

A. Treffers L. Streefland E. de Moor

Proeve van een
nationaal programma
voor het
reken-wiskundeonderwijs
op de basisschool

Deel 3B
Kommagetallen



Archief
Freudenthal Instituut

Algemeen

Zwijzen

PROEVE VAN ...

A. TREFFERS | L. STREEFLAND | E. DE MOOR

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool

DEEL 3B | KOMMAGETALLEN

ZWIJSEN

Deze publikatie is verschenen onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO).

Met dank voor commentaar op de eerste versie aan: Jan van den Brink, Kees Buys, Carla Compagnie, Fred Goffree, Huub Jansen, Jo Nelissen, Lieven Verschaffel, Monica Wijers. En met dank ook aan Ellen Hanepen (Freudenthal Instituut) voor de nauwgezette verwerking van de tekst en de plezierige samenwerking.

Een aantal nieuwe ontwikkelingen op het terrein van kommagetallen zijn mede aangezet in samenwerking met Marc van Zanten in het kader van zijn doctoraalstudie Onderwijskunde. Een speciaal woord van dank aan hem.

Vormgeving Ton Ellemers BNO

Tekeningen Marjon van den Broek

0 1 2 3 4 5 / 00 99 98 97 96

ISBN 90.276.3685.0

NUCI 724

© 1996 A. Treffers L. Streefland E. de Moor

Uitgeverij Zwijsen b.v. Tilburg

Voor België:

Uitgeverij Infoboek n.v. Meerhout

D/1996/1919/207

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voorzover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16b Auteurswet 1912 j het Besluit van 20 juni 1974, Stb. 351, zoals gewijzigd bij het Besluit van 23 augustus 1985, Stb. 471, en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 882, 1180 AW Amstelveen). Voor het overnemen van gedeelten uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) dient men zich tot de uitgever te wenden.

Inhoudsopgave

	Inleiding	9
I	Historisch-didactische inleiding	15
	1 Benadering I: via breuken	22
	2 Benadering II: via plaatswaarde	28
	3 Intermezzo: precies en schattend rekenen	36
	4 Benadering III: via meetcontexten	41
	5 Overzicht	46
II	Betekenis en positie	51
	1 Overzicht moeilijkheden: noteren en positioneren	54
	2 Overzicht rekenmethoden	60
	3 Proeve-leerlijn	69
	3.1 Modelcontext (1): lengte meten	69
	3.2 Modelcontext (2): afstand meten	81
	3.3 Formele uitbreiding via een spel	89
	4 Terugblik	96
III	Schatten en hoofdrekenen	101
	1 Vijf lessen over schattend rekenen	103
	1.1 Vermenigvuldigen (les 1)	104
	1.2 Vermenigvuldigen (les 2)	109
	1.3 Vermenigvuldigen (les 3)	112
	1.4 Vermenigvuldigen (les 4)	115
	1.5 Delen (les 5)	118
	1.6 Reflectie	120
	2 Wijder verband van de lessenserie over schatten	124
	2.1 Optellen en aftrekken	124
	2.2 Vermenigvuldigen en delen	129
	2.3 Gebruik van modellen	130
	3 Hoofdrekenen	132
	3.1 Vermenigvuldigen met een macht van tien	132
	3.2 Delen door een macht van tien	135
	4 Samenvatting	138

IV	Cijferen en gecijferdheid	143
1	Cijferen en de rekenmachine	146
2	Cijferen algemeen	152
3	Cijferalgoritmen	155
3.1	Vermenigvuldigen	155
3.2	Cijferend delen	158
4	Cijferen in methoden	159
5	Gecijferdheid vanuit het cijferen bezien	161
5.1	Bomen over precisie	163
5.2	Cijferen op maat	168
6	Consequenties voor het onderwijsprogramma	171
7	Terugblik	173
V	Samenvatting en uitbreiding	179
1	Kommagetalbegrip	180
2	Basisoperaties	182
2.1	Schatten en hoofdrekenen	183
2.2	Passend cijferen	186
3	Contexten	190
4	Wijder verband	192
5	Slotsom	196
VI	Globale schets leergangen breuken en kommagetallen	199
1	Leergang breuken	201
1.1	Fase 1: informeel, contextgebonden handelen (groep 6-7)	201
1.2	Fase 2: semi-formeel, modelondersteund opereren (groep 7-8)	204
1.3	Fase 3: formeel, vakmatig handelen (groep 8, basisvorming)	215
1.4	Ruimer kader	225
2	Leergang kommagetallen	226
2.1	Fase 1: informeel, contextgebonden handelen (groep 6-7)	226
2.2	Fase 2: semi-formeel, modelondersteund opereren (groep 7-8)	230

2.3	Fase 3: formeel, vakmatig handelen (groep 8, basisvorming)	233
3	Besluit	234
	Literatuur	237

Inleiding

Kommagetallen zijn soms moeilijke gevallen.

AFBEELDING 1

STUTTGART - Gail Devers is wereldkampioene op de 100 meter. De IAAF wees het protest van Merlene Ottey af. De Jamaicaanse was ervan overtuigd de nieuwe wereldkampioene te zijn.

Devers kreeg 10,81 seconden achter haar naam, Ottey 10,82. Dat was onmogelijk. Beide vrouwen vlogen gelijktijdig over de streep. De wimpers van Devers (26) misschien wat eerder, maar in dezelfde tijd. De IAAF nam dat protest, tegen het verschil in tijd, mee naar vandaag. Dan zal de wereldfederatie uitspraak doen over de raadselachtige marge van een honderdste seconde.



(ALGEMEEN DAGBLAD, 17-8-'93)

Vrijwel alle dagbladen maakten bezwaar tegen het verschil van één honderdste seconde tussen Devers en Ottey. Ook de NOS-SPORT-verslaggever Sierd de Vos berekende direct dat dit tijdverschil onmogelijk kon, want:

- in (ruim) 10 sec wordt 100 m afgelegd
- in 1 sec ongeveer 10 m
- in 0,1 sec derhalve 1 m
- dus in 0,01 sec omstreeks 0,1 m oftewel 1 dm.

En 1 dm afstand is zichtbaar, zeker op de finishfoto. Maar daarop was geen enkel verschil te zien. Dus is die marge van een honderdste seconde inderdaad raadselachtig.

Een dag later corrigeerde de atletiekfederatie dan ook Otteys tijd:

ze kreeg eveneens 10,81 toegewezen. De wereldwijde kritiek verstomde snel...

Maar hadden de critici het wel bij het rechte eind?

In ieder geval maakte Theo Reitsma tijdens de tv-reportage al direct bezwaar tegen de rekenwijze van collega De Vos.

Wat zou hij daartegen ingebracht kunnen hebben?

We zullen hier niet ingaan op de precieze methode waarmee de tijden worden bepaald - dat deed Reitsma op dat moment ook niet.

Wel redeneerde hij als volgt: de tijden worden door het schrappen van de duizendsten vastgesteld. In theorie kan de tijd van Devers dus 10,819 geweest zijn en die van Ottey 10,820: een verschil van een duizendste seconde, oftewel een afstand van 1 cm. En die is niet zichtbaar. (Of nog minder: 10,8199 tegenover 10,8200, dus 1 mm, en zo verder!)

Trouwens, indien de tijden niet door schrappen maar via afronden op honderdsten bepaald worden, zou zich hetzelfde kunnen voordoen met bijvoorbeeld 10,814 versus 10,815.

In het leven van alledag zijn kommagetallen meestal meetgetallen, en het rekenen ermee geeft specifieke problemen: 10,82 sec minus 10,81 sec levert dan niet zonder meer exact 0,01 sec op, zoals bij kale kommagetallen.

Meetgetallen en pure rekengetallen, dat zijn de twee hoofdvormen waarin kommagetallen voorkomen. Decimaal genoteerd verschijnen naast deze hoofdvormen de overige beschrijvingsvormen van gewone breuken, te weten die van deel-geheelrelaties, delingen en verhoudingen, meestal in de vorm van procenten en niet als kommagetallen.

We kunnen ons hier dus bepalen tot de aspecten van rekengetal en meetgetal.

In het volgende hoofdstuk 'Historisch-didactische inleiding' wordt beschreven op welke wijzen deze aspecten als didactische ingangen van de leergang 'kommagetallen' fungeren.

In de hoofdstukken daarna bespreken we de volgende officiële

kerndoelen van kommagetallen:

- 1 De leerlingen weten dat aan een decimale breuk op verschillende manieren betekenis kan worden gegeven.
- 2 De leerlingen kunnen decimale breuken op een getallenlijn plaatsen.
- 3 De leerlingen kunnen in eenvoudige toepassingssituaties, met gebruikmaking van modellen, decimale breuken vergelijken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, en kunnen schattend rekenen door de uitkomst globaal te bepalen.
- 4 De leerlingen begrijpen het verband tussen verhoudingen, procenten, breuken en decimale breuken, en kunnen breuken in decimale breuken omzetten, ook met een rekenmachine (Uitleg, 1993).

In hoofdstuk II 'Betekenis en positie' worden de eerste twee besproken. De didactische invulling van de Proeve sluit in grote lijnen aan bij wat de nieuwe reken-wiskundemethoden voor dit onderdeel bieden. Op één punt is er echter verschil: de Proeve ordent de deelleergang over het positioneren niet, zoals thans in methoden gangbaar is, naar toeneming van het aantal decimalen maar gebruikt de modelcontexten van lengte- en afstandmeting om direct 'meercijferige' kommagetallen aan te bieden. Er wordt een uitgebreide beschrijving van de onderwijsexperimenten gegeven die in het kader van deze leergang zijn uitgevoerd.

In hoofdstuk III 'Schatten en hoofdrekenen' wordt een deel van kerndoel 3 besproken. Ook dit gebeurt weer aan de hand van een onderwijsexperiment met leerlingen uit groep 7. Bij het schattende rekenen krijgt het vermenigvuldigen alle aandacht. Speciale nadruk valt op de nul-komma-keer-kwestie (bijvoorbeeld $0,32 \times 7,58$) die per traditie aanzienlijke problemen geeft. Als modelcontext fungeert de winkelsituatie van de prijsstickers die een goede grondslag voor het formele rekenen met kommagetallen blijkt te vormen. Bij het hoofdrekenen komt het accent op het vermenigvuldigen en delen van kommagetallen met machten van tien te liggen met als opbrengst de bijpassende schuifregels rond de komma.

Hoofdstuk IV 'Cijferen en gecijferdheid' biedt een vervolg op de bespreking van kerndoel 3. De doelstelling van het cijferend opereren met kommagetallen wordt nader gespecificeerd. Daarbij komt uiteraard ook de plaats en de functie van de rekenmachine ter sprake. Gecijferdheid bezien we vanuit het cijferen en wel speciaal tegen de achtergrond van het precieze rekenen met meetgetallen. Ook wordt in dit verband een voorstel gedaan om de problematiek van het rekenen met (afge)ronde getallen aan de orde te stellen - de actuele kerndoelen zijn in dit opzicht namelijk niet duidelijk.

In hoofdstuk V 'Samenvatting en uitbreiding' komt doelstelling 4 aan de orde, waarin het ruimere verband van kommagetallen met breuken en procenten wordt geschetst. We besteden aandacht aan getalbegrip, basisoperaties en contexten, zowel in samenvattende als uitbreidende zin, richting breuken en procenten. De invalshoek daarbij is het begrip gecijferdheid. Het spreekt vanzelf dat ook hierbij weer de plaats en de functie van de rekenmachine ter sprake komt.

Hoofdstuk VI bevat een schematisch overzicht van de leergangen 'kommagetallen' en 'breuken'. Wat in de Proeve-delen 3A en 3B is beschreven aan de hand van de kerndoelen, neemt in deze samenvattende beschrijving de vorm aan van een onderwijsleergang die in de verschillende leerjaren doorlopen wordt om de kerndoelen te kunnen bereiken. Daardoor krijgen de voorafgaande beschrijvingen wellicht nog wat meer reliëf.

Als een rode draad door het boek loopt de didactische opvatting dat de rekenmachine in het totale reken-wiskundeonderwijs vanaf de middenbouw van de basisschool geïntegreerd zou moeten worden, hetgeen thans veelal nog niet gerealiseerd is. Specifiek voor het rekenen met kommagetallen zou dit betekenen dat een belangrijk deel van het complexe schriftelijke cijferen door het inzetten van de rekenmachine zal kunnen verdwijnen. Dit houdt echter niet in dat het cijferen als programma-onderdeel geheel geschrapt dient te worden - zeker niet. Maar wel dat het tot elementaire vormen beperkt dient te blijven. En tevens dat de

nadruk sterker op schattend rekenen en hoofdrekenen komt te liggen. Voorts kan de rekenmachine ook als didactisch middel fungeren. In alle hoofdstukken over de kerndoelen wordt deze functie met voorbeelden geïllustreerd. Maar zoals gezegd: een en ander kan alleen worden gerealiseerd indien de rekenmachine een geïntegreerde positie in het reken-wiskundeonderwijs bekleedt. Methodenontwikkelaars kunnen er in de (nabije) toekomst toe bijdragen dat deze integratie haar beslag zal krijgen. De algemene doelstelling van gecijferdheid zou daarmee gediend zijn, zeker ook op het terrein van de kommagetallen.

Als geheel biedt de geschetste Proeve-didactiek van kommagetallen een nadere uitwerking van de vernieuwing die op dit terrein (soms aarzelend) door de huidige reken-wiskundemethoden al is ingezet, toen er nog geen helder zicht op de kerndoelen of de concrete interpretatie ervan mogelijk was.

Wij menen echter dat thans niet alleen de doelen maar ook de didactische middelen meer reliëf kunnen krijgen. Dit boek beoogt op beide punten meer duidelijkheid te verschaffen - althans voorzover nodig en mogelijk in een nationaal programma.

In deel 3A is reeds samenvattend beschreven langs welke didactische wegen deze doelstellingen bereikt kunnen worden:

- kommagetallen worden geïntroduceerd via meten;
- ze worden benoemd genoteerd als (samengestelde) grootheden;
- en globaal gepositioneerd op stroken en (schaal)lijnen;
- het rekenen met kommagetallen wordt ingebed in reële, betekenisvolle en goed voorstelbare contexten;
- die samen met visuele schema's als de getallenlijn, de strook en de rechthoek, het redeneren en rekenen met kommagetallen als modellen ondersteunen;
- waarbij de rekenmachine niet alleen als calculator en controleur maar ook als didactisch middel wordt ingezet;
- en het schattende rekenen eveneens deze functie krijgt toebedeeld.

Dit boek zal soms van de lezer een blikwisseling vragen die vergelijkbaar is met wat de volgende personeelsadvertentie verlangt.

AFBEELDING 2

$$0.33 + 4.45 = 1.18$$

*Indien u zegt: ja natuurlijk, dan bent u wellicht de
persoon die wij zoeken voor de functie*

Vervoersconsulent m/v

voor de afdeling Busvervoer Radarstraat.

Deze opgave markeert tevens de overgang naar het volgende hoofdstuk, dat begint met de historische bron van de kommagetallen binnen het zestigtallige stelsel...

I Historisch-didactische inleiding

Inleiding

De positionele schrijfwijze van breuken in de vorm van komma-getallen werd voor het eerst door de Sumeriërs (4000-2000 v. Chr.) gebruikt. Alleen hanteerden zij daarbij niet het tientallige maar het zestigtallige plaatswaardesysteem. De Babyloniërs namen dit stelsel van de Sumeriërs over en verfijnden het enkele eeuwen voor Christus met een apart spijkerteken voor de nul. Daardoor komt ook een eenduidig zestigtallige notatie van breuken binnen bereik. (Van der Waerden, 1950; Ifrah, 1987; McLeish, 1993).

Om daarvan een indruk te krijgen, kan men gewone breuken benoemd noteren met de toevoeging 'uur' en vervolgens de aandeguide tijden omzetten in minuten en seconden en eventueel nog verder in zestigste delen onderverdeeld.

AFBEELDING 3

	u	m	s	
$\frac{1}{2}$ uur	=	0,	30	
$\frac{1}{3}$ uur	=	0,	20	
$\frac{1}{4}$ uur	=	0,	15	
$\frac{1}{5}$ uur	=	0,	12	
$\frac{1}{6}$ uur	=	0,	10	
$\frac{1}{8}$ uur	=	0,	7	5
$\frac{1}{9}$ uur	=	0,	6	40
$\frac{1}{10}$ uur	=	0,	6	

Alleen bij $\frac{1}{7}$ uur krijgen we in deze reeks geen mooie uitkomst. Vergeleken met de tiendelige voorstellingen van breuken ontstaan nu minder repeterende breuken. Een belangrijk voordeel van het zestigtallige stelsel boven het decimale systeem is namelijk dat het basistal 60 meer delers heeft dan het grondtal 10, te weten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 tegenover 1, 2, 5.

Terug naar de geschiedenis.

Breuken positioneel geschreven in het zestigtallige stelsel bleken zo handig te zijn dat ze door astronomen, onder wie Kepler en Galileï, tot in de vijftiende eeuw werden gebruikt. En wij hantieren thans het zestigtallige systeem, zoals gezegd, onder meer nog bij tijdrekening.

AFBEELDING 4

THIENDE. 13
HET ANDER DEEL
 DER THIENDE VANDE
 WERCKINCHE.
 L VOORSTEL VANDE
 VERGADERINGHE.

Wesende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

TGHEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerste 27 ⑥ 8 ① 4 ③ 7 ①, de tweede, 37 ③ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ③ 7 ① 8 ② 2 ③, TREGHEENDE. Wy moeten haer Somme vinden. **WERCKING.**

Men sal de ghegeven ghetalen in oirden stellen als

	③ ① ② ③
27	8 4 7
37	6 7 5
875	8 7 5 7 8 2
9 4 1 3 0 4	

Comt in Somme (door het 1. probleme onser Franscher Arith.) 9 4 1 3 0 4 dat sijn (welck de reekenen boven de ghetalen staende, anwijzen) 9 4 1 ③ ① ② ③ 4 ③. Ick segghe de selve te wesen de ware begheerde Somme. **B E W Y S.** De ghegeven 27 ③ 6 ① 4 ③ 7 ③, doen (door de 3e. herpaling) $27\frac{18}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$, maect e'famen $27\frac{817}{1000}$. Ende door de selve reden sullen de 37 ③ 6 ① 7 ② 5 ③ weerdich sijn $37\frac{675}{1000}$; Ende de 875 ③ 7 ① 8 ② 2 ③

De specifieke voordelen van de positionele schrijfwijze van breuken werden door Simon Stevin opnieuw uitgevonden voor het decimale systeem. Het is vooral Stevins verdienste geweest dat hij de decimale breuken voor het praktische gebruik en voor de wetenschap bekendmaakte. Zijn in 1585 uitgegeven boekje 'De Thiende' trok alom de aandacht.

Bekijken we een pagina uit dit beroemde boek, dan zien we geen getallen met een komma- of puntscheidingsteken erin.

De wiskundige Napier gaf in 1617 het advies om een komma of een punt als markerings voor de tiendelige breuken te gebruiken. In 1619 werd de punt als standaardschrijfwijze ingevoerd. In de praktijk van alledag werden beide decimaalteken gebruikt. En dat is internationaal bezien tot de dag van vandaag zo gebleven... Omstreeks 1875 gebruikten de meeste reken- en wiskundeboeken in Nederland de komma, vaak nog aangeduid als 'decimaalpunt'. Van Dale vermeldde toentertijd echter in zijn Woordenboek der Nederlandsche Taal dat tussen 'de gehelen en tiende delen een punt wordt gevonden'. Bij de schrijfwijze van geld fungeerde de punt als scheiding tussen guldens en centen. De halve centen werden daarbij aangeduid als $f\ 81.35^s$ of $f\ 81.35^{1/2}$ of $f\ 81.355$.

Komma's dienden toen soms nog om duizendtallen in grote getallen te onderscheiden: 'Opbrengst der middelen over den maand October $f\ 8,525,956.59$ ' (Staatscourant, 1873). Exact de schrijfwijze die thans nog in de Verenigde Staten wordt gehanteerd. In Nederland en in de meeste Europese landen kreeg bij decimale breuken de kommanotatie ten slotte de overhand. Vandaar dat wij ze thans ook huiselijk 'kommagetallen' kunnen noemen.

Vond Stevins gedachte om de breuken tiendelig te noteren al snel enige steun en navolging, zijn tweede hoofddoel van het decimaliseren en standaardiseren van munten, maten en gewichten werd daarentegen niet zo vlug bereikt. Pas in het begin van de negentiende eeuw werd dit door Napoleon gerealiseerd via de invoering van het metrieke stelsel. Daarmee kreeg ook het decimale positiesysteem zijn beslag.

In het onderwijs bleef echter de strijd om de voorrang tussen de gewone en decimale breuken voorlopig nog voortduren.

Zo zegt schoolmeester Raadersma in 1880 tegen zijn opponent

Brogtrop, die de decimale breuken voorop wil stellen:

‘Het verwondert me, het bevreemdt me ten zeerste, dat er thans nog onderwijzers zijn - van den heer Brogtrop had ik zulks niet gedacht -, die een stelsel huldigen, dat rechtstreeks indruist tegen gezonde opvoedkunde, een stelsel, dat aanschouwing op den achtergrond plaatst, dat het meer moeilijke en samengestelde aan het meer gemakkelijke en eenvoudige laat voorafgaan, een stelsel dat afgeleefd en versleten is, omdat het den leerling africht, en geheel doordrongen is van den geest des ouden tijds, toen de dressuur in de lagere school heerschende was.’ (pag. 108).

Brogtrop brengt daar in zijn repliek het volgende tegenin:

‘Ik geef echter volstrekt niet toe, dat voor kinderen die, ‘de bewerkingen der gehele getallen kennen, tienden en honderdsten niet aanschouwelijk genoeg zijn’. Zijn het gouden tientje, de gulden, het dubbeltje en de cent, zijn de lengtematen enzovoort, geen uitstekende hulpmiddelen om de begrippen tiende-, honderdste- en duizendste deel door aanschouwing aan te brengen?’ (pag. 109).

En voorts:

‘Wij stemmen zeker toe, dat de tiendelige breuken slechts enkele uit de gewone zijn, maar wij geven de heer Raadersma niet toe, dat wij wel de bijzondere, niet de algemene eigenschappen zouden meedelen.’ (pag. 112).

Brogtrop gebruikt ook nog het argument dat ‘de tiendelige breuken het meest in het maatschappelijk leven voorkomen, men denkt onder andere aan ons metrieke stelsel van maten en gewichten’.

Maar dat argument maakt ook al geen indruk op Raadersma:

‘Uit het voorgaande volgt als van zelf, dat de onderwijzer zijn onderwijs niet mag verknoeien ter wille van die leerlin-

gen, welke de school ontijdig verlaten, al is de kennis van het metrieke stelsel voor iedere burger ook van nog zo groot praktisch nut, al moest men die kennis ook nog oneindig hoger schatten dan men nu doet, al kon niemand zich zonder die kennis in 't maatschappelijk leven redden. De onderwijzer mag zich het recht niet aanmatigen onderwijs te geven, dat indruischt tegen gezonden opvoedkunde.' (pag. 178).

En hij besluit zijn weerwoord met de volgende voorspelling:

‘Wat men er ook tegen moge doen, hoe men er ook tegen strijde, ik geloof zeker, neen, ik ben er door ene veeljarige ondervinding van overtuigd, dat er een tijd zal aanbreken, waarin de gewone breuken algemeen vóór de tiendelige zullen worden behandeld. Ja, de gewone breuken zullen eens het voorrecht genieten, dat aan de tiendelige jaren en jaren, alleen om haren vorm, te beurt is gevallen. En dat voorrecht zullen ze niet weder verliezen, omdat het onderwijs steeds meer en meer pedagogisch moet en zal zijn.’ (pag. 179).

Zal Raadersma's prognose uitkomen?

Tot omstreeks 1875 werden in de rekenboeken van Hemkes, Boeser, Closse en anderen de tiendelige breuken voor de gewone breuken behandeld. Als argumenten voor het primaat van de decimale breuken werden aangevoerd:

- 1 de bewerkingen met de decimale breuken zijn vanwege de overeenkomst met de decimale gehele getallen gemakkelijker aan te leren dan die van de gewone breuken;
- 2 de decimale breuken kunnen in relatie met het metrieke stelsel worden gebracht en zijn derhalve van zo'n grote praktische waarde dat ze zo vroeg mogelijk geleerd moeten worden;
- 3 en de praktische waarde van gewone breuken is beperkt.

Vooral het laatstgenoemde punt gaf, zoals we zagen, aanleiding tot heftige discussies.

Zo schrijft Bok in het Schoolblad (1873) in reactie op de standpunten van de gezaghebbende wiskundige Vorsterman van Oijen en de invloedrijke onderwijzer Rijkens, die beiden gewone breuken van weinig praktische waarde achten, dat juist de tiendelige breuken weinig nuttig zijn:

- 1 omdat ze bij annonceeringen van maten en gewichten niet voorkomen;
- 2 omdat men ze bij het berekenen van minderdeelen van maten en gewichten niet gebruikt;
- 3 omdat men ze zelfs bij geldswaarden niet als zodanig wil aangemerkt hebben.

In het laatste geval doelt Bok op percentages en geldwaarden die met halven, vierden, achtsten, zestienden, enzovoorts, worden aangeduid: $\frac{1}{16}\%$, $f\ 39\frac{3}{8}$, $f\ 11.77\frac{1}{2}$. Voorts wijst hij op het veelvuldige gebruik van gewone breuken bij niet-metrieke lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten, gewichten, alsmede maten voor droge en natte waren: $1\frac{1}{2}$ el, $\frac{3}{4}$ bunder, $\frac{1}{4}$ mud, $\frac{1}{8}$ lood en zo meer.

Volgens Bok zouden gewone breuken meer gewicht in het onderwijs moeten krijgen en voorafgaand aan de decimale breuken behandeld dienen te worden.

In die tijd komt de belangrijke rekendidacticus Versluys (1845-1920) eveneens tot de vaststelling dat gewone breuken de grondslag van de tiendelige breuken zouden moeten vormen. Maar zijn argumenten zijn meer van onderwijskundig-didactische dan van maatschappelijk-praktische aard, waarover direct meer.

In de genoemde discussies worden de belangrijkste toegangen van het onderwijs naar het gebied van de kommagetallen al geopend, te weten *via breuken* en *via gehele getallen*. Betrekken we bij het laatstgenoemde ook nog de twee fundamentele aspecten van rekengetal en meetgetal die aan kommagetallen onderscheiden worden, dan krijgen we drie mogelijke toegangswegen:

- 1 via breuken
- 2 via plaatswaarde (als uitbreiding van gehele getallen)
- 3 via meetcontexten (idem).

Deze zijn alle benut, zoals zal blijken.

In het volgende zullen de drie aanpakken, die vaak ook gecombineerd voorkomen, apart worden besproken - het gebruik van hulpmiddelen, materialen, schema's en (context-)modellen daarbij inbegrepen. We illustreren een en ander met voorbeelden en citaten uit handleidingen, leerboeken en didactiekboeken. Daarbij staan de didactische thema's i.c. de genoemde wegen van (1) breuken, (2) plaatswaarde en (3) meetcontexten voorop. De historische ontwikkelingsgang is hier van afgeleide betekenis. Het gaat er allereerst om wat we uit de geschiedenis van de didactiek en speciaal de methodenontwikkeling kunnen leren voor het onderwijs van vandaag en voor de toekomst.

Dat we de historische beschrijving rond 1875 laten beginnen, verdient een korte verklaring. In dat jaar verscheen namelijk de eerste volledige leerboekenserie rekenen voor de lagere school in Nederland, en wel van de hand van Versluys. Deze methode heeft een geweldige invloed uitgeoefend op vrijwel alle leerboeken die daarna op de markt kwamen, tot in de eerste decennia van de twintigste eeuw toe, en wat het onderwijs over kommagetallen betreft zelfs nog langer.

Vóór de periode Versluys waren er ook al wel boeken beschikbaar, doch deze hadden louter betrekking op toepassingsopgaven in de vorm van redactiesommen voor de hogere leerjaren. De bijbehorende uitleg werd volledig aan de onderwijzer overgelaten. Deze onderwijzers kregen echter vanaf 1857, toen de opleiding wettelijk werd geregeld, steeds meer behoefte aan een sluitende vakmethodiek. Versluys bood hun de leerboeken voor de verstandelijke, rekenkundige vorming van de leerlingen die toen zo nadrukkelijk werd nagestreefd.

Daarom begint onze kleine historische excursie bij deze methodische gigant.

1 *Benadering I: via breuken*

Ruim honderd jaar geleden formuleerde Versluys de verhouding tussen gewone breuken en decimale breuken als volgt: tiendelige breuken zijn bijzondere gewone breuken en kunnen daarom tegelijk met de gewone breuken worden behandeld.

Echter:

‘De eisch der aanschouwelijkheid gebiedt dus om met halven, derden, kwarten, enzovoort, te beginnen. En wat geldt voor het begrip breuk in ’t algemeen, geldt ook voor de bewerkingen met breuken.’ (Versluys, 1889, pag. 54)

‘Op die wijze heeft men tevens het voordeel, dat twee zaken, die niet wezenlijk verschillen, zoals de vermenigvuldiging van de gewone breuken en de vermenigvuldiging van decimale getallen, ook niet als zodanig behandeld worden. De bewerking met decimale getallen volgt nu terstond op hetgeen er de aanschouwelijke grondslag van vormt.’ (Versluys, 1889, pag. 56)

Deze onderwijslijn *via gewone breuken* is sindsdien door vele methodenschrijvers en vakdidactici gevolgd. Zo schrijft Zernike, de auteur van de methode *Ons Rekenonderwijs* in de handleiding:

‘De vermenigvuldiging met een decimaal getal wordt geheel verklaard als de vermenigvuldiging met een gewone breuk...’ (Zernike, 1915, pag. 205)

Hoe zo’n les over vermenigvuldigen volgens Zernike zou kunnen verlopen, blijkt uit het volgende voorbeeld van een samenspraak tussen de onderwijsgevende en een leerling:

§ 133. Om onze wijze van behandeling nog eens duidelijk toe te lichten, geven wij hier eene eenigszins uitvoerige schets van eene les in het vermenigvuldigen van twee decimale getallen.

Op het bord staat geschreven: $2,7 \times 13,86$.

O. Wat moet hier worden uitgerekend?

L. Hier moet worden uitgerekend hoeveel $2,7 \times 13,86$ is.

O. $2,7 \times 13,86$ — wat beteekent dat?

L. $2,7 \times 13,86$ beteekent: $2 \times 13,86$ en nog 7-maal het tiende deel van $13,86$.

O. In hoeveel vermenigvuldigingen kan deze eene vermenigvuldiging dus gesplijst worden?

L. In twee vermenigvuldigingen.

O. Kom eens aan het bord de eerste vermenigvuldiging maken.

De leerling komt aan het bord en schrijft op:

$$\begin{array}{r} 13,86 \\ 2 \\ \hline 27,72 \end{array}$$

O. Welke zal nu de tweede vermenigvuldiging moeten zijn?

L. 7-maal het tiende deel van $13,86$.

O. Wat moet ik dus eerst weten?

L. Hoeveel het tiende deel van $13,86$ is.

O. En dat is?

L. $1,386$.

O. Maak nu de tweede vermenigvuldiging!

De leerling schrijft op het bord:

$$\begin{array}{r} 1,386 \\ 7 \\ \hline 9,702 \end{array}$$

O. Wat hebt ge daar nu uitgerekend?

L. Ik heb uitgerekend, dat $7 \times$ het tiende deel van $13,86$ gelijk is aan $9,702$.

O. Hoe kunt ge dat, alleen in cijfers, opschrijven?

- L. $0,7 \times 13,86 = 9,702$.
- O. Waaraan zal nu $2,7 \times 13,86$ gelijk zijn?
- L. $2,7 \times 13,86 = 27,72 + 9,702 = 37,422$.
- O. Wij zullen nu eens zien, of wij deze vermenigvuldiging niet in éene bewerking hadden kunnen verrichten. Als ik zeker getal met 2 moet vermenigvuldigen, met hoeveel moet ik dan het tiende deel van dat getal vermenigvuldigen, om dezelfde uitkomst te bekomen?
- L. 2-maal zeker getal is gelijk aan 20-maal het tiende deel van dat getal.
- O. Inplaats van dus 13,86 met 2 te vermenigvuldigen, had ik ook het tiende deel van 13,86...?
- L. met 20 kunnen vermenigvuldigen.
- O. Wij hebben daareven gezien, dat $2,7 \times 13,86$ beteekent: $2 \times 13,86$ met nog 7-maal het tiende deel 13,86. En $2 \times 13,86$ is evenveel, zagen wij zoo juist, als 20-maal het tiende deel van 13,86. Hoeveel maal moet ik nu in het geheel het tiende deel van 13,86 nemen?
- L. $2,7 \times 13,86 = 27$ -maal het tiende deel van 13,86.
- O. Vul eens in: $13,86 = 1386 \dots$
- L. honderste deelen.
- O. Hoeveel is het tiende deel van 1386 honderdste deelen?
- L. Dat is 1386 duizendste deelen.
- O. Wat kan men dus zeggen voor 27-maal het tiende deel van 13,86.
- L. 27-maal het tiende deel van 13,86 is 27×1386 duizendsten.
- O. Welke vermenigvuldiging moet dus gemaakt
- L. 27×1386 .
- O. Maak ze.
- De leerling schrijft op:

$$\begin{array}{r}
 1386 \\
 27 \\
 \hline
 9702 \\
 2772 \\
 \hline
 37422
 \end{array}$$

O. Dus 27×1386 duizendste deelen is gelijk aan.....?

L. 27×1386 duizendste deelen is gelijk aan 37422 duizenste deelen of 37,422.

Het zal niet noodig zijn met meer dan een enkel woord er op te wijzen, dat deze schets geen zuivere photographie is van eene werkelijke les vóór de klasse. Maar er is werkelijkheid in. Aan den onderwijzer de taak, die werkelijkheid er uit te halen en voor zijne leerlingen pasklaar te maken.

(ZERNIKE, 1915(4), PAG. 206-208)

En een andere vooraanstaande auteur uit die tijd noteert bondig: $0,8 \times 0,07$ wordt berekend als $\frac{8}{10} \times \frac{7}{100} = \frac{56}{1000} = 0,056$ (Scholte, 1913, pag. 65).

Ook het rekenboek van Bouman en Van Zelm *Een rekenmethode voor de lagere school* die de onderwijsmarkt in de periode 1920-1940 domineerde, kiest de gewone breuken als fundering voor de decimale getallen. En veelgebruikte leerboeken uit de periode 1960-1985 *Naar Zelfstandig Rekenen* (Zandvoort e.a.) en *Niveau Cursus Rekenen* (Vossen e.a.) doen dat ook.

Een voorbeeld van aftrekken uit de laatstgenoemde methode:

AFBEELDING 6

$3,7 \rightarrow 3\frac{7}{10} = 3\frac{70}{100} = 3,70$	$3,07 \rightarrow 3\frac{7}{100} = 3\frac{70}{1000}$
$- 2,18 \rightarrow - 2\frac{18}{100} = - 2,18$	$- 2,612 \rightarrow - 2\frac{612}{1000}$
$1,52 \quad 1\frac{52}{100} = 1,52$	$0,458 \quad 1 - \frac{542}{1000} = \frac{458}{1000} = 0,458$

$4,6 - 2,26 =$	$3,5 - 2,39 =$	$4,08 - 2,518 =$	$5,07 - 2,417 =$
$5,7 - 3,34 =$	$8,8 - 7,45 =$	$5,09 - 3,329 =$	$6,13 - 4,328 =$
$3,8 - 1,56 =$	$9,7 - 1,54 =$	$3,07 - 2,645 =$	$8,24 - 6,271 =$
$2,9 - 1,65 =$	$7,6 - 4,36 =$	$2,06 - 1,546 =$	$9,36 - 3,172 =$
$6,5 - 4,27 =$	$6,4 - 3,18 =$	$6,04 - 4,246 =$	$4,72 - 1,721 =$

(VOSSEN (RED.), Z.J., DEEL 5B, PAG. 41)

Ook in verschillende didactiekboeken die vanaf de jaren vijftig zijn verschenen, wordt het gebied van de gewone breuken als toegang voor kommagetallen gebruikt.

In *Grondslagen van de Rekendidactiek* (Van Gelder, 1959) lezen we:

‘De tiendelige breuken worden behandeld als breuken, waarvan de noemer 10, 100, 1000, enzovoorts, is.’ (pag. 83)

... ‘De verdere behandeling van de tiendelige breuken loopt parallel met de gewone breuken.’ (pag. 83)

En vervolgens wijdt Van Gelder geen woord meer aan kommagetallen.

Het leerplan *Rekenen* van het Nutsseminarium zegt over vermenigvuldigen:

AFBEELDING 7

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{1000} & 0,1 \times 0,01 = 0,001 \\ \frac{7}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{21}{1000} & 0,7 \times 0,03 = 0,021 \\ \frac{4}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{12}{100} & 0,4 \times 0,3 = 0,12 \\ 2\frac{7}{10} \times 3\frac{3}{10} = \frac{27}{10} \times \frac{33}{10} = \frac{891}{100} = 8\frac{91}{100} & 2,7 \times 3,3 = 8,91 \end{array}$$

(NUTSSEMINARIUM, 1967, PAG. 130)

Delen wordt in dit leerplan *via omgekeerd vermenigvuldigen* en met de staartdeling aangeleerd. Daarnaast functioneert ook de breukenaanpak.

AFBEELDING 8

Dezelfde oefening in omgekeerde volgorde (goed controlemiddel).

$$\begin{array}{ll} 0,5 : 0,05 = 10 & \frac{5}{10} : \frac{5}{100} = \frac{100^{10}}{5_1} \times \frac{5^1}{10_1} = 10 \\ 0,27 : 0,3 = 0,9 & \frac{27}{100} : \frac{3}{10} = \frac{10^1}{3_1} \times \frac{27^9}{100^{10}} = \frac{9}{10} \end{array}$$

(PAG. 131)

In het algemeen leidt de aanpak *via breuken* tot het snel aanleren van rekenregels voor het hanteren van de komma's bij de verschillende basisbewerkingen - in ieder geval worden daartoe vaak aanbevelingen gedaan.

Zo staat in het Nuts-leerplan direct onder de reeks keersommen:

‘Hieruit leiden we de regel af dat in het antwoord evenveel cijfers achter de komma komen als de som van het aantal cijfers achter de komma is in vermenigvuldigtal en vermenigvuldiger.’ (pag. 130)

Het delen wordt nog directiever behandeld:

‘Een eenvoudige algemene regel voor de komma is niet te geven. De leerlingen moet geleerd worden de komma in het antwoord te plaatsen, zo gauw ze de eenheden al of niet hebben kunnen gebruiken en de tienden aangehaald moeten worden. In de deler mag geen komma staan.’ (pag. 131)

Veel vroeger al maanden de handleidingen bij de benadering *via breuken* vaak tot enige voorzichtigheid:

‘Na genoegzame oefening wordt die redenering achterwege gelaten en berekenen de leerlingen alleen na afloop der vermenigvuldiging, uit welke delen het gevonden product bestaat. Het kan ook niet te moeilijk geacht worden, hun te doen opmerken, dat het aantal af te schrappen cijfers in het product gelijk is aan de som van het aantal decimalen in den vermenigvuldiger en het vermenigvuldigtal. Men vergeet echter niet, dat deze regel als elke andere, achteraan moet komen en niet voorop mag geplaatst worden.’ (Zernike, 1915(4), pag. 205-206).

Maar er klinken ook andere geluiden uit de nuchtere onderwijspraktijk dan deze sterk ‘verstandelijke’ aanpak, zoals bijvoorbeeld die van de auteur van de methode *Geef Acht* uit de jaren veertig en vijftig:

‘Er zijn sinds Pestalozzi en Overberg, dus meer dan een eeuw lang, allerlei verklaringen beproefd, maar alwie zich heeft afgebeeld om deze operaties voor lagere-schoolleerlingen begrijpelijk te maken, heeft het ten slotte moeten

opgeven met de verzuchting: het gáát niet! Daarom zeggen ook wij: Leer ze in Gods naam maar het kunstje! Dat betekent voor de vermenigvuldiging: doe maar of het hele getallen waren, en streep in de uitkomst zoveel cijfers af, als in vermenigvuldigtal en vermenigvuldiger samen zijn afgestreept.' (Rombouts, 1959(4), pag. 124).

En zo is het in de onderwijspraktijk ook vaak gedaan, zoals uit het volgende voorbeeld uit *Naar Zelfstandig Rekenen* blijkt.

AFBEELDING 9

$$\begin{array}{rcl}
 3. & 0,2 & \longleftarrow 1 \text{ cijfer achter de komma} \\
 & \underline{0,3} \times & \longleftarrow 1 \text{ cijfer achter de komma} \\
 & 0,06 & \longleftarrow \text{samen 2 cijfers achter de komma} \\
 & 0,07 & \longleftarrow 2 \text{ cijfers achter de komma} \\
 & \underline{0,4} \times & \longleftarrow 1 \text{ cijfer achter de komma} \\
 & 0,028 & \longleftarrow \text{samen 3 cijfers achter de komma}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 3. & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,7 & 0,9 & 0,8 \\
 & \underline{0,1} \times & \underline{0,3} \times & \underline{0,9} \times & \underline{0,6} \times & \underline{0,8} \times & \underline{0,7} \times \\
 \\
 & 0,01 & 0,07 & 0,09 & 0,36 & 0,24 & 0,37 \\
 & \underline{0,1} \times & \underline{0,6} \times & \underline{0,3} \times & \underline{0,4} \times & \underline{0,3} \times & \underline{0,9} \times
 \end{array}$$

(ZANDVOORT (RED.), 1970, DEEL 10, PAG. 20-21)

In de leerboeken die na 1975 zijn ontwikkeld, komt deze vroeger veel voorkomende benadering *via breuken* vrijwel niet meer voor.

2 Benadering II: *via plaatswaarde*

De introductie van kommagetallen en de bewerkingen ermee kunnen ook betrekkelijk los van gewone breuken worden behandeld, namelijk via de uitbreiding van het plaatswaardesysteem van de gehele getallen.

Een voorbeeld daarvan treft men aan in de methode van Van Pelt *De Nieuwe Rekencursus* die aan het einde van de negentiende en het begin van de twintigste eeuw grote opgang maakte.

Van Pelt maakt gebruik van een 'rangefiguur', thans positiekaart genoemd. Daarop staan de eenheden, tientallen, honderdtallen, enzovoort, in rangorde.

Het getal 283 bijvoorbeeld wordt in dit schema uiteengelegd in 2 honderdtallen, 8 tientallen en 3 eenheden.

AFBEELDING 10

h	t	e
2	8	3

'Door het verschuiven van een cijfer van rang op rang wordt een helder zicht op het talstelsel gegeven ...' (Van Pelt, 1903, pag. 29)

De invoering van de tiendelige breuken gebeurt op de volgende wijze:

AFBEELDING 11

C C. De Tiendelige breuken.

I. In de rangefiguur is herhaaldelijk een cijfer van rechts naar links, en omgekeerd, verschoven.

We zetten nu een 1 in den rang der duizendtallen en verschuiven die naar rechts. Juist, tienmaal zoo klein is nu de waarde. Weer een plaats verder naar rechts. Enz., tot de 1 in den rang der *eenen* staat. Maar nu wil ik de 1 nog één plaats naar rechts verschuiven. Enkelen:

„Dat kan niet: er is geen rang meer!” O, dat is geen bezwaar. Achter de eenen trek ik een zeer dikke streep en verder nog 3 strepen, zoodat er nu nog 3 rangen achter de eenen zijn.

We plaatsen nu de 1 in den eersten rang achter de eenen. Ze is nu tienmaal zoo weinig waard. Hoeveel is $\frac{1}{10}$ van 1. Juist: *één tiende*. De 1 staat nu in *den rang der tiende deelen*.

Zoo voortgaande komt de 1 in den rang der *honderdste deelen*, ten slotte in dien der *duizendste*.

(VAN PELT, 1903, PAG. 65-66)

Later wordt de dikke streep achter de eenheden vervangen door een komma.

Getallen worden op verschillende manieren uitgesproken. Bijvoorbeeld 2,83 als:

2 gehelen plus 8 tienden plus 3 honderdsten

2 gehelen plus 83 honderdsten

283 honderdsten, te noteren als 283 ho.

Vermenigvuldigen gaat als volgt:

AFBEELDING 12

20,987	20987 d°
35	35
	104935
	62961
	734545 d° = 734,545.

(VAN PELT, 1903, PAG. 67)

Indien zowel het vermenigvuldigtal als de vermenigvuldiger kommagetallen zijn, kiest Van Pelt een redactiesom als startprobleem om de rekenstrategie duidelijk te maken:

3,6 kg thee à f 2,46.

‘We zullen de komma in den vermenigvuldiger doen verdwijnen door te houden, dat de koper tienmaal zoveel koopt. We boeken dus $36 \times f 2,46$. Het antwoord moet tienmaal zo klein gemaakt worden. Hoe dat geschiedt, weten de leerlingen reeds.’ (Van Pelt, 1903, pag. 74).

Delen gebeurt via deel-van nemen met behulp van de staartdeling. De opgave $725,64 : 12$ verloopt zo:

AFBEELDING 13

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{12} \text{ van } 725,64 / 60,47 \\
 \hline
 72 \\
 \hline
 56 \\
 48 \\
 \hline
 84
 \end{array}$$

$\frac{1}{12}$ van 725 geh. = 60 geh. en 5 tot rest. Er blijft van het deeltal over 5,64 of 56 t° en 4 h° $\frac{1}{12}$ van 56 t° = 4 t°; rest 8 t°.

Nog moet bepaald worden $\frac{1}{12}$ van 8 t° en 4 h° of van 84 h° = 7 h°.

(VAN PELT, 1903, PAG. 67)

De deling $5,64 : 1,2$ wordt eerst veranderd in $56,4 : 12$ en vervolgens op de zojuist genoemde wijze berekend. Ook deze omzetting wordt gemotiveerd en geïllustreerd met een redactiesom:

‘1,2 kg thee kost f 5,64. Wat kost 1 kg?
 Dan kost 12 kg f 56,40, dus 1 kg f $56,40 : 12$ ’

In geval de deling als verhouding geïnterpreteerd moet worden, kiest Van Pelt een andere rekenstrategie, maar daar gaan we nu niet verder op in.

Bij de moeilijkste vermenigvuldig- en deelopgaven spelen dus het omzetten in verschillende rangen via het vermenigvuldigen met machten van tien en het delen door machten van tien een cruciale rol. De inleidende oefeningen met deze omzettingen in de rangenfiguur zijn om die reden van fundamenteel belang. Beheersing van de cijferprocedures voor de basisoperaties met gehele getallen is daarnaast ook een voorwaarde voor het kunnen rekenen met kommagetallen.

In latere leerboeken staat de uitleg van dergelijke rekenprocedures, of van kleine variaties daarop, zelfs uitdrukkelijk in de tekst van het leerlingenboek vermeld.

AFBEELDING 14

$$\begin{array}{r} 2,47 \rightarrow 247 \\ \times 3,8 \quad \times 38 \\ \hline 9,386 \quad 1976 \\ \quad 7410 \\ \hline 9386 \end{array}$$

$$2,47 \times 3,8 = 9,386$$

De 1e term is door 100 gedeeld. De 2e term is door 10 gedeeld. Het produkt moet dus door 1000 gedeeld worden.

Reken de vermenigvuldiging uit alsof er geen komma's in de getallen staan en deel daarna de uitkomst door 1000.

Reken deze vermenigvuldigingen op dezelfde manier uit

$5,46 \times 3,9 = \uparrow$	$29,8 \times 0,47 = \uparrow$	$7,89 \times 0,72 = \uparrow$
$546 \times 39 = \uparrow$	$298 \times 47 = \uparrow$	$789 \times 72 = \uparrow$
$21,2 \times 3,43 = \uparrow$	$3,17 \times 1,54 = \uparrow$	$4,562 \times 2,4 = \uparrow$
$212 \times 343 = \uparrow$	$317 \times 154 = \uparrow$	$4562 \times 24 = \uparrow$

$$\begin{array}{r} 29,95 : 1,7 = 17,6 \\ 299,5 : 17 = 17,6 \\ \hline 1700 \\ 1295 \\ \hline 1190 \\ 105 \\ \hline 102 \\ 3 \end{array}$$

Vermenigvuldig de deler met 10 (1,7 wordt 17). Het deeltal moet dan ook met 10 vermenigvuldigd worden, want het quotiënt moet hetzelfde blijven. (29,95 wordt dan 299,5).

Reken de deling 299,5 : 17 uit. De uitkomst is 17,6. Denk om de komma!

29,95 : 1,7 heeft dezelfde uitkomst. Dus ook 17,6.

Reken deze sommen op dezelfde manier uit

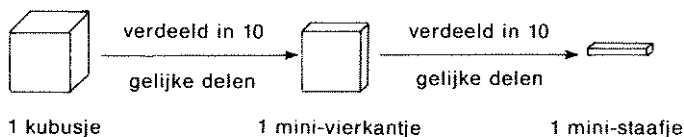
$5762 : 3,5 = \uparrow$	$2,985 : 0,76 = \uparrow$	$906,7 : 0,47 = \uparrow$
$57.620 : 35 = \uparrow$	$298,5 : 76 = \uparrow$	$90.670 : 47 = \uparrow$
$3.6572 : 5,73 = \uparrow$	$8.4071 : 64,5 = \uparrow$	$6.0979 : 0,805 = \uparrow$
$365.72 : 573 = \uparrow$	$84.071 : 645 = \uparrow$	$6097.9 : 805 = \uparrow$

(VAN GERVEN, 1970, DEEL 11, PAG. 51 EN PAG. 71)

In de nieuwe reken-wiskundemethoden die vanaf 1975 op de onderwijsmarkt verschijnen, wordt de 'rangenfiguur' van Van Pelt concreet gestoffeerd met positie-materiaal, waaronder plaatswaardeblokken en abacus. De fundamentele operaties van $10 \times$, $100 \times$ en $10 : 100$ worden via deze leermiddelen in tekening gezet.

Enkele illustraties:

AFBEELDING 15



T	E	t	h	d
2	7			

↓ : 10

T	E	t	h	d
	2,	7		

↓ : 10

$$27 : 10 =$$

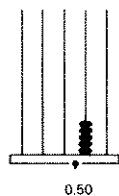
$$\underline{\quad} : \underline{\quad} =$$

Heb je de komma op de goede plaats gezet?

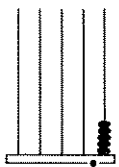
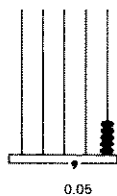
(BRINKMAN (RED.), DEEL 5, 1975, PAG. 82)

AFBEELDING 16

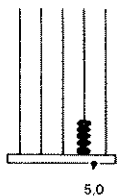
Gebruik de abacus bij het rekenen met kommagetallen.



→ : 10



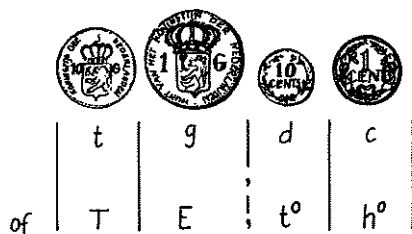
→ × 10



(NELISSEN (RED.), DEEL 7B, 1989, PAG. 14)

Ook geld wordt als positiemateriaal benut.
Een voorbeeld met oude munten:

AFBEELDING 17



Meestal volstond men echter met een korte verwijzing naar geld of metrieke maten.

De opgaven zijn dan weliswaar niet zo formeel gesteld als bij Van Pelt, die in eerste instantie met onbenoemde getallen werkte, maar toch zijn ze tamelijk kaal.

We kiezen een voorbeeld van dergelijke opgaven met benoemde getallen uit *De Grondslag*, een veelgebruikte methode in de jaren vijftig en zestig:

AFBEELDING 18

f 16,59 : 7	8 × f 14,86
f 38,80 : 8	9 × f 12,92
f 2,45 : 7	7 × f 16,14
f 2,76 : 6	5 × f 12,75

(HAACK EN LIEFFERING, Z.J., DEEL 8, PAG. 21)

Het commentaar in 'de handleiding voor de onderwijzer' luidt daarbij:

Wanneer de guldens gedeeld zijn wordt onmiddellijk de komma achter de guldens in de uitkomst gezet.

Daarna komen de dubbeltjes en de centen aan de beurt.

Deze werkwijze is een voorbereiding op het werken met decimale getallen en is te verkiezen boven de werkwijze: eerst in centen en later 't antwoord opschrijven in guldens.

Op het bord ook enkele delingen, waarbij in de uitkomst geen guldens komen. (f $0,75 : 5$).

De rekenkundige bewerkingen met deze benoemde getallen uit de sfeer van geldwaarden en het metrieke stelsel verlopen hetzelfde als bij de aanpak van Van Pelt, die bij de moeilijkste gevallen van vermenigvuldigen en delen ten slotte ook overstapt op benoemde getallen in tekstopgaven. Hiermee willen we niet zeggen dat na 1935 - dus na de periode van Versluys, Van Pelt, Zernike, en Bouman & Van Zelm - de leerboeken in het algemeen net zo gericht waren op het inzichtelijke rekenen als in het tijdvak daarvoor. Want dat is beslist niet het geval.

In navolging van de eerder geciteerde Rombouts geven vele leerboeken, die in aanzet de methode *via plaatswaarde* volgen bij optellen en aftrekken, ook in de moeilijke gevallen van vermenigvuldigen en delen direct de passende rekenregels.

Overigens vindt men de benadering *via plaatswaarde* na de leerboeken van Douma en Van Pelt uit de negentiende eeuw vrijwel niet meer in zuivere vorm terug. Vaak komt die voor in combinatie met de methode *via breuken*. De traditionele methoden uit de twintigste eeuw volgen meestal de aanpak *via breuken* of de combinatieaanpak *via plaatswaarde en breuken* (in deze volgorde).

3 *Intermezzo: precies en schattend rekenen*

Bij de beschrijvingen van de benaderingswijzen *via breuken* en *via plaatswaarde* ging het steeds over precies uitrekenen door te cijferen. Tot 1975 lag daarop in Nederland vrijwel uitsluitend de nadruk - enkele uitzonderingen daargelaten.

De eerste rekenmethode waarin het schattende rekenen een plaats krijgt toegewezen is *Fundamenteel Rekenen* van Diels en Nauta, dat in de jaren dertig grote opgang maakte.

Een voorbeeld van een opgave over schatten in verband met kommagetallen voor begin klas 5 (groep 7).

AFBEELDING 20

3. Eerst de uitkomst schatten:

$$\begin{array}{rclclclcl} 4500,15 : 9,5 & = & 651,75 : 165 & = & 26,54 \times 3,75 & = \\ 683,35 : 79 & = & 419,25 : 32,5 & = & 4,85 \times 36,09 & = \\ 499,68 : 0,72 & = & 474,35 : 2,65 & = & 15,7 \times 25,46 & = \\ 845,93 : 2,9 & = & 367,04 : 0,248 & = & 1,425 \times 385,8 & = \end{array}$$

(DIELS EN NAUTA, 1944 (6E DRUK), DEEL 9, PAG. 10)

Enkele kanttekeningen daarbij:

- het schatten dient als controlemiddel voor het cijferende rekenen en speciaal voor de juiste plaatsing van de komma bij delen en vermenigvuldigen;
- het heeft betrekking op kale sommen; schatten bij tekstopgaven, die toch al schaars zijn, komt nauwelijks voor.

Opmerkelijk is dat het schattende rekenen in die tijd niet als middel werd gebruikt om de komma te leren plaatsen en de komma-regel bij het vermenigvuldigen te ontdekken. Zo schrijft Rombouts in de handleiding van zijn methode *Geef Acht* op de ene pagina dat die regel toch niet begrijpelijk is te maken en dat men de kinderen het kunstje maar moet aanbieden, terwijl hij op de volgende pagina stelt:

‘Het moet bijvoorbeeld niet mogelijk zijn, dat een leerling als uitkomst van $4,5 \times 6,75$ presenteert: 303,75 in de veronderstelling dat dit juist zou kunnen zijn. Al vóór hij met

vermenigvuldigen begon, moest hij gezien hebben, dat er óm de 30 moet uitkomen, want $5 \times 6 = 30$.' (Rombouts, 1959 (4e druk), pag. 125).

In tegenstelling tot *Fundamenteel Rekenen* treft men in *Geef Acht* echter geen opgaven over schatten aan, doch alleen maar cijfersommen en (relatief veel) redactie-opgaven.

Vanaf omstreeks 1960 treedt er echter een verandering op en gaat het schattende rekenen ook een functie vervullen bij het cijferen i.c. het plaatsen van de komma in de cijfermatig berekende uitkomst.

AFBEELDING 2.1

Vermenigvuldig:

7,6	9,4	8,7	9,2	6,4
3,8	5,2	5,9	4,1	3,7
7,26	9,27	6,38	5,14	4,02
8,36	7,48	8,59	9,68	9,87

In het onderwijzersboek van *Functioneel Rekenen* staat bij deze opgave:

AFBEELDING 2.2

Klassikale voorbereiding dezer opgave is noodzakelijk. Men kan die als volgt laten verlopen:

Het antwoord van $3,8 \times 7,6$ ligt tussen 21 ($= 3 \times 7$) en 32 ($= 4 \times 8$). Na vermenigvuldiging alsof het gehele getallen zijn, krijgt men als uitkomst 2888. Volgens de voorafgaande begrenzing van het goede antwoord moet de komma zó geplaatst worden: 28,88.

Door een bespreking van enkele voorbeelden van vermenigvuldigen van twee decimale getallen met een zeer klein aantal gehelen (met het oog op het uit het hoofd begrenzen der uitkomst) en waarbij het er niet toe doet hoeveel cijfers er achter de komma staan, zal men de kinderen kunnen laten ontdekken, dat er altijd in de uitkomst zoveel cijfers achter de komma moeten komen (nullen meegerekend), als er in vermenigvuldiger en vermenigvuldigetal samen achter de komma staan.

In *Nieuw Rekenen* staat zelfs in de leerlingentekst vermeld welke schatstrategie gevolgd moet worden.

AFBEELDING 23

1. Hoe kan dat?

$7,4 \times 7,4$ Uit deze vermenigvuldiging komt *méér* dan 49,
maar *minder* dan 64.

$$\begin{array}{r} 7,4 \\ 7,4 \times \\ \hline 296 \\ 5180 \\ \hline 54,76 \end{array}$$

2. a. Tussen welke twee getallen ligt de uitkomst? (bijv.: tussen 9 en 12).

$$\begin{array}{llll} 3,6 \times 3,6 = & 8,4 \times 9,3 = & 10,5 \times 10,5 = & 12,4 \times 12,4 = \\ 8,5 \times 8,5 = & 5,6 \times 12,4 = & 17,4 \times 20,3 = & 72,4 \times 9,3 = \end{array}$$

b. Reken de sommen van 2a uit. Zie het voorbeeld achter som 1. Vergelijk je antwoord steeds met 2a.

(BRUINSMA (RED.), 1969, DEEL 5B, PAG. 51)

In tegenstelling tot de methode van Diels en Nauta wordt in de laatstgenoemde methoden niet eerst de kommaregel aangeleerd volgens de methode *via breuken* of *via plaatswaarde*, maar dient het schatten juist als didactisch middel om die kommaregel te vinden. Er wordt direct met tamelijk moeilijke opgaven van gemengde getallen gestart. Dit in tegenstelling tot de stap-voor-stap opbouw naar toenemende complexiteit die zo kenmerkend is voor de eerder besproken aanpakken *via breuken* en *via plaatswaarde*, waarbij uitsluitend precies cijferend wordt gerekend. Kortom, de leergang van vermenigvuldigen en delen van kommagetallen verandert als het schatten er op deze wijze in betrokken wordt.

In de nieuwe reken-wiskundemethoden die vanaf 1975 op de onderwijsmarkt verschijnen, functioneert schatten als doel op zich, maar ook in dienst van de kommaplaatsing.

In verschillende teksten verschijnen daarbij gedachtenwolkjes, zoals bijvoorbeeld in de volgende uit *Rekenen en Wiskunde*.

AFBEELDING 24



De zakrekenmachine wordt soms bij het leren schatten ingezet om het antwoord te controleren.

AFBEELDING 25

I Schattend rekenen

$5 \times 9,8 \approx$	$2,8 \times 3,2 \approx$	$4,01 \times 5,01 \approx$
$5 \times 0,98 \approx$	$9,1 \times 2,05 \approx$	$8,01 \times 5,01 \approx$
$3 \times 33,4 \approx$	$9 \times 11,2 \approx$	$4 \times 2,49 \approx$
$7 \times 14,3 \approx$	$0,9 \times 11,2 \approx$	$8 \times 2,19 \approx$
$7 \times 1,43 \approx$	$10,1 \times 0,5 \approx$	$7,9 \times 12,1 \approx$

Controleer je antwoorden met het rekenmachientje.
Het moet ongeveer kloppen.



(GRAVEMEIJER (RED.), 1988, DEEL 6B, PAG. 6)

We treffen ook nog andere oefenvormen aan:

AFBEELDING 26

2. Hans heeft de sommen hieronder al uitgerekend, maar hij is overal de komma vergeten. Zet de komma waar hij hoort.

$$4,2 \times 3,6 = 1512$$

$$2,32 \times 4,56 = 105792$$

$$3,24 \times 2,4 = 7776$$

$$1,3 \times 2,91 = 3783$$

$$3,5 \times 6 = 21$$

$$4,62 \times 2,84 = 131208$$

$$2,9 \times 3,3 = 957$$

$$3,65 \times 6,214 = 226811$$

$$1,3 \times 9,398 = 122174$$

$$6,498 \times 12 = 77976$$

(GRAVEMEIJER (RED.), 1988, DEEL 6B, PAG. 25)

Tevens worden nu ook elementaire contextopgaven in het schatten betrokken. Maar het moet wel gezegd dat dit in de realistische rekenmethoden uit de jaren tachtig toch nog maar spaarzaam gebeurt.

AFBEELDING 27

Oude kleren verkopen.



OUDE KLEREN
KOPEN WIJ OP
PER KILO F 4,50

Meneer Schaap brengt 8 kilo oude kleren weg.
Hoeveel krijgt hij daarvoor?

Lisette Hayman heeft 2,4 kilo oude kleding.
Hoeveel geld krijgt zij daarvoor?

(GRAVEMEIJER (RED.), 1988, DEEL 6A, PAG. 17)

Dit brengt ons bij de derde methode, die uitgaat van meetcontexten, waarbij uiteraard ook geldbedragen en gewichten als meetgetallen worden beschouwd.

4 Benadering III: via meetcontexten

Vanaf omstreeks 1975 komt het zogenoemde realistisch rekenen sterk opzetten. Kommagetallen worden nu steeds meer verbonden met meetcontexten. Dat is zowel het geval bij de introductie als bij het leren opereren. Het (globaal) kunnen plaatsen van kommagetallen op een getallenlijn wordt vanaf die tijd nadrukkelijk als doel gesteld.

Enkele voorbeelden van kommagetallen in het leven van alledag:

AFBEELDING 28

1 Kommagetallen zie je overal.



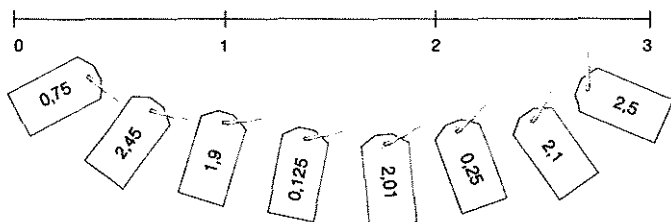
(VAN DE MOLENGRAAF (RED.), Z.J., DEEL 4B, PAG. 10)

Hoe interpreteren kinderen deze getallen? Hoe stellen ze zich deze getallen op een schaallijn voor die past bij de onderscheiden contexten? Dergelijke kernvragen stellen methodenontwikkelaars zich.

Bij deze informele kennis ligt namelijk het startpunt voor het onderwijs met kommagetallen in de nieuwste benaderingswijzen. De voorstelling van de getallenlijn of meetlijn of schaallijn komt men veelvuldig in de leerboeken tegen.

AFBEELDING 29

1. Neem de getallenlijn over in je schrift en zet de kommagetallen ongeveer op de juiste plaats.

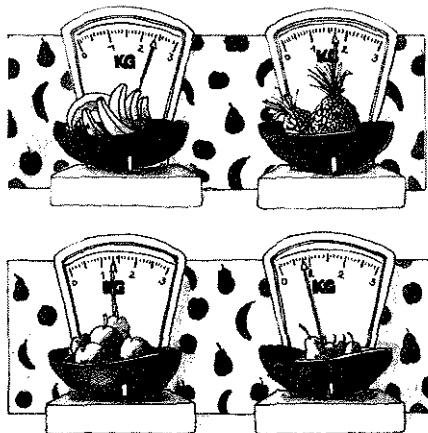


(GRAVEMEIJER (RED.), 1988, DEEL 6B, PAG. 16)

Soms ziet men in de leerboeken dezelfde opgaven met benoemde getallen (bijvoorbeeld 0,75 kg; 2,45 kg...).

De meetgetallen of kale getallen worden op de getallenlijn geplaatst, en met de geplaatste getallen moet van meet af aan worden gerekend.

AFBEELDING 30



- Wat weegt het zwaarst en wat het lichtst?
- Hoeveel wegen de bananen en ananas samen?
- Hoeveel wegen de appels meer dan de peren?
- Hoeveel weegt al dit fruit samen?

(NELISSEN (RED.), 1988, DEEL 7A, PAG. 55)

Duidelijk wordt in de moderne methoden een verbinding met meten gelegd: het kommagetal is gegeven en de passende maat moet gezocht worden.

AFBEELDING 31

1 Kies de goede maat.

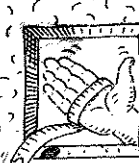
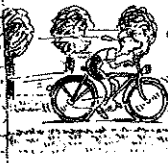
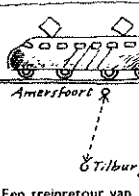
- a De tafel is 0,8 . . . hoog (dm, m², m).
- b Een wandelaar loopt 4500 . . . per uur (m, km, ha).
- c Een blad papier is 0,06 . . . dik (m, dm², mm).
- d Een fles limonade weegt ongeveer 1300 . . . (dl, gram, kg).
- e Een brood weegt ongeveer 0,8 . . . (kg, gram, dl).

(VAN DE MOLENGRAAF (RED.), Z.J., DEEL 5B, PAG. 132)

Of de maateenheid is gegeven en de komma moet worden gezet, zoals in de volgende opgave uit *Operator Rekenen* (nieuwe versie).

AFBEELDING 32

In alle getallen is de komma vergeten. Schrijf het goede getal in je schrift.

a  De baby woog bij de geboorte 33 kg.	b  De palm van de hand van Bianca is 645 cm breed.	c  Johan reed in 1 uur precies 1950 km.
d  Tamara heeft koorts. Haar temperatuur is 389 graden.	e  Een treinretour van Amersfoort naar Tilburg kost f 3650.	f  Het aantal inwoners van Nederland is ongeveer 148 miljoen.

(SWEERS (RED.), 1994, DEEL F1, PAG. 50)

Contextopgaven dienen in enkele nieuwe reken-wiskundemethoden om het rekenen met kommagetallen concreet te funderen. Daarbij worden schatten, hoofdrekenen, cijferen en het gebruik van een rekenmachine soms met elkaar in verband gebracht, zoals in de volgende opgave.

AFBEELDING 33

Floris weegt 0,6 kilo af.
Gaby koopt 1,2 kilo rijst.
Sandra heeft genoeg aan 0,75 kilo.
Hoeveel moeten ze betalen?



(GRAVEMEIJER (RED.), 1988, DEEL 6A, PAG. 78)

De rekenmachine kan nu worden ingezet om de berekening te controleren.



e. Controleer je antwoorden op het rekenmachientje.



Aan de benadering *via meetcontexten* die vanaf 1975 steeds meer in de leerboeken wordt gevolgd, liggen de volgende didactische principes ten grondslag:

- het globaal kunnen plaatsen van kommagetallen op de (meet-) getallenlijn en het beredeneerd ordenen van kommagetallen zijn basisvoorwaarden voor zowel het schattende als het precieze rekenen;
- globaal schattend rekenen gaat vooraf aan precies cijferend rekenen (en het gebruik van de rekenmachine) en kan als didactisch middel fungeren voor het steeds exacter leren rekenen;
- het rekenen met meetgetallen in elementaire contextsituaties vormt mede de basis voor het rekenen met kale, onbenoemde getallen in cijferopgaven.

Deze didactische aanpak *via meten* heeft na de officiële vaststelling van de kerndoelen in 1993 nog aan gewicht gewonnen: minder accent op de cijferalgoritmen, meer nadruk op hoofdrekenen en schatten in toepassingssituaties, en het gebruiken van de rekenmachine.

Toch wordt ook vanaf 1975 nog in vele reken-wiskundemethoden al vroeg een relatie tussen kommagetallen en breuken gelegd. Waarom dit gebeurt, is echter niet duidelijk - de handleidingen verschaffen daarover geen duidelijkheid. Is dit een overblijfsel uit het traditionele tijdvak?

5 Overzicht

In het voorgaande werden drie benaderingswijzen in historisch perspectief geplaatst: de kommagetallen via breuken, via plaatswaarde en via meetcontexten.

Tevens werd de wisselende plaats en functie van het schattende rekenen belicht.

Meer terloops kwam ook het verschil in nadruk op een meer inzichtelijke dan wel een werktuigelijke aanpak ter sprake, alsmede het verschil in appreciatie van toepassingsgericht en kaal rekenen.

De periode 1875-1925 kan getypeerd worden als het *intellectualistische tijdvak* (Kellinga, z.j.). Daarin stonden de formele doelen van leren redeneren plus de vakmatige zuiverheid van de leer gangen in hoog aanzien. Bekende leerboeken van onder meer Versluys, Zernike, Scholte, Bij de Ley & Postma, en Bouman & Van Zelm weerspiegelen die gerichtheid op de verstandelijke ontwikkeling.

In deze periode is de introductie van kommagetallen via breuken de meest gebruikelijke methode, al waren er ook nogal wat leerboeken die daarnaast aanvankelijk (via geldrekening) ook de benaderingswijze via plaatswaarde volgden, dus een mengvorm hanteerden. De methodische aanpak was in ieder geval gestoeld op inzicht, wat wil zeggen dat de onderwijsgevende de grondslagen van de rekenprocedures i.c. de komma-schuifregels bij het vermenigvuldigen en delen inzichtelijk probeerde te maken door een heldere uitleg te geven.

In de periode 1925-1975 vindt geleidelijk een verschuiving van een *intellectualistische* naar een *mechanistische aanpak* plaats. De rekenboeken *Naar Zelfstandig Rekenen* en *Niveaucursus Rekenen* zijn daarvan als de culminatiepunten te beschouwen. Ze maakten in de jaren zeventig grote opgang.

Bij deze mechanistische methoden is de benaderingswijze in feite niet van belang, omdat toch vrijwel direct naar de komma-regels van de cijferprocedures voor de verschillende bewerkingen wordt toegewerkt. Binnen deze regelgeleide aanpak spelen toepassingen een ondergeschikte rol: rekenen is voornamelijk gericht op kale sommenmakerij.

In de periode na 1975 vindt een tamelijk abrupte overgang plaats naar het *realistische rekenen*. Zoals de term uitdrukt wordt in deze nieuwe benaderingswijze van het rekenonderwijs een hechte verbinding gelegd met realistische problemen, teneinde inzicht in begrippen en rekenprocedures te verwerven. Voor kommagetallen houdt dat in dat de benaderingswijze via meetcontexten wordt gekozen, of beter, dat die wordt ontwikkeld. Pas later in de leergang, als kale kommagetallen betekenis hebben gekregen en dus realiteit zijn geworden voor de kinderen, wordt de verbinding met de begrippen plaatswaarde en breuken gelegd. Dit althans is de didactische trend die zich thans aftekent en die in deze Proeve verder wordt doorgetrokken.¹

Actuele stand van zaken

Samengevat ziet de Proeve-didactiek er als volgt uit:

- 1 de benaderingswijze via meetcontexten staat voorop, dan volgt de aanpak via plaatswaarde en ten slotte wordt de relatie met tiendelige breuken en procenten gelegd;
- 2 de weg van de inzichtelijke kennisverwerving wordt gevolgd;
- 3 er is een sterke gerichtheid op toepassingen en toepasbaarheid;
- 4 schattend rekenen, niet alleen als doel maar ook als didactisch middel, krijgt een cruciale rol toebedeeld en het cijferen wordt teruggedrongen ten faveure van de rekenmachine.

Uit de voorgaande historische schets blijkt dat deze didactiek sterk verschilt van de traditionele methodiek die vóór 1975 gangbaar was.

II Betekenis en positie

Doelstelling 1 en doelstelling 2

De leerlingen weten dat aan een decimale breuk op verschillende manieren betekenis kan worden gegeven.

De leerlingen kunnen decimale breuken op een getallenlijn plaatsen.

Kommagetallen verschijnen als meetgetallen en rekengetallen. Gewone breuken hebben nog meer aspecten, maar die worden meestal niet tientallig genoteerd. De bekende deel-geheelrelatie bijvoorbeeld manifesteert zich decimaal voornamelijk als percentage en meestal niet als een nul-kommagetal.

Vanwege deze beperkte, tweeledige interpretatie van kommagetallen als meetgetallen en rekengetallen ligt het voor de hand om doelstelling 1 en doelstelling 2 gezamenlijk te bespreken: beide soorten getallen kunnen op de getallenlijn worden afgebeeld.

Om meer zicht te geven op de specifieke inhoud van dit hoofdstuk starten we met een opgave op het niveau van de lezer. (Het probleem is wellicht ook bruikbaar voor de leerlingen van het hoogste leerjaar van de basisschool en in de basisvorming van het voortgezet onderwijs.)

Welk kommagetal ligt precies tussen 2,9 en 2,11?

Vrijwel geen leerling eind groep 8 zal deze strikvraag in eerste instantie goed beantwoorden.

Ook de meeste volwassenen hebben er moeite mee.

De eerste reactie is veelal: 'dat is 2,10'.

En dan volgt vaak: 'Oh nee, want dat is 3.'

Daarna begint het meer bezonnen denkwerk.

Dat gaat bijvoorbeeld zo:

'Voor 2,9 mag ik 2,90 lezen. Welk getal ligt tussen 2,90 en 2,11; oftewel tussen 11 en 90? Dat is ...50 $\frac{1}{2}$. (Ik heb 11 en 90 opgeteld en toen 101 gedeeld door 2.) Het antwoord is dus 2,50 $\frac{1}{2}$... Of nee, dat mag zo niet, het moet zijn 2,505.'

Over deze individuele oplossing van een geschoolde volwassene valt op drie onderdelen iets op te merken, namelijk bij:

- het gelijkstellen van 2,9 aan 2,90
- de handige oplossing om het middengetal te vinden
- en de schrijfwijze van 2,505 (voor '2,50 1/2')

Het eerste en het laatste punt hebben te maken met een goed begrip van de decimale notatie en van de formele betekenis van kommagetallen. In het bovenstaande voorbeeld komt het inzicht tot uitdrukking in het ordenen van twee getallen, voorts in het bepalen van het midden, dat wil zeggen het vinden van het getal dat even ver van de twee gegeven getallen ligt, en in het op correcte wijze noteren van dit getal.

Uit onderzoek dat straks wordt beschreven, blijkt dat inzicht in het notatiesysteem van decimalen veel moeilijker is dan tot voor kort werd aangenomen. Het feit dat men in eerste instantie geneigd is bij de genoemde opgave 2, 10 als tussenwaarde te noemen, drukt dat eigenlijk al uit: het systeem van de gehele getallen blijkt te interfereren met dat van de kommagetallen. Dat komt omdat de cijfers achter de komma ten onrechte als gehele getallen worden beschouwd. Nu lijken decimale systemen van gehele getallen en kommagetallen op verschillende onderdelen ook wel op elkaar. Toch tonen ze tal van verschillen. Bijvoorbeeld achter 2,9 kan men een nul plaatsen zonder dat de waarde verandert, maar bij 29 kan dat niet. En zo zijn er naast enkele overeenkomsten nog meer verschillen, waarop straks nader wordt ingegaan.

Naast de notatiestructuur en de daarmee corresponderende grootte wordt de betekenis van kommagetallen ook nog bepaald door de verbinding met het meten.

Welke lengtemaat ligt precies tussen 2,9 m en 2,11 m?

Een dergelijke vraag waarin met meetgetallen geopereerd dient te worden, is niet ongewoon: zowel in leerboeken als in toetsopgaven kan men zulke opgaven veelvuldig aantreffen. Op zichzelf is dat begrijpelijk, want het rekenen met meetgetallen is aanvanke-lijk toch wat beter voorstelbaar dan het opereren met onbe- noemde getallen. Bijvoorbeeld het feit dat 2,9 m gelijkgesteld kan

worden met 2,90 m wordt nu vlotter ingezien dan met kale getallen. En zeker ook dat het ongebruikelijke, inconsequente en feitelijk onjuiste '2,50 1/2' m geschreven dient te worden als 2,505 m is benoemd gemakkelijker in te zien dan met onbenoemd genoemde getallen. Of anders gezegd: het rekenen met meetgetallen kan een concrete oriënteringsbasis vormen voor het opereren met zuivere rekengetallen. Vaak levert de toevoeging van een grootheid aan een kale rekenopgave dan ook een zekere vereenvoudiging op.

Zoals bijvoorbeeld 'kg' bij de volgende opgave:

Welke van de volgende getallen: 2,12 1,9 1,895 2,001 ligt het dichtste bij 1,98?

In plaats van het gebruikelijke berekenen van verschillen wordt door de toevoeging van kg en de overgang naar g een betrekkelijk eenvoudige vergelijking mogelijk van achtereenvolgens 2120 g, 1900 g, 1895 g en 2001 g, met 1980 g.

Van hoger standpunt bezien echter is het rekenen met meetgetallen nogal problematisch vanwege de omstandigheid dat in feite met afgeronde getallen gewerkt wordt. Zo betekent 2,9 m in de officiële meettaal dat deze lengte in *dm* nauwkeurig is bepaald en dus tussen 2,85 m en 2,95 m ligt. Terwijl 2,11 m in *cm* nauwkeurig is aangeduid met een marge van 5 mm naar boven en beneden. Komt men nu op de eerder aangegeven manier tot het midden van 2,505 m, rekenend alsof het precieze getallen zijn, dan suggereert het antwoord volgens de genoemde meetconventie een onterechte meetprecisie in mm. Want bij nauwkeuriger meting van 2,9 m (als 2,85 m) zou het afgeronde midden bijvoorbeeld best op 2,48 m kunnen uitkomen...

Aan dit subtiele verschil tussen rekengetallen en meetgetallen, waarop al eerder werd gewezen, dient uiteraard wel aandacht te worden besteed. Maar zeker niet in het begin van de leergang. Want dat zou de introductie van kommagetallen via het meten zeer bemoeilijken, zo niet onmogelijk maken. Aanvankelijk worden meetgetallen dus louter als pure rekengetallen opgevat en pas later komt het onderscheid ertussen aan de orde.

Eerst worden in het volgende de specifieke moeilijkheden van het notatiesysteem onder de loep genomen. Dit gebeurt aan de hand van veel voorkomende, karakteristieke fouten die leerlingen maken in verschillende eindtoetsen. Hoewel er bij deze vragen vaak kritische kanttekeningen gezet kunnen worden, geven ze toch een behoorlijke indruk in hoeverre bepaalde einddoelen binnen traditioneel bepaald rekenonderwijs (niet) haalbaar blijken te zijn, speciaal met betrekking tot het interpreteren en positioneren van kommagetallen.

Dan volgt de hoofdvraag hoe deze misvattingen voorkomen kunnen worden, zodat de weg wordt vrijgemaakt voor de betekenisverlening uit doelstelling 1 en de positiebepaling uit doelstelling 2. We geven een schets van enkele introductielessen.

1 *Overzicht moeilijkheden: noteren en positioneren*

Een bekende vergissing is bijvoorbeeld dat 0,09 wordt opgevat als 9 tienden (of $\frac{9}{10}$).

Deze fout wordt veroorzaakt door de asymmetrie die de komma teweegebrengt in de benoeming van de positiewaarden: volgens bovengenoemde misinterpretatie zijn tien en tienden symmetrisch geplaatst rondom de komma, maar in het decimale notatiesysteem grenzen eenheden en tienden aan elkaar. (Padberg, 1989). Soms wordt door didactici aandacht aan deze kwestie besteed.

Zo schrijft Douma in 1893 in zijn Rekencursus over 5 g 23 (5 gulden 23 cent):

‘Verschillende middelen worden nu besproken:
 bijvoorbeeld $\overset{\bullet}{5}23$ gulden; $\overset{\bullet}{5}23$ gulden; $5\bullet23$ g (een $\bullet$ -teken op de plaats der g).’

En in 1983 stellen Hilton en Pedersen ook voor om de komma aanvankelijk niet te gebruiken maar een punt boven de eenheid te plaatsen.

In ieder geval moeten we in de didactiek attent zijn op de kommaplaatsing en de daaruit voortkomende asymmetrische benoeming.

'2,11 is groter dan 2,9 want 11 is groter dan 9.'

In een soortgelijke notatie, maar nu met jaren en maanden (2;11 te lezen als 2 jaar en 11 maanden, en 2;9 als 2 jaar en 9 maanden) zou die redenering natuurlijk wel kloppen. Wat achter de (punt-)komma staat is één bepaald benoemd getal. Zo wordt 2,11 in feite opgevat als 2 jaar en 11 maanden of 2 m en 11 cm, en 2,9 als 2 jaar en 9 maanden of 2 m en 9 cm. Maar dat is niet in overeenstemming met de positionele schrijfwijze van een kommagetal, waarin juist niet met een vaste deel-eenheid achter de komma wordt gewerkt doch met steeds wisselende waarden per positie.

Uit het voorgaande is meteen ook duidelijk waaruit die verkeerde interpretatie kan voortkomen. Namelijk indien bij de introductie van kommagetallen steeds in dezelfde context met een vaste verfijning van de maateenheid wordt gewerkt, zoals bijvoorbeeld bij het geldrekenen steeds met guldens en centen. Deze misvatting kan wellicht voorkomen worden door niet steeds met dezelfde decimale verfijningen te werken.

'2,9 is groter dan 2,11 want die 9 zijn tienden en die 11 zijn honderdsten, en honderdsten zijn kleiner dan tienden.'

'En 2,1 is groter dan 2,99 om dezelfde reden ...'

Ook deze fout komt veelvuldig voor. Maar dan speciaal bij kinderen die een leergang hebben gevolgd waarin kommagetallen via breuken zijn ingevoerd. Terwijl de verkeerde redenering volgens de kommascheiding bij het voorgaande punt vooral wordt gevolgd door de leerlingen die via de gehele (meet-)getallen tot kommagetallen kwamen.

In landen als Frankrijk en Canada, waar kommagetallen eerder op het programma staan dan gewone breuken, komt de gehelegetallen-fout dan ook relatief vaker voor dan de misinterpretatie van breuken. En in de vele landen waar de gewone breuken voorop staan, gebeurt het omgekeerde, zo blijkt uit internationaal vergelijkend onderzoek. (Resnick e.a., 1989).

Zou het niet beter zijn om in het getal 2,99 die '99' niet in eerste instantie en uitsluitend als 99 honderdsten op te vatten, maar aanvankelijk te interpreteren als 9 tienden (of 9 dubbeltjes of 9 decimeter) plus 9 honderdsten (of 9 cent of 9 centimeter) en pas daarna de gelijkwaardigheid daarvan met 99 honderdsten (of 99

cent of 99 cm) aan de orde te stellen?

Ziehier een volgend didactisch aandachtspunt dat we bij de opzet van een leergang in het oog moeten houden.

'Spreek eens uit wat hier staat: 2,435?'

Antwoorden die veelvuldig voorkomen, eind groep 8 zijn:

1 'Twee komma vierhonderd vijfendertig.'

2 'Twee komma vier drie vijf.'

Ook hoort men soms de equivalenten hiervan:

3 'Twee komma vierhonderd vijfendertig duizendsten.'

4 'Twee komma vier tienden, drie honderdsten en vijf duizendsten.'

De laatste uitspraak komt maar weinig voor, en de voorlaatste uit zich nogal eens via de aanduiding '435 honderdsten', wat weer terug is te voeren op de eerdergenoemde interpretatie van kommagetallen als gehele getallen.

Overigens zijn er ook wel eens kinderen die zo'n kommagetal uit zichzelf met maten benoemen:

5 'Twee kilogram en vierhonderd vijfendertig gram.'

'Twee meter en vierhonderd vijfendertig millimeter.'

(Bij een getal met twee cijfers achter de komma komt de aanduiding met geld relatief vaak voor.)

In de genoemde verwoordingen weerspiegelt zich natuurlijk voor een belangrijk deel de aard van de gevolgde leergang. Kinderen zouden in principe alle aangeduide uitspraken moeten kunnen doen of tenminste begrijpen.

Gelet op de voorgaande analyse van fouten lijkt aanvankelijk de verwoording van aanduiding (2) te prefereren, omdat die rechtstreeks naar het positiesysteem of het decimale metrieke stelsel en het bijbehorende schema kan verwijzen - tenminste indien men de voorkeur aan de didactische ingang van het meten geeft. In ieder geval dient het uitspreken van geschreven kommagetallen in samenhang met de introductie van de kommagetallen te worden beschouwd. Daarbij moet overwogen worden of een bepaalde verwoording - zoals die van (1) - de begripsvorming niet bemoeilijkt.

'Hoeveel verschillende getallen liggen tussen 0,41 en 0,42?'

Slechts een klein percentage van de twaalfjarigen geeft als antwoord 'ontelbaar veel' of 'oneindig veel' of 'heel veel' of 'honderden'. Vaker luidt het antwoord 'één' of 'enkele getallen'. (Brown, 1981).

In de lijn van deze uitkomsten ligt ook het povere resultaat van het noemen van een getal dat tussen 0,41 en 0,42 ligt: hooguit een kwart van de leerlingen einde basisschool slaagt daar tot nu toe in. (Greer, 1987).

Men kan zich afvragen of bij een benaderingswijze via het meten van continue grootheden volgens de methode van de herhaalde decimale maatverfijning die opbrengst ook zo klein zou zijn.

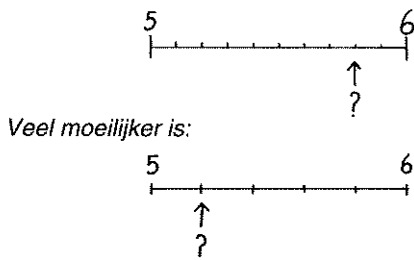
Indien *het plaatsen van kommagetallen op de getallenlijn* weinig of geen aandacht krijgt, zoals tot voor kort het geval was, dan blijken opgaven over het positioneren voor het overgrote deel van de leerlingen te moeilijk, zeker als er meer dan één cijfer achter de komma staat.

De goedscores variëren aanzienlijk, afhankelijk van de precieze inkleding van de opdracht en het al dan niet gegeven zijn van een schaalindeling en de aard van die indeling.

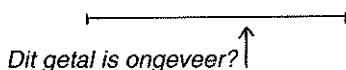
Gemakkelijk blijkt:

————— AFBEELDING 35

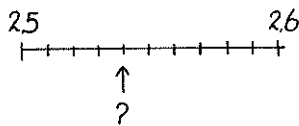
Welk kommagetal staat bij de pijl?



Ook is lastig:



Evenals:



In Engeland maakt iets minder dan éénderde van de twaalfjarigen elk van de laatste drie opgaven goed. (Brown, 1981). Uit vergelijkbare PPON-gegevens van eind jaren tachtig kan men afleiden dat de resultaten in Nederland weliswaar iets beter zijn, maar toch ook niet boven de vijftig procent uitkomen. (Bokhove en Janssen, 1988).

En ook nu weer rijst de vraag: indien het plaatsen van getallen op de getallenlijn uitdrukkelijk in het kader van het meten zou plaatsvinden, kan dan de goedscore van dergelijke opdrachten niet aanzienlijk toenemen?

Het ordenen van kommagetallen hangt met het voorgaande samen.

Uit het Nederlandse PPON-onderzoek van 1987 blijkt dat slechts een kwart van de kinderen eind groep 8 de volgende opgave goed oplost:

Op een kaasmarkt kan het gewicht van een stuk kaas geschat worden. Het weegt 2,100 kg.

De vier schattingen zijn:

Mevrouw Waanders 2,19 kg

Mevrouw Eissink 2 kg

De heer Caspers 1,99 kg

De heer Alfrink 2,02 kg

Wie van de vier is winnaar?

In een Engels onderzoek (Brown, 1981) onder twaalfjarigen was de goedscore bij de volgende opgave zelfs nog wat lager (18%):

Omcirkel het getal dat het dichtst bij 0,16 ligt
0,1 0,2 15 0,21 10

Ruim de helft van de kinderen koos 0,21.

Bijna de helft van de dertienjarigen uit de VS (Carpenter e.a., 1981) geeft het goede antwoord bij:

Welk getal is het grootste?

- 0,19
- 0,036
- 0,195
- 0,2
- ik weet het niet.

Een even groot percentage - u raadt het - kruiste 0,195 aan, hoewel 'ik weet het niet' hier beter op zijn plaats zou zijn (en eigenlijk ook goed!).

Ten slotte nog de specifieke problemen die de *nul op verschillende posities* kan geven, ook dit weer in samenhang met het eerder besprokene.

Een relatief veel voorkomende fout is de volgende:

76 is evenveel als 076, en dus is 0,76 ook evenveel als 0,076 want je mag die nul die voor de zeven staat immers schrappen.

De getallen achter de komma worden nu weer apart als gehele getallen beschouwd.

Ook geldt dan:

0,760 is groter dan 0,76.

Gelet op het voorgaande zou het aanbeveling verdienen om uit-

drukkelijk aandacht aan het volgende type vraagstukken te besteden:

Wat verandert er aan de verschillende positiewaarden en totale waarden als in 3,45 m op verschillende posities een nul wordt ingestoken:

03,45 m 3,045 m 3,405 m 3,450 m.

En hetzelfde met 3,45 als puur, onbenoemd getal ...

Tot zover het overzicht van een aantal moeilijkheden die kinderen blijken te ondervinden bij het interpreteren, noteren, verbaliseren, positioneren en ordenen van kommagetallen binnen traditioneel bepaalde leergangen. En ook van de didactische aandachtspunten die daaruit voortvloeien en vervolgens samenkomen in de hoofdvraag volgens welke didactische aanpak die problemen het beste voorkomen kunnen worden.

2 *Overzicht rekenmethoden*

De meeste rekenmethoden in Nederland verbinden de introductie van kommagetallen via meten direct met het plaatsen van die getallen op een meetlijn of schaal. Niet alle leergangen zijn echter van dezelfde kwaliteit. Enkele methoden hebben een heldere didactische opbouw, maar er zijn ook leerboeken waarin de uitlijning minder duidelijk is. Het is hier echter niet de plaats om nader op die kwaliteitsverschillen in te gaan.

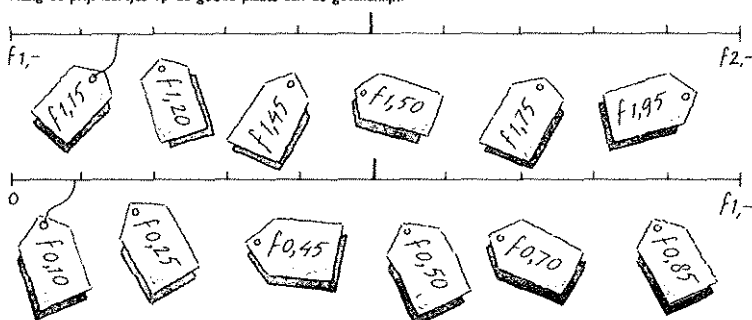
Het volgende overzicht biedt een compilatie van leergangonderdelen uit verschillende methoden. In de paragraaf hierna zullen we naast deze thans gebruikelijke opzet een wat andere leergang schetsen.

In alle recente leerboeken verschijnen kommagetallen voor het eerst in de context van geld. Daarbij worden geldbedragen soms ook op de getallenlijn geplaatst.

Een voorbeeld daarvan vinden we in *Operatoir Rekenen* (Sweers (red.), 1994, werkboek F1, pag. 7).

Kommagetallen

Hang de prijskaartjes op de goede plaats aan de getallenlijn.



Schrijf het bedrag in gulden, dubbeltjes en centen in het schema.

drie gulden vijftientig

twee gulden vijftig

één gulden vijf

vijf gulden drieëndertig

zes gulden negen

g		
g	d	c
3	2	5

negentig cent

vijfenzestig cent

vijf cent

tachtig cent

vierenveertig cent

g		
g	d	c

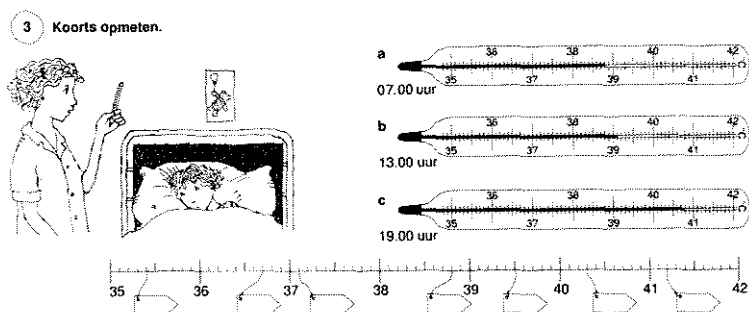
(Men kan de kleine slordigheid bij de plaats van het kaartje $f\ 0,10$ in de eerste opgave laten corrigeren. De correcte aanduiding $f\ 0,09$ leent zich voor nadere analyse, namelijk 0 dubbeltjes en 9 cent en niet zonder meer 9 cent of $f\ 0,9$ want die laatste beschrijving duidt op 9 dubbeltjes...)

De meeste methoden nemen echter andere ingangen voor het leren plaatsen van benoemde kommagetallen op de getallenlijn, zoals temperatuur (thermometer), inhoud (maatglas), gewicht (weegschaal), lengte (meetlat) en afstand (meetlat of afstandslijn). Wij ordenen de voorbeelden volgens toeneming van het aantal cijfers achter de komma. Ten eerste biedt dit het beste overzicht van de verschillende didactische ingangen, en ten tweede wordt

deze volgorde in de meeste methoden ook zo aangehouden. Wel geven we soms nog wat nieuwe didactische mogelijkheden aan die bij de betreffende activiteiten voor het grijpen liggen, maar toch niet altijd worden benut. Daarmee lopen we al enigszins vooruit op de volgende paragraaf, waarin een schets wordt gegeven van de door ons voorgestelde leerlijn kommagetallen die overigens niet volgens toeneming van het aantal decimalen is geordend.

De *thermometer* krijgt in diverse methoden een plaats. Een voorbeeld uit *Pluspunt* (Van Beusekom (red.), 1994, lesboek 6, pag. 73).

AFBEELDING 37



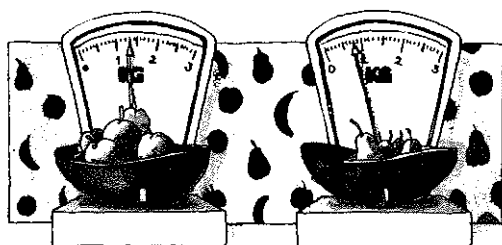
Hier en daar verschijnt ook een *maatbeker* (Huitema (red.), *Wereld in Getallen*, 1994, 6b, pag. 32), al wordt die nauwelijks gebruikt voor het aflezen en het plaatsen van kommagetallen.

AFBEELDING 38



Tevens wordt de *weegschaal* benut om meetgetallen met één cijfer (of meer cijfers) achter de komma af te lezen, al gebeurt dat niet in het volgende voorbeeld uit *Rekenwerk*. (Nelissen (red.), 1988, deel 7a, pag. 55).

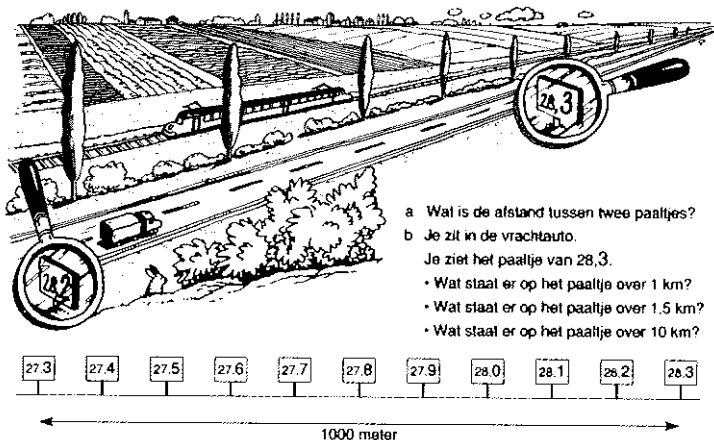
AFBEELDING 39



Verschillende methoden gebruiken *hm-paaltjes* om dergelijke 'enkelvoudige' kommagetallen op een getallenlijn te plaatsen. Een voorbeeld uit *Wereld in Getallen* (Huitema (red.), 1994, 6b, pag. 90).

AFBEELDING 40

1 De groene paaltjes langs de weg.



Hieruit blijkt tevens dat het positioneren vaak samengaat met opgaven over ordenen, optellen en aftrekken (verschil bepalen).

Ten slotte enkele andere voorbeelden over het plaatsen van kommagetallen met twee of meer cijfers achter de komma via het meten van *lengten en afstanden*.

AFBEELDING 41

De kinderen van groep 7 worden gemeten.

Jurgen	1,46 m
Marleen	1,48 m
Josfin	1,35 m
Harrie	1,51 m
Brenda	1,52 m
Alan	1,40 m

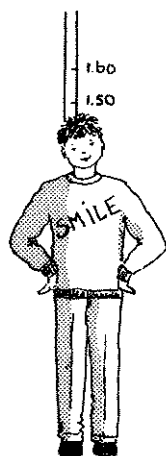
Wat betekenen die getallen?

Zet de kinderen in volgorde van groot naar klein.

Maak van de lengte eerst centimeters.

Alan: 1,40 m. Kun je ook zeggen Alan 1,4 m?

Wat kun je daarvan maken?



In de handleiding van *Rekenen en Wiskunde* (Gravemeijer, 1987, deel 5B, pag. 72) staan nog suggesties voor het meten, het plaatsen van lengten op de (verticale) getallenlijn en het onderscheid maken tussen 1,4 m en 1,40 m naar de mate van precisie.

In verschillende methoden wordt de relatie met een *positie-* of *maatkaart* gelegd, vergelijkbaar met de muntenkaart bij geld (met g, d en c-aanduidingen).

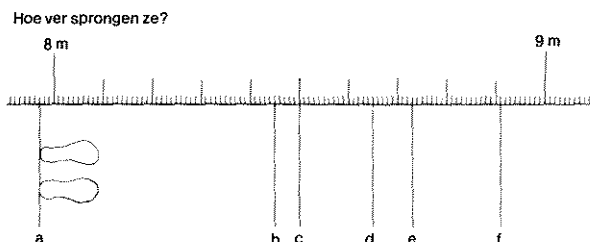
Een voorbeeld daarvan uit *Rekenen en Wiskunde* (Gravemeijer (red.), 1987, werkboek 5B, pag. 6) met en zonder kommagetallen.

AFBEELDING 42

		km	hm	m	dm	cm	mm
36	km						
360	m						
0,36	m						
36	mm						
3,6	m						
3,6	cm						

Verwant met de lengtemeting is de volgende afstandsmeting via een (stuk van een) getallenlijn. (Gravemeijer (red.), *Rekenen en Wiskunde*, 1987, Opdrachtenboek, deel 5B, pag. 14).

AFBEELDING 43



De maten van 1 m, 1 dm en 1 cm zijn dan voor de meeste kinderen al duidelijke referentiepunten (stap, palmbreedte, nagelbreedte). De betreffende spronggrootten kunnen gerelateerd worden aan de geschatte en gemeten lengte van het klaslokaal. Ten slotte een opgave die ook in verband met het positioneren op de getallenlijn gebracht kan worden, en ook met het uiteenleggen van de betreffende afstand in een maattabel.

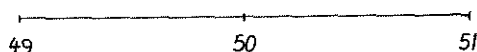
AFBEELDING 44

Dit is de wielrenner Francesco Moser op zijn speciale fiets. Op 19 januari 1980 verbeterde hij op deze fiets het wereld-uurrecord. Dat record stond sinds 1972 op naam van de Belg Eddy Merckx. Merckx reed toen 49,43195 kilometer. Moser doorbrak de magische grens van 50 kilometer en reed 50,809 kilometer.



Een mogelijke opdracht bij deze opgave uit *Rekenen en Wiskunde* (Gravemeijer (red.), 1987, Opdrachtenboek 5B, pag. 24) :

AFBEELDING 45



Plaats de afgelegde afstand van Merckx en van Moser ongeveer op de bovenstaande getallenlijn. Tevens kan daarbij de verbinding met het afronden worden gelegd op km, hm, ... nauwkeurig. Plaats ook 50,2 en 50,24 en 50,248 uit onderstaande opgave op deze lijn.

AFBEELDING 46

2 Kilometertellers.



Wij hebben vandaag 50,24 km gefietst.



De wielrenner reed in een uur 50,248 km.



De kilometerteller van de nieuwe auto staat op 50,2 km.

Hulpmiddel bij plaatsing: stel in gedachten de *kilometerteller* eerst in op de weergave van één decimaal, dan op twee decimalen en ten slotte op drie decimalen achter de komma.

De volgende opgave uit *Wereld in Getallen* (Huitema (red.), 1994, 7a, pag. 14) geeft onder meer aanleiding tot optellen.

AFBEELDING 47

Waarop staat de kilometerteller? Neem de tabel over en vul die in.

	over 100 m	over 1 km	over 600 m
0 0 0 1 8 5			
0 0 0 0 9 8			
0 0 0 4 8 7			

De verbinding met de getallenlijn wordt nu echter niet gelegd. Toch is de relatie tussen de km-teller en de getallenlijn van belang, met name als hierbij het idee van het wisselend kunnen instellen van een teller op één of meer plaatsen achter de komma als denkmodel wordt gebruikt voor het globale positioneren van kommagetallen.

Ten slotte nog een kort overzicht van de leergangen in speciaal de methoden die gebaseerd zijn op het meten en die een hechte verbinding leggen met metrieke maten en het *metrieke stelsel*.

Kommagetallen met één decimaal (achter de komma) staan aan het begin van de leergang - even afgezien van geldbedragen die al in groep 5 verschijnen. Als contexten voor de één-decimalen dienen afstanden (hectometerpaaltjes en afstandspaddestoelen) en temperatuur (koortsthermometer). Er wordt van meet af aan gepositioneerd en geopereerd (verschil, stijging en daling).

Dan volgen de twee-decimalen. Meestal gebeurt de introductie daarvan aan de hand van lengtemeting (eigen lengte, voorwerpen uit omgeving, verspringen, hoogspringen), tegelijk met de invoering van de lengtematen meter, decimeter en centimeter, snel gevolgd door de inhoudsmaten liter, deciliter en centiliter (maatglas). In een enkel geval wordt de decimale tijdmeting met tien-

den en honderdsten van seconden in de context van sport daar direct aan toegevoegd.

De drie-decimalen verschijnen via lengten en afstanden (met m of km als basis) en gewichten (met kg of g als basis) in allerlei reële contexten. De inhoudsmaten worden uitgebreid tot milliliter (met liter als basis). De relatie van deze maatkennis met persoonlijke referentiepunten wordt aan de orde gesteld via opgaven waarin de komma's bij maten geplaatst moeten worden. De verbinding van een en ander met het (globale) positioneren van kommagetallen op schaallijnen of getallenlijnen is echter meestal niet hecht verankerd. De aangeduide leergangen van kommagetallen zijn nauw verweven met die van het meten in het kader van het metrieke stelsel i.c. lengte, gewicht en inhoud (via maatglas). De relatie van kommagetallen met breuken daarentegen is in het eerste deel van deze leergangen vrijwel geheel verbroken - zeker in de nieuwste versies van de betreffende methoden.

Zou men uit de diverse leergangen in reken-wiskundemethoden *één ideaaltype* moeten samenstellen *met meten als basis*, dan zou deze volgens toenemende complicering zijn ingedeeld: eerst één cijfer achter de komma, dan twee cijfers en ten slotte drie of meer cijfers achter de komma.

Steeds zou per type *lengte- en afstandsmeting* als uitgangssituatie worden gekozen, waarbij voornamelijk 'meter' en 'kilometer' als basiseenheden fungeren die decimaal worden verfijnd.

Vanuit deze *modelcontext* vindt steeds per decimale verfijning verbreding en toepassing van het geleerde plaats in verschillende meetcontexten, zoals bijvoorbeeld met inhoud, gewicht, temperatuur, tijd en zo meer.

Een dergelijke opzet is didactisch te verantwoorden: de opbouw is helder, de verbinding met (metriek) meten duidelijk en de modelcontext is precies toegesneden op het positioneren vanwege de lengte- en afstandsmeting op lijn. Kortom, het zou een door-dachte spiraalsgewijze opzet zijn die een wat strakkere stilering heeft gekregen dan in de bestaande leergangen. Anders gezegd: men zou met recht en rede voor zo'n didactische uitlijning kunnen kiezen. Maar wij hebben dat in het volgende voorstel toch niet zo gedaan...

3 Proeve-leerlijn

3.1 MODELCONTEXT (1): LENGTE METEN

We nemen dezelfde modelcontext als basis voor het positioneren. Maar de stapsgewijze opbouw volgens toevoeging van decimalen wordt door ons niet gevolgd.

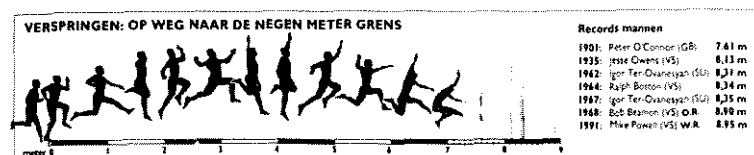
Om te kunnen aansluiten bij de informele kennis van kinderen over kommagetallen starten we in de modelcontext met twee decimalen. Daarmee zijn de leerlingen het meest in aanraking gekomen via geld en allerlei meetcontexten. Een bijkomend didactisch argument is dat nu direct de relatie tussen twee decimalen met één decimaal en met drie of meer decimalen kan worden gelegd door respectievelijk grover en verfijnder meten in dezelfde context. Waarmee de problematiek van het meten, noteren en positioneren meteen in zijn totale complexiteit aan de orde komt. Pas daarna vindt de 'overdracht' van het geleerde naar andere meetcontexten en naar pure kommagetallen plaats.

Bij een en ander vervullen (kilometer)tellers een belangrijke denkfunctie bij het positioneren van de betreffende meetgetallen op de getallenlijn.

We starten met verschillende contexten van lengte meten.

Springen en meten

AFBEELDING 48



Dit probleem wordt aangeboden eind groep 6, begin groep 7¹:

Wat betekent 7,61 m?

'Zeven meter en 61 centimeter, net zoals zeven gulden en 61 cent.'

‘Ruim zeven en een halve meter.’

‘Zeven meter, zes decimeter en 1 centimeter.’

In groep 5 en de eerste helft van groep 6 is in de bestaande rekenmethoden al veel aandacht besteed aan lengte- en afstandsmaten. Kinderen zijn bekend met:

km hm (dam) m dm cm mm

Ze kennen ook de relaties tussen deze maateenheden, in ieder geval tussen de buurmaten. En de komma-aanduiding is bekend van geldbedragen in guldens en centen. Naast de hm (te lezen als hectometer of *honderdmeter*) kan desgewenst de tm worden ingevoerd als afkorting voor *tienmeter* - in de meeste methoden wordt de aanduiding decameter of dam niet meer aangeboden, vandaar dit tm-voorstel.

Terug naar het verspringen.

Schat 8 m. Is dat langer of korter dan het klaslokaal?

De meningen blijken verdeeld.

Wie heeft gelijk? Spanning ...

De lengte van het klaslokaal wordt gemeten met de *bordliniaal* van één meter waarop een onderverdeling van decimeter en centimeter is aangebracht. Het lokaal blijkt iets minder dan 9 meter lang te zijn - dus toevallig ongeveer de vertesprong van Powell en Beamon!

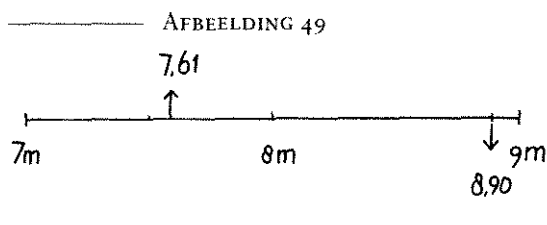
Enkele leerlingen uiten hun verwondering over de enorme lengte van de sprong. Een paar kinderen praten over hoever ze zelf springen. Eén van hen zegt ‘ik spring 3 meter 85’.

Nu wordt een streepje gezet bij 8 m.

Hoever is het eerste record van 7,61 meter? Eerst schatten dan meten. Carolien legt vanaf 8 m de bordliniaal 39 cm terug. Iedereen controleert of dat goed gebeurt - na enkele mismetingen lukt het. Dan blijkt dat enkele schattingen er flink naast zitten. Achteraf dom, want je had 4 dm oftewel 4 handpalmen of ruim één gewone liniaal die 30 cm is, kunnen gebruiken. Wat op de vloer gebeurt, wordt tegelijkertijd ook op het bord gedaan op een stuk

van de getallenlijn: het interval van 7-9 meter.

Nu laten we de leerlingen 7,61 m op een voorbedrukte getallenlijn van een werkblad tekenen.



Er wordt gevraagd of je dat schattend moet doen.

Kim weet niet wat ze moet doen. 'Op één zo'n stukje kunnen maar 15 van die streepjes ...'

Chahir helpt: 'Maar op ongeveer de helft zit 7,5 dan moet je iets verder zitten.'

Iedereen plaatst vervolgens 7,61 m ongeveer goed.

Op het bord is de plaatsing met behulp van de bordliniaal zojuist precies uitgevoerd op het vak 7 - 9 meter.

Daarna wordt de sprong van Bob Beamon (8,90 m) geplaatst, eerst op papier en dan op het bord.

Geen problemen: 'Hij staat goed, vanaf de helft ongeveer 40 cm ernaast.'

De andere records worden op het bord globaal aangewezen. De groep controleert en geeft zo nodig aanwijzingen om wat meer naar links of rechts te gaan.

Ten slotte een opgave over de visualisering van de relatie tussen één- en tweecijferige decimalen:

Jeanette meet met een bordliniaal en schrijft op 8,9 meter.

Kim meet met een bordliniaal en noteert 8,09 meter.

Lars meet met een bordliniaal en schrijft 8,10 meter.

Plaats deze maten op de straks gegeven getallenlijn (één op papier en één op ware grootte op het bord).

AFBEELDING 50



Renate zet 8,9 meter voor aan de lijn ...



Caroline doet het anders en plaatst 8,9 boven 8,90



Wie heeft gelijk?

Enkele kinderen uit (begin) groep 7 twijfelen. De onderwijssge-
vende pakt de bordliniaal erbij: '8,90 meter is hier 8 meter (wijst
naar begin getallenlijn) en ...'

Melvin zegt: '90 centimeter.'

'8,9 meter is 8 meter en ...'

Chahir vult aan: 9 decimeter.'

De groep knikt instemmend.

Elise mag vervolgens de verkeerd geplaatste 8,9 uitvegen.

AFBEELDING 51



Caroline geeft op de vraag hoe 8,09 gelezen moet worden als ant-
woord: 8 meter en 9 centimeter.

*Enkele leerlingen merken op dat dit hetzelfde is als bij f 8,09,
want dat is 8 gulden en 9 cent, en 8,9 kun je lezen als 8 gulden en
9 dubbeltjes, of 8 gulden en 90 cent, of 8 gulden en 9 dubbeltjes
en 0 cent!*

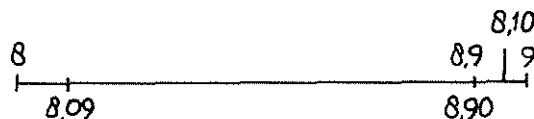
Plaatsing op de getallenlijn van het bord en op papier gaat nu
ook goed:

AFBEELDING 52



Waar moet 8,10 staan?

Sander plaatst 8,10 tussen 8,9 en 9 aan de bovenzijde:



‘Want hij ligt 1 mm verder’, licht hij toe.

Chahir denkt er anders over: ‘8,10 is hetzelfde als 9 meter.’

Melvin en Jacoub stemmen ermee in.

Anjeni reageert: ‘Dat kan niet.’

Kim zegt: ‘Dat maakt toch niet uit. Je kunt toch ook zeggen 8,1.’

(En Melvin is het daarmee eens!)

Renate stelt voor om te gaan meten: ‘8 meter en 10 centimeter.’

Marten-Jan zegt: ‘8 meter en 1 dm.’ En voegt eraan toe: ‘Het blijft hetzelfde aantal, alleen dan in decimeters.’

Nu gaat Renate tekenen en uitwissen:

AFBEELDING 53



Ten slotte een moment van reflectie:

De onderwijsgevende komt nog eens terug op 8,1 en 8,10. En ook op 8,9 en 8,09 en 8,90.

Hij zegt: ‘Er waren allerlei misverstanden bij het plaatsen van de gemeten lengten. Hoe hadden we die kunnen vermijden? Of anders gezegd: wat had Jeanette kunnen doen om het ons gemakkelijker te maken?’ (Ze schreef 8,9 meter ...)

‘Inderdaad, ze had beter 8,90 m kunnen opschrijven, want dan

was alles in cm nauwkeurig genoteerd, wat Jeanette had gedaan. Ze zei *f* 8,9 oftewel 8 gulden en 9 dubbeltjes, maar ze kan ook zeggen 8 gulden en 9 dubbeltjes en 0 cent, zo zeg ik het maar even ...'

De relatie tussen gelijkwaardige één- en tweecijferige kommagetallen is hiermee aangegeven. (Op de conventie dat het aantal cijfers achter de komma aangeeft in welke mate van verfijning is gemeten, wordt nu nog *niet* ingegaan: 8,9 m betekent voor Jeanette en de andere kinderen 8 m en 9 dm, precies gemeten met de bordliniaal, met weglating van 0 cm. En ook de algemene regel van het toevoegen van nullen wordt nog niet expliciet geformuleerd.)

In het volgende zal de verbinding van de twee decimalen met de drie decimalen worden gelegd.

Eigen lengte meten

Leerlingen meten hun eigen lengte. Verschillende meetinstrumenten worden gebruikt: rolcentimeter, bordmeter en liniaal, soms in combinatie.

Sommigen meten eerst met hun schoenen aan. Dat wordt uiteraard een punt van discussie. Correctie vindt onder meer plaats door de dikte van de schoenzolen te meten. Er wordt aangespoord om zo precies mogelijk te meten.

Soms leidt dit tot vaker meten. Maar ook tot meer precieze meetresultaten, geformuleerd als:

'1,52 meter en nog een beetje, da's millimeters'

'1,52 meter en nog 5 millimeter.'

De onderwijsgevende noteert deze lengte als 1,525 meter. Sommige leerlingen reageren wat verbaasd. Nu worden alle opgegeven en geschreven lengten vergeleken.

Wie is het langst?

Melvin: 'Dat weten ze zo ook wel. Ik ben 1,59 meter.'

Deze lengte wordt aangegeven op een verticale getallenlijn waarop het vak van 1 tot 2 meter is getekend.

Hoe lang is dat?

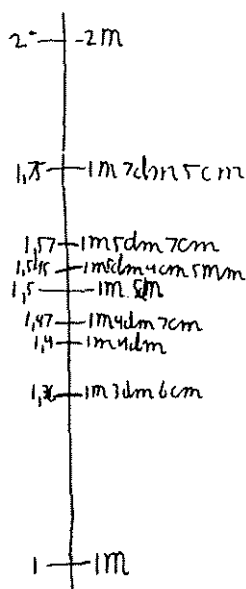
'1 meter, 5 decimeter en 9 centimeter.'

'1 meter, 59 centimeter.'

De eerste aanduiding wordt naast 1,59 m genoteerd.

Nu de lengte van Chahir (1,525 meter). Waar komt die te staan? 'Erboven. Nee, toch eronder. Omdat 59 meer is dan die 52'. Renate herstelt haar uitspraak. Ze weet dat Melvin groter is en kan vervolgens de goede motivering via de meetgetallen vinden: want 59 centimeter is langer dan 52 centimeter plus een beetje. Verschillende andere lengten worden op de getallenlijn geplaatst, waaronder 1,4 m en 1,5 m volgens de Jeanette-notatie als eerder aangegeven. Sommige leerlingen noteren bij hun eigen werk steeds de ondermaten. Voor de zwakkere leerlingen biedt deze uitgebreidere notatie steun.

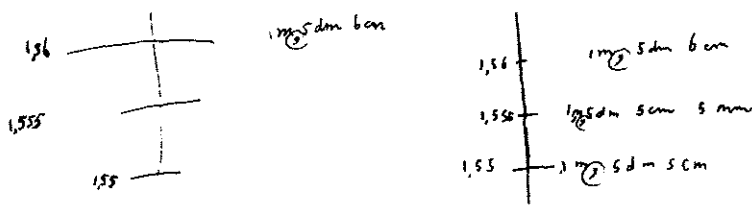
AFBEELDING 54



Welke getallen staan tussen 1,55 en 1,56?

Gelet op het voorgaande is het niet verwonderlijk dat de antwoorden vaak precies tussen deze lengten staan. We laten nu komma's plaatsen voor de ondermaten (zie afbeelding 55) - een didactische vrijmoedigheid als overgangsnotatie.

AFBEELDING 55



Soms volstaan leerlingen met kale kommagetallen, een andere keer worden de ondermaten erbij geschreven.

In de volgende activiteit wordt de mm-notatie van de derde decimaal uitgebreid met andere cijfers dan de 5.

AFBEELDING 56

Jeugd groeit ruim twee centimeter in dertien jaar

Van onze verslaggever

AMSTERDAM

De Nederlandse jeugd is nog steeds in de groei. Tussen 1980 en 1993 zijn jongens van twintig gemiddeld 2,1 centimeter langer geworden en meisjes zelfs 2,2 centimeter.

Dat blijkt uit cijfers die het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) dinsdag bekend heeft gemaakt. De gegevens zijn de eerste landelijke cijfers sinds 1980.

Jongens van twintig blijken tussen 1980 en 1993 gegroeid van gemiddeld 1.81,2 tot 1.83,3 meter, meisjes van 1.68,2 tot 1.70,4 meter.

Van de jongens van twintig is 3 procent langer dan 1,96 meter; de grootste lengte bleek 2,03 meter te zijn. Van de meisjes van negentien jaar is 3 procent langer dan 1,82 meter; het maximum is 1,94 meter.

(VOLKSKRANT, 1994)

Dit knipsel, waarin enkele verwarrende notaties staan, wordt als basis gebruikt om de derde decimaal nog eens speciaal onder de loep te nemen.

Eerst de aanduiding 1.81,2 meter.

Wat staat daar in de krant?

Een leerling: '181 meter en 2 decimeter.'

Wat wordt bedoeld?

We halen drie antwoorden naar voren:

1 'Bedoeld wordt 181 centimeter, 2 millimeter.'

2 'Bedoeld wordt 1 meter, 81 centimeter, 2 millimeter.'

3 'Bedoeld wordt 1 meter, 8 decimeter, 1 centimeter en 2 millimeter.'

Hoe noteren we (1) met een kommagetal?

'181,2 cm.'

Hoe noteren we (2)?

'1,812 m.'

Het laatste is, zoals (3) ook te lezen als:

'1 meter, 8 decimeter, 1 centimeter, 2 millimeter.'

Corrigeer nu 1.68,2 m en 1.70,4 m.

Nu gaan we precies uitmeten op het bord.

1,812 m 1,96 m

1,833 m 2,03 m

1,682 m 1,82 m

1,704 m 1,94 m

De liniaal dient als meetinstrument. De precisie van mm is nauwelijks met een scherp krijtlijntje aan te geven. Want een heel smal krijtstreepje is, net als een pen- of potloodstreep, zelf al gauw een mm dik. (Naast de stap voor m, de palm voor dm, de nagel voor cm, hebben we nu de streepdikte als referentiemaat voor mm!)

Ten slotte komen we nog eens terug op de aanduidingen:

1,812 m en 1,81 m en 1,82 m

Indien we met 1,81 m bedoelen 1 m, 8 dm, 1 cm en 0 mm kunnen we beter schrijven 1,810 m. Deze toevoeging van de nul maakt ook de vergelijking met 1,812 gemakkelijker.

We gaan er, zoals eerder gezegd, voorlopig maar van uit dat in situaties waarin met verschillende cijfers achter de komma wordt gemeten, in alle gevallen met de kleinste ondermaat is gewerkt en

dat 'onnodige' nullen zijn weggelaten, die voor het gemak desgewenst ook weer toegevoegd mogen worden.

Leerlingen hebben nu ervaring opgedaan met het lengte meten tot in mm nauwkeurig. Ze kunnen kommagetallen benoemd met meter tot drie decimalen achter de komma lezen en uitmeten.

In het volgende wordt een en ander nog eens beoefend met nul-kommagetallen die het moeilijkste blijken te plaatsen.

A4-blaadje meten

Hoeveel m is een A4-blaadje lang?

Hoeveel m is een A4-blaadje breed?

Rare vragen. Maar probeer ze toch maar eens te beantwoorden, want we hebben er een speciale bedoeling mee! Het antwoord is alleen te vinden als je de komma-notatie gebruikt. Hoe? Ga eerst maar meten, en probeer dan de uitkomst in 'zoveel meter komma zoveel' op te schrijven.

Gebruik je liniaal.

De *lengte* van het A4-blaadje is 29 cm en 7 mm (of 8 mm of 7,5 mm).

Hoe schrijven we 29 cm en 7 mm in meter?

Antwoorden: •, 297 m en 0,297 m.

De laatste notatie is de beste en moet gelezen worden als:

'0 meter, 2 decimeter, 9 centimeter, 7 mm.'

Andere mogelijkheden?

'0 meter, 29 cm, 7 mm.'

'0 meter, 297 mm.'

Schrijf het ook eens met cm als maateenheid.

'29,7 cm.'

Plaats 0,297 grofweg op de getallenlijn.

AFBEELDING 57



Het zit dicht in de buurt van 0,300 m oftewel 3 dm.

De *breedte* van het A4-blaadje blijkt 21,1 cm te zijn. Dat is 0,211 m en zit in de buurt van 0,200 m of 0,2 m oftewel 2 dm. De lengte van het A4-blaadje is bijna 30 cm of bijna 3 dm, of bijna 0,3 m; en de breedte is ruim 20 cm, of ruim 2 dm, dus ruim 0,2 m.

Het globale meetresultaat staat in dm (3 dm en 2 dm). Preciezer is een aanduiding in cm (30 cm en 21 cm). En nog nauwkeuriger in mm (297 mm en 211 mm). Al deze meetuitkomsten kunnen genoteerd worden in m, dm, cm en mm, waarbij de plaatsing van de komma varieert.

In het voorgaande zijn de leerlingen enigszins vertrouwd geraakt met de komma-notatiewijze en de plaatsing van kommagetallen op de getallenlijn.

Ten slotte een lastig onderzoeksprobleem, weer in de vorm van een rare vraag die de noodzaak van de komma uitlokt.

Hoeveel meter is de *dikte* van een A4-blaadje?

We hebben er nu een moeilijkheid bij, omdat we de cm-maat niet goed kunnen gebruiken, en ook de mm op de liniaal is nog te groot. De *dikte* is immers minder dan 1 mm ...

We zouden dus als antwoord kunnen geven:

‘Een A4-blaadje is dunner dan 0,001 meter.’

Maar zo’n antwoord vinden we niet precies genoeg. Hoe zouden we, met een handige truc, de dikte van een A4-blaadje nauwkeuriger kunnen bepalen?

Ga daar eerst maar eens in groepjes van vier over denken en praten. Daarna gaan we dan echt meten, als het even kan ...

... Er zijn groepjes die op het idee komen om meer blaadjes op elkaar te leggen.

Dat idee reiken we na een minuut of vijf de gehele groep aan. Hoe kunnen we langs deze weg tot een behoorlijke meting komen?

Er worden verschillende voorstellen gedaan, waarvan we er drie noemen:

- Kijk hoeveel blaadjes samen 1 mm dik zijn.
- Leg alle blaadjes van de klas op een stapel en meet de dikte ervan.

- Meet de dikte van 100 blaadjes (haal er nog wat bij van de kopieermachine, of neem een pak van 500 stuks mee).

Na veel passen, meten en missen blijken al deze strategieën tot één uitkomst te leiden: 10 blaadjes zijn ongeveer 1 mm dik, oftewel 100 blaadjes 1 cm of 10 mm.

Conclusie: 1 blaadje is 0,1 mm dik, ongeveer.

En nu het antwoord in meter:

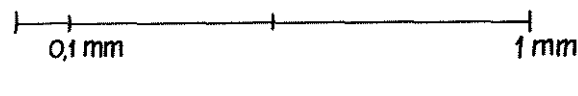
‘0,0001 meter is de dikte van één A4-blaadje.’

Dat 10 blaadjes samen ongeveer 1 mm dik zijn, kan iedereen nog wel volgen, maar dat dan 1 blaadje 0,1 mm dik is, blijkt voor enkele kinderen een te grote stap. Doch daar tillen we nu maar niet te zwaar aan. Want ook zij hebben begrepen dat je maten in principe kunt blijven verfijnen: in mm en dan in mini-mm en zo verder.

Overigens: niet alle blaadjes papier zijn even dik. Je kunt dit makkelijk testen met bladzijden uit verschillende boeken. Ook dan kun je weer 100 bladen (200 bladzijden!) kiezen en meten.

Positioneren van deze maten op de getallenlijn lukt alleen maar als we 1 mm als maat nemen en deze behoorlijk uitvergroten.

AFBEELDING 58



Later kan een en ander desgewenst nog eens worden herhaald met het *gewicht* van één A4-blaadje uitgedrukt in kg en vervolgens kan worden ingegaan op de officiële aanduiding 80 gram per m² voor A4-kopieerpapier bijvoorbeeld (80 grams, zegt de drukker).

Aan het einde van modelfase (1) zijn deze leerlingen in staat lengtematen met één en twee cijfers achter de komma op een getallenlijn te plaatsen - althans globaal en daar gaat het ook om. De relatie tussen één- en twee-decimale kommagetallen levert ook weinig moeilijkheden op als ze bijvoorbeeld als meter benoemd

zijn: de leerlingen zetten de desbetreffende kommagetallen dan om in m, dm en cm, desgewenst.

Alleen kommagetallen met drie of meer cijfers achter de komma zijn voor sommigen moeilijker voorstelbaar. En ook de relatie met één- en twee-decimalen staat allen nog niet even helder voor ogen.

Vandaar dat we de modelfase uitbreiden met afstandmeting in kilometers.

3.2 MODELCONTEXT (2): AFSTAND METEN

Wat in de modelcontext (1) van lengte meten (in meters) over het interpreteren, noteren en positioneren van kommagetallen is geleerd, wordt in contextfase (2) nog eens herhaald en uitgebreid met afstand meten (in kilometers). Daarbij verschijnen ook weer benoemde kommagetallen met één cijfer en meer cijfers achter de komma.

We introduceren hiervoor twee contexten:

- plaatsaanduidingen langs de spoorlijn
- afstandsrecords bij wielrennen.

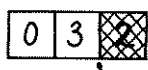
Omdat we bij de afstandsmeting de (verfijnde) kilometerteller een belangrijke didactische functie toekennen, introduceren we eerst de meterteller via het klikwiel.

Klikwiel, meter- en kilometerteller

Lengten kunnen ook worden gemeten met een *klikwiel*, dat is een wiel dat met 1 draai 1 meter aflegt, en na elke ronddraai klikt. Soms heeft zo'n klikwiel een teller die de afstand in dm nauwkeurig aangeeft. We laten het klikwiel over een gemeten lijn van ruim 3 m rollen.

Wat betekent het als de teller op het klikwiel aanwijst:

————— AFBEELDING 59

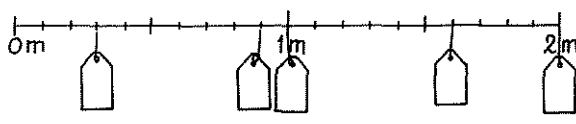


‘De lengte is 3,2 meter of 3 meter en 2 decimeter.’

Plaats 3,0 en 3,2 en 3,9 op de getallenlijn.



Waar staat de meterteller van het klikwiel op de volgende plaatsen waar kaartjes hangen?



De nul-komma-aanduidingen geven hier en daar toch wat problemen. Ook de 'helen' worden nog eens goed bekeken.

Welke tellerstand verschijnt als eerstvolgende na 0,9 na 1,9 na 2,9 meter?

Vervolgens wordt de afstandsmeting via de context van de hectometerpaaltjes langs snelwegen en spoorlijnen geïntroduceerd, zoals eerder beschreven in paragraaf 2.

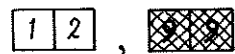
Dezelfde soort opgaven worden gesteld als zojuist met het klikwiel.

Maar in plaats van de relatie m-dm komt nu de aandacht op de relatie km-hm. Als vervanger van het klikwiel met de meterteller verschijnt nu de *kilometerteller* van de auto en van de trein.

Ook de kilometerteller van de fiets (de odometer of fietscomputer) die zowel op één cijfer achter de komma (*hm* of *honderdmeter*) als op twee cijfers achter de komma (*tm* of *tienmeter*) kan worden ingesteld, wordt er nu bij gehaald. Het positioneren van gegeven standen en omgekeerd het noteren van standen bij gegeven punten laten we vooralsnog achterwege - het gaat allereerst om de *kilometerteller als denkmodel*. Wel wordt de aandacht nog eens op de opeenvolging van de verschillende tellerstanden gevestigd.

Welke tellerstand verschijnt na?:

AFBEELDING 60



Het voorgaande bevat ten opzichte van de modelcontext (1) in feite maar één nieuw element, namelijk in plaats van de liniaal of opgerolde centimeter verschijnt hier het afrollende wiel als meet-instrument plus bijbehorende meterteller en de kilometerteller met één of meer verfijningen achter de komma. Het globaal positioneren van de tellerstanden op de getallenlijn wordt dan nog gemakkelijker: *in gedachten* kan de teller eerst grof worden ingesteld en dan geleidelijk steeds meer verfijnd met één cijfer of meer cijfers achter de komma. Deze strategie van steeds nauwkeuriger plaatsbepalen zal in het volgende worden toegepast.

Ontspoorde trein

AFBEELDING 61

Verwarring instructie trein

Door onze redacteur ZEGER LUYENDIJK

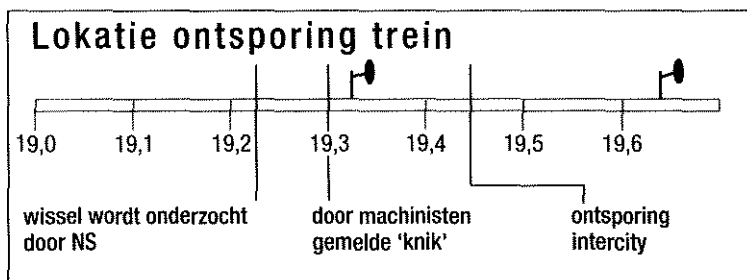
AMSTERDAM, 2 DEC. Op de plek waar afgelopen maandag de intercity Amsterdam-Vlissingen ontspoorde gold volgens het NS-document 'Overzicht van tijdelijke snelheidsbeperkingen' geen enkele snelheidsrestrictie. Maandagmorgen heeft de machinist aanvullende instructies gekregen, waarover de NS geen mededelingen wenst te doen. Machinisten die anoniem wensen te blijven menen dat de nieuwe aanwijzingen geen betrekking hadden op het deel waar de intercity is ontspoord.

De intercity ontspoorde nabij kilometer 19,5. Volgens het document begint de snelheidsbeperking op kilometer 19,7. Het 'Overzicht van tijdelijke snelheidsbeperkingen' TSB 49, geldig van maandag 30 november aanvang dienst tot zondag 6 december einde dienst, is vorige week donderdag uitgereikt aan de machinisten van de NS. Op pagina 5 staat dat bij Hoofddorp tussen kilometer 19,7 en 20,5 maximaal 90 kilometer per uur mocht worden gereden.

(NRC HANDELSBLAD, 2-12-'92)

'De intercity ontspoorde nabij kilometer 19,5 ...' staat in het krantenbericht.

Kun je het punt van ontsporen aan de hand van het onderstaande schema uit de krant wat nauwkeuriger aangeven?



Bedenk zoveel mogelijk aanduidingen of omschrijvingen van de plaats van de ontsporing.

Oplossingen die verzonnen worden:

'Iets voor het midden tussen 19,4 en 19,5 km.'

'Ruim 19,4 km.'

'Op ongeveer 19,45 km.'

'Op 19,44 km.'

'Op 19 km en 440 m.'

'Op 19 km, 4 hm, 4 tm.'

'Op 19 km, 4 hm, 40 m.'

.....

Ze worden stuk voor stuk besproken.

Zijn ze precies, zijn ze correct?

Wat zou de kilometerteller van de trein (dagteller) hebben aangegeven als daarop twee cijfers achter de komma staan? Welke van de genoemde notaties passen daarbij?

Het beste antwoord op de laatste vraag is 19,44 km.

Beantwoordt de vraag van de kilometertellerstand ook eens voor de wissel die in de tekening is aangegeven.

Veel leerlingen blijken deze lokatie vanuit het punt 19,25 te benaderen en kiezen dan voor 19,22 of 19,23 km.

Soms worden punten zelfs in drie decimalen achter de komma aangegeven op spoorlijnskaarten. Dat is bijvoorbeeld bij seinen het geval.

Zo staat het sein (🚦) iets voorbij 19,6 officieel aangeduid op

19,642 km.

Zeg dit eens anders.

'19 km, 6 hm, 4 tm, 2m.'

'19 km, 6 hm en 42 m.'

'19 km, 642 m.'

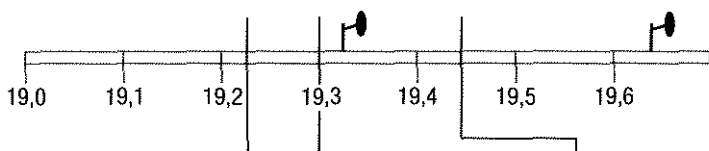
Raadt waar het sein vlak voorbij 19,3 staat.

Na de inventarisatie van de antwoorden volgt de vergelijking met de juiste lokatie (19,320 km). Verschillen worden berekend.

Eén sein op het baanvak 19,0 - 19,7 is weggelaten. Het staat op 19,125 km.

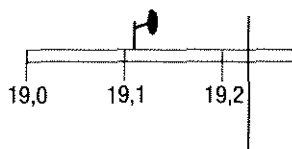
Waar is dat (ongeveer)? Teken het sein op de kaart.

AFBEELDING 63



Klopt de gevonden plaats met wat er op het originele kaartje uit de krant staat, zoals hieronder weergegeven?

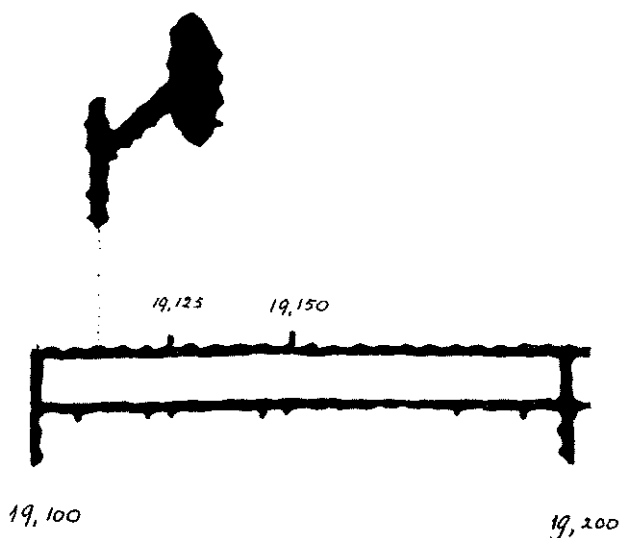
AFBEELDING 64



De aanduiding op de kaart van 19,125 klopt niet, zo blijkt uit twee keer halveren. Deze strategie wordt wat vereenvoudigd indien de punten 19,1 en 19,2 preciezer worden aangeduid als 19,100 en 19,200, dus door nullen toe te voegen. Vaak worden bij precieze aanduidingen de nullen toch weggelaten, net zoals de rekenmachine dat doet.

Uitvergroot:

AFBEELDING 65



Herhaald halveren levert goede referentiepunten op voor het globaal plaatsen van kommagetallen. De toenemende precisie van de seinpaalaanduiding kan worden nagegaan met verschillende afstellingen van de km-teller op geen, één of meer cijfers achter de km-komma:

19 km

19,1 km

19,12 km

19,125 km

Cruciaal hierbij is dat 19,125 begrepen wordt als:

– ‘ruim 19 maar minder dan 20, dus tussen 19 en 20’

– ‘ongeveer 19,1 maar minder dan 19,2, dus tussen 19,1 en 19,2.’

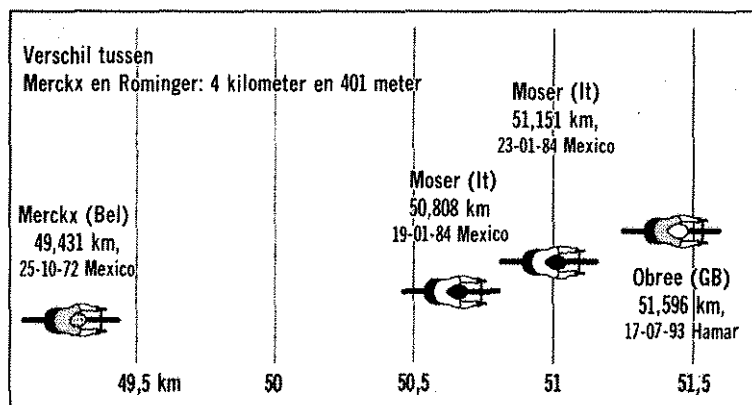
De km-teller kan hierbij als denkmodel fungeren: *veel cijfers achter de komma betekent (betrekkelijk) precies meten, maar zegt op zich nog niets over ‘verder’ of ‘ver weg’.*

Werelduurrecords wielrennen

In 1972 werd het werelduurrecord van Merckx (zie paragraaf 2) in km aangeduid tot op vijf cijfers achter de komma: 49,43195 km, dus in cm nauwkeurig! Vanaf 1984, toen Moser dit record verbeterde, werden de afstanden in ieder geval nog maar met drie cijfers achter de komma, dus in m nauwkeurig opgegeven. Het record van Merckx staat vanaf toen te boek als 49,431 km, bijna een meter minder dan in 1972.

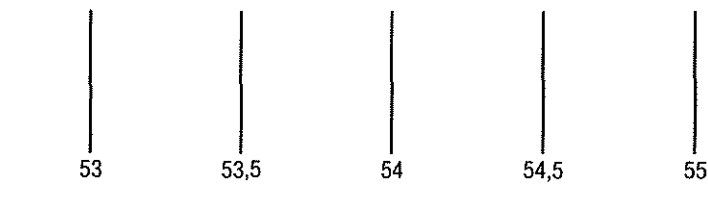
Ga eens na of de volgende tekeningen kloppen, dus of de fietsen correct op de getallenlijn zijn geplaatst.

AFBEELDING 66



Plaats de records uit 1994 van Indurain (53,040 km) en Rominger tweemaal (53,832 km en 55,291 km) in het schema.

AFBEELDING 67



Niet alleen Rominger overtrof Indurain, maar ook Bram Moens reed in één uur (veel) verder op zijn ligfiets.

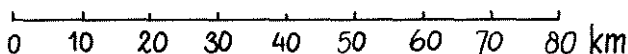
AFBEELDING 68

Ligfiets overtreft Indurain

Miguel Indurain krijgt er geduchte concurrentie bij. Als het aan Bram Moens ligt tenminste. De 37-jarige fietsenbouwer uit Middelburg vestigde afgelopen zaterdag op het terrein van de Rijksdienst voor Wegverkeer een nieuw werelduurrecord. Op een ligfiets, wel te verstaan. De Zeeuw legde in zestig minuten 77,123 meter af, een verbetering van de beste wereldprestatie op de ligfiets van de Engelsman Pat Kinch met bijna twee kilometer.

(NRC. HANDELSBLAD, 3-10-'94)

AFBEELDING 69



Plaats het (denkbeeldige) uurrecord van jezelf, van Indurain en van Moens op de getallenlijn.
En waar ligt 49,43195 km ongeveer?

Via deze opdrachten wordt de kwestie van precisie en grootte, die eerder bij de seinpaal ter sprake kwam, nog eens aan de orde gesteld. En ook wat een redelijke meting lijkt. Zowel het aflezen van geplaatste kommagetallen als het positioneren van gegeven kommagetallen worden aan de orde gesteld. De overgang naar

pure, onbenoemde kommagetallen met een willekeurig aantal cijfers achter de komma kan vanaf nu geleidelijk worden gemaakt, en ook de verruiming naar allerlei toepassingssituaties.

Anders gezegd: de modelcontext *van* lengte- en afstandsmeting kan nu als model *voor* het rekenen in andere contextsituaties en het rekenen (positioneren, ordenen) met kale kommagetallen fungeren.

3.3 FORMELE UITBREIDING VIA EEN SPEL

Over de uitbreiding van de modelcontexten naar andere *toepassingssituaties* gaan we het hier niet hebben - daarover is in paragraaf 2 al het nodige gezegd. Naast de daar genoemde probleemsituaties over temperatuur, gewicht en inhoud, treft men in de rekenmethoden nog tal van andere contexten over kommagetallen aan, zoals tijdmeting in de sport, grote getallen (miljoen, miljard), valutakoersen (1 dollar is 1,5055 gulden) en percentages, waarmee het positioneren verder beoefend kan worden.

Hier richten we ons voor het eerst op kale kommagetallen en het plaatsen daarvan op de getallenlijn aan de hand van een spel - we bevinden ons nu al verder in de leergang.

Het nader-spel

Het nader-spel wordt gespeeld met tweetallen. Elke leerling heeft een rekenmachine. Speler I, Katty, kiest een klein getal (10) en speler II, Gerlinda, een groter getal (20). De eerste speler mag alleen maar optellen en de tweede louter aftrekken. Zodoende komen ze steeds dichterbij elkaar toe. De speler die als eerste de ander ontmoet of passeert, heeft het spel verloren.

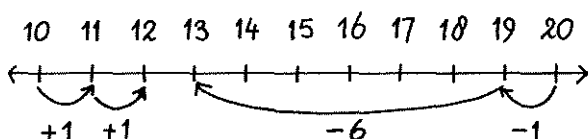
We volgen deze twee leerlingen uit groep 8 aan de hand van observaties van Van den Brink (1986).

Gerlinda: 'Maar je komt elkaar toch altijd tegen? Je moet elkaar toch passeren? En als dat niet mag, dan doe ik direct min 10, dan passeer ik Katty niet.'

Katty: 'Maar je zit dan wel tegen me aan, dan ben je toch verloren.'

Ze gaan voorzichtig van start. Gerlinda doet -1 en Katty +1. En dan -6 en +1. Ze tekenen de sprongen op de getallenlijn.

AFBEELDING 70



Wat nu?

Katty: 'Nu kunnen we niet meer verder. We zijn bij elkaar.'

Van den Brink: 'Maar je moet toch dichterbij elkaar zien te komen.'

Gerlinda doet $13 - 0$ en zegt voldaan: 'Ik heb min gedaan en ben toch niet gepasseerd.'

V.d.B.: 'Maar je bent ook niet dichterbij gekomen.'

Katty staat op 12 en Gerlinda op 13.

Nu breekt het inzicht door!

Eén decimaal

Katty: 'Je kunt ook $12 \frac{1}{2}$ doen. Maar dat gaat niet op de rekenmachine.'

Ze bedoelt: $12 \frac{1}{2}$ staat er niet op.

Gerlinda: 'Je kunt wel één punt twee doen.'

(We noteren de punt van de rekenmachine hier als komma.)

Ze drukt 1,2 in als notatie voor $\frac{1}{2}$, maar herinnert zich dan ineens de kommagetallen.

'O nee, niet 1,2 maar 1,5 moet je doen. Dat is toch anderhalf?'

Gerlinda rekt vervolgens:

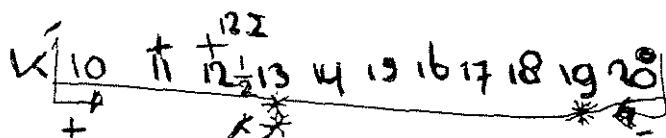
$$13 - 0,5 = 12,5$$

Katty doet vervolgens vanuit haar plaats $+0,2$:

$$12 + 0,2 = 12,2$$

Ze proberen de nieuwe posities nog op de getallenlijn te tekenen, maar dat lukt al niet meer zo goed.

AFBEELDING 71



Na ieder nog een stap van 0,1 komen ze op 12,3 en 12,4.

AFBEELDING 72

Ger = 12,4.
Kat = 12,3

Twee decimalen

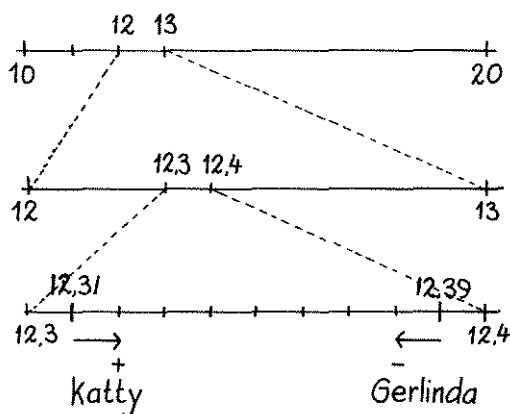
Gerlinda doet daarna: $12,4 - 0,01 = 12,39$.

Katty: $12,3 + 0,01 = 12,31$

'Dan zijn we toch dicht bij elkaar gekomen.'

De gespreksleider tekent enkele 'uitvergrotingen.'

AFBEELDING 73



Hoewel er nog heel wat ruimte is voor 0,01 sprongen, besluit Gerlinda met drie cijfers achter de komma te gaan werken.

Drie decimalen

$$12,39 - 0,001 = 12,389$$

Katty volgt met $12,31 + 0,001 = 12,311$

Gerlinda wil nu dicht bij Katty komen. Ze overbrugt de afstand van 389 tot 311 (78) en typt in:

$$12,389 - 0,077 = 12,312$$

Gelukt.

Gerlinda: 'Nu wordt het helemaal moeilijk voor haar. Nu kan ze niet meer.'

Katty doet inderdaad: $12,311 + 0,001 = 12,312$.

Vier decimalen

Gerlinda: 'Dan kom je op mij, dat mag niet. Je moet met vier cijfers achter de komma werken.'

Katty: $12,311 + 0,0001 = 12,3111$

Duidelijk is dat het geen wedstrijd is tégen elkaar, maar mét elkaar om nieuwe getallen te vinden.

Gerlinda staat op 12,312. Katty op 12,3111.

Gerlinda wil nu in één stap op 12,3112 uitkomen, vlak bij Katty's antwoord van 12,3111, maar dat gaat niet zo gemakkelijk:

$$12,312 - 0,0045 = 12,3075$$

$$12,312 - 0,0004 = 12,3116$$

$$12,312 - 0,0009 = 12,3111$$

$$12,312 - 0,0008 = 12,3112$$

Wat een rekenkarwei!

We stoppen, want het is duidelijk dat we alsmaar door kunnen gaan: tussen twee kommagetallen liggen ontelbaar veel andere kommagetallen!

Reflectie: toevoegen van nullen

In het begin biedt de getallenlijn, in de vorm van voortgaande uitvergrotingen of meer verfijnde schalen, veel steun. Later echter gaat het steeds meer om inzicht in het positiesysteem en formeel opereren met kale kommagetallen.

In een terugblik kunnen we de leerlingen een belangrijke didactische tip geven, voorzover die al niet door henzelf is ontdekt: het toevoegen van nullen bij kritieke standen.

Neem bijvoorbeeld de stand van 12,3 en 12,4. Die is kritiek omdat iedere toevoeging van 0,1 tot verlies van de wedstrijd leidt.

Welnu, indien dezelfde getallen genoteerd worden als 12,30 en 12,40 is er wel volop ruimte voor 0,01 stappen.

Maar waarom mag je zomaar een nul aan de rechterzijde van kommagetallen bijvoegen?

In de beschrijvingen van de modelcontexten van lengte en afstand meten, is deze kwestie van het toevoegen van nullen al ter sprake gekomen.

We recapituleren: stel 12,3 m is precies uitgemeten op 12 m en 3 dm, dan mag je ook zeggen 12 m, 3 dm en 0 cm, of 12 m en 30 cm, oftewel $12,3 \text{ m} = 12,30 \text{ m}$. Dus $12,3 = 12,30$.

(Dat de wetenschappelijke conventie van de meettheorie anders is, doet nu nog niet terzake - wij zeggen immers dat 12,3 m precies uitgemeten is ...)

Algemeen gesteld: bij pure kommagetallen mogen ter rechterzijde nullen worden toegevoegd of geschrapt. Zodoende kunnen kommagetallen gemakkelijk op een gelijk aantal decimalen worden gebracht, wat het onderling ordenen en vergelijken ervan sterk kan vereenvoudigen.

Voor het globaal positioneren van meer-decimale kommagetallen is het handig deze te reduceren tot één-decimalen, dus om cijfers weg te denken achter de komma.

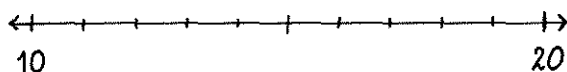
In het nader-spel komen al deze kernelementen samen - in ieder geval in de doordenking-achteraf van de gevolgde strategieën.

Benaderen: positiekaart en getallenlijn

Het nader-spel geeft ook aanleiding om achteraf het benaderen van kommagetallen op de getallenlijn nog eens preciezer te beschouwen - de dynamiek van het lokaliseren.

Waar woont 12,3112 ongeveer op onderstaande getallenlijn?

AFBEELDING 74

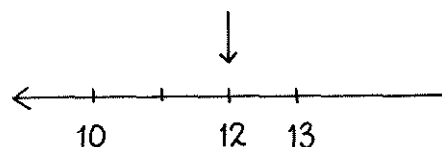


Loop er in gedachten naartoe en denk daarbij bijvoorbeeld aan 12,3112 km.

‘Eerst ga ik naar 12 (km), dat is daar ...’

We laten ons leiden door een goede leerling. De groep controleert.

AFBEELDING 75



‘Dan moet ik nog wat verder.’

‘Kom je tot halfweg 12 en 13?’

‘Nee, want dat is 12,5 en ik moet eerst naar 12,3 en dat is zelfs nog vóór 12,4.’

‘Waar ben je nu ongeveer?’

‘Iets voorbij de helft van de helft. Daar...’

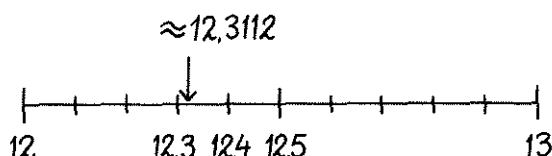
AFBEELDING 76



‘Preciezer kan ik het niet aangeven. Daar woont 12,3112 ongeveer.’

‘Prima. Maar nu teken ik de getallenlijn op een grotere schaal. Dan lukt het wat beter. Waar staat 12,3112 ongeveer?’

AFBEELDING 77



‘Nu moet je de afstand tussen 12,3 en 12,4 verdelen in tien stukken. Je zit tussen de hectometerpaaltjes van 12,3 en 12,4. Maar dan wel dicht bij die van 12,3.’

‘Hoeveel verder?’

‘Ruim één meter verder...’

‘Ik hoor geroezemoes. Het antwoord is, geloof ik, niet helemaal correct. Laten we eerst eens een schema op het bord zetten met de juiste cijfers en maten.

Ik zal het even laten zien.’

AFBEELDING 78

km,	hm	tm	m	dm	cm	mm
12,	3	1	1	2		

‘Je weet nog: hm is hectometer of honderdmeter, en tm is de afkorting van tienmeter, en dan krijg je meter en decimeter - steeds wordt bij iedere plaats naar rechts de maateenheid tien keer zo klein.’

‘Nou, dan moet ik vanaf 12,3 nog 10 meter verder en dan nog 1 meter - dat is 11 - en dan nog 2 dm.’

‘Precies. Maar dat konden we niet meer nauwkeurig tekenen.’

Tot zover het nader-spel.

4 Terugblik

Kunnen met de geschetste realistische aanpak de moeilijkheden van het noteren en positioneren die in paragraaf 1 werden samengevat grotendeels worden ondervangen?

Dat kan inderdaad het geval zijn, maar dan wel met de nadruk op 'grotendeels'. Want zeker in het begin van de leergang komen we, zoals beschreven, vrijwel alle genoemde obstakels tegen. Maar juist via de concrete oriënteringsbasis van lengte- en afstandsmeting kunnen ze geleidelijk worden overwonnen.

Steeds kan worden teruggegrepen op gedachte handelingen van het meten en de symbolentaal van de metrie bij benoemde kommagetallen. Daarmee ontmaskeren de leerlingen vrij gemakkelijk de meeste missers die voortkomen uit interferenties met het systeem van de gehele getallen, zoals bijvoorbeeld de veel voorkomende kommascheidingsfout:

'2,11 is groter dan 2,9 want 11 is groter dan 9'.

Toevoeging van bijvoorbeeld meter doet de leerlingen echter inzien dat 2,9 m betekent '2 m en 9 dm', terwijl 2,11 m wil zeggen '2 m, 1 dm en 1 cm', dus kleiner dan 2,9 m.

Dit is de analytische *decimaal-per-decimaalmethode*.

Eerst wordt bij het (globaal) plaatsnemen, ordenen of vergelijken naar de eerste decimaal gekeken en vervolgens, zo nodig, naar de tweede, enzovoort.

Bij deze methode hoort het cijfer-voor-cijfer uitspreken van kommagetallen, of preciezer gezegd van de cijfers achter de komma: 2,9 als 'twee komma negen' en 2,11 als 'twee komma één één' - in het eerste stadium zelfs nog uitgebreider met steeds de passende metrieke lengtemaat per cijferpositie.

De meetcontext van lengte en afstand vormt de concrete oriënteringsbasis voor het positioneren en ordenen van kale kommagetallen.

Met de decimaal-per-decimaalmethode wordt het globaal positioneren bevorderd: je kijkt op de getallenlijn met gehele getallen allereerst waar het op één decimaal afgeknotte kommagetal ongeveer ligt ingeklemd, en stelt via de tweede decimaal die positie zo nodig nog wat bij.

Ook de misvatting van de kommascheiding en de fixatie op de

cijfers achter de komma als een quasi geheel getal wordt ermee tegengegaan.

Om deze redenen krijgt de decimaal-per-decimaalmethode met de bijbehorende cijfer-voor-cijferbenoeming van kommagetallen in het begin van de leergang veel nadruk, dit in tegenstelling tot wat thans gebruikelijk is met de bekende decimaal-totaalmethode.

De synthetische *decimaal-totaalmethode* daarentegen laat het getal achter de komma juist heel. De uitspraak van kommagetallen correspondeert daarmee.

Zo wordt 2,9 uitgesproken als 'twee komma negen' en 2,11 als 'twee komma elf'.

Bij het plaatsen en vergelijken van deze twee getallen worden ze in dezelfde mate verfijnd aangeduid als 2,90 en 2,11, wat de vergelijking sterk vereenvoudigt. De toevoeging van de nul in 2,90 wordt gemotiveerd en beredeneerd vanuit het meten: 2,9 m is 2 m en 9 dm, oftewel 2 m en 90 cm, dus 2,90 m.

Deze methode heeft twee nadelen. Ten eerste onttaardt ze gauw in een onbegrepen trucje, en ten tweede wordt het globale positioneren er niet door bevorderd. Maar dat betekent niet dat we deze werkwijze zouden willen weren. Want uit het beschreven onderwijsexperiment in paragraaf 3 blijkt dat de leerlingen naast de decimaal-per-decimaalmethode ook de decimaal-totaalmethode uit zichzelf welbegrepen toepassen. Alleen accentueren we in verband met het globale positioneren de eerstgenoemde methode aanvankelijk wat sterker dan de tweede.

Later in de leergang wordt het toevoegen van nullen als strategie onder de aandacht gebracht - ook nu weer denkend vanuit de concrete oriënteringsbasis van het meten van lengte met metrieke maten waarmee de leerlingen in groep 7 geacht worden bekend te zijn (en waarmee ze via de leergang kommagetallen nog verder vertrouwd raken).



Hinkstapspringer Jonathan Edwards zweeft naar de wereldrecordafstand van 18,29 meter (Foto Reuter)

(VOLKSKRANT, 14-8-'95)

Noten

- 1 De tekst van paragraaf 3.1 is gebaseerd op een onderwijsexperiment van M.A. van Zanten (onder begeleiding van A. Treffers en R.A. de Jong). Aanvullend onderzoek met individuele leerlingen en kleine groepjes is daarna nog door A. Treffers verricht.

Literatuur

- Beusekom, N. van (red.): *Pluspunt*, Den Bosch, Malmberg, 1994.
- Bokhove, J. en J. Janssen: Periodiek Peilingsonderzoek in het basisonderwijs (4), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Rekenwiskundeonderwijs*, 7(2), 1988, pag. 16-35.
- Brink, J. van den: Rekenmachinespel. Steeds dichterbij elkaar, *Willem Bartjens*, 6(1), 1986, pag. 25-36.
- Brown, M.: Place Value and Decimals, in: K. Hart (ed.), *Children's Understanding of Mathematics 11-16*, London, Murray, 1981, pag. 48-66.
- Carpenter, T.P. et al: Decimals: Results and implications from national assessment, *Arithmetic Teacher*, 28(8), 1981, pag. 34-38.
- Douma, H.: *Rekenkursus* (2e stuk), Purmerend, Muusses, 1893.
- Gravemeijer, K. (red.): *Rekenen en Wiskunde*, Baarn, Bekadidact, 1987.
- Green, B.: Nonconservation of multiplication and division involving decimals, *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 1987, pag. 37-45.
- Huitema, S. (red.): *Wereld in Getallen* (2e versie), Den Bosch, Malmberg, 1994.
- Nelissen, J. (red.): *Rekenwerk*, Gorinchem, De Ruiter, 1988.
- Padberg, F.: *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche - Dezimalbrüche*, Mannheim, Wissenschaftsverlag, 1989.
- Resnick, L.B. et al: Conceptual Bases of Arithmetic Errors: The Case of Decimal Fractions, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 1989, pag. 8-28.
- Sweers, W. (red.): *Operatoir Rekenen* (3e versie), Tilburg, Zwijsen, 1994.
- Zanten, M. van: *Over Komma's en Getallen*, Utrecht, Vakgroep Onderwijskunde, 1994 (doctoraalscriptie).

III Schatten en hoofdrekenen

Doelstelling 3

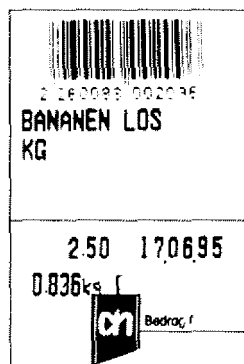
De leerlingen kunnen decimale breuken vergelijken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, en kunnen schattend rekenen door de uitkomst globaal te bepalen.

We beginnen met schattend rekenen, omdat dit de didactische grondslag voor precies rekenen kan leggen.

Precies rekenen met kommagetallen levert meer moeilijkheden op dan veelal wordt verondersteld - begripsmatige moeilijkheden wel te verstaan. Daardoor wordt zelfs het doelmatig gebruik van de rekenmachine problematisch.

Neem de volgende opgave:

AFBEELDING 80



Een kg bananen kost f 2,50.

Hoeveel kost 0,836 kg bananen?

Bereken de prijs met behulp van de rekenmachine.

Uit nationaal en internationaal onderzoek blijkt dat in het bestaande onderwijs slechts één van de drie leerlingen einde basisschool in een dergelijk probleem een vermenigvuldiging onderkent. (Ekenstam en Greger, 1983; Greer, 1987)

Het overgrote deel deelt 2,50 door 0,836...

Hoe is dat mogelijk?

Laten we eerst een andere opgave beschouwen.

$$0,836 \times 2,50$$

Is de uitkomst groter of kleiner dan 2,50?

Bij deze opgave blijkt de goedscore ook één van de drie te zijn: grofweg twee van de drie leerlingen zijn van oordeel dat vermenigvuldigen altijd groter maakt, wat gelet op het voorgaande onderwijs niet zo verbazingwekkend is.

In het geval van $0,836 \times 2,50$ schattend berekenen, betekent een en ander dat verwacht mag worden dat minder dan een derde deel van de leerlingen einde basisschool daartoe in staat is.

We hebben exacte gegevens over een soortgelijke, maar iets eenvoudiger opgave uit PPON (2) (Bokhove, 1995).

$$0,497 \times 48 \text{ is ongeveer...}$$

AFBEELDING 81

Samenvatting van oplossingsmethoden

	totaal aanpakken	goed	fout
1 Cijferen	23		23f
2 Splitsen	8		8f
3 De helft nemen van 48 of 50	19	19g	
4 0,497 afronden op 0,5; 0,50 of 0,500 en soms 48 afronden op 50. Vervolgens uitrekenen en de komma plaatsen	35	12g	23f
– afronden op $0,5 \times 48$ of $0,5 \times 50$	15	8g	7f
– afronden op $0,50 \times 48$ of $0,50 \times 50$	2	1g	1f
– afronden op $0,500 \times 48$ of $0,500 \times 50$	18	3g	15f
5 Anders afronden	20		20f
– 0,497 afronden op 5,50 of 500	10		10f
– alleen 48 afronden op 50	4		4f
– 0,497 afronden op 0 of 1	2		2f
– anders afgerond	4		4f
6 Anders	5		5f
7 Niet gemaakt	12		12f
Totaal	122	31g	91f

Van de 122 geïnterviewde leerlingen volgt slechts vijftien procent de weg van halveren, en tien procent komt via cijferend vermenigvuldigen met ronde getallen tot een acceptabel antwoord van 24 of 25.

Bij $0,836 \times 2,50$ zal de goedscore ongetwijfeld nog lager liggen... In de winkelcontext echter waarin zo'n vermenigvuldiging besloten ligt, lukt dat schatten veel beter. (Van Zanten, 1994)

Ten eerste zijn twee van de drie leerlingen van oordeel dat het bedrag kleiner dan $f\ 2,50$ moet zijn. Ten tweede is nu ongeveer de helft van de kinderen in staat om de prijs globaal te berekenen, daarbij meestal de strategie volgend van het ($\frac{8}{10}$) deel-van nemen (en slechts zelden via omkering $2,5 \times 0,8$ uitrekenen).

Kortom, de uitkomsten van het schattende en het precieze berekenen van $0,836 \times 2,50$ in de winkelcontext blijken ver uiteen te lopen. (Van Zanten, 1994)

De didactische hoofdvraag is nu: zou het schattende rekenen in de winkelcontext als concrete basis kunnen fungeren om het technisch vermenigvuldigen van kommagetallen inzichtelijk te maken, en ook om het schattende rekenen met nul-kommagetallen te verbeteren?

De volgende paragraaf gaat over deze didactische kwestie. Aan de hand van vijf lesbeschrijvingen worden de belangrijke aspecten en functies van het schattende rekenen getoond. Daarna plaatsen we deze lessen in een ruimer kader van schattend rekenen. Vervolgens bepalen we ons tot hoofdrekenen, en wel speciaal tot vermenigvuldigen en delen met machten van tien plus de bijbehorende schuifregels voor komma's. Het hoofdstuk wordt besloten met een samenvatting.

1 Vijf lessen over schattend rekenen

Schattend rekenen is een belangrijk doel op zichzelf. Maar schatten kan ook als didactisch middel fungeren om inzicht te verschaffen in het effect van operaties, in het bijzonder voor vermenigvuldigen. Tevens kan het globale schattende rekenen als introductie dienen op het leren plaatsen van de komma.

In het volgende wordt een serie lessen beschreven over het vermenigvuldigen (en delen) van kommagetallen met prijsstickers als concrete basis.

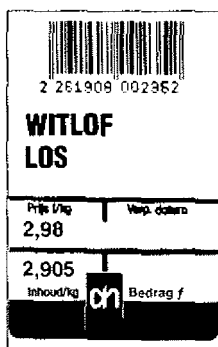
Het onderwijs is gegeven in een doorsnee-groep 7, waarin eerder reeds enkele lessen aan het plaatsen van kommagetallen op de getallenlijn zijn besteed.¹ Inhoudelijk valt er nog wel wat op de serie lessen aan te merken.

Na de lesbeschrijvingen blikken we dan ook kritisch terug en doen enkele suggesties voor verbetering.

1.1 VERMENIGVULDIGEN (LES 1)

Als startprobleem dient de volgende opgave.

AFBEELDING 82



Hoeveel gulden moet je ongeveer betalen?

4 of 9 of 90 of 400 of 900

Na een korte inleidende bespreking over de betekenis van de getallen op de prijssticker maken de leerlingen individueel een beredeneerde schatting.

De antwoorden vallen grofweg in drie categorieën uiteen. Van ieder geven we een voorbeeld.

Marten-Jan meent dat 4 het juiste antwoord is, want: 'Je hebt allemaal helen in de antwoorden. Dus je hebt geen komma's. Dan haal je die cijfers achter de komma weg en dan doe je 2×2 .'

Chahir denkt dat het antwoord 6 moet zijn, hoewel dat niet bij de mogelijke antwoorden staat: 'Je hebt 2 kilo en 905 gram, da's bijna 3 kilo. Dus zeg maar 3×2 gulden en dat is 6 gulden ongeveer.'

Renate vindt 9 het beste antwoord: 'Het zit dicht bij de 3, dus dicht bij de 9.'

De antwoorden 90, 400 en 900 worden niet gekozen.

Wat is de beste schatting van de drie: 4 of 6 of 9?

Om dit te kunnen bepalen, wordt de precieze prijs met behulp van een rekenmachine berekend. Iedere leerling doet dit via vermenigvuldigen, dus dezelfde operatie als eerder bij het schatten werd gebruikt.

$$'2,905 \times 2,98 = 8,6569'$$

'Dus is de beste schatting ...?'

Het oordeel is eenstemmig: 9 gulden.

'Wat zal er voor prijs op het bonnetje komen?'

'Ik hoor 8 gulden 65, dus 8,65 gulden. Dat is goed gedacht, want de prijs staat met twee cijfers achter de komma aangeduid, dus in centen. Hier heb ik het oorspronkelijke bonnetje. Zie je, er staat 8,66 in plaats van 8,65.

Hoe kan dat?'

'Juist, omdat het een beetje meer is dan 8,65, dus heeft men er 8,66 van gemaakt, dus naar boven afgerond.'

We laten deze kwestie van het afronden op twee cijfers achter de komma nu maar even rusten en concentreren ons verder op het schatten.

'Wie kan verklaren waarom de precieze prijs iets minder dan 9 gulden is?'

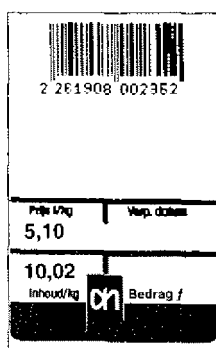
Marten-Jan: 'Minder, omdat je niet precies 3 gulden hebt en niet precies 3 kilo.'

'Ja, beide een beetje minder, hè?'

'De volgende opgave luidt: schat $5,1 \times 10,02$ en je mag zelf het bonnetje invullen.'

Alle leerlingen kiezen 50 als beste schatting uit de vier keuzen.² Enkele leerlingen gebruiken ter toelichting de dubbele getallenlijn.

AFBEELDING 83



$$5,1 \times 10,02$$

15 of 50 of 510 of 5000



In een voortoets werd de kale opgave $5,1 \times 10,02$ overigens maar door een kwart van de klas goed opgelost: de meesten kozen toen voor 510 en 5000!

Uit deze opbrengst blijkt de positieve invloed die het opereren met meetgetallen in een voorstelbare context kan hebben. Anders gezegd: de winkelsituatie zou wellicht als model kunnen fungeren voor het vermenigvuldigen van kale getallen - je denkt namelijk aan de prijsstickers en hebt dan greep op de getallen en op de uitkomst.

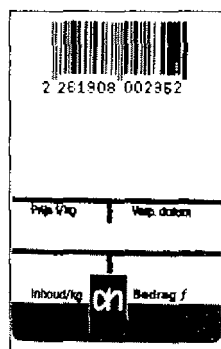
Bij het schatten blijken verschillende procedures te worden gebruikt die tot verschillende uitkomsten leiden:

- 1 de getallen worden naar beneden afgerond door weglating van de decimalen,
- 2 of alleen de eerste factor wordt afgerond, en daarna de uitkomst ook nog eens zonder daarbij op een correcte compensatie te letten,
- 3 of beide factoren worden afgerond, en zo zijn er nog enkele informele werkwijzen.

In het laatste deel van de eerste les zullen we de leerlingen in dit opzicht wat meer houvast geven via een *inklemstrategie*.

(Later blikken we kritisch terug op deze aanpak!)

AFBEELDING 84



$$3,982 \times 4,56$$

Wat kan f 4,56 per kilo kosten?

Bloemkool?

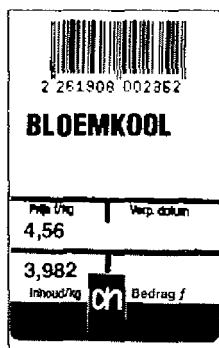
Goed.

Dennis: 'Dat kost ongeveer 18 gulden, omdat die 3 kilo en 982 gram, dat is ongeveer 4 kilo. Dan doe je 4 keer 4 is 16 en dan 4 keer ongeveer 56 cent.

Reinier: '18 gulden. Eronder zelfs, want het is niet helemaal 4 kilo.'

Yereth: 'Het is net iets minder dan die 4 kilo en net iets meer dan die 4 $\frac{1}{2}$ gulden. Dus dat vult elkaar een beetje aan.'

AFBEELDING 85



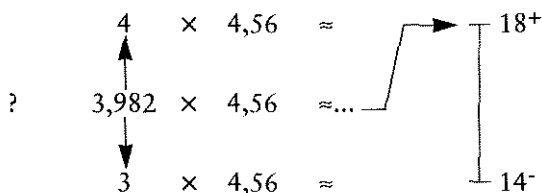
het dichtst bij 18,-

De les wordt samengevat aan de hand van de laatste opgave.

‘Enkelen van jullie laten bij het schatten eerst van het eerste getal de cijfers achter de komma weg en krijgen dan $3 \times 4,56$ is 13,50 of 14, in ieder geval meer dan 12. Anderen ronden het eerste getal niet naar beneden maar naar boven af en rekenen $4 \times 4,56$ globaal uit en komen zo op 18.

Dit zijn ook precies de twee handigste methoden om het schattende rekenen met dit soort getallen te beginnen.

Ik zal dit in een schema zetten.



Je komt bij 3,982 in de buurt bij 18, omdat dit getal dicht bij 4 ligt. Maar had je $3,123 \times 4,56$

gehad, dan was het antwoord dicht bij 14 gekomen. En met $3,5 \times$ dichter bij 16, dus midden tussen 14 en 18 in, ongeveer.

Nu nog even controleren met het rekenmachientje:

$$3,982 \times 4,56 = 18,15792$$

Dus staat op het bonnetje 18,16 omdat het wat meer is dan 18,15.’

Via het afronden van het *eerste* getal, zowel naar boven als beneden, krijg je dus een grove schatting tussen welke getallen de uitkomst ligt. Maar om daarna een nog wat preciezere schatting te maken, moet je nog dieper nadenken en redeneren waar je ongeveer zult uitkomen.

Daarmee gaan we de volgende les verder.

Op het afronden tot twee decimalen is hier nog niet dieper ingegaan. Daaraan moet later nog apart uitgebreid aandacht besteed worden in het kader van afronden (en afkappen).

1.2 VERMENIGVULDIGEN (LES 2)

We starten met een soortgelijk probleem als waarmee we de vorige keer zijn geëindigd: een kale vermenigvuldiging en een lege prijssticker.

$$4,964 \times 4,28$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 5 & \times & 4,28 & \approx \\
 \uparrow & & & & \nearrow \\
 ? & 4,964 & \times & 4,28 & \\
 \downarrow & & & & \searrow \\
 & 4 & \times & 4,28 & \approx
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 21^+ \\
 | \\
 17^+
 \end{array}$$

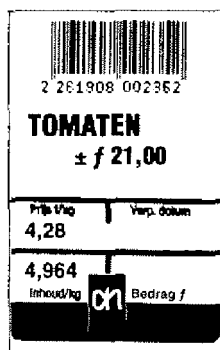
De inklemprocedure wordt nog even in herinnering gebracht.

De uitkomst ligt 'ergens' tussen 17^+ en 21^+ (gulden), of tussen 16^+ en 20^+ - het ligt er maar aan hoe globaal je $4 \times ..$ en $5 \times ..$ berekent. Maar waar ongeveer?

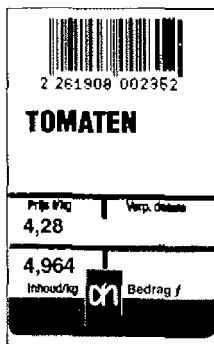
Doordat 4,964 vlak bij 5 ligt en 4,28 geïnterpreteerd kan worden als 4 gulden en een kwartje, is de schatting voor de meeste kinderen niet moeilijk te maken: ongeveer 21.

Twee voorbeelden:

AFBEELDING 86

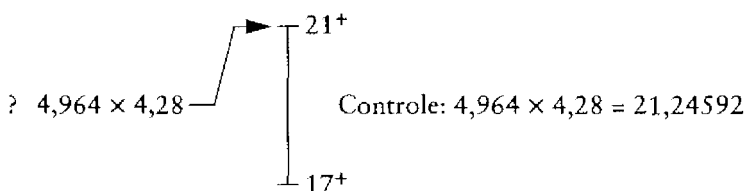


4,964 is bijna 5 kilo dus je doet
 $5 \times 4,28$ en dan iets minder.



$4 \times 4 = 12$ en er is nog bijna een hele
 dus dan wordt het $4 \times 5 = 20$ en nog 20
 dat wordt dan ongeveer 21,-

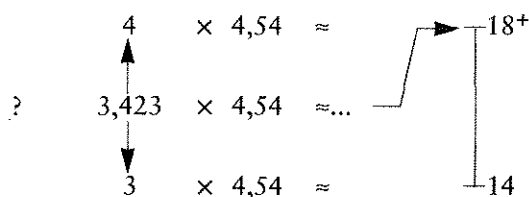
Op het bord komt:



Maar als er vervolgens een andere opgave wordt gepresenteerd,
 blijkt een klein deel van de groep toch nog heel wat problemen te
 hebben met de essentie van schatten.

$$3,423 \times 4,54$$

Op het bord verschijnt:



De meeste kinderen komen uit op 15 of 16. Maar daarnaast zien we ook schattingen als:

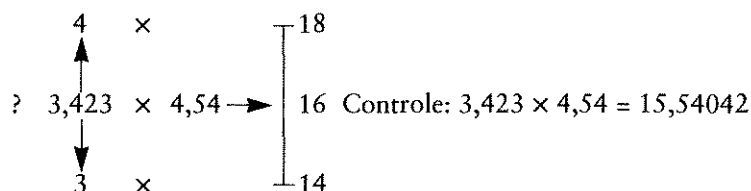
f 14,55 f 14,85 f 15,95 en f 16,75.

Er wordt kort besproken dat dergelijke schattingen niet goed te verdedigen zijn.

'Je kunt wel zeggen dat 3 keer 4,50 gelijk is aan 13,50 (gulden) en dat er dan nog *ongeveer* een half keer 4,50 bij moet, dus ongeveer 2,25, dus samen 15,75. Maar omdat je toch niet precies gerekend hebt, kun je dan beter 15 of 16 zeggen. Daarmee geef je aan dat je globaal, schattend hebt gerekend. En die 15,75 geeft een nauwkeurigheid aan die slechts schijn is, want zo precies heb je het ook niet bedoeld.³

Het precieze antwoord is 15,54042.

Dus jullie zitten weer goed in de buurt - zeker als we de schijn-nauwkeurige antwoorden ook nog afronden op 15 of 16, en in een enkel geval op 17. Omdat 3,423 in de buurt ligt van 3,5 of $3\frac{1}{2}$, komt de schatting ongeveer midden tussen 14 en 18':



De derde en laatste opgave is een 'dinosaurus-opgave':

$$2,4921321 \times 6,1029875 \approx$$

Keuze: 12 of 15 of 18 of 12000 of 15000.

Deze opgave staat los van de winkelcontext. Maar dat is voor de kinderen geen probleem meer. Enkele leerlingen kiezen voor 12, en de rest besluit 15 te nemen.

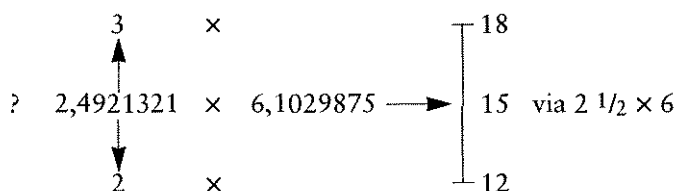
Alexander heeft 12: 'Omdat 2 keer 6 is 12. Dat zit erbij in de buurt.'

Hedwig schat 15: '2 keer 6 is 12, dan staat er nog wat achter de komma, dus 'bij 15' heb ik.'

Sander: 'Ik heb die laatste vier getallen gewoon weggestreept. Die zijn veel te klein.'

Melvin merkt op: 'Ja, ik kijk niet naar die achterste cijfers, die zijn veel te laag. 6,1 ligt vlak bij de 6 en bij 2,49 dan kijk je wel een cijfer verder, dat ligt vlak bij de 2 $1/2$.'

Nog even het inklemschema op het bord zetten:



Controle via de rekenmachine 15,209451.

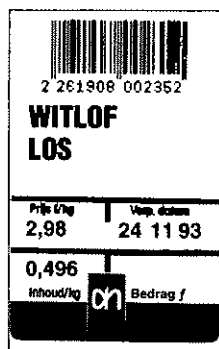
Niet alle cijfers passen in het venstertje! Ook dit antwoord is dus niet precies.

De leerlingen blijken het vermenigvuldigen van twee gemengde kommagetallen na twee lessen behoorlijk te beheersen. Maar dit is wellicht mede te danken aan de voorgaande lessen over het plaatsen van kommagetallen op de getallenlijn. Bij het kiezen van tussenwaarden blijken $1/2$, $1/4$ en $3/4$ gewilde referentiepunten!

De lastigste klip moet echter nog omzeild worden - namelijk de nul-komma-keerkwestie. Daarover gaat les 3.

1.3 VERMENIGVULDIGEN (LES 3)

Ter introductie starten we met een nieuw soort opgave, namelijk met nul-kommagewichten.



Het grootste deel van de groep lost deze opgave via de helft van 2,98 of 3 op. Immers, zo luidt de redenering: 0,496 kg is ongeveer 0,5 kg of $\frac{1}{2}$ kg.

In ieder geval lijkt iedereen deze redenering te kunnen volgen. Dat komt omdat de leerlingen in de voorgaande lessen, maar vooral ook in de eerdere lessen over het plaatsen van kommagetallen op de getallenlijn, goed thuis zijn geraakt in de metriek van kg en gram: ze weten wat 0,496 kg rekenkundig voorstelt en dat het vlak in de buurt ligt van 0,500 kg oftewel $\frac{1}{2}$ kg.

‘Laten we eens nagaan wat er precies op de prijssticker zal komen te staan. We gaan dat direct uitrekenen met het rekenmachientje. Maar voor we dat doen eerst maar eens een voorspelling maken.’

‘Staat er op het bonnetje:

1,50 of 1,49 of 1,48 of 1,47 of 1,46 of 1,45?’

Alle antwoorden worden gekozen. Maar de meeste kinderen nemen 1,48 en 1,47 omdat die iets kleiner zijn dan 1,49 (de helft van 2,98).

‘Pak nu je rekenmachientje en ga na wat het juiste antwoord is. Wat staat er op het bonnetje?’

Dit is de *kernvraag* van deze les.

Uit vele onderzoeken, en ook uit eigen onderwijservaringen, is bekend dat in dit geval niet alle leerlingen een vermenigvuldiging

zullen uitvoeren.⁴ Sterker: de meeste leerlingen zullen hier juist gaan delen en niet vermenigvuldigen. Omdat vermenigvuldigen groter maakt, terwijl we uit de schatting weten dat de uitkomst kleiner dan 2,98 (gulden) zal zijn, zeg de helft ervan, moet er dus gedeeld worden, want dat werkt verkleinend - zo luidt globaal de redenering.

Maar wat blijkt?

$$2,98 : 0,496 = 6,0080645$$

Dat betekent een uitkomst van 6,00 (of 6,01), wat in het geheel niet met de geschatte uitkomst rond 1,50 blijkt te kloppen. In plaats van de helft is het te betalen bedrag nu twee keer zo groot. Alsof er ruim 2 kg witlof is gekocht!

Het groepje dat ook in dit geval vermenigvuldigt - dus net zoals bij de andere stickeropgaven - krijgt daarentegen wel ongeveer het geschatte bedrag.

$$0,496 \times 2,98 = 1,47808$$

Afgerond een prijs van f 1,48.

Voor een deel van de groep is een *conflictsituatie* ontstaan: de berekening klopt niet met de schatting. Het kleine restant van de 'vermenigvuldigers' heeft dat probleem evenwel niet. Kunnen zij verklaren waarom hier ook vermenigvuldigd moet worden? Wie kan dat uitleggen?

Johan neemt het woord.

Hij gebruikt de bekende *inklemmethode* om te laten zien dat vermenigvuldigen met een nul-kommagetal niet vergroot, maar juist verkleint en dus hier precies past.

1	× 2,98 =	2,98	1 kg	→	f 2,98
0,496	× 2,98 →	1,48 of 0,496		→	≈ ? f 1,48
0	× 2,98 =	0	0 kg	→	f 0,-

Het antwoord van $0, \dots \times 2,98$ ligt tussen 0 en 2,98. En in dit geval er vrijwel midden tussen, dus vlak bij 1,49. Kortom, je kunt ook hier met de inklemmethode werken om te laten zien dat de uitkomst kleiner is dan het tweede getal. In feite neem je via 'keer' een deel-van.

Na Johan vat de onderwijsgevende een en ander samen en laat het verband met $2,496 \times 2,98$ nog eens met de inklemmethode zien.

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 & \times & 2,98 & \approx & & \text{---} 9 \\
 \uparrow & & & & & & \\
 2,496 & \times & 2,98 & \approx & \longrightarrow & & 7,50 \\
 \downarrow & & & & & & \\
 2 & \times & 2,98 & \approx & & \text{---} 6
 \end{array}$$

Die $0,496 \times$ voegt ook hier ongeveer 1,50 toe aan de uitkomst 6.

1.4 VERMENIGVULDIGEN (LES 4)

In de laatste les van de reeks over vermenigvuldigen, gaat het om nul-komma-keer in *kale* opgaven.

$0,537 \times 8,91$ is ongeveer...

De uitkomsten variëren van 4 tot 5.

Kim gebruikt de inklemmethode: ' $0, \dots \times \dots$ is 0; en $1 \times \dots$ is 9; dus het ligt tussen 0 en 9.'

Alexander: 'Het is bijna de helft van 9.'

Met 'bijna' doelt hij wellicht op het feit dat 8,91 bijna 9 is. Dat $0,537 \times 8,91$ ruim de helft is van 8,91 wordt niet tegelijkertijd in de beschouwing betrokken. Dit zien we overigens aanvankelijk vaak: veel kinderen richten zich op één van de twee getallen en kunnen nog niet goed tegelijkertijd meerdere aspecten in het oog houden bij het transformeren van de opgave en het tussentijds compenseren van de berekening. Maar grofmazige methoden passen ze wel correct toe. En wat ook belangrijk is: een aantal leerlingen heeft geleerd dat nul-komma-keer niet groter maakt,

maar via deel-van-nemen kan worden bepaald.

Ten slotte nog drie moeilijke opgaven om eens na te gaan in hoe-verre ze daarmee al wat overweg kunnen.

$$1 \quad 0,243 \times 39,87 \approx$$

$$2 \quad 0,969 \times 0,85 \approx (\text{dichter bij } 0 \text{ of bij } 1?)$$

$$3 \quad 0,9 \times 0,2463 \approx (\text{dichter bij } 0 \text{ of bij } 0,25 \text{ of } 0,5 \text{ of } 1?)$$

Opgave (1) lukt indien het verband met kwart-van wordt gelegd. Slechts enkele leerlingen leggen die relatie.

Elise: '8, als je die 39 hebt en die 0,243 dan heb je twee, drie verder, dat is ongeveer de helft, dat is ongeveer 0,5. Was ik eerst 39 door 2 gaan delen, 30 gedeeld door 2 is 15. Dan heb ik weer de helft gedaan ...'

Chahir: '9, als je de helft doet dan heb je 0,500 kilo en daar weer de helft van, dat is een kwart, en dan doe je de helft van die 30 gulden en dan nog de helft.'

Onderwijsgevende:

'Ik begin zoals Chahir zei. Hij zei: ik neem de helft en dan nog een keer de helft, dan heb ik een kwart. Want 0,243 is ongeveer 0,25 oftewel $\frac{1}{4}$.

Een kwart van ...? Waar zit het dichtbij?'

Enkele leerlingen: 40!

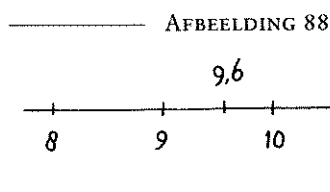
'Een kwart van 40 is ...'

In koor: 10.

Dan stelt Melvin een vraag met didactische mogelijkheden: 'Wie zit er het dichtste bij, die met die 9 of met 10?'

Onderwijsgevende: 'Hoe kunnen we dat te weten komen?'

Op het bord wordt een getallenlijn getekend.



De precieze uitkomst van $0,243 \times 39,87 = 9,68841$.

Jacoub reageert: 'Op de helft is negen gulden vijftig.'

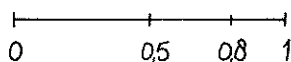
Hij kijkt naar de eerste twee cijfers achter de komma. Hedwig kijkt naar één decimaal (9,6) en plaatst dit (naar beneden) afgeronde getal op de getallenlijn, en besluit dat het dichtst bij 10 dan bij 9 ligt.

Bij opgave (2) kiezen alle kinderen voor 1.

$$0,969 \times 0,85 \quad \text{dichter bij 0 of bij 1?}$$

De oplossing wordt toegelicht met gewicht en geld: bijna 1 keer 85 cent. Bij het tekenen op de getallenlijn wordt 0,8 gebruikt.

AFBEELDING 89



Kim: 'Omdat 8 dubbeltjes zit dichtst bij 1, want het is meer dan de helft.'

Bij opgave (3) kiest ruim de helft van de kinderen het goede antwoord.

$$0,9 \times 0,2463 \quad \text{dichter bij 0 of 0,25 of 0,5 of 1?}$$

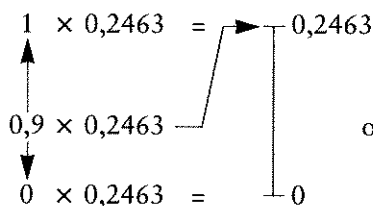
Elise licht toe waarom zij voor de uitkomst 1 heeft gekozen:

'Dan doe je 0,9 keer 0,2 dan krijg je 1,8.'

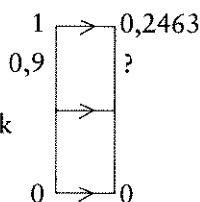
We staan voor een dilemma: moeten we hierop dieper ingaan, of toch maar niet?

De onderwijsgevende kiest voor een weerlegging.

'Dat klopt niet. Kijk maar:



of op een strook



Het antwoord moet tussen 0 en 0,2463 liggen. En omdat die 0,9 bijna 1 is, wordt het bijna 1 keer een kwart.'

Op een vraag van Kim wat je moet doen met die 6 en die 3, antwoordt Sander: 'Dat is veel te klein om te gebruiken.'

Hij had dan ook al voor 0,25 gekozen...

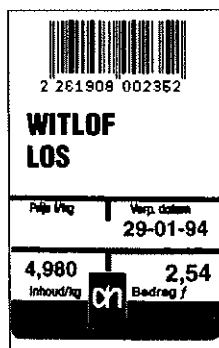
1.5 DELEN (LES 5)

In de laatste les van de serie komt de relatie tussen vermenigvuldigen en delen aan bod.

De volgende stickeropgave moet via schattend vermenigvuldigen worden opgelost. Vervolgens dient de precieze berekening van de kg-prijs met behulp van de rekenmachine te worden opgelost.

Eerst wordt het probleem toegelicht: er ontbreekt een getal. Welk getal? Zou de prijs ongeveer 1 gulden per kilo kunnen zijn? Nee, want dan zou het bedrag hoger zijn geweest, namelijk meer dan 4 gulden, bijna 5 gulden ... Hier stopt de aanloop.

AFBEELDING 90



Hoeveel kost de witlof per kilo?

De leerlingen kunnen kiezen uit:

0,50 2 5 8 80 (gulden)

Ze nemen allen 0,50.

Conclusie: 'Als je 4 keer 0 doet, dat is 0 en dan nog de rest.'

Jacoub: 'Nou, als je 5 keer 50 cent doet, dat is 2 gulden 50.'

Elise: 'Je kunt 2 delen door 4.'

Chahir: 'Ik heb het ook zo gedaan. Ik heb eerst die 2 gulden 54, is ongeveer 250, gedeeld door 5 is 50 cent.'

De onderwijsgevende vraagt vervolgens hoe je dit op de rekenmachine kunt controleren.

Alexander: 'Gedeeld door: 2 gulden 50 gedeeld door 50 cent.'

Onderwijsgevende: 'Akkoord. Maar ik wil het precieze antwoord hebben via de rekenmachine.'

Elise: '2 komma 54 gedeeld door 4,980.'

Het exacte antwoord is:

0,510041

'Op het bonnetje staat dus 0,51 bij de prijs per kg.'

De onderwijsgevende vervolgt:

$$2,54 : 4,980 = 0,5100401$$

'Je kunt via dat boogje in de deling een vermenigvuldiging aangeven.

Een eenvoudig voorbeeld:

$$12 : 3 = 4 \quad (3 \times 4 \text{ of } 4 \times 3 \text{ is } 12)$$

Dat is precies wat sommigen straks bij het schatten deden:

$$2,50 : 5 = 0,5 \text{ oftewel } 0,5 \times 5 = 2,50$$

Soms kun je deze omzetting van een deling in een vermenigvuldiging goed gebruiken bij het schatten of het controleren van het antwoord.'

De volgende opgave luidt als volgt:

3 : 0,2419 is ongeveer (keuze uit 0,5; 1; 2; 6 en 12).

Bijna alle leerlingen kiezen voor 0,5.

Nu de controle:

$$3 : 0,25 \stackrel{?}{=} 0,5$$

Dit antwoord blijkt niet goed, want $0,5 \times 0,25$ is niet 3, het is zelfs minder dan $1 \times 1 = 1$. Of in de prijscontext gesteld: een kwart kilo voor de prijs van 50 cent per kilo levert geen bedrag van 3 gulden op.

Na nog enkele keren proberen, komen bijna alle leerlingen tot 12.

Immers:

$$3 : 0,25 = 12, \text{ want } 12 \times 0,25 = 3$$

Caroline: 'Als je 1 keer doet, heb je 0,25. Als je 2 keer doet dan heb je 0,50; 4 keer heb je 1 gulden en 12 keer heb je 3 gulden.'

Zij refereert vaag aan de context van de prijssticker.

Laatste opgave:

$$23,9753 : 4,123 \text{ (keuze: 0,6 of 4 of 6 of 9 of 60).}$$

Vrijwel alle leerlingen kiezen voor 6, omdat $24 : 4 = 6$, oftewel $6 \times 4 = 24$.

Deze opgave is gemakkelijker dan de voorgaande. Het zou beter zijn geweest om deze eerder te geven. Het is tijd voor een kritische bezinning op de lessenserie.

1.6 REFLECTIE

We hebben in deze onderzoeksgroep voorafgaand aan de vijf lessen een *voortoets* afgenomen. De 24 leerlingen van (medio) groep 7 blijken na enkele ordeningslessen al wel een behoorlijk begrip te hebben van de grootte van eenvoudige kommagetallen, maar nog geen notie van het effect van vermenigvuldigen en delen met dergelijke getallen.

Meer dan twee van de drie leerlingen kiezen in de voortoets bij een opgave als $2,9 \times 2,9 \approx \dots$ voor de keuzemogelijkheden van 90, 400 of 900.

Geen enkele leerling is in staat om het juiste antwoord van 0,92

$\times 2,156 \approx \dots$ te geven uit de keuzen van 18 of 180 of 2 of 0,0018 of 0,21.

En slechts zeven leerlingen geven het juiste antwoord bij:

Plaats de komma in het antwoord van $20,64 : 5 = 4128$.

Na afloop van de beschreven serie van vijf lessen van één uur is weer een toets afgenomen. Uit deze *natoets* springen twee gegevens naar voren:

- 1 Soortgelijke opgaven als zojuist aangeduid, blijken in de winkelcontext door driekwart van de leerlingen goed te worden opgelost.
- 2 De goedscores bij vergelijkbare kale opgaven zijn weliswaar lager dan bij de winkelsommen, maar vertonen wel een beduidende vooruitgang vergeleken met de voortoets. Zo zijn er nu in plaats van 19 (van de 24) nog maar 3 (van de 25) leerlingen die een 'onzinnig' alternatief kiezen bij $2,98 \times 2,905 \approx \dots$ (van 90 of 400). Terwijl bij een betrekkelijk lastige opgave als $0,94 \times 0,27 \approx \dots$ eerst geen enkele leerling en nu 6 leerlingen voor het juiste alternatief 0,25 kiezen.
En bij de delingsopgave $20,64 : 5 = 4128$ ('Plaats de komma') geven nu 16 leerlingen het correcte antwoord tegen eerst 7.

Uit een en ander mogen we concluderen dat de winkelcontext een bruikbare modelcontext is voor het vermenigvuldigen van kommagetallen. Alleen de kale nul-komma-keeropgaven blijken ook nu nog voor veel leerlingen te lastig - de twee lessen die aan deze problematiek zijn besteed, blijken niet genoeg om de gevestigde notie van 'vermenigvuldigen maakt groter' ten aanzien van kale kommagetallen volledig uit de weg te ruimen.

Maar er is meer aan de hand: ook de verbandingen tussen kommagetallen en breuken zijn nog onvoldoende gelegd (bijvoorbeeld $0,263$ is $\approx 1/4$). Daarbij komt nog dat ' $1/4$ keer' geassocieerd moet worden met ' $1/4$ deel-van'. Dus vraagt het uitvoeren van nul-komma-keer nogal wat aan fundamentele vaardigheden en

inzichten. In ieder geval zijn de twee lessen die aan deze problematiek worden besteed niet voldoende. Wellicht is de beschreven aanpak te moeilijk aangezet met tamelijk complexe getallen. Maar het allerbelangrijkste bezwaar is wel dat er te weinig ruimte is gelaten voor informele methoden. Of anders gezegd: de inklemmethode is mogelijk toch te vroeg geïntroduceerd, te zeer door één van de leerlingen bepaald en te veel door de onderwijsgevende opgelegd.

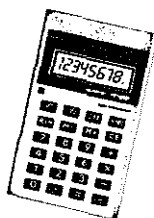
Stel, we zouden de volgende opgave uit *Rekenen en Wiskunde* als beginprobleem hebben gekozen. (Gravemeijer (red.), 1987)

AFBEELDING 91

Floris weegt 1,6 kilo af. Gaby koopt 0,6 kilo rijst. En Sandra heeft genoeg aan 0,85 kilo. Hoeveel moet ieder betalen?



Gebruik bij de berekening het rekenmachientje.



De berekening van de 1,6 kilo met behulp van de rekenmachine zal geen problemen opleveren, gelet op het zojuist beschreven experiment:

$$1,6 \times 3,50 = 5,6$$

In deze context is die 5,6 te interpreteren als 5,60 of 5 gulden 60 - een redelijk antwoord, namelijk minder dan 7 gulden (prijs per 2 kg) en ruim 2 gulden meer dan 3 gulden 50 (prijs per kg).

De drie meest gebruikte methoden om Gaby's prijs van 0,6 kilo te bepalen *met het rekenmachientje* zijn:

1 $3,50 : 0,6 = 5,83$

2 $0,6 \times 3,50 = 2,10$

3 plus de handige aanpak via 1,6 keer minus 1 keer, dus
 $5,60 - 3,50 = 2,10$.

Aanpak (1) leidt tot een 'onmogelijke' uitkomst. De verklaring dat delen hier niet past en dat methode (2) hier van toepassing is, kan via methode (3) worden gezocht: van de 1,6 keer ... haal je 1 keer ... af en houd je 0,6 keer... over - dus precies wat je in (2) direct uitrekent via vermenigvuldigen. Kinderen blijken dit soms ook direct zo te doen (Swan, z.j.). Dat je bij 0,6 keer 3,50 een uitkomst krijgt die kleiner is dan 3,50 spreekt dan vanzelf: je zit immers tussen 1 keer en 2 keer in, en als je er dan 1 keer van afhaalt, houd je minder dan 3,50 over...

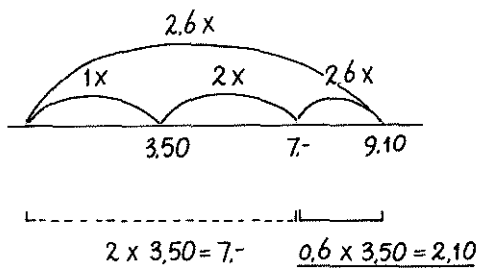
Via methode (3) zien de leerlingen in dat hun opvatting dat 'keer' altijd groter maakt niet correct is. Of anders gezegd: de nulkomma-keermethode wordt nu niet zozeer door de onderwijsgevende of een groepsgenoot opgelegd, maar wordt op deze wijze veel meer door de leerlingen zelf langs een andere weg ontwikkeld of door andere leerlingen inzichtelijk gemaakt.

Men had de voorgaande opgave uiteraard ook kunnen beginnen bij de prijs van 2,6 kilo rijst, waarvan dan vervolgens 2 kilo (7 gulden) wordt afgehaald, teneinde de prijs van die 0,6 kilo rijst te kunnen bepalen.

Met deze kleine doch essentiële aanvulling wordt de geschetste lessenserie goed bruikbaar voor het schattende vermenigvuldigen van kommagetallen enerzijds, en anderzijds om het schatten en precies uitrekenen met elkaar te verbinden, wat een verdiept inzicht in de desbetreffende basisoperaties kan geven en bestaande misverstanden wegnemen die voortkomen uit het aanvankelijke vermenigvuldigen met gehele getallen, waar tot nu toe nooit bijvoorbeeld $2\frac{1}{2} \times ..$; $1\frac{1}{2} \times ..$; $\frac{1}{2} \times ..$ ter sprake is gekomen.

Bij een en ander fungeert de winkelcontext als een krachtig contextmodel en de getallenlijn als een sterk visualiseringsmiddel:

AFBEELDING 92



Maar er zijn nog andere mogelijkheden om met name het vermenigvuldigen van kommagetallen inzichtelijk te maken.

2 *Wijder verband van de lessenserie over schatten*

Voor we nog wat verder ingaan op het schattende en precieze vermenigvuldigen en delen, eerst nog enkele opmerkingen over het globale optellen (en aftrekken). Want ook deze elementaire bewerkingen blijken met kommagetallen niet zo eenvoudig te verlopen.

2.1 OPTELLEN EN AFTREKKEN

Neem de volgende opgave:

Yvonne rekt uit op haar rekenmachine:

$$715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091$$

Bij het schrijven van het antwoord is ze de komma vergeten.

Wat moet het antwoord zijn?

Uit PPON (2) blijkt dat 44 procent van de Nederlandse leerlingen deze opgave goed maakt.

De goedscore bij een groep van 134 leerlingen ligt zelfs nog wat lager. Maar dat is in dit verband niet relevant. Wat wel telt, zijn de beredeneerde berekeningen die worden gemaakt. (Bokhove, 1995)

AFBEELDING 93

Oplossingsmethoden

1	De meeste getallen hebben drie cijfers achter de komma, dus het antwoord ook	38	38f	
2	Er wordt gecijferd of gepoogd te cijferen	21	9g	12f
3	Er wordt schattend geredeneerd en afgerond op honderden ($700 + 600 = 1300$)	17	14g	3f
4	715,347 + 4,553 De onderstreepte stukjes zijn samen 0,100 (= 0,1) Dan overal één cijfer achter de komma	13	9g	4f
5	Als je het onder elkaar zet zijn er drie cijfers achter de komma	11	1g	10f
6	In totaal 7 cijfers achter de komma, dus ook in het antwoord 7 cijfers erachter	8	2g	6f
7	Drie cijfers voor de komma komt het meest voor, dus in het antwoord ook drie cijfers voor de komma	4		4f
8	Eén cijfer achter de komma want het middelste getal heeft ook één cijfer achter de komma	1	1g	
9	De leerling komt tot niets	6		6f
10	Anders	15	3g	12f
Totaal		134	39g	95f

Slechts ruim 10 procent van deze groep leerlingen volgt de gemakkelijke methode van het schattend rekenen met gehele getallen of ronde getallen.

Het overgrote deel van het huidige leerlingenbestand einde basis-onderwijs blijkt af te gaan op irrelevante vormkenmerken en rekent derhalve formalistisch, niet-betekenisvol met kale getallen (en dat zegt wellicht ook veel over de bestaande onderwijsaanpak).

Uit PPON (2) blijkt evenwel dat er een positieve kentering gaande is: de prestaties van het schattende rekenen nemen spectaculair toe (De Jong en Verkruijsse, 1995).

In de nieuwste (bewerkingen van) methoden wordt dan ook meer aandacht besteed aan schattend rekenen.

Een voorbeeld uit *Wereld in Getallen*, deel 7A, pag. 10. (Huitema (red.), 1994).

AFBEELDING 94

Heb je genoeg aan $f\ 20,-$?

$f\ 5,95$	$f\ 4,98$
$f\ 4,75$	$f\ 4,98$
$f\ 3,30$	$f\ 4,98$
$f\ 5,98$	$f\ 4,98$

We bepalen ons tot de opgave van 4 keer $f\ 4,98$.

Hoe lossen de leerlingen dergelijke sommen op?

We kennen de resultaten van ruim 100 kinderen uit groep 6 en groep 7 met een iets andere contextopgave⁵:

Lieke wil 4 broden kopen van $f\ 1,98$.

Ze heeft een tientje.

Is dat genoeg?

De meest gebruikte strategieën zijn de volgende: cijferend optellen, uit het hoofd vermenigvuldigen, cijferend vermenigvuldigen en globaal rekenen met (afge)ronde getallen.

AFBEELDING 95

1

$$\begin{array}{r} \text{ja} \\ \begin{array}{r} 198 \\ 198 \\ 198 \\ 198+ \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} 198 \\ 198 \\ \hline 396 \\ 396 \\ \hline 792 \end{array}$$

2

$4 \times 1 = 400$ endan $4 \times 9 = 360$
 en dan $4 \times 8 = 320$

$$\begin{array}{r} 400 \\ 320 \\ 360+ \\ \hline 1080 \end{array}$$

3

ja

$$\begin{array}{r} 198 \\ 4 \times \\ \hline 792 \end{array}$$

4

ja

omdat 198 bijna 200 is en $4 \times 200 = 800$.
 $800 - \min(4 \times 2) = 800 - \min(8) 800 = 792$

5

ja

WANT 198 is bijna
 200 en
 4×200 is 800

Meer dan de helft van de kinderen kiest voor de cijferende oplossing en minder dan een derde deel voor het globale schattende rekenen van (4) en (5).

Het stellen van dergelijke opgaven over globaal rekenen is op zich nog niet voldoende. In het onderwijs zal zeer zorgvuldig op de voordelen van het globale rekenen ingegaan moeten worden. En de didactische aanwijzingen in de handleidingen zullen de onderwijspraktijk in dit opzicht moeten ondersteunen om de positieve atti-

tude en het zelfvertrouwen bij de leerlingen te bevorderen. Er zijn echter nog andere mogelijkheden om te verhinderen dat de kinderen de sluipteg van het precieze cijferende rekenen bewandelen en voor het schatten-achteraf kiezen. Namelijk door bepaalde vormen van opgaven te nemen die het precieze rekenen ofwel onmogelijk of onaantrekkelijk maken (zie Treffers en De Moor, 1990, pag. 116-126). Voorbeelden zijn: meerkeuzevragen, vraagstukken waarbij de komma geplaatst moet worden en vlek-sommen. Deze worden in de nieuwste methoden af en toe voor het schatten benut. Een voorbeeld uit de handleiding van *Wereld in getallen*, deel 7B. (Huitema (red.), 1994)

AFBEELDING 96

Lessuggesties

Rekenallerlei

Waar komt de komma?

Schrijf de volgende acht sommen op het bord.

$$256,7 + 0,489 = 257189$$

$$1036,4 - 7,593 = 1028807$$

$$13,853 + 0,77 + 6,45 = 21073$$

$$24,5 - 0,19 - 1,586 = 22724$$

$$5,5 \times 98,3 = 54065$$

$$6,35 \times 9,237 = 5865495$$

$$0,5 \times 19,78 = 989$$

$$404,3 \times 1,5 = 60645$$

Geef aan dat bij het opschrijven van de uitkomst de komma is vergeten. Laat de kinderen de uitkomsten opschrijven met de komma op de juiste plaats (de cijfers die er staan zijn goed). Door handig rekenen en redeneren kan de plaats van de komma worden bepaald.

We inventariseren de antwoorden en vragen daarbij steeds naar de manier waarop de kinderen hebben geredeneerd. Dat kan bijvoorbeeld zijn:

$256,7 + 0,489 = 257,189$, want het is eigenlijk 256 en nog een heel klein beetje. $1036,4 - 7,593 =$

$1028,807$, want afgerond wordt het $1036 - 8 = 1028$.

$0,5 \times 19,78 = 9,89$ want afgerond wordt het: de helft van 20, de uitkomst moet dus in de buurt van 10 zitten.

2.2 VERMENIGVULDIGEN EN DELEN

Dat er ook bij het vermenigvuldigen en delen op het terrein van het schattende rekenen grote vooruitgang geboekt kan worden ten koste van het regelgeleide rekenen, blijkt uit de toetsscores van de experimentele groep 7. In de natoets van de zojuist beschreven serie van vijf lessen haalden deze leerlingen met de volgende opgaven een beter resultaat dan groep 8 van dezelfde school (Van Zanten, 1994):

Plaats de komma:

$$4,78 \times 6,35 = 30353 \text{ (87\% goedscore in groep 7 tegenover 39\% in groep 8)}$$

$$20,64 : 5 = 4128 \text{ (64\% tegenover 39\%)}$$

De leerlingen uit groep 8 hanteerden de gangbare kommaregel en kwamen zo tot antwoorden als 3,0353 en 41,28. Of ze pasten een verkeerde regel toe (vanuit het optellen) en kregen dan als product 303,53 ...

Ook voor schattend vermenigvuldigen en delen geldt overigens dat daaraan in de nieuwe (bewerkte) reken-wiskundemethoden thans veel aandacht wordt besteed, zowel in contextopgaven als in kale vraagstukken.

Twee voorbeelden uit *Pluspunt*, deel 8 (Van Beusekom (red.), 1994):

AFBEELDING 97

Schat de uitkomst en schrijf de letter op.

		A	B	C	D
a	$25 \times 1,9 \approx$	25	75	50	100
b	$2,8 \times 30,2 \approx$	60	90	75	160
c	$6 \times 498,75 \approx$	2500	3000	3500	2400
d	$49,93 \times 30 \approx$	1500	2000	1750	1250
e	$4,03 \times 35,1 \approx$	120	130	160	140

		A	B	C	D
f	$47,9 : 8 \approx$	4	8	7	6
g	$601,3 : 29 \approx$	15	20	25	30
h	$91,2 : 15 \approx$	5	9	7	6
i	$203,4 : 24 \approx$	8	10	7	9
j	$1504,7 : 30 \approx$	40	45	50	55

(OPDRACHTENBOEK 8, PAG. 108)

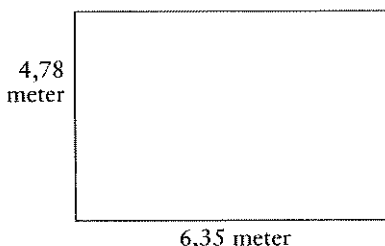


(LESBOEK 8, PAG. 32)

Toch een kritische kanttekening bij deze mooie opdrachten: in de handleidingen van de betreffende methoden wordt te weinig aandacht besteed aan de nul-komma-keerkwestie, die zo lastig blijkt te zijn. En de didactische ondersteuning met modellen daarbij komt ook niet voldoende uit de verf. Vandaar nog enkele opmerkingen over visuele en contextrijke modellen.

2.3 GEBRUIK VAN MODELLEN

De genoemde opgave $4,78 \times 6,35 = 30353$ ('Plaats de komma') kan in de context van oppervlakteberekening worden geplaatst.



Eric schrijft op:
De oppervlakte is 30353 vierkante meter.

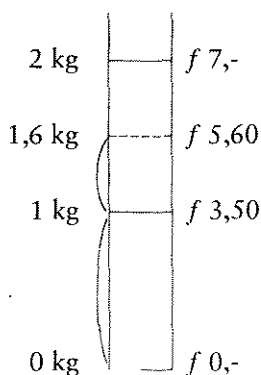
Hij is de komma vergeten.
Waar moet de komma staan?

Hiermee is een *tweede modelcontext* voor het vermenigvuldigen van kommagetallen genoemd naast de getallenlijn of strook, te weten het *rechthoeksmodel*.

Verschillende inklempregels - zoals ' $6,35 \times 4,78$ ' ligt tussen ' $6 \times 4,78$ ' en ' $7 \times 4,78$ ', of ruimer tussen ' 6×4 ' en ' 7×5 ' - kunnen aan de hand van dit model gevisualiseerd worden. En ook dat nul-komma-keer niet groter maar kleiner maakt, kan eveneens met het rechthoeksmodel worden verduidelijkt: de keer-structuur zit als het ware in dit model gebakken zodat de neiging om bij nul-kommaproblemen zonder meer te gaan delen niet zo sterk is. Voorts kan de verwisselingschap ermee inzichtelijk worden gemaakt: $4,78 \times 6,35 = 6,35 \times 4,78$ maar vooral ook $0,78 \times 6,35 = 6,35 \times 0,78$ en dat is goed bruikbaar om de kwestie van nul-komma-keer nog eens een beetje anders te benaderen.

Kortom, het rechthoeksmodel kan het vermenigvuldigen van eenvoudige kale kommagetallen mooi uitbeelden. Maar dit model is niet altijd behulpzaam om de vermenigvuldigstructuur in contextproblemen te helpen identificeren. Want deze hebben vaak geen onderliggende structuur die naar een rechthoeksmodel verwijst met twee identieke grootheden (zoals bij oppervlakte). Veel verhoudingsproblemen koppelen juist verschillende grootheden, zoals ook in de winkelcontext het geval is. En dan ligt het gebruik van een dubbele getallenlijn of -strook veel meer voor de hand dan van een rechthoeksmodel.⁶

Neem de rijstopgave (f 3,50 per kg) die eerder werd besproken, maar nu afgebeeld op een smalle *strook*.



0,6 kg kost f 2,10; berekend via
'1,6 keer ... minus 1 keer ...' =
'0,6 keer ...'

Zo'n strook is overigens ook goed hanteerbaar voor vraagstukken met percentages.

Conclusie: er zijn twee bruikbare modellen voorhanden om het vermenigvuldigen van kommagetallen te visualiseren, namelijk de strook (of dubbele getallenlijn) en de rechthoek. Ieder van die modellen heeft zijn voordelen en nadelen. De voordelen van het context-strookmodel liggen op het terrein van de brede toepasbaarheid in allerlei contextproblemen. De voordelen van het rechthoeksmodel liggen vooral op het gebied van het rekenen met kale kommagetallen, hoewel ook het strookmodel daar goed bruikbaar is - afgezien van het visualiseren van de verwisselingschap bij vermenigvuldigen.

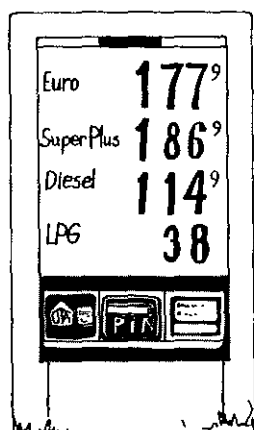
Schattend kunnen rekenen is een belangrijk doel op zichzelf. Maar schatten heeft nog andere functies. In het voorgaande is geschetst dat schatten kan dienen om het antwoord van een berekening te controleren en zo nodig te corrigeren. De schatting-vooraf kan soms ook helpen om de correcte berekening uit te voeren, of om een dieper inzicht te geven in de basisoperaties van vermenigvuldigen en delen, zoals bij het opereren met nul-kommagetallen.

3 *Hoofdrekenen*

We bepalen ons hier tot hoofdrekenen met machten van 10, en wel speciaal tot 10 keer een kommagetal, en tot een kommagetal gedeeld door 10, alsmede tot de kwestie van 0,1 keer.

3.1 VERMENIGVULDIGEN MET EEN MACHT VAN TIEN

We starten met een uitvoerige bespreking van 10 keer. Dergelijke opgaven kunnen om te beginnen in de context van de prijssticker worden geplaatst of bijvoorbeeld met een ander 'per'-verhoudingsprobleem worden gestart.



Wat betekenen die getallen op het prijzenbord van het benzinestation?

En speciaal: wat betekent die kleine negen rechts bovenaan?

Na bespreking verschijnt op het bord:

'1 liter Euro kost 177,9 cent of 1,779 gulden'

.....

'1 liter LPG kost 38 cent of 0,38 gulden'

Dan worden de volgende vraagstukken opgegeven:

Waarom is de Europrijs per liter zo precies gegeven en niet afgerond op centen?

Hoeveel kost 10 liter LPG, uitgedrukt in centen en in gulden?

Hoeveel kost 100 liter LPG, uitgedrukt in centen en in gulden?

Idem voor de andere brandstoffen Euro, Super en Diesel?

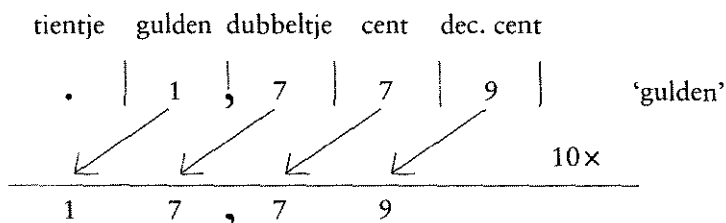
Bij het uitrekenen kan desgewenst een rekenmachine worden ingeschakeld. Hierbij kan met de constante factor worden gere-

kend waarmee de pompteller wordt nagespeeld.

In de nabespreking krijgt speciaal de kommaverplaatsing in het antwoord de aandacht.

Wat is de verklaring voor het verschuiven van de komma één plaats naar rechts bij 10 keer, en twee plaatsen bij 100 keer?

Er verschijnt een soort positieschema met maten op het bord.



Waar de komma ook staat, bij vermenigvuldiging met 10 verschuiven alle cijfers één plaats naar links: 1 gulden wordt 1 tientje, 7 dubbeltjes wordt 7 gulden en zo verder. Dus eigenlijk verplaatst de komma zich niet naar rechts maar schuiven alle cijfers één plaats naar links.

En bij 100 keer gebeurt hetzelfde, maar nu met twee plaatsen!

Men kan in zo'n positieschema natuurlijk ook een ander benoemd meetgetal plaatsen, zoals bijvoorbeeld een lengte van 1,77 m of 1,779 m, en dan gebeurt bij vermenigvuldiging met 10, 100, enzovoort, uiteraard precies hetzelfde met de komma's, of beter, met de getallen.

Tot zover de nabespreking.

Zoals gezegd, gaat het in dit geval om de verklaring van het kommedrag via een positie- of maatkaart voor geld en voor metrieke maten van lengte, gewicht en inhoud (in liters bijvoorbeeld). Vanuit die meetgetallen wordt de gevonden regel toegepast op pure getallen - eventueel met behulp van een positieschema.

Voor '100 keer' gaat de aanpak op dezelfde wijze, al dan niet via '10 keer 10 keer'. Vervolgens vindt generalisatie plaats voor vermenigvuldigingen met een macht van tien.

Als sluitstuk kan een en ander nog eens via andere voorbeelden

worden gecontroleerd met de rekenmachine. Daarbij komt de aandacht nogmaals op de commutatieve eigenschap van vermenigvuldigen te liggen.

Kennen de kinderen einde basisschool thans de tien-keerregel? Ongeveer 60 procent blijkt deze regel correct te kunnen toepassen.

Karakteristieke fouten ontstaan vaak door verwarring van de nulregel voor gehele getallen.

Neem bijvoorbeeld $100 \times 64,3$ of $64,3 \times 100$.

Verkeerde antwoorden in deze categorie zijn:

6400,300 (kommascheiding)

6400,3 (kommascheiding)

64,300 (verwarring nulregel gehele getallen)

$6400 + 300 = 6700$ of $670,0$ (combinatie scheiding en nulregel)

$643 \times 1000 = 643000$ (verwarring met delingsregel)

Daarnaast wordt (verkeerd) gecijferd of handig gerekend (via 100×64 plus $100 \times 0,3$ of 100×65 minus $100 \times 0,7$).

Het geven van een 'blinde' regel leidt bij minstens 20 procent van de leerlingen tot verwarring met andere rekenregels, zo blijkt uit PPON (2). (Bokhove, 1996).

Het is dus zaak om het vermenigvuldigen met machten van tien uitgebreid en diepgaand te onderzoeken met benoemde meetgetallen op de manier zoals hiervoor geschetst.

3.2 DELEN DOOR EEN MACHT VAN TIEN

Het *delen* door machten van tien gaat hand in hand met vermenigvuldigen, mogelijk weer aangezet vanuit de stickercontext.

$$10 \times 1,779 = 17,79 \qquad 17,79 : 10 = 1,779$$

Delen kan via het boogjesteken in verband met vermenigvuldigen worden gebracht:

$$186,9 : 100 = 1,869 \qquad \text{want} \qquad 100 \times 1,869 = 186,9$$

Bij delen schuift de komma dus naar links in plaats van naar rechts, of beter gezegd verschuiven de cijfers van het deeltal naar rechts van de komma. Ook bij het delen kan een positie- of maatkaart worden gebruikt om, los van het inverse vermenigvuldigen, de verschuiving van de komma te verduidelijken. De relatie tussen ' $:$ 10' en ' $0,1 \times$ ' moet daarbij nadrukkelijk worden gelegd. Dit is dezelfde problematiek als het verband tussen ' $\frac{1}{10}$ deel-van' en ' $\frac{1}{10}$ keer' en 'gedeeld door 10' dat ook bij de breuken aan de orde komt.

Men kan ook bij delen starten met een elementair contextprobleem in bijvoorbeeld de winkelcontext:

1 kg kost f 15,-.	Hoeveel kost 1 ons?
	Hoeveel kost 10 gram?
10 kg kost f 3.50.	Hoeveel kost 1 kg?

Er zijn al met al drie hoofdwegen:

- via context
- via positie- of maatkaart
- via boogje vermenigvuldigen/delen.

Hoe staat het met de huidige eindresultaten bij het delen door machten van tien?

Uit onderzoek in het kader van PPON (2) blijkt dat ruim de helft van de leerlingen einde basisschool de opgave $43,8 : 100$ correct oplost. (Bokhove, 1996).

De oplossingsmethoden van een steekproef van 104 leerlingen zijn als volgt samen te vatten:

AFBEELDING 100

freq	goed	fout	oplossingsmethode
4x	2g	2f	cijferen
46x	46g		komma 2 plaatsen naar links
4x		4f	komma 2 plaatsen naar rechts
2x	2g		via $438 : 1000$
6x		6f	$1000 : 438 = 2$ rest ...
2x	2g		als breuk schrijven $\frac{430}{1000}$
5x		5f	komma 1 plaats naar links {dan zijn het honderdsten}
1x	1g		$43,8 : 100 = 0,438 : 1 = 0,438$
3x		3f	Hoe vaak gaat 43,8 op de 100?
1x		1f	$43,8 : 100$ vervangen door $44 : 100$
10x		10f	uniek
17x		17f	geen antwoord (waaronder diverse cijferaars)
3x		3f	opl. onbekend
104x	53g	51f	

De weg van het cijferen blijkt veel gekozen te worden, maar voert vaak naar een verkeerde oplossing.

Conclusie: de tien-problematiek blijkt lastiger dan vaak wordt verondersteld.

De op te sporen kommaregels zijn echter van groot belang voor het hoofdrekenen (en schatten) - net zo belangrijk als de nulregels bij het vermenigvuldigen van tienmachten met gehele getallen. En dan hebben we het nog niet eens over de belangrijke toepasbaarheid ervan bij procentrekening...

4 Samenvatting

Samengevat blijkt de didactiek van schatten en hoofdrekenen op de volgende tien hoofdpunten gebaseerd te zijn:

- orde van grootte van kommagetallen kunnen bepalen en kommagetallen op een getallenlijn met passende schaalverdeling kunnen plaatsen;
- keer tien en gedeeld-door-tien kunnen uitvoeren door kommaverplaatsing;
- effect van vermenigvuldigen en delen met nul-kommagetallen kunnen doorzien;
- uitkomsten van basisoperaties met (gemengde) kommagetallen kunnen schatten, en wel speciaal producten en quotiënten via de strategie van het 'inklemmen';
- komma's in meetgetallen kunnen plaatsen die naar bekende referentiepunten verwijzen;
- relatie tussen kommagetallen en breuken en procenten doorzien;
- de plaatswaarde van de cijfers in kommagetallen kennen, mede in verbinding met meetgetallen uit het metrieke stelsel;
- inzien dat de mate van verfijning van kommagetallen afhankelijk is van het aantal decimalen;
- kommagetallen op verschillende manieren kunnen 'afroonden' op een bepaalde decimaal: naar beneden, naar boven en via afkappen - zowel met kale getallen als op passende wijze in contextsituaties;
- beslissen wanneer en hoe de rekenmachine ingezet kan (of moet) worden.

Ziehier tien algemene karakteristieke punten voor het rekenen met kommagetallen die mede in verband te brengen zijn met gecijferdheid, een onderwerp dat in het volgende hoofdstuk centraal komt te staan.

Noten

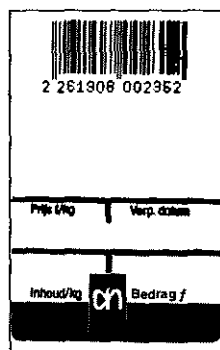
- 1 Het onderwijsexperiment is uitgevoerd door M. van Zanten, onder begeleiding van A. Treffers en R.A. de Jong in het kader van een doctoraalonderzoek aan de Vakgroep Onderwijskunde te Utrecht (1994).

Na dit experiment zijn er door A. Treffers nog aanvullende onderzoeken gedaan met individuele leerlingen.

De beschrijving van de lessenserie is een gestileerde mengvorm van wat in de verschillende experimenten naar voren is gekomen.

- 2 In de volgende opgaven wordt de multiple-choicevorm als didactisch middel gebruikt.
- 3 Een leerling, Renate, heeft een strategie die bij dit soort voorbeelden nog wel tot een behoorlijke schatting leidt (al is dat niet zo gemakkelijk in te zien), maar bij nul-komma-keer niet meer.

AFBEELDING 101



$\begin{array}{r} + 15,- \\ \hline \end{array}$ $3 \times 4 = 12$ en 54 en 423 =
 $\begin{array}{r} + 186 \\ \hline \end{array}$ dus wordt het $3 \times 5 = 15,-$

We stellen het commentaar op haar werkwijze dus nog even uit tot we daaraan toe zijn. Een bespreking in de hele groep zou alleen maar verwarring stichten, en wellicht zouden andere kinderen haar werkwijze overnemen.

Ziehier een voorbeeld van een dilemma: erop ingaan of niet?

Nu niet, wordt in een flits besloten

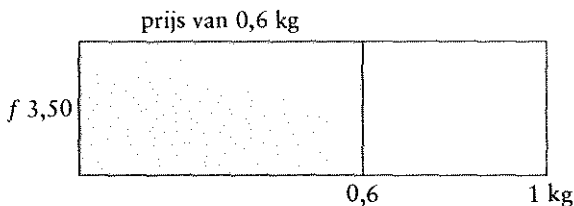
- 4 We noemen in dit verband enkele bekende studies van Bell, Swan & Taylor (1981); A. Ekenstam & Greger (1983); Fischbein, Deri, Nello & Marino (1985); De Corte, Verschaffel & Van Coillie (1988).

De gedachte dat nul-komma-keer groter maakt, wordt wel het 'multiplier effect' genoemd. Het is vooral gestoeld op het aanvankelijke vermenigvuldigen van gehele getallen via herhaald optellen. Het gevolg van dit idee is, dat in contextproblemen waarin de vermenigvuldiger een nul-kommagetal is, in plaats van een keer-operatie een deling wordt uitgevoerd. Het resultaat van deze bewerking komt dan echter niet overeen met wat vooraf werd ingeschat. Is er een rekenfout gemaakt? Zo niet, dan ontstaat een cognitief conflict. Verschillende van de genoemde onderzoekers kiezen hier het didactische aangrijpingspunt om het 'multiplier effect' kritisch te beschouwen - gedeeltelijk met succes.

Anderen zoeken vooral een preventieve oplossing voor het 'nul-komma-keer maakt groter'- idee door de vermenigvuldigoperatie niet (alleen) te binden aan herhaald optellen, maar bijvoorbeeld van meet af aan het rechthoeksmodel als grondslag voor vermenigvuldigen te kiezen - een oude didactische methode. (Met als nadeel dat dit model niet altijd past bij vele contextopgaven waarin geen rechthoeksstructuur aanwezig is). Ook kan 'keer' verbonden worden met springen op de getallenlijn of het afdraaien van een opgerolde getallenlijn of een wiel. (Greer, 1988)

Wij voegen aan het laatste de verbinding toe met de context van de prijssticker: de prijs-gewichtrelatie wordt dan als het ware afgerold op de dubbele getallenlijn.

- 5 Onderzoek uitgevoerd door A. Noteboom (1990) in het kader van Speerpunt Rekenen.
- 6 Een rechthoek met op de ene zijde de prijs per kg en op de andere zijde het gewicht in kg, kan wel dienen om de prijs te berekenen via oppervlaktebepaling. Maar deze voorstelling is uitermate abstract, te abstract voor het basisonderwijs.



Literatuur

- Bell, A, M. Swan & G. Taylor: Choice of operations in verbal problems with decimal numbers, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1981, pag. 299-420.
- Beusekom, N. van (red.): *Pluspunt*, Den Bosch, Malmberg, 1994.
- Bokhove, J.: Periodiek peilingsonderzoek van het onderwijsniveau: een spiegel voor het onderwijs, in F. Goffree (red.), *Handboek voor de rekencoördinator*, SLO, Enschede, 1995, pag. 29-41.
- Bokhove, J.: *Gegevens over het rekenen met decimale breuken*, Cito, Arnhem, 1996 (manuscript).
- Corte, E. de, L. Verschaffel & V. van Coillie: Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solution of multiplication problems, *Journal of Mathematics Behavior*, 7, 1988, pag. 197-216.
- Ekenstam, A. & K. Greger: Some aspects of children's ability to solve mathematical problems, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1988, pag. 369-384.
- Fischbein, E., M. Deri, M.S. Nello & M. Marino: The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 1985, pag. 3-17.
- Gravemeijer, K. (red.): *Rekenen en Wiskunde*, Baarn, Bekadidact, 1987.
- Greer, B.: Nonconservation of multiplication and division involving decimals, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 1987, pag. 3-17.
- Greer, B.: Nonconservation of Multiplication and Division: Analysis of a Symptom, *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 1988, pag. 281-298.
- Huitema, S. (red.): *Wereld in Getallen* (2e versie), Den Bosch, Malmberg, 1994.
- Jong, R.A. de en I. Verkruijsse: Kerndoelen en PPON rekenen-wiskunde, in: C. van den Boer en M. Dolk (red.), *Rekenen in de bovenbouw van de basisschool*, Utrecht, Freudenthal Instituut, 1995, pag. 143-165.
- Noteboom, A.: *Een schat-opgave*, 1990 (manuscript).
- Swan, M.: *The measuring and use of decimals*, Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education, z.j.
- Treffers, A. en E. de Moor: *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en Cijferen*, Tilburg, Zwijssen, 1990.
- Zanten, M. van: *Over Komma's en Getallen*, Utrecht, Vakgroep Onderwijskunde, 1994 (doctoraalscriptie).

IV Cijferen en gecijferdheid

Doelstelling 3 (vervolg)

De leerlingen kunnen decimale breuken vergelijken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen...

De globale goedscores einde basisschool voor het *cijferende rekenen* met gehele getallen zijn eenvoudig weer te geven met het volgende ‘trapje’:

- optellen, 4 van de 5 leerlingen
- aftrekken, 3 van de 4 leerlingen
- vermenigvuldigen, 2 van de 3 leerlingen
- delen, 1 van de 2 leerlingen.

Vooraf echter bij het aftrekken en delen variëren de goedscores per opgave sterk, afhankelijk van het feit of er al dan niet nullen in het geding zijn.

De globale goedscores voor het cijferen met kommagetallen zakken per bewerking één trede:

- optellen, 3 van de 4 leerlingen
- aftrekken, 2 van de 3 leerlingen
- vermenigvuldigen, 1 van de 2 leerlingen
- delen, iets minder dan 1 van de 2 leerlingen (zeg 40 procent).

Maar nog sterker dan bij de gehele getallen verschillen de goedscores per opgave. Zowel de kommaplaats, het aantal decimalen achter de komma, de nullen, als de toepassingscontexten zijn factoren die de moeilijkheidsgraad bepalen.

Dat alles maakt dat vaak heel lastig op voorhand valt te bepalen welke scores de leerlingen zullen (moeten) halen.

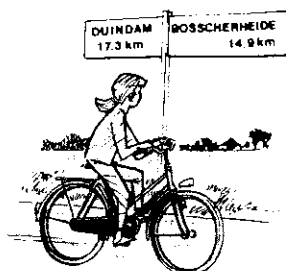
In het volgende geven we enkele voorbeelden van grote verschillen per operatie met items uit PPON (2)¹.

Optellen

• $0,092 + 0,56$

(80%)

AFBEELDING 102



Irene fietst van Duindam naar Bosscherheide. Tijdens de tocht passeert ze deze richtingwijzer. Hoeveel kilometer liggen deze twee plaatsen van elkaar?

_____ km

Het verschil in de goedscores wordt bepaald door de toepassingscontext: de optelling van de tweede opgave is zelfs eenvoudiger dan die van de eerste, maar toch blijkt hier maar de helft van de leerlingen tot een goede oplossing te komen. Veel leerlingen hebben de gegeven getallen afgetrokken...

Aftrekken

• $6,37 - 3,78 =$

(80%)

• $58,3 - 3,74 =$

(55%)

• Aan het begin van de dag staat de kilometerteller van mijn fiets op 957,4 km. Aan het eind van de dag is de stand 009,7 km. Hoeveel km heb ik die dag gefietst?

..... km

(35%)

Alle genoemde factoren - plaats komma, verschillend aantal decimalen, nulkwetsie, en vooral ook vertrouwd zijn met de context - veroorzaken de grote verschillen.

Vermenigvuldigen

AFBEELDING 103



Moeder koopt 17 meter van deze gordijnstof.

Hoeveel moet zij betalen?

f _____ (65%)

• $0,07 \times 23,4 =$ (55%)

Een relatief bekende context met betrekkelijk eenvoudige (komma)getallen levert een hogere score op dan een wat complexere kale opgave.

Delen

• $75,6 : 1,4 =$ (60%)

• $9,88 : 13 =$ (55%)

• De toegangsprijs voor een toneelvoorstelling is f 7,50.

Totaal wordt aan de kassa f 1.860,- ontvangen.

Hoeveel kaartjes zijn er verkocht?

..... kaartjes. (45%)

• Hoeveel flessen met een inhoud van 0,75 liter kunnen gevuld worden uit een vat met 100 liter?

..... flessen (25%)

(CARPENTER E.A., 1981)

Uit een ander onderzoek is bekend dat de score bij de laatste opgave niet toeneemt, maar zelfs daalt indien de leerlingen bij de berekening een rekenmachine (mogen) gebruiken. Blijkbaar zit de moeilijkheid mede in de interpretatie van de rest en niet zozeer in de rekenprocedure van het delen op zich. Ook remt de rekenmachine wellicht het gebruik van informele oplossingsmethoden.

Tot zover de globale gegevens over het cijferende rekenen met kommagetallen in het onderwijs omstreeks 1990.

Hoe moet een en ander gewaardeerd worden, gelet op de omstandigheid dat het feitelijke uitvoeren van de rekenprocedures steeds meer naar de rekenmachine verschuift?

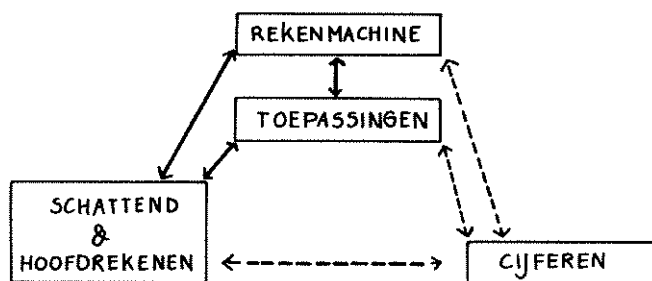
Dat is de eerste vraag die in het volgende beantwoord zal worden. Daarna gaan we in algemene zin in op het onderwijzen en leren van de cijferalgoritmen in relatie tot hoofdrekenen. En vervolgens worden de basisbewerkingen en wel speciaal vermenigvuldigen en delen met kommagetallen meer in detail besproken met het oog op de inzichtelijke komma-plaatsing - een kwestie die we in het vorige hoofdstuk al even aanstipten.

Het laatste deel van dit hoofdstuk is gewijd aan gecijferdheid, in dit specifieke geval te interpreteren als gevoel-voor-kommagetallen. Aan de hand van enkele voorbeelden demonstreren we hoe soms op ongepaste wijze met komma-meetgetallen gerekend wordt. Met name de mate van precisie van deze getallen wordt nauwkeurig onder de loep genomen. En ten slotte gaan we in op de kernvraag wat een en ander betekent voor het programma en het onderwijs op het gebied van kommagetallen.

1 *Cijferen en de rekenmachine*

De teruglopende betekenis van het cijferen met kommagetallen werd in Proeve 3A (Treffers, Streefland en De Moor, 1994, pag. 36) als volgt uitgebeeld:

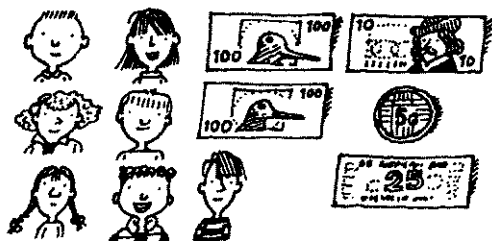
AFBEELDING 104



Voor kommagetallen houdt dit in dat voor grote vermenigvuldigingen en delingen de rekenmachine het passende hulpmiddel is om de uitkomsten uit te rekenen.

In tegenstelling tot wat vaak wordt gedacht, zijn daarmee echter nog lang niet alle problemen opgelost, met name niet bij toepassingen.

AFBEELDING 105



7 kinderen verdelen f 240,00.

Hoeveel krijgt ieder kind?

(VAN BEUSEKOM (RED.), 1994, DEEL 7, PAG. 56)

De deling $240 : 7$ levert met de rekenmachine 34,285714 op. Wat betekent dit voor de verdeling?

Keuzemogelijkheden die ter discussie komen:

34,28

34,29

34,25

34,30

En het is nog maar de vraag in hoeverre het inzetten van de rekenmachine de interpretatie van de werkelijke uitkomst helpt vereenvoudigen, in vergelijking met het cijferende uitvoeren van de staartdeling. Bij het uitrekenen via uitdelen kan men zich goed realiseren wat er in feite gebeurt:

$$\begin{array}{r}
 7 \text{ / } f \text{ 240,- } \backslash \\
 \underline{210} \quad f \text{ 30,- pp} \\
 30 \\
 \underline{28} \quad f \text{ 4,- pp} \\
 f \text{ 2,-}
 \end{array}$$

Nu moeten er nog 2 gulden over 7 personen worden verdeeld. De rekenprocedure van de staartdeling is op zichzelf genomen niet moeilijk en sluit nauw aan bij het hoofdrekenen. Dus waarom zou men het cijferen schrappen?

Dezelfde overwegingen gelden ook voor soortgelijke opgaven uit *Pluspunt*:

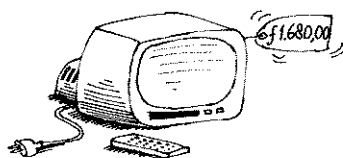
————— AFBEELDING 106



4 kg gehakt verdelen in 5 porties.
Hoe zwaar is iedere portie?



163 km in 4 uur.
Hoeveel km gemiddeld per uur?



Betaal in 24 maanden.
Hoeveel betaal je per maand?



(VAN BEUSEKOM (RED.), 1994, DEEL 7, PAG. 56)

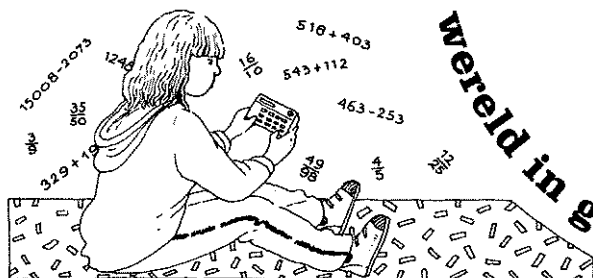
In andere gevallen echter die hoofdzakelijk technische rekenhandelingen vragen, zou de rekenmachine zeker ingezet kunnen worden. En dat geldt in algemene zin voor het rekenen met kommagetallen.

Andere problemen dan die van het afronden, kunnen nu opduiken - nieuwe problemen die zich bij de staartdeling niet voordoen of niet in die mate.

Hoe bereken je bijvoorbeeld in de volgende opgaven uit *Wereld in Getallen* hoeveel je per geval overhoudt?

AFBEELDING 107

DE ZAKREKENMACHINE



De wereld in getallen

3 Winkelen met 25 gulden. Werk met z'n tweeën.

Je bent in de supermarkt. In je portemonnee zit f 25,-.
Hoeveel spitskool zou je daarvoor kunnen kopen?
En wat houd je dan over?
En hoeveel kg druiven kun je ervoor kopen?
Wat houd je dan over?
Maak zulke sommen met alle aanbiedingen uit de folder.
Reken om beurten één aanbieding uit.



GROENTE/FRUIT	
0,49	SPITSKOOL per kg
2,59	DRIUVEN per kg
2,79	HANDPEREN per kg



ZUIVEL	
2,89	FRUITYOGHURT liter
0,99	MAGERE MELK liter
2,19	HOPJESVLA liter
1,79	CHOCOLADEMELK liter



BAKKER	
0,59	KRENTENBOLLEN per stuk
2,29	MOORKOPPEN per stuk
	
1,85	PUDDINGBROODJES per stuk
3,39	KRENTENMIK per stuk
1,75	STOKBROOD

(HUITEMA (RED.), 1994, DEEL 7B, PAG. 344)

In de handleiding (p. 108) staat aangegeven dat het in deze opgave om *hele* kilo's, liters en aantallen gaat. Hoeveel houd je over als je moorkoppen koopt?

$25 : 2,29$ laat in het venster zien 10,91703.

Dat betekent dat je tien moorkoppen kunt kopen. Hoeveel je overhoudt, valt uit die uitkomst niet af te lezen.

Via hoofdrekenen gaat dit alles veel eenvoudiger:

10 moorkoppen kosten f 22,90, dus resteert nog
2 gulden 10.

In dit geval is het inzetten van de rekenmachine niet handig. En dat geldt voor een serie andere gevallen ook.

Nu de krentenmik:

$25 : 3,39 = 7,3746312$

Je kunt er dus zeven kopen. Maar dat had je ook kunnen schatten. Via $7 \times 3,39$ (al dan niet met de rekenmachine berekend)

kan worden bepaald hoeveel je overhoudt van 25 gulden. Er is echter nog een andere mogelijkheid om de rest te berekenen, namelijk door $7,37 \times 3,39$ minus $7 \times 3,39$ te berekenen, dus in feite te bepalen. We komen dan uit op 1,2543. Moeten we dit afronden op 1,25?

Even controleren: $7 \times 3,39 + 1,25 = 23,73 + 1,25 = 24,98$.

Niet goed: iets te weinig door afronden. Er is 1,27 over.

Deze aanpak vraagt echter nogal wat aan inzicht en is eigenlijk heel omslachtig...!

Waarmee we maar willen zeggen dat het routineuze inzetten van de rekenmachine even problematisch is als het blinde cijferen. Ook blijkt uit het voorgaande dat in eenvoudige gevallen hoofdrekenen en cijferen, i.c. het uitvoeren van de staartdeling, heel dicht bij elkaar liggen.

Soms is hoofdrekenen of cijferen handig (bijvoorbeeld in de zojuist geschetste context bij $25 : 0,99$ of $25 : 2,29$), maar in een ander geval is, afhankelijk van de vraag, het gebruik van de rekenmachine aan te bevelen (bijvoorbeeld bij $25 : 1,79$). Ook is vaak in het onderwijs het gebruik van de rekenmachine met het (vervolg van) hoofdrekenen te combineren, zoals in het besproken vraagstuk.

Afgezien van het technische rekenen kan het werken met de rekenmachine tot een verdiept inzicht in rekenprocedures leiden - bijvoorbeeld in de relatie tussen het restgetal en het quotiëntdeel achter de komma.

Het gebruik van de rekenmachine vraagt soms een extra inspanning bij het interpreteren en passend gebruiken van getallen in contextsituaties. Al met al is er geen didactische reden om het cijferen en de rekenmachine tegenover elkaar te plaatsen. Wel kan de rekenmachine het technische rekenwerk helpen terugdringen, maar dat spreekt vanzelf. En daaruit volgt ook dat het inoefenen van de cijferprocedures niet meer tot in de perfectie hoeft te gebeuren, maar dat we ons dienen te bepalen tot elementair cijferen dat direct in het verlengde van gestileerd hoofdrekenen ligt.

Cijferen zo bezien, heeft zowel praktische als didactische waarde. Praktische waarde omdat het rekenen zonder rekenmachine ermee bekort wordt, en didactische waarde vanwege het proces

van algoritmiseren waarmee de leerlingen in aanraking komen, wat op zich gezien wiskundig waardevol is.

Het is echter ook reëel om te stipuleren dat het onpraktisch is om de rekenmachine bij het opereren met kommagetallen niet te gebruiken, en eveneens om de didactische voordelen van de rekenmachine te laten liggen. Hetgeen betekent dat er nu minder gecijferd zal hoeven te worden dan vroeger. De nieuwe rekenwiskundemethoden geven dit ook duidelijk aan.

2 *Cijferen algemeen*

Er is nog een reden om het cijferen te handhaven: het is namelijk niet moeilijk te leren indien eerst een stevige basis (in groep 5) voor het hoofdrekenen is gelegd. Gestileerd hoofdrekenen kan tamelijk gemakkelijk tot elementair cijferen worden omgevormd. Grofweg komt het leren van de standaardprocedures (in groep 6) erop neer dat het gebruikelijke hoofdrekenen van-links-naar-rechts met positiegetallen wordt omgezet in het rekenen met cijfers van-rechts-naar-links, via een tussenfase.

Voor het vermenigvuldigen gaat dat als volgt:

$$\begin{array}{r}
 253 \\
 7 \times \\
 \hline
 1400 \\
 350 \\
 21 \\
 \hline
 1771
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{r}
 253 \\
 7 \times \\
 \hline
 21 \\
 350 \\
 1400 \\
 \hline
 1771
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{r}
 2 \\
 253 \\
 7 \times \\
 \hline
 1771
 \end{array}$$

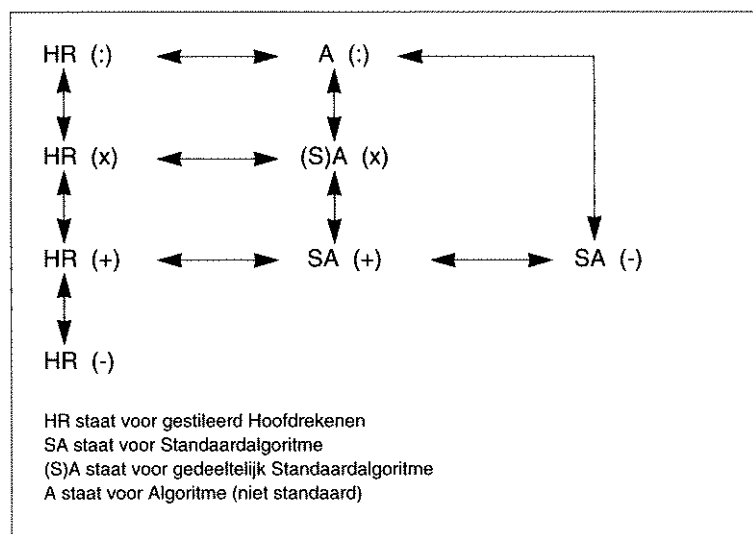
De eerste vorm van berekenen wordt gestileerd genoemd: het is een vaste werkwijze die te onderscheiden is van de gevarieerde methode van handig rekenen (in dit geval via $7 \times 250 = 1750$, oftewel $8 \times 250 = 4 \times 500 = 2000$ minus 250 is 1750, plus $7 \times 3 = 21$, maakt 1771). 'Vast' omdat altijd van-links-naar-rechts wordt gerekend.

In de tweede vorm vindt een omkering van de rekenrichting plaats, en in de derde een verdere verkorting daarvan tot het standaardalgoritme.

Als deze basisvorm wordt beheerst, kan worden overgegaan tot verkorting van de berekening in complexere opgaven zoals bijvoorbeeld 47×253 en 347×253 . Immers 40×253 is in principe niet lastiger dan 4×253 , en hetzelfde geldt voor 300×253 in vergelijking tot 3×253 ... Maar men zou voor 47×253 ook de tweede vorm kunnen benutten en een lange optelling maken van zes deeluitkomsten. Dan krijgt men een minder verkort algoritme, met alle nadelen van dien voor de staartdeling.

Dezelfde fasering geldt voor optellen en in zekere zin ook voor delen. Alleen bij het aftrekken gaat het anders, zoals uit het volgende schema blijkt, dat we nu nader zullen toelichten.

AFBEELDING 108



HOOFDREKENEN EN CIJFEREN: VERBANDEN BASISOPERATIES

In Proeve 2 (Treffers en De Moor, 1990) is geschetst dat gestileerd aftrekken (dus rekenend van links naar rechts) naar een andere procedure voert dan het standaardalgoritme, en dat zou ten opzichte van de bestaande conventies in maatschappij en school een tamelijk ingrijpende wijziging zijn in de richting van

het zogenoemde rekenen-met-tekorten. Daar komt nog bij dat in de thans gangbare aftrekprocedure de verbinding met het standaardalgoritme van het optellen heel hecht is, wat mede pleit voor handhaving van de bestaande procedure van het cijferende aftrekken. Vandaar dat er in het schema geen directe verbinding is tussen gestileerd aftrekken en de standaardprocedure van het cijferende aftrekken.

Bij het delen wordt de meest verkorte procedure niet meer nagestreefd. In plaats daarvan is in Nederland thans het volgende, minder verkorte algoritme al ingeburgerd.

12 / 323 \		12 / 323 \	
<u>120</u>	10 ×	<u>240</u>	20 ×
203		83	
<u>120</u>	10 ×	<u>72</u>	6 ×
83		11	
<u>72</u>	6 ×		26 rest 11
11			
	26 rest 11		

Bij het vermenigvuldigen kan men desgewenst, of beter desnoods, minder verkorte rekenprocedures toelaten. Maar voor de meeste leerlingen is de standaardmethode zeker haalbaar bij producten van een ééncijfergetal met een meercijfergetal. En dat maakt het verkorte delen volgens de tweede vorm, zoals hiervoor aangegeven, heel wat eenvoudiger.

Algemeen geldt dat de stap van gestileerd hoofdrekenen (naast gevarieerd hoofdrekenen beoefend in groep 5) naar het cijferende opereren (in groep 6) niet groot is en als een verdergaande verkorting van dat hoofdrekenen kan worden aangeleerd - aftrekken uitgezonderd.

Complexe cijferopgaven dienen, zoals eerder betoogd, te worden geweerd, niet zozeer om principieel didactische motieven, want de procedures blijven dezelfde, maar wel om praktische redenen, namelijk vanwege de inzetbaarheid van rekenmachines.

De tijd voor het oefenen van de cijferprocedures dient sterk te worden ingekort. Dit is ook mogelijk omdat aandacht voor (gestileerd) hoofdrekenen in groep 5 ook indirect loont voor het

leren cijferen in groep 6. Tevens kan inperking van het complexe opgavenbestand tijdsbesparing opleveren. En ten slotte is er via het geschetste didactische pad van het algoritmiseren altijd nog de uitweg van het minder verkorte rekenen, die voor de hele zwakke rekenaars begaanbaar blijft en dichter bij het betekenisvolle hoofdrekenen ligt.

Ziehier wat de stippellijnen in het schema uitdrukken voor het cijferen in het algemeen.

Nu een verdere uitwerking daarvan voor kommagetallen.

3 Cijferalgoritmen

We laten *optellen* en *afrekken* van kommagetallen hier onbesproken omdat deze operaties ten opzichte van de cijferalgoritmen bij gehele getallen nauwelijks bijkomende problemen blijken op te leveren. Dat de eenheden (en dus ook de komma's) onder elkaar geplaatst moeten worden, is niet moeilijk in te zien indien gestart wordt met meetgetallen en geldrekenen. Alleen het toevoegen van nullen bij aftrekkingen van kommagetallen met een ongelijk aantal decimalen achter de komma of bij een geheel getal minus een kommagetal, levert een extra moeilijkheid indien cijferend gerekend moet worden. Maar dat is dan ook alles. Leerlingen ondervinden dit echter nauwelijks als een nieuw probleem, zo blijkt uit PPON-onderzoek. Bij het vermenigvuldigen en delen daarentegen doen zich wel enkele nieuwe moeilijkheden voor.

3.1 VERMENIGVULDIGEN

Nu de *algemene* kwestie van de *kommaplaatsing* bij vermenigvuldigen, nadat de *tien-keerkwestie* is uitgezocht.

Hoe kan de optelregel van het aantal decimalen bij vermenigvuldigen worden gevonden en verklaard?

Bereken $1,3 \times 64,3$

$$\begin{array}{r}
 64,3 \leftarrow 1 \text{ decimaal} \\
 \times 1,3 \leftarrow 1 \text{ decimaal} \\
 \hline
 1929 \\
 6430 \\
 \hline
 83,59 \leftarrow 2 \text{ decimalen}
 \end{array}$$

In bovenstaand geval is de positie van de komma via schatten te bepalen. Na een serie voorbeelden kan de regelmaat in de kommaplaatsing worden ontdekt. Maar nu de verklaring van die regel!

In de loop van de tijd zijn er in de rekendidactiek verschillende methoden ontwikkeld om de algemene koma-regel van het vermenigvuldigen uit te leggen - al dan niet op basis van eigen onderzoek.

In hoofdstuk I zijn ze al globaal aangeduid, namelijk de methoden:

- via breuken
- via plaatswaarde
- via meten.

$$\begin{aligned}
 \text{a. } 0,52 \times 3,17 &= \frac{52}{100} \times \frac{317}{100} = 52 \times \frac{317}{10000} = \\
 &= \frac{16484}{10000} = 1,6484
 \end{aligned}$$

De methoden via gewone breuken zijn thans niet meer bruikbaar, eenvoudigweg omdat het vermenigvuldigen van breuken niet meer tot het basisschoolprogramma behoort.

$$\begin{aligned}
 \text{b. } 0,52 \times 3,17 &= (52 \times 3,17) : 100 = 164,84 : 100 = \\
 &= 1,6484
 \end{aligned}$$

Waarbij in feite 0,52 wordt omgezet in $\frac{52}{100}$ en deze breuk wordt vervolgens ingezet als operator ($\times 52$ en $: 100$).

$$\begin{array}{ccc}
 \text{c. } 0,52 \times 3,17 &= & 1,6484 \\
 \downarrow .100 & \downarrow .100 & \uparrow :10000 \\
 52 \times 317 &= & 16484
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 0,52 \times 3,17 = 1,6484 & & \\
 \downarrow .100 & \uparrow :100 & \\
 52 \times 3,17 = 164,84 & &
 \end{array}$$

De methoden via plaatswaarde maken gebruik van het rekenen met machten van tien. Ze zijn wel bruikbaar, maar tamelijk formeel en dus lastig.

De methoden via meten, sluiten op deze laatste twee werkwijzen aan. De genoemde vermenigvuldigingen worden nu gerealiseerd via *maatveranderingen* in een contextsituatie van verhoudingen of oppervlaktebepaling. Dus bijvoorbeeld met de prijsstickers of met de oppervlakte van een rechthoek, waarbij met (afgeronde) meetgetallen wordt geopereerd alsof het pure rekengetallen zijn. Een rechthoek van 0,52 m bij 3,17 m heeft een oppervlakte van 16484 cm² is gelijk aan 1,6484 m².

Of met gekoppelde grootheden:

1 kg kost 3,17 gulden
 0,52 kg kost ...

Maar een dergelijke concretisering via meetgetallen geeft voor vermenigvuldigen geen nieuwe gezichtspunten - de omweg van de maatverandering is nogal lang en lastig (denk aan de omzetting van cm² naar m²).

Vandaar dat wij, uitgaande van het schatten, de gevonden regelmaat via de genoemde tien-keermethoden zouden willen (laten) verklaren, op basis van de kommaregels die bij het rekenen met machten van tien zijn opgespoord en verklaard.

In feite is inzicht in deze kommaregels bij de machten van tien van groter belang en betekenis dan inzicht in de algemene kommaregels. Men hoeft deze optelregel voor vermenigvuldigen in feite niet eens te kennen, omdat in alle gevallen het schatten van de orde van grootte uitsluitsel over het plaatsen van de komma kan geven. Ook zou men met de inductief gevonden regel kunnen volstaan, en de verklaring ervan alleen voor de geïnteresseerde leerlingen kunnen reserveren.

Wat in ieder geval didactisch van belang is: geef de regel pas in een laat stadium, na uitvoerige beoefening van het schatten, en eventueel na onderzoek van de diepere reden voor de kommaverschuiving bij het rekenen met machten van tien.

3.2 CIJFEREND DELEN

Voor het cijferende delen van kommagetallen bestaat niet zo'n eenvoudige regel voor kommaplaatsing als voor vermenigvuldigen. Maar er is wel een algemeen aanvaarde strategie om de staartdeling met kommagetallen uit te voeren, namelijk via het wegwerken van de komma in de deler. Dat gebeurt door zowel deeltal als deler met dezelfde macht van tien te vermenigvuldigen - de uitkomst van de deling verandert dan niet van waarde. Dit kan desgewenst met behulp van maatverandering binnen een verhoudingsdeling worden verklaard.

Bijvoorbeeld: $83,59 : 1,3 = 835,9 : 13 = \dots$, te interpreteren als $83,59 \text{ m} : 1,3 \text{ m} = 835,9 \text{ dm} : 13 \text{ dm} = \dots$

('Hoeveel keer past 1,3 m op 83,59 m' levert hetzelfde op als 'hoeveel keer past 13 dm in 835,9 dm'.)

$$\begin{array}{r}
 13 \overline{) 835,9} \searrow 64,3 \text{ (keer)} \\
 \underline{780} \quad 60\times \\
 55,9 \\
 \underline{52} \quad 4\times \\
 3,90 \\
 \underline{3,90} \quad 0,3\times \\
 0
 \end{array}$$

$$835,9 : 13 = \overbrace{64,3}$$

Controle via het boogje leert dat de komma goed geplaatst is, of eventueel hoe de komma geplaatst moet worden. Dat geldt ook wanneer het quotiënt een nul-kommagetal oplevert, zoals bijvoorbeeld bij:

$$8,359 : 13 \stackrel{?}{=} 643.$$

Het boogje via schattend vermenigvuldigen brengt uitkomst: $8,359 : 13 = 0,643$; immers $13 \times 0,643$ komt ongeveer uit op 8.

In de meeste gevallen echter zal bij het oplossen van dergelijke delingsopgaven - vaak in het kader van verhoudingen en procenten - de zakrekenmachine worden ingezet. En dan kan ook met behulp van 'omgekeerd' vermenigvuldigen de juistheid van de uitkomst gecontroleerd worden - zowel via schatten als met behulp van de kommaregel voor vermenigvuldigen.

In het volgende hoofdstuk komen we op de staartdeling terug in verband met het omzetten van breuken in kommagetallen. Indien de relatie met vermenigvuldigen goed in het oog wordt gehouden, biedt de kommaplaatsing bij het delen in principe geen nieuwe moeilijkheden - zeker niet als aanvankelijk de berekening met de rekenmachine 'zonder kommaknop' wordt uitgevoerd (als denk-som of raadsel om de kommaplaatsing te beredeneren).

4 *Cijferen in methoden*

Hoe staat het met het cijferen in de drie leerboeken die recent zijn herzien of voltooid, nadat de kerndoelen in begin jaren negentig duidelijk het hoofdrekenen en schattend rekenen hebben benadrukt?

Is het cijferende rekenen in *Pluspunt*, *Operator Rekenen* (nieuwe versie) en *Wereld in Getallen* (herziene versie) verplaatst naar groep 6 en gebaseerd op hoofdrekenen?

Is het aanleren van de cijferprocedures beperkt tot elementair cijferen? Hoe is het cijferen voor kommagetallen uitgewerkt?

Zonder in details te treden, kan in algemene zin worden vastgesteld dat het zwaartepunt in groep 5 inderdaad duidelijk bij het hoofdrekenen met schatten is komen te liggen.

Pluspunt gaat in de tweede helft van groep 5 al over tot de cijferalgoritmen voor optellen en aftrekken, gebaseerd op gestileerd hoofdrekenen met honderdtallen, tientallen en eenheden.

Operator Rekenen en *Wereld in Getallen* zijn in dit opzicht gelukkig toch wat terughoudender en stellen het cijferend optellen en aftrekken uit tot groep 6. In die groep wordt ook het elementaire cijferende vermenigvuldigen (en delen) al even aan de orde gesteld. In groep 7 worden kommagetallen in het cijferen

betrokken. Ook nu weer is *Pluspunt* hiermee de eerste en zijn *Operator Rekenen* en vooral *Wereld in Getallen* weer wat voorzichtiger met het introduceren van de standaardprocedures.

We kunnen ons, gelet op het voorgaande, vinden in deze uitwerkingen van het cijferen. Wellicht zou zelfs een nog wat striktere bepaling tot elementair cijferen de voorkeur verdienen. Of anders gezegd: het aantal opgavenrijtjes zou naar onze mening tot het uiterste beperkt dienen te worden, of de opgaven zouden vooral gericht dienen te zijn op het schatten en het precies uitrekenen (en controleren van de schatting) met behulp van de rekenmachine.

AFBEELDING 109

4 Schatten en uitrekenen.

$18,65 : 2,8 \approx$	$7,95 \times 8,2 \approx$
$143,3 : 11,9 \approx$	$51,15 \times 6,92 \approx$
$475,45 : 58,7 \approx$	$189,4 \times 20,3 \approx$
$5,36 : 0,88 \approx$	$3,8 \times 41,125 \approx$
$402,13 : 49,4 \approx$	$0,92 \times 0,69 \approx$

(VAN BEUSEKOM (RED.), LESBOEK 8, PAG. 67)

In alle genoemde methoden wordt aandacht besteed aan de tienkeer problematiek en de bijbehorende kommaverschuiving bij vermenigvuldigen en delen. Vooral *Wereld in Getallen* maakt veel werk van een inzichtelijke onderbouwing. Ook de strategie van de kommaplaatsing wordt in de genoemde methoden uitgewerkt. Maar de nul-kommaproblematiek in toepassingsopgaven krijgt geen of (te) weinig aandacht. Daarmee wordt de toepasbaarheid van de rekenmachine en van de cijferalgoritmen in complexe vermenigvuldigings- en delingsvraagstukken belemmerd.

Op het gebruik van de rekenmachine, mede in relatie tot schatten, hoofdrekenen en cijferen, gaan we in het volgende hoofdstuk nog nader in.

Wat het cijferen betreft, kan samenvattend worden vastgesteld dat de nieuwste ontwikkelingen op de methodenmarkt hoopvol stemmen, al zijn er zeker nog tal van verbeteringen mogelijk ten

voordele van schatten, hoofdrekenen en het verstandig gebruik van de rekenmachine.

5 *Gecijferdheid vanuit het cijferen bezien*

Gecijferdheid staat voor 'wiskundige geletterdheid': het vermogen om op passende wijze met getallen en getalsmatige gegevens om te gaan. En wat de basisschool betreft: speciaal getallen in contextsituaties en sommen die uitnodigen tot hoofdrekenen en schattend rekenen.

In de vorige hoofdstukken zijn tal van elementen van gecijferdheid beschreven in relatie tot kommagetallen, zoals bijvoorbeeld het contextgebonden afronden. We lichten dit toe met een negatief voorbeeld uit de (Amerikaanse) onderwijspraktijk.

In het leerboek staat de volgende regel voor het vermenigvuldigen van gehele getallen en kommagetallen: 'Rond de getallen af op het grootste plaatswaardegetal'. De leerkracht begint de les met deze regel.

4,09 wordt afgerond op 4
7,672 op 8
0,30 op 0,3
123,92 op 100
enzovoort.

Vandaag zullen ze dit gaan toepassen, zo wordt de leerlingen in het begin van de les verteld. Ze krijgen het volgende probleem voorgelegd:

'Vijf leerlingen gingen lunchen voor 2,31 dollar ieder.
Hoeveel geld zouden ze met elkaar ongeveer nodig hebben?'

Dat 'ongeveer' is een signaal voor afronden en schatten - zo is het althans door de leerkracht bedoeld. De leerlingen gaan aan het werk en komen onder meer tot schattingen van 12 en 15 dollar. De antwoorden worden besproken.

De leerkracht echter herinnert de leerlingen aan de afrondingsre-

gel. Eerst afronden en dan vermenigvuldigen geeft $5 \times 2 = 10$ dollar, want 2,31 wordt 2 volgens de genoemde regel.

Verschillende leerlingen brengen daartegen in dat deze schatting te laag is, temeer daar er ook nog eens een fooi gegeven moet worden. Ze vinden dat 15 dollar de beste schatting is.

De leerkracht laat de bladzijde nog eens opslaan waarop de afrondingsregel staat.

Eén van de leerlingen stelt dat als je $5 \times 2,31$ uitrekent, je 11,55 krijgt en dat 12 dollar dus het redelijkste antwoord is.

De leerkracht antwoordt daarop: 'Je hebt gelijk, maar als je het volgens het boek doet, krijg je 10. En als je het op jouw manier doet, krijg je het fout op de toets, dus doe het nu maar zoals het in het boek staat.'

Aldus geschiedde.

In de nabespreking blijkt dat de leerkracht zich ervan bewust is dat de regel niet klopt, althans niet bij dit probleem. 'Maar ik moet het zo doen, want anders gaat het bij de natoets four' (Brown, 1993, pag. 213).

In dit voorbeeld is geen sprake van passend schatten en afronden. In ieder geval kun je niet zo met vaste regels werken in context-opgaven. Dat is een mechanistische, regelgeleide aanpak die niet voldoet. Blind toepassen van afrondingsregels leidt tot onwerkelijk rekenen - zo blijkt uit dit extreme (buitenlandse) voorbeeld. Zoiets zagen we straks ook bij de opgave 'f 240,- eerlijk verdelen met z'n zevenen', waarbij contextgebonden op stuivers moest worden afgerond bij contante betaling (en via de giro op centen).

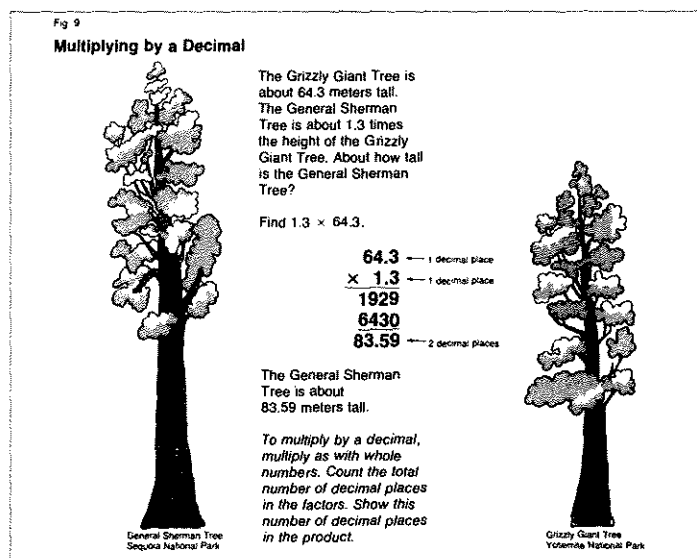
In het volgende laten we zien dat blind regelgeleid cijferen met kommagetallen ook als een vorm van ongecijferdheid kan worden beschouwd. Of positief geformuleerd: dat er ook van 'gecijferd' cijferen met kommagetallen (meestal meetgetallen) kan worden gesproken.

We zullen deze nog wat onderbelichte kant van gecijferdheid nu nader onderzoeken en aan de hand van enkele voorbeelden uitwerken (zie ook Goffree, 1992, pag. 112 e.v.).

5.1 BOMEN OVER PRECISIE

In deze paragraaf werken we één voorbeeld van ongecijferdheid systematisch uit. Neem de volgende opgave uit een samenvattende pagina over het vermenigvuldigen van kommagetallen uit een Amerikaanse methode.

AFBEELDING 110



Het gaat hier om de kommaregel. En deze wordt toegelicht met een voorbeeld over reus-bomen.

Over de kommaregel hebben we al uitgebreid geschreven. In ieder geval kan bij zulke voorbeelden de komma ook via schat-tend rekenen worden bepaald: ruim 1 keer 64,3 m moet uitko-men bij 8359 op 83,59 m. En met behulp van de tienregel kan een en ander ook nog worden verklaard - maar dit terzijde.

Het is ons echter om het contextprobleem te doen, en wel speci-aal om de mate van nauwkeurigheid van de gegevens en van de berekende hoogte van de Sequoia-boom.

Welke kanttekeningen kunnen hierbij worden geplaatst?

In het volgende wordt een uitgebreide opsomming gegeven van de (kritische) kanttekeningen die door studenten, leraren, docenten, begeleiders en anderen bij deze opgave zijn geplaatst en die in verband met (on)gecijferdheid gebracht kunnen worden.²

Kanttekening 1:

‘De bomen zijn goed in verhouding getekend (al hadden ze beter omgewisseld kunnen worden). Dat kun je globaal afmeten door bovenop de Grizzly-boom nog $\frac{1}{3}$ deel van die boom af te passen.’

Aspect van gecijferdheid:

0,3 wordt globaal gelijkgesteld met $\frac{1}{3}$ - verbinding tussen breuken en kommagetallen - om de tekeningen globaal te controleren.

Nieuwe vraag:

‘Kun je dit ook controleren door $\frac{1}{3}$ deel van de Sherman af te halen?’

Het antwoord daarop is ‘nee’. Verklaring: $\frac{4}{3} \times a = b$, dan $\frac{3}{4} \times b = a$. Men moet dus globaal een kwart van de Sherman-boom afhalen om de Grizzly-boom te krijgen!

Deze lastige kwestie doet zich vaak voor bij procentuele toename en afname (in dit geval van respectievelijk 33 procent en 25 procent). Men kan deze relaties ook als noodzakelijke elementen van gecijferdheid beschouwen, maar dan wel als een hogere vorm ervan.

Wij bepalen ons hier echter tot basale gecijferdheid voor de *basis-school*. Daartoe rekenen we wel de relatie tussen 0,3 of 0,33 en $\frac{1}{3}$, maar vooralsnog niet de zojuist genoemde betrekkingen over inverse verhoudingen.

Kanttekening 2:

‘De Grizzly Giant Tree is *ongeveer* 64,3 meter hoog - zo luidt de eerste zin. Wat een opmerkelijk nauwkeurige hoogtemaat is dat, ondanks de toevoeging ‘ongeveer’. Gemeten tot in dm nauwkeurig.’

Aspect van gecijferdheid:

Gevoel hebben voor een passende mate van precisie betreffende

meetgetallen in een bepaalde context. Afronding op een vijftal meters (dus met een marge van 2,5 m naar boven en naar beneden) zou acceptabel zijn. Dat zou betekenen dat de Grizzly-boom met een hoogte van 65 m bemeten zou worden. Een afronding op 1 meter lijkt al problematisch, en op 1 dm is helemaal onacceptabel vanwege de gesuggereerde nauwkeurigheid.

Nieuwe vraag:

‘Hoe is men in dit leerboek tot deze precisie gekomen?’

Dat kan in dit geval slechts worden gegist natuurlijk. Maar wellicht is de reden dat de oorspronkelijke maat van één van de bomen in voet is gegeven - vermoedelijk 275 voet - en dat deze is omgerekend in meters. Neemt men voor 1 voet 30,4 cm, dan komt men zo uit op $275 \times 30,4 \text{ cm} = 83,6 \text{ m}$ voor de Sherman Tree. En op $83,6 : 1,3 \approx 64,30 \text{ m}$ voor de Grizzly Tree!

De hoogte-opgave via 275 voet is een passende mate van nauwkeurigheid. Omrekening ervan in meters levert een niet-passende quasi-nauwkeurigheid op.

Het getuigt van ongcijferdheid indien men bij dergelijke omzettingen de mate van precisie niet aanpast bij de oorspronkelijke globale meting. Precies rekenen met (afge)ronde getallen kan dus problematisch zijn. Het zal overigens duidelijk zijn dat men niet kan verlangen dat volwassenen, laat staan kinderen van de *basis-school*, de exacte reden van de genoemde precisie zouden achterhalen. Maar wel dat geïnteresseerde leerlingen het betoog kunnen volgen en de uitkomst van het cijferen kritisch beschouwen.

Kanttekening 3:

‘In de tweede zin wordt gesproken over *ongeveer* 1,3 keer zo groot. Deze factor heeft een marge van één tiende, waarvan de helft boven de 1,3 zit (1,35) en de helft erbeneden (1,25), tenminste als op de gebruikelijke manier tot op tienden is afgerond. Alleen vinden we in de berekening niets van dat ongeveer-rekenen terug. Sterker: de berekende hoogte van de Sherman Tree is zelfs nog nauwkeuriger aangegeven dan die van de Grizzly Tree, namelijk tot op twee plaatsen achter de komma, dus tot in cm nauwkeurig.’

Aspecten van gecijferdheid:

Als pure rekengetallen zijn 64,3 en 64,30 gelijk, maar als meetgetallen verschillen ze: in het eerste getal is op één decimaal achter de komma afgerond (dus bij 64,3 m op dm nauwkeurig) en in het tweede getal op twee decimalen (op cm nauwkeurig). Dus is de Sherman inderdaad nauwkeuriger aangeduid dan de Grizzly.

Het genoemde onderscheid tussen reken- en meetgetal is ook voor de leerlingen einde basisschool van belang: bij pure getallen mag je desgewenst nullen achter de laatste decimaal toevoegen, maar bij meetgetallen niet, omdat je dan de meetnauwkeurigheid verandert.

Nieuwe vraag:

Als de precieze uitkomst van 83,59 m niet voldoet, wat is dan wel een passend antwoord van 'ongeveer 1,3 keer 64,3 m' in deze context?

De rek die in dit product zit, kan op verschillende manieren worden onderzocht.

Ten eerste met behulp van de rekenmachine. Maximaal kan het product van deze afgeronde getallen zijn:

$$1,35 \times 64,35 = 86,8725$$

En de ondergrens is:

$$1,25 \times 64,25 = 80,3125$$

Dat is een marge van nota bene meer dan 6 meter, terwijl het antwoord een nauwkeurigheid in cm suggereert!

Ten tweede kan de spreiding ook globaal via hoofdrekenen worden bepaald - een meer inzichtelijke methode. Zoals we eerder aangaven, zit in de factor 1,3 een speling van ééntiende (tussen 1,25 en 1,35). Vermenigvuldigd met 64,3 (of met 64,25 of 64,35, want dat doet er hier weinig toe of af) geeft dit een rek van $0,1 \times 64$ m, oftewel ruim 6 meter¹, 3 meter boven die 83,5 m en 3 meter eronder.

Beide methoden zijn geschikt voor het onderwijs.³ Maar dan als objecten van onderzoek, want men kan en mag natuurlijk niet

verwachten dat de leerlingen van de *basisschool* zelf op dit kritische spoor zullen komen. Het is echter wel instructief dat ze ervaren welke ruime marges het rekenen met afgeronde (meet)getallen verlangt en hoezeer kleine onnauwkeurigheden zich kunnen vermenigvuldigen tot grote marges in uitkomsten. En vooral ook dat het cijferen met afgeronde getallen tot een misleidende schijnnaauwkeurigheid kan leiden.

Maar met deze beschouwing over de rek of speling in de uitkomst is nog steeds de vraag niet beantwoord hoe het resultaat van 'ongeveer 1,3 keer 64,3' het beste kan worden aangeduid. Onacceptabel en misleidend is 83,59, want dan is de uitkomst preciezer dan de gegeven getallen - dat is wel duidelijk. Maar voldoet 83,6 wel, met inachtneming van de ruime marge van ongeveer 3 m naar boven en naar beneden?

Kanttekening 4:

'De uitkomst is te precies weergegeven. Ik heb vroeger de regel geleerd dat we bij een product of quotiënt van afgeronde (meet)getallen met komma's, zoveel cijfers nauwkeurig schrijven als het kleinste aantal cijfers (van de kleinste factor 1,3), dus noteer ik 84 m als uitkomst van de genoemde vermenigvuldiging - even de zinvolheid van de gegeven getallen buiten de kritische beschouwing latend.'

Aspect van gecijferdheid:

Men zou zo'n regel in het *basisonderwijs* niet moeten aanreiken. Het gaat erom dat men in een bepaalde context een redelijke afronding kan kiezen en die keuze kan beredeneren.

De genoemde regel is trouwens niet eens algemeen bruikbaar. Gelet op de marge in de uitkomst van 3 m naar boven en 3 m naar beneden zou het immers in het onderhavige probleem meer voor de hand liggen om de hoogte van de Sherman Tree op 85 m te stellen, dus af te ronden op een vijfvoud. Het niet kennen van deze vuistregel is uiteraard geen uiting van ongecijferdheid. Maar de achterliggende motivering ervan met behulp van het rekenen met onnauwkeurigheden is wel een belangrijk aspect van gecijferdheid met betrekking tot kommagetallen, zoals hiervoor betoogd.

Nieuwe vraag van didactische aard:

'Is in het voorgaande hoofdstuk over schatten en hoofdrekenen wel voldoende rekening gehouden met het onderscheid tussen pure rekengetallen en globale meetgetallen?

Meetgetallen fungeren inderdaad als concrete basis voor het rekenen met zuivere kommagetallen, zoals in de winkelcontext. De kwestie van het afronden kwam daarbij slechts in de marge ter sprake.

Het is op zich ook geen enkel bezwaar om aanvankelijk meetgetallen als pure getallen te interpreteren. Met name bij oppervlakteproblemen met kommagetallen zal dit zich voordoen. Afrondingskwesties zoals hiervoor beschreven, blijven dan aanvankelijk op de achtergrond. Maar aan het eind van de *basis-school* kan het onderscheid tussen rekengetal en meetgetal wel aan de orde komen, plus de elementaire gevolgen voor het cijferen/rekenen met meetgetallen of afgeronde rekengetallen.⁴

In het volgende bespreken we daarvan een voorbeeld dat wél voor het *basisonderwijs* kan worden gebruikt.

5.2 CIJFEREN OP MAAT

In september 1994 verscheen in de krant het volgende bericht over de eerste begroting van het paarse kabinet.

— AFBEELDING 111

Onverwachte tegenvaller in begroting van 18,6 miljard

Door een onzer redacteurs

DEN HAAG, 20 september

In het voorwoord van zijn eerste Miljoenennota meldt minister Zalm een belastingmeevaller. Door het 'gunstiger conjunctuurbeeld' komt het financieringstekort van het rijk volgend jaar bijna twee miljard lager uit dan bij het opstellen van het regeerakkoord nog werd gedacht. Maar minister Zalm wordt ook geconfronteerd met een - kleine - tegenvaller.

De persen die de Miljoenennota drukken, moesten worden gestopt omdat in het kleurendiagram van de uitgaven van het rijk een fout was geslopen. Het financieringstekort zou volgend jaar uitkomen op 18,6 miljoen gulden. Dat is 18,5814 miljard te laag, want het tekort van het rijk bedraagt volgend jaar 18,6 miljard.

(NRC HANDELSBLAD, 20-9-'94)

- Is het verschil tussen 18,6 miljard en 18,6 miljoen goed uitgerekend in de tekst?
- Is de kop van het artikel correct?
- Welke bezwaren kunnen tegen de uitkomst 18,6 miljard worden ingebracht?
- En welke tegen 18,5814 miljard?
- Welke van de twee is de meest correcte uitkomst van het verschil?

$$\begin{array}{r}
 18,6000 \text{ miljard} \\
 - 0,0186 \text{ miljard} \quad (18,6 \text{ miljoen}) \\
 \hline
 18,5814 \text{ miljard}
 \end{array}$$

De berekening klopt exact. Tenminste indien men de gegeven getallen als precieze bedragen opvat... Maar dat zijn ze niet: het zijn afgeronde getallen. Hoe dienen we daarvan het verschil te berekenen?

Wat betekent 18,6 miljard als afgerond bedrag? Om te beginnen: opgevat als pure getallen zit er geen verschil tussen 18,6 en 18,6000 - men mag onbeperkt nullen toevoegen. Maar als benoemde getallen verschillen 18,6 miljard en 18,6000 miljard wel degelijk.

Het bedrag 18,6 miljoen houdt in dat het begrotingstekort is *afgerond* op één cijfer achter de komma, en dus aangeduid met een nauwkeurigheid van één tiende miljard oftewel 100 miljoen. Anders gezegd: in het bedrag zit een marge van 100 miljoen, dus het kan 50 miljoen hoger of lager zijn dan die 18,6 miljard. Maar de aanduiding 18,6000 miljard is veel nauwkeuriger en geeft aan dat dit getal tot op 100 duizenden is afgerond (één tiende miljoen). Daarin zit dus veel minder speling. Met de toename van het aantal cijfers achter de komma neemt dus de mate van nauwkeurigheid van de 'meting' (in miljarden in dit voorbeeld) sterk toe. Zo is bijvoorbeeld het meetgetal 18,6 kg veel grover dan 18,600 kg - het eerste getal is afgerond op een ons nauwkeurig en het tweede getal op een gram. Hetzelfde geldt voor 18,6 km en 18,600 km, en zo meer.

Terug naar de aftrekking 18,6 miljard minus 18,6 miljoen: wat betekent een en ander voor dit verschil?

Welnu, de 'speling' in 18,6 miljard is zoals gezegd 100 miljoen (50 miljoen naar boven en 50 naar beneden). Indien van een dergelijk globaal getal een relatief veel kleiner getal wordt afgetrokken, kan de uitkomst het beste worden aangeduid met 18,6 miljard (en dat is uiteraard ook de afronding van de precieze berekening 18,5814 miljard op één decimaal nauwkeurig).

18,6 miljard minus 18,6 miljoen is 18,6 miljard.

Wat betekent het voorgaande voor de oplossing van de volgende vraag uit *Rekenen en Wiskunde*?

AFBEELDING 112

Dit is de wielrenner Francesco Moser op zijn speciale fiets. Op 19 januari 1980 verbeterde hij op deze fiets het wereld-uurrecord. Dat record stond sinds 1972 op naam van de Belg Eddy Merckx. Merckx reed toen 49,43195 kilometer. Moser doorbrak de magische grens van 50 kilometer en reed 50,809 kilometer.



Merckx:

4	9
---	---

 ,

4	3	1	9	5
---	---	---	---	---

Moser:

5	0
---	---

 ,

8	0	9		
---	---	---	--	--

Hoeveel is het verschil?

(GRAVEMEIJER (RED.), 1987, OPDRACHTENBOEK 5B, PAG. 24)

$$\begin{array}{r} 50,809 \text{ km} \\ - 49,43195 \text{ km} \\ \hline \text{..... km} \end{array}$$

Het antwoord wordt passend benaderd met drie cijfers achter de komma: een grotere nauwkeurigheid zou misleidend zijn, omdat de uitkomst dan preciezer is dan één van de termen.

Dus maken we de volgende aftrekking:

$$\begin{array}{r} 50,809 \text{ km} \\ - 49,432 \text{ km (afronding van 49,43195)} \\ \hline 1,377 \text{ km} \end{array}$$

Wat telt, is dat bij optellen en aftrekken de juiste nauwkeurigheid van het antwoord in acht wordt genomen door - als vuistregel - het kleinste aantal decimalen te nemen. De uitkomst blijkt dan ook nog een wel kleine onnauwkeurigheidsmarge te hebben in de laatste decimaal van de uitkomst.

(Overigens valt er over de nauwkeurigheid van Merckx' record ook nog wel wat op te merken in het kader van gecijferdheid.)⁶

6 *Consequenties voor het onderwijsprogramma*

Alle methoden besteden aandacht aan afronden op een bepaalde decimaal achter de komma, ook met kale rekenopgaven. Een voorbeeld uit *Pluspunt*:

AFBEELDING 113

2

Rond de getallen af.

Rond af op
tienden:

7,375 →

12,75 ▶

5,635 ▶

18,449 ▶

0,791 →

Rond af op
honderdsten:

15,678 ▶

3,6666 ▶

0,944 ▶

33,735 →

0,127 ▶

(VAN BEUSEKOM (RED.), 1994, TOETSBOEK 8, PAG. 11)

Maar op de consequenties van het afronden voor het opereren met kommateetgetallen wordt in geen enkele methode dieper ingegaan - zeker niet voor vermenigvuldigen en delen. Een voorbeeld uit *Operatoir Rekenen* (nieuwe versie):

AFBEELDING 114

Kommagetallen vermenigvuldigen

Hoe groot is de oppervlakte van deze kamers?

Schat eerst de uitkomst. Reken de oppervlakte daarna precies uit.

Maak eerst de som zonder komma's. Plaats daarna de komma in de uitkomst.

$3,7 \text{ m}$
 $3,4 \text{ m}$

$$\begin{array}{r} 3,7 \\ 3,4 \times \\ \hline 12,58 \end{array}$$

meer dan $3 \times 3 \text{ m}^2 = 9 \text{ m}^2$
 minder dan $4 \times 4 \text{ m}^2 = 16 \text{ m}^2$

$4,28 \text{ m}$
 $2,6 \text{ m}$

$$\begin{array}{r} 4,28 \\ 2,6 \times \\ \hline 11,128 \end{array}$$

meer dan $4 \times 2 \text{ m}^2 = 8 \text{ m}^2$
 minder dan $5 \times 3 \text{ m}^2 = 15 \text{ m}^2$

(SWEERS (RED.), 1994, DEEL F6, ANTWOORDENDEEL, PAG. 3)

Zoals eerder opgemerkt is de precieze berekening voor groep 7 hier zeker acceptabel, zeker in combinatie met de aangegeven inklemmethode. Sterker: de rechthoek met meetgetallen kan als modelcontext voor het vermenigvuldigen van pure kommagetallen fungeren, met name ook voor de nul-komma-keerkwestie. Meetgetallen worden aanvankelijk behandeld als pure rekengetallen, afgeronde getallen als exacte getallen.

Maar de vraag voor een nationaal programma is of het daarbij moet blijven. En ons korte antwoord daarop is 'nee'. We stellen voor om ten aanzien van het passende cijferen met afgeronde getallen en meetgetallen geleidelijk steeds meer aandacht te besteden aan de volgende punten:

- 1 $64,3 = 64,300$, maar $64,3 \text{ km} \neq 64,300 \text{ km}$.

Onderscheid tussen pure getallen en meetgetallen, aantal

- decimalen in samenhang met mate van precisie bij het meten.
- 2 Kritische bespreking van het precieze rekenen met afgeronde (meet)getallen wat betreft:
 - optellen
 - aftrekken
 - en vermenigvuldigen met een relatief groot (geheel) getal (opblazen van onnauwkeurigheden).
 - 3 Een en ander zowel in contextsituaties als via ongeveer-rekenen met kale afgeronde getallen.

Wij menen dat op deze wijze voldoende aandacht wordt besteed aan 'gecijferd' cijferen met afgeronde getallen.³

De thans bestaande onderwijssituatie waarin het rekenen met afgeronde getallen volledig genegeerd wordt, is niet bevredigend - vandaar deze relatief uitgebreide aandacht voor gecijferdheid bezien vanuit het cijferen.

We wijzen er echter op dat, zoals eerder herhaaldelijk aangegeven, gecijferdheid vooral ook vanuit de gezichtspunten van schattend rekenen en hoofdrekenen beschouwd dient te worden.

7 *Terugblik*

Elementair cijferen met kommagetallen dient onderdeel van het basisschoolprogramma te blijven uitmaken. Maar cijferen met gehele getallen komt tegenwoordig pas in groep 6 van de grond, nadat vanaf groep 5 ruimschoots aandacht is en wordt besteed aan hoofdrekenen en schattend rekenen. Cijferen kan een betrekkelijk eenvoudige verkorting van gestileerd hoofdrekenen vormen indien het wordt verschoven naar groep 6, zodat in groep 5 uitsluitend aandacht aan de fundering van hoofdrekenen en schatten kan worden besteed.

Een en ander geldt evenzeer voor het cijferende opereren met kommagetallen, waarmee in groep 7 wordt begonnen. Voor meer complexe berekeningen met kommagetallen wordt de rekenmachine gebruikt. Dit betekent dat de oefentijd voor het cijferen sterk kan worden ingeperkt.

Het aanleren van de kommaplaatsing bij producten geschiedt

eerst op basis van schatten en wordt daarna verklaard met de kommaschuifregels via maatverandering en tien-keer nemen. Er wordt een hechte verbinding gelegd tussen vermenigvuldigen en delen.

Gecijferdheid wordt hier gezien vanuit het cijferen, nadat het in het voorgaande hoofdstuk impliciet bij het schatten en hoofdrekenen ter sprake kwam, mede in verband met de juiste komma-plaatsing.

Speciaal het (niet-)passende cijferen met afgeronde kommagetallen en meetgetallen wordt onder de loep genomen. Daarbij komt ook het onderscheid tussen pure rekengetallen en afgeronde meetgetallen aan de orde.

Gecijferd cijferen wordt in verband gebracht met optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van afgeronde getallen. Centraal staat daarin de passende nauwkeurigheid of afronding van de resultaten van de onderscheiden berekeningen. Zowel het blinde cijferen als het automatisch inzetten van de rekenmachine bij met name het opereren met kommameetgetallen, plus het klakkeloos overnemen van de uitkomsten daarvan, zijn evenzovele uitingen van ongecijferdheid.

We hebben een voorstel gedaan om enkele (nieuwe) activiteiten aan het bestaande programma toe te voegen teneinde de gecijferdheid op het terrein van de kommagetallen niet alleen te bevorderen via schatten en hoofdrekenen, maar ook vanuit het cijferen met afgeronde kommagetallen.

Noten

- 1 De gegevens van PPON (2) zijn begin 1996 nog niet gepubliceerd, maar de betreffende opgaven zullen wel worden vrijgegeven. Het Cito heeft ze thans al aan de Proeve-groep ter beschikking gesteld, waarvoor dank.
- 2 Het commentaar op de bomensom is ontleend aan reacties van studenten onderwijskunde, studenten wiskunde, leraren en docenten in colleges en lezingen gedurende het collegejaar 1994-1995.
- 3 Er is nog een derde methode, namelijk via het rechthoeksmodel, waarin de aangegeven marges kunnen worden aangegeven.
- 4 De meningen over deze kwestie lopen nogal uiteen. De meeste deelnemers aan

de Panama-conferentie van najaar 1995, die zich over deze problematiek hebben uitgesproken, zijn van oordeel dat het rekenen met afgeronde getallen beperkt dient te blijven tot optellen en aftrekken (met kommagetallen). Ongeveer een derde deel van de deskundigen is van mening dat ook het opblazen van meetfouten aan het eind van de basisschool onderzocht dient te worden. Het betreffende bomenprobleem wordt door slechts een vierde deel van de deskundigen geschikt geacht voor zo'n onderzoeksactiviteit. Zie: Treffers en Menne (1995).

- 5 De tekst is enigszins aangepast: in plaats van 18,6 miljard en 18,6 miljoen stond in het oorspronkelijke bericht 18600000000 respectievelijk 18600000.

- 6 Hoe wordt de afstand van het wereld-uurrecord precies gemeten?

Als we daarover geïnformeerd zijn, is meteen duidelijk hoe men aanvankelijk tot een dergelijke precisie is gekomen (later, vanaf 1984, worden de records in meters aangegeven). De afstand wordt als volgt bepaald.

Er wordt gereden op een 400 m-baan. Na precies 1 uur wordt het eindschot gegeven, waarna de renner de laatste ronde waaraan hij dan bezig is, op volle snelheid voltooit. Als hij vervolgens de meet-(start)lijn passeert, wordt zijn tijd opgenomen in duizendsten van seconden nauwkeurig.

In het geval van Merckx werd die tijd van ruim een uur over 124 ronden van 400 meter (49,600 km) teruggerekend naar precies één uur. Aangezien een tijdmeting in duizendsten van seconden bij een snelheid rond 50 km per uur - dat is ongeveer 15 meter per seconde, ofwel 15 mm per duizendste seconde - een nauwkeurigheidsmarge van zeg 1 cm heeft, is het record ook in cm nauwkeurig bepaald. Dat is dus redelijker dan we op het eerste gezicht zouden zeggen. Indirect meten maakt deze precisie mogelijk.

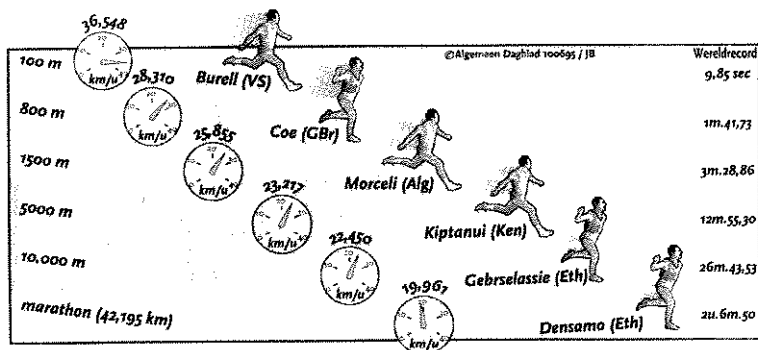
Waarom is men in 1984 op deze nauwkeurigheid in vijf decimalen teruggekoemen en overgegaan op drie decimalen achter de komma, oftewel een meting afgekapt op meters?

De reden is dezelfde als besproken bij het bomenvraagstuk. In de meting van de baan van 400 m zit een kleine meetfout - zeg van enkele mm. Deze onnauwkeurigheid wordt met een factor van ruim 124 (het aantal ronden) opgeblazen, en dat maakt al gauw een verschil van ongeveer een meter. De aanpassing van de nauwkeurigheid naar drie decimalen is dus terecht... (Muijlwijk, 1995).

Het negeren van onnauwkeurigheden via het quasi-precieze cijferen en rekenen, doet zich veelvuldig voor.

Een voorbeeld uit de krant:

AFBEELDING 115



(ALGEMEEN DAGBLAD, 17-6-'95)

De marge van één honderdste seconde vertaalt zich bij de 100 m in een verschil van tientallen meters per uur. Daardoor zou een opgave van de snelheid per uur zich tot één cijfer achter de komma moeten bepalen: 36,5 km per uur en niet zoals in het knipsel 36,548. Via globaal hoofdrekenen zouden we ook al vlug bij zo'n snelheid per uur zijn gekomen. De rekenmachine geeft nieuwe mogelijkheden om de kinderen te laten ervaren en inzien dat precisie vaak misleidend en ongepast is bij het rekenen met (afgeronde) meetgetallen, en dat blind cijferen (al dan niet met behulp van de rekenmachine) met meetgetallen een uiting van ongecijferdheid, van weinig gevoel voor getallen, kan zijn.

Literatuur

- Beusekom, N. van (red.): *Pluspunt*, Den Bosch, Malmberg, 1994.
- Brown, C.A.: A Critical Analysis of Teaching Rational Number, in: T.P. Carpenter, E. Fennema & T.A. Romberg (eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research*, Erlbaum, Hillsdale, 1993, pag. 197-219.
- Carpenter, T.P. et al: *Results from the second mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*, NCTM, Reston 1981.
- Goffree, F.: *Wiskunde en Didactiek. Deel 2*, Groningen, Wolters-Noordhoff, 1992.
- Gravemeijer, K. (red.): *Rekenen en Wiskunde*, Baarn, Bekadidact, 1987.
- Huitema, S. (red.): *Wereld in Getallen* (2e versie), Den Bosch, Malmberg, 1994.
- Muijlwijk, R.: *Weet wat je meet. Vertellingen over maten en gewichten*, Haarlem, Aramith, 1995.
- Sweers, W. (red.): *Operatoir Rekenen* (3e versie), Tilburg, Zwijsen, 1994.
- Treffers, A. en E. de Moor: *Proeve van een Nationaal Programma voor het Reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en Cijferen*, Tilburg, Zwijsen, 1990.
- Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor: *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3A: Breuken*, Tilburg, Zwijsen, 1994.
- Treffers, A. en J. Menne: *Opinies over rekenen met afrondingen*, Utrecht, Freudenthal Instituut, 1995 (manuscript).

V Samenvatting en uitbreiding

Doelstelling 4

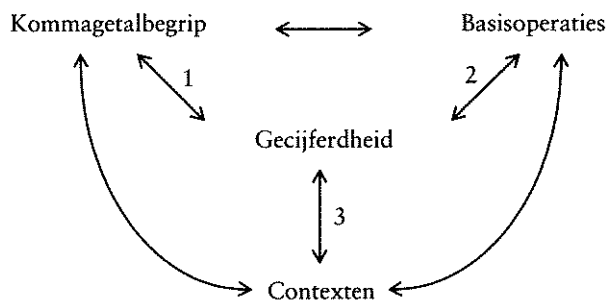
De leerlingen begrijpen het verband tussen kommagetallen, procenten en breuken, en kunnen breuken in kommagetallen omzetten, ook met een rekenmachine.

De uitbreiding in dit samenvattende hoofdstuk betreft het aangegeven verband tussen kommagetallen, procenten en breuken.

We voegen deze nieuwe elementen in de samenvattende beschrijving toe, al zijn ze terloops al eerder ter sprake gekomen. Alleen worden ze nu wat explicieter aan de orde gesteld. Ook het gebruik van de rekenmachine krijgt hier speciale aandacht.

De indeling van wat volgt, is ontleend aan dit schema (McIntosh, Reys & Reys, 1992, pag. 4)):

AFBEELDING 116



Betekenis van een kommagetal: plaats op getallenlijn met passende schaal; relatieve orde van grootte; rekengetal en meetgetal; invoeging in het (uitgebreide) decimale systeem; gelijkwaardigheid met breuken; kommagetal met rekenmachine; afronding. Dergelijke punten uit hoofdstuk twee worden in de eerste paragraaf 'kommagetalbegrip' als samenvatting en uitbreiding aan de orde gesteld.

Uitwerking van de basisoperaties met kommagetallen: inzicht in het effect van basisbewerkingen; passend schatten, hoofdrekenen, cijferen en hanteren van de rekenmachine; begrip van kommaverschuivingen. Dergelijke punten uit de hoofdstukken drie en vier komen in de tweede paragraaf 'basisoperaties' samengevat en uitgebreid aan bod.

In de laatste paragraaf over 'contexten' worden verschillende betekenissen en functies van contexten aan de orde gesteld: model-contexten, toepassingen, rekenen met meetgetallen.

In alle paragrafen staat 'gecijferdheid', 'number sense', wiskundige geletterdheid, of hoe men gevoel voor (komma)getallen ook wil aanduiden, steeds in het middelpunt.

In de laatste paragraaf wordt de realistische aanpak in een 'wijder verband' geplaatst. Bij de schets van andere onderwijsaanpakken van kommagetallen uit drie hoofdrichtingen binnen het reken-wiskundeonderwijs, komen vooral de historisch-didactische elementen uit hoofdstuk I in samenvattende vorm naar voren. Maar ook hier worden nieuwe ideeën toegevoegd - samenvatting en uitbreiding dus.

1 *Kommagetalbegrip*

Kommagetallen, met de nadruk op *getallen* als mentale objecten op-zich, dus apart van de bewerkingen ermee - daar gaat deze paragraaf over. Of wat huiselijker geformuleerd: het gaat allereerst om de woonplaats van getallen, over hoe je die adressen op de getallenlijn kunt bereiken, hoe groot de afstanden tussen twee posities zijn, welke kommagetallen op dezelfde plaats of vlak bij elkaar in de buurt wonen, welke kommagetallen tussen twee gegeven kommagetallen wonen, hoe je door afronden of afkappen de globale posities kunt bepalen, hoe je door toevoeging van decimalen de positieaanduiding, zo nodig, kunt verfijnen, en dat toevoeging van nullen achter de laatste decimaal geen positieverandering veroorzaakt...

De getallenlijn wordt geïntroduceerd als meetlijn. Dus eerst verschijnen kommagetallen als benoemde meetgetallen. Pure getallen en meetgetallen worden aanvankelijk gelijkgesteld. Het zijn vooral de lengtematen van km en m die in het begin als maateen-

heden fungeren op een getallenlijn met passende schaalverdeling. Maar bijvoorbeeld ook geld en gewicht leggen een concrete grondslag voor het ordenen en plaatsen van kommagetallen en... eenvoudige *breuken*. Zo kan van meet af aan een verbinding tussen benoemde breuken en kommagetallen worden gelegd. Temeer omdat ook in de breukenleergang vanaf het begin veel aandacht aan het plaatsen van breuken op de getallenlijn wordt besteed. Zo kunnen decimaal en niet-decimaal genoteerde meetuitkomsten met elkaar worden verbonden - althans voor elementaire getallen als $\frac{1}{2}$ met 0,5 en $\frac{1}{4}$ met 0,25 en $\frac{1}{10}$ met 0,1.

Zijn de leerlingen eenmaal in staat om kommagetallen, benoemd en later ook kaal, globaal of meer precies op de getallenlijn te plaatsen door een opeenvolging van passende decimale stappen en steeds kleinere stapjes, dan kunnen verdergaande basale bewerkingen worden uitgevoerd via de zojuist genoemde vraagstellingen over woonplaatsen, afstanden, ordeningen, nabijheid en zo meer.

Deze activiteiten leiden stap voor stap tot een steeds verdergaande formalisering van kommagetallen richting pure getallen, relatief losstaand van de meetgetallen waar ze uit voortkomen. Zo veranderen de positiemeetkaarten geleidelijk in positieschema's van het plaatswaardesysteem die later de basis vormen voor het cijferend opereren met kommagetallen.

Aanvankelijk is daar echter nog geen tijd en ruimte voor gereserveerd. Hooguit verschijnt het formele opereren op de getallenlijn in deze eerste fase als hoofdrekenen op de getallenlijn, vooral in de gedaante van verschillen bepalen.

Ook het gebruik van de *rekenmachine* is in dit stadium gebonden aan het positioneren en basaal opereren op de getallenlijn. Het uitvoerig beschreven nader-spel is daarvan een voorbeeld. De oneindige dichtheid van de verzameling kommagetallen op de getallenlijn wordt via dit spel geleidelijk ontdekt. Het begrip van de decimale verfijning wordt zo in meer formele zin aanzienlijk verdiept.

De problematiek van het afronden in verschillende varianten, waartoe we ook het afkappen van decimalen mogen rekenen, kan al snel in de eerste fase van de leergang onderzocht worden via de ingang van nabijheid van posities. Door het afschatten op bij-

voorbeeld het meest nabijgelegen getal met één decimaal, wordt het globale positioneren van kommagetallen bevorderd.

Het interpreteren van kommagetallen als decimale breuken, die zowel met een breukstreep als een komma gesymboliseerd kunnen worden, geschiedt pas tegen het einde van de leergang op de basisschool.

Gecijferdheid ten aanzien van kommagetallen komt tot uitdrukking bij het plaatsen van komma's in meetgetallen binnen contextsituaties, in het positioneren van kommagetallen, en in het passend afronden, zowel met kale getallen als benoemde getallen en meetgetallen in contextsituaties. Negatief gesteld komt *ongecijferdheid* tot uiting in het niet kunnen plaatsen van komma's bij 'lineaire' maten als lengte, afstand, gewicht, inhoud (liters) en temperatuur, omdat men dan blijkbaar niet over alledaagse referentiepunten voor die maten beschikt. En ook in misvattingen over het verband tussen de grootte van een kommagetal en het aantal decimalen dat zo'n getal bevat, en over wat afronden in essentie inhoudt.

Samengevat in steekwoorden geldt voor het ontwikkelen van kommagetalbegrip het volgende:

- als concrete modelcontext fungeren lengte- en afstandsmaten
- plaatsen op getallenlijn is een kernactiviteit
- basaal opereren is gesitueerd rond het positioneren op de getallenlijn
- vanaf het begin wordt het proces van geleidelijk formaliseren in gang gezet
- en ook van meet af aan worden breuken ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$) aan verwante kommagetallen (0,5; 0,50; 0,25; 0,75; 0,1; 0,01) gekoppeld via corresponderende meetleergangen.

2 *Basisoperaties*

Pure kommagetallen zijn precies of globaal (afgerond). Meetkommagetallen manifesteren zich bij discrete grootheden als geld soms precies, maar bij continue grootheden die steeds verder verfijnd gemeten kunnen worden (lengte, gewicht, inhoud), zijn ze altijd globaal afgerond.

Het opereren met deze precieze dan wel globale getallen kan op

zijn beurt ook weer precies of globaal (schattend) worden uitgevoerd. Dit levert vier combinaties van bewerkingen op die in het voorgaande zijn besproken en die in het volgende worden samengevat, mede via het gebruik van de rekenmachine.

AFBEELDING 117

		OPERATIES	
		Gloobaal	Precies
GETALLEN	Gloobaal	I	II
	Precies	III	IV

2.1 SCHATTEN EN HOOFDREKENEN

In hoofdstuk III is uitgebreid aandacht besteed aan het globale rekenen met meetgetallen in een winkelcontext - het onderscheid precies-afgerond is aanvankelijk nog niet relevant. Daarna komt het precieze hoofdrekenen met precieze getallen aan bod.

Bij het schatten speelt afronden op de meest nabije gehele getallen een belangrijke rol, alsmede het globaal benaderen van het antwoord via twee inklemmethoden. Met name de nul-komma-keerkwestie wordt uitgebreid onderzocht. De mogelijke misvatting over vermenigvuldigen-als-vergroten (vaak veroorzaakt door voorafgaand onderwijs) wordt zorgvuldig aan de kaak gesteld en vervangen door een dieper begrip van vermenigvuldigen en delen. Het context-strookmodel en het oppervlakte-rechthoekmodel fungeren daarbij als belangrijke denkinstrumenten. Maar ook de *rekenmachine* kan hierbij een didactische functie vervullen: schatting en feitelijke berekening met de rekenmachine blijken daarbij niet met elkaar te sporen, waardoor een cognitief conflict ontstaat, wat tot nader onderzoek leidt over de bestaande informele noties betreffende de 'vergroten' en 'verkleinende' effecten van respectievelijk vermenigvuldigen en delen.

De eerder geleerde afrondings- en inklemmstrategieën blijken voor

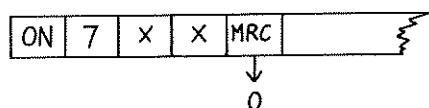
opheldering te kunnen zorgen. En zo vervult ook het schatten een didactische functie, naast de waarde die het uiteraard als doel op zich bezit.

Bij het schattende vermenigvuldigen is het soms ook handig om kommagetallen in nabijliggende *breuken* om te zetten (0,24 keer $\approx 1/4$ keer ...) en dat geldt uiteraard evenzeer voor *procenten*.

Ook bij het leren schatten en het hoofdrekenen met kommagetalen kan de *rekenmachine* een functie vervullen. (Slettenhaar & Ter Heege, 1995).

Een aardige activiteit, bijvoorbeeld, is het volgend schietspel: Laten we schieten op 100. De rekenmachine wordt geprogrammeerd met een geheime factor, bijvoorbeeld 7. Dit kan als volgt (TI 106):

AFBEELDING 118

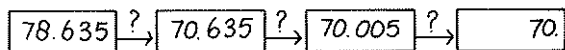


Na het intoetsen van de MR-knop verschijnt een 0 in het venster. Je tegenstander kent dit getal niet. Hij moet proberen 100 te maken. Wanneer hij een getal en de '='-toets indrukt, zal het product van het ingetoetste getal en het verborgen getal verschijnen. Is de eerste poging 10, dan verschijnt 70. Bij de tweede poging wordt 15 gebruikt met als resultaat 105. Daarna 14, dit levert 98. Dan wordt 14,5 geprobeerd met als resultaat 101,5. En zo kan verder beproefd worden steeds dichterbij 100 te komen. Natuurlijk is 7 als verborgen factor een lastig voorbeeld. Men kan uiteraard met heel eenvoudige voorbeelden beginnen. Het is mogelijk het spel met de gehele klas te spelen. Ook kan gevraagd worden de regel van de rekenmachine te raden. Zeer lastig kan het worden wanneer een 'gemeen getal' (12,15) verborgen wordt. Op analoge wijze als een verborgen vermenigvuldiger kan ook een verborgen opteller geprogrammeerd worden.

Ook opgaven als $3 \times ? = 10$, $? \times 10 = 8$ en $? \times 0,7 = 77$ kunnen via schatten en schieten op de rekenmachine worden beproefd. Dit is een hele belangrijke categorie opgaven die diepgaand beoefend kan worden. De aanvankelijke opvatting dat 'keer' altijd groter maakt, wordt al doende weerlegd. Succesvol proberen kan steeds gevolgd worden door reflectie op de uitkomst.

Nog een voorbeeld van een type opgaven, maar nu gericht op begrip van plaatswaarde, aftrekken en afronden via hoofdrekenen is het volgende 'cijfers poetsen' (let op de decimale punt).

AFBEELDING 119



Ontdekken de leerlingen dat je bijvoorbeeld het cijfer 3 in bovenstaand voorbeeld kunt wegpoetsen door te verminderen met 0,03? Kan het ook via 0,030?

Bij de verklaring kan het betreffende kommagetal benoemd worden, met meters bijvoorbeeld 78,635 m. Dan wordt aftrekken van 0,03 geïnterpreteerd als het wegnemen van 3 cm, en 0,030 als 30 mm. Ook de uitermate belangrijke 10-keerkwestie met bijbehorende kommaverschuiving en de inverse 'gedeeld-door-10' kunnen via de rekenmachine worden geïntroduceerd. En men kan bij de oefening van deze operaties gebruik maken van de strokentaal, zoals eerder beschreven in Proeve 2. (Treffers & De Moor, 1990)

Voorts is het (machine-) temporekenen een bruikbaar didactisch middel - de opgaven dienen in zo kort mogelijke tijd te worden gemaakt. Welke opgaven gaan sneller met de machine dan zonder?

- 1 Met de rekenmachine berekend, maar de komma vergeten:
 $326,078 - 4,23 = 321848$. Plaats de komma.
- 2 Bereken $0,25 \times 50 =$
- 3 Bereken $100 + 0,1 =$
- 4 Je koopt 6 repen van 98 cent. Hoeveel moet je betalen?
- 5 Reken uit $100 - 0,1 =$

- 6 $0,34 \times 45 =$ Wat is de beste schatting: a. 150; b. 1,5; c. 15.
- 7 Een winkelier verkoopt 254 aanstekers van f 2,65 per stuk. Hoeveel is dat?
- 8 Vul in de driehoekjes de goede cijfers in: $93 \times 8\Delta = 8\Delta\Delta 1$
- 9 Er worden 1852 supporters met bussen vervoerd. In elke bus gaan 45 passagiers.
Hoeveel bussen zijn er nodig?
- 10 Reken uit $(0,043 \times 43,2) - 0,8576 =$

Van belang is de nabespreking van een dergelijke rekenrace, waarbij vooral de overwegingen om de zakrekenmachine vooraf, achteraf of in het geheel niet in te zetten van belang zijn. We menen dat de opgaven 1, 2, 3, 5 en 6 eigenlijk uit het hoofd gedaan moeten worden. Opgave 4 is een twijfelgeval. De opgaven 7, 9 en 10 zijn typische voorbeelden waar de rekenmachine een hoop rekenwerk bespaart. Opgave 8 is een denkertje. Bij opgave 9 speelt de rest een rol. Wat te zeggen van de uitkomst van opgave 10?

Gecijferdheid of gevoel voor getallen wordt vooral afgemeten aan het vaardig kunnen schatten en hoofdrekenen, en in verband daarmee het passend gebruiken van de rekenmachine. Bij het oplossen van contextopgaven is ook het kunnen inschatten van de benodigde mate van precisie een sterke indicator voor het vaststellen van elementaire gecijferdheid.

2.2 PASSEND CIJFEREN

Deze inschatting is vooral van belang bij het precieze cijferende rekenen met globale afgeronde (meet)kommagetallen. Welke consequenties hebben afrondingen voor de mate van precisie van uitkomsten?

We zijn uitvoerig op deze kwestie ingegaan in hoofdstuk IV binnen het kader van passend cijferen, en hebben enkele voorstellen gedaan om het onderscheid tussen pure getallen en meetgetallen, plus enkele gevolgen daarvan voor het rekenen ermee, in het basisschoolprogramma op te nemen. Men zou dit onderdeel 'benaderen en benaderend rekenen' kunnen noemen.

Tevens stellen we voor om het elementaire cijferen met komma-getallen te handhaven en wel in het verlengde van het (gesti-leerde) hoofdrekenen, dat de basis daarvan dient te vormen. Maar voor de meer gecompliceerde berekeningen zou de reken-machine gebruikt moeten worden. Wellicht zijn de nieuwste methoden in dit opzicht nog wat te terughoudend.

Nieuwe interessante en zinvolle onderzoeksproblemen kunnen via het rekenen met de *rekenmachine* aan de orde komen. We noemen er één voor vermenigvuldigen en één voor delen.

Een grote vermenigvuldiging als complex probleem voor geïnte-resseerde leerlingen eind groep 8.

Stel we moeten $1,2345 \times 0,6789$ precies uitrekenen. We kunnen al direct zien dat de uitkomst ongeveer 0,8 moet zijn ($1,2 \times 0,7$) en dat er acht cijfers achter de komma zullen komen. De reken-machine heeft slechts negen plaatsen, dus dat zal niet lukken. We toetsen toch maar in en zien in het venster verschijnen 0,838102. Er verschijnen slechts zeven cijfers in het venster. Hoe kan dit nu? We weten dat de machine afbreekt (niet afrondt). Dit betekent dat de decimaal op de achtste plaats een nul moet zijn. En de laatste decimaal moet 5 zijn, aangezien de eindcijfers van de fac-toren van het product 5 en 9 zijn (5×9 eindigt op een 5). Maar zo'n geluk hebben we niet altijd. Voor een algemene aanpak splitsen we de tweede factor bijvoorbeeld in $0,6789 = 0,67 + 0,0089$ en werken via de deelproducten het geheel als volgt uit:

AFBEELDING 120

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} 1,2345 \\ \times 0,67 \\ \hline 0,827115 \\ 0,01098705 \\ \hline 0,83810205 \end{array} & \times \downarrow \text{rm} & \begin{array}{r} 1,2345 \\ \times 0,89 \\ \hline 1,098705 \\ 0,01098705 \\ \hline 0,01098705 \end{array} \\
 & & \downarrow \div 100 \\
 & \longleftarrow &
 \end{array}$$

Breuken op te vatten als delingen

Bekende breuken als $1/2$, $1/4$, $3/4$, $1/100$ kunnen (ook) via deling

van 1 : 2; 1 : 4; 3 : 4; 1 : 10; 1 : 100 in kommagetallen worden omgezet.

Bijvoorbeeld $\frac{3}{8}$ levert via 3 : 8 een mooie uitkomst op van 0,375.

Sommige breuken repeteren echter, zoals bijvoorbeeld $\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots$ of $\frac{1}{6} = 0,1666666\ldots$ of $\frac{1}{7} = 0,1428571\ldots$ of $\frac{1}{9} = 0,1111111\ldots$ of $\frac{1}{11} = 0,0909090\ldots$

Hoe komt het dat sommige breuken bij omzetting in kommagetallen een eindig aantal decimalen krijgen en andere een oneindig aantal?

Als we de staartdeling bij een bepaald geval werkelijk uitvoeren, zien we de reden van het repeteren. Neem bijvoorbeeld om te beginnen $\frac{1}{6}$ oftewel 1 : 6.

AFBEELDING 121

$$\begin{array}{r}
 6 \overline{) 1,0} \quad \backslash 0,166 \\
 \underline{0,6} \quad 0,1 \times \uparrow \\
 40 \quad \text{---} \\
 36 \quad \text{---} \\
 \underline{40} \\
 36 \quad \text{---} \\
 \underline{40}
 \end{array}$$

$1 \times 6 = 6$
 $0,1 \times 6 = 0,6$

De tussenrest van 4 herhaalt zich, vandaar dat ook de 6 in het quotiënt repeteert.

Nog een sprekend geval, namelijk $\frac{1}{7}$ via 1 : 7 om te zetten in een kommagetal.

$$\begin{array}{r}
 7 \overline{) 1,000000} \setminus 0,1428571 \\
 \underline{7} \quad 0,1 \times \\
 30 \\
 \underline{28} \\
 20 \\
 1 \times 7 = 7 \\
 0,1 \times 7 = 0,7 \\
 \underline{14} \\
 60 \\
 \underline{56} \\
 40 \\
 \underline{35} \\
 50 \\
 \underline{49} \\
 10 \\
 7
 \end{array}$$

Na zes verschillende tussenresten (meer kan niet want 0 en 7 kunnen geen tussenrest zijn) treedt er een herhaling op, dus gaan de cijfers in het quotiënt ook repeteren.

Ziehier hoe *breuken*, mede via de *rekenmachine*, in verband met kommagetallen gebracht kunnen worden. (Zie verder Van den Brink, 1990 en 1992).

De verbinding tussen *procenten* en kommagetallen is daarmee ook duidelijk: zet het percentage om in een breuk met noemer honderd en schrijf de betreffende breuk als kommagetal. Klaar.

Maar men is nog niet klaar als bij toepassingsproblemen percentages in kommagetallen omgezet moeten worden, dus bijvoorbeeld om '35% van ..' te veranderen in '0,35 keer ..'. Want deze opvatting van percentage als factor gaat ervan uit dat men deel van kan identificeren met nul-komma-keer. En dat veronderstelt een diepgaand inzicht. In hoofdstuk III hebben we, zoals gezegd, uitvoerig aandacht aan deze fundamentele kwestie besteed en tevens vastgesteld dat de huidige leerboeken in dit opzicht wellicht toch nog wat aangepast kunnen worden.

3 Contexten

In alle hoofdstukken en bij vrijwel alle deel-beschouwingen komt de betekenis en functie van contexten ter sprake. We kunnen in dit verband drie soorten contexten onderscheiden:

- 1 modelcontexten
- 2 toepassingscontexten
- 3 formele contexten.

Ad 1:

Als *modelcontexten* worden opgevoerd:

- prijsstickers
- oppervlakte.

In de winkelcontext fungeert de dubbele getallenlijn of -strook als visuele ondersteuning. En bij de oppervlakteberekening dient de rechthoek als zodanig. De mogelijkheden van de rechthoek liggen vooral in het globale rekenen met nul-komma-keervraagstukken en het verduidelijken van inklemmethoden. Voor het oplossen van toepassingsproblemen waar vaak verhoudingen bij te pas komen, is het rechthoekmodel minder geschikt.

De dubbele getallenlijn in de vorm van een smalle strook daarentegen is zowel voor het formele rekenen als voor het oplossen van toepassingsopgaven uitermate functioneel. Vandaar dat het context-strookmodel aan de basis van het vermenigvuldigen van kommagetallen wordt gesitueerd. En wel speciaal voor schattend rekenen en het stap voor stap oplossen van toepassingsproblemen waarin een (nul-)komma-keerstructuur vervat ligt.

Ad 2:

In feite behoren van de toepassingscontexten vrijwel alle verhoudingsproblemen en de hele procentrekening tot deze categorie van (nul-)komma-keeropgaven.

Dit betekent dat er legio toepassingsproblemen zijn waar het opereren met kommagetallen, en wel speciaal vermenigvuldigen en delen, te pas komt met zowel (relatief) precieze als globale (meet)getallen.

Met behulp van een strook kan men zich bij dit soort opgaven heel goed realiseren welke rekenhandelingen achtereenvolgens uit-

gevoerd moeten worden. Dat maakt een passend gebruik van de rekenmachine mogelijk, wat vaak gebeurt nadat vooraf een globale schatting van de uitkomst is gemaakt. Mocht de berekening om een of andere reden verkeerd uitpakken dan kan zo'n eerste schatting als controle- en correctiemiddel fungeren. Maar de globale uitkomst van een schatting kan ook een doel op zich zijn. Elementaire gecijferdheid ten aanzien van kommagetallen komt speciaal in het schattend rekenen tot uitdrukking. Maar cijferen volgens een passende precisie is ook een belangrijk onderdeel van elementaire gecijferdheid.

Ad 3:

Met de formele context bedoelen we het rekensysteem. Bij het formele rekenen kan echter ook nog een zwakke verwijzing naar concrete contexten worden gemaakt, bijvoorbeeld door de kommagetallen te benoemen, of door een structuurcontext te creëren op een lijn (straat, lift in gebouw) waar kommagetallen en breuken wonen en de (semi-)formele vragen in zo'n meet- of structuurcontext te plaatsen.

Kenmerkend nu voor de realistische Proeve-leergang is dat formeel opereren vrijwel van meet af aan plaatsvindt en dat door de leergang heen zich een geleidelijk proces van toenemende formalisering voltrekt. Eerst gaat het, zoals eerder gezegd, om basale formele operaties en wat later komen de vier basisoperaties in zicht.

Dit formele opereren kan kwalitatief of globaal van aard zijn, maar ook kwantitatief of precies. Schatten, hoofdrekenen, cijferen en het gebruik van de rekenmachine kunnen erin betrokken worden.

In het realistische rekenonderwijs is dit concept van de geleidelijk toenemende formalisering nog niet tot in details uitgewerkt - althans niet voor breuken en evenmin voor kommagetallen. In ieder geval moet het mogelijk zijn om de wijdverbreide misverstanden over vermenigvuldigen en delen met kommagetallen in zo'n leergang te bestrijden en te doen wijzigen in een diepergaand begrip van deze operaties.

In zulke misvattingen manifesteert zich ongecijferdheid in hoge mate.

4 *Wijder verband*

In de historisch-didactische inleiding werden drie toegangen tot kommagetallen beschreven die door de tijden heen in het onderwijs zijn benut. En wel de methoden via:

- breuken
- plaatswaarde
- meten.

In het *mechanistische* rekenonderwijs wordt, zoals we in hoofdstuk I zagen, bij voorkeur de methode via breuken gekozen, omdat deze op voortvarende wijze tot het vaststellen van rekenregels voor het plaatsen van de komma leidt, of bij het delen tot een snelle herleiding daartoe via omgekeerd vermenigvuldigen. De nadruk in deze onderwijsaanpak ligt op het kale regelgeleide cijferen.

Schattend rekenen en hoofdrekenen worden schromelijk verwaarloosd. Meetgetallen en rekengetallen worden niet onderscheiden. Aan het globaal of precies rekenen met afgeronde getallen besteedt men hier geen aandacht en weinig aan toepassingen. Kortom, dit mechanistische onderwijs contrasteert in hoge mate met de realistische leergangen in de moderne Nederlandse rekenmethoden en zo mogelijk nog sterker met de geschetste Proeveleergang.

DECIMAL ADDITION

The important thing to remember when doing decimal addition is to *line up the decimal points*. If whole numbers are present then put a decimal point at the *end* of the whole number and add zeros as required.

EXAMPLE

Add $62.1 + 0.53 + 215$.

215 is the same as 215.00.

$$\begin{array}{r} 62.1 \\ 0.53 \\ 215.00 \\ \hline 277.63 \end{array}$$

The decimal point in the answer goes underneath the other decimal points.

MULTIPLICATION OF DECIMALS BY POWERS OF 10

Decimals may easily be multiplied by 10, 100, 1000, etc.

EXAMPLE

Find (a) 6.2×10 (b) 6.2×100 (c) 6.2×1000 .

(a) $6.2 \times 10 = 62$ since

$$6.2 = 6\frac{2}{10} \text{ and } 6\frac{2}{10} \times 10 = \frac{62}{10} \times \frac{10}{1} = 62$$

(b) $6.2 \times 100 = 620$ since

$$6.2 = 6\frac{2}{10} \text{ and } 6\frac{2}{10} \times 100 = \frac{62}{10} \times \frac{100}{1} = 620$$

(c) $6.2 \times 1000 = 6200$ since

$$6.2 = 6\frac{2}{10} \text{ and } 6\frac{2}{10} \times 1000 = \frac{62}{10} \times \frac{1000}{1} = 6200$$

Notice the effect of multiplying by 10 is to move the decimal point one place to the right.

The effect of multiplying by 100 is to move the decimal point two places to the right.

The effect of multiplying by 1000 is to move the decimal point three places to the right.

DECIMAL SUBTRACTION

The decimal points must be lined up underneath each other.

The answer can be checked by adding the bottom two lines which should give the top line. The actual subtraction is carried out in the same manner as for whole number subtraction.

EXAMPLE

$7.2 - 3.4$

The first number goes on top. Start at the right hand end.

$$\begin{array}{r} 7.2 \\ 3.4 \\ \hline 3.8 \end{array}$$

Check by adding 3.4 and 3.8 to get 7.2.

DIVISION OF DECIMALS BY POWERS OF 10

EXAMPLE

Divide 2.5 by (a) 10 (b) 100 (c) 1000.

(a) $2.5 \div 10 = 0.25$

since

$$\begin{aligned} 2.5 &= 2\frac{5}{10} \text{ and } 2\frac{5}{10} \div 10 = \frac{25}{10} \div \frac{10}{1} \\ &= \frac{25}{10} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{25}{100} \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

Similarly

(b) $2.5 \div 100 = 0.025$

and

(c) $2.5 \div 1000 = 0.0025$

The effect of dividing by 10 is to move the decimal point one place to the left.

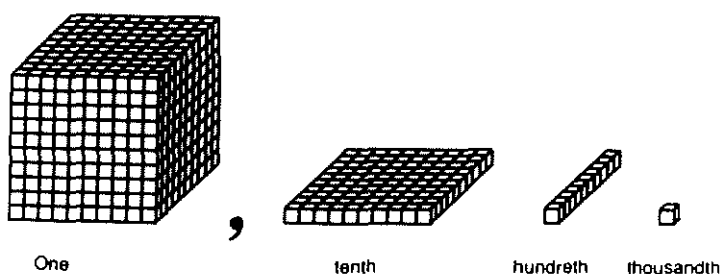
The effect of dividing by 100 is to move the decimal point two places to the left.

The effect of dividing by 1000 is to move the decimal point three places to the left.

(LLEWELLYN & GREER, 1983)

Het *structuralistisch* getinte rekenonderwijs, dat sterk gericht is op de formele vakstructuur, prefereert de plaatswaarde-methode. Plaatswaarde-blokken vormen het concrete materiaal voor de inzichtelijke onderbouwing van deze aanpak. (Hiebert, 1987)

AFBEELDING 124



Bij optellen en aftrekken voldoet dit materiaal nog wel enigszins, maar met name voor vermenigvuldigen werkt het eerder verwarrend dan verhelderend. Wat betekent vermenigvuldigen met blokken? Waarom mag je de eerste factor niet concretiseren bij vermenigvuldigen en de tweede juist wel?

Meet- en contextproblemen komen bij de structuralisten weinig aan de orde. Aan schattend rekenen wordt weinig of geen aandacht geschonken.

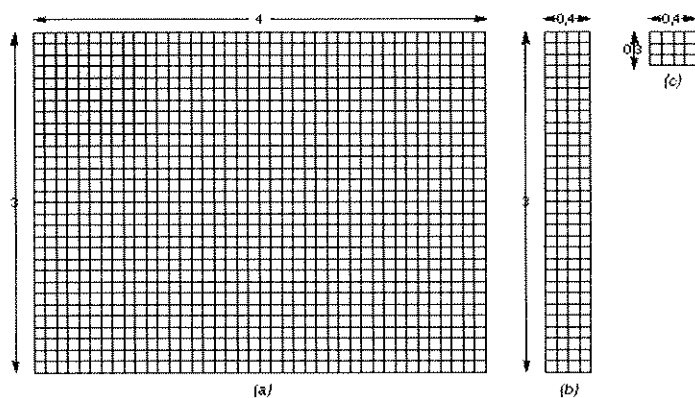
Kortom, de verschillen met de realistische didactiek zijn aanzienlijk. Kinderen hebben minder mogelijkheden voor een eigen inbreng, en de informele noties worden niet kritisch onderzocht, dan wel benut. Structuralistisch onderwijs is top-down georiënteerd: vanuit de formele vakstructuur naar het kind, via 'kunstmatig' structuurmateriaal, bedacht door 'experts' die 'novices' bij de hand nemen en naar het vakgebied leiden.

De *empiristische* richting in het rekenonderwijs benadert kommagetallen vanuit het meten. (Evans, 1971).

Voor vermenigvuldigen gebruikt men het rechthoeksmodel: eerst met meetgetallen en dan met kale getallen.

Zie: (a) 4×3 (b) $0,4 \times 3$ (c) $0,4 \times 0,3$

AFBEELDING 125

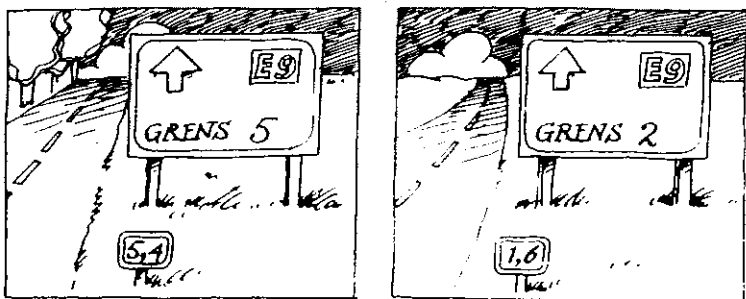


Schatten en hoofdrekenen staan hoog in het vaandel van de empiristen. Het gebruik van de rekenmachine wordt sterk gestimuleerd en er is geen of weinig aandacht voor cijferen.

Op het eerste gezicht zijn de overeenkomsten tussen de empiristen en realisten groot. Maar bij nadere beschouwing zijn er toch ook opvallende verschillen.

De *realisten* maken gebruik van een modelcontext zoals die van de prijsstickers en van het daarmee verbonden strookmodel. Zowel het kale rekenen als het maken van toepassingsproblemen worden daarmee bevorderd. Voorts zijn de realisten minder huiverig voor algoritmen en minder terughoudend ten aanzien van (semi-)formeel rekenen.

AFBEELDING 126



(KINDT, 1978)

Alles overziend is de progressie die er de laatste 25 jaar is geboekt op het pad van de kommagetallen misschien nog wel groter dan bij de gehele getallen (zoals het bovenstaande plaatje uitbeeldt, waar de voortgang in kommagetallen 3,8 km en in gehele getallen 3 km is). Zonder meer revolutionair is de loskoppeling van de breukenleergang, de nadruk op het schattende rekenen, de contextrijke benadering, en de inschakeling van de rekenmachine.

Maar de grens van de didactische onderwijsmogelijkheden is nog niet bereikt - we moeten nog een paar km afleggen. Met name het opereren met nul-kommagetallen kan verbeterd worden. En ook aan de verschillende aspecten van gecijferdheid in verband met het afronden van kommagetallen valt nog wel het een en ander te doen.

En met deze laatste opmerking zijn we weer terug bij de finish van de memorabele 100-meter die in het begin van dit boek werd aangehaald.



Je zou zeggen dat baan 6 (Ottey) toch duidelijk ...

Literatuur

- Brink, J. van den: Een serie experimentele werkbladen. W12-16 Zakrekenmachines, *Nieuwe Wiskrant*, 10(2), 1990, pag. 34-39.
- Brink, J. van den: Goede bedoelingen en voorlopige keuzes. W12-16 Zakrekenmachines, *Nieuwe Wiskrant*, 11(3), 1993, pag. 14-21.
- Evans, E. (red.): *The School Mathematics Project (Book C)*, Cambridge, University Press, 1971.
- Hiebert, J.: Decimal Fractions, *Arithmetic Teacher*, 34, 1987, pag. 22-24.
- Kindt, M.: *Autowegen*, Utrecht, IOWO, 1978.
- Llewellyn, S. & A. Greer: *Mathematics. The basic skills*, Cheltenham, Thornes Publishers, 1983.
- McIntosh, A., B.J. Reys & R.E. Reys: A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense, *For the Learning of Mathematics*, 12(3), pag. 2-9.
- Treffers, A. en E. de Moor: *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2, Basisvaardigheden en Cijferen*, Tilburg, Zwijssen, 1990.

VI Globale schets leergangen breuken en kommagetallen

Inleiding

Voor breuken en kommagetallen zijn vier kerndoelen geformuleerd. Deze hebben betrekking op betekenis verlenen, positioneren, opereren en verbanden begrijpen (Proeve 3A, pag. 9).

In Proeve 3A en Proeve 3B zijn de kerndoelen in de genoemde volgorde besproken, omdat ze zo achtereenvolgens globaal in de leergang aan de orde komen. Dat wil zeggen: eerst besteedt men in het realistische rekenen ruime aandacht aan een brede begripsvorming binnen de genoemde leergangen, dan aan het ordenen en positioneren op de getallenlijn, vervolgens aan het opereren en ten slotte aan de samenhang tussen beide.

Maar dit is slechts een grove, oppervlakkige uitlijning van deze leergangen. Want de vier clusters van activiteiten zijn voor een deel met elkaar verweven. Zo kan bijvoorbeeld het opereren niet strikt worden gescheiden van betekenis verlenen en positioneren op de getallenlijn. En ook speelt de samenhang met verwante onderwerpen van meet af aan in het proces van begripsvorming mee.

Dit betekent dat men uit de didactisch-chronologische beschrijving volgens doelstellingen die in Proeve 3A en 3B zijn gevolgd, niet direct een globale schets van de betreffende leergangen kan afleiden. Vandaar dat we daaraan tot besluit nog een apart hoofdstuk besteden.

In de realistische leergangen kunnen drie fasen worden onderscheiden:

- fase 1: informeel, contextgebonden handelen
- fase 2: semi-formeel, modelondersteund opereren
- fase 3: formeel, vakmatig handelen (Proeve 3A, pag. 34).

In de eerste fase wordt met benoemde breuken en kommagetallen gewerkt, die naar de contextsituaties verwijzen waarin de reken-

problemen zijn gesteld. Er wordt aangesloten op de informele kennis die de leerlingen reeds van deze onderwerpen hebben als het onderwijs daarmee aan het einde van groep 6 begint. Breuken manifesteren zich aanvankelijk als objectgebonden gebroken getallen, en kommagetallen als min of meer verfijnde meetgetallen. Deze kunnen bijvoorbeeld dienen om bepaalde situaties te beschrijven, of om getallen te ordenen, te vergelijken en te plaatsen 'tussen' de hele getallen op de reeds bekende getallenlijn.

De tweede fase onderscheidt zich van de eerste op drie punten, namelijk doordat nu met pure, onbenoemde getallen wordt geopereerd, waarbij de modelcontext die in fase 1 aan de orde is gesteld als concrete oriënteringsbasis voor de betreffende operaties fungeert en een aanzet wordt gegeven tot het aanleren van regelgeleid rekenen volgens standaardprocedures.

In de derde fase wordt dit formele, vakmatige opereren voor de vier basisbewerkingen en de toepassingen ervan in algemene zin voltooid.

De drie onderwijsfasen sluiten aan op de drie fasen in de begripsontwikkeling die de kinderen bij het redeneren en rekenen volgens de realistische onderwijsleertheorie doorlopen. Daarbij dient nadrukkelijk te worden aangetekend dat de mentale handelingen uit een volgende fase de voorgaande redeneer- en rekenwijzen niet elimineert maar juist integreert. Wat inhoudt dat de leerlingen die zich in fase 3 bevinden ook informeel, contextgebonden kunnen opereren indien dit nodig, handig of toepasselijk zou zijn. Tevens moet nog worden opgemerkt dat ook in fase 1 met specifieke getallen en eenvoudige bewerkingen al formeel, vakmatig geopereerd kan worden met kale, onbenoemde getallen.

Kortom, de genoemde fasering is een globale, ideaaltypische indeling van de twee leergangen die zich beide vanaf groep 6 tot ver in de basisvorming uitstrekken.

In de globale schets worden enkele keuzemomenten opgenomen; de lijnen worden niet onnodig strak getrokken. Het gaat ons om de globale uitlijning van het onderwijs over lange termijn gerekend waarin recht wordt gedaan aan de grote differentiatie in de leerprocessen, zoals ook uit de Proeveteksten van de delen 3A en 3B die hieraan voorafgaan naar voren komt.

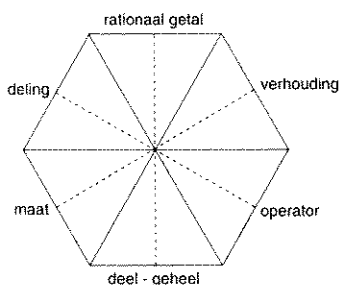
1 Leergang Breuken

1.1 FASE 1: INFORMEEL, CONTEXTGEBONDEN HANDELEN (GROEP 6-7)

Inleiding

Aan breuken kunnen de volgende zes aspecten worden onderscheiden (Proeve 3A, pag. 43) waarop in doelstelling (1) over betekenisverlening wordt gedoeld.

AFBEELDING 128



In fase 1 worden breuken *gemaakt* door breken, meten en eerlijk verdelen. Breuken worden *beschreven*: de breukentaal en de getalsymbolen worden geïntroduceerd. En vervolgens wordt met breuken *geopereerd*: een deel van een hoeveelheid wordt berekend en breuken worden volgens informele methoden vergeleken. En dit alles vindt plaats in zinvolle, goed voorstelbare contextsituaties betreffende eerlijk verdelen, opdelen en meten. In verband met het *positioneren* (doelstelling 2) wordt bij de zojuist genoemde activiteiten speciaal gebruik gemaakt van strookmodellen in de vorm van chocoladerepen, breukstukken en dergelijke, naast de cirkel- en rechthoekmodellen.

Maken en beschrijven

Over het maken en beschrijven van breuken gaat hoofdstuk 3 van Proeve 3A (pag. 79-93). Breuksymbolen worden direct aan

de activiteiten van eerlijk verdelen, opdelen en meten gebonden. Bijvoorbeeld ' $\frac{3}{5}$ ' is de kort genoteerde uitkomst van een eerlijke verdeling van '3 repen voor 5 personen', onder meer tot stand gebracht via stuk-voor-stuk verdelen van steeds 1 reep, resulterend in $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ reep per persoon.

Met opdelen of meten verwijst $\frac{3}{5}$ s naar '3 stukjes van de $\bar{5}$ -strook of $\bar{5}$ -stok' (Proeve 3A, pag. 79-88).

Hiermee is ook direct een verbinding met verhoudingen gelegd: $\frac{3}{5}$ op te vatten als '3 van de 5' en omgekeerd.

Vergelijken

Bij het vergelijken van breuken, die verwijzen naar meten of breken, worden tal van informele strategieën gebruikt:

- als de tellers gelijk zijn, wordt naar de noemers (de stoknamen) gekeken om te bepalen welk stuk het langste is;
- als de noemers gelijk zijn, geeft de teller aan hoeveel stukjes van dezelfde stok beide breuken bevatten;
- aanvullingen tot 1, of vergelijking met $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$ als referentiepunten, kunnen ook vaak uitsluitsel over de ordening geven;
- en ten slotte kunnen breuken indirect worden vergeleken door ze op een passende hoeveelheid of lengte te laten 'werken', dus via deel-van-veel bepalen.

In alle genoemde voorbeelden zijn we uitgegaan van ongelijke breuken. Maar bij het vergelijken dienen ook gelijkwaardige breuken te worden betrokken, zoals $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{4}$ en $\frac{6}{8}$, die via 'halveren' of 'verdubbelen' van tellers en noemers in elkaar omgezet kunnen worden. Dit alles ter voorbereiding op de algemene equivalentieregel die in fase 2 aan de orde komt. De leerlingen krijgen zodoende al een notie van schijnbaar ongelijke breuken die toch even groot blijken te zijn, wat met behulp van breukenstukken dan wel eerlijk-verdelensituaties kan worden ingezien.

Deze strategieën zijn in Proeve 3A in verschillende hoofdstukken beschreven (pag. 48-94, pag. 104-112, pag. 139-146). Dit vergelijken kan gecombineerd worden met het ordenen en plaatsen van de desbetreffende breuken op de getallenlijn. Zoals gezegd

fungeren 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$ daarbij als referentiepunten.

Bij vergelijking van $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{5}$ bijvoorbeeld - wat een lastige opgave is - zijn er nogal wat leerlingen die $\frac{1}{2}$ als referentiepunt kiezen: ' $\frac{2}{3}$ ligt een half-derde voorbij $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{5}$ ligt een half-vijfde voorbij $\frac{1}{2}$, dus is $\frac{2}{3}$ groter dan $\frac{3}{5}$ want de stukjes van een $\frac{3}{5}$ -stok zijn groter dan die van een $\frac{2}{3}$ -stok.'

Stelt men dezelfde vraag in de context van het breken van een chocoladereep, dan krijgen de kinderen de mogelijkheid om via een omweg tot een vergelijking te komen.

'Niels heeft $\frac{2}{3}$ reep;
Renske heeft $\frac{3}{5}$ reep.
Hoeveel stukjes zou zo'n reep bevatten?
Wie heeft het grootste stuk?'

Is de reep van 15 stukjes gevonden (hij moet zowel in drieën als in vijven verdeeld kunnen worden) dan is de vergelijkingsvraag niet moeilijk meer - althans niet als de leerlingen met behulp van de dubbele getallenlijn zo'n deel-van-veel hebben leren bepalen (Proeve 3A, pag. 96-100, pag. 134-135).

Opbrengst

Het genoemde voorbeeld staat aan het einde van fase 1. De meeste kinderen kunnen breuken als $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{5}$ dan maken, de breuksymbolen interpreteren en gebruiken, en ze kunnen de desbetreffende breuken globaal op de getallenlijn plaatsen. Ook kunnen ze dan $\frac{2}{3}$ deel-van en $\frac{3}{5}$ deel-van een hoeveelheid berekenen, als die veelheden niet te groot zijn. Maar lang niet alle kinderen zullen tot redeneringen in staat zijn als zojuist gegeven via $\frac{1}{2}$. Wel kunnen de meesten beredeneerd vergelijken en plaatsen:

$\frac{4}{5}$ en $\frac{5}{6}$ (via 'restanten')
 $\frac{3}{5}$ en $\frac{3}{7}$ (via grootte van stok-stukjes)
 $\frac{3}{5}$ en $\frac{4}{9}$ (via groter, kleiner dan $\frac{1}{2}$).

Dergelijke vergelijkingsopgaven kunnen, zoals gezegd, geplaatst zijn in contexten van eerlijk verdelen en meten. De redeneringen

zijn informeel, maar ook sterk objectgebonden. Indien bijvoorbeeld objecten met de vorm van een rechthoek of een cirkel in de context betrokken zijn, zullen de redeneringen en berekeningen niet op dezelfde wijze verlopen als bijvoorbeeld bij het werken met breukenstukken.

Samenvatting

Samengevat gaat het in de eerste fase van het informele, contextgebonden handelen om de structuur van de breukenwereld bloot te leggen en daarmee de grondslag te vormen voor het opereren met breuken:

- ontwikkeling van de breukentaal via modelcontexten van verdelen, opdelen en meten
- veelzijdige begripsvorming waarin zes aspecten van breuken betrokken worden
- deel-van-veel bepalen
- vergelijken, ordenen en positioneren van breuken volgens informele strategieën, waarbij onder meer $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$ als globale referentiepunten fungeren.

1.2 FASE 2: SEMI-FORMEEL, MODELONDERSTEUND OPEREREN (GROEP 7-8)

Inleiding

In de tweede fase worden de operaties verbreed, de relaties uitgebreid en de toepassingen vernieuwd.

Naast deel-van-veel bepalen, ordenen, vergelijken en positioneren, komt nu verschil bepalen in beeld, en naast verhoudingen wordt ook de relatie met procenten en kommagetallen aan de orde gesteld. De toepassingsmogelijkheden van vergelijken en verschil bepalen, worden navenant uitgebreid.

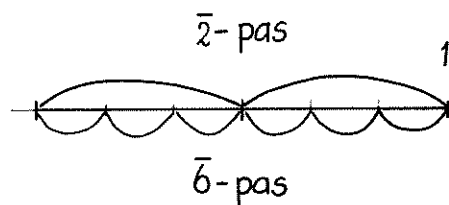
Gelijkwaardigheid fungeert als sleutelbegrip. Net als bij de start in fase 1 waar breuken ontstaan via opdelen, meten en eerlijk verdelen, dienen deze kernactiviteiten ook als ingangen om gelijkwaardigheid van breuken te laten ontdekken.

Gelijkwaardigheid

Gelijkwaardige breuken zijn de leerlingen al in fase 1 tegengekomen. In deze fase gaan we op zoek naar de algemene regel om gelijkwaardige breuken te kunnen vaststellen of te maken.

Via *meten* of afpassen gaat dat als volgt.

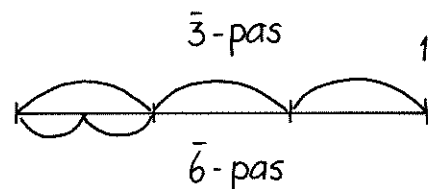
AFBEELDING 129



‘1 stap met de $\bar{2}$ -pas is even groot als 3 stapjes met de $\bar{6}$ -pas.’

$$1/2 = 3/6$$

AFBEELDING 130

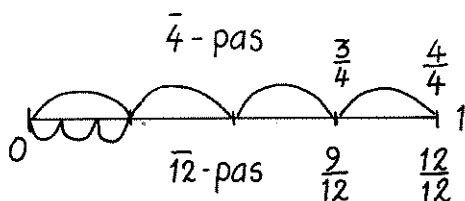


‘2 stappen met de $\bar{3}$ -pas is even groot als 4 stapjes met de $\bar{6}$ -pas.’

$$2/3 = 4/6$$

Dat bijvoorbeeld $3/4 = 9/12$ kan via synchroon afpassen worden ingezien, waarbij de tafel van 3 een cruciale factor is:

AFBEELDING 131



Om $\frac{3}{4}$ te bereiken, zet je 3 passen met de $\frac{1}{4}$ -stap of 9 passen met de $\frac{1}{12}$ -stap.

Je kunt dus zeggen dat $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$ enzovoort, op hetzelfde punt of hetzelfde adres op de getallenlijn wonen, dus zogezegd huisgenoten in de breukenstraat zijn.

Algemeen gesteld:

‘Als je de passen ‘zoveel’ keer zo klein maakt, moet je er ook ‘zoveel’ keer zoveel nemen om even ver te komen.’

Of in de structuurcontext van de breukenbus of van de breukenlift:

‘Als een bus of lift ‘zoveel’ keer zo vaak stopt als een andere, moet je ook ‘zoveel’ keer zoveel haltes nemen om even ver te komen.’

Bij het zoeken naar de regel van gelijkwaardigheid dient de onderwijsgevende zich terughoudend op te stellen en in geen geval de formulering zelf aan te dragen of deze te suggereren. Wel dient de leraar zorg te dragen voor een zekere uniformiteit in het woordgebruik over passen, stappen, stukken, haltes en zo meer. En speciaal op een helder gebruik van de zoveel-keertaal te letten.

Gelijkwaardigheid via *eerlijk verdelen*

Na het voorgaande kunnen we hierover kort zijn. Neem bijvoorbeeld het produceren van gelijkwaardige breuken van $\frac{3}{4}$.

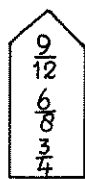
In fase 1 is bij het gevarieerde, eerlijke verdelen van ‘3 repen onder 4 personen’ ook de stuk-voor-stukverdeling aan de orde gekomen die leidt tot de uitkomst van $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ reep per persoon. Het eerlijk verdelen van ‘6 repen onder 8 personen’ levert bij stuk-voor-stuk delen $\frac{6}{8}$ reep per persoon op, maar bij

een andere manier van verdelen $\frac{3}{4}$. Daaruit blijkt $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Je kunt ook zeggen dat als er 2 keer zoveel repen zijn voor 2 keer zoveel mensen, er in feite niets verandert. Idem voor 3 keer zoveel repen voor 3 keer zoveel mensen: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

Afbeelding van de delen van de reep op de getallenlijn geeft hetzelfde plaatje als bij het meten en opdelen.

AFBEELDING 132

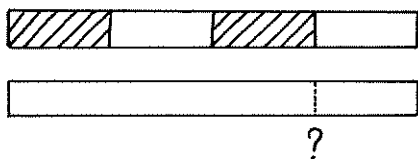


Zo leidt een nadere analyse van het eerlijk verdelen tot een bevestiging van wat bij het meten of afpassen reeds eerder is ontdekt. Maar men kan natuurlijk ook het eerlijk verdelen als hoofdingang tot gelijkwaardigheid kiezen en de gevonden regel vanuit het meten laten bevestigen. Of voor een éénsporige benadering van equivalentie breuken opteren...

Er is zelfs nog een derde mogelijkheid om de equivalentieregel op te sporen, namelijk via deel-van-veel.

Neem $\frac{3}{4}$ neergelegd met de $\bar{4}$ -stok:

AFBEELDING 133



Leg onder de $\bar{4}$ -stok bijvoorbeeld de $\bar{12}$ -stok, of beter, denk hem eronder.

Hoe verschijnt $\frac{3}{4}$ op een $\overline{12}$ -stok?

Dan moet je $\frac{3}{4}$ deel van 12 berekenen; dat is 9, dus $\frac{3}{4}$ komt overeen met 9 stukjes van de $\overline{12}$ -stok, oftewel met $\frac{9}{12}$.

Er is trouwens nog een andere keuze mogelijk, namelijk om het zoeken naar de algemene equivalentieregel uit te stellen tot fase 3, dus tot groep 8, of meer naar het einde van fase 2 te verplaatsen. Zodoende reserveren we meer tijd voor een exploratie van equivalentie via stambreuken of door eerst de strategie van het halveren van de maateenheden volledig uit te buiten en zo meer. Maar deze verschuivingen zijn niet essentieel voor de globale opbouw van de leergang. Waar het om gaat is dat de geschetste algemene strategie om inzicht in equivalentie te verwerven aan de orde komt als reflectie op wat eerder informeel werd onderzocht.

Opereren

Nadat de leerlingen inzicht hebben verworven in de keer-op-keer-regel van gelijkwaardigheid, krijgen ze vraagstukken voorgelegd waarop ze dit inzicht kunnen toepassen.

We doelen hier voor een deel op dezelfde operaties van waaruit de equivalentiekwestie voortkomt, te weten:

- ordenen
- positioneren
- vergelijken
- en verschil bepalen.

‘Plaats op de getallenlijn $\frac{7}{12}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{3}$ ’

AFBEELDING 134



Met informele methoden kan deze opgave redelijk goed worden opgelost. Als referentiepunten kunnen 1 en $\frac{1}{2}$ dienen.

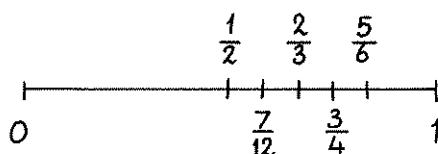
Om te beginnen:

- $\frac{7}{12}$ ligt iets over de helft ($\frac{6}{12}$), om precies te zijn $\frac{1}{12}$ verder

- $\frac{5}{6}$ ligt $\frac{1}{6}$ van 1 af
- $\frac{2}{3}$ ligt $\frac{1}{3}$ van 6 af, en $\frac{3}{4}$ op $\frac{1}{4}$ van 1, dus iets dichterbij dan $\frac{2}{3}$, maar wel wat minder dichtbij dan $\frac{5}{6}$.

Globaal geplaatst:

AFBEELDING 135



De precieze onderlinge verschillen worden echter pas duidelijk indien de desbetreffende breuken gelijknamig gemaakt worden: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ en $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$.

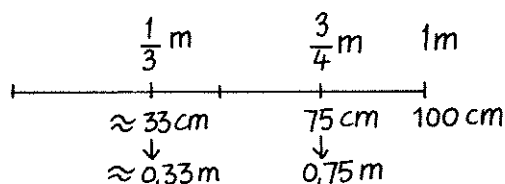
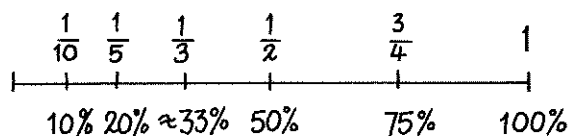
De onderlinge verschillen tussen $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{6}$ blijken gelijk te zijn, namelijk $\frac{1}{12}$.

De genoemde operaties over ordenen, positioneren, vergelijken en verschil bepalen, kunnen beoefend worden met toepassingsproblemen en met kale opgaven - van beide treft men in Proeve 3A vele voorbeelden aan. Vaak zijn daarin zowel breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen in de vergelijkingen betrokken.

Samenhang

Als visueel model voor het vrije verkeer tussen breuken, procenten en kommagetallen fungeert de strook of de dubbele getallenlijn met 'ondermaat' 100 waarop de breuk als operator werkt. Dergelijke deel-van-veelopgaven met diverse ondermaten zijn in fase 1 al veelvuldig aan de orde gekomen in verschillende toepassingsituaties, in meetcontexten met allerhande stroken en stokken, en in opdeelcontexten met repen en dergelijke. In dit opzicht is het rekenen via een ondermaat niet nieuw. Wel nieuw is echter dat het resultaat van de deel-van-veelberekening niet in breuken, maar in procenten of in kommagetallen wordt weergegeven, of desgewenst in verhoudingen, maar dat was in fase 1 al beoefend.

AFBEELDING 136



De omzettingen zijn semi-formeel en modelondersteund: de relatie tussen bijvoorbeeld $\frac{1}{3}$ en 0,33.. gebeurt nog niet op directe wijze via deling van ' $1 : 3 = \dots$ ', want dat is een typisch formele, vakmatige aanpak die eventueel in de volgende fase aan de orde kan komen.

Vergelijkingsopgaven tussen breuken en procenten en verhoudingen als deel-van-beschrijvingen kunnen op diverse manieren worden opgelost, bijvoorbeeld door alle deel-van-beschrijvingen om te zetten in breuken, verhoudingen, of procenten. In het geval van breuken of verhoudingen dienen de verschillende uitkomsten dan vervolgens te worden omgezet in gelijknamige breuken of gelijksoortige verhoudingen.

DE BREKENBODE

SINTERKLAAS WINT HET NOG STEEDS VAN DE KERSTMAN

Brukelendam.
In onze stad blijkt Sinterklaas nog steeds aanzienlijk populairder dan de Kerstman. In een onderzoek van de winkeliersvereniging 'Koopkracht' bleek dat in ruim 60% van de gezinnen met Sinterklaas pakjesavond wordt gevierd. Terwijl in iets meer dan een kwart van de gezinnen met Kerstmis pakjesavond wordt gevierd. In ongeveer 1 op de 10 gezinnen wordt pakjesavond helemaal niet gevierd.



1 In het bericht hebben ze het steeds over 'ruim', 'iets meer dan' en 'ongeveer'.

Ze bedoelen dat de getallen afgerond zijn.

Welke percentages zouden het precies geweest kunnen zijn?

pakjesavond

pakjesavond

geen

Sinterklaas _____

Kerst _____

pakjesavond _____

2 Teken de verdeling in de strook.

(BUYS (RED.), 1996, PAG. 108)

Maar in het algemeen zal de omzetting van breuken en verhoudingen in procenten de voorkeur verdienen - zoals in het bovenstaande voorbeeld.

Het belang om vanuit praktische toepasbaarheid van meet af aan veel aandacht aan de breuk als deel-van-veeloperator te besteden, wordt in deze samenhang nog eens onderstreept.

Toepassingen

Het opereren met breuken vindt zijn oorsprong en toepassing in situaties die verwijzen naar de zeshoek van opdelen, meten, eerlijk verdelen, deel-van-veel en verhoudingen, plus naar pure rationale getallen.

In Proeve 3A zijn vooral ook toepassingen gegeven in de vorm van berichten uit de nieuwsmedia, waaronder krantenberichten. Ook kunnen toepassingsopgaven in alledaagse settings worden gevonden, zoals bij breuken in de keuken, winkelen en zo meer, waarvan ook verschillende voorbeelden werden gegeven.

Men kan ook een kunstwereldje scheppen, zoals Sylvania, waar met breukdelen van een zilverstaaf wordt betaald.

AFBEELDING 138

Sylvania is een land waar ze betalen met zilverstaven. Maar een hele staaf is veel waard. Daarom hebben ze de staven ook in stukjes geknipt, zodat je ook met $\frac{1}{2}$ staaf of $\frac{2}{3}$ staaf kunt betalen.



Boer Unga heeft een schaap te koop:



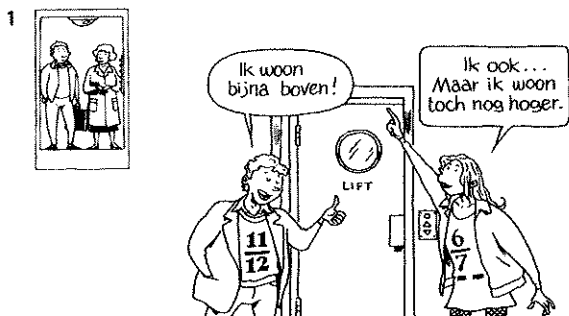
Wat vind je: heeft Farga gelijk? Leg uit waarom!

De leerlingen krijgen daarin volop gelegenheid de toepassing van gelijkwaardigheid te oefenen en te beoefenen bij het vergelijken

en verschil bepalen, zoals in het bovenstaande voorbeeld uit de Breukenbode (Buys (red.), 1996, pag. 77).

Sterker: zo'n kunstwereldje kan zelfs als bron dienen om het begrip gelijkwaardigheid van breuken te helpen vormen. Denk in dit verband aan de breukenbus of de breukenlift als variant daarvan, die in de Breukenbode staat.

AFBEELDING 139



Wat denk je: heeft $\frac{6}{7}$ gelijk?

ja/nee, want _____

(BUYS (RED.), 1996, PAG. 116)

Het eerste voorbeeld verwijst naar redeneringen die ook al in fase 1 bij het meten met breukenstokken worden toegepast. De volgende voorbeelden betreffen gelijkwaardigheid.

Gelijkwaardigheid is een sleutelbegrip voor het formaliseren van het breukbegrip, zoals we straks bij de beschrijving van fase 3 nogmaals zullen zien als het opereren wordt uitgebreid tot formeel optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

AFBEELDING 140

- 1 Wijs aan bij welke haltes de $\bar{3}$ -lift stopt.
Zet daar een streepje.

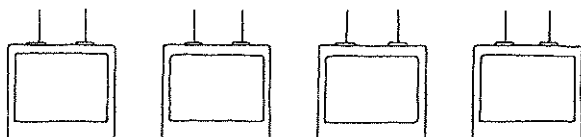


Je weet nu vast wel waar $\frac{1}{3}$ uitstapt.
Schrijf hem er op de goede plaats bij.

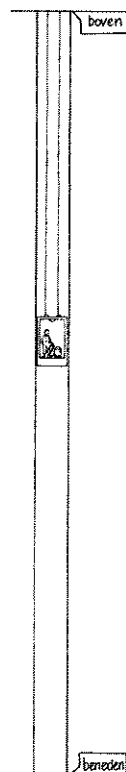
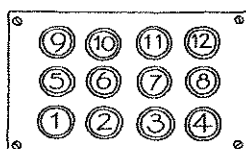
- 2 Waar woont $\frac{2}{3}$?

Schrijf hem er weer op de goede plaats bij.

- 5 Bedenk nog eens vier liften die allemaal bij $\frac{1}{3}$ stoppen.



- 6 De $\bar{12}$ -lift staat juist klaar om weg te gaan. Je wilt naar $\frac{1}{3}$.
Op welke halte-knop moet je in die lift drukken?



(BUYS (RED.), 1996, PAG. 113)

Samenvatting

Samengevat gaat het in de fase van het semi-formele, modelondersteunde opereren om:

- inzicht verwerven in gelijkwaardigheid
- verbreding van de relaties richting procenten en kommagetallen
- verruiming van de toepassingen betreffende deel-van-veel, vergelijken, ordenen en verschil bepalen
- waarbij strookachtige modellen (strook, stok, reep, getallenlijn) en bijpassende contexten van opdelen, meten en eerlijk verdelen de modelondersteunde functie vervullen bij het semi-formele handelen (Proeve 3A, pag. 11 e.v.).

In fase 2 kan het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken ook al worden aangezet als vervolg op verschil bepalen. Om overwegingen van overzichtelijkheid worden deze operaties in fase 3 geplaatst.

1.3 FASE 3: FORMEEL, VAKMATIG HANDELEN (GROEP 8, BASIS-VORMING)

Inleiding

In de laatste fase van de leergang wordt het formele optellen, aftrekken, deel-van-deel bepalen, vermenigvuldigen en delen van breuken aan de orde gesteld, plus uiteraard de toepassingen ervan. Tevens worden opgaven over ordenen, deel-van-veel bepalen en dergelijke, die in voorgaande fasen al werden gesteld, nu voortgezet beoefend.

Van de genoemde operaties behoren optellen en aftrekken tot het basisschoolprogramma. Dat geldt ook voor een breuk vermenigvuldigen met of delen door een heel getal - althans in de Proeveinterpretatie van de kerndoelen.

Optellen en aftrekken van gelijknamige breuken kan al in fase 1 aan de orde worden gesteld bij het meten met breukenstukken - dit levert geen problemen op.

Hier gaat het om optellen en aftrekken in algemene zin, dus ook van ongelijknamige gemengde breuken. Gelijkwaardigheid van breuken vormt de grondslag van deze operaties.

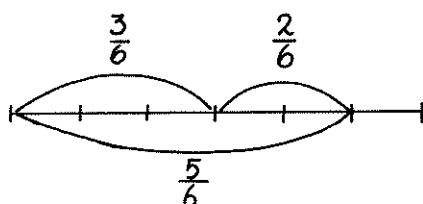
Nadere analyse van de keer-op-keerregel van gelijkwaardigheid plus de keerregel van het vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal, leidt naar een volgende, nieuwe regel voor deel-van-deel bepalen die op zijn beurt de basis vormt voor formeel vermenigvuldigen en delen.

Optellen en aftrekken (groep 8)

Dat gelijknamige breuken eenvoudigweg opgeteld en afgetrokken kunnen worden door respectievelijk de tellers van de betreffende breuken op te tellen en af te trekken, is gemakkelijk in te zien vanuit het meten.

$$3/6 + 2/6 = 5/6; 5/6 - 2/6 = 3/6$$

AFBEELDING 141



Of in stappentaal:

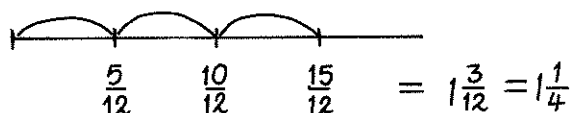
'3 stappen met de $\frac{1}{6}$ -pas vooruit en dan nog 2 stappen voorwaarts, dan zijn we 5 stappen met de $\frac{1}{6}$ -pas gevorderd op de getallenlijn; en doen we 2 stappen terug vanaf $\frac{5}{6}$, dan bevinden we ons bij $\frac{3}{6}$.'

Net als bij het aanvankelijke rekenen, kunnen de optel- en aftrekoperaties op de getallenlijn worden afgebeeld en uitgevoerd door achtereenvolgens sprongen vooruit en achteruit te maken.

In het geval van het vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal, wordt herhaald gesprongen met dezelfde sprong-grootte: het gaat in feite om herhaald optellen:

$$3 \times \frac{5}{12}$$

AFBEELDING 142



Maar bij het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken worden ongelijknamige stukken van verschillende stokken of passen achter elkaar gezet of van elkaar gehaald. Gemakkelijk kan ingezien worden dat de uitkomsten in zulke gevallen niet te

verkrijgen zijn door de betreffende tellers en noemers simpelweg op te tellen dan wel af te trekken,

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$, want de uitkomst moet groter dan $\frac{1}{2}$ zijn
 $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} \neq \frac{4}{3}$, want de uitkomst moet kleiner dan 1 zijn.

Gelijknamige breuken kunnen zonder meer opgeteld en afgetrokken worden, maar ongelijknamige breuken blijkbaar niet.

In het laatste geval kan maar één conclusie worden getrokken: zet de desbetreffende breuken om in passende gelijkwaardige breuken, kortweg gelijknamige breuken genoemd, die de leerlingen in fase 2 al zijn tegengekomen als breuken die op hetzelfde adres 'wonen'.

Twee voorbeelden uit de Breukenbode (Buys (red.), 1996).

AFBEELDING 143

4 Een spel om met z'n tweeën te spelen.

Je hebt nodig: 10 kaartjes waar je aan twee kanten een som op kunt schrijven.

Spelregels:



Speler A

1. Speler A bedenkt een makkelijke som; die schrijft hij op een kaartje.
Bijvoorbeeld: $\frac{4}{8} + \frac{1}{8} =$
2. Hij maakt er een moeilijke som van, en schrijft die op de achterkant.
Bijvoorbeeld: $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} =$
3. Dan laat hij de achterkant (met de moeilijke som erop) aan speler B zien.
4. Speler B probeert te raden wat de makkelijke som is. Als hij het raadt, krijgt hij het kaartje. Anders krijgt speler A het kaartje.
5. Daarna worden de rollen omgedraaid. Wie uiteindelijk de meeste kaartjes heeft, heeft gewonnen.



Speler B

(PAG. 82)

En nu alleen.

AFBEELDING 144

1 Neem bijvoorbeeld deze makkelijke som:

Schrijf het antwoord erachter.

Bedenk welke breuken op de achterkant kunnen staan.

Schrijf ze in de kaartjes.

Zorg dat het een moeilijke som wordt!

$$\boxed{\frac{3}{6}} + \boxed{\frac{2}{6}} =$$

$$\boxed{\phantom{\frac{3}{6}}} + \boxed{\phantom{\frac{2}{6}}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{5}} =$$

$$\boxed{\phantom{\frac{1}{2}}} + \boxed{\phantom{\frac{1}{5}}} =$$

2 Nu een moeilijke som:

Bedenk twee breuken voor de achterkant en schrijf ze

op de kaartjes. Zorg dat het een makkelijke som wordt!

(PAG. 119)

En nog wat later volgen kale sommen.

AFBEELDING 145

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} =$$

$$2\frac{3}{4} + \frac{3}{5} =$$

$$\frac{5}{12} - \frac{1}{3} =$$

$$1\frac{1}{3} - \frac{1}{2} =$$

$$1\frac{3}{4} - \frac{5}{6} =$$

(PAG. 119)

Het rekenen wordt regelgeleid uitgevoerd:

‘ik moet eerst gelijknamig maken en dan...’

Maar net als de leerlingen geneigd zijn om ‘blind’ te rekenen, stuiten ze op opgaven als $1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2} = \dots$ en $1\frac{3}{4} - 5\frac{5}{6} = \dots$

Nu kan eventueel teruggegrepen worden op de steun van de getallenlijn, zoals vaak in fase 2 gebeurde. Want zoals gezegd, zijn de fasen wel onderscheiden maar niet gescheiden.

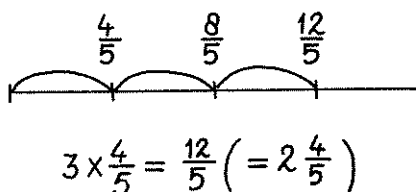
Het supertrio - drie regels rond gelijkwaardigheid

In fase 2 is de *equivalentieregel* inzichtelijk gemaakt via meten,

eerlijk verdelen of eventueel deel-van-veel bepalen.

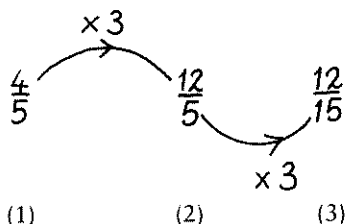
Via springen op de getallenlijn is de 'teller-regel' (Proeve 3A, pag. 162) ook eenvoudig in te zien: 'indien een breuk met een factor n wordt vermenigvuldigd, wordt de teller met een factor n vermenigvuldigd, en omgekeerd'. Deze regel volgt uit het herhaald optellen van gelijknamige breuken.

AFBEELDING 146



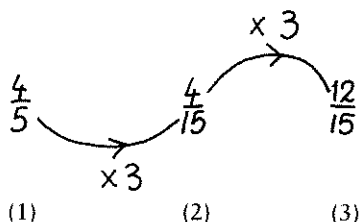
Wordt vervolgens de noemer met die factor n vermenigvuldigd, dan krijgen we weer de oorspronkelijke breuk, of beter gezegd, een breuk die daarmee gelijkwaardig is.

AFBEELDING 147



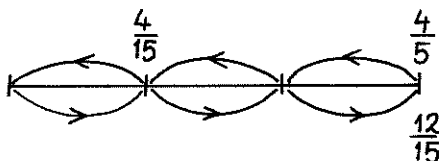
Uit de equivalentieregel en de tellerregel volgt dus de 'noemerregel': 'indien van een breuk de noemer met een factor n wordt vermenigvuldigd, dan wordt die breuk n keer zo klein of $\frac{1}{n}$ -de deel van de oorspronkelijke breuk'.

AFBEELDING 148



Of op de getallenlijn uitgebeeld:

AFBEELDING 149



De 'verkleining' die uit de toepassing van de noemerregel ontstaat, kan gemakkelijk gecontroleerd worden door de vergroting via de tellerregel.

Deze betrekking kan op symbolisch niveau met het relatieboogje worden aangegeven (Proeve 3A, pag. 158).

$$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}, \text{ want } 3 \times \frac{4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

Net als de equivalentieregel en de tellerregel kan ook de noemerregel concreet worden onderbouwd met meten of eerlijk verdelen.

Via meten gaat dat als volgt: als je het benodigde aantal stukjes (4) afpast met een maateenheid die drie keer zo klein is of één derde deel is van de bedoelde eenheid (dus met stukjes van een $\frac{1}{3}$ -stok in plaats van een $\frac{1}{5}$ -stok), dan is de afgestelde lengte (de uitkomst) drie keer zo klein.

Via eerlijk verdelen gaat het zo: als je het gegeven aantal pizza's

(4) met drie keer zoveel mensen eerlijk moet verdelen, krijgt ieder nu drie keer zo weinig oftewel één derde deel.

Kortom, bij de inzichtelijke onderbouwing van het equivalentiebegrip in fase 2, kunnen de teller- en noemerregels ook apart in het onderzoek worden betrokken.

In de derde onderwijsfase van het formele, vakmatige handelen worden deze regels opnieuw bewust gemaakt - en zo nodig nog eens concreet onderbouwd - en expliciet geformuleerd.

- 1 Als je teller en noemer van een breuk met hetzelfde getal vermenigvuldigt, verandert de breuk niet van waarde.
- 2 Vermenigvuldig je alleen de teller, dan wordt de oorspronkelijke breuk met die factor vergroot.
- 3 Gebeurt hetzelfde met de noemer, dan wordt de breuk met die factor verkleind.

Regel (1) vormt de basis voor het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken.

Regel (3), die uit (1) en (2) volgt, biedt de grondslag voor het deel-van-deel bepalen en het vermenigvuldigen van breuken. Het supertrio ligt dus aan de basis van het formele opereren met breuken.

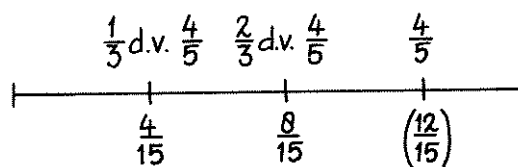
Delen door een heel getal: deel-van-deel bepalen (groep 8 - basisvorming)

Zoals gezegd, betekent bijvoorbeeld verkleinen met een factor 3 hetzelfde als één derde deel nemen.

Regel (3) zegt dat je dat kunt doen door de noemer van de desbetreffende breuk te vermenigvuldigen.

$\frac{1}{3}$ deel van $\frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ of $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}$.

AFBEELDING 150



Als $\frac{1}{3}$ d.v. $\frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ is $\frac{2}{3}$ d.v. $\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ (en $\frac{3}{3}$ d.v. $\frac{4}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$).

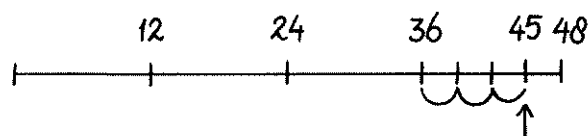
Na een serie van dergelijke opgaven ontdekken de leerlingen - zo nodig daartoe door de leraar aangezet - de nieuwe regel (4): bij deel-van-deel berekenen, vermenigvuldig je de teller en de noemer.

Vermenigvuldigen van breuken (groep 8 - basisvorming)

Dat ' $\frac{2}{3} \times \dots$ ' berekend kan worden door ' $\frac{2}{3}$ deel-van-...' te bepalen, komt in de basisschool aan de orde bij deel-van-veel, dus bijvoorbeeld bij ' $\frac{2}{3} \times 9 = \dots$ ' of ' $\frac{3}{4} \times 12 = \dots$ ' of ' $\frac{1}{2} \times 6 = \dots$ '. Dergelijke opgaven worden voorafgegaan door ' $2 \frac{1}{2} \times 6$; $3 \frac{3}{4} \times 12$; $1 \frac{2}{3} \times 9$ '.

Neem bijvoorbeeld ' $3 \frac{3}{4} \times 12 = \dots$ '

AFBEELDING 151



Hierin ligt ' $\frac{3}{4} \times 12 = \dots$ ' besloten. Eerst doe je 3×12 en dan nog $\frac{3}{4} \times 12$ om $3 \frac{3}{4} \times 12$ te bepalen. Daarbij wordt $\frac{3}{4} \times 12$ volstrekt natuurlijk via deel-van nemen berekend.

Voor de gelijkenschakeling van deel-van-deel en deel-keer-deel dient daarom eerst de voorafgaande bekende koppeling van deel-van-veel en deel-keer-veel nog eens onder de loep te worden genomen. Dit leidt dan tot de conclusie dat beide bewerkingen gelijkgesteld mogen worden en dat vermenigvuldigen dus niet altijd groter maakt.

Kortom, regel (4) geldt ook voor vermenigvuldigen van breuken.

Delen van breuken (basisvorming)

In de onderbouw van de basisschool worden de bewerkingen van vermenigvuldigen en delen al nadrukkelijk met elkaar in verband gebracht bij het leren van de tafels.

$56 : 7 = 8$, want 8 keer 7 (of 7 keer 8) is 56.

De uitkomst 8 kan op juistheid worden gecontroleerd via de 'boogjes-vermenigvuldiging'. Maar ze kan ook op die manier worden gevonden.

Dit nu geldt evenzeer voor het delen van breuken.

$$2/3 : 4/5 = ?$$

Nu gaat het erom die '?' te vinden via regel (4) betreffende het vermenigvuldigen van breuken. De oplossing kan niet direct worden gevonden in één stap, maar wel indirect via enkele tussenstappen. Eén van de mogelijkheden is om $2/3$ te vervangen door een equivalente breuk die een 4-voud als teller heeft en een 5-voud als noemer ... Maar dat is lastig. Veel gemakkelijker is het om eerst $4/5$ te neutraliseren door $5/4$ op de plaats van het vraagteken te plaatsen en daarachter $2/3$ te plaatsen (? is dus $5/4 \times 2/3 = 10/12$). Regel (5) dringt zich op: delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde. Men kan ook de breuken 'wegwerken' door ze beide met hetzelfde getal te vermenigvuldigen - de uitkomst verandert dan niet van waarde.

$$\begin{aligned} 2/3 : 4/5 &= \\ \times 3 \quad (\quad) & \\ 2 : 12/5 &= \\ \times 5 \quad (\quad) & \\ 10 : 12 &= 10/12 = 5/6. \end{aligned}$$

Dat $10 : 12$ gelijk is aan $10/12$ is evident vanuit het eerlijk verdelen (van repen, pizza's) en behoort tot de basiskennis uit fase 2. Men kan een vergelijkbare procedure volgen door de gegeven breuken om te zetten in equivalente breuken.

$$2/3 : 4/5 = 10/15 : 12/15 = 10 : 12 = 10/12 = 5/6.$$

Op dit formele niveau zou in ieder geval de 'boogjes-methode' aan de orde gesteld moeten worden, leidend tot regel (5) - althans met de leerlingen die op dit niveau kunnen denken en redeneren.

Verbanden en toepassingen (groep 8 - basisvorming)

In de derde fase wordt de relatie van breuken met verwante onderwerpen als verhoudingen, procenten en kommagetallen verder verdiept en geformaliseerd. Zo wordt de betrekking tussen breuken en kommagetallen in de tweede fase vastgesteld via maatverandering. Maar op het formele niveau kan een breuk ook direct worden omgezet in een deling die vervolgens een kommagetal oplevert.

Omzettingen kunnen van belang zijn voor het vlugge, globale, schattende rekenen: vooral de omzetting van percentages in mooie, ongeveer gelijke breuken die men vervolgens weer grofweg als deel-van-veel op grote getallen laat werken, is een beproefde schattingsmethode.

In Proeve 3A (pag. 177 e.v.) is een staalkaart van mogelijkheden gegeven van toepassingsopgaven waarin met breuken geopereerd dient te worden.

Zoals gezegd, is het vrije verkeer tussen verwante onderwerpen, dat reeds in fase 1 is aangezet, van bijzondere betekenis in het kader van functionele gecijferdheid. Het kunnen vermenigvuldigen en delen van breuken is vooral van belang voor de leerlingen die binnen het vaksysteem of bij verwante vakken met formele breuken moeten kunnen rekenen.

Toepassingen van deze operaties in het leven van alledag of de beroepswereld zijn uiterst beperkt - dit in tegenstelling tot het opereren met kommagetallen en procenten, en elementaire operaties met verhoudingen.

Samenvatting

In de fase van het formele, vakmatige opereren gaat het om:

- uitbreiding van de operaties met formeel optellen, aftrekken (voor het basisonderwijs)
- en vermenigvuldigen en delen (voor de basisvorming)
- met stambreukdeel-van-deel bepalen op de grens van beide onderwijsvormen
- waarbij in alle gevallen de keer-op-keerregel van gelijkwaardigheid en de daaruit af te leiden keerregels een scharnierfunctie vervullen
- en ten slotte om inzicht verwerven in deze regels als basis voor

de verdere formalisering en uitbreiding van het breukrekenen in de basisvorming.

1.4 RUIMER KADER

In deze samenvattende beschrijving van de uitlijning van de leer-gang is de nadruk op de onderwijsactiviteiten gelegd. Deze zijn er in het Proeve-concept echter uitsluitend op gericht om de leeracti-viteiten van de leerlingen te bevorderen die voeren naar het zelf-standig ontwikkelen van begrip en inzicht van kernconcepten als gelijkwaardigheid, positionering van breuken op de getallenlijn, relaties leggen met verhoudingen, procenten en kommagetallen.

Op het belang van het schatten, het maken van eigen producties, het kiezen van perspectiefrijke individuele leerwegen en de (grote) differentiatie en variatie in oplossingen en oplossingsniveaus, de geleidelijk verlopende formalisering, de richtingbepalende invloed van de onderwijsgevende, het belang van het oefenen, de betekenis van uitwisseling van oplossingsmethoden via een groeps-gesprek en zo meer, konden we hier niet ingaan.

Daarvoor verwijzen we naar Proeve 3A (pag. 205-217) en naar het pakket van onderwijsactiviteiten van de Breukenbode (Buys (red.), 1996).

Maar één vraag willen we niet onbesproken laten:

Zijn de kerndoelen voor breuken die in Nederland zijn vastge-steld, vergelijkbaar met recente doelen en programma's in andere landen?

Om dit na te gaan, nemen we het meest recente programma, namelijk dat van Australië (Verma, 1995) als referentiepunt. Het vertoont grote overeenkomsten met de nieuwste Amerikaanse en Engelse programma's en wordt algemeen van hoge kwaliteit geacht.

Voor groep 8 lezen we over breuken in het 'Curriculum and Standards Framework' het volgende:

- vergelijken en ordenen van ongelijknamige breuken (bijvoor-beeld via gelijkwaardige breuken)
- plaatsen van breuken op een getallenlijn en afpassen van stap-pen van breuken daarop ($2\frac{1}{3}$, 3, $3\frac{2}{3}$, ...)
- delen van hoeveelheden bepalen (bijvoorbeeld $\frac{3}{5}$ deel van 20)

- breuken in verschillende vormen herbenoemen (kommagetallen, verhoudingen, delingen, percentages)
- optellen en aftrekken van verwante breuken, waarvan de noemers door halveren in elkaar omgezet kunnen worden (bijvoorbeeld vijfden en tienden)
- selecteren en gebruiken van passende operaties in toepassings-situaties (bijvoorbeeld $3 : 1/2$)
- en omgekeerd bij gegeven kale opgaven passende probleemsituaties bedenken.

In algemene zin wordt ook op het belang van het schatten gewezen, mede in het kader van functionele gecijferdheid. De overeenkomst met de Nederlandse kerndoelen is treffend. Pas aan het einde van grade 10, zeg aan het einde van de basisvorming, staat in het Australische programma:

optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken.

Dit komt ten dele overeen met wat in Nederland, voor een deel van de kinderen, wordt nagestreefd.

Internationaal wordt thans meer nadruk op kommagetallen dan op breuken gelegd - een algemene trend waar ook Nederland zich bij aansluit.

2 *Leergang kommagetallen*

2.1 FASE 1: INFORMEEL, CONTEXTGEBONDEN HANDELEN (GROEP 6-7)

Inleiding

Kommagetallen kennen slechts twee verschijningsvormen, namelijk die van meetgetallen en van pure rekengetallen.

Meetgetallen vormen de ingang van de leergang kommagetallen - althans in de realistische opvatting. De laatste toevoeging is van belang, omdat kommagetallen ook eenvoudig als zuivere getallen geïntroduceerd kunnen worden vanwege de vormovereenkomst met de schrijf- en rekenwijze van hele getallen. Deze gelijkenis maakt het mogelijk dat bijvoorbeeld van meet af aan cijferend met kommagetallen kan worden opgeteld en afgetrokken, zonder dat de leerlingen al in staat zijn kommagetallen globaal op de

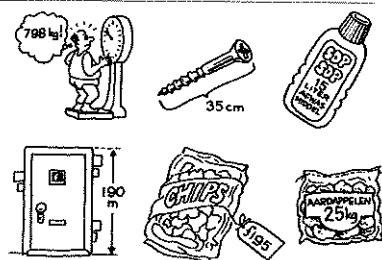
getallenlijn te plaatsen of te ordenen naar grootte. Of anders gezegd: men kan kinderen betrekkelijk eenvoudig met kommagetallen leren rekenen zonder dat ze inzicht in de grootte van die getallen hebben verworven.

Dit opereren kan uiteraard ook met meetgetallen gebeuren. Maar deze werkwijze past niet in het realistische concept van de uitwerkingen die de meest recente leerboeken aan de leergang kommagetallen geven. Daarin start men weliswaar met kommameetgetallen, maar het cijferende opereren ermee wordt uitgesteld.

Aanvankelijk wordt aangesloten bij de informele kennis die kinderen reeds van kommagetallen bezitten.

AFBEELDING 152

De komma's zijn vergeten.



(HUITEMA (RED.), 1994, DEEL 7A, PAG. 40)

De meest bekende meetgetallen hebben betrekking op geld, lengtematen, gewicht en temperatuur.

In de eerste fase wordt achtereenvolgens aandacht besteed aan:

- noteren en positioneren
- springen en opereren op de meetlijn
- schattend rekenen

En dat alles met meetgetallen.

Deze activiteiten zijn beschreven in delen van hoofdstuk II en hoofdstuk III.

Noteren en positioneren

Het noteren van kommagetallen in de context van geld (*f* 1,75)

of van lengtemeting (1,75 m) levert weinig problemen op. Maar in hoofdstuk II, paragraaf 3, hebben we gezien dat het noteren en positioneren van lengten als 8,09 m; 8,9 m; 8,10 m en 8,90 m wel heel lastig is. En wat betekent het als gezegd wordt dat de meisjes in Nederland tussen 1980 en 1993 gegroeid zijn van gemiddeld 1,682 m naar 1,704 m?

Lengte en afstand zijn goede modelcontexten voor zowel het noteren als het positioneren. Goed voor het noteren omdat ieder opeenvolgend cijfer achter de komma apart benoemd kan worden met een passende maateenheid, en goed voor het positioneren omdat de decimale verfijning duidelijk zichtbaar en voorstelbaar kan worden gemaakt. In het geval van 1,704 m en 1,682 m kan als het ware stap voor stap de betreffende lengte ‘decimaal-per-decimaal’ worden afgepast. Het inzicht dat 1,6.. m in ieder geval kleiner is dan 1,7 m is essentieel voor een goed begrip van het verfijnen, het noteren, en het globaal en meer verfijnd positioneren. Men kan met meten als basis twee methoden voor het noteren en positioneren van kommagetallen volgen.

De eerste methode is die van de toenemende complicering: eerst één cijfer achter de komma, dan twee cijfers, en vervolgens drie en meer cijfers bij lengtemeting, afstand, inhoud, gewicht, tijd en zo meer. Waarbij steeds de één- en meer-cijfers achter de komma met elkaar in verband worden gebracht. De tweede methode start met twee decimalen. Daarna wordt direct de verbinding met één decimaal en drie decimalen gelegd via respectievelijk grover en verfijnder meten in dezelfde context, waardoor de problematiek meteen in zijn volle complexiteit aan de orde komt, zoals beschreven in hoofdstuk II.

Springen en opereren op de meetlijn

In hoofdstuk II, paragraaf 2, staan voorbeelden van opgaven over de kilometerteller die in verband met het bewegen over een meetlijn gebracht kunnen worden. Meten, noteren, positioneren, verbanden leggen, ordenen, dit alles kan met het ‘rijden’ over de meetlijn worden beoefend.

Het maken van rijen past ook binnen dit kader, al dan niet gecombineerd met het positioneren.

6 Maak de rijen af. Let goed op hoe groot de sprongen zijn.

2,8 km - 2,9 km - ... - ... - ...	1,77 m - 1,78 m - ... - ... - ...
18,6 km - 18,7 km - ... - ... - ...	4,96 m - 4,97 m - ... - ... - ...
49,7 km - 49,8 km - ... - ... - ...	2,75 m - 2,85 m - ... - ... - ...
58,4 km - 59,4 km - ... - ... - ...	5,89 m - 5,99 m - ... - ... - ...

(HUITEMA (RED.), 1994, DEEL 7A, PAG. 123)

Optellen en aftrekken van kommagetallen zijn in de context van het meten van lengten en afstanden op natuurlijke wijze te beoefenen, en uiteraard ook in vergelijkbare probleemsituaties over stijging van temperatuur, afname van gewicht, verschil in volume en dergelijke. In de nieuwste methoden treft men dit 'naast elkaar' rekenen met kommagetallen in de vorm van meetgetallen ook al aan in de eerste helft van groep 7.

Schattend rekenen in de winkelcontext

In hoofdstuk II hebben we ons tot het schattende vermenigvuldigen bepaald. Duidelijk is echter dat in de winkelcontext ook het schattende optellen en aftrekken kan worden beoefend, wat aanzienlijk eenvoudiger is. Voorwaarde daarbij is dat de leerlingen de betreffende meetgetallen globaal naar de mate van een bepaalde verfijning kunnen afronden en positioneren.

Bij schattend vermenigvuldigen via prijsstickers is het moeilijk om de gevolgen van de afronding voor de globale uitkomst van het product te doorzien. Het afgewogen rekenkundig afronden van twee factoren tegelijk is een vrijwel onmogelijke opgave, omdat daarbij ook de eerste uitkomst nog eens moet worden bijgesteld op grond van verfijnde rekenkundige overwegingen. Daarom is in de beschreven lessen van hoofdstuk III een stapsgewijze schattingsprocedure geïntroduceerd, waarbij aanvankelijk alleen de eerste factor naar boven en naar beneden wordt afgerond op een heel getal. Daarna worden twee betrekkelijk eenvoudige schattingen uitgevoerd. En ten slotte wordt daar de berede-
neerde schatting van de oorspronkelijke opgave tussen geplaatst. Deze inklemsstrategie kan uiteraard ook bij de lastige nul-komma-keerkwestie worden toegepast.

Bij een en ander wordt de rekenmachine betrokken voor het afronden van de uitkomst van de precieze berekening op centen nauwkeurig en om de schatting op juistheid te controleren. Maar wat is 'juist' in dit verband? Ook daarover moet met de leerlingen worden gediscussieerd. Schatten krijgt op deze wijze inhoudveelal een contextgebonden vulling. Bij de prijsstickers betekent schatten soms een nauwkeurigheid in guldens, soms in vijfjes, dan in tientjes - afhankelijk van de gegeven getallen en de redelijkheid van de foutenmarge. In hoofdstuk III is de didactiek van het schatten nauwkeurig uit de doeken gedaan. In de nieuwste methoden wordt daaraan ook aandacht besteed.

Samenvatting

Samengevat gaat het in de eerste fase van het informele, contextgebonden handelen om het volgende:

- noteren en positioneren van meetgetallen, aansluitend op bekende contexten van kommagetallen
- springen en opereren op de meetlijn (optellen en aftrekken)
- schattend rekenen op basis van afronden en inklemmen (prijsstickers, vreemd geld en dergelijke).

De betreffende activiteiten van fase 1 zijn beschreven in hoofdstuk II en hoofdstuk III (eerste deel). Ze corresponderen met de kerndoelen over betekenis geven, positioneren en schattend rekenen - althans voorzover deze betrekking hebben op meetgetallen. Het rekenen met kale kommagetallen komt in fase 2 aan bod.

2.2 FASE 2: SEMI-FORMEEL, MODELONDERSTEUND OPEREREN (GROEP 7-8)

Wat in fase 1 is beschreven, wordt in fase 2 herhaald, maar nu met kale getallen. Uitbreiding naar cijferend optellen en aftrekken vindt nu plaats. Voorts wordt vermenigvuldigen met machten van tien aan de orde gesteld en daarna het delen.

Een en ander geschiedt in relatie met metriek en procentrekenen. Ook de verbinding tussen eenvoudige breuken en kommagetallen wordt gelegd en gevisualiseerd op de dubbele getallenlijn.

Bij het *ordenen* en *positioneren* van kale getallen kunnen de kinderen aan meetgetallen denken, dus in gedachten bijvoorbeeld meter of kilometer aan de desbetreffende getallen hechten. Het toevoegen van nullen ‘achter’ de kommagetallen wordt nu expliciet aan de orde gesteld. Waarom mag dit? Wanneer is dit handig? Dit is onder meer het geval bij het verschil bepalen tussen twee kommagetallen via rekenen ‘naast elkaar’ dan wel ‘onder elkaar’. In het laatste geval blijkt er ‘gewoon’ *gecijferd* te kunnen worden - eerst met meetgetallen en daarna probleemloos met kale kommagetallen, zowel bij aftrekken als optellen.

Schattend vermenigvuldigen wordt voortgezet met kale getallen - eerst verwijzen ze nog in vorm en grootte naar de context van de prijsstickers, dan naar algemene gevallen waarbij het ook gaat om het juist plaatsen van de komma. De nul-komma-keerkwesatie krijgt via de inklemprocedure speciale aandacht. De relatie tussen schattend vermenigvuldigen en *delen* komt ook aan bod: delingsopgaven kunnen via (schattend) vermenigvuldigen met de boogjesmethode worden opgelost. De rekenmachine kan onder meer als controlemiddel worden ingezet. Bij het schattend vermenigvuldigen is de strook of de getallenlijn als hulpmiddel te gebruiken - zie hoofdstuk II.

Bij het schattende rekenen komt de kwestie van het *afronden* te pas. Verschillende afrondingsregels, die vaak contextgebonden worden toegepast, passeren de revue. De kwesties van afkappen na een bepaalde decimale plaats en afronden op een ‘nabijgelegen’ kommagetal met een bepaald aantal decimalen achter de komma zijn nu onderwerp van onderzoek, beoefening en oefening. Bepaalde rekenmachines hebben een fix-knop voor afronden. Ook hier ligt een mogelijk onderzoeksprobleem. De aandacht komt meer en meer op het decimale positiesysteem te liggen: de positiekaart komt voort uit de metrieke kaart van lengtematen.

Speciaal bij het *rekenen met machten van tien*, zoals beschreven in hoofdstuk III, staat de meet- en positiekaart centraal bij de ‘verschuivingen’ die rond de komma plaatsvinden. Om te beginnen kan bij de winkelcontext van de prijsstickers worden aangesloten. Ook de maatwisselingen vormen een rijk toepassingsterrein voor deze problematiek.

Bij *procentrekenen* wordt uiteraard de relatie met het delen door 100 gelegd. Ook kan via procentrekenen de verbinding met de nul-komma-keerkwestie worden gelegd - waarover in Proeve deel 4 meer. Bij een en ander kan de rekenmachine een didactische functie vervullen.

Het omzetten van *breuken* in kommagetallen kan op verschillende manieren gebeuren: via maatwisseling, door de breuk als operator te laten fungeren op een 'ondermaat' van een macht van tien, of door een deling uit te voeren. Breuken en de ermee corresponderende kommagetallen worden op een getallenlijn geplaatst, onder en boven de streep. Aanvankelijk beperken we ons daarbij tot eenvoudige, passende breuken als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, ..., die benoemd genoteerd worden.

Enkele voorbeelden uit de Breukenbode (Buys (red.), 1996, pag. 121,124).

AFBEELDING 154

1 In de supermarkt.



In _____, want _____

1 Hoe maak je van $\frac{2}{5}$ een kommagetal? Maartje, Elsa en Kees doen het zo:



Hoe zou jij het doen? _____

2 Maak er zelf een kommagetal van. Gebruik je rekenmachientje als het nodig is.

$\frac{1}{4}$ _____ $\frac{3}{4}$ _____ $\frac{4}{5}$ _____ $1\frac{1}{5}$ _____ $\frac{2}{3}$ _____

$\frac{1}{6}$ _____ $\frac{5}{6}$ _____ $\frac{1}{8}$ _____ $\frac{3}{8}$ _____ $1\frac{4}{8}$ _____

In fase 2 worden de beschreven operaties ingebed in *contextopgaven* over ordenen, positioneren, springen, optellen, aftrekken, schattend vermenigvuldigen en delen, procentrekenen, vergelijken van breuken en kommagetallen, maatwisselen, komma plaatsen bij meetgetallen als referentiepunten, en formele spelletjes over verfijnen, zoals het nader-spel.

De activiteiten staan verspreid beschreven in alle hoofdstukken van dit boek, omdat ze alle kerndoelen raken. Ze kunnen onder meer in de vorm van (fictieve) krantenknipsels gepresenteerd worden.

2.3 FASE 3: FORMEEL, VAKMATIG HANDELEN (GROEP 8, BASISVORMING)

Over de laatste fase kunnen we kort zijn. De activiteiten van fase 1 en vooral die van fase 2 worden voortgezet en uitgebreid. Nieuw in de fase zijn: het inzichtelijk aanleren van de kommaregel betreffende cijferend vermenigvuldigen en de controleregel van het cijferende delen die daaruit kan worden afgeleid, het onderscheid tussen rekengetal en meetgetal wat betreft precisie en afronding, en de gevolgen van afronden voor optellen, aftrekken en vooral ook voor vermenigvuldigen en delen. De relatie met breuken wordt uitgebreid en verdiept. Deling van hele getallen, leidend naar repeterende cijferreeksen kan tot object van onderzoek gemaakt worden.

Cijferend opereren met kommagetallen verdwijnt naar de achtergrond. Gebruik van de rekenmachine wordt sterk aanbevolen. Het belang van schattend rekenen is sterk toegenomen. Opereren met kommagetallen komt sterker dan vroeger in het kader van gecijferdheid te staan.

De genoemde activiteiten staan hoofdzakelijk beschreven in de hoofdstukken IV en V.

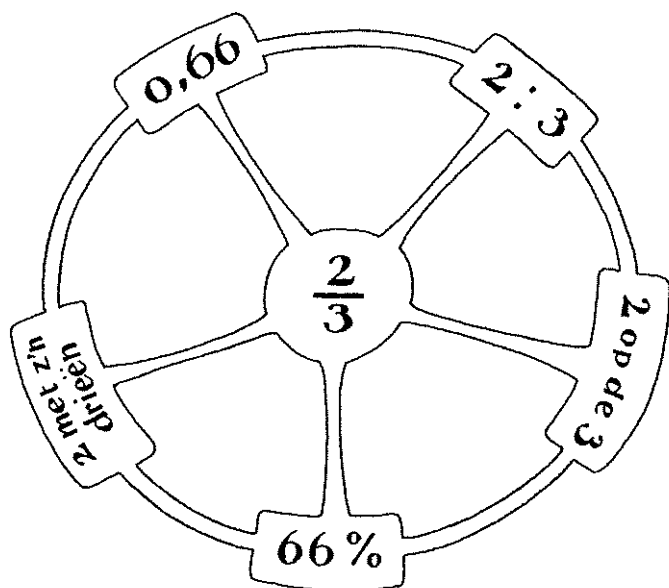
3 *Besluit*

Decimale breuken worden thans vaak aangeduid als kommagetallen, en 'decimal fractions' kortweg als 'fractions'. Deze terminologische verschuiving weerspiegelt een didactische verandering: breuken vormen nu niet meer de grondslag van kommagetallen. Dat beide onderwerpen toch in één Proeve-deel staan, komt doordat ze in de kerndoelen onder één noemer van 'gewone en decimale breuken' zijn gebracht.

Uit de voorgaande beschrijvingen blijkt echter hoezeer de twee leergangen zich onderscheiden. Toch is er één grote didactische overeenkomst aan te wijzen en dat is de verbinding met het meten en de getallenlijn die binnen beide onderwerpen wordt gelegd. Met als gevolg dat er ook gemeenschappelijke elementen in de opbouw van de leergang zitten, zoals in de volgorde van ordenen, positioneren, vergelijken, verschil bepalen, aftrekken, optellen, eenvoudig vermenigvuldigen via sprongen en zo verder - allemaal operaties die op de getallenlijn kunnen worden uitgebeeld. In meer algemene zin komen beide leergangen uiteraard ook overeen in tal van didactische vormkenmerken. 'Uiteraard' omdat ze vanuit een realistische onderwijsconceptie ontwikkeld zijn in de drie geschetste fasen van informeel, contextgebonden handelen, en semi-informeel, modelondersteund handelen, en formeel, vakmatig handelen. Maar aan deze fasering dient direct te worden toegevoegd dat ze niet scherp te maken is, omdat de overgangen geleidelijk verlopen en tevens sterk persoonsgebonden zijn. Wat inhoudt dat sommige leerlingen in de eerste onderwijsfase al vergaand formeel kunnen opereren en andere leerlingen in de derde onderwijsfase daartoe nog vrijwel niet in staat zijn.

Ten slotte moet nog worden opgemerkt dat de onderwijsinhoudelijke betekenis van breuken en kommagetallen recent nogal is gewijzigd, en wel in die zin dat de betekenis van de breuken is afgenomen en die van de kommagetallen toegenomen. Ook wordt thans grotere waarde toegekend aan de vervlechting van beide onderwerpen met procenten en verhoudingen. Pas als deze onderwerpen in het volgende Proeve-deel zijn beschreven, is de didactische cirkel rond.

AFBEELDING 155



(BUYS (RED.), 1956, PAG. 127)

Literatuur

Buys, K. (red.) , J. Bokhove, R. Keijzer, A. Lek, A. Noteboom en A. Treffers: *De Breukenbode* (Werkblad en handleiding), SLO / Freudenthal Instituut / Cito, Enschede, 1996.

Verma, S. (red.): *Curriculum and Standards Framework: Mathematics*, Board of Studies, Victoria, 1995.

Literatuur

- Bell, A. M. Swan & G. Taylor: Choice of operations in verbal problems with decimal numbers, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1981, pag. 299-420.
- Beusekom, N. van (red.): *Pluspunt*, Den Bosch, Malmberg, 1994.
- Bok, K.: Iets over het decimaalteken en de passende waarde der tiendelige breuken, in: *Weekblad voor het lager, middelbaar en gymasiaal onderwijs*, 12 (49), 1873.
- Bokhove, J. & J. Janssen: Periodiek Peilingsonderzoek in het basisonderwijs (4), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, 7(2), 1988, pag. 16-35.
- Bokhove, J.: Periodiek peilingsonderzoek van het onderwijsniveau: een spiegel voor het onderwijs, in: F. Goffree (red.), *Handboek voor de rekencoördinator*, SLO, Enschede, 1995, pag. 29-41.
- Bokhove, J.: *Gegevens over het rekenen met decimale breuken*, Cito, Arnhem, 1996 (manuscript).
- Bouman, P.J. & J.C. van Zelm: *Onderwijzersboekje VIII. Tiendelige Breuken*, Amsterdam, Versluys, z.j.
- Brink, J. van den: Rekenmachinespel. Steeds dichterbij elkaar, *Willem Bartjens*, 6(1), 1986, pag. 25-36.
- Brink, J. van den: Een serie experimentele werkbladen. W12-16 Zakrekenmachines, *Nieuwe Wiskrant*, 10(2), 1990, pag. 34-39.
- Brink, J. van den: Goede bedoelingen en voorlopige keuzes. W12-16 Zakrekenmachines, *Nieuwe Wiskrant*, 11(3), 1993, pag. 14-21.
- Brinkman, T. (red.): *Getal in Beeld*, 's-Hertogenbosch, Malmberg, 1975.
- Brogtrop, A.J.M.: Moeten de gewone breuken aan de tiendelige voorafgaan?, *School en Studie*, 1, 1879, pag. 279-282; en 2, 1880, pag. 108-114.
- Brown, C.A.: A Critical Analysis of Teaching Rational Number, in: T.P. Carpenter, E. Fennema & T.A. Romberg (eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research*, Erlbaum, Hillsdale, 1993, pag. 197-219.
- Brown, M.: Place Value and Decimals, in: K. Hart (ed.), *Children's Understanding of Mathematics 11-16*, London, Murray, 1981, pag. 48-66.
- Bruinsma, B. (red.): *Nieuw Rekenen*, Baarn, Bosch en Keuning, 1969.
- Buys, K. (red.), J. Bokhove, R. Keijzer, A. Lek, A. Noteboom en A. Treffers: *De Breukenbode* (Werkblad en handleiding), SLO / Freudenthal Instituut / Cito, Enschede, 1996.

- Bij de Leij, L. & G. Postma: *Overzicht van den cursus voor het schriftelijk rekenen*, Groningen, Wolters, 1923 (2e druk).
- Caparros, G. (red.): *La mathématique au CM1 et CM2*, Paris, Bordas, 1986.
- Carpenter, T.P. et al: Decimals: Results and implications from national assessment, *Arithmetic Teacher*, 28(8), 1981, pag. 34-38.
- Carpenter, T.P. et al: *Results from the second mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*, NCTM, Reston 1981.
- Corte, E. de, L. Verschaffel & V. van Coillie: Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solution of multiplication problems, *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 1988, pag. 197-216.
- Diels, P.A. & J. Nauta: *Fundamenteel Rekenen*, Groningen, Wolters, 1944 (6e druk).
- Douma, H.: *Rekenencursus* (2e stuk), Purmerend, Muusses, 1893.
- Ekenstam, A. & K. Greger: Some aspects of children's ability to solve mathematical problems, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1988, pag. 369-384.
- Evans, E. (red.): *The School Mathematics Project (Book C)*, Cambridge, University Press, 1971.
- Fischbein, E., M. Deri, M.S. Nello & M. Marino: The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 1985, pag. 3-17.
- Gelder, L. van: *Grondslagen van de Rekendidactiek*, Groningen, Wolters, 1964 (3e druk).
- Gerven, J.C. van: *Rekenen voor de basisschool*, 's-Hertogenbosch, Malmberg, 1970.
- Goffree, F.: *Wiskunde en Didactiek. Deel 2*, Groningen, Wolters-Noordhoff, 1992.
- Gravemeijer, K. (red.): *Rekenen en Wiskunde*, Baarn, Bekadidact, 1987.
- Grazer, G.: *Rekenmethodiek en moderne psychologie*, Tilburg, R.K. Jongensweeshuis, 1933.
- Green, B.: Nonconservation of multiplication and division involving decimals, *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 1987, pag. 37-45.
- Greer, B.: Nonconservation of Multiplication and Division involving Decimals, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 1987, pag. 3-17.
- Greer, B.: Nonconservation of Multiplication and Division: Analysis of a Symptom, *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 1988, pag. 281-298.
- Haack, J. & L. Lieffering: *De Grondslag*, Zeist, Dijkstra, z.j.
- Hiebert, J.: Decimal Fractions, *Arithmetic Teacher*, 34, 1987, pag. 22-24.
- Huitema, S. (red.): *Wereld in Getallen* (2e versie), 's-Hertogenbosch, Malmberg, 1994.

- Ifrah, G.: *From One to Zero. A Universal History of Numbers*, New York, Penguin Books, 1987.
- Jong, R.A. de & I. Verkruijsse: Kerndoelen en PPON rekenen-wiskunde, in C. van den Boer & M. Dolk (red.), *Rekenen in de bovenbouw van de basisschool*, Utrecht, Freudenthal Instituut, 1995, pag. 143-165.
- Kellinga, C.: *Kort Overzicht van de methode 'Noodig Rekenen'. Gevolgd door een kort overzicht van de geschiedenis van het rekenonderwijs in Nederland*, Tilburg, R.K. Jongensweeshuis, z.j.
- Kindt, M.: *Autowegen*, Utrecht, IOWO, 1978.
- Llewellyn, S. & A. Greer: *Mathematics. The basic skills*, Cheltenham, Thornes Publishers, 1983.
- McIntosh, A., B.J. Reys & R.E. Reys: A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense, *For the Learning of Mathematics*, 12(3), pag. 2-9.
- McLeish, J.: *Het getal. Van kleitafel tot computer*, Amsterdam, Amber, 1993.
- Molengraaf, G.W.J. van de (red): *De Wereld in Getallen*, 's-Hertogenbosch, Malmberg, z.j.
- Muijlwijk, R.: *Weet wat je meet. Vertellingen over maten en gewichten*, Haarlem, Aramith, 1995.
- Nelissen, J. (red): *Rekenwerk*, Gorinchem, De Ruiter, 1988.
- Noteboom, A.: *Een schat-opgave*, 1990 (manuscript).
- Nutsseminarium: *Proeve van een leerplan voor het basisonderwijs (B). Rekenen*, Groningen, Wolters, 1967.
- Padberg, F.: *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche - Dezimalbrüche*, Mannheim, Wissenschaftsverlag, 1989.
- Pelt, D. van: *Overzicht der methode*, Tiel, Mijs, 1912 (4e druk).
- Raadersma, H.: Moeten in de lagere school de gewone breuken aan de tiendeel-gevoel voorafgaan?, *School en Studie*, 2, 1880, pag. 101-108 en pag. 174-179.
- Reijnders, J.M. & J. Snijders: *Functioneel Rekenen*, Amsterdam, Versluys, 1966 (6e druk).
- Resnick, L.B. et al: Conceptual Bases of Arithmetic Errors: The Case of Decimal Fractions, *Journal for Research in Mathematical Education*, 20(1), 1989, pag. 8-28.
- Rombouts, S.: *Geef Acht. Handleiding voor derde en volgende leerjaren*, Tilburg, Zwijsen, 1959 (4e druk).
- Rijkens, R.R.: Eene opmerking over de gewone breuken als voorwerp van onderwijs, *De Schoolbode*, 1873, pag. 267-272.
- Scholte, H.: *Overzicht van de rekenmethode 'Hoeveel en Waarom?'*, Groningen, Wolters, 1913.

- Swan, M.: *The measuring and use of Decimals*, Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education, z.j.
- Sweers, W. (red.): *Operatoir Rekenen*, Rekenboek F1, Tilburg, Zwijsen, 1994.
- Sweers, W. (red.): *Operatoir Rekenen* (3e versie), Tilburg, Zwijsen, 1994.
- Treffers, A. & E. de Moor: *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en Cijferen*, Tilburg, Zwijsen, 1990.
- Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3A: Breuken*, Tilburg, Zwijsen, 1994.
- Treffers, A. & J. Menne: *Opinies over rekenen met afrondingen*, Utrecht, Freudenthal Instituut, 1995 (manuscript).
- Verma, S. (red.): *Curriculum and Standards Framework: Mathematics*, Board of Studies, Victoria, 1995.
- Versluys, J.: *De methodiek van het rekenen*, Amsterdam, Versluys, 1889.
- Vossen, H.M.M. (red): *Niveaucursus Rekenen*, 's-Hertogenbosch, Malmberg, z.j.
- Waerden, B.L. van der : *Ontwakende Wetenschap. Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde*, Groningen, Noordhoff, 1950.
- Zandvoort, R.H. (red): *Naar Zelfstandig Rekenen*, Groningen, Wolters Noordhoff 1970 (9e druk).
- Zanten, M. van: *Over Komma's en Getallen*, Utrecht, Vakgroep Onderwijskunde, 1994 (doctoraal scriptie).
- Zernike, C.F.A.: *Ons Rekenonderwijs. Handleiding*, Bussum, Akkeringa, 1915 (4e druk).
- Zijlstra, J.G.: *Het Rekenonderwijs in de Lagere School*, Zutphen, Thieme, 1901 (3e druk).