

A. Treffers L. Streefland E. de Moor

Proeve van een
nationaal programma
voor het
reken-wiskundeonderwijs
op de basisschool

Deel 3A
Breuken

Zwijsen

PROEVE VAN ...

A. TREFFERS | L. STREEFLAND | E. DE MOOR

Proeve van een
nationaal programma
voor het
reken-wiskundeonderwijs
op de basisschool

DEEL 3A | BREUKEN

ZWIJSEN

Deze publikatie is verschenen onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO).

Met dank voor commentaar op de eerste versie aan: Peter Ale, Joop Bokhove, Jan van den Brink, Kees Buys, Willem Faes, Frans van Galen, Aad Goddijn, Fred Goffree, Koeno Gravemeijer, Huub Jansen, Rob de Jong, Ronald Keijzer, Anita Lek, Henk Meijer, Jo Nelissen, Anneke Noteboom, Wil Oonk, Nanda Querelle, Martin van Recuwijk, Anton Roodhardt, Lieven Verschaffel, Anne Coos Vuurmans, Edu Wijdeveld, Monica Wijers, Annemiek Zwart-van de Laan. En met dank ook aan Ellen Hanepen (Freudenthal Instituut) voor de nauwgezette verwerking van de tekst en de plezierige samenwerking.

Vormgeving Ton Ellemers BNO

Tekeningen Marjon van den Broek

0 1 2 3 4 5 / 98 97 96 95 94

ISBN 90.276.3339.8

NUGI 724

© 1994 A. Treffers L. Streefland E. de Moor

Uitgeverij Zwijsen b.v. Tilburg

Voor België:

Uitgeverij Infoboek n.v. Meerhout

D/1994/1919/190

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16b Auteurswet 1912 j^o het Besluit van 20 juni 1974, Stb. 351, zoals gewijzigd bij het Besluit van 23 augustus 1985, Stb. 471, en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 882, 1180 AW Amstelveen). Voor het overnemen van gedeelten uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) dient men zich tot de uitgever te wenden.

Inhoudsopgave

	Voorwoord	7
1	Kern	9
	1 Proeve-didactiek gewone breuken	11
	2 Proeve-didactiek decimale breuken	24
	3 Kern van de didactiek	32
	4 Besluit	35
2	Historisch-didactische inleiding	41
	1 Meet-methode	44
	2 Deel-geheel methode	51
	3 Operator-methode	62
	4 Eerlijk verdelen	65
	5 Via verhoudingen	69
	6 Samenvatting nieuwe accenten	72
3	Betekenis verlenen (Doelstelling 1)	75
	1 Eerlijk verdelen	79
	2 Meten	85
	3 Deel-geheel	88
	4 Operator-aspect	93
	5 Verhoudingen	95
	6 Besluit	97
4	Plaatsen op getallenlijn (Doelstelling 2)	103
	1 Meten en redeneren	104
	2 Rijden en redeneren	113
	3 Formeel opereren	125
5	Opereren (Doelstelling 3)	129
	1 Deel-van-veel	134
	2 Vergelijken – aftrekken – optellen	139
	3 Vermenigvuldigen – delen	153
	4 Overzicht operaties	165

6	Samenhang (Doelstelling 4)	177
	1 Verhoudingen en breuken	180
	2 Procenten en breuken	188
	3 Kommagetallen en breuken	192
	4 Interne samenhang	194
	5 Twee puzzels tot besluit	196
7	Terugblik in tweespraak	205
	Literatuur	219

Voorwoord

De Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO) is verheugd een nieuw deel van de 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool' te mogen aankondigen.

Met het voorliggende deel 3-A hebben de auteurs van de 'Proeve ...' zich over één van de meest heikele onderwerpen van het rekenonderwijs uitgesproken. Het is een goede zaak dat er in dit boek duidelijk stelling is genomen ten aanzien van omvang en niveau van het breukenonderwijs op de basisschool. Tevens spreekt ons de gedachte aan het meer formele deel van het breukrekenen te laten plaatsvinden binnen de laatste jaren van de basisvorming. Het feit dat deze opvattingen stroken met de door de overheid geformuleerde kerndoelen, maakt de realisering hiervan alleen maar makkelijker.

De kern van dit boek wordt echter gevormd door een nieuwe opzet voor de breukendidactiek, waarbij voortgebouwd is op vroegere ontwikkelingen. Wij hopen dat dit boek een nieuwe impuls kan geven aan de verdere verbetering van het reken-wiskundeonderwijs doordat het de aandacht zal krijgen van opleiders, begeleiders, onderzoekers, onderwijsgeevenden en leerboeken-auteurs. Het zal vooral aan de laatsten zijn om aan de in dit boek geschetste globale leerlijn een praktische uitwerking te geven. Juist deze macro-didactische beschrijving maakt het mogelijk om de kernideeën van het realistische reken-wiskundeonderwijs naar verschillende opvattingen van curriculum-ontwikkeling uit te werken.

De NVORWO wil het platform zijn om de vernieuwende ontwikkelingen in ons land te bundelen en te verspreiden. Wij zijn daarom bijzonder verheugd met de publikatie van de 'Proeve ...' en wij willen deze boeken aanbevelen als een leidraad voor de verdere verbetering van het reken-wiskundeonderwijs.

J.M. Kraemer, voorzitter NVORWO 's-Gravenhage, april 1994.

I Kern

Inleiding kerndoelen

Breuken en kommagetallen hebben in de geschiedenis van het rekenonderwijs steeds om de voorrang of zelfs het alleenrecht gestreden. Honderd jaar geleden was dat al zo, en thans is het niet anders. Daarbij staat met name de positie van de gewone breuken ter discussie. Recent gebeurt dat mede gezien vanuit de plaats van de zakrekenmachine in het onderwijs.

Weerspiegelen de postzegels met de afbeeldingen van de jonge vorstinnen Juliana en Beatrix een verschuiving in de maatschappelijke betekenis van gewone breuken richting decimale breuken?

AFBEELDING I



Aan de officiële kerndoelen die onlangs zijn vastgesteld, valt zo'n verandering nog niet direct af te lezen. Bij alle doelen wordt steeds in één adem over 'breuken en decimale breuken' gesproken¹:

- 1 De leerlingen weten dat aan een breuk en een decimale breuk op verschillende manieren betekenis kan worden gegeven.
- 2 De leerlingen kunnen breuken en decimale breuken op een getallenlijn plaatsen.
- 3 De leerlingen kunnen in eenvoudige toepassings situaties, met gebruikmaking van modellen, eenvoudige breuken en decimale breuken vergelijken, optellen, aftrekken, delen en

vermenigvuldigen, en kunnen schattend rekenen door de uitkomst globaal te bepalen.

- 4 De leerlingen begrijpen het verband tussen verhoudingen, breuken en decimale breuken, en kunnen breuken in decimale breuken omzetten, ook met een rekenmachine (Uitleg, 1993).

Wel is in deze doelen, vergeleken met vroeger, een herziening in absolute zin zichtbaar. Er wordt nu namelijk met geen woord meer over formeel breukrekenen gerept, terwijl het opereren met kale, onbenoemde breuken vroeger juist de hoofdmoot van het onderwijs vormde. Daarin werd verreweg de meeste tijd aan de bewerkingen met gewone breuken besteed. Per saldo is er dus toch een relatieve verschuiving richting kommagetallen nu die formele operaties wegvallen.

Daar komt nog bij dat het formeel kunnen opereren met decimale breuken, vanwege de overeenkomst met de decimale gehele getallen, ook tot de doelstellingen van het basisonderwijs gerekend kan worden. En dat mag in ieder geval niet van het vermenigvuldigen en delen van gewone breuken worden gezegd. (Voor aftrekken en optellen ligt dat wat subtieler. Leerlingen moeten breuken op de getallenlijn kunnen plaatsen. Dus kunnen ordenen. Dat gaat echter alleen als ze breuken ook gelijknamig kunnen maken. Maar dan is verschil bepalen ook niet moeilijk voor veel leerlingen, en hoeft formeel optellen eveneens weinig problemen meer te geven ...)

Voorts is het arsenaal aan toepassingsproblemen van decimale breuken aanzienlijk groter dan dat van gewone breuken.

Dit alles, gevoegd bij het feit dat het gebruik van de zakrekenmachine steeds meer ingang vindt, maakt inderdaad dat de maatschappelijke betekenis van kommagetallen beduidend is toegenomen, zowel in absolute als relatieve zin.

Welke didactische implicaties de nieuwe kerndoelen hebben voor de leergangen van gewone en decimale breuken, zal in het volgende beknopt worden geschetst. Daarna vatten we de kern van de Proeve-didactiek samen. En we besluiten dit hoofdstuk met een vooruitblik op de boekdelen over breuken en kommagetallen.

1 *Proeve-didactiek gewone breuken*

De (nieuwe) kerndoelen mikken vooral op het verwerven van inzichtelijke kennis en vaardigheden.

Het ligt dan ook voor de hand dat we in het Nationale Programma aansluiting zoeken bij (vroegere) didactieken die uitdrukkelijk op begrip en inzicht aansturen. En dat zijn er heel wat (geweest), zo zal uit de didactisch-historische verkenning van het volgende hoofdstuk blijken.

Kenmerkend voor deze conceptuele leergangen is de centrale plaats die visuele modellen, zoals cirkel, rechthoek en strook, daarin krijgen toegewezen. In de Proeve-didactiek is dat ook het geval met vooral het strookmodel (waartoe we ook 'strookachtige' afbeeldingen van stokken, repen en lijnen willen rekenen).

Toch is het functionele gebruik van de strook niet het meest kenmerkende van de hier geschetste didactiek. Wezenlijker is de introductie van contexten welke als model voor het rekenen met breuken gaan fungeren. En dat zijn met name situaties die betrekking hebben op (ver-)delen en meten. Daarbij vervult het strookmodel de functie om de relaties en operaties uit de contexten zichtbaar te maken. We noemen deze tweeënheden van context en visualisering kort het *context-strook-model*.

We zullen nu de vier genoemde kerndoelen langslopen en nagaan welke didactische bijdrage dit context-strook-model kan leveren om die doelen bereikbaar te maken. Men kan zodoende een globale indruk van de kern van de Proeve-didactiek krijgen. Maar meer dan een impressie is het niet: we geven geen samenvatting van het breukendeel van dit boek, maar wel enkele voorbeelden om de centrale rol van het context-strook-model te illustreren.

1.1 DOELSTELLING I: TAAL EN BEGRIP

Het strookmodel kan helpen om breuksymbolen correct te leren interpreteren en te gebruiken. Dat gebeurt via eerlijk verdelen en meten – twee activiteiten die kinderen aanspreken en die fundamentele elementen van breuken zichtbaar en voorstelbaar maken. Eerlijk verdelen spreekt kinderen aan. Oneerlijk verdelen roept heftige emoties op – zie bijvoorbeeld de volgende situatie met Bert en Ernie²:



1



2



3

- 1 Bert verdeelt de dropveter: de twee stukken zijn niet even groot. Dat is niet eerlijk. Dus werkt hij het verschil weg.
- 2 Maar nu is het eerste stuk weer groter. Weer niet eerlijk. De eetprocedure wordt herhaald.
- 3 Zo eet Bert de hele dropveter op.

Toekijkende kleuters leven intens met de gedupeerde Ernie mee - wat oneerlijk. Heel jonge kinderen blijken al weet van eerlijk verdelen te hebben. Zou het niet eerlijker zijn om Bert eerst te laten verdelen en vervolgens Ernie als eerste een stuk te laten kiezen? Eerlijk verdelen moet starten met echt uitvoeren van het verdelen. Dan blijkt direct dat de verdeling op verschillende manieren gemaakt kan worden.³

Neem bijvoorbeeld de opgave:

Drie dropstaven verdelen met z'n vieren.

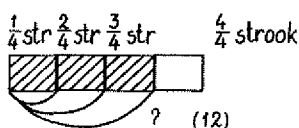
Dat kan door eerst twee staven met vieren te verdelen, of preciezer, één staaf met tweeën. En vervolgens de derde staaf in vieren. Maar ook is het mogelijk om iedere staaf in vieren te verdelen en elk kind steeds van zo'n staaf één stukje van een kwart te geven. Zo kan eerlijk verdelen benut worden om de *breukentaal* te helpen ontwikkelen. Maar uiteraard ook om de relatie tussen 'drie verdeeld met vieren'; $3 : 4$; en $\frac{3}{4}$ te leggen; plus het *verband* tussen de genoemde uitkomsten $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$; $3 \times \frac{1}{4}$; ...

De breukentaal kan eveneens via meten worden verhelderd. Een object kan bijvoorbeeld $2\frac{3}{4}$ strook lang zijn of $1\frac{2}{3}$ strook.

Daarbij wijst $\frac{3}{4}$ strook dan op een (standaard-)strook die (eerlijk) in 4 gelijke delen is verdeeld ('een $\bar{4}$ -strook') waarvan 3 stukken worden genomen, en $\frac{2}{3}$ strook op een $\bar{3}$ -strook (als naam of noemer) waarvan 2 delen worden afgeteld (teller). Met zulke stroken kan men dan respectievelijk $2\frac{3}{4}$ strook en $1\frac{2}{3}$ strook afpassen.

Breuken worden aanvankelijk benoemd genoteerd ($2\frac{2}{3}$ strook of $\frac{2}{3}$ reep of $\frac{1}{3}$ plak). Ze staan dan nog niet op zichzelf als pure (rationale) getallen, maar worden concreet, objectgebonden voorgesteld. In feite gebeurt dus met de breuken in het voortgezette rekenen hetzelfde als met de gehele getallen in het aanvankelijke rekenonderwijs waar eerst ook alleen maar met benoemde getallen wordt gewerkt.

AFBEELDING 3



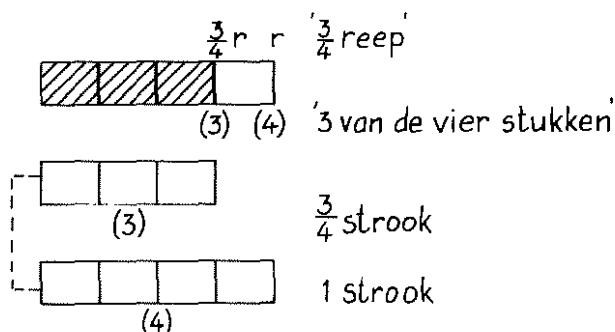
De 'objectbreuk' $\frac{3}{4}$ strook of $\frac{3}{4}$ reep kan, aldus voorgesteld, een *deel-geheel relatie* representeren: $\frac{3}{4}$ deel van het geheel, of 3 keer $\frac{1}{4}$ deel van het geheel.

Maar als het erom gaat het aantal stukjes van $\frac{3}{4}$ reep te berekenen indien een hele reep 12 stukjes bevat, dus om $\frac{3}{4}$ deel van 12 stukjes te bepalen, dan krijgt ' $\frac{3}{4}$ deel-van' de betekenis van *operator*. Een breukoperator is dus een breuk die via 'deel-van' (of abstracter via 'keer') op een hoeveelheid of maat werkt. En die bewerking verloopt in dit geval formeel als volgt: eerst wordt 12 gedeeld door 4 ($\frac{1}{4}$ deel van ...), en de uitkomst daarvan (3) wordt vervolgens vermenigvuldigd met 3 ($3 \times 3 = 9$). Informeel kan een en ander via herhaald halveren worden voltrokken. Er gebeurt dus eigenlijk hetzelfde als met de object-breuk $\frac{3}{4}$ strook (3 keer $\frac{1}{4}$ deel van). Alleen wordt bij de breukoperator over delen en vermenigvuldigen gesproken in plaats van verdelen en zoveel-keer-nemen. Maar de uitgevoerde of gedachte handelingen zijn dezelfde, zoals de dubbelschalige strook laat zien.

Men kan de strook ook gebruiken om de lengte van een object te meten en te beschrijven: 'de lengte is $2\frac{3}{4}$ strook'. De (gemengde) breuk verschijnt dan als *meetgetal* – er is gemeten met een $\frac{3}{4}$ -strook.

Daarnaast kan de breuk $\frac{3}{4}$ als '3 van de 4' worden geïnterpreteerd. Deze verbinding wordt als volgt met een (dubbelschalige) strook uitgebeeld op twee manieren.

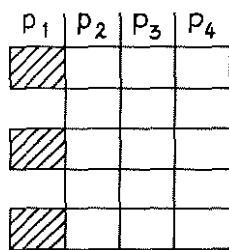
AFBEELDING 4



'3 staat tot 4' is de *verhouding* van de stroken, oftewel de ene strook is $\frac{3}{4}$ keer zo lang als de andere.

Ten slotte kan $\frac{3}{4}$ reep nog worden opgevat als het resultaat van een *deling* ' $3 : 4 = \frac{3}{4}$ ' i.c. de (eerlijke) verdeling van 3 repen over 4 personen – we gebruikten zoëven dit voorbeeld met dropstaven in verband met de ontwikkeling van de breukentaal.

AFBEELDING 5



Dat gaat op verschillende manieren, bijvoorbeeld door reep voor reep in vieren te delen, maar de uitkomst is uiteindelijk altijd $\frac{3}{4}$ reep per persoon.

Al met al blijkt dat stroken (en strookachtige modellen) geschikt zijn om breuken in verschillende verschijningsvormen en betekenissen uit te beelden, te weten:

- de breuk als deel-geheel relatie; - de breuk als verhouding;
- de breuk als operator; - de breuk als deling.
- de breuk als meetgetal;

De strook kan dus als hulpmiddel dienen om doelstelling 1 ‘... dat aan een breuk op verschillende manieren betekenis kan worden gegeven’ te bereiken.

Er is trouwens nog een betekenis van ‘breuk’ waaraan de strook kan bijdragen, namelijk die van een rationaal getal dat een bepaalde plaats op de getallenlijn bezet ...

1.2 DOELSTELLING 2: GETALLENLIJN

Het meten met een standaard-strook vormt een goede introductie voor het leren plaatsen van breuken op de getallenlijn. Als de leerlingen weten waar de breuken (ongeveer) ‘wonen’, kunnen ze namelijk op den duur ook beter overzien hoe de basisoperaties met breuken uitwerken - misschien aanvankelijk nog niet via precies rekenen, maar wel door globaal schattend te rekenen. En dat laatste wordt tegenwoordig algemeen als een essentieel onderdeel van gecijferdheid beschouwd.⁴

We stuiten hier echter op een ordeningsprobleem. Denkend aan meten kan in globale zin bijvoorbeeld wel de positie van $\frac{2}{3}$ (strook) en $\frac{3}{4}$ (strook) worden bepaald, maar dan hoeft nog niet duidelijk te zijn welke breuk het grootste is, laat staan hoeveel de breuken verschillen.

Zoals eerder aangegeven, lukt dat op beredeneerde wijze indien de leerlingen begrijpen dat op het adres van $\frac{2}{3}$ ook $\frac{8}{12}$ woont, en dat bij $\frac{3}{4}$ onder meer $\frac{9}{12}$ huist. Kortom, men moet de gelijkwaardigheid van breuken begrijpen, vaststellen en kunnen toepassen op geëigende problemen, zoals bij ordenen en verschil bepalen.

Kan begrip van equivalentie mede met behulp van meetstroken worden verworven? Kunnen kinderen bijvoorbeeld betrekkelijk eenvoudig leren inzien of beredeneren dat 2 stukken van de $\frac{2}{3}$ -

strook even lang zijn als 4 stukken van de $\overline{6}$ -strook, of 8 stukken van de $\overline{12}$ -strook, oftewel dat $\frac{2}{3}$ strook = $\frac{4}{6}$ strook = $\frac{8}{12}$ strook? En dat $\frac{3}{4}$ strook = $\frac{9}{12}$ strook?

Dat blijkt in deze gevallen niet zo eenvoudig in te zien. Maar men moet ook eenvoudiger beginnen natuurlijk, namelijk met stambreuken. Neem bijvoorbeeld $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$. Denkend aan eerlijk verdeelen is het niet zo moeilijk om vast te stellen dat $\frac{1}{3}$ strook langer is dan $\frac{1}{4}$ strook. En ook niet dat $\frac{2}{6}$ strook even lang is als $\frac{1}{3}$ strook: 'de stukjes zijn twee keer zo klein, dus moet ik er twee van nemen ...' In het geval van $\frac{3}{9}$ strook is dat veel lastiger.

Heel moeilijk wordt het om gelijkwaardigheid als middel te benutten om het verschil tussen $\frac{1}{3}$ strook en $\frac{1}{4}$ strook met een breuk te beschrijven. Als introductie daarop zou eerst de vraag gesteld kunnen worden met welk soort strook je zowel $\frac{1}{3}$ strook als $\frac{1}{4}$ strook kunt afpassen. Dus wat voor soort strook zowel eerlijk in drieën als in vieren kan worden verdeeld. Als dan de $\overline{12}$ -strook is gevonden, kan vervolgens het verschil tussen beide stukken worden bepaald. Alleen is de context waarin deze vragen worden gesteld niet erg natuurlijk en ook niet zo motiverend. Waarom zou je zo'n verschil direct in breuken willen uitdrukken? Daarom zoeken we een meer aansprekende situatie. Die zou gezocht kunnen worden in een 'structuur-wereldje' waarin een breukenbus over de getallenlijn rijdt-waarover later meer-of in een verdeel- en vergelijkingsprobleem zoals het volgende.

1.3 DOELSTELLING 3: OPEREREN

De opgave ' $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ ' wordt gesteld in de context van het breken van chocoladerepen. Er zijn twee didactische wegen om het antwoord te vinden met behulp van het reepmodel:

- (a) de indirecte methode met gehele getallen;
- (b) de directe methode met equivalente breuken.

AFBEELDING 6



Ad (a)⁵

Eline heeft nog $\frac{1}{4}$ reep over.

En Tom heeft van zo'n zelfde soort reep nog $\frac{1}{3}$ reep over.

Hoeveel stukjes zou die chocoladereep hebben?

Hoeveel heeft de één meer dan de ander?

Er moet een reep worden gezocht die zowel eerlijk in vieren als in drieën verdeeld kan worden. Een reep met 4 stukjes bijvoorbeeld voldoet niet, want dan zou vervolgens bij een verdeling in drieën (ten minste) nog een stukje moeten worden gebroken. Maar dat gaat bij chocolade moeilijk. Kortom, de context bewerkstelligt precies wat we graag willen, namelijk dat de kinderen naar een gemeenschappelijk veelvoud van 3 en 4 gaan zoeken. En dit speurwerk leidt ten slotte naar een reep van 12 stukjes, een $\overline{12}$ -reep (naar analogie van de $\overline{12}$ -strook).

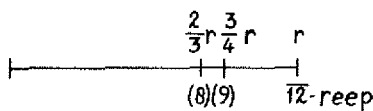
Daarvan heeft Eline nog 3 stukjes over. En Tom heeft nog 4 stukjes. Het verschil is 1 stukje van de $\overline{12}$ -reep. Men kan ook zeggen $\frac{1}{12}$ reep. Er wordt zodoende indirect via deel-van-twaalf met gehele getallen gerekend.

De werkwijze bij $\frac{3}{4}$ reep - $\frac{2}{3}$ reep verloopt op analoge wijze ...

Uit onderzoek blijkt dat de meeste kinderen in het begin met een antwoord in stukjes volstaan, maar desgevraagd later naar een antwoord in termen van (benoemde) breuken overstappen. In schema gezet, ziet de indirecte weg er als volgt uit:

————— AFBEELDING 7

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ reep} - \frac{2}{3} \text{ reep} = \frac{1}{12} \text{ reep} \leftarrow \\ \rightarrow 9 \text{ stukjes} \end{array} \right]$$



De leerlingen kunnen zo de breuken $\frac{2}{3}r$ en $\frac{3}{4}r$ ordenen en positioneren op de getallenlijn zonder expliciet van gelijkwaardigheid gebruik te maken. Men zou in deze opgaven dezelfde 'omweg' kunnen volgen indien de breuken benoemd worden als jaar:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \text{ jaar} - \frac{2}{3} \text{ jaar} &= 9 \text{ maanden} - 8 \text{ maanden} = \\ 1 \text{ maand} &= \frac{1}{12} \text{ jaar} \end{aligned}$$

Het gaat echter niet om dit specifieke voorbeeld, maar om de algemene strategie van het vinden van een passende 'ondermaat' waarmee de betreffende breuken als het ware in gehele getallen getransformeerd kunnen worden. Daartoe is de reep-context om verschillende redenen zeer geschikt: het aantal stukjes is variabel, ieder stukje is 'ondeelbaar', en breken en verdelen passen hier. Het optellen verloopt op analoge wijze.

AFBEELDING 8



Ad (b)

Men kan in dezelfde context ook direct op gelijkwaardige breuken aansturen.

Eline heeft $\frac{1}{4}$ reep. Geef eens op de reep met wikkel aan hoeveel dat (ongeveer) is.

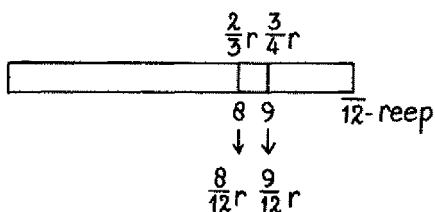
Tom zegt: 'Ik heb nog $\frac{2}{8}$ reep.' Geef dat ook eens globaal aan.

Nu introduceren we de term 'wikkelnaam' of 'schuilnaam' voor de globale aanduiding van Eline, en de term 'echte naam' voor Toms omschrijving waarin het precieze aantal stukjes van de reep in de breuknotatie wordt betrokken. Of anders gezegd: via onderzoek en discussie blijkt dat $\frac{2}{8}$ een andere naam is voor $\frac{1}{4}$, en omgekeerd. En ook $\frac{3}{4}$ reep en $\frac{6}{8}$ reep zijn gelijkwaardig.

Op deze wijze worden equivalente breuken gegenereerd. Nu kan de opgave ' $\frac{3}{4}$ reep - $\frac{2}{3}$ reep' langs directe weg via de 'echte' namen $\frac{9}{12} r$ en $\frac{8}{12} r$ worden opgelost. Mogelijkheden tot differentiatie in de oplossingsweg en in de beantwoording doen zich hier, in tegenstelling tot de indirecte methode, minder voor. De aanpak ligt op een hoger niveau van denken over en rekenen met breuken, en gaat in de trant van: 'met ongelijke stukken van de schuilnamen $\overline{4}$ -reep en $\overline{3}$ -reep kan ik niet rekenen, dus moet ik de echte namen opsporen.

In feite kan er een vloeiende overgang van de indirecte naar de directe methode worden gemaakt door geleidelijk aan de stukjes van de reep direct met een breuk te benoemen.

————— AFBEELDING 9

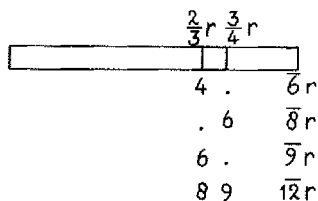


Eerst wordt $\frac{2}{3} r$ vervangen door '8 van de $\overline{12}$ -reep' waarvoor vervolgens direct $\frac{8}{12} r$ wordt geschreven. En $\frac{3}{4} r$ voert via '9 van de $\overline{12}$ -reep' direct naar $\frac{9}{12} r$.

Dus is $\frac{3}{4} r - \frac{2}{3} r = \frac{9}{12} r - \frac{8}{12} r = \frac{1}{12} r$.

Tussenschappen die naar de $\overline{12}$ -r voeren:

————— AFBEELDING 10



Men kan dat ook in een tabel noteren.

AFBEELDING II

$\frac{2}{3}$ r	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{8}{12}$	
$\frac{3}{4}$ r	$\frac{6}{8}$	$\frac{9}{12}$		

Verwoording: $\frac{2}{3}$ reep is even lang als '4 stukjes van de $\frac{4}{6}$ -reep' of '6 stukjes is van de $\frac{6}{9}$ -reep' of '8 stukjes van de $\frac{8}{12}$ -reep' (dat is $\frac{8}{12}$ reep); en zo leidt $\frac{3}{4}$ reep via '6 van de $\frac{6}{8}$ -reep' naar '9 van de $\frac{9}{12}$ -reep', oftewel $\frac{9}{12}$ reep.

Dus zowel de dubbele strook (reep) als de tabel ondersteunen de semi-directe methode van het werken met equivalente breuken.

We vatten samen.

De indirecte methode gaat als volgt:

- 1 gebruik maken van een passend model i.c. de strook;
- 2 zoeken naar een passende onderverdeling in stukjes;
- 3 berekenen van het aantal stukjes bij de betreffende breukdelen;
- 4 vergelijken van de aantallen stukjes;
- 5 bepalen van het verschil (of de som), hetzij in termen van stukjes of (later) van breuken, of ten slotte direct via equivalente breuken (zie de directe methode);
- 6 en zoals al eerder werd aangeduid: de benoemde breuken ook in de notatiewijze tot uitdrukking brengen en op de getallenlijn plaatsen.

De kennis die de leerlingen met deze methode opdoen, is in principe toepasbaar op het rekenen met onbenoemde breuken, maar ze moeten bij de kale breuken dan wel zelf aan de reepcontext denken. Doch in contextsituaties die niet zozeer naar 'hard' breken ($\frac{2}{3}$ reep en $\frac{3}{4}$ reep) als wel naar 'vloeiend' meten ($\frac{2}{3}$ maatbeker en $\frac{3}{4}$ maatbeker) verwijzen, zal de indirecte methode veel moeilijker toepasbaar zijn.

Met de directe methode lukt het makkelijker. Daarmee wordt namelijk direct op het opereren met gelijkwaardige breuken aangestuurd via omzetting van de wikkelnamen $\frac{3}{4}$ en $\frac{2}{3}$ tot de echte

namen $\frac{9}{12}$ en $\frac{8}{12}$ van reep-stukken.

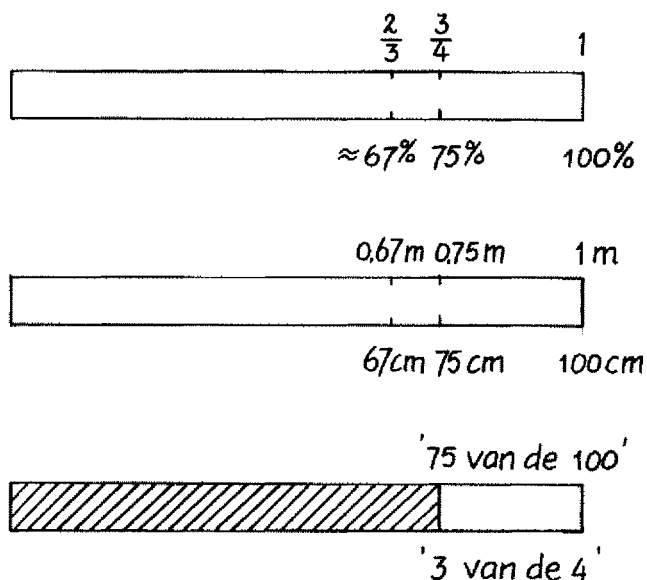
Tussen indirecte methode en directe methode staat een semi-directe aanpak waarin nog wel aan de stukjes wordt gedacht, doch deze worden niet als gehele getallen genoteerd maar direct als benoemde breuken opgeschreven.

Leerlingen kunnen vervolgens de *getallenlijn* met breukfamilies vullen, en die kennis benutten om breuken te ordenen en te positioneren. Maar ook kan de getallenlijn nu als model fungeren om toepassingsproblemen op te lossen: $\frac{2}{3}$ maatbeker en $\frac{3}{4}$ maatbeker bijvoorbeeld op de getallenlijn afbeelden en vervolgens het verschil (of de som) via gelijkwaardige breuken bepalen.

1.4 DOELSTELLING 4: SAMENHANG

Het verband tussen breuken en verhoudingen (waartoe uiteraard ook procenten behoren) kan via het strookmodel zichtbaar worden gemaakt.

AFBEELDING 12



De transformatiemethode houdt hiermee verband. De omzetting van '3/4 deel van ...' in '3 van de 4' biedt namelijk de mogelijkheid om naar verhoudingen over te stappen.

Zo kan bijvoorbeeld 3/4 als fractie in een bepaalde context via '3 van de 4' omgezet worden in '9 van de 12', en 2/3 via '2 van de 3' in '8 van de 12', wat een verschil oplevert van '1 van de 12', oftewel 1/12.

Een en ander kan worden genoteerd in een tabel.

AFBEELDING 13

3	6	9	
4	8	12	
2	4	6	8
3	6	9	12

Deze kan dienst doen bij het verdelen binnen een eenheid zoals we zojuist bij de reep (of strook) lieten zien, maar bijvoorbeeld ook bij eerlijk verdelen van meerdere objecten over een veelheid functionarissen: 3 repen eerlijk verdelen met 4 personen levert per persoon evenveel op als 6 repen met 8 personen – zoals in het bovenstaande.

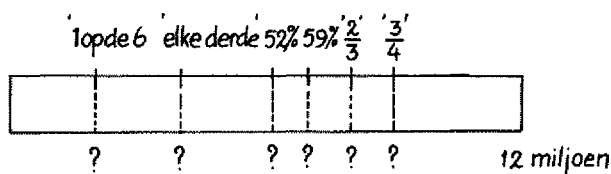
Hoezeer breuken, verhoudingen en procenten samenhangen, blijkt uit de kranteverslagen, zoals bijvoorbeeld van het rapport 'Opinies over Onderwijs' van het Sociaal en Cultureel Planbureau op 5 oktober 1993. Enkele fragmenten:

<p>Vorig jaar wilde één van de zes Nederlanders in het onderwijs snijden. In 1981 was elke derde Nederlander daartoe bereid.</p>	<p>In 1981 was nog bijna één op de drie bereid op onderwijs te bezuinigen. (NRC)</p>
<p style="text-align: right;">(Volkskrant)</p> <p>De meeste Nederlanders vinden dat ...</p>	<p>Opmerkelijk is verder dat in 1991 voor het eerst een meerderheid (52 procent) vond dat ... (NRC)</p>
<p style="text-align: right;">(Volkskrant)</p> <p>Uit het onderzoek blijkt verder dat twee derde van de bevolking vindt dat ...</p>	<p>De school moet vooral voorbereiden op de arbeidsmarkt, zegt drie kwart van de ondervraagden. In 1986 nog vond maar 59 procent dat. (NRC)</p>
<p style="text-align: right;">(Volkskrant)</p>	

Laten we deze uitspraken eens van toepassing verklaren op alle volwassen Nederlanders. Hoeveel zijn er dat? Na discussie wordt besloten tot twaalf miljoen. Op hoeveel Nederlanders hebben de onderscheiden uitspraken over breuken, procenten en verhoudingen betrekking? Welke andere formuleringen duiden op hetzelfde aantal?

De strook kan hier als intermediair fungeren.

AFBEELDING 14



Overigens komen kommagetallen in de beschrijvingen van het SCP-rapport niet voor. Als aanduidingen van deel-geheel relaties worden ze vrijwel nooit gebruikt.

1.5 SAMENVATTING

Kenmerkend voor de Proeve-didactiek van breuken ten aanzien van het gebruik van de strook is het volgende:

- 1 ze worden geïntroduceerd via meten en eerlijk verdelen;
- 2 benoemd genoteerd;
- 3 en (globaal) gepositioneerd op een strokenlijn of getallenlijn;
- 4 het rekenen met breuken i.c. het vergelijken, ordenen, situeren, verschil bepalen en optellen wordt ingebed in modelcontexten van meten met stroken en verdelen van repen;
- 5 en ondersteund door de (dubbelschalige) getallenlijn of strook;
- 6 waarbij equivalentie een kernfunctie vervult.

Via de getallenlijn wordt ook de relatie met kommagetallen, procenten en verhoudingen gelegd; speciaal het vergelijken, ordenen, situeren, verschil bepalen en optellen krijgen in deze samenhang een bredere betekenis, en nieuwe mogelijkheden voor het (globaal) opereren met breuken worden geopend.

Als hoofddoel van het breukenonderwijs wordt aangemerkt:

'Weten waar de breuken wonen.' Alle overige doelstellingen zijn voor een belangrijk deel via dit doel bereikbaar.

De formele doelen die worden nagestreefd zijn: deel-van-veel bepalen, breuken aftrekken en optellen, breuken vermenigvuldigen met en delen door gehele getallen. Deel-van-deel, vermenigvuldigen en delen van breuken, behoren niet tot de kerndoelen. Maar met de voornoemde formele doelen is wel de grondslag voor deze formele vaardigheden gelegd.

2 *Proeve-didactiek decimale breuken*

De vroeger veelvuldig (maar niet uitsluitend) gehanteerde mechanistische methodiek van de decimale breuken richt zich voornamelijk op correct komma-gedrag:

- plaats de komma's netjes onder elkaar (bij optellen en aftrekken);
- denk eerst de komma's weg, ga dan 'gewoon' rekenen met gehele getallen, en plaats daarna de komma in de uitkomst door het aantal cijfers achter de komma van beide factoren op te tellen (bij vermenigvuldigen);
- werk eerst de komma uit de deler weg ... (bij delen).

Zonder begrip van de compositie en de grootte van kommagetallen blijken de leerlingen toch al snel in staat om met die getallen te rekenen. Dit is uiteraard slechts mogelijk vanwege de sterke overeenkomst tussen de decimale breuken en de (decimale) gehele getallen. Maar uit de resultaten bij minder gangbare opgavetypen zoals bijvoorbeeld over schattend rekenen, blijkt hoezeer de leerlingen inzicht ontberen. Enkele voorbeelden:

Yvonne rekt uit op haar rekenmachine:

$$715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091$$

Bij het opschrijven van het antwoord is ze de komma vergeten.

Wat moet het antwoord zijn?

Uit PPOON-onderzoek (1987) blijkt dat ongeveer 15 procent hier de handige strategie van schattend rekenen met ronde getallen volgt.⁶

100 Oostenrijkse shilling kost f 16,35.

Angeline koopt in Oostenrijk iets voor 148 shilling.

Hoeveel is dat ongeveer in Nederlands geld? (Rond af op hele guldens.)

De goedscore hiervan is 15 procent.

Uit Amerikaans en Nederlands onderzoek blijkt dat de scores bij schattingen van vermenigvuldigingen in dezelfde orde van grootte liggen⁷:

Schat $0,92 \times 2,156$

Schat $789 \times 0,52$

Schat $2,9 \times 2,932$

Ongeveer de helft van de kinderen einde basisonderwijs kan kommagetallen met één of twee cijfers achter de komma correct op de getallenlijn plaatsen ...

Kortom, kommagetallen geven veel meer moeilijkheden dan men wellicht op grond van de overeenkomsten met gehele getallen zou verwachten.

De didactische oplossingen van een meer conceptuele dan procedurele benadering van kommagetallen zijn in het verleden grofweg in twee richtingen gezocht. De ene legt de nadruk vooral op de positiewaarden en het positiesysteem van decimale breuken als uitbreiding en verfijning van het positiesysteem van de gehele getallen – dit is de zogenoemde structuralistische aanpak. En de andere accentueert speciaal het meten en daarmee het globaal positioneren van kommagetallen op de getallenlijn – de zogenoemde empiristische methode.

De Proeve-leerlijn sluit aan bij de context van het meten en betreft de positiewaarden pas later uitdrukkelijk in het onderwijs.

We zullen ook nu weer de kerndoelen langslopen en nagaan welke didactische hulp de meetstrook voor het bereiken van die doelen kan geven.

2.1 DOELSTELLING 1: BEGRIP EN TAAL

De meetstrook is bij uitstek geschikt om de belangrijkste verschijningsvormen van kommagetallen zichtbaar te maken, te weten het meetaspect en de operatorfunctie. (De andere interpretaties van gewone breuken, te weten deel-geheel, verhouding en (eerlijke ver-)deling, worden vrijwel nooit met kommagetallen, maar veeleer met procenten in verband gebracht.)

In de realiteit dienen kommagetallen hoofdzakelijk om (samengestelde) grootheden als afstand, tijd, snelheid, prijs, gewicht en zo meer, getalmatig te beschrijven. Bij de berekeningen die daaraan te pas komen, duikt de decimale breuk uiteraard ook op in de keer-operatie, dus als breukoperator.

Een en ander kan gevisualiseerd worden met een (dubbele) getallenlijn, strook, of schaallijn.

Kommagetallen in de vorm van meetgetallen worden benoemd genoteerd: 1,25 m; f 4,98; 2.240 kg; 37,2 °C; f 2,98 per kg; 50,55 km per uur, ...

Gelet op dit alles, ligt het voor de hand om kommagetallen via meten te introduceren. Maar tegelijkertijd kan worden nagegaan waar men kommagetallen zoal aantreft en welke kennis de kinderen reeds bezitten.

Kommagetallen zijn er of worden gemaakt; ze worden aangetroffen of gegenereerd. Beide ingangen dienen didactisch te worden benut. Zowel de beschrijvingsvorm als de plaatsing op de getallenlijn zijn daarbij object van onderzoek.

2.2 DOELSTELLING 2: GETALLENLIJN

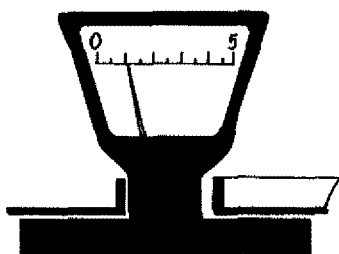
‘Waar wonen de decimale breuken?’ Als de leerlingen dat weten, kunnen ze beter overzien hoe de verschillende operaties uitpakken.

Nu blijkt het globaal plaatsen van kommagetallen op de getallenlijn – we zeiden het eerder – verre van eenvoudig te zijn. Indien leerlingen 7,64 en 7,9 moeten ordenen, zullen ze aanvankelijk geneigd zijn 7,64 als grootste aan te wijzen: 64 is immers groter dan 9! Er zijn ook leerlingen die juist zeggen dat 7,64 kleiner is omdat er meer cijfers achter de komma staan. De getallen voor en achter de komma worden als het ware gescheiden en zelfstandig opgevat.

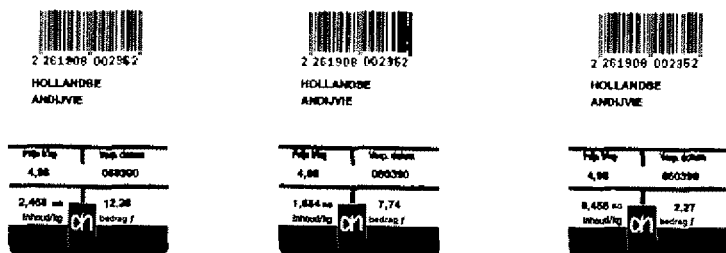
Via het meten van lengten kan het onderscheid en de overeenkomst tussen bijvoorbeeld 7,9 (m); 7,09 (m) en 7,90 (m) aan de orde worden gesteld, mede via het situeren van die getallen op de getallenlijn. Dat kan ook met verschillende gewichten.⁸

Geef aan waar de wijzer van de weegschaal ongeveer komt te staan bij de volgende gewichten van Hollandse andijvie.

AFBEELDING 15



AFBEELDING 16



En waar staat de wijzer bij 0,098 kg ongeveer? (Een heel lastige vraag.)

Is er verschil tussen 2,5 kg en 2,50 kg en 2,500 kg? (Op het subtiele onderscheid in maatverfijning dat hierin tot uitdrukking wordt gebracht, gaan we aanvankelijk nog niet in.)

Ook kan ter sprake komen, als vervolg hierop, dat het vergelijken van kommagetallen vereenvoudigd wordt door de betreffende

getallen met evenveel cijfers achter de komma te schrijven via het toevoegen van nullen, dus de getallen in dezelfde mate van verfijning te noteren. En dat dezelfde procedure gevolgd kan worden om kommagetallen goed geordend op de getallenlijn te plaatsen.

2.3 DOELSTELLING 3: OPEREREN

Klopt de prijs die op het eerste bonnetje staat ongeveer?

AFBEELDING 17

Prijs /kg	Verp. datum
4,98	060390
2,466 kg	12,28
Inhoud/kg	bedrag f
01	

Chantal denkt hardop:

'Je hebt bijna 2,5 kilo.

Dus dan moet je 2,5 keer 4,98 doen, want dat kost 1 kilo.'

Ze pakt de rekenmachine

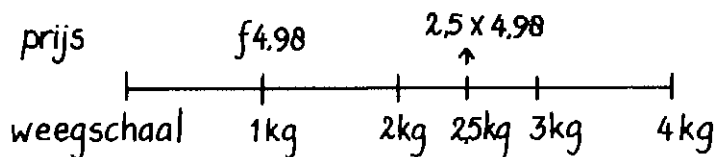
$$2,5 \times 4,98 = 12,45.$$

'Klopt.'

Chantal voert het ongeveer-rekenen weliswaar niet uit zoals bedoeld, maar haar redenering laat toch al een glimp van schattend rekenen zien.⁹

We kunnen haar rekenwijze afbeelden op een (tweeschalige) strook of een (dubbele) getallenlijn.

AFBEELDING 18



Bij het derde bonnetje gaat Chantal wat handiger te werk bij de vraag of de aangeven prijs ongeveer klopt.

AFBEELDING 19

Prijs /kg	Verp. datum
4,98	060390
0,456 kg	2,27
Inhoud/kg	bedrag f

Chantal: 'Je neemt 0,456 kilo dat is 456 gram.

Een pond is 500 gram. Dan kost het je bijna f 2,50.'

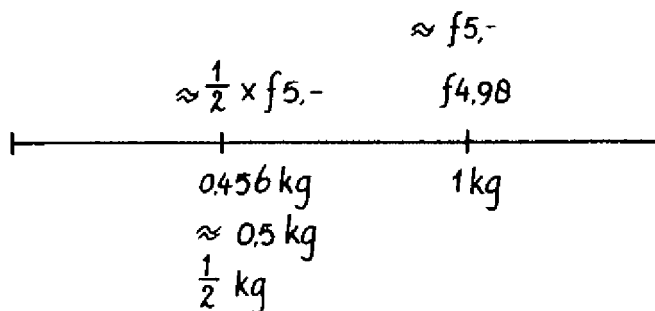
Waarom?

'Omdat 1 kilo kost f 4,98, dus bijna f 5,-. En 500 gram is een halve kilo en kost dus ... f 2,50.

Nou, 456 gram is bijna 500 gram en f 2,27 is bijna f 2,50.

Dus is het goed.'

AFBEELDING 20



Stefan twijfelt hoe hij bij dit bonnetje de zakrekenmachine moet gebruiken.

'Als je vermenigvuldigt, komt er vast te veel uit. Je moet niet vermenigvuldigen, maar delen.'

Vervolgens voert hij wel de goede deling uit van $2,27 : 4,98!$
(Maar niet $2,27 : 0,456$.)

Chantal vermenigvuldigt $0,456 \times 4,98$ ter controle.

De onzekerheid van Stefan komt voort uit de gedachte dat vermenigvuldigen altijd groter maakt en delen kleiner – veel voorkomende ideeën als gevolg van het veelvuldig vermenigvuldigen met gehele getallen.

De opgave-serie met de bonnetjes 2,5 keer, 1,5 keer, en ten slotte 0,5 keer, kan hier verhelderend werken. Immers bij 2,5 keer kun je eerst twee keer de vereiste stappen zetten en dan nog 0,5 oftewel $\frac{1}{2}$ keer. Idem bij 1,5 keer. En vervolgens wordt 0,5 of $\frac{1}{2}$ keer op zichzelf beschouwd.

Ook zal duidelijk zijn dat de leerlingen via schattingen zelf de komma in de precieze antwoorden moeten kunnen plaatsen. Of in ieder geval dienen dergelijke opgaven nu object van onderzoek te zijn:

Plaats de komma:

$$2,466 \times 4,98 = 1228068$$

$$1,554 \times 4,98 = 773892$$

$$0,456 \times 4,98 = 227088$$

Schattend rekenen wordt als ingang gebruikt om het correct plaatsen van de komma te leren. Zodoende vormt het een aanzet tot precies rekenen - eerst in een context en dan met kale getallen. Schatten is zo dus niet alleen een doel op zich, maar ook een didactisch hulpmiddel.

De kwestie van afronden en afkappen van grote kommagetallen op één of twee decimalen kan eveneens aan de hand van de bonnetjes-problemen aan de orde worden gesteld.

Ten slotte is het mogelijk om de relatie tussen vermenigvuldigen en delen via de werkwijzen van Chantal en Stefan nader te onderzoeken. Men kan het delen expliciet centraal plaatsen door van de drie gegevens op de bonnetjes (prijs per kg, gewicht, te betalen prijs) de eerste of de tweede weg te laten en te laten berekenen (schattenderwijs en precies rekenend met de rekenmachine). De moeilijke kwestie met een quotiënt kleiner dan 1, is via schattend vermenigvuldigen (en delen!) te benaderen.

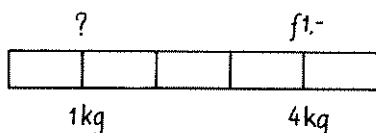
2.4 DOELSTELLING 4: SAMENHANG

Bij het omzetten van gewone breuken in decimale breuken moeten de leerlingen een breuk kunnen interpreteren als deling, die dan vervolgens (al dan niet met behulp van de zakrekenmachine) kan worden uitgerekend.

Neem bijvoorbeeld $\frac{1}{4}$, te lezen als '1 : 4', en in bonnetjes-taal te interpreteren als bijvoorbeeld:

4 kg kost 1 gulden. Hoeveel kost 1 kg?

AFBEELDING 21



Oftewel '1 gulden : 4'.

Antwoorden: 1 kwartje, 25 cent, $f 0,25$.

Door maatverfijning (1 gulden is 100 cent) kan 1 : 4 berekend worden via $100 : 4$, waarna de correct gezette komma het antwoord weer in de oorspronkelijke maat plaatst. Of abstracter geformuleerd: de uitkomst van 1 : 4 is honderd keer zo klein als die van $100 : 4$; dus moet men de uitkomst 25 daarna door honderd delen, wat kan door de komma twee plaatsen naar links te zetten ...

Uiteraard mag bij het delen van de gehele getallen waarin de breuken worden omgezet, de zakrekenmachine worden benut.

In het geval van $\frac{2}{3}$, om te zetten in $2 : 3$, levert de rekenmachine de uitkomst 0,6666666. En $\frac{3}{4}$ geeft 0,75. Gelijkaardige breuken en kommagetallen kunnen vervolgens op de getallenlijn worden geplaatst. Ook komt de kwestie van het afronden hierbij aan de orde.

Kortom, de zakrekenmachine hoeft niet slechts als rekenmaatje te fungeren, maar doet tevens dienst als didactisch middel om de

relaties tussen breuken, kommagetallen en procenten te verduidelijken. In dit boek zullen we daarvan later nog verschillende voorbeelden tegenkomen.

2.5 SAMENVATTING

Kenmerkend voor de Proeve-didactiek van kommagetallen ten aanzien van het gebruik van de meetstrook bij schattend vermenigvuldigen (en delen) is het volgende:

- 1 kommagetallen worden geïntroduceerd via het meten;
- 2 ze worden benoemd genoteerd als (samengestelde) grootheden;
- 3 en (globaal) gepositioneerd op stroken of (schaal)lijnen;
- 4 het rekenen met kommagetallen i.c. het schattend vermenigvuldigen (en delen) wordt ingebed in de reële, betekenisvolle en goed voorstelbare context van bijvoorbeeld winkelrekenen;
- 5 en ondersteund door de (dubbelschalige) getallenlijn of strook wat het denken betreft en door het gebruik van de rekenmachine wat het precieze uitrekenen en controleren aangaat;
- 6 zodoende fungeert het schattend rekenen niet slechts als doel op zich, maar ook als didactisch middel om het 'kommagedrag' in eerste aanzet te verduidelijken;
- 7 al met al vormt het opereren met (samengestelde) grootheden in realistische contextsituaties de concrete oriënteringsbasis voor het opereren met kale kommagetallen, waarbij de (dubbelschalige) strook als intermediair fungeert.

3 *Kern van de didactiek*

De didactische aanpak van het breukenonderwijs kan, zoals we gezien hebben, kernachtig worden geïllustreerd met het contextstrookmodel. Neem het geschetste voorbeeld van schattend vermenigvuldigen:

$0,740 \times 1,49$ is ongeveer 7 of 10 of 1 of 800 of 2.

Minder dan een kwart van de twaalfjarigen in Nederland en daarbuiten blijkt op basis van het gangbare rekenonderwijs – hoe

verscheiden dat ook is - in staat te zijn om een dergelijke schat-opgave goed beredeneerd op te lossen. Zo'n 60 procent meent dat vermenigvuldigen het vermenigvuldigen altijd groter maakt ...¹⁰ Plaatst men een dergelijke opgave echter in de geschetste winkelcontext, dan lukt het de meeste kinderen wel het juiste antwoord te kiezen, zo blijkt uit onderzoek.¹¹

AFBEELDING 22 - 23

A grid of 12 food items, each in a small square with a drawing and a label below it. The items are: aardappels, appels, bananen, bloemkool, chinese kool, druiven, mandarijnen, sperziebonen, sla, tomaten, wortels, and a logo with the word 'BON' in a square. A hand is pointing to the 'bananen' label.

1,49

2 261908 002352

BANANEN
LOS

Prijs /kg	Verp. datum
1,49	11.11.93
Inhoud/kg	Bedrag f
0,740	cn

De kern van de didactiek die in de 'Proeve' wordt gevolgd - en die min of meer aansluit bij de leergangen van de nieuwe realistische rekenmethoden - komt kortweg op het volgende neer:

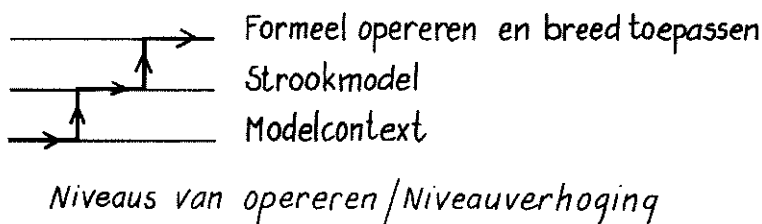
- 1 Start met een brede verkenning van het rekenen in zo'n modelcontext die betekenisvol is voor de kinderen.
- 2 Refereer bij kale rekenopgaven aan deze modelcontext, dus laat de kinderen bijvoorbeeld de betreffende kommagetallen interpreteren als meetgetallen (van prijs en gewicht) uit de winkelcontext van de bonnetjes.

Op deze wijze gaat de funderende context als model fungeren om berekeningen met pure kommagetallen te helpen oplossen. Denk daarbij aan de overeenkomst met het leren van de staartdeling, te interpreteren als een vervoersprobleem met passagiers en bussen, zoals geschetst in het inleidende hoofdstuk van Proeve I.¹²

Er is echter nog een kernpunt:

- 3 Gebruik een (dubbelschalige) strook of lijn om getallen en operaties ermee te visualiseren, en zodoende los te weken uit de modelcontext en breder toepasbaar te maken voor andere contextopgaven.

AFBEELDING 24



Indien deze realistische didactiek wordt gevolgd, zullen de informele, contextgebonden oplossingsmethoden via het contextstrookmodel geleidelijk aan overgaan in meer formele, algemeen toepasbare rekenwijzen.

Een zelfde beschouwing geldt voor de streepbreuken! Als modelcontexten gelden hier meten en verdelen. Zo kan bijvoorbeeld de context van het verdelen van chocoladerepen als model dienen voor het helpen oplossen van rekenopgaven van aftrekken en optellen. Maar pas indien de reep tot strook of lijn met vaste standplaatsen voor bepaalde (equivalente) breuken wordt geschematiseerd, beschikken de leerlingen over een model dat als intermediair voor het oplossen van andere contextopgaven kan dienen. We schreven hierover al eerder bij de bespreking van de verschillende methoden, waarin geleidelijk aan steeds meer naar het gebruik van equivalente breuken wordt toegewerkt.

Kortom, de algemene kern van de breukendidactiek wordt gevormd door de activiteiten aan en in verband met het context-strook-model. Vandaar ook dat we dit dubbelmodel als leidraad gebruikten om te demonstreren op welke wijze de kerndoelen het best bereikbaar worden – althans in realistische optiek.

4 *Besluit*

De opbouw van de volgende delen over breuken (deel IIIA) en kommagetallen (deel IIIB) komt in grote lijnen overeen met de onderverdeling die in dit hoofdstuk is gemaakt. Wat wil zeggen dat de indeling in hoofdstukken globaal door de vier kerndoelen is bepaald.

Aan de bespreking van de doelen gaat zowel bij breuken als bij kommagetallen een schets vooraf die de Proeve-didactiek in een historisch-didactisch kader plaatst.

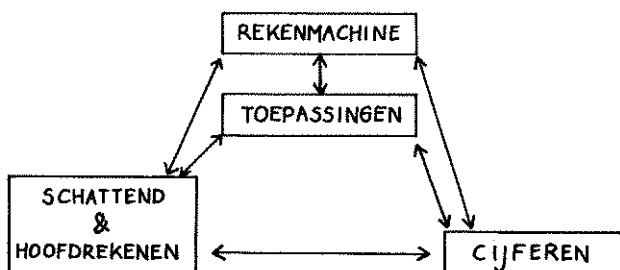
Tevens worden per doelstelling steeds relevante onderzoeksgegevens over de betreffende leerlingprestaties betrokken.

Ieder deel eindigt met een didactische dialoog, een terugblik in tweespraak. Daarin worden discutabele punten besproken, bepaalde onderdelen nader verklaard en zekere keuzen verantwoord.

Vooraf in de tekst van de kommagetallen zal het gebruik van de zakrekenmachine herhaaldelijk ter sprake komen. We sluiten ons wat deze activiteiten betreft aan op wat daarover eerder in Proeve II omtrent de gehele getallen werd opgemerkt.

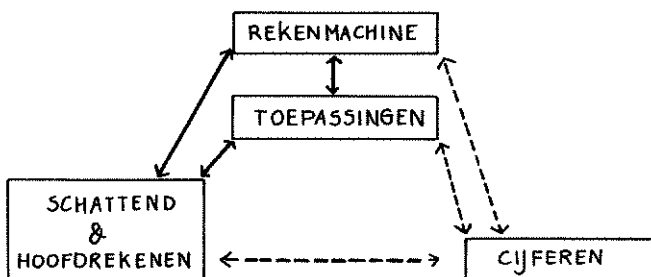
Over cijferen staat daar te lezen dat het feitelijke uitvoeren van de cijferprocedures steeds meer naar de rekenmachine verschuift. Daarnaast wordt gewag gemaakt van de didactische mogelijkheden die de rekenmachine biedt om de structuur van de getallen en de bewerkingen ermee beter te leren doorgronden. Daarbij is een belangrijke plaats toebedacht aan de kern van de basisvaardigheden, namelijk het hoofdrekenen en het schattend rekenen, vooral in samenhang met toepassingen. Een en ander vatten we samen in het volgende schema, waarin de pijlen het twee-richtingenverkeer tussen de betreffende onderdelen uitbeelden.

AFBEELDING 25



In het gebied van de decimale getallen hebben de pijlen een wat andere betekenis. Met name de betrekkingen met het cijferen komen hier lossier te staan (stippellijnen), terwijl de banden met de andere onderdelen juist zwaarder worden aangehaald (dikke lijnen).

AFBEELDING 26



We menen namelijk dat voor het technische rekenen met komma-getallen nauwelijks nog plaats in het basisschoolprogramma hoeft te worden ingeruimd: de zakrekenmachine kan daartoe dienst doen, nadat deze eerst nadrukkelijk op zijn rekenmogelijkheden is verkend.

Verder kan de rekenmachine nog worden ingezet ten behoeve van het bevorderen van getalinzicht, mede om de samenhang tussen gewone en decimale breuken te verhelderen en tussen breu-

ken, procenten en verhoudingen.

Ten slotte bespaart de rekenmachine veel tijdrovend rekenwerk, wat uiteraard een belangrijk argument is voor de invoering ervan in het onderwijs. Maar dat dient dan wel te gebeuren op de grondslag van een goede beheersing van de basisvaardigheden, en op een zodanige attitude dat de rekenmachine zinvol, doeltreffend, flexibel en met inzicht kan worden benut. Een en ander geldt voor de gehele getallen, maar zeker ook voor de kommagetallen, wat past in het streven naar gecijferdheid.

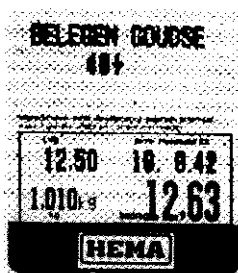
Dit alles vraagt om een conceptuele didactiek welke in scherp contrast staat met de mechanistisch getinte procedurele methodiek die zo veelvuldig in het vroegere rekenonderwijs werd gehanteerd, zowel voor gewone als decimale breuken.

In het voorgaande overzicht is een impressie gegeven van de didactiek die de Proeve volgt en die min of meer aansluit bij de leergangen van de moderne reken- en wiskundemethoden welke tot de zogenoemde realistische richting worden gerekend. Tot de kern van die realistische aanpak behoren model-contexten die:

- a...* aan het begin van (nieuwe) leergangen staan;
- ab..* aansprekend en betekenisvol zijn voor kinderen;
- aha.* inzichtbevorderend werken;
- haha* de sfeer van het rekenonderwijs verlevendigen (en soms zelfs opvrolijken).

Het afsluitende bonnetjes-voorbeeld is geknipt om een en ander te illustreren: let in deze modelcontext op 'is houdbaar tot'.

AFBEELDING 27



(Vrij Nederland, 11 december 1993)

Het zou natuurlijk nog treffender zijn als het etiket van *ah* afkomstig was geweest ...

Noten

- 1 We hebben de officiële kerndoelen 13, 14 en 15 die 'breuken' en 'decimale breuken' betreffen hier als doelstellingen 1, 2 en 3 genummerd. Voorts hebben we het officiële kerndoel 4 over schattend rekenen in doelstelling 3 opgenomen. En kerndoelstelling 12 over de relatie tussen verhoudingen en breuken is apart als doelstelling 4 opgevoerd. Ten slotte hebben we het onderdeel uit kerndoel 14 (ons kerndoel 2) over de rekenmachine naar onze doelstelling 4 verschoven. De totale inhoud is dezelfde gebleven, maar de doelen zijn 'didactisch' gerangschikt en een enkel onderdeel is verplaatst – dit alles om de beschrijving van de kerndidactiek via de bespreking van de kerndoelen beter toegankelijk te maken.
- 2 Dit voorbeeld is overgenomen uit: Streefland, L.: Davydov, Piaget en de breuken, *Pedagogische Studiën* 56, 1979, pag. 289-307.
- 3 De mogelijkheden van (onder meer) het eerlijk verdelen over het onderwijs in breuken is diepgaand onderzocht door: Streefland, L.: *Realistisch Breukenonderwijs* (dissertatie), Utrecht, OW & OC (thans Freudenthal Instituut), 1988.
- 4 Een interessant artikel over gecijferdheid: McIntosh, A., B.J. Reys en R.E. Reys: A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense, *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 1992, pag. 2-9.
- 5 Zie in dit verband: Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor: Breuken (3), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(4), 1992, pag. 22-29.
Lek, A.: Met repen begrepen, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 11(2), 1992, pag. 9-18.
Het idee en de term 'wikkeldnaam' is geïntroduceerd door J. Bokhove (Cito).
- 6 Zie voor een overzicht van de PPON-resultaten uit 1988 betreffende decimale breuken: Bokhove, J. en J. Janssen: Periodiek Peilingsonderzoek (4), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 7(2), 1988, pag. 16-35.
- 7 Overzicht van Amerikaans onderzoek dat vergelijkbaar is met het

- Nederlandse PPON-onderzoek (of omgekeerd) betreffende kommagetallen staat onder meer in: Carpenter, T.P. (et al.): Decimals: Results and implications from national assessment, *Arithmetic Teacher*, 28(8), 1981, pag. 34-37.
- Kouba, V.L. (et al.): Results of the fourth NAEP assessment of mathematics, *Arithmetic Teacher*, 35(8), 1988, pag. 14-19.
- 8 De ideeën om met bonnetjes te werken treft men aan in: Brink, J. van den: *Zakrekenmachines deel 2* (experimentele versie van een W12-16 pakket), Enschede, SLO, 1991.
- Keijzer, R. en M. van den Heuvel: *More or less* (experimenteel pakket van het Middle School Project), Utrecht, Freudenthal Instituut, 1992 (niet in de handel).
- Boer, C. van den: *Formules. Deel A: Rekenen met Pijlen*. (Educatief Centrum Rijnmond), Utrecht, Freudenthal Instituut, 1993.
- 9 De protocollen zijn afkomstig uit het werk van J. van den Brink (zie noot 8).
- 10 Resultaten uit de Verenigde Staten en Engeland over de misvatting dat vermenigvuldigen altijd groter maakt en delen kleiner: Brown, C.A. (et al.): Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assessment, *Mathematics Teacher*, 8(4), 1988, pag. 241-248.
- Brown, M.L.: Place value and decimals, in K.M. Hart (ed), *Children's Understanding of Mathematics: 11 - 16*, 1981, London, Murray, pag. 48-65.
- 11 Het onderzoek is verricht door Marc van Zanten in het kader van zijn doctoraalstudie onderwijskunde (Vakgroep Onderwijskunde Utrecht). In 1995 zal daarover in één van de vaktijdschriften een artikel verschijnen.
- 12 Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs: *Proeve van een Nationaal Programma voor het Reken- Wiskundeonderwijs op de Basisschool. Deel I: Overzicht Einddoelen*, Tilburg, Zwijsen, 1989.

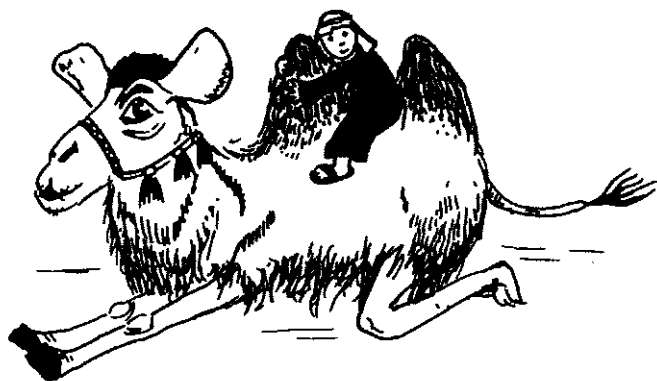
II Historisch-didactische inleiding

Introductie

'Een oude Arabier, Anwar, bepaalde voor zijn dood dat zijn oudste zoon de helft, de tweede zoon het vierde deel en de derde zoon het vijfde deel van zijn kamelen zou erven. Toen hij negentien kamelen naliet, konden zijn zoons het over de verdeling niet eens worden. De derwisj, die - per kameel langskomend - de onenigheid opmerkte, toonde zich hulpvaardig, steeg af en sprak: "Ik wil jullie mijn kameel lenen."

Ieder van de drie zonen nam nu van de twintig kamelen zijn deel. De derwisj besteeg wederom zijn lastdier en vervolgde zijn weg, de drie erfgenamen tevreden achterlatend. Aldus geschiedde de laatste wil van Anwar.'¹

AFBEELDING 28



Zelfs ervaren rekenaars tonen zich verrast wanneer ze voor de eerste keer met deze kleine rekengeschiedenis geconfronteerd worden. Toch kan vrijwel iedereen vanaf de bovenbouw van de

basisschool de berekeningen makkelijk volgen: $\frac{1}{2}$ deel van 20 is 10; $\frac{1}{4}$ deel is 5; $\frac{1}{5}$ deel 4; samen 19 kamelen; dus 1 kameel over en die wordt weer door de derwisj meegenomen.

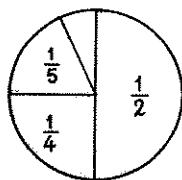
Eerst lukte de verdeling niet, maar later wel, ofschoon er eigenlijk niets nieuws gebeurde. Nog steeds betreft het een verdeling van 19 kamelen – althans zo lijkt het.

Hoe kan dit? – is de vraag die bij velen rijst.

Het antwoord zou kunnen zijn: ‘omdat $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$ – de erfenis is niet helemaal opgedeeld.’

Stel nu vervolgens eens een heel andere vraag, namelijk hoe de optelling van breuken in het onderwijs kan of moet worden aangeleerd. Tien tegen één dat het antwoord van ‘buitenstaanders’ zal luiden: ‘met een pannekoek, althans zo heb ik dat zelf geleerd.’

AFBEELDING 29



Al zal men bij nader inzien grif toegeven dat het antwoord $\frac{19}{20}$ volgens deze *deel-geheel methode* toch niet zo gemakkelijk valt te vinden. Slechts zelden echter zal de didactische vraag de simpele suggestie uitlokken om daarvoor de kamelensom zelf te gebruiken!

Toch kan dat: een kudde kamelen die zowel in tweeën, vieren en vijven verdeeld kan worden zal uit 20 exemplaren (of een 20-voud) moeten bestaan. Welnu, $\frac{1}{2}$ deel plus $\frac{1}{4}$ deel plus $\frac{1}{5}$ deel daarvan is 19 kamelen, oftewel $\frac{19}{20}$ kudde.

Algemeen: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$.

In de rekendidactiek heet deze aanpak *operator-methode*. De breuk wordt hierin als ‘deel van een hoeveelheid’ geïnterpreteerd. De werkwijze is sterk getalmatig gericht, in tegenstelling tot de

traditionele sectormethode die veel visueler is.

Daarnaast kunnen breuken ook als *verhoudingen* worden beschouwd: $\frac{1}{2}$ wordt dan geassocieerd met '1 van de 2', '2 van de 4', ... '10 van de 20'; en $\frac{1}{4}$ als '1 van de 4', '2 van de 8', ..., '5 van de 20'; en $\frac{1}{5}$ als '1 van de 5', '2 van de 10', ..., '4 van de 20'. Samen levert dat 19 van de 20 kamelen op, dus $\frac{19}{20}$ kudde.

Maar daarmee zijn de didactische mogelijkheden nog niet uitgeput. In de kamelensom treffen we namelijk de breuken al aan. Maar indien we vooral kijken hoe breuken ontstaan, dus didactisch een stap verder teruggaan, dan vinden we twee concrete bronnen van herkomst, namelijk bij *meten* en bij *eerlijk verdelen*, waarover in het eerste hoofdstuk is geschreven. Uiteraard wordt via deze twee activiteiten het optellen ook weer op een specifieke wijze aangepakt. Dat gebeurt bij meten door de betreffende breuken aan een passende meeteenheid te binden, en bij eerlijk verdelen door een opgaande verdelingssituatie te zoeken - eerder zijn daarvan voorbeelden met meet-stroken en verdeel-repen gegeven. En ten slotte is er de breuk als (rationaal) *getal* waarmee formeel gerekend kan worden.

Ziehier de vijf zuivere hoofdstromen in de breukendidactiek. Ieder accentueert één van de kernaspecten die gewoonlijk aan het breukbegrip worden toegekend.

Te weten die van:

- maat ($\frac{2}{5}$ als $\frac{2}{5}$ maateenheid);
 - deel-geheel relatie ($\frac{2}{5}$ als 2 van de 5 delen van een geheel);
 - operator ($\frac{2}{5}$ als $\frac{2}{5}$ deel van een veelheid);
 - deling ($\frac{2}{5}$ als uitkomst van de (ver-)deling $2 : 5$);
 - verhouding ($\frac{2}{5}$ als '2 op de 5', of '2 staat tot 5');
- (De breuk als rationaal getal waarmee volgens bepaalde regels gerekend wordt, is wel eindpunt maar geen startpunt voor de didactiek.)

In het volgende hoofdstuk zullen ze nader worden gekarakteriseerd en op hun waarde geschat. In de historisch-didactische analyse worden de *contouren van de hier voorgestane breukendidactiek* zichtbaar. Deze zal in de hoofdstukken die daarop volgen nader worden uitgewerkt.

1 Meet-methode

1.1 GANGBARE AANPAK

Meten vormt één van de bronnen waaraan breuken ontspringen. In de loop van de historie mondde dit meten voornamelijk uit in decimale breuken – dit om eenheid in het onoverzichtelijke rekenen met maten te scheppen. Naast decimale breuken werden gewoonlijk nog slechts eenvoudige echte breuken in maten gebruikt: halven, kwarten en hooguit achtsten.

Dit praktische gegeven is wellicht één van de redenen waarom in het onderwijs tot voor kort nauwelijks of geen meetactiviteiten werden verricht om breuken te genereren. Sterker nog: zelfs de getallenlijn met gemengde breuken (gehele getallen plus breuken) zal men vrijwel tevergeefs in de rekenboeken uit de eerste helft van deze eeuw zoeken.

Een andere algemene oorzaak van de afwezigheid van zo'n lijnschema ligt echter in de volstrekte onaanschouwelijkheid van het rekenonderwijs uit die tijd. Dat veranderde in Nederland pas omstreeks het midden van de eeuw, toen de denkpsychologische opvattingen van Kohnstamm, Prins en anderen hun weerslag op de didactiek en het vakdidactische onderzoek kregen. Met name het onderscheid in drie soorten denkklagen 'aanschouwelijk-schematisch-abstract' stimuleerde het gebruik van materialen en visuele schema's, waaronder de getallenlijn.

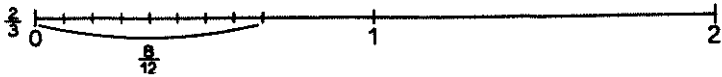
Zo schrijft Van Gelder in zijn *Grondslagen van de Reken-didactiek* (1959)²:

'Onze voorkeur voor de breukenlijn berust vooral op de wens de breuk een plaats in de getallenrij te kunnen geven.'

Een voorbeeld uit zijn boek:

AFBEELDING 30





Elk vierde deel in 3 gelijke delen verdelen.

Elk derde deel in 4 gelijke delen verdelen.

Dan wordt de eenheid verdeeld in gelijke stukjes (twaalf).

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}; \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Van Gelder geeft echter ook duidelijk aan dat de breukenlijn, als middel om bewerkingen zichtbaar te maken, aan bepaalde grenzen is gebonden en dat dit model uiteraard in gevallen als $\frac{6}{17} + \frac{9}{27}$, $2\frac{1}{3} \times \frac{5}{7}$ en $1\frac{3}{5} : 2\frac{1}{9}$ niet passend kan worden gebruikt - en dat hoeft natuurlijk ook niet.

Maar ook in het geval van $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ lijkt de getallenlijn nauwelijks een doelmatig rekenmodel, gelet op de toelichting die Van Gelder daarbij geeft. Je kent de regel als eerste en dan volgt visualisering. Maar waar komt die regel van het gelijknamig maken dan toch vandaan? - dat blijft hier volstrekt in het duister.

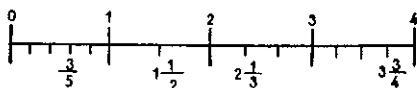
In een ander rekendidactiekboek uit die tijd, *Gefundeerd Hoofdrekenen* van Jansen, Reijnders en Snijders³, waarin de getallenlijn ook figureert, wordt dat gelijknamig maken zo gemotiveerd:

‘Evenmin als men vier boten en één vis kan optellen, telt men ongelijknamige breuken samen, omdat we met *ongelijke* delen te doen hebben. Voor het aftrekken geldt dat evenzo.’

Kortom, de getallenlijn is in de gangbare traditionele benadering niet verbonden met meten en fungeert ook nauwelijks als model voor het rekenen met breuken. Wel dient ze nadrukkelijk om gebroken getallen in de lijn van de gehele getallen te plaatsen en zodoende een globale ordening in dat getallengebied van gemengde getallen aan te brengen. Een voorbeeldopgave uit het didactiekboek *Gefundeerd Hoofdrekenen* illustreert dit doel heel helder⁴:

‘Teken op de getallenlijn (breukenlijn) $\frac{3}{5}$; $1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{3}$ en $3\frac{3}{4}$ aan en schrijf dat eronder.’

AFBEELDING 31



Deze belangrijke functie van de getallenlijn vindt men vanaf de jaren vijftig ook in enkele rekenmethoden terug, te beginnen in *Functioneel Rekenen* (1959) van Reijnders en Sniijders, en wat later in *Op Veilig Spoor* en *Nieuw Rekenen*.⁵

1.2 MEET-METHODE IN REALISTISCH PERSPECTIEF

Pas in de jaren zeventig werd door het werk van *Wiskobas* (via Streefland en anderen) en met de invoering van de eerste realistische reken-wiskundemethoden, het meet-aspect van breuken verder uitgebouwd. Een voorbeeld uit *Taltaal*⁶ (deel 7, p.11):

AFBEELDING 32

- 1 Knip 5 stroken die even lang zijn als de vadem van deze matroos.
De eerste strook vouw je in twee gelijke stukken;
de tweede strook in vier gelijke stukken;
de derde strook in drie gelijke stukken;
de vierde strook in zes gelijke stukken;
de vijfde strook laat je heel.

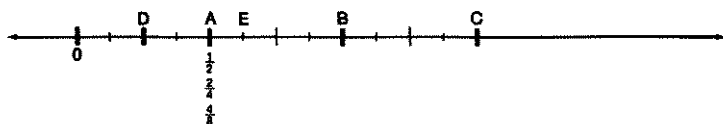


- 2 Ga met de vademstroken meten.
Hoeveel vadem is de lengte van de boot?
- 3 Teken op een vel papier lijnatukken van de volgende lengten:
a $2\frac{1}{2}$ vadem b $3\frac{1}{2}$ vadem c $\frac{1}{2}$ vadem d $\frac{3}{4}$ vadem
1 $\frac{1}{2}$ vadem 2 $\frac{1}{2}$ vadem 1 $\frac{1}{4}$ vadem $\frac{1}{4}$ vadem

De kwestie van gelijkwaardigheid van breuken wordt in *Taltaal* (onder meer) ook via stroken aan de orde gesteld. Later wordt de strook tot getallenlijn geschematiseerd en volgen opgaven als bijvoorbeeld (deel 8, p. 10):

AFBEELDING 33

Kijk naar de getallenlijn. Noem minstens 3 gelijkwaardige breuken voor:
a. punt B b. punt C c. punt D d. punt E



De operaties met breuken starten met ordenen en verschil bepalen. Gelijkwaardigheid en de getallenlijn spelen daarbij een belangrijke rol.

Maar in het werk van *Wiskobas* en ook in *Taltaal* wordt de noodzaak van gelijknamigheid niet door het meten met stroken uitgelokt. Hoewel in vergelijking met de traditionele rekenmethoden de mogelijkheden om breuken door meten te laten ontstaan hier natuurlijk wel veel beter worden benut.

Kan het gelijknamig maken van breuken door meten worden uitgelokt? Of anders gevraagd: kan meten toegang tot het rekenen met breuken verschaffen?

Om deze vragen te beantwoorden, keren we nog even terug naar de vadem-som van *Taltaal*, en stellen de volgende sleutelvraag:

De matroos heeft met één soort vademstrook twee voorwerpen gemeten; de ene is $2\frac{1}{2}$ vadem en de ander $2\frac{1}{3}$ vadem. Met welke vademstrook zou hij hebben gemeten?

Hoe ziet een standaard-strook eruit waarmee je zowel $\frac{1}{2}$ strook als $\frac{1}{3}$ strook kunt afpassen, dus die je zowel in tweeën als in drieën kunt verdelen?

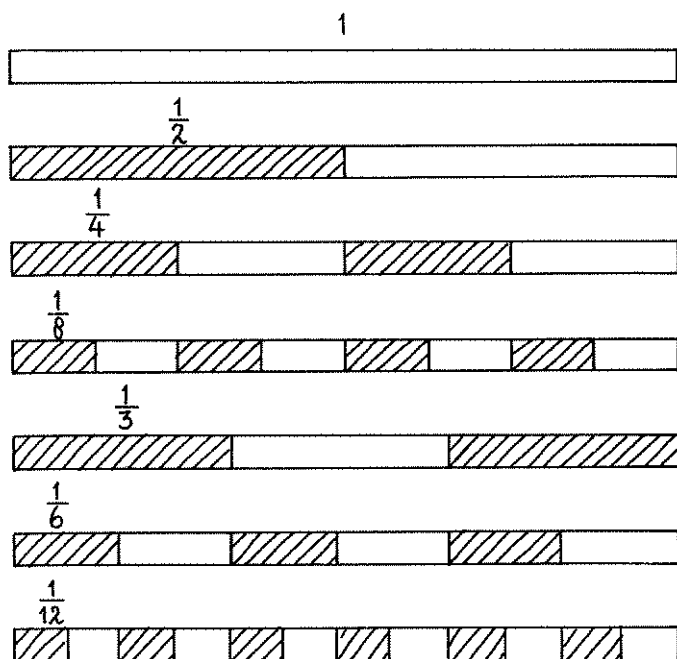
Als na meten en via redeneren de strook met 6 gelijke stukken is

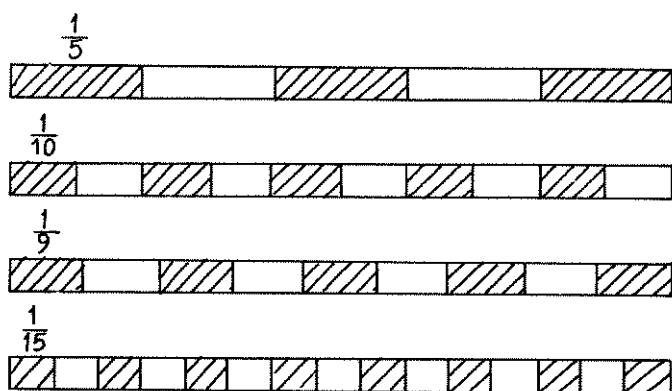
gevonden – en niet 5 zoals aanvankelijk werd gedacht – kunnen vervolgens de ordenings- en verschilvraag worden gesteld en beantwoord.

Ook nu zal men verschil in oplossingsniveau krijgen: het antwoord op de verschilvraag kan luiden '1 stukje verschil', of '1 stukje van de $\bar{6}$ -vademstrook', maar ook ' $\frac{1}{6}$ strook'.

Het zou wellicht aanbeveling verdienen om niet alleen met vouwstroken te werken, maar ook verschillende soorten gemakkelijk *knibbare breukenstokken* (met een elastieken stam) te gebruiken om het meten, het ontwikkelen van breukentaal, de gelijkwaardigheid, het zoeken naar gemeenschappelijke ondermaten en het plaatsen van gemengde getallen op de getallenlijn in de aangeduide zin te helpen bevorderen. Dergelijke stokken zijn, overigens zonder didactische gebruiksaanwijzingen, al vanaf omstreeks 1960 in de handel.⁷

————— AFBEELDING 34 - 35





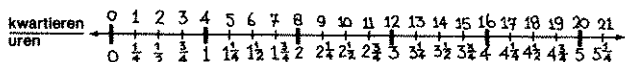
Set breukenstokken (knikbaar)

Kortom, er zijn dus mogelijkheden om via meten een aanzet tot begrip van gelijkwaardigheid te geven. Maar meer dan een aanzet is het ook niet, want de meeste kinderen zullen een meer natuurlijke en aansprekende context nodig hebben om dit uitermate belangrijke begrip te verwerven.

Ten slotte nog iets over een interessante versie van een getallenlijn die we in het vroege werk van *Wiskobas* en ook in *Taltaal* aantreffen.

Dat is namelijk de zogenaamde *dubbele getallenlijn*. Eén van de twee opgaven die op deze wijze worden uitgebeeld is de volgende klok-getallenlijn (uit *Taltaal*, deel 8, p 56).

AFBEELDING 36



Gebruik je klok-getallenlijn. We gaan rekenen in kwartieren en in uren.

Optellen

kwartieren	uren
$2 + 3 = \dots$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \dots$
$5 + \dots = \dots$	$1\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \dots$
$\dots + 7 = \dots$	$\frac{3}{4} + \dots = \dots$
$11 + 6 = \dots$	$\dots + \dots = \dots$
$17 + 5 = \dots$	$\dots + \dots = \dots$
$24 + 9 = \dots$	$\dots + \dots = \dots$
$36 + 4 = \dots$	$\dots + \dots = \dots$

b

Aftrekken

kwartieren	uren
$7 - 3 = \dots$	$1\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \dots$
$6 - \dots = \dots$	$1\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \dots$
$\dots - 4 = \dots$	$3\frac{1}{4} - \dots = \dots$
$20 - 3 = \dots$	$\dots - \dots = \dots$
$23 - 7 = \dots$	$\dots - \dots = \dots$
$18 - 11 = \dots$	$\dots - \dots = \dots$
$37 - 14 = \dots$	$\dots - \dots = \dots$

2 Deel-geheel methode

2.1 GANGBARE AANPAK

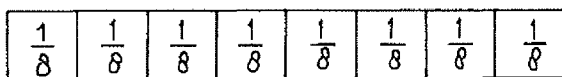
In de *Methodiek van het Rekenen* (1889)⁸ schonk Versluys – de grondlegger van de Nederlandse rekendidactiek – reeds uitvoerig aandacht aan de drie kernmodellen van de deel-geheel methode, te weten de cirkel, de rechthoek en de strook.

Vrijwel alle rekenmethoden in de eerste helft van de twintigste eeuw introduceerden de breuken met deze aanschouwelijke deel-geheel modellen.

Zelfs in ‘Bouman en Van Zelm’⁹ – de bekendste rekenmethode uit die tijd – werden breuken visueel voorgesteld. Hoewel dat volledig indruiste tegen hun didactische grondprincipe van ‘rekenkundige denkbaarheden in logische samenhang’ deden ze de zuinige suggestie¹⁰:

‘Ten behoeve van zwakke leerlingen is het allicht gewenscht, een of ander voorwerp, bijvoorbeeld een héél blad papier, in acht déélen te verdeelen. De leerlingen kunnen ook teekeningen maken als:’

AFBEELDING 38

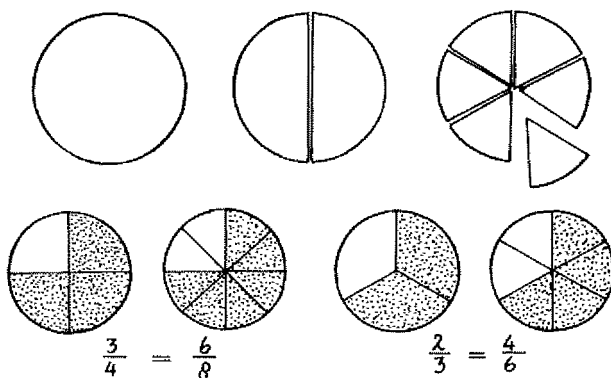


De deel-geheel methode vormde de belangrijkste toegang tot het breukenonderwijs in het grootste deel van de twintigste eeuw. Pas in de jaren zeventig heeft deze aloude benadering van breuken haar alleenrecht verloren – althans in Nederland, want internationaal bezien is die trend toch wat minder duidelijk waarneembaar.

Welke didactische mogelijkheden en beperkingen biedt de deel-geheel methode? Welke voordelen en nadelen zitten er aan het breukrekenen dat visueel op de cirkel, de rechthoek en de strook steunt?

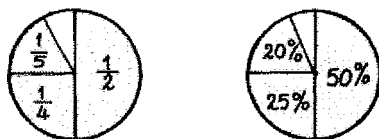
De *breukencirkel* speelde in het traditionele rekenonderwijs een dominante rol bij de introductie van het begrip breuk, maar ook bij het optellen en aftrekken van breuken. Gelijkwaardigheid van breuken vormt de verbindende schakel van een en ander.

AFBEELDING 39



Veel voorkomende breuken als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ ($\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{12}$) kunnen duidelijk met cirkelsectoren worden uitgebeeld. Een voordeel van de breukencirkel is dat in één deel het geheel van de cirkel zichtbaar blijft ook als dit geheel niet voorhanden is – een eigenschap die rechthoeken en stroken niet hebben. Of anders gezegd: de breuken krijgen door de cirkel een eigen identiteit, een duidelijk en uitgesproken signalement. Steeds is de voorstelling van een bepaald deel-van-geheel globaal dezelfde. En dat maakt het makkelijk om gewone breuken later met percentages en tiendelige breuken te verbinden die ook vaak met sectordiagrammen worden uitgebeeld.

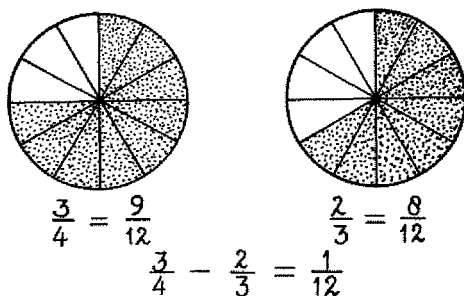
AFBEELDING 40



Tot zover de onmiskenbare voordelen van de breukencirkel. De voorstellingen van breuken met cirkelsectoren bieden echter weinig hulp bij het genereren van gelijkwaardige breuken en het opereren met ongelijknamige breuken.

Neem nog even het voorbeeld van $\frac{3}{4}$ en $\frac{2}{3}$.

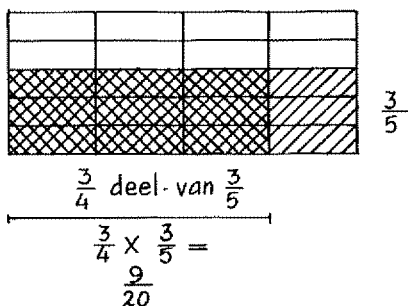
AFBEELDING 41



Als men aan de klok denkt, lukt het bovenstaande vrij makkelijk. Maar dan maakt men gebruik van breukoperatoren: $\frac{3}{4}$ deel-van 12, en $\frac{2}{3}$ deel-van 12. Zonder dat is de voorstelling onduidelijk. En bij ' $\frac{1}{5} - \frac{1}{8}$ ' bijvoorbeeld is zelfs zo'n zingeving niet meer toereikend. Het is dan ook niet verwonderlijk dat in het gangbare traditionele rekenonderwijs de breukencirkel al vrij snel naar de achtergrond verdween wanneer met breuken werd geopereerd. De zin van het gelijknamig maken bij het optellen en aftrekken werd met de breukencirkel gedemonstreerd. Ook liet men met die voorstelling aan de hand van eenvoudige gevallen zien hoe dat gelijknamig maken werkt. En daarmee was de weg naar het regelgeleide rekenen met cijfersymbolen gebaad en kon de sommenmakerij beginnen die meer dan honderd lessen in beslag zou nemen ...

Soms verscheen bij de introductie van het vermenigvuldigen van breuken een ander model: *de rechthoek*.

AFBEELDING 42



Vanaf 1960 werd dit rechthoekmodel in tal van 'NewMath'-methoden breed ingezet: bij de introductie van breuken, bij de gelijkwaardigheid van breuken, en bij het optellen en aftrekken en daarna, zoals gezegd, bij het vermenigvuldigen (en delen). Met name het sterke accent op equivalentieklassen past bij het rechthoekmodel:

$$\frac{1}{2} \rightarrow \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots\}$$

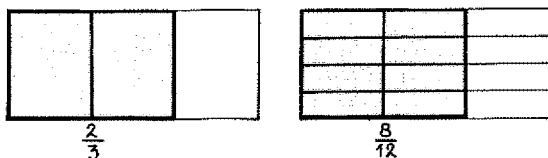
$$\frac{1}{5} \rightarrow \{\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{25}, \dots\}$$

En de toepassing ervan: $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10}$.

Laten we de didactische mogelijkheden van het rechthoekmodel eens op een rijtje zetten. Op zichzelf staande breuken kunnen niet, zoals bij de cirkel, direct geïdentificeerd worden: in één deel is het geheel niet zichtbaar begrepen. Maar dit hoeft uiteraard niet zo'n bezwaar te zijn, alleen moet men het geheel dan wel steeds in de breukvoorstelling betrekken.

Gelijkwaardigheid van breuken kan met de rechthoek worden uitgebeeld:

AFBEELDING 43



Nu iets over optellen en aftrekken, bijvoorbeeld $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ en $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$. Men kan daarvoor bovenstaande figuur gebruiken die verticaal in 3 delen is gesplitst en horizontaal in 4. Er ontstaat zo automatisch een verdeling in 12 delen. Daarvan neemt $\frac{2}{3}$ rechthoek er 8 in beslag en $\frac{1}{4}$ rechthoek 3 delen. Dat zijn er samen 11. Dus $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$, en op vergelijkbare wijze geredeneerd $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$. Een complicatie is echter dat de genoemde delen elkaar overlappen binnen die ene figuur waarin per traditie werd gewerkt. (En als men met twee rechthoeken werkte, wisten de leerlingen vaak niet of ze twaalfden of vierentwintigsten moesten nemen!) Dus moet er dubbel geteld worden.

In feite wordt optellen en aftrekken op deze manier dan net zo trucmatig ingericht als het regelgeleide rekenen met cijfersymbolen.

Al met al blijkt de rechthoek, afgezien van het uitbeelden van gelijkwaardigheid, nauwelijks nieuwe didactische mogelijkheden te bieden voor het aanvankelijke breukenonderwijs. En het is dus niet zo verwonderlijk dat het rechthoekmodel in Nederland, waar de New-Math nauwelijks ingang vond, op de achtergrond bleef.

In de deel-geheel benadering van breuken werd daarentegen in ons land wel gebruik gemaakt van *stroken*. En dan niet zozeer stroken om lengten te meten, als wel om deel-geheel relaties te visualiseren en te laten zien hoe eenheden of gehelen eerlijk verdeeld kunnen worden in halven, derden, kwarten en zo verder. Daarbij werd gebruik gemaakt van een breukenbord met staven of een tekening ervan (zie afbeelding 44).

Tal van relaties kunnen met behulp van dit breukenbord worden opgespoord, tenminste als de leerling $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, of $2 \times \frac{1}{3}$ kan interpreteren als $\frac{2}{3}$, en $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ of $3 \times \frac{1}{4}$ als $\frac{3}{4}$, enzovoort.

Om te beginnen de volgende equivalenties:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}; \text{ dus } \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}; \text{ dus } \frac{2}{4} = \dots; \frac{3}{4} = \dots$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}; \text{ dus } \frac{2}{5} = \dots; \frac{3}{5} = \dots; \frac{4}{5} = \dots$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12}; \frac{2}{6} = \dots; \frac{3}{6} = \dots; \frac{4}{6} = \dots; \frac{5}{6} = \dots$$

1											
$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

De noodzaak van gelijknamig maken bij optellen en aftrekken dringt zich ook op: je kunt aantallen ongelijke stukken niet zomaar bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken. Maar zet je bijvoorbeeld in de gevallen $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ en $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ de betreffende breuken om in twaalfden, dan kunnen die operaties wel worden uitgevoerd.

Kortom, zo'n strokenbord is een goed hulpmiddel om het formele breukrekenen te leren – wat het kerndoel was van het traditionele rekenprogramma. Eigenlijk wekt het verbazing dat dit didactische middel zo betrekkelijk weinig in de oude rekenmethoden werd benut, maar vrijwel alleen als additioneel materiaal op de markt kwam zonder een goede didactische handleiding. En dan te bedenken dat die stroken ook heel goed bij de meetbenadering passen! Maar dat was natuurlijk geen goed argument voor

de gangbare methoden van vroeger, want daarin kreeg meten geen plaats ...

2.2 DEEL-GEHEEL METHODE IN REALISTISCH PERSPECTIEF

Gelet op het voorgaande is het niet verwonderlijk dat het breukenbord in de nieuwe realistische methoden wel als didactisch middel wordt ingezet. De recente kerndoelen (1993) benadrukken het opereren in toepassingsituaties en niet zozeer het formele breukrekenen. De vraag is nu of daarmee in de toekomst de didactische positie van het breukenbord in het geding komt.

In het inleidende hoofdstuk is deze vraag al in globale zin beantwoord, namelijk dat (onder meer visuele) modellen een intermediaire functie vervullen, maar dat dit pas goed mogelijk is als ze eerst als modellen van contextsituaties fungeren. We spraken in dat verband over het *context-strook-model* bij het meten en bij het opdelen van chocoladerepen. Indien nu een dergelijke introductie van deel-geheel bij (standaard-)repen heeft plaatsgevonden, kan vervolgens het breukenbord aan een nader onderzoek worden onderworpen. Beter nog kan tijdens het werken met het reepmodel al met repen van 2 tot 12 stukjes worden gewerkt, waarbij allerlei kwesties over de relaties tussen de $\bar{2}$ -reep, de $\bar{3}$ -reep tot en met de $\bar{12}$ -reep aan de orde worden gesteld. Men kan daarbij dezelfde voorstellingen nemen als die van het breukenbord. Alleen zal men daarbij wat nadrukkelijker aandacht aan de breukentaal moeten besteden ($\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$).

Laten we nu nog eens vanuit realistisch perspectief naar de rechthoek en de cirkel kijken, en onderzoeken of die modellen inderdaad zulke beperkte didactische mogelijkheden hebben als uit de vroeger gangbare aanpak schijnt te spreken.

Wat om te beginnen bij de *rechthoek* in de traditionele aanpak opvalt, is dat de leerlingen de horizontale en verticale verdelingen bij het opereren met breuken in eerste instantie krijgen aangeleerd. Daarbij verwijzen de noemers bij de basisoperaties ($\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$; $\frac{3}{4} - \frac{1}{5}$) naar te maken opdelingen. Er is dus in feite maar één splitsmethode, leidend naar één opsplitsing (in het voorbeeld van $\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{5}$ een splitsing in twintigsten) waarmee vervolgens op specifieke manieren wordt geopereerd bij de verschillende basisbe-

werkingen. (Hoewel dit niet in alle gevallen de kortste methode bij optellen en aftrekken oplevert.)

De vraag is nu of die passende verdeling in twee richtingen niet door de leerlingen zelf gevonden kan worden, teneinde een probleem betreffende breuken op zinnvolle en inzichtelijke wijze te helpen oplossen.

In realistisch perspectief bezien, houdt deze vraag in dat naar een elementaire *contextsituatie* wordt gezocht die de betreffende betekenisvolle handelingen op een natuurlijke wijze uitlokt.

Een voorbeeld van zo'n modelsituatie is de volgende:

Hanneke heeft $\frac{3}{4}$ deel van een chocoladeplak afgebroken en opgegeten. En Ine heeft van zo'n zelfde soort plak $\frac{1}{5}$ deel gepakt en opgegeten.

Vouw of teken eens een plak waarvan je gemakkelijk zowel $\frac{3}{4}$ deel als $\frac{1}{5}$ deel kunt afbreken.

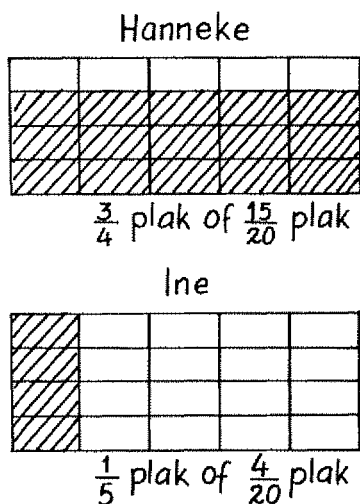
AFBEELDING 45



Hoe ziet de plak er onder de wikkel precies uit?

De verschillende mogelijkheden worden besproken en daarvan kiest het merendeel van de leerlingen in groep 6 of groep 7 na ampele overwegingen voor een plak van 4 bij 5 stukjes.

(Met de rechthoeken kunnen equivalenties betrekkelijk makkelijk worden gevonden.)



Nieuwe vragen rijzen:

Hoeveel heeft Hanneke meer op dan Ine?
 Hoeveel hebben ze samen opgeten?

De antwoorden kunnen op twee manieren worden gegeven, namelijk in stukjes of in termen van breuken. Indien men op een gegeven moment een breuk als antwoord wenst, kan dit nadrukkelijk worden aangegeven door naar een *benoemde breuk* te vragen:

Verskil .../... plak; $\frac{3}{4}$ plak $- \frac{1}{5}$ plak $= \frac{15}{20}$ plak $- \frac{4}{20}$ plak
 $= \frac{11}{20}$ plak (of via 11 stukjes).

Samen .../... plak; $\frac{3}{4}$ plak $+ \frac{1}{5}$ plak $= \frac{15}{20}$ plak $+ \frac{4}{20}$ plak
 $= \frac{19}{20}$ plak (of via 19 stukjes).

Merk op dat in dit voorbeeld van een vergelijkingssituatie met *twee rechthoeken* (plakken) wordt gewerkt. Bij het bepalen van de delen wordt zodoende overlap vermeden.

In feite worden de opgaven ' $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ ' en ' $\frac{3}{4} - \frac{1}{5}$ ' geïnterpreteerd als concrete, benoemde breuken ' $\frac{3}{4}$ plak + $\frac{1}{5}$ plak' en ' $\frac{3}{4}$ plak - $\frac{1}{5}$ plak' en op twee plakken betrokken.

De sleutel tot de nieuwe aanpak ligt in feite bij de vraag hoe de plak er, gelet op bepaalde gegevens, precies uitziet. Dat de chocoladecontext voldoet, komt doordat één stukje niet of moeilijk nog verder in precies bepaalde delen kan worden doorgebroken, en ook omdat de plak een verborgen of 'ingewikkelde' roosterstructuur bevat die ont-dekt of ont-wikkeld moet worden.

In een didactische opbouw dient het zojuist geschetste overigens uitgebreid te worden voorafgegaan door gevarieerde vouwactiviteiten met bijvoorbeeld A4-blaadjes.

Men zou een zelfde context voor de cirkel kunnen schetsen, bijvoorbeeld met een voorgesneden taart.

Op een gegeven moment was $\frac{3}{4}$ van de taart over. En nu is nog $\frac{2}{3}$ deel over. Hoeveel puntstukjes zou die taart bevatten? Hoe groot is het verschil tussen $\frac{3}{4}$ taart en $\frac{2}{3}$ taart?

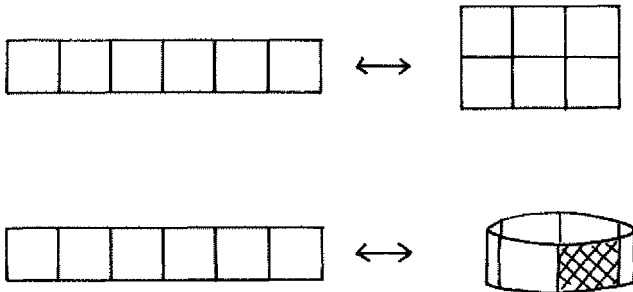
We laten de verdere uitwerking maar rusten: de bedoeling van het context-model plus passende visualisering is nu wel voldoende geschetst.

Ten slotte nog een opmerking over het relatieve gewicht van de drie gangbare modellen. Welke is het belangrijkste?

Uit het voorgaande is wel duidelijk dat in de Proeve-didactiek de strook aanvankelijk als zodanig wordt aangemerkt. De strook is niet alleen een belangrijk meet-model, maar is ook als deel-geheel model goed inzetbaar (en ook bruikbaar voor andere aspecten van breuken, zoals nog zal blijken). Voorts kan men ingedeelde stroken verknippen tot rechthoeken en rondbuigen tot cirkels waarop de strookrichting op de omtrek verschijnt.¹¹

Kortom, indien men met de strook start, kan men van daaruit de reep, de plak en de cirkel als modellen in het onderwijs betrekken binnen passende contexten.

AFBEELDING 47



Overigens kan ook al van meet af aan op symbolisch niveau worden gewerkt, en wel in het bijzonder door de leerlingen *eigen producties* te laten maken.¹²

Aanvankelijk kan dat bijvoorbeeld aan de hand van het breukenbord gebeuren. De leerlingen worden gestimuleerd om gebruik te maken van wikkelnamen of schuilnamen.

Enkele voorbeelden:

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}. \quad \text{Omgekeerd: } 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}. \quad \text{Omgekeerd: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ = \frac{2}{6} + \frac{1}{3}. \quad \text{Omgekeerd: } \frac{2}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Indien leerlingen later met opgaven als $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ in aanraking komen, zien ze wellicht eerder dat er wikkelnamen of schuilnamen gebruikt zijn en dat ze op zoek moeten naar de echte namen i.c. equivalente breuken.

Algemeen geldt dat in de gangbare deel-geheel methoden te snel op het formele opereren met breuken wordt aangestuurd. Vanuit realistisch zicht verdient het de voorkeur om via het meten eerst de breukentaal te ontwikkelen en breuken te leren positioneren op de getallenlijn. Dat is echter op wat langere termijn pas goed

mogelijk indien de kinderen goed kunnen omgaan met de breuk als deel-van-veel.

3 Operator-methode

3.1 GANGBARE AANPAK

In de deel-geheel methode worden breuken objectgebonden ingevoerd als delen van cirkels, rechthoeken, stroken, lijnstukken en zo meer. Breukoperatoren als breukdelen van hoeveelheden of maten ($\frac{3}{4}$ deel van 20) verschijnen in de traditionele leergang echter pas veel later. Bij de operator-methode daarentegen worden breukoperatoren juist vooropgesteld. Deze numeriek gerichte introductie van het onderwijs in breuken maakte in de jaren zestig en zeventig grote opgang, geïnspireerd op het didactische werk van onder meer Karaschewski, Dienes en Braunfeld, die de operator-methode ieder op eigen wijze gestalte gaven.¹³

In Nederland propageerde Woostenenk medio jaren zestig in zijn *Rekendidactiek*¹⁴ de operator-opvatting:

‘Het kenmerkende van de nu voorgestelde inleiding is, dat we de breuken niet op zichzelf beschouwen, maar voorlopig alleen in verbinding met een hoeveelheid.’

Die verbinding bestaat uit de deel-van-veel betrekking tussen breuk en geheel getal, bijvoorbeeld in $\frac{1}{5}$ deel van 20’.

Het optellen en aftrekken is in deze methode aanvankelijk gebaseerd op het vinden van een passende hoeveelheid waarop de breukoperatoren werken.

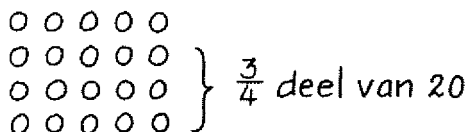
Dat gaat bijvoorbeeld bij $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ en $\frac{3}{4} - \frac{1}{5}$ als volgt: zoek een hoeveelheid die gemakkelijk in vieren en vijven kan worden verdeeld, en neem daarvan vervolgens $\frac{3}{4}$ deel en $\frac{1}{5}$ deel.

Antwoord: het aantal is 20 objecten: nu is $\frac{3}{4}$ deel van 20 gelijk aan 15; $\frac{1}{5}$ deel van 20 is 4; som 19, verschil 11, dus $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$ en $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$.

De overeenkomst met de eerder beschreven rechthoekmethode, reepmethode en meetmethode is frappant. Alleen is de operator-methode numeriek gebaseerd op het verdelen van veelheden, terwijl de deel-geheel methode en meetmethode op het verdelen van

eenheden mikken. Toch kan men de gedachtengang ook wel met een stippenveld uitbeelden, en dan is de overeenstemming met in het bijzonder de rechthoekmethode nog treffender. Een veld dat gemakkelijk in vieren en vijven verdeeld kan worden heeft een rechthoekig patroon van 4 bij 5.

AFBEELDING 48



In de operator-aanpak van Woostenenk werd de breukoperator consequent op hoeveelheden toegepast. En toen vervolgens later in de leergang de stippenvelden voor de rechthoeken en de repen werden ingewisseld bij de overgang van breukoperatoren naar echte breuken, konden de leerlingen constateren dat de operaties hier in feite op dezelfde wijze verlopen. Dus kan de abstractie van breukoperator naar breuk dan gemakkelijk worden voltrokken – aldus deze operator-opvatting.

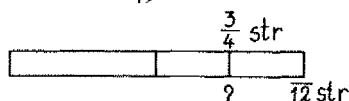
In tegenstelling tot elders heeft de operator-opvatting hier te lande nauwelijks weerklank gevonden. Slechts enkele nieuwe methoden uit het begin van de jaren zeventig voerden de breuken operatorisch in. Maar hun verspreidingsgebied was klein.

De weerstand tegen deze methode is als volgt samen te vatten: er is aanvankelijk weinig oog voor de breuk als zelfstandig 'gebroken' getal met een vaste plaats op de getallenlijn, tevens biedt de operator-methode nauwelijks zicht op hoe breuken ontstaan en hoe ze in het leven van alledag functioneren – aldus de opposenten van de operatormethode. Het is de methode van het vooronderstelde inzicht.

Toch heeft de breukoperator ook didactische voordelen, zoals we in het voorgaande al constateerden: het vlot kunnen berekenen van breuk-delen van een eenheid of veelheid ondersteunt de visualisering bij de verschillende operaties. Bij de stroken wordt het

bepalen van deel-van-veel verbonden met het meten en schatten, en dat maakt het werken met breukoperatoren makkelijker dan het opereren op 'losse' hoeveelheden. Anders gezegd: de opgave 'bepaal $\frac{3}{4}$ van de $\overline{12}$ strook' is makkelijker te berekenen en te tekenen dan de opgave 'bepaal $\frac{3}{4}$ deel van 12', waarbij 12 staat voor een verzameling 'losse' objecten: leerlingen nemen dan vaak eenvoudigweg 3 van 4 objecten.

AFBEELDING 49



Overigens is het opmerkelijk – we wezen daar al eerder op – dat met name de traditionele cirkel niet ook als klok werd geïnterpreteerd. Dat zou namelijk het rekenen met eenvoudige breuken hebben vereenvoudigd. Neem bijvoorbeeld $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$: de betreffende sectoren worden 'omgedacht' in 8 uur en 3 uur. Samen 11 uur, ergo $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$.

3.2 OPERATOR-METHODE IN REALISTISCH PERSPECTIEF

In de Proeve-aanpak zullen we de geschetste klassieke operator-methode niet strikt volgen, maar de breukoperator allereerst binnen de deel-geheel methode en de meetmethode laten functioneren. Dus binnen een welbepaald geheel dat als ruimtelijke eenheid of maateenheid kan worden opgevat (zoals de strook, de stok en de rechthoek) en niet primair op een passende, nog te bepalen veelheid, wat later in de leergang gebeurt.

Kijken we echter naar de mentale handelingen die achter het maken van opdrachten met de plak (rechthoek) en het stippenveld steken, dan blijken deze nauwelijks te verschillen. In alle gevallen gaat het om het bepalen van een aantal (stukjes, stippen) dat zowel in vieren als vijven kan worden verdeeld. En hetzelfde geldt voor dergelijke sleutelvragen bij de reep en de meetstrook of -stok. Hetgeen betekent dat het werken met plakken, repen, stroken en stokken, op de eerder aangegeven wijzen van deel-geheel bepalen en meten, ook het werken met breukoperatoren op line-

air of tweezijdig geordende hoeveelheden zal bevorderen en omgekeerd. Dat is van belang omdat het kunnen berekenen van (eenvoudige) breuk-delen van hoeveelheden op zich een doelstelling is met een hoge praktische waarde. Alleen wordt, zoals gezegd, het werken met breukoperatoren op losse hoeveelheden niet vooropgesteld – dit als eerste kanttekening.

De tweede opmerking is dat breukoperatoren werkend op hoogtheden of maten al wel eerder in een realistische leergang bij het meten verschijnen – zie de aantekeningen daarover bij de meetmethode betreffende de dubbele getallenlijn. Maar dat is niet de primaire functie die de zogenoemde operator-methode aan breukoperatoren toekende, want die was gereserveerd voor deel-van-hoeveelheden of maten (deel-van-veel).

Samenvattend geldt dus dat de (gematigde) operator-methode bruikbare elementen voor een realistische breukendidactiek bevat. Doch vanuit realistisch perspectief bezien dienen breukoperatoren in eerste instantie geïntegreerd te worden met de deel-geheel relatie en de meet-methode.

4 *Eerlijk verdelen*

4.1 GANGBARE AANPAK

Eerlijk verdelen staat in de gangbare benadering van het breuken-onderwijs tot omstreeks 1970 volledig in dienst van de deel-geheel methode. Het gaat daarbij steeds om het (eerlijk) verdelen van één object. Een voorbeeld daarvan vinden we in *Nieuw Rekenen* (deel 5A, pag 2, 1969)¹⁵ – een methode waarin de vak-didactische ideeën uit de jaren vijftig en zestig verdienstelijk zijn verwerkt (zie afbeelding 50).

Illustratief is dat in de volgende taak (deel 5A, pag 10) de uitkomst van de deling $9 : 4$ niet via eerlijk verdelen – bijvoorbeeld 9 koeken onder 4 kinderen – wordt gevonden, maar volgens het voorschrift om $9 : 4$ te schrijven als $\frac{9}{4}$ (zie afbeelding 51).

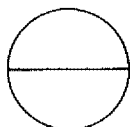
Deze nieuwe schrijfwijze wordt één jaar eerder al voorbereid met een mooi opgaande deling:

‘ $24 : 4 = 6$, en ook $\frac{24}{4} = 6$; je mag $24 : 4$ dus ook schrijven als $\frac{24}{4}$.’ (deel 4A, pag. 66.)

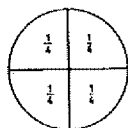
Eerlijk zullen we alles delen



Jan en Jaap hebben 1 ronde koek.
Ze delen de koek eerlijk.
Ieder krijgt de .. is $\frac{1}{2}$ deel. Teken!



a. Daar komen ook nog 2 meisjes aan. Ria en Koba.
Nu zijn er samen .. kinderen.
Jan en Jaap delen ieder hun helft met Ria en Koba.
Jan, Jaap, Ria en Koba krijgen ieder evenveel van de
koek. Elk nieuw stuk is $\frac{1}{4}$ deel van de hele koek.



Jan + Jaap + Ria + Koba delen de hele koek.
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$ is de hele koek is 1.

9. $9 : 4 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

Schrijf zo op.

$6 : 4 =$ $5 : 2 =$

$3 : 2 =$ $10 : 3 =$

$8 : 4 =$ $10 : 2 =$

$8 : 3 =$ $10 : 4 =$

Nogmaals: dit was de gebruikelijke aanpak – dus daarmee is niets ten nadele van *Nieuw Rekenen* gezegd. Want zelfs in de didactiekboeken uit de jaren vijftig en zestig wordt niet op de mogelijkheid gewezen om breuken uit het (eerlijk) verdelen van méerdere objecten te laten ontstaan. Dus $\frac{3}{4}$ bijvoorbeeld niet alleen te interpreteren als $\frac{3}{4}$ deel van één koek die eerlijk in vieren is verdeeld waarvan 3 stukken worden genomen (3 keer $\frac{1}{4}$ koek), maar ook als het resultaat van een verdeling van 3 koeken met 4 personen.

4.2 EERLIJK VERDELEN IN REALISTISCH PERSPECTIEF

Eerlijk verdelen moet starten met echt uitvoeren van het verdelen. Dan blijkt direct dat de verdeling op verschillende manieren gemaakt en beschreven kan worden. Neem bijvoorbeeld de opgave:

Vijf repen verdelen met z'n zessen.

Dat kan door eerst 3 repen met zessen te verdelen, of preciezer, één reep met tweeën. En vervolgens de 2 overblijvende repen in drieën. Maar ook is het mogelijk om iedere reep in zessen te verdelen en elk kind steeds van zo'n reep één zesde te geven.

Zo kan eerlijk verdelen benut worden om de *breukentaal* te helpen ontwikkelen, aansluitend bij de taal van het halveren. Maar uiteraard ook om de relatie tussen 'vijf verdeeld met zessen'; $5 : 6$; en $\frac{5}{6}$ te leggen; plus het verband tussen de genoemde uitkomsten $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$; $5 \times \frac{1}{6}$; ..., steeds benoemd genoteerd om verwarring en onduidelijkheid over (verschillende) stukjes te voorkomen en het zicht op de eenheid te houden.

Ook de *gelijkwaardigheid* van breuken kan vanuit de invalshoek van eerlijk verdelen worden gezien.¹⁶

Neem bijvoorbeeld de volgende twee tafelschikkingen bij een verdeling van pizza's:

- 3 pizza's voor 4 personen $\frac{3}{4}$;
- 6 pizza's voor 8 personen $\frac{6}{8}$.

Aan welke tafel krijgt men het meest? Over deze vraag valt heel veel op te merken. Nu volstaan we met het inzicht dat bij de laatstgenoemde eerlijke verdeling de volgende schikkingen kunnen worden gemaakt:

————— AFBEELDING 52

Tafelschikking I: $\frac{\boxed{6}}{8}$

Tafelschikking II: $\frac{\boxed{3}}{4}$ $\frac{\boxed{3}}{4}$

In het eerste geval krijgt men bij stuksgewijze verdeling per pizza uiteindelijk $\frac{6}{8}$ pizza. En bij de verdeling met vieren ieder $\frac{3}{4}$ pizza ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ of $3 \times \frac{1}{4}$). Kortom $\frac{6}{8}$ pizza = $\frac{3}{4}$ pizza.

Verder uitgebreid: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \dots$

Deze generalisatie kan in eerste aanzet via de volgende vraag worden uitgelokt:

Iemand krijgt $\frac{3}{4}$ pizza; geef eens zoveel mogelijk tafelschikkingen die tot deze uitkomst (kunnen) leiden.

Al met al lijkt deze brede benadering van eerlijk verdelen, die in de jaren zeventig en tachtig door Streefland is ontwikkeld en onderzocht, heel geschikt om:

- 1 de breukentaal te ontwikkelen;
- 2 de gelijkwaardigheid van breuken onder meer via gelijkwaardige verdelingen i.c. verhoudingen in te voeren.

Aangezien gelijkwaardigheid de grondslag voor alle basisoperaties met breuken vormt – of althans kàn vormen, want ook vermenigvuldigen en delen kunnen zo worden ingevoerd – houdt dit in dat eerlijk verdelen één van de kern-activiteiten voor het breukrekenen is.

5 Via verhoudingen

5.1 GANGBARE AANPAK

Verhoudingen en breuken zijn op een bijzondere manier met elkaar verbonden. Bij het vergelijken van hoeveelheden (aantallen) en hoegrootheden (maten) kan bijvoorbeeld de uitkomst zijn dat ‘de één staat tot de ander als 3 staat tot 4’. Men zou dan echter ook kunnen zeggen dat ‘de één $\frac{3}{4}$ is van de ander’. In de eerste uitdrukking spreekt men de verhoudingentaal via een koppel gehele getallen en in de tweede de breukentaal met een gebroken getal.

Tussen deze talen is tweerichtingsverkeer mogelijk. In het voorgaande zagen we dan ook dat in het traditionele rekenonderwijs ‘3 : 4’ – te lezen als ‘3 gedeeld door 4’ of ‘3 staat tot 4’ – vaak al snel vervangen (of zelfs gedefinieerd) werd door $\frac{3}{4}$. En dat is de reden dat er vanaf het midden van de twintigste eeuw tot omstreeks 1980 – internationaal bezien – steeds meer werd gepoogd verhoudingen te verschralen of zelfs geheel te vervangen door breukrekenen. Breuken werden niet via verhoudingen geïntroduceerd, maar verhoudingen omgekeerd juist door breuken geëlimineerd. Daarnaast was er echter in de rekendidactiek van die tijd ook een tegenbeweging waar te nemen.

Turkstra en Timmer hanteerden in hun *Rekendidactiek* (1953)¹⁷ de verhoudingstabel – door hen ‘verhoudingsblok’ genoemd. Dit schema biedt de mogelijkheden om het rekenen met verhoudingen los te koppelen van het breukrekenen.

Zojuist kwamen we bij de tafelschikkingen de volgende verdelingssituaties tegen:

2 pizza’s voor 3 kinderen;

3 pizza’s voor 4 kinderen;

Hoe kunnen de tafelschikkingen eruit hebben gezien?

Men kan de antwoorden ook in de vorm van verhoudingstabellen gieten:

AFBEELDING 53

pizza's	2	4	6	8		pizza's	3	6	9	
kinderen	3	6	9	12		kinderen	4	8	12	

De tabel is in principe ongelimiteerd naar 'rechts' uit te breiden. Maar men kan ook nog wat teruggaan naar links en het aantal pizza's per kind bepalen ... en dan verschijnen de breuken weer.

AFBEELDING 54

pizza's	$\frac{2}{3}$	2	4	.	pizza's	$\frac{3}{4}$	3	6	.
kinderen	1	3	6	.	kinderen	1	4	8	.

In de traditionele rekendidactiek zijn, overdrachtelijk gesproken, beide bewegingen zichtbaar: dus zowel naar links in de tabel richting breuken als ook naar rechts richting verhoudingen. Dit althans is vanuit verhoudingen bezien het geval. Want vanuit breuken beschouwd, werd er in de traditionele rekendidactiek van de periode voor 1970 geen koppeling met verhoudingen en de verhoudingstabel gemaakt.

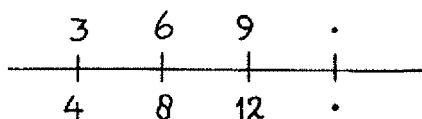
Kortom, er is dus eigenlijk niet zoiets als een gangbare aanpak van het leren breukrekenen via verhoudingen.

5.2 'VIA VERHOUDINGEN' IN REALISTISCH PERSPECTIEF

In het *Wiskobas*-project uit de jaren zeventig werd die koppeling wel gemaakt. Verhoudingswaarden in termen van breuken werden in verhoudingen van gehele getallen vertaald – $\frac{3}{4}$ geïnterpreteerd als '3 op de 4' of '3 van de 4'. En zo'n getallenkoppel werd vervolgens tot een klasse van gelijkwaardige verhoudingen uitgebreid – '3 op de 4' is '6 op de 8' is '9 op de 12' ...

Die klasse kan dan ordelijk in een verhoudingstabel worden opgetekend of afgebeeld op een dubbele getallenlijn:

AFBEELDING 55



Later werd die dubbele getallenlijn naar de linkerzijde en rechterzijde 'verfijnd' en benut voor het rekenen met echte en gemengde breuken, zoals beschreven in de meet-methode.

Als modelsituatie diende de context van het eerlijk verdelen in combinatie met tafelschikkingen. Maar ook in de beschrijvingen over de deel-geheel methode kan men verhoudingen onderkennen. In principe zijn op alle terreinen van verhoudingen en verhoudingswaarden toepassingsopgaven te vinden voor het ordenen, vergelijken en opereren met breuken. Wat inhoudt dat activiteiten van verhoudingsgetrouw afbeelden (vergroten, verkleinen), eerlijk verdelen, mengen, maatverfijnen, omzetten, inwisselen, koppelen van grootheden en zo meer, in het breukenonderwijs betrokken kunnen worden.

Deze rijke 'horizontale' binding van breuken aan de realiteit via verhoudingen leidde er echter aanvankelijk wel toe, dat ten eerste het zicht op het 'verticale' mathematiseren in de richting van het breukrekenen er niet duidelijker op werd, en ten tweede dat het onderwerp breuken op zich regelmatig ter discussie kwam te staan. Vóór 1970 was er een trend om verhoudingen via breuken te elimineren, en na 1970 om precies het omgekeerde te bewerkstelligen, dus om breuken via verhoudingen te weren – althans in aanzet.

Na 1980 werd vooral naar een modelcontext voor het breukrekenen gezocht. Verhoudingen gekoppeld aan eerlijk verdelen kregen aanvankelijk de meeste aandacht. Vanaf het midden van de jaren tachtig gaf men in de realistische didactiek – althans op het niveau van ontwikkeling en onderzoek – het meten en het opereren met een bemiddelende grootheid steeds meer accent.

6 *Samenvatting nieuwe accenten*

De doelstellingen van het breukenonderwijs zijn veranderd. Maar min of meer los daarvan is ook de breukendidactiek de laatste decennia stukje bij beetje ingrijpend gewijzigd. De meest in het oog springende vernieuwingen waren achtereenvolgens:

- de sterke verbinding met eerlijk verdelen en verhoudingen die vanaf omstreeks 1980 wordt gelegd;
- het gedeeltelijk omzeilen van het opereren met breuken in toepassingsituaties door gebruik te maken van ‘schaalverfijningen’, oftewel het werken met passende ondermaten; de context-opgaven worden geschematiseerd op de dubbele (stroken-)getallenlijn, en de breuken worden benoemd genoteerd, wat vanaf omstreeks 1990 is aangezet¹⁸;
- zeer recent (1993) de funderende meetactiviteiten ten behoeve van de ontwikkeling van de breukentaal en het leren situeren van breuken op de getallenlijn.¹⁹

Hier dient echter direct aan te worden toegevoegd dat in de Proeve op tal van punten wordt aangesloten bij wat rekendidactici al (ver) vóór 1970 hebben uitgedacht en beproefd. Dat geldt zelfs in zekere zin ook voor deze drie grote veranderingen, want die zijn ook niet in alle opzichten nieuw zoals de voorgaande historisch-didactische verkenning uitwees.

De aangeduide wijzigingen zijn speciaal zichtbaar in de verschillende benaderingen van het equivalentiebegrip. Steeds is die gelijkwaardigheid ingebed in een (model-)context met passende visualisering of schematisering.²⁰

Noten

- 1 Overgenomen uit: Streefland, L.: *Realistisch Breukenonderwijs* (dissertatie), Utrecht, Freudenthal Instituut, 1988, pag. 6.
- 2 Gelder, L. van: *Grondslagen van de Rekendidactiek*, Groningen, Wolters, 1959, pag. 85.
- 3 Jansen, J.W., J.M. Reijnders en J. Snijders: *Gefundeerd Hoofdrekenen*, Amsterdam, Versluys, 1964, pag. 80.
- 4 Jansen, J.W., J.M. Reijnders en J. Snijders: *Gefundeerd Hoofdrekenen*, Amsterdam, Versluys, 1964, pag. 68.

- 5 Reijnders, J.M. en J. Sniijders: *Functioneel Rekenen*, Amsterdam, Versluys, 1959 e.v.
Glimmerveen, C. en S. van der Werff: *Op Veilig Spoor*, Meppel, Ten Brink, 1969 e.v.
Bruinsma, B. (red.): *Nieuw Rekenen*, Baarn, Bosch en Keuning, 1969 e.v.
- 6 Postema, J., N. Kuipers en J.J. Haverkort: *Taltaal*, Zeist, Dijkstra, 1975 e.v.
- 7 Wij hebben gebruik gemaakt van 'Breukenstokjes', Wychen, Uitgeverij Cordemeyer, z.j.
- 8 Versluys, J.: *De Methodiek van het Rekenen*, Amsterdam, Versluys, 1889.
- 9 Bouman, P.J. en J.C. van Zelm: *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang met - als proeve van toegepaste logica - een rekenmethode voor de lagere school*, Amsterdam, Versluys, 1933 (3).
- 10 Bouman, P.J. en J.C. van Zelm: *Het Nieuwe Negende Rekenboek, Onderwijzersboekje 9*, Amsterdam, Versluys, 1934, pag. 30.
- 11 Het idee van de omzetting van de strook naar het cirkelmodel is mede ontleend aan:
Lovitt, C. en D. Clarke: *This goes with this*, MCTP, Activity Bank, Vol. I, Curriculum Development Centre, Camberra, 1988.
Onafhankelijk daarvan is dit aardige idee ook in een teambijeenkomst van het Middel School Project (Freudenthal Instituut) naar voren gebracht.
- 12 Mooie voorbeelden daarvan treft men aan in de dissertatie van Streefland (zie noot 1).
- 13 Karaschewski, H.: *Ganzheitliches Rechnen auf allen Stufen der Volksschule I*, Düsseldorf, 1954.
Dienes, Z.P.: *Fractions. An Operational Approach*, Parijs, OCDL, 1967.
Braunfeld, P. en M. Wolfe: *Fractions for low achievers, Arithmetic Teacher*, 13(8), 1966, pag. 647-655.
- 14 Woestenenk, P.: *Rekendidactiek*, Zwolle, Tjeenk Willink, 1965, pag. 36.
- 15 Zie noot 5 – Bruinsma.
- 16 Zie de dissertatie van Streefland, noot 1.
- 17 Turkstra, H. en J.K. Timmer: *Rekendidactiek*, Groningen, Wolters Noordhoff, 1953.

- 18 Zie: Treffers, A.: Benoemde breuken: ontstaansgeschiedenis van een idee. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(1), 1991, pag. 43-44.
- 19 Deze meetactiviteiten zijn uitgewerkt binnen de SLO-Fi-CITO-groep bestaande uit Joop Bokhove, Kees Buys, Ronald Keijzer, Anita Lek, Anneke Noteboom en Adri Treffers.
De aanzet tot de introductie is gegeven door Bert van Leeuwen die het betreffende materiaal (zie noot 7) onder de aandacht bracht van A. Treffers. De eerste onderwijservaringen van A. Treffers, werkend met een leerling die problemen met breukrekenen had, waren uitermate positief. A. Noteboom voerde vervolgens de eerste meetlessen met stroken uit in groep 6. De resultaten daarvan zullen in de volgende hoofdstukken worden besproken.
- 20 Van algemeen belang voor de ontwikkeling van de realistische breukendidactiek is het volgende werk geweest: Freudenthal, H.: *Didactische Fenomenologie van Wiskundige Structuren*, Utrecht, Freudenthal Instituut, 1984.

III Betekenis verlenen

Doelstelling 1

De leerlingen weten dat aan een breuk op verschillende manieren betekenis kan worden gegeven.

Eerst worden enkele gegevens verstrekt over de moeilijkheidsgraad van de verschillende begripsaspecten van breuken. Deze zijn ontleend aan nationaal en internationaal onderzoek op het niveau van eindtoetsen basisonderwijs. In het algemeen komen de scores van de verschillende landen sterk overeen. We mogen de internationale resultaten dan ook ruwweg op de Nederlandse situatie betrekken aan het einde van de jaren tachtig ten tijde van het nationale PPON-onderzoek (Periodieke Peiling van het Onderwijs Niveau uitgevoerd door het CITO). In dat onderzoek waren hoofdzakelijk traditionele methoden en een overgangsmethode betrokken.¹ Slechts een kleine minderheid van het methodenbestand bestond toen uit *Wereld in Getallen, Rekenen en Wiskunde of Rekenwerk*.²

De *deel-geheel* relatie geeft in het algemeen weinig moeilijkheden bij opgaven als:

Kleur $\frac{2}{3}$ van de figuur.

AFBEELDING 56



Geef met een breuk aan welk deel van de figuur gekleurd is.

AFBEELDING 57



Uit onderzoek van Hart blijkt dat 80 procent van de twaalfjarigen in Engeland dergelijke opgaven goed oplost.³ In Nederland ligt de goedscore ongeveer even hoog.

Als in het geval van de laatste tekening gevraagd wordt $\frac{2}{3}$ deel te kleuren, is de meest voorkomende fout dat er maar 2 stukjes worden genomen. In dat geval wordt $\frac{2}{3}$ geïnterpreteerd als '2 van de 3', dus als een koppel gehele getallen. We zullen deze foutieve interpretatie nog vaker tegenkomen, waarbij de eenheid of het geheel niet in beschouwing wordt genomen.

De meest voorkomende fout bij bovenstaande opgave is het antwoord $\frac{5}{7}$, te weten 5 gekleurde en 7 niet gekleurde vakjes. Dus ook hieruit spreekt geen helder beeld van het geheel waarvan een deel wordt genomen. Maar algemeen gesproken wordt de breuk als deel-geheel relatie correct opgevat.

Het *meetaspect* daarentegen blijkt veel meer problemen te geven – althans binnen het gangbare breukenonderwijs dat daaraan niet veel aandacht schenkt, zowel (tot voor kort) nationaal als internationaal.

Enkele voorbeelden van toetsopgaven die met dat meetaspect van doen hebben, of die goed opgelost kunnen worden door de breuken als meetgetallen te interpreteren en op de getallenlijn te plaatsen⁴:

Plaats $\frac{3}{5}$ op de getallenlijn:

AFBEELDING 58



Voor bijna de helft van de kinderen einde basisschool, is deze opgave te moeilijk: het merendeel van de kinderen die dit niet kunnen, vatten $\frac{3}{5}$ op als '3 van de 5'.

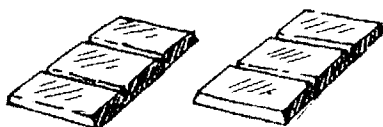
Ook uit ander onderzoek blijkt dat:

'Students think of rational numbers in terms of parts comprising the whole rather than as a single quantity resulting from partitioning a unit or comparing units.'⁵

Ongeveer 70 procent van de leerlingen eind basisonderwijs is in staat om opgaven als ' $\frac{2}{3}$ deel van 12', ' $\frac{3}{4}$ van 60' en dergelijke correct uit te rekenen.⁶ De *breukoperator* werkend op aantallen en maten functioneert dus heel behoorlijk.

Met *eerlijk verdelen* en het *verhoudingsaspect*, waaraan in het gangbare breukenonderwijs relatief weinig aandacht wordt geschonken (evenals het meetaspect), hebben de leerlingen daartegen veel meer moeite. Slechts één op de drie leerlingen maakt de volgende PPO- opgaven goed - buitenlandse goedscores liggen in dezelfde orde van grootte.⁷

AFBEELDING 59



Twee repen chocolade worden verdeeld over drie kinderen.

Hoeveel krijgt elk kind?

$\frac{2}{3}$ reep

Jan slaapt ongeveer 8 uur per dag.

Welk deel van de dag slaapt Jan ongeveer?

$\frac{1}{3}$ deel

Tot zover de opbrengst van aspecten van het breukbegrip binnen gangbaar breukenonderwijs waarin aan essentiële onderdelen (meten, eerlijk verdelen en verhoudingen) weinig aandacht wordt geschonken.

De Proeve-didactiek van breuken besteedt van meet af aan veel tijd en zorg aan alle genoemde aspecten, zij het dat met het oog op de ontwikkeling van de breukentaal aanvankelijk vooral het (eerlijk) verdelen en het meten speciale aandacht krijgen.

De gehele leergang omvat in totaal ongeveer zestig lessen en dat is ongeveer de helft van wat tot voor kort gangbaar was. We concentreren ons hier uitsluitend op het begin van de leergang vanwege de overweging dat de genoemde aspecten in de bespreking van de andere doelstellingen verbonden worden met het plaatsen van breuken op de getallenlijn, het opereren van breuken, en de relatie met decimale breuken, procenten en verhoudingen – allemaal onderdelen die pas verder in de leergang aan bod komen.

Of anders gezegd: we hebben de doelstellingen zo geordend, dat de didactische beschouwingen erover een duidelijk beeld van de leergang geven. De beschrijving van doelstelling 1 slaat voornamelijk op het eerste kwart van de leergang, doelstelling 2 betreft vooral het tweede kwart, doelstelling 3 het derde kwart en doelstelling 4 het laatste deel van de breukenleergang.

We zeggen ‘voornamelijk’, omdat de structurering van het breukenonderwijs in werkelijkheid niet zo strak schematisch kan worden opgedeeld, om de eenvoudige reden dat de vier onderdelen elkaar overlappen en er allerlei dwarsverbindingen zijn. In de volgende hoofdstukken zullen daarom na belangrijke leerstofonderdelen steeds korte stukjes worden ingelast onder het kopje ‘Samenvatting en situering’, waarin de plaats van de betreffende delen in de totale leergang wordt aangegeven.

Maar globaal klopt het beeld: eerst worden de verschillende verschijningsvormen van breuken aan de orde gesteld, dan de ordening en plaatsing van (benoemde) breuken op de getallenlijn, vervolgens wordt op verschillende wijzen met breuken geopereerd, en ten slotte bezien we breuken in samenhang gebracht met verwante onderwerpen als kommagetallen, procenten en verhoudingen.

We beginnen bij doelstelling 1 met de bespreking van de vijf aspecten van breuken zoals die zich in contextsituaties voordoen. In de eerste fase van het breukenonderwijs laten we door middel van verdelen en meten breuken ontstaan. Tegelijkertijd wordt de

breukentaal ontwikkeld. De verschillende aspecten van het breukbegrip komen daarbij naar voren, te weten eerlijk verdelen, meten, deel-geheel, en in mindere mate het operator-aspect en verhoudingen. Dit is ook de leergangmatig bepaalde volgorde waarin de kernaspecten worden besproken – het is een didactische ordening.

Ieder kernaspect wordt geïllustreerd met één of meer voorbeelden van eigen produkties van de hand van Laura, een leerling uit groep 6 – het leerjaar waarin deze eerste fase van vijftien lessen is gesitueerd. Ook wordt per kernaspect steeds een indicatie van elementaire toepassingsopgaven gegeven.

1 *Eerlijk verdelen*

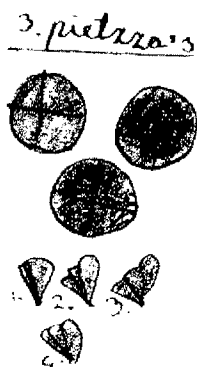
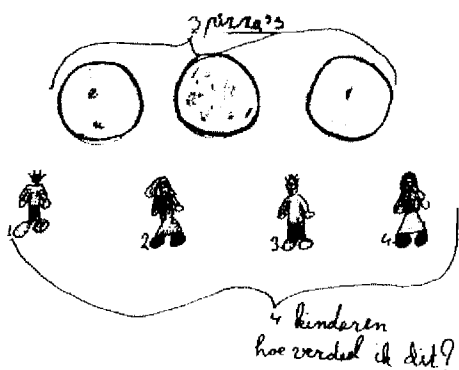
De introductie van breuken kan op een natuurlijke en motiveerende wijze plaatsvinden via eerlijk verdelen. Deze activiteit is vooral gericht op het ontwikkelen van de breukentaal.

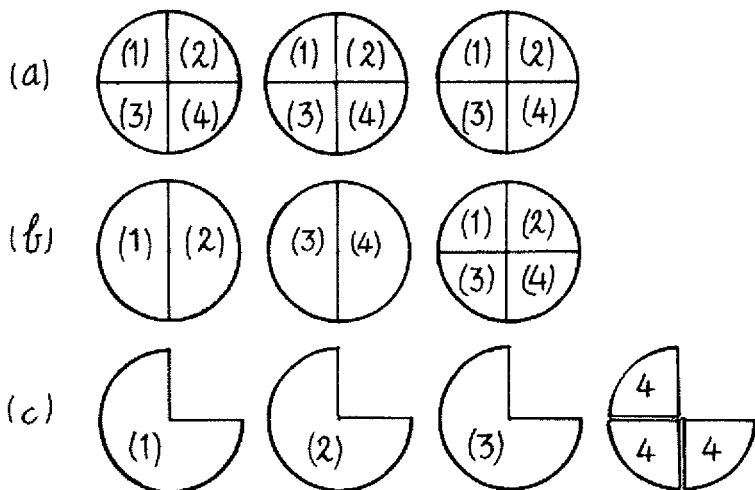
Laura uit medio groep 6 die via de Proeve-didactiek in het breukenonderwijs is ingevoerd, maakte zelf de volgende twee opgaven over eerlijk verdelen.⁸ (Zie afbeeldingen op de volgende pagina's.) We zullen nagaan welke belangrijke aangrijpingspunten hierin voor het aanvankelijke breukenonderwijs besloten liggen.

Drie pizza's eerlijk verdelen met vier personen. Hoeveel krijgt ieder?

Laura verdeelt iedere pizza in 4 gelijke delen en geeft ieder steeds één stukje (ze stapelt 3 stukjes) - dat is één mogelijkheid (zie afbeelding 60).

Maar men zou deze 3 pizza's ook anders eerlijk kunnen verdelen. En kinderen uit groep 6 blijken dat ook te doen. In de oplossingen zoals die in afbeelding 61 staan, verwijzen de symbolen (1), (2), (3) en (4) naar de 4 personen:





In oplossing (a) krijgt ieder 3 keer een kwart pizza.

In oplossing (b) krijgt ieder een halve en een kwart pizza.

In oplossing (c) krijgen 3 personen ieder drie kwart pizza of een hele min een kwart pizza.

In oplossing (d) krijgen 2 personen ieder drie kwart en de andere 2 personen krijgen ieder een halve en een kwart pizza.

Maar eigenlijk hebben we al een stap te ver gezet. Men zou namelijk moeten beginnen met het stellen van 'kwalitatieve' vragen als:

Krijgt ieder meer of minder dan één pizza?

Krijgt ieder meer of minder dan een halve pizza?

De antwoorden op deze vragen worden gemotiveerd vanuit het verdelen.

De breukental betreffende een half en een kwart levert weinig problemen op. De uitdrukking drie kwart is al wat minder

bekend. En de expressies van één tweede, één vierde en drie vierde(n) – zo men die hier al zou willen gebruiken – zijn nieuw. Pas bij verdelingen met achten, drieën, zessen, enzovoort, worden deze nieuwe termen expliciet ingevoerd via objectnamen van de onderscheiden stukken van ‘achtsten’, ‘derden’, ‘zesden’, enzovoort, die bij iedere pizza of reep ontstaan.

Na de gesproken breukentaal komt de notatie van breuken met cijfersymbolen in beeld.

Bij (a) ‘ $\frac{1}{4}$ pizza + $\frac{1}{4}$ pizza + $\frac{1}{4}$ pizza’ en ‘ $3 \times \frac{1}{4}$ pizza’ (of, wellicht omdat de context duidelijk is, nog korter ‘ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ’ en ‘ $3 \times \frac{1}{4}$ ’).

Bij (b) ‘ $\frac{1}{2}$ pizza + $\frac{1}{4}$ pizza’.

Bij (c) ‘ $\frac{3}{4}$ pizza’ en ‘ $\frac{1}{4}$ pizza + $\frac{1}{4}$ pizza + $\frac{1}{4}$ pizza’.

Bij (c) en (d) eventueel ook ‘1 pizza – $\frac{1}{4}$ pizza’ in plaats van ‘ $\frac{3}{4}$ pizza’.

Zonder al te veel nadruk kan hierbij op de volgende gelijkheden van de verschillende uitdrukkingen worden gewezen die de kinderen zelf naar voren brengen:

$$\frac{3}{4} \text{ pizza} = 3 \times \frac{1}{4} \text{ pizza} = \frac{1}{4} \text{ pizza} + \frac{1}{4} \text{ pizza} + \frac{1}{4} \text{ pizza} = \frac{1}{2} \text{ pizza} + \frac{1}{4} \text{ pizza} = 1 \text{ pizza} - \frac{1}{4} \text{ pizza}.$$

Pas geleidelijk aan zullen de kinderen deze relaties onderkennen en gaan gebruiken, uitgaande van de stambreuken (in dit voorbeeld $\frac{1}{4}$ pizza).

Dit is de start van de breukentaal en de notatie met cijfersymbolen. Maar meer dan een allereerste begin is het niet. De kinderen kunnen de breukentaal meestal nog niet voor andere breuken dan halven en kwarten gebruiken. Uitbreiding naar andere verdeel-situaties is daarom dringend noodzakelijk.

Vijf chocoladerepen eerlijk verdelen met zes personen.

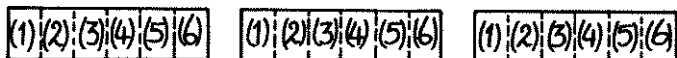
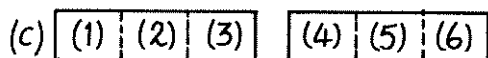
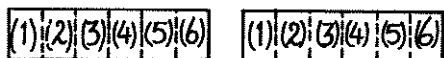
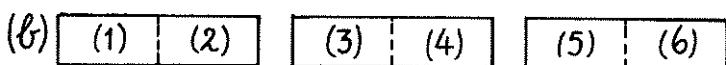
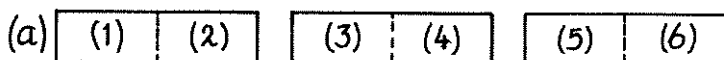
Laura heeft iedere reep in 6 stukjes verdeeld, toen $\frac{2}{3}$ reep genomen, oftewel 4 stukjes, en daarna nog $\frac{1}{6}$ reep, oftewel één stukje daaraan toegevoegd. Ze heeft iedere reep in 6 stukjes verdeeld.

Er zijn echter nog tal van andere verdelingsmogelijkheden die door kinderen via vouwen en/of tekenen worden gevonden.⁹

We geven enkele oplossingen (personen zijn aangeduid met nummers):

AFBEELDING 62

- Ieder krijgt $\frac{1}{2}$ reep + $\frac{1}{3}$ reep
- Ieder krijgt $\frac{1}{2}$ reep + $\frac{1}{6}$ reep + $\frac{1}{6}$ reep
of $\frac{1}{2}$ reep + $\frac{2}{6}$ reep
- Ieder krijgt $\frac{1}{3}$ reep + $\frac{1}{6}$ reep + $\frac{1}{6}$ reep + $\frac{1}{6}$ reep
of $\frac{1}{3}$ reep + $3 \times \frac{1}{6}$ reep
of $\frac{1}{3}$ reep + $\frac{3}{6}$ reep



Maar zo noteren de leerlingen de resultaten van de verdeling aanvankelijk meestal nog niet.

In het algemeen zullen ze eerst vooral over stukken of blokjes spreken, plus over een halve reep als bekende aanduiding van de helft. Maar één derde reep genoteerd als ' $\frac{1}{3}$ reep' en één zesde reep als ' $\frac{1}{6}$ reep' zijn voor de meesten nieuwe namen. Aanvankelijk worden deze stambreuken geassocieerd met 'eerlijk

verdelen in 3 (respectievelijk 6) stukken'.

Hoe moeten we als onderwijsgevend de standaardtaal duidelijk naar voren brengen op geëigende momenten, te beginnen bij de objectnamen van de onderscheiden stukken (halven, derden, kwarten, vijfden, zesden, ...)?

We sommen daartoe enkele mogelijkheden op, aansluitend bij het onderhavige chocoladeprobleem van Laura:

- Laat de repen (of pizza's) per stuk verdelen en noteer steeds de tussen-uitkomsten van de vraag 'Hoeveel heeft ieder tot nu toe gehad?' op verschillende manieren na één reep, twee repen, ..., vijf repen:
 - één reep, ieder $\frac{1}{6}$ ('één zesde reep');
 - twee repen, ieder $\frac{2}{6}$ reep; $2 \times \frac{1}{6}$ reep; $\frac{1}{3}$ reep;
 - drie repen, ieder $\frac{3}{6}$ reep; $\frac{1}{2}$ reep;
 - vier repen, ieder $\frac{4}{6}$ reep; $\frac{2}{3}$ reep;
 - vijf repen, ieder $\frac{5}{6}$ reep; 1 reep - $\frac{1}{6}$ reep.
- Vraag naar de restanten (complementen) van één reep als daarvan $\frac{1}{6}$ deel is afgehaald, of $\frac{1}{3}$ deel, of $\frac{1}{2}$ deel, of ...
- Teken een bepaald benoemd deel van een reep en laat de kinderen de hele reep tekenen; doe dit bij $\frac{1}{2}$ reep; $\frac{1}{4}$ reep; $\frac{3}{4}$ reep; $\frac{2}{3}$ reep; en $\frac{6}{6}$ reep (!).
- Algemeen: laat delen van een reep met een passende breuk benoemen, en omgekeerd benoemde breukdelen breken, kleuren, aanvullen, enzovoort.

Het zal echter duidelijk zijn dat verdeelopdrachten niet uitsluitend aan de activiteit van het eerlijk verdelen van meerdere objecten zijn gebonden, doch ook aan het opdelen van één object gekoppeld kunnen worden. Bijvoorbeeld één reep verdelen in 6 gelijke delen, en er daarvan 5 nemen. Maar in dat geval spreken we van een deel-geheel relatie, waarover straks meer.

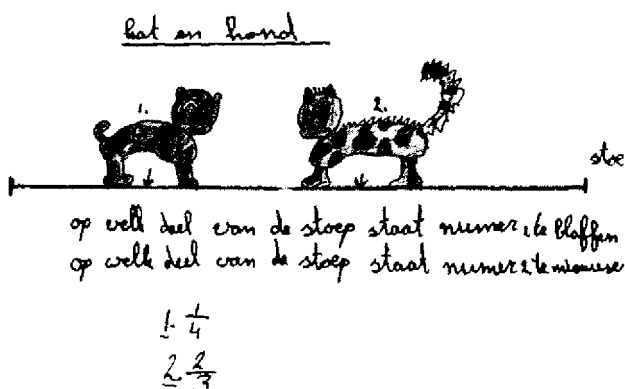
Nu eerst iets over het meet-aspect dat naast het eerlijk verdelen aanvankelijk de meeste tijd en aandacht van het breukenonderwijs krijgt.

2 Meten

Metten dient zoals gezegd om het breukbegrip en de breukentaal te ontwikkelen. Maar tevens is (lengte) meten de belangrijkste activiteit om de kinderen te leren de breuken op de getallenlijn te plaatsen (doelstelling 2).

Laura heeft ook wat dit belangrijke aspect van het positioneren en relateren van breuken betreft een opgave en een opdracht in petto.

AFBEELDING 63



En ze voegt er aan toe:

AFBEELDING 64

bedenk er zelf nog een paar!

Maar laten we met het zelf bedenken niet te ver vooruitlopen op mogelijke meetactiviteiten in de leergang. Want eerst moeten de kinderen zelf maar eens meetstroken ontwerpen met gelijke verdelingen van 2, 4, 8, 3, 6, 12, 5 en 10 stukken of vakjes en daar-

mee vervolgens gaan meten. En daarna ook met voorgestructureerde, uitgeknipte papierstroken of met breukenstukken.

Daarbij gaat het om het leren beschrijven van de meetresultaten in termen van breuken, en omgekeerd om het uitmeten van maten met breuken via een strook of stok als maateenheid.

Zoals eerder bij het eerlijk verdelen, wordt ook bij het meten geleidelijk aan naar de meest verkorte uitdrukkingwijze toegewerkt.

Bij het moeilijke geval van $\frac{2}{3}$ strook bijvoorbeeld, kan dat als volgt gaan:

- 'het pijltje staat na 2 stukken van de $\bar{3}$ -strook, of na 4 stukken op de $\bar{6}$ -strook, of ...'
- 'het staat op twee derde(n) strook', of kort genoteerd: 'op $\frac{2}{3}$ strook'; dan wel $\frac{4}{6}$ strook, of ...

Steeds krijgt in dat soort opdrachten met de genoemde stroken of stokken de noemer het signaalkarakter van het type strook of stok (qua onderverdeling) en de teller verwijst dan naar het aantal stukjes of vakjes.

Eerst voeren de kinderen de meethandelingen daadwerkelijk uit en beschrijven de uitkomsten ervan in termen van breuken of doen het omgekeerde door gegeven breukstroken ($2 \frac{2}{3}$ strook bijvoorbeeld) af te passen. Daarna gebeurt een en ander via in plaatjes voorgestelde meethandelingen. En ten slotte worden de leerlingen uitgedaagd om uitspraken over relaties tussen gemeten en benoemde breuken te doen betreffende (on)gelijkheid of ordening zonder de meethandelingen uit te voeren maar door louter daarover te denken en te redeneren.

Dit is algemeen gezegd de kern van het meten, waarin uiteraard ook het schatten en het grof beschrijven van die schattingen ('de poes staat op iets meer dan de helft van de stoeplengte') betrokken dienen te worden.

Nu in telegramstijl meetactiviteiten voor een serie lessen in de eerste onderwijsfase.

1 Stroken vouwen in 2, 4 en 8 gelijke stukken.

Metten van een 'passend' object, bijvoorbeeld de hoogte van het tafeltje.

Aandacht voor verschillende soorten beschrijvingen – zie de

eerder aangeduide mogelijkheden daartoe. Wijzen op het vage van de stukjes- of vakjesaanduiding indien daarbij de betreffende $\bar{2}$ -, $\bar{4}$ - of $\bar{8}$ -strook niet genoemd wordt. Eerste kennis-making met gelijkwaardigheid ($1/2$ strook is even lang als $2/4$ strook, enzovoort).

- 2 Omgekeerd: bepalen van lengten die in breuktermen zijn gegeven. Een voorbeeld:

– Meet een lengte af van ‘1 strook en 3 stukjes van de $\bar{8}$ -strook’.

Meet ‘1 strook en $3/8$ strook’.

Bespreking van het geval ‘1 strook en $4/8$ strook’. Welke opdracht zou hetzelfde hebben opgeleverd? En welke nog meer?

Werk met tweetallen: laat ieder een voorbeeld voor de ander bedenken en uitvoeren met de genoemde stroken. Nabespreking van enkele voorbeelden.

- 3 Touwtjes verdelen in 3 en 6 gelijke stukken. En daarna hetzelfde doen met stroken.

Oplossing via twee keer dubbelvouwen blijkt tot verrassing van veel kinderen niet tot de gewenste verdeling in drieën te leiden.

Proberen via meten (onder meer met de liniaal) en verschillende leg- en vouwstrategieën leidt uiteindelijk tot een goede verdeling in drieën. Daarna komen verschillende strategieën aan bod om een verdeling in 6 gelijke stukken te maken.

Meten van de lengte van één object, bijvoorbeeld de lengte van het tafeltje, en het beschrijven van het resultaat. Bespreking van de (gelijkwaardige) resultaten. Aangeven van de verkorte beschrijvingswijzen.

Uitvoeren van een meetopdracht met stroken (of touwtjes). Bijvoorbeeld: bepaal de lengte van ‘ $2\frac{5}{6}$ strook’. Handige manier bespreken om dit te doen via ‘ $3 - 1/6$ strook’ wat door meerdere leerlingen is toegepast. Je krijgt $5/6$ strook als je $1/6$ strook naar achteren vouwt. Je krijgt ... strook als je $2/6$ strook naar achteren vouwt ...

- 4 Meten met voorgestructureerde stroken van 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 en 12 verdelingen: schatten, precies meten, verschillende beschrijvingen met breuken verzinnen van:

- eigen lengte
- pen
- schoen
- ... (zelf kiezen)

Eerst schatten via helen, halven en kwarten. Dan precies meten.

Nabespreking over al dan niet goede schattingen.

Verschillende beschrijvingen bespreken. Omgekeerd: meet $\frac{4}{5}$ strook.

Hoeveel stukjes naar achteren gevouwen: laat maar zien.

Idem met breukenstokken.

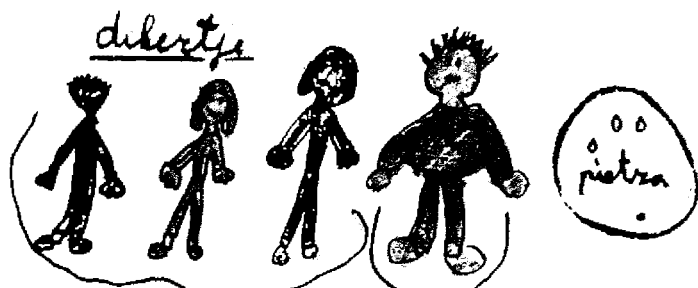
5 Schriftelijke opgaven.

- Zoek een andere naam (je mag stroken gebruiken):
 - $\frac{2}{5}$ strook of ...
 - $\frac{4}{6}$ strook of ...
 - $2\frac{6}{8}$ strook of ...
- Hoeveel naar achteren gevouwen?
 - Ik wil $\frac{7}{8}$ strook. Hoeveel weggevouwen? ... strook
 - Ik wil $\frac{10}{12}$ strook. Hoeveel weggevouwen? ... strook
- Wat is langer? (Je mag stroken gebruiken of stokken.)
 - $2\frac{4}{5}$ strook of $3\frac{1}{5}$ strook;
 - $1\frac{1}{4}$ strook of $1\frac{4}{12}$ strook;
 - $\frac{10}{10}$ strook of $\frac{10}{15}$ strook.

3 Deel-geheel

Bij de deel-geheel relatie gaat het, zoals eerder opgemerkt, om de opdeling van één object i.c. een cirkel, rechthoek of strook en zo meer, via breken, kleuren, aanvullen ...

Een voorbeeld van zo'n verdeling van één object, een pizza, zien we in de volgende originele eigen produktie van Laura (zie afbeelding 65). Laura gebruikt hier in tegenstelling tot de eerste opgave wel breuksymbolen bij het pizza verdelen en stelt vast dat de dikke persoon $\frac{2}{5}$ pizza krijgt. Ze weet kennelijk dat $\frac{2}{5} = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Stambreuken vinden en benoemen is voor de meeste kinderen uit groep 6 betrekkelijk eenvoudig: ze worden namelijk direct geassocieerd met eerlijk verdelen (met z'n vijven of in vijven). Maar niet-stambreuken zijn lastiger op te sporen en te beschrijven.



3 dunnen en 1 dikke
krijgen 1 pizza de dikke
krijgt 2 keer zo veel

hoeveelste deel krijgt
ieder? ---
samen? ---

~~dikertje~~
de drie
dunnen
krijge
ieder $\frac{1}{5}$
de dikke
krijgt $\frac{2}{5}$ samen
is het 1
pizza

Het is dus zaak om ze op de zojuist aangegeven wijze hecht met stambreuken te verbinden via herhaald optellen en vermenigvuldigen.

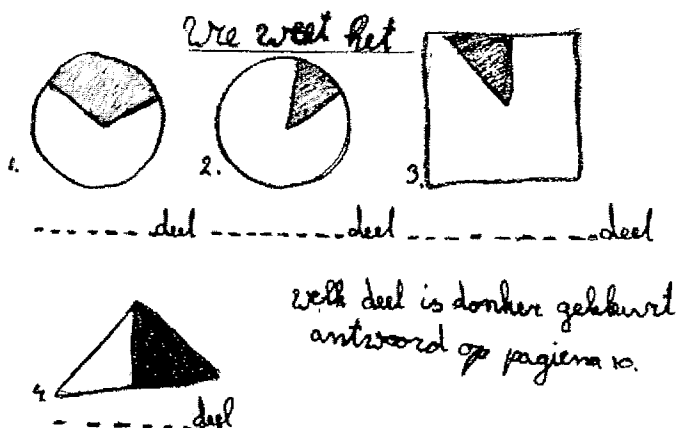
De dunnen krijgen samen 'één vijfde plus één vijfde plus één vijfde pizza', of '3 keer één vijfde pizza', of 'drie vijfde pizza' ($\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ (pizza)). De dikke krijgt 'één vijfde plus één vijfde pizza', of '2 keer één vijfde pizza', of 'twee vijfde pizza' ($\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ (pizza)).

Het handelingsvoorschrift waaraan de kinderen in geval van $\frac{3}{5}$ pizza denken, luidt:

'Verdeel in vijven (of met vijven); één zo'n stuk heet dan 'één vijfde pizza', oftewel $\frac{1}{5}$ pizza, en 3 zulke stukken zijn samen $\frac{3}{5}$ pizza; kortweg: in vijven verdelen en dan 3 van die vijfden nemen.'

Zoals gezegd is het zelf benoemen van een gekleurd, gearceerd of gebroken deel van een geheel nog wat moeilijker. Laura maakt het zichzelf daarom maar niet te lastig.

AFBEELDING 66



Wie weet het?

$$1. = \frac{1}{5}$$

$$2. = \frac{1}{6}$$

$$3. = \frac{1}{8}$$

$$4. = \frac{1}{2}$$

Na het kleuren en benoemen van stambreuken via cirkels, rechthoeken en stroken volgen dezelfde soort activiteiten met niet-stambreuken in gevarieerde opgaven.

Enkele voorbeelden¹⁰:

Vouw een A4-blaadje in 2, in 4, in 8 en in 3 gelijke delen.
Vouw een blad op zoveel mogelijk verschillende manieren in 6 gelijke delen.

Teken in de volgende rechthoeken verschillende manieren met een verdeling in 6 gelijke delen.

————— AFBEELDING 67



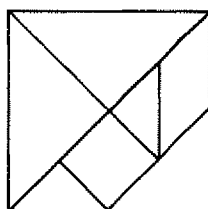
Oplossingen onder meer:

————— AFBEELDING 68



Beschrijf de verschillende delen van het tangram met een breuk (deel-van het vierkant). (Moeilijke opdracht, die alleen zinvol is als de kinderen met een tangram hebben gepuzzeld.)

————— AFBEELDING 69



Opdrachten waarin een deel is gegeven (getekend) en het geheel gevonden moet worden.

————— AFBEELDING 70



$\frac{1}{4}$ reep (plak)

?

Hele reep (plak)

Hieronder staat $\frac{2}{5}$ reep (plak). Teken de hele reep (plak).

————— AFBEELDING 71



$\frac{2}{5}$ reep (plak)

?

Hele reep (plak)

Men kan dergelijke opdrachten ook in een context plaatsen. Twee voorbeelden.

————— AFBEELDING 72



Welk deel van het glas is gevuld? Vul het glas voor $\frac{2}{5}$ deel

- a. $\frac{1}{2}$
- b. $\frac{2}{3}$
- c. $\frac{5}{6}$

Voor welk deel is de benzinetank ongeveer gevuld?

AFBEELDING 73



In de laatste voorbeelden wordt een element aan het voorgaande toegevoegd, namelijk het globaal schattende deel-van-geheel bepalen of een benoemd deel grofweg tekenen.

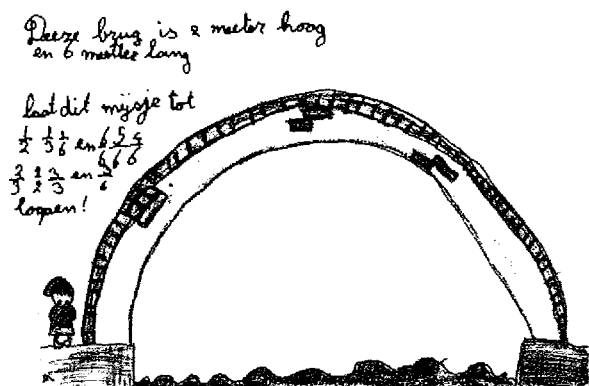
Deze schattende aanduidingen zijn uitermate belangrijk om gevoel over de grootte van breuken te ontwikkelen. Men kan dit oefenen met armgebaren: 'dit is het geheel (spreiding armen in spanwijdte), hoeveel is dit dan ongeveer?'

We raken hiermee tevens het gebied van het meten dat met het eerlijk verdelen van grote betekenis is voor de ontwikkeling van het breukbegrip en de breukentaal.

4 Operator-aspect

Het operator-aspect wordt in nauwe samenhang met de deel-geheel relatie en het meten geïntroduceerd.

AFBEELDING 74



Vervolgfragen bij de Laura-produktie zouden kunnen zijn:

Hoeveel meter is $\frac{1}{2}$ brug?

Hoeveel meter is $\frac{2}{3}$ brug?

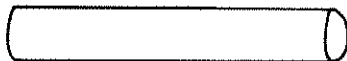
Hoeveel meter is $\frac{5}{6}$ brug?

De laatste twee vragen zijn moeilijk. De introductie van het operator-aspect kan dan ook het beste starten met stambreuken als deel van een hoeveelheid of maat. En deze activiteit kan men dan verbinden met cirkels, rechthoeken en stroken in een reële context.

Eerst wordt het deel-van aangegeven op een ongelede cirkel, rechthoek en strook, dus op een object als een pizza, plak of reep waar de wikkel als het ware nog omheen zit. En vervolgens halen we de wikkel er dan vanaf (in gedachten) en laten de breuk als deel-van op de gehele hoeveelheid 'werken'.

Een voorbeeld met een rolletje drop.

_____ AFBEELDING 75



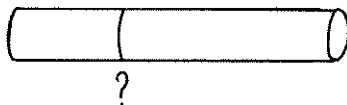
Kleur $\frac{1}{3}$ rol drop.

_____ AFBEELDING 76



In de hele rol zitten 12 dropjes.
Hoeveel dropjes zitten in $\frac{1}{3}$ rol?

_____ AFBEELDING 77



Naast vergelijkbare opgaven met plakken, repen en dergelijke, kan men ook met grootheden als dag, uur, jaar en afstand werken waarbij makkelijk op handige en natuurlijke onderverdelingen kan worden overgestapt.

$\frac{1}{2}$ jaar = ... maanden

$\frac{1}{3}$ dag = ... uur

$\frac{1}{4}$ uur = ... minuten

$\frac{3}{4}$ uur = ... minuten

$\frac{3}{4}$ jaar = ... maanden

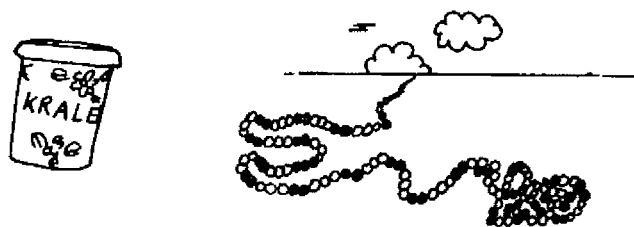
$\frac{1}{4}$ m = .. cm

Pas in een volgende onderwijsperiode komt het operator-aspect ruim aan bod. Hier krijgt het werken ermee nog slechts een verkennend karakter met hoofdzakelijk stambreuken die werken op betrekkelijk kleine getallen.

5 Verhoudingen

Ook de relatie met verhoudingen wordt in de eerste onderwijsfase slechts kort aangestipt. (Laura liet hier dan ook verstek gaan.)

AFBEELDING 78



Het lange kralensnoer is volgens een bepaald patroon geregen.

Vertel eens hoe dat patroon eruit ziet?

De kralen komen uit de grote bus die ernaast staat.

Geef aan welk deel van de (volle) bus gevuld is met witte kralen en welk deel met zwarte kralen.

De relatie '2 van de 5' ('4 van de 10'; '6 van de 15') met $\frac{2}{5}$, en '3 van de 5' met $\frac{3}{5}$ wordt hier in eerste aanzet tot onderwerp van beschouwing gemaakt: breukentaal en verhoudingentaal worden verbonden.

Men dient de betrekking tussen verhoudingen en breuken eerst globaal schattend te benaderen.

Van de taart zijn 5 van de 12 stukjes opgegeten.
Is dat meer of minder dan de helft?

Van een boek met 40 bladzijden heb ik er 12 gelezen.
Is dat meer of minder dan $\frac{1}{4}$ (één kwart)?

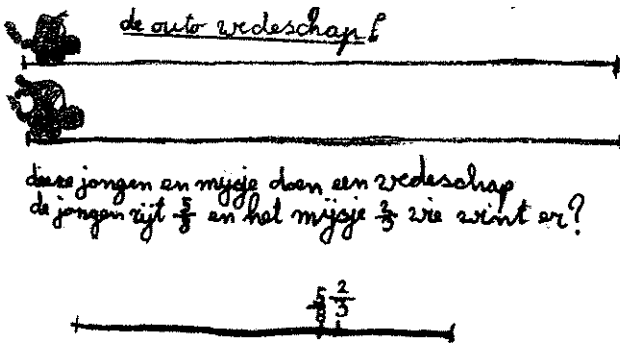
Josi wil 12 baantjes zwemmen. Ze heeft er 9 gedaan.
Heeft ze meer of minder gedaan dan $\frac{3}{4}$ van de afstand?

Hiermee is de veelzijdige inbedding van de breuk als beschrijvingsmiddel in deze context voorlopig voldoende belicht.

In de volgende fase zal het ordenen van breuken op de getallenlijn in het middelpunt komen te staan.

Laura rijdt daarop al wat vooruit in haar laatste eigen productie.

AFBEELDING 79



Gelijknamig maken heeft ze nooit gehad. Hoe is het mogelijk dat ze dit kleine verschil kan vinden?

6 *Besluit*

In de eerste fase staat de brede begripsvorming en de ontwikkeling van de breukentaal centraal. De nadruk valt in deze periode op verdelen en meten.

Breuken ontspruiten aan het verdelen van één of meerdere objecten (pizza's, repen, ...) over verschillende personen. En uit meten ontstaan ze door lengtemeting van voorwerpen met behulp van stroken of stokken. Bij een en ander kunnen zowel gemengde breuken ($2 \frac{2}{3}$ strook bijvoorbeeld) als echte breuken ($\frac{2}{3}$ strook) ontstaan.

De kinderen moeten geleidelijk aan leren de resultaten van het verdelen en meten op sterk verkorte wijze met breuksymbolen te beschrijven. Dit leerproces verloopt via het nader specificeren van de stukken die bij het breken ontstaan. Specificeren wil zeggen: benoemen in termen van breuken als objectnamen van 'stukken', en het noteren daarvan met getsymbolen. Eerst komen daarbij de stambreuken aan bod: een half, een kwart, een derde, een zesde, een achtste. De samengestelde breuken worden daartoe vervolgens herleid: 'twee derde strook' is 'twee keer een derde strook', 'één derde strook plus één derde strook' ($\frac{2}{3}$ strook = $2 \times \frac{1}{3}$ strook = $\frac{1}{3}$ strook + $\frac{1}{3}$ strook). Ook worden breuken aanvankelijk steeds benoemd: $\frac{2}{3}$ staat niet op zich, maar heet $\frac{2}{3}$ strook, of $\frac{2}{3}$ pizza, of $\frac{2}{3}$ plak, of $\frac{2}{3}$ reep, of $\frac{2}{3}$ vouwblaadje, ...

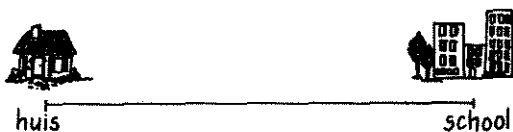
Het is van cruciale betekenis voor de verdere voortgang en de breukenleergang dat de kinderen ruim gelegenheid krijgen tot eerlijk verdelen, vouwen en meten, en het beschrijven van de resultaten ervan. Zo ervaren ze hoe breuken ontstaan en wat de relatie is met de (positieve) gehele getallen die ze al kennen. En ze worden op deze manier geleidelijk vertrouwd gemaakt met de ontstaanswijze van de breukennamen en de notatie ervan. Daardoor maken ze zich bij breuken al tamelijk snel een concrete voorstelling van verdelen of meten.

De vijf aspecten van breuken zijn in het voorgaande geïsoleerd beschreven. In de praktijk van het onderwijs is het echter zinvol om ze zo snel mogelijk te *integreren*. Dat kan bijvoorbeeld door aan het geheel een bepaalde waarde toe te kennen en daarna de

waarden van breukdelen te laten berekenen.

Eerste voorbeeld: we maken een schematische voorstelling van een voor de kinderen bekende route of wandeling. Bijvoorbeeld van huis naar school.¹¹

AFBEELDING 80



We fantaseren over deze wandeling en gaan bij de volgende activiteit vooral *schattend* te werk:

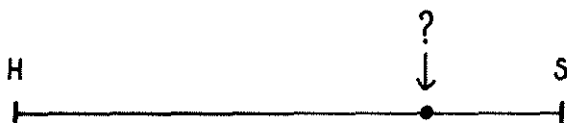
Wijs aan waar je bent:
als je halverwege of op de helft bent;
bijna op de helft;
ruim over de helft;
ongeveer op de helft;
op de helft van de helft;
op een kwart;
bijna op een kwart;
op driekwart.

(Idem met derden en achtsten.)

Deze opgaven ook omkeren, dus bij gegeven plaatsaanduiding de omschrijving geven.

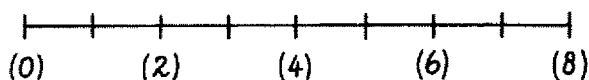
Hoe ver ben je van huis?
Hoe ver is het nog?

AFBEELDING 81



Na een globale exploratie kennen we aan de weg een aantal kilometers toe en laten een schaalverdeling maken waarop de eerdergenoemde begrippen nog eens worden geoefend.

AFBEELDING 82



Bedenk zelf een afstand voor deze weg, waarmee je de helft, een kwart, een achtste van de weg gemakkelijk kunt laten zien.

Je legt een kwart van de weg af en daarna nog eens de helft. Waar kom je dan? Hoeveel moet je nog?

Daarna wordt dit soort oefeningen gebonden aan een tweede grootte. De weg is bijvoorbeeld zestien kilometer en je rijdt een uur met de fiets. Zo ontstaat de dubbele getallenlijn.

Hoe lang heb je gefietst als je op de helft bent?

Als je op drie kwart bent?

Hoe ver moet je dan nog?

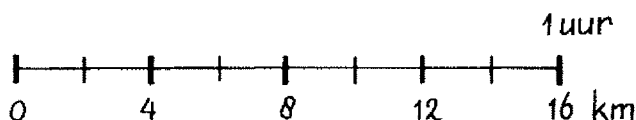
Je fietst twintig minuten, waar ben je dan ongeveer?

Je hebt $\frac{3}{8}$ uur gefietst, waar ben je dan?

Er is een punt aangegeven waar je bent. Hoeveel heb je afgelegd en hoe lang heb je er over gedaan?

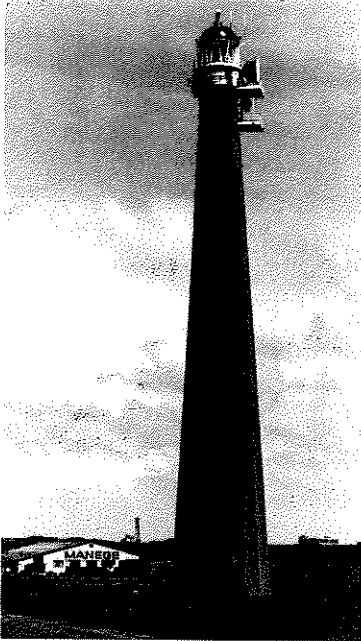
Hierop zijn door verschillende keuzen van afstand en tijd allerlei variaties mogelijk.

AFBEELDING 83



Een ander voorbeeld van een geïntegreerde benadering wordt ontleend aan het volgende krantebericht van 12-2-1994 bij een foto van de Lange Jaap.

AFBEELDING 84



DEN HELDER – De hoogste vuurtoren van Nederland, de Lange Jaap bij Den Helder, wacht al sinds oktober op een verbeurt. Drie kwart is af, maar de werkzaamheden liggen stiel omdat het te vochtig is om te schilderen.

(NRC)

Kleur de vuurtoren voor drie kwart.
Hoe hoog zou zo'n vuurtoren zijn?
Hoe groot (hoog) is het geschilderde deel van die toren bij de door jou vastgestelde hoogte?

Na deze opdracht kunnen gevarieerde opgaven worden gegeven die verwijzen naar deze vuurtoren-context.

Kleur $\frac{2}{3}$ deel van een vuurtoren van 60 m.
Kleur $\frac{5}{8}$ deel van een vuurtoren van 40 m.

Hetzelfde kan worden gedaan met staande of liggende stroken waarop aan de ene zijde een passende ondermaat is gegeven. Hiermee wordt de eerste aanzet gegeven tot het rekenen op de dubbele getallenlijn.

Men kan overigens de tweezijdig gekleurde, stugge stroken ook ombuigen tot *cirkelvormige strips* en zodoende de relatie leggen tussen lijnstroken en cirkelsectoren.

AFBEELDING 85



Indien daarbij 100 als ondermaat wordt genomen, is er een directe link met procenten gemaakt.

We laten het bij deze twee voorbeelden van geïntegreerde activiteiten, omdat we anders teveel vooruitlopen op de inhoud van de doelstellingen die verder reiken dan doelstelling 1 over de betekenisverlening in de eerste onderwijsfase waarop we ons in dit hoofdstuk concentreren.

Noten

- 1 De traditionele methoden hadden in 1987 samen een marktaandeel van 55%. Naar *Zelfstandig Rekenen* (23%), *Nieuw Rekenen* (13%) en *Niveaucursus Rekenen* (10%) zijn de grootste drie in deze categorie. De overgangsmethode *Operator Rekenen* (eerste versie) had toentertijd een aandeel van 28%.
- 2 Het marktaandeel van de zogenoemde realistische methoden was in 1967 nog maar 15 procent - althans voorzover die methoden toen

- ook al in groep 8 werden gebruikt.
- Inmiddels heeft zich een grote verschuiving voltrokken en hebben in 1994 *Wereld in Getallen, Rekenen en Wiskunde, Pluspunt, Operatoir Rekenen* (vernieuwde versie) en *Rekenwerk* samen een groot markt-aandeel verworven van omstreeks 80 procent.
- 3 Zie: Hart, K.M. (ed): *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, London, Murray, 1981.
 - 4 Bokhove, J. en J. Janssen: Periodiek Peilingsonderzoek in het Basis-onderwijs (6), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 8(2), 1989, pag. 5.
 - 5 Citaat uit: Mack, N.K.: Learning Rational Numbers with Understanding: The Case of Informal Knowledge, in: T.P. Carpenter, E. Fennema en T.A. Romberg (eds), *Rational Numbers. An Integration of Research*, Hillsdale, Erlbaum, 1993, pag. 88.
 - 6 Zie noot 4.
 - 7 Zie noot 4.
 - 8 Laura was een zwakke rekenaar uit groep 6. Maar ze werd enthousiast door de nieuwe aanpak van breuken en ze ontwierp zelf een boekje met opgaven. Eigen produkties werden in deze experimenteergroep van Anita Lek geregeld gemaakt. Een jaar na het experiment behoorde Laura tot de beste van de groep wat het breukrekenen betreft - de zelf gemaakte opgaven medio groep 6 geven al een indicatie van de goede richting waarin Laura zich ontwikkelde.
 - 9 Meer voorbeelden van verschillende aanpakken treft men aan in: Streefland, L.: *Realistisch Breukenonderwijs* (dissertatie), Utrecht, Freudenthal Instituut, 1988.
 - 10 Bij de opdrachten hebben we geput uit: Faes, W. en M. van Gevel-Lempers: *Praktisch Nieuw: Breuken*, Den Bosch, Malmberg, 1990.
 - 11 Het idee van een geïntegreerde aanpak van breuken vindt men ook terug in een ongepubliceerd manuscript van Hassler Whitney dat deze befaamde wiskundige vlak voor zijn dood in 1989 voltooide. De ideeën van Whitney sluiten nauw aan bij die van het realistisch reken-wiskundeonderwijs (en uiteraard omgekeerd, maar we zijn pas in de tweede helft van de jaren tachtig met zijn ideeën in aanraking gekomen via enkele publikaties die in de Verenigde Staten nauwelijks de aandacht hebben getrokken).
- Whitney, H.: *Some decision making in mathematics education*, Princeton, 1988 (manuscript).

IV Plaatsen op getallenlijn

Doelstelling 2

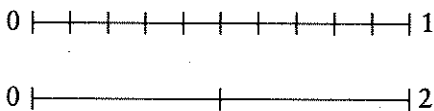
De leerlingen kunnen breuken op een getallenlijn plaatsen.

We nemen nog een keer de opgave van ' $\frac{3}{5}$ op de getallenlijn plaatsen' (zie doelstelling 1). Het overgrote deel van de leerlingen maakt deze opgave goed als het lijnstuk $0 - 1$ is gegeven zonder onderverdeling of met een verdeling in vijf gelijke stukken.

Plaats $\frac{3}{5}$ op de lijn.



Terwijl daarin slechts ongeveer de helft van de leerlingen slaagt indien het betreffende lijnstuk in tien is verdeeld of als het segment $0 - 2$ is getekend.¹



Dat komt omdat bij een fijnere verdeling de betreffende breuk als een koppel van gehele getallen wordt opgevat in plaats van als een zelfstandig (rationaal) getal dat een bepaalde positie op de getallenlijn inneemt.

In het laatste voorbeeld blijkt de deel-geheel opvatting van het $0 - 2$ segment verstoring te werken. Het hele segment $0 - 2$ functioneert voor de leerlingen als eenheid.

Het kunnen ordenen en vergelijken van breuken dat aan het positioneren op de getallenlijn ten grondslag ligt, blijkt lastig te zijn.

Zet op volgorde van klein naar groot:

$\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{7}$.

Dit betrekkelijk eenvoudige ordeningsvraagstuk (je hoeft in feite alleen maar naar de noemers te kijken) wordt door ongeveer de helft van de Nederlandse kinderen einde basisonderwijs goed opgelost (in 1987).²

Uit kleinschalig onderzoek blijkt dat slechts één op de drie leerlingen goed kan beredeneren en toelichten welke van de volgende breuken het grootst is.³

Welke breuk is het grootste: $\frac{1}{2}$ of $\frac{7}{13}$?

Leg uit hoe je aan het antwoord komt.

Uit Amerikaans onderzoek komt naar voren dat vrijwel geen enkele leerling (goedscore 3 procent) de volgende opgave correct kan oplossen⁴:

Welke van de volgende breuken

$\frac{1}{4}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$

ligt het dichtste bij $\frac{3}{16}$?

Vergelijken en ordenen blijken dus tamelijk lastig te zijn. Er is alle reden om daaraan, mede bij het plaatsen van breuken op de getallenlijn, ruime aandacht te besteden.

1 *Metten en redeneren: activiteiten met stroken en stokken*

Zoals beschreven bij doelstelling 1 wordt het meten met breukstokken of -stroken gebruikt om de breukentaal te ontwikkelen. Tevens is meten een goede voorbereiding om breuken als punten op de getallenlijn te leren plaatsen. En ook vormt 'gedacht' meten een concrete basis voor het leren redeneren met breuken.

Eerst een voorbeeld van twee niveaus waarop breuken als resultaat van een meting beschreven worden door twee leerlingen van een proefgroep 6 (eerste helft schooljaar).⁵

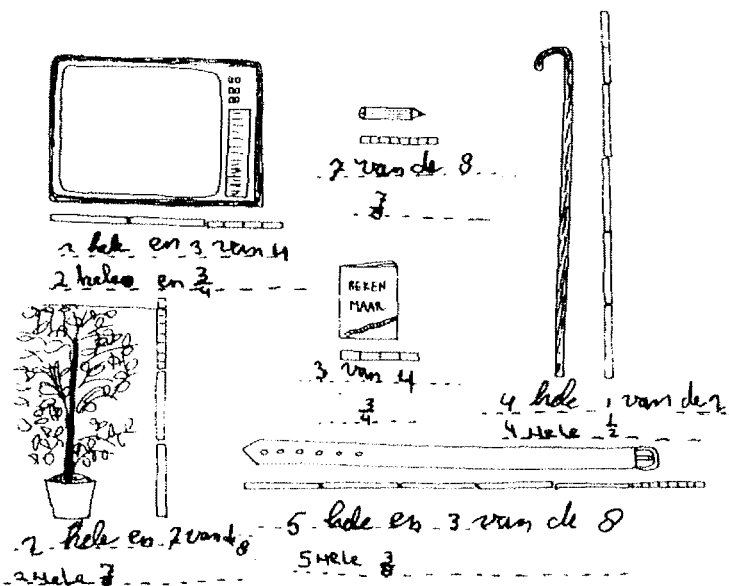
Mieke gebruikt al bijna de formele notatie. Alleen het woordje

'hele' moet nog verdwijnen voor het helemaal zover is. Maar dat zal spoedig gebeuren. En mocht deze aanduiding nog wat langer worden meegenomen, dan is dat ook geen probleem.

Christiaan daarentegen duidt $\frac{3}{4}$ vooralsnog met '3 van de 4' aan. Maar in die vorm beschrijft hij de betreffende lengtematen wel correct.

Hoe lang is het?

AFBEELDING 86



O oplossingen van Christiaan en Mieke

Nadat de leerlingen van een proefgroep 6 enkele lessen met meet-activiteiten hebben gehad, zijn de resultaten bij de onderstaande opgaven als volgt.⁶

Wat is langer, $2\frac{4}{5}$ strook of $3\frac{1}{5}$ strook?

Vrijwel alle leerlingen maken deze opgave goed: de meesten door te redeneren ('de ene is kleiner dan 3 stroken en de ander groter') en de rest door de betreffende metingen uit te voeren.

Wat is langer, $\frac{10}{10}$ strook of $\frac{10}{15}$ strook?


Ook nu weer lossen de meeste leerlingen van de proefgroep 6 het probleem op via redeneren: ' $\frac{10}{10}$ strook is een hele en $\frac{10}{15}$ strook niet'.

Wat is langer, $1\frac{1}{4}$ strook of $1\frac{4}{12}$ strook?

Ongeveer de helft van de kinderen vindt de oplossing via meten. Meestal is hun uitkomst juist. De andere helft redeneert in enkele gevallen correct via vereenvoudigen. De laatstgenoemden hebben de regel van equivalente breuken zelf ontdekt of opgepikt uit de summiere opmerkingen die daarover tijdens het meten en de nabespreking van de (gelijkwaardige) diverse uitkomsten zijn gemaakt. Enkele voorbeelden van redeneringen en verwoordingen daarvan staan in de volgende kaders.

————— AFBEELDING 87

Wat is langer,
 $1\frac{1}{4}$ strook of $1\frac{4}{12}$ strook

ik denk $1\frac{4}{12}$
 omdat als je $\frac{4}{12}$ kleiner
 maakt krijg je $\frac{1}{3}$


ik denk $1\frac{1}{4}$
 omdat het als je het verkleint
 is het $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3}$ is meer dan
 $\frac{1}{4}$.

ik denk $1\frac{4}{12}$
 omdat als je $\frac{4}{12}$ kleiner maakt krijg je $(\frac{1}{3})$. De noemer van $\frac{1}{3}$ is langer dan die van $\frac{1}{4}$

ik denk $1\frac{11}{12}$
 omdat als je $\frac{11}{12}$ iets in drieën deelt is dat meer als in vier

Wat hier gebeurt is echter eerder uitzondering dan regel. Maar het toont wel aan hoezeer de niveaus van rekenen van meet af aan uiteenlopen. Dat blijkt ook bij de volgende opgaven het geval te zijn.

Kim is $6\frac{5}{8}$ strook.

Tom is $7\frac{3}{8}$ strook.

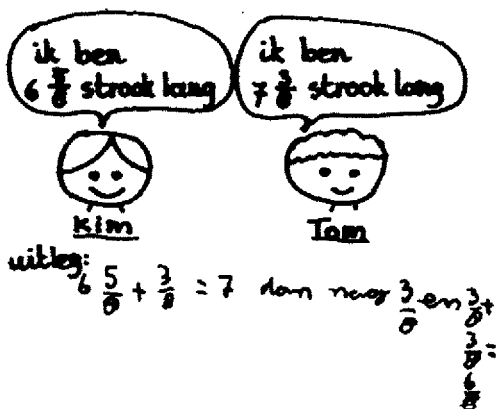
Wie is langer?

Hoeveel langer?

De eerste vraag is door de meesten correct opgelost. De tweede vraag is lastiger, maar wordt toch ook nog door een aanzienlijk deel ('1 op de 3') goed gemaakt, hoewel deze kwestie van hoeveel-langer nog niet aan de orde werd gesteld.

Enkele correcte redeneringen die daarbij worden gevolgd:

AFBEELDING 88



uitleg: Tom is langer dan Kim
 $\frac{6}{8}$ langer, het voorgetal
7 is langer - mer dan
het voorgetal 6

uitleg: roel is $\frac{3}{4}$ langer

Soms is de uitleg bij een oplossing van hoog niveau evenwel te summier om een duidelijk zicht op het onderliggende redeneerproces te krijgen: is de leerling via $\frac{6}{8}$ op $\frac{3}{4}$ terechtgekomen, of is hier geschat? – we weten het niet.

Luukje is $5\frac{2}{3}$ strook.

Fimka is $5\frac{2}{6}$ strook.

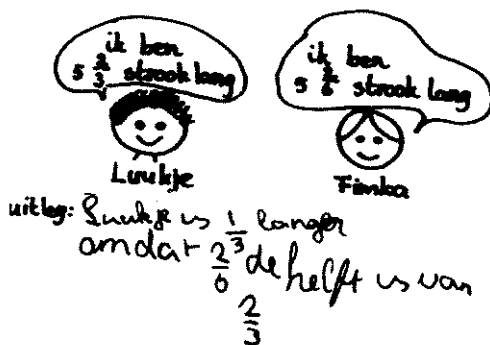
Wie is langer?

Hoeveel langer?



Vrijwel alle leerlingen beantwoorden de eerste vraag goed. Meer dan de helft lost ook het tweede deel op, al is soms niet zo duidelijk hoe ze tot de uitkomst komen.

Enkele argumentaties:

AFBEELDING 89



uitleg: Fimkje is langer!
Omdat $\frac{2}{3}$ meer is dan $\frac{2}{6}$

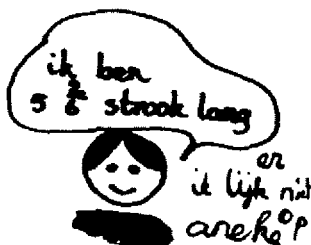
uitleg: omdat $\frac{2}{3}$ 
 $\frac{2}{6}$ 

uitleg: Fimkje is een derde langer
want twee zeste moontje
kleiner is dan halve $\frac{1}{2}$ en
 $\frac{2}{3}$ is langer

Aparte vermelding verdient Fimka's oplossing. Ze voelt zich aangesproken en speelt de opgave terug naar de onderzoekster Anneke (Noteboom)!

Fimka:

AFBEELDING 90



uitleg: Fimkje is langer dan
anneke omdat ze $\frac{1}{3}$ langer
is

Deze resultaten na de eerste meetlessen van de leergang (zie doelstelling 1) tonen aan dat de beschreven activiteiten het breukbegrip en de ontwikkeling van de breukentaal hebben bevorderd. Een deel van de kinderen heeft zelfs reeds enige notie van gelijkwaardigheid verworven. De koppeling van het breuksymbool aan meetstroken of -stukken bereidt tevens voor op het globaal of meer precies plaatsen van breuken op de getallenlijn en daarmee op het ordenen van breuken.

Kunnen ordenen, waaronder ook gelijkwaardigheid valt, houdt echter meer in dan echt of voorgesteld meten. Leerlingen moeten namelijk ook over de relaties van meetresultaten kunnen redeneren. We zullen dit redeneren met breuken als meetgetallen nu wat systematischer met voorbeelden toelichten.

Bedenk eens, zonder echt te meten, welk strookdeel langer

is:

$\frac{1}{2}$ strook

$\frac{5}{8}$ strook.

De redenering kan luiden: ' $\frac{5}{8}$ strook is langer dan $\frac{1}{2}$ strook, want $\frac{1}{2}$ strook is $\frac{4}{8}$ strook'.

Lukt het kinderen niet de oplossing vanuit voorgesteld meten te vinden, dan kan men ze echt laten meten met de $\bar{8}$ -strook. Ze ontdekken dan al snel dat een halve $\bar{8}$ -strook 4 stukken heeft, en dat is minder dan de 5 stukken van $\frac{5}{8}$ strook ...

Vergelijk:

$\frac{3}{7}$ strook

$\frac{7}{12}$ strook.

Bij dit lastige probleem kan een halve strook als ankerpunt worden genomen: $\frac{3}{7}$ strook is 'iets' minder dan $\frac{1}{2}$ strook, en $\frac{7}{12}$ strook is 'iets' meer dan $\frac{1}{2}$ strook.

Vergelijk:

$\frac{5}{6}$ strook

$\frac{7}{8}$ strook.

Nu kan het 'restant' van beide een goed aangrijpingspunt voor vergelijken bieden: $\frac{1}{6}$ strook en $\frac{1}{8}$ strook. Aangezien $\frac{1}{6}$ strook groter is dan $\frac{1}{8}$ strook is $\frac{5}{6}$ strook kleiner dan $\frac{7}{8}$ strook.

Vergelijk:
 $\frac{7}{8}$ strook
 $\frac{7}{9}$ strook.

Vaak kijken kinderen in zo'n geval alleen maar naar de noemers: evenveel stukken in beide, maar die van de eerste zijn wat groter dan die van de tweede, dus ...

Vergelijk:
 $\frac{6}{9}$ strook
 $\frac{7}{9}$ strook.

Hier kijken ze vaak alleen naar de tellers. Kortom, in verschillende gevallen worden uiteenlopende vormen van redeneren uitgelokt. Daarbij worden steeds andere passende referentiepunten gekozen. Pas in tweede ronde – dus nadat ook andere modellen aan bod zijn geweest – is het aan te bevelen om het vergelijken van gelijkwaardige breuken in meer algemene zin aan de orde te stellen, zoals:

Vergelijk:
 $2\frac{2}{3}$ strook
 $2\frac{6}{9}$ strook.

Het nadenken over verrichte of gedachte metingen met stroken en dergelijke, leidt er niet toe dat de meeste kinderen in eerste ronde al een goed beredeneerd begrip van gelijkwaardigheid ontwikkelen dat in algemene zin toepasbaar is. Anders gezegd: ze kunnen proberend wel vaststellen dat $\frac{2}{3}$ strook even lang is als $\frac{6}{9}$ strook, maar de rekenregel erachter zien ze vaak nog niet, en als ze die wel ontdekken, kunnen ze hem nog niet doorzien en beredeneren. Meestal is dat echter al wel het geval indien er sprake is van (herhaald) halveren en verdubbelen, dus bijvoorbeeld in het geval van $\frac{2}{3}$ strook en $\frac{4}{6}$ strook, en zeker bij $\frac{1}{3}$

strook en $\frac{2}{6}$ strook. Deze vraagstelling past dus wel in eerste ronde.

Vergelijk:

$\frac{1}{3}$ strook

$\frac{2}{6}$ strook.

Zo wordt de kwestie van de gelijkwaardigheid in de eerste ronde binnen de meetcontext verkend aan de hand van betrekkelijk eenvoudige voorbeelden uitgaande van het halveren van stambreuken. Maar voor een uitputtende behandeling leent de (lengte-) meethandeling met stroken zich niet zo goed – zoals gezegd blijven de meeste leerlingen aanvankelijk te veel in het louter opmeten steken.

Maar het belangrijke van de eerder geschetste vergelijkingsvragen is juist dat ze tal van alternatieve redeneerwijzen buiten het gelijknamig maken om kunnen uitlokken die voor het informele opereren met breuken van grote betekenis zijn. Tevens laten ze oplossingen op verschillend niveau toe. Daarbij is het echter wel zaak om steeds naar niveauverhoging van echt meten, via voorgesteld meten naar beredeneerd meten te streven.

Maar we moeten erkennen dat de didactische mogelijkheden van het meten in dit opzicht tamelijk beperkt zijn. Het is namelijk lastig om systematisch via meten op de essentie van gelijkwaardigheid van breuken aan te sturen. De opgaven die daarop zijn gericht blijken nogal gezocht en weinig motiverend te zijn:

Met welke strook (stok) kun je zowel $\frac{1}{2}$ strook (stok) als $\frac{1}{4}$ strook (stok) afmeten?

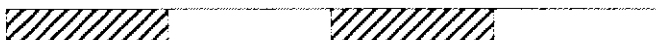
Met welke strook zowel $\frac{1}{2}$ strook als $\frac{1}{3}$ strook?

Met welke strook zowel $\frac{1}{3}$ strook als $\frac{1}{4}$ strook?

.....

Om de redeneringen die achter het oplossen van dergelijke opdrachten steken toch te kunnen opwekken, bedenken we een fantasie-structuurverhaaltje over een breukenbus in een breukenstraat. Daarmee kan de gewenste niveauverhoging van het ordenen van breuken via equivalentie natuurlijker en motiverend

worden bereikt in het tweede en derde kwart van de leergang van zo'n zestig lessen.



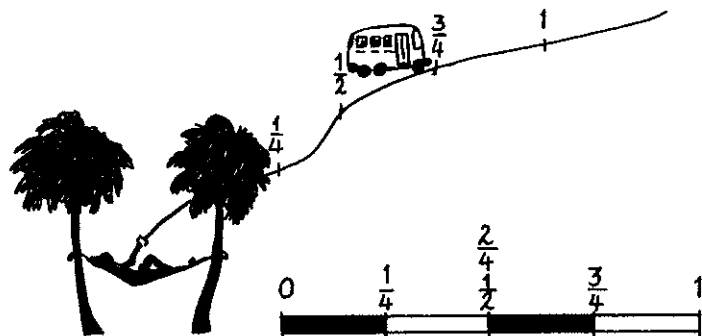
SAMENVATTING EN SITUERING

De beschreven activiteiten met meetstroken worden in het eerste kwart van de leergang gestart en lopen door in het tweede kwart. Sommige leerlingen hebben nogal wat ruimte nodig om de verkorte breukentaal te leren gebruiken aan de hand van de meetstokken. Anderen echter komen via het meten zelfs al tot een goed begrip van equivalentie.

De voorgaande beschrijving is een getrouwe weergave van de differentiatiemogelijkheden. Algemeen gesproken voldoet het meten uitstekend aan de doelstellingen die ermee worden beoogd, namelijk ontwikkeling van het breukbegrip en de breukentaal, plus het globaal en informeel ordenen van breuken op de getallenlijn.

2 *Rijden en redeneren: bussen in de breukenstraat*

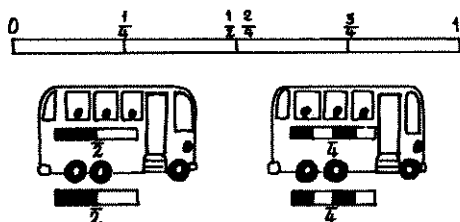
AFBEELDING 91



De breukenbus

Breuken wonen in de breukenstraat.⁷ Iedere breuk heeft een vast adres. Als we de breuken bezoeken moeten we de breukenbus nemen. Naar het adres $\frac{1}{2}$ kan met de $\bar{2}$ -bus worden gereisd. Maar ook de $\bar{4}$ -bus stopt daar.

AFBEELDING 92



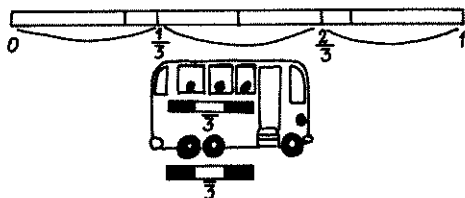
De $\bar{2}$ -bus verdeelt de straat in 2 gelijke stukken, net zoals de $\bar{2}$ -streek of de $\bar{2}$ -stok dat doet. Vandaar ook het streek-teken op de bus dat 2 stukken bevat. Je kunt echter een $\bar{2}$ -bus ook anders beschrijven. Namelijk als een bus die 2 keer stopt, te weten in het midden en aan het eind van de straat.

De $\bar{4}$ -bus verdeelt de straat in 4 stukken en stopt 4 keer. Bezoek je $\frac{3}{4}$ dan moet je bij de derde halte uitstappen. Dat kun je aan het bovenste getal (de teller) zien.

Ga je met de $\bar{4}$ -bus naar $\frac{1}{2}$, dan moet je bij de tweede halte uitstappen. Vandaar dat $\frac{1}{2}$ ook wel $\frac{2}{4}$ wordt genoemd. Deze breuken wonen op hetzelfde adres en zijn gelijk(waardig), dus die mag je voor elkaar inwisselen.

Dan worden $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ bezocht. Daartoe nemen we een $\bar{3}$ -bus, dus de bus die 3 keer stopt (of de straat in 3 gelijke delen verdeelt):

AFBEELDING 93



Nu is de breukenstraat gevuld met halven, kwarten en derden. Laten we nu nog even teruggaan naar onbevredigende meetvragen als:

Met welke strook kun je zowel $\frac{1}{2}$ als $\frac{1}{3}$ strook meten?

Met welke strook, zowel $\frac{1}{3}$ als $\frac{1}{4}$ strook?

In de structuur-context van de breukenbus zijn deze vragen wel zinvol en aansprekend te stellen. Bijvoorbeeld als volgt:

Met welke bus kun je zowel bij halte $\frac{1}{3}$ als halte $\frac{1}{2}$ uitstappen?

Of:

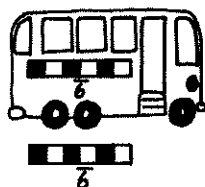
Ik ben bij $\frac{1}{3}$ op bezoek geweest en wil nu de bus nemen die rechtstreeks naar halte $\frac{1}{2}$ rijdt.

Welke bus moet ik dan hebben?

Sommigen zeggen dat het niet kan. Anderen zeggen van wel: je gaat eerst van $\frac{1}{3}$ naar de eindhalte 1 met de $\bar{3}$ -bus en daarna terug met de $\bar{2}$ -bus. Meteen wordt echter ook opgemerkt dat je dan beter van $\frac{1}{3}$ kan teruggaan naar 0 en dan de $\bar{2}$ -bus nemen, dat is korter, sneller en goedkoper. Maar deze ritten gaan niet rechtstreeks.

Lieke merkt op dat het wel rechtstreeks kan: je moet dan een $\bar{6}$ -bus hebben. Dat wordt nader onderzocht.

————— AFBEELDING 94



Om, achteraf, te beredeneren waarom de $\bar{6}$ -bus voldoet, kan gebruik worden gemaakt van het (eerlijk) verdelen. Immers zes stukken kun je zowel eerlijk verdelen in tweeën ($\bar{2}$ -bus) als in drieën ($\bar{3}$ -bus). Maar voor de meeste kinderen staat deze uitleg op een te hoog niveau.

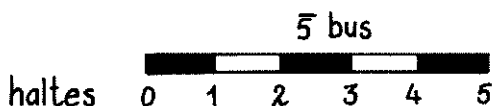
Laten we eerst eens kijken naar de $\bar{5}$ -bus.

Stopt de $\bar{5}$ -bus bij halte $1/2$?

‘Nee.’

Hoe kun je zien dat hij niet bij $1/2$ stopt?

————— AFBEELDING 95



‘Een half zit precies tussen halte 2 en halte 3.’

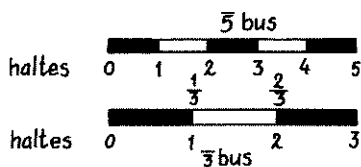
‘Je kunt van $\bar{5}$ niet de helft nemen.’

Nu volgt een belangrijke vraag voor het vervolg van het redeneren met veelvouden en het begrijpen van gelijkwaardigheid.

Stopt de $\bar{5}$ -bus bij $1/3$?

Halte 1 van de $\bar{5}$ -bus ligt voor $1/3$... dat ‘zien’ de kinderen na de voorgaande meetactiviteiten direct: de stukjes van de $\bar{5}$ -bus zijn kleiner:

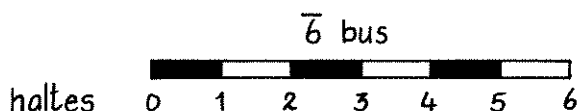
————— AFBEELDING 96



Dat halte 2 van de $\bar{5}$ -bus voorbij $\frac{1}{3}$ ligt kun je ook zien: de strook van de $\bar{5}$ -bus past niet mooi op die van de $\bar{3}$ -bus als je ze op elkaar legt. Of anders gezegd: je kunt de route van de $\bar{5}$ -bus niet in drie gelijke stukken verdelen.

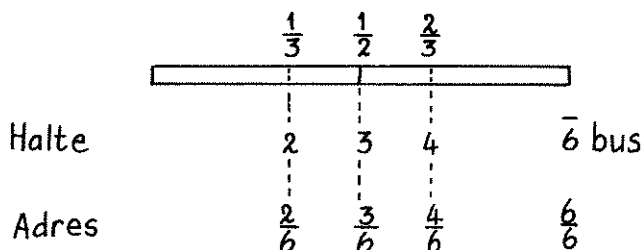
Stopt de $\bar{6}$ -bus bij $\frac{1}{3}$ en bij $\frac{1}{2}$?

————— AFBEELDING 97



De $\bar{6}$ -bus stopt bij $\frac{1}{2}$. Je kunt de $\bar{6}$ -route in tweeën delen.
De $\bar{6}$ -bus stopt ook bij $\frac{1}{3}$. Je kunt de $\bar{6}$ -route in drieën delen.
Lieke heeft dus gelijk.

————— AFBEELDING 98



Het verschil in afstand tussen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ kan nu worden bepaald: één halte met de $\bar{6}$ -bus, of $\frac{1}{6}$ straat.

De breukenbus refereert zowel naar de breuken als punten van de getallenlijn (adressen) als ook naar meetgetallen (lengten, stukken tussen adressen), en dat maakt het mogelijk om bij het redeneren beide interpretaties te benutten.

Men kan bij de beantwoording van de vragen om van het ene adres ($\frac{1}{3}$) naar het andere ($\frac{1}{2}$) te reizen ook een andere, meer geleidelijke onderwijsweg nemen door eerst te onderzoeken welke bussen bij $\frac{1}{2}$ stoppen en daarna welke bussen bij $\frac{1}{3}$.

Bij $\frac{1}{2}$ stopt de $\bar{2}$ -bus, de $\bar{4}$ -bus, de $\bar{6}$ -bus, de $\bar{8}$ -bus, enzovoort.

Bij $\frac{1}{3}$ stopt de $\bar{3}$ -bus, de $\bar{6}$ -bus, de $\bar{9}$ -bus, de $\bar{12}$ -bus, enzovoort.

Daarbij wordt expliciet gemaakt dat naar respectievelijk 2-vouden en 3-vouden gezocht moet worden, oftewel naar getallen die achtereenvolgens door 2 en door 3 gedeeld kunnen worden.

Om de bussen te vinden die zowel bij $\frac{1}{3}$ als $\frac{1}{2}$ stoppen, dienen vervolgens de gemeenschappelijke veelvouden van 2 en 3 gezocht te worden. De $\bar{6}$ -bus voldoet.

Vervolgens stellen we soortgelijke vragen over $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{3}$.

Met welke bus kun je zowel bij $\frac{1}{4}$ als $\frac{1}{3}$ uitstappen?

Ik ben bij $\frac{1}{4}$ op bezoek geweest en wil nu de bus nemen die zonder omweg naar $\frac{1}{3}$ rijdt.

Welke bus moet ik dan nemen?

We zouden ook deze opgave weer via proberen kunnen oplossen door te meten met stroken of met behulp van het breukenbord te werken (zie hoofdstuk 2). Maar we willen de kinderen juist tot redeneren brengen. Dus gaan we anders te werk.

Ook bij dit voorbeeld kan eerst gezocht worden naar verschillende bussen die bij $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{3}$ stoppen en vervolgens naar de gemeenschappelijke bussen.

Bussen die stoppen bij $\frac{1}{4}$: $\bar{4}$, $\bar{8}$, $\bar{12}$, $\bar{16}$, ...

Bussen die stoppen bij $\frac{1}{3}$: $\bar{3}$, $\bar{6}$, $\bar{9}$, $\bar{12}$, ...

De bus die zowel bij $\frac{1}{4}$ als $\frac{1}{3}$ stopt is de $\bar{12}$ -bus. Vervolgens kan naar de haltes worden gezocht ...

Een andere zoek-strategie gaat als volgt.

Zou de $\bar{2}$ -bus stoppen bij zowel $\frac{1}{4}$ als $\frac{1}{3}$?

Nee. De kinderen argumenteren waarom niet.

‘Die rijdt er voorbij.’ De $\bar{2}$ -bus stopt maar twee keer: in het midden en aan het einde.’ ...

Zou de $\bar{3}$ -bus stoppen bij zowel $1/4$ als $1/3$?

‘Wel bij $1/3$, maar niet bij $1/4$.’ ‘Hij rijdt voorbij $1/4$.’

‘Die stopt bij $1/3$, $2/3$ en $3/3$ (1) ...’

Zou de $\bar{4}$ -bus stoppen bij zowel $1/4$ als $1/3$?

‘Wel bij $1/4$, maar niet bij $1/3$, daar rijdt hij door.’

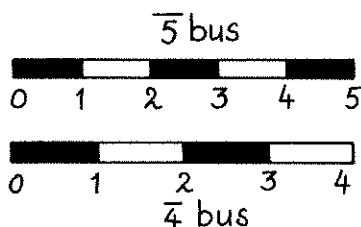
‘Hij stopt wel bij $1/2$, maar dan is hij er al voorbij. ...’

En de $\bar{5}$ -bus?

‘Die stopt eerst vóór $1/4$ en rijdt daar dan voorbij ...’

We vragen naar verduidelijking: de ‘stukjes’ van de $\bar{5}$ -bus zijn kleiner dan die van de $\bar{4}$ -bus. Dus de $\bar{5}$ -bus stopt vóór $1/4$. Maar waarom ligt de tweede halte van de $\bar{5}$ -bus niet bij $1/4$? Dat kun je zien met stroken of met het breukenbord ...

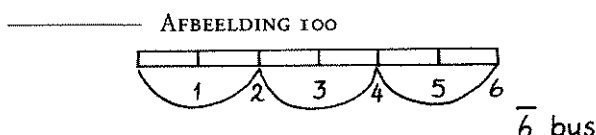
————— AFBEELDING 99



We nemen als onderwijsgevende genoeg met deze verklaring en voegen eraan toe: ‘Je kunt de $\bar{5}$ -route niet in vier gelijke delen splitsen.’

Hoe zit het met de $\bar{6}$ -bus? Stopt die bij $1/3$?

Eerder hebben we gezien dat de $\bar{6}$ -bus daar stopt.
'Je kunt de $\bar{6}$ -route in drieën verdelen.'



Stopt de $\bar{6}$ -bus ook bij $\frac{1}{4}$?

'Nee, want je kunt de $\bar{6}$ -route niet in vieren verdelen.'

Met de $\bar{7}$ -bus zijn we gauw klaar. De $\bar{7}$ -bus stopt niet bij $\frac{1}{4}$, want je kunt de $\bar{7}$ -route niet in vier gelijke delen verdelen. En hij stopt ook niet bij $\frac{1}{3}$, want je kunt de $\bar{7}$ -route niet in drie gelijke delen verdelen.

De $\bar{8}$ -bus stopt wel bij $\frac{1}{4}$, omdat ...

De $\bar{8}$ -bus stopt niet bij $\frac{1}{3}$, omdat ...

De $\bar{9}$ -bus stopt niet bij $\frac{1}{4}$, omdat ...

De $\bar{9}$ -bus stopt wel bij $\frac{1}{3}$, omdat ...

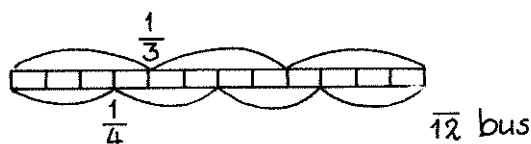
Nog steeds hebben we geen bus gevonden die zowel bij $\frac{1}{4}$ als bij $\frac{1}{3}$ stopt. Zou er geen bus zijn te vinden die dat doet?

De $\bar{10}$ -bus doet het niet, de $\bar{11}$ -bus ook niet ...

Maar nu de $\bar{12}$ -bus!

Die moeten we hebben. Want $\bar{12}$ kun je zowel door 3 als door 4 delen.

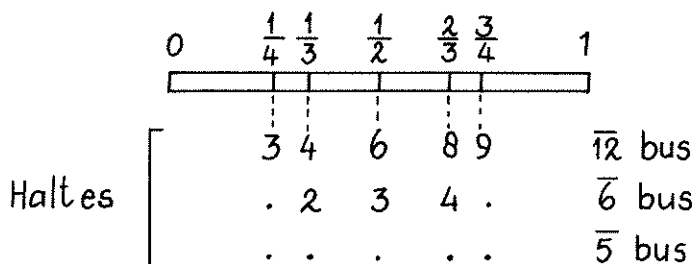
AFBEELDING 101



Het verschil in afstand tussen $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$ is één halte met de $\bar{12}$ -bus, oftewel $\frac{1}{12}$ weg.

Het voorgaande wordt nog eens in schema gezet:

AFBEELDING 102



Het is zinvol om een en ander in een tabel weer te geven.

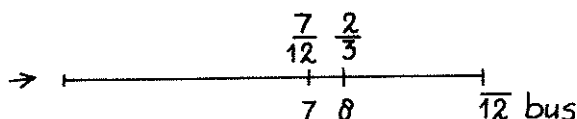
Welke bussen stoppen bij $\frac{1}{2}$? Noem daarna ook de haltes van die bussen:

AFBEELDING 103

$\frac{1}{2}$	haltes	1	2	3	4	5	6	
	bussen	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$...
$\frac{1}{4}$	haltes	1	2	3		
	bussen	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$		
$\frac{1}{3}$	haltes	1	2	3	4	...		
	bussen	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$...		
$\frac{2}{3}$	haltes	2	4	6	8	...		
	bussen	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$...		
$\frac{3}{4}$	haltes	3	6	9		
	bussen	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$		

Indien in dit beperkte breukenwereldje van halven, derden, vierden, zesden en twaalfden ordeningsvragen worden gesteld zoals 'Welke breuk ligt verder in de breukenstraat $\frac{2}{3}$ of $\frac{7}{12}$?' kunnen de antwoorden worden gevonden met de *indirecte methode* waarin met passende ondermaten wordt gerekend – in dit geval een $\overline{12}$ -bus, dat is de bus die de route in 12 gelijke delen verdeelt.

AFBEELDING 104



$\frac{2}{3}$ ligt één halte met de $\overline{12}$ -bus verwijderd van $\frac{7}{12}$. Of anders gezegd: $\frac{1}{12}$ deel van de straat verder – de ordeningsvraag kan op diverse niveaus worden beantwoord.

Met behulp van de tabellen kan echter ook een *semi-directe methode* worden gevolgd van vergelijken.

Welke bussen kan ik nemen? Vul daarna de halte-nummers in.

AFBEELDING 105

$\frac{2}{3}$	haltes	2	4	8
	bussen	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{12}$

$\frac{7}{12}$	haltes	7
	bussen	$\frac{7}{12}$

Met de $\overline{12}$ -bus kan ik beide breuken bereiken.

AFBEELDING 106

Verschil	1
	$\frac{1}{12}$

We noemen deze methode semi-direct omdat hij in de notatie-wijze nog gebonden is aan de context van de bussen. Maar duidelijk is dat we hier al heel dicht tegen de directe methode aanzitten waarin met gelijkwaardige breuken wordt gerekend.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{8}{12} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$$

In plaats van met haltes van een bepaalde bus wordt nu met adressen gewerkt.

AFBEELDING 107

$\frac{2}{3}$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">$\frac{2}{3}$</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">$\frac{4}{6}$</td> <td style="padding: 0 5px;">$\frac{8}{12}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"> </td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;"> </td> <td style="padding: 0 5px;"> </td> </tr> </table>	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{12}$				$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{12}$						
	Bushaltes	Adressen						

Welke bruikbare bussen?

Welke gelijke adressen?

In een tweede of derde ronde – zeg in het derde kwart van de leer-gang – kan de breukenstraat worden uitgebreid met vijftden, acht-sten, tienden, ... vierentwintigsten en honderdsten.

Dan staan de bussen echter niet meer op de voorgrond, maar zijn het gedachte-dingen geworden die op de achtergrond blijven bij het oplossen van ordeningsvragen. Nu wordt ook getracht om zoveel mogelijk de semi-directe of directe methode van gelijk-waardigheid te gebruiken bij het ordenen, vergelijken en verschil bepalen.

Tot slot nog een overzichtje van het eerste deel van het onderwijs met de breukenbus.

Welk doel willen we dienen	Wat kun je vragen binnen deze context?
plaatsen van breuken op de getallenlijn	plaatsen van bushaltes
relatie tussen punt op de getallenlijn en resultaat van een meting	afstand die de bus aflegt vanaf nulpunt en de plaats van de halte
relatie deel-geheel en lengte	lengte van elk willekeurig stukje breukenstraat in relatie tot de hele straat
vergelijken van breuken	plaats van haltes ten opzichte van elkaar; vergelijken van afstanden tussen haltes; vergelijken van afgelegde afstanden door de bussen
equivalentie	welke bussen stoppen bij deze halte? als je naar $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ moet, welke bus kun je dan nemen? ik moet van $\frac{1}{3}$ naar $\frac{3}{4}$, welke bussen kan ik nemen? uitbreiden met nieuwe breuken.



SAMENVATTING EN SITUERING

Het structuurwereldje van de breukenbussen is ontworpen om het formele opereren met breuken betekenisvol te maken.

De activiteiten vinden voornamelijk in het tweede kwart van de leergang plaats en worden voortgezet in het derde kwart met onder meer het winkelen in de breukenstraat, waarover we in het volgende hoofdstuk zullen schrijven.

We moeten bedenken dat het redeneren en rekenen met equivalente breuken in het tweede kwart van de leergang en daarna ook nog vanuit andere invalshoeken wordt benaderd dan die van het meten en de breukenbus. Daardoor treedt nogal wat differentia-

tie in oplossingsniveau op. Maar dat is geen bezwaar. Integendeel, dat is inherent aan de realistische didactiek die het leerproces van onderop stuurt, uitgaande van de verschillende mogelijkheden van de individuele leerlingen.

3 *Formeel opereren op de getallenlijn*

We maken nu een sprong naar het laatste deel van de leergang en concentreren ons op het formele eindniveau dat bij doelstelling 2 kan worden nagestreefd.

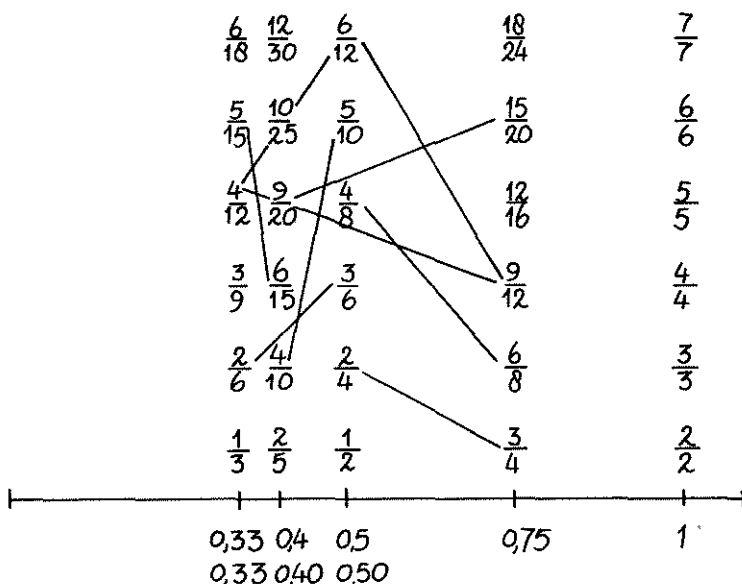
Reikt doelstelling 2 nu zo ver dat de leerlingen bijvoorbeeld ook nabijliggende breuken als $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{5}$ in goede ordening op de getallenlijn moeten kunnen plaatsen?

Het antwoord daarop is 'ja'. Alleen laten we open op welke wijze de leerlingen die oplossing dienen te geven. Dat kan met dit voorbeeld gevonden worden via de omzetting van de betreffende breuken in kommagetallen ($\frac{3}{5} = 0,60$ en $\frac{2}{3} \approx 0,66$) maar ook door de breuken gelijknamig te maken ($\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ en $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$) of door op nog andere manieren met behulp van meetgetallen te opereren ($\frac{3}{5} \text{ m} = 60 \text{ cm}$ en $\frac{2}{3} \text{ m} \approx 66 \text{ cm}$ of 67 cm , idem met gulden en zo meer).

Bij het plaatsen van (gemengde) breuken op de getallenlijn is het van belang om de posities van allerhande breuken globaal ten opzichte van bekende ankerpunten als van $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$ en dergelijke te kunnen bepalen. Ook moeten de leerlingen de vermenigvuldigtabel van breuken via sprongen op de getallenlijn kunnen visualiseren. Kortom, de leerlingen dienen zich, mede via het netwerk van gelijkwaardige breuken, vaardig over de getallenlijn te bewegen. Ook de verwantschap met kommagetallen kan op de getallenlijn worden uitgebeeld (zie afbeelding 108).

Het kunnen ordenen van breuken op de getallenlijn is een fundamentele vaardigheid in het kader van het formeel kunnen redeneren en rekenen met breuken. Naast de basisoperaties van optellen en aftrekken (en in meer globale zin ook vermenigvuldigen en delen), geven we aan het einde van de leergang op de basisschool ook opgaven over de formele kant van het breukrekenen. Deze raken niet direct kerndoelstelling 2 maar hebben er indirect wel mee te maken.

AFBEELDING 108



Ze zijn voor een deel van de leerlingen in het laatste kwart van de leergang zeer motiverend en kunnen de interne betekenis van breuken binnen het vaksysteem onthullen.⁸

- Zoek eens een breuk die dichtbij 1 ligt.
- Welke ligt het dichtste bij 1 van alle breuken die in de groep zijn genoemd?
- Kan er een breuk worden gevonden die nog dichterbij 1 ligt?
- Zoek eens een breuk die tussen .. en ... ligt (woont)?
- Kunnen gehele getallen ook als breuken worden geschreven?
- Is $\frac{13}{24}$ groter of kleiner van $\frac{1}{2}$? Hoe zie je dat?
- Is $\frac{27}{100}$ groter of kleiner van $\frac{1}{4}$? Hoe zie je dat?
- Hoeveel breuken liggen tussen $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2}$?

Het plaatsen van breuken op de getallenlijn, wat start vanuit het meten met breukenstokken en -stroken, hoeft echter niet alleen te

worden aangezet vanuit de activiteiten die daarop direct zijn gericht. Met name het fundamentele begrip en de vaardigheid van het omzetten van breuken in equivalente breuken spruit niet uitsluitend voort uit het meten, maar ook het (eerlijk) verdelen kan daartoe een belangrijke bijdrage leveren. Daarover in het volgende hoofdstuk meer.

Noten

- 1 Bokhove, J. en J. Janssen: Periodiek Peilingsonderzoek in het Basisonderwijs (6), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 8(2), 1989, pag. 5.
- 2 Zie noot 1, pag 5.
- 3 Het betreft een niet gepubliceerd onderzoek naar de rekenprestaties van 142 brugklasleerlingen (HAVO, MAVO, VWO) van een grote scholengemeenschap. Prinsen, L. en H. Udding: *De Reken-Wiskunde Test*, 1992 (manuscript).
- 4 Kouba, V.L. (et al.): Results of the fourth NAEP assessment of mathematics, *Arithmetic Teacher*, 35(8), 1988, pag. 14-19.
Lindquist, M.M. (ed): *Results from the fourth mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*, Reston, N.C.T.M., 1989.
- 5 Gegevens afkomstig van J. Bokhove, lid van de SLO-Fi-CITO groep welke zich met breuken bezighoudt.
- 6 Gegevens zijn afkomstig van A. Noteboom, lid van de SLO-Fi-CITO groep. In de internationale literatuur komt men de benadering van breuken via meten vrijwel niet tegen. De uitzondering om de regel te bevestigen treffen we op de valreep aan in de volgende typisch empiristische bijdrage: Pinel, A.: Broken Numbers, *Strategies*, 4(3), 1994, pag. 27-32.
We zeggen typisch empiristisch omdat veel aandacht wordt geschonken aan echt meten en minder aan 'gedacht' meten en rekenen op grond van die mentale metingen.
De ervaringen in de projectgroep SLO-Fi-CITO met de meetbenadering zijn zeer positief. Dit spreekt temeer daar er aanvankelijk nogal wat scepsis was bij enkele leden omdat dit meten met stroken en stokken weinig praktisch is. Maar als didactisch middel blijkt het buitengewoon goed te voldoen voor de geschetste doeleinden.

- 7 Een eerste ontwerp werd in december 1993 door A. Treffers bedacht en uitgeprobeerd met Angelica Bolwerk. Toen kwam naar voren dat het noodzakelijk is om zowel de haltes als de verdeling in stukken te benadrukken. Gebeurt dat niet en wordt alleen aandacht aan de haltes besteed - zoals aanvankelijk het geval was - dan stukt het redeneren heel snel.

In de periode januari- april 1994 zijn de ideeën van de breukenbus nader in de SLO-Fi-CITO groep uitgewerkt en beproefd door A. Noteboom, J. Bokhove, R. Keijzer en K. Buys.

- 8 Zie bijvoorbeeld: Behr, M.J., I. Wachsmuth en T. Post: Construct a sum: A measure of children's understanding of fraction size, *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 1985, pag. 120-131.
Burns, M.: *A collection of math lessons from grades 3 through 6*, New Rochelle, Cuisenaire Company, 1987.

V Opereren

Doelstelling 3

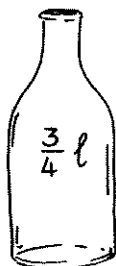
De leerlingen kunnen in eenvoudige toepassingsituaties, met gebruikmaking van modellen, eenvoudige breuken vergelijken, optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen, en kunnen schatkend rekenen door de uitkomst globaal te bepalen.

In hoofdstuk I is al kort uiteengezet dat als consequentie van doelstelling 2 ook het formele verschil bepalen i.c. aftrekken tot deze doelstelling gerekend moet worden, en als gevolg daarvan ook het optellen van kale breuken.

Er is trouwens nog een bewerking die in de vier kerndoelen niet wordt genoemd en dat is het bepalen van *deel-van-veel*, wat een belangrijk praktisch doel vertegenwoordigt.

Uit PPON-onderzoek (1987) blijkt dat *deel-van-veel* opgaven door het overgrote deel van de kinderen einde basisschool goed worden opgelost indien 'veel' een relatief klein getal is. Zelfs een indirecte vorm van deel-van-veel wordt door ruim 80 procent goed gemaakt.¹

AFBEELDING 109

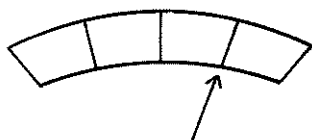


Uit deze fles gaan 9 glaasjes.
Hoeveel glaasjes gaan er uit een hele liter?

Een soortgelijke opgave waarbij een grotere hoeveelheid is betrokken, levert een goedscore op die 20 procent lager ligt.²

AFBEELDING 110

In een lege tank wordt 1200 liter olie gepompt.



Daarna geeft de wijzer aan dat de tank voor $\frac{3}{4}$ gevuld is.
Hoeveel liter kan er in totaal in die tank?

Nog wat lager, namelijk 55 procent, scoort³:

In een stadion kunnen 60.000 toeschouwers.
Je schat dat het stadion voor driekwart is gevuld.
Hoeveel toeschouwers zijn er dan ongeveer?

Indien bij deel-van-veel bepalen ook handig en globaal rekenen wordt betrokken, scoort maar 15 procent zo'n opgave goed.

Op een vergadering zijn 55 personen aanwezig.
Bij een bepaald besluit dat deze vergadering wil nemen is het nodig dat tweederde deel van de aanwezigen vóór stemt.
Hoeveel personen moeten nu minstens vóór stemmen om dit besluit aangenomen te krijgen?

Als bij deel-van-veel bepalen 'deel' een stambreuk is en 'veel' een relatief klein getal (zeg hooguit 24), dan kunnen leerlingen deze operatie al tamelijk vroeg in de leergang oplossen. Maar bij een samengestelde breuk en een relatief grote veelheid is dat al veel lastiger – om over globaal schattend rekenen maar helemaal te zwijgen.

Bij de opbouw van een breukenleergang dienen we speciaal met

deze gegevens rekening te houden waar deel-van-veel bepalen een bemiddelende rol krijgt toebedeeld.

(Vergelijken en ordenen van breuken is reeds in doelstelling 2 besproken.)

Het *optellen* en *afrekken* van eenvoudige ongelijknamige breuken lukt driekwart van de leerlingen (uit 1987) indien er geen overschrijding van een hele plaatsvindt. Gebeurt dat wel dan loopt de goedscore terug naar 60 procent.

En bij een elementaire toepassingsopgave, zoals hieronder staat, zakt het percentage naar 40 procent.⁴

In een recept staat dat er $\frac{3}{4}$ liter melk bij het beslag moet. Willem doet er $\frac{2}{3}$ liter bij. Hij merkt zijn vergissing. Hoeveel liter moet hij er nog bij doen?

En bij gecompliceerde toepassingen daalt de goedscore nog verder⁵:

Vader gaat de tuin opnieuw indelen. De helft van de tuin wordt grasveld. Eén derde deel wil hij beplanten met bloemen en de rest wil hij gebruiken voor het telen van groente. Welk deel wil hij gebruiken voor het telen van groente?

Ten slotte een voorbeeld van schattend optellen:

$\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ is ongeveer ...

Kies het antwoord uit de volgende mogelijkheden:

- 1
- 2
- 19
- 21
- weet niet

Uit een grootschalig onderzoek in de Verenigde Staten blijkt dat slechts één kwart van de dertienjarigen aldaar het juiste antwoord kiest.⁶ Ruim de helft noemt 19 of 21 als antwoord.

Blijkbaar denken deze leerlingen aan 'breukstukken' waarvan er 19 dan wel 21 zijn.

Aangezien tot voor kort ook in Nederland betrekkelijk weinig aandacht aan het schatten werd geschonken in samenhang met het plaatsen van breuken op de getallenlijn, zal het resultaat hier niet veel beter zijn. (De leerlingen in Japan hadden bij deze vraag in een open vorm slechts een goedscore van 5 procent.)

Kortom, de resultaten bij het optellen en aftrekken van breuken variëren nogal, afhankelijk van de soort breuken, het overschrijden van een geheel getal, de context van de toepassingen, de samengesteldheid van de operaties en het al dan niet schattende rekenen wat gevraagd wordt.

Het vermenigvuldigen van breuken in toepassingsituaties verschijnt vaak in de vorm van *deel-van-deel* bepalen.

Een fles van $\frac{3}{4}$ liter is voor de helft gevuld.
Hoeveel liter zit er in de fles?

Deze opgave heeft een goedscore van 30 procent.⁷ Indien bij deel-van-deel stambreuken zijn betrokken, maakt ongeveer 40 procent van de kinderen dergelijke toepassingsopgaven goed.

De kinderen lossen deze vraagstukken op door de (stam-)breuken te *delen* door een geheel getal. Het maakt dan niet veel uit of gevraagd wordt $\frac{1}{4}$ deel van $\frac{1}{2}$ liter uit te rekenen of $\frac{1}{2}$ liter : 4.

Een halve liter limonade wordt verdeeld over 4 glazen.
Hoeveel limonade zit dan in elk glas?

Ook hier is de goedscore 40 procent.⁸

De resultaten zijn echter sterk afhankelijk van de context en de complexiteit van de breuken.

Uit Amerikaans onderzoek blijkt dat de score bij de volgende opgave slechts 10 procent is⁹:

In een kookrecept is voor 3 personen $\frac{5}{8}$ liter melk nodig.
Hoeveel melk moet voor 2 personen worden gebruikt?

Ook kinderen (of volwassenen) die het formele vermenigvuldigen van breuken beheersen, dus $\frac{2}{3} \times \frac{5}{8}$ kunnen uitrekenen, herkennen deze operatie hier niet en slagen er in de meeste gevallen niet in tot een goede oplossing te komen. Meestal zijn de correcte berekeningen informeel en contextgebonden van aard. Vandaar dat formeel vermenigvuldigen en delen van breuken niet tot het kernprogramma behoren: de betreffende algoritmen worden op dit niveau in toepassingsproblemen meestal toch niet gebruikt. En de basiskennis voor informele oplossingen is op zich meestal tamelijk elementair. In het bovenstaande voorbeeld van het recept voor 2 personen berekenen, moeten de leerlingen een breuk kunnen *delen door een getal* ($\frac{5}{8}$ liter : 3) en *vermenigvuldigen met een geheel getal* ($2 \times \frac{5}{24}$ liter) - en die vaardigheden horen wel tot het kernprogramma van de basisschool.

Overigens zijn veel van de zogenaamde toepassingsproblemen nogal gezocht en schools, zoals ook uit het voorgaande blijkt. Met name verschijnen deel-van-deel problemen meestal in de context van verhoudingen (waaronder procenten). Ze kunnen zonder formele operaties met breuken worden opgelost - zie het recept-voorbeeld.

Over het schattende deel-van-deel bepalen of het globaal uitrekenen van delingen van breuken aan de hand van referentiepunten als $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ en dergelijke, zijn geen gegevens van toetsopgaven voorhanden. In het onderwijs ontbreken dergelijke vraagstukken tot nu toe vrijwel geheel.

Tot zover een impressie van de opbrengsten van het opereren in het breukenonderwijs anno 1987.

De PPON-onderzoekers Bokhove en Janssen trekken de volgende conclusie¹⁰:

‘Aan breuken wordt nogal wat tijd besteed in de laatste drie leerjaren. De resultaten vallen tegen. Breuken blijken erg moeilijk te zijn. Afgewogen tegen het praktische nut van breuken is het dan ook de vraag of het onderwerp breuken niet zou moeten worden beperkt tot zaken die in het dagelijkse leven relevant zijn. Een beperking tot het begrijpen van eenvoudige breuken die gebruikt worden in

beschrijvingen en een grote terughoudendheid bij bewerkingen met breuken lijken wenselijk.'

In het volgende zal de laatste opmerking ter harte worden genomen. Kerndoel 3 biedt daartoe alle ruimte. Als het meest fundamentele begrip staat (ook) in dit kerndoel de gelijkwaardigheid van breuken voorop bij het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

1 *Deel-van-veel*

We schreven het al: deel-van-veel bepalen heeft belangrijke praktische waarde.

Enkele voorbeelden uit recente kranteknipsels (eind 1993).

Kwart Duitsers ziet buitenlanders het liefst gaan

Van de tweeduizend ondervraagden in het oosten en westen van Duitsland was ongeveer een kwart van mening dat...

(NRC)

Eén derde fietsen in Amsterdam gestolen

In Amsterdam wordt één derde van de in totaal 450.000 fietsen gestolen. Dat is veel meer dan elders in het land.

(Parool)

Gasunie moet het met één tiende minder banen doen

Gasunie in Groningen wil binnen twee jaar tweeduizend personeelsleden kwijt.

(Volkskrant)

Volgens het Saksische ministerie van buitenlandse zaken zijn steeds meer asielzoekers bang om in het oosten gehuisvest te worden. Twee derde van de dertigduizend aan Saksen toebedeelde asielzoekers is nooit bij opvangcentra komen opdagen, waardoor er nu slechts 8.500 mensen in de ongeveer honderd centra wonen.

(NRC)

Een kippeï van 60 gram weegt na eenentwintig dagen broeden nog 51 gram: 12 gram kalkschaal en 39 gram kuikentje.

Het ei heeft dus bijna een zesde van zijn gewicht verloren in de vorm van water (door de schaalporiën).

(Kijk)

Dergelijke fragmenten lenen zich goed voor het stellen van reken- en controlevragen als:

- Hoeveel van de tweeduizend ondervraagden zien de buitenlanders liever gaan, ongeveer?
- Klopt de krantekop over de Gasunie?
- Is de gewichtsvermindering van 'bijna één zesde' bij eieren met kuikentjes juist?
- Hoeveel fietsen zijn er in Amsterdam gestolen?
- Klopt de berekening van het Saksische ministerie?

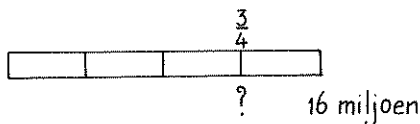
Indien men breuken in het leven van alledag tegenkomt, betreffen deze vaak operatoren, dus breukdelen nemen van een hoeveelheid, aantal of maat. Bijvoorbeeld $\frac{3}{4}$ van de Nederlandse bevolking, oftewel $\frac{3}{4}$ deel van 16 miljoen.

Vandaar dat deel-van-veel onderwezen dient te worden: het vormt een praktisch doel op zich van het breukrekenen. De relatie met verhoudingen en procenten moet daarbij worden betrokken.

In het eerste kwart van de leergang staan stambreuken in de operator. Leerlingen associëren bijvoorbeeld ' $\frac{1}{3}$ deel-van' met delen door 3, ' $\frac{1}{4}$ deel-van' met delen door 4, enzovoort – wat in principe weinig problemen oplevert als de veelheid tenminste niet te groot is (zeg kleiner dan honderd of twintig).

En indien de leerlingen de breukentaal goed interpreteren is het opereren met samengestelde breukoperatoren ook niet zo moeilijk: bij ' $\frac{3}{4}$ deel-van' wordt de veelheid eerst gedeeld door 4 en de uitkomst daarvan vermenigvuldigd met 3.

AFBEELDING III



Anders gezegd: de rekenhandelingen met de breukoperatoren corresponderen met de materiële handelingen die bij de deel-

geheel bepaling met stroken of repen worden uitgevoerd. Indien de rekenvoorwaarden van het kunnen delen en vermenigvuldigen van gehele getallen zijn vervuld en als de breukentaal wordt verstaan, levert het opereren met breuken bij deel-van-veel opgaven weinig moeilijkheden op - zeker niet wanneer de (hoe-)veelheden niet groot zijn.

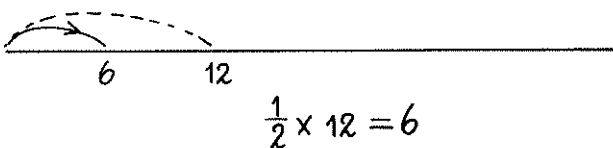
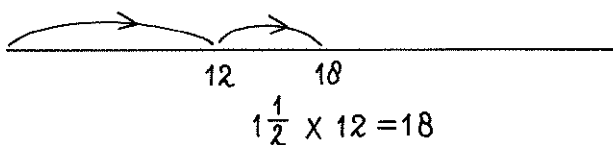
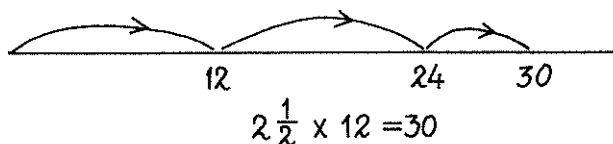
Dit gegeven is van cruciaal belang - we merkten het al eerder op - omdat deel-van-veel niet alleen een nastrevenswaard doel is, maar ook een bruikbaar middel om de basisoperaties met breuken op een indirecte wijze te leren.

In verband met het (latere) vermenigvuldigen van breuken in de basisvorming is het van het grootste belang dat bij *deel-van-veel* direct een *verbinding met vermenigvuldigen* wordt gemaakt. Bijvoorbeeld dat '2/3 deel-van 12' hetzelfde betekent als '2/3 x 12', en omgekeerd.

Hoe kan die relatie worden gelegd? Dat kan via gemengde breuken gebeuren. Eerst een eenvoudig voorbeeld.

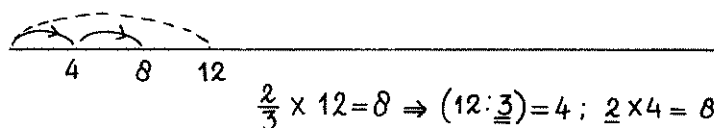
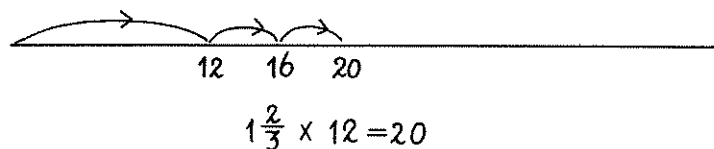
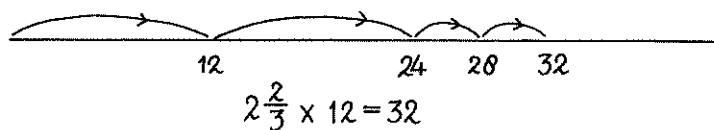
Neem $2\frac{1}{2} \times 12$, dan $1\frac{1}{2} \times 12$ en ten slotte $\frac{1}{2} \times 12$:

————— AFBEELDING 112



Nu hetzelfde met $2 \frac{2}{3} \times 12$, dan $1 \frac{2}{3} \times 12$ en ten slotte $\frac{2}{3} \times 12$:

AFBEELDING 113



Duidelijk is nu dat bij ' $\frac{2}{3} \times 12$ ' dezelfde rekenhandelingen worden verricht als bij ' $\frac{2}{3}$ deel-van 12' bepalen. Kortom, 'deel-van' en 'keer' kunnen gelijkgesteld worden. Daarnaast is voor het vervolg van het breukrekenen van grote betekenis dat de breukoperator ' $\frac{2}{3}$ keer' of ' $\frac{2}{3}$ deel-van' ook geassocieerd wordt met 'delen door 3 en de uitkomst vermenigvuldigen met 2' ($\xrightarrow{3}$ $\xrightarrow{2x}$). Dit nu kan bij deel-van-veel, bijvoorbeeld bij ' $\frac{2}{3}$ deel-van 12' of ' $\frac{2}{3}$ keer 12' zichtbaar worden gemaakt op de getallenlijn, zoals uit de bovenstaande tekening blijkt. Want dat is wat je feitelijk doet. En later bij deel-van-deel komt dit inzicht van pas omdat ' $\frac{2}{3}$ keer' dan ook weer uiteengelegd kan worden in twee opeenvolgende deelbewerkingen met gehele getallen, te weten een breuk vermenigvuldigen met een geheel getal (i.c. 2) en delen door een geheel getal (i.c. 3). En dat zijn operaties die de leerlingen in het kernprogramma leren.

Al met al kunnen aan de hand van deel-van-veel bepalen, en bij concrete voorlopers ervan in de oriënteringsfase op eerlijk verdelen en meten, enkele elementaire inzichten worden verworven die

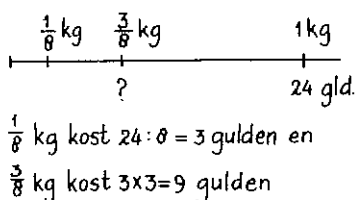
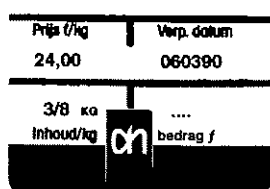
voor met name het vermenigvuldigen en delen van breuken (welke niet tot het kernprogramma behoren) van essentiële betekenis zijn:

- a de verbinding leggen tussen 'deel-van' en 'keer';
- b de breukoperator uiteenleggen in twee operaties ('delen' en 'keer nemen') met gehele getallen.

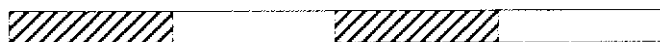
Naast deze waarde van deel-van-veel als didactisch hulpmiddel is er zoals gezegd ook het praktische doel op zich van deel-van-veel bepalen – een doel dat voor het grote deel van de leerlingen haalbaar is.

Men kan deel-van-veel ook situeren in de formele context van 'winkelen in de breukenstraat' door gebruik te maken van speciale winkelbonnetjes, door dus een zelfde context als voor het vermenigvuldigen en delen van kommagetallen te introduceren.

AFBEELDING 114 - 115



Bij deel-van-veel is dat op zich nog niet zo functioneel, maar later bij deel-van-deel kan deze structuurcontext van winkelen in de breukenstraat goed van pas komen. De dubbele of tweeschalige getallenlijn (gewicht en prijs) beeldt duidelijk uit wat hiervoor gesteld is over de relatie 'deel-van' en 'keer', en over de verbinding tussen breukoperator met delen en vermenigvuldigen.



SAMENVATTING EN SITUERING

Deel-van-veel bepalen gebeurt al in het eerste kwart van de leerang met stambreuken en relatief kleine (hoe-)veelheden en maten gevisualiseerd met stroken en repen.

Maar vooral in het tweede en derde kwart van de leergang wordt deel-van-veel als een didactisch middel benut bij het indirect leren opereren met breuken via ondermaten. Voorts komt deel-van-veel ook in de rest van de leergang geregeld aan bod in tal van toepassingsproblemen, mede in relatie met verhoudingen en procenten.

2 *Vergelijken – aftrekken – optellen*

We beginnen weer met enkele voorbeelden uit de krant:

Politie-Opleiding

Ons beleid is gericht op een instroom van één derde vrouwen, één derde allochtonen en één derde mannen, zegt een woordvoerder van de Amsterdamse politie.

(NRC)

Speeltuinen

Van de duizend speeltuinen heeft ongeveer de helft een achterstand in onderhoud en bij twee derde is renovatie nodig.

(School)

Het is opvallend hoeveel moeite men moet doen om voorbeelden van aftrekken en optellen te vinden – nog veel meer dan om deel-van-veel problemen op te sporen. Breuken ontleen hun betekenis vooral aan het vaksysteem zelf (en aan de verbinding met kommagetallen, procenten en verhoudingen).

Hier wordt beschreven hoe de basisoperaties van vergelijken, aftrekken en optellen via het deel-geheel-aspect van breuken kunnen worden onderwezen. We nemen daartoe de *modelcontext* van het verdelen en opdelen van chocoladerepen en -plakken.¹¹

Twee kinderen, Jan en Janneke, eten elk een deel van hun reep (plak) op. Jan eet $\frac{1}{2}$ reep (plak), Janneke $\frac{1}{3}$ reep (plak). (De repen (plakken) zijn gelijk.)

Hoe ziet de reep (plak) eruit waarvan je zowel $\frac{1}{2}$ deel als $\frac{1}{3}$ deel kunt afnemen?

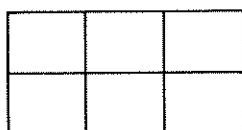
Hoeveel stukjes zou hij hebben?

Kinderen komen na proberen, redeneren en rekenen tot de volgende goede oplossingen:

AFBEELDING 116



Reep met 6 stukjes



Plak van 2 bij 3 stukjes

Ook duikt de mogelijkheid op van een reep of plak met 12 stukjes. Enkele kinderen uit (eind) groep 6 of (begin) groep 7 kunnen beredeneren dat in dit geval het aantal stukjes van de reep of plak 6 of een zes-voud moet zijn: je moet het geheel zowel in tweeën als in drieën (eerlijk) kunnen verdelen, en dat kan alleen maar bij 6 of een zes-voud. Tenminste als je ervan uitgaat dat chocolade zo hard is dat je een stukje niet verder kunt opdelen. Dat is ook precies wat de kinderen blijken te veronderstellen.

De context bewerkstelligt wat we graag willen, namelijk dat de uitkomsten van de operaties met de betreffende breuken gehele getallen zijn. En dat bleek in de proefgroep absoluut niet het geval te zijn indien bijvoorbeeld een continue grootte wordt genomen – zeg een ‘passende’ weg die in tweeën of drieën verdeeld kan worden. Want waarom zou een lengte van 5 km dan niet kunnen? Maar ook bijvoorbeeld een voorgesneden cake voldoet niet, omdat daarvan één stukje nog wel verder opgedeeld kan worden.

Terug naar de chocoladecontext.

Nu de vormkenmerken van de reep of plak ontdekt zijn, komen de volgende vragen aan bod:

Wie van de twee kinderen heeft het meeste gegeten, Jan of Janneke?

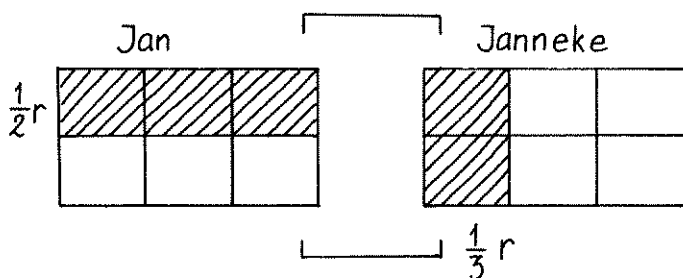
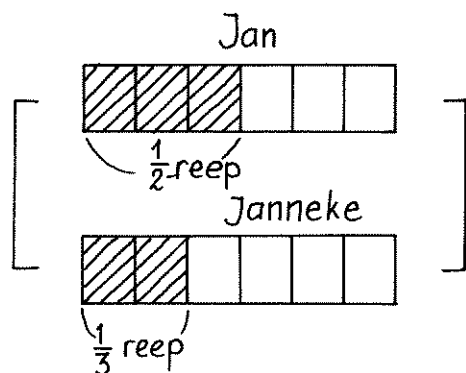
Hoeveel heeft de één meer op dan de ander?

Hoeveel hebben ze samen opgegeten?

Hoeveel heeft Janneke nu nog over?

De meeste leerlingen uit groep 7 die zich in het tweede of derde kwart van de breukenleergang bevinden, zijn in staat deze vragen correct te beantwoorden, en visueel toe te lichten.

AFBEELDING 117



Verschil: 1 stukje
Samen: 5 stukjes
Janneke over: 4 stukjes

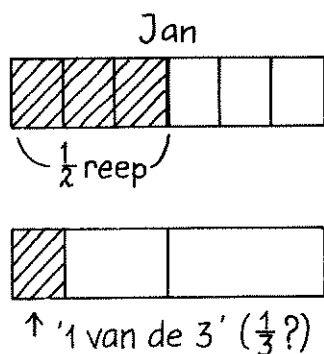
Dit is echter niet het hele verhaal.
Ten eerste zijn er leerlingen die de vragen al in termen van breuken beantwoorden:

Verschil: $\frac{1}{6} r$
Samen: $\frac{5}{6} r$
Janneke over: $\frac{2}{3} r$ of $\frac{4}{6} r$.

Maar ten tweede zijn er in groep 7, nadat de activiteiten van doelstelling 1 en ten dele van doelstelling 2 zijn uitgevoerd, nog steeds enkele leerlingen die breuken als een koppel van gehele getallen interpreteren (uitgezonderd $\frac{1}{2}$ en soms ook $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$). Dat wil zeggen dat ze $\frac{1}{3}$ opvatten als '1 van de 3' en $\frac{2}{3}$ als '2 van de 3' (en niet als 1 of 2 van *elke* 3, waarin het geheel kan worden opgedeeld).

Tekeningen van de reep zien er dan als volgt uit:

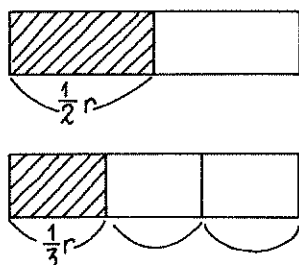
AFBEELDING 118



Verschil: 2 stukjes (?)
Som: 4 stukjes (?)
Janneke over: 5 stukjes (?)

Deze leerlingen kunnen echter wel vrij nauwkeurig $\frac{1}{2} r$ en $\frac{1}{3} r$ aangeven indien de wikkel nog om de reep zit en de 6 stukjes chocolade (nog) niet zichtbaar zijn.

AFBEELDING 119



De globale indeling van deel-geheel kan dan de precieze berekening van $\frac{1}{2}$ deel van 6' en $\frac{1}{3}$ deel van 6' visueel ondersteunen. Dit geldt temeer indien er samengestelde breuken in het geding zijn, bijvoorbeeld in $\frac{2}{3}$ deel van 6' en dergelijke. En de globale indeling is uitgebreid aan de orde gekomen bij de ontwikkeling van de breukentaal via meten met stroken en stokken. Dat lukt de meeste kinderen dan ook heel goed bij de 'ingewikkelde' repen.

Dan nog even terug naar de vlugge leerlingen die de antwoorden direct in breukentaal geven.

Uit de onderzoekliteratuur is bekend dat in het geval van verschil en som vaak verkeerde antwoorden worden gegeven vanwege verwarring over de eenheid.¹² In ons voorbeeld zou men derhalve ook de volgende antwoorden kunnen verwachten:

Verskil: $\frac{1}{12}$ (namelijk 1 van de 12 stukjes).

Samen: $\frac{5}{12}$ (namelijk 5 van de 12 stukjes).

Toch heeft zich dit in onze proefgroepen zelden voorgedaan. Hoe kan dat?

Het antwoord is simpel: vanwege de benoeming 'reep' of 'plak' die de kinderen gewend zijn te maken. Het gaat om een reep of plak van 6 stukjes, dus is het duidelijk dat het bij het verschil en

de som respectievelijk om '1 van de 6' en '5 van de 6' stukjes gaat.

We zijn begonnen met stambreuken omdat deze de mogelijkheid bieden om in de redenering makkelijk over te stappen naar (eerlijk ver-)delen, wat de kinderen ook inderdaad blijken te doen. Zo kunnen ze (vaak achteraf) tot de conclusie komen dat het in de Jan en Janneke opgave om een reep van 6 stukjes (of een 6-voud) moet gaan, omdat je deze zowel in 2 als in 3 stukken kunt verdelen. Oftewel 6 is deelbaar door 2 en door 3. Anders gezegd: '1/2 deel van' wordt geassocieerd met 'delen door 2' en '1/3 deel van' met 'delen door 3'.

Bij samengestelde breuken wordt die directe verbinding met (ver-)delen echter meestal niet gelegd. Vandaar dat soortgelijke vraagstukken met samengestelde breuken behoedzaam aangepakt dienen te worden. Dat kan als volgt.

Geef eerst een opgave met stambreuken.

Het ene kind heeft $\frac{1}{3}$ reep, en het andere $\frac{1}{4}$ reep over.
Hoe ziet de (hele) reep eruit?
Hoeveel is het verschil?

En dan het complementaire vraagstuk:

Het ene kind heeft $\frac{2}{3}$ reep opgegeten, en het andere $\frac{3}{4}$ reep.
Hoe ziet zo'n (hele) reep eruit?

Of:

Het ene kind heeft $\frac{2}{3}$ reep, en het andere $\frac{3}{4}$ reep over.
Hoe ziet hun reep eruit?

Dan wel:

Het ene kind heeft $\frac{2}{3}$ reep, en het andere $\frac{1}{4}$ reep over.
Hoe ziet hun reep eruit?

Zo kunnen de leerlingen ontdekken dat het in eerste instantie bij het zoeken naar de passende reep om de verdelingen gaat die in de noemers van de breuken zijn aangeduid.

Laten we nu eens nagaan hoe de kinderen uit een proefgroep 6, die al in het eerste kwart van de breukenleergang met dergelijke problemen geconfronteerd worden (dus wat vroeger dan wij nu voorstellen), de volgende complexe opgave oplossen.

Adri krijgt $\frac{3}{4}$ deel van een reep.

Anita krijgt $\frac{5}{6}$ deel van een reep.

Hoeveel krijgen ze samen?

Hoeveel van Anita's reep is nog over?

Deze jonge kinderen hebben uiteraard het optellen (en aftrekken) van ongelijknamige breuken nog niet gehad. Wel is de breuk als beschrijver van deel-geheel relaties aan de orde geweest. Ook kunnen de kinderen met breukoperatoren werken, dus bijvoorbeeld ' $\frac{3}{4}$ deel van 12' bepalen, en ' $\frac{3}{4} \times 12$ ' berekenen.

De tekst wordt kort gezamenlijk besproken en de vragen worden toegelicht.

De kinderen gaan nu direct op zoek naar een 'passende' reep, dus naar een reep die zowel in 4 als in 6 porties verdeeld kan worden. De oplossing van 12 (of 24) stukjes komt dan al snel in zicht. En wie het meeste krijgt, is nu ook niet zo moeilijk te bepalen, en ook niet hoeveel ze samen hebben.

Bijna alle kinderen tekenen de repen. Er is een grote differentiatie in niveau zichtbaar. We laten vier oplossingen zien: twee kinderen nemen een reep van 24 stukjes en beantwoorden de twee vragen op twee niveaus, en twee andere leerlingen gaan uit van een reep met 12 stukjes en geven ook antwoorden met stukjes en met breuken.

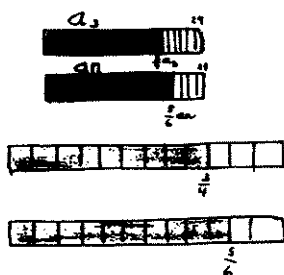
Adri krijgt $\frac{3}{4}$ reep;

Anita krijgt $\frac{5}{6}$ reep.

AFBEELDING 120

Adri krijgt $\frac{3}{4}$ reep

Anita krijgt $\frac{5}{6}$ reep



Hoeveel krijgen ze samen?
Hoeveel houdt Anita over?

AFBEELDING 121

▶ Hoeveel samen?

▶ Hoeveel Anita over?

38 stukjes

4 stukjes

19 stukjes

2 stukjes

$\frac{38}{24}$ $1\frac{14}{24}$

$\frac{4}{24}$

$1\frac{7}{12}$ $\frac{19}{12}$

$\frac{2}{12}$ $\frac{1}{6}$

Er worden geen plakken getekend omdat over (langwerpige, strookachtige) repen wordt gesproken en niet over (rechthoekige) plakken – een vormonderscheid dat in de betreffende klas was gemaakt, aansluitend op het gangbare spraakgebruik.

Welke antwoorden zijn goed? ('Allemaal').

Hoe kan dat? ('De stukjes waarvan er 38 zijn, zijn kleiner dan de

stukjes waarvan er 19 zijn'). De kwestie van de gelijkwaardigheid van breuken dient zich hier als vanzelfsprekend aan, evenals het vereenvoudigen.

Het uithalen van helen komt ook aan de orde. In feite tekent zich in de oplossingen van de kinderen de leergang af die de kinderen moeten doorlopen. Of anders gezegd: *in de dwarsdoorsnede van de oplossingen van de totale groep op een gegeven moment, tekent zich de lengtedoorsnede van het totale te doorlopen onderwijkstraject voor iedere leerling af.*

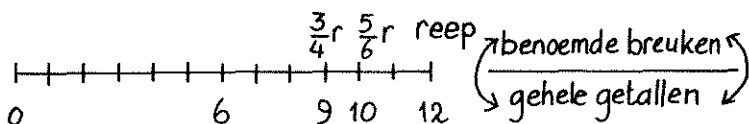
En dat is een duidelijke aanwijzing dat deze modelcontext van de chocoladereep of -plak een krachtig didactisch middel is voor het leren opereren met breuken.

Ten opzichte van de vorige les (over $\frac{1}{2}$ reep en $\frac{3}{5}$ reep) zijn er al verschuivingen in niveau te constateren binnen de kleine proefgroep (in de combinatieklas):

- vier leerlingen halen er nu bij de antwoorden $\frac{19}{12}$ of $\frac{38}{24}$ een hele reep uit, $\frac{17}{12}$ of $\frac{14}{24}$, wat eerst maar één leerling deed – de korte nabespreking van de vorige les bleek effect te hebben;
- van de vijf leerlingen die in de eerste les louter in stukjes antwoordden, zijn er nu drie op de breukennotatie overgestapt, waarvan twee de breuken naast de stukjes notatie plaatsen;
- bij de bepaling van het complement (hoeveel is nog over?) wordt nu door twee leerlingen meer dan eerst een antwoord in breuken gegeven;
- één leerling werkt in feite al formeel met breuken (in groep 6!) en enkele anderen zijn al een eind op weg in die richting, althans binnen de reepcontext.

Hoe kunnen alle kinderen tot de zojuist aangeduide niveauverhoging worden gebracht?¹³

AFBEELDING 122



Of eigenlijk nog een niveau hoger: hoe kunnen kinderen van het indirecte rekenen met breuken via gehele getallen tot het directe opereren met breuken worden gebracht dat al eerder met het meten en eerlijk verdelen is begonnen?

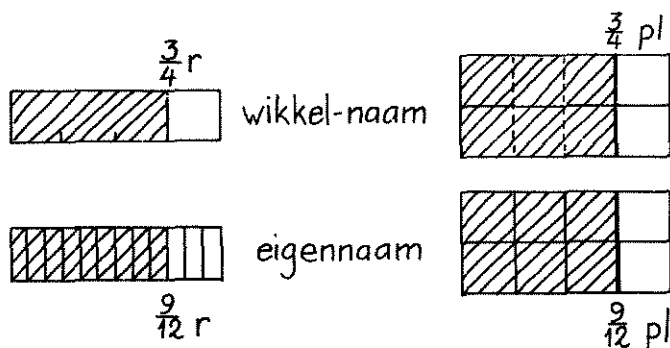
Dat het indirecte rekenen via gehele getallen vervangen dient te worden door het semi-directe rekenen met breuken is makkelijk te motiveren: een antwoord louter in termen van aantallen stukjes zegt eigenlijk niet zoveel, omdat daarin niet tot uitdrukking komt hoe groot de stukjes zijn. Deze problematiek kwam direct al bij het meten naar voren. Zo zijn 4 stukjes van de $\overline{12}$ -reep samen evenveel als 2 stukjes van de $\overline{6}$ -reep en 1 stukje van de $\overline{3}$ -reep (althans indien we met een standaard-reep werken die steeds evenveel chocola bevat – en dat is de afspraak!). De breukaanduiding (of een variant ervan) is dus veel preciezer dan de stukjesaanduiding zonder meer.

En we hebben in de proefgroep 6 (begin groep 6 zelfs) gezien dat het indirecte rekenen met gehele getallen aan de onderkant van de dubbele getallenlijn al snel gevolgd wordt door het semi-directe rekenen met breuken. In feite ligt aanvankelijk de grootste moeilijkheid van de indirecte methode in het vinden van een passende ondermaat. Als die is gevonden loopt vervolgens het ordenen, verschil bepalen en samen nemen van de benoemde breuken meestal tamelijk vlot.

Maar nu de overgang van het indirecte naar het directe opereren met breuken. Hoewel bij sommige vragen, zoals naar het restant van één (geheel) oftewel het complement, kinderen vaak al vlot direct met breuken werken, gebeurt het directe opereren pas in meer algemene zin indien met het gelijknamig maken via *equivalente breuken* gewerkt kan worden.

Equivalentie is eerder te pas gekomen bij het meten en het eerlijk verdelen (doelstelling 1) en in de fantasie-straat waar de breukenbus rijdt (doelstelling 2). Maar ze kan ook direct in de context van de chocoladerepen of -plakken worden betrokken.

Daartoe worden twee nieuwe begrippen ingevoerd, aan te duiden met respectievelijk wikkelaar en eigenaar (of echte naam):



Indien de wikkel nog om de chocoladereep of -plak zit, kun je $\frac{3}{4}$ reep (plak) globaal aangeven. Maar als je de wikkel eraf haalt en de reep (of plak) blijkt 12 stukjes te bevatten, dan kun je preciezer zeggen dat het aangegeven stuk $\frac{9}{12}$ reep (of plak) is. Kortom, $\frac{3}{4} r = \frac{9}{12} r$, en $\frac{3}{4} pl = \frac{9}{12} pl$, waarbij in de discussie over deze schrijfwijze naar voren komt dat '=' hier betekent 'evenveel' (en dat is iets anders dan 'precies hetzelfde').

De relatie tussen $\frac{3}{4} r = \frac{9}{12} r$ of $\frac{3}{4} pl = \frac{9}{12} pl$, kan als volgt worden verwoord: 'indien de stukjes 3 keer zo klein worden, moet het aantal nieuwe stukjes 3 keer zo groot zijn om evenveel chocola te behouden. De noemer van de breuk zegt iets over de grootte van de stukjes en de teller over het aantal stukjes.

Bij het berekenen van ' $\frac{5}{6} r - \frac{3}{4} r$ ' gaat de semi-directe methode als volgt:

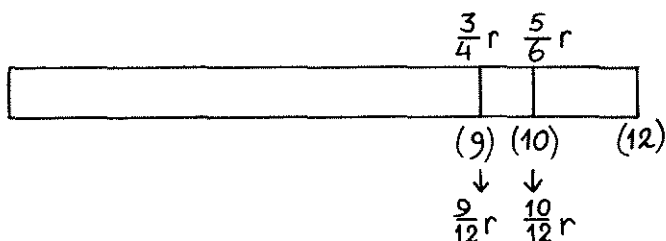
- 1 de wikkelnamen moeten vervangen worden door eigennamen, want het gaat altijd over dezelfde soort repen, en die zien we in deze aanduidingen nog niet terug;
- 2 een $\frac{1}{12}$ -reep kan zowel in zessen als in vieren worden verdeeld;
- 3 dus vervangen we $\frac{5}{6} r$ door $\frac{10}{12} r$ en $\frac{3}{4} r$ door $\frac{9}{12} r$;
- 4 de uitkomst is dus $\frac{10}{12} r - \frac{9}{12} r = \frac{1}{12} r$.

Idem als er 24 stukjes worden genomen.

Het kan natuurlijk nog directer via $\frac{5}{6} r = \frac{10}{12} r$ en $\frac{3}{4} r = \frac{6}{8} r = \frac{9}{12} r$. Je hebt immers repen met even grote stukjes, dus moeten de noemers gelijk zijn ...

Op de getallenlijn kan de samenhang tussen de indirecte, de semi-directe en de directe methode worden afgebeeld.

AFBEELDING 124



Er is echter ook nog een meer *informele* weg die het directe opereren met breuken kan stimuleren. Deze loopt langs het *globale, schattende rekenen* waarin bekende breuken als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ en dergelijke als ankerpunten dienst doen.

Een serie vragen die hierop betrekking heeft:

- Is $\frac{3}{4}$ groter dan $\frac{1}{2}$? Hoeveel groter of kleiner? (Oplossing verloopt via omzetting van $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4}$.)
- Is $\frac{5}{6}$ groter dan $\frac{1}{2}$? Hoeveel groter of kleiner? (Oplossing verloopt via omzetting van $\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{6}$.)
- Welke breuk ligt verder van $\frac{1}{2}$ af: $\frac{3}{4}$ of $\frac{5}{6}$? (Vele oplossingen, waaronder de vergelijking van $\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{6}$ (of $\frac{1}{3}$), of de vergelijking van $\frac{3}{12}$ en $\frac{4}{12}$.)
- Welke breuk is groter: $\frac{3}{5}$ of $\frac{1}{2}$? (Oplossing bijvoorbeeld door vergelijking van $\frac{3}{5}$ met $2 \frac{1}{2}/5$.
Welke breuk ligt dichterbij 1, is dat $\frac{7}{8}$ of $\frac{11}{12}$? (Redeneren vanuit de complementen $\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{12}$.)
- Is $\frac{1}{2} r + \frac{1}{3} r$ groter of kleiner dan $1 r$? ($\frac{1}{3} r$ is kleiner dan $\frac{1}{2} r$, dus ...).
- Klopt het dat $\frac{3}{5} r + \frac{5}{11} r$ ongeveer gelijk is aan $1 r$? (Redeneren via iets groter dan $\frac{1}{2} r$ en iets kleiner dan $\frac{1}{2} r$.)
- Is het juist dat $\frac{1}{3}$ ongeveer gelijk is aan $\frac{33}{100}$? ($3 \times 33 \approx 100$).
- Vul een eenvoudige breuk in: $\frac{51}{100} \approx \dots$. (\approx betekent 'ongeveer gelijk aan').

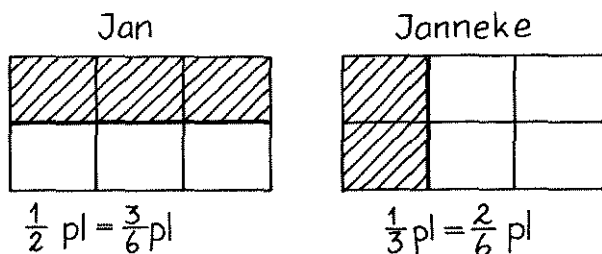
context van enkelvoudige grootheden als tijd, inhoud, afstand, gewicht en dergelijke via het rechthoekmodel ligt nu eenmaal niet voor de hand, of sterker nog, is zelfs in strijd met dergelijke contextsituaties.

Maar aan de andere kant zijn er natuurlijk ook situaties waarin het rechthoekmodel juist beter bij de context past en de lijn-afbeelding minder voor de hand ligt. Bijvoorbeeld bij oppervlak-tebepaling, bij samengestelde grootheden en bij rechthoekige objecten waaraan benoemde breuken gebonden zijn, zoals de plakken, vouwblaadjes, 'landjes', vloeren en zo meer.

Ook in het voordeel van de *plak* of algemeen het rechthoekmodel spreekt dat de *gelijkwaardigheid* van breuken er duidelijk mee kan worden uitgebeeld.

We herinneren nog even aan de halve plak van Jan en een derde plak van Janneke.

AFBEELDING 126



Vooraf de wikkelnamen en eigennamen zijn door de tweezijdige verdeling makkelijk met elkaar in verband te brengen en daarmee ook het gelijknamig maken via equivalente breuken.



SAMENVATTING EN SITUERING

De context-modelactiviteiten betreffende ordenen, vergelijken, verschil bepalen en optellen vinden voornamelijk in het tweede en derde kwart van de leergang plaats. De relatie met de meet-

strook en de breukenbus (zie doelstelling 2) is evident. Maar ook is er een verbinding met het (eerlijke) verdelen te maken (zie doelstelling 4). Binnen de context van de chocoladerepen en -plakken staat het opereren via zowel de indirecte, de semi-directe als de directe methode met gelijkwaardige breuken in het blikpunt van het onderwijs. De dubbelschalige getallenlijn en het rechthoekmodel nemen hierbij een centrale positie in. Via het rekenen met ondermaten wordt de relatie met deel-van-veel zichtbaar.

Kortom, het opereren met breuken zoals hier bedoeld, dient in samenhang met de activiteiten van de andere doelstellingen beschouwd te worden. Vandaar dat de leergang meer als een netwerkstructuur met tal van knooppunten en verbindingslijnen dient te worden opgevat dan als een lineaire gang of trap. De gedifferentieerde reacties en oplossingen van de leerlingen spreken in dit opzicht voor zich: tal van relaties met meten, eerlijk verdelen, verhoudingen, procenten, kommagetallen worden door hen daartoe gelegd, uiteraard mede gestimuleerd door ons als onderwijsgevend.

3 Vermenigvuldigen – delen

Vermenigvuldigen en delen van *breuken en gehele getallen* doen zich vaak bij deel-van-deel bepalen en bij verhoudingsproblemen gecombineerd voor.

Enkele voorbeelden uit krant en kookboek.

Bijna een kwart van de leerlingen mavo/lbo rookt regelmatig, twee derde daarvan komt voor rekening van de meisjes, zo blijkt uit recent onderzoek.

(Volkskrant)

Het hoeveelste deel ongeveer van de mavo/lbo-leerlingen behoort tot de groep van de meisjes die roken?

Ruim een kwart procent van de Nederlanders moet elk jaar medisch behandeld worden voor een hondebeet. Als honden buitenshuis worden aangelijnd, kan ongeveer $\frac{1}{5}$ deel van de beten voorkomen worden.

(Volkskrant)

Hoeveel procent van de Nederlanders zal worden gebeten indien de honden buitenshuis worden aangelijnd?
Hoeveel Nederlanders ongeveer moeten nu medisch worden behandeld voor een hondebeet?

Barbara Jones wees erop dat elke tiende Berlijner een buitenlander is, en dat twee derde van hen al meer dan tien jaar in de stad woont.

(Trouw)

Het hoeveelste deel van de Berlijners is van oorsprong buitenlander en woont al meer dan tien jaar in die stad?
Hoeveel zouden dat er ongeveer zijn?

In een recept van pannekoekjestaart (voor 4 personen) staat dat daarvoor onder meer $1\frac{2}{3}$ kopje bloem nodig is en $\frac{1}{4}$ liter custardvla.

Hoeveel bloem en custardvla heb je nodig voor een recept:

- voor 8 personen
- voor 3 personen
- voor 10 personen?

Bij het oplossen van de deel-van-deel-vraagstukken wordt een stambreukdeel-van-deel bepalen (bijvoorbeeld $\frac{1}{5}$ deel van ...) door de leerlingen opgevat als delen door een geheel getal (delen door 5). Is er een samengestelde breuk in het geding ($\frac{3}{5}$ deel van ...) dan wordt eerst het stambreuk deel-van-deel ($\frac{1}{5}$ deel van ...) uitgerekend en de uitkomst daarna vermenigvuldigd met de teller van de betreffende breuk (i.c. met 3).

Bij verhoudingen doet zich die schakeling van delen en vermenigvuldigen ook voor. In de recept-berekening voor 3 personen, wordt eerst naar 1 persoon toegerekend (delen door 4) en vervolgens naar 3 personen (vermenigvuldigen met 3).

Een breuk vermenigvuldigen met een geheel getal en delen door een geheel getal zijn derhalve basisvaardigheden. In het volgende wordt kort beschreven hoe deze vaardigheden, die tot het basisschoolprogramma behoren, kunnen worden aangeleerd.

EEN BREUK VERMENIGVULDIGEN MET EEN GEHEEL GETAL

Bij doelstelling 2 is al besproken hoe de leerlingen 'sprongen' op de getallenlijn maken, dus herhaald optellen van gelijke breuken moeten kunnen uitvoeren.

Een voorbeeld:

Het verschil tussen twee opeenvolgende schoenmaten bedraagt $\frac{2}{3}$ cm.

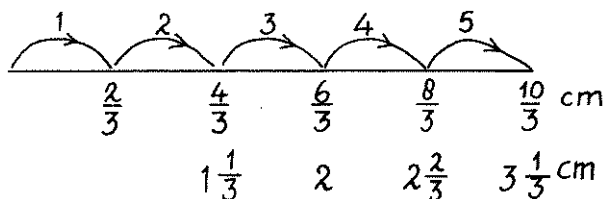
Hoe groot is het verschil in lengte tussen schoenen met maten 37 en 42?

Berekening:

$$42 - 37 = 5$$

$$\text{Het verschil is } 5 \times \frac{2}{3} \text{ cm} = \frac{10}{3} \text{ cm} = 3\frac{1}{3} \text{ cm}$$

AFBEELDING 127



Dergelijke opgaven leveren weinig problemen op. Men kan ze nog wat moeilijker maken door met halve maten te laten rekenen.



Indianen op de vlucht voor Columbus (Giuliani Dati, Isole, trovate nuovamente per el Re di Spagna, Florence, 1495)

Uit het scheepsjournaal van Christoffel Columbus:

‘Zondag, 27 januari 1493

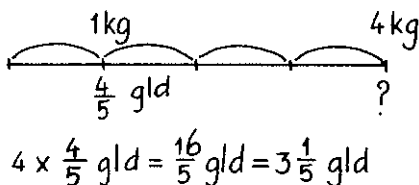
Gisteren na zonsondergang ben ik eerst naar het N.O. gevaren en later N.t.O. en door gedurende dertien uur $3\frac{3}{4}$ knoop te lopen, kwam ik $48\frac{3}{4}$ mijl verder.’¹⁴

Klopt de berekening ongeveer?

Klopt de berekening precies?

Men kan dergelijke vragen ook omkeren en bijvoorbeeld aan de orde stellen hoelang Columbus op zaterdag, 2 februari 1493, gedaan heeft over $57\frac{3}{4}$ mijl, varende $5\frac{1}{4}$ knoop ... Men krijgt dan een deling of een op-vermenigvuldiging. Ook kan het vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal met bonnetjes bij het ‘winkelen in de breukenstraat’ worden toegepast.

Prijs /kg	Verp. datum
4/5 gld	060390
4 KG	ch bedrag f
Inhoud/kg	



De dubbelschalige getallenlijn beeldt de vermenigvuldiging op vrijwel identieke wijze uit als de visualisering met sprongen.

Ook receptopgaven laten zich op dezelfde manier tekenen - zie bijvoorbeeld het bloem- en custardvla-recept voor 8 personen.

$$2 \times 1 \frac{2}{3} \text{ kop} = 2 \times \frac{5}{3} \text{ k} = \frac{10}{3} \text{ k} = 3 \frac{1}{3} \text{ k.}$$

(Men zou gebruik kunnen maken van standaardkopjes van een hele, een halve, een derde en een kwart kopje. In Amerika zijn dergelijke setjes ook in de handel voor recepten. Hier zouden ze als leermiddel bruikbaar kunnen zijn.)

De algemene regel is gauw gevonden: bij het vermenigvuldigen van een (gemengde) breuk met een geheel getal moet de teller worden vermenigvuldigd en blijft de noemer 'staan'.

EEN BREUK DELEN DOOR EEN GEHEEL GETAL

Uit de toetsresultaten die in het begin van dit hoofdstuk werden vermeld, kan men aflezen dat een breuk delen door een geheel getal - in een context of als kale opgave gesteld - uitermate complex blijkt te zijn, althans in de traditionele onderwijsaanpak. Zelfs het delen van twee gehele getallen is bij een niet-opgaande deling moeilijk.

Zet men zo'n deling van gehele getallen echter in een context van eerlijk verdelen met benoemde breuken, zoals in de realistische breukendidactiek gebeurt, dan levert dat weinig problemen op. Sterker: dergelijke opgaven staan juist aan het begin van de leer-gang om mede daardoor de breukentaal te helpen ontwikkelen (zie doelstelling 1).

Maar een breuk delen door een geheel getal of een stambreuk-deel-van-deel nemen, is lastiger. Daartoe staan ons vier onderwijsmethoden ter beschikking die in het inleidende hoofdstuk en daarna al herhaaldelijk ter sprake werden gebracht, te weten:

- de indirecte methode,
- de semi-directe methode,
- de directe methode,
- de transformatie-methode.

De indirecte methode werkt met ondermaten.

Jim heeft $\frac{2}{3}$ reep (plak) opgegeten.

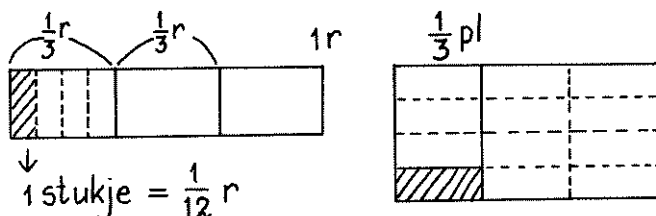
De rest van de reep (plak) wordt eerlijk verdeeld onder 4 personen.

Hoe zou de reep (plak) eruit kunnen zien; hoeveel stukjes zou hij bevatten?

Hoeveel krijgt ieder? (Hoeveel stukjes en het hoeveelste deel van de reep (plak)?)

Dat $\frac{1}{3} r : 4 = \frac{1}{12} r$, of $\frac{1}{4}$ deel van $\frac{1}{3} r = \frac{1}{12} r$, wordt via de ondermaat van 12 stukjes gevonden.

AFBEELDING 131



Controle achteraf kan gebeuren met de boogjesmethode:

$\frac{1}{3} r : 4 = \frac{1}{12} r$; $\frac{1}{3} r = \frac{4}{12} r$, dus het antwoord $\frac{1}{12} r$ is correct. Dezelfde vraag kan gesteld worden als Jim $\frac{1}{3}$ reep heeft opgegeten en er dus nog $\frac{2}{3} r$ over is. Het part-voor-part verdelen van $\frac{1}{3} r$

over 4 personen levert in dit geval 2 stukjes of $2 \times \frac{1}{12} r$ of $\frac{2}{12} r$ of $\frac{1}{6} r$ op. Hetzelfde geldt voor '1/4 deel van $\frac{2}{3} r$ ' bepalen.

Een en ander kan ook met een rechthoekige plak worden uitgebeeld.

De delingsregel kan zo inzichtelijk worden gevonden: bij delen of een stambreukdeel nemen, moet de noemer van de breuk met het betreffende gehele getal worden vermenigvuldigd, de teller blijft ongewijzigd.

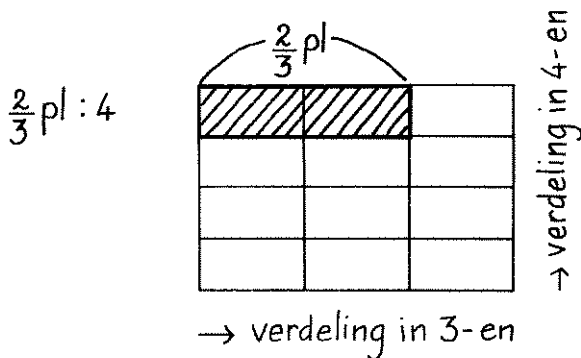
De directe methode gaat via equivalente breuken.

$\frac{1}{3} pl : 4 = \frac{4}{12} pl : 4 = \frac{1}{12} pl$; controle $4 \times \frac{1}{12} pl = \frac{4}{12} pl = \frac{1}{3} pl$

$\frac{2}{3} pl : 4 = \frac{4}{6} pl : 4 = \frac{1}{6} pl$; controle ...

Daarbij kunnen de tweezijdig verdeelde plak of de eenzijdig verdeelde reep als concrete ondergrond fungeren.

AFBEELDING 132



De plak is verdeeld in 12 stukjes.

$\frac{2}{3} pl = \frac{8}{12} pl$; $\frac{8}{12} pl : 4 = \frac{2}{12} pl$.

Hetzelfde geldt voor '1/4 deel van $\frac{2}{3} plak$ ' bepalen.

De reep is verdeeld in 6 stukjes van $\frac{1}{6} r$; $\frac{2}{3} r : 4$ bevat 1 stukje oftewel $\frac{1}{6} r$.

Redeneert men zó, dan past men de semi-directe methode toe: een mengvorm van de indirecte methode met stukjes en de directe methode waarin de stukjes met breuken worden benoemd.

De transformatie-methode zet breuken om in verhoudingen.

Hoe dat gaat kan met het mavo/lbo-vraagstuk over roken worden gedemonstreerd.

Een kwart van de leerlingen rookt regelmatig, één derde deel daarvan komt voor rekening van de jongens en de rest zijn meisjes.

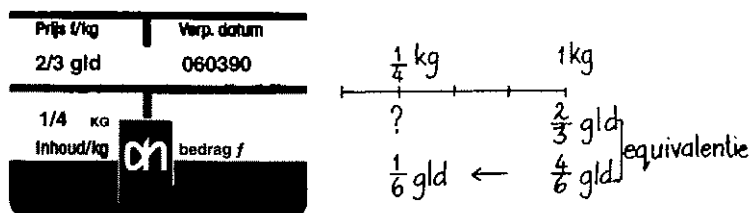
De fractie $\frac{1}{4}$ kan worden omgezet in de verhouding '1 leerling van elke 4 leerlingen'. Eén derde deel daarvan zou uitmonden in ' $\frac{1}{3}$ leerling van elke 4 leerlingen' maar dat klinkt weinig reëel.

Zet nu '1 van de 4' om in '3 van de 12' want daarvan kun je wel $\frac{1}{3}$ deel nemen (of delen door 3), wat '1 van de 12 leerlingen' oplevert of $\frac{1}{12}$ deel van de leerlingen.

En in het geval van ' $\frac{1}{4}$ deel van $\frac{2}{3}$ ' bepalen, wordt dat $\frac{1}{4}$ deel van '4 van de 6' wat '1 van de 6', oftewel $\frac{1}{6}$ als antwoord geeft in de context van fracties.

In de context van 'winkelen in de breukenstraat' verschijnt het delen of het stambreukdeel-van-deel nemen als volgt:

AFBEELDING 133 - 134

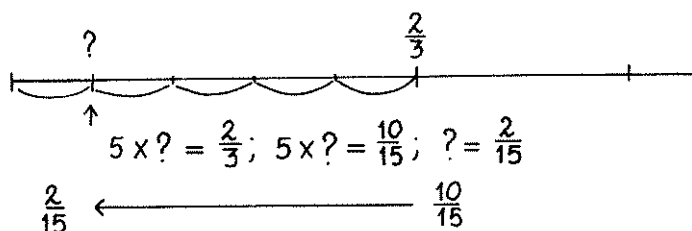


Daarbij wordt gebruik gemaakt van equivalentie, dus van de directe methode, en van het feit dat ' $\frac{1}{4}$ deel-van' en 'delen door 4' identieke operaties zijn.

Welke methode ook wordt gevolgd, in alle gevallen is het zinvol om de deling en de uitkomst ervan plus de controle erop uit te beelden met de getallenlijn. Het verband met vermenigvuldigen wordt dan ook duidelijk.

Neem bijvoorbeeld $\frac{2}{3} r : 5 = ?$ of $\frac{1}{5}$ deel-van $\frac{2}{3} r = ?$

AFBEELDING 135



Begrip van equivalentie is hier cruciaal.

Men kan leerlingen *eigen produkties* laten maken van opgaven die aan de andere leerlingen worden voorgelegd waarbij ze gebruik maken van equivalente 'schuilnamen'.

Bijvoorbeeld: $12/15 \text{ r} : 3 = 4/15 \text{ r}$. En je geeft hem op als: $4/5 \text{ r} : 3 = ?$
De rekenregel is overigens snel ontdekt, zowel voor vermenigvuldigen met als voor delen dóór een geheel getal.

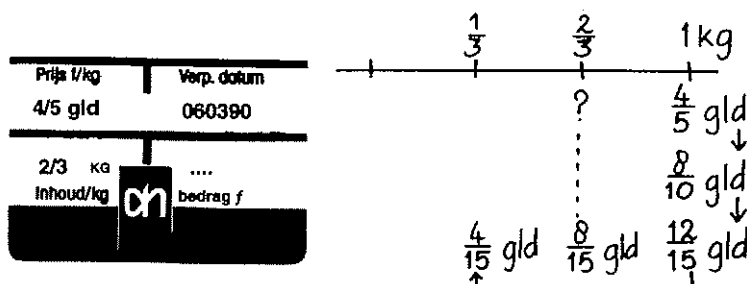
VERVOLG RICHTING BASISVORMING

In principe ligt de weg naar het meer formele deel-van-deel bepalen, vermenigvuldigen en delen van breuken open. Dat wil zeggen dat nu bijvoorbeeld ook complexe receptvraagstukken en bonnetjesvraagstukken gemaakt kunnen worden. Immers bij deel-van-veel bepalen is eerder de relatie tussen 'breuk-keer' en 'deel-van' en tussen 'eerlijk delen' en 'deel-van' gelegd. Tevens is de breuk-operator uiteengelegd in een samenstel van achtereenvolgens delen dóór en vermenigvuldigen met een geheel getal.

En aangezien de meeste leerlingen deze relaties tegen het einde van de leergang van zestig lessen kennen en de rekenvaardigheid bezitten om breuken te delen door en te vermenigvuldigen met gehele getallen, zijn op dit punt alle voorwaarden vervuld om de laatste stap naar het formele opereren te zetten, louter werkend op symbolisch niveau.

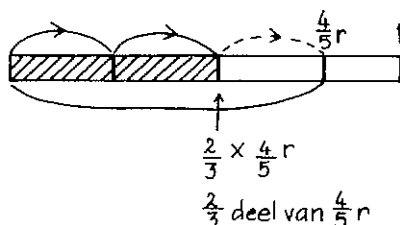
Neem bijvoorbeeld $2/3$ deel-van $4/5$, of $2/3 \times 4/5$, al dan niet in een context met 'winklonnetjes van de breukenstraat'.

AFBEELDING 136 - 137



De breukoperator $\frac{2}{3}$ deel-van of $\frac{2}{3} \times$ wordt uiteengelegd in een deling door 3 en een vermenigvuldiging met 2 - precies overeenkomend met de gedachte handeling bij $\frac{2}{3} \times$ of $\frac{2}{3}$ deel-van nemen zoals uitgebeeld op de getallenlijn.

AFBEELDING 138



In feite zijn de handelingen $\frac{4}{5} \xrightarrow{:3} \dots \xrightarrow{2x} \dots$

Toepassing van de regels geeft $\frac{4}{5} \xrightarrow{:3} \frac{4}{15} \xrightarrow{2x} \frac{8}{15}$

'noemerregel' 'tellerregel'

Een en ander vooronderstelt echter dat kinderen hierbij op formeel niveau met breuken kunnen redeneren. En dat is voor veel leerlingen op de basisschool toch te veel gevraagd. Kerndoel 3

verlangt dat trouwens ook niet, al zou men met een kleine groep leerlingen wel verder kunnen gaan in de richting van deel-van-deel bepalen en zelfs formeel vermenigvuldigen en delen.

Men kan echter de genoemde deel-van-deel bewerking en de bijbehorende keeloperaties ook op minder formele wijze benaderen met vouwblaadjes, repen en plakken – dus een andere weg nemen dan zojuist werd geschetst op symbolisch niveau.¹⁵ En vervolgens de stap naar delen maken.¹⁶

Het kunnen vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal en het delen door een geheel getal vormen daarvoor zoals gezegd de grondslag. En deze kan in het basisonderwijs worden gelegd. De basisvorming moet daarop voortbouwen, althans voor de leerlingen waarop dit van toepassing is. Of we daarmee voor de meeste leerlingen van de basisschool niet te laag mikken bij het opereren?

Recept voor pompoen- of aubergineschotel voor vier personen.

75 gram boter 1 ui 4 middelgrote pompoenen of aubergines
--

Polly kookt voor 7 personen Ze vermenigvuldigt alle hoeveelheden met $1\frac{3}{4}$.

Is dat juist?
(vul in ja of nee)

Ron kookt voor drie personen. Hij vermenigvuldigt alle hoeveelheden met $\frac{3}{4}$.

Is dat juist?
(vul in ja of nee)

Uit het PPOON-onderzoek van 1987 blijkt dat een kwart van de leerlingen deze twee opgaven goed beantwoordt met ja: precies de kansscore bij twee keer ja-nee.¹⁷ Maar dat betekent overigens niet dat ze de berekening van de pompoenen of het gewicht van

de boter niet (globaal) goed zouden maken of zelfs nog complexer deel-van-deel opgaven met recepten. Alleen zien ze het formele verband van de uitgevoerde bewerkingen met de verkorte rekenprocedure met breuken niet – en dat wordt met kerndoel 3 ook niet verlangd bij het (informele) oplossen van toepassingsproblemen.

Wat we willen vermijden bij het leren van de operaties zijn schijnbegrippen en schijnvaardigheden die nauwelijks toepasbaar zijn op contextopgaven.



SAMENVATTING EN SITUERING

We streven vaardigheden en inzichten na die elementair zijn. En dat waren bij kerndoel 3 het deel-van-veel bepalen, het equivalentiebegrip, de relatie zien tussen deel-van en keer en deel-van en delen, de samenhang tussen de basisoperaties, de betrekking tussen de breukoperator en de bewerkingen van vermenigvuldigen met en delen door gehele getallen, en de (globale) schattende visualisering van de operaties met breuken op de (dubbele) getallenlijn. Met deze vaardigheden, begrippen en middelen kunnen in principe alle toepassingsopgaven opgelost worden waarin de genoemde basisbewerkingen van doelstelling 3 besloten liggen.

De realistische didactiek om doelstelling 3 te bereiken, staat met deze elementaire gerichtheid in schrille tegenstelling tot de didactiek van het uiteenleggen van leergangen in kleine stapjes. Deze didactiek mikt direct op (deel-)vaardigheden zonder de basale inzichten te laten verwerven die aan deze goed begrepen vaardigheden ten grondslag liggen. Het pad naar ongecijferdheid wordt daarmee geëffend.

De realistische didactiek daarentegen beziet het opereren met breuken mede in het licht van gecijferdheid. En indien voldoende aandacht aan de genoemde fundamentele vaardigheden wordt besteed, zal in dit opzicht grote vooruitgang geboekt kunnen worden in vergelijking met de huidige prestaties van het breukrekenen zoals beschreven in de inleiding van dit hoofdstuk ($7/8 +$

$12/13 \approx \dots$) - dit ondanks de beperking van de onderwijstijd in de leerstof ten aanzien van het formele vermenigvuldigen en delen van breuken.

Het vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal gebeurt al in het tweede en zeker in het derde kwart van de leergang.

Een breuk delen door een geheel getal dient in het derde en het vierde kwart van de leergang gesitueerd te worden. Voorwaarde is dat het equivalentiebegrip al behoorlijk is ontwikkeld.

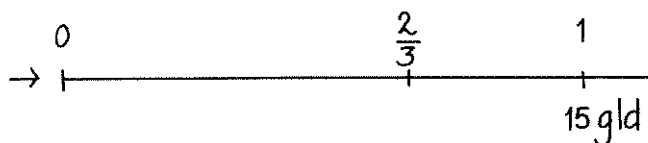
Deel-van-deel bepalen en het vermenigvuldigen en delen van breuken behoren niet tot het kernprogramma van de basisschool, maar men kan in de tweede helft van groep 8 gelegenheid geven aan de (zeer) goede leerlingen om ook deze meer formele doelen voor een belangrijk deel op eigen kracht te bereiken. We hebben geschetst hoe dat kan en welke basisvoorwaarden daartoe vervuld moeten zijn.

4 Overzicht operaties

We vatten de bedoelde operaties samen, mede via hun afbeeldingen op de getallenlijn.

- Deel-van-veel

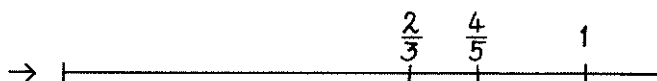
AFBEELDING 139



Een strook kost 15 gulden.
Hoeveel kost $\frac{2}{3}$ strook?

- Optellen en aftrekken

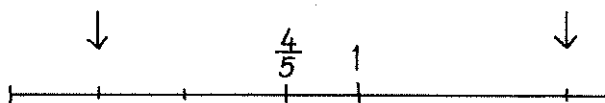
————— AFBEELDING 140



Hoeveel is het verschil tussen $\frac{4}{5}$ en $\frac{2}{3}$?
 Hoeveel zijn de stukken $\frac{2}{3}$ en $\frac{4}{5}$ samen?

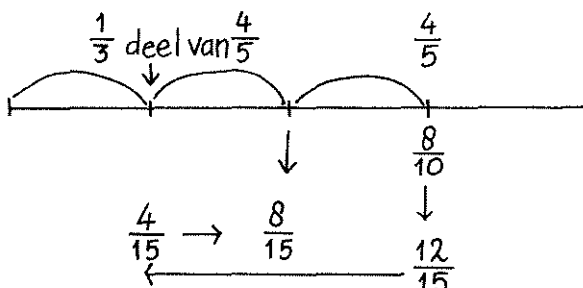
- Vermenigvuldigen en delen

————— AFBEELDING 141



Bepaal $2 \times \frac{4}{5}$.
 Bepaal $\frac{4}{5} : 3$.
 *) Bepaal $\frac{2}{3}$ deel van $\frac{4}{5}$.

Bij de laatste opgave staat een sterretje, want daarmee hebben we de grens van het (formele) basisschoolprogramma overschreden. Toch zijn er leerlingen die ook dit probleem nog moeiteloos aankunnen via equivalentie in 3 stappen.



De volgende stap is dat de 'keer-regel' wordt ontdekt. En indien de leerlingen via deel-van-veel ook de relatie tussen deel-van en keer hebben gelegd, dan zijn ze in staat om uit te rekenen:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

Het inzicht dat deze regel ook voor gemengde breuken geldt die als echte breuken worden geschreven, is dan ook niet moeilijk meer, want deze procedure verloopt hetzelfde als bij '2/3 deel-van 4/5' of '2/3 x 4/5'.

De laatste stap naar formeel delen kan, na het vermenigvuldigen, met de boogjesmethode worden gezet. Maar hier passen twee of drie sterren.

$$**) \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = ?$$

Eerst zorgen we dat 4/5 wordt 'geneutraliseerd' door aan de rechterzijde 5/4 te plaatsen (immers $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$) en dan voegen we daarna 2/3 als factor bij ($1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$)

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Met de boogjesmethode wordt de bekende regel van 'vermenig-

vuldigen met het omgekeerde' inzichtelijk gemaakt. (De boogjesmethode kan eenvoudig met de tafels worden gedemonstreerd:

$$12 : \overbrace{3} = 4 ; 3 \times 4 = 12$$

Maar leerlingen kunnen dat slechts volgen indien ze formeel met breuken kunnen redeneren en rekenen – en dit niveau kan, een enkele uitzondering daargelaten, op de basisschool niet worden bereikt. Wel kan men een hechte basis voor het formele opereren leggen. Wat overigens niet betekent dat men dit 'even' kan doen door bijvoorbeeld te proberen het vermenigvuldigen met enkele 'strepn' via het rechthoekmodel aan te leren.

Zoals ook uit het voorgaande blijkt, is veeleer een goed begrip van equivalentie de sleutel tot het (formeel) opereren met breuken. Visualisering van de operaties op de getallenlijn (of de breukenstraat) is daarbij eveneens essentieel, plus uiteraard de genoemde relaties tussen deel-van, keer en de breukoperator.

De sterretjes-opgaven zijn wel voor veel leerlingen haalbaar binnen de basisvorming indien op de geschetste didactiek en de inhoud van het basisonderwijs wordt voortgebouwd. De basis-kennis en -vaardigheden omtrent optellen, aftrekken, vermenigvuldigen (met geheel getal) en delen (door geheel getal) plus de genoemde inzichten in relaties, zijn overigens wel voldoende om elementaire toepassingsopgaven te kunnen maken met de vier basisoperaties – en dat is precies wat doelstelling 3 beoogt.

Noten

- 1 Bokhove, J. en J. Janssen: Periodiek Peilingsonderzoek in het basisonderwijs (6), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 8(2), 1989, pag. 10.
- 2 Zie noot 1, pag 10.
- 3 Zie noot 1, pag 8.
- 4 Zie noot 1, pag 7.
- 5 Zie noot 1, pag 12.
- 6 Zie: Carpenter, T.P. (et al.): Notes from National Assessment: Estimation, *Arithmetic Teacher*, 23, 1976, pag. 297-302.
Reys, R.E. (et al.): Computational Estimation Performance and

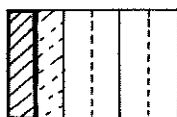
- Strategies used by fifth- and eight-grade Japanese Students, *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 1991, pag. 39-58.
- 7 Zie noot 1, pag 9.
- 8 Zie noot 1, pag 9.
- 9 Hart, K.M.: *Secondary School Children's Understanding of Mathematics*, Londen, Chelsea College, 1980.
- 10 Zie noot 1, pag 14. De tijd die omstreeks 1987 aan breukrekenen wordt besteed is ongeveer 120 uur.
- 11 Het volgende in de basistekst is ontleend aan onderzoek van Anita Lek en Adri Treffers. Zie: Lek, A.: Met repen begrepen, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 11(2), 1992, pag. 9-18.
- 12 Zie: Owens, D.T. (ed): *Research Ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics*, New York, MacMillan, 1993.
- 13 Zie wat betreft het rekenen met benoemde breuken op de getallenlijn, naast noot 11, ook: Treffers, A.: Benoemde breuken op de dubbele getallenlijn, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 9(4), 1991, pag. 3-14.
Treffers, A.: Benoemde breuken: ontstaansgeschiedenis van een idee, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(1), 1991, pag. 43-44.
Reeuwijk, M. van: Benoemde breuken: herinneringen van vroeger, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(1), 1991, pag. 39-42.
Goffree, F.: De papyrus Rhind als inspiratiebron, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(4), 1992, pag. 15-21.
Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor: Breuken (deel 3), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(4), 1992, pag. 22-29.
Wijdeveld, E.: Bart en breuken, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(2), 1991, pag. 15-20.
- 14 Fuson, R.H.: *Het Scheepsdagboek van Christoffel Columbus*, Utrecht, Bruna, 1991.
- 15 De deel-van-deel relatie is zichtbaar te maken door vouwen. Vouw $\frac{1}{3}$ blaadje (A4-papier) en halveer dat vervolgens. Welk deel van het vouwblaadje zie je dan nog?

Deze opdracht kan op vier verschillende manieren worden uitgevoerd.

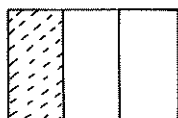
AFBEELDING 143



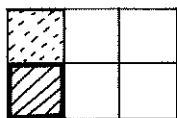
$$\frac{1}{3} vb$$



$$\frac{1}{2} \text{ deel van } \frac{1}{3} vb = \frac{1}{6} vb$$



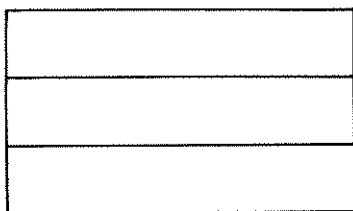
$$\frac{1}{3} vb$$



$$\frac{1}{2} \text{ deel van } \frac{1}{3} vb = \frac{1}{6} vb$$

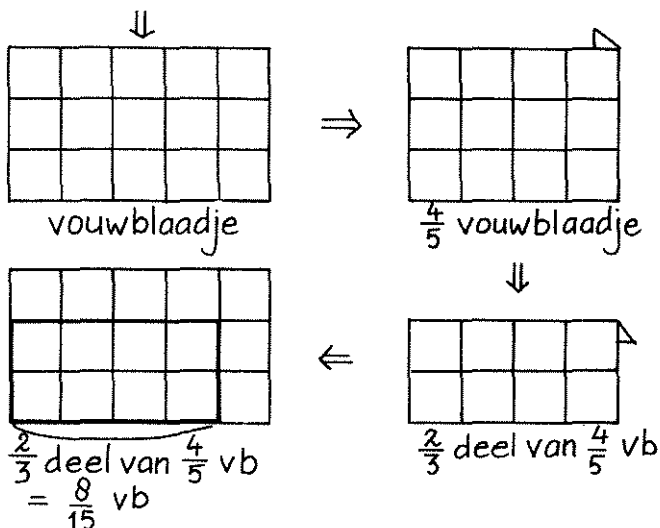
Deze twee varianten ontstaan ook als het vouwblaadje eerst in de breedte in drieën wordt gevouwen.

AFBEELDING 144



Voorals 'tweezijdig' in de lengte en in de breedte wordt gevouwen en er een roosterstructuur ontstaat, is ogenblikkelijk zichtbaar dat het antwoord op de vraag verkregen kan worden door de noemers te vermenigvuldigen. De tellers blijven bij deze stambreuken nog wat op de achtergrond, maar dat verandert als de volgende opgave wordt gegeven op voorbedrukt of voorgevouwen papier.

Vouw $\frac{2}{3}$ deel van $\frac{4}{5}$ blaadje.



Nu is ook zichtbaar wat er met de tellers gebeurt.

De *algemene regel* van deel-van-deel bepalen kan nu worden geformuleerd: vermenigvuldig de tellers en de noemers. Althans de algemene regel voor deel-van-deel bepalen bij rechthoekige objecten.

Het is trouwens de vraag of men al direct op zo'n algemene regel zou moeten aansturen bij het vouwen. Men zou namelijk ook kunnen wachten totdat soortgelijke opdrachten daarna eerst nog via *tekenen* zijn gegeven in de context van bijvoorbeeld *chocoladeplakken*.

Je hebt $\frac{1}{2}$ chocoladeplak opgegeten.

Van wat over is geef je $\frac{1}{3}$ deel weg.

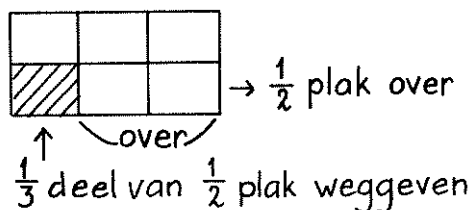
Hoeveel heb je nu nog over?

Laat dat met een tekeningetje zien.

(Bepaal eerst hoe de plak eruit ziet.)

Na het vouwen van de blaadjes tekenen de meeste kinderen nu een rechthoekige plak van 3 bij 2 stukjes.

AFBEELDING 146

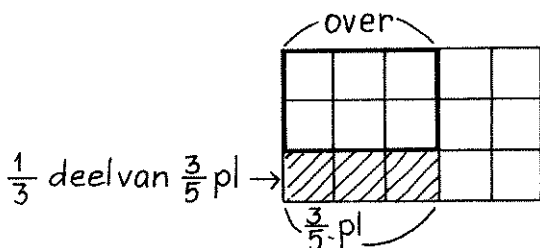


Er is over: 2 stukjes van de $\frac{1}{6}$ -plak, oftewel $\frac{2}{6}$ plak.
 (De kwestie van $\frac{2}{6}$ plak = $\frac{1}{3}$ plak kan nu ook ter sprake worden gebracht.)

Azmir heeft $\frac{2}{5}$ deel van zijn plak opgegeten.
 Van wat hij overhoudt, geeft hij $\frac{1}{3}$ deel weg.
 Hoeveel heeft hij nog over?
 (Bepaal eerst hoe de plak eruit ziet.)

Niet alleen een plak van 3 bij 5 voldoet hier, maar ook een reep met bijvoorbeeld 5 stukjes zou op deze wijze verdeeld kunnen worden.

AFBEELDING 147



Er is over: $\frac{6}{15}$ plak (of $\frac{2}{5}$ plak).

Ans heeft $\frac{2}{5}$ deel van haar plak opgegeten.
 Van de rest geeft ze $\frac{3}{4}$ deel weg.

Hoeveel heeft ze nog over?
(Bepaal eerst hoe de plak eruit ziet.)

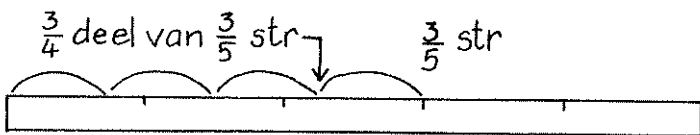
Nu zullen er al heel wat leerlingen zijn die de 'keer-regel' hebben ontdekt en deze op dit probleem toepassen.

$\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}$ plak (rest) = $\frac{9}{20}$ (plak) (weggegeven)
Er is over $\frac{11}{20}$ plak.

Dezelfde vragen kunnen gesteld worden in verwante situaties, bijvoorbeeld het verdelen van landjes, het indelen van plattegronden, en dergelijke.

De gevonden regel kan ten slotte globaal schattend toegepast en gevisualiseerd worden op een strook (reep).

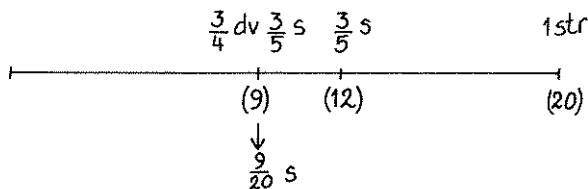
AFBEELDING 148



Klopt het, globaal gezien, dat de uitkomst $\frac{9}{20}$ str zo correct geplaatst is? 'Ja, want $\frac{9}{20}$ is ongeveer $\frac{1}{2}$...'

De deel-van-deel tekening van de strook of reep kan op onderstaande manier in verband worden gebracht met de indirecte deel-van-deel methode via passende ondermaten, of nog wat schematischer met de dubbele getallenlijn.

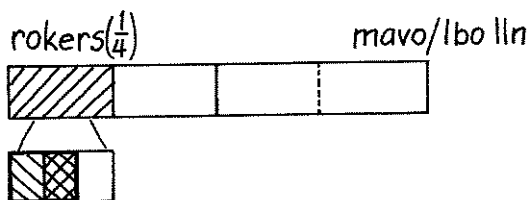
AFBEELDING 149



Het is van belang dat de leerlingen globaal op de strook of getallenlijn kunnen aangeven hoe bewerkingen met breuken uitpakken, zelfs wanneer ze (nog) niet in staat zijn de uitkomsten precies uit te rekenen. Daarnaast maakt de afbeelding van de deel-van-deel relatie op de getallenlijn de toepasbaarheid van de regel op andere contextproblemen groter.

Neem bijvoorbeeld het knipsel over de rokers op mavo/lbo. Het ligt meer voor de hand deze deel-geheel en deel-van-deel relatie op een (getallen-)strook of getallenlijn af te beelden dan op een rechthoek.

AFBEELDING 150



$\frac{2}{3}$ deel van rokers zijn meisjes.

$\frac{2}{3}$ deel-van- $\frac{1}{4}$ mavo/lbo-leerlingen zijn meisjes die roken.

$\frac{2}{12}$ of $\frac{1}{6}$ deel van mavo/lbo-leerlingen zijn meisjes die roken.

Indien oppervlakteproblemen worden gegeven, past uiteraard het rechthoekmodel daar het beste bij. Op *getalsymbolisch niveau* kan deel-van-deel bepaald worden via *equivalentie*.

Dat gaat bij ' $\frac{2}{3}$ deel van $\frac{1}{4}$ ' als volgt.

' $\frac{2}{3}$ deel van $\frac{1}{4}$ ' wordt omgezet in ' $\frac{2}{3}$ deel van $\frac{3}{12}$ ' en dat is $\frac{2}{12}$ oftewel $\frac{1}{6}$.

De gedachtengang die hierachter steekt is als volgt te verwoorden:

'Van 1 stukje (de teller geeft het aantal stukjes aan, en de noemer de grootte van een stukje) kan ik niet $\frac{2}{3}$ deel nemen, dus moet de breuk $\frac{1}{4}$ worden omgezet in een gelijkwaardige breuk waarvan ik wel $\frac{2}{3}$ deel kan nemen, oftewel een breuk waarvan de teller door 3 gedeeld kan worden, en dat is $\frac{3}{12}$...'

Kortom, wat indirect via ondermaten of via een tweezijdige verdeling gebeurt, wordt in het bovenstaande direct met gelijkwaardige breuken op symbolisch niveau verricht. We hebben hier dus met een redenering op een hoog formeel niveau van doen om de keer-regel te verklaren.

Wordt aan het voorgaande nog toegevoegd aan wat bij deel-van-veel reeds is ontdekt, namelijk dat 'deel-van' in 'keer' kan worden omgezet, dan is men volledig toe aan het formele vermenigvuldigen van breuken. Maar dat is, zoals gezegd, voor het overgrote deel van de leerlingen op de basisschool teveel gevraagd, en behoort niet tot de kerndoelen.

- 16 Het vermenigvuldigen en delen van breuken kan op formeel niveau worden geleerd door gebruik te maken van de eigenschappen van deze operaties.

Om de beginnen ${}^2/3 \times {}^4/5$ met behulp van basisoperaties.

AFBEELDING 151

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} & & \\ \downarrow \times 3 & & \downarrow \cdot 5 \quad (\text{met behulp van eerder ontdekte regels}) \\ 2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} & & \end{array}$$

Na enkele voorbeelden is de nieuwe regel ontdekt voor het vermenigvuldigen van echte breuken. Bij gemengde breuken kan men ook zo te werk gaan indien deze in de vorm van echte breuken worden geschreven.

Deze eigenschap van vermenigvuldigen wordt toegepast op deel-van-deel bepalen, maar ook omgekeerd. De identificering van 'deel-van' met 'keer' is reeds bij deel-van-veel ontdekt, zoals eerder werd gememoreerd.

Nu ${}^2/3 : {}^4/5$.

Eigenschap delingen (en verhoudingen): de uitkomst verandert niet indien beide factoren met hetzelfde getal worden vermenigvuldigd.

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{2}{3} & : & \frac{4}{5} \\
 \times 3 \downarrow & & \downarrow \times 3 \\
 2 & : & \frac{12}{5} \\
 \times 5 \downarrow & & \downarrow \times 5 \\
 10 & : & 12 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}
 \end{array}$$

Beide operaties kunnen echter ook via equivalentie worden uitgevoerd.

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{12}{15} = \frac{8}{15}$. (Gedacht wordt aan $\frac{1}{3}$ keer, of $\frac{1}{3}$ deel-van, of delen door 3 als eerste stap, en dan de uitkomst daarvan 2 keer nemen.)

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{15} : \frac{12}{15} = 10 : 12 = 5 : 6 = \frac{5}{6}$. (Gedacht wordt aan de genoemde eigenschap van het delen, en aan het eerlijk verdelen.)

In alle benaderingen wordt de formele regel inzichtelijk ontdekt, althans door de leerlingen die op dit niveau kunnen denken en rekenen.

17 Zie noot 1, pag 24.

VI Samenhang

Doelstelling 4

De leerlingen begrijpen het verband tussen verhoudingen, breuken en decimale breuken, en kunnen breuken in decimale breuken omzetten, ook met een rekenmachine.

In deze doelstelling wordt de relatie met procenten niet genoemd maar die hoort er uiteraard wel nadrukkelijk bij.

Uit het PPON-onderzoek van 1987 komt naar voren dat de leerlingen het verband tussen elementaire breuken als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ met de daarbij passende verhoudingen, procent- en kommagetallen redelijk tot goed doorzien.

Maar het gebruiken van die verbanden om hierbij te rekenen en vooral ook om globaal te schatten, blijkt uitermate moeilijk. Hieronder volgen enkele voorbeelden.¹

De eerste opgave gaat over de relatie met *procenten*.

16% van f 42,- is ongeveer $\frac{1}{2}$ deel van f 42,-.

Ongeveer 15 procent slaagt erin een goede oplossing te vinden. Dezelfde score wordt gehaald bij de volgende opgave waarin ook schattend gerekend moet worden, maar nu via *verhoudingen*.

100 Oostenrijkse shilling kost f 16,35.

Angeline koopt in Oostenrijk iets voor 148 shilling.

Hoeveel is dat ongeveer in Nederlands geld?

(Rond af op hele guldens.)

Bokhove en Janssen tekenen hierbij aan²:

'Deze opgave blijkt te hoog gegrepen voor de leerlingen.

Kennelijk wordt niet doorzien dat de opgave op te lossen is met de berekening $1 \frac{1}{2} \times f 16,-$. Leerlingen worden moge-

lijk toch meer getraind op het exact uitrekenen van de uitkomst dan op het ongeveer bepalen van het antwoord, ofschoon dat laatste in de praktijk veel meer voorkomt. Mogelijk komt daar in de toekomst verandering in door de verschuiving die in de concept-eindtermen op dit gebied waar te nemen is.²

De povere resultaten zijn echter niet tot Nederland beperkt. Zowel in de Verenigde Staten als in Japan is minder dan 10 procent (!) van de leerlingen einde basisschool (twaalfjarigen) in staat om de volgende opgave vlot en goed schattend uit te rekenen (interval 100–150).³

$$0,24 \times 486 =$$

Het *kommagetal* 0,24 wordt niet omgezet in $\approx 1/4$. Net zo min als 0,512 in $\approx 1/2$ in de volgende opgave:

$$0,512 \times 884 =$$

Toch is juist dit globale schattende rekenen waarin gebruik wordt gemaakt van handige omzettingen van praktisch belang. In de voorgaande hoofdstukken zijn kranteknipsels gepresenteerd waarin gevarieerde beschrijvingsvormen van fracties gehanteerd worden, zoals:

- ‘van elke derde Nederlander ..’
- ‘ $2/3$ deel van de Nederlanders ..’
- ‘3 van de 4 Nederlanders ..’
- ‘ruim de helft van ..’
- ‘bijna één vijfde van de burgemeesters ..’
- ‘20 procent van de burgemeesters ..’
- ‘Nederland zit wat betreft de rijkdom per hoofd van de bevolking met 104 procent van het gemiddelde in Europa ..’
- ‘De regio Groningen scoort, vanwege de toerekening van het aardgas, bijna 1,5 keer zo hoog als het gemiddelde ..’

Laten we één voorbeeld nog even nader beschouwen, mede met het oog op het overkoepelende kerndoel van *gecijferdheid* (gevoel voor getallen).

Schooltassen moeten lichter worden

WENEN – Het gewicht van de schooltassen mag vanaf heden niet meer dan 12 procent van het lichaamsgewicht bedragen. Een schoolkind dat 25 kilo weegt, mag dus een schooltas van ten hoogste 3 kilogram hebben.

Steekproeven hebben uitgewezen dat tot nu toe vaak tassen tot 14 kilo werden gedragen. Een schoolkind sleept dan in de loop van een schooljaar tot 3 ton boeken en schriften van huis naar school en terug.

(Tiroler Tageszeitung 15-2-'93)

Bij deze tekst zijn heel wat vragen te bedenken die vlot globaal schattend zijn uit te rekenen indien 12 procent wordt omgezet in ruim $\frac{1}{10}$ deel-van:

Klopt 3 kg (ongeveer) bij een gewicht van 25 kg?

Hoe zwaar zou je ongeveer moeten zijn om een schooltas van 14 kg te mogen dragen?

Hoeveel zou je zelf ten hoogste mogen meenemen, ongeveer?

Klopt die 3 ton ongeveer?

De relatie met gecijferdheid treedt hier op twee punten nadrukkelijk naar voren:

1 bij het schattende rekenen

2 bij de impliciete kennis van lichaamsgewichten.

En wat te denken van de volgende reclametekst die in de zomer van 1993 door de ether schalde:

Koop nu een telefoon

Zonne-steekorting op telefoon.

Is het 20 graden dan krijgt u 20 procent korting. Is het 25 graden dan 25 procent, enzovoort.

Koop deze maand juli een telefoon ... met korting.

Stel je koopt een telefoon die eigenlijk f 150,- zou kosten, maar het is vandaag ruim 30 graden. Hoeveel moet je dan betalen?

Zou het mogelijk zijn dat je maar de helft hoeft te betalen?

De temperatuur wordt gemeten in graden Celsius. Stel eens dat je de korting via graden Fahrenheit zou mogen berekenen (in Amerika gebruiken ze Fahrenheit), wat zou dat voor de korting betekenen, grofweg gerekend?

.....

De relatie met gecijferdheid (kennis van schatten en meten) is ook hier weer duidelijk aanwijsbaar.

Ten slotte:

Adriaan van Dis biedt antropoloog excuses aan

Hij wijst erop dat de gedeelten waarin hij Crapauziano citeert zeer bescheiden zijn. 'Het is alles bij elkaar hooguit driekwart pagina, nog niet een half procent van zijn hele boek! Maar ook een fout van een half procent is een fout, vindt hij.

(NRC)

Hoeveel pagina's zou het betreffende boek van Van Dis ('Het beloofde Land') ongeveer bevatten?

Ongeveer-rekenen, daar gaat het hier ook weer om.

1 *Verhoudingen en breuken*

In de eerste fase van het onderwijs in breuken (zie doelstelling 1) wordt het taalaspect van verhoudingen aan de orde gesteld in samenhang met breuken (fracties): '2 van de 5 Nederlanders ..' kan geassocieerd worden met $\frac{2}{5}$ deel van de Nederlanders ..'. Twee manieren om hetzelfde te zeggen, of eigenlijk nog meer, want '40 procent van de Nederlanders ..' drukt hetzelfde uit.

In een volgende fase (zie doelstelling 2 en doelstelling 3) wordt het vertalen van verhoudingen in breuken en omgekeerd benut bij het meten met stroken en het indirecte of semi-directe-rekenen

met repen en plakken. En aan het einde van het vorige hoofdstuk werd al aangestipt dat verhoudingen kunnen dienen om het begrip van gelijkwaardigheid verder te verdiepen vanuit het eerlijk verdelen.

Twee modellen vervullen daarbij een centrale rol: het tafelschikkingsschema en de verhoudingstabel die we al eerder tegenkwamen.⁴

TAFELSCHIKKING

De relatie tussen $\frac{3}{4}$ '3 pizza's eerlijk verdelen met 4 personen', en $\frac{3}{4}$ 'ieder krijgt $\frac{3}{4}$ pizza' kan via het stuksgewijze één-voor-één verdelen worden ontdekt: eerst 1 pizza verdelen, ieder krijgt dan $\frac{1}{4}$ pizza, en dan nog eens en nog eens.

Dat $\frac{3}{4}$ evenveel oplevert als $\frac{6}{8}$ of $\frac{9}{12}$ is voor de leerlingen duidelijk. Ze kunnen wat dat aangaat goed in verhoudingen denken. Bij $\frac{6}{8}$ bijvoorbeeld kun je immers per 'vierkant' ook 3 pizza's uitdelen $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$: de tafelschikking kan als het ware worden opgesplitst. Het gevolg is dat $\frac{3}{4} p = \frac{6}{8} p = \frac{9}{12} p \dots$ – *gelijkwaardige breuken* verschijnen hier in een geheel andere context dan bijvoorbeeld bij de deel-geheel relaties van de plak.

Het voorgaande kan overigens ook anders genoteerd worden:

$$3 p : 4 = \frac{3}{4} p$$

$$3 p : 4 = 6 p : 8 = \frac{6}{8} p$$

$$3 p : 4 = 9 p : 12 = \frac{9}{12} p.$$

De (verdelings)delingnotatie wordt zo op een natuurlijke manier aan de breuksymbolen gekoppeld. De leerlingen kunnen daarmee hun voordeel doen bij het delen van breuken door gehele getallen. Immers:

$$1\frac{1}{2} p : 2 = 3 p : 4 = \frac{3}{4} p$$

$$\frac{2}{3} p : 5 = 2 p : 15 = \frac{2}{15} p \dots$$

Maar laten we niet te ver vooruitlopen en ons na de equivalentie afvragen welke mogelijkheden het eerlijk verdelen via gelijkwaardige tafelschikkingen van pizza's en personen biedt voor het vergelijken, verschil bepalen, optellen, en deel-van-deel nemen.

Aan welke tafel krijgt men meer? Vragen over vergelijken kunnen via gelijkwaardige schikkingen worden opgelost.

————— AFBEELDING 153

$$\frac{2}{3} \text{ of } \frac{3}{4} ?$$

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{6} \rightarrow \frac{6}{9}$$

$$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{6}{8}$$

—————
 $\frac{3}{4}$ levert meer op, want 6 pizza's met z'n achten verdelen is 'gunstiger' dan 6 pizza's met 9 personen.

Om het *verschil* van de zojuist genoemde verdelingen te kunnen bepalen, dient echter nog een stap verder te worden gezet.

————— AFBEELDING 154

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{6} \rightarrow \frac{6}{9} \rightarrow \frac{8}{12} \rightarrow \frac{8}{12} \text{ pizza}$$

$$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{6}{8} \rightarrow \frac{9}{12} \rightarrow \frac{9}{12} \text{ pizza}$$

—————
 $\frac{3}{4} p - \frac{2}{3} p = \frac{9}{12} p - \frac{8}{12} p = \frac{1}{12} p.$

En nu de *som* bepalen.

Eerst krijgt iemand aan een tafeltje $\frac{2}{3}$ pizza en later nog eens $\frac{3}{4}$ pizza. Aan welke tafel heeft die persoon gezeten? Hoeveel mensen, hoeveel pizza's?

Men kan dan een zelfde reeks maken als zojuist werd gedaan. Die persoon zat kennelijk aan een tafel met 12 personen, want 12 kun je zowel in drieën als in vieren verdelen (een zelfde soort overweging als bij de repen!).

In eerste ronde werden er 8 pizza's geserveerd en in tweede ronde

9 pizza's, samen 17 pizza's voor 12 personen.

$$\frac{2}{3} p + \frac{3}{4} p = \frac{9}{12} p + \frac{8}{12} p = \frac{17}{12} p = 1\frac{5}{12} p.$$

Het voorgaande overziend luidt de slotsom dan ook dat de context van het eerlijk verdelen geschikt is voor de ontwikkeling van de breukentaal, om inzicht te geven in de relatie tussen verhoudingen, (ver)delingen en breuken, en om de gelijkwaardigheid van breuken vanuit een bepaalde gezichtshoek te benaderen. Aftrekken en optellen, en later zeker ook delen, kunnen in de toepassings sfeer van het eerlijk verdelen worden betrokken. Maar het eerlijk verdelen kan voor deze operaties niet als een goede modelcontext fungeren. Wel echter voor het leggen van een relatie-netwerk voor die breuken zèlf via equivalentie.

VERHOUDINGSTABEL

Wat in het voorgaande over eerlijk verdelen en het tafelschikkingsschema werd gezegd, geldt in grote lijnen ook voor het meer algemene model van de verhoudingstabel (die niet speciaal met eerlijk verdelen en met gelijkwaardige verdelingen van doen hoeft te hebben).

De verhoudingstabel biedt vanuit de breuken gezien de mogelijkheid om, als de probleemstelling of context daartoe aanleiding geeft, van breuken op verhoudingen over te stappen en vervolgens met gelijkwaardige verhoudingen verder te redeneren en te rekenen om ten slotte, desgewenst, weer naar breuken terug te keren.

Zo kan men bijvoorbeeld uitspraken als ' $\frac{2}{3}$ deel van de Nederlanders' en ' $\frac{3}{4}$ deel van de Nederlanders' omzetten in verhoudingsuitdrukkingen als respectievelijk '2 van de 3 Nederlanders' en '3 van de 4 Nederlanders' waarmee vervolgens verder gerekend kan worden om verhoudingswaarden te vergelijken via respectievelijk '8 van de 12 Nederlanders' en '9 van de 12 Nederlanders'. Wordt op deze wijze 'naar de honderd' toegerekend, dan verschijnen percentages in de verhoudingstabel.

Voor een en ander kan trouwens ook de dubbele getallenlijn worden ingezet.

Driekwart van Limburg wenst bisschop met modern profiel.

HEERLEN – Ruim driekwart van alle Limburgers vindt dat bisschop dr. J. Gijzen opgevolgd moet worden door een moderne, progressieve bisschop; een behoudende bisschop is welkom bij één op de zes Limburgers.

(Trouw)

Zijn er meer Limburgers voor een progressieve bisschop of voor een behoudende bisschop? Hoeveel is het verschil? Hebben alle Limburgers een keuze gemaakt óf voor progressief óf voor behoudend? Welk deel van de Limburgers niet?

Deze vragen kunnen via breuken of via verhoudingen worden opgelost.

a Via breuken:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} =$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = . ; 1 - . =$$

b Via verhoudingen:

$$\frac{3 \mid 6 \mid 9}{4 \mid 8 \mid 12}$$

$$\frac{1 \mid \mid 2}{6 \mid \mid 12}$$

verschil '7 van de 12'

som '11 van de 12'; restant '1 van de 12'.

Men moet om beide wegen te kunnen volgen, breuken als verhoudingen kunnen interpreteren en omgekeerd verhoudingen als breuken.

Nu nog enkele opmerkingen over *toepassingsproblemen* waarin onder meer de verhoudingstabel als denk- en rekenmodel kan worden ingezet.

Een voorbeeld van breuken in verhoudingstabellen vinden we in recepten 'breuken in de keuken', waarvan we eerder al enkele opgaven presenteerden.

AFBEELDING 155



Chipolatapudding (6 personen)

12 g gelatine ¹⁾	3 ¹ / ₂ dl slagroom
¹ / ₂ dl marasquin	25 g Franse vruchtjes
50 g puddingbiscuits	25 g oranjesnippers
2 eieren	25 g rozijnen
80 g suiker	15 g suiker
2 ¹ / ₂ dl melk	(Franse vruchtjes)
1 vanillestokje	

¹⁾ Indien men de pudding een dag van tevoren maakt, neemt men 10% gelatine minder.

De uitwerking van de vragen om een recept te maken voor 4 personen, 10 personen, 2 personen, laten we nu maar rusten. We concentreren ons hier op de gelatine: de omzetting van gewicht in aantallen blaadjes.

Voor 20 gram zijn 12 blaadjes nodig.

AFBEELDING 156

gram	20g			12g
blaadjes	12			?
gewicht				
aantal				

Men kan proberen eerst globaal te berekenen hoeveel gelatine-blaadjes nodig zijn, en daarna precies. De dubbele getallenlijn en de tabel kunnen als hulpmiddel worden gebruikt.

Eerst schatten: voor 20 g 12 blaadjes
voor 10 g 6 blaadjes
voor 15 g 9 blaadjes
voor 12 g ruim 7 blaadjes

Nu precies: voor 5 g 3 blaadjes
voor 1 g $\frac{3}{5}$ blaadje
voor 2 g $1\frac{1}{5}$ blaadje
voor 12 g $6 + 1\frac{1}{5} = 7\frac{1}{5}$ blaadje.

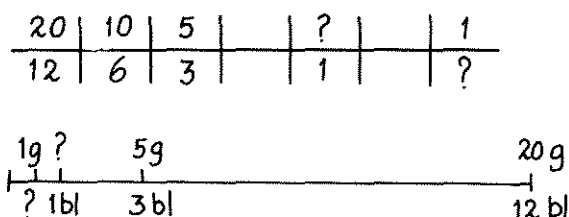
Voor een Chipolatapudding voor 6 personen hebben we dus $7\frac{1}{5}$ blaadje gelatine nodig. Maar als de pudding een dag van tevoren gemaakt moet worden, moet men 10 procent minder gelatine nemen.

Hoeveel gram gelatine krijgen we nu voor ons recept?
Hoeveel blaadjes gelatine zijn er nu nodig?

Het ongeveer-rekenen is nu zeer zeker op z'n plaats. Nu is geen 12 gram nodig maar $12\text{ g} - 1,2\text{ g} = 10,8\text{ g}$. Je kunt ook uitgaan van $7\frac{1}{5}$ blaadje en die hoeveelheid verminderen met 10 procent. Bij 10 blaadjes zou de mindering 1 blaadje bedragen. Bij 5 blaadjes zou de mindering $\frac{1}{2}$ blaadje zijn. Dus bij $7\frac{1}{5}$ blaadje is dat ongeveer $\frac{3}{4}$ blaadje. $7\frac{1}{5}\text{ bl} - \frac{3}{4}\text{ bl} \approx 6\frac{1}{2}\text{ bl}$. Een prachtige gelegenheid om te schatten!

Men kan de gelatine-recepten variëren, evenals het aantal personen, en al dan niet 10 procent in mindering brengen. Bij dit soort opgaven komt vermenigvuldigen en delen van breuken met gehele getallen te pas. Kommagetallen en procenten worden erbij betrokken. De dubbele getallenlijn en de verhoudingstabel ondersteunen het rekenen. Bij het 'terugrekenen naar één' duiken in die schema's breuken op.

AFBEELDING 157



- 3 blaadjes gelatine wegen 5 gram.
- 1 blaadje gelatine weegt ... gram.
- 5 gram is het gewicht van 3 blaadjes.
- 1 gram is het gewicht van ... blaadje.

In het voorgaande hebben we niet met een 'interne' verhouding van een deel-geheel relatie te maken (zoals in '3 van de 5 Nederlanders') maar met een (multiplicatieve) vergelijkingssituatie waarin twee 'grootheden' zijn betrokken – een 'externe' verhouding. Het komt er hier ook weer op aan dat de leerlingen in verhoudingen moeten (leren) denken, en in staat moeten zijn om gehele getallen te delen en ook breuken door gehele getallen te delen alsmede met gehele getallen te vermenigvuldigen.



SAMENVATTING EN SITUERING

Verhoudingen kunnen als didactisch middel worden ingezet voor het breukrekenen, speciaal ten behoeve van equivalentie. Het tafelschikkingsmodel en de verhoudingstabel fungeren daarbij als intermediair.

Dit didactisch gebruik van verhoudingen vindt voornamelijk in het tweede en derde kwart van de leergang plaats waar ook de operaties zoals beschreven in doelstelling 3 gesitueerd worden.

Verhoudingen als toepassingsterrein voor breuken lopen echter als een rode draad door de hele leergang.

Bij een en ander gaat het over precies rekenen maar uiteraard ook om schattend rekenen.

2 Procenten en breuken

Aansluitend bij het voorgaande:

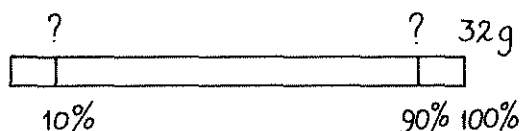
Hoeveel blijft er na vermindering van 10 procent over aan gelatine bij de volgende recepten van puddingen die een dag van tevoren worden gemaakt:

- Bessesappudding 30 g gelatine.
- Karamelpudding 25 g gelatine.
- Sinaasappelbavarois 15 g gelatine.
- Zonnebloempudding 8 g gelatine.
- Yoghurtpudding 32 g gelatine.

We werken het laatste voorbeeld wat nader uit: 10 procent of 90 procent van 32 g bepalen.

Daartoe gebruiken we de (dubbele) getallenlijn.

AFBEELDING 158



Het komt erop aan dat de kinderen $\frac{1}{10}$ deel van 32 g of $32 \text{ g} : 10$ kunnen berekenen.

In doelstelling 2 is beschreven hoe ze tot het antwoord $\frac{32}{10}$ g kunnen komen via $32 \times \frac{1}{10}$ g, of via schatten van ruim 3 gram en daarna de nadere bepaling van 'ruim' via $2 \text{ g} : 10$ ($\frac{1}{10}$ g plus $\frac{1}{10}$ g). Maar aan het einde van de breukenleergang zijn de kinderen natuurlijk ook vertrouwd met kommagetallen, en het 'kommagedrag' bij vermenigvuldigen met 10-vouden en het delen door 10-vouden.

In ieder geval moeten de kinderen gangbare procenten als 50 procent, 25 procent, 10 procent, 20 procent, ruim 30 procent (33 procent) en afgeleiden daarvan, met de daarbij passende breuken associëren. Het (globaal) berekenen van percentages wordt daarmee beter toegankelijk.

10 procent is $\frac{1}{10}$ deel van ..., en omgekeerd.

50 procent is $\frac{1}{2}$ deel van ..., en omgekeerd.

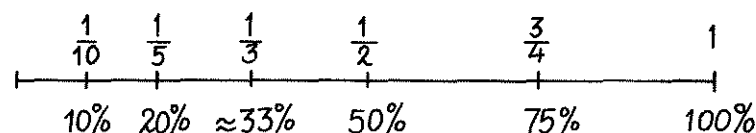
75 procent is $\frac{3}{4}$ deel van ..., en omgekeerd.

20 procent is $\frac{1}{5}$ deel van ..., en omgekeerd.

33 procent is $\approx \frac{1}{3}$ deel van ..., en omgekeerd.

De betrekkingen vloeien rechtstreeks voort uit een specifiek gebruik van de dubbele getallenlijn waarmee de kinderen vrijwel van meet af aan in de breukenleergang vertrouwd zijn geraakt. In dit geval een ondermaat van 100 (procent).

AFBEELDING 159



In het leven van alledag worden beschrijvingen vaak met zowel breuken als percentages gegeven. Een voorbeeld ervan geven we in het volgende hoofdartikel van NRC/Handelsblad van 18-1-'94 over een enquête over gemeentepolitiek. (zie afbeelding 160).

Er zijn in Nederland ongeveer 600 burgemeesters (de vacante burgemeesterszetels meegeteld).

Schat de volgende percentages in aantallen burgemeesters:

- 33% van de partners van burgemeesters is vaak actief in het kader van het burgemeestersambt ...
- 19% vindt dat het college kleiner kan.
- 25% ambieert ooit een andere functie.
- 49% zegt uit principe op te stappen als de raad een motie van wantrouwen aanneemt.

NRC



Algemeen Handelsblad (1828) en Nieuwe Rotterdamse Courant (1844) 24e jaargang no. 92

Enquête over gemeentepolitiek

Burgemeester vindt raadsleden te zwak

Door een onzer redacteuren

ROTTERDAM/LEIDEN, 18 JAN. Tweederde van de Nederlandse burgemeesters vindt de leden van gemeenteraden 'matig' van kwaliteit. Dit blijkt uit een enquête die is gehouden door NRC Handelsblad en de Leidse Universiteit.

GroenLinks levert volgens de burgemeesters de betere raadsleden. Bijna de helft van de burgemeesters noemt de vertegenwoordigers van GroenLinks 'relatief sterk'. Raadsleden van de lokale lijsten, van D66, VVD en CDA doen het in de ogen van de burgemeesters veel minder goed. De PvdA levert sterke wethouders en D66 zwakke, zo blijkt uit het onderzoek.

Aan de enquête, die is gehouden aan de vooravond van de raadsverkiezingen van 2 maart, heeft 65 procent van de burgemeesters deelgenomen. De resultaten worden vanaf vandaag in een serie artikelen gepubliceerd.

Bijna een vijfde van de burgemeesters zegt in de afgelopen vijf jaar te maken te hebben gehad met een of meer gevallen van ambtelijke corruptie. Bij elkaar zou het gaan om meer dan honderd zaken van ambtsmisbruik. In 95 procent van de gevallen is hiertegen disciplinair opgetreden. In meer dan de helft van de kwes-ties heeft het geleid tot strafrechtelijk optreden.

Voor de invoering van een lokaal referendum is onder de burgemeesters weinig aanhang te vinden. Tweederde van de burgemeesters is tegen een rechtstreekse volksraadpleging, in welke vorm dan ook. Veel burgemeesters zien meer in een opiniepeiling onder de bevolking. Eenderde is voorstander van

enige vorm van referendum.

In 7 procent van de 636 gemeenten in Nederland bestaan plannen om een referendum in te voeren.

De burgemeesters zien weinig in een gewijzigde benoemingsprocedure voor hun ambt. Driekwart zegt te willen vasthouden aan de huidige procedure, waarin vertrouwenscommissies van gemeenteraden een belangrijke rol spelen. Elf procent wordt het liefst rechtstreeks door de Kroon benoemd, zonder raadpleging van een vertrouwenscommissie. Acht procent vindt dat een burgemeester door de gemeenteraad moet worden gekozen. Vijf procent is voorstander van rechtstreekse verkiezing door de bevolking, onder wie de Rotterdamse burgemeester, dr. A. Peper.

Duidelijke ontevredenheid heerst er onder de burgemeesters over hun salaris. Bijna tweederde vindt dat hij/zij te weinig

PAG. 7 AMBT, RAAD EN COLLEGE VAN B & W

verdiend in vergelijking met andere beroepen. Het minimumloon van een burgemeester is 5.762 gulden bruto per maand voor het eerste jaar in een kleine gemeente. Het maximum is 16.945 gulden per maand in een gemeente boven de 375.000 inwoners.

- 60% meent dat de raad 'representatief' tot 'zeer representatief' is voor de bevolking.
- 65% van de burgemeesters meent dat zijn gemeente meer asielzoekers kan opnemen.
- Het aantal vrouwelijke burgemeesters is 9,9 procent.

Het omzetten van percentages in breuken (fracties) helpt hier bij het schatten.

Men kan echter ook de weg van de verhoudingen volgen bij het berekenen van 33 procent, 20 procent, 25 procent, enzovoort. Namelijk door 33 procent te interpreteren als '33 van de 100'. En vervolgens te berekenen 'hoeveel van de 600' dat is. Daarbij kan een verhoudingstabel worden gebruikt.

AFBEELDING 161

33	6×33	
100	600	
25	6×25	
100	600	
20	6×20	
100	600	

Procenten kunnen zowel via breuken als via verhoudingen worden benaderd. Aangezien dit deel over breuken handelt, benadrukken we hier de breukenkant van procenten.

Het laatste voorbeeld over de vrouwelijke burgemeesters is interessant om eens precies uit te rekenen, althans zo goed en zo kwaad dat gaat. Want wat moeten we met die 9 tienden van procenten? Of hoe halen we van 10 procent 0,1 procent af? Hoeveel burgemeesters is 1 procent van het totaal?

Als het antwoord 6 is gevonden, kan de stap naar 0,1 procent worden gezet: 0,6 burgemeester (?). Discussie over de betekenis daarvan volgt ... De kwestie van het afronden wordt nu aan de orde gesteld.

Nieuwe opgaven volgen:

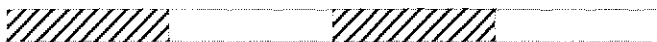
Het CDA bezet 45,8 procent van de burgemeesterszetels.
De PvdA bezet 24 procent.
De VVD bezet 17,6 procent.
Bereken het aantal burgemeesters van die partijen.

Toen de gemeenteraadsverkiezingen in maart 1994 waren gehouden, stond in een regionaal dagblad:

‘Verrassend was het opkomstpercentage: in Tegelen kwam bijna één derde van de kiesgerechtigden naar de stembus en in Belfeld was het aantal kiezers nog groter met 69,57 procent.’

(Tegelse Courant)

Wat zal bedoeld zijn, waar zit de vergissing?



SAMENVATTING EN SITUERING

Procenten op zich fungeren niet als didactisch middel. Maar indien de breuken via de dubbele getallenlijn met ondermaat 100 als bemiddelde grootte in verband worden gebracht, is in feite de relatie met procenten ook gelegd. Dat kan al vanaf het tweede kwart van de leergang gebeuren.

Uit het voorafgaande blijkt echter dat voor het schattende rekenen vooral ook het omgekeerde belangrijk is, namelijk percentages-van globaal uitrekenen via de omzetting van procenten in breuken. Dit laatste zal vooral in het vierde kwart van de leergang gebeuren.

3 *Kommagetallen en breuken*

Doelstelling 4 zegt: ‘De leerlingen begrijpen het verband tussen verhoudingen, breuken en decimale breuken, en kunnen breuken in decimale breuken omzetten, ook met een rekenmachine.’

Indien de kinderen breuken (fracties) in percentages kunnen omzetten via een ondermaat van 100 op de dubbele getallenlijn,

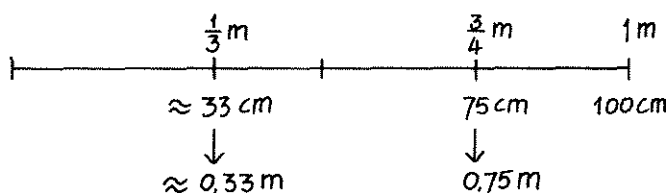
is de stap naar het omzetten in kommagetallen niet groot. Percentages zijn immers 'honderdste' delen-van ... Zo is $\frac{3}{4}$ deel-van gelijk aan 75 procent-van is $\frac{75}{100}$ deel-van, of anders geschreven 0,75 deel-van.

Maar mooier nog is een omzetting via meetgetallen.

$$\frac{3}{4} \text{ m} = 75 \text{ cm} = 0,75 \text{ m}$$

$$\frac{1}{3} \text{ m} \approx 33 \text{ cm} \approx 0,33 \text{ m}$$

AFBEELDING 162



Ook hier weer vormt het rekenen met ondermaten (van geld, afstand, gewicht ..) de basis van het omzetten. Een verfijndere omrekening kan worden verkregen door een fijnere ondermaat te kiezen (bijvoorbeeld 1 kg en 1000 gram, of nog fijner, 1 km en 10000 dm, en zo verder).

Er zijn echter ook andere, meer abstracte methoden om gewone breuken in decimale breuken om te zetten, bijvoorbeeld:

- 1 uitvoeren van een (staartdeling) met aanhalen van nullen achter de komma;
- 2 door het toepassen van eigenschapsregels, bijvoorbeeld $1 : 3$ omzetten in de deling $100 : 3$ of $1000 : 3$ en de uitkomsten daarvan respectievelijk te delen door 100 en 1000, via het 'verschuiven' van de komma;
- 3 door de deling op de rekenmachine uit te voeren en het antwoord proberen te verklaren via de inverse bewerking van vermenigvuldigen.

Maar, zoals gezegd, is de omzetting via meetgetallen de meest concrete en inzichtelijke. Deze methode sluit tevens goed aan bij het omzetten van breuken (fracties) in procenten. Net als bij procentrekenen is het voor het schattend en precies rekenen met kommagetallen van belang dat kommagetallen grofweg in breu-

ken kunnen worden omgezet. Bijvoorbeeld: $0,24 \times 600 \text{ in } \approx \frac{1}{4} \times 600$, te interpreteren als $\frac{1}{4}$ deel-van 600 of $600 : 4$. Het globaal berekenen van 24 procent-van-600 gaat ook op die manier.

Wanneer we terugkijken op de samenhang van breuken met verhoudingen, procenten en kommagetallen valt op dat de *dubbele getallenlijn* (en vanaf verhoudingsstandpunt gezien de verhoudingstabel) daarbij een belangrijke bemiddelende functie vervult. Dit verleent het opereren binnen deze verwante gebieden en de overgangen ertussen een grote samenhang. En dat is precies wat doelstelling 4 beoogt.

Op de situering van de kommagetallen in de breukenleergang zullen we in deel 3B nog nader ingaan. Maar het is uit het voorgaande over procenten duidelijk dat via de ondermaten van 10-vouden ook de relatie met kommagetallen kan worden gelegd, vanaf het derde kwart van de leergang.

4 *Interne samenhang*

De titel van dit hoofdstuk slaat ook op de samenhang tussen de verschillende activiteiten binnen het domein van de breuken zoals in het voorgaande is beschreven aan de hand van de vier kern-doelen – we noemen dat de ‘interne’ samenhang. Eerder werden daarover al enkele globale opmerkingen geplaatst. Namelijk dat de activiteiten betreffende doelstelling 1 voornamelijk in het eerste kwart van de leergang gesitueerd zijn, die van doelstelling 2 in het tweede kwart, doelstelling 3 in het derde kwart en doelstelling 4 in het laatste kwart. Maar dat is slechts een grove indeling. Want er zijn tal van dwarsverbindingen tussen de onderscheiden kwarten. Deze werden in de tekst onder de kopjes ‘samenvatting en situering’ kort aangegeven. In het volgende zal getracht worden de onderwijsstructuur van de hier geschetste breukendidactic kort te beschrijven en samen te vatten.

Allereerst de vijf aspecten van breuken die in doelstelling 1 werden beschreven. Deze strekken zich uiteraard over de gehele leergang uit: algemeen bij toepassingen en meer specifiek bij het positioneren, opereren en integreren met verhoudingen, procenten en kommagetallen.

Het positioneren van breuken op de getallenlijn (doelstelling 2) wordt in het tweede kwart van de leergang aangezet vanuit het meten en redeneren met benoemde meetbreuken. In het derde en vierde kwart van de leergang worden de mogelijkheden tot positioneren en vergelijken van breuken geleidelijk aan uitgebreid naarmate de leerlingen steeds meer inzicht krijgen in gelijkwaardigheid van breuken.

Het opereren met breuken wordt vooral in het derde kwart van de leergang geaccentueerd. Maar daaraan voorafgaand is in het eerste en het tweede kwart al uitgebreid aandacht besteed aan deel-van-veel bepalen via de dubbele strook (ondermaat) en in tal van toepassings-situaties. Ook ordenen en verschil bepalen zijn reeds bij het meten op de getallenlijn aan de orde gesteld in betrekkelijk eenvoudige gevallen. Als basismodel voor het opereren fungeren de reep (strook) en de plak (rechthoek) in de context van het verdelen en opdelen van chocolade. De indirecte methode en de directe methode alsmede de semi-directe methode om begrip van equivalentie te verwerven, worden mede binnen deze modelcontext verder uitgediept. En ook de transformatiemethode die in doelstelling 4 nader werd beschreven, is al eerder in het tweede en vooral het derde kwart van de leergang aan de orde gesteld bij eerlijk verdelen en bij verhoudingen in relatie tot breuken.

In het laatste deel van de leergang komt de nadruk vooral op de samenhang met verhoudingen, procenten en kommagetallen te liggen. Maar deze relatie is ook al eerder gelegd bij toepassingsopgaven waarin breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen in gemengde vormen verschijnen, bijvoorbeeld in deel-van-veel aanduidingen met fracties, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Of in vergelijkingsproblemen die (multiplicatief) met breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen beschreven kunnen worden.

Kortom, de activiteiten betreffende de vier doelstellingen krijgen in de vier kwarten van de leergang successievelijk speciale nadruk, maar deze deelactiviteiten zijn niet zo duidelijk te scheiden. Integendeel, ze overlappen en ondersteunen elkaar. Dit komt duidelijk tot uiting in de verschillende methoden die beschreven zijn om tot een goed begrip van equivalentie te komen.

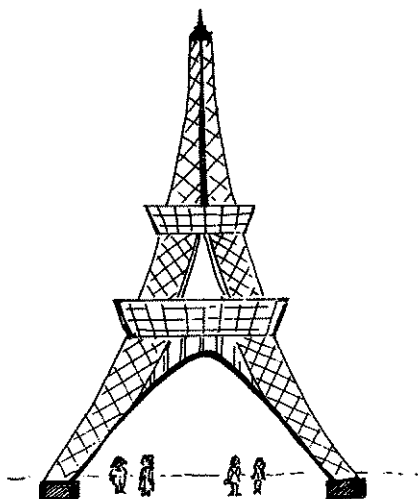
5 Twee puzzels tot besluit

We geven twee puzzels tot besluit waarin de samenhang van breuken met verwante onderwerpen tot uitdrukking komt en waarin ook verschillende manieren om met equivalente breuken te werken worden uitgedrukt.

Het eerste probleem ligt op het niveau van de leerlingen einde basisschool, en het tweede op het niveau van de lezer.

HET PARIJS-PROBLEEM

————— AFBEELDING 163



Ik ging eens met de auto naar Parijs. Ik reed weg met een volle tank. Toen ik ongeveer $\frac{2}{3}$ van de afstand had afgelegd, zag ik dat de tank nog voor een kwart gevuld was.

Welke vragen zou je hierbij kunnen bedenken?

Kinderen uit groep 8 komen onder meer met de volgende vraag.⁵

‘Red ik het nog met de benzine die ik heb?’

Zhang rekent met procenten en complementen: $33\frac{1}{3}$ procent van de weg moet nog met 25 procent van de tankinhoud worden afgelegd, dus is er een tekort

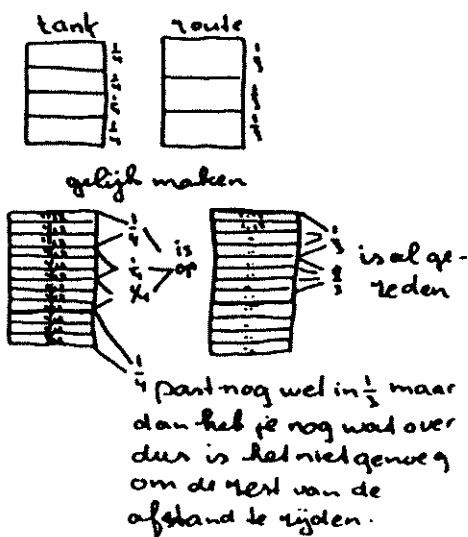
Andere leerlingen doen iets vergelijkbaars met de kommagetallen 0,75 en 0,66 (of 0,67).

In beide methoden worden de twee verschillende benoemde breuken als het ware op één $\overline{100}$ -strook afgebeeld en vervolgens vergeleken.

Een soortgelijke methode kan ook gevolgd worden door binnen het gebied van de gewone breuken te blijven en de betreffende getallen als het ware op de $\overline{12}$ -strook te projecteren. Dat gaat dan bijvoorbeeld als volgt.

'Hij redt het niet', beweert Donja. Ze geeft een getekende toelichting.

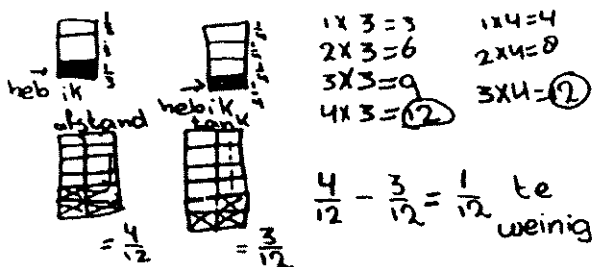
AFBEELDING 164



Bij het bord legt zij het nog eens uit. Wil je de tank en de route gelijk maken, dan moeten beide in twaalf stukjes worden verdeeld en dan blijkt dat je in de tank juist één zo'n stukje tekort komt.

Leila heeft ook een getekende oplossing. Zij laat buiten de tekeningen om nog eens zien waarom er in twaalf stukjes moet worden verdeeld, zodat het precies uitkwam.

AFBEELDING 165



Kortom, er worden in deze groep geheel verschillende methoden gevolgd om het Parijs-probleem op te lossen. En daaruit komt ook de samenhang van breuken met verwante onderwerpen naar voren. Er rijst overigens nog wel een vraag:

Hebben we inderdaad nog $\frac{1}{12}$ tank nodig voor de rest van de rit, zoals Donja en Leila beweren?

In de groep is deze vraag overigens niet expliciet gesteld. Maar Menno lost hem wel goed op.

AFBEELDING 166

O Ik red het met maar met de rest van de benzine
 $\frac{2}{3}$ heb ik afgelegd met $\frac{2}{3}$ deel van de benzine
 $\frac{1}{3}$ heb ik afgelegd met $\frac{1}{4}$ deel van de benzine
 De afstand is $\frac{2}{3}$

Voor de hele afstand $\frac{3}{3}$ heeft de chauffeur dus $\frac{3}{4} + \frac{1\frac{1}{2}}{4} = \frac{4\frac{1}{2}}{4}$ tank nodig, oftewel $1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{8}$ tank.

Er is dus niet $\frac{1}{12}$ tank tekort maar $\frac{1}{8}$ tank!⁶ Menno heeft ons buiten het basisschoolprogramma gevoerd met zijn toepassing van elementaire redeneer-en rekenvaardigheden.

HET DANSFEEST-PROBLEEM

Om ons nog eens te kunnen inleven in de problemen die kinderen ondervinden bij het rekenen met breuken – de taal, gelijkwaardigheid, uitvoeren van bewerkingen, enzovoort – gaan we na hoe we de volgende klassieke opgave oplossen en waar we eventueel op problemen stuiten of zelfs helemaal vastlopen. (Het is uiteraard *niet* de bedoeling dat we het *letterrekenen* in de oplossing betrekken – we verplaatsen ons in het standpunt van de leerlingen einde basisschool.)

AFBEELDING 167



Op een feestje met volwassenen danst op een gegeven moment $\frac{3}{4}$ deel van de vrouwen met $\frac{5}{8}$ deel van de mannen.

Het hoeveelste deel van de aanwezigen danst dan?

Het is een lastige opgave. Hij is niet erg realistisch in zijn vraagstelling. Toch kunnen we er veel van leren – om te beginnen van onze eigen werkwijze wel te verstaan.

Daarom eerst een denkpauzestreep.

We trachten één van de vele denklijnen die mogelijk zijn te volgen.

‘Tsja, je weet niet hoeveel mensen er zijn ...

Er zijn niet evenveel mannen en vrouwen ...

$\frac{3}{4}$ vrouwen is evenveel als $\frac{5}{8}$ mannen; er zijn blijkbaar meer mannen dan vrouwen – of omgekeerd?; nee er zijn meer mannen.

Optellen? $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$, dat slaat nergens op ...

Wacht eens, ik moet middelen, dus krijg ik $\frac{11}{16}$.

Zou dat kunnen kloppen – 16 mensen? Hoeveel mannen zijn er ...?

Nee, dat kan niet, want dat moeten er meer zijn dan 8, maar dan kan ik geen $\frac{5}{8}$ meer nemen.’

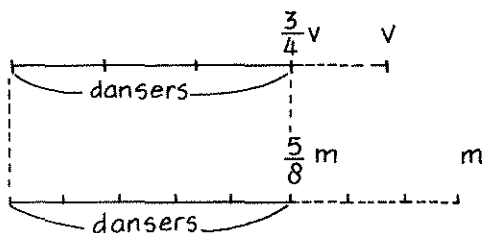
?

De breuken zijn verschillend benoemd: het gaat om (zoveel) vrouwen en (meer) mannen. Dus we mogen niet optellen en middelen. Zijn het er wel evenveel, dan komen we in tegenspraak met het gegeven dat $\frac{3}{4}$ van de vrouwen met $\frac{5}{8}$ van de mannen danst. Hoe nu verder?

Probeer die gelijkheid eens in een tekening tot uitdrukking te brengen, bijvoorbeeld met een strook.

Dat kan zo.

AFBEELDING 168



'Je moet als het ware de teller gelijk maken – die 3 stukjes en die 5 stukjes ...

Welk deel danst?, was de vraag.

Dat is moeilijk te zien, die stukjes zijn niet gelijk, ik schat $\frac{2}{3}$, maar precies gaat het niet.'

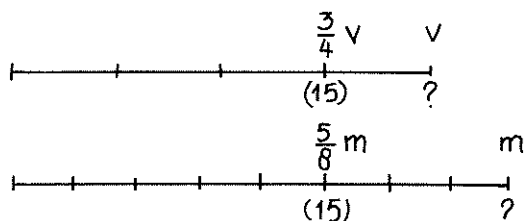
?

De stukjes zijn inderdaad ongelijk, optellen gaat niet zonder meer. Kun je niet zorgen dat je een nieuwe verdeling maakt zodat ze wel gelijk zijn?

'Ik moet dan zoeken naar een aantal dat zowel in drieën als in vijven kan worden verdeeld – dus vijftien.

Een verdeling in vijftien, maar ik kan ook zeggen dat er 15 vrouwen en 15 mannen dansen – dat zet ik er even bij op de dubbele getallenlijn.'

----- AFBEELDING 169



'Het totale aantal vrouwen is $4 \times 5 = 20$, want één stukje op die lijn is $5(15 : 3)$, en het totale aantal mannen is $8 \times 3 = 24$, omdat die stukjes drie lang zijn ...

Van die 44 mensen dansen er 30, dat is $\frac{30}{44}$ deel, ofwel $\frac{15}{22}$ – dus zat mijn schatting van $\frac{2}{3}$ er niet ver naast.'

De werkwijze die hier gevolgd is, komt overeen met de *indirecte methode* om breuken te positioneren en ermee te opereren via de dubbele getallenlijn.

Als hetzelfde in breukentaal genoteerd wordt, krijgen we het

gelijknamig maken van de tellers $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ en $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$. Om het juiste antwoord te krijgen tellen we vervolgens de tellers en noemers op $\frac{15}{20} \oplus \frac{15}{24} = \frac{30}{44} = \frac{15}{22}$. Is dat geen eigenaardige bewerking? De tellers geven de dansers aan en de noemers het totale aantal vrouwen en mannen – vandaar. Het zoeken naar een gemeenschappelijke maat komt ons na de operaties met de repen bekend voor (analogie met gelijknamig maken oftewel de *directe methode*).

Misschien voelen we ons net zo ontheemd als de kinderen zich zouden voelen indien we uitgelegd zouden krijgen dat we eerst de tellers gelijknamig moeten maken en dan vervolgens tellers en noemers optellen om het juiste antwoord te krijgen. Want het is moeilijk te doorzien wat dit met het gestelde probleem van doen heeft. Maar met een plaatje erbij getekend, wordt het al heel wat duidelijker.

De vraag is echter of in plaats van de repenaanpak met de dubbele getallenlijn ook niet de verhoudingstabel gebruikt kan worden via de *transformatiemethode*. Breuken en verhoudingen zijn toch in zekere zin verwisselbaar?

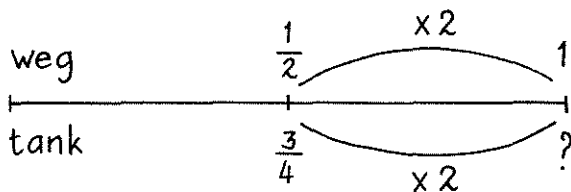
Lees eens in plaats van ‘ $\frac{3}{4}$ deel van’ eens ‘3 van de 4 vrouwen’ .. en ‘ $\frac{5}{8}$ deel van’ nu als ‘5 van de 8 mannen’ ... Maar 3 is niet gelijk aan 5, de aantallen dansende mannen en vrouwen komen overeen – althans op dat feestje, omdat op dat moment geen vrouwen met vrouwen en mannen met mannen dansen. In plaats van ‘3 van de 4 vrouwen’ mag ik ook zeggen ‘6 van 8’ enzovoort, en nu kan ik ze wel gelijk krijgen. Dus dansen 15 van totaal 20 vrouwen, met 15 van totaal 24 mannen. Dat is 30 van de 44 aanwezigen, ofwel $\frac{30}{44}$ deel.

Dat is nog makkelijker. Maar dan moet je wel op het idee komen om breuken in verhoudingen om te zetten ... Ook dit komt overeen met wat de kinderen in het reguliere programma leren, bijvoorbeeld bij het vergelijken van breuken! Achteraf lijkt de puzzel zo makkelijk, net zoals het breukrekenen ons achteraf ook zo eenvoudig voorkomt – maar dat is schijn.⁷

Noten

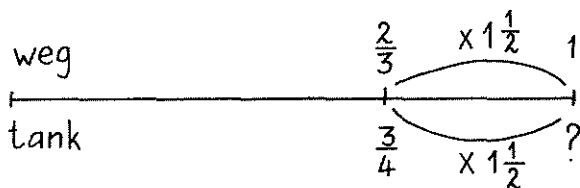
- 1 De voorbeelden en de scores zijn ontleend aan: Bokhove, J. en J. Janssen: Periodiek Peilingsonderzoek in het Basisonderwijs (4), *Tijdschrift voor Nascholing en onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 7(2), 1988, pag. 16-35.
- 2 Zie noot 1, pag 33.
- 3 Reys, R.E. (et al.): Computational Estimation performance and strategies used by fifth and eight-grade Japanese Students, *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 1991, pag. 39-58.
- 4 Zie: Streefland, L.: *Fractions in Realistic Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer, 1991. [Freudenthal Instituut, 1988]
- 5 Zie noot 4.
- 6 Bij nader overdenken echter blijkt het antwoord '1/12 tank tekort' toch niet correct. Er ligt namelijk de verleidelijke misrekening van verschil bepalen aan ten grondslag die in eenvoudiger gevallen ook vaak bij basisschoolleerlingen wordt aangetroffen.
De fout kan via een kleine verandering in de getallen inzichtelijk worden gemaakt: neem '1/2 route afgelegd en 3/4 tank gebruikt'.

AFBEELDING 170



Halfweg is het verschil weliswaar een kwart tank, maar nu zal men niet zo snel concluderen dat dit ook het totale tekort voor de hele weg is. Daarvoor is immers dan twee keer $\frac{3}{4}$ tank nodig, oftewel $1\frac{1}{2}$ tank, dus is er een halve tank tekort.

Is er een minder eenvoudige vermenigvuldigingsfactor nodig om de hele route te krijgen, dan wordt de multiplicatieve berekening vaak vervangen door een additieve. Nu correct.



Vermenigvuldigen met $1\frac{1}{2}$ leert ons, dat om in Parijs te komen $1\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ tank = $\frac{9}{8}$ tank = $1\frac{1}{8}$ tank nodig is: er is dus $\frac{1}{8}$ tank tekort, in plaats van $\frac{1}{12}$ tank. (Kan ook via $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$).

Maar zoals in de basistekst staat, is deze opgave uiteraard veel te moeilijk voor de basisschool – de Menno's uitgezonderd natuurlijk.

- 7 Zie voor meer opgaven, ook op eigen niveau: Goffree, F: *Wiskunde en Didactiek*, (deel 3), Groningen, Wolters-Noordhoff, 1985.

VII Terugblik in tweespraak

Nieuwe doelen, halvering van de onderwijstijd in breuken, en nieuwe didactische aanzetten – de ‘Proeve’ haalt nogal wat overhoop.

Niet alleen de ‘Proeve’.

De nieuwe doelen zijn officiële kerndoelen en die hebben *wij* niet vastgesteld. Maar ze passen wel goed in het realistische Proeve-concept.

Voorts is de halvering van de onderwijstijd binnen een brede groep van betrokken deskundigen besproken en overeengekomen. Die reductie past in de internationaal waarneembare trend: meer aandacht voor kommagetallen, procenten en verhoudingen en minder accent op breuken.

De nieuwe didactische inzichten zijn voor een deel wel door de Proeve-groep aangezet. Maar ook deze worden door een brede groep gedragen. Sterker nog: voor een deel zijn ze voortgekomen uit en worden ze ondersteund door een samenwerkingsgroep van medewerkers van SLO, Freudenthal Instituut, Cito en de Hogeschool van Amsterdam. Waarmee we maar willen zeggen dat de Proeve-didactiek betreffende breuken geen exclusieve gelegenheid is van drie auteurs, maar dat ze ingebed is in een ruime kring van vakdeskundigen.

Laten we het dan nu maar over de didactiek hebben. Het meest opvallend vind ik de aandacht voor de ontwikkeling van de breukentaal vanuit het eerlijk delen en vooral het meten. Vervolgens valt ook het gebruik van de dubbele (stroken-)getallenlijn op. En ten slotte de modelcontext van de chocoladerepen en -plakken om het opereren met breuken aan te leren.

Is deze typering correct? Of ben ik nog wat belangrijks vergeten?

Wij zouden nog eens speciaal willen benadrukken dat breuken

benoemd worden – dat maakt ze veel concreter.

Heel verhelderend is het om na te gaan hoe de equivalentie van breuken aangeleerd, of beter gezegd, verworven kan worden. Met name de semi-directe methode, zoals die in de tekst wordt aangeduid, is interessant. Deze schakelt als het ware de indirecte methode waarin via het rekenen met gehele getallen (ondermaten) breuken worden weggewerkt, met de directe methode waarin op formele wijze met breuken wordt geopereerd. Er is nog een vierde methode en die zet breuken om in verhoudingen (waaronder procenten) wat in tal van toepassingsproblemen heel doelmatig kan zijn.

Bij een en ander spelen modellen zoals de (dubbele) strook of getallenlijn, de rechthoek en de verhoudingstabel een belangrijke middelaarsrol.

Dat is wel duidelijk. Maar ook is duidelijk dat het vroegere gangbare cirkelmodel van de taart of de pannenkoek of voor mijn part de pizza, nu wat op de achtergrond blijft. En dat begrijp ik eerlijk gezegd niet goed. Want waar in de tekst over het opereren met breuken i.c. aftrekken en optellen wordt gesproken en de contextmodellen van de reep en de plak worden opgevoerd, had daar toch net zo goed het cirkelmodel gebruikt kunnen worden. ‘Van een voorgesneden taart neemt Jan $\frac{1}{2}$ deel en Janneke $\frac{1}{3}$ deel. Uit hoeveel stukken bestaat de taart? Hoeveel stukken blijven over? Het hoeveelste deel van de taart is dat?’

Precies dezelfde mentale activiteiten worden uitgelokt als met de reep of de plak. En daar komt nog bij dat het taartmodel ook heel goed bruikbaar is bij procenten.

De cirkel wordt niet ondergewaardeerd. De voordelen ervan worden wel degelijk uitgemeten – denk aan de pizzaverdelingen en de tafelschikkingen. En ook de mooie verbinding die via de strook met het cirkelmodel of het sectordiagram met percentages kan worden gelegd door die strook om te buigen, blijft niet ongenoemd. Maar we moeten de cirkel niet overwaarderen: de bruikbaarheid voor het leren *opereren* met breuken – we hebben het niet over het voorstellen van de individuele breuken, maar over het werken ermee – is toch tamelijk gering. Vergelijk bijvoorbeeld

het uitbeelden van gelijkwaardigheid en deel-van-deel bepalen met behulp van de rechthoek maar eens met die van de cirkel, of de ontwikkeling van de breukentaal met behulp van meetstroken met de functie die de cirkel in dit opzicht (niet) heeft.

Op de keper beschouwd behoeven mijn vorige vragen nog wat nadere uitwerking. Ik sprak weliswaar van eerlijk verdelen en meten, maar voor het overige handelden de vragen toch vooral over model-contexten en modellen, over breukentaal en repen, plakken en pizza's. Maar wat mij vooral van belang lijkt in de Proeve-aanpak, is de proceskant van de breukenwiskunde als menselijke activiteit. Hoe zit het bijvoorbeeld met de wording van het equivalentiebegrip? Welke rol spelen modelactiviteiten als eerlijk verdelen en meten daarbij? En om nog meer overhoop te halen: hoe zit het met de inzet van zakrekenmachines en computers?

Om met het laatste te beginnen: er zijn momenteel zakrekenmachines op de markt die een belangrijke rol zouden kunnen vervullen in dienst van de na te streven samenhang. Overigens nadat de leerlingen via voorbereidend hoofd- en handwerk eerst de nodige inzichten verworven hebben. Het lijkt niet zo zinvol om daarop in dit verband al in te gaan. Later, na onze beschouwingen over kommagetallen en procenten lijkt het beter apart op deze materie in te gaan. Daarbij zal ook de betekenis van computerprogramma's aan de orde worden gesteld.¹

Wat de proceskant van het onderwijs betreft, wijzen wij nogmaals op onze notities in verband met samenhang en uitlijning! Per traditie zijn de breuken, als we het zo mogen stellen, een veelkoppig monster gebleken dat getemd kan worden wanneer we niet opnieuw in de fouten van weleer vervallen. Neem bijvoorbeeld het tafelschikken uit het vorige hoofdstuk. Daar gaat het om eerlijk verdelen in verdeelsituaties, die zowel met de activiteit van het schikken van de verdelers aan tafels als via het eerlijk verdelen toegankelijk gemaakt kunnen worden. In deze activiteiten ligt als het ware een blauwdruk voor breukenonderwijs besloten. Bijvoorbeeld:

Tafeltje $\frac{3}{4}$, ieder krijgt $\frac{3}{4}$, maar ook $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Tafeltje $\frac{6}{8}$, ieder krijgt $\frac{6}{8}$ na één voor één verdelen, maar ook $\frac{3}{4}$ (twee tafels $\frac{3}{4}$ herschikt tot $\frac{6}{8}$).

In dit geval ontstaat er van alles wat met breuken te maken heeft door en in de gesuggereerde activiteiten. Door nu dergelijke activiteiten te laten sporen met soortgelijke activiteiten aan en in verband met het voorgestelde context-strook-model, vindt geleidelijk aan een verantwoorde overgang plaats naar een wat meer formeel niveau. Wanneer de uitwerking in schoolboekleergangen deze trekken vertoont, is naar onze mening de proceskant voldoende gewaarborgd.

Maar ik had eigenlijk bij het begin moeten beginnen, namelijk over het basisprogramma van zestig lessen. Al houdt dat een bekorting in van de helft van de onderwijstijd, en dat zou in ieder geval mooi meegenomen zijn als het allemaal in die tijd zou kunnen, dan nog moet je je afvragen of die breuken misschien niet helemaal van het programma, althans als zelfstandig leerstofgebied, geschrapt zouden moeten worden. Kommagetallen zijn toch veel belangrijker, zeker indien we daarbij het gebruik van de rekenmachine betrekken? Ik vind dat er nauwelijks een serieuze motivering wordt gegeven waarom de breuken op het programma moeten blijven, en naar mijn weten zijn er in de geschiedenis van de rekendidactiek toch herhaaldelijk heftige discussies over het al dan niet handhaven van dit leerstofonderdeel geweest.² Ik noem enkele tegenstanders van naam: Wijdenes, Van Hiele, en niet te vergeten Freudenthal. Dus zo gek is die schrapgedachte toch niet?

Niet gek, maar misschien wel wat ondoordacht. Eerst een correctie. Freudenthal behoort niet tot het kamp van de tegenstanders. In het begin van de jaren zeventig kwam hij volledig terug op zijn aanvankelijke reserves ten aanzien van het breukenonderwijs op de basisschool en ontwikkelde er sindsdien nieuwe ideeën over die voor een deel ook in dit Proeve-programma zijn terug te vinden – maar dat terzijde.

Welke argumenten pleiten voor handhaving van breuken als leerstof? Het maatschappelijke belang is weliswaar niet erg groot en betreft ook maar enkele elementaire onderdelen van de breuk als

beschrijvingsmiddel en als operator, maar geheel te verwaarlozen is dat toch niet. In ieder geval is dit al een reden om informeel breukrekenen binnen een beperkt programma te rechtvaardigen.

Breuken hebben daarnaast ook een interne betekenis binnen rekenen-wiskunde als systeem. Zo hebben verhoudingen, kommagetallen en procenten met breuken te maken, de een kan voor een goede begripsvorming nauwelijks zonder de ander – we lichten dit niet nóg eens nader toe, anders vallen we in herhaling.

Breuken zijn voorts voorlopers van rationale getallen. Ze vinden hun toepassing in de algebra, maar ook in statistiek en kansrekening. En ten slotte vinden ze nog hun externe toepassing in allerlei vakken die tot de basisvorming behoren, waaronder de natuurwetenschappelijke en wereldoriënterende vakken. Waarmee overigens niet gezegd wil zijn, dat nu alle leerlingen belang zouden hebben bij de getaltheoretische studie van rationale getallen. Maar een deel van de kinderen zal daar niet omheen kunnen. En voor hen willen we daarvoor het fundament leggen en de leerweg open houden. Het mooie van de realistische aanpak is nu – als we dat zo mogen zeggen – dat dit openhouden van de weg naar het formele breukrekenen geschiedt via het pad van het informele breukrekenen dat voor alle leerlingen van maatschappelijk en intern rekenkundig belang kan zijn.

En wat het argument voor het exclusieve rekenen met kommagetallen betreft: stelt u zich eens voor dat:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} =$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} =$$

zo zou worden uitgerekend:

$$0,5 + 0,3333333 =$$

$$0,5 - 0,3333333 =$$

$$0,5 \times 0,3333333 =$$

$$0,5 \times 0,6666666 =$$

$$0,5 : 0,3333333 =$$

Vroegtijdig formeel breukrekenen op de basisschool is uit den boze, en leidt tot weinig resultaten, maar men moet niet naar de andere kant doorslaan en de breuken helemaal in de ban doen. Wat echter wel moet gebeuren is een goede didactiek voor het informele breukrekenen ontwikkelen. En daarop zijn de didactische inspanningen vanaf het begin van de jaren zeventig gericht geweest. De resultaten daarvan zijn, onder meer, in de Proeve te lezen. Maar ook de ontwikkelaars van de moderne leerboeken hebben daartoe een belangrijke bijdrage geleverd in de afgelopen jaren. Want het is natuurlijk niet zo dat dit alles door enkele mensen is gedaan.

Alleen vraag ik me wel af wat men in het voortgezet onderwijs, dus in de laatste fase van de basisvorming, over deze didactische ideeën denkt. Zo heb ik bijvoorbeeld niet de indruk dat er in de allernieuwste wiskundeboeken, dus die vanaf 1993 op de onderwijsmarkt komen, iets in de genoemde zin aan breukrekenen wordt gedaan, zo er al enige aandacht aan breuken wordt geschonken.

Hoe het met de leerboeken staat, valt op dit moment nog niet goed te overzien, maar wellicht is die constatering correct.³ Op het niveau van de eindtermen en de examenprogramma's en ook van de achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16, zien we geen didactische trendbreuk tussen de basisschool en het voortgezet onderwijs. Integendeel, de respectieve kerndoelen en programma's zijn juist heel goed op elkaar afgestemd – ook wat de breuken betreft. Maar het is correct dat dit voor de praktijk van het onderwijs nog geen enkele garantie van een goede afstemming hoeft in te houden. Leerboeken vervullen daarin de beslissende scharnierfunctie – we zullen zien, en hopen er het beste van. Zoals gezegd, hebben we in ieder geval goede hoop dat de kerndoelen wel heel helder in de nieuwe versies van de leerboeken voor de basisschool tot uitdrukking zullen komen. En dat is op den duur voor het voortgezet onderwijs misschien van beslissende betekenis om de goede aansluiting te kunnen verzorgen.

Dan ligt de volgende vraag natuurlijk op de stip. Is het hier

geschetste programma, dat toch heel wat nieuwe elementen bevat, ook in vergelijking met de realistische rekenmethoden die in de jaren tachtig zijn verschenen, is die nieuwe aanpak naar jullie mening duidelijk in de leerboeken weer te geven – zo de auteursgroepen die al zouden willen volgen, waar ik, gelet op het voorgaande, nu maar even van uit ga. Want dit boek heet toch niet voor niets ‘Proeve van een Nationaal Programma’? Met uiteraard meer klemtoon op de laatste twee woorden dan op de eerste term. Het gaat ten slotte toch om de realisering in de onderwijspraktijk?

Zeker. Maar daartoe is een passende methodenontwikkeling wel een noodzakelijke voorwaarde, althans voor de brede uitvoerbaarheid van het hier geschetste realistische breukenonderwijs. Maar uiteraard geen voldoende garantie dat het in de praktijk van alledag ook onderwezen wordt als bedoeld. In de praktijk van alledag heeft men trouwens met het probleem van de grote verschillen tussen leerlingen te maken.

Dit brengt ons bij de differentiatieproblematiek ...

Inderdaad. De leerlingen doorlopen het traject tussen contextgebonden en meer formeel opereren met breuken uiteraard niet op dezelfde wijze. Ook het eindniveau op de basisschool en daarna in de basisvorming zal per leerling aanzienlijk kunnen verschillen. Dit alles heeft allerlei praktische onderwijsproblemen tot gevolg die in het algemeen als uitermate bezwaarlijk worden ervaren. In zekere zin is dat ook terecht omdat de didactische organisatie bij een zeer heterogene groep met grote differentiatieverschillen buitengewoon lastig is – althans indien men de groepsleden niet louter individueel wil onderrichten, maar hen ook als groep wil laten samenwerken, zoals de realistische richting voorstaat.⁴ Toch willen we hier de positieve kanten van de niveauverschillen tussen de leerlingen niet ongenoemd laten, te weten:

- 1 Ze weerspiegelen de differentiatie in individuele mogelijkheden van de kinderen zoals die zich nu eenmaal voordoet en die men niet kan negeren als men aan die mogelijkheden recht wil doen.

- 2 In het onderwijsleerproces dat (mede) gericht is op interactie, discussie en samenwerking, naast individueel werken, kunnen kinderen kennis nemen van de (naast-)hogere niveaus waar ze naar verwachting op termijn ook aan toe zullen komen, waardoor ze als het ware al wat in hun toekomstige leergang vooruit kunnen kijken en zich kunnen richten op een naast-hoger doel.
- 3 Omgekeerd kunnen kinderen die op een hoger, meer formeel niveau werken steeds terugkijken naar voorafgaande, meer contextgebonden werkwijzen, waardoor leeg formalisme en verbalisme worden tegengegaan.
- 4 De onderwijsgevende kan in de gedifferentieerde oplossingen de lijn van een passende leergang zien uitgestippeld.
- 5 En de leerlingen zijn in de discussies gedwongen hun oplossingswijzen zo helder mogelijk voor de totale groep onder woorden te brengen en uit te beelden, wat de begripsvorming zeker ten goede kan komen. Als praktische leidraad kan de onderwijsgevende de nabespreking steeds zo inrichten dat eerst een oplossing van een relatief laag niveau wordt besproken, dan een van het middenniveau en vervolgens een uitwerking van het hoogste niveau, waarna ten slotte de relatie tussen de drie niveaus als samenvattende afsluiting wordt aangegeven.

Kortom, men kan de differentiatieverschillen ook constructief als didactisch middel benutten in interactief groepsonderwijs. Dit geldt overigens niet alleen voor de onderwijsgevende maar zeker ook voor de methodenontwikkelaars en onderwijsontwikkelaars. Wat in het voorgaande beschreven is, getuigt daar trouwens ook van. Indien we produktieve ideeën i.c. modellen en contexten aandragen, blijken de leerlingen ons de globale leerweg te kunnen wijzen. Of eigenlijk is het omgekeerd: pas als ze dat als gedifferentieerde groep kunnen doen, zijn onze onderwijsideeën produktief en constructief.

De geschetste modellen en schema's van het breukrekenen blijken aan dit gewichtige didactische criterium van gedifferentieerde onderwijsleergangen te voldoen: steeds blijkt de dwarsdoorsnede van de prestaties van een groep op een bepaald moment de lengte-doorsnede van de totale leergang te weerspiegelen. Let

wel: 'op een bepaald moment', want op termijn zal ook de onderste groep opschuiven naar een hoger niveau. Dat was het geval bij het meten met stroken en het ordenen van breuken op de getallenlijn, maar ook bij het verschil bepalen en optellen in de repencontext en bij gelijkwaardige tafelschikkingen.

Uit de voorbeelden van leerlingenwerk bleek tevens dat de differentiatieverschillen wel globaal bezien lineair zijn, dus in een soort leerlijn zijn te plaatsen die loopt van het contextgebonden rekenen via het modelmatige werken naar het formele opereren, maar dat bij een meer gedetailleerde beschouwing de prestaties (en dus ook de misvattingen) veel minder rechtlijnig te duiden zijn. In grote lijnen mogen we van leergangen spreken, en vanuit dit wijde perspectief benaderen we meestal ook de groepen in de onderwijspraktijk. Maar meer in detail naar individuele leerlingen kijkend, zou het passender zijn om van een *leerstructuur* te spreken in plaats van een *leergang*.

Een zelfde nuancering zou men trouwens ten aanzien van modellen kunnen aanbrengen: het gaat daarbij niet slechts om de uiterlijke afbeelding ('Darstellung') maar veeleer om het innerlijke, mentale beeld dat de leerlingen hebben ('Vorstellung'), want dat bepaalt de aard en de wijze van opereren met die modellen bij kale sommen en in toepassingssituaties. Een meer op de individuele leerling toegesneden beschouwing is echter pas goed zichtbaar indien de grote algemene lijn van de mogelijke inzetbaarheid van die modellen in het onderwijsleerproces ons duidelijk voor ogen staat. En op die grote lijn is dit Proeve-boek gericht. Uit de geschetste hoofdlijnen van de Proeve-didactiek kunnen verschillende leergangen worden uitgewerkt. Er is geen methodisch keurslijf aangebracht.

Toch zouden we willen benadrukken dat, wellicht afgezien van het delen van een breuk door een geheel getal, de geschetste doelen voor alle leerlingen haalbaar zijn. Alleen moet voor de allerswakste groep het arsenaal van de basisbreuken beperkt gehouden worden (noemers 2, 3, 4, 6, 12, 8, 5, 10). En bij deel-van-veel moeten de getallen niet te complex zijn en concentreren we ons met die groep vooral op stambreuken. Ook kan men naast het precies rekenen het globale schattende rekenen in het onderwijs betrekken. Gevoel voor getallen, i.c. gevoel voor de orde van

grootte van rationale getallen en de globale uitwerking van de bewerkingen ermee is een belangrijk algemeen doel in verband met gecijferdheid. En dat doel is ook voor de zwakke leerlingen uitermate belangrijk. Vandaar dat de ontwikkeling van de breukentaal via het meten en het rekenen met ondermaten zo belangrijk is.

Mag ik dit college onderbreken? Ik neem aan dat de kwesties van gecijferdheid en gevoel voor getallen en de operaties ermee vooral ook bij de kommagetallen nog wel uitgebreid aan de orde gesteld zullen worden, en trouwens ook de differentiatieproblematiek. Ik wil weer terug naar de vorige vraag over de implementatie van de realistische didactiek. Mijn vraag luidt: pakt de onderwijsgevende dat dan op? Want is uit onderzoek van onder meer het MORE-project niet duidelijk gebleken dat vaak niet met de nieuwe methoden wordt gewerkt zoals bedoeld is door de ontwerpers?⁵

Ja dat is zo. En natuurlijk is het van belang dat de opleiding en nascholing van onderwijsgevendens optimaal functioneert. Maar er is geen reden om vanwege deze introductieproblemen van vernieuwing van het breukenonderwijs af te zien. Al was het alleen maar vanwege het motief dat het onderwijs beter kan dan in het verleden is gerealiseerd. In het recente verleden is overigens al gebleken dat er vooruitgang is geboekt met de nieuwe methoden. De allernieuwste inzichten zullen praktisch gezien zeker geen extra complicaties opleveren, zo is onze verwachting. Maar in algemene zin gesproken wordt het toch wel hoog tijd dat er nationale nascholingsprogramma's ontwikkeld en uitgevoerd worden. Want het is natuurlijk wel schrijnend als de programma's en leerboeken van hoog gehalte zijn, maar men geen gelegenheid zou krijgen zich diepgaand van de achtergronden en de praktische mogelijkheden ervan op de hoogte te stellen. De Panama-groep speelt daarbij een belangrijke coördinerende rol ... ook bij breuken en kommagetallen.



Die postzegel doet me denken aan het begin van dit boek. Mijn laatste vraag heeft daar ook mee te maken. Namelijk hoe zou bijvoorbeeld de kamelen-som van Anwars erfenis in het onderwijs betrokken kunnen worden? Kunnen jullie nog eens iets over de sfeer van onderzoekgericht onderwijs schetsen aan de hand van dit probleem?

Een voorbeeld van een uitwerking is de volgende.⁶

Op het bord staat Anwars erfenis:

- oudste zoon: de helft ($\frac{1}{2}$ deel),
- tweede zoon: een kwart ($\frac{1}{4}$ deel),
- jongste zoon: een vijfde deel ($\frac{1}{5}$ deel).

Hier stokt de informatie. De kinderen moeten leren onderzoeker te zijn en zelf de vragen te stellen.

‘Van wat?’, ‘Van hoeveel?’ klinkt het. ‘Er blijft in ieder geval wat over, want $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ is $\frac{3}{4}$ en dan heb je nog $\frac{1}{4}$ nodig om alles te hebben, de hele erfenis. En je hebt maar $\frac{1}{5}$.’

‘Je kunt het ook anders laten zien, namelijk $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{4} = 0,25$ en $\frac{1}{5} = 0,2$, dat is samen $0,95$. Er blijft dus $\frac{5}{100}$ of $\frac{1}{20}$ over.’

Dan wordt de erfenis bekend gemaakt: 19 kamelen. Wat zal er nu gebeuren? Waarom?

De klas verdeelt zich in verschillende kampen.

‘Ze krijgen ruzie’, zo meent een aantal, ‘want het kan niet, van 19 kamelen kun je niet de helft nemen of $\frac{1}{4}$...’

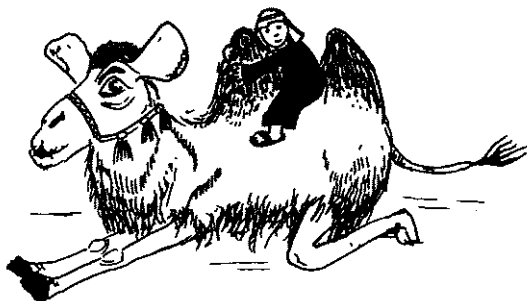
Degenen die zich concentreerden op wat overbleef, kiezen

Richard als hun spreekbuis: 'Er bleef wat over, namelijk het $\frac{1}{20}$ deel. Als ze er nu eens een kameel bijkopen hebben ze er 20, de helft daarvan is 10, het $\frac{1}{4}$ deel 5 en het $\frac{1}{5}$ deel 4, dat is samen 19. Dan verkopen ze die kameel weer.'

Er is ook nog een groep die een tussenpositie inneemt en langs de weg van het schatten met de 19 kamelen aan de slag wil: de helft, dat is ongeveer 9 kamelen, enzovoort.

Nu vertellen we het verhaal van Anwar.

AFBEELDING 173



De standpunten worden verzoend door het verhaal van de ruzie en de langskomende derwisj die zijn kameel leende. Maar het conflict, is het nu wel of niet juist, blijft de gemoederen bezighouden. 't Klopt niet, zo luidt het oordeel van velen. We hebben de erfenis veranderd. Het komt nu, met 20 kamelen, mooi uit, maar dat was de erfenis niet. In ieder geval was het een handige manier van de derwisj om de ruzie te bezweren, daar zijn we het wel over eens. En ook gaan de leerlingen akkoord dat de erfenis van 20 kamelen mooi past om $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$ op een indirecte manier op te tellen.

De weg naar een vervolg ligt nu open:

Kunnen we zelf ook enkele erfenissommen voor twee personen verzinnen, waarbij je met de (tijdelijke) toevoeging van 1 kameel een dreigend conflict kunt oplossen?

En inderdaad: er komen verschillende oplossingen uit de bus. Onder meer $\frac{1}{2}$ deel en $\frac{1}{4}$ deel; $\frac{1}{2}$ deel en $\frac{1}{3}$ deel maar ook $\frac{2}{3}$ deel en $\frac{1}{4}$ deel van de erfenis.⁷

Een mooie afsluiting, omdat de eigen produkties van leerlingen in het voorgaande nog niet bij alle onderdelen zo prominent naar voren zijn gekomen.

Noten

- 1 Er is een educatief softwareprogramma 'Eerlijk Verdelen' ontwikkeld door Jonker, Van Galen, Gravemeijer en Zuidema, dat in enigszins herziene vorm is uitgegeven door Zwijssen.
Zie voor meer informatie: Gravemeijer, K.: Andere didactiek, andere courseware, *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (Nieuwe Wiskrant)*, 8(4), pag. 50-56.
Ook is er onderzoek gedaan naar de ontwikkeling van een intelligent computerprogramma dat geënt is op 'Eerlijk Verdelen'. Zie: Zuidema, J. en L. van der Gaag: *Multidisciplinair Onderzoek voor de Ontwikkeling van een Intelligent Onderwijssysteem*, Utrecht, Freudenthal Instituut, 1993.
- 2 Zie in dit verband de volgende discussie: Goddijn, A. J.: De oudste en de nieuwste breuken, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 11(2), 1992, pag. 18-32.
Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor: Kerndoelen Breuken, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 11(3), 1993, pag. 20-25.
Streefland, L.: Reactie op 'De oudste en de nieuwste breuken', *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 11(4), 1993, pag. 25-29.
- 3 Zie: Huitema, S.: Hoe zit het met de doorgaande lijn? Rekenen in het eerste jaar van de basisvorming, *Willem Bartjens*, 13(2), 1993, pag. 4-9.
- 4 Een zeer interessant interview over het praktische oplossen van de dilemma's betreffende onder meer differentiatie is het volgende van Ron Brandt met de bekende rekendeskundige Magdalena Lampert; Brandt, R.: On Making Sense: A Conversation with Magdalena Lampert, *Educational Leadership*, 51(5), 1994, pag. 26-31.

- 5 Gravemeijer, K., M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, N. Ruesink, L. Streefland, E. te Woerd en D. van der Ploeg: *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek*, Utrecht, Freudenthal Instituut, 1993.
- 6 In deze zin is door L. Streefland en R. Gertsen gewerkt op de St. Vitusschool te Bussum.
- 7 Men kan ook anders te werk gaan, en starten met $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, enzovoort en deze breuken uiteenleggen in een vorm van twee of meer breuken.

Literatuur

- Ball, D.L.: Halves, Pieces and Twos: Constructing and Using Representational Contexts in Teaching Fractions, in: T.P. Carpenter, E. Fennema en T.A. Romberg (eds), *Rational Numbers. An Integration of Research*, Hillsdale, Erlbaum, 1993, pag. 157-196.
- Behr, M.J., I. Wachsmuth en T. Post: Construct a sum: A measure of children's understanding of fraction size, *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 1985, pag. 120-131.
- Bezuk, N.S. en M. Bieck: Current Research on Rational Numbers and Common Fractions: Summary and Implications for Teachers, in: D.T. Owens (ed), *Research Ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics*, New York, MacMillan, 1993, pag. 118-137.
- Bidwell, J.K.: Share Five Chocolate Bars among Six Children, *Mathematics Teaching*, 99, 1982, pag. 4-8.
- Boer, C. van den: *Formules. Deel A: Rekenen met Pijlen*. (Educatief Centrum Rijnmond), Utrecht, Freudenthal Instituut, 1993.
- Bokhove, J. en J. Janssen: Periodiek Peilingsonderzoek in het Basisonderwijs (4), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 7(2), 1988, pag. 16-35.
- Bokhove, J. en J. Janssen: Periodiek Peilingsonderzoek in het Basisonderwijs (6), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 8(2), 1989, pag. 3-33.
- Bouman, P.J. en J.C. van Zelm: *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang met – als proeve van toegepaste logica – een rekenmethode voor de lagere school*, Amsterdam, Versluys, 1933(3).
- Bouman, P.J. en J.C. van Zelm: *Het Nieuwe Negende Rekenboek*, Onderwijzersboekje 9, Amsterdam, Versluys, 1934.
- Braunfeld, P. en M. Wolfe: Fractions for low achievers, *Arithmetic Teacher*, 13(8), 1966, pag. 647-655.
- Brink, J. van den: *Zakrekenmachines deel 2* (experimentele versie van een W12-16 pakket), Enschede, SLO, 1991.
- Brown, C.A. e.a.: Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assessment, *Mathematics Teacher*, 8(4), 1988, pag. 241-248.
- Brown, M.L.: Place value and decimals, in K.M. Hart (ed), *Children's*

- Understanding of Mathematics: 11 – 16*, 1981, London, Murray, pag. 48-65.
- Bruinsma, B. (red.): *Nieuw Rekenen*, Baarn, Bosch en Keuning, 1969 e.v.
- Burns, M.: *A collection of math lessons from grades 3 through 6*, New Rochelle, Cuisenaire Company, 1987.
- Carpenter, T.P. e.a.: Decimals: Results and implications from national assessment, *Arithmetic Teacher*, 28(8), 1981, pag. 34-37.
- Carpenter, T.P. (et al.): Notes from National Assessment: Estimation, *Arithmetic Teacher*, 23, 1976, pag. 297-302.
- Dienes, Z.P.: *Fractions. An Operational Approach*, Parijs, OCDL, 1967.
- Erlwanger, S.H.: Benny's conception of rules and answers in IPI-mathematics, *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(2), 1973, pag. 7-26.
- Faes, W. en M. van Gevel-Lempers: *Praktisch Nieuw: Breuken*, Den Bosch, Malmberg, 1990.
- Freudenthal, H.: *Didactische Fenomenologie van Wiskundige Structuren*, Utrecht, Freudenthal Instituut, 1984.
- Fuson, R.H.: *Het Scheepsdagboek van Christoffel Columbus*, Utrecht, Bruna, 1991.
- Gelder, L. van: *Grondslagen van de Rekendidactiek*, Groningen, Wolters, 1959.
- Glimmerveen, C. en S. van der Werff: *Op Veilig Spoor*, Meppel, Ten Brink, 1969 e.v.
- Goddijn, A. J.: De oudste en de nieuwste breuken, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 11(2), 1992, pag. 18-32.
- Goffree, F.: *Wiskunde en Didactiek* (deel 3), Groningen, Wolters-Noordhoff, 1985.
- Goffree, F.: De papyrus Rhind als inspiratiebron, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(4), 1992, pag. 15-21.
- Gravemeijer, K.: Andere didactiek, andere courseware, *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (Nieuwe Wiskrant)*, 8(4), 1989, pag. 50-56.
- Gravemeijer, K., M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, N. Ruesink, L. Streefland, W. Vermeulen, E. te Woerd en D. van der Ploeg, *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context*

- voor *vergelijkend onderzoek*, Utrecht, Freudenthal Instituut, 1993.
- Hart, K.M. (ed): *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, London, Murray, 1981.
- Hart, K.M.: *Secondary School Children's Understanding of Mathematics*, Londen, Chelsea College, 1980.
- Hasemann, K.: *Mathematische Lernprozesse. Analysen mit Kognitionstheoretischen Modelle*, Braunschweig, Vieweg, 1986.
- Huitema, S.: Hoe zit het met de doorgaande lijn? Rekenen in het eerste jaar van de basisvorming, *Willem Bartjens*, 13(2), 1993, pag. 4-9.
- Jansen, J.W., J.M. Reijnders en J. Sniijders: *Gefundeerd Hoofdrekenen*, Amsterdam, Versluys, 1964.
- Karaschewski, H.: *Ganzheitliches Rechnen auf allen Stufen der Volksschule I*, Düsseldorf, 1954.
- Keijzer, R. en M. van den Heuvel: *More or less* (experimenteel pakket van het Middle School Project), Utrecht, Freudenthal Instituut, 1992 (niet in de handel).
- Kieren, T.E.: Rational and Fractional Numbers as Mathematical and Personal Knowledge: Implications for Curriculum and Instruction, in: G. Leinhardt, R. Putnam en R.A. Hottrup (eds), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, Hillsdale, Erlbaum, 1992, pag. 323-372.
- Kouba, V.L. (et al.): Results of the fourth NAEP assessment of mathematics, *Arithmetic Teacher*, 35(8), 1988, pag. 14-19.
- Lek, A.: Met repen begrepen, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 11(2), 1992, pag. 9-18.
- Lindquist, M.M. (ed): *Results from the fourth mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*, Reston, N.C.T.M., 1989.
- Lovitt, C. en D. Clarke: *This goes with this*, MCTP, Activity Bank, Vol. I, Curriculum Development Centre, Camberra, 1988.
- Mack, N.K.: Learning Rational Numbers with Understanding: The Case of Informal Knowledge, in: T.P. Carpenter, E. Fennema en T.A. Romberg (eds), *Rational Numbers. An Integration of Research*, Erlbaum, Hillsdale, 1993, pag. 85-105.
- Marshall, S.P.: Assessment of Rational Number Understanding: A Schema - Based Approach, in: T.P. Carpenter, E. Fennema en T.A. Romberg (eds), *Rational Numbers. An Integration of Research*, Hillsdale, Erlbaum, 1993, pag. 261-288.

- McIntosh, A., B.J. Reys en R.E. Reys: A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense, *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 1992, pag. 2-9.
- Owens, D.T. (ed): *Research Ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics*, New York, MacMillan, 1993.
- Padberg, F.: *Didaktik der Bruchrechnung*, Mannheim, Wissenschaftsverlag, 1989.
- Pinel, A.: Broken Numbers, *Strategies*, 4(3), 1994, pag. 27-32.
- Postema, J., N. Kuipers en J.J. Haverkort: *Taltaal*, Zeist, Dijkstra, 1975 e.v.
- Prinsen, L. en H. Udding: *De Reken-Wiskunde Test*, 1992 (manuscript).
- Reeuwijk, M. van: Benoemde breuken: herinneringen van vroeger, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(1), 1991, pag. 39-42.
- Reijnders, J.M. en J. Sniijders: *Functioneel Rekenen*, Amsterdam, Versluys, 1959 e.v.
- Reys, R.E. (et al.): Computational Estimation Performances and Strategies used by fifth- and eight-grade Japanese Students, *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 1991, pag. 39-58.
- Sawyer, W.W.: *Aanschouwelijk Algebra*, Utrecht, Spectrum, 1969.
- Streefland, L.: Davydov, Piaget en de breuken, *Pedagogische Studiën* 56, 1979, pag. 289-307.
- Streefland, L.: *Realistisch Breukenonderwijs* (dissertatie), Utrecht, Freudenthal Instituut, 1988.
- Streefland, L.: *Fractions in Realistic Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer, 1991.
- Streefland, L.: Reactie op 'De oudste en de nieuwste breuken', *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 11(4), 1993, pag. 25-29.
- Streefland, L.: Fractions: A Realistic Approach, in: T.P. Carpenter, E. Fennema en T.A. Romberg (eds), *Rational Numbers. An Integration of Research*, Hillsdale, Erlbaum, 1993, pag. 289-326.
- Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs: *Proeve van een Nationaal Programma voor het Reken-Wiskundeonderwijs op de Basisschool. Deel I: Overzicht Einddoelen*, Tilburg, Zwijsen, 1989.
- Treffers, A.: Benoemde breuken op de dubbele getallenlijn, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 9(4), 1991, pag. 3-14.

- Treffers, A.: Benoemde breuken: ontstaansgeschiedenis van een idee. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(1), 1991, pag. 43-44.
- Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor: Breuken (deel 3), *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(4), 1992, pag. 22-29.
- Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor: Kerndoelen Breuken, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 11(3), 1993, pag. 20-25.
- Turkstra, H. en J.K. Timmer: *Rekendidactiek*, Groningen, Wolters, 1953.
- Usiskin, Z.P.: The Future of Fractions, *Arithmetic Teacher*, 26(5), 1979, pag. 18-20.
- Versluys, J.: *De Methodiek van het Rekenen*, Amsterdam, Versluys, 1889.
- Whitney, H.: *Some decision making in mathematics education*, Princeton, 1988 (manuscript).
- Wijdeveld, E.: Bart en breuken, *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs*, 10(2), 1991, pag. 15-20.
- Woostenenk, P.: *Rekendidactiek*, Zwolle, Tjeenk Willink, 1965.
- Zuidema, J. en L. van der Gaag: *Multidisciplinair Onderzoek voor de Ontwikkeling van een Intelligent Onderwijssysteem*, Utrecht, Freudenthal Instituut, 1993.