellen verder uit te werken via een onderwijsexperiment in het VWO. Een zowel voor burgers als voor technici beter bruikbare relatie tussen energie en arbeid wordt als onderwijsresultaat verwacht.

Bij het ontwikkelen van ruilwaarden als termen in het VWO zou de volgende wijziging gewenst zijn ten opzichte van mijn laatst uitgevoerde experiment.
Bij het zoeken naar een geschikte berekeningswijze voor (ruil)waarde, gekoppeld aan de keuze van een eenheid, zouden nu ruilwaarden van tenminste drie verschillende variabelen als knooppunten in een relatienet moeten worden ontwikkeld, in plaats van slechts twee (6.3.2). Dit is nodig omdat het nu niet slechts gaat om een controle achteraf van formules die men al kent. Pas in een relatienet van drie termen kan immers het al dan niet kloppen (12.1) van de drie associaties - hier gelijkheden - tussen de drie termen de aandacht krijgen, die nodig is om tot de keuze van een eenheid te komen (6.3.2).

Van ruilwaarden naar inwendige energie
De ontwikkeling welke leidt van ruilwaarden van veranderingen naar uiteindelijk de inwendige energie van een systeem zou als volgt kunnen verlopen, deels afwijkend van mijn laatste experiment.
De stap van 'ruilwaarde van een verandering' naar 'energiewaarde van een toestand' - toestanden nog beschreven met een enkele variabele per energievorm - zou anders dan in mijn laatste experiment gemotiveerd moeten worden (5.3.6). Dit zou kunnen gebeuren door deze stap te laten samengaan met de overgang van constante ruilwaardecapaciteit naar een capaciteit die van zijn eigen variabele afhangt, bijvoorbeeld een thermische ruilwaardecapaciteit die afhangt van de temperatuur. Immers: de opgave een ruilwaarde te bepalen die afhangt van zowel begin- als eindtoestand kan worden vereenvoudigd zodra men ziet dat deze ruilwaarde steeds te berekenen is als een verschil van twee waarden die elk slechts van één toestand afhangen. Het zoeken naar $R(\theta_1, \theta_2)$ kan dan worden vervangen door het zoeken naar $E(\theta)$. Dit kan naar verwachting gebeuren zodra lerenden zien dat de ruilwaarden van drie toestands-veranderingen A $\rightarrow$ B, A $\rightarrow$ C en B $\rightarrow$ C tezamen een kloppend netwerk van drie verschil-relaties kunnen vormen met energiewaarden als knooppunten (12.5.2). Hierbij zouden naast ruilwaarden waarbij dit lukt - bijvoorbeeld ruilwaarde van een temperatuurverandering van een voorwerp bij constante druk - ook ruilwaarden aan de orde moeten komen waarbij dit niet lukt: de ruilwaarde van een plaatsverandering over een ruwe tafel.

Het kan dan zinvol worden om $E(\theta)$ te kunnen voorspellen op grond van een beperkt aantal gemeten ruilwaarden, namelijk om daarmee vele niet-gemeten ruilwaarden te kunnen voorspellen.
Een analogieredenering met een ander fysisch probleem kan dan naar verwachting leiden tot de wiskundige termen 'afgeleide' en 'primitieve' als overkoepelende termen (13.12). Een geschikt probleem zou kunnen zijn: het voorspellen van de verplaatsing van een voorwerp tussen de tijden t_1 en t_2 als het voorwerp beweegt met een niet-constante snelheid. De stap naar energiewaarden van toestanden van een voorwerp, beschreven met één variabele, zou daarmee zijn afgerond.

Vervolgens zouden situaties aan de orde kunnen komen waarin energie- of ruilwaardecapaciteiten kruislings van elkaars variabele afhangen en waar zo'n kruislingse afhankelijkheid door de leerlingen kan worden opgemerkt. Bijvoorbeeld: de chemische ruilwaardecapaciteit, in grootte gelijk aan $(\partial U/\partial \xi)_T$, hangt doorgaans af van de temperatuur en de thermische energiecapaciteit $(\partial U/\partial T)_\xi$ hangt meestal af van de vorderingsgraad van de reactie ξ. Naar verwachting zal dan blijken dat het nu niet lukt om aparte energiewaarden toe te schrijven aan 'energievormen', of aan toestanden beschreven met een enkele variabele. Vervolgens zou aandacht gevraagd kunnen worden voor de mogelijkheid een toestand te beschrijven met een combinatie van variabelen. Vervolgens kan gevraagd worden of het mogelijk is een totale energiewaarde toe te schrijven aan dergelijke toestanden (5.4.1). Zodra dit lukt kunnen we zeggen dat inwendige energie als toestandsgrootheid is begrepen.

Het bleek dat de overgang van toestanden van een voorwerp, beschreven met een enkele variabele, naar toestanden beschreven met een combinatie van variabelen dient gepaard te gaan met aandacht voor de keuze der systeemgrenzen. Anders gezegd: deze overgang houdt tevens de overgang in van gegeven 'voorwerp' naar gekozen 'systeem'. Hiermee was in mijn laatste experiment nog onvoldoende rekening gehouden (5.4.1).

De ontwikkeling welke leidt van ruilwaarden via aparte energiewaarden per energievorm naar inwendige energie zou deels in het VWO, deels in het WO kunnen plaatsvinden. Als het belangrijk wordt gevonden om uitspraken over energievoorraden die afnemen of opraken te kunnen interpreteren in een fysische context, dan is het nodig energiewaarden te kunnen koppelen aan toestanden. Immers 'afname' veronderstelt het vergelijken van toestanden voor en na. De overgang van 'ruilwaarde van een verandering' als procesgrootheid naar aparte energiewaarden per energievorm als *mogelijke* toestandsgrootheden zou dan al in het VWO gemaakt moeten worden, mits er geen vanzelfsprekendheid ontstaat dat dit steeds mogelijk zal zijn. Energiewaarden zouden dus, als zelf toegekende waarden, in de testfase moeten blijven. De overgang naar inwendige energie zou hierna in het WO zonder overbodige hindernissen kunnen volgen.
Om uitspaken over afnemen en opraken te kunnen interpreteren in een fysische context zou voorts een grove indeling van energievormen in nuttige en minder nuttige gemaakt kunnen worden. De uitspraak dat onze energievoorraden opraken is dan fysisch te interpreteren als een afname van de som der energiewaarden voor die energievormen die als nuttig worden beoordeeld.

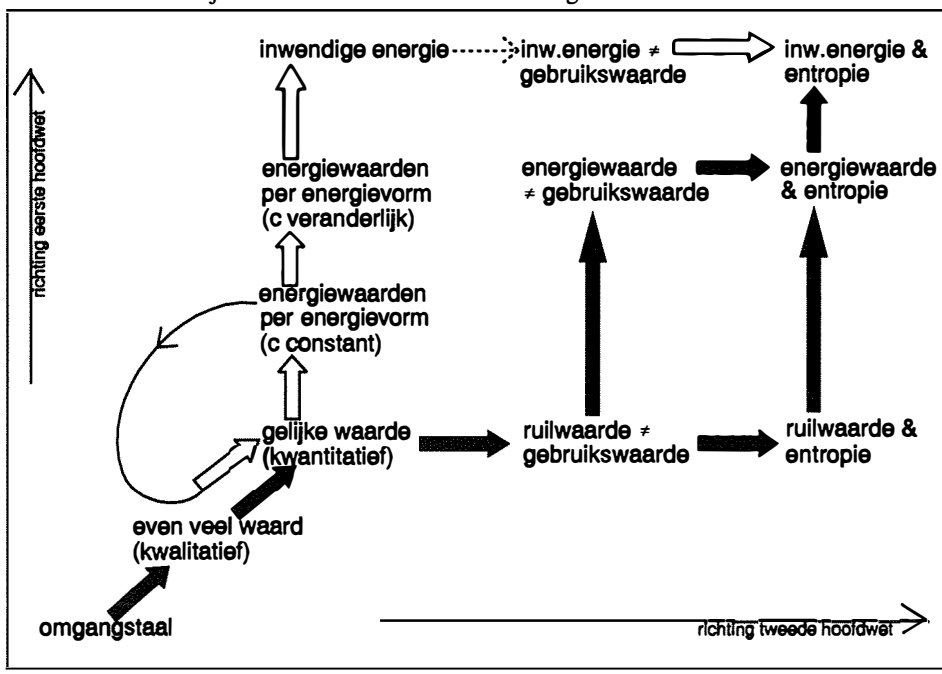
Als men het daarentegen belangrijk zou vinden om al in het VWO leerlingen te overtuigen

van het *bestaan* van energie als fysisch feit, in plaats van als een door mensen toegekende waarde, dan is het aan te bevelen dat de overgang naar inwendige energie al in het VWO plaatsvindt. Immers juist deze overgang levert een argument op om energie te gaan zien als iets dat ook buiten ons om bestaat (2.8.3).

Van gebruikswaarde naar entropie
Een meer verfijnde interpretatie van het maatschappelijk energieprobleem in fysische termen wordt mogelijk met de term entropie. Een indeling van energievormen in nuttige en minder nuttige kan als eindresultaat van VWO-onderwijs wellicht bruikbaar zijn, als stap op weg naar entropie is zo'n indeling echter niet bijzonder geschikt. Ze kan op zijn best leiden tot de vraag naar een nauwkeuriger beschrijving. Als immers de energie van een systeem niet steeds opgedeeld kan worden in aparte energievormen, dan zal de gebruikswaarde van een systeem niet steeds uit een beoordeling van energievormen afgeleid kunnen worden.
De 'gelijke waarde' voor twee veranderingen die tezamen plaatsvinden en die we alleen dán gelijk noemen als de ruil omkeerbaar blijkt, biedt een beter vertrekpunt. Zodra opgemerkt is dat de totale entropie alleen constant blijft bij processen die kunnen worden omgekeerd, terwijl ze in andere gevallen toeneemt, kan naar verwachting deze totale entropie als eenduidige maat gekozen worden voor de totale 'gebruikswaarde' in een geïsoleerd systeem.
Het plan voor de analogieredenering welke kan leiden tot entropie zou als volgt te wijzigen zijn in vergelijking tot mijn laatste experiment:
Bij het komen tot een één-op-één afbeelding van termen, gemotiveerd door gelijknamig geworden relaties, zou niet alleen aandacht besteed moeten worden aan grootheden als mogelijke termen. Er zou ook gezocht moeten worden naar gelijk te noemen relaties tussen de vier betrokken deelsystemen, waardoor wellicht 'bron', 'afvoerput', 'taak' en 'arbeid verrichtend systeem' de kwaliteit van term of van overkoepelende term kunnen krijgen (13.5). Hierdoor zou de noodzaak van ongemotiveerde ingrepen van de leraar afnemen (13.6) en de analogieredenering zou, nog meer dan nu het geval was, door keuzen van de lerenden ontstaan, waarbij toch verwacht kan worden dat een term ontstaat die wij herkennen als entropie.
Omdat de ontworpen analogieredenering welke leidt tot entropie gebruik maakt van situaties waar alle betrokken energiecapaciteiten als constant kunnen gelden - ook voor de nog te formuleren energievorm $T.\mathrm{d}S$, immers de beide reservoirs kenmerken zich door constante T - mag verwacht worden dat de stap naar inwendige energie niet hoeft te hebben plaatsgehad om te kunnen komen tot entropie.
Aangezien in geval van constante capaciteiten ruilwaarden naar verwachting even goed voldoen als energiewaarden (5.3.6), zou zelfs onderzocht kunnen worden of de analogieredenering welke leidt tot entropie al op basis van 'ruilwaarden van veranderingen' zou kunnen plaatsvinden. Zo niet, dan zou deze stap naar verwachting op basis van aparte energiewaarden per energievorm kunnen plaatsvinden.
Een derde optie, te wachten tot eerst inwendige energie ter sprake is gekomen werd hier uitgeprobeerd en is mogelijk gebleken. De twee nu gesuggereerde opties zijn interessant omdat daarmee de mogelijkheid zou ontstaan entropie als maat voor gebruikswaarde te laten ontstaan in het VWO. Een indeling van energievormen in nuttige en minder nuttige zou dan als tussentaal overbodig zijn. Het maatschappelijk 'energieprobleem' zou fysisch

geïnterpreteerd worden als een probleem van toenemende entropie.

Overzicht van uitgeprobeerde en voorgestelde stappen
De volgende figuur geeft een overzicht van de zojuist gesuggereerde onderwijsroutes, tezamen met de onderwijsroute die in dit onderzoek werd gerealiseerd.



Afbeelding 38: Schets van het gerealiseerde (▷) en van het nu voorgestelde (▸) onderwijsontwerp naar eerste en tweede hoofdwet.

De zwarte pijlen geven de zojuist gesuggereerde mogelijkheden weer.
De witte pijlen geven stappen aan die in dit onderzoek in (grotendeels) probleemstellend onderwijs mogelijk bleken.
De gestippelde pijl geeft een stap aan die wel in detail in de vorm van probleemstellend bedoelde opgaven ontworpen was, maar die door tijdgebrek vervangen werd door een voordracht. Van deze stap kan niet gezegd worden dat ze voldoende is uitgetest. Wel bleek de voordracht te voldoen om de daarop volgende stap naar entropie als toetsbaar vermoeden mogelijk te maken. Er moet echter nog worden nagegaan of deze entropie dan ook als maat voor gebruikswaarde kan functioneren voor studenten.
De kromme teruggaande pijl geeft aan dat, vertrekkend vanuit energievormen als aangeleerd resultaat van het VWO, eerst de primitievere term ruilwaarde werd ontwikkeld om zodoende energiewaarden als in de testfase verkerend ordeningsmiddel te laten functioneren voor studenten.

16.4. Ontwikkelingstaken die nog wachten

In ons onderzoek en in de hierboven gedane voorstellen zijn nog niet opgenomen de volgende belangrijke stappen:
1 - de overgang naar open systemen, met de introductie van de chemische potentiaal,
2 - de introductie van de drie hulpfuncties: enthalpie, Helmholtz- en Gibbs-vrije energie met hun natuurlijke variabelen,
3 - de stap naar de statistische mechanica.

Bij 1. De chemische potentiaal van stof A is te omschrijven als de energieverandering van een systeem per mol toegevoegde stof A, bij gegeven entropie en volume.
Om het belang van de chemische potentiaal voor de chemie te kunnen zien is een redenering nodig die gebruik maakt van inwendige energie als toestandsgrootheid. Men moet dan namelijk zien dat dezelfde toestandsverandering die bewerkstelligd wordt door een chemische reactie in een gesloten systeem, ook bewerkt kan worden door dit systeem te openen, de reactanten weg te nemen en de produkten toe te voegen. Vervolgens moet men er op vertrouwen dat het voor de verandering der inwendige energie niet uitmaakt, welke van beide wegen gevolgd wordt. Een dergelijke redenering is naar verwachting voorbereid zodra inwendige energie als toestandsgrootheid is begrepen.

Bij 2. Een geschikte basis voor de drie hulpfuncties wordt aanwezig geacht zodra studenten de entropie als energievariabele verkiezen boven de temperatuur, dus als een keus voor de 'natuurlijke variabelen' van de energie gemaakt kan worden (5.2.5).

Bij 3. Een geschikte basis voor een statistische interpretatie van entropie wordt aanwezig geacht zodra entropie een meetbare grootheid (q_{rev}/T) is geworden voor studenten. De statistische interpretatie van entropie werd eerder geanalyseerd als analogieredenering (4.3). Dit betekent dat inzicht in het basisdomein - ervaringen met toevallige verdeling van voorwerpen over een in hokjes verdeeld veld - de kwaliteit van beschrijvend niveau verkregen moet hebben (8.6). De statistiek zou dus uit ervaringen met voorwerpen ontstaan zijn, alvorens toepassing op het doeldomein gevraagd kan worden. De te maken keuzen (4.3) welke relaties van het basisdomein zijn af te beelden naar het doeldomein zullen naar verwachting georganiseerd kunnen worden door te zoeken naar geschikte overkoepelende termen.

16.5. Een werkwijze voor onderwijs vernieuwen

De werkwijze die hier werd gevolgd bij het vernieuwen van onderwijs voldoet aan het principe dat we formuleerden in verband met de Van Hiele niveaus: "Men moet gehandeld hebben alvorens dat handelen tot onderwerp van analyse te kunnen maken" (7.4). Immers de eerste diagnose van problemen volgde op het meedoen in bestaand onderwijs, dus op handelen dat nog niet gemotiveerd was door veel eigen uitgesproken overwegingen.
Het beschrijven van een onderwijsprobleem gebeurt in een taal en deze taal suggereert ook oplossingen. Zo werden in het voorafgaande diverse onderwijsproblemen en hun oplossin-

gen beschreven in een taal met als enige afgesproken term het woord 'tussentaal', geïntroduceerd in hoofdstuk 1.
Andere onderwijsproblemen en hun oplossingen werden besproken met gebruik van een meer uitgebreid net van didactische termen zoals 'term', 'relatie', 'kloppend relatienet', 'associatie', 'overkoepelende term'.
Het op deze wijze vernieuwen van onderwijs wordt door De Miranda[155] beschreven met een cyclus van drie fasen: handelen, leren en kiezen.*),[156]
Handelen houdt hier in het handelen van de onderwijzende of langer-lerende in gesprek met korter-lerenden, maar ook het voorbereidende handelen zoals het maken van een opgavenserie kan men ertoe rekenen.
Leren vindt in elk van deze drie fasen plaats, maar het meest opvallend is het leren zodra de bevindingen opgedaan bij het handelen worden verwoord. Dit gebeurt in eerder gebruikte, of in min of meer nieuwe taal, al naar de behoefte. Doet men behalve aan onderwijsvernieuwing ook nog aan didactisch onderzoek, dan wordt deze taalverandering niet aan de intuïtie overgelaten maar wordt voorwerp van overweging, zoals in dit proefschrift gebeurde in deel 3. Voor onderwijsvernieuwing op zichzelf is dit wellicht echter niet nodig.
Met *kiezen* wordt hier bedoeld dat de uit eerdere ervaring getrokken conclusies weliswaar richtlijnen opleveren voor een vervolg, maar dat hiermee dit vervolg toch nog niet in detail duidelijk hoeft te zijn. Er zijn dus keuzen te maken. Deze keuzen zullen deels uitgesproken worden, deels als intuïties en vooroordelen impliciet blijven.
De hierna volgende handelingsfase biedt een volgende kans om opnieuw tegen enige impliciete vooroordelen aan te lopen, die dan door uitgesproken naoordelen vervangen kunnen worden.

*) Een eerdere versie van dit schema is te vinden bij De Miranda en De Haan[156] (p.26-28). Daar worden genoemd: Ontwerpen, Uitvoeren, Evalueren (OUE), en de overgang van OUE (projectmatig innoveren) naar EOU (proces-innovatie) wordt beschreven: evalueren komt voorop te staan. In de nu voorgestelde derde versie van dit schema wordt echter de U (uitvoeren) voorop gezet, UEO, hetgeen juist is want de evaluatie van bestaande praktijk werd immers mogelijk door *meedoen* in die bestaande praktijk. Vervolgens werden beter passende woorden gekozen: 'handelen' in plaats van het slaafse 'uitvoeren', etcetera.

Referenties

1. Bent, H. A. (1970), "The Second Law - How Much, How Soon, to How Many?". *J.Chem.Ed. 47*, 337-341.
2. Gerhartl, F.J. (1994), "The A + B ⇌ C of Chemical Thermodynamics". *J.Chem.Ed. 71*, 539-548.
3. Tykodi, R.J. (1995), "Spontaneity, accessibility, irreversibility, 'useful work'". *J.Chem.Ed. 72*, 103-112.
4. Carpenter, D.K. (1996), "A controversy about the Gibbs function: Introduction to the paper symposium". *J.Chem.Ed. 73*, 384-386.
5. Schaefer, B.A. (1970), "Thermodynamic potentials". *J.Chem.Ed. 47*, 745-750.
6. Lee Hong Yi (1994), "A new approach to entropy and the thermodynamic temperature scale". *J.Chem.Ed. 71*, 853-854.
7. Kildahl, N.K. (1994), "Journey around a phase diagram". *J.Chem.Ed. 71*, 1052-1055.
8. Guémez, J.; S. Velasco en M.A. Matias (1995), "Thermal coefficients and heat capacities in systems with chemical reactions". *J.Chem.Ed. 72*, 199-202
9. Strong, L.E. en H.F. Halliwell (1970), "An alternative to free energy for undergraduate instruction". *J.Chem.Ed. 47*, 347-352.
10. Moore, G.S.M. (1993), "General, restricted and misleading forms of the first law of thermodynamics". *Phys. Educ. 28*, 228-237.
11. Feiner, A.S. en A.J. Mc. Evoy (1994), "The Nernst equation". *J.Chem.Ed. 71*, 493-494.
12. Liang Yi, Kuang Sheng-Lu en QuSong-Sheng (1995), "Some views on the Internal Energy and Enthalpy of Gases". *J.Chem.Ed. 72*, 408.
13. Beall, H. (1994), "Probing student misconceptions in thermodynamics with in-class writing". *J.Chem.Ed. 71*, 1056-1057.
14. Sprang, H.F. van; P.H. van Roon en A.H. Verdonk (1988), "Enthalpie in VWO-Chemie?". *TDß 6*, 220-230.
15. Ross, K.A. (1993), "There is no energy in food and fuels - but they do have fuel value". *School Science Review 75* (no. 271), 39-47.
16. Gilham, E.J. (1995), "Some notes on the teaching of A-level thermodynamics". *Phys. Educ. 30*, 100-103.
17. Terpstra, K.J.; H.F. van Sprang en A.H. Verdonk (1989), "Hoe warm het was en hoe ver". *TDß 7*, 3-26.
18. Arnold, M. en R. Millar (1994), "Children's and lay adults' views about thermal equilibrium". *Int.J.Sci.Educ. 16*, 405-419.
19. Goldring, H. en J. Osborne (1994), "Students' difficulties with energy and related concepts". *Phys. Educ. 29*, 26-31.
20. Solomon, J. (1982), "How children learn about energy - or: Does the first law come first?". *School Science Review 1982*, 415-422.
21. Ogborn, J. (1990), "energy, change, difference and danger". *School Science Review 72* (259), 81-85.

22. Stylianidou, F. (1993), "The concept of energy and its teaching". In: P.L. Lijnse (ed.), *European research in schience education* Proceedings of the first Ph.D. Summerschool. Utrecht: CD-ß Press, p.255-259.
23. Duit, R. (1984), "Is the second law of thermodynamics easier to understand than the first law?". *TDß 2*, 102-111.
24. Vecht, J.R. van der (1991, 1996), *Examenbundel VWO scheikunde 1984 - 1991* en *1989-1996*. Leiden: uitgeverij Onderwijspers.
25. Vakontwikkelgroep biologie/natuurkunde/scheikunde (1995), *Advies examenprogramma havo/vwo, biologie, natuurkunde, scheikunde*. Den Haag: Stuurgroep profiel tweede fase (p.261-293).
26. Voorde, H.H. ten (1991), *Van leek naar wetenschappelijk chemicus*. Amsterdam: Werkgroep Didactiek der Scheikunde, Universiteit van Amsterdam (Notitie van de werkgroep 'Didactiek der Scheikunde' gericht aan de Faculteit Scheikunde, UvA).
27. Hawkes, S.J. (1995), "How to teach ionic equilibria in introductory chemistry without lying". *Int. Newsletter on Chem. Educ. 44* (dec. 1995), 7-8.
28. Genderen, D. van (1989), *Mechanica - onderwijs in beweging*. Utrecht: Uitgeverij W.C.C. (proefschrift UU).
29. Valk, A.E. van der (1992), *Ontwikkelingen in energieonderwijs, een onderzoek naar begripsontwikkeling bij VWO-leerlingen in realiteitsgericht natuurkundeonderwijs*. Utrecht: CDß-Press (proefschrift UU).
30. Hiele, P.M. van (1957), *De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof*. Groningen: J.B. Wolters (proefschrift UU).
31. Hiele-Geldof, D. van (1957), *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O*. Groningen: J.B. Wolters (proefschrift UU).
32. Hiele, P.M. van (1955), "De niveaus in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.". *Paedagogische Studiën 32*, 290.
33. Piaget, J. (1955), "Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence". In: J. Piaget, E.W. Beth e.a. *L'enseignement des mathematiques*, Neuchatel-Paris.
34. Hiele, P.M. van (1960), "De niveaustruktuur in de argumentatie". In: *Uit-WEI-dingen*, Werkgroep empirische inleiding, 1973, H 1960 1-10.
35. Voorde, H.H. ten (1977), *Verwoorden en verstaan*. SVO-reeks no. 6. 's Gravenhage: Staatsuitgeverij (proefschrift UvA).
36. Joling, E. (1993); *Chemie in gesprek*. Amsterdam: Thesis Publishers (proefschrift UvA).
37. Kaper, W.H. en H.H. ten Voorde (1991), "Problemen in de begripsontwikkeling in relatie tot de aanpak van docent en studieboek-schrijver". *TDß 9*, 3-28.
38. Klaassen, C.W.J.M. (1995), *A problem-posing approach to teaching the topic of radioactivity*. Utrecht: Cd-ß Press (proefschrift UU).
39. Pieren, L.O.F.; H.G.M. Scholte, J.W. Smilde, E.H.M. Vroemen en W. Davids, (1989), *Chemie 3 VWO/havo*, derde druk. Groningen: Wolters Noordhoff.
40. Pieren, L.O.F.; H.G.M. Scholte, J.W. Smilde, E.H.M. Vroemen en W. Davids, (1992), *Chemie 5 VWO*, derde druk. Groningen: Wolters Noordhoff.
41. Vakgroep didactiek natuurkunde en Vereniging DBK-na (1989), *DBK-na, natuurkunde voor de tweede klas*. Den Bosch: Malmberg.

42. Vereniging DBK-na, Vakgroep didactiek natuurkunde VU (1990), *DBK-na, natuurkunde voor de derde klas*. Den Bosch: Malmberg.
43. Vereniging DBK-na, Vakgroep didactiek natuurkunde VU (1991), *DBK-na, natuurkunde voor de vierde klas*. Den Bosch: Malmberg.
44. Reiding,J.; P.W. Franken en M.A.W. Kabel-van den Brand (1992), *Chemie overal 3HV*, tweede druk. Culemborg: Educaboek.
45. Reiding,J.; P.W. Franken en M.A.W. Kabel-van den Brand (1993), *Chemie overal 5V*, tweede druk. Culemborg: Educaboek.
46. Storm van Leeuwen, J.W. (1990), *Scheikunde 3V*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
47. Storm van Leeuwen, J.W. (1993), *Scheikunde 5V*. Chaam: Ceedata.
48. Hogenbirk, P.G. en K. Walstra (1989), *Natuurkunde overal 2MHV*, eerste druk. Culemborg: Educaboek.
49. Hogenbirk, P.G. en K. Walstra (1991), *Natuurkunde overal 4V*, eerste druk. Culemborg: Educaboek.
50. Biezeveld, H. en L. Mathot (1990), *Scoop, Natuurkunde voor de bovenbouw 4/5 VWO*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
51. Jonge, R. de; F.H. Peters, R. Langras, H.R. Leene en J.L.M. Geurts (1993), *Nu voor straks, Natuur en scheikunde voor de basisvorming 1MHV*, eerste druk. Zutphen: Thieme.
52. Crommentuijn, J.L.M.; E. Wisgerhof en A.J. Zwarteveen (1993), *BANAS, BAsisvorming NAtuur Scheikunde 1*. Voorschoten: Uitgeverij Educatief.
53. Alberty, R.A. en R.J. Silbey (1992), *Physical Chemistry*, first edition. New York: John Wiley & Sons.
54. Jong, R. de (1994), brief aan W. Kaper d.d. 26 september 1994.
55. Somers, T. (1992), *Een dwingende samenhang van termen*. Amsterdam: werkgroep Didactiek der Scheikunde (hoofdvakstage-verslag).
56. Pushkin, D.B. en T.F. Zeng (1995), "Using computer interfacing to graphically illustrate phases of water". *Phys. Educ. 30*, 81-85.
57. Atkins, P.W. (1990); *Physical Chemistry*, fourth edition. Oxford: Oxford University Press.
58. Kaper, W.H. (1993), *Tussentijds verslag 2*, intern stuk d.d. 15 juli 1993, p.19.
59. Sprang, H.F. van; en J.H. Sluyters (1990), "Pseudothermodynamica in VWO Examen". *Chemisch Weekblad 86*, nr.26/27, 28 juni 1990.
60. Kesidou, S. en R. Duit (1991), "Wärme, Energie, Irreversibilität - Schülervorstellungen im herkömmlichen Unterricht und im Karlsruher Ansatz". *Physica Didactica 18*, no. 2/3, 57-75.
61. Berg, E. van de; W. Grosheide, J. Breedijk en A. Schouten (1995), "Misconcepties, elektriciteit, energie en basisvorming". *NVOX 20* (1995), 257-260.
62. Roon, P.H. van; H.F. van Sprang en A.H. Verdonk (1994), "'Work' and 'Heat': on a road towards thermodynamics" *Int.J.Sci.Educ. 16*, 131-144.
63. Mach, Dr. E. (1919), *Die Principien der Wärmelehre*. Leipzig: Verlag von Johann Ambrozius Barth.
64. Piaget, J. (1964), "Development and learning". In: R.E. Ripple and V.N. Rockcastle (eds.), *Piaget rediscovered - A report of the conference on cognitive studies an curriculum development, March 1964*. Ithaca: Cornell University, 1964, p.7-20.
65. Ganter, M. (1994), "Impuls und Energie aus dem Geist des Erhaltungsdenkens". *Praxis der Naturwissenschaften - Physik 43*, no.1, 19-23.

66. Vos, W. de, "Seven thoughts on teaching molecules" (1990). In: P.L. Lijnse, P. Licht, W. de Vos en A.J. Waarlo (eds.) *Relating macroscopic phenomena to microscopic particles; A central problem in secondary science education*, Proceedings of a seminar. Utrecht: CD-beta Press, p.163-171.
67. Lanzara, E. en R. Zangara (1995), "Potential difference measurements in the presence of a varying magnetic field". *Phys. Educ. 30*, 85-89.
68. Solomon, J. (1992), *Getting to know about energy - in school and society*. London: The Falmer Press. (p.144-146)
69. Nicholls, G. en J. Ogborn, "Dimensions of children's conceptions of energy". *Int.J.Sci.Educ. 15*, 73-81.
70. Lehrman, R.L. (1973), "Energy Is Not The Ability To Do Work". *The Physics Teacher 11*, 15-18.
71. Sexl, R.U. (1981), Some observations concerning the teaching of the energy concept. *Eur.J.Sci.Educ. 3*, 285.
72. Warren. J. (1982), "The nature of energy". *Eur.J.Sci.Educ. 4*, 295-297.
73. Geerts, G. en H. Heestermans (1995), *Van Dale groot woordenboek der Nederlandse taal*, twaalfde druk in de nieuwe spelling. Utrecht: Van Dale lexicografie. (p.2029)
74. Sutton, C. (1993), "Figuring out a scientific understanding". *J.Res.Sci.T. 30*, 1215-1227.
75. Clapeyron, E. (1834), *Abhandlung über die bewegende Kraft der Wärme*, vertaling door K. Schreber van: "Sur la puissance motrice de la chaleur" (serie: Ostwalds klassiker), Leipzig: Akademischer Verlagsgesellschaft, 1926, p.36.
76. Joule, J.P. (1845), "On the changes of temperature produced by the rarefaction and condensation of air". *Philosophical Magazine*, ser. 3, may 1845.
77. Lewis, E.L. en M.C. Linn (1994), "Heat energy and temperature concepts of adolescents, adults and experts: implications for curricular improvements". *J.Res.Sci.T. 31*, 657-677.
78. Carnot, S. (1824), *Reflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance.* Edition critique par R. Fox, Paris: J. Vrin, 1978.
79. Gentner, D. (1983), "Structure-mapping: a theoretical framework for analogy", *Cognitive Science 7*, 155-170.
80. Duit, R. (1990), "On the role of analogies and metaphors in learning science". *Science Education 75*, 649-672.
81. Hadfield, M. (1994), "Entropie, im Nuffield Advanced Level Chemistry Scheme". *Praxis der Naturwissenschaften - Chemie 43* (2), 13-16.
82. Chandler, D. (1987), *Introduction to modern statistical mechanics.* New York, Oxford: Oxford University Press.
83. Grad, H. (1961), "The many faces of entropy", *Communications on pure and applied mathematics XIV*, 323-354.
84. Jones, D.G.C. (1991), "Teaching modern physics - misconceptions of the photon that can damage understanding". *Phys. Educ. 26*, 93-98.
85. Einstein, A. (1905), "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt". *Annalen der Physik 17*, 132-148.
86. Thomson, W. (1852), "On the Dynamical Theory of Heat, with numerical results deduced from Mr. Joule's equivalent of a Thermal Unit, and Mr. Regnault's Observations on Steam". *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of*

Science IV (fourth series), p.8-20 (part I), 105-117 (II), 168-176 (III), 424-433 (IV).
87. Brieven J61 en J62 uit de "Kelvin Papers", Mss. Add. 7342, bewaard in de Cambridge University Library.
88. Herrmann, F. (1989), *Physik, Unterrichtshilfen.* Teil 1, Auflage November 1989. Karlsruhe: Institut für Didaktik der Physik der Universität Karlsruhe. (p.6-13 en 54-58)
89. Sanchez, K.S. en R.A. Vergenz (1994), "Understanding entropy using the fundamental stability conditions". *J.Chem.Ed. 71*, 562-566.
90. Niedderer, H. (1993), "Wirkungsgrad und 2-er Hauptsatz". Voordacht gehouden op de GDCP-Zwischentagung No. 4, *Thermodynamik in der Sekundarstufe II*, Bremen: 1-2 maart 1993 (geen proceedings verschenen).
91. Redlich, O. (1970), "Terminology reexamined: intensive and extensive properies". *J.Chem.Ed. 47*, 154-156.
92. Somers, T. (1992), *Misconcepties rond de thermodynamische begrippen warmte, arbeid en energie.* Amsterdam: Didactiek der Scheikunde UvA (scriptie).
93. Karpinski, W. "Cognitive Structures and the teaching results of chemical thermodynamics". In: A. Bargellini & P.E. Todesco (eds.), *Proceedings ATTI, 2nd European Conference on Research in Chemical Education (ECRICE)*, 11-14 september 1993 te Pisa. Pisa: University of Pisa, 1994.
94. Wilson, J.M. (1994), "Network representations of knowledge about chemical equilibrium: variations with achievement". *J.Res.Sci.T. 31*, 1133-1147.
95. Pendley, B.D.; R.L. Bretz en J.D. Novak (1994), "Concept maps as a tool to assess learning in chemistry". *J.Chem.Ed. 71*, 9-15.
96. Lybeck, L. *et al.* (1988), "The phenomenography of the 'mole concept' in chemistry". In: P. Ramsden (ed.), *Improving learning - new perspectives".* London: Kogan Page Ltd., 1988, p.81-108.
97. Mills, I.; T. Cvitas, K. Homann, N. Kallay en K. Kuchitsu voor de International Union of Pure and Applied Chemistry (1993), *Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry.* Oxford: Blackwell Scientific Publications.
98. Kaper, W., W. de Vos en H. ten Voorde (1988), "Het onderzoek van lijn 2". In: Van Soest *et al.*, *Chemie mavo, onderzoek naar het functioneren van een leergang scheikunde*, Amsterdam: Stichting Centrum voor Onderwijsonderzoek, SCO rapport 161, pp.73-313.
99. Kaper, W.H. (1989), *'Gebruiksvorm' van een lestekst en 'begripsontwikkeling'*. Amsterdam: Didactiek der scheikunde UvA (hoofdvakstageverslag), pp.2-4 en 26-34.
100. Kaper, W.H. en H.H. ten Voorde (1992), "De probleemstellende onderwijssituatie". *TDß 10*, 3-30.
101. Sutton, C.R. (1980), "The learner's prior knowledge: a critical review of techniques for probing its organisation". *Eur.J.Sci.Educ. 2*, 107-120.
102. Scharf, V. (1983), "Das 'Eleatische Dilemma' und die Krise des Chemieunterrichts". *Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht 36*, (3), 140-149.
103. Vogelezang, M.J. (1990), *Een onverdeelbare eenheid.* Utrecht: CDß-pers.
104. Jong, R. de (1991), *Ontwerp van een structuur voor proto-chemie.* Concept hoofdstuk 2 van een proefschrift in voorbereiding, versie: januari '91.
105. Hiele, P.M. van (1986), *Structure and Insight.* Orlando: Academic Press.
106. Voorde, H.H. ten (1990), "Komen tot kennis van en tot inzicht in eigenschappen van materialen en stoffen". In: K.Th. Boersma *et al.* (eds.), *Begripsontwikkeling in het vak natuur- en scheikunde in de basisvorming.* Enschede: Instituut voor de leerplanontwikke-

ling, p.151-176.
107. Wiser, M. en S. Carey (1983), "When heat and temperature were one". In: D. Gentner and A.L. Stevens (eds.), *Mental models.* Hillsdale N.J.: Erlbaum, p.267-297.
108. Larkin J.H. (1983), "The role of problem representation in physics". In: D. Gentner & A.L. Stevens (eds.), *Mental models.* Hillsdale N.J.: Erlbaum, p.75-98.
109. Gentner, D. en D.R. Gentner (1983), "Flowing waters and teeming crowds: mental models of electricity". In: D. Gentner and A.L. Stevens, *Mental models*, Hillsdale N.J.: Erlbaum, p.99-129.
110. Gentner, D. (1988), "Metaphor as Structure Mapping: The Relational Shift". *Child Development 59*, 47-59.
111. Glashow, S.L. (1979), "Toward a unified theory: Threads in a tapestry". Nobel prize lecture; Stockholm, december 1979. Reprinted in *Science 210*, 1319-1323.
112. Wong, D.E. (1993), "Understanding the generative capacity of analogies as a tool for explanation". *J.Res.Sci.T. 30*, 1259-1272.
113. Gick, M.L. en K.J. Holyoak (1983), "Schema induction and analogical transfer". *Cognitive Psychology 15*, 1-38.
114. Clement, J. (1993), "Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students preconceptions in physics". *J.Res.Sci.T. 30*, 1241-1257.
115. Brown, D.E. (1993), "Refocussing core intuitions: A concretising role for analogy in conceptual change". *J.Res.Sci.T. 30*, 1273-1290.
116. Stavy, R. en D. Tirosh (1993), "When analogy is perceived as such". *J.Res.Sci.T. 30*, 1229-1239.
117. Miranda, J. de (1962), "De structuur van de onderwijssituatie als basis voor de opbouw van de didactiek". *Paedagogische Studiën 39*, 532-557.
118. Svajcer, V. (1986), "Recht und Los des 'nichtkommunikativen' Kindes im Unterricht". In: A. Weber (ed.), *Kooperatives Lehren und Lernen in der Schule.* Heinsberg: Agentur Dieck, p.139-146.
119. Blankertz, H. (1973), *Didactiek, theorieën en modellen*, hoofdstuk 2 "Informatietheoretische modellen". Utrecht/Antwerpen: Het spectrum (Aula reeks, deel 507), p.54-94.
120. Brown, J.S.; A. Collins en P. Duguid (1989), "Situated Cognition and the Culture of Learning". *Educational Researcher*, jan-febr 1989, 32-42.
121. Aalsvoort, J.G.M. van; Proefschrift in voorbereiding.
122. Oers, B. van (1988), "Modellen en de ontwikkeling van het (natuur) wetenschappelijk denken bij leerlingen". *TDß 6*, 115-143.
123. Mettes, C.T.C.W. en A. Pilot (1980), *Over het leren oplossen van natuurwetenschappelijke problemen.* Enschede: Onderwijskundig Centrum UT (Proefschrift UT).
124. Palincsar, A.S. (1989), "Less chartered waters; responses to Brown, Collins and Duguids 'situated cognition and the culture of learning'". *Educational Researcher 18*, (4), 5-7.
125. Lampert, M. (1986), "Knowing, doing and teaching multiplication". *Cognition and instruction 3*, 305-342.
126. Miranda, J. de (1955), *Verkenning van de 'Terra Incognita' tussen practijk en theorie in Middelbaar (Scheikunde-) Onderwijs.* Tweede druk 1980 (discoreeks no. 2). Amsterdam: Didaktiek der Scheikunde, Universiteit van Amsterdam.

127. Aalsvoort, J.G.M. van; W. de Vos en A.H. Verdonk (1994), "Is het probleem van de wetenschapsgebondenheid van de schoolscheikunde op te lossen met behulp van de activiteitstheorie van Leont'ev?". *TDß 12*, 35-57.
128. Keulen, H. van (1995), *Making sense; Simulation-of-research in Organic Chemistry Education*. Utrecht: CD-ß Press (proefschrift UU).
129. Lijnse, P.L. (1995), "'Developmental research' as a way to an empirically based 'didactical structure' of science". *Science Education 79*, 189-199.
130. Adviescommissie curriculumherziening van het bestuur van de Faculteit Scheikunde UvA (1977), *De basis voor een nieuw programma*; voorstel voor een nieuw curriculum opleiding Scheikunde, januari 1977.
131. Adviescommissie "vaardigheden en actieve werkvormen" (1996) *Voorbereiden op de praktijk*; advies aan het bestuur van de Faculteit Scheikunde UvA door, 7 oktober 1996.
132. Kramers-Pals, H.; P. Schinkelshoek en W. Vos (1995), *CT-P Studiewijzer*. Faculteit Chemische Technologie van de Universiteit Twente.
133. Lakatos, I. (1970), "Falsification and the methodology of Scientific Research Programmes". In: I. Lakatos en A. Musgrave, *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge: University Press, p.91-196.
134. Kuhn, T.S. (1970), "The structure of scientific revolutions", 2nd ed., Chicago: University of Chicago Press.
135. Popper, K.R. (1970) "Normal science and its dangers". In: I. Lakatos en A. Musgrave (eds.) *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge: university press, p.51-58, speciaal p.52 onderaan.
136. Toulmin, S. (1970), "Does the distinction between normal and revolutionary science hold water?". In: I. Lakatos en A. Musgrave (eds.) *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge: university press, p.39-48.
137. Davidson, D. (1980), *Essays on action and events*. Oxford: Oxford university press.
138. Davidson, D. (1984), *Inquieries into truth and interpretation*. Oxford: Oxford university press.
139. Voorde, H.H. ten (1983), "Die Kluft des Nicht-verstehen-könnens: Ein Problem des Unterrichtens". *Chimica Didactica 9*, 138-175.
140. Redeker, B. (1990), *Einführende Verständigung und Beilspielverstehen, zum Entstehen neuen Wissens*. Voordracht ter gelegenheid van het Didactisch Colloquium, 15 december 1988 te Amsterdam. Amsterdam: Didactiek der Scheikunde UvA.
141. Muller, F. en J.H. Thiel, *Beknopt Grieks-Nederlands woordenboek*, derde druk. Groningen-Batavia: J.B. Wolters uitgevers-maatschappij.
142. Posner, G.; K.A. Strike, P.W. Hewson en W.A. Gertzog (1982), "Accomodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change". *Science Education 66*(2), 211-227.
143. Licht, P. (1987), "De ontwikkeling van een onderwijsstrategie om begrips- en redeneerproblemen in het elektriciteitsonderwijs te verminderen". Een paper voorbereid voor de onderwijsresearchdagen 1987, 26 en 27 mei te Groningen.
144. Scharf, V. en H.M. Fuchs (1989), "Wissenschaftstheoretisch und psychologisch begründete Modelle als Basis für Forschungsvorhaben über Beziehungen zwischen Alltagsvorstellungen und Theorien der Wissenschaft Chemie". Manuscript van een lezing, gehouden op de *GDCP-Tagung*, Kassel, 1989.

145. Scharf, V. en H.M. Fuchs (1990), "Wissenschaftstheoretisch und psychologisch begründete Modelle als Basis für Forschungsvorhaben über Beziehungen zwischen Alltagsvorstellungen und Theorien der Wissenschaft Chemie". In: K.H. Wiebel (ed.), *Zur Didaktik der Physik und Chemie*, Vorträge auf der Tagung der GDCP, Kassel, 1989. Alsbach: Leuchtturm Verlag.
146. Wittgenstein, L. (1976), "Filosofische onderzoekingen" (vert. van "Philosophische Untersuchungen", 1953, uit het Duits door H.W. Bakx). Meppel: Boom.
147. Rozier, S. en L. Viennot (1990), "Students reasoning in thermodynamics". *TDß 8*, 3-18.
148. Voorde, H.H. ten (1990), "Niveauerhöhung und Lehrphasen in dem Übergang von der Alltagssprache zur Fachsprache im Chemieunterricht". Voordracht gehouden op de GDCP-Tagung in Oldenburg, 1986. In: H.H. ten Voorde (ed.) *Auf dem Weg zur didaktischen Struktur der Chemie*, Ein Sammelband von Vorlesungen und Veröffentlichungen während einer 10-jährige Teilnahme an den GDCP-Tagungen (1983-1992). Amsterdam: Didactiek der Scheikunde,
UvA, p.51-70. Samenvatting in: K.H. Wiebel (ed.), *Zur Didaktik der Physik und Chemie*, Vorträge auf der Tagung für Didaktik der Physik/Chemie in Oldenburg, september 1986. Alsbach: Leuchtturm Verlag, 1987.
149. Verslag van een openbare werkbespreking met P.M. Van Hiele, "Pluriform denken in het onderwijs", Amsterdam, 14 januari 1988. Amsterdam: Werkgroep Didactiek der Scheikunde, p.10.
150. Hiele, P.M. van (1973), "Begrip en inzicht". Purmerend: Muusses.
151. Hiele, P.M. van (1957), "Het passeren van een denkniveau", inleiding voor de studiekring voor Algemene Didaktiek te Utrecht, 15-11-1957. In: *Uit-WEI-dingen*, Werkgroep Empirische Inleiding, 1973. Volgende drukken Amsterdam: werkgroep didactiek der Scheikunde UvA.
152. Miranda, J. de (1991), "Gesprek". *TDß 9*, 132-141.
153. Roest, J.F. (1968), "Onderwijzen en bezinning op weten". In: J. de Miranda (ed.), *Didaktiek: een gesprekswetenschap*, discoreeks no. 7. Amsterdam: werkgroep Didactiek der Scheikunde, 1985.
154. Voorde, H.H. ten (m.m.v. J. de Miranda) (1979), "Empirische didaktiek (IV), Van grondniveau naar beschrijvend niveau in scheikunde-onderwijs: reaktie-individu als direkte ervaring". *Faraday 48*, 117-129. Later opgenomen in: H.H. Ten Voorde (ed.), *Niveauverhogend Scheikunde-onderwijs ten behoeve van het Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs*. Discoreeks, no. 3. Amsterdam: werkgroep Didactiek der Scheikunde UvA, 1981, p.48-60.
155. Miranda, J. de (1993), *Een toekomstvisie op de P.v.d.A.* Schets voor gebruik in kleine kring, niet gepubliceerd.
156. Miranda, J. de; en J.A.C. de Haan (1991), *Onderwijsinnovatie als organisatorisch probleem; een procesmatige benadering*. Reeks "ter discussie", no. 91.2. Tilburg: Faculteit der Economische wetenschappen, KUB.

Indexen

I. Index op de referenties

De referenties zijn hieronder alfabetisch geordend op de eerste auteur. De nummers in superscript verwijzen naar de lijst "Referenties".

a

Aalsvoort, J.G.M. van[121] 205
Aalsvoort, J.G.M. van[127] 206
Adviescommissie[130] 208
Adviescommissie[131] 208
Alberty, R.A.[53] 16, 17, 20, 78, 82
Arnold, M.[18] 1, 29
Atkins, P.W.[57] 23, 56, 57, 60-62, 77, 78, 80-82, 84

b

Beall, H.[13] 1, 17, 29
Bent, H.A.[1] 1, 92, 93
Berg, E. van de[61] 29, 37
Biezeveld, H.[50] 16, 18, 58
Blankertz, H.[119] 204
Brown, D.E.[115] 190, 192
Brown, J.S.[120] 204-206

c

Carnot, S.[78] 69, 85
Carpenter, D.K.[4] 1
Chandler, D.[82] 78
Clapeyron, E.[75] 57
Clement, J.[114] 190
Crommentuijn, J.L.M.[52] 16, 58

d

Davidson, D.[137] 212
Davidson, D.[138] 212
Duit, R.[23] 1, 47
Duit, R.[80] 74, 191

e

Einstein, A.[85] 83

f

Feiner, A.S.[11] 1, 28

g

Ganter, M.[65] 37
Geerts, G.[73] 55, 203
Genderen, D. van[28] 4
Gentner, D.[79] 74, 176-178, 182-184, 187, 188, 194, 195, 201, 202, 230, 295
Gentner, D.[109] 177-183, 187-189, 191, 194, 195, 201, 202
Gentner, D.[110] 179
Gerhartl, F.J.[2] 1, 94
Gick, M.L.[113] 190
Gilham, E.J.[16] 1
Glashow, S.L.[111] 179, 183
Goldring, H.[19] 1
Grad, H.[83] 81
Guémez, J.[8] 1

h

Hadfield, M.[81] 74, 92
Hawkes, S.J.[27] 3
Herrmann, F.[88] 86, 92, 95-96
Hiele, P.M. van[30] 4, 206, 223, 224, 332
Hiele, P.M. van[32] 4, 5
Hiele, P.M. van[34] 4
Hiele, P.M. van[105] 156, 159-165, 170, 177, 191, 195, 201, 202, 217, 221, 226, 254, 297, 374
Hiele, P.M. van[149] 266
Hiele, P.M. van[150] 297
Hiele, P.M. van[151] 323
Hiele-Geldof, D. van[31] 4, 223, 225, 226, 294, 323
Hogenbirk, P.G.[48] 16, 18, 48, 49, 58

Hogenbirk, P.G.[49] 16, 18, 49-51, 57, 58, 63

j

Joling, E.[36] 6, 176-177, 193-195, 201-202, 222, 223, 229, 230, 235, 294-295, 389
Jones, D.G.C.[84] 83
Jong, R. de[54] 19-20
Jong, R. de[104] 148
Jonge, R. de[51] 16, 58
Joule, J.P.[76] 57, 85-86
Joule, J.P.[87] 86

k

Kaper, W.H.[37] 6, 108, 140-144, 148, 152, 154, 222, 223, 230, 231, 256, 274, 294, 386
Kaper, W.H.[58] 27
Kaper, W.H.[98] 139-140, 256
Kaper, W.H.[99] 140
Kaper, W.H.[100] 140-144, 148, 152, 154, 222, 223, 230, 256, 294, 386
Karpinski, W.[93] 136, 139, 141, 142, 154
Kesidou, S.[60] 1, 48, 63, 64
Keulen, H. van[128] 206
Kildahl, N.K.[7] 1
Klaassen, C.W.J.M.[38] 6, 108, 203, 206, 207, 212-218, 231, 276, 340, 341, 354, 357, 391
Kramers-Pals, H.[132] 208
Kuhn, T.S.[134] 210

l

Lakatos, I.[133] 210
Lampert, M.[125] 205, 206
Lanzara, E.[67] 44
Larkin J.H.[108] 159
Lee Hong Yi[6] 1, 92
Lehrman, R.L.[70] 51
Lewis, E.L.[77] 64
Liang Yi[12] 1
Licht, P.[143] 228
Lijnse, P.L.[129] 207
Lybeck, L.[96] 138, 141, 142, 154

m

Mach, E.[63] 35-36, 39, 86, 128, 130
Mettes, C.T.C.W.[123] 205, 210
Mills, I.[97] 139, 432
Miranda, J. de[117] 203, 211, 214-216, 340, 357, 360
Miranda, J. de[126] 206
Miranda, J. de[152] 341
Miranda, J. de[155] 408
Miranda, J. de[156] 408
Moore, G.S.M.[10] 1, 37
Muller, F.[141] 228

n

Nicholls, G.[69] 47
Niedderer, H.[90] 93, 167

o

Oers, B. van[122] 205
Ogborn, J.[21] 1, 47, 92, 93

p

Palincsar, A.S.[124] 205, 206
Pendley, B.D.[95] 138, 141, 142, 154
Piaget, J.[33] 4
Piaget, J.[64] 37
Pieren, L.O.F.[39] 11-13, 15, 16, 18
Pieren, L.O.F.[40] 11, 15, 16, 18-21, 75, 77, 78
Popper, K.R.[135] 210
Posner, G.[142] 228
Pushkin, D.B.[56] 22

r

Redeker, B.[140] 228
Redlich, O.[91] 95
Reiding, J.[44] 16, 18
Reiding, J.[45] 16, 18, 74
Roest, J.F.[153] 362
Roon, P.H. van[62] 29
Ross, K.A.[15] 1

Rozier, S.[147] 257, 259

s

Sanchez, K.S.[89] 92-94
Schaefer, B.A.[5] 1, 95
Scharf, V.[102] 148
Scharf, V.[144] 241
Scharf, V.[145] 244, 255
Sexl, R.U.[71] 51
Solomon, J.[20] 1, 47, 48, 59
Solomon, J.[68] 47, 59, 65
Somers, T.[55] 20-22
Somers, T.[92] 109
Sprang, H.F. van[59] 28
Sprang, H.F. van[14] 1, 37
Stavy, R.[116] 190-191
Storm van Leeuwen, J.W.[46] 16, 18
Storm van Leeuwen, J.W.[47] 16, 18
Strong, L.E.[9] 1, 64
Stylianidou, F.[22] 1, 47
Sutton, C.[74] 56, 190, 399
Sutton, C.R.[101] 141, 153
Svajcer, V.[118] 204

t

Terpstra, K.J.[17] 1, 19, 28, 29
Thomson, W.[86] 86
Toulmin, S.[136] 210
Tykodi, R.J.[3] 1, 55

v

Vakgroep didactiek natuurkunde[41] 12, 13, 15, 16, 18, 58
Vakontwikkelgroep[25] 1
Valk, A.E. van der[29] 4, 47-49, 51, 65, 156-158, 165
Vecht, J.R. van der[24] 1
Vereniging DBK-na[42] 12, 13-16, 18, 58
Vereniging DBK-na[43] 12, 14-16, 18, 58
Vogelezang, M.J.[103] 148, 384
Voorde, H.H. ten[26] 2
Voorde, H.H. ten[35] 5, 99, 118, 148, 157, 158, 165, 167, 168, 170, 206, 227, 228, 262, 263, 290, 338, 340-343, 345-347, 352-354, 360, 369, 371, 375, 379-384, 387
Voorde, H.H. ten[106] 157
Voorde, H.H. ten[139] 217
Voorde, H.H. ten[148] 265-266
Voorde, H.H. ten[154] 388
Vos, W. de[66] 39

w

Warren. J.[72] 51
Wilson, J.M.[94] 137, 141-144, 148, 154
Wiser, M.[107] 159, 165
Wittgenstein, L.[146] 251-253
Wong, D.E.[112] 189, 191

II. Index op zaakwoorden

a

Aanwijzen 160, 265, 363, 367-368
Aequivalentie (Mach) 36
Afbeelden 182-183, 187-189, 298, 305, 388
Afbeelding 178-179, 319
  structuur- 304
Affiniteit 94
Afgeleide 44, 125, 279-281, 326-329, 334-335, 351-352, 358
Analoog 310
Analogie 74, 76, 82, 83, 95, 113, 127, 177, 178, 182, 184, 189, 201
  -bewering 178, 192
  -keuze 80
  -redenering 72, 84-86, 113-114, 189, 193, 229-230, 294, 298, 308-309, 315, 321-324, 330, 332, 370, 384-389

Analogon 44, 85, 180
Analyse, analyseren 74, 89, 160-166, 242-245, 250-251, 265, 337, 344, 376, 387
Arbeid 15-16, 29, 35, 50-57, 60-62, 86-88, 93, 105, 109, 114, 173, 187, 306
-svermogen 85
volume- 91, 197
Associatie 66, 135, 136, 152, 153, 176, 222, 256, 257, 260, 263, 264, 271, 276, 300
spontaan, vanzelfsprekend 375
woord- 106, 108, 135, 258
Associatienet (zie ook: netwerk) 375
overkoepeld 301
overkoepelend 306
Associaties 47
Associatietest 141
Associeren 47, 221, 272, 374, 385
Attribuut 179, 185-188, 192, 194
Availability function 55
Axioma 4-6, 35, 156, 165, 170, 175, 202, 219, 395
-keuze 173
-systemen 377
-tisch 162, 166, 173

b

Basisdomein, doeldomein 74, 82, 178, 181, 185, 331, 333
Behoud 2, 24, 23, 45, 48, 59
-swet 57, 319
energie- 43, 50, 51, 63, 131, 236
entropie- 86
van arbeidsvermogen 85
vermogen tot arbeid 52, 54
Belemmering 224-225, 235-236, 242, 247
Benoemen 88, 90, 94, 163, 340, 344-345, 362, 375
zaak- (fase) 341, 347
Beoefenarencultuur 205-207, 210
Bevrijd 224, 242
Bevrijden 250
Bindingsmodel 195
Bron 115, 116, 307
energie- 12, 88, 90, 115, 306

c

Capaciteit (zie energiecapaciteit, ladingscapaciteit) 32-33, 44, 119, 149, 248, 253, 272, 325, 336
capaciteit+ 328, 334
capaciteit* 328
constante 124, 126, 275, 285
gemiddelde 284, 285, 289
van constante naar veranderlijke 292
veranderlijke 124
Chemische energie 11-12, 18-19, 117, 127
Coëfficiënt 119-121, 199, 299, 300
Collectie ervaringen 108, 190, 240-246, 253, 338, 356, 359, 361-363, 381
omvattend 291
opgedaan/verwacht 317
schiften 277
Collectie termen 324, 334, 338, 364
Collectie uitdrukkingen 305, 377
Concept mapping 136, 140, 144, 153, 175, 176, 189, 202
Consequent 3, 15, 30, 139, 140, 143, 154, 155, 175, 245, 249, 250, 253, 286
-er 253
in- 247, 250, 290
schijnbaar in- 287, 289
Context 140, 142, 152, 230-231
-keuzen 146
-uitbreiding 229, 273, 279, 367
-wisseling 140, 143, 229, 230, 279, 282, 286, 289, 291, 324, 325, 332, 333, 369, 385
energetische warmte- 29
thermodynamische warmte- 29
Contextwisseling
niveauinvariant 193, 194, 229, 230
Continue
beschrijvingswijze 229, 253
schaal 143, 323

Continuïteit 376
Coördinaat 92, 95, 296
Crisis 227, 228, 255, 290, 338, 339, 384, 386, 387
Crisis-achtig 291

d

Deduceren 162
Deductie 92-93, 162
Deductief 131, 165-166, 376, 395
niet- 97
redeneren 96
Deeltjesmodel 39, 83, 84
Demagogisch 184
Discontinu 230
onderscheid 324, 333
Discontinuë
beschrijving 321
beschrijvingswijze 230, 231, 253
Discontinuïteit 5, 6, 217, 222, 223, 225-228, 231, 246
een enkele 383
en crisis 338
in de beschrijving 323
verschillende 376
Dissipatie 38
Doeldomein 82, 185
Dogmas 402
Dogmatisch 46
Domein 33, 297
nieuw 370
structuur van een 191
van ervaringen 6, 57
Drijvende kracht 92-94, 296

e

Eigenschap 157-160, 163, 168, 170, 240-241, 244-246, 253, 263, 288, 300-301, 373-374, 380-384
didactische 152
gebeurtenis- 16, 123
momentane 12, 13, 30, 36
paar- 150
relatie- 194
van entropie 84, 90, 116
van uitdrukkingen 305, 323
veranderlijke 20
voorwerps- 150
Empirie 225-226
Empiriegebonden 6, 74, 96, 156
Empirisch 4, 31, 34-37, 93, 128, 131, 167
-e gasportie 76
-e generalisaties 40, 170, 171, 173, 243, 295, 374
-e regels 92
-e toetsing 324
e- generalisatie 167
e- generalisaties 161, 165
genuanceerd- 37
voorbehoud 169
Endotherm 11, 18-19, 21
Energiecapaciteit 30, 36, 57, 91, 119, 199, 247
chemische 200
thermische 199
van constante naar functie 279
van constante naar veranderlijke 282
Volume- 199
Energievormen 12, 16, 20, 22, 26-34, 107, 110-127, 132, 199, 245, 260, 268, 273-275, 336
Energievormentaal 11, 15, 34, 37, 44, 107
Energiewaarde 44, 123, 125-126, 129, 132, 174, 260, 273-278, 283-284, 287-288, 291, 299, 325-327, 358, 367-368
Energiewaarde+ 328, 334
Energiewaarde* 327, 334
Enthalpie 1, 17
-vorm 17
Entropie 1, 5, 23, 24, 28, 47, 63, 64, 69, 74, 77, 81, 83-86, 92, 104, 115, 119, 172, 173, 185, 195, 201, 297, 305, 309, 311
-toename 171
Ervaring 324, 336, 337, 354, 362, 363, 368, 375
te ordenen 357
zintuiglijke 304
Ervaring(1) 337-338, 375

Ervaring(2) 337-338, 375-376
Ervaring(3) 338, 375, 378
Ervaringsdomein 3, 30, 32, 34, 74, 194, 230, 231, 295-298, 318, 320, 323, 331, 384, 385, 388, 389
een ander 75
gebonden aan 151
Evenredig 14, 44, 120, 124, 275, 282, 285, 286, 289, 327, 336
-heidsfaktor 42
Evenwicht 61-64, 95, 172, 174
-spotentiaal 28
-stoestand 30, 31
-svoorwaarde 64, 69, 94, 172
Exotherm 18-21
Expliciet 66, 165, 261
-e aanpak 108, 119, 142
vs. stilzwijgend 72
Expliciteren 250
-ing 252, 378, 383
-ingsfase 254, 266, 375, 382
Extensief 86, 296, 297, 299, 300, 303
Extensieve 29, 31, 86, 88, 90, 91, 95, 112, 185, 296-300, 303, 320
coördinaten 92
energievariabele 91

f

Familiegelijkenis 250-253, 356, 359
Fasering 345
van zaakgebondenheid 343
Fossiel woordgebruik, taalfossiel 56-57
Foton 83, 84
Functie (did.) 35-36, 42, 172-173, 272, 289, 291, 306-307, 324
Fysische onmogelijkheid 169-170

g

Gebonden oriëntatie &&
Gebruikssituatie 49-50, 65
Gebruikswaarde 64-71, 74, 86, 92, 135, 145, 147, 299
Gegrond
i.t.t. hypothetisch 105
Gelijknamig 183-186, 317-319
-e eigenschappen 310, 315
-e plaats 308, 338, 375, 378
-e relatie 299
on- 188, 319
Gelijkvormig 296, 311, 317, 319
Gelijkwaardig, gelijke waarde (vgl. ruilwaarde) 42, 129, 131
Gemiddelde 44, 352, 358
Gemotiveerd 67, 126, 130
Gesloten
netwerk van relaties 264, 265, 274
relatienet 295, 303, 375
Gesprek 211-216, 222, 249, 251, 364-365, 376, 379
-sonderwerp 374
-ssituatie 143
-sanalyse 341
-sfasen 346
-smodel 203, 217, 222, 228, 250, 369
-speriode 344
-swetenschap 368
klasse- 116
onderwijs- 139
zakelijk 211
Getoetst 189, 376
Gewicht W (stat.mech.) 77-78
Gibbs vrije energie
speciale rol van 94
Groep 341, 342, 347, 349
Groep-Taal-Zaak 341
Groepsgebonden 341
Grond
(testfase) op - van 118
onder de voeten 131
op - van 39
op - van motiveren 130
Gronden
op ervaring 129, 174
Grondslag
empirische 111
GTZ 341, 347

h

Hoofdwet

eerste 22, 34, 37
eerste en tweede, voorvormen van 86
eerste en tweede 1, 47, 51, 64, 70, 145
tweede 5, 63, 96, 112, 171
Hypothese, -tisch 93, 96, 105, 118, 187, 200

i

Inductie 92-93, 244
Integraal 112
Integratiefase 266, 274, 382-384
Inte-greren, -gratie 27, 32, 44, 125, 281, 331
Intensief, -ve 29, 69, 89, 91, 92, 112, 185, 296, 299, 300
-ve energiecapaciteit 94, 95
Interactie 196-198, 307, 323
-soort 91, 111-113, 196
Inwendige energie 11, 17, 20, 23, 29-30, 34, 43, 55, 57, 110, 113, 128, 145, 298
Irreversibel 54, 60, 63, 92, 199
Isomorf 201, 317

k

Kernthema 229, 389
Keuze 43, 70, 71, 130, 147
(on)afhankelijke 143, 145-146, 290
-mogelijkheden 196, 267
-vrijheid 118
analogie- 80
axioma- 69, 170, 173
en feiten 45
en niveaus 175
gemotiveerd 50, 130, 323
gezichtspunts- 229
half afhankelijk 146
isomorfe beschrijvingswijze 201
sluipend geïntroduceerd 127
systeemgrenzen 114
toetsen van 84
van de eerste niveauovergang 378
van de vorige niveau-overgang 377
van een basisdomein 82
van een model 84
van eenheden 151
van variabelen 113
van verschillend niveau 165
van voorafgaand niveau 165
volgorde van 131
voor een model 78
Kinetische energie 16, 31, 37, 50, 95, 258, 260
Kloppen 142, 152, 224, 260-264, 278, 283, 300, 315-316, 352, 358
Kruiselingse afhankelijkheid 32-34, 38, 45
Kwaliteit 3
'Relatie' 271
'Term' 263
-sverschil 158
andere 254
van rationaliteit 218
van argumenteren 6
van redeneren 97, 154-162, 225
van verwijzen 242, 246-247, 252, 253
van woordgebruik 6, 136, 159, 162
Kwantitatief 41, 65, 66, 261, 397

l

Ladingscapaciteit (zie ook: capaciteit) 38
Leren 203
als informatieoverdracht 206
deelnemen aan beoefenarencultuur 206
thermodynamisch denken 208
van een ambacht 205
Liegen 3, 34, 390
Limiet, -geval 44, 125, 240, 280, 282, 285, 328, 352
Lineair causaal redeneren 257, 259
Lineaire aaneenschakeling (van termen) 119, 122

m

Materietransport 91
Meetbaar 84, 105, 109-110, 116
Metafoor 81

Model 39, 78, 81, 84
-model 39
-term 257
deeltjes- 74, 76
water- 96
zender-ontvanger 204
Motiveren, -ing 66, 91, 111, 130, 146
afbeelding 187, 299, 310
object-correspondenties 183, 185

n

Naïef realisme 118, 245
Netwerk 105
van associaties 148, 152, 153, 188, 257, 260, 261
van generalisaties 173
van relaties 135, 175, 262, 291, 386
Niet kunnen 51, 166, 169, 217, 266, 379
Niet-toevallig 136, 154, 258, 281, 353
Niveau, Van Hiele- 159, 164, 218, 219
-overgang 173, 243, 293, 366, 371, 377-379
-verandering 163, 223
-verhoging 376
-verschil 217, 241, 265
bereiken van 221, 266, 375
beschrijvend (=tweede) 5, 161, 170, 192, 195, 241, 272, 305, 366
discontinuïteit tussen 5, 227, 255
grond- (=eerste) 160, 170, 192, 204, 241, 364, 366
passeren van 323, 375
relaties tussen 163, 165
theoretisch (=derde) 161, 170, 172, 173, 376
vierde 162
volgend, voorafgaand 192
Niveauschema 159, 217, 373, 376-384
Norm 108
externe 154, 353
interne 155, 175
interne/externe 142
uitgesproken 106
van de beoefenarencultuur 207
van rationaliteit 212, 218, 219
Nulpunt 32, 86, 278
absoluut 89, 91
gekozen/absoluut 88
keuze 31, 127, 275, 277, 288, 352, 358

o

Object 178, 185, 188, 192, 211, 225, 227, 373, 374
-correspondenties 183
-knooppunt 188
-wisseling 228, 259, 375
ander 321
nieuw type 323
relatie leraar-leerling- 206
soorten, typen 226, 338, 339
van handeling en van waarneming 205
van studie, studie- 164, 216, 246, 373, 374
Objectiveren 228, 376
Objectiviteit 163, 213, 214, 217
Omgangstaal 1, 3, 35, 40, 47, 49
analyse van 243, 244, 251
leren van 378
verwijzen in 354
Omgeving 18, 21, 52-53
Omkeerbaar, -heid 48-50, 58, 60, 63, 66-68, 70, 85, 91, 158, 174, 238
niet- 51, 68
Omkeren, -gekeerd 40, 50, 51, 68-69, 128
Omzetten, -ing 11-15, 18, 20, 45, 50, 107, 148, 243, 271, 367
energie- 21
Onderscheidbaar (deeltjes) 77, 78-82
Onderwijs 208
als enculturatie of vorming 204, 207
als informatieoverdracht 207
uitleidend 207
Onderwijs(C)-situatie 211
Onderwijzen 2, 203

in drie referentiekaders 206
zender-ontvanger model 204
Onzekerheidsrelatie 84
Opdrachtgebonden 341-342, 344-345
Ordenen
-d handelen 164, 226, 227, 377-379
-d woordgebruik 376, 377
bundel eigenschappen 172
empirische generalisaties 173
geschiktheid om te 366
object van - 227
te - ervaringen 357
te - materie (=zaak) 211, 357, 377
van ervaringen 3, 324
van woordgebruik 324
zaak 361, 376
Ordening
hogere 225
bezig te ontstaan 357
her- 376, 377
logisch deductieve 226
van stellingen 223
Ordenings-voorstellen (=themas) 361, 366
Ordeningsmiddel 118
in de testfase 118, 119, 122
toetsbaar 127
woordgebruik als - toetsen 364
zinvol als 355
Overdracht 31, 185, 208, 309-310, 316
cultuur- 206
energie- 16
informatie- 207, 228
van kennis 203
Overkoepeld
associatienet 301, 303, 374
term 298, 338, 375, 378
Overkoepelend
relatienet 297, 304, 305, 374, 388
structuur 321
term 296-298, 300, 301, 304, 305, 308, 321, 323, 324, 335, 337, 338, 364, 370, 373, 375, 378, 388
Overlap, -pen 217, 222, 359, 362-364, 367, 370
niet- 367

p

Pad (zie ook: weg)
redenering afgebeeld als 139, 141
Periode
gespreks- 344-347, 349, 352
zaakgebonden 358
Perpetuum mobile 69, 92, 170, 173
Persoonlijk woordgebruik 247, 250, 253
Plaats (van term in relatie) 301, 304-308, 338, 374-375, 378, 388
Primitieve 32, 44, 280, 289, 325, 326, 335, 351, 352, 358
Probleemstellend onderwijs 107, 109, 118, 124-129, 141, 182, 206-209, 221-223, 255, 261, 271, 277-278, 290-291, 308-311, 388, 391-393
Proces 17, 61
cyclisch 23, 90
driestaps- 62
-grootheid 5, 22, 26-27, 34, 38, 44, 105, 109, 127, 243

r

Reactie
-energiecapaciteit 126
-pad, -route 29, 126
-warmte 20
Realiseringsmogelijkheid 75, 77, 81, 83
Referentiekader 7, 99, 206, 208, 233
C, onderwijs in 211
Relatie 112, 123, 135, 148-150, 154, 192, 262, 264, 271, 272, 279, 301, 302
-begrip, -eigenschap 194
-ionele structuur 181, 195
toetsen 116
verbijzonderings- 278
wederzijds 41, 42
Relatienet 266, 283, 296, 298, 301, 304, 315, 385
te verlaten 326
Rendement 104, 105, 115, 167, 196, 299,

307, 311
Reversibel 52, 60-61, 69, 92, 113, 158, 174, 297
Richtingscoëfficiënt 50, 280, 286, 349, 358
Rotatieenergie 120
Ruilwaarde 39, 43, 45, 66-68, 71, 121-125, 129-130, 150, 152, 174, 245, 266, 271-274, 277, 287-288, 336-337, 367, 388, 389
-soorten 150
-capaciteit 42
-taal 44

s

Schijnbaar inconsequent 287, 291
Schijnbaar (tegen)strijdig 51, 140, 143, 230, 282, 290
Situatiegebonden 156, 159, 241
Sluipend (aanpak bij taalverandering) 107, 126, 202, 286-290, 308-310, 333
Sociale wetenschap 214, 341
Statistisch (soc.) 144, 153
Symbool 95, 164, 237, 239, 240, 244
Systeem 18, 20, 22, 27, 45, 303
-grens 19, 26, 111, 196
-keuze 127
arbeid verrichtend 307
bemiddelend 90
geïsoleerd 92, 173
samengesteld 319

t

Taak (fys.) 48, 88, 91, 306, 307
Taal-Zaak (zie ook: GTZ) 347
Taalfossiel (zie: fossiel woordgebruik)
Term 105, 116, 263, 264, 271, 291, 385, 386
aaneenschakeling van 119
afspreken 171, 246
als knooppunt 112, 123, 135, 141, 152, 175
beschrijvende 241
in relatie 148, 150
in kloppend associatienet 260
verwijzende betekenis van 222
voorgangers van 159
zin geven aan 131
Thema, gespreks- 40, 199, 341, 347, 349, 359
-tische 357
centraal 351, 352
en kloof 266
en onderwijsfase 266
en zaak 353, 357-360
neven- 351
samengaan van 351
toetsen van 364
Thermische energie 19, 109, 110, 112, 113, 127, 128
Toestand 43, 93, 117, 118, 123, 125, 127, 128, 132, 260, 273, 278
relatieve 283, 352, 358
-sfunctie 20, 29
-sgrootheid 5, 22, 24, 30, 31, 84, 91, 107, 112, 127, 260
Toetsbaar 76, 82, 84, 91, 104, 115-117, 132, 241
Toetsen, -ing 84-85, 105, 130, 181-182, 317, 344, 361, 364, 377
Transport (zie ook: overdracht) 91
Tussentaal 3, 4, 57, 66, 67, 132, 133, 147, 222
energie=nuttig- 64
onderscheidbare moleculen 82
beschrijven van 135, 156, 231, 338
empiriegebonden 96
en interne norm 142
energievormen- 15, 30, 34
te verlaten 207

u

Uitbreiden, -ing 142, 143, 229
betekenis- 140
context- 229, 273, 279
domein- 230
Uitleiden 328
Uitleidend onderwijs 206, 207, 228, 328

V

Vakterm (zie ook: Term)
als kwaliteit 136
Van Hiele niveau (zie: niveau)
Variabele 20, 28, 31, 32, 37, 42, 43, 121, 248, 287, 299, 301, 326
-individu 337
-ndiagram 118
energie- 30, 36, 43, 95, 326, 327
natuurlijke 113
proces- 124
toestands- 124
Vereenvoudigen, -ing 2, 39
Verhaal, -vorm 241, 265
Verhalen (ww.) 113, 190, 192, 223
Verhouding
didactische eigenschap van 152, 260
Verschijnsel 70, 129, 267
Verstaan 3, 4, 56, 208, 367
en discontinuïteit 338
gaan 341
gedeeltelijk 387
niet kunnen 217
niet 228, 266, 339, 347, 367, 387
ongeveer 359
(on)-baarheid 5, 231
kloof van on- -baarheid 216-217, 227, 265, 376, 379
Vertellen 43, 241, 355, 361
-de ervaring 354
-de proef 354, 358
i.t.t. beschrijven 308
Vertel-ling, -sel 208, 356, 359
Verwarmen 49, 90, 91, 111, 112, 174
Verwijzen 104-106, 108, 116, 128, 132, 154, 164, 176, 192, 221, 222, 224, 235, 241, 242, 246, 250, 253, 264, 272, 279, 321, 323, 354, 363, 373, 374
VGTZ (zie ook: GTZ) 341
Visueel 164, 216, 225, 226, 383
voorstelling 84
Vorming 206
academische 208
tot beoefenaar 207
Vraagstelling
omkering van de 129, 274, 275, 338
Vrije energie 1, 2, 47, 53, 57, 60, 61, 63, 64, 74

W

Warmte 1, 5, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 28, 56, 105, 107, 109-112, 117, 118, 159, 174
-energie 14
-stof 85, 325
-transport 197
afgestaan vs. ontstaan 18
als procesgrootheid 22, 26
als toestandsgrootheid 31
en nuttig gebruik 51
toegevoerd vs. bezeten 14
Warmtecapaciteit 14, 28, 42, 56, 109, 149, 260, 281
Weg (zie ook: pad) 34, 45, 60, 62, 117, 127, 200, 260, 263, 278, 352
en procesvariabele 124
verzonnen 117

Z

Zaak 211, 214, 216, 228, 341, 346, 347, 353, 356-358, 379
aard van de 376
en thema 353
geheel andere 246j
gemeenschappelijke 216, 217, 222, 237, 357, 361, 364, 376
in de tweede niveauovergang 378
nieuw soort/type 373-374
nieuwe 376
persoonlijk, gemeenschappelijk 366, 369
persoonlijke 217, 222-223, 340, 359-361, 364
soorten 375
verschillende 216, 235

Zaakbenoemen (fase) 345, 352
Zaakgebonden 341-343, 346
-heid, fasering van 343
nog niet 346
Zaakgebonden oriëntatie (fase) 344-345
Zaakinformatie (fase) 344

Notatie

Aanhalingstekens ' en "
Dubbele aanhalingstekens (") worden gereserveerd voor letterlijke citaten.
Enkele aanhalingstekens worden gebruikt om aan te geven dat met nadruk over een *woord, term of uitdrukking* wordt gesproken, in plaats van over de zaak waarnaar dat woord verwijst, zoals in:

> "We zien dus dat 'arbeid' in verband wordt gebracht met 'omzetten'"(p.15)

waarmee gezegd wil zijn dat de woorden 'arbeid' en 'omzetten' met elkaar in verband gebracht worden. In het bijzonder worden enkele aanhalingstekens gebruikt om eraan te herinneren dat de betekenis van een woord nog ter discussie staat, of kort geleden ter discussie stond.

Referenties
Een lijst van referenties is aan het eind van dit proefschrift opgenomen. Nummers in superscript verwijzen naar deze lijst. Wanneer gerefereerd wordt aan meerdere werken, worden alleen deze nummers genoemd, zoals in:

> "Er worden ideëen uitgewisseld over de wijze waarop een onderwerp behandeld zou moeten worden[3,4,5]" (p.1)

In andere gevallen wordt de naam van de auteur genoemd, tenzij uit eerdere referenties al bleek om welke auteur het gaat, zoals in:

> "Duit[65] opperde daarom het vermoeden dat" (p.1)

Bij schoolboeken voor het VWO daarentegen wordt niet de auteur genoemd, maar de onderwijsgang, zoals in:

> "In de onderwijsgang Chemie[25,26] verschijnt het woord 'energie" (p.11)

Met een hoofdletter wordt hier aangegeven dat 'Chemie' hier als naam van een onderwijsgang bedoeld is.
Een paginanummer direct volgend op een referentienummer verwijst naar een pagina van het werk waarnaar wordt verwezen. Een los paginanummer of paragraafnummer daarentegen verwijst naar een bladzijde of paragraaf in dit proefschrift.

Citeren
Letterlijke citaten staan steeds tussen dubbele aanhalingstekens. Korte citaten worden opgenomen in de lopende tekst, langere citaten staan ingesprongen in een kleiner lettertype.
Cursiveringen, onderstrepingen, vet en andere opmaak wordt zoveel mogelijk overgenomen in het citaat. Indien cursivering door mij is toegevoegd dan wordt dat vermeld direct na het citaat, zo: "(cursivering toegevoegd)".

Verwijzen naar opgaven
In band II bij dit proefschrift zijn drie experimentele opgavenseries opgenomen als bijlagen 1, 2 en 3 (voor eerste, tweede en derde experiment respectievelijk). Een verwijzing zoals

"(1-5, 2-8)^{3}"

of

"1-5^{3} en 2-8^{3}"

betreft opgaven 1-5 en 2-8 uit bijlage 3.

Verwijzen naar protocollen
Band II bevat protocollen van gesprekken zoals die tijdens de experimenten voorkwamen tussen studenten onderling, of tussen studenten en hun docent. Een bespreking van een protocol uit band II wordt aangekondigd als volgt:

protocol 3.7

De protocollen zijn geordend per experiment en vervolgens chronologisch. Het cijfer voor de punt geeft het experiment aan (0, 1, 2 of 3). Protocollen korter dan 1 bladzijde staan niet in band II maar zijn opgenomen in de lopende tekst.
In de bespreking die volgt na de aankondiging of na een kort protocol vindt men regelnummers, zoals

"r.98".

Deze nummers verwijzen naar regels in het eerder aangekondigde of getoonde protocol. Deelnemers aan het besproken gesprek worden aangeduid met fictieve initialen zoals **A**, **B** of **C**. Deze zijn vet gezet om ze te kunnen onderscheiden van bijvoorbeeld fysische grootheden *p*, *V* en *T*.
Het verwijzen naar sprekers en naar regelnummers is soms gecombineerd, als volgt:

D.48-49

of, minder nadrukkelijk:

(D.48-49)

waarmee verwezen wordt naar een uitspraak van deelnemer **D** in regel 48 tot en met 49. Wanneer naar grotere protocolfragmenten wordt verwezen, of wanneer het voor het betoog minder van belang is wie er spreekt, wordt de "r."-notatie gebruikt.

Gebruiksaanwijzing voor band II

Zoals vermeld op de titelpagina behoort bij dit proefschrift (band I) een diskette met bijlagen en protocollen, getiteld "band II".

Sommige gedeelten van het gedrukte proefschrift (band I) zullen moeilijk te volgen zijn als de lezer niet letterlijk voor ogen heeft waar het over gaat: het leerproces van een docent en een klein groepje studenten die werken met een experimentele opgavenserie. In band I wordt veel **over** deze docent en deze studenten gezegd, men ziet of hoort ze echter niet bezig. De gelezen beweringen kunnen daardoor in de lucht komen te hangen.
Wie tevreden is met een globale indruk of wie weinig tijd heeft hoeft zich daaraan niet te storen. Wie daarentegen als docent of als didacticus iets met de hier gepresenteerde analyses wil doen, zal moeten weten waarover het gaat. Daarvoor dient band II. Het gaat over studenten die werken aan problemen waarvoor zij zich gesteld zien. In band II kan men, al lezende, deze studenten bezig zien en horen: daartoe biedt ik u mijn lesprotocollen aan, waarnaar in band I vaak wordt verwezen. De problemen waarmee deze studenten bezig zijn kan de lezer tot op zekere hoogte ook ontmoeten, door zich te verdiepen in de opgaven waaraan deze studenten werken (de bijlagen 1, 2 en 3). De lezer kan dan merken hoe interessant of afschuwelijk deze opgaven zijn en zij kan zich afvragen welke opgaven zij ervoor in de plaats zou willen stellen. Zo komt er pas echt een discussie op gang.

Naar mijn verwachting zal band II op de volgende momenten nodig zijn:
- Wanneer in deel 1 van band I een lijn in een serie opgaven wordt verdedigd of beschreven dan kan het nodig zijn deze opgaven erbij te pakken, om te zien waartussen die lijn dan wel getrokken wordt (zie bijlagen 1, 2 en 3).
- Wanneer in deel 1, 2 of 3 een gebeurtenis tussen docent en studenten aanleiding wordt tot vergaande bespiegelingen, dan kan het gewenst worden deze gebeurtenis te kennen - eventueel om deze te vergelijken met eigen belevenissen in het onderwijs - om te zien hoe deze gebeurtenis aanleiding kon zijn tot al die beweringen (zie de protocollen).

Band II wordt uitgebracht op diskette, enerzijds om te kunnen voldoen aan een formele eis dat het proefschrift "tot een geheel" moet worden "samengesteld", anderzijds om drukkosten te besparen.
Om de interpretatie in band I van een protocol uit band II goed te kunnen volgen kan het nodig zijn om band I en band II beide opengeslagen voor u te hebben liggen. Het proefschrift wordt dus wel als een geheel beschikbaar gesteld, maar het is u niet verboden dit geheel weer in twee delen te ontleden, door de diskette los te maken van zijn bevestiging en geselecteerde gedeelten uit te printen.

Een bijkomend voordeel van de elektronisch bewerkbare vorm kan zijn het gemak waarmee men gedeelten uit het materiaal kan lichten om ze voor eigen doeleinden te gebruiken. Zelf heb ik ook een deel van mijn conclusies slechts met behulp van protocollen uit ander onderzoek dan het mijne (namelijk van Ten Voorde) kunnen trekken. Het onderzoeksmateriaal is openbaar en moet dat ook zijn, zodat men op basis van dezelfde gebeurtenis - zowel voor u als voor mij een ervaring - eventueel tot verschillende uitspraken kan

komen.

Technische aanwijzingen voor bezitters van diverse software zijn te vinden in het bestand LEESME.TXT, op de diskette.

Lijst van gebruikte lettersymbolen

Voor grootheden en operatoren vermeld in de IUPAC richtlijnen[97] zijn in band I de aanbevolen symbolen gebruikt, behalve soms bij het citeren uit de literatuur. In band II zijn grootheden niet cursief gezet, omdat dit in de opgavenseries, zoals verstrekt aan studenten, eveneens was verzuimd.

a versnelling
A Helmholz vrije energie
A, B, C toestanden (zie E_A) of voorwerpen (zie C_A)
c soortelijke warmte
C warmtecapaciteit, later genoemd: thermische energiecapaciteit of C_v thermische enthalpiecapaciteit C_p.
Ook algemener gebruikt voor een willekeurige 'capaciteit'.
C_A, C_B, C_C thermische energiecapaciteit van voorwerp A, B, C
C_v warmtecapaciteit bij constant volume, later 'thermische energiecapaciteit' genoemd
C_p thermische enthalpiecapaciteit
D Availability function, gedefinieerd door $D = U_{sys} + p_{omg}.V_{sys} - T_{omg}.S_{sys}$. De verandering van deze functie geeft de maximale nuttige arbeid aan in een omgeving van constante p en T.
dV, dp,... infinitesimale verandering van V, van p,... limietgeval $\Delta V \rightarrow 0$, $\Delta p \rightarrow 0$,...
dV/dp afgeleide van V als functie van p
$(\partial V/\partial p)_T$ partiële afgeleide van V, als functie van p en T, naar p
đq, đw infinitesimaal kleine q of w, *niet* te interpreteren als een infinitesimaal kleine *verandering* van iets
e elektrische lading
E totale energie van een systeem als som van energievormen (citaat Moore[10])
E extensieve energievariabele, alleen gebruikt in hoofdstuk 13 - om verwarring met de energie *'E'* te vermijden zijn energievormen hier aangeduid met U_{kin}, U_{pot}, U_X
$E'(t)$ de afgeleide van E als functie van t, in citaat
$E(Y)$ energiewaarde voor de energievorm 'Y-energie', als functie van Y
E_A, E_B, E_C energiewaarden behorende bij de toestanden A, B, C voor een te noemen energievorm*)
E_{el} elektrische energie van een geladen condensator
E_{kin}, E_k kinetische energie
E_{pot}, E_p potentiële energie
E_{th} thermische energie, zie: Q
E_X, E_Y, E_Z energievormen behorende bij de respectieve energievariabelen X, Y en Z, *nog niet* in relatie tot de inwendige energie U

(* Er is naar gestreefd het aantal subscripten te beperken, dus als uit de context blijkt dat het om kinetische energie gaat wordt E_A gebruikt in plaats van $E_{kin.\,A}$.

(vgl. U_X, U_Y, U_Z).

E_z zwaarteenergie, in citaten; energievorm met de hoogte als energievariabele

$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{s}$ (vet) kracht en verplaatsing als vectoren; inwendig produkt $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$

F kracht

F_{res} resulterende kracht (in een citaat)

g valversnelling

G Gibbs functie

H enthalpie

I stroomsterkte

I intensieve energiecapaciteit

I traagheidsmoment

k constante van Bolzmann

L, M, N verschillende energiecapaciteiten met X, Y, Z als respectieve energievariabelen

m massa

M molmassa

n hoeveelheid stof ("Amount of substance")

N totaal aantal moleculen (in citaten)

n_0, n_1, n_2,... aantallen moleculen in respectievelijk de grondtoestand, de eerste aangeslagen toestand, de tweede ..., etcetera. (in citaten)

p druk

p_{ex} druk van de omgeving op een systeemgrens

P impuls

q moleculaire partitiefunctie (citaat)

q, Q warmte, in citaten

q warmte, een te kwantificeren interactiesoort: de hoeveelheid energie die aan het systeem werd toegevoerd, voor zover dat gebeurt als gevolg van een temperatuurverschil aan de systeemgrens; te kwantificeren als $\Delta U - w$.

Q 'warmte', te weten een energievorm met temperatuur als energievariabele, gebruikt als toestandsgrootheid (vb. $Q = mcT$); bruikbaar in bijzondere gevallen. Later genoemd: thermische energie, symbool E_{th} voorgesteld.

Q partitiefunctie van het veel-deeltjes systeem (citaat)

r plaatsafhankelijke factor in de equivalentiewaarde voor een 'ruilwaarde van hoogte':

$$R(\Delta\theta) : R(\Delta h) = 1 \text{ calorie} : (0{,}426 \text{ kg.m}).r$$

waarin $R(\Delta\theta)=mc.\Delta\theta$ en $R(\Delta h)=m.\Delta h$. In Amsterdam geldt r=1.

R ruilwaarde (van een verandering)

R gasconstante

R weerstand

R_{AB} ruilwaarde van de verandering A $\rightarrow$ B

$R(Y_A, Y_B)$ ruilwaarde van de verandering A $\rightarrow$ B als functie van begin- en eindwaarde van variabele Y

$R(\Delta Y)$ bij constante capaciteit: ruilwaarde van een verandering ΔY, onafhankelijk van begin- of eindwaarde van Y

s plaats, in citaten ook: S

S entropie

S_{tu} Planck functie, gelijk aan -G/T, in een citaat
t tijd
T absolute temperatuur
U inwendige energie
U_X, U_Y, U_Z energievormen behorende bij de energievariabelen X, Y en Z, nadat deze in verband zijn gebracht met de inwendige energie U (vgl. E_X, E_Y, E_Z).
v snelheid
v energievariabele, tezamen met C voor energiecapaciteit
V volume
w arbeid
w, W arbeid, in citaten
W aantal realiseringsmogelijkheden van een configuratie (citaat)
w_{max} maximale arbeid voor een gegeven toestandsverandering van een systeem in een te beschrijven omgeving. Kiezen we als eindtoestand een toestand waarin door opheffen van blokkades geen verandering meer geïnitieerd kan worden (in die omgeving), dan is w_{max} gelijk aan het totale 'vermogen tot arbeid' in de beschreven omgeving.
w_{nut} arbeid, exclusief die arbeid die samenhangt met constante-druk-reservoirs in de omgeving (vb. $w_{nut} = w - p_{ex}.\Delta V$)
X verwachte grootheid met eigenschappen: optelbaar, in totaal constant en $\Delta U = T.\Delta X$ bij verwarmen. Voorloper van de entropie S.
X, Y, Z verschillende willekeurige energievariabelen met respectievelijk L, M en N als energiecapaciteit

α affiniteit van de reactie
γ quotiënt van warmtecapaciteiten C_p / C_v
Γ_T chemische energiecapaciteit $(\partial U/\partial \xi)_T$
δY kleine verandering van Y, maar niet infinitesimaal klein
ΔY verandering van Y, gelijk aan $Y_{eind} - Y_{begin}$
$\Delta_r U$, $\Delta_r G$,... partiële afgeleide (van U of G of..) naar de reactievoortgang bij constante T, p.
ε efficiëntie
Θ temperatuur op een willekeurige schaal, gebruikt om te benadrukken dat een absolute temperatuur hier niet nodig is
μ chemische potentiaal
ξ vorderingsgraad van de reactie, verdwenen hoeveelheid van een te noemen reactant of ontstane hoeveelheid van een te noemen produkt; in de bijlagen en protocollen 'reactievoortgang' genoemd
π_T volume-energiecapaciteit $(\partial U/\partial V)_T$
π_T is gelijk aan de term a/V^2 in de Van der Waals vergelijking en heet in dat verband de 'interne druk' van het gas (Atkins[57], p.63-64).
ϕ elektrische spanning
ω hoeksnelheid

Subscripten
De meeste gebruikte subscripten zijn hierboven al genoemd bij de grootheden waarbij ze voorkomen. Een paar subscripten die bij diverse grootheden voorkomen volgen hieronder.

sys	zoals in U_{sys}, S_{sys}: eigenschap van het systeem
omg	zoals in U_{omg}, S_{omg}: eigenschap van de omgeving
l	gebruikt in T_l, p_l, h_l: temperatuur, druk of hoogte van de *linker* waterbak, gasportie, voorraad (zie figuren 4.5). In citaten ook T_h (heet, hoge temperatuur) of T_1.
r	gebruikt in T_r, p_r, h_r: temperatuur, druk of hoogte van de *rechter* waterbak, gasportie, voorraad (zie figuren 4.5). In citaten ook T_k (koud) T_l (lage temperatuur) of T_2.

Bij het bespreken van citaten uit de literatuur of uit protocollen van onderwijssituaties is het dikwijls nodig aan te sluiten bij het symboolgebruik van de geciteerde, ook als dit niet klopt met het hier voorgestane gebruik en met name dan als over de interpretatie onduidelijkheid kan bestaan. In geval het verschil of de onduidelijkheid belangrijk is voor het betoog, wordt er bij het interpreteren van het citaat op in gegaan.