

Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool (14)

procenten – didactische notities

L. Streefland, E. de Moor, A. Treffers
Freudenthal instituut, RU Utrecht

1 Inleiding

Na de analyse van het gebied is het nu de beurt aan de didactiek van procenten, vanouds een weerbarstig onderwerp in het reken-wiskundeonderwijs, zoals ook al uit de vorige bijdrage bleek. Raadpleging van de geschiedenis als eerste stap naar een didactische beschouwing ligt zonder meer voor de hand.¹ Er dient zich dan direct al een keuzemoment aan, namelijk kiezen we het spoor van de verhoudingen, sluiten we aan bij de breuken of doen we beide? Onafhankelijk van deze keuze zullen de decimale breuken (kommagetallen) dan bovendien nog een centrale rol toegedacht moeten krijgen. Met dit al is dan de complexiteit van een didactiek voor procenten al grofweg geduid.

We dreigen verstrikt te raken in het beginsel van de verstrengeling van leerlijnen. Om de hechte verbinding met de (decimale) breuken kunnen we echter niet heen. Dit weerspiegelt dan tegelijk, naar nog blijken zal, dat onze hang naar de historie geenszins betekent dat we in deze volledig op haar chronologische ontwikkeling kunnen afgaan.

Na raadpleging van de geschiedenis besteden we aandacht aan de maatschappelijke aanwezigheid van procenten. Welke aspecten komen in het maatschappelijke verkeer het meeste voor, zowel geoorloofd als ongeoorloofd? Op grond hiervan en door voort te bouwen op de diverse verschijningsvormen van relatieve getallen (verhoudingen en (decimale) breuken) is het niet (meer) mogelijk te kiezen voor één ideale, lineaire leergangopbouw. Wel kan – en dat zullen we proberen – een didactiek van begrip en inzicht worden nagestreefd, geoperationaliseerd in wat men een onderwijsleerstructuur voor procenten zou kunnen noemen.

De aspecten die ons inziens essentieel zijn zullen we beklemtonen en bij wijze van gedachtenexperiment aan een beperkt aantal voorbeelden illustreren. Dit betreft dan het begrip in operationele zin, dat wil zeggen met oog voor toepasbaarheid op grond van geleidelijke voortgang in het schematiseren. Daarbij zal gebruik gemaakt worden van modellen die zowel het denken als het rekenen (kunnen) ondersteunen. Hoofdrekenen, schattend rekenen en flexibel rekenen spelen daarbij een kernrol.

Tegen het eind van onze bijdrage komt de zakrekenma-

chine in zicht. Een %-knop erop hoeft niet, naar blijken zal. Bevat de rekenmachine zo'n knop echter wel, dan zal deze bij bewerkingen als een operator vooropgezet moeten kunnen worden. Zo niet, dan verdient een rekenmachine zonder procentenknop de voorkeur. De meeste machientjes zijn namelijk nogal onlogisch op dit punt.² Aan de hand van twee voorbeelden zal het mogelijke gebruik van de rekenmachine worden getoond.

Tot besluit zetten we de kernkwesties van de beoogde onderwijsleerstructuur voor procenten nog eens op een rij. Deze raken het hart van de eindtermen die we 'onderweg' eerst nog even in herinnering brengen.

2 Historische kanttekeningen over procenten en decimale breuken

Van oudsher werden rente en interest aan de standaard honderd gekoppeld. Zo bedroeg in het oude Griekenland van de vijfde en vierde eeuw voor Christus de gemiddelde rentevoet bij de tempelbank op het eiland Delos tien van de honderd en in Athene van 376 tot 366 voor Christus bijvoorbeeld twaalf van de honderd. Voor twaalf van de honderd hadden de Romeinen een afzonderlijk woord (*centesima*), waarvan dan weer andere rentevoeten werden afgeleid, bijvoorbeeld zes van de honderd: *dimidia centesima*. We kunnen dan nog niet van procenten spreken want dit woord stamt uit het Italiaans. In plaats van het Latijnse *pro centum* werd naar Italiaans voorbeeld (*per cento*) vanaf de zesde eeuw veelvuldig *pro cento* gevormd.

De versmelting van beide woorden tot één begrip is dan snel een feit. In druk is dit pas zo tegen het eind van de zeventiende eeuw het geval. In de loop van de achttiende eeuw treedt in geschriften één woord op, waarvan weer nieuwe woorden worden afgeleid (bijvoorbeeld procentsgewijs en procentverhouding) en ook komt de afkorting p.c. voor.

In deze afkorting schuilt de herkomst van het nog steeds gangbare %-teken. Sinds 1836 is % in gebruik. Daarvoor werd de p van 'pro' nog wel toegevoegd.

Zo'n vier eeuwen eerder werd echter door een onbekende Italiaanse rekenboekauteur al $p\frac{c}{o}$ (voor $p\%$) geschreven, waarbij de 'c' staat voor 'cento'.

Het 'nulletje' erboven komt van de Italiaanse notatie

van ranggetallen 1°, 2°, (primo, secundo,).

Aan het eind van de zeventiende eeuw wordt de stap naar $p\frac{o}{o}$ gezet. In de loop van de achttiende eeuw en het begin van de negentiende eeuw raakt de kennis van de betekenis van deze afkorting op de achtergrond en begint deze veel meer de status van zelfstandig symbool te krijgen. De p wordt weggelaten en het symbool $\frac{o}{o}$ krijgt een steeds grotere verspreiding. Zoals gezegd, vanaf 1836 raakt de notatie met schuine breukstreep (%) in de mode.

Soms wordt de herinnering aan deze geschiedenis nog levend gehouden in Vlaamse kranten. Daar kan naar aanleiding van een statistisch onderzoek bijvoorbeeld boven een artikel prijken '57 ten h. vóór monarchie' terwijl in het artikel zelf van 57% gesproken wordt.

De historische bron van het procentbegrip werd slechts vluchtig geschetst. Rente en belasting vormden de aanleiding. Wat daarvoor vanouds als standaard diende verwierf een eigen naam en symbool, een niet ongebruikelijke gang van zaken. Echt functioneel schijnt het pas geworden te zijn toen men risico's moest gaan spreiden, bijvoorbeeld voor samenwerkende reders met een gemeenschappelijke vloot in het welvarende Florence van weleer.

Hoe het ook zij, een ander, belangrijk fenomeen doorkruist de geschiedenis van de procenten, namelijk de uitvinding van de decimale breuken (kommagetallen).

In 1585 publiceerde Simon Stevin (1548-1620) zijn 'De Thiende' ('Leerende door ongehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den menschen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen zonder ghebrokenen'.) Hierin schetste hij hoe de natuurlijke getallen met de decimale breuken volgens hetzelfde plaatswaardebeginsel zouden kunnen worden uitgebreid, weliswaar nog zonder komma en bovendien tamelijk ingewikkeld genoteerd. Veel belangrijker is echter de aanleiding.

De dagelijkse praktijk van markt en handel was namelijk nogal ingewikkeld, zeker internationaal. Dit kwam door het gebruik van 'een eeuwenoude janboel van maten en gewichten' zoals Freudenthal het eens noemde.³ Een bekend voorbeeld dat lang heeft stand gehouden is dat van de waarde van het Engelse pond, uiteenvallend in twintig shillingen en de shilling weer onderverdeeld in twaalf pennies. Deze onderverdeling dateert van vóór Karel de Grote en behoort pas sinds kort tot het verleden.

Hoe het ook zij, Stevin aanschouwde het dagelijkse getob met ellen, Rijnlandse voeten en wat dies meer zij en schiep in één klap eenheid daarin; dat wil zeggen in het ingewikkelde breukrekenen dat ermee gepaard ging. Althans, zijn voorstel behelsde het unificeren van al die ingewikkelde berekeningen met breuken. En met verhoudingen! Want in de wereld van markt en handel ging het om aantal en prijs, om gewicht en prijs, om ruilvoeten en wisselkoersen enzovoort, een broedplaats voor breuken en verhoudingen, eendrachtig verstrengeld in ingewikkelde berekeningen. Stevin wilde al die berekeningen

decimaliseren, een ingrijpende vereenvoudiging waarmee het breukrekenen omzeild zou kunnen worden.

Hij overzag de consequenties van zijn vinding ten volle en hij voorzag ook de invoering van decimaal verfijnde maatstelsels voor lengte, gewicht en geld. Dit zou nog slechts een kwestie van tijd zijn.⁴ Hij bepleitte de overgang op zulke stelsels van maten in ieder geval nadrukkelijk. Wiskundig gezien liep zijn vinding dus op de mogelijkheid tot praktische toepassing ervan vooruit. En het zou nog tot na de Franse revolutie duren voordat er in Frankrijk, op last van de Grondwetgevende Vergadering (8 mei 1790) en geïnspireerd door de sterke behoefte aan een radicale breuk met het verleden (zelfs uurwerken werden toen decimaal gemaakt!), werk gemaakt werd van het decimale metrieke stelsel.

Samengevat komt het erop neer dat de kommabreuken hun historische wortels hebben in het verhoudings- en breukrekenen van markt en handel, waarmee het 'procentrekenen', voor zover men daarvan in die tijd al kon spreken, nauw verbonden was.

Kommabreuken zijn het historisch verdichtingspunt van alle genoemde wiskundige middelen, middelen om grootte-relaties te beschrijven, te bewerken en te berekenen. Dit zal bij de didactische uitlijning van procenten hoe dan ook gerespecteerd moeten worden.

Met betrekking tot de *concrete leerdoelen* 'verhoudingen' en 'procenten' (eindtermen) vermeldt de 'Proeve ...':⁵

- ⁴ Leerlingen hebben begrip van 'procent' als gestandaardiseerde verhoudingsmaat van 'één op honderd' en als groefactor.
- ⁵ Leerlingen kunnen aan de hand van alledaagse situaties praktische procentberekeningen maken, in het bijzonder met geld.
- ⁶ Leerlingen begrijpen het verband tussen verhoudingen, breuken en decimale breuken.'

Mede gelet op de historie zal het duidelijk zijn dat in leerdoel 6 ook procenten begrepen zijn.

3 De maatschappelijke aanwezigheid van procenten

Het is met de maatschappelijke aanwezigheid van procenten net als met de economie. Er is een officieel circuit met zijn regelgeving, wetten en tarieven. Dat geldt ook voor het voorkomen van procenten. Maar dit kent, net als de economie, ook een grijs circuit, waarin van alles gebeurt dat niet geoorloofd is.

Onze vorige bijdrage begon met twee gevallen (Avro's Servicesalon 1 op 25 = 25% en de kwitantie van 15 gulden, 20% BTW = f 3,- inbegrepen) uit het grijze circuit, later nog aangevuld met het voorbeeld van de funeste gevolgen van de vrede voor de Tsjechische wapenverkoop (een vermindering met 900 procent).

We willen er hier nog twee voorbeelden aan toevoegen die betrekking hebben op het ten onrechte samenvoegen van percentages in een redenering.

Mavo⁶

'Bij de stuurgroep is het afgelopen jaar onderzoek binnen gekomen, waaruit blijkt dat *twaaalf* procent van de kinderen die naar de Mavo gaan onvoldoende kan lezen. *Vijftien* procent kan onvoldoende schrijven. Gecombineerd is dat *ruim een kwart* dat ongekwalificeerd aan de Mavo begint. Let wel: begint! Dan schrik je je toch wild?!'

Dit is inderdaad even schrikken!⁷ Om de zegsman zelf het mankement in zijn redenering te laten inzien voegen we eerst het tweede voorbeeld eraan toe. Het middel van de didactische overdrijving kan immers de nodige conflictstof opleveren.

Astrid Lindgren

In het essay 'Kan men twee muzen dienen?' schrijft Maarten 't Hart:⁸

'In Zweden heeft men bijvoorbeeld lange tijd niet geweten hoe men schrijvers economisch diende te plaatsen. Toen vond een briljant jurist de oplossing. Een schrijver, zo meende hij, was een werkgever. Zo iemand deelde zichzelf werk uit, dus was hij tegelijkertijd ook werknemer. Dien-tengevolge diende een schrijver alle sociale lasten te betalen die een werkgever doorgaans betaalt voor zijn werknemers. Maar als werknemer moest een schrijver ook sociale lasten en belastingen betalen. Voor schrijvers die goed verkochten – u herinnert zich misschien nog het schandaal rondom Astrid Lindgren, de schrijfster van de Pippi-Langkousboeken – betekende dat dat zij tot 106 procent van hun inkomen dienden af te staan aan de fiscus.'

'Goedverkopende schrijvers' zijn in Zweden dan ook steeds dieper gezonken, ja zelfs tot de bedelstaf geraakt, omdat zij méér en méér in het krijt kwamen te staan bij de fiscus.

Wat de kwalificatie voor de Mavo aangaat moeten we niet vergeten dat er ook nog 25 procent onvoldoende kan rekenen, 30 procent onvoldoende gemotiveerd is en 24 procent een taalachterstand heeft. In samenhang gezien heeft dit inderdaad veel weg van (de Zweedse) economie. Gecombineerd is dat 106 procent, dat is ruim het totaal (!) dat ongekwalificeerd aan de Mavo begint!

Maar nu alle gekheid op een stokje. De moraal van dit verhaal is, dat de maatschappelijke aanwezigheid van procenten twee kanten heeft. En van de 'grijze' kant kunnen we leren *waar* het misgaat met procenten en vervolgens wellicht vaststellen *waarom* het misgaat, om er tenslotte in de voorstellen voor een 'nieuwe aanpak' de nodige maatregelen *tegen* te nemen.

Dan nu de andere kant. De toepassing van procenten is de laatste decennia aanzienlijk toegenomen, bijvoorbeeld door de sport op de televisie. Tijdens de aanloop tot en het schrijven van deze bijdrage in 'zomaar' een paar zomerweken van 1991 werden we, zonder hier gericht naar gezocht te hebben, geconfronteerd met:

- percentages eerste services die 'in' geslagen werden op Wimbledon door de diverse gerenommeerde spelers. Tijdens het spelverloop verschijnen de cijfers setsgewijs en later cumulatief op het scherm, bijvoorbeeld:

Eerste service in:			
Becker	67%	Stich	76%

- idem met volleybalwedstrijden (services en smashes) (fig. 1);

Bovendien zadelde hij Ron Zwerver op met een onvoorstelbaar pak werk. De nooit klagende sterspeler kwam in vier sets van die middag 297 keer aan de bal, waarvan 86 smashes en 39 sprongservices. Ter vergelijking: de vedette aan de andere zijde van het net, Joël Despaigne, kwam tot 179 acties. De Cubaan bereikte een effectiviteit van 52 procent, acht procent minder dan Zwerver.

de Volkskrant

figuur 1

- toename van de criminaliteit in ons land, met name het plegen van overvallen (deze vorm van criminaliteit blijkt in korte tijd met 150 procent te zijn toegenomen);
- de dagelijkse stroom van aanbiedingen en uitverkoop van consumptief krediet tot en met het boodschappenlijstje van merkartikelen bij Dirk van den Broek, vergeleken met Albert Heijn, dat we ook in de vorige aflevering gebruikten.⁹ (fig. 2).



WAAROM MEER BETALEN VOOR PRECIES DEZELFDE MERKARTIKELEN?

figuur 2

Gaan we al deze voorbeelden nog eens na op het toepassen van procenten, dan valt het volgende op:

Procenten doen zich *in de eerste plaats* voor om een deel ten opzichte van een geheel als alternatief voor een breuk, fractie of verhouding uit te drukken. Vervolgens worden dergelijke beschrijvers actief in operatoren gebruikt. (Vrijwel alle gevallen, maar met name de voorbeelden uit de sport, zijn in deze illustratief).

Betreft het geheel een populatie en worden daarvan verschillende delen met een bepaalde eigenschap bekeken, zoals in het geval van de Mavo-leerlingen, dan loert het gevaar van de overlap. Zulke fracties, in percentages gegeven, mogen dus niet zomaar worden samengevoegd, ook al is de uitkomst een indrukwekkend pleidooi voor een ingenomen standpunt. Procenten worden *ook* ge-

bruikt om situaties onderling te vergelijken of vergelijkbaar te maken. Hiervoor kunnen de voorbeelden uit de sport eveneens model staan. Er blijkt tevens uit dat het beschouwen van procenten op aspecten als 'deel-geheel' en/of 'operator' op zichzelf niet voldoende is, maar dat deze pas hun betekenis krijgen in de zinvolle toepassing bij het vergelijken.

Tenslotte worden procenten toegepast om de groei van een verschijnsel of grootte tot uitdrukking te brengen (bijvoorbeeld de kwestie van de toename in overvallen en in zekere zin ook het boodschappenlijstje).

Verscholen in het verschijnsel persoonlijke lening of consumptief krediet zit de herhaalde toepassing van eenzelfde rentepercentage, een kwestie van (gecompliceerde) exponentiële groei.

Dit alles kan samengevat worden tot enkele kernbegrippen, die in de didactiek essentieel (zullen moeten) zijn:

- deel-geheel, fractie,;
- toename, afname, verandering;
- vergelijken, stellen op honderd, decimaliseren;
- (geoorloofd) samennemen.

Daarbij komt het erop aan, zoals in de vorige bijdrage ook al herhaaldelijk gesteld werd, dat niet alleen het percentage waarmee iets toe- of afneemt onze aandacht verdient, maar vooral ook *datgene wat de verandering ondergaat*.

Laten we het boodschappenlijstje in de AH-DvdB-kwestie maar weer als voorbeeld nemen, en dit vereenvoudigen tot:

Dirk van den Broek:	100 gulden
Albert Heijn :	200 gulden

Ten opzichte van welk bedrag moet nu vergeleken worden?

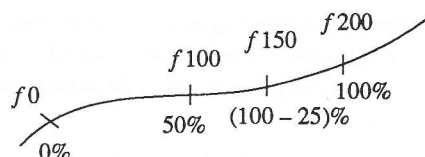
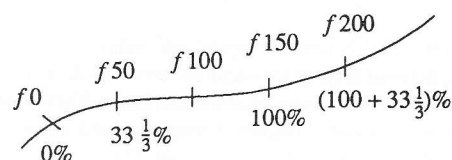
Is de lijst van DvdB uitgangspunt, dan wordt die op 100 procent gesteld. En het is dan zonneklaar dat AH 100 procent duurder is. Je kunt ook zeggen AH is 200 procent van het DvdB-pakket of gewoon twee maal zo duur. Maar gaan we van het AH-pakket (100 procent) uit dan is het DvdB-pakket daar de helft van. Dus 50 procent goedkoper. (Of twee maal zo goedkoop).

Aan deze versimpeling zien we dat het rekenen met 'erbij/eraf-procent'-vraagstukken niet symmetrisch is.

Zoveel procent erbij betekent niet hetzelfde percentage eraf om weer op het grondbedrag uit te komen. Zoals we in de vorige aflevering hebben laten zien is deze *a-symmetrie* de aanleiding tot steeds dezelfde misverstanden en fouten. En dit is daarom zo misleidend omdat in absolute zin er een verschil van $f 100$ is tussen de twee pakketten, dat in relatieve zin verschillend uitpakt.

Nu zou men kunnen zeggen dat het in de praktijk nooit zo mooi is (100 vs 200). Daarom is het om didactische redenen wellicht verstandig nog eens enkele andere, wat moeilijker voorbeelden te kiezen. We stellen nu bijvoorbeeld DvdB op $f 150$ en AH op $f 200$ en we maken de

vergelijkingen duidelijk met de volgende plaatjes:



Nu geldt dus: AH is $33\frac{1}{3}$ procent duurder dan DvdB; maar DvdB is 25 procent goedkoper dan AH. Dit kan de basis leggen voor het latere factorgebruik:

$$f 200 = 1 \times f 150 + \frac{1}{3} \times f 150 = (1 + \frac{1}{3}) \times f 150 = \frac{4}{3} \times f 150 = 1\frac{1}{3} \times f 150$$

$$f 150 = 1 \times f 200 - \frac{1}{4} \times f 200 = (1 - \frac{1}{4}) \times f 200 = \frac{3}{4} \times f 200 = 0,75 \times f 200$$

Maar dan zijn we wel met forse stappen door dit proces heengegaan.

Waar het om gaat is dat steeds goed voor ogen gehouden wordt *waarvan* de percentages berekend worden en dat de *samenhang* met de *breuken* c.q. *decimale breuken* zichtbaar blijft. Zoals we bij deze voorbeelden zien is het niet aan te raden om hier de klassieke aanpak (eerst altijd 1 procent berekenen) toe te passen.

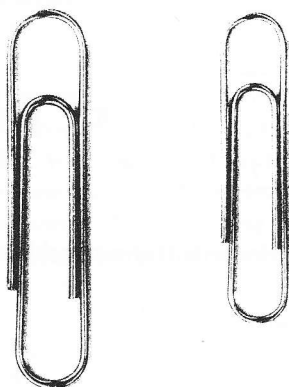
Belangrijke toepassingen hebben we gezien in de BTW-sommen, maar kunnen bijvoorbeeld ook gevonden worden in problemen over loon en belasting.

Tenslotte merken we, wat het maatschappelijke voorkomen van procenten aangaat, nog op dat ze 'gewoon' zijn. Ook de basisschoolkinderen komen ze dus in hun werkelijkheid tegen, al is het maar bij het bedienen van het fotokopieerapparaat met vergrotings- en verkleiningsmogelijkheden. Bijna iedere school heeft tegenwoordig wel zo'n apparaat. In het onderwijs kan van dergelijke 'ontmoetingen' gebruik gemaakt worden.

4 Didactische ideeën

In het volgende gedachtenexperiment wordt volstaan met het aangeven van enkele oplossingswegen per vraagstuk. Een uitputtende behandeling van de mogelijkheden tot progressief schematiseren met de lege, dubbele getallenlijn blijft dus achterwege.

Kopieermachine op ...%



figuur 3

In figuur 3 staan twee plaatjes van een paperclip voor een folder van een fabriek.

De kleinste werd vergroot van 4 cm tot 5 cm.

Er is 1 cm bijgekomen, dus $\frac{1}{4}$ van de lengte erbij, dus $(1 + \frac{1}{4}) \times 4 \text{ cm} = 1,25 \times 4 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$.

Dan geven we de informatie 'De kopieermachine stond op 125%'. 125% betekent dus $1\frac{1}{4}$ keer of 1,25 keer (in lengte) vergroten.

Was het om een verkleining te doen geweest, dus de lengte van 5 cm verminderen met 1 cm, dat is het $\frac{1}{5}$ deel (van 5 cm) eraf, dan gaat het om 1 keer min $\frac{1}{5}$ keer de lengte van 5 cm, dus $(1 - \frac{1}{5})$ keer 5 cm, is $\frac{4}{5}$ of 0,8 keer 5 cm. De kopieermachine moet op 80% gestaan hebben, want dat is $(1 - \frac{1}{5})$ keer 100% van de lengte (is 100% - 20%) van de lengte.

Voor het samenstellen van de folder zijn meer illustraties nodig, dus meer vergrotingen en verkleiningen gewenst, omdat het hele assortiment van de fabriek in de folder moet. 1% kan worden ingevoerd door de overgang van 100% op 99% en/of te veronderstellen dat de kopieermachine ook op 1% gezet kan worden.

Daarmee kunnen de gesuggereerde activiteiten ook in honderdsten beschreven worden.

$(1 + \frac{1}{4})$ keer, $(1 + \frac{25}{100})$ keer, $(1 + p\%)$ keer

of $(\frac{100}{100} + \frac{25}{100})$ keer, $(\frac{125}{100})$ keer, 125% etc.

T-shirts-vraagstuk

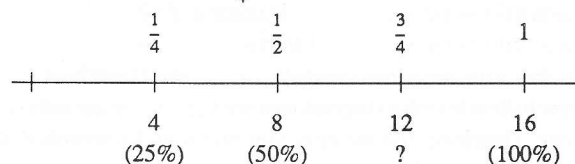
T-shirts
Normaal f 16,-
Nu voor f 12,-
Met hoeveel % is de prijs verlaagd?

De goedscore op dit vraagstuk bleek in het PPON-onderzoek 45 procent te zijn. 'Met hoeveel procent is de prijs verlaagd?', daar gaat het om, dat wil zeggen de 'normale' prijs! Een eerste vereiste is dus dit uitgangspunt de 'normale prijs van f 16,-' te kunnen vaststellen. Welnu, deze prijs is met f 4,- verminderd. Voor een ver-

dere berekening staan nu verschillende wegen open.

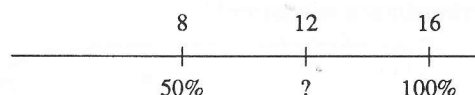
a. via breuken

Prijsverlaging f 4,- of $\frac{1}{4}$ deel van f 16,- (eventueel 0,25).



Met breuken kan nu op de dubbele getallenlijn, bijvoorbeeld rekenend via $\frac{1}{2}$ en/of $\frac{1}{4}$ van de prijs, en gekoppeld aan percentages, de korting in een percentage bepaald worden.¹⁰

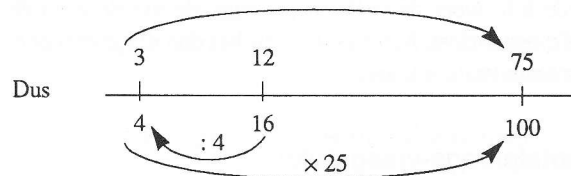
b. direct met percentages



Bijvoorbeeld via de helft of 50 procent van de normale prijs.

c. via verhoudingen

Het gaat om 12 van de 16 gulden die in de nieuwe situatie nog betaald zullen moeten worden. Dit is 75 procent.



In alle gevallen gaat het om het vergelijken van 12 met 16 gulden, waarbij het eerste bedrag met het tweede als maat gemeten wordt; 16 gulden is de eenheid, het geheel. Dit laat nog allerlei instapmogelijkheden open die stuk voor stuk door de bovenbouwleerlingen benut kunnen worden, mits zij een beroep kunnen doen op bepaalde basisinzichten die we hebben uiteengezet en de nodige vaardigheid hebben in hoofdrekenen, schattend rekenen en flexibel rekenen.

Het gaat hier om een heel elementair vraagstuk, namelijk een (impliciet) gegeven relatie uitdrukken in een percentage. Wanneer meer dan de helft van de bovenbouwleerlingen blijken het PPON-onderzoek het op dit niveau reeds laat afweten, dan valt er dus nog het nodige te verbeteren.

Worst-vraagstuk

Verse worst f 6,- per kilo
2e kilo voor de halve prijs

Hoeveel procent goedkoper ben je uit per kilo als je twee kilo koopt? ...%

Dit vraagstuk oogste een goedscore van 22 procent. De verklaring hiervoor is duidelijk. De gegevens om te vergelijken moeten eerst nog door de leerlingen zelf worden voortgebracht.

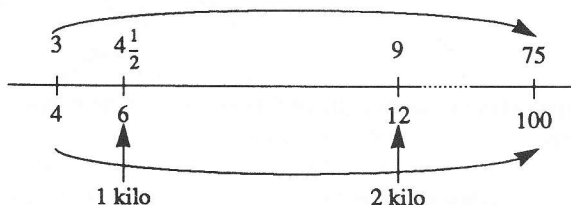
Twee kilo verse worst zonder korting f 12,-

Twee kilo verse worst met korting f 9,-

En dan zijn we weer terug bij het T-shirts verhaal. De verschillende oplossingen laten we hier dus maar achterwege. Daarmee zijn we er echter nog niet. Er schuilt nog een addertje onder het gras.

25 procent korting op twee kilo is dat $12\frac{1}{2}$ procent op één kilo? (vergelijk met de kwestie van de Mavo-leerlingen). Een mooie testcase zouden wij zeggen. Voor wie beseft dat het om het rekenen met relaties gaat geen moeilijke kwestie. Voor wie twijfelt zijn er de verschillende oplossingswegen die – om zo te zeggen – de bronnen van het inzicht openhouden.

Met verhoudingen bijvoorbeeld:



Wie zo te werk gaat beseft dat het in 'alle' gevallen om 25 procent korting gaat, waarbij we ervan uitgaan dat de derde kilo weer de volle prijs krijgt, de vierde weer de helft, enzovoort. Maar ja, hoe zit het dan als je een oneven aantal kilo's koopt?

Koptelefoons-vraagstuk¹¹

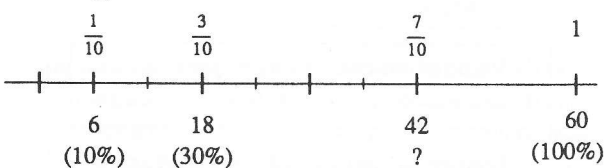
Koptelefoons van f 60,-
Nu met 30% korting.

Hoeveel moet je nu voor
een koptelefoon betalen?
f

Het is steeds hetzelfde verhaal: eerst 'het geheel' als startpunt kiezen. In dit geval is dat niet zo moeilijk, omdat er geen alternatief voor f 60,- is. Het gaat om korting, dus er moet iets vanaf, namelijk 30 procent van f 60,-. Er staan weer verschillende wegen open.

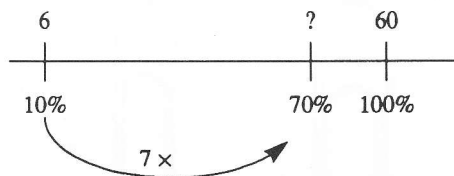
a. breuken

In dit geval is weten dat 30 procent van iets gelijk staat aan het $\frac{3}{10}$ deel ervan wel handig.



De berekening kan bijvoorbeeld via $\frac{1}{10}$ deel en $\frac{3}{10}$ deel verlopen. (via 0,1; 0,3 en 0,7 kan natuurlijk ook).

b. rechtstreeks met percentages



De berekening verloopt dan bijvoorbeeld via 10 procent.

c. verhoudingen



Het oude bedrag komt overeen met 100 procent en het nieuwe met 70 procent, vanwege de 30 procent korting. Via de verhouding 7 van de 10 kan het nieuwe bedrag nu bepaald worden.

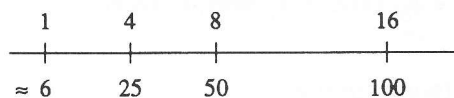
Slechts ruim $\frac{1}{3}$ deel van de leerlingen maakte dit vraagstuk zonder meer goed.

Procenten-breuk-vraagstuk

16% van f 42,- is ongeveer
 $\frac{1}{6}$ deel van f 42,-

Opnieuw een lage goedscore, namelijk 23 procent. Men zou toch zeggen dat het opnieuw om een elementaire kwestie gaat, namelijk de samenhang van breuken en procenten.

Wanneer de leerlingen beschikten over de juiste middelen om zo'n vraag open, dat wil zeggen desnoods stapsgewijs te benaderen, zou er dan geen andere uitslag geweest zijn?



Wellicht niet. Een extra moeilijkheid vormt hier namelijk het (overbodige) bedrag van f 42,-. Het weglaten ervan kan het vraagstuk wellicht abstracter maken.

Wie 16 procent van f 42,- precies uitreken (f 6,72) zal in de uitkomst niet zo gemakkelijk het $\frac{1}{6}$ deel van f 42,- herkennen.

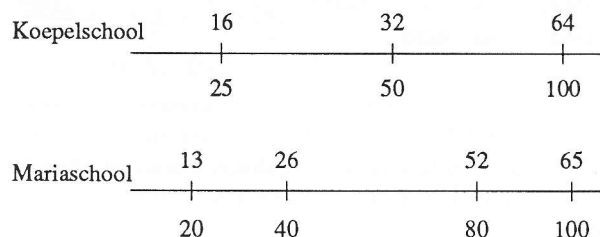
Wie flexibel kan hoofdrekenen (16 procent is ongeveer het $\frac{1}{6}$ deel van 100 procent, dus ...) komt er wel uit. De vraag is dan of dit vraagstuk wel past bij de manier waarop het huidige reken-wiskundeonderwijs is ingericht. Het appel op het flexibel omspringen met die lastige procenten was voor ruim driekwart van de leerlingen in ieder geval tevergeefs.

5 Bezinning

Uitgaan van 'zomaar' enkele problemen, op ééntje na uit het eerste PPON-onderzoek, houdt het gevaar van onvolledigheid in. Wat bijvoorbeeld te denken van het vergelijken van twee breuken of fracties om tot het stellen op honderd te komen. Dit kwam nog niet voor.

Van de Mariaschool en de Koepelschool deden de achtste groepen mee aan de avondvierdaagse. Van de Mariaschool liepen 13 van de 20 kinderen voor de tweede keer mee en van de Koepelschool waren dat 16 van de 25 kinderen. Van welke school liepen (naar verhouding) de meeste kinderen voor de tweede keer mee?

Het gaat om 13 van de 20 kinderen, of in een fractie $\frac{13}{20}$ deel van de groep, respectievelijk 16 van de 25 kinderen of het $\frac{16}{25}$ deel van de groep. Zo op het eerste gezicht lijkt het in beide gevallen om ongeveer $\frac{2}{3}$ deel te gaan. Precies te zeggen is het niet, wat nader onderzoek gewenst maakt.



Beide situaties laten zich gemakkelijk via verdubbelen en samennemen op honderd stellen, waarna vergelijking een relatief verschil van 1 op de 100 oplevert in het voordeel van de Mariaschool (respectievelijk 64 procent en 65 procent tweede lopers).

Nog een voorbeeld van het stellen op honderd, met mooie mogelijkheden tot flexibel rekenen, vandaar! Het gaat om het deelnemen aan en het uitrijden van de elfstedentocht.¹²

Een dergelijk tabelletje nodigt uit tot het opwerpen van allerlei vragen om te vergelijken.

Aantal deelnemers aan de toertocht		
Jaar	Deelnemers	Uitrijders
1909	0	0
1912	22	4
1917	108	83
1929	206	103
1933	399	321
1940	2716	27
1941	1900	1672
1942	3862	3669
1947	1791	270
1954	2597	2143
1956	6070	4739
1963	9294	69

Bijvoorbeeld:

- het indelen van de tochten in gemakkelijke en moeilijke;
- het vergelijken van twee gemakkelijke en twee moeilijke jaren (bijvoorbeeld 1942 met 1956 en 1940 met 1963);
- het vergelijken (en normeren) van aantallen uitrijders op aantallen deelnemers; in 1940 was dit nagenoeg 1 op 100;
- het gebruiken van 1 op 100 als 'maat' voor het vergelijken.

Een voorbeeld:

In 1963 waren er op ruim 9200 deelnemers slechts 69 uitrijders! Honderd maal het aantal uitrijders, zeg 7000, doet onmiddellijk inzien dat 1963 het in dit opzicht tegen 1940 moet afleggen en óók dat nog zo'n slordige 30 x 70 deelnemers overblijven, dus bedroeg het aantal uitrijders vergeleken met het aantal deelnemers in 1963 ongeveer '1 op de 130' tegenover '1 op de 100' van 1940.

- het beoefenen van het stellen op honderd voor alle overige uitslagen;
- het doen van schattingen voor de aantallen deelnemers voor de latere elfstedentochten (is er een grens?; denk in dit verband aan de ledenstop voor de Elfstedenvereeniging en de discussies daarover in het bestuur van die vereniging).

En tenslotte (eventueel) nog:

- het kwalificeren van de strengheid van de betreffende winters op grond van de gegeven aantallen uitrijders.

Een tweede kanttekening die we in deze bezinning willen maken betreft de kwestie van het voortgaande schematiseren, wat ook met procenten mogelijk is. In paragraaf 3 lieten we al zien dat het belangrijk is om bij de twee hoofdtypen, zoals ze in de vorige bijdrage genoemd werden, namelijk 'deel ten opzichte van geheel' en 'geheel plus of min deel', het geheel waarvan het deel genomen wordt in de notatie vast te houden.

Dus wat deze beide hoofdtypen, bijvoorbeeld in het 'tweede' Dirk van den Broek-probleem, aangaat komt dit neer op de overgang van

$33\frac{1}{3}\%$ meer of 25% minder op

$$\left(1 + \frac{33\frac{1}{3}}{100}\right) \times \dots \text{ respectievelijk } \left(1 - \frac{25}{100}\right) \times \dots$$

Waar het op aankomt is dat de beide hoofdtypen geleidelijk aan worden teruggebracht tot hun meest verkorte mathematische gedaante en betekenis, namelijk opgaand in een factor, die bij herhaaldelijke groei of verval met eenzelfde 'bedrag' dienovereenkomstig kan worden toegepast. Het is onder andere daar waar de zakrekenmachine functioneel kan worden ingezet.

Het inzichtelijk kunnen opvatten van de beide hoofdtypen als factor ontsluit de weg tot het aanpakken van groeiproblemen, ondersteund door de inzet van de rekenmachine. Dat daarbij weer allerlei verstrengelingen van leerlijnen totstandkomen die tot ver in het voortgezet onderwijs doorgaan, moge blijken uit de twee voor-

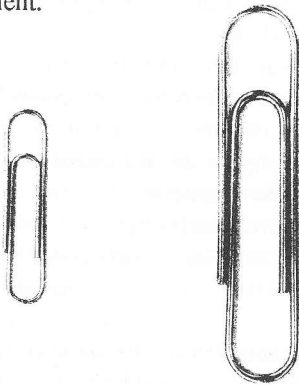
beelden waarmee we het rekenmachinegebruik in een aparte paragraaf zullen duiden.

Een laatste kanttekening bij het gedachtenexperiment betreft het lezen (en eventueel samenstellen) van sectordiagrammen. Het sectordiagram is een geschikt middel om een (eerste) indruk te geven van een verdeling van een geheel over meerdere categorieën (de bodem in gebruikscategorieën, of grondsoorten, de verdeling van de belastinggelden over de verschillende collectieve sectoren, enzovoort).

Als zodanig moet het gelezen kunnen worden door de leerlingen, en geïnterpreteerd. Als denk- en rekenmodel is het echter minder geschikt.

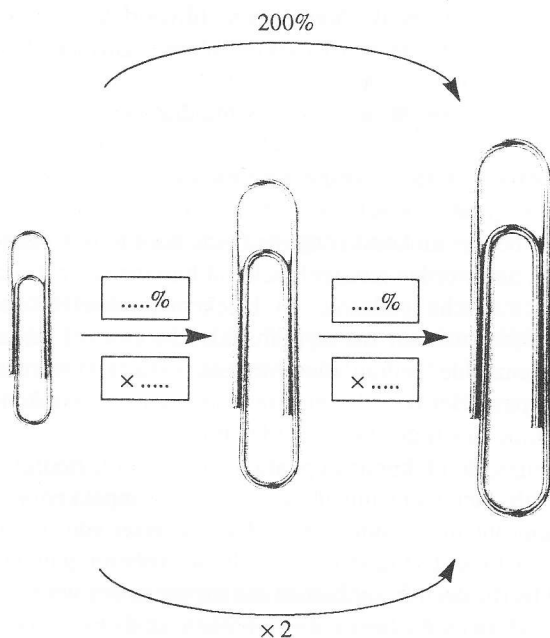
6 Zakrekenmachine

We keren even terug naar het eerste voorbeeld uit het gedachtenexperiment.



figuur 4

Figuur 4 toont een paperclip van 4 cm en een van 8 cm. In de folder van de fabrikant is het plaatje voor de grootste uit de kleinste ontstaan. De kopieermachine stond op 200%! (Dat kan! Zulke machines bestaan.)



Maar ..., stel nu eens dat de vergroting in twee (gelijke vergrotings-) stappen tot stand gekomen is, waarop zou de kopieermachine dan gestaan hebben?

Na een aftasten van de mogelijke grenzen waartussen de gevraagde vergrotingsfactor moet liggen, kan tot verstandig proberen met de rekenmachine worden overgegaan. Een procentenknop is niet eens nodig.

We knopen er nog een tweede voorbeeld aan vast, met leerlingenwerk. Het gaat om een vereniging (de NVSH) die in 1970 200.000 leden telde.

In 1971 waren er 20.000 minder.

In 1972 waren het er nog 162.000 en

in 1973 gingen er 16.200 leden af en zo ging dat maar door.

De vraag luidt: Wanneer zal de vereniging minder dan de helft van de leden van 1970 hebben?

Na het nodige voorwerk:

1970 200.000 leden
 1971 180.000 leden - $\frac{1}{10} \times \frac{9}{10}$ 90%
 1972 162.000 leden - $\frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times 0,9$ 90%
 1973 145.800 - $\frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times 0,9$ 90%

waarbij met de fotokopieerder als denkmodel allerlei relaties in het ledenverloop van de vereniging werden vastgesteld en beschreven, besloten Lucas en Mariska (groep acht) het over een meer systematische boeg te gooien.

1970 200.000
 1971 $0,9 \times 200.000 = 180.000$
 1972 $0,9 \times 0,9 \times 200.000 = 162.000$
 1973 $0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 200.000 = 145.800$
 1974 $0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 200.000 = 131.220$
 1975 $= 118.098$
 1976 $= 106.228,2$
 1977 $= 95.659$

Na de systematische notatie met factoren tot en met 1974 begon het monnikenwerk hen parten te spelen. Het besluit om daarmee te stoppen hoefde niet genomen te worden, want de handelingen met de rekenmachine begonnen Mariska en Lucas te fascineren.

Venster: Ledenaantal 1973: 145.800

Inttoetsen $\times 0 \cdot 9 =$

Venster: Ledenaantal 1974: 131.220

Inttoetsen $\times 0 \cdot 9 =$

Venster: Ledenaantal 1975: 118.098

In de handelingen van het opschrijven en het vaststellen van elk volgend ledenaantal groeide een cadans die het verval letterlijk belichaamde. Bij 1977 was de grens van de helft gepasseerd. Zo snel al. Het korter noteren met machten is een kwestie van later zorg.

Wat nu nog rest is de vraag: Zal de vereniging 1990 nog halen wanneer het verval voortzet?

Bovenstaande voorbeelden zijn zonder gebruik van de rekenmachine eigenlijk ondoenlijk, hoewel het NVSH-vraagstuk nog schattenderwijs aangepakt had kunnen worden vanwege de mooie 10 procent-vermindering. In de praktijk zijn procentvraagstukken vaak heel vervelend (18,5 procent BTW; rente 7,3 procent) en vragen derhalve om de inzet van de rekenmachine.

De didactiek 'Alles is 100%, wat is 1%?' blijkt voor de rekenmachine erg onhandig te zijn.

Waar het bij gebruik van de rekenmachine om gaat is:

- *inzicht* in de *structuur* van het *vraagstuk*;
- *kunnen kiezen* voor een oplossingsmethode en
- *vaardigheid* om deze *tot uitvoering* te brengen.

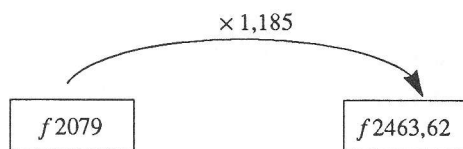
Bovendien komt daar nog bij dat je een goed inzicht in het getsysteem moet hebben en vooral de samenhang tussen verhoudingen, breuken, kommagetallen en procenten goed moet beheersen.

In 1963 reden 69 van de 9294 deelnemers de Elfsteden-tocht uit. Het percentage uitrijders wordt berekend door de berekening $69 \div 9294$, waarvoor de rekenmachine geeft: 0,0074241. Nu gaat het om het interpreteren van de uitkomst: eerst afronden 0,007, dan interpreteren als breuk $\frac{7}{1000}$, daarna als $\frac{0,7}{100}$, dus 0,7%.

Naast zo'n typisch voorbeeld van een 'deel-geheel'-sometje komt ook het 'geheel plus of min deel' in de praktijk regelmatig voor.

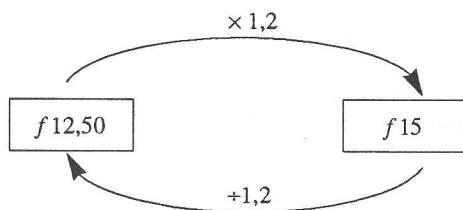
'Deze tafel kost f2079 exclusief BTW'.

Zoals hiervoor beschreven zal de meest efficiënte berekeningswijze zich voltrekken met de factormethode:



Het zal duidelijk zijn, dat deze methode eerst aan het eind van procentrekenen aan de orde gesteld kan worden. Door de verbinding te leggen met het omgekeerde vraagstuk (Een tafel kost f2463,62 inclusief 18,5% BTW. Hoeveel is de nettoprijs?) wordt als vanzelf de inverse bewerking (delen door 1,185) gevisualiseerd.

Of, om het nog eens met het langzamerhand afgezaagde voorbeeld van de visitekaartjes te demonstreren:



Zo simpel is het eigenlijk, of beter gezegd, lijkt het. Want hopelijk is uit deze en de vorige bijdrage duidelijk geworden hoe complex het procentrekenen is. Dat dit gevolgen heeft voor de te kiezen didactiek vatten we tenslotte nog eens samen.

7 Besluit

Procenten kunnen slechts goed begrepen en toegepast worden in samenhang met begrip van en vaardigheid met verhoudingen, breuken en kommagetallen.

Vanwege deze complexiteit is een éénduidige (beste) lineaire leergang niet te ontwikkelen. Voor dit onderwerp dient veeleer naar een onderwijsleerstructuur gezocht te worden.

Een dergelijke onderwijsleerstructuur kan verschillende accenten hebben. Ligt in de methode (leerboek) een sterke nadruk op de breuken dan ligt het voor de hand hierin ook het startpunt voor procenten te kiezen. Worden echter de verhoudingen meer benadrukt, dan kan daarbij aangesloten worden. Welke methode ook gekozen wordt, de samenhang met de kommagetallen zal op een bepaald moment expliciet gemaakt moeten worden.

Tot goed begrip van percentage als 'deel van het geheel' (fractie) kan ruime aandacht besteed worden aan vergelijkingssituaties van twee of meer 'mengsels' (Wat is meer, 25 van de 42 of 30 van de 52?). Hierbij is het 'op honderd stellen' een belangrijke schakel tot begrip van percentage als 'zoveel van de honderd' (standaardisering). Eenvoudige vraagstukjes kunnen het vertrekpunt zijn voor deze deelvaardigheid. De verhoudingstabel kan hierbij aanvankelijk als rekenmodel dienen. Tevens komen hierbij visuele representaties als het sectordiagram aan de orde.

De problemen met 'percentages erbij/erof' (geheel plus of min deel) behoeven aparte aandacht. Door middel van didactische overdrijvingen kan deze problematiek verhelderd worden. In het bijzonder moet duidelijk worden dat hier niet optellen en aftrekken als omkeerbewerkingen gelden (100 procent ergens bij, betekent niet 100 procent erof om weer op het beginbedrag te komen). Hiervoor kunnen ook voorbeelden uit de actualiteit, eventueel wat gestileerd, als uitgangspunt gekozen worden (bijvoorbeeld het Albert Heijn-Dirk van den Broek-vraagstuk). Een sterk paradigma kan als leidraad dienen bij de verdere methodische uitwerking.

Het sluitstuk van de erbij/erof-vraagstukken zal het begrip van en de vaardigheid met het werken met de factor (20 procent erbij $\rightarrow \times 1,2$ c.q. 20 procent erof $\rightarrow + 1,2$) moeten zijn. Dan ook worden de omkeerbewerkingen (vermenigvuldigen versus delen) in een formeel kader gezet. Tevens kan een begin gemaakt worden met problemen die door exponentiële groei gekarakteriseerd worden.

De didactiek zal gekenmerkt worden door bevordering van een flexibele attitude, waardoor bij ieder probleem een passende aanpak gekozen kan worden. Hoofdrekenen en schattend rekenen staan hierin centraal.

Vaste methodieken zijn ternauwernood te geven. Afhankelijk van de aard en structuur van het vraagstuk zal een werkwijze gekozen moeten worden. Nu weer eens via breuken, dan weer met verhoudingen, maar ook met kommagetallen. Het laatste vooral als precieze bereke-

ningen vereist zijn. Dan ook kan de rekenmachine ingezet worden, echter onder voorwaarde dat er inzicht in de betreffende problemen bestaat.

In de beginfase kan de verhoudingstabel als denk- en rekenmodel steun bieden. Het nadeel is echter dat te lang vastgehouden wordt aan het additieve aspect van dit model, waardoor de mogelijkheden voor het werken met de factor geblokkeerd kunnen raken.

De lege dubbele getallenlijn, waar de getallen meer in een meetordening staan, staat deze overgang minder in de weg. Bovendien kan de dubbele getallenlijn als bindmiddel gaan werken tussen breuken, decimale breuken en procenten, omdat equivalente uitdrukkingen ($\frac{1}{4} \approx 25\% \approx 0,25$) boven elkaar gesitueerd kunnen worden.

Uiteindelijk zal het procentrekenen formeel afgesloten kunnen worden met de factor-aanpak als pijlen gepresenteerd.

De onderwijsleerstructuur zal door de methode (leerboek) en de leraar vorm moeten krijgen. Hierbij kunnen mondelinge, interactieve lessen een belangrijke rol spelen. Voor deze lessen zou een verzameling eenvoudige procent-vraagstukken aangelegd kunnen worden. In deze vraagstukken liggen de kerninzichten voor het procentrekenen opgesloten. Ze nodigen uit tot verschillende specifieke aanpakken, zodat een flexibel aanpakgedrag gestimuleerd wordt. Daarnaast zal geoefend worden op basisfeiten en basisvaardigheden ($\frac{1}{5}$ deel van $\approx 20\%$; 30% korting, dus 70% van de oude prijs).

Tenslotte is het nuttig om verbazingwekkende fouten en valkuilen in deze lessen aan de orde te stellen. Alles steeds met nadrukkelijke aandacht voor inzicht, hoofd- en schattend rekenen.

Noten

1. Zie in dit verband bijvoorbeeld ook Streefland, L. (1991). *Verhoudingen en procenten*, OBR 331. Tilburg: Zwijssen.
2. Zie: Treffers, A. en E. de Moor (1990). *Proeve ... deel 2*. Tilburg: Zwijssen, 134-148 en 235-252.
3. Freudenthal, H. (1954). *Van sterren tot inlegzolen*. Arnhem, 49.
4. Wanneer men zich op het standpunt stelt dat in 'De Thien-de' de schuchtere en verspreide pogingen van voorgangers om tot invoering van decimale breuken te komen zijn uitgekristalliseerd, en bovendien dat een algemeen voorstel tot invoering van decimale breuken wordt gedaan, met daaraan verbonden de voorwaarde van de beschikbaarheid van een decimaal verfijnd systeem van maten, gewichten en geldswaarde, dit alles om de gewone breuken te vermijden, dan kan men Stevin de uitvinder van de decimale breuken noemen.
Zie in dit verband:
Depau, R. (1942). *Simon Stevin*. Brussel, of:
Boyer, C.B. (1962). Viète's use of decimal fractions. *The Mathematical Teacher* LV(2), 123-125.
Boyer dicht ook aan François Viète met zijn 'Canon mathematicus' en aanvullend werk daarop (1579) een deel van de eer toe. Verder worden in dit verband ook genoemd Christoff Rudolff met zijn 'Exempel Buechlin' (1530) en Adam Riese (de Duitse 'Willem Bartjens') met zijn 'Rechnung auff der Linien und Federn' (1522).
Zie in dit verband ook Streefland, L. (1988). *Realistisch*

breukenonderwijs. Utrecht: OW&OC, hoofdstuk 1.

5. Zie: Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs (1989). *Proeve ... deel 1*. Tilburg: Zwijssen, 66.
6. Uit: *Aan Mevrouw Lautenbacher*. (1990). Ton Elias interviewt Henk Hofstede. Enschede: Instituut voor Leerplanontwikkeling, l.c., 17-18.
7. Meeder, M. (1991). Even krijten 25. *Nieuwe Wiskrant*, 10 (4).
8. Maarten 't Hart (1990). *Een dasspeld uit Toela*. Amsterdam, 130.
9. Zie: *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 9 (4), 38.
10. Zie ook: Treffers, A. (1991). Breuken op de dubbele getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 9 (4), 3-15.
11. Zie: *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 9 (4), 39.
12. Abels, M. (1990). *Praktisch rekenen 2*, experimenteel pakket voor 12-16 project.