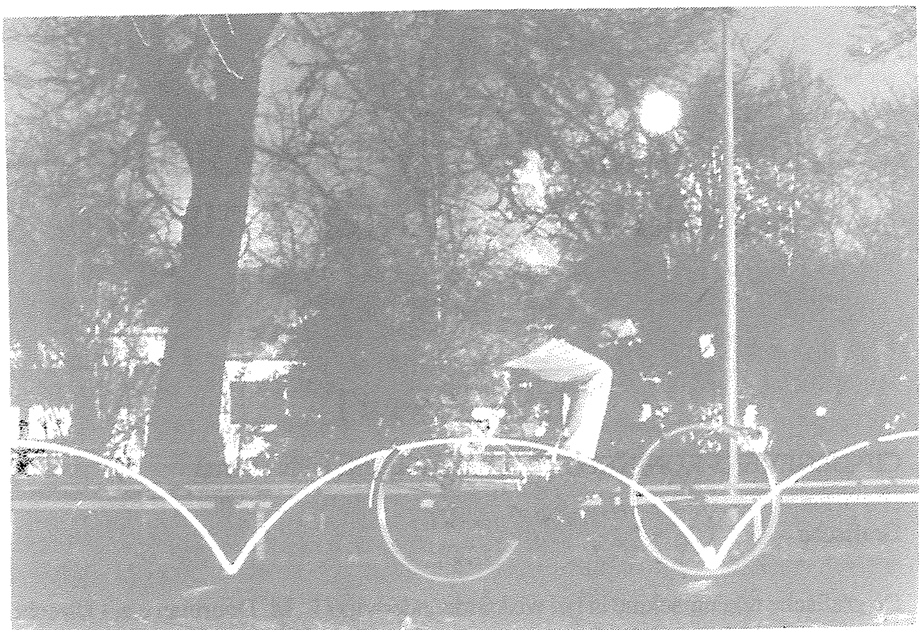
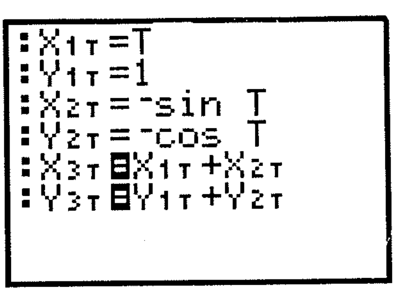
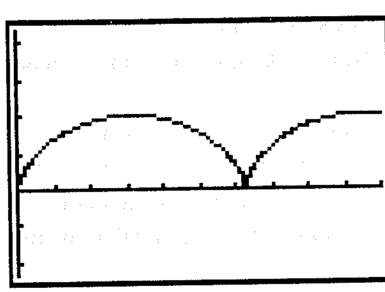
L.M. Doorman
P. Drijvers
M. Kindt

DE GRAFISCHE REKENMACHINE IN HET WISKUNDEONDERWIJS

DE GRAFISCHE REKENMACHINE IN HET WISKUNDEONDERWIJS







CIP-GEGEVENS KONINKLIJKE BIBLIOTHEEK, DEN HAAG

Grafische

De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs / L. M. Doorman e.a. - Utrecht CD β Press, Center for Science and Mathematics Education, Freudenthal institute, Research Group On Mathematics Education, Utrecht University (CD-β wetenschappelijke bibliotheek; 15)
ISBN 90-73346-23-1
Trefw: rekenmachines in de wiskunde

Omslag: OMI Utrecht University
Foto titelpagina: Patrick Schiffers
Druk: Technipress, Culemborg

ISBN 90-73346-23-1

Michiel Doorman
Paul Drijvers
Martin Kindt

DE GRAFISCHE REKENMACHINE IN HET WISKUNDEONDERWIJS

Tweede druk

met medewerking van:
Jan van den Brink
Marcel Simons
Guus Vonk

Inhoud

Voorwoord

BIJ DE EERSTE DRUK

Dit boek vormt het verslag van drie jaar ontwikkelingsonderzoek naar de mogelijke invloed van de grafische rekenmachine op het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het onderzoek heeft plaats gevonden in het kader van het project 'De Grafische Rekenmachine in het Wiskundeonderwijs'. Dit project is uitgevoerd door het Freudenthal Instituut in opdracht van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen.

Het verslag is geschreven voor mensen die geïnteresseerd zijn in de ontwikkelingen van het wiskundeonderwijs: docenten, auteurs van onderwijs-methoden, onderwijs-ontwikkelaars en onderzoekers.

Bij het project is een groot aantal mensen betrokken geweest. De uitvoering was in handen van een team, bestaande uit Jan van den Brink, Michiel Doorman, Paul Drijvers, Jan Auke de Jong, Martin Kindt, Marcel Simons en Guus Vonk. Overigens was ieder van hen slechts part-time voor het project beschikbaar.

Voor het tot stand komen van dit verslag zijn we veel dank verschuldigd aan de leerlingen en leraren van de twee experimenteerscholen waar voornamelijk met de ontwikkelde lesmaterialen is geëxperimenteerd, en waar de meeste lessen zijn geobserveerd. Veel van de resultaten zijn bereikt dankzij de inzet van Gerard Stroomer, docent aan het Liemers College te Zevenaar en Ramiro Wanga, docent aan het Cals College te Nieuwegein.

Verder danken we de collega's van het Freudenthal Instituut die ons een aantal malen van grondig commentaar hebben voorzien bij de ontwikkeling van het lesmateriaal. In het bijzonder zijn we Koeno Gravemeijer erkentelijk voor zijn suggesties ter verbetering van dit verslag.

Utrecht, oktober 1994

BIJ DE TWEEDE DRUK

Op grond van de resultaten uit het bovengenoemde project is er een experiment gestart om de invloed van de grafische rekenmachine op de vraagstelling bij het eindexamen VWO-wiskunde A en B te onderzoeken. Dit experiment vond plaats op de twee experimenteerscholen het Liemers College te Zevenaar en het Cals College te Nieuwegein. De ervaringen met dit experimentele examen zijn beschreven in een artikel dat in een bijlage is toegevoegd aan dit verslag.

Utrecht, maart 1997

Michiel Doorman, Paul Drijvers en Martin Kindt

1 Inleiding

Het project 'De Grafische Rekenmachine in het Wiskundeonderwijs' is gestart in opdracht van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen. De uitvoering vond plaats in de periode augustus 1991 tot september 1994 en was in handen van het Freudenthal Instituut.

Het doel van het onderzoek zoals dat vermeld wordt in het door het Ministerie gehonoreerde projectvoorstel is het formuleren van aanbevelingen over:

1 Het gebruik van de grafische rekenmachine
   a als hulpmiddel bij bestaande stof,
   b bij de verschuiving van accenten binnen het wiskundeonderwijs van technieken naar concepten bij bestaande onderwerpen,
   c als middel bij het verkennen van voor het wiskundeonderwijs nieuwe terreinen die door de grafische rekenmachine binnen handbereik komen.
2 De invloed op het curriculum, toetsen en examens.
3 De gewenste bijscholing aan docenten en het betrekken van de initiële lerarenopleidingen hierbij.

Twee redenen vormen de aanleiding tot het totstandkomen van het projectvoorstel. Ten eerste lijkt het sinds enkele jaren weliswaar duidelijk dat de grafische rekenmachine een rol van betekenis zal gaan spelen in het wiskundeonderwijs, maar het is nog onvoldoende bekend welke mogelijkheden en welke problemen dat met zich mee zal brengen. Ten tweede lijken de mogelijkheden die de grafische rekenmachine biedt nauw aan te sluiten bij de opvattingen van het Freudenthal instituut over wiskundeonderwijs. Deze opvattingen worden aangeduid met 'realistisch reken- en wiskundeonderwijs'. De uitwerking van het project kan bovendien goed worden ingepast in de gangbare werkwijze van het instituut, het ontwikkelingsonderzoek.

Het onderzoek heeft zich met name gericht op wiskunde B van het vwo. De meeste experimenten hebben plaatsgevonden in de klassen van Ramiro Wanga (Cals College, Nieuwegein) en Gerard Stroomer (Liemers College, Zevenaar).

Om de lezer wegwijs te maken in dit boek volgt hieronder een korte beschrijving van de inhoud.

In hoofdstuk 2 worden de recente ontwikkelingen met betrekking tot grafische rekenmachines beschreven. Eerst wordt ingegaan op de technologische vernieuwingen. Daarna komt de stand van zaken in het buitenland aan bod. Tenslotte passeren de ontwikkelingen in Nederland kort de revue.

Interessant is de vraag hoe het gebruik van de grafische rekenmachine zich verhoudt tot de visie van het realistische wiskundeonderwijs. In hoofdstuk 3 wordt kort toegelicht wat deze visie op wiskundeonderwijs inhoudt, en hoe de mogelijke bijdrage van de grafische rekenmachine gezien wordt. Dit leidt tot een vijftal hypothesen die in feite de rode draad van dit verslag vormen.

Hoofdstuk 4 gaat over de projectuitvoering. Eerst wordt de onderzoeksmethode, het zogenaamde ontwikkelingsonderzoek, beschreven. Dan volgt een overzicht van de voortgang van het project gedurende de drie jaren. Binnen ontwikkelingsonderzoek is de ontwikkeling van experimenteel lesmateriaal van groot belang. Aan het einde van het hoofdstuk wordt de keuze voor de onderwerpen van het experimentele lesmateriaal verantwoord vanuit de hypothesen die in hoofdstuk 3 zijn geformuleerd.

Hoofdstuk 5 beschrijft het experimentele lesmateriaal en de ervaringen met dit materiaal in de klassen van de proefscholen. Achtereenvolgens worden de pakketten 'Differentiëren', 'Optimaliseren', 'Grafiekenalgebra' en 'Bewegingen in het vlak' besproken. Lesobservaties maken een substantieel deel uit van dit hoofdstuk. Daarnaast wordt er aandacht besteed aan het gebruik van de grafische rekenmachine naast het gebruikte boek.

In hoofdstuk 6 vindt de reflectie plaats op de uitgangspunten van het onderzoek. Met name wordt teruggeblikt op de eerder geformuleerde hypothesen. In die zin vormt dit hoofdstuk de kern van het rapport. Bij deze reflectie wordt opnieuw veelvuldig gebruik gemaakt van de observaties met het experimentele lesmateriaal. Daarnaast zijn nieuwe observaties ingebracht.

Als de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs een plaats heeft, dient de machine toegelaten te worden tot de examens. In hoofdstuk 7 wordt nader ingegaan op de rol van de grafische rekenmachine bij het eindexamen. Eerst worden enkele ervaringen in het buitenland besproken. Daarna volgt een analyse van enkele Nederlandse examenopgaven. In hoeverre zijn deze opgaven geschikt als het gebruik van een grafische rekenmachine toegestaan zou zijn? Het hoofdstuk besluit met enkele voorbeelden van examenopgaven wiskunde B in een nieuwe stijl.

In hoofdstuk 8 staan de conclusies van het onderzoek en de aanbevelingen over het gebruik van de grafische rekenmachine, de invoed op het wiskundeonderwijs en de bijscholing van docenten. Deze conclusies volgen direct uit de ervaringen die in de hoofdstukken 5, 6 en 7 beschreven zijn. Daarmee is hoofdstuk 8 dus een samenvatting van de resultaten van het project.

Als bijlagen zijn een literatuurlijst en een Engelstalige summary toegevoegd.

Tot besluit van deze inleiding een kanttekening. Zoals in hoofdstuk 4 wordt toegelicht bestaat ontwikkelingsonderzoek uit een cyclisch proces waarin de ontwikkeling van lesmateriaal, het experimenteren in de klas en de reflectie elkaar voortdurend afwisselen en beïnvloeden.

Op grond van de observaties zijn tijdens het project de uitgangspunten voortdurend bijgesteld en is het experimentele lesmateriaal aangepast. Ten behoeve van de leesbaarheid is het onderzoek in dit verslag echter beschreven als een lineair proces van het formuleren van uitgangspunten, het ontwikkelen van experimenteel lesmateriaal en het reflecteren op de uitgangspunten met behulp van de observaties in de klas. In werkelijkheid verliep dit proces dus minder lineair dan het in dit eindrapport wellicht lijkt.

2 Recente ontwikkelingen

2.1 inleiding

In dit hoofdstuk worden de recente ontwikkelingen rond grafische rekenmachines in het wiskundeonderwijs beschreven, voor zover ze relevant zijn voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Achtereenvolgens komen aan de orde:

- technologische ontwikkelingen
- ontwikkelingen in het buitenland
- ontwikkelingen in Nederland.

In feite wordt hiermee het kader geschetst waarbinnen het project zich afspeelt. Dit is overigens geen statisch kader dat reeds vanaf de start van het project duidelijk was. De ontwikkelingen zijn in volle gang en één van de activiteiten van het project is het voortdurend verzamelen en ordenen van informatie geweest. Dit hoofdstuk vat de resultaten van dat werk kort en zakelijk samen. Naar uitgebreidere informatie wordt verwezen. Dit hoofdstuk kan echter niet meer zijn dan een momentopname. De ontwikkelingen volgen elkaar in snel tempo op. Ongetwijfeld zal een deel van de informatie binnenkort aan actualiteit hebben ingeboet.

2.2 technologische ontwikkelingen

In deze paragraaf worden de ontwikkelingen van grafische rekenmachines gedurende de projectperiode 1991-1994 beschreven. Verder worden verbanden gelegd met aanverwante grafische software en met computeralgebra. Besloten wordt met enkele verwachtingen voor de ontwikkelingen in de toekomst.

wat is een grafische rekenmachine?

Een grafische rekenmachine (of graphics calculator) is een rekenmachine die een groter beeldscherm heeft dan een gewone calculator. Dat heeft belangrijke gevolgen voor de bediening van de machine en voor de grafische mogelijkheden. We lopen de belangrijkste consequenties langs.

rekenen

Op het grotere beeldscherm zijn meerdere regels zichtbaar. Dat is handig omdat 'opgave' èn antwoord gelijktijdig in beeld zijn, waardoor typefouten snel aan het licht komen. Het is mogelijk om eerder gegeven opdrachten te bewerken en te herhalen.

matrices en tabellen

Een tweede voordeel van het grote display is de mogelijkheid om matrices weer te geven. De elementaire matrixoperaties zijn beschikbaar, wat veel rekenwerk kan besparen. Ook het maken van tabellen van functiewaarden behoort tot de mogelijkheden. Dergelijke tabellen kunnen het met de hand berekenen van functiewaarden vervangen.

grafieken tekenen

Het belangrijkste kenmerk van de grafische rekenmachine is het vermogen om grafieken van functies en van parametervoorstellingen te tekenen. Deze grafieken kunnen vergroot of verkleind worden. Met een cursor kan men 'over de grafiek heen lopen', waarbij de veranderende coördinaten van de punten op het scherm af te lezen zijn. Bij een grafiek kan ook de hellinggrafiek worden getekend. De nieuwste grafische rekenmachines berekenen ook oppervlakten en coördinaten van nulpunten.

statistiek

De grafische mogelijkheden komen ook van pas bij statistische verwerking van gegevens. Histogrammen, lijngrafieken en regressielijnen zijn eenvoudig in beeld te krijgen.

programmeren

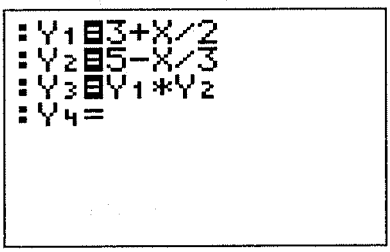
Tenslotte beschikt een grafische rekenmachine ook over een Basic-achtige programmeertaal, waarmee de gebruiker zelf toepassingen kan programmeren. Ook hierbij is het meerregelige venster functioneel. In het algemeen geeft een grafische rekenmachine geen exacte antwoorden maar numerieke benaderingen. Symbolisch rekenen en formulemanipulatie is niet mogelijk. Meer informatie over de mogelijkheden van grafische rekenmachines staat in De Bock en Cleve (1993).

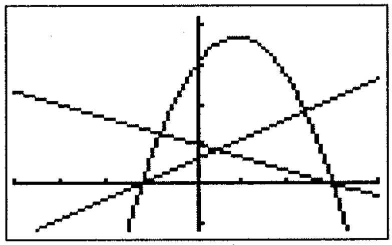
verschillende merken

De bekendste fabrikanten van grafische rekenmachines zijn Casio, Hewlett-Packard, Sharp en Texas Instruments. De machines van Sharp zijn in Nederland moeilijk verkrijgbaar. De machines van Hewlett-Packard, zoals de HP48S, zijn vrij duur en bovendien lastig te bedienen vanwege de postfix notatie die gebruikt wordt. De calculators van Casio, zoals de fx-7700 en de fx-9700, lenen zich beter voor het gebruik in het voortgezet onderwijs. In Engeland bijvoorbeeld gebeurt dat op grote schaal. De machines van Texas Instruments kennen naar ons idee de meest natuurlijke en relatief eenvoudigste bediening. Omdat het niet praktisch leek om verschillende merken naast elkaar te gebruiken, zijn in dit project uitsluitend machines van Texas Instruments gebruikt. Hieronder worden deze apparaten nader voorgesteld. Overigens zijn de conclusies van dit project niet afhankelijk van deze keuze, maar gelden ze voor het gebruik van grafische rekenmachines in het algemeen.

de grafische rekenmachines van Texas Instruments

Bij de aanvang van het project in 1991 is gekozen voor de TI-81. Behalve het bedieningsgemak speelde daarbij ook een rol dat de machine de mogelijkheid biedt om op eenvoudige wijze functies te 'stapelen'. Hieronder staat bijvoorbeeld hoe een derde functie gedefinieerd kan worden als produkt van twee anderen.



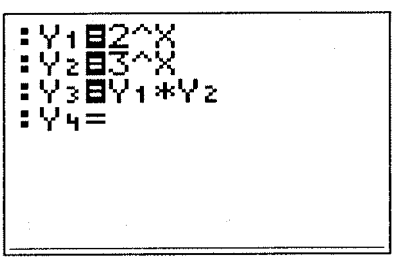


In hoofdstuk 5 zal blijken dat deze faciliteit veel gebruikt is in de schoolexperimenten. Een vergelijkbare werkwijze is ook mogelijk op de machines van Casio, zij het dat aanzienlijk meer toetsaanslagen nodig zijn.

Van de TI-81 bestaat ook een versie waarvan het beeldscherm via een overhead-projector geprojecteerd kan worden. Voor demonstraties en klassegesprekken is dat erg waardevol. Ook Casio biedt een dergelijke faciliteit.

Spoedig verscheen de TI-85, een 'zwaardere' machine. Dit apparaat biedt aanzienlijk meer mogelijkheden dan de TI-81, maar daaraan bestaat in dit project geen behoefte. Daarbij komt dat de bediening van de machine veel gecompliceerder is dan die van de TI-81.

In 1993 kwam de TI-82 in Nederland op de markt. Deze machine vormt op dit moment het aantrekkelijke compromis tussen de TI-81 en de TI-85: de beperkingen van de TI-81 zijn gedeeltelijk verdwenen, terwijl het bedieningsgemak grotendeels gehandhaafd is. Een voor het onderwijs belangrijke toevoeging is de mogelijkheid om tabellen van functiewaarden te maken, zoals hieronder is afgebeeld.



X	Y2	Y3
-1	.33333	.16667
0	1	1
1	3	6
2	9	36
3	27	216
4	81	1297
5	243	776

In het project is om financiële redenen overwegend de TI-81 gebruikt en niet de TI-82. In het laatste jaar is in enkele klassen wel met de TI-82 geëxperimenteerd.

In het project is om financiële redenen overwegend de TI-81 gebruikt en niet de TI-82. In het laatste jaar is in enkele klassen wel met de TI-82 geëxperimenteerd.

grafische software

De mogelijkheden die een grafische rekenmachine biedt, zijn op zichzelf niet nieuw. Er bestaat al veel langer software voor de PC waarmee grafieken getekend kunnen worden. Daarvan is het programma VU-Grafiek (Van Blokland, Kok, Tall) in Nederland het meest verspreid. VU-Grafiek is eenvoudig te bedienen en biedt op het gebied van grafieken tekenen zelfs meer mogelijkheden dan een grafische rekenmachine. De ervaringen met VU-Grafiek in de wiskundeles zijn positief (zie Spek, 1990). Het gebruik van een PC heeft voordelen: de monitor is groter, de grafieken zijn 'vloeiender' dan op een grafische rekenmachine en zijn door het gebruik van kleur beter te onderscheiden.

Het gebruik van de grafische rekenmachine biedt andere voordelen. De machine is permanent beschikbaar. Het praktische probleem dat van tevoren een computerlokaal gereserveerd moet worden, is verdwenen. Op elk moment van de les kan de machine ingeschakeld worden, zowel op initiatief van de leerling als van de docent. Onvoorziene toepassingen kunnen ter plekke uitgeprobeerd worden. Ook bij lessen in andere vakken en thuis beschikt de leerling over de machine. Men spreekt in dit verband wel over 'personal technology'. Dit is de grote kracht van de grafische rekenmachine: het zakformaat en daarmee de permanente beschikbaarheid. Hoewel deze opmerkingen voor de hand liggen, kan het belang ervan niet snel worden overschat.

computeralgebra-pakketten

Behalve grafische software zijn ook computeralgebra-pakketten het vermelden waard. Een computeralgebra-pakket is een programma dat net als een grafische rekenmachine grafieken kan tekenen. Daarnaast kan het programma ook letterrekenen, formules manipuleren en andere symbolisch/algebraïsche bewerkingen uitvoeren (zie Drijvers, 1991). Een computeralgebra-pakket is dus een aanzienlijk krachtiger instrument dan een grafische rekenmachine, maar is ook lastiger te bedienen.

Voor het voortgezet onderwijs lijkt Derive (Soft Warehouse, Honolulu) op dit moment het meest geschikte computeralgebra-pakket. Omdat Derive op een PC draait, zijn dezelfde opmerkingen van toepassing als voor VU-Grafiek. Daarbij komt dat de inpassing van Derive in het voortgezet onderwijs ingrijpender is dan die van de grafische rekenmachine. Niettemin is computeralgebra een factor om in de toekomst rekening mee te houden, zeker nu Derive ook beschikbaar is op een zogenaamde palm-top computer (de HP95LX en de HP100LX van Hewlett-Packard). Een palm-top computer is een complete PC die het formaat heeft van een forse rekenmachine en biedt dus net als de grafische rekenmachine een permanente beschikbaarheid. Hoewel dergelijke configuraties momenteel nogal kostbaar zijn, geven ze wel de richting van de toekomstige ontwikkelingen aan. Het wachten is op de machine die de afmetingen, de prijs en het bedieningsgemak van de grafische rekenmachine koppelt aan de kracht van een computeralgebra-pakket.

overeenkomstige problematiek

Grafische rekenmachine, grafische software en computeralgebra-pakketten roepen hetzelfde type vragen op ten aanzien van de inhoud en de didactiek van het wiskundeonderwijs (Drijvers, 1994[a]). Wat betekent de inpassing van deze hulpmiddelen voor de wiskundeles?

De onderzoeksvragen van dit project, die in hoofdstuk 3 beschreven worden, zijn ook van toepassing op grafische software en computeralgebra-pakketten. De technische ontwikkeling van betaalbare grafische rekenmachines in zakformaat maakt de vragen voor dit medium het meest opportuun.

De grenzen tussen grafische rekenmachine en computeralgebra-pakketten vervagen overigens. De TI-85 heeft bijvoorbeeld intern een routine om exact afgeleide functies te bepalen. Om redenen van marketing heeft men deze procedures echter voor de gebruiker ontoegankelijk gemaakt. Ook de nieuwste machine van Hewlett-Packard, de HP48G, biedt bescheiden mogelijkheden tot symbolische manipulatie. Van de andere kant is het grafische deel van de nieuwste versie van Derive (versie 3, najaar 1994) in hoge mate vergelijkbaar met een grafische rekenmachine.

Samenvattend kunnen we stellen dat de kracht van de grafische rekenmachine bestaat uit de grafische mogelijkheden, gekoppeld aan een handzaam formaat en een eenvoudige bediening. Daardoor is het een ideaal instrument voor leerlingen, dat zowel tijdens de wiskundeles in het gewone klaslokaal als thuis en bij lessen in andere vakken beschikbaar is. De technologische ontwikkelingen leiden ertoe dat grafische rekenmachines, grafische software en computeralgebra-pakketten in de nabije toekomst steeds meer naar elkaar toe zullen groeien.

2.3 ontwikkelingen in het buitenland

In het buitenlandse wiskundeonderwijs spelen natuurlijk dezelfde kwesties als in Nederland. Ook daar moet men zich een houding bepalen ten aanzien van het gebruik van de grafische rekenmachine in de les en bij de toetsing. Door conferenties te bezoeken en door middel van een internationale enquête (zie Drijvers, 1994[b]) hebben we ons op de hoogte gesteld van de ontwikkelingen in het buitenland, waarbij het accent ligt op Europa. Deze paragraaf bevat de resultaten hiervan. Eerst wordt geïnventariseerd in welke landen grafische rekenmachines bij het eindexamen toegestaan zijn. Dan beschrijven we de invloed daarvan op de inhoud van deze examens. Tenslotte komt de stand van zaken van het onderzoek aan de orde.

de grafische rekenmachine bij het eindexamen

Een voorwaarde voor een werkelijke integratie van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs is de toestemming om de machine ook bij de toetsing te gebruiken. In sommige landen is de grafische rekenmachine toegelaten bij het eindexamen, en die ervaringen zijn natuurlijk erg interessant. Eerst de feiten.

In Frankrijk (Baccalauréat), Engeland en Schotland (A-level) mag de grafische rekenmachine al enkele jaren bij het eindexamen op het hoogste niveau gebruikt worden. Met ingang van 1994 is dat ook in Noorwegen, Zweden en Finland (gymnasium) het geval.

In Noorwegen gaat men nog verder. Voor leerlingen van het eerste jaar van de bovenbouw van het gymnasium is de grafische rekenmachine in 1994 verplicht gesteld. Deze verplichting wordt in de toekomst uitgebreid naar de hogere jaren. Bij examens gaat men er dus vanuit dat de leerling een grafische rekenmachine heeft. De leerling die er geen heeft, is daarvoor zelf verantwoordelijk.

De voorwaarden waaraan de gebruikte machine in Engeland en in Scandinavië moet voldoen zijn o.a. dat het apparaat geen mogelijkheden voor symbolisch rekenen mag hebben (dus geen computeralgebra) en dat het geheugen leeg moet zijn. Dat laatste betekent dat de leerling geen zelf geprogrammeerde toepassingen mee mag brengen. Tijdens het examen kunnen natuurlijk wel programma's gemaakt worden.

In Frankrijk mag een leerling zelfs een palm-top computer met Derive gebruiken bij het Baccalauréat: in de examenregeling staan slechts de maximaal toegestane afmetingen van een calculator in centimeters vermeld. Men was kennelijk nog niet op de hoogte van het bestaan van zulke kleine machines met symbolische mogelijkheden.

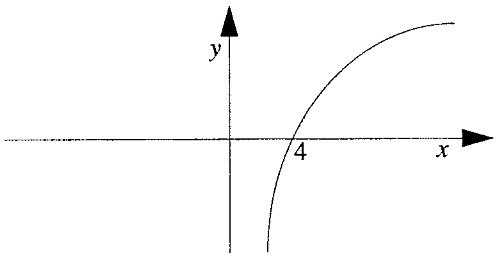
Al met al loopt Nederland dus niet voorop in deze ontwikkeling.

invloed op de inhoud

Tot zover enkele feiten. Maar hoe wordt nu omgegaan met de aanwezigheid van grafische rekenmachines bij het eindexamen? Wat voor vragen stelt men nu? Daarop is geen eenduidig antwoord te geven. De indruk bestaat dat het proces van aanpassing aan de nieuwe hulpmiddelen nog volop bezig is. De volgende trends tekenen zich af.

Het tekenen van grafieken wordt in het algemeen niet meer gevraagd. Voor leerlingen die over een grafische rekenmachine beschikken, zou een dergelijke vraag flauw zijn. Steeds vaker wordt de grafiek bij de opgave al afgebeeld en hebben de vragen betrekking op kenmerken van die grafiek. Dat is overigens ook bij examens in Nederland in toenemende mate het geval.

Vragen waarin functies een rol spelen die niet in de vorm van een formule gegeven zijn, worden frequenter. Het aardige is dat een leerling dan niet kan beginnen met de formule in te typen. Een voorbeeld hiervan is de volgende opgave uit het A-level eindexamen van 1993 van het School Mathematics Project in Engeland.



The function $f(x)$ is defined for all values of x except $x = 0$ and is an odd function, i.e. $f(-x) = -f(x)$.

a. Part of the graph of $y = f(x)$ is given above.
   Copy and complete the sketch.
b. Draw a seperate sketch to illustrate the graph of $f(x + 3)$ showing clearly where the graph will intercept the x-axis.

Overigens kan men bij onderdeel b) toch profijt hebben van de grafische rekenmachine. Het moeilijkste punt is hier de vraag of de grafiek naar rechts geschoven moet worden of naar links. Door nu een simpele functie naar keuze in te voeren en dan x door $x + 3$ te vervangen, blijkt dat het antwoord links is. De grafische rekenmachine kan dus gebruikt worden als grafisch controlemiddel. Een handige gebruiker kan iets soortgelijks vaak succesvol toepassen.

Tenslotte valt op dat in de buitenlandse examens niet optimaal geprofiteerd wordt van de mogelijkheden die de grafische rekenmachine biedt. Bundels van grafieken spelen nauwelijks een rol; grafieken zijn zelden het uitgangspunt voor formule onderzoek. Wellicht heeft dit te maken met het feit dat de grafische rekenmachine niet verplicht is bij de examens. Verder speelt mogelijk een rol dat examenopstellers nog niet voldoende doordrongen zijn van de mogelijkheden die de grafische rekenmachine biedt. Meer over examinering met de grafische rekenmachine in binnen- en buitenland staat in hoofdstuk 7.

onderzoek

Natuurlijk wordt in het buitenland ook onderzoek gedaan naar de rol van grafische rekenmachines in het wiskundeonderwijs (zie Monaghan, 1993). Met name in Engeland, Frankrijk en Oostenrijk lopen grote projecten, waarin ook computeralgebra een rol speelt. Veel van deze projecten zijn gericht op implementatie van de nieuwe technologie. Er zijn ook vergelijkende onderzoeken, maar die leiden vooralsnog vooral tot 'lokale' conclusies. Het is nog te vroeg om globale conclusies te trekken. Een uitgebalanceerde didactiek van het gebruik van de grafische rekenmachine ontbreekt nog. Wel is het zo dat de contacten tussen onderzoekers bevruchtend werken en dat er vorderingen gemaakt worden.

Samengevat komt het er op neer dat de implementatie van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs in sommige landen verder gevorderd is dan in Nederland. Inhoudelijk is men echter ook in andere landen nog zoekend naar een weloverwogen inpassing, hetgeen de gedachte bevestigt dat het Nederlandse onderzoek internationaal relevant is. Daar komt bij dat elk land een eigen wiskundecurriculum kent, waardoor ervaringen die elders zijn opgedaan niet zo maar overdraagbaar zijn naar de Nederlandse situatie.

2.4 ontwikkelingen in Nederland

Deze paragraaf beoogt een overzicht te geven van de ontwikkelingen rond grafische rekenmachines in Nederland. Achtereenvolgens komen aan de orde: het nieuwe leerplan in de onderbouw, de opstelling van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, de studiecommissie wiskunde B en de profielen, ontwikkelingen op de lerarenopleidingen, voorlichting en het vervolgproject.

het nieuwe onderbouwprogramma

In 1993 is het nieuwe leerplan wiskunde voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs ingevoerd. In dit leerplan, dat ontwikkeld is door het team W12-16, heeft de zakrekenmachine zich een vaste plaats verworven (zie Van den Brink, 1990 en 1992). In het experimentele lesmateriaal wordt aandacht besteed aan adequaat gebruik van de machine en aan schattend rekenen.

Daarmee vormt het nieuwe leerplan een goede voorbereiding op het gebruik van de grafische rekenmachine in de hogere jaren. Ook inhoudelijk zijn er aanknopingspunten. In het lesmateriaal wordt voorbereid op de techniek en het nut van 'inzoomen' op grafieken. Tevens komt het globaal interpreteren van grafieken aan de orde en wordt aandacht besteed aan eenvoudige operaties op grafieken. Het nieuwe onderbouwprogramma bevat dus elementen die anticiperen op de grafische rekenmachine. In de bovenbouw kan daarvan geprofiteerd worden.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft de verspreiding van de grafische rekenmachine in Nederland gestimuleerd. Op elk van de jaardagen van de Vereniging in de projectperiode heeft het Freudenthal Instituut werkgroepen hierover verzorgd. Via de Vereniging hebben docenten op gunstige voorwaarden een grafische rekenmachine kunnen aanschaffen. Hiervan is op grote schaal gebruik gemaakt.

studiecommissie wiskunde B en profielen

In april 1993 is de studiecommissie wiskunde B ingesteld door de staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen. Deze commissie heeft tot taak om zich te bezinnen op wiskunde B in het vwo. De grafische rekenmachine is daarbij één van de aandachtspunten. In dat kader heeft het projectteam met de studiecommissie in contact gestaan. Het rapport van de studiecommissie wordt in oktober 1994 verwacht.

Daarnaast is er een herstructurering van de bovenbouw van het voortgezet onderwijs op handen door middel van de invoering van de zogenaamde profielen. Naar onze mening kunnen de ervaringen van het project 'De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs' mede bepalend zijn voor de aard van de veranderingen.

implementatie op lerarenopleidingen

Ook op de lerarenopleidingen wordt het belang van de grafische rekenmachine onderkend. Op verschillende opleidingen wordt ervan uitgegaan dat studenten zo'n machine bezitten. Er wordt aandacht besteed aan het gebruik van de machine en aan de inpassing ervan zowel in de vakstudie als in de beroepsvoorbereiding. Vanzelfsprekend lijkt dit ons een goede zaak. Het projectteam heeft af en toe ondersteuning bij deze implementatie verleend door adviezen en informatie te verstrekken. Daarnaast worden incidenteel gastcolleges verzorgd en wordt het schrijven van scripties over dit onderwerp ondersteund.

voorlichting

Van diverse kanten is er beroep op het projectteam gedaan voor het geven van voorlichting, lezingen, nascholing, en dergelijke. Daarnaast is over de ervaringen die binnen dit project verzameld zijn verslag uitgebracht door middel van publikaties en artikelen. Het project heeft al met al een aanzienlijke bijdrage geleverd aan de verspreiding van kennis en ervaringen rond de grafische rekenmachine in den lande.

examenexperimenten

Een beperking van dit project vormt het feit dat grafische rekenmachines bij het eindexamen niet gebruikt mogen worden. Als gevolg daarvan leek het niet opportuun om in eindexamenklassen met de machine te gaan experimenteren. Voor leerlingen is dit een onduidelijke situatie: wel gebruiken in de voor-examenklassen, maar niet in het belangrijke examenjaar. Om deze beperking op te heffen is het wenselijk dat het project een vervolg krijgt in de vorm van een examenexperiment, waarbij alle leerlingen van enkele havo- en vwo-klassen (zowel wiskunde A als B) uitgerust worden met grafische rekenmachines die ze ook bij schoolonderzoeken en bij het examen mogen gebruiken. Pas dan zal de grafische rekenmachine door de leerlingen als serieus hulpmiddel beschouwd worden, en zullen de gevolgen van de invoering helder worden.

Inmiddels is een dergelijk experiment in het schooljaar 1994-1995 van start gegaan. De eerste examens in dit kader zullen dan naar verwachting in 1996 afgenomen worden.

Samengevat kunnen we constateren dat de verspreiding van de grafische rekenmachine en de daarmee gepaard gaande bezinning op het huidige wiskundeonderwijs langzamerhand gestalte begint te krijgen. Het project heeft daarin een belangrijke rol gespeeld.

3 Realistisch wiskundeonderwijs en de grafische rekenmachine

3.1 realistisch wiskundeonderwijs

Tot in de jaren zestig werd de wiskunde in het onderwijs opgevat als een onwrikbaar systeem van kennis en vaardigheden. De vaardigheden, veelal algoritmisch van aard, werden niet zelden aangeleerd via wat wel 'drill and practice' wordt genoemd. Het vak kende een rigide ordening van de leerstof, de structuur was hiërarchisch van aard. Pas na het voltooien van het formele bouwwerk werd een perspectief van mogelijke toepassingen buiten het strikte vakgebied zichtbaar. Voor de meeste leerlingen kwam het niet zo ver. Wiskunde werd algemeen als een nogal wereldvreemd vak beschouwd, waarvan slechts een kleine groep liefhebbers het fijne begreep.

Dat het mogelijk en wenselijk is om leerlingen (op alle niveaus!) in aanraking te brengen met 'levende' wiskunde, werd niet als zodanig onderkend, mede door een sterke concentratie op de globale structuur van de diverse wiskundige schoolvakken, zoals bijvoorbeeld de vlakke euclidische meetkunde. Wiskunde moest vooral zuiver zijn. Het foutloos kunnen toepassen van standaardalgoritmen stond in hoog aanzien en het onderwijs bood weinig gelegenheid tot het doen van eigen ontdekkingen door de leerling. De methodiek van het wiskundeonderwijs was veelal gericht op *reproduktie.*

In de nieuwe opvatting over wiskundeonderwijs, zoals die ontwikkeld is onder impulsen van het voormalige IOWO, spelen realistische toepassingen van meet af een belangrijke rol in het leerproces. Vooral hieraan heeft deze methodiek zijn naam te danken: realistisch wiskundeonderwijs. Het woord realistisch moet echter niet te eng worden opgevat. Een andere aanduiding die evenveel recht kan doen gelden, is *reconstructiemethodiek.* Algoritmen worden door de leerling zelf ge(re-)construeerd aan de hand van problemen die aansluiten bij zijn of haar realiteit. Realistisch wiskundeonderwijs doet aldus een beroep op de mentale activiteit en de creativiteit van de leerling en dat staat in een nogal schril contrast met de hierboven summier geschetste 'reproduktiemethodiek'.

Voor wat betreft het gebruik van realistische toepassingen, merken we op dat niet alleen wordt bedoeld dat de leerlingen wiskundige begrippen en technieken kunnen toepassen op herkenbare en realistische situaties, maar dat omgekeerd (en idealiter) deze begrippen en technieken aan de hand van zulke situaties worden ontwikkeld (zie De Lange, 1987).

Naarmate de leerling verder komt, breidt zijn of haar realiteit zich uit. Zo kunnen begrippen uit de wiskunde, mits voldoende tot leven gekomen, in de 'wereld' van de leerling worden opgenomen. De context waarin het leerproces zich afspeelt hoeft dus niet altijd een uitgesproken 'aards' karakter te hebben.

De term reconstructie duidt zoals gezegd op een duidelijk eigen inbreng van de leerlingen, op het werken op eigen niveau, op het gebruik van informele strategieën en van informele kennis. Voor bijvoorbeeld een algoritme als de staartdeling wordt het spoor van het informele naar meer geformaliseerd handelen aangemoedigd door te beginnen bij een breedvoerige en voor iedere leerling begrijpelijke handeling, via door leerlingen te vinden verkortingen en vereenvoudigingen, leidend tot de standaard-algoritme. Een leerling die onderweg afhaakt heeft desondanks een betrouwbare methode ter beschikking en kan er 'verder mee' (zie Treffers e.a., 1989). Tegelijkertijd stimuleert realistisch onderwijs de verhoging van het niveau door de leerling te laten reflecteren op zijn produkties en zich bewust te maken van eigen denken en handelen.

Samenvattend kunnen we zeggen dat de belangrijke kenmerken van realistisch onderwijs zijn:

- variatie in oplossingsstrategieën,
- eigen inbreng van leerlingen,
- werken op eigen niveau,
- gebruik van informele strategieën en informele kennis,
- aangrijpingspunten voor reflectie,
- stimulans niveauverhoging, generaliseren en formaliseren.

3.2 de grafische rekenmachine in realistisch wiskundeonderwijs

Het project onderzoekt de inpassing van de grafische rekenmachine in het realistisch wiskundeonderwijs. Hoe laten de algemene uitgangspunten van het realistisch wiskundeonderwijs zich vertalen naar de situatie dat de grafische rekenmachine in de wiskundeles wordt geïmplementeerd? Anders gezegd: wat betekent de (globale) realistische onderwijsfilosofie voor het (lokale) niveau van dit specifieke project?

Denkend over realistisch wiskundeonderwijs en over de grafische rekenmachine is in deze paragraaf een vijftal veronderstellingen geformuleerd. Het gaat om hypothesen, die in feite de uitgangspunten van het onderzoek zijn en die dan ook de kern van het verslag vormen. Met name in de hoofdstukken 6 en 8 wordt uitdrukkelijk teruggekomen op deze hypothesen.

De vijf uitgangspunten geven aan hoe de grafische rekenmachine in de komende jaren zijn invloed op het wiskundeonderwijs mogelijkerwijs zal doen gelden.

realistische contexten

De wiskundige modellen die optreden bij realistische toepassingen worden vaak ontsierd door 'lelijke' getallen of formules. Ter wille van de hanteerbaarheid wordt niet zelden gesleuteld aan de werkelijkheid opdat er een geëffend vraagstuk ontstaat, waarbij de leerling niet onmiddellijk wordt afgeschrikt of verdrinkt in ondoorzichtig rekenwerk. Met de komst van de grafische zakrekenmachine verdwijnt de noodzaak om het realistisch gehalte van een probleemstelling aan te tasten. De machine neemt immers het tijdrovende technische werk van de leerling over, waardoor alle aandacht kan worden gericht op het proces van mathematiseren, de oplossingsstrategie en het trekken van redelijke conclusies.

Zo komen we tot de eerste veronderstelling:
Door het gebruik van de grafische rekenmachine verschuift de aandacht van het puur algoritmisch opereren naar het vertalen van realistische problemen in een wiskundig model en het interpreteren van de resultaten.

exploratie

De grafische rekenmachine biedt dankzij de directe feedback mogelijkheden tot explorerende activiteiten. Een probleem kan in een eerste, verkennende fase vaak al eenvoudig grafisch worden onderzocht. Zonder deze apparatuur is dit meestal te bewerkelijk, waardoor te gauw wordt uitgeweken naar formele methoden, die dan niet steunen op verworven inzicht. Via de grafische rekenmachine kan juist inzicht worden verkregen in de structuur van een formule. Inventariserende en classificerende activiteiten kunnen leiden tot ontdekkingen die via reflectie en generalisatie uitmonden in interessante wiskundige stellingen. Dit is precies het omgekeerde van de traditionele methodiek, waarin definities en stellingen aan het begin van de leerweg worden geponeerd in de verwachting dat het inzicht zal ontstaan via herhaald toepassen. De tweede veronderstelling wordt nu:

Het gebruik van de grafische rekenmachine roept op dat de leerling zichzelf nieuwe problemen gaat stellen en problemen gaat generaliseren. Dat betekent voor de leerling een verruiming van het wiskundige blikveld en een verandering van houding ten aanzien van wiskunde kunnen veranderen van een 'passief-uitvoerende' in een 'actief-onderzoekende'.

integratie

Het gebruik van de grafische rekenmachine draagt bij aan het integreren van de twee klassieke kenniscomponenten van de wiskunde: algebra en meetkunde. Zo kan bijvoorbeeld het opereren met algebraïsche expressies via grafische (of meetkundige) voorstellingen van functies op het beeldscherm in een groot aantal variaties worden uitgevoerd. Algebrawetten en rekenregels kunnen zo grafisch worden ontdekt en gecontroleerd. Dit leidt tot een meer aanschouwelijke vorm van algebraonderwijs.

Omgekeerd kunnen meetkundig getinte opdrachten algebraïsche activiteiten oproepen. Voorbeelden van zulke opdrachten zijn: 'teken een regelmatige vijf-puntsster' of 'maak een spiraalkromme'. Van de leerling wordt dan gevraagd om formules te ontwerpen (als input in de machine) om het gewenste meetkundige resultaat (output) te verkrijgen.

Veronderstelling nummer drie kan aldus worden geformuleerd:
Het gebruik van de grafische rekenmachine bevordert de integratie van meetkundig en algebraïsch georiënteerde activiteiten en stimuleert de leerling voortdurend om dwarsverbanden te leggen tussen verschillende onderdelen van de wiskunde.

dynamiek

De grafische rekenmachine heeft een aantal dynamische aspecten.
Allereerst is het mogelijk om snel en effectief de gevolgen van wijzigingen in de probleemstelling na te gaan. De invloed van een parameter in een formule kan eenvoudig met grafische middelen aanschouwelijk worden gemaakt.

Een ander dynamisch aspect is de mogelijkheid tot het zichtbaar doorlopen van een grafiek of kromme (met de cursor) waarbij de voortdurende verandering van de coördinaten op het scherm kan worden afgelezen. Snelle en langzame veranderingen kunnen optisch worden onderscheiden, maxima en minima kunnen letterlijk worden 'gezien' als stationnaire punten op de grafiek.

Als derde punt noemen we hier de mogelijkheid van het in- en uitzoomen op een grafiek. Dat maakt een voortdurende blikwisseling mogelijk van 'globaal' naar 'lokaal' en vice versa.

Zo komen we tot de vierde veronderstelling:
De grafische rekenmachine is uitermate geschikt om veranderingsgedrag van grootheden in hun onderlinge relatie zichtbaar te maken en bevordert zo een dynamische zienswijze op analytische modellen.

flexibiliteit

Door de komst van de grafische rekenmachine zal het repertoire van technieken en vaardigheden die een leerling moet beheersen een duidelijke verandering ondergaan. Het met de hand schetsen van een grafiek op basis van een streng voorgeschreven functieonderzoek, een tot nu toe veel geoefende vaardigheid, zal nauwelijks nog van belang zijn. Ook technieken voor het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden komen in een ander daglicht te staan. Daar staat tegenover dat vaardigheden als 'schattend rekenen', 'lezen van grafieken' en 'successief approximeren' aan belangrijkheid zullen winnen.

Eén van de eerste problemen die de leerling bij het maken van een (of meer) grafiek(en) op het beeldscherm ontmoet, is de beperking van dat scherm. De leerling zal dan, op grond van de context of van het wiskundige model, zelf moeten bedenken wat het relevante domein (of bereik) van de in het probleem voorkomende variabelen is. Het schatten van de 'RANGE' voor elk van de variabelen is een vaardigheid die belangrijk wordt, zolang de machine dat tenminste nog niet zelf doet. Ruthven (1992) gebruikt voor dergelijke technieken de term 'Trial and improve'.

Een andere betrekkelijk nieuwe vaardigheid die van belang zal zijn is het ontwerpen van een formule om een zeker grafisch resultaat te verkrijgen. Ook hier wordt van de leerling een zekere flexibiliteit verlangd en speelt het principe van 'trial and improve' een voorname rol.

Tenslotte wijzen we er op dat de grafische rekenmachine numerieke benaderingen als resultaat geeft, ook in situaties waar een exacte uitkomst gewenst is. Dat vraagt van de leerling een kritische attitude ten aanzien van de numerieke uitvoer van de machine.

Alles overziend kunnen we stellen dat onder invloed van de grafische rekenmachine een accentverschuiving zal plaatsvinden van 'starre technieken' naar een meer flexibel oplossingsgedrag, waarbij een kritische houding wordt ontwikkeld ten aanzien van numerieke uitkomsten.

De vijf bovenstaande punten: realistische contexten, exploratie, integratie, dynamiek en flexibiliteit, sluiten goed aan bij de uitgangspunten van realistisch wiskundeonderwijs. Overigens zijn met name 'exploratie' en 'dynamiek' termen die bij het propageren van het gebruik van de grafische rekenmachine en computeralgebrapakketten in het onderwijs regelmatig worden gebruikt. Ze liggen blijkbaar nogal voor de hand. De uitwerking in de didactische praktijk is minder vanzelfsprekend en in een aantal publikaties zelfs teleurstellend. Niet zelden (zie bijvoorbeeld Demana e.a. 1992) is de traditionele vraagstelling onverkort gehandhaafd en is het voornaamste vernieuwende element de mogelijkheid tot zelfcontrole met de grafische rekenmachine.

In het vervolg van dit verslag willen wij schetsen hoe 'realistisch' de genoemde veronderstellingen in de praktijk van het project zijn gebleken. Daarbij moet wel steeds in ogenschouw worden genomen dat de randvoorwaarden bij de experimenten in de klas zeer beperkend waren in de zin dat deze experimenten hoofdzakelijk hebben plaats gevonden in de minst realistische tak van het Nederlandse wiskundeonderwijs, namelijk wiskunde B op het vwo.

4 Projectuitvoering

4.1 ontwikkelingsonderzoek

Het project volgt de methode van het zogenaamde ontwikkelingsonderzoek (zie Gravemeijer, 1994). In deze paragraaf wordt summier beschreven wat daaronder wordt verstaan. Het specifieke karakter van ontwikkelingsonderzoek laat zich het beste toelichten door het te vergelijken met de gangbare onderwijskundige aanpak van curriculumontwikkeling. De onderwijskundige standaardaanpak van ontwikkelwerk kan als volgt worden beschreven. Uitgaande van concrete doelen wordt een curriculum geconstrueerd met behulp van instrumentele theorieën. Dit curriculum wordt vervolgens in de praktijk van het onderwijs getoetst. Daarbij kan het gaan om summatieve of om formatieve evaluatie. In het eerste geval dient het evaluatieonderzoek uitsluitsel te geven over de waarde van het curriculum, in het tweede geval moet de evaluatie vooral aanwijzingen voor verbeteringen leveren.

Bij ontwikkelingsonderzoek is het uitgangspunt niet een set concrete doelen maar eerder een algemene onderwijsfilosofie. Anders dan in de standaardaanpak laat het onderwijsexperiment het curriculum dat beproefd wordt niet ongewijzigd. De ervaringen worden namelijk direct benut voor het bijstellen of ontwikkelen van nieuwe onderwijsactiviteiten. In feite komt het nieuwe curriculum tot stand in het experiment: ontwikkeling en beproeving gaan hand in hand.

De kern van het proces is een cyclisch proces van doordenken en beproeven, een cyclische afwisseling van gedachtenexperiment en onderwijsexperiment. In het gedachtenexperiment maakt de ontwikkelaar zich een voorstelling van hoe het onderwijsleerproces zou kunnen verlopen. De mogelijke bijdrage van de grafische rekenmachine voor het wiskundeonderwijs vormt het uitgangspunt voor het ontwikkelingsonderzoek binnen dit project.

In het onderwijsexperiment gaat de ontwikkelaar op zoek naar aanwijzingen dat het onderwijs wel of niet beantwoordt aan het eerdere gedachtenexperiment. De gevonden aanwijzingen worden vervolgens direct weer gebruikt voor het ontwerpen van nieuwe, verbeterde onderwijsactiviteiten. Naast het verifiëren van het gedachtenexperiment wordt het onderwijsexperiment ook benut om op zoek te gaan naar nieuwe ideeën voor onderwijsactiviteiten. Zo kunnen spontane oplossingsstrategieën van leerlingen de ontwikkelaar op het spoor zetten van een nieuwe opzet van een leergang. Hoofdstuk 5 geeft een beeld van dit cyclische proces. Het beschrijft de ontwikkeling van het lesmateriaal als gevolg van het doordenken, beproeven en bijstellen van de uitgangspunten, al is een en ander ten behoeve van de leesbaarheid minder cyclisch weergegeven dan het in werkelijkheid was.

Met bovenstaande kenmerken krijgt het ontwikkelingsonderzoek het karakter van het uitwerken, verfijnen, bijstellen en verhelderen van de onderwijstheorie die in het verlengde ligt van de oorspronkelijke onderwijsfilosofie. Karakteristiek aan het proces van ontwikkelingsonderzoek is de verwevenheid van 'discovery' en 'justification'. Het onderscheid tussen ontdekking en rechtvaardiging wordt vaak gekoppeld aan een scheiding in de tijd: eerst vindt de ontdekking plaats en daarna volgt het onderzoek naar de juistheid, de poging tot rechtvaardiging. In ontwikkelingsonderzoek zijn discovery en justification verweven. Immers, de rechtvaardiging steunt niet alleen op het onderwijsexperiment, ook het gedachtenexperiment levert argumenten voor rechtvaardiging.

Het resultaat van ontwikkelingsonderzoek bestaat uit een nieuwe leergang of een set onderwijsactiviteiten, de eraan ten grondslag liggende keuzes en de rechtvaardiging van die keuzes. De theorieopbrengst van het onderzoek is gelegen in de keuzes die samen een lokale onderwijstheorie kunnen vormen. De criteria die dit keuzeproces sturen zijn gebaseerd op de onderwijsfilosofie en de ermee samenhangende veronderstellingen die beschreven zijn in hoofdstuk 3.

In dit onderzoek is de opbrengst een serie leerstofpakketten waarbij het gebruik van de grafische rekenmachine is geïntegreerd. De reflectie op de experimenten is vastgelegd in hoofdstuk 6. In dit hoofdstuk staan de voor het wiskundeonderwijs waardevolle karakteristieken van de grafische rekenmachine. Deze karakteristieken zijn in het lesmateriaal verwerkt. Bovendien is aangegeven welke verschuiving van vaardigheden van leerlingen zal plaatsvinden als gevolg van het gebruik van de grafische rekenmachine.

We kunnen de theorie-opbrengst van ontwikkelingsonderzoek ook kenschetsen als de opbrengst van het leerproces van de ontwikkelaar. De taak van de ontwikkelaar is dan zich dit leerproces bewust te maken, de leerwinst expliciet te maken en deze te rechtvaardigen. De rechtvaardiging zal bestaan uit een redenering in de trant van, 'deze leergang of deze aanpak voldoet aan de uitgangspunten van realistisch reken-wiskundeonderwijs, omdat ...', waarin empirische gegevens, criteria en theoretische overwegingen worden gecombineerd.

4.2 organisatorische projectopzet

Het schooljaar 1991-1992 was het eerste jaar van het experiment. Aan een achttal scholen werden voor een tijd, variërend van enkele weken tot twee maanden, een dertigtal grafische rekenmachines en een demonstratieset uitgeleend. Deze demonstratieset bestaat uit een normale grafische rekenmachine gekoppeld aan een doorkijkschermpje dat op een overheadprojector gelegd kan worden. De opdracht aan de deelnemende scholen was nauwelijks duidelijker dan: 'doe er iets nuttigs mee in de wiskundeles en maak een verslag van je bevindingen'. Het was niet alleen de korte voorbereiding die tot een zo weinig specifieke opdracht leidde; met opzet is gekozen voor minimale sturing van de inhoud, om te onderzoeken hoe de grafische rekenmachine in zo'n open situatie gebruikt zou gaan worden. Het project bevond zich op dat moment in een verkennende fase.

Gedurende dit eerste jaar is door het Freudenthal instituut een uitgebreid practicum geproduceerd voor het gebruik van de voornaamste functies van de TI-81, als voorbereiding op vier toepassingsgebieden. Dit zijn, globaal aangeduid, 'grafisch functieonderzoek', 'parameterkrommen', 'matrixrekening' en 'beschrijvende statistiek'. Het doel hiervan was te voorkomen dat elk van de scholen zelf een kennismakingspracticum zou gaan schrijven.

Voor het jaar 1992-1993 is gekozen om met twee scholen intensief te gaan samenwerken: het Liemers College in Zevenaar en het Cals College in Nieuwegein. Op elk van de scholen werd een vijfde klas vwo wiskunde B voorzien van grafische rekenmachines en een demonstratieset. De leerlingen konden de machines tijdens de les gebruiken. Ze mochten de apparaten echter niet mee naar huis nemen. Door de docenten Gerard Stroomer en Ramiro Wanga werden bij een aantal onderwerpen uit hun leerboek werkbladen geschreven. Bovendien werd nu op ons initiatief doelgericht met een aantal eerste versies van door het projectteam ontwikkelde leerstofpakketten geëxperimenteerd.

Er is gekozen voor twee wiskunde B klassen omdat de inpassing van gebruik van de grafische rekenmachine bij wiskunde B meer ingrijpt in de keuze en de aanpak van de leerstof dan bij wiskunde A. Het grafisch/numerieke karakter van de machine sluit namelijk uitstekend aan bij de doelstelling van wiskunde A, waar niet zozeer de rekentechniek maar juist de interpretatie centraal staat. Daarentegen is er een spanningsveld tussen de meer formele wiskunde van het B-programma en de grafisch/numerieke werkwijze van de grafische rekenmachine. Een tweede reden voor de keuze voor wiskunde B is het feit dat het curriculum van wiskunde B ter discussie staat. We hopen dat de resultaten van dit onderzoek van invloed zijn op die discussie.

Tijdens dit tweede jaar is binnen het Freudenthal instituut een resonansgroep samengesteld, die de produkten van het projectteam van de nodige feedback heeft voorzien.

In het derde en laatste jaar, 1993-1994, heeft er een verbreding binnen de betreffende scholen plaatsgevonden. De experimenten in de klassen vwo-5 bij wiskunde B zijn voortgezet. Daarbij zijn de machines ook enkele malen met de leerlingen meegegeven, waardoor ze ze ook thuis en bij andere vakken konden gebruiken. Ervaringen van het voorgaande jaar zijn in volgende versies van de leerstofpakketten verwerkt. Tevens is de grafische rekenmachine vaker ingezet bij het toetsen van de stof die reeds eerder behandeld was. Verder zijn ook andere klassen en andere docenten bij het project betrokken. Op het Cals College heeft een vierde klas havo (wiskunde B) het gehele jaar met de machine gewerkt. Daarnaast is op het Liemers College ook bij wiskunde A in vwo-5 geëxperimenteerd.

4.3 inhoudelijke projectopzet

In het vorige hoofdstuk is beschreven welke invloed de grafische rekenmachine op het wiskundeonderwijs zou kunnen hebben. Onder andere zijn daar de volgende uitspraken gedaan:

- Voor wat betreft het gebruik van realistische toepassingen, merken we op dat niet alleen wordt bedoeld dat de leerlingen wiskundige begrippen en technieken kunnen toepassen op herkenbare en realistische situaties, maar dat omgekeerd (en idealiter) deze begrippen en technieken aan de hand van zulke situaties worden ontwikkeld.
- Zo kan bijvoorbeeld het opereren met algebraïsche expressies via grafische (of meetkundige) voorstellingen van functies op het beeldscherm in een groot aantal variaties worden uitgevoerd. Algebrawetten en rekenregels kunnen zo grafisch worden ontdekt en gecontroleerd. Dit leidt tot een meer aanschouwelijke vorm van algebraonderwijs.
- Met de komst van de grafische zakrekenmachine verdwijnt de noodzaak om het realistisch gehalte van een probleemstelling aan te tasten. De machine neemt immers het tijdrovende technische werk van de leerling over, waardoor alle aandacht kan worden gericht op het proces van mathematiseren, de oplossingsstrategie en het trekken van redelijke conclusies.
- De grafische rekenmachine is uitermate geschikt om veranderingsgedrag van grootheden in hun onderlinge relatie zichtbaar te maken en bevordert zo een dynamische zienswijze op analytische modellen.

Deze vier punten zijn de aanleiding voor vier onderwerpen voor experimenteel lesmateriaal. De keuze voor de genoemde onderwerpen wordt hieronder kort toegelicht.

1 *Differentiëren*
Diferentiaalrekening neemt een cruciale plaats in in het wiskundecurriculum. De grafische rekenmachine leent zich goed voor het approximeren van differentiaalquotiënten en voor het tekenen van benaderingen van hellinggrafieken. Hier lijken mogelijkheden te liggen voor de ondersteuning van de begripsvorming.

2 *Optimaliseren*
In allerlei situaties en disciplines komen optimaliseringsproblemen voor. Vaak dient het probleem eerst in wiskundige termen vertaald te worden. Daarna, in de oplossingsfase, blijken vaak diverse oplossingsmethoden waardevol te zijn. Hier liggen mogelijkheden voor dwarsverbanden met meetkunde.

3 *Grafiekenalgebra*
In Grafiekenalgebra gaat het om de samenhang tussen operaties met grafieken en operaties met formules. Het vermogen om snel de gevolgen van wijzigingen in de formule op de grafiek te onderzoeken is hierbij een belangrijk gegeven.

4 *Bewegingen in het vlak*
De dynamische mogelijkheden van de grafische rekenmachine kunnen bij uitstek ingezet worden bij het onderwerp Krommen in parametervoorstelling, waarbij de parameter vaak de tijd voorstelt. Net als bij 'Optimaliseren' spelen realistische problemen en dwarsverbanden met meetkunde een grote rol.

In deze vier pakketten zijn de genoemde aspecten verwerkt. Bovendien is getracht in de pakketten de mogelijkheid van explorerend gedrag van leerlingen een rol te laten spelen. Een meer gedetailleerde beschrijving van de opbouw van de pakketten vindt u in hoofdstuk 5.

Naast deze vier pakketten is de grafische rekenmachine ook bij het gewone boek gebruikt. Ook daarover staat meer in hoofdstuk 5.

Voor een goed begrip van het vervolg wijzen we nogmaals op de beperkende voorwaarden die dit project kende. Ten eerste werden de leerlingen die deelnamen aan het experiment opgeleid voor het reguliere landelijk eindexamen zonder grafische rekenmachine. Dat betekende dat er nauwelijks tijd was om te experimenteren met onderwerpen die buiten het examenprogramma vallen. Ook voor alternatieve aanpakken van onderwerpen die wel binnen het curriculum vallen was weinig ruimte. Een ander gevolg hiervan was dat voor de leerlingen de status van de machine tamelijk gering was. Meer dan eens zijn opmerkingen gemaakt in de trant van 'maar bij het examen mogen we hem toch niet gebruiken'.

Een tweede beperking betreft de keuze van de gebruikte grafische rekenmachine. In het project is gekozen voor één merk en type grafische rekenmachine, de TI-81 van Texas Instruments. De keuze voor deze machine is in hoofdstuk 2 toegelicht. Deze beperking is geen wezenlijke: de ervaringen en conclusies van dit project zijn in grote lijnen merk-onafhankelijk.

5 Lesmaterialen

5.1 inleiding

In dit hoofdstuk beschrijven we de ontwikkeling van lesmateriaal op grond van onze hypothesen over de invloed van de grafische rekenmachine op inhoud en didactiek van het wiskundeonderwijs. Deze ontwikkeling wordt onder meer gestuurd door het observeren van leerlingen die werken met het experimentele lesmateriaal.

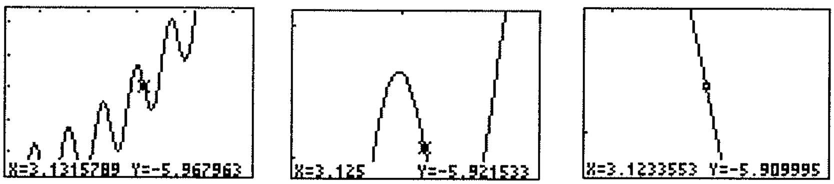
De onderwerpen 'Differentiëren', 'Optimaliseren', 'Grafiekenalgebra' en 'Bewegingen in het vlak' worden besproken en geïllustreerd met enkele belangrijke observaties in de klas. Ieder onderwerp beginnen we met onze uitgangspunten: de ideeën die we vooraf hadden over het nut en de invloed van de grafische rekenmachine bij het onderwerp. Vervolgens geven we aan hoe die uitgangspunten verwerkt zijn in het leerlingmateriaal. Na een beschrijving van het onderwijsexperiment en de observaties en ervaringen in de klas, concluderen we in hoeverre de uitgangspunten verwezenlijkt zijn en in hoeverre ze bijgesteld dienen te worden.

Natuurlijk is tijdens het project niet alleen met deze pakketten gewerkt. In de laatste paragraaf wordt besproken hoe de grafische rekenmachine gefunctioneerd heeft naast het gewone lesboek. De kennis van de grafische rekenmachine, die de leerlingen bij elk van de pakketten nodig heeft, is de leerlingen niet in een aparte les aangeleerd, maar wordt tijdens de behandeling van een wiskundig onderwerp terloops verworven.

5.2 differentiëren

uitgangspunten

De grafische rekenmachine lijkt een goed hulpmiddel bij de ontwikkeling van het begrip afgeleide functie. De mogelijkheid om 'op een punt' van een grafiek in te zoomen kan gebruikt worden voor het benaderen van de helling van de grafiek in dat punt. Door voldoende in te zoomen wordt de grafiek in de omgeving van het punt een rechte lijn. 'Locally straight' noemt Tall (1991) dit. Zo wordt de helling lokaal benaderd:



Deze toepassing van grafiekenprogramma's is ook al bekend uit de educatieve software. Door de lokaal bepaalde waarden van de helling te plotten, ontstaat het beeld van de zogenaamde hellinggrafiek.

Een andere mogelijkheid is het direct globaal benaderen van de hellinggrafiek. In plaats van de helling in een punt van de grafiek te bepalen met inzoomen of met het differentiequotiënt, kan ook naar de grafiek van het differentiequotiënt als functie van x met een kleine differentie gekeken worden:
de grafiek van $y = [f(x + 0.01) - f(x)] / 0.01$ is een benadering van de hellinggrafiek van f. Als je over de grafiek van het differentiequotiënt loopt, dan geeft de y-coördinaat op het scherm een benadering van de helling van de oorspronkelijke grafiek voor overeenkomstige x.
We hebben deze twee methoden uitgewerkt:

- Via inzoomen lokaal de helling bepalen van een punt op de grafiek.
- Via de grafiek van het differentiequotiënt een globaal beeld krijgen van de hellinggrafiek.

het materiaal

lokaal benaderen

Het lokaal benaderen van de helling is in eerste instantie uitgeprobeerd in een 4 havo wiskunde B klas. De klas heeft één les besteed aan een introductiepracticum voor de grafische rekenmachine. De docent heeft vervolgens een werkblad voor een volgende les gemaakt met vier opgaven. De eerste opgave herhaalt de berekening van de helling van de grafiek van een lineaire functie op traditionele wijze. Opgave 2 en 3 introduceren het gebruik van het differentiequotiënt ($\Delta y/\Delta x$) voor het benaderen van de helling in een punt van de grafiek van een derdegraads functie. De laatste opgave maakt gebruik van de grafische rekenmachine voor het benaderen van de helling na inzoomen.

4a.Gebruik de functie $g(x) = x^3 + 2$ uit opgave 2 om op een steeds kleiner wordend verbindingslijnstuk te komen tot een schatting van de helling in het punt (1,3). Neem voor Δx achtereenvolgens de waarden 1; 0.1; 0.01.

b. Gebruik de zoom-knop van de calculator om door inzoomen de antwoorden van 4a. te controleren.

c. Geef door de calculator als inzoomtoestel te gebruiken, een schatting van de helling voor deze functie g in het punt (2, 10).

d. Maak een tabel voor de hellingfunctie g'.

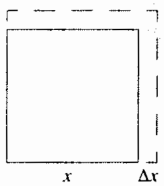
x-waarde	-1	0	1	2	3
helling					

Het inzoomen wordt hier als alternatief gegeven voor het benaderen met het differentiequotiënt. Dit sluit aan bij de aanpak in het schoolboek.

grafiek van het differentiequotiënt

Het gebruiken van de grafiek van het differentiequotiënt voor het globaal benaderen van de hellinggrafiek is uitgeprobeerd met leerlingen van vwo-5, zowel bij wiskunde A als bij wiskunde B. In eerste instantie zijn twee werkbladen *Inleiding differentiëren met de grafische rekenmachine* gemaakt. In opgave 1 wordt de situatie geschetst.

1. We bekijken de oppervlakte van het vierkant met zijde x.
   In deze opgave ga je de TI-81 gebruiken om de hellingfunctie of de afgeleide functie van deze oppervlaktefunctie te benaderen.



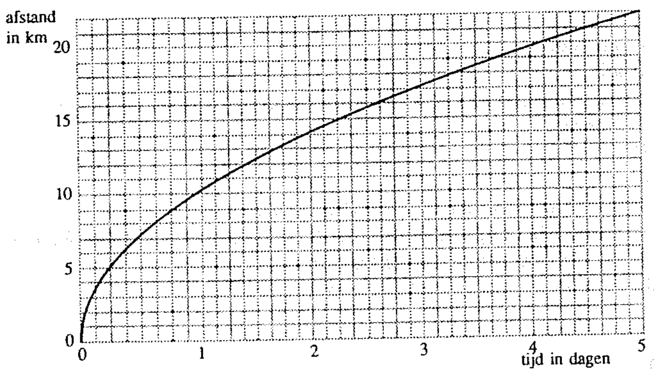
a. Druk op [Y =] en voer in: Y1 = X^2.
   Teken de grafiek.
b. Om beter te kijken hoe snel de oppervlakte toeneemt als x bijvoorbeeld 0.1 groter wordt kun je invoeren:
   Y2 = $(X + 0.1)^2$
   Y3 = Y2 – Y1
   Welke vorm heeft de grafiek van Y3? Verklaar je antwoord.
c. Een benadering van de hellingfunctie ontstaat door de verschilfunctie te delen door de differentie 0.1. Definieer Y4 op deze manier.
   Als het goed is heb je nu de volgende functies:
   Y1 = X^2
   Y2 = $(X + 0.1)^2$
   Y3 = Y2 – Y1
   Y4 = Y3 / 0.1
d. Schakel de tweede en de derde functie uit door de cursor op het =-teken te zetten en [Enter] te toetsen. Maak weer een tekening.
e. Zoals je ziet is de grafiek van de benadering van de groeifunctie een rechte lijn. Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van deze lijn?
f. Verbeter de benadering door de differentie in de definitie van Y2 en Y4 te verkleinen. Welke lijn zou je krijgen als je de differentie 'oneindig klein' zou kunnen maken?

Daarna volgen nog enkele toepassingen van de grafiek van het differentiequotiënt. De ervaringen met deze werkbladen waren niet onverdeeld positief. Bijvoorbeeld bleek er snel verwarring te ontstaan over de verschillende betekenis van de grafieken op het scherm. Dat heeft niet verhinderd dat we de werkbladen hebben uitgewerkt tot een pakket *Differentiëren.*

differentiëren

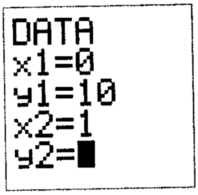
In dit pakket werd de introductie uitgebreid met enkele opgaven waarbij leerlingen een lijst vullen met toenamen van een functie *f* voor een aantal waarden van x bij een gegeven differentie Δx. Vervolgens kan de grafische rekenmachine deze lijst als stippengrafiek op het scherm tekenen. De stippengrafiek is een benadering van de verschilgrafiek van $y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Om de toename preciezer te bestuderen wordt vervolgens de differentie steeds kleiner gekozen. Hoe kleiner Δx, hoe kleiner $f(x + \Delta x) - f(x)$ wordt. Van de stippengrafiek is op een zeker moment dan niets meer te zien. De stippengrafiek valt samen met de x-as. Dit is een aanleiding om naar de gemiddelde toename te kijken. De stippengrafiek van het differentiequotiënt geeft een globaal beeld van de hellinggrafiek. Verwarring over de twee grafieken is dan minder snel mogelijk.

Het pakket begint met een opgave over een lekkende olietanker. De tanker ligt 20 kilometer uit de kust en de vlek heeft al een straal van 10 kilometer. In een grafiek is het verloop van de straal van de vlek te zien als de hoeveelheid olie constant groeit (naar een idee van Roodhardt, 1990).



De opdracht is om de toename van de straal in de loop van de tijd te onderzoeken. Voor dit probleem is gekozen omdat het niet direct duidelijk is *hoe* deze toename afneemt. Daarom wordt het begrip van de toename op een tijdsinterval geïntroduceerd. Uiteindelijk is de afnemende toename te zien in de gegeven grafiek en in een tabel met bijbehorende stippengrafiek. Dit is een begin voor de introductie van de grafiek van de gemiddelde toename.

De waarden uit je tabel kun je invoeren via het STAT menu.



1. Kies STAT en vervolgens uit DATA de opdracht EDIT.
   Voer voor x het moment in,
   en voor y de toename op dat moment.
2. Kies nu via STAT uit DRAW de opdracht Scatter.
   Laat de opdracht Scatter uitvoeren door op ENTER te tikken.
3. In de grafiek kun je zien dat de straal van de vlek blijft groeien.
   In de tabel kun je zien dat de groei afneemt.
   a. Hoe zie je dat aan de stippengrafiek op het scherm?
   b. Hoe zie je dat aan de vorm van de grafiek?

Daarna volgt een opgave over een zandzakje dat uit een ballon valt. Met een formule voor de lengte van de valweg moeten leerlingen de *gemiddelde* snelheid van het zakje onderzoeken. Het doel van de opgave is om te achterhalen met welke snelheid het zakje op de grond valt. Het differentiequotiënt komt aan de orde voor het berekenen van de gemiddelde snelheid op een bepaald moment. Voor het verloop van de gemiddelde snelheid wordt de grafiek van het differentiequotiënt als functie van x bekeken. Deze grafiek is dan het uitgangspunt voor het zoeken naar de formule van de hellinggrafiek van de valweg w.

Je ziet dus in de grafiek van $w(x)$, in de tabel en aan de stippengrafiek van het differentiequotiënt dat de snelheid steeds meer toeneemt.

6. Het lijkt alsof de stippen op een rechte lijn liggen.
   Welke vergelijking heeft deze lijn?

7. Voer de vergelijking van de lijn in voor Y2, en laat de lijn in het plaatje tekenen.
   Scatter je DATA nog een keer om te controleren of de lijn door de stippen gaat.

Je kunt ook op een andere manier de vergelijking van de lijn vinden. In de tabel bereken je de gemiddelde snelheid met: $\frac{w(x+0.5)-w(x)}{0.5}$. Deze formule kun je voor Y3 invoeren.

8. Welke formule moet je dan intikken?
   Vul de formule in voor Y3 en teken de grafieken.

9. Toon aan dat $\frac{w(x+0.5)-w(x)}{0.5} = 10x + 0.5$.

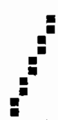
In het laatste deel van het pakket is de grafiek van het differentiequotiënt een middel voor het bepalen van de hellinggrafiek. Leerlingen moeten een aantal keer op twee manieren de hellinggrafiek van een gegeven functie vinden: door eerst de grafiek van het differentiequotiënt te laten tekenen en zo te beredeneren wat de hellinggrafiek zal zijn, en door de formule te differentiëren en de grafiek van de afgeleide functie te laten tekenen. De bedoeling is dat hiermee het verband tussen de afgeleide functie en het differentiequotiënt zichtbaar gemaakt wordt.

observaties

Hieronder volgen eerst twee observaties van leerlingen die werken met de werkbladen over het lokaal benaderen van de helling in een punt van een grafiek. Daarna volgen observaties van leerlingen die werken met het pakket *Differentiëren* waarin de grafiek van het differentiequotiënt bekeken wordt.

lokaal benaderen

Eén van de leerlingen doet het nog eens voor als de observator dat vraagt. Hij drukt een paar keer op zoom en op het scherm komt:



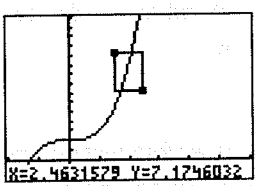
'Kijk', zegt de leerling, 'het zijn er steeds twee boven elkaar, dus de hellingscoëfficient is 2'.

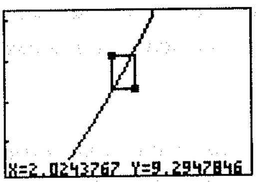
Maar de helling van $g(x) = x^3 + 2$ voor $x = -1$ is 3.
De observator tekent de grafiek van Y1 = 2X in 'zoom: standard'. De grafiek heeft een ander patroon. Een vierkant wordt niet een vierkant. En de observator raadt aan om 'zoom: square' te doen.
Dat geeft:

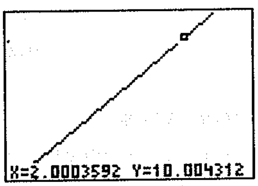
De helling lijkt dus 3 te zijn in punt (-1,3).
In het vervolg van de les gaat het steeds zo: de leerling nadert de grafiek tot heel dichtbij, gebruikt 'zoom: square' en telt dan de vierkantjes. Deze verrassende en originele methode heeft natuurlijk haar beperkingen en gevaren. Bij de conclusies komen we hierop terug.

in en uit

Een andere leerling zoomt zo ver in op een punt van de grafiek, dat hij alleen maar plaatjes met rechte lijnen ziet waarvan de hellingen steeds weer anders zijn. De vorm van de box waarmee hij inzoomt bepaalt namelijk het nieuwe venster en de helling van de grafiek:







Hij raakt daarmee het beeld van de globale (gekromde) grafiek kwijt. Maar niet alleen dat, ook de orde van grootte verliest hij uit het oog. In plaats van dichtbij $x = 2$ te blijven (waarvoor hij de helling moet vinden) gaat hij op zoek naar het volgende punt bij $x = 3$ voor de berekening van het differentiequotiënt.

De observator vertelt hem dat die punten te ver uit elkaar liggen. Je kunt dat zien als je *uitzoomt:* de grafiek is tussen die punten krom, ze liggen dus te ver uit elkaar om de helling te benaderen in het punt $x = 2$.

grafiek van het differentiequotiënt

Het bleek dat de taal in de opgaven van de twee werkbladen *Inleiding differentiëren met de grafische rekenmachine* niet goed aansloot bij de kennis van de leerlingen.

Het begrip 'differentie' was hen bijvoorbeeld onduidelijk. Bovendien leek de introductie te snel te gaan. De leerlingen kregen vier grafieken in beeld: de oorspronkelijke grafiek, de verschoven oorspronkelijke grafiek, de verschilgrafiek en de grafiek van het differentiequotiënt. Het verband tussen die vier grafieken is dan moeilijk te zien. Verwarring ontstond ook omdat de opgave ging over een kwadratische functie, waardoor de grafiek van het differentiequotiënt een rechte lijn is die zelf ook weer een richting heeft. Bovendien was in de opgave de grafiek van de verschilfunctie (Y3 = Y2 – Y1) ook een rechte lijn. Om verwarring met de grafiek van Y4 te voorkomen werd het differentiequotiënt uitgeschreven: Y3 = $((X + 0.1)^2 - X^2) / 0.1$
Hiermee leek het probleem niet opgelost, getuige de volgende observatie.

> Jelle heeft Y1 = x^2 en Y2 = $((x + 0.1)^2 - x^2)/0.1$ getekend. Het verband tussen de functiewaarden van Y2 en de helling bij Y1 is hem niet duidelijk.
> De volgende opgave luidt: 'Loop met TRACE over Y2 en lees af voor welke x de verandering -2 is (met $\Delta x = 0.1$)'.
> Jelle vraagt wat er moet gebeuren. Hij heeft wel op TRACE gedrukt, maar weet niet waar hij naar moet kijken. Als de observator hem vraagt naar de betekenis van de functiewaarden en het verband met Y1, dan weet hij geen antwoord.

Het blijkt voor deze leerlingen niet eenvoudig te zijn om de grafiek van de afgeleide functie globaal te interpreteren. De volgende opmerking vormt één van de conclusies van een observatieverslag.

> Al met al ben ik (de observator) tevreden over het leereffect van deze lessen als het gaat om het omgaan met de grafische rekenmachine, om het begrijpen van het verschil numeriek-exact, om het krijgen van het gevoel van wat je wel en niet met het apparaat kunt doen. Minder tevreden ben ik over het leereffect naar het eigenlijke onderwerp toe: ik vraag me af hoeveel leerlingen over afgeleide functies geleerd hebben tijdens het werken met de grafische rekenmachine gedurende deze drie lessen.

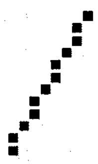
De ervaringen met het pakket *Differentiëren met de grafische rekenmachine* zijn helaas nog vrij beperkt. Op de TI-81 vergt het werken met een stippengrafiek via een scatterplot enkele ondoorzichtige handelingen. De TI-82 lijkt beter geschikt voor een dergelijke benadering. Bovendien kun je met de TI-82 een functie definiëren in de vorm: Y2 = (Y1(X+0.1) - Y1(X)) / 0.1. Deze mogelijkheid sluit goed aan bij de uitgangspunten van het pakket. Experimenten met de TI-82 moeten derhalve uitsluitsel geven over het nut van deze aanpak.

conclusies

De voorlopige conclusies op grond van de observaties formuleren we als volgt.

- Sommige leerlingen gebruiken het hokjespatroon van de TI-81 om de helling te vinden. Daarbij zijn problemen te verwachten:
  - Inzoomen geeft veranderingen in het beeld. De verhouding is niet per definitie dezelfde: de square-knop heb je steeds nodig om het juiste beeld te krijgen.
  - Voor grote of niet-gehele richtingscoëfficiënten wordt het moeilijk. Hoe ziet bijvoorbeeld een helling van 1.5 eruit op het scherm van de grafische rekenmachine?

Antwoord:



- Als je inzoomt moet je ook kunnen uitzoomen. Dus ook uitzoomen of het invoeren van een 'begin-range' moet tegelijk met het inzoomen worden geleerd (gebruik regelmatig zoom: standard). Dat lijkt ons een belangrijk principe. Met het lokale beeld na inzoomen moet niet het globale beeld van de grafiek verdwijnen.
- Een probleem is dat het experimentele materiaal slechts een paar werkbladen vormt naast de methode van het schoolboek. De lange lijn van de begripsopbouw rond het onderwerp 'de afgeleide functie' in de methode wordt doorbroken. Even wordt het onderwerp op een andere manier benaderd. Voor een aantal leerlingen blijkt dit een te grote sprong, het lukt niet om met een paar werkbladen deze leerlingen inzicht in het onderwerp bij te brengen. De verschillende aspecten die bij het onderwerp komen kijken zijn daarvoor te complex.
- Het verdient de moeite om de benadering van hellingen met de grafische rekenmachine op een bredere schaal te integreren in de methode. Het inzoomen met de grafische rekenmachine kan bijvoorbeeld in een vroeg stadium vergeleken worden met het inzoomen op een profiel(-tekening) van een berghelling om tot meer nauwkeurige benaderingen van de helling op een bepaalde plek te komen.

5.3 optimaliseren

uitgangspunten

Het optimaliseren van een functie, al dan niet voortgekomen uit een contextprobleem, vindt traditioneel plaats op de analytische manier. De afgeleide wordt op nul gesteld en vervolgens onderzoekt men het tekenverloop van de afgeleide. Daarbij komen wat algebraïsche vaardigheden om de hoek kijken, zoals het bepalen van een afgeleide (denk aan quotiëntregel en kettingregel) en het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden.

De grafische rekenmachine kan enkele belangrijke aspecten toevoegen aan deze optimaliseringsproblemen. Ten eerste maakt de machine het mogelijk om realistische contexten te gebruiken zonder dat 'lastige' coëfficiënten erg storend zijn. Deze gedachte vormt één van de uitgangspunten van het pakket Optimaliseren.

Een tweede uitgangspunt vormt de integratie van de grafisch/numerieke methode met de analytische methode en de meetkundige, zoals hieronder wordt toegelicht.

Bij het optimaliseringsprobleem wordt eerst een formule opgesteld. Deze formule, meestal opgebouwd uit componenten, wordt ingevoerd in de grafische rekenmachine, die vervolgens de grafiek levert. Daartoe moeten wel eerst schattingen van het domein en het bereik gemaakt worden. De grafiek geeft dan al meteen een globaal overzicht: is er sprake van een minimum of een maximum? In de grafiek kunnen bovendien de coördinaten van optimale punten worden afgelezen, eventueel na lokaal uitvergroten. Doordat het feitelijke werk aan de machine is uitbesteed, kan de leerling zich concentreren op het terugvertalen van de oplossing naar het oorspronkelijke probleem. Deze grafisch/numerieke aanpak wordt naast de traditionele analytische methode gezet. Elk heeft zijn beperkingen. De analytische methode leidt niet in alle gevallen tot een oplossing en de grafische benadering is niet exact.

De grafische rekenmachine levert bij optimaliseringsproblemen dus een tweede manier van aanpak. De meetkundige aanpak is de derde die in het pakket steeds terugkeert. De meeste optimaliseringsproblemen van dit pakket hebben een meetkundige achtergrond. De meetkundige oplossing is vaak verbluffend eenvoudig en doorzichtig. Regelmatig geeft het antwoord van de grafische of analytische methode een aanwijzing voor het meetkundige bewijs.

Uit verschillende observaties blijkt dat deze drie methoden, de grafisch/numerieke, de analytische en de meetkundige, elk hun eigen aandacht opeisen. Verbanden worden door leerlingen aanvankelijk moeizaam gelegd, maar werken vaak ook als verrassingen. Met een aantal voorbeelden illustreren we dit. In hoofdstuk 6 wordt nader ingegaan op deze verstrengeling of integratie.

het materiaal

Het pakket Optimaliseren bestaat uit de volgende hoofdstukken:

1 Een klassiek probleem
2 Waar komt het station?
3 Optimaliseren van omtrek, oppervlakte en inhoud
4 James Bond en de wet van Snellius
5 De beste vorm voor een goot
6 De achtervolging van de Bismarck.

Het eerste hoofdstuk gaat over een stelling die Euclides al geponeerd heeft: van alle rechthoeken met een gegeven vaste omtrek heeft het vierkant de grootste oppervlakte. Als verkennende activiteit moet van een serie rechthoeken met gelijke omtrek de oppervakte bepaald worden. Eén ervan is een vierkant. Daarom lijkt het dat de oplossing al verklapt wordt, ofschoon de tekst alleen over rechthoeken spreekt. Toch is dat niet zo.

Leerlingen lossen vervolgens via een meetkundige en een algebraïsche weg het probleem op. Dan wordt aangekondigd dat het ook met grafieken kan:

> 3. Gegeven: voor een rechthoek geldt: *lengte* + *breedte* = 8
> Gevraagd: de maximale oppervlakte.
> Oplossing: stel de lengte x, dan is de breedte $8 - x$

a. Druk op de knop 'Y=' van de grafische rekenmachine en voer achtereenvolgens in: $y_1 = x$, $y_2 = 8 - x$ en $y_3 = y_1 * y_2$
b. Neem als Range voor x : Xmin = 0, Xmax = 8 en voor y: Ymin = 0 en Ymax = 20 en bekijk de grafieken op het scherm. In die grafiek kun je het verband zien tussen de veranderende lengte, breedte en oppervlakte van de rechthoek.Vertel wat je uit die grafiek kunt concluderen.

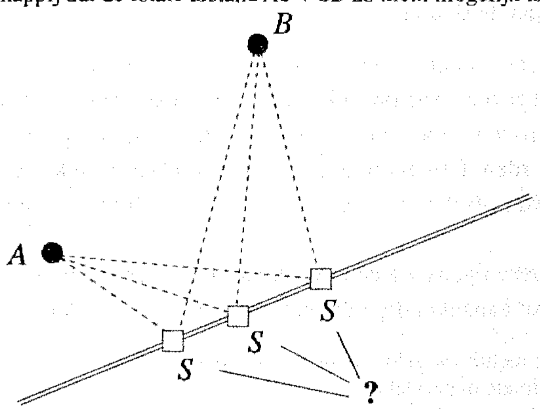
In de volgende opgave worden de bevindingen gegeneraliseerd. De eenvoud waarmee op de grafische rekenmachine wijzigingen onderzocht kunnen worden, is hierbij zeer waardevol.

4. Bekijk nu het verband $y = x(a - x)$ voor diverse waarden van a.
a. Teken de grafieken van $y = x(a - x)$; kies daarbij voor a achtereenvolgens 2, 4, 6, 8. Meer grafieken kunnen erbij worden getekend met DrawF.
Bedenk dan wel eerst welke 'range' geschikt is voor x en y om alle grafieken op het scherm te krijgen.
b. Wat kun je zeggen van de coördinaten van de toppen? Met welke opdracht kun je, behalve de vijf grafieken ook de kromme op het scherm krijgen waar *alle* toppen (ook voor andere mogelijke waarden van a) op liggen?

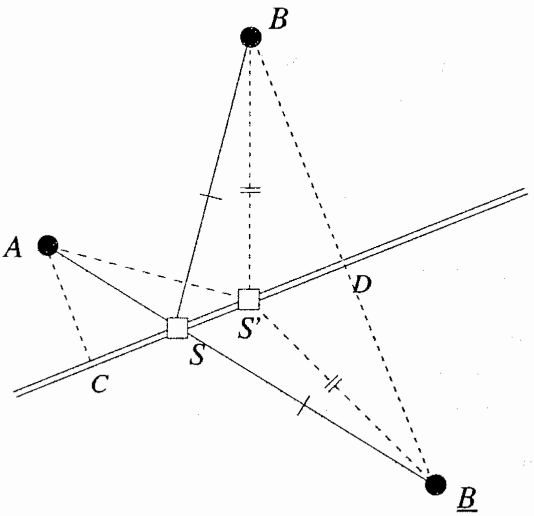
Na deze introductie op optimaliseringsproblemen en hun verschillende benaderingen volgt een hoofdstuk over de problematiek rond een optimale plek van een station aan een spoorlijn. Het probleem wordt als volgt geïntroduceerd.

waar komt het station?

De gemeenten A en B liggen aan dezelfde kant van een spoorlijn resp. op afstand 5 km en 10 km van die lijn. De afstand van A tot B is (hemelsbreed) 13 km.
De spoorwegmaatschappij wil een station aan genoemde spoorlijn bouwen en overlegt met diverse instanties waar de beste plaats voor het station (S) is. Het terrein aan de kant van de spoorlijn waar A en B liggen is nog braak en munt niet uit door natuurschoon, zodat men voor de aanleg van de wegen AS en BS alle vrijheid heeft.
Gemeente A wil natuurlijk dat S zo dicht mogelijk bij A ligt. Gemeente B wil S zo dicht mogelijk bij B hebben. Het provinciebestuur zou het liefst zien dat S op hemelsbreed gelijke afstanden van A en B komt te liggen. Tenslotte wil de provinciale busmaatschappij dat de totale afstand $AS + SB$ zo klein mogelijk is (zie figuur).



Na het onderzoeken van de optimale oplossing volgens de verschillende criteria wordt de situatie gewijzigd. Hoe veranderen de antwoorden als stad A wat verder van de spoorlijn zou liggen? De grafische rekenmachine is bij het onderzoeken van deze variant erg praktisch. Door slechts één getal te veranderen kunnen leerlingen de grafieken van de gewijzigde situatie zien. De optimale oplossing voor de gewijzigde situatie geeft aanleiding tot het onderzoeken van een bepaalde verhouding. Het bestaan van deze verhouding kunnen leerlingen met differentiëren bewijzen. Het hoofdstuk wordt besloten met de meetkundige oplossing voor de situatie waarbij de lengte van $AS + BS$ geminimaliseerd moet worden. Hierbij komt de eerder gevonden verhouding weer terug. Dit meetkundige bewijs is het meest eenvoudig en doorzichtig, maar je moet er maar opkomen:



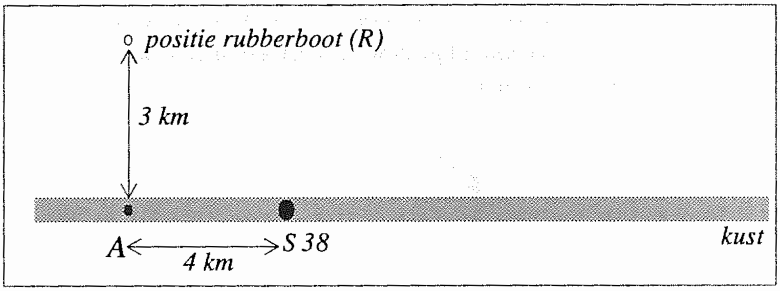
Een leerling reageerde op deze oplossing met de woorden: 'Waarom leren ze je altijd eerst de moeilijke en dan pas de makkelijke oplossing?'

Met deze opgave wordt het verband gelegd tussen de verschillende benaderingen. Met de grafische rekenmachine kun je eenvoudig wijzigingen onderzoeken en de regelmaat die dan ontdekt wordt brengt je op het spoor van de oplossing. Met differentiëren bewijs je je vermoedens en de meetkundige aanpak is hier superieur in haar eenvoud en overtuigingskracht. De meetkundige aanpak voldoet echter niet altijd. De variant waarbij A twee keer zoveel inwoners heeft als B en het eerlijk lijkt om het minimum van $2AS + BS$ te bepalen, laat zich niet eenvoudig meetkundig oplossen. Dit laatste probleem anticipeert ook op de wet van Snellius die verderop in het pakket wordt behandeld.

Uit hoofdstuk 4 komt het volgende probleem (ontleend aan Kindt e.a., 1993).

agent 007

James Bond, Geheim Agent 007, is op drie kilometer afstand van de kust gedropt. Met een rubberboot wil hij de kust bereiken om bij strandpaal 38 een geheime boodschap achter te laten. Natuurlijk is het zaak dat hij zijn missie zo snel mogelijk volbrengt. Met de rubberboot kan hij zich roeiend verplaatsen met een snelheid van 6 km/u. Het water is zo rustig dat de vaarrichting niet van invloed is op zijn snelheid. Op het strand kan hij een lange poos een snelheid van 12 km/u volhouden. In onderstaande situatieschets zie je dat de strandpaal (S38) 4 km verwijderd is van de plaats (A) op het strand die James Bond zou bereiken als hij de kortste weg naar het strand zou nemen.

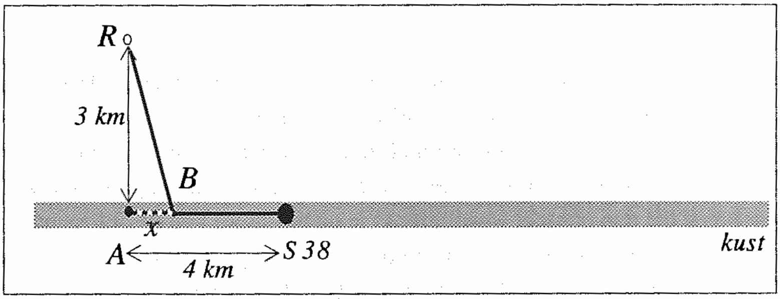


1. Veronderstel dat James Bond inderdaad de kortste weg naar het strand neemt en daarna 4 km loopt.
a. Hoeveel minuten heeft hij dan nodig om paal 38 te bereiken?
b. Hoeveel minuten heeft hij nodig als hij in schuine richting rechtstreeks naar de strandpaal roeit?

De vraag is of de kortste weg ook de snelste is. Wellicht kan hij tijd besparen door halverwege A en de strandpaal aan land te gaan, dus op 2 km van paal 38.

c. Hoeveel minuten tijdwinst boekt hij ten opzichte van de vorige routes?

2. Nu algemeen. Stel dat hij in punt B op x km van punt A aan land gaat.



De totale tijd y_3 om de strandpaal te breiken is gelijk aan de roeitijd y_1 vermeerderd met de looptijd y_2.
a. Teken de grafieken van y_1, y_2 en y_3 als functie van x.
b. Waar moet 007 aan land gaan om zo snel mogelijk de opdracht te volbrengen?
c. Hoe lang doet hij erover?

Het artikel 'James Bond en de wet van Snellius' (zie Kindt, 1993) gaat nader op deze opgave in. Steeds wordt leerlingen gevraagd eerst een grafiek van de nieuwe situatie te tekenen. Hiervoor moeten ze dan de formule achter het probleem zien te vinden. Naar aanleiding van de grafiek van de formule worden vragen gesteld over de situatie. Bovendien wordt onderscheid gemaakt tussen benaderingen en exacte antwoorden.

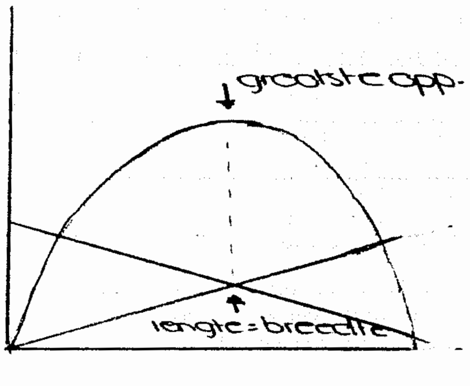
observaties

verschillende gebieden, verschillende benaderingen

Het 'schakelen' tussen verschillende representaties en deelgebieden is voor leerlingen niet eenvoudig. In de volgende observatie werken de leerlingen aan de opgave over de maximale oppervlakte van rechthoeken met dezelfde omtrek.

> Het uitrekenen van de oppervlakte van elk van de rechthoeken eist zoveel aandacht, dat de leerlingen niet tot het vergelijken van de oppervlakten komen. Het doel van de opgave verliezen sommigen uit het oog.
>
> Veel aandacht wordt besteed aan het 'vertalen' van formules. De leerlingen moeten bijvoorbeeld: lengte + breedte = 8 omvormen tot $Y1 = X$ en $Y2 = 8 - X$ in de grafische rekenmachine.
>
> Dan moeten ze inzien dat $Y3 = Y1 * Y2$ de oppervlakte van de rechthoek aangeeft. Dat is een hele stap. Daarna hebben ze niet 'vanzelf' door dat $Y3 = Y1 * Y2 = X(8 - X)$ een parabool oplevert en dus een extreem heeft. Dat is namelijk weer een ander gebied.
>
> Vanuit de grafiek lezen leerlingen dat voor de grootste oppervlakte de lengte en de breedte gelijk moeten zijn. Dat dit het geval is bij een vierkant, krijgen ze weer later in de gaten.
>
> Al deze stapjes naar de taal van de grafische rekenmachine en naar verschillende wiskundige benaderingen leveren haperingen op. Toch is de grafische rekenmachine aanleiding voor de leerlingen om de verschillende gebieden (analytisch, grafisch en meetkundig) met elkaar in verband te brengen.

Tijdens het oplossen maakten twee leerlingen het volgende plaatje van de drie grafieken:



Bij het ontstaan van deze grafieken kwamen vragen naar voren als: ligt de top van een parabool die op deze wijze tot stand komt, altijd boven het snijpunt van de twee lijnen? Hoe maak je een dalparabool? Kun je een parabool altijd definiëren als de produktgrafiek van twee rechte lijnen? Deze vragen preluderen op het vervolg: in het pakket Grafiekenalgebra worden ze nader uitgewerkt.

visualisatie van concepten

Onderstaande observatie is een mooi voorbeeld van de visualiserende kracht van de grafische rekenmachine. De leerlingen werken aan de volgende opgave.

> 2. Voer in de TI-81 de volgende functies in: $y_1 = x$, $y_2 = \frac{25}{x}$ en $y_3 = y_1 + y_2$ en bekijk de grafieken van deze functies voor x tussen 0 en 10.
>
> a. Hoe groot is de minimale waarde van y_3?
> Beschouw alle rechthoeken met oppervlakte van 25 cm^2.
>
> b. Uit a. volgt dat van al deze rechthoeken het vierkant de kleinste omtrek heeft. Verklaar dat.

Karin en haar groepsgenoten tekenen de drie grafieken met de TI. Ze besluiten dat het maximum van Y3 boven het snijpunt van de grafieken van Y1 en Y2 ligt, en lossen dan de vergelijking $x = \frac{25}{x}$ exact op. Een hybride methode. De observator bemoeit zich ermee.
Obs: Waarom ligt het maximum precies boven het snijpunt?
Leerlingen: ?????
Obs: Als bijvoorbeeld Y3 = Y1 + 2Y2, dan is het niet meer zo.
Rob: Dat moet met limieten ... Als x groter wordt, dan wordt $\frac{25}{x}$ kleiner ...
Obs: Allebei even snel?
Karel: De richtingen in het snijpunt moeten gelijk zijn!
Hij bedoelt natuurlijk 'tegengesteld' en hij overtuigt de rest. Om het te controleren differentiëren ze Y1 en Y2 en ze zien dat de richtingscoëfficiënten 1, respectievelijk −1 zijn.

De leerlingen zien hier op een grafische manier dat de somfunctie afgeleide 0 heeft wanneer de twee componenten een tegengestelde helling hebben. Dat is een mooie ontdekking, die ze naar alle waarschijnlijkheid als beeld zullen onthouden.

grafisch versus exact

Het verschil tussen de oplossingen die gevonden worden met de grafische rekenmachine en die met differentiëren verkregen worden, confronteert de leerlingen met het verschil tussen 'grafisch' en 'exact'. Dat blijkt soms een lastig punt te zijn. In de volgende observatie werken de leerlingen aan de opgaven over agent 007.

Als antwoord van opgave 2 wordt 1.72 gevonden. Ik (de observator) vraag bij verschillende groepjes of dat antwoord hen ergens aan doet denken. Uit zichzelf vroegen ze zich dat niet af, maar toch wordt $\sqrt{3}$ snel herkend, zonder het overigens te begrijpen of te bewijzen. Daarmee zet ik ze, zo blijkt, op het spoor van de vraag naar de hoek waaronder agent 007 naar de kust vaart.

Mirjam zegt al meteen: 'Ik heb het bewezen'. Ik vraag: 'Hoezo?', en Mirjam antwoordt: 'Nou, $x = \sqrt{3}$, dus de tangens is $\frac{\sqrt{3}}{3}$, dus de hoek is 30 graden'. Dat klopt, maar die $\sqrt{3}$ wisten we eigenlijk nog niet zeker ...

napraten met leerlingen

Met enkele leerlingen is na afloop van de lessenserie Optimaliseren nagepraat. De stijl van het pakket waarderen ze, zoals blijkt uit het volgende fragment van het interview:

> Obs: Vonden jullie het nou nieuw, zo'n pakketje, of lijkt het op het boek?
> Rob: Anders.
> Suzanne: Het is anders opgesteld, op een andere manier.
> Obs: Kun je uitleggen wat er anders was?
> Rob: Het boek is meer formules.
> Geert: Dit is duidelijker.
> Suzanne: Dit is meer zoals je dingen gewoon in het dagelijks leven ook doet, het boek is meer zo is het en zo blijft het.
> Geert: Het boek is meer abstract.
> Obs: Dus dit sluit meer aan bij wat je natuurlijk vindt?
> Rob: Ja, bij je gevoel.
> Leerling: Bij wat je je kunt voorstellen.
> Obs: Leuk om te horen, want dat is ook de bedoeling.
> Rob: Het boek is vrijwel alleen formules en maak maar vragen, en zie maar waar je op kunt komen, daar kun je dan wel leuk een grafiek bij tekenen maar je leert gewoon ... bijvoorbeeld differentiëren, dat was gewoon formules en dan maar uitwerken.

conclusies

De ervaringen met het pakket Optimaliseren leiden tot de volgende conclusies:

- De grafische rekenmachine maakt het mogelijk om contexten met een hoger realiteitsgehalte te gebruiken.
- De grafische rekenmachine kan een middel zijn om de 'systeemscheiding' tussen de verschillende wiskundegebieden te doorbreken. Het feit dat de grafische rekenmachine een systeem, een wereld op zichzelf is, maakt leerlingen bewust van het bestaan van verschillende methoden, zoals de grafisch/numerieke, de analytische en de meetkundige.
- De grafische rekenmachine maakt het mogelijk om variaties in een probleemsituatie aan te brengen. Dit draagt bij aan een levendige en dynamische kijk op wiskunde.
- De grafische rekenmachine kan bijdragen aan de visualisatie van concepten. De observatie over de afgeleide van een somfunctie (zie bij 'visualisatie van concepten' in de vorige paragraaf) is hiervan een voorbeeld.
- Bij het werken met de grafische rekenmachine is de verhouding tussen numerieke en exacte antwoorden een punt van aandacht.

5.4 grafiekenalgebra

uitgangspunten

In het pakket 'Optimaliseren' is de te optimaliseren functie vaak samengesteld uit een aantal componenten. Een handige bijzonderheid van de grafische rekenmachine hierbij is dat men nieuwe functies kan definiëren vanuit reeds ingevoerde functies: Y3 = Y1 * Y2 of Y3 = Y1 + Y2. Deze mogelijkheid is ook gebruikt in een kort practicum over exponenten en logaritmen. In dit practicum ging het erom dat leerlingen regels voor exponenten en logaritmen (her-)ontdekken door het onderzoeken van produkt- en quotiëntgrafieken:

> De docent vroeg de leerlingen om de functies Y1 = 3^x en Y2 = 2^x te tekenen. Welke Range zullen we nemen? Jeroen zei: 'x van 0 tot 10, of nee, tot 5, want hij gaat toch heel snel?' Er werd besloten x van -3 tot 5 te laten lopen. En de y-waarden? Robert: 'Vanaf nul ... hij is toch altijd groter dan nul.' Over de maximale waarde van y die moest worden ingesteld liepen de meningen uiteen: Jeroen toetste 10 in en Robert 15.
> (...)
> Volgende opdracht: Y3 = Y1 * Y2 en Y4 = Y1 / Y2.
> De docent: 'Wat zie je? Had je dat gedacht? Gedragen ze zich hetzelfde als de andere grafieken?'
> Robert: 'Ja, ze gaan ook door één; ze stijgen en ze worden nooit nul, met een asymptoot dus.'
> De docent: 'Het zijn allemaal exponentiële functies.'
> Even later wordt in een les het verband met transformaties van grafieken gelegd. Een leerling ontdekt de regels voor verschuiven en voor lijnvermenigvuldigingen:
> De grafiek van Y1 = 2^X is 1 eenheid naar links geschoven. Het nieuwe functievoorschrift blijkt Y2 = 2^(X + 1) te zijn. De vraag is nu met welke factor de grafiek van Y1 vermenigvuldigd moet worden ten opzichte van de X-as om de grafiek van Y2 te krijgen.
> Bas springt met de grafische rekenmachine verticaal tussen de twee grafieken heen en weer. Zo ziet hij dat de factor ongeveer 2 is. Dan gaat hij hardop denken: '1 naar links, dus de horizontale afstanden zijn steeds 1 ... nu verticaal vermenigvuldigen, die factor is ongeveer 2 ... dat wordt dus $2 \cdot 2^x$, ... dat is ... 2^{x+1} ... mooi!'

De ervaringen met het pakket Optimaliseren en met de lessen rond exponentiële functies waren de aanleiding voor het pakket *Grafiekenalgebra*. In het pakket *Grafiekenalgebra* zijn grafieken steeds het vertrekpunt voor verdere exploratie. Veel van de opdrachten zijn geformuleerd in termen van grafische activiteiten, bijvoorbeeld: tel de twee grafieken op. De resultaten worden eveneens visueel benaderd: waar liggen de nulpunten van de produktgrafiek? Vervolgens zijn de eigenschappen van de grafieken een start voor algebraïsche handelingen. Een vergelijking moet worden opgesteld of een algemene regel dient te worden bewezen, een terugkoppeling verwezenlijkt of een controle moet worden uitgevoerd. Zo beschouwd vormen de grafieken aanleiding en motivatie tot het ontwikkelen en bedrijven van een algebra; vandaar de titel van het pakket. Het bestaat uit twee delen: *Rekenen met grafieken* en *Transformaties van grafieken*.

het materiaal

Het deel *Rekenen met grafieken* bestaat uit een hoofdstuk over somgrafieken en een hoofdstuk over produktgrafieken. Hieronder staan twee voorbeelden van opgaven uit dit deel van het pakket. Het hoofdstuk over somgrafieken begint met opgaven rond het optellen van grafieken van lineaire functies.

1. Teken de grafieken van Y1 = 5 – X en Y2 = 2X – 4 (in Zoom-Standard).
a. Voer voor Y3 in: Y1 + Y2 en teken ook deze grafiek.
b. De grafiek van Y3 snijdt de x-as.
   Wat zijn voor die x-waarde de waarden van Y1 en Y2?
c. Wat geldt voor Y2 bij het snijpunt van Y1 en Y3?
d. Welke vergelijking heeft Y3?
e. Kun je Y2 zo veranderen dat de grafiek van Y3 horizontaal loopt?
f. Is verticaal ook mogelijk?
2. Hoe moet je de formule van Y1 en/of die van Y2 veranderen zodat de grafiek van Y3 daalt?
3. Verander de vergelijkingen van Y1 en Y2 zo, dat de grafieken van Y1, Y2 en Y3 door één punt gaan.
   Dit ene punt kan de oorsprong zijn. Welke andere punten zijn mogelijk?

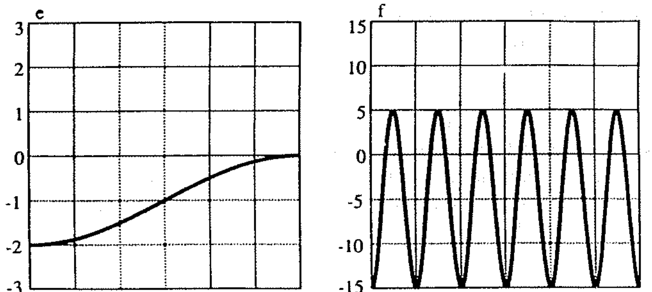
Vervolgens zijn ook andere somgrafieken aanleidingen voor opgaven. Kenmerken van somgrafieken die aan de orde komen zijn vooral het gedrag bij de nulpunten (plaats en helling). Leerlingen kunnen de grafische rekenmachine gebruiken om te experimenteren. Een voorbeeld hiervan is de opgave waarbij Y1 = sin(X), Y2 = X en Y3 = Y1 + Y2. Het blijkt dat de grafiek van Y3 nergens dalend is. Hoe moet je Y1 of Y2 veranderen zodat de grafiek van Y3 daalt èn stijgt? Waarna de gevonden verandering moet worden verklaard.

In hoofdstuk 2 van het pakket komen opgaven over produktgrafieken aan de orde. Produktgrafieken hebben andere kenmerken dan somgrafieken. Nulpunten spelen weer een belangrijke rol, maar ook punten met functiewaarde 1 zijn van belang.

1. Voer voor Y3 in: Y1 * Y2 en teken ook deze grafiek.
   Waar snijdt deze grafiek de x-as?
2. Verander zo nodig Y1 en/of Y2 zodat:
a. De grafiek van Y3 een dalparabool is. Welke vergelijking heeft Y3?
b. De grafiek van Y3 een bergparabool is. Welke vergelijking heeft Y3?
c. De grafiek van Y3 aan de x-as raakt. Welke vergelijking heeft Y3?
d. De top van Y3 precies boven het snijpunt van Y1 en Y2 ligt. Welke vergelijking heeft Y3?
e. De grafieken van Y1, Y2 en Y3 door één punt gaan. Welke vergelijking heeft Y3?
f. De grafiek van Y3 een rechte lijn is.

In het deel *Transformaties van grafieken* komen verschuivingen, spiegelingen en lijnvermenigvuldigingen van grafieken aan de orde. Een voorbeeld:

1. Zoek de formule bij elk van de volgende sinusoïden. (Tip: stel eerst de RANGE goed in.)

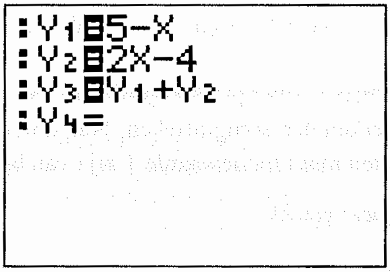


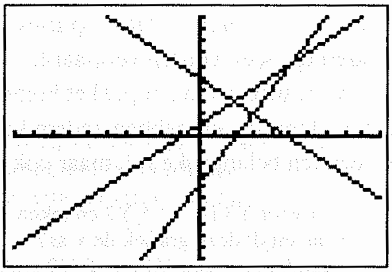
Het zijn vooral opgaven over de gevolgen van veranderingen in het functievoorschrift en vragen naar het bewerkstelligen van dergelijke veranderingen. De grafische rekenmachine is hierbij een experimenteeromgeving waarmee leerlingen zelf de rol van een parameter in een functievoorschrift kunnen onderzoeken. Dit wordt ook uitgelokt door opgaven waarbij leerlingen bepaalde grafische effecten moeten verkrijgen, bijvoorbeeld het spiegelen van een grafiek in de x-as, de y-as of in de lijn waar $y = x$.

observaties

Eén van de experimenten met de eerste versie van het pakket vond plaats op het Cals College te Nieuwegein in een 4 havo wiskunde B klas. De opgaven over somgrafieken en produktgrafieken uit de vorige paragraaf zijn aan de orde.

De docent bespreekt de opgaven over de somgrafieken met de klas. De grafieken van Y1, Y2 en Y3 zijn met de overheadprojector geprojecteerd. Ze zijn bij opgave 1 b): de grafiek van Y3 snijdt de x-as.





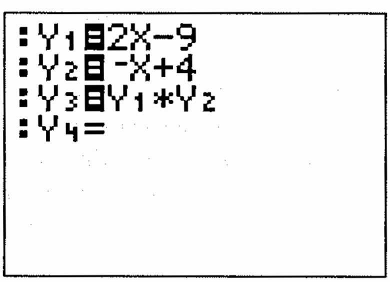
Judith: 'Als Y3 nul is, dan is Y1 + Y2 ook nul, ze zijn dus allebei nul of elkaars tegengestelde.'
Vervolgens komt de opgave 2b om Y1 en Y2 te veranderen zodat Y3 (= Y1 + Y2) horizontaal loopt.
Van een horizontale grafiek weet Sunny: 'Er moet gewoon geen x in zitten.'
Sebastiaan heeft een oplossing: Y1 = 5 en Y2 = 2. De docent laat zien dat dat klopt door de functies te veranderen en de grafieken te bekijken. Hij vraagt of het ook met een x in Y1 en Y2 kan.
Sunny: 'Y1 = 5 – 2X en Y2 = 2X + 4, als je ze optelt dan vallen de x-en weg.'
Nu een dalende Y3.
Sunny: 'De richting van Y3 moet anders, die moet negatief worden, dus de richting van Y2 moet negatief: Y1 = 5 – 2X en Y2 = -2X + 4.'
De docent vraagt nog of Sunny ook Y1 kan veranderen terwijl Y2 = 2X + 4 blijft.
Sunny: 'Ja, dan moet je het getal voor die X groter maken, in ieder geval moet er een 3 staan.'
De docent laat ze nu nog even puzzelen op de opgave 4a waarbij de drie lijnen door één punt gaan. Sebastiaan vindt: Y1 = 5 – X en Y2 = X – 5. De docent vraagt of iemand nog een andere oplossing heeft. Sunny komt na een tijdje met Y1 = 5 – X en Y2 = 2X – 10. Een andere leerling zegt dan: 'Oh, dus het kan ook 3X – 15 zijn.
De docent vraagt of ze nu ook alle drie door (-2,0) kunnen gaan? Even puzzelen en dan heeft Sebastiaan: Y1 = -2 – X en Y2 = 2X + 4.

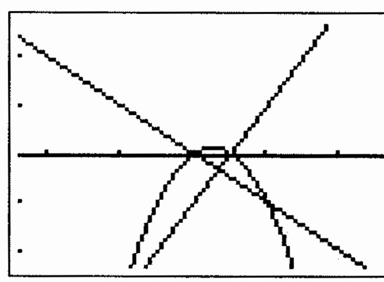
Na de somgrafiek en verschilgrafiek komt de produktgrafiek aan bod. De volgende les bespreekt de docent onder andere de opgaven over produktgrafieken uit de vorige paragraaf. Judith raakt actief bij de bespreking betrokken.

Bij opgave 5 heeft Judith Y1 = 2X + 4 en Y2 = X + 5.
De docent voert in Y3 = Y1 ∗ Y2 en laat de grafieken voor de klas tekenen. Hij vraagt naar de snijpunten van Y3 met de x-as.
Judith benadert ze met de grafische rekenmachine: 'Bij x = -2 en x = -5.'
'Kon je dat ook van tevoren weten?'
Judith: 'Ja, dan moet je gewoon de vergelijkingen in elkaar doen en uitwerken.'

De docent laat Judith dicteren:
'Y3 = $(2X + 4) * (X + 5) = 2X^2 + 4X + 10X + 20 = 2X^2 + 14X + 20$
$2X^2 + 14X + 20 = 0$
$X^2 + 7X + 10 = 0$, en dan tussen haakjes
$(X + 5) * (X + 2) = 0$
X = -5 en X = -2.'

De docent vraagt nu of het ook sneller kan. Gelukkig zien een aantal leerlingen dat je het ook uit de eerste regel kunt aflezen.
Op opgave 6c heeft Sebastiaan als antwoord: Y1 = -X en Y2 = X. De docent laat zien dat het klopt en vraagt naar andere oplossingen. Erik Jan heeft Y1 = 2X – 9 en Y2 = -X + 4, maar is er niet zo zeker van.
De docent laat de drie grafieken tekenen en zoomt in, het blijkt net niet te kloppen.





Bij opgave 6d (de top van de parabool boven het snijpunt van de rechte lijnen) gaat iedereen zoeken naar een Y1 en een Y2.
Judith: 'de top ligt in het midden, op de symmetrie-as.'
Alex heeft een oplossing: Y1 = -X + 2 en Y2 = X + 2.
De docent vraagt wat er moet gelden voor de richtingen van de twee lijnen. Judith antwoordt dat ze elkaars tegengestelde moeten zijn.
Bij opgave 6e (Y1, Y2 en Y3 door een punt) komt Sebastiaan weer met Y1 = -X en Y2 = X. Hij is met die twee functies een eind opgeschoten in het onderzoek.
Tot slot vraagt de docent of het ene punt, waar de drie de functies door heen gaan, alleen op de x-as kan liggen. Helaas krijgt niemand de tijd om hier over na te denken. De bel gaat.

Tijdens een klassikale bespreking van een opgave uit het deel *Transformaties van grafieken* ontstaat een discussie over het verschuiven van grafieken. Na het verschuiven van lijnen komt het verschuiven van een parabool aan de orde.

De docent vraagt: 'hoe schuif je de grafiek van $y = x^2$ twee naar rechts?'
Johan:'$y = x^2 + 2$, en GRAPH ... oh nee!'
'$y = x^2 + 2x$, GRAPH ... ook niet goed.'
Alex:'$y = x^2 + 4x + 4$, ... klopt niet, de grafiek is twee naar links.'
'Dan is het $y = x^2 - 4x + 4$.' Klopt.
Vervolgens vraagt de docent: '... en drie naar rechts verschuiven?'
Na proberen met de grafische rekenmachine geeft Alex $y = x^2 - 6x + 9$.
Herschrijven van de formules geeft $y = (x - 2)^2$ en $y = (x - 3)^2$.
Erik Jan:'en als je $y = x^2 + 2x$ hebt en je schuift die drie naar rechts?
Docent:'wat denk je?'
Erik Jan:'eerst kwadraat afsplitsen, dat geeft $y = (x + 1)^2 - 1$, en dan drie naar rechts, dus -3 tussen haakjes, dat wordt: $y = (x - 2)^2 - 1$.'
Na intikken op de grafische rekenmachine blijkt het te kloppen. De docent merkt tot slot nog op dat het kwadraat afsplitsen niet echt nodig is.

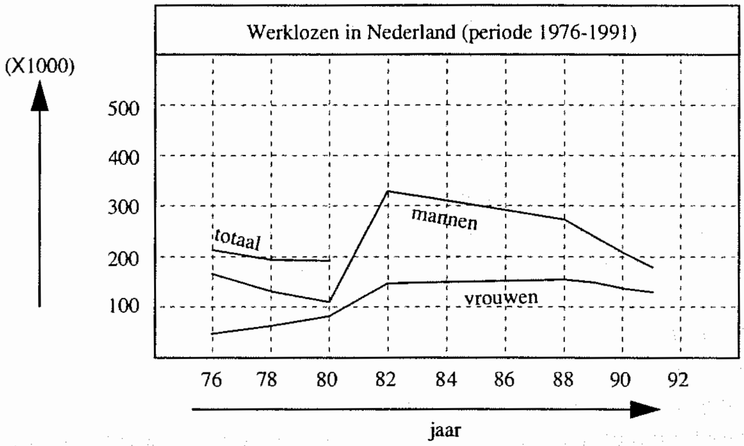
Dit is een aanleiding voor een algemene redenering. Stel g is de formule van de grafiek van de twee naar rechts verschoven grafiek van f. Dan geldt dat $g(x + 2) = f(x)$ en dus moet in de formule van f de x veranderd worden in $x - 2$ om de formule van g te krijgen. De aanleiding hebben de leerlingen nu zelf gevonden met behulp van de grafische rekenmachine. Ze zijn gemotiveerd voor het bewijs en kunnen de stelling controleren voor meer ingewikkelde formules.

conclusies

Op grond van de ervaringen blijkt dat het bij deze leerlingen aan de meetkundige interpretatie van het optellen van grafieken ontbrak. In een proefwerk kregen ze een opgave over een verschilgrafiek van een parabool en een rechte lijn. De verschilgrafiek moesten ze met de hand schetsen. Bij de uitwerkingen van de leerlingen valt op dat het veel leerlingen wel lukt om de twee nulpunten van de verschilgrafiek te vinden. De problemen ontstaan vooral bij het construeren van de top van de verschilgrafiek (meestal recht onder de top van de grafiek van f) en bij het 'kiezen' tussen een berg- en een dalparabool.

Daarom hebben we aan het lesmateriaal enkele opgaven toegevoegd waarbij de meetkundige kant van de operaties optellen, aftrekken en vermenigvuldigen bij grafieken duidelijker benadrukt worden. Onder andere een opgave uit het nieuwe onderbouw-curriculum. De context van deze opgaven verklaart direct wat met *somgrafiek* bedoeld wordt en hoe je die construeert:

Hieronder zie je drie grafieken over de jaren '76-'91: het aantal werkloze mannen, werkloze vrouwen en het totaal aantal werklozen. De grafiek van het totaal noemen we de *somgrafiek*. Van deze grafiek is alleen het begin getekend.
Teken het verdere verloop van het totaal.



Uit de experimenten blijkt dat de opgaven aanleiding geven tot twee benaderingen: de meetkundige (helling, symmetrie-as, en dergelijke) en de algebraïsche (de X-en vallen weg, nulpunten van de parabool vanuit de formule). Tussendoor spelen natuurlijk ook nog de numerieke afrondingen en beperkingen van het scherm van de grafische rekenmachine, maar vanwege de eenvoudige getallen is dat hier 'gelukkig' geen opvallend aspect.

Voorts komt uit de observaties het onderzoeksaspect naar voren waartoe de grafische rekenmachine aanleiding geeft. Leerlingen kunnen dankzij de 'directe feedback' hun hypothesen toetsen. Het gevaar hiervan is dat leerlingen direct grafieken laten tekenen en zo achterhalen wat de rol van de parameters in een formule is, zonder dat daar enig inzicht in de structuur van formules bij komt kijken.

5.5 bewegingen in het vlak

uitgangspunten

Bij het tekenen van krommen die gegeven zijn in parametervoorstelling kan de grafische rekenmachine buitengewoon waardevol zijn. Het tekenen van zulke krommen is in het algemeen namelijk nog bewerkelijker dan het tekenen van grafieken van 'gewone' functies van één variabele. De grafische rekenmachine neemt dat werk uit handen. Daarbij maakt de machine een dynamische invalshoek mogelijk. De kromme ontstaat op het beeldscherm als de baan van een bewegend punt. Deze beweging kan met TRACE nagelopen worden. Dit geeft tevens een indruk van de snelheid van de beweging. Verder is het natuurlijk mogelijk om parameters in de bewegingsvergelijkingen te variëren of om een hele familie van krommen te onderzoeken. Het tot leven brengen van deze dynamiek is één van de uitgangspunten bij het ontwerpen van dit pakket.

Een tweede uitgangspunt is weer het gebruik van contexten. Bewegingen zoals die van het ventiel van een fietswiel zijn voor leerlingen goed voorstelbaar en vormen een motiverende aanleiding tot nader onderzoek. Verder is er in het pakket, net als in 'Optimaliseren', veel aandacht voor integratie. De numeriek/grafische en de analytische methode spelen een rol, maar er zijn ook verbanden met mechanica en meetkunde. De goniometrie door de leerlingen vaak als een plaag ervaren, treedt hier uit zijn isolement en blijkt zeer functioneel te zijn.

Tenslotte is het de bedoeling dat leerlingen gestimuleerd worden om zelf krommen te exploreren om op die manier ontdekkingen te doen.

het materiaal

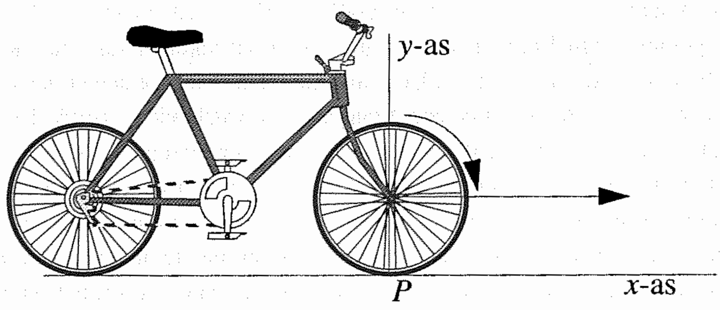
Het pakket 'Bewegingen in het vlak met een grafische rekenmachine' is geschreven voor leerlingen van vwo-5 of vwo-6 (wiskunde B). Omdat al wat voorkennis met betrekking tot krommen aanwezig verondersteld wordt, vervangt het niet het leerboek, maar vormt het daarop een aanvulling.

Het pakket bestaat uit de volgende hoofdstukken:

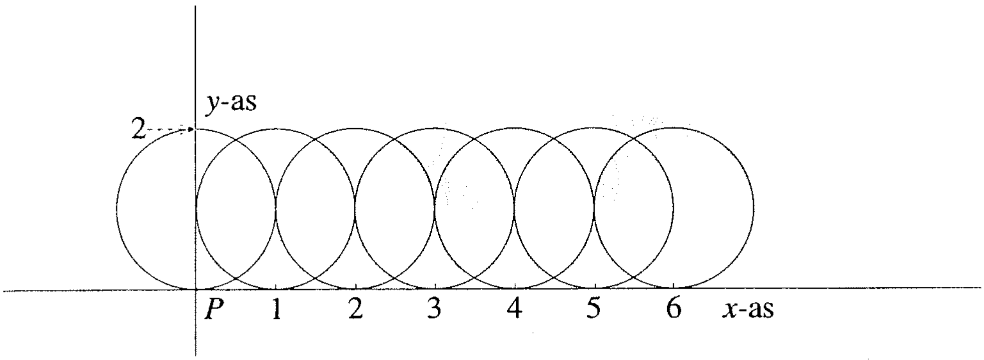
1 Bewegingen in het vlak
2 Cirkelbewegingen
3 Snelheid
4 De Archimedische spiraal
5 Cycloïde en trochoïde
6 Cardioïde en slaklijnen.

Hoofdstukken over 'spirograafkrommen' en figuren van 'Lissajous' zijn in ontwikkeling. Hieronder staan enkele fragmenten uit het lesmateriaal. Het hoofdstuk over de cycloïde begint met het probleem van de baan van het ventiel van een fietswiel. Eerst schetsen leerlingen de vermoedelijke vorm van de ventielkromme. Bij het vinden van de formule die aan de kromme ten grondslag ligt moeten ze de verschillende componenten van de beweging gebruiken: de beweging van de as en de beweging van het wiel rond de as.

Hieronder zie je een zijaanzicht van de situatie.



1a.Schets in onderstaande figuur met de hand de posities van P.



b. Hoe zal de baan van P er ongeveer uitzien?
c. Is het ventiel in de meest rechtse positie van het wiel weer terug op de grond?

In de volgende opgaven ga je de kromme die het ventiel beschrijft nader onderzoeken. Eerst maar eens op zoek naar de bijbehorende bewegingsvergelijkingen.

2. Bekijk eerst de baan van de as van het wiel.
a. Welke bewegingsvergelijkingen beschrijven de beweging van de as?
b. Voer de bewegingsvergelijkingen in op de grafische rekenmachine en laat de beweging tekenen.

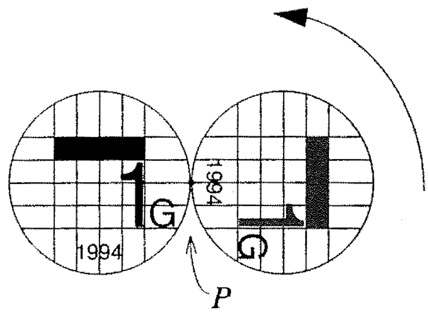
3. Ten opzichte van de as van het wiel beschrijft het punt P een cirkel.
a. Welke bewegingsvergelijkingen horen daarbij? Let op de beginstand en op de draairichting.
b. Voer deze bewegingsvergelijkingen als tweede in op de grafische rekenmachine en controleer of inderdaad de beoogde cirkel verschijnt.

4. De totale beweging van P is de som (of de *resultante*) van die van de as van het wiel en die van P ten opzichte van die as.
a. Welke bewegingsvergelijkingen heeft de totale beweging van P?
b. Definieer de derde kromme op de grafische rekenmachine als de som van de eerste en de tweede. Laat gelijktijdig de beweging van de as en die van P tekenen.
Lijkt de tekening op de schets van vraag 1c?
c. Klopt je antwoord van 1b met de tekening?

```
:X1T=T
:Y1T=1
:X2T=-sin T
:Y2T=-cos T
:X3T=
:Y3T=
```

Voor de cardioïde wordt een ander concreet model als uitgangspunt gekozen. Daarmee krijgt de kromme betekenis.

Twee guldens liggen tegen elkaar aan. De linker gulden ligt vast. P is het punt op de rand van de rechter gulden dat de linker raakt. De rechter gulden gaat nu om de linker rollen zonder te slippen. De vraag is nu welke baan P gaat beschrijven.

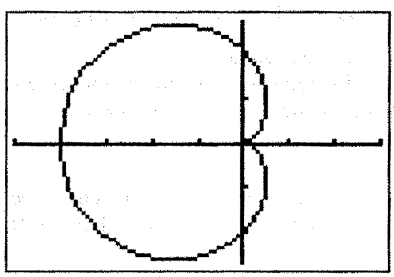


Experimenten met twee guldens en met de grafische rekenmachine leiden tot de bewegingsvergelijkingen.

$x(t) = 2\cos t - 1 + \cos(2t + \pi)$

$y(t) = 2\sin t + \sin(2t + \pi)$

Deze vergelijkingen geven de volgende grafiek:



Ook de snelheid waarmee het punt de cardioïde doorloopt, wordt onderzocht. Dan komt de variatie:

> Nu wordt het experiment nog lastiger om uit te voeren. We plakken namelijk op de draaiende gulden een rijksdaalder, die vanwege de grotere afmetingen ook boven een deel van de stilliggende gulden uitsteekt. Veronderstel dat de straal van de rijksdaalder anderhalf maal zo groot is als die van de gulden.
>
> 2. Het punt R bevindt zich $(-\frac{1}{2}, 0)$ op het moment dat het draaien begint.
> a. Hoe verander je de bewegingsvergelijkingen van de baan van P om de baan van R te krijgen?
> b. In welk opzicht ziet de baan van R er anders uit dan die van P?

In bovenstaande opgaven is de afstand van het draaiende punt tot het midden van de gulden gewijzigd. In de volgende opgave wordt dit gegeneraliseerd, en moeten leerlingen verschillende gevallen onderzoeken. Ze worden vrij gelaten in de classificatie van de grafieken die ze vinden. Het eigen onderzoek staat hier centraal.

> 3. Veronderstel dat een punt P zich op een afstand a van het middelpunt van de draaiende gulden bevindt. De straal van de gulden stellen we nog steeds op 1. Onderzoek hoe de vorm van de baan die het punt P beschrijft afhangt van de waarde van a. Let hierbij ook op extreme gevallen. Vat de resultaten kort samen.

observaties

Hieronder volgen twee observaties. De eerste komt uit hoofdstuk 1 en gaat over het modelleren van de beweging van een trein. In de tweede komt het classificeren van de slaklijnen aan bod. Dat speelt na de behandeling van de cardioïde in hoofdstuk 6. In de leerlingentekst wordt eerst de situatie gepresenteerd.

> Een goederentrein vertrekt op een gegeven moment vanuit Utrecht CS naar Arnhem. Op hetzelfde tijdstip rijdt er in Arnhem een dubbeldekstrein weg in de richting Utrecht. De vraag is waar en wanneer de treinen elkaar tegenkomen.
> Om hierop antwoord te kunnen geven zijn enkele gegevens nodig. De afstand Utrecht - Arnhem is ongeveer 80 km. Stel dat de goederentrein een constante snelheid heeft van 90 km/uur. De dubbeldekker rijdt 110 km/uur. Neem aan dat beide treinen niet stoppen op het traject Utrecht - Arnhem.
> In de volgende opgave ga je de bewegingen van de treinen namaken of *simuleren* op de grafische rekenmachine. Eerst die van de goederentrein.

Vervolgens worden de bewegingsvergelijkingen opgesteld. Aan het einde van het hoofdstuk wordt het realiteitsgehalte van het model gerelativeerd:

> 1a. Waarom vormen de bewegingsvergelijkingen
> $x_1(t) = 90 \cdot t$
> $y_1(t) = 1$
> geen realistische beschrijving van de situatie?
> b. Wat verandert er als je in de bewegingsvergelijking de t kwadrateert: $x_1(t) = 80 \cdot t^2$? Leidt dit tot een meer realistische voorstelling van de werkelijkheid? Aanwijzing: gebruik TRACE om het spoor te volgen en verklaar het waargenomen effect.
>
> 2. Uitgangspunt in het eerste model was de aanname dat de goederentrein een constante snelheid heeft. In werkelijkheid zal de trein echter eerst op gang moeten komen, en ruim voordat Arnhem bereikt wordt alweer moeten afremmen.
> Probeer de bewegingsvergelijkingen zo te wijzigen dat werkelijkheid beter benaderd wordt.

Observatie:

> Twee leerlingen hebben: $-80(T - 0.5)^2 + 20$. Wat nu verwarrend is, is dat je te maken hebt met bewegingsvergelijkingen, snelheidsgrafieken en plaatsgrafieken. De leerlingen proberen ook iets te maken dat lijkt op een bergparabool met nulpunten $T = 0$ en $T = 1$.
>
> Ze zitten dus wel op de goede weg. Alleen de stap van de snelheidsgrafiek naar plaatsgrafiek, waarbij je rekening moet houden met $X(0) = 0$ en $X(1) = 80$ lijkt voor de meeste leerlingen te hoog gegrepen.
>
> Twee andere leerlingen moeten nog gewezen worden op de mogelijkheid van het verdelen van het interval. Na lang ploeteren lukt het hen:
> $X(T) = 80T^2$ $(T < 0.5)$ + $(-240\,(T - 1)^2 + 80)$ $(T > 0.5)$
> Hoewel het schokje bij $T = 0.5$ laat zien dat ze hier wel een continue functie hebben maar niet één die overal differentieerbaar is.
> Wat zeker opviel bij deze opgave was hoe leerlingen door de vraagstelling gegrepen werden.

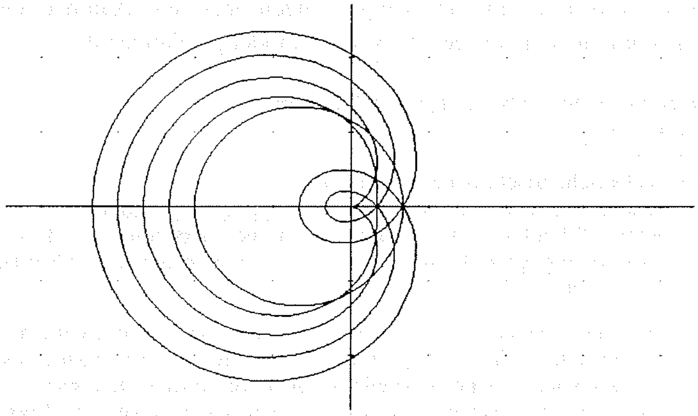
slaklijnen

Zie de opgaven 2 en 3 op de vorige pagina. De leerlingen variëren de waarde van de afstand a van P tot het midden van de gulden in de bewegingsvergelijkingen:

$x(t) = 2\cos t - 1 + a\cos(2t + \pi)$

$y(t = 2\sin t + a\sin(2t + \pi)$

Bij opgave 2 heeft Femke een probleem. Ze heeft ingevoerd:
$x(t) = 2\cos t - 1 + \frac{1}{2}\cos(4t + \pi)$
$y(t) = 2\sin t + \frac{1}{2}\sin(4t + \pi)$
'want hij draait twee keer zo hard als-ie twee keer zo klein is'. Er ontstaat een wolkje. Ze heeft gelijk, want ze stelt zich een kleinere munt voor, bijvoorbeeld een dubbeltje dat over een gulden rolt. Ze loopt vooruit op de spirograafkrommen.
Bij opgave 2 vraagt de observator: 'En als je die $1\frac{1}{2}$ nou nog groter maakt?' Femke antwoordt: 'Dan wordt het lusje groter, en de buitenkant ook.'
Opgave 3 is nu geen probleem meer. Sommige leerlingen voeren de parametervoorstelling ook echt met een variabele in.



De laatste vijf minuten van de les worden de resultaten van opgave 3 klassikaal op een rijtje gezet. Op het bord verschijnt een tabelletje.

a	vorm
0	cirkel
1	cardioïde
$0<a<1$	'deuk'
$a>1$	lus

Bij de 'deuk' zegt een leerling: 'Als a klein is, is het deukje ook klein, en als a groter wordt groeit het deukje ook.'
Bij de lus vraagt de docent: 'Maakt het uit hoeveel a groter is dan 1?'
Leerling: 'Als a dicht bij 1 ligt, dan is-ie klein, bij grote a groot.'
Docent: 'Haalt die kleine de grote dan nog in?'
Leerling: 'Nee, ze gaan overlappen, ze komen dichter bij elkaar.'

conclusies

De ervaringen met het pakket 'Bewegingen in het vlak' zijn in het algemeen positief. De belangrijkste conclusies zijn:

- De grafische rekenmachine maakt het onderwerp krommen in parametervoorstelling levendiger en dynamischer. De leerlingen reageren daar enthousiast op.
- De concrete bewegingen die als uitgangspunt genomen zijn, spreken tot de verbeelding.
- De dwarsverbanden komen redelijk uit de verf, zij het dat de meetkundige kijk op snelheid moeilijk gevonden wordt. Dit bevindt zich op het grensgebied van wiskunde en natuurkunde. Blijkbaar krijgt dit in het huidige onderwijs weinig aandacht.
- De wijze van behandelen en de aanwezigheid van de grafische rekenmachine leiden inderdaad af en toe tot eigen onderzoek van leerlingen. Het in kaart brengen van een familie van krommen is een onderzoekende activiteit die leerlingen zelfstandig kunnen uitvoeren.

5.6 de grafische rekenmachine naast het boek

De experimenten met de grafische rekenmachine zijn niet beperkt gebleven tot het doorwerken van speciaal hiervoor ontwikkelde lespakketten. Met name in de vwo-5 klassen wiskunde B, waar de leerlingen het gehele jaar over de machines de beschikking hadden, is de grafische rekenmachine ook veel gebruikt naast de gewone lesmethode. In incidentele gevallen zijn in aansluiting op het boek enkele werkbladen gemaakt.

In deze paragraaf worden de ervaringen met de grafische rekenmachine in de 'gewone' les besproken. Hoewel veel 'gewone' lessen geobserveerd zijn, is ervoor gekozen om deze paragraaf vrij beknopt te houden aangezien de nadruk in dit verslag ligt op de vernieuwende invloed van de grafische rekenmachine. Hieronder volgt een selectie uit de ervaringen, gerangschikt naar onderwerp.

limieten en asymptoten

Bij het onderwerp limieten en asymptoten ligt het gebruik van de grafische rekenmachine voor de hand. De visualisatie van de rekenmachine maakt het begrip limiet concreter. De observatie die in paragraaf 5.2 beschreven wordt maakt wel duidelijk dat leerlingen aan deze benadering moeten wennen. Het vermoeden bestaat dat die gewenning minder moeilijk zou zijn als de leerlingen vaker met een grafische introductie van begrippen geconfronteerd zouden worden.

matrices

Op het Over-Betuwe College in Bemmel is in havo-5 (wiskunde B) een kort experiment met de TI-82 gedaan. Bij het onderwerp matrices zijn enkele werkbladen gemaakt die de leerlingen bij wijze van herhaling doorwerken.

Eén van de probleemsituaties gaat over de ontwikkeling van een insectenpopulatie die uit vijf generaties bestaat. Bij deze context is A de populatiematrix.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Is er sprake van exponentiële groei? Zo ja, hoe groot is dan de groeifactor?
Hans: 'Je moet gewoon al die vier getallen met elkaar vermenigvuldigen en dan door vijf delen.'
Arjan: 'Niet waar, je moet eerst A^5 uitrekenen en daarna op die schuine rij kijken.'
Hans: 'Maar bij vraag 8 klopt het ook, eerst was het 1 en bij 8 komt er 1.2 uit.'
Arjan: 'Dat zal dan wel toeval zijn.'
Vijf minuten later ...
Arjan tegen de docent: 'Volgens ons is dat altijd zo, klopt dat?'

Aardig is het feit dat er verschillende oplossingsmethoden gevonden worden, en dat de vraag onderzocht wordt of beide altijd goed zijn. Nog een gesprekje met een leerling aan het einde van de les:

Leerling: 'Leuk, die rekenmachine. Voor het rekenwerk is-ie wel handig.'
Observator: 'Leer je er nou ook wat van?'
Leerling: 'Ja, want je moet wel weten wat je doet. De stappen moet je zelf kiezen.'

Dit geeft de rol van de grafische rekenmachine bij een onderwerp als matrices goed weer: de nadruk ligt niet langer op het rekenwerk, maar op probleemaanpak, op vertalen en interpreteren.

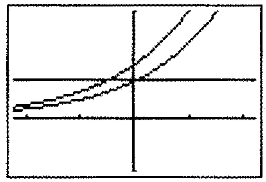
invoering van het getal e

Zoals eerder is opgemerkt kan de grafische rekenmachine ook een rol spelen als het gaat om het ontwikkelen van een begrip. Hieronder staat beschreven hoe tijdens een les in vwo-5 (wiskunde B) de docent naar de invoering van het irrationale getal e toewerkt. Aanleiding is de vraag hoe de afgeleide van de functie $x \to 2^x$ eruit ziet.

De docent tekent op de demonstratie-TI de grafiek van Y1 = 2^X. De leerlingen doen mee op hun eigen machine.
Dan volgt de numerieke afgeleide: Y2 = (2^(X + 0.01) − 2^X)/0.01.
Docent: 'De afgeleide lijkt wel op de functie zelf. Is het een verschuiving of een vermenigvuldiging?'
Leerling: 'Vermenigvuldiging.'
Docent: 'Met welke factor?'
Dat wordt onderzocht door in te zoomen op het snijpunt van de de afgeleide met de y-as. De factor blijkt ongeveer 0.6955 te zijn.
Docent: 'Wat stelt dit getal voor?'

Leerling: 'De output van Y2 als X = 0.'
Docent: 'Ja, de benadering van de helling bij X = 0. Welk verband geldt er tussen Y1 en Y2? Welke vermenigvuldiging hebben we uitgevoerd?'
De leerlingen weten het niet.
Docent: 'Waar het op lijkt is dat Y2 ongeveer gelijk is aan 0.6955 keer Y1. Als controle nemen we nu Y2/Y1.'
Hij voert dit in als Y3 en drukt op GRAPH.
Eén leerling voorspelt terecht: 'Die snijdt Y2 dus op de y-as.'
Docent gebruikt TRACE en concludeert:' Dus de verhouding is constant.'
Op het bord komt: $y = 2^x$ dan $y' \approx 0.70 \cdot 2^x$

```
:Y1=2^X
:Y2=(2^(X+0.01)-
2^X)/0.01
:Y3=Y2/Y1
:Y4=
```



Docent: 'En hoe zit het nu met 3^x? Probeer zelf maar eens.'
De leerlingen doen dat en komen tot een factor van 1.1. Bij 4^x is de factor ongeveer 1.4, wat overigens het dubbele is van 0.70, maar dat komt niet aan bod.
Docent: 'Als het grondtal groter wordt, wordt het getal ervoor dat ook. We gaan nu zoeken naar het grondtal waarvoor geldt dat de helling op de y-as gelijk aan 1 is. Het ligt tussen 2 en 3. Hoe groot is het ongeveer denk je?'
Na wat zoeken komen docent en leerlingen tot 2.71.
Een leerling die de knop gevonden heeft roept: '2.718281 ...'
Op het bord komt nu:
$y = a^x$ dan $y' = 1 \cdot a^x$

$$1 = \frac{a^{0+\Delta x} - a^0}{\Delta x} = \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \text{ dus}$$

$$a^{\Delta x} = 1 + \Delta x \text{ en } a = (1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Vervolgens berekent men $(1+0.01)^{100}$, en zo is een benadering van e gevonden.
Op het bord komt: $y = e^x$ dan $y' = e^x$ en $e \approx 2.7$.
Op de TI-81 wordt vervolgens e^1 berekend. Het antwoord leidt bij een leerling tot het vermoeden dat 8182... gaat repeteren. Hoe moet de docent duidelijk maken dat dat niet zo is? Bijvoorbeeld zo:

```
e^1
         2.718281828
Ans*100
         271.8281828
Ans-271
         .8281828459
```

Door het getal e via deze grafische invalshoek te introduceren, kunnen leerlingen zelf e benaderen. De grafische rekenmachine draagt hier zeker bij tot de begripsvorming.

poolcoördinaten

Het onderwerp poolcoördinaten maakt geen deel uit van het examenprogramma. Niettemin ligt het bij de behandeling van krommen voor de hand om de grafische rekenmachine te gebruiken voor een uitstapje in deze richting. Op beide proefscholen is dat gebeurd zonder dat de betrokken docenten dat van elkaar wisten. Een indruk van de ervaringen met dit onderwerp geeft de volgende aantekening uit het logboek van één van de docenten.

> Begin goniometrie. Poolcoördinaten geïntroduceerd.
> Met TI-81: X = cos T, Y = sin T laten tekenen. Machine op Polar.
> Met Trace loopt het spinnetje over de cirkel. Onderin het scherm zijn de waarden van t en φ van de positie van het spinnetje te zien.
> Opmerking David: $t = \varphi$?? ($0 < \varphi < \pi$)
> Hierop ben ik ingesprongen. Radialen nogmaals uitgelegd (tijd = hoek en R = 1) en $\cos^2 T + \sin^2 T = 1$. Hierna X = Tcos T en Y = Tsin T laten tekenen.
> Met Trace langs de grafiek.
> Wat valt op? R = T (afstand = tijd!)
> Uitleg? $d(O,P) = \sqrt{(T^2\cos^2 T + T^2\sin^2 T)} = \sqrt{(T^2(\cos^2 T + \sin^2 T))} = \sqrt{T^2} = T\ (T>0)$.

De voorlopige conclusie kan luiden dat de grafische rekenmachine de behandeling van poolcoördinaten kan bevorderen. Denk aan rozetten, spirograafkrommen en dergelijke. In het pakket 'Bewegingen in het vlak' is hiervan gebruik gemaakt.

nulpunten van veeltermfuncties

De zogenaamde 'factorstelling' betreffende de samenhang tussen de nulpunten van een veeltermfunctie en de ontbinding van die veelterm in lineaire factoren, is een enigszins perifeer onderwerp in het huidige wiskundeonderwijs. Het gebruik van een pakket als 'VU-grafiek' heeft (via de optie 'zoek het functievoorschrift') deze stelling als het ware nieuw leven ingeblazen en het lijkt aannemelijk dat ook de grafische rekenmachine er toe kan bijdragen dat de factorstelling een wat meer centrale plaats in het onderwijs zal heroveren. Hiervoor zijn enkele werkbladen ontwikkeld. Van het uitproberen in de klas geeft de observatie van paragraaf 6.4 over de 'spook'-grafiek een beeld.

De conclusie hiervan was dat de grafische rekenmachine een goed hulpmiddel kan zijn bij het onderzoeken van het verband tussen nulpunten van een veeltermfunctie en de formule. In het pakket 'Grafiekenalgebra' is deze optiek verder uitgewerkt.

het classificeren van derdegraads functies

Los van de ontwikkelde pakketten en ook van het boek stond een klein experiment rond het classificeren van derdegraads functies. Het doel van de opdracht is dat leerlingen zelf onderzoeken welke vormen de grafiek van een derdegraads functie kan hebben, en hoe deze vorm afhangt van de waarde van de parameters. In paragraaf 6.3 en in Drijvers (1993) staan de observaties van dit experiment beschreven. De conclusie hiervan is dat de grafische rekenmachine eigen exploratie van leerlingen mogelijk maakt. Wel is het zo dat het werken aan een open probleem vrij hoge eisen aan de leerlingen stelt.

In het algemeen kunnen we stellen dat de grafische rekenmachine ook bij het huidige examenprogramma en bij gebruik naast het gewone boek een zinvol en verrijkend hulpmiddel kan zijn. De visuele mogelijkheden kunnen verhelderend werken bij conceptvorming. Leerlingen moeten er wel aan wennen en leren om de toepassingen van de machine te zien. Verder is het zo dat de verleiding groot is om af en toe over de grenzen van de gangbare leerstof heen te gaan.

6 Reflectie

6.1 inleiding

In het vorige hoofdstuk is de ontwikkeling beschreven van het lesmateriaal en de invloed hierop van de observaties in de klas. Door middel van schoolexperimenten zijn veel observatiegegevens verzameld, die aanleiding waren tot het bijstellen van het lesmateriaal. Dit heeft geleid tot de cyclus van doordenken en beproeven, die in eerdere hoofdstukken beschreven is. Deze lesobservaties dienen natuurlijk ook als uitgangspunt voor de reflectie op de geformuleerde onderzoeksvragen. Deze reflectie vormt het onderwerp van dit hoofdstuk.

In hoofdstuk 3 is een vijftal hypothesen beschreven die betrekking hebben op de rol van de grafische rekenmachines in de wiskundeles. De volgende punten zijn daar genoemd:

- realistische contexten
- exploratie
- integratie
- dynamiek
- flexibiliteit.

In de volgende paragrafen wordt op elk van deze hypothesen gereflecteerd vanuit de ervaringen tijdens het experiment.

6.2 realistische contexten

Zoals eerder is beschreven, nemen contexten een belangrijke plaats in binnen de realistisch-wiskundeonderwijsvisie. Vaak leiden realistische contexten echter tot ingewikkelde functies of onaangename coëfficiënten, die de leerlingen bij voorbaat ontmoedigen. Het reken- en tekenwerk wordt lastig om met de hand uit te voeren. De grafische rekenmachine kan deze moeilijkheden ondervangen, waardoor meer toepassingen binnen het bereik van de leerling komen. Door de leerling vrij te maken van het tijdrovende technische gedeelte van de oplossingsmethode, kan alle aandacht worden gericht op de oplossingsstrategie en de modelvorming.
Hoe zijn de ervaringen op dit punt van het project? Allereerst twee kanttekeningen.

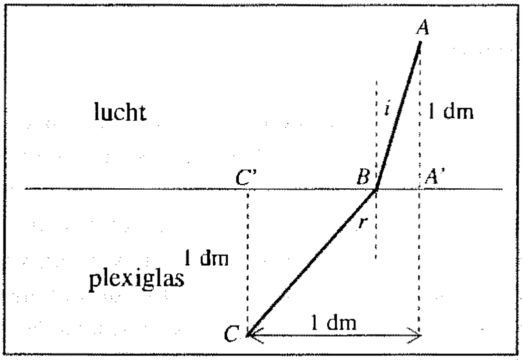
Ten eerste is het zo dat de grafische rekenmachine natuurlijk niet dwingt tot het gebruik van realistische contexten. De genoemde hypothese is eerder een wens vanuit het realistisch wiskundeonderwijs dan een feit dat onvermijdelijk is zodra de grafische rekenmachine zijn entree doet. Anderzijds kan men stellen dat hele categorieën 'kale' oefeningetjes hun zin verliezen bij gebruik van de grafische rekenmachine.

Als tweede kanttekening zij opgemerkt dat het gebruik van realistische contexten in het huidige onderwijs bij wiskunde A een doel is, en bij wiskunde B nauwelijks een rol speelt. Het project heeft zich echter om eerder genoemde redenen met name op wiskunde B gericht. De contexten die in het experimentele lesmateriaal bij wiskunde B gebruikt zijn, hebben in het algemeen een sterk bèta-karakter. Het vorige hoofdstuk bevat vele voorbeelden hiervan. De ervaringen voor wat betreft deze hypothese zijn dus enigszins beperkt.

Hieronder staat een tweetal voorbeelden van realistische contexten, één die bij wiskunde B gebruikt is, en één uit wiskunde A. Het eerste komt uit het pakket Optimaliseren, waarin de onderstaande opgave een vervolg vormt op de opgavencyclus over James Bond, die in paragraaf 5.3 beschreven is.

Opgave 6 *Breking van licht*

Een stok die je half in het water houdt, lijkt duidelijk geknakt. De conclusie hieruit is dat het licht bij de overgang van lucht naar water een plotselinge koersverandering ondergaat. Dit verschijnsel wordt de *breking* van licht genoemd. In de zeventiende eeuw onderzocht men hoe de grootte van de afwijking bepaald kon worden, afhankelijk van twee media (bijvoorbeeld lucht en water). Nadat Kepler er niet in slaagde een bevredigende wet te ontdekken, slaagde de Nederlandse natuurkundige Snellius (1591-1626) daar wel in. Hij ontdekte dat voor de route die het licht volgt, geldt dat de verhouding tussen de sinus van hoek van *inval* (i) en de sinus van de zogenaamde *brekingshoek* (r) constant is bij twee gegeven media. Deze constante, de zogenaamde *brekingsindex*, bleek juist gelijk te zijn aan de verhouding tussen de lichtsnelheden in die beide media.
In het geval dat het licht vanuit lucht in plexiglas valt zal nu in deze opgave worden aangetoond dat de weg volgens de wet van Snellius ook de *snelste* weg is om een bepaald punt te bereiken. Zie onderstaande figuur.



Geel licht valt vanuit een lamp A op een blok plexiglas in punt B, om vervolgens in het punt C in het blok aan te komen. Door de lucht plant het licht zich voort met een snelheid van (ongeveer) 3.10^8 meter per seconde. In plexiglas is deze snelheid wat minder: 2.10^8 meter per seconde. Voor de afstanden geldt: $AA' = CC' = A'C = 1$ dm.

a. Waar ligt het punt B als je weet dat het licht de snelste weg volgt?
   Deze snelste weg blijkt ook de route te zijn volgens de wet van Snellius.
b. Verklaar dat de verhouding tussen sin i en sin r gelijk is aan de verhouding tussen de snelheden van licht in lucht en in plexiglas.

Mirjam kan niet uit de voeten met onderdeel a. De observator springt bij door wat deelvragen te stellen. Dat leidt tot functievoorschriften voor de tijd die het licht nodig heeft om het traject AB af te leggen, de tijd om BC af te leggen, en tenslotte de totale tijd dat het licht onderweg is. Hierbij is het omrekenen van de verschillende eenheden (afstanden in dm, snelheden in m/s) een complicatie.
Vervolgens vraagt Mirjam zich af hoe ze de RANGE zal kiezen. Voor x het interval [0,1], dat ziet ze wel. Voor de y komt ze met enige hulp tot $[0,10^{-9}]$. Dan verschijnen de grafieken en kan ze verder.

Op de moeilijkheden met de instelling van RANGE wordt bij het onderwerp *Flexibiliteit* nader ingegaan.

Het tweede voorbeeld is beschreven door Idzerda (1994). Geobserveerd is hoe leerlingen bij wiskunde A met de grafische rekenmachine proberen een kromme te vinden die 'goed past bij' een verzameling waarnemingen.

Opgave 1 *Vosseneiland*
Biologen ontdekten in 1976 op een uitgestrekt onbewoond eiland een aantal vossen. Sinds dat jaar heeft men jaarlijks het eiland bezocht om de omvang van de vossenpopulatie te schatten. Dit zijn de meetresultaten (t in jaren; t = 0 in 1976):

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
aantal vossen	9	18	30	50	120	180	350	600	1200

Probeer nu een functie te vinden waarvan de grafiek zoveel mogelijk de punten benadert.
Oscar had als eerste een benaderende functie gevonden; $y = 15x^2$. Hij was er zelf erg tevreden over en vroeg: Moet het nog preciezer? Robert merkte later op dat het gat tussen de grafiek en de punten wel erg groot was. Jeroen maakte een opmerking: Je moet nog +9 doen, hij begint toch bij 9. Oscar pakte dit niet op. (...)
De docent stelt de functie $y = 2^x$ voor. Conclusie van de klas: het moet wat steiler. De docent wees eerst op het punt (0,9). Na vermenigvuldigen met 9 lijkt het er al meer op, maar nu moet de grafiek juist minder steil worden.
Even later bleek dat de leerlingen hierop door gingen. Jelle had $9 * (1{,}85)^x$ gevonden, wat al heel dicht kwam bij de 1,83 die gebruikt was bij het ontwerpen van de opgave. Gevraagd naar de betekenis van de 9 zei hij: dat moest van Joyce ...
Jeroen was bezig met $y = e^x$. De grafiek liep te steil en hij probeerde $2.35e^x$, maar dat hielp natuurlijk niet.

Het lijkt duidelijk dat een grafische rekenmachine zeer waardevol is als het gaat om het zoeken van een functie die een puntenwolk goed benadert, het zogenaamde curve-fitting.

vertaalproblemen

Een punt dat bij het gebruik van realistische contexten in combinatie met de grafische rekenmachine herhaaldelijk naar voren komt, is het verschil tussen de diverse talen die daarbij in het geding zijn. Allereerst is er de natuurlijke taal van de probleemstelling, die vertaald moet worden naar wiskundetaal. Deze vertaling vormt een belangrijk aspect van het mathematiseren, dat met name binnen wiskunde A veel nadruk krijgt. Wil men vervolgens de grafische rekenmachine bij het oplossen van het probleem inschakelen, dan moet de wiskundetaal omgezet worden in machinetaal. Naderhand moet de uitvoer van de machine weer terugvertaald worden, eerst in wiskundetaal en tenslotte naar de oorspronkelijke context toe.

Op heel elementair niveau kunnen leerlingen al tegen de taalverschillen aanlopen. Een onafhankelijke variabele die in een context 'zijde' heet, wordt bij het mathematiseren afgekort tot z, en heet op de grafische rekenmachine dan weer noodgedwongen X of T, omdat de onafhankelijke variabele op de machine zo moet heten. Andere notaties spelen ook een rol. De absolute waarde wordt als ABS genoteerd en niet met de bekende verticale strepen. In plaats van $\binom{n}{r}$ schrijft de machine nCr.

In feite worden met het combineren van natuurlijke taal, wiskundetaal en machinetaal drie 'werelden' gecombineerd: de wereld van de context, die van de wiskunde, en die van de machine. Voor leerlingen lijkt deze laatste inderdaad een wereld, een 'context' op zichzelf voor te stellen. Het gevaar bestaat dat de leerling op bepaalde momenten het overzicht tussen de drie 'werelden' kwijtraakt. In het volgende citaat uit een lesverslag is het verband tussen de grafieken op de grafische rekenmachine en het oorspronkelijke probleem niet meer duidelijk. Misschien is dit op te lossen door leerlingen de grafieken met de hand te laten over nemen.

Boukje: 'Moet je nu van alle vier de grafieken het maximum zoeken?'
Docent: 'Waar zijn we eigenlijk mee bezig?'
Leerling: 'Optimaliseren (op zo'n toon van: stel niet van die stomme vragen).'
Docent: 'Wat stellen die grafieken voor?''
Leerling: 'Inhouden.'
Docent: 'Allemaal inhouden?'
Leerling: 'Y1 is a, Y3 is de hoogte ...'
Docent: 'Y4 is de capaciteit, daar moet je naar kijken. Je kunt ook alleen Y4 tekenen.'
Notitie van de observator: De terugkoppeling naar de oorspronkelijke context blijft moeilijk voor leerlingen (van het grafiekje op de TI-81 naar het verhaal). Dit probleem, dat natuurlijk altijd al bestaan heeft zodra er met contexten gewerkt wordt, is groter omdat de grafische rekenmachine een context, een wereld op zichzelf is, die de leerling in beslag neemt.

De conclusies op dit punt moeten gezien het voorafgaande voorzichtig zijn. Hoewel de ervaringen bij wiskunde A bescheiden zijn, lijken door de grafische rekenmachine realistische contexten in de wiskundeles inderdaad eenvoudiger hanteerbaar te worden. Een complicerende factor is het feit dat de leerling op drie fronten tegelijk moet opereren: de context, de wiskunde en de machine. Het omgaan hiermee zal verder ontwikkeld moeten worden.

6.3 exploratie

De tweede hypothese over het gebruik van de grafische rekenmachine betreft de mogelijkheden die de machine biedt tot exploratie. De grafische rekenmachine biedt dankzij de directe feedback mogelijkheden tot explorerende activiteiten. Een probleem kan in een eerste, verkennende fase vaak al eenvoudig grafisch worden onderzocht. Het gebruik van de grafische rekenmachine roept op dat de leerling zichzelf nieuwe problemen gaat stellen en problemen gaat generaliseren.

In tegenstelling tot de situatie in de vorige paragraaf gaat het hier om een aspect dat inherent is aan het gebruik van de grafische rekenmachine. Veel leerlingen ervaren de grafische rekenmachine als boeiend gereedschap dat hen uitdaagt om op onderzoek uit te gaan. De exploratie kan min of meer lukraak zijn, maar ook zijn er voorbeelden van gericht onderzoek op initiatief van leerlingen zelf. Dit laatste leidt soms tot interessante wiskundige activiteiten.

In de theorie van het realistisch reken- en wiskundeonderwijs nemen open problmen en onderzoeksgerichte activiteiten een belangrijke plaats in. Het mag dan ook niet verbazen dat in het kader van dit project juist deze sterke punten van de grafische rekenmachine nader onderzocht zijn.

De ervaringen op dit vlak zijn bemoedigend. Leerlingen blijken in het algemeen door de mogelijkheden van de grafische rekenmachine gestimuleerd te worden tot leerzame explorerende activiteiten. Het wiskundige niveau van de resultaten is echter nogal wisselend. Soms leidt de exploratie tot mooie ontdekkingen en inzichten, maar af en toe is de opbrengst teleurstellend. Dat heeft enerzijds te maken met het feit dat het trekken van conclusies naar aanleiding van verkennende activiteiten hoge eisen stelt aan leerlingen. Anderzijds is het ook zo dat leerlingen bij wiskunde B nog niet vaak met open probleemstellingen zijn geconfronteerd, en dat een onderzoekende houding ook verworven moet worden.

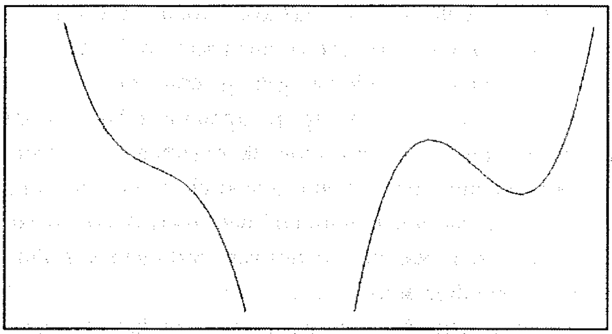
In deze paragraaf wordt nader ingegaan op de volgende punten:
- onderzoeksgerichte opdrachten
- uitdaging door de machine
- spel en spelen.

onderzoeksgerichte opdrachten

De grafische rekenmachine kan het doen van eigen onderzoek ondersteunen doordat de leerling veel werk uit handen genomen wordt. Uit de observatie over het onderzoek van slaklijnen, die in paragraaf 5.5 staat, blijkt bijvoorbeeld dat het snel tekenen van veel verschillende krommen bij de leerlingen leidt tot inzicht in de invloed van de parameter op de vorm van slaklijnen.

Een tweede voorbeeld is het experiment rond het classificeren van derdegraads functies. Hieronder staat een deel van het werkblad.

1. Derdegraads functies zijn functies van de vorm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ waarbij a, b, c en d reële constanten zijn met $a \neq 0$. Hieronder staan de grafieken van twee derdegraadsfuncties. Zoals je ziet kunnen dergelijke grafieken nogal verschillende vormen hebben.



De vraag is nu: Hoeveel echt verschillende soorten grafieken van deze functies zou je kunnen onderscheiden? Beslis zelf wat 'echt verschillend' inhoudt.
Maak dus een indeling van alle grafieken van derdegraads functies. Lever een beschrijving in met voor elke klasse:

a de kenmerken die bij die klasse horen
b een tekening van de grafiek van een voorbeeldfunctie uit deze klasse. Welke waarden heb je voor a, b, c en d gekozen?

Opgave 2
De waarden van de constanten a, b, c en d bepalen de vorm van de grafiek van de functie $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a Is de waarde van d van invloed op de klasse waarin een derdegraads functie valt?
b Ga voor elk van de klassen na welke voorwaarden er gelden voor a, b, c en d om $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ lid van die klasse te laten zijn.

Onderstaande observatie (zie ook Drijvers, 1993) geeft een indruk van de wijze waarop leerlingen in groepsverband aan een open probleem kunnen werken.

Het groepje van Mirjam, Femke, Marieke en Sevanne moet even wennen aan het werken in groepjes en aan de open vraagstelling. Na enig experimenteren denken ze een regel te hebben: als alle parameters positief zijn krijg je een grafiek zoals de linker afbeelding, en als één van de parameters negatief is, de andere. Ze proberen dat te verifiëren, maar ze ontdekken daarbij niet dat het niet klopt.
Bij opgave 2 gebeurt er iets interessants: ze begrijpen dat de waarde van d voor de vorm niet uitmaakt. Dan zegt Femke terecht: 'Maar dan klopt onze regel dat de vorm verandert als er één van de getallen negatief wordt dus niet meer!' 'Dus we hebben alles verkeerd gedaan!' 'Dat zei ik al de hele tijd ...' 'En je zegt net dat d alleen maar bepaalt waar de top ligt.' Uiteindelijk zijn ze het erover eens dat het niet klopt. Ze proberen het lek te dichten. Vele hypothesen over de rol van de parameters passeren nog de revue: 'Misschien heeft b invloed op de breedte'.
Tegen de tijd dat ze gaan nadenken over 'de formule van een parabool' gaat de bel.

Hoewel de indeling die ze ingeleverd hebben nogal mager is, is er hier wel sprake van een eigen produkt op eigen niveau. Voorbeelden zijn bekeken, theorieën zijn gemaakt en ontkracht, er is geprobeerd structuur aan te brengen en er is geredeneerd. Veel wiskundige activiteiten dus! De grafische rekenmachine speelde daarbij inderdaad een nuttige rol: de voorbeeldgrafieken zijn uitgangspunt geweest bij hun redeneringen.

Onderzoeksgerichte opdrachten zoals bovenstaande, vragen vrij veel van leerlingen. Toch vormen ze een waardevol element in het wiskundeonderwijs. Zonder grafische rekenmachine zou een dergelijke opdracht moeilijk uitvoerbaar zijn.

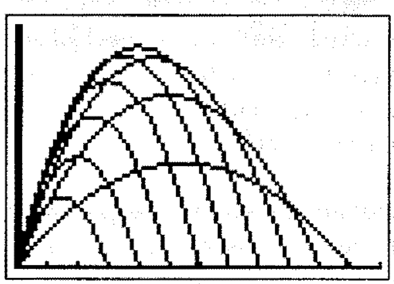
uitdaging door de machine

Nieuwe mogelijkheden van de machine kunnen voor leerlingen enorm aantrekkelijk zijn. In het volgende geval hadden we dat in het geheel niet verwacht.

Een bundel grafieken is aan de orde. Omdat de TI-81 niet handig is als meer dan vier grafieken gelijktijdig in beeld moeten komen, is het idee om deze bundel te demonstreren met behulp van een programmaatje op de TI-81.

Op de grafische manier worden maximale waarden gezocht van functies $f_u(x) = x \cdot u \cdot (12 - u - x)$. Op de demoset worden voor $u = 1, 2, 3$ en 4 de grafieken getekend. Voor meer grafieken wordt het programma gebruikt dat hieronder staat.

```
Prgm1:OPGAVE6
:1→U
:Lbl 1
:DrawF XU(12-U-X
)
:U+1→U
:If U<10
:Goto 1
```



Dan loopt het heel anders dan we verwachtten. Omdat de leerlingen de machines al bij de hand hebben, beginnen ze allemaal fanatiek het programma over te nemen, met de nodige problemen: Hoe kom je in de programma editor? Hoe krijgt het programma een titel? Hoe krijg je Label, If, Goto, <? En intussen roepen ze door elkaar: 'Is dit belangrijk? Moeten we dit allemaal onthouden?' Hoewel de leraar zegt dat ze het helemaal niet hoeven te kunnen, gaan ze allemaal ijverig door tot het bij iedereen werkt, maar dan is het wel 10 minuten later en hebben we plaatselijk de nodige problemen op moeten lossen. De leraar probeert het terug te pakken: 'Nu weer verder met de wiskunde'. Leerling op de achterste rij: 'Dit is juist wiskunde!'

De programmeermogelijkheden van de TI-81 blijken veel leerlingen aan te spreken. Het is geen uitzondering dat in een wiskunde-B-klas programma's circuleren die bijvoorbeeld na de invoering van de coëfficiënten van een kwadratische functie de abc-formule toepassen. Kennelijk is programmeren aantrekkelijker voor leerlingen dan wij hadden voorzien.

De mogelijkheden van de grafische rekenmachine stimuleren een onderzoekende houding van de leerlingen. Veel vermoedens kunnen snel worden gecontroleerd met betrekkelijk weinig moeite. Het blijkt dat leerlingen soms uitgedaagd worden om zichzelf problemen te stellen en verbanden te onderzoeken. Hieronder volgt een voorbeeld uit een les met het pakket 'Differentiëren' (zie paragraaf 5.2). Het is de bedoeling dat de leerlingen met behulp van grafisch differentiëren onderzoeken wat de exacte afgeleide van een aantal functies is.

Een leerling is al verder en wil met sin(x) beginnen.
'De afgeleide is toch cos(x)', zegt hij.
Hij voert in:
Y1 = sin(X + 0.1) – sin(X)
Y2 = Y1 / 0.1
En laat de grafieken van Y1 en Y2 tekenen door op GRAPH te drukken. Inderdaad, die van Y2 lijkt wel heel veel op de cosinusgrafiek. Van Y1 is weinig te zien. Af en toe is slechts een streepje onder de x-as zichtbaar. Hij is toch wel verrast door het resultaat. En gaat verder:
Y3 = cos(X), en GRAPH. Ja, ze lopen bijna overal over elkaar. Zonder dat ik iets hoef te zeggen probeert hij nu:
Y4 = cos(X) – Y2.
Van Y4 verschijnt weinig. Het lijkt een beetje op Y1, af en toe een streepje onder de x-as. Zou het kunnen dat die twee op elkaar lijken? Hij laat alleen Y1 en Y4 tekenen. In ieder geval blijkt hierdoor dat ze niet precies hetzelfde zijn. Maar omdat ze af en toe over elkaar getekend worden is niet goed te zien hoeveel ze verschillen. Hij verandert Y4: Y4 = cos(X) – Y2 + 1, en laat weer alleen Y1 en Y4 tekenen.

Uit dit voorbeeld, en uit vergelijkbare voorvallen, blijkt dat leerlingen zich laten uitdagen door de grafische rekenmachine. De mogelijkheden van de machine oefenen aantrekkingskracht uit op veel leerlingen, ook als ze de machine al langere tijd in hun bezit hebben.

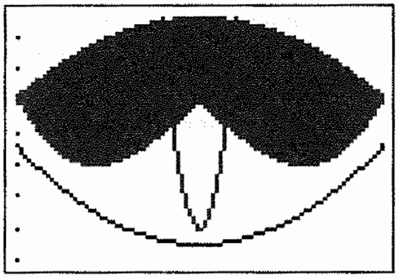
spel en spelen met de grafische rekenmachine

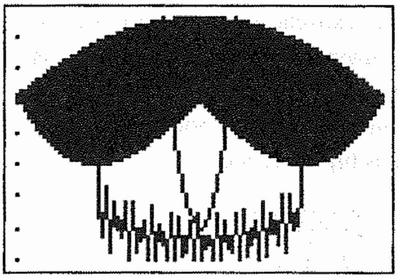
De leerlingen spelen vaak met de grafische rekenmachine. Soms ter oefening van een vaardigheid, of ter controle. Maar soms ook zomaar, voor de lol. Uit de volgende observatie blijkt dat niet iedereen hetzelfde leuk vindt. De leerlingen werken aan de opdracht 'Het classificeren van derdegraads functies' die in het voorafgaande beschreven is. Ze onderzoeken grafieken van functies van de vorm
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

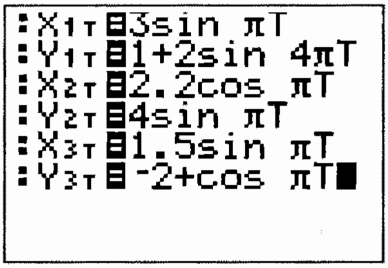
Het 'speeleffect' van de grafische rekenmachine blijkt hier en daar nog niet uitgewoed te zijn. Sommige leerlingen vullen bijvoorbeeld voor de parameters hele grote getallen in, zonder dat dit veel oplevert. Een enkeling vult voor de parameters functies in als $\cos x$ of $\sqrt{x}$. Het geeft soms mooie plaatjes, maar de rest van de groep heeft er niet veel belangstelling voor.

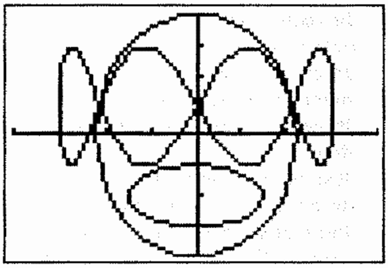
Vaak dient het speelgedrag van leerlingen echter een bepaald doel. Het is niet vrijblijvend maar gericht en onderzoekend. Het spelen kan op verschillende niveaus plaatsvinden. Vergaande kennis is nodig van de grafische rekenmachine en van functies om bijvoorbeeld een plaatje te maken op het scherm naar eigen wens. Allerlei gebruiksregels komen daarbij aan de orde. De wiskundige kennis (bijvoorbeeld over transformaties van standaardgrafieken) wordt danig uitgebreid en toegepast.
Op beide experimenteerscholen hebben leerlingen geprobeerd om met grafieken een gezicht te tekenen. Hieronder volgt een observatie van het construeren van een gezichtje door leerlingen van het Cals College (zie ook Doorman, 1993) en het uiteindelijke resultaat van een gezichtje van parameterkrommen van een leerling van het Liemers College.

Nadat één van de twee leerlingen op GRAPH gedrukt heeft, geeft hij nog de opdracht Shade (Y2, Y3) waardoor het gezicht een zonnebril krijgt, en de x-as niet meer te zien is. Hij is echter nog niet tevreden: 'Die y-as staat in de weg. Kan je de grafieken laten tekenen zonder de assen?', vraagt hij.
De observator zegt dat dat niet kan, maar dat hij wel het hele plaatje kan verschuiven zodat de y-as niet meer in beeld is. 'O ja, ... , dan moet ik x in $x-5$ veranderen.' (...)
Hij past deze transformatie bij de vier voorschriften toe en drukt op GRAPH. Het hele scherm blijft leeg. Hij kijkt hier even naar en beseft dan dat hij ook het zichtbare deel van het assenstelsel, de range, moet aanpassen. Op dit moment is xmin = -1.75, xmax = 1.75, ymin = -5 en ymax = 2.6.
De mond $((x-5)^2 - 4.5)$ is nog wat magertjes. Hij past Y4 aan:
Y4 = $((x-5)^2 + \sin 100x) - 4.5$. Dit lijkt naar wens.









6.4 integratie

Met integratie doelen we op de verstrengeling van verschillende wiskundegebieden. Vanuit wiskundig-didactisch standpunt bezien is het waardevol om op verschillende manieren tegen een probleem aan te kunnen kijken en om diverse technieken uit verschillende onderdelen van de wiskunde met elkaar in verband te kunnen brengen.

De hypothese waarover deze paragraaf gaat, komt er op neer dat de grafische rekenmachine een bijdrage kan leveren aan de totstandkoming van dwarsverbanden tussen diverse onderdelen van de wiskunde. In de klas komt deze integratie niet zonder slag of stoot tot stand. Het werken in verschillende gebieden en met verschillende blikken kan moeilijkheden opleveren, maar ook nieuwe inzichten en uitbreiding van begrippen. Leerlingen zijn aanvankelijk geneigd om de diverse gebieden als gescheiden te beschouwen. Ze kiezen voor één benadering. De grafische rekenmachine geeft daarentegen de gelegenheid meer op de verstrengeling gericht te worden en leerlingen blijken dat in het algemeen uiteindelijk goed op te nemen en te waarderen.

In deze paragraaf komen de volgende punten aan de orde:

- het grafisch ontdekken van algebra-regels
- het vinden van een formule bij een grafiek
- grafische, algebraïsche en meetkundige methoden verstrengeld.

het grafisch ontdekken van algebra-regels

De grafische rekenmachine kan het ontdekken van algebra-regels grafisch ondersteunen. In het pakket Grafiekenalgebra wordt hiervan veelvuldig gebruik gemaakt. In paragraaf 5.4 staan enkele observaties die betrekking hebben op het ontdekken van regels voor exponenten. Een vergelijkbare observatie vond plaats in een vwo-5 klas bij wiskunde A.

In de opgave moeten twee exponentiële functies worden ingevoerd:
Y1 = 2^X
Y2 = 3^X
De derde functie is het produkt van de eerste twee:
Y3 = Y1*Y2
De vraag is nu welke formule bij Y3 hoort. Ik zit naast Merel, die eerst maar eens de grafieken heeft laten tekenen. Veel verder komt ze niet.
Observator: 'Wat voor soort functie is het?'
Merel: 'Een exponentiële '
Observator: 'Hoe zien die eruit?'
Merel: ????
Observator: 'Die formule is zoiets als *a*^X, en de vraag is nu welk getal *a* is. '
Merel: 'En niet welk getal X is?'
Observator: 'Nee, want die X loopt het hele domein door.'
Merel: 'Misschien iets met een tabel ...' . Ze roept een tabel op.

X	Y2	Y3
-1	.33333	.16667
0	1	1
1	3	6
2	9	36
3	27	216
4	81	1297
5	243	776

Observator: 'Wat komt eruit als X = 1?'
Merel: '*a*^1 = *a*.'
Observator: 'En wat komt daar uit?'
Merel: 'Oh, het is nog wel vroeg hoor! *a* = 6?'
Observator: 'Controleer maar.'
Merel typt nu in: Y4 = X^6, en drukt op GRAPH. Terwijl de grafieken verschijnen, vraagt de observator: 'Hoeveel grafieken moet je nu krijgen als het goed is?' De buurvrouw, Lea, zegt terecht: 'Drie.' Het blijken er helaas vier te worden ...

Maar dan valt het kwartje.
Merel: 'Het moet andersom, natuurlijk want 2 keer 3 is 6!'
Lea zegt: '$2^x \cdot 3^x = 6^x$.' Dat blijkt in de grafiek wel te kloppen.
Lea schrijft als regel op: $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

Hoewel het tempo waarin de ontdekking gedaan wordt te wensen overlaat, ondersteunt de grafische benadering de regel.

In vwo-5 (wiskunde A) is tijdens een klassegesprek rond de demonstratiemachine de onderstaande dialoog geregistreerd. Op het scherm is de grafiek van $x \rightarrow 2^x$ getekend.

De docent: 'Ziet een exponentiële functie er altijd zo uit, van linksonder naar rechtsboven?'
Robert: 'Het kan toch ook een negatieve x zijn?'
De docent: 'Ja precies! '
De docent: 'Kun je 2^x spiegelen in de y-as?'
Iedereen ging ijverig aan de slag. Er kwamen verschillende uitkomsten: $1/2^x$, $(1/2)^x$, of $1^x/2^x$, $1/2^x$, en 2^{-x}

Aangezien het gewenste grafische effect (spiegeling in de y-as) via verschillende formules verkregen kan worden, stellen die formules dus kennelijk allemaal hetzelfde voor!
In het laatste voorbeeld vormt de verschilfunctie aanleiding tot algebra.

Op het scherm staat de standaardparabool en het resultaat van een verschuiving naar links:
Y1 = X^2
Y2 = (X+1)^2
Als derde wordt nu ingevoerd:
Y3 = Y2 - Y1.
De grafiek daarvan blijkt een rechte lijn te zijn.
Docent: 'Kun je dat ook snappen? Welke vergelijking heeft die lijn?'
Leerling: 'Je moet (X + 1)^2 uitwerken .... en dan X^2 eraf....... 2X + 1 dus.'

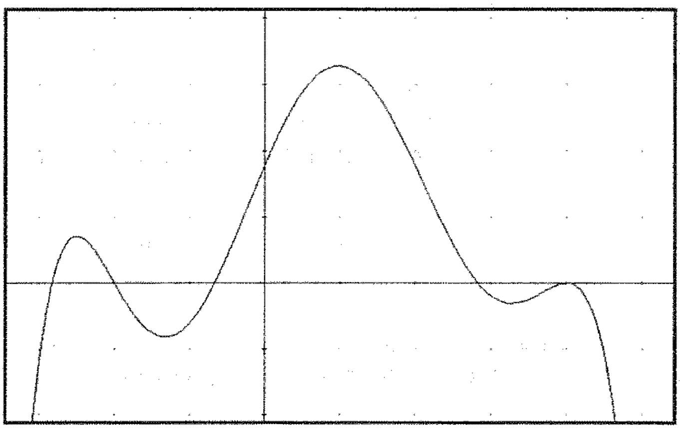
Dergelijke voorbeelden maken het nut van de grafische rekenmachine voor algebra duidelijk.

het vinden van een formule bij een grafiek

Het vinden van een formule bij een gegeven grafiek is een activiteit, die leerlingen dwingt om verbanden te leggen tussen kenmerken van grafieken en die van formules. Algebraïsche eigenschappen worden vertaald in grafische en vice versa. De volgende voorbeelden illustreren deze koppeling en de moeilijkheden die leerlingen daarbij kunnen ervaren.

De eerste observatie vond plaats op scholengemeenschap Oost-Betuwe in Bemmel. Op de school heeft een klein groepje leerlingen van havo 4 (wiskunde B) op vrijwillige basis deelgenomen aan experimentele lessen over nulpunten van veeltermfuncties. De grafische rekenmachine werd hierbij gebruikt om te ontdekken dat, algemeen geformuleerd, de grafiek van een veeltermfunctie de x-as snijdt in $x = a$

precies dan wanneer het functievoorschrift een factor $(x-a)$ bevat. Dan wordt de vraag gesteld om het volgende plaatje op de grafische rekenmachine na te maken:



De nulpunten zijn gegeven: $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = \sqrt{2}$ en $x = 2$.
De leerlingen zien er een spook in en volgen dan het onderstaande traject.

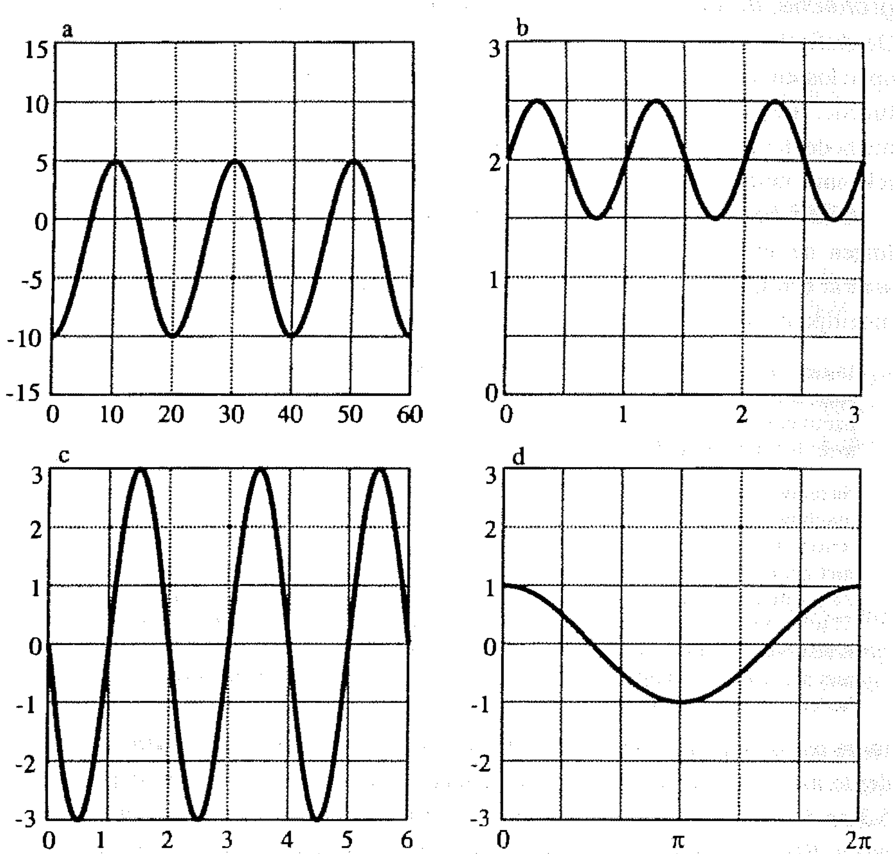
1 Vermenigvuldigen van de factoren van de vorm 'x - nulpunt'.
$$y = (x+\sqrt{2})\,(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-\sqrt{2})\,(x-2)$$
Commentaar: 'Hij heeft een arm omhoog.'

2 Verwerken van het dubbel nulpunt.
$$y = (x+\sqrt{2})\,(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-\sqrt{2})\,(x-2)^2$$
Commentaar: 'Hij staat op z'n kop.'

3 Spiegelen door een minteken voor de formule te zetten.
$$y = -(x+\sqrt{2})\,(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-\sqrt{2})\,(x-2)^2$$
Commentaar: 'Da's beter.'

4 Schaalverdeling aanpassen (alleen de betere leerlingen).
$$y = \frac{(x+\sqrt{2})\,(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-\sqrt{2})\,(x-2)^2}{3}$$
Commentaar: 'Nu snijdt de grafiek de y-as op de goede plaats.'

Het tweede voorbeeld uit Idzerda (1994), betreft grafieken van goniometrische functies. De leerlingen van vwo-5 (wiskunde A) werd gevraagd om de volgende grafieken na te maken.



Deze opgave leverde in de klas meer problemen op dan de 'spook-grafiek', zoals blijkt uit het onderstaande commentaar.

> Robert heeft bij de eerste opgave problemen met de periode en daarna met de horizontale verschuiving. Jelle krijgt het advies om eerst een makkelijke opgave te nemen. Hij kiest voor (c) 'omdat die niet verticaal verschoven is'.
> Als Ingeborg gevraagd wordt om een sinusgrafiek met amplitude 2 te tekenen, toetst ze $\sin(2x)$ in. Laten we het meteen maar over de periode hebben!

Deze observaties maken duidelijk dat de grafische rekenmachine de relatie tussen formule en grafiek kan versterken. Het kost leerlingen wel enige moeite om dit verband goed onder de knie te krijgen, maar naar ons idee is het de moeite waard. Ondanks de fouten die gemaakt worden zijn de resultaten bemoedigend: leerlingen blijken gevoel te krijgen voor het verband tussen formules en grafieken. In dit verband zijn de observaties over het tekenen van gezichtjes in paragraaf 6.4 van dit hoofdstuk ook interessant.

grafische, algebraïsche en meetkundige methoden verstrengeld

De grafische rekenmachine biedt de mogelijkheid om bepaalde problemen grafisch op te lossen. Denk bijvoorbeeld aan het bepalen van extremen of nulpunten van een functie. Het grafisch benaderen van extremen en nulpunten staat naast de analytische methode die de leerlingen op het moment dat ze in contact kwamen met de grafische rekenmachine in het algemeen al geleerd hadden.

Grafische controle van analytisch rekenwerk is één van de manieren waarop leerlingen de grafische rekenmachine gebruiken. In een gecompliceerdere situatie, waarin een kromme en een functie van één variabele door elkaar lopen, blijkt dit moeilijk te zijn.

> In de eerste opgave uit het hoofdstuk over Krommen uit de Wageningse Methode staat dat de baan van een komeet ten opzichte van de zon beschreven wordt door de parametervoorstelling $(x, y) = (t^2 - 3, 2t)$. De laatste vraag luidt: Wanneer is de komeet het dichtst bij de zon?
>
> Suzanne heeft de parabolische baan van de komeet getekend met de grafische rekenmachine. Ze stelt de functie voor de afstand op: $f(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. Dan differentieert ze deze netjes, stelt de afgeleide op 0, maar de uitkomst verrast haar. Ze kan niet geloven dat de afstand niet minimaal is in het punt (-3,0), de top van de parabool. Ze twijfelt aan haar werk, maar komt niet op de gedachte om de grafiek van f met de TI te tekenen. Als de observator die suggestie doet, voert ze dat gewillig uit en daarna is ze ervan overtuigd dat ze het goed gedaan heeft. Waar zit het probleem in: ziet ze f niet als een zelfstandige functie van één variabele, of ziet ze de toepassingsmogelijkheden van de grafische rekenmachine niet?

In de pakketten Optimaliseren en Bewegingen in het vlak wordt nadrukkelijk een derde methode gehanteerd: de meetkundige. Zoals beschreven is in de paragrafen 5.3 en 5.5 worden in deze pakketten deze drie methoden systematisch naast elkaar gezet. Bij leerlingen slaat dat na een periode van gewenning goed aan, zoals blijkt uit onderstaande opmerkingen. Het eerste citaat is een opmerking van de observator in de conclusie van een lesverslag. Het tweede citaat is een stukje van de discussie tussen leerlingen tijdens een interview over het pakket Optimaliseren.

> Verrassend is hoeveel leerlingen zelf op zoek gaan naar een tweede of zelfs derde manier van oplossen. Deze gedachte van het pakketje wordt erg goed opgepikt. De analytisch/algebraïsche manier vinden leerlingen de gemakkelijkste: dat is een algoritme voor ze. De meetkundige manier wordt kennelijk door velen als een uitdaging beschouwd.
> Rob: 'Bij het vorige hoofdstuk uit het boek, kon je met de grafische rekenmachine handig checken of je het goed had.'
> Obs: 'Die behoefte had je bij Optimaliseren niet?'
> Rob: 'Nee, ik vond het hier onnodig dat je het telkens weer moest invoeren, je had het toch al exact uitgerekend met differentiëren ...'
> Geert: 'Heb jij het steeds exact uitgerekend?'
> Rob: 'Ja, het moest op drie manieren, meetkundig, met differentiëren en met het machientje.'
> Geert: 'Dat heb ik nooit gedaan, wij deden het steeds met het machientje, da's wel het gemakkelijkst.'

Rob: 'Jeee ...'
Obs: 'Die drie manieren vond jij niet grappig om naast elkaar te zien? Jij zegt: de 'echte' is toch met differentiëren?'
Rob: 'Jawel, maar meetkundig, dat moet je gewoon zien, daar heb je inzicht voor nodig.'

(...)

Obs: 'Maar David zei net dat de grafische rekenmachine toch wel handig is als controlemiddel.'

Rob: 'Ja, als controlemiddel, dat wel, maar meestal doe je het eerst meetkundig, da's het snelste, dan kun je nog eens differentiëren, en dan kun je het nog eens met de rekenmachine doen.'

Het naast elkaar zetten van de grafische, de algebraïsche en de meetkundige methode vormt een verrijking van de leerstof, die bijdraagt aan het verwerven van overzicht en aan het verkrijgen van een geïntegreerd beeld van de (school)wiskunde.

6.5 dynamiek

De grafische rekenmachine biedt veel mogelijkheden voor een meer dynamische benadering van diverse onderwerpen van de wiskunde. Dit is althans de strekking van één van de veronderstellingen die in hoofdstuk 3 gemaakt zijn. In hoeverre hebben de experimenten dit bevestigd?

De grafische rekenmachine geeft de leerling het voordeel van een globale grafische representatie, als het ware een eerste beeldvorming van het probleem. De machine neemt de rem bij leerlingen weg om 'eventjes snel' een schetsje te maken.

Een dynamisch aspect zit daarin dat de gebruiker ziet hoe een grafiek, een kromme of in één keer een bundel van grafieken ontstaat. Als het plaatje klaar is, biedt TRACE alsnog de mogelijkheid om de grafiek punt voor punt te volgen en de veranderende coördinaten op het scherm af te lezen. Bij het onderwerp 'Krommen in parametervoorstelling' komt de dynamiek extra duidelijk naar voren, omdat verschillen in snelheid optisch waarneembaar zijn. Zo komen parametervoorstellingen die bewegingen in het vlak beschrijven echt tot leven.

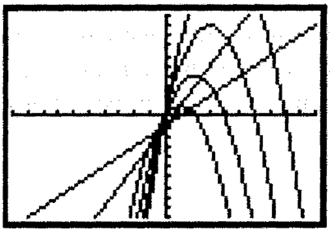
De directe feedback van de grafische rekenmachine bevordert reflectie door de leerlingen. De afwisseling van experiment en reflectie is belangrijk bij de begripsvorming volgens de realistische opvattingen. De observatie in de vorige paragraaf van leerlingen die een spook-vormige grafiek proberen na te maken, is hiervan een goed voorbeeld.

Aan de hand van observaties gaan we op de volgende punten nader in:
- bundels van grafieken
- variatie in de probleemsituatie.

bundels van grafieken

De grafische rekenmachine is uitermate geschikt om een 'familie' van functies te onderzoeken. In het pakket Optimaliseren wordt gevraagd welke kromme door de toppen gaat van grafieken van de functies $x \rightarrow x\ (a - x)$. Dit leidde tot de volgende observatie.

Een leerling heeft voor $a = 2$, 4, 6 en 8 de grafieken van $x\,(a - x)$ getekend. Ze zegt: Door de toppen gaat een lijn.
De observator vraagt welke lijn en ze antwoordt: $x - 1$. De observator wijst er op dat ze die met DrawF kan laten tekenen, wat ze direct doet.
Oh nee, hij moet steiler ... $2x - 1$ dan. Nee ook niet. Ze kijkt naar het scherm:



De observator vraagt naar de coördinaten van een top. Ze zoekt een top en vindt (4, 16). Ze zegt : 'Misschien is het wel een parabool, maar dan moet hij aan de negatieve kant weer omhoog gaan' (die is ook zichtbaar want ze heeft het scherm nog in zoom standard). Ze laat tekenen $x(-5 - x)$. En inderdaad, de top ligt weer hoog. Uiteindelijk probeert ze DrawF x^2, en inderdaad!

Bij het vinden van de grafiek door de toppen is de opgave niet afgerond. De volgende stap is om naar een verklaring van die x^2 te vragen. De te nemen stappen zijn x en y uitdrukken in a en vervolgens a te elimineren. Normaal nogal lastige materie, maar nu beter toegankelijk. De waarde van het trial-and-improve proces is dat leerlingen in ieder geval een hypothetisch verband *zelf* ontdekt hebben. Dat werkt motiverend. Het is ook denkbaar dat de leerling direct kiest voor een 'wiskundige' aanpak en vervolgens de grafische rekenmachine juist gebruikt als controlemiddel achteraf.

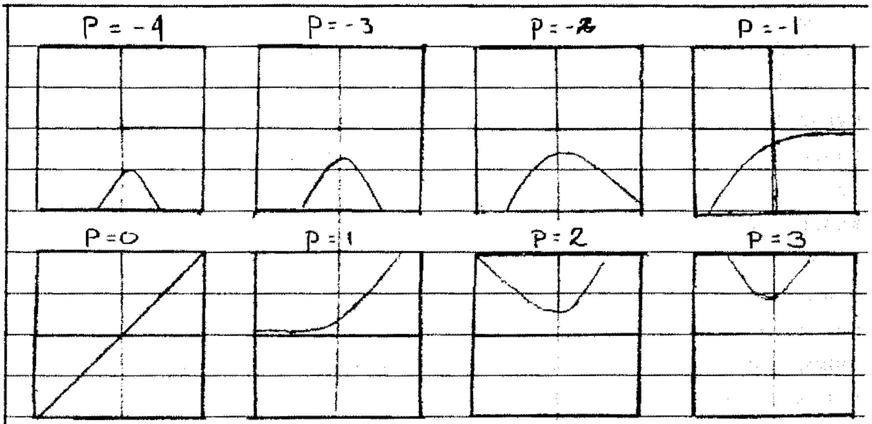
Een vergelijkbare opdracht vond plaats naar aanleiding van een opgave uit De Wageningse Methode. Hieronder staat een deel van de tekst van het werkblad. Gegeven is de familie van functies $f_p\,(x) = x + p\sqrt{x^2 + 3}$, waarbij p een reëel getal is.

Opgave 1
Maak een 'stripverhaal' van grafieken van f_p waaruit blijkt hoe deze veranderen als p toeneemt. Neem $p = -4$ als startwaarde.

Opgave 2
De 'vorm' van de grafiek van f_p hangt dus af van de waarde van p.
Beantwoord nu voor elk van de grafieken uit het stripverhaal de volgende vragen.
a. Hoeveel asymptoten heeft de grafiek? Zijn ze horizontaal of scheef?
b. Hoeveel extremen heeft de functie? Zijn het minima of maxima? Waar liggen ze?

c. Welke extremen heeft de functie $f_p(x) = x + p\sqrt{x^2+3}$?
d. Welke 'familie' van asymptoten hoort er bij de functies $f_p(x) = x + p\sqrt{x^2+3}$?

Bij opgave 1 ontstaat bij sommige leerlingen een 'film' die de rol van de parameter verheldert:



Als p = positief is de grafiek de gespiegelde grafiek van p = negatief. (gespiegeld in y = x)

Opvallend was dat enkele leerlingen zelf op de gedachte kwamen om na te gaan welke kromme door de toppen van de grafieken gaat.
Het observatieverslag besluit met onder andere de volgende conclusies:

> Naar mijn (observator) idee hebben de leerlingen inderdaad gevoel gekregen voor wat een bundel van grafieken voorstelt. Als dat niet zo was, zou bijvoorbeeld de vraag naar de kromme door alle toppen te abstract geweest zijn.
>
> Wat mij opviel was het feit dat er in de groepjes verschillende oplossingsmethoden en ideeën naar boven kwamen. De vrijheid die het relatief open karakter van de opgave bood, leek hen te inspireren.
>
> Er is met veel enthousiasme gewerkt. Veel leerlingen doken echt in het probleem en speelden ermee. De motivatie was uitstekend.

variatie in de probleemsituatie

Vanwege de snelheid waarmee de grafische rekenmachine rekent en tekent, kan men vaak zonder veel extra werk de oorspronkelijke probleemsituatie wijzigen. Het bekijken van verschillende varianten heeft het voordeel dat algemene en specifieke aspecten onderscheiden kunnen worden. Ook in deze zin draagt de grafische rekenmachine, overigens net als een computer, bij aan het dynamiseren van het wiskundeonderwijs.

Als voorbeeld nemen we nogmaals het probleem van de plaats van het station uit het pakket Optimaliseren, dat beschreven staat in paragraaf 5.3. In onderstaande opgave wordt de plaats van stad A gewijzigd.

> AC en BD zijn de afstanden hemelsbreed van A en B tot de spoorlijn.
> Het resultaat van opgave 2 wijst er op dat AS en BS zich verhouden als AC en BD.
> Ga na of dat ook klopt als A wat verderaf of wat dichterbij de spoorlijn ligt. Neem voor het gemak aan dat de plaats van C niet verandert; in het functiebestand hoef je dan bij Y2 maar één getal te wijzigen!

Op deze manier komt de leerling op het spoor dat de optimale plaats van het station weliswaar verandert als A verplaatst wordt, maar dat de congruentie van de driehoeken ACS en BDS gehandhaafd blijft. Deze invariantie vormt een sleutel tot de meetkundige oplossing van het probleem.

Iets soortgelijks zien we bij de opgave over agent 007 in dezelfde paragraaf. Hier wordt de plaats van de strandpaal S gewijzigd. Daardoor verandert wel de totale tijd die James Bond nodig heeft om de afstand af te leggen, maar niet de optimale landingsplaats. De koersrichting blijkt dus invariant te zijn, zolang de verhouding tussen de snelheden niet verandert. Dit doet vermoeden dat de koersrichting alleen afhangt van de verhouding tussen de twee snelheden. Later wordt daarop voortgebouwd met de wet van Snellius.

6.6 flexibiliteit

De laatste hypothese uit hoofdstuk 3 stelt dat het repertoire van technieken en vaardigheden die een leerling moet beheersen onder invloed van de grafische rekenmachine zal veranderen. De verwachting is dat de komst van de grafische rekenmachine een accentverschuiving zal veroorzaken van 'starre technieken' naar een meer flexibel oplossingsgedrag, waarbij een kritische houding wordt ontwikkeld ten aanzien van numerieke uitkomsten. Het belang van het beheersen van routinematige handelingen zal afnemen, terwijl het werken met de machine een flexibele houding vereist.

Wat leren de ervaringen van het project ons op dit gebied? Globaal gesproken zijn er inderdaad veranderingen in de geschetste richting waargenomen. Hieronder wordt nader ingegaan op de volgende punten:

- vaardigheden die minder belangrijk worden
- vaardigheden die belangrijker worden
- vaardigheden die de grafische rekenmachine vereist.

vaardigheden die minder belangrijk worden

Inderdaad verliezen bepaalde technieken die in de huidige lespraktijk veel geoefend worden, onder invloed van de grafische rekenmachine een deel van hun relevantie.

Als voorbeeld nemen we nogmaals het probleem van de plaats van het station uit het pakket Optimaliseren, dat beschreven staat in paragraaf 5.3. In onderstaande opgave wordt de plaats van stad A gewijzigd.

> AC en BD zijn de afstanden hemelsbreed van A en B tot de spoorlijn.
> Het resultaat van opgave 2 wijst er op dat AS en BS zich verhouden als AC en BD.
> Ga na of dat ook klopt als A wat verderaf of wat dichterbij de spoorlijn ligt. Neem voor het gemak aan dat de plaats van C niet verandert; in het functiebestand hoef je dan bij Y2 maar één getal te wijzigen!

Op deze manier komt de leerling op het spoor dat de optimale plaats van het station weliswaar verandert als A verplaatst wordt, maar dat de congruentie van de driehoeken ACS en BDS gehandhaafd blijft. Deze invariantie vormt een sleutel tot de meetkundige oplossing van het probleem.

Iets soortgelijks zien we bij de opgave over agent 007 in dezelfde paragraaf. Hier wordt de plaats van de strandpaal S gewijzigd. Daardoor verandert wel de totale tijd die James Bond nodig heeft om de afstand af te leggen, maar niet de optimale landingsplaats. De koersrichting blijkt dus invariant te zijn, zolang de verhouding tussen de snelheden niet verandert. Dit doet vermoeden dat de koersrichting alleen afhangt van de verhouding tussen de twee snelheden. Later wordt daarop voortgebouwd met de wet van Snellius.

6.6 flexibiliteit

De laatste hypothese uit hoofdstuk 3 stelt dat het repertoire van technieken en vaardigheden die een leerling moet beheersen onder invloed van de grafische rekenmachine zal veranderen. De verwachting is dat de komst van de grafische rekenmachine een accentverschuiving zal veroorzaken van 'starre technieken' naar een meer flexibel oplossingsgedrag, waarbij een kritische houding wordt ontwikkeld ten aanzien van numerieke uitkomsten. Het belang van het beheersen van routinematige handelingen zal afnemen, terwijl het werken met de machine een flexibele houding vereist.

Wat leren de ervaringen van het project ons op dit gebied? Globaal gesproken zijn er inderdaad veranderingen in de geschetste richting waargenomen. Hieronder wordt nader ingegaan op de volgende punten:

- vaardigheden die minder belangrijk worden
- vaardigheden die belangrijker worden
- vaardigheden die de grafische rekenmachine vereist.

vaardigheden die minder belangrijk worden

Inderdaad verliezen bepaalde technieken die in de huidige lespraktijk veel geoefend worden, onder invloed van de grafische rekenmachine een deel van hun relevantie.

Zoals de gewone rekenmachine het cijferen minder relevant heeft gemaakt, zo maakt de grafische rekenmachine het nauwkeurig tekenen van grafieken van ondergeschikt belang. De grafiek ontstaat door een druk op de knop, zonder dat daar een uitgebreid functieonderzoek aan vooraf gaat. Het doel van de routinematige aanpak van het functieonderzoek is hiermee dus weggenomen. De grafiek vormt het vertrekpunt, de aanleiding voor verder onderzoek (Kindt, 1992[a] en 1992[b]). Het tekenonderzoek bij het oplossen van een ongelijkheid vindt niet langer plaats door punten in te vullen, maar wordt voortaan grafisch uitgevoerd.

Ook het reken- en tekenwerk bij matrices en beschrijvende statististiek kan door de machine uit handen genomen, maar op dit terrein hebben in dit project nauwelijks experimenten plaatsgevonden.

vaardigheden die belangrijker worden

Op het moment dat leerlingen niet meer gehinderd worden door tijdrovende basisvaardigheden, verschuift vanzelfsprekend het accent naar 'hogere' aspecten van het oplossingsproces. Uit de experimenten blijkt dat het met name belangrijker wordt dat leerlingen een adequate strategie kunnen kiezen.

Een tweede belangrijke vaardigheid is het vermogen om een probleemstelling te kunnen vertalen in wiskundetaal (en in machinetaal). In de in hoofdstuk 5 beschreven lesmaterialen krijgt het mathematiseren meer nadruk dan in de gangbare schoolboeken.

Ten derde is het van groot belang dat leerlingen de uitvoer van de grafische rekenmachine kunnen interpreteren en in staat zijn om die terug te vertalen naar de probleemsituatie. Observaties tonen aan dat dat niet altijd gemakkelijk is (zie bijvoorbeeld paragraaf 6.2).

Het volgende punt houdt hiermee verband. De grafische rekenmachine vormt een aparte wereld met eigen notaties en representaties. Bovendien kan het gebruik van de machine aanleiding geven tot een andere kijk op een probleem of een andere oplossing. Leerlingen moeten dus leren om te schakelen tussen verschillende representaties, verschillende notaties en verschillende oplossingsmethoden, en tevens om die met elkaar in verband te brengen en met elkaar te integreren. Eerder in dit hoofdstuk is daarop ingegaan. De ervaring is dat leerlingen dit niet gemakkelijk vinden, maar wel boeiend. Bij de nabespreking van de lessenserie 'Optimaliseren' kwam dit bijvoorbeeld duidelijk naar voren (zie paragraaf 4 van dit hoofdstuk).

Als laatste punt van deze paragraaf gaan we in op de flexibiliteit die het omgaan met numerieke en exacte antwoorden vereist.

De antwoorden van de grafische rekenmachine zijn numerieke benaderingen. Leerlingen hebben meestal geleerd dat bij wiskunde alleen met exacte uitkomsten genoegen genomen wordt. Ze weten in eerste instantie vaak niet hoe ze op dit verschil moeten reageren. Velen nemen de uitkomsten van de grafische rekenmachine erg serieus, zoals blijkt uit onderstaande fragmenten.

De top van de functie $x \rightarrow x(5-x)$ is het punt (5/2, 25/4). Maar op de grafische rekenmachine wordt voor de top (2.44; 6.19) gevonden.
'Wat denk je dat het echt is?', vraagt de leraar nog.
'2.44', meent een leerling, 'Dat zegt hij toch', verwijzend naar de grafische rekenmachine.

Tijdens een proefwerk waarbij leerlingen de grafische rekenmachine mogen gebruiken geven leerlingen voor een parameter p antwoorden als p<-2,66, p<-2,58 of p<-3 met als verklaring de verwijzing: 'zie grafiek'.
In een verslag verzucht de docent: 'Hier verwacht ik toch wat meer! Ik moet ze toch wat kritischer maken ten opzichte van het apparaat!'

Het volgende citaat gaat over een leerling die probeert een numerieke benadering exact te interpreteren, zij het dat een ongeluk in een klein hoekje zit.

Als oplossing van de vergelijking $2^x = 3$ heeft Rob 1.58 gevonden.
De observator vraagt: 'Is dat exact?'
Rob: 'Nee, het zal wel $\pi/2$ zijn.'
Observator:: 'Van welke vergelijking moet het een oplossing zijn?'
Rob: 'Van 2- tot-de-macht-iets = 3'.
Dat klopt, maar hij had kennelijk niet gezien dat $\pi/2$ wel in de buurt ligt van de werkelijke oplossing ${}^2\log 3$, maar daar niets mee te maken heeft.

Ook de observatie 'Grafisch versus exact' uit paragraaf 5.3 geeft aan dat het voor leerlingen moeilijk is om in te zien welke status een uitkomst heeft. Het onderbouwen van een vertaling van een numerieke benadering in een exact antwoord wordt nog wel eens vergeten. Bij het benaderen van exacte uitkomsten kunnen leerlingen overigens tegen de grenzen van de nauwkeurigheid van de machine aanlopen:

Op het bord staat: $e \approx (1 + 0.01)^{100}$
Docent: 'Kan het nauwkeuriger?' De leerlingen proberen dat door 0.01 door een kleiner getal te vervangen, maar worden soms teleurgesteld. Door afrondfouten wordt bijvoorbeeld (1+10^–20)^(10^20) gelijk aan 1 gesteld.

De verhouding tussen numerieke en exacte antwoorden is een punt dat voortdurend terugkomt. Leerlingen zijn bij wiskunde B gewend dat exacte antwoorden vereist zijn. Het belang van een numerieke benadering is daardoor vaak onduidelijk. De volgende opmerking uit een interview dat plaatsvond na het experiment met het pakket 'Optimaliseren' wijst daarop.

'Met de rekenmachine kun je grafieken, formules invoeren, grafieken tekenen en dan benaderen, maar benaderen vind ik niet echt wiskunde B, het moet allemaal toch exact.'

Deze leerling beschrijft de B-cultuur treffend. Maar voor toepassingen voldoet een numerieke benadering vaak uitstekend. Daarbij komt dat in vele gevallen een exacte oplossing niet bekend is. Een herbezinning op de verhouding numeriek-exact binnen het wiskundeonderwijs wordt door de grafische rekenmachine noodzakelijk gemaakt.

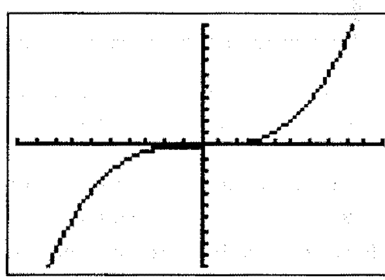
vaardigheden die de grafische rekenmachine vereist

Het gebruik van de grafische rekenmachine vereist dat de gebruiker over enkele vaardigheden beschikt, die in mindere mate noodzakelijk zouden zijn zonder machine. Hiermee doelen we niet op de bediening van de machine in de elementaire zin van het woord. Die blijkt voor leerlingen in het algemeen geen probleem te vormen.

Het is voor een zinvol gebruik van de grafische rekenmachine noodzakelijk dat de leerlingen een verwachting hebben van de globale vorm van de grafiek die op het beeldscherm zal verschijnen. Zoals de invoering van de zakrekenmachine leidde tot een verschuiving van cijferen naar hoofdrekenen, zo zal onder invloed van de grafische rekenmachine een verschuiving plaats vinden van de algoritmische procedure om tot een exacte tekening te komen in de richting van het 'hoofdtekenen'. Door deze vaardigheid kan de leerling de uitvoer van de machine globaal controleren, en eventueel signaleren dat er bijvoorbeeld bij het invoeren een fout is gemaakt. In de volgende observatie is de kennis van de leerling over de vorm van de sinusoïde aanleiding tot een ontdekking.

Een leerling kwam bij de docent met de TI-81 en op het scherm een grafiek van een derdegraads functie. Vervolgens laat hij ook z'n grafiekenbestandje zien:

```
:Y1=X²*sin X
:Y2=0.0174*X^3
:Y3=
:Y4=
```

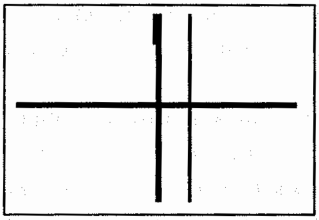


Beide grafieken zijn in beeld (met ZOOM STANDARD), ieder afzonderlijk geeft namelijk een identiek plaatje. De rekenmachine blijkt op graden te staan in plaats van op radialen. Kennelijk is sin x ongeveer x in de buurt van 0, maar vanwaar die 0.0174?
Gelukkig heeft de docent de volgende les met de leerling de oplossing gevonden:
$\sin x^o = \sin \pi/180\, x \approx \pi/180\, x$ (voor kleine x). En $\pi/180 \ldots \approx 0.0174$.
'Ja,' zei de docent, 'zo krijg je ineens hele andere vragen dan je gewend bent.'

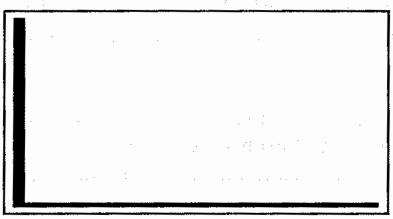
Een tweede vereiste is het vermogen om goed te kunnen omgaan met het kijkvenster. In eerste instantie raken leerlingen bijvoorbeeld vaak in de war als er geen grafiek in beeld komt na een tekenopdracht. Er moet op gewezen worden dat het beeldscherm als een venstertje over de totale grafiek schuift, en dat de plaats en de afmetingen van het kijkvenster in dit geval kennelijk niet zinvol zijn.

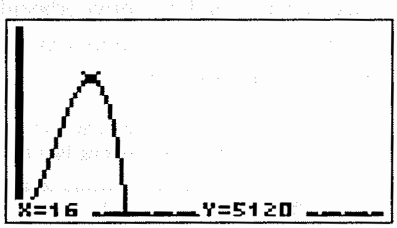
De afmetingen en de plaats van het kijkvenster stelt de gebruiker van de TI-81 in met RANGE. Uit onderstaande observaties blijkt dat het lastig kan zijn om een zinvolle instelling te kiezen.

Een leerling is bezig met een opgave over een rechthoekige gebogen draad. Hij heeft de grafiek laten tekenen van de inhoudsfunctie van de doos: $y = x^2 \frac{(120 - 5x)}{2}$.
Op het scherm is het volgende zichtbaar:



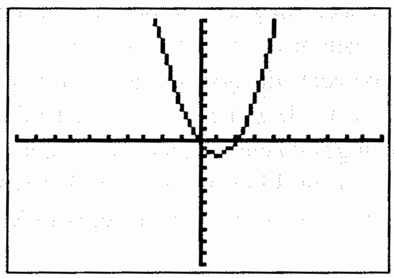
Hij zegt erbij: '... en ik heb de range al van -100 tot 100 voor x en voor y.' De observator vraag wat x voorstelt. 'Een lengte,' antwoordt hij, 'oh ja, die kan natuurlijk niet negatief zijn.' Hij verandert de range voor x van 0 tot 1000 en voor y van 0 tot 1000. Het volgende verschijnt op het scherm (zie links):



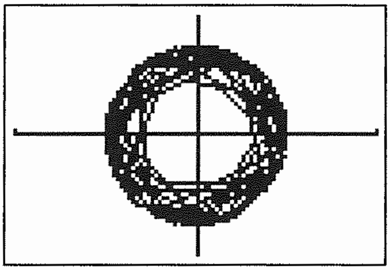


Uiteindelijk vindt hij een range voor x van 0 tot 80 en voor y van 0 tot 7000 (zie rechter plaatje). Toevallig geeft deze met trace precies het maximum voor $x = 16$.

In feite geeft een andere keuze van domein of bereik een nieuwe voorstelling van dezelfde formule. Goldenberg (1988) heeft het belang van dit fenomeen eerder beschreven. Voor de gebruiker is een complicerende factor hierbij gelegen in het feit dat de afmetingen van het kijkvenster zo eenvoudig te veranderen zijn met behulp van ZOOM. Hierbij treden wijzigingen in schaal- en hoekgrootte op. Hellingshoeken zijn dus niet zomaar meer uit de grafiek te schatten, en het vraagt wiskundig inzicht van de leerling om hiermee adequaat om te gaan. Ongetwijfeld zullen veel leerlingen die geconfronteerd worden met de grafiek van de functie $x \rightarrow \frac{x^3}{100} + x^2 - 2x$ op het standaard-tekenvenster denken dat het een parabool is.



Tenslotte is het voor een goed gebruik van de grafische rekenmachine vereist dat men zich bewust is van de beperkingen van een dergelijk apparaat. Bij de verhouding tussen numerieke en exacte antwoorden (zie eerder in deze paragraaf) is al gebleken dat leerlingen vaak niet erg kritisch zijn ten aanzien van de uitkomsten van de machine. Soms realiseren leerlingen zich de beperkingen van de grafische rekenmachine wel goed, zoals blijkt uit de volgende observatie:



Een leerling voert de parametervoorstelling $(x, y) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$ in en vergroot geleidelijk het domein. De baan begint als een cirkel, maar omdat de stapgrootte van t^2 toeneemt, wordt de tekening steeds hoekiger. De snelheid neemt toe en het binnengebied wordt geleidelijk aan helemaal opgevuld. Leuk!

Samengevat komt het er op neer dat het gebruik van de grafische rekenmachine er toe leidt dat bepaalde vaardigheden minder belangrijk worden, terwijl andere juist winnen aan belang of zelfs een voorwaarde voor zinvol gebruik vormen. De indruk bestaat dat het vermogen om flexibel met het repertoire van technieken en vaardigheden om te gaan relevanter wordt dan het beheersen van starre, meer routinematige technieken.

Een relativerende opmerking bij deze laatste constatering is wellicht op zijn plaats. In de experimentele situatie van het project worden de leerlingen natuurlijk met een nieuw type vragen geconfronteerd. Dergelijke vragen doen in het algemeen een groter beroep op het inzicht dan standaardvragen waarvan het beantwoorden verworden is tot het uitvoeren van een algoritme. Maar de nieuwe vragen die nu door het gebruik van de grafische rekenmachine opgeroepen worden, zullen natuurlijk eveneens langzamerhand deel gaan uitmaken van het standaardrepertoire waar de leerling op voorbereid wordt.

7 Toetsing

7.1 inleiding

Meer dan de rol tijdens de wiskundeles is het gebruik van de grafische rekenmachine bij proefwerken en examens omstreden. Een belangrijk bezwaar tegen het gebruik van de grafische rekenmachine bij toetsing is dat allerlei traditionele vragen niet langer gesteld kunnen worden, omdat ze met behulp van de grafische rekenmachine te beantwoorden zijn. Dat geldt bijvoorbeeld voor de vraagstukken die culmineren in het tekenen van een grafiek. Ook bestaat er de vrees dat men geen wiskundekennis, maar knoppenvaardigheid van de leerling toetst. En tenslotte is er het (niet denkbeeldige) risico dat toetsen en examens zwaarder worden, omdat het niet langer zin heeft routinematige zaken te vragen.

Hoewel deze bezwaren tot op zekere hoogte reëel zijn, vormen ze geen reden om het gebruik van de grafische rekenmachine bij toetsing te verbieden. Een verantwoorde toets hoort aan te sluiten bij het gegeven onderwijs. Als de grafische rekenmachine in dat onderwijs een plaats heeft, mag de machine ook niet worden uitgesloten van de toetsing. Sterker nog, voor een volwaardige plaats van de grafische rekenmachine in de wiskundeles is een rol bij de toetsing een voorwaarde. Zolang er een verbod is op gebruik bij examens, zal het hulpmiddel door leerlingen niet geheel serieus genomen worden.

Zoals de inhoud van het onderwijs onder invloed van de grafische rekenmachine zal veranderen, zo zal dat ook met de toetsen moeten gebeuren. Over hoe een geschikte toets, waarbij de grafische rekenmachine gebruikt wordt, er uit moet zien, is nog weinig bekend. De ontwikkeling van zulke toetsen is een kwestie die de komende jaren nog veel aandacht zal vragen. Het vervolgproject 'De grafische rekenmachine in de examenprogramma's havo en vwo', dat genoemd is in paragraaf 2.4, zal hierop nader ingaan. In dit kader is het ook interessant om na te gaan in hoeverre men in andere landen bij de eindexamens rekening houdt met de beschikbaarheid van de grafische rekenmachine.

In dit hoofdstuk komen achtereenvolgens aan de orde:

- de grafische rekenmachine in buitenlandse eindexamens
- huidige eindexamens in Nederland
- voorbeelden van vraagstukken nieuwe stijl
- conclusies.

7.2 de grafische rekenmachine in buitenlandse eindexamens

Zoals in hoofdstuk 2 is beschreven, is het gebruik van de grafische rekenmachine bij het eindexamen in sommige landen al enkele jaren toegestaan. In deze paragraaf bespreken we enkele examenopgaven uit dergelijke landen (zie ook Drijvers, 1994[b]). Daarna komen de eisen aan de orde waaraan een machine moet voldoen om gebruikt te mogen worden.

twee onderdelen van Engelse opgaven

In Engeland gaat men van het standpunt uit dat leerlingen die een grafische rekenmachine hebben niet bevoordeeld mogen worden ten opzichte van anderen die er geen hebben. Bij deze overweging spelen de kosten van de aanschaf een rol: minder kapitaalkrachtige leerlingen mogen niet de dupe worden. De machine is toegestaan maar zeker niet verplicht. Op verschillende manieren wordt dit uitgangspunt verwezenlijkt.

In het eerste voorbeeld uit het examen op A-level 'Pure mathematics with applications' van het School Mathematics Project (juni 1993) wordt een functie gebruikt die parameters bevat.

> Een functie f met $f(x) = (x + a)^2 + b$ heeft nulpunten $x = 1.36$ en $x = 4.64$ exact.
>
> a. Schets de grafiek van f. Geef de coördinaten van de snijpunten met de x-as.
> b. Schrijf de x-coördinaat van de top van de grafiek op, en bepaal zo de waarde van a.
> c. Bereken de exacte waarde van b.

Vanwege de onbekenden in het functievoorschrift kun je niet zo maar beginnen met het tekenen van de grafiek op de grafische rekenmachine. Wel is de grafische rekenmachine een krachtig middel om de gevonden antwoorden te controleren, en dat is een voordeel dat leerlingen met een grafische rekenmachine hebben. Als a en b berekend zijn, blijkt zelfs met terugwerkende kracht of de schets van onderdeel a goed is.

Een variant hierop bestaat uit het impliciet definiëren van een functie. Het volgende onderdeel is daarvan een voorbeeld. Het is afkomstig van het A-level examen 'Pure mathematics' van de Associated Examination Board (juni 1993).

> Schets de kromme met vergelijking $y^2 = 4x^3$.

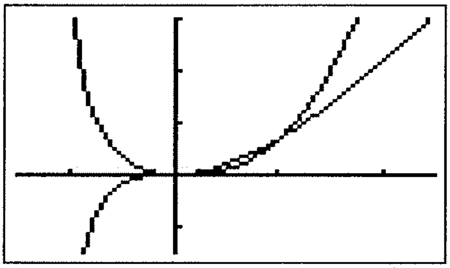
Toch is ook hier de leerling met grafische rekenmachine in het voordeel. Hij moet de formule herleiden tot $(y = 2x^{1.5}) \vee (y = -2x^{1.5})$ en kan dan de beide componenten laten tekenen, terwijl een leerling zonder machine dat laatste toch nog met de hand moet doen.

een deel van een Franse Baccalaureaats-opgave

In Frankrijk zijn de examens van het Baccalauréat (het hoogste niveau) inhoudelijk vrijwel niet gewijzigd onder invloed van de toelating van de grafische rekenmachine. Dat is des te opmerkelijker aangezien sindsdien ook het computeralgebra-pakket Derive, mits in palm-top formaat, gebruikt mag worden. Het voorbeeld hieronder komt uit het examen Baccalauréat C Créteil-Paris-Versailles 1992. De opgave gaat over het onderzoeken van een familie van functies f_n met $f_n(x) = x^n\ln(1 + x)$.

Gegeven zijn de functies f_n met $f_n(x) = x^n\ln(1 + x)$.
a. Vergelijk de positie van de grafiek van f_1 met die van f_2.
b. Teken deze twee grafieken.

Met een grafische rekenmachine is dit natuurlijk een eenvoudige opgave. Het volgende plaatje ontstaat.



In feite wordt met dergelijke vragen het bestaan van de grafische rekenmachine genegeerd. Dit is natuurlijk geen antwoord op de nieuwe ontwikkelingen.

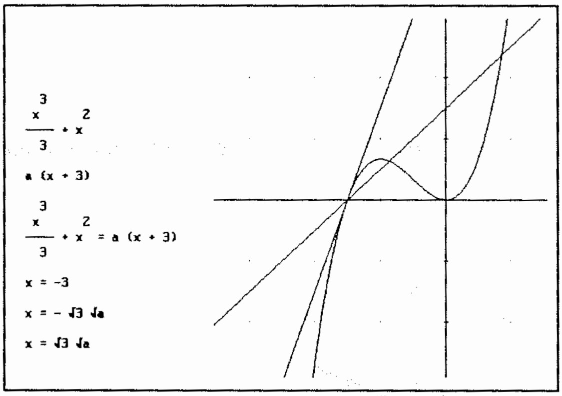
Noorwegen

In Noorwegen wordt op het gymnasium elk leerjaar met een examen afgesloten. De onderstaande opgave maakte in 1993 deel uit van het examen aan het einde van het eerste jaar gymnasium (leeftijd 16 jaar). Het was het laatste examen zonder grafische rekenmachine, en in deze opgave wordt al wat op de zaken vooruit gelopen: onderdeel e zou ook de komende jaren een geschikte opgave zijn.

Een functie F is gegeven door $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$, $D_F = \mathbb{R}$.
a. Vindt $F'(x)$. Bepaal de coördinaten van top en buigpunten van F.
b. Teken de grafiek van F.
c. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt (-3, F(-3)).

Functie G is gegeven door $G(x) = a(x+3)$, $D_G = \mathbb{R}$ waarbij a een reëel getal is.
d. Toon aan dat de grafiek van G door het punt (-3, 0) gaat voor alle waarden van a.
e. Bereken het aantal oplossingen van de vergelijking $F(x) = G(x)$ voor elke waarde van a.

Onderdeel b is natuurlijk zinloos als de leerlingen een grafische rekenmachine gebruiken. Voor de standaard-vragen a en c geldt hetzelfde ten aanzien van de beschikbaarheid van een computeralgebra-pakket. Onderdeel d is gewoon erg eenvoudig. De opgave draait om het laatste onderdeel. Het aardige hieraan is dat er ondanks alle hulpmiddelen nog denkwerk overblijft. Hieronder staat wat een computeralgebrasysteem als Derive te bieden heeft; wanneer een grafische rekenmachine gebruikt wordt, moeten de formules in het linker venster met de hand worden afgeleid.



Het algebraïsch oplossen van de vergelijking geeft drie punten. Wat de leerling zichzelf nog moet afvragen is of deze echt verschillend zijn. Uit de grafieken en de formules blijkt dat er maar één snijpunt is als a negatief is. Als $a = 0$, dan vallen de oplossingen van de regels 5 en 6 samen. Grafisch betekent dit dat de x-as de grafiek van F raakt. Er zijn dan dus twee snijpunten. Als a groter dan 0 wordt, 'verandert het raakpunt in twee snijpunten'. In totaal dus drie snijpunten, zoals ook blijkt uit het plaatje. Dat blijft zo tot het moment dat de lijn de grafiek van F in (-3,0) raakt. Algebraïsch komt dat neer op de situatie dat $-3 = -\sqrt{3}\sqrt{a}$, dus dat $a = \sqrt{3}$. Dat geeft weer twee snijpunten, voor $x = 3$ en $x = -3$. Verdere stijging van a betekent het verder doordraaien van de lijn, en dan ontstaan er weer drie snijpunten, met (–3,0) nu als middelste.

Deze gedachtengang is vrij uitgebreid opgeschreven omdat het hier gaat om vaardigheden die in de toekomst relevant zullen blijven. Het schakelen tussen grafische en algebraïsche eigenschappen bijvoorbeeld, en het interpreteren en nader onderzoeken van uitvoer.

De kern van de opgave blijft dus ook interessant als er technologie in het spel is. Wel is het zo dat het routine-deel van deze opgave overbodig wordt. Dat is jammer voor die leerlingen die juist daarop de punten bij elkaar sprokkelen.

welke grafische rekenmachines zijn toegestaan?

Het Nederlandse onderwijs staat nog voor de beslissing om grafische rekenmachines bij het eindexamen toe te laten. Eén van de punten waarover nagedacht zal moeten worden is aan welke eisen de betreffende machines moeten voldoen. In andere landen zijn in dat opzicht al keuzes gemaakt.

In het algemeen (met uitzondering van Frankrijk en Schotland) staat in de examenregeling dat de machine geen symbolische faciliteiten mag bieden. Geen computeralgebra dus. Vooralsnog lijken de fabrikanten van grafische rekenmachines de tweedeling numeriek-symbolisch te respecteren (zie ook hoofdstuk 2), maar het is te verwachten dat de scheidslijn zal vervagen. In dat geval kan dit criterium nog problemen veroorzaken.

De tweede eis waaraan de machines moeten voldoen, luidt dat ze geen uitwisbare gegevens zoals programma's of dataverzamelingen mogen bevatten. De machine moet dus 'blank' meegebracht worden. Dit om te voorkomen dat spiekbriefjes ingebouwd worden, of dat voor de meest gevraagde algoritmen programma's ontworpen worden. In praktijk betekent dit dat de machines onder de ogen van de examinatoren gewist moeten worden. Het probleem daarbij is dat men als surveillant dus eigenlijk van alle gangbare typen rekenmachines moet weten hoe dat moet en welke adders daarbij onder het gras kunnen zitten.

Voor zover ons bekend zijn er geen landen waarin men een lijst van toegestane merken en types heeft opgesteld. Waarschijnlijk enerzijds om geen verstrengeling met commerciële belangen te veroorzaken, en anderzijds omdat een dergelijke lijst binnen enkele maanden verouderd zou zijn.

Samengevat kunnen we stellen dat men in het buitenland in het algemeen kiest voor niet-symbolische machines. De examens moeten ook zonder grafische rekenmachine goed te maken te zijn. De machines zijn toegestaan maar zijn meestal niet verplicht. Grafieken worden meestal niet meer gevraagd. Soms worden ze bij de opgave al afgebeeld. Functies die een parameter bevatten, ongedefinieerde functies en impliciet gegeven functies komen vaker voor dan vroeger. Bij het opstellen van een functievoorschrift uit een probleemsituatie biedt de grafische rekenmachine geen hulp, dus dat blijft een dankbaar item bij examinering.

7.3 huidige eindexamens in Nederland

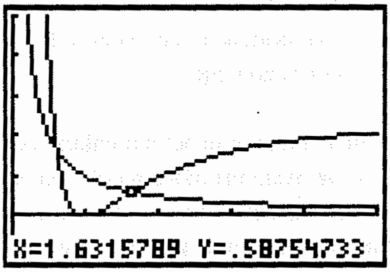
Deze paragraaf vormt een voorzichtig begin van het onderzoek naar de verhouding tussen de huidige eindexamens in Nederland en de grafische rekenmachine. Aan de hand van enige voorbeelden wordt verkend in hoeverre de grafische rekenmachine de inhoud van de eindexamens zou kunnen veranderen. Uit de voorbeelden wordt een totaalbeeld geëxtrapoleerd.

wiskunde B examens

examen vwo B 1983, tijdvak 1, opgave 1

Gegeven zijn de functies met domein $\mathbb{R}^+$
$f: x \rightarrow \frac{4(\ln x)^2}{x}$ en $g: x \rightarrow \frac{1}{x}$
a. Los op $f(x) \geq g(x)$
b. Onderzoek de functie f.
Teken de grafieken van f en g ten opzichte van één rechthoekig assenstelsel Oxy.
c. Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafieken van f en g.

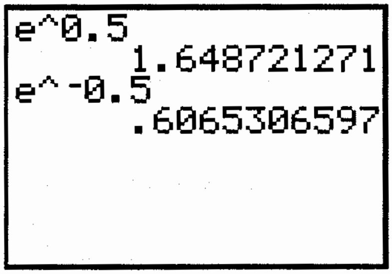
Dit is het prototype van een standaardopgave uit de examens van de afgelopen 15 jaar: een ongelijkheid oplossen, daarna functie-onderzoek wat leidt tot het tekenen van twee grafieken en tenslotte het berekenen van een oppervlakte. Welk oplossingsgedrag zouden we hier kunnen verwachten van een leerling die uigerust is met een grafische zakrekenmachine? Voor onderdeel a. ligt het voor de hand om de grafieken van de beide functies te combineren in één plaatje, zodat de gevraagde intervallen kunnen worden afgelezen. Op het scherm van de rekenmachine komt er dan:



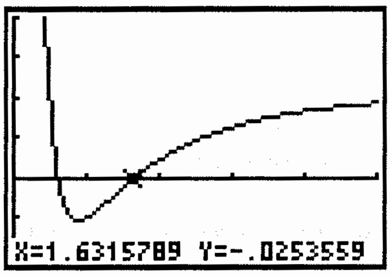
De leerling ziet onmiddellijk dat er twee snijpunten zijn, hoewel hij vermoedelijk niet precies weet wat er ver weg rechts gebeurt. De snijpunten kunnen met Trace worden opgespoord en de coördinaten kunnen dan worden afgelezen in 7 decimalen. Zonder enige berekening kan dus al worden afgelezen. Echter, wat betekent een antwoord in de geest van: $0 < x \leq 0.61147368$ of $x \geq 1.63157897$?

De laatste ongelijkheid, moet je die uitspreken als:' x is groter dan of ongeveer gelijk aan ...' of als:' x is groter dan of gelijk aan ongeveer ...' en wat zou daarmee worden bedoeld? Een 'ongeveer gelijk aan' duidt altijd op een interval van mogelijke waarden, en het zou hier dus gaan om een interval begrensd door een interval. Nee, het is duidelijk dat 'exacte' grensaanduidingen hier onontkoombaar zijn.

Met andere woorden: de vergelijking '$f(x) = g(x)$' zal exact moeten worden opgelost, hetgeen dan leidt tot de oplossingen $e^{-0.5}$ en $e^{0.5}$ voor x. Natuurlijk kan de rekenmachine wel gebruikt worden om de antwoorden te vergelijken met de coördinaten zoals die van het scherm worden afgelezen.



We vermelden nog even een alternatieve methode, namelijk met behulp van de verschilfunctie $f - g$. Het plaatje wordt dan:



Dit vereist een denkstapje extra, maar heeft dan weer als voordeel dat het uiteindelijke antwoord $0 < x \leq e^{-0.5}$ of $x \geq e^{0.5}$ eenvoudiger is af te lezen!

Het is bij wiskunde-examens gebruikelijk dat van een kandidaat een volledig gemotiveerde oplossing gevraagd wordt, ook als dat niet expliciet vermeld is. Je zou ook kunnen zeggen: met 'Los op' wordt niet alleen bedoeld 'Vind de oplossing', maar ook: 'Geef een volledige motivering'.

Dat laatste houdt waarschijnlijk in, dat de kandidaat niet kan volstaan met een beschrijving van het oplossingsproces van de vergelijking $f(x) = g(x)$, maar ook een schets van de beide grafieken (of van de grafiek van $f - g$) moet inleveren. Dat zou dan neer komen op het schetsmatig overtekenen van het scherm.

Nu kan men tegenwerpen dat dit geen bewijsvoering in de ware zin des woords is. Immers, elke verantwoording van de tekening ontbreekt, of bestaat uit een zinnetje als: 'op mijn computerschermpje heb ik gezien dat ...'. Vergelijken we deze methode echter met die bedoeld was op het examen 1983, dan valt het verschil in wiskundige hardheid wel mee. Immers in de 'oude' methode geeft het zogenaamde tekenschema van de verschilfunctie de doorslag, en iedere insider weet hoe zoiets tot stand komt: nulpunten netjes uitrekenen en een paar tussenwaarden testen op + of – waarbij menige leerling de rekenmachine gebruikt. Dat laatste doe je in de hier geschetste methode ook (maar dan globaal!) en er is zeker geen sprake van minderwaardigheid ten opzichte van de aanpak met het tekenschema.

Kortom, de grafische zakrekenmachine is zeer geschikt voor de aanpak van ongelijkheden, waarbij het visuele karakter van de oplossingsmethode een sterk punt is. Het onderdeel b is als letterlijke examenvraag niet langer geschikt. Wel kunnen er vragen omtrent het onderzoek van de functie worden gesteld, zoals: 'Bereken de extreme waarden' en 'Onderzoek of de grafiek één of meer asymptoten heeft'. De door het machientje geproduceerde grafiek biedt de leerling dan veel steun.

Overigens moet men een vraagteken plaatsen bij de ordening waarvoor de examencommissie in 1983 gekozen heeft. Waarom de grafische voorstelling achteraf, terwijl die zo goed had kunnen functioneren bij vraag a? Het antwoord is omdat dit paste in de visie die toen leefde: de grafiek als einddoel in plaats van als middel om problemen aan te pakken. Hoe zouden trouwens de leerlingen zijn beoordeeld die eerst b hebben gemaakt en vervolgens het resultaat gebruiken voor de oplossing van onderdeel a?

Bij onderdeel c hangt het van het type machientje af, hoe voordelig de ondersteuning is. Sommige grafische rekenmachientjes doen aan numerieke integraalrekening, andere zouden vooraf (bijvoorbeeld met de regel van Simpson) moeten worden geprogrammeerd. De exacte uitkomst is hier 2/3 en dat kan numeriek natuurlijk gemakkelijk worden geverifieerd.

Alles nog eens overziende moet de conclusie zijn: gebruik van de grafische rekenmachine maakt de totale opgave (met een gewijzigd onderdeel b) ontegenzeggelijk eenvoudiger. Dit toch al niet al te rijke vraagstuk wordt er nog wat armer door en de verleiding van een examencommissie zal dan al gauw zijn om er nog een leuk vraagje bij te verzinnen.

examen vwo B 1986, tijdvak 1, opgave 1

Met domein IR is voor elke $p \in$ IR gegeven de functie $f_p : x \rightarrow (2x^2 + px)e^{-x}$
Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy is K_p de grafiek van f_p.

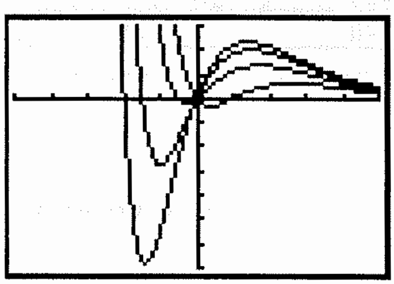
a. Onderzoek f_3 en teken K_3.
b. Gegeven is dat de functie $F : x \rightarrow (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ een primitieve functie van f_3 is.
Bereken a, b en c.
Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door K_3 en de x-as.
c. De lijn $x = 5$ snijdt K_p loodrecht. Bereken p.

Op het eerste gezicht een vraagstuk over een familie van functies. Goed voer voor de grafische rekenmachine, want die stelt de gebruiker in staat een bundeltje grafieken op het scherm te toveren.

Hoe teleurstellend zijn echter de vragen. In feite komt er maar één grafiek in beeld (bij onderdeel a). Vraag b (op zichzelf een prima vraag) heeft uiteindelijk ook weer betrekking op die ene grafiek. Alleen vraag c opent misschien, maar dan wel heel voorzichtig en alleen voor degenen die wat verder willen kijken, het perspectief naar zoiets als een grafiekenbundel. Je zou haast oordelen dat hier sprake is van dikdoenerij! En wat zeker is, er zijn hier veel kansen blijven liggen.

In ieder geval biedt de grafische rekenmachine de mogelijkheden om bundels grafieken daadwerkelijk te onderzoeken en om verschillende exemplaren uit de bundel te vergelijken. Zodat de parameter in de formule bij wijze van spreken een beetje tot leven komt en niet slechts dient om het aanzien van het vraagstuk wat chiquer te maken.

In het onderhavige voorbeeld komt er voor de gevallen:
$p = 3$, $p = 4$, $p = 1$, $p = -2$ het volgende plaatje:



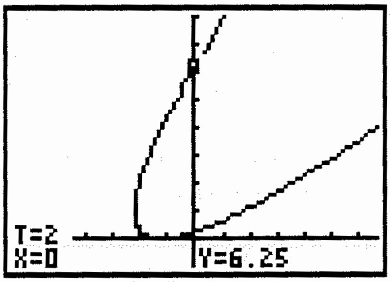
In plaats van vraag a. zou dan bijvoorbeeld de vraag gesteld kunnen worden: 'Bekijk een aantal grafieken van de bundel; die blijken twee punten met horizontale raaklijn ('toppen') te bezitten. Onderzoek of dit voor *iedere* grafiek van de bundel geldt.'

examen vwo B 1988, tijdvak 1, opgave 3

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy is de kromme K gegeven door
$x = t^2 - t - 2$ en $y = t^2 + t + 1/4$, waarbij $t \in \mathbb{R}$.

12. Bereken de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van K en de coördinaatassen.
13. Bereken de coördinaten van de punten van K waarin de raaklijn aan K evenwijdig is aan de x-as of aan de y-as.
14. Onderzoek welke waarden de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan K kunnen aannemen.
15. Teken K.
16. Een vierhoek waarvan de hoekpunten op K liggen, heeft de y-as als symmetrie-as. Bereken de oppervlakte van deze vierhoek.

De vragen 12 en 13 ondersteunen het uiteindelijke doel, het maken van een tekening van K. Vraag 14 werkt nauwelijks mee aan de opbouw van de grafiek. Vraag 16 oogt fris, al doet de vraag naar de oppervlakte van de vierhoek een beetje geforceerd aan. Met de grafische rekenmachine bij de hand komt de zaak natuurlijk weer op zijn kop te staan. De eerste verkenning geschiedt grafisch, en geeft bijvoorbeeld dit plaatje (op een 'vierkante' schaalverdeling):



De vragen 12, 13, 14 en 16 kunnen desgewenst weer worden gesteld, al liggen enige wijzigingen voor de hand.
Bijvoorbeeld:

12*Als je de kromme bekijkt, lijkt het of die raakt aan de x-as; onderzoek of dit inderdaad zo is.

13*Bereken de exacte y-coördinaten van de snijpunten van de kromme en de y-as.

14*Welke waarden kan de x-coördinaat van een over de kromme lopend punt aannemen?

15*Onderzoek of de helling van de kromme iedere reële waarde kan aannemen.

16*Een vierhoek waarvan de vier hoekpunten op de kromme K liggen wordt een koordenvierhoek van K genoemd; van een koordenvierhoek van K is gegeven dat de y-as een symmetrie-as is; bereken de coördinaten van de hoekpunten van die koordenvierhoek.

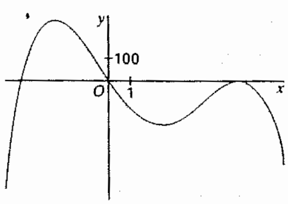
Ook hier is de conclusie dat de zwaarte van het vraagstuk nu wat minder is geworden (de grafische rekenmachine geeft direct houvast in de vorm van het goede plaatje en het tekenwerk ontbreekt) en ook hier zijn aanvullende vragen denkbaar.

De ontwikkeling van de technologie heeft, ondanks het verbod op het gebruik van de grafische zakrekenmachine bij het eindexamen, toch invloed op de opgaven, zoals blijkt uit meer recente vraagstukken.

examen havo B 1994, tijdvak 1, opgave 1

In figuur 1 is een grafiek getekend van de functie f gegeven door
$f(x) = -x(4 + x)(6 - x)^2$.
Op de x-as en de y-as zijn de schaalverdelingen verschillend: de eenheid op de y-as is honderd maal zo klein getekend als op de x-as.

figuur 1



1 □ Voor welke waarden van x is $f(x)$ negatief?

2 □ Toon aan dat $f'(x) = -4(6 - x)(6 - x^2)$

Iemand heeft het vermoeden dat $O(0, 0)$ een buigpunt van de grafiek van f is.

3 □ Onderzoek of dat vermoeden juist is.

Op de bijlage is nogmaals een grafiek van f getekend.
De functie g is gedefinieerd door $g(x) = f(2x)$.

4 □ Leg uit hoe de grafiek van g uit de grafiek van f kan worden afgeleid en teken in de figuur op de bijlage de grafiek van g.

We kruipen weer in de huid van een leerling die over een grafische rekenmachine beschikt. De grafiek is al gegeven, dus voor het verwerven van een globaal beeld is de grafische rekenmachine overbodig. Daardoor is vraag 1 wel heel eenvoudig: de coördinaten van de nulpunten lees je vrijwel rechtstreeks af uit de formule en het tekenverloop lees je vervolgens af uit de grafiek.

Bij vraag 2 biedt de grafische rekenmachine ook geen hulp omdat het antwoord al gegeven is. Als je bij vraag 3 niet het automatisme van de tweede afgeleide bij de hand hebt, dan kan het tekenen van de grafiek van f' je op het spoor brengen. Aardig is, dat de vraagstelling voortkomt uit de grafiek, een natuurlijke gang van zaken als de grafische rekenmachine wordt gebruikt.

De laatste vraag is betrekkelijk flauw met een grafische rekenmachine. Door x systematisch te vervangen door $2x$ is de grafiek van g eenvoudig op de machine te tekenen. Dit onderdeel lijkt met een grafische rekenmachine niet goed te handhaven. Al met al is dit een opgave die duidelijk inspeelt op een nieuwe tijd waarin de grafiek niet langer het einddoel van een opgave is, maar juist als aanleiding voor vragen en onderzoek geldt.

examen vwo B 1993, tijdvak 1, opgave 3

Opgave 3

Voor elke $p \in [0, 4]$ is met domein $[0, \pi]$ gegeven de functie

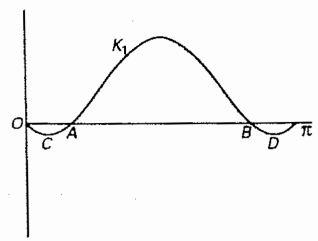
$f_p: x \rightarrow 2\sin^2 x - p\sin x$

Ten opzichte van een assenstelsel Oxy is K_p de grafiek van f_p.

K_1 is in figuur 1 getekend.

A en B zijn snijpunten met de x-as.
C en D zijn punten met een minimale y-coördinaat.

figuur 1

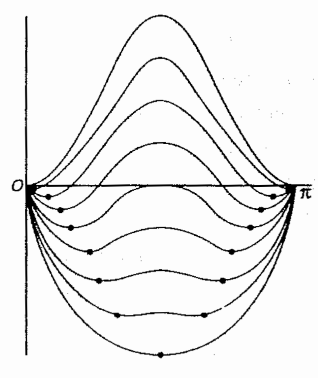


9 □ Bereken de coördinaten van A, B, C en D.

In figuur 2 zijn voor enkele waarden van p de grafieken K_p getekend.
Elke grafiek heeft één of twee punten met een minimale y-coördinaat.

10 □ Bewijs dat al deze punten liggen op de grafiek van de functie
$x \rightarrow \cos 2x - 1$

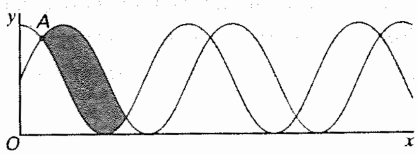
figuur 2



In tegenstelling tot opgave 1 van 1986 komt het bundelkarakter hier fraai uit de verf. Wat kan de grafische rekenmachine hier nog aan toevoegen? Inderdaad niet veel, tenzij vraag 10 wordt opengebroken en bijvoorbeeld zo wordt geformuleerd: 'Al deze punten liggen op een kromme. Vind een vergelijking van die kromme.' Of, andere mogelijkheid: 'Het lijkt er op dat al deze punten een sinusoïde vormen. Onderzoek of dat het geval is.' Het enigszins passieve karakter van de oorspronkelijke vraag wordt daardoor omgebogen, en de vraag bevordert explorerend gedrag in het geval de leerling over een grafisch machientje beschikt.

examen vwo B 1994, tijdvak 1, opgave 4

Opgave 4



In figuur 3 zijn gedeelten van de grafieken getekend van de functies:
$f: x \rightarrow 2\cos^2 x$ en $g: x \rightarrow 1 + \sin 2x$

Er zijn translaties waardoor de grafiek van f afgebeeld wordt op de grafiek van g.

14 □ Geef een voorbeeld van zo'n translatie en bewijs de juistheid van je antwoord.

A is het snijpunt van de grafieken van f en g dat het dichtst bij de y-as ligt (zie figuur 3).

15 □ Bereken in gehele graden nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken van f en g elkaar in A snijden.

16 □ Bereken de oppervlakte van het gebied dat in figuur 3 donker gemaakt is.

Er bestaat een $p \in [0, \pi]$ met de eigenschap dat de functie
$h_p: x \rightarrow f(x + p) + g(x)$ een constante functie is.

17 □ Onderzoek voor welke waarde van p dit geldt en bewijs de juistheid van je antwoord.

Bij vraag 14 is het bezit van een grafische rekenmachine duidelijk een voordeel: er kan gemakkelijk worden geëxperimenteerd en geverifieerd. De wiskundig iets relevantere vraag naar *alle* translaties die het gewenste effect hebben, ligt dan misschien wat meer voor de hand. We hebben hierbij aangenomen dat het domein van de functies $\mathbb{R}$ is, hetgeen ongetwijfeld de bedoeling van de opstellers was, maar ten onrechte niet is vermeld.

Bij vraag 15 is er ook een omissie. Er zal moeten blijken uit de tekst dat de assen van het stelsel gelijk geschaald zijn. Computergrafieken kunnen met een druk op de knop verticaal of horizontaal worden opgerekt en het onderliggende rooster bestaat zelden uit vierkantjes. Het begrip hoek is minder betrekkelijk en daar zal in de redactie rekening mee moeten worden gehouden.

Bij de presentatie van vraag 16 is de bekende 'shade-techniek' van de grafische rekenmachine gehanteerd.

De aardige vraag 17 werd in de Volkskrant van 31 mei 1994 de moeilijkste, ja een haast onmogelijke, opgave genoemd. Van leerlingen die geleerd hebben te spelen met grafieken op het schermpje van de rekenmachine, zou je hier weinig problemen bij het onderzoek verwachten. Het bewijs daarna vraagt natuurlijk een adequaat toepassen van geleerde analytische technieken.

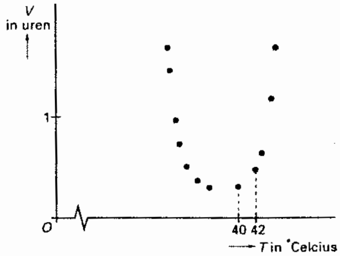
wiskunde A-examen

Bij de analyse-vraagstukken uit wiskunde A-examens is de gegeven grafiek meestal niet het resultaat van een formule, maar van een reeks empirisch bepaalde gegevens. De formules die gebruikt worden in het examen hebben dan op empirische gronden vorm gekregen. Met de gegeven formules moeten leerlingen bijzondere kenmerken van de situatie verklaren of bepalen. Vergelijkingen worden opgesteld en opgelost. Is het hier niet voldoende dat leerlingen met behulp van de grafische rekenmachine de antwoorden benaderen uit de grafieken van de gegeven formule? Waar is de fout namelijk groter: in de benadering met de machine of in de gegeven formule? Een voorbeeld dat dit dilemma illustreert is de volgende examenopgave.

examen vwo A 1994, tijdvak 1, opgave 4

Opgave 4 Colibacteriën

Bij het verteren van voedsel spelen colibacteriën een belangrijke rol. Zij komen voor in de darmen. In laboratoria wordt veel onderzoek gedaan naar de groei van populaties van colibacteriën. Daarbij gebruikt men een kweekvloeistof waarmee men de omstandigheden zoals die in de darmen voorkomen, zoveel mogelijk nabootst.
Bij constante temperatuur blijken deze populaties exponentieel te groeien. Men meet de verdubbelingstijd (V), dat is de tijd in uren die het experiment moet duren om twee keer zo veel bacteriën te krijgen. Uit waarnemingen blijkt dat V afhangt van de ingestelde temperatuur (T) in graden Celsius (zie figuur 5).



15 □ Is de groei van de populatie bij 42 °C sterker dan de groei bij 40 °C? Licht het antwoord toe met behulp van figuur 5.

Binnen het temperatuurgebied waarin de waarnemingen zijn gedaan, blijkt men het verband tussen T en V redelijk te kunnen benaderen met de formule:

$$V = \frac{16{,}9}{-T^2 + 75T - 1350}$$

16 □ Bereken bij welke temperatuur de groei volgens de formule het sterkst is.

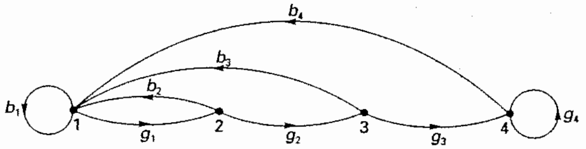
In deze opgave is vraag 16 met de grafische rekenmachine eenvoudig op te lossen. Teken de grafiek van V, en benader het antwoord. Twee cijfers achter de komma lijkt voldoende nauwkeurig. Interessanter zijn wat meer vragen over de grafiek. Wat betekenen die twee asymptoten voor de verdubbelingstijd van de colibacteriën? Bij een wat andere representatie van de gegevens, bijvoorbeeld op milimeterpapier en met de twee asymptoten, zouden leerlingen met een grafische rekenmachine zelf kunnen proberen het verband tussen T en V met een formule te benaderen. Dergelijke vragen leiden tot waardevolle activiteiten als het vertalen van grafische kenmerken in formules.

Een ander terrein waarop de grafische rekenmachine van dienst kan zijn is 'matrices'. Het onderwerp matrices kan met behulp van de grafische rekenmachine een meer 'actieve' vorm krijgen. Het tijdrovende rekenwerk van het vermenigvuldigen van matrices wordt door de machine overgenomen. Leerlingen kunnen nu zelf onderzoeken wat een overgangsmatrix over een bepaalde situatie zegt. Zo kan meer de nadruk gelegd worden op het gebruik van de matrix als model. Wat kun je ermee? Wat zijn de gevolgen van kleine veranderingen? De volgende examenopgave is een illustratie hiervan.

examen vwo A 1994, tijdvak 1, opgave 3

Deze opgave gaat over het onderhoud van de Chaparral vegetatie, een zeer brandbaar struikgewas. Van de situatie wordt met een graaf een model gemaakt. De vegetatie wordt voor dit model verdeeld in vier leeftijdsklassen. De vier punten in de graaf staan voor de oppervlakte die bezet wordt door iedere leeftijdsklasse. De verbindingen in de graaf geven de overgangen tussen de leeftijdsklassen weer. Een belangrijke rol bij deze overgangen speelt de verbranding van de vegetatie. Daar beginnen namelijk weer jonge planten te groeien. De eerste vraag van de opgave is:

Bij dit model kan de volgende graaf getekend worden:



met b_i = het gedeelte van klasse i dat verbrandt ($b_i < 1$) en
met g_i = het gedeelte van klasse i dat niet verbrandt ($g_i < 1$).
Bij deze graaf kan een overgangsmatrix M worden opgesteld, waarin b_i en g_i voorkomen.

11 □ Stel deze matrix M op in de vorm:

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ \text{naar} & \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \end{array}$$

Vervolgens zijn op een aantal tijdstippen de oppervlaktes van de verschillende leeftijdsklassen gegeven. Hiermee moeten leerlingen waarden van de matrix M berekenen. Voor $n > 20$ blijkt de n-de macht van de matrix niet meer te veranderen na afronding op twee decimalen. Die overgangsmatrix is gegeven en er wordt gevraagd welke conclusies kunnen worden getrokken over de samenstelling van de Chaparral vegetatie.

Tot slot geeft de opgave nieuwe informatie over de vegetatie. Het blijkt dat de beheerders van de Chaparral ook nog gecontroleerde 'afbranding' toepassen. Direct na elke periode van 10 jaar verbrandt men: 2.5% van klasse 2, 1.3% van klasse 3 en 7.2% van klasse 4. Dit proces kan in een matrix B worden weergegeven zodat met het matrixprodukt $B * M$ het proces met bewuste afbranding beschreven wordt. Een boeiend gegeven, een aantal vragen komen direct naar voren: waarom juist die percentages? Wat bereiken ze met die afbranding? Vragen die de context serieus nemen. De laatste vraag van deze opgave is echter: Stel matrix B op.

Wat de clou van het probleem zou kunnen zijn, is een opgave geworden die in feite identiek is aan de eerste vraag van het probleem. Dit is waarschijnlijk het gevolg van het tijdrovende rekenwerk die matrix-operaties met met zich meebrengen. Eigen onderzoek door leerlingen is daardoor bijna onmogelijk. Met de grafische rekenmachine kunnen leerlingen op dit moment zelf strategieën bepalen en zelf onderzoeken wat de gevolgen van de afbranding zijn.

terugblik

wiskunde B

Was in de tachtiger jaren bij veel examenopgaven het tekenen van de grafiek de kroon op het werk (functie-onderzoek), in de laatste paar jaren tekent zich voorzichtig een nieuwe ontwikkeling af. Daarbij is het plaatje, in de vorm van één of meer grafieken, vaak het startpunt van onderzoek. Vooral in de havo B-examens is dit, onder impulsen van het nieuwe programma het geval. In sommige opgaven wordt, zo lijkt het wel, al op de komst van de grafische rekenmachine geanticipeerd. Andere analyse-opgaven zouden zich echter pas na zeer ingrijpende wijziging in de vraagstelling lenen voor toetsing met de grafische rekenmachine. In het algemeen is de verwachting dat onder invloed van de grafische rekenmachine een nieuw type vragen kan ontstaan, waarbij onderzoekend gedrag van de leerling wordt getoetst.

Als we de huidige examenpraktijk wiskunde B vergelijken met die van sommige andere landen, dan bestaat de indruk dat de inpassing van de grafische rekenmachine in Nederland misschien wat soepeler kan verlopen dan elders, omdat in ons land het accent iets meer op inzichtvragen lijkt te liggen. Ook hier moet de opmerking gemaakt worden dat dit vooral de havo-examens wiskunde B betreft.

wiskunde A

Bij wiskunde A geldt een ander verhaal. De functionele verbanden of formules in de analyse-opgaven zijn daar ontleend aan realistische situaties. Bij dit soort toegepaste wiskunde is men dan vrijwel altijd geïnteresseerd in redelijk nauwkeurige benaderingen, bijvoorbeeld van nulpunten, extreme waarden, hellingen. De technische verwerking kan dan uitstekend met de grafische rekenmachine gebeuren. Een gevolg daarvan zou kunnen zijn dat in het onderwijs de aandacht wordt verschoven van het vlekkeloos leren toepassen van allerlei differentieertechnieken (voor veel wiskunde A-leerlingen een niet te onderschatten struikelblok) naar het opstellen en het interpreteren van analytische modellen.

Een belangrijk voordeel van de beschikbaarheid van de grafische rekenmachine is voorts dat de gebruikte modellen ook realistisch kunnen zijn, dat wil zeggen dat de erin voorkomende getallen niet zodanig hoeven te worden aangepast dat de leerling er gemakkelijk mee kan opereren. Dat geldt voor wiskunde A in zijn volle breedte, dus behalve bij analyse ook bij algebra (bijvoorbeeld matrixrekening) en statistiek (bijvoorbeeld regressie). Bovendien kunnen ook hier gemakkelijker onderzoeksgerichte vragen worden gesteld, waarbij de output van de machine de bron van onderzoek vormt.

7.4 voorbeelden van vraagstukken nieuwe stijl

Bij wijze van vingeroefening willen we nu een aantal voorbeelden geven van opgaven op eindexamenkaliber waarin de exploratie-gerichte mogelijkheden van de grafische rekenmachine tot uiting komen.

Opgave 1

De volgende functies met domein $\mathbb{R}^+$,

$$f_1 : x \to \frac{x^2+1}{x}, f_2 : x \to (\ln x)^2, f_3 : x \to \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2, f_4 : x \to \sin\frac{2}{x} + 2\sin x\cos x$$

hebben alle een eigenschap gemeen, namelijk deze dat voor iedere x uit het domein geldt:

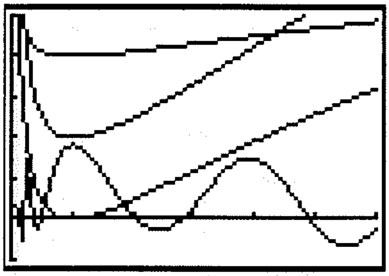
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad (1)$$

a. Toon aan dat f_1, f_2, f_3 en f_4 aan deze eigenschap voldoen.

b. Bekijk de grafieken van deze vier functies. Welke overeenkomst vertonen die grafieken in het punt met x-coördinaat 1? Verifieer analytisch dat dit inderdaad geldt.

c. Toon aan dat de in b. bedoelde eigenschap geldt voor iedere functie met domein $\mathbb{R}^+$ en met de eigenschap (1).

De rol van de grafische rekenmachine beperkt zich hier tot vraag b. Maar zij is daarbij wel essentieel.



Via de plaatjes zal de leerling op het idee komen dat de raaklijn in het punt met $x = 1$ horizontaal is. In geval van twijfel kan inzoomen meer zekerheid geven. De echte zekerheid komt pas na het analytische werk en dat vraagt hier weinig meer dan de beheersing van de techniek van het differentiëren.
Vraag c heeft duidelijk een meer abstract karakter, een echte 'c-vraag'.

Opgave 2
Vergelijk de grafieken van de functies
$f\colon\ x \rightarrow \sin x$ en $g\colon\ x \rightarrow x - \frac{1}{6}x^3$.

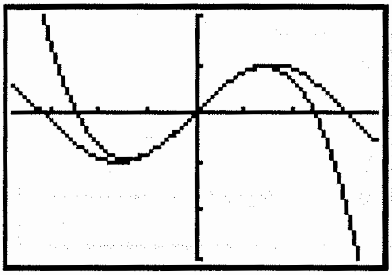
De grafieken lijken in het gebied $-1 \le x \le 1$ samen te vallen.
Door de verschilfunctie $x \rightarrow f(x) - g(x)$ te onderzoeken kan hierover meer klaarheid worden verkregen.

a. Bereken de eerste, tweede en derde afgeleide van $f - g$ en bewijs hiermee dat de grafieken van f en g slechts samenvallen in het punt (0,0).
b. Bereken de maximale afwijking tussen $f(x)$ en $g(x)$ voor $-1 \le x \le 1$ in 3 decimalen nauwkeurig.

Vergelijk de krommen K en L respectievelijk met de parametervoorstelling
$K : (x, y) = (f(t), f'(t))$ en $L : (x, y) = (g(t), g'(t))$ met $-\pi \le x \le \pi$.

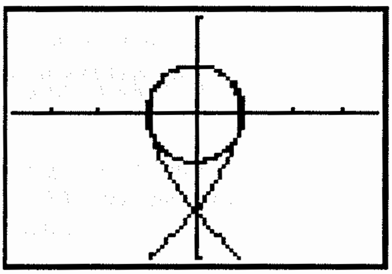
Neem gelijke schalen op de beide assen.
c. Verklaar waarom K een cirkel is.
d. De kromme L lijkt gedeeltelijk samen te vallen met de cirkel, maar dat is schijn. In werkelijkheid hebben K en L precies drie punten gemeenschappelijk. Welke punten zijn dat?
e. Tot welk interval moet het domein van t worden beperkt om L tot een gesloten kromme te maken?
f. Bereken de oppervlakte die dan door L wordt omsloten.

Ook hier prikkelt de voorstelling op het scherm tot analytisch onderzoek.



Natuurlijk moet bij een vraagstuk als dit ook passend onderwijs worden gedacht. Het gebruik van (hogere) afgeleiden om ongelijkheden te bewijzen die niet onmiddellijk met het blote oog zichtbaar zijn, zal wellicht meer aandacht krijgen als de grafische rekenmachine dagelijks wordt gebruikt.

Vraag c is natuurlijk flauw, maar is bedoeld als ruggesteuntje bij d. Je komt daardoor eerder op het idee om naar de som van de kwadraten van de coördinaten te kijken.



Bij vraag e kan de grafische rekenmachine weer worden gedacht als controlemiddel.

Opgave 3

Gegeven zijn de functies f en g met domein $\mathbb{R}$ door: $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ en $g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Vergelijk de grafieken van deze functies op het scherm van een grafische rekenmachine. Kies op de beide assen dezelfde schaal. De grafieken lijken elkaars spiegelbeeld te zijn.

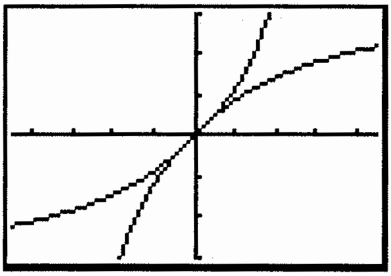
a. Onderzoek of dit inderdaad het geval is.

b. Bereken de afgeleide functies van f en g.

c. De hellingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt (x, y) van de grafiek van f is gelijk aan $\sqrt{y^2 + 1}$.

Bewijs dit eerst door gebruik te maken van f' en vervolgens nog een keer met behulp van g'.

Het plaatje laat zien dat de grafieken gespiegeld liggen ten op zichte van de lijn $x = y$



Het bewijs is verder een kwestie van algebra.
Bij c zal het meetkundige inzicht dat de hellingscoëfficient omgekeerd wordt na spiegeling in de lijn $x = y$ benut moeten worden bij het tweede bewijs.

De grafische rekenmachine geeft hier een visuele introductie van het probleem, meer niet. Dit zou uiteraard even goed met een illustratie bij de opgave kunnen geschieden. Een variatie op deze opgave kan zijn:

a*: Bewijs dat dit inderdaad het geval is.

Voeg een vraag toe in deze geest:

Beschouw de functie $x \rightarrow f(x) + 1$.
Welke instructie moet je een grafische rekenmachine geven om het spiegelbeeld van deze grafiek te krijgen ten opzichte van de lijn $x = y$?

Op deze manier is de rol van de grafische rekenmachine nog wat meer essentieel.

Opgave 4

De functie f met domein IR is gegeven door de volgende twee regels:

(1) $f(x) = 1 - x^2$ voor $-1 \leq x \leq 1$

(2) f is periodiek met periode 2.

a. Iemand wil de grafiek van f op zijn grafische rekenmachine tekenen in het gebied $-1 \leq x \leq 5$
Welke instructie(s) kan hij invoeren?

b. Een horizontale lijn $y = a$ snijdt de complete grafiek van f in een oneindige reeks punten.
Voor $a = 0$ en $a = 1$ zijn die puntenreeksen equidistant, dat wil zeggen dat de afstanden tussen opvolgende punten onderling gelijk zijn. Er is nog een derde waarde voor a waarvoor geldt dat die puntenreeks equidistant is. Welke waarde is dat?

c. Hoeveel snijpunten heeft de lijn $y = 0.01x$ met de grafiek van f?

Het antwoord op vraag a zal per type grafische rekenmachine kunnen verschillen. Dat maakt de vraag minder geschikt in situaties waarbij leerlingen van één leraar over verschillende machines beschikken. Nu lijkt dit om organisatorisch-didactische redenen toch al ongelukkig.

Bij vraag b kan de machine weer als controlemiddel dienen. Bij vraag c wordt dat moeilijker; er kan wel iets wordt afgelezen, maar het denkwerk zal toch de doorslag moeten geven. Naar ons idee een mooi voorbeeld van interactie tussen hoofd en machine.

Opgave 5

Het vierkant met zijden $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ wordt door de lijn $y = x$ in twee gelijke delen verdeeld.

De krommen $y = x^2$ en $y = x^{0.5}$ verdelen het vierkant in drie delen met gelijke oppervlakte.

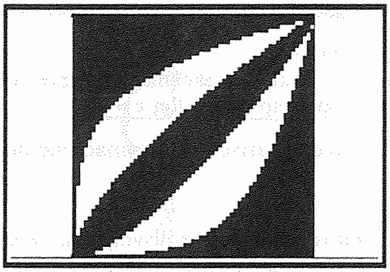
a. Bewijs de tweede uitspraak.

Bij de volgende vragen gaat het over verdelingen van het vierkant door rechte of kromme lijnen die de punten (0,0) en (1,1) met elkaar verbinden. Daarbij mogen geen 'geknikte' lijnen worden gebruikt.

b. Hoe kun je het vierkant met zulke lijnen in vier delen met gelijke oppervlakte verdelen? Geef vergelijkingen van de gebruikte lijnen.

c. Dezelfde vraag voor vijf delen met gelijke oppervlakte.

Hierbij is geen prominente rol van de grafische rekenmachine weggelegd, hoewel de leerling zijn bevindingen optisch min of meer kan controleren:



Zoals eerder opgemerkt is bij sommige grafische rekenmachines ook een numerieke controle mogelijk. Dit kan aanleiding zijn tot een soort rechtsongelijkheid als de mogelijkheid tot numeriek integreren niet als minimumeis aan de machine wordt gesteld.

Opgave 6

Met domein $0 \leq x \leq 1$ is de functie f gegeven door $f(x) = 3x(1 - x)$.

Verder beschouwen we de 'herhaal-functies' $x \rightarrow f(f(x))$, $x \rightarrow f(f(f(x)))$, enz.

De eerste herhaalfunctie zullen we nu verder aanduiden met f_2, de tweede met f_3, enz.

a. Alle herhaalfuncties zijn veeltermfuncties. Van welke graad is de functie f_6 ?

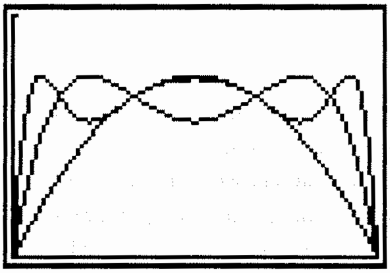
b. Bekijk de grafieken van f, f_2, f_3 in het vierkante gebied $0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1$.
Het lijkt er op of f_2 en f_3 een absoluut maximum hebben dat even groot is als dat van f.
Beredeneer waarom dat inderdaad het geval moet zijn.

c. Er zijn, behalve (0,0) en (1,0), nog twee punten, zeg P en Q, die op alle drie de grafieken liggen.
Wat zijn de exacte coördinaten van die punten?

d. Beredeneer dat alle functies f_n (met $n = 2, 3, 4, ...$) een grafiek hebben die door P en Q gaat.

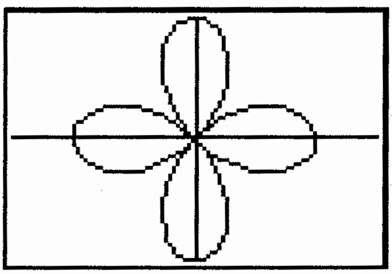
Iteratie van functies staat midden in de belangstelling van modern wiskundig onderzoek (chaos, dynamische processen) en kan als inspiratiebron dienen voor aardige analysevraagstukken op vwo-niveau.

Daarbij is de grafische rekenmachine onmisbaar, gezien de snel toenemende complexiteit van de formules. Door de variabele x in de basisfornule $y_1 = 3x(1-x)$ te vervangen door y_1 komt de nieuwe formule $y_2 = 3y_1\ (1-y_1)$ tot stand, daarin kan dan weer y_1 worden vervangen door y_2 enz.
Het plaatje oogt fraai en roept onmiddellijk de in b en c gestelde vragen op.:



f_3 heeft nog een locaal maximum dat misschien net onder het maximum van f ligt. Alweer een nieuwe probleemstelling. Een trapje hoger komen we als we de factor 3 variëren. Kortom, dit is wat je noemt een rijke bron.

Opgave 7
De kromme die is gegeven door $(x, y) = (\cos 2t \cdot \cos t\ , \cos 2t \cdot \sin t\ )$ met $0 \leq t \leq 2\pi$ is een 'bloem' met vier blaadjes.
De 'toppen' van die bloem zijn de punten die op maximale afstand van het middelpunt liggen; dat zijn hier de punten $(1{,}0)$, $(0{,}1)$, $(-1{,}0)$ en $(0{,}-1)$.



a. Toon aan dat $x^2 + y^2 = (x^2 - y^2)^2$ een vergelijking van de bloem is.
   Verklaar hieruit de viervoudige symmetrie van de bloem.
b. Vervang in bovenste parametervoorstelling $\cos 2t$ tweemaal door $\cos 3t$.
   Bereken de coördinaten van de toppen van de nieuwe bloem.
c. Welke algemene regel kun je geven voor het aantal blaadjes van de bloem gegeven door $(x,y) = (\cos nt \cdot \cos t\ , \cos nt \cdot \sin t)$ voor $0 \leq t \leq 2\pi$ en $n = 2, 3, 4, 5,...$?
   Hoe is die regel te verklaren?

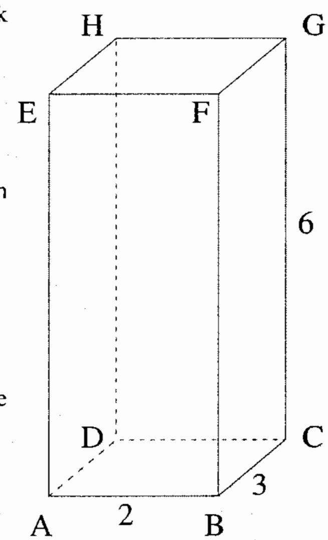
Zoals elders in dit boek al is opgemerkt leent de grafische rekenmachine zich om wat meer complexe krommen te onderzoeken en in dit geval zelfs een hele familie van krommen. Dit onderwerp biedt een uitgelezen mogelijkheid om met goniometrische functies op een zinvolle wijze te exerceren. In het bovenstaande vraagstuk is de grafische machine praktisch onontbeerlijk.

De hypothese: 'n is even, dan $2n$ blaadjes, n is oneven dan n blaadjes' ligt erg voor de hand, het bewijs vraagt wat wiskundig inzicht.

7.5 conclusie

Op het moment dat de grafische rekenmachine een plaats in het onderwijs krijgt, hoort daar zeker ook een rol in de toetsing bij. De eerste ervaringen op de proefscholen zijn bemoedigend, al moet daaraan worden toegevoegd dat men in het algemeen nogal voorzichtig te werk is gegaan. Immers, op het eindexamen zouden de betreffende leerlingen het apparaat niet mogen gebruiken. Als voorbeeld noemen we hier een vraagstuk uit een proefwerk over het onderwerp optimaliseren. In april '93 heeft de klas het gelijknamige pakket (zie 5.3) doorgenomen. Het proefwerk werd afgesloten met onderstaande opgave.

1. Een beestje kruipt over de buitenkant van de balk ABCD.EFGH van A naar G.
   a. Hoe lang is de weg als het beestje van A diagonaal naar F loopt en dan over de ribbe naar G? En hoe lang is de route ABG?
   De kortste weg van A naar G loopt over een punt P op ribbe BF.
   b. Bereken exact hoe groot PB is (m.b.v. differentiëren).
   c. Controleer het antwoord van b. met de TI-81. Schrijf precies op hoe je dat doet.
   d. Bepaal de plaats van P op een meetkundige manier.



Globaal gesproken is deze opgave goed gemaakt. De meeste problemen ontstonden bij onderdeel b. Dat verraste ons, omdat leerlingen aangaven juist het differentiëren, waar ze al langer aan gewend waren, als een aantrekkelijke methode te beschouwen.

Aardig is onderdeel c, waarin de grafische controle met de rekenmachine gevraagd wordt. Dit onderdeel leverde geen problemen op. Een lastig aspect bij dit soort vragen is het feit dat leerlingen het (terecht) moeilijk vinden wat ze op moeten schrijven. En voor de docent is het soms moeilijk om het antwoord te beoordelen, afgaande op soms onduidelijke aantekeningen. De wijze waarop van het werk met de grafische rekenmachine verslag wordt gedaan, moet dus tijdens de lessen al een punt van aandacht zijn. Deze problematiek zal zeker ook een rol gaan spelen bij invoering in de landelijke eindexamens.

We merken nog op dat onderdeel c natuurlijk niet gevraagd kan worden als niet elke leerling de beschikking heeft over *dezelfde* grafische rekenmachine.

Bij de inpassing van de grafische rekenmachine op de centrale eindexamens zijn er verschillende opties denkbaar, die we maar even aanduiden met 'toelaten' respectievelijk 'verplicht stellen'.

De eerste optie is 'toelaten'. Het komt er op neer dat de leerling een grafische rekenmachine mag gebruiken, maar het hoeft niet. Het examen dient dan zo te worden opgesteld dat de gebruiker zo weinig mogelijk aan de machine heeft, om ongelijkheid tussen de leerlingen te voorkomen. In feite neemt de opsteller van het examen de verantwoordelijkheid voor de afwezigheid van de machine. Er zijn aan deze optie een aantal nadelen verbonden:

- Het is bijna ondoenlijk om de opgaven zo te maken dat de leerling die is toegerust met een grafische machine geen enkel voordeel heeft; bepaalde controles van antwoorden en grafieken zijn altijd wel uitvoerbaar. Het is denkbaar dat zij getraind zijn in allerlei foefjes om dat te doen. Er zal dus altijd een ongelijkheid bestaan tussen gebruikers en niet-gebruikers.
- Daar waar in scholen wèl integraal gebruik wordt gemaakt van de grafische machine zal er een zekere discrepantie ontstaan tussen het gegeven onderwijs en de uiteindelijke examinering;
- Het onbenut blijven van de mogelijkheden die de machine ook bij de toetsing biedt, is onderwijskundig gezien zeer onbevredigend.

De tweede optie is 'verplichten'. Deze optie gaat ervanuit dat elke leerling over een grafische rekenmachine beschikt. Net als in de huidige examenpraktijk met de gewone rekenmachine is het risico, dat een leerling neemt door geen apparaat te hebben, voor hemzelf. Het grote voordeel is dat het gebruik van de grafische rekenmachine werkelijk in het examen geïntegreerd kan worden. Zo kan bijvoorbeeld de uitvoer van de machine bij een probleem een rol spelen in de vervolgvragen. Ook hier zijn nadelen te bedenken:

- Er zal een probleem van verslaggeving ontstaan: hoe moeten leerlingen opschrijven wat ze met de grafische rekenmachine gedaan hebben en welke uitvoer dat geeft? Moeten plaatjes worden overgetekend?
- Er bestaat een gevaar dat het accent in de toets teveel op de beheersing van de machine komt te liggen en te weinig op de wiskunde.

- Indien grafische rekenmachines bij de examinering toegelaten worden, ontstaan er bovendien enkele organisatorische moeilijkheden. Allereerst is er de technische vraag aan welke eisen de machine precies moet voldoen om toegelaten te worden. Moeten er minimum en/of maximum eisen gesteld worden? Vooralsnog ligt het voor de hand om geen machines toe te laten, die in staat zijn tot computeralgebra. Verder zouden de machines in de 'oorspronkelijke staat' moeten te zijn, wat wil zeggen dat het werkgeheugen leeg is ('reset'). Als op dit punt overeenstemming bestaat, is het tweede probleem hoe dat gecontroleerd kan worden. Met betrekking tot deze en andere praktische punten moet nog onderzoek gedaan worden.

Een derde optie is 'toelaten op het centrale eindexamen' en 'verplichten op tenminste één schoolonderzoekstoets'. Het voordeel is dat men per school een bepaald type machine kan voorschrijven en daar de vragen op toespitsen, zoals bijvoorbeeld in het bovenstaand proefwerkvraagstuk, een voordeel dat uiteraard ook geldt voor optie twee. Met betrekking tot het centraal schriftelijk examen zal dan geen ongelijkheid binnen één school bestaan, wel eventueel tussen scholen onderling. Deze optie is echter tamelijk tweeslachtig en heeft net zo min als de eerste optie onze voorkeur.

8 Conclusies en aanbevelingen

8.1 inleiding

In de voorafgaande hoofdstukken zijn verschillende aspecten van het project beschreven. Allereerst is ingegaan op de situatie in binnen- en buitenland met betrekking tot het gebruik van de grafische rekenmachine. Vervolgens is de opzet van het onderzoek beschreven en zijn enige veronderstellingen geformuleerd over de mogelijke invloed van bedoelde apparatuur op het wiskundeonderwijs. Daarbij is een duidelijk verband gelegd met de door het Freudenthal instituut gepropageerde visie die bekend is onder de naam 'realistisch wiskundonderwijs'. Veel plaats is ingeruimd voor de beschrijving van experimenteel lesmateriaal en van observaties tijdens de lessen. Deze lesverslagen vormen de bron van reflectie en kwalitatief onderzoek van de in hoofdstuk 3 geformuleerde hypothesen. Tenslotte is de mogelijke rol van de grafische rekenmachine bij examens besproken. In het vervolg worden de conclusies van het onderzoek nog wat aangescherpt en wordt een aantal aanbevelingen gedaan over de inpassing van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs van de bovenbouw van vwo en havo en over de toelating van het apparaat bij het centrale eindexamen.

Vooraf willen we nogmaals benadrukken dat de randvoorwaarden bij dit project een sterk beperkend karakter hadden. De leerlingen konden de grafische rekenmachines niet mee naar huis nemen, omdat dezelfde apparaten ook in andere klassen en lessen werden gebruikt. Verder kon tijdens het experiment niet al te zeer van het gebruikelijke programma worden afgeweken om in de pas te blijven met de parallelklassen. En tenslotte was er de essentiële beperking dat de leerlingen opgeleid werden voor het traditionele eindexamen waarbij de grafische rekenmachine niet toegelaten is. Dit alles maakte het natuurlijk onmogelijk om met een vernieuwd curriculum te experimenteren.

Ondanks deze beperkingen, waardoor een onderzoek naar een grondige herziening van het programma niet kon worden uitgevoerd, is het besef ontstaan dat het effect van de invoering van de grafische rekenmachine dieper gaat dan men misschien zou verwachten. Zelfs wanneer het analyse- en algebra-programma grosso modo ongewijzigd zou blijven, leidt de grafische rekenmachine tot wezenlijke veranderingen op lokaal niveau: het beeld bij een concept wordt rijker, de invalshoek wijzigt, de vragen krijgen een ander karakter, het onderwijs wordt levendiger. Eén van de conclusies van het project is dan ook dat op dit niveau de invloed van de grafische rekenmachine ingrijpend zal zijn en dat het curriculum als het ware van binnenuit zal veranderen.

8.2 conclusies

Hieronder staan de belangrijkste conclusies van het onderzoek op een rijtje. Elke conclusie wordt verderop kort toegelicht.

1 De grafische rekenmachine verwerft zich een plaats in het wiskundeonderwijs.
2 De grafische rekenmachine is in het huidige curriculum van havo en vwo voor leerlingen een waardevol hulpmiddel bij het leren van wiskunde. Het is een uitstekend instrument om onderwerpen uit de wiskunde op een explorerende en onderzoekende manier te benaderen.
3 De grafische rekenmachine maakt probleemsituaties met realistische gegevens beter toegankelijk.
4 De grafische rekenmachine verandert de inhoud van het leerplan tenminste 'van binnenuit', in die zin dat een meer dynamische en integratieve behandeling van wiskundige onderwerpen wordt gestimuleerd.
5 De grafische rekenmachine vereist van de leerling meer flexibiliteit op het punt van vaardigheden en technieken.
6 De inpassing van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs veronderstelt de ontwikkeling van nieuwe vaardigheden van de wiskundedocent.

1 De grafische rekenmachine verwerft zich een plaats in het wiskundeonderwijs.

De grafische rekenmachine is geen ééndagsvlieg. Aanleiding voor deze conclusie vormen de technologische ontwikkelingen en de snelheid waarmee de grafische rekenmachine in andere landen in het onderwijs geïmplementeerd wordt (zie hoofdstuk 2). De kracht van de machine is gelegen in een combinatie van factoren: het arsenaal van reken- en tekenmogelijkheden, de gebruikersvriendelijkheid en het formaat.

Het negeren van het bestaan van de grafische rekenmachine is, mede gezien de prijsontwikkelingen, geen optie die van werkelijkheidszin getuigt.

2 De grafische rekenmachine is in het huidige curriculum van havo en vwo voor leerlingen een waardevol hulpmiddel bij het leren van wiskunde. Het is een uitstekend instrument om onderwerpen uit de wiskunde op een explorerende en onderzoekende manier te benaderen.

In het huidige curriculum, zowel wat betreft wiskunde A als B, kan de grafische rekenmachine bij allerlei onderwerpen een handig gereedschap zijn. De meest in het oog springende eigenschappen van het apparaat hebben betrekking op het tekenen van grafieken en krommen, op het rekenen met matrices en op statistische berekeningen met name op het gebied van correlatie en regressie. Op zijn minst kan de machine worden gebruikt om de met hoofd en hand gevonden resultaten te controleren. Maar er is veel meer. Leerlingen kunnen snel de gevolgen van een verandering in een formule of matrix onderzoeken. Belangrijk hierbij is

dat leerlingen dit onderzoek op eigen initiatief kunnen uitvoeren en sturen. Zoals uitgebreid besproken is in hoofdstuk 6 daagt de grafische rekenmachine uit tot zelfstandig onderzoek, exploratie, ontdekking en bewijsvoering. De kracht van het snel tekenen van een groot aantal grafieken of krommen is hierbij bijzonder waardevol en stimulerend. De observaties van het classificeren van derdegraads functies en van het indelen van slaklijnen (zie 6.3 respectievelijk 5.5) zijn veelzeggend. Dit aspect van de grafische rekenmachine, het geven van directe feedback, is de allerbelangrijkste bijdrage aan het wiskundeonderwijs.
De meeste leerlingen 'adopteren' de grafische rekenmachine vrij eenvoudig. Slechts een enkeling houdt moeite met de bediening. De mate waarin de leerlingen in staat zijn om voordeel te hebben van de machine, loopt uiteen. Leerlingen moeten leren om toepassingen van het apparaat als zodanig te onderkennen.

3 *De grafische rekenmachine maakt probleemsituaties met realistische gegevens beter toegankelijk.*
Realistische gegevens leiden vaak tot ingewikkelde formules met onaantrekkelijke coëfficiënten. Het reken- en tekenwerk wordt (te) lastig om zonder elektronische hulp uit te voeren. De grafische rekenmachine ondervangt deze moeilijkheden, waardoor meer levensechte toepassingen binnen het bereik van de leerlingen komen. Door de leerlingen vrij te maken van het bewerkelijke technische gedeelte van de oplossingsmethode, wordt bovendien alle aandacht gericht op 'hogere' vaardigheden zoals de constructie van het wiskundig model en de strategie bij de oplossing van het probleem.
Een punt dat bij het gebruik van realistische contexten in combinatie met de grafische rekenmachine herhaaldelijk naar voren komt, is het verschil in de diverse talen die daarbij in het geding zijn: de natuurlijke taal, de wiskundetaal en de taal van de machine. Het blijkt dat leerlingen, zeker in het begin, hierdoor wel eens in de war raken. Ze moeten als het ware op drie fronten tegelijk functioneren. Het soepel leren omgaan hiermee zal de nodige didactische aandacht vragen.

4 *De grafische rekenmachine verandert de inhoud van het leerplan tenminste 'van binnenuit', in die zin dat een meer dynamische en integratieve behandeling van wiskundige onderwerpen wordt gestimuleerd.*
Dat de benadering van veel onderwerpen uit de 'analyse' meer aanschouwelijk zal worden, is bijna vanzelfsprekend. De grafiek zal eerder een vertrekpunt van functie-onderzoek zijn, dan een eindprodukt daarvan (Kindt, 1992[a]). Algemener gesteld: een grafiek of kromme respectievelijk als plaatje van een functioneel verband of als baan van een bewegend punt, zal vaak aanleiding geven en motivatie zijn voor probleemstellingen en wiskundige activiteiten. Deze methodische blikwisseling kan van grote invloed zijn op de inhoud en de didactiek van het analyseonderwijs.

Daarnaast stellen we dat een zekere vernieuwing van onderwerpen door de grafische rekenmachine wordt gestimuleerd. De behandeling van bijvoorbeeld een onderwerp als poolcoördinaten, op dit moment geen verplichte stof, ligt vanwege de machinefaciliteit voor de hand. Andere voorbeelden van nieuwe onderwerpen die voor het grijpen liggen, zijn: afrondingsfuncties (zoals INT) en testfuncties (karakteristieke functies van intervallen). Een nieuw onderwerp dat indirect verbonden is met de grafische rekenmachine en dat mogelijk kandidaat zou kunnen zijn voor een vernieuwd wiskunde B-programma, is de ontwikkeling van standaardfuncties in machtreeksen.

Bij het gebruik van de grafische rekenmachine komen gemakkelijk verschillende aanpakken van één probleem naar voren. Hierdoor vervaagt de scheidingslijn tussen de verschillende wiskundige gebieden. Een vergelijking kan puur algebraïsch worden opgelost, maar de oplossing kan ook via een grafiek met een gewenste nauwkeurigheid worden benaderd (Goddijn, 1994). Aandacht voor overeenkomsten en verschillen tussen deze methoden is waardevol en onontbeerlijk voor modern wiskundeonderwijs. Het zal de leerling als het ware 'wiskundig wendbaar' maken.

Een mooi voorbeeld van wiskundige wendbaarheid geeft het pakket Optimaliseren, waarin analytisch-algebraïsche, grafische en meetkundige methoden met elkaar zijn verweven.

5 *De grafische rekenmachine vereist van de leerling meer flexibiliteit op het punt van vaardigheden en technieken.*

De beheersing van een aantal routines lijkt onder invloed van de grafische rekenmachine minder relevant te worden Daarbij denken we vooral aan het uitvoeren van het standaard functieonderzoek en aan het oplossen van ongelijkheden via tekenschema's.

Daarentegen zullen andere technieken aan belang winnen. Voor het gebruik van de grafische rekenmachine is een vereiste dat leerlingen een domein en bereik goed kunnen schatten uit een formule of uit een probleemsituatie. Het 'denken in grafieken', het maken van gevolgtrekkingen uit een grafiekenplaatje, zal een (nog) meer prominente plaats gaan innemen. Ook zal er een toenemende aandacht zijn voor de betekenis en de nauwkeurigheid van een numerieke benadering. Deze nieuwe vaardigheden lijken meer inzicht te vragen dan de thans gangbare technieken, waarbij we de kanttekening maken dat de frisheid van het nieuwe ook wel eens bedrieglijk kan zijn. Inzichtelijke technieken kunnen zo geoefend kunnen worden dat zij verworden tot routine, waarbij het inzicht geheel naar de achtergrond is verdrongen (van Hiele, 1973).

Al met al durven we wel de verwachting uit te spreken dat het gebruik van de grafische rekenmachine flexibel en inzichtelijk oplossingsgedrag zal bevorderen.

6 *De inpassing van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs veronderstelt de ontwikkeling van nieuwe vaardigheden van de wiskundedocent.*
Van de wiskundedocent die in zijn lessen de grafische rekenmachine zal laten gebruiken, wordt een aantal nieuwe vaardigheden geëist. Allereerst dient hij of zij het opereren met de grafische rekenmachine goed, zo niet volledig, te beheersen. Daarnaast moet het onderwijzen met de grafische rekenmachine geleerd worden: wanneer en hoe wordt de demonstratiemachine gebruikt, wanneer en hoe gebruiken de leerlingen hun machientje, hoe kan de les het best worden georganiseerd? De docent moet oog krijgen voor de didactische mogelijkheden en toepassingen van het instrument. En tenslotte moet hij of zij een visie ontwikkelen op de rol van de grafische rekenmachine bij het wiskundeonderwijs (Dijksterhuis, 1993). Dit proces blijkt tijd te vergen. In de aanbevelingen wordt nader ingegaan op de begeleiding die dit verdient in de vorm van nascholing.

8.3 aanbevelingen met betrekking tot de eindexamens

Met betrekking tot de eindexamens doen we de volgende aanbevelingen:
1 De grafische rekenmachine moet bij de toetsing worden toegelaten. Een vervolgproject waarvan ook experimentele examens met de grafische rekenmachine deel uitmaken, is met het oog op de toekomst dringend gewenst.
2 Op korte termijn moet gestreefd worden naar de landelijke invoering van grafische rekenmachines bij de eindexamens havo en vwo, zowel wiskunde A als wiskunde B. Daarbij zal er van uit moeten worden gegaan dat alle examinandi over een grafische rekenmachine kunnen beschikken.
3 Zodra de grafische rekenmachine bij de eindexamens havo en vwo een verplicht hulpmiddel wordt, zal de vraagstelling moeten veranderen.
4 In het examenreglement zullen criteria opgenomen moeten worden die bepalen aan welke voorwaarden de grafische rekenmachines moeten voldoen om bij het examen te kunnen worden toegelaten.
5 De landelijke invoering van de grafische rekenmachine in de examenprogramma's havo en vwo moet gepaard gaan met een scholingsprogramma voor docenten, waarbij de nascholingsinstituten en de initiële lerarenopleidingen betrokken worden.

1 *De grafische rekenmachine moet bij de toetsing toegelaten worden. Een vervolgproject waarvan ook experimentele examens met de grafische rekenmachine deel uitmaken, is met het oog op de toekomst dringend gewenst.*
Eerder is al beschreven dat de grafische rekenmachine door zowel leerlingen als leraren pas serieus genomen wordt als de machine ook bij het eindexamen gebruikt kan worden. Bij het afgelopen project vormde het ontbreken van exa-

menfaciliteiten een belemmering. De invloed van de grafische rekenmachine kan pas in volle omvang bestudeerd worden als het eindexamen deel uitmaakt van het experiment.

2 *Op korte termijn moet gestreefd worden naar de landelijke invoering van grafische rekenmachines bij de eindexamens havo en vwo, zowel wiskunde A als wiskunde B. Daarbij zal er van uit moeten worden gegaan dat alle examinandi over een grafische rekenmachine kunnen beschikken.*
Gezien de in het algemeen positieve ervaringen van dit project is het goed om, na een periode van zorgvuldige voorbereidingen en experimenten, tot een landelijke implementatie van de grafische rekenmachine te komen in de examenprogramma's havo en vwo. De ontwikkelingen zijn overigens, ook in internationaal perspectief, onafwendbaar in die zin dat de grafische rekenmachine een realiteit is: een betaalbaar, volwassen hulpmiddel bij het beoefenen van wiskunde.

3 *Zodra de grafische rekenmachine bij de eindexamens havo en vwo een verplicht hulpmiddel wordt, zal de vraagstelling moeten veranderen.*
De mogelijkheid om de vanouds gestelde vragen te laten voortbestaan kan nauwelijks ernstig worden genomen, omdat een aantal traditionele vragen direct door de machine kan worden beantwoord. Een alternatief om de examens zo op te stellen dat de leerling zo min mogelijk profijt heeft van de grafische rekenmachine (die dan ook niet verplicht hoeft te zijn), leidt tot een onnatuurlijke vraagstukkencultuur. Bovendien biedt de grafische rekenmachine ruimschoots mogelijkheden tot interessante en nieuwe vraagstellingen, zoals in hoofdstuk 7 is getoond.

4 *In het examenreglement zullen criteria opgenomen moeten worden die bepalen aan welke voorwaarden de grafische rekenmachines moeten voldoen om bij het examen te kunnen worden toegelaten.*
Er zal vanzelfsprekend eenduidigheid moeten bestaan over wat wel en niet mag op het eindexamen. Examenregelingen uit het buitenland geven de volgende suggesties.
Machines mogen niet beschikken over:
- netstroomaansluiting,
- afdrukfaciliteiten,
- symbolische mogelijkheden.

Verder moet de machine:
- geluidloos werken,
- een gewist werkgeheugen hebben,
- binnen bepaalde maximale afmetingen blijven.

De toegestane mogelijkheden van de machine zullen in de toekomst een lastig punt kunnen gaan vormen, zeker als de grens tussen machines die werken met numerieke benaderingen en computeralgebra gaat vervagen.
Verder vereist de voorwaarde van het gewiste werkgeheugen dat de examinatoren voldoende op de hoogte zijn om na te gaan of hieraan voldaan is.

5 *De landelijke invoering van de grafische rekenmachine in de examenprogramma's havo en vwo moet gepaard gaan met een scholingsprogramma voor docenten, waarbij de nascholingsinstituten en de initiële lerarenopleidingen betrokken worden.*
Zoals al eerder vermeld moet een docent die de grafische rekenmachine in het onderwijs gaat gebruiken zich een aantal vaardigheden verwerven. Natuurlijk is de praktijk een leerschool, maar een ondersteuning in de vorm van professionele nascholing lijkt noodzakelijk. Inhoudelijk zou in zo'n nascholing het volgende geleerd moeten worden:
- Het ontwikkelen van eigen vaardigheid in de bediening van de grafische rekenmachine.
- Het ontwikkelen van eigen vaardigheid in het wiskunde bedrijven met behulp van technologie.
- Het leren omgaan met de grafische rekenmachine in de lespraktijk.
- Het ontwikkelen van een visie op wiskunde leren met behulp van technologie.
- Het ontwikkelen van een didactisch gebruik van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs.
- Het leren omgaan met de grafische rekenmachine bij toetsing.

De ervaringen van het project met voorlichting en nascholing leren ons dat een gedifferentieerd nascholingsaanbod het meest tegemoet komt aan de behoefte van de docent.

8.4 aanbevelingen met betrekking tot het curriculum

Hoewel het experiment nauwelijks de gelegenheid bood om met wezenlijk nieuwe leerstof te experimenteren en hoewel wij ons om redenen die op een andere plaats uit de doeken zijn gedaan, vooral hebben gericht op wiskunde B van het vwo, durven wij op grond van de ervaringen enige aanbevelingen te doen omtrent een vernieuwing van de leerplannen van zowel wiskunde A als B. Met name de minst recent ontwikkelde leerplannen (die van het vwo) kunnen door de komst van de grafische rekenmachine tamelijk grondig worden herzien. Zo komen we tot:

1 De invoering van de grafische rekenmachine in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs zal een verandering teweeg moeten brengen in de analyse-onderdelen van de vigerende programma's wiskunde A en B op havo en vwo.
2 Bij de herziening en herverkaveling van de wiskundeprogramma's in het kader van de profielnota zal dan ook de invloed van de grafische rekenmachine in de nabije toekomst en mogelijk die van meer geavanceerde technologische hulpmiddelen in de wat verdere toekomst moeten worden onderzocht.

1 De invoering van de grafische rekenmachine in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs zal een verandering teweeg moeten brengen in de analyse-onderdelen van de vigerende programma's wiskunde A en B op havo en vwo.

Onder de analyse-onderdelen van de programma's wiskunde A en wiskunde B verstaan we hier:
- tabellen, grafieken, formules (wiskunde A havo)
- toegepaste analyse (wiskunde A vwo)
- toegepaste analyse (wiskunde B havo)
- analyse (wiskunde B vwo).

We zullen deze vakonderdelen hierna kortweg aanduiden met TGF(ha), TA(va), TA(hb) en A(vb).

Van deze vier vakonderdelen zal TGF(ha) de minst vergaande invloed van invoering van de grafische rekenmachine behoeven te ondervinden. De analytische en algebraïsche technieken die ter discussie zouden kunnen komen onder invloed van de elektronica, zijn in dit vakonderdeel namelijk duidelijk minder aanwezig dan in de overige drie vakken. Wel kan worden gesteld dat de grafische zakrekenmachine hier een prachtig hulpmiddel kan zijn en dat het opereren ermee uitstekend past in de lijst van doelen van wiskunde A havo in het algemeen en van TGF(ha) in het bijzonder.

Voor TA(va) geldt een duidelijk ander verhaal. De kern van dit vak, de differentiaalrekening, is niet alleen conceptueel lastig, maar doet met zijn vele regels een sterk beroep op het wiskundig uithoudingsvermogen van de leerling. Op zichzelf hoeft dit niet bezwaarlijk te zijn, maar de praktijk is dat de meeste A-leerlingen de differentiaalrekening als trucmatig ervaren en ernstige problemen hebben met de verwerking van de gebruikte formele technieken. Het *doel* van de analyse bij wiskunde A echter is om veranderingsverschijnselen te bestuderen en analytische modellen van realistische problemen te hanteren; de techniek van de differentiaalrekening is een *middel* bij de verwerking van de modellen. Die verwerking nu kan gemakkelijk worden overgenomen door de grafische rekenmachine, en daarmee staat een tot nu toe nogal zware component van TA(va) ter discussie. Het lijkt aanbevelenswaardig om te streven naar een meer grafische behandeling van veranderingsgedrag bij functies en bovendien aandacht te schenken aan dis-

crete analytische methoden.
TA(vb) ademt grotendeels dezelfde geest als TA(ha) met dien verstande dat de toepassingssituaties vooral worden gezocht in de bèta-sfeer. De techniek van de differentiaalrekening blijft voor toekomstige studenten aan een technische opleiding in het hoger beroepsonderwijs van eminent belang. De grafische rekenmachine zal hierbij veel meer een ondersteunende dan een vervangende rol spelen. De ontwikkeling van dit programma vond trouwens plaats toen deze nieuwe technologie in beeld kwam en er is enigszins op de komst ervan geanticipeerd. De systematische inpassing van de grafische rekenmachine in het curriculum wiskunde B havo lijkt niet al te problematisch.
A(vb) is, zoals eerder in dit verslag is opgemerkt, het minst moderne van de huidige wiskundeprogramma's. In feite functioneert dit programma al vanaf de invoering van de Mammoetwet (tot 1985 onder de kapstok wiskunde I, vanaf 1985 onder wiskunde B). In het eindverslag van het Hewetproject (Kindt, 1987) staat hierover:

> '... Sinds 1974 draait het wiskunde I-examen om het zogeheten functieonderzoek. Dit ontaardt veelal in een mechanisme zowel bij leerling als leraar. In verband met de opkomst van de microcomputer met zijn vele grafische mogelijkheden zou dit onderdeel grondig moeten worden doorgelicht...'.

Deze bewering heeft nog maar weinig ingeboet aan actuele waarde, integendeel door het meer 'micro' worden van de apparatuur is de geciteerde oproep nog dringender geworden. Het ontbreken van realistische toepassingen en open probleemstellingen en de microscopische aandacht voor gespecialiseerde analysetechnieken zijn in onze ogen de belangrijkste tekortkomingen van het huidige analyse-onderwijs bij wiskunde B.
Tijdens het project is duidelijk geworden dat de grafische rekenmachine een belangrijk hulpmiddel kan zijn bij het doorbreken van de inderdaad nogal mechanistische cultuur van A(vb). Een didactisch doordacht gebruik van de technologische hulpmiddelen biedt rechtstreekse mogelijkheden tot verdieping van zinvolle wiskundige activiteiten als daar zijn: exploratie, ontwikkeling van hypothesen, generalisatie, bewijsvoering. De leerlingen zullen dit als een *verlevendiging* van de wiskunde ervaren. De uitspraken naar aanleiding van het werken met het pakket 'Optimaliseren' (zie paragraaf 6.3) spreken in dit verband boekdelen.
De invoering van de grafische rekenmachine zal hoe dan ook moeten leiden tot een grondige bezinning op het A(vb)-programma.

2 *Bij de herziening en herverkaveling van de wiskundeprogramma's in het kader van de profielnota zal dan ook de invloed van de grafische rekenmachine in de nabije toekomst en mogelijk die van meer geavanceerde technologische hulpmiddelen in de wat verdere toekomst moeten worden onderzocht.*

Het is duidelijk een misvatting dat de overheid zou kunnen volstaan met het eenvoudig toestaan van de machine op het eindexamen. Ervaringen in het buitenland leren dat dit tot vreemde gevolgen kan leiden, zoals een geforceerd nieuwe vraagstukkencultuur. Tijdens het project is gebleken dat er met gebruik van de grafische rekenmachine, veelbelovende mogelijkheden zijn tot fundamentele verrijkingen van het analyse-onderwijs op alle fronten. Op dit punt was het onderzoek echter vooral een verkenning van de mogelijkheden. De beperkende voorwaarden maakten het onmogelijk experimenten te doen met grote eenheden nieuwe leerstof. Voortgaand ontwikkelingsonderzoek gekoppeld aan examenfaciliteiten zal noodzakelijk zijn om aan een verdergaande verbetering en verrijking gestalte te kunnen geven. Dat in het kader van de ontwikkeling van de wiskundevakken in het nieuwe geprofileerde onderwijs, tevens wordt onderzocht in hoeverre het wenselijk is de diverse onderdelen van wiskundevakken te wijzigen, is vanzelfsprekend. Dat daarbij het bestanddeel A(vb) het sterkst voor verandering in aanmerking komt is bijna nog vanzelfsprekender.

8.5 tot slot

Computers en wiskundeonderwijs, het is een oud thema.
In de jaren zeventig was er het programmeren in Ecol en de schrapkaarten van het IOWO. Het gebruik bleef beperkt tot een groep bevlogen wiskundeleraren en hun leerlingen. Toen de microcomputer zich aandiende zeiden de critici: ‘Zie je wel, het is achterhaald’ en ‘Goed dat we gewacht hebben’.

In de jaren tachtig kwamen de computerlokalen en werd er een overvloed aan wiskundige software geproduceerd. Automatische gegevensverwerking werd een officieel bestanddeel van het vak wiskunde A op het vwo, maar bleef buiten het centrale eindexamen. De grote computervlucht die werd verwacht is echter niet gekomen. Praktische bezwaren stonden en staan tussen droom en onderwijs.

In dit decennium hebben we dan de computer in zakformaat, en is er pas echt ‘personal technology’. De praktische bezwaren zijn verdwenen, droom en onderwijs hoeven niet meer te worden gescheiden. Weer zijn er critici die zeggen: ‘Wacht tot het nog mooier is’ en ‘Wacht tot er zakcomputers zijn met algebrapakketten’.
Ontwikkelingen gaan razend snel, zeker. Echter, afwachten doet het ‘leven’ aan het onderwijs voorbijgaan. En het gaat ook weer niet zo vlug dat de grafische rekenmachine niet een aantal jaren mee zou kunnen, alvorens plaats te maken voor krachtiger hulpmiddelen die vooralsnog te duur zijn en ... die een hogere emotionele drempel vormen voor menige leraar. De verwachting dat het gebruik van de grafische zakrekenmachine een opstap is naar modernere technologie is gegrond, doch dat pleit eerder voor een snelle invoering in het onderwijs dan voor een passieve houding.

Literatuur en publikaties

literatuurverwijzingen

Bock, D. de en M. Cleve (1993). De grafische rekenmachine in de wiskundeles. *Uitwiskeling* 9-4, pp. 15-50.

Brink, F. J. van den (1990). W12-16 Zakrekenmachines. *Nieuwe Wiskrant* 10-2, pp. 34-39.

Brink, F.J. van den (1992). W12-16 Zakrekenmachines, goede bedoelingen en voorlopige keuzes. *Nieuwe Wiskrant* 11-3, pp. 14-21.

Demana, F. e.a. (1992). *Precalculus Mathematics, a graphing approach.* New York: Addison-Wesley.

Dijksterhuis, F.J. (1993). Met de TI-81 voor de klas. *Nieuwe Wiskrant* 13-2, pp. 28-33.

Doorman, L.M. (1993). Een ander gezicht van de grafische rekenmachine. *Nieuwe Wiskrant* 12-2, pp. 39-41.

Drijvers, P. (1991). Computeralgebra en wiskundeonderwijs. *Nieuwe Wiskrant* 10-4, pp. 23-26.

Drijvers, P. (1993). Grafieken classificeren met een grafische rekenmachine. *Nieuwe Wiskrant* 12-3, pp. 33-37.

Drijvers, P. (1994[a]). Graphics calculators and computer algebra systems: Differences & similarities. *The International Derive Journal* 1-1, pp. 71-82.

Drijvers, P. (1994[b]). Grafische rekenmachines en computeralgebra in het buitenland. *Nieuwe Wiskrant* 13-4, pp. 29-34.

Goddijn, A. en H. Staal (1994). *Algebra en statistiek.* PRINT-VO reeks no. 22. Hoevelaken: CPS.

Goldenberg, E.P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *Journal of mathematical behavior 7*, pp 135-173.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD β-Press.

Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht.* Purmerend: Muusses.

Idzerda, S. (1994). *GC&A, de grafische rekenmachien bij Toegepaste Analyse binnen Vwo-Wiskunde A*, (doctoraalscriptie wiskunde). Utrecht: Mathematisch Instituut.

Kindt, M. (1987). *Eindverslag Hewet Project.* Utrecht: Vakgroep OW&OC.

Kindt, M. e.a. (1990). *De techniek van het differentiëren.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Kindt, M. (1992[a]). Functie-onderzoek begint met de grafiek I. *Euclides* 67-7, pp. 200-204.

Kindt, M. (1992[b]). Functie-onderzoek begint met de grafiek II. *Euclides* 67-8, pp. 227-230.

Kindt, M. (1993). James Bond, de wet van Snellius en wiskunde B. *Nieuwe Wiskrant* 13-1, pp. 45-50.

Lange, J. de (1987). *Mathematics, insight and meaning.* Utrecht: Vakgroep OW&OC.

Leinhardt, G. e.a. (1990). Graphs and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research* 60 (1), pp 1-64.

Monaghan, J. (1993). New Technology and Understanding in Mathematics Education. In: Bero, P. (ed.). *BISME 3* Conference, Bratislava.

Roodhardt, A. e.a. (1990). *Tabellen, grafieken, formules 2.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Ruthven, K. (1992). *Graphic calculators in advanced mathematics.* Coventry: NCET.

Spek, H. (1990). *Een grafiekenprogramma in de wiskundeles* (met VU-grafiek als voorbeeld). PRINT-VO reeks no. 1. Hoevelaken: CPS.

Tall, D., ed. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer.

Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs.* Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. (1986). *Three Dimensions.* Dordrecht: Reidel.

publikaties

In het kader van het project is een aantal artikelen gepubliceerd. Daarnaast zijn er lespakketten ontwikkeld. Hieronder staat een overzicht van deze publikaties.

artikelen

Doorman, L.M. (1993). Een ander gezicht van de grafische rekenmachine. *Nieuwe Wiskrant* 12-2, pp. 39-41.

Drijvers, P. (1991). Computeralgebra en wiskundeonderwijs. *Nieuwe Wiskrant* 10-4, pp. 23-26.

Drijvers, P. (1993). Grafieken classificeren met een grafische rekenmachine. *Nieuwe Wiskrant* 12-3, pp. 33-37.

Drijvers, P. (1993). The classification of graphs using a graphics calculator. In: B. Jaworski (ed.): *Technology in mathematics teaching*, pp. 281-288. Birmingham: The University of Birmingham.

Drijvers, P. (1994). Graphics calculators and computer algebra systems: Differences & similarities. *The International Derive Journal* 1-1, pp. 71-82.

Drijvers, P. (1994). Grafische rekenmachines en computeralgebra in het buitenland. *Nieuwe Wiskrant* 13-4, pp. 29-34.

Drijvers, P. (1994). Een pagina omslaan ... *Euclides* 69 (8), pp. 226-230.

Kindt, M. (1992[a]). Functie-onderzoek begint met de grafiek I. *Euclides* 67-7, pp. 200-204.

Kindt, M. (1992[b]). Functie-onderzoek begint met de grafiek II. *Euclides* 67-8, pp. 227-230.

Kindt, M. (1993). James Bond, de wet van Snellius en wiskunde B. *Nieuwe Wiskrant* 13-1, pp. 45-50.

Vonk, G.A. (1992). De graphics calculator in de klas. *Nieuwe Wiskrant* 12 (1), pp. 8 - 11.

pakketten en overige publikaties

Doorman, L.M. en P. Drijvers (1993). *Schoolexperimenten '92-'93*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Doorman, L.M. en P. Drijvers (1993). *Grafiekenalgebra*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Doorman, L.M. en P. Drijvers (1993). *Differentiëren*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Doorman, L.M., P. Drijvers en M. Kindt (1993). *Docentenhandleiding Optimaliseren*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Doorman, L.M., P. Drijvers en M. Kindt (1994). *Bewegingen in het vlak*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P. en M. Kindt (1992). *Optimaliseren met een grafische rekenmachine*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P. en M. Kindt (1992). *Docentenpracticum TI-81*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P. en G. A. Vonk (1992). *Practicum TI-81*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Idzerda, S. (1994). *GC&A, de grafische rekenmachien bij Toegepaste Analyse binnen Vwo-Wiskunde A* (doctoraalscriptie wiskunde). Utrecht: Mathematisch Instituut.

Summary

introduction

This book forms the final report of the project called 'De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs' ('The graphics calculator in mathematics education'), which is subsidised by the Dutch Ministery of Education. It has been carried out by the Freudenthal Institute between August 1991 and September 1994.
Aims of the project, as they are formulated in the project proposal, are to investigate:

- the use of the graphics calculator
  - a as a tool in the current curriculum
  - b as a means to achieve the possible shift from techniques towards concepts
  - c as a means to explore new horizons
- the consequences of the introduction of the graphics calculator for curricula, assessment and examinations
- the consequences for teacher training and the need of refresher courses.

This summary provides a brief overview of the content of the book. The titles of the sections in this summary correspond to the sequence of the chapters of the book.

recent developments

Technological devices are developing very fast. The graphics calculators have become so user friendly and relatively inexpensive, that they are bound to be widely used in the near future. The graphics calculators are the perfect example of 'personal technology', which makes them (at least at the moment) more relevant for mathematics education than graphical software or computer algebra systems. In this project, the TI-81 has been used for reasons of user friendliness. The conclusions of the project are nevertheless independent from this specific machine.

The technological developments have implications for mathematics education. In England, France, Scotland and the Scandinavian countries, the use of the graphics calculator in final examinations is allowed. However, there is no unanimity as yet about the way in which this should change the assignments.

The use of the graphics calculator in final examination is not allowed in the Netherlands. The follow-up project, however, is to design experimental examinations. The first experimental examinations in which students are allowed to use graphics calculators will probably take place at two schools in 1996.

realistic mathematics education and the graphics calculator

In the past mathematics in education was often considered to be a 'building' with a hierarchical structure. Only those who reached the highest level could enjoy the broad view of the world of applications. Unfortunately, a lot of students never reached the top because of insufficient mastering of knowledge at lower levels.

In realistic mathematics education on the other hand the starting point is the students' reality. The students should be encouraged to re-invent their own mathematical strategies. Furthermore, realistic applications form part of the learning at any level. This will lead to the students' perception of mathematics as a natural and useful activity that they can really master. The theory of realistic mathematics education was developed by Freudenthal and others. It forms the foundation of most of the work at the Freudenthal Institute.

How can the graphics calculator be valuable in realistic mathematics education? At the start of the project the following hypotheses were formulated.

- realistic contexts
  By means of using the graphics calculator the attention shifts from the pure algorithmic operations towards the translation of realistic problems into mathematical models and towards the interpretation of the results.

- exploration
  The use of the graphics calculator stimulates the students to set themselves new problems and to generalise them. This results in a broader view on mathematics and in a more active, exploring attitude.

- integration
  The use of the graphics calculator promotes the integration of geometrically and algebraically oriented activities. It also stimulates the students to perceive connections between different mathematical subjects.

- dynamics
  The graphics calculator is extremely valuable for the visualisation of the changing behaviour of variables in their relationship. In this way the machine stimulates a dynamical view at analytical models.

- flexibility
  By using the graphics calculator the main attention shifts from 'rigid techniques' towards more flexible problem solving behaviour. A critical attitude concerning numerical results is developed.

The section 'reflection' focuses on the verification of these assumptions.

project execution

The project makes use of the so-called developmental design. Essentially this means that the development of student texts, the performance of classroom experiments and the theoretical reflections are intertwined: together they form a cyclic process of thinking and (im-)proving.

In the first year the project started with small, quite open experiments at eight schools. In the second year the experiments were concentrated at two schools, more specifically, in two classes of the same level. During the third year the project has enlarged its scope again by including other classes at different levels, though still at the same two schools.

On the basis of the hypotheses that are mentioned above four subjects were selected to be dealt with in student textbooks: 'Differentiation', 'Optimization', 'Algebra of graphs', and 'Movements in the plane'. The next section deals with these student materials.

student texts

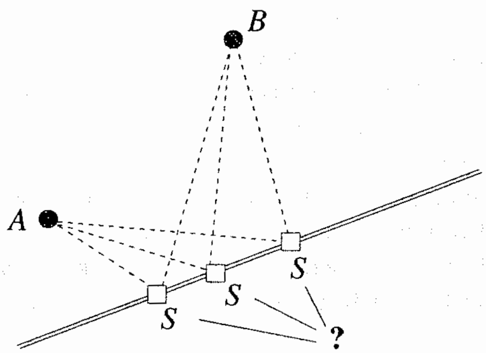
Let us look at the student materials that have been developed during the project.
The first booklet is entitled *Differentiation*. The graphics calculator is mainly used to discover the 'local straightness' of graphs and to graph difference quotients $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ for a fixed value of Δx in order to provide a visual, global approximation of the derivative. Some attention is paid to the plotting of data and curve fitting.

Classroom observations revealed that students find it hard to combine both the global look at a function and the local view.

Optimization is the second product. Applications and realistic problems form the starting point. These are tackled in three ways: using the graphics calculator in order to obtain numerical and graphical results, using calculus which leads to exact answers, and, finally, using the geometrical approach, which often gives the most elegant proof. The integration of these methods is one of the aims of the text.
Let us look at an example.

Where to build the railway station?

The towns A en B are located at the same side of a railway line at distances of 5 kms and 10 kms respectively of this line. The distance from A to B is 13 kms as the crow flies.
The railway company wants to build a railway station on this line. This leads to a discussion about the best location for the station (S). Outside the towns the country is quite empty, and it has no specific natural features, so there are no restrictions for the construction of the roads AS and BS.



Different criteria are formulated for the optimal position of S. Most attention is paid to the need for a minimal total distance $AS + BS$. After graphical and numerical solutions have been obtained, the analytical approach leads to a nice ratio between AS and BS when S is in the optimal position. This property still holds when the position of A is changed. The graphics calculator is very useful in exploring this sort of variations. The constant gives a hint for the very simple geometric solution. The series of problems ends with exercises suggesting that A has twice as many inhabitants as B. In this way, the text anticipates the exercises about Snellius Law further on in the booklet.

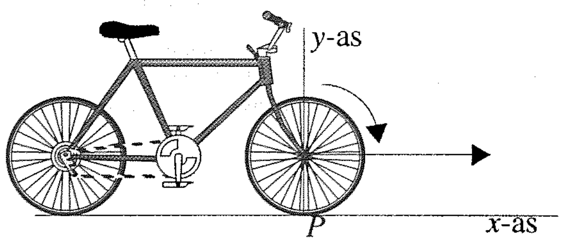
The lessons about 'Optimization' were quite successful. Students found the approach natural, as is shown by the following fragment from an interview:

> Interviewer: 'Was it just like the traditional textbook, this Optimization booklet?'
> Rob: 'No, different.'
> Interviewer: 'Can you explain the difference?'
> Rob : 'The traditional book concentrates on formulas.'
> Geert: 'This is clearer.'
> Suzanne: 'This is closer to the way one does things in normal life. The text book reads like a collection of fixed laws.'
> Geert: 'The traditional book is more abstract.'
> Interviewer: 'So this runs parallel to what you perceive as natural?'
> Rob: 'Yes, your intuition, your imagination is involved.'

The reinforcement of the relations between operations on graphical representations and operations on formulas is the aim of the third booklet, *Algebra of graphs*. In fact, there are two parts, 'Calculations with graphs' and 'Transformations of graphs'. In the first part, two linear functions are added, subtracted, and multiplied. Properties of the resulting graph are linked with the formulas of the components. In the second part the effects that changes in the formula have on the graph are explored. Of course, the graphics calculator is a perfect tool for such explorations.

The classroom experiences with this text were positive. It was astonishing to notice that many students were surprised to discover that the 'product of two lines is a parabola'.

In *Movements in the plane*, parametric curves are the result of physical movements that are interfering. For example, the cycloid is the sum of the movement of the centre of a bicycle wheel and the movement of a fixed point on the tyre around this centre.



As in 'Optimization' the graphical/numerical approach is integrated with the analytical and the geometrical one.

Again, the graphics calculator facilitates a dynamic approach of the subject. The machine is a nice tool for exploration. In the above example variation of the distance between the fixed point and the centre of the wheel led the students to the discovery of an interesting family of curves.

Apart from the use in 'dedicated' student texts the graphics calculator is of course used while working with the traditional textbook as well. Subjects such as limits, asymptotes, matrices, the irrational number e and polar co-ordinates were now treated in a different way because of the presence of the graphics calculator.

reflection

In this section we look back at the five hypotheses that were formulated above. What do our classroom experiences tell us about these hypotheses?

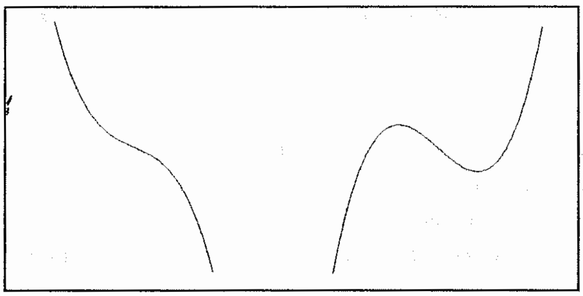
realistic contexts

The use of realistic contexts is important in the philosophy of realistic mathematics education. Can the graphics calculator be helpful in using realistic contexts? The results of the project are relatively positive. The graphics calculator allows the teacher to use more complex functions and 'ugly' but more realistic coefficients. On the other hand, it appears difficult for students to cope with three 'worlds': the world of the context, the mathematical world and the world of the graphics calculator.
Yet, we cannot be too sure about these conclusions because most of the experiments took place in so-called Mathematics-B classes, where applications play a minor role.

exploration

The most important contribution of the graphics calculator to mathematics education may be the opportunity that it offers for exploration. Students are often challenged by the machine and get involved in interesting mathematical 'playing'. This feature can be exploited by means of open exercises that invite students to develop their own 'research'. The following exercise is an example of this approach:

1 Functions of degree three obey the equation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, where a, b, c and d are real constants with $a \neq 0$. Below are the graphs of two functions of degree three. As you see, such graphs can look quite different.



The question is: How many really different sorts of graphs of these functions can you make? Decide yourself what 'really different' means.
Classify all graphs of functions of degree three and make a description for each class containing:
a The graphical features for the class.
b A graph of a function that stems from this class. What values did you choose for a, b, c and d?
2a Determine the derivative function for each of the examples of exercise 1. Graph these derivative functions. What kind of curves do you get?
b The graph of a derivative of a function of degree three is a parabola. Draw some more parabolas, and sketch for each of them the graph of the appropriate function of degree three. Does this give reason to alter the classification you made in exercise 1?
3 The values of a, b, c and d determine the form of the graph of $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
a What is the influence of the value of d on the class to which a function belongs?
b Determine for each of the classes the conditions for a, b, c and d to make $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ a member of that class.

Although the mathematical level of the students' results was not always very satisfactory, the experiences on this point were encouraging.

integration

The graphics calculator offers a graphical/numerical way of solving problems. Since it is an alternative for the analytical method, the student is confronted with different approaches that can interfere: the numerical result found by successive approximations can suggest the exact solution, which then still needs to be proved. In the student texts 'Optimization' and 'Movements in the plane', the graphical/numerical, the analytical and the geometrical methods are consequently compared and combined. As a result, the students became more flexible in using different problem solving strategies. They seem to have acquired a more integrated view of mathematics, which we perceived as being valuable.

dynamics

Using a graphics calculator has many dynamical aspects. The ZOOM-function changes the window size and the corresponding view at a graph. With the TRACE function, the cursor moves over the graph, showing the co-ordinates of the changing position and giving an impression of the changes of speed. The effects of changes in the formula, or in the original problem situation, are easily determined and even a family of curves can quickly be studied. During classroom experiments this aspect of the use of graphics calculators was appreciated by the students.

flexibility

The use of the graphics calculator demands specific skills on the part of the users. One important skill is the window management. The ranges for the variables have to be chosen appropriately and one has to be aware of the consequences of such choices. Inexperienced users often encounter problems with this.

Another relevant technique is the skill in translating a mathematical problem into the language of the machine and in interpreting the machine output in the light of the original problem.

Other techniques, on the other hand, become less relevant. For example, the graphing of functions by hand, hand calculations with matrices and statistical calculations are less important.

The most important conclusion is, however, that the use of the graphics calculator requires flexibility from the part of the student to shift between different techniques and approaches.

assessment

The graphics calculator will not be taken seriously in secondary education as long as its use in examinations is not allowed. When the graphics calculator is used in the teaching and learning of mathematics, the machine should not be excluded from assessment situations.

In other countries (France, England, Scandinavian countries), students are allowed to take their graphics calculators with them to the examination rooms. In most countries the permission is restricted to machines that do not perform symbolic computations. An inventory shows that different examination boards are developing different ways of coping with this new situation.

What is the situation like in the Netherlands? Some assignments that are part of recent examinations will no longer be valid whith a graphics calculator on the table. Others (especially those concerning applications) might become more interesting if full use of the new technology were made. Some assignments, finally, seem to anticipate the permission to use graphics calculators: graphs are already presented on the task paper as the starting point of the assignment rather than the final result.

With an eye to the future the project group developed some examples of 'new style assignments'. The following assignment gives an impression.

assignment

The following functions, that are defined for positive values of x,

f_1: $x \to \dfrac{x^2+1}{x}$,f_2: $x \to (\ln x)^2$,f_3: $x \to \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2$,f_4: $x \to \sin\dfrac{2}{x} + 2\sin x\cos x$

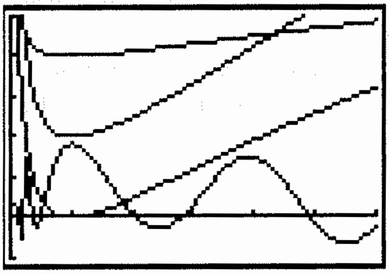
share the property that for each positive value of x

$f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ (1)

a. Show that f_1, f_2, f_3 and f_4 indeed have this property.
b. Look at the graphs of these four functions. What similarity do these graphs show in points with x-co-ordinate 1? Verify this analytically.
c. Show that the property that is formulated in b. holds for all functions with property (1).

comments on the assignment

The role of the graphics calculator is restricted to question b. But there it is essential indeed.



The graphs will invoke the notion that the tangents in the points with $x = 1$ are horizontal. Proof requires analytical work.

Once the use of the graphics calculator is allowed during examinations, there are two strategies for examination boards. The first consists in trying to find assignements that do not advantage students possessing a graphics calculator. The second policy assumes that graphics calculators are required. We prefer this second policy. Once every student has a machine, real integration of the technology in assessment will be achieved. In the experimental examinations that are to take place in the follow-up project, this option is chosen.

conclusions and recommendations

So far one may have the impression that the influence of the graphics calculator has not been very impressive. To some extend this is true since the project has been limited to classroom experiments without a chance to allow the use of technology in examinations or to change the curriculum. On the other hand, changes seem to occur in subtle and complex ways at 'local' levels. Here the influence of the graphics calculator is impressive indeed.

The experiences as described above lead to the following conclusions:

1 The graphics calculator will penetrate mathematics education. Due to technological developments as well as price policies, the machine definitely deserves a place in mathematics education.
2 The graphics calculator is a valuable tool in the current curriculum at upper secondary level. It enables an explorative approach of many subjects.
3 The graphics calculator gives room for the use of realistic contexts.
4 The graphics calculator changes the curriculum at least 'from the inside', in the sense that a more dynamic and integrative treatment of mathematical subjects is stimulated.
5 The graphics calculator demands more flexibility from the student with regard to skills and techniques.
6 The introduction of the graphics calculator in secondary education demands the development of specific skills on the part of the teacher.

From these conclusions the following recommendations concerning the final examinations are made:

1 The use of the graphics calculator should be allowed during tests and examinations. Further research on the role of the graphics calculator in assessment is urgent.
2 The graphics calculator is soon to be allowd be at the final examinations at the highest levels of secondary education in the Netherlands. All candidates should be required to possess such a machine.
3 As soon as the graphics calculator is required at final examinations, the assignments should be changed.
4 It has to be decided whether the examination assignments should require a graphics calculator or whether the advantage of having such a machine should be eliminated.
5 Criteria have to be developed to be able to indicate what sort of machines will be allowed in examinations.
6 The introduction of the graphics calculator requires a refresher courses for mathematics teachers.

The following recommendations concerning the curricula are made:

1 The introduction of the graphics calculator at upper secondary level should change the analysis components of the current curricula mathematics A and mathematics B.
2 The changes in the mathematics curricula that are proposed in the so-called profile report require further research, both on the short term influence of the graphics calculator, and on the possible long term influence of more advanced technology devices.

10 Bijlage: Eindexamen met een grafische rekenmachine

Artikel uit: Nieuwe Wiskrant jrg. 16 nr. 2
Door: Michiel Doorman, Paul Drijvers en Gerard Stroomer

Inleiding

Sinds 1991 voert het Freudenthal instituut schoolexperimenten uit rond het gebruik van de grafische rekenmachine (GR) in de tweede fase van HAVO en VWO. De laatste jaren concentreren deze experimenten zich op twee scholen, het Liemers College in Zevenaar en het Cals College in Nieuwegein.
Behalve de inpassing van de GR in de wiskundeles is natuurlijk ook het functioneren van zo'n apparaat bij de toetsing een belangrijk punt van onderzoek. Met het oog daarop hebben de twee bovengenoemde scholen toestemming gekregen om met ingang van 1996 eindexamens af te nemen waarbij de leerlingen de GR kunnen gebruiken. De reguliere examenopgaven worden, voor zover nodig, in het licht van dit hulpmiddel aangepast. Het experiment betreft overigens alleen wiskunde A en wiskunde B van het VWO.
In dit artikel blikken we terug op deze eerste ervaringen met de GR op het eindexamen. Eerst schetsen we het kader waarin de examens hebben plaatsgevonden. Dan lopen we zowel het A- als het B-examen langs. Besloten wordt met wat afrondend commentaar.

Situatieschets

In september 1994, bij de start van het nieuwe schooljaar, worden de leerlingen uit V5 van de twee proefscholen op de hoogte gesteld van het experiment waaraan ze gaan deelnemen. Elke leerling krijgt de beschikking over een grafische rekenmachine, de TI-81 van Texas Instruments. In enkele lessen wordt de leerling wegwijs gemaakt op dit apparaat, en vervolgens verloopt alles in grote lijnen zoals gebruikelijk: de klassen werken hoofdstukken uit het 'gewone' boek door. Want hoewel de leerlingen een grafische rekenmachine hebben, zijn de scholen gehouden aan het reguliere examenprogramma. Het betreft dus geen experiment met een nieuwe vakinhoud zoals het PROFI-project [1], maar een nieuwe interpretatie van het vigerende curriculum.
Zowel bij wiskunde A als bij wiskunde B worden de hoofdstukken in de boeken afgewisseld met specifieke leerstofpakketten of aanvullingen bij hoofdstukken waarin de rol van de grafische rekenmachine bij het leren van wiskunde beter uit de verf komt.

Opgave 4 Uitlenen

In bibliotheken moet men voortdurend beslissingen nemen over het afschrijven van boeken, het vervangen van beschadigde of zoekgeraakte exemplaren, enzovoort. Daarvoor is van belang dat men kan voorspellen hoe vaak een boek uitgeleend zal worden. P. M. Morse heeft hiervoor een wiskundig model ontwikkeld. In deze opgave passen wij zijn model toe op een vaste collectie van 9480 boeken. Geen van deze boeken wordt meer dan 7 keer per jaar uitgeleend. Volgens het model van Morse geldt voor deze collectie de volgende overgangsmatrix (M):

$$\begin{array}{rl}
 & \text{aantal keer uitgeleend in een jaar} \\
 & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{aantal keer uitgeleend} \\ \text{in het volgende jaar} \end{array}
\begin{array}{r} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0{,}819 & 0{,}606 & 0{,}449 & 0{,}333 & 0{,}247 & 0{,}183 & 0{,}135 & 0{,}100 \\
0{,}164 & 0{,}303 & 0{,}360 & 0{,}366 & \boxed{0{,}345} & 0{,}310 & 0{,}271 & 0{,}231 \\
0{,}016 & 0{,}076 & 0{,}144 & 0{,}201 & 0{,}242 & 0{,}264 & 0{,}271 & 0{,}265 \\
0{,}001 & 0{,}013 & 0{,}038 & 0{,}074 & 0{,}113 & 0{,}149 & 0{,}180 & 0{,}203 \\
0{,}000 & 0{,}002 & 0{,}008 & 0{,}020 & 0{,}039 & 0{,}064 & 0{,}090 & 0{,}117 \\
0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}001 & 0{,}005 & 0{,}011 & 0{,}022 & 0{,}036 & 0{,}054 \\
0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}001 & 0{,}002 & 0{,}006 & 0{,}012 & 0{,}021 \\
0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}001 & 0{,}002 & 0{,}005 & 0{,}009
\end{pmatrix} = M
\end{array}$$

In matrix M is bijvoorbeeld te zien dat van de boeken die in een jaar vier keer worden uitgeleend, bijna 35% het volgende jaar één keer worden uitgeleend.

Van de boeken die in 1995 niet werden uitgeleend is er naar verwachting geen enkel boek dat twee jaar later (dus in 1997) zeven keer wordt uitgeleend.

5p 13 □ Toon dit aan met behulp van matrix M.

Er zijn boeken die in 1995 twee keer werden uitgeleend.

6p 14 □ Bereken hoeveel procent van deze boeken naar verwachting precies één keer zal worden uitgeleend in de twee jaren 1996 en 1997 samen.

Met behulp van matrix M kan worden berekend dat de boeken die 7 keer in een bepaald jaar worden uitgeleend, in het daarop volgende jaar gemiddeld 2,3 keer worden uitgeleend.
We noteren dit als $E_7 = 2{,}3$.
Op dezelfde manier zijn $E_0, E_1, \ldots, E_6$ gedefinieerd.

4p 15 □ Toon met behulp van de gegevens uit matrix M aan: $E_4 \approx 1{,}4$.

Er zijn matrices die bij vermenigvuldiging met matrix M als produkt een matrix opleveren die uitsluitend de getallen $E_0, E_1, \ldots, E_7$ als elementen heeft.

5p 16 □ Geef een voorbeeld van zo'n matrix. Licht het antwoord toe, vermeld daarbij duidelijk de volgorde van de matrixvermenigvuldiging.

Opgave 4 van het Wiskunde A examen VWO, eerste tijdvak 1996

In tabel 1 staan de uitleencijfers voor 1995. Met behulp van matrix M zijn de verwachte uitleencijfers voor 1996 uitgerekend. Deze staan ook in tabel 1.

tabel 1

Uitleencijfers voor 1995 en verwachte uitleencijfers voor 1996

aantal keer uitgeleend	0	1	2	3	4	5	6	7
aantal boeken in 1995	7012	1978	397	68	19	4	1	1
verwacht aantal boeken in 1996	7148	1925	340	56	10	1	0	0

Het aantal boeken dat meer dan 4 keer per jaar wordt uitgeleend, blijkt gering te zijn. Daarom vereenvoudigt men het model door deze boeken gemakshalve als 4 keer uitgeleend te tellen. Uitgaande van matrix M stelt men de volgende matrix N op:

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{aantal keer uitgeleend in een jaar} \\
 & \begin{array}{ccccc} \quad 0 & \quad\;\; 1 & \quad\;\; 2 & \quad\;\; 3 & \quad\;\; 4 \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{aantal keer uitgeleend} \\ \text{in het volgende jaar} \end{array}
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0{,}819 & 0{,}606 & 0{,}449 & 0{,}333 & 0{,}247 \\
0{,}164 & 0{,}303 & 0{,}360 & 0{,}366 & 0{,}345 \\
0{,}016 & 0{,}076 & 0{,}144 & 0{,}201 & 0{,}242 \\
0{,}001 & 0{,}013 & 0{,}038 & 0{,}074 & 0{,}113 \\
0{,}000 & 0{,}002 & 0{,}009 & 0{,}026 & 0{,}053
\end{pmatrix} = N
\end{array}
$$

Met behulp van matrix N kan men ook berekenen hoeveel boeken naar verwachting in 1996 drie keer worden uitgeleend.

4p 17 □ Toon aan dat het zo berekende aantal niet of nauwelijks verschilt van het aantal dat in tabel 1 vermeld is.

U_t is het gemiddelde aantal uitleningen per boek per jaar in het jaar t.
Men kan aantonen dat steeds bij benadering geldt:
$U_{t+1} = 0{,}2 + 0{,}3U_t$
Op den duur zullen de percentages boeken die 0 keer per jaar, 1 keer per jaar, enzovoort, worden uitgeleend, hetzelfde blijven.

4p 18 □ Bereken hoe groot het gemiddeld aantal uitleningen per boek per jaar op den duur zal zijn.

Einde

De klassen krijgen natuurlijk op gezette tijden een proefwerk. Vanzelfsprekend mogen de leerlingen daarbij ook de GR gebruiken. De scores daarvan zijn wisselend (net zoals ze dat vermoedelijk in de situatie zonder GR geweest zouden zijn). In [2] staat beschreven hoe teleurstellende resultaten bij één van de proefwerken aanleiding vormen voor de ontwikkeling van een mini-pakketje.
In het schooljaar1995/96, als de leerlingen in de zesde zijn aangeland, wordt bij de voorbereiding op de schoolonderzoeken en het CSE ook aandacht aan de GR besteed. En dan komt het 'uur der waarheid': het centraal schriftelijk.

Het examen wiskunde A

De invloed van de grafische rekenmachine is bij de inhoud van het huidige wiskunde A programma minder verstrekkend dan bij wiskunde B. Het is de vraag of in de toekomst de leerlingen nog zo uitgebreid de differentiaalrekening behandeld moeten krijgen, maar binnen dit experiment kunnen we niet aan de inhoud tornen. Doordat bij wiskunde A de concepten worden geleerd in toepassingssituaties, heeft de grafische rekenmachine bovendien weinig invloed op de didactiek. Het streven is dan ook geweest om de afwijkingen van het aangepaste examen ten opzichte van het reguliere minimaal te laten zijn.

Wanneer het projectteam het reguliere examen onder ogen krijgt, blijkt dat bijzonder eenvoudig te zijn: de meest voor de hand liggende toepassing van de GR, namelijk het tekenen van grafieken, speelt toevallig bij dit examen geen rol! Vandaar dat de examentekst niet gewijzigd is. Wel is het correctievoorschrift aangepast, zodat de leerlingen ook voor het grafisch/numeriek bepalen van extremen beloond kunnen worden als een benadering voldoende is.

Een grafische rekenmachine kan ook van pas komen bij het rekenen met matrices. Opgave 4 lijkt dan ook goede mogelijkheden te bieden (zie volgende pagina). Maar helaas! Het betreft hier een 8 bij 8 matrix, terwijl de TI-81 maximaal 6 bij 6 matrices kan verwerken. (Overigens kennen de opvolgers van de TI-81 deze beperking niet: matrices van 99 bij 99 kunnen in principe ingevoerd worden.) Toch ziet een deel van de leerlingen kans de GR bij deze opgave te gebruiken.

Het antwoord op vraag 16 wordt door een leerling als volgt in machinetaal geformuleerd:

[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] = A
A · B geeft als produkt de matrix die gevraagd wordt.
Dus matrix A vermenigvuldigen met M, eerst A en dan M
op de Ti-81 (stel dat daar matrices in konden van 7 × 7
dan wordt [0,1,2,3,4,5,6,7] matrix A en M wordt B
en dan type je in [A] ∗ [B]
~~bij een~~ Vermenigvuldigt wordt matrix A met de eerste kolom
van M, dan de 2e ... enz.
uitkomt
[—, —, —, 1,4 , —, —, —]

Bij vraag 17 zijn er meer mogelijkheden om de GR te gebruiken. De volgende uitwerking van een leerling geeft daarvan een voorbeeld.

> Matrix N ingevoerd onder [A] in de GR door te drukken:
> MATRX
> EDIT (enter)
> EDIT 1 (enter)
> 5 × 5 matrix ervan maken en de getallen van N invoeren.
> Vervolgens onder [B] (op dezelfde manier als bij [A]) een 5 × 1 matrix gemaakt met alle getallen die in tabel 1 bij 'aantal boeken 1995' (uitgeleend) staan.

[A] met [B] vermenigvuldigd geeft:

$$\begin{bmatrix} 7147,086 \\ 1923,665 \\ 337,954 \\ 54,991 \\ 10,304 \end{bmatrix}$$

Dit zijn de verwachte uitleencijfers voor 1996 en 54,991 ≈ 56, dus het berekende aantal wijkt nauwelijks af van het aantal uit tabel 1.

Deze leerling rekent met het getal 19 uit de tabel in plaats van met 25, een fout die door meer leerlingen gemaakt is.

Vraag 18 biedt verschillende mogelijkheden om de GR te benutten. Op de eerste plaats kan het verband $U_{t+1} = 0,2 + 0,3 \cdot U_t$ gebruikt worden, zoals in de volgende uitwerking gebeurt:

```
                    1
Ans*0.3+0.2
                   .5
                  .35
                 .305
                .2915
               .28745
█
```

Met R.M.: door Ans maal 0,3 + 0,2 en dan telkens enter te drukken.
Uiteindelijk wordt het gemiddeld aantal uitleningen 0, 2857142857 per boek per jaar.

De nauwkeurigheid van het antwoord is verbijsterend. Als je met de hand dergelijke getallen berekent, ben je eerder geneigd om terug te kijken naar de situatie: is dit eigenlijk al nauwkeurig genoeg? Met apparatuur als de grafische rekenmachine ontstaat die behoefte niet en bovendien vertrouwen leerlingen blindelings op zo'n resultaat.

Een andere methode is om eerst de stationaire matrix te bepalen en [0, 1, 2, 3, 4] hiermee te vermenigvuldigen:

$$N^{2222222\ldots} = \begin{bmatrix} 0,761 \\ 0,200 \\ 0,033 \\ 0,005 \\ 8,8.10^{-4} \end{bmatrix}$$

stationaire matrix

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,7612 & 0,7612 & 0,7612 & 0,7612 & 0,7612 \\ 0,1995 & 0,1995 & 0,1995 & 0,1995 & 0,1995 \\ 0,0334 & 0,0334 & 0,0334 & 0,0334 & 0,0334 \\ 0,0051 & 0,0051 & 0,0051 & 0,0051 & 0,0051 \\ 8,7850.10^{-4} & 8,7850.10^{-4} & 8,7850.10^{-4} & 8,7850.10^{-4} & 8,7850.10^{-4} \end{bmatrix} \end{array}$$

[0 1 2 3 4] . stationaire matrix =

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \end{array}$$
$$[\,0,285 \quad 0,285 \quad 0,285 \quad 0,285 \quad 0,285\,]$$

Het examen wiskunde B

Bij het wiskunde B-programma is de invloed van de grafische rekenmachine ingrijpender. Hoewel ook hier geldt dat de inhoud van het vak niet gewijzigd is, heeft de grafische rekenmachine in de lessen een grotere rol gespeeld. Waar bij wiskunde A de toepassingen van de differentiaalrekening centraal staan, zijn bij wiskunde B functies en grafieken meer een 'wereld' op zichzelf. De GR is een geschikt medium om deze 'wereld' te verkennen.
De invloed van de grafische rekenmachine bij het wiskunde B examen is op twee punten expliciet gemaakt in de opgaven.

1 Een vraag naar functieonderzoek met als doel het tekenen van de grafiek wordt vervangen door een vraag over een eigenschap van de grafiek (waarvoor minder punten te verkrijgen zijn; de compensatie van de punten zit in de alternatieve opgave).
2 Eén alternatieve opgave wordt ontwikkeld. Deze opgave moet meer in de geest zijn van het onderwijs met een grafische rekenmachine: het probleem moet zich lenen voor exploratie met de grafische rekenmachine. Het tekenen van grafieken en onderzoeken wat de invloed is van een parameter in het functievoorschrift moet functioneel zijn. Er is gekozen om een alternatief voor de opgave over een parametervoorstelling te maken.

Het initiatief voor het gebruik van de grafische rekenmachine ligt steeds bij de leerling. Hij of zij moet zelf bepalen wanneer en waarom de grafische rekenmachine wordt gebruikt. Bovendien is van tevoren afgesproken dat bij een vraag naar een berekening een exact antwoord verwacht wordt.

Opgave 1

Opgave 1 gaat over de functies $f: x \rightarrow (x^2 - 4)(2x + 1)$ en $g: x \rightarrow x^2 - 4$. De eerste vraag uit het reguliere examen is direct van een type dat je niet meer kunt stellen als leerlingen een grafische rekenmachine hebben:

1 ☐ Onderzoek f en teken de grafiek van f in een rechthoekig assenstelsel Oxy. (7 p)

Deze vraag is vervangen door:

1 ☐ Bereken de uiterste waarden van $f(x)$. (4 p)

Met de grafische rekenmachine zijn de coördinaten te benaderen. Dat kan een leerling gebruiken ter controle, maar gezien de afspraak over de betekenis van 'bereken' gaan vrijwel alle leerlingen netjes differentiëren. In hoeverre de controlefunctie van de GR inderdaad benut wordt, is niet bekend.

De volgende vraag is:

2 ☐ Los op $f(x) > g(x)$. (4 p)

Met de grafische rekenmachine is het tekenschema een overbodig hulpmiddel. Leerlingen kunnen nu eerst de gelijkheid oplossen en vervolgens de ongelijkheid aflezen uit de grafieken. Toch is er een verscheidenheid aan methoden. Hieronder ziet u hoe een leerling verwijst naar de GR, terwijl een ander de grafieken globaal van het scherm heeft overgenomen.

$x(2x^2 - 8) = 0$

$x = 0 \lor 2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x = 2$ of $x = -2$

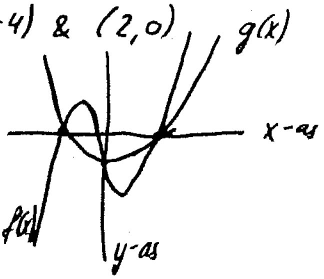
$f(x) > g(x)$ als $0 > x > -2$ en $x > 2$

zie tekenschema +|-8| of vul punten in binnen de grenzen

$f(-3) < g(-3)$ $f(-1) > g(-1)$ $f(3) > g(3)$

Ans= $(-2,0)$, $(0,-4)$ & $(2,0)$

schets v/d grafiek:



Dus $f(x) > g(x)$ geldt voor

$-2 < x < 0$ en $2 < x$

De laatste twee vragen van opgave 1 betreffen het oplossen van een ongelijkheid en het berekenen van een oppervlakte. Veel leerlingen maken een schets van de situatie. De grafische rekenmachine is daarvoor een natuurlijk hulpmiddel.

Opgave 2

Opgave 2 van het aangepaste examen is de alternatieve opgave. De bedoeling is hier dat leerlingen zelf de probleemsituatie verkennen met de grafische rekenmachine. De grafieken die ze maken, zijn het uitgangspunt voor de vraagstelling. De eerste twee vragen zijn bedoeld als inleiding. Er is sprake van één grafiek die moet worden verkend. De kracht van de grafische rekenmachine als hulpmiddel bij het verkennen en oplossen van het probleem komt bij de vragen 7, 8 en 9 naar voren.

Overigens is de normering zo, dat het werken met de GR op zichzelf geen punten oplevert.

Opgave 2

Een punt P beweegt zich in het Oxy-vlak.
Op tijdstip t heeft P de coördinaten ($x(t)$, $y(t)$), met

$x(t) = \cos(t + \frac{1}{6}\pi)$ en $y(t) = \cos(2t)$, waarbij $0 \leq t < 2\pi$.

5. ❒ Bereken de coördinaten van de punten waarin de baan van P een horizontale of een verticale raaklijn heeft.

De baan van P snijdt zichzelf op de y-as.

6. ❒ Bereken de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt.

In het vervolg van deze opgave wordt onderzocht wat er gebeurt als in plaats van $\frac{1}{6}\pi$ in de vergelijking van $x(t)$ een ander getal a met $0 \leq a < 2\pi$ staat.
De bewegingsvergelijkingen zijn dan

$x(t) = \cos(t+a)$ en $y(t) = \cos(2t)$, waarbij $0 \leq t < 2\pi$.

Het snijpunt van de baan van P met de y-as noemen we S.
Als a varieert, verschuift S over de y-as.

7. ❒ Welke posities kan S aannemen? Verklaar je antwoord.

Als $a = 0$, dan is de baan van P een deel van een parabool.

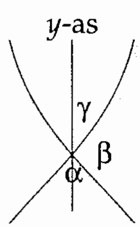
8. ❒ Toon dit aan en stel een vergelijking op van deze parabool.

Er zijn nog drie waarden van a waarvoor de baan van P een deel van een parabool is.

9. ❒ Bereken deze waarden van a en stel de bijbehorende vergelijkingen van die parabolen op.

Het is natuurlijk niet eenvoudig om na te gaan in hoeverre de leerlingen hun grafische rekenmachine bij deze opgave hebben gebruikt. In eerste instantie valt op dat, in tegenstelling tot de eerste opgave, niemand hier op papier een schets maakt van de grafiek.

Vraag 5 levert weinig problemen. Bij vraag 6 is er een grote verscheidenheid aan antwoorden. De verscheidenheid wordt vooral veroorzaakt door de drie mogelijkheden α, β en γ:



Bij vraag 8 is wel duidelijk dat een aantal leerlingen de grafische rekenmachine gebruikt. In de redenering komen kenmerken van de parabool naar voren als: de top ligt op de y-as in (0, -1) en de grafiek gaat door (1, 1).

In de tekst van vraag 9 staat nadrukkelijk 'Bereken deze waarden van a en . . .'. Bijna geen enkele leerling is uit die berekening gekomen. Wel heeft één leerling de drie waarden genoemd met de juiste vergelijkingen zonder berekening. Wellicht zijn de gevallen experimenteel met de grafische rekenmachine gevonden?

als $a = \frac{1}{2}\pi$! → dan is het een bergparabool, loopt als die van opgave 0 alleen dan andersom.
Dus nu geldt: $y = -2x^2 + 1$.
als $a = \pi$ → dan is het dezelfde als de parabool van opgave 0: → $y = 2x^2 - 1$
als $a = 1\frac{1}{2}\pi$ → dan is het dezelfde parabool als $a = \frac{1}{2}\pi$.
Dus: $y = -2x^2 + 1$

Opgave 3

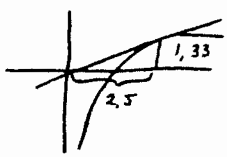
Opgave 3 is hetzelfde als in het gewone examen. Bij die opgave is de grafiek gegeven. Bij de vraag naar de coördinaten van de toppen en bij de vraag naar de vergelijking van de lijn die de grafiek raakt, kun je de grafische rekenmachine uitstekend gebruiken ter controle van het antwoord. Maar hebben de leerlingen dat ook gedaan?
Bij de vraag naar de toppen heeft geen van de leerlingen een fout antwoord gegeven (de antwoorden zijn goed of ontbreken). Bij de vraag naar de vergelijkingen hebben drie leerlingen een fout antwoord. Eén van hen merkt op dat het antwoord niet klopt volgens de TI-81 en geeft vervolgens een schatting met behulp van de gegevens van het scherm:

$-4x^2 = -\frac{4}{x}$
$-4x^3 = -4 \rightarrow x^3 = 1$
$x = 1$

klopt niet zie TI-81

in raakpunt $x = \pm\,$~~[illegible]~~ $2{,}5$ → verder met zijn 2,5

$x = 2{,}5 \rightarrow y = 1{,}33$



$m = 0{,}532$

Terugkijkend op het aangepaste B-examen springen de volgende zaken in het oog.
De grafische rekenmachine is een hulpmiddel bij vragen die betrekking hebben op een grafiek. Leerlingen nemen de grafiek vaak globaal over op papier.
Het controleren van antwoorden met de grafische rekenmachine gebeurt slechts sporadisch.
De resultaten van de geheel aangepaste opgave, opgave 2, vallen wat tegen: de scores op de vragen 8 en 9 zijn vrij laag. Uit redeneringen van de leerlingen blijkt wel dat een aantal van hen de GR heeft gebruikt om de situatie te onderzoeken.

Besluit

Samengevat blijkt dus dat de beschikbaarheid van de grafische rekenmachine op het examen wiskunde A, zoals dat in 1996 is samengesteld, weinig invloed heeft gehad. Mogelijk krijgt de GR een iets grotere rol als de machine ook in de methodes geïntegreerd is. Verder hangt het nut van de GR natuurlijk af van de opgaven die voorgesteld worden.

Bij wiskunde B is de invloed van de GR op het examen groter geweest. Veel leerlingen maken echter nog geen optimaal gebruik van de machine. Opgave 2, waarin de exploratie een rol speelt, is mogelijk wat moeilijker dan de opgave die het reguliere examen daarvoor in de plaats bevat. Bovendien hebben deze leerlingen minder kunnen scoren op opgave 1, de 'standaard-opgave' van het examen. Op grond van de resultaten heeft het Cito dan ook besloten om de cijfers voor het aangepaste examen met 0,2 punt extra te verhogen.

Hoe nu verder? In 1997 wordt het examen wiskunde A op dezelfde manier behandeld als het afgelopen jaar. Voor wiskunde B is er sprake van een nieuwe situatie voor de twee scholen: niet alleen gebruiken de leerlingen weer de grafische rekenmachine op het examen, maar tevens wordt in plaats van wiskunde B het experimentele programma voor de profielen N&G en N&T geëxamineerd. Deze generatie leerlingen gebruikt de TI-82, de opvolger van de machine die de leerlingen bij het examen in 1996 hadden. Want de technologische ontwikkelingen schrijden voort!

Noten

1 Project ten behoeve van de invulling van het vak wiskunde in de profielen N&G en N&T voor het VWO.

2 Drijvers, P. (1995). 'Neem de grafiek over ...' *Nieuwe Wiskrant 14*(4), pp. 29 - 35.