

het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool

a. treffers

oratie



rijksuniversiteit utrecht

het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool

Rede
uitgesproken bij de aanvaarding
van het ambt van bijzonder hoogleraar
op het vakgebied van
'Domeinspecifieke Onderwijstheorieën
in het bijzonder voor Rekenen en Wiskunde'
aan de Rijksuniversiteit te Utrecht
op dinsdag 6 februari 1990
door
A. Treffers

Faculteit Sociale Wetenschappen
Faculteit Wiskunde en Informatica

Vakgroep Onderwijskunde

Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum

Redactie en realisatie: Betty Dekker, OW & OC

Druk: Technipress, Culemborg

©1989: OW & OC, Rijksuniversiteit Utrecht

Voorwoord

Het jaar 1990 is internationaal uitgeroepen tot jaar ter bestrijding van ongeletterdheid. Van wiskundig-didactische zijde wordt 1990 in Nederland in het teken gesteld van de wiskundige ongeletterdheid, de ongecijferdheid.

De start daartoe maakte De Moor met zijn nieuwjaarsboekje 'Wie kan nog rekenen?' Ik neem in deze rede die vraag van hem over.

Is ongeletterdheid in Nederland een probleem?

Is wiskundige ongeletterdheid nijpend?

Op beide vragen geeft het volgende kranteknipstel een bijzonder antwoord:

'Gisteren, maandag 9 oktober, werd in AVRO's Servicesalon aandacht besteed aan het analfabetisme in Nederland. Uit de voor dat programma verzamelde gegevens is opnieuw gebleken dat maar liefst 1 van de 25 Nederlanders niet kan lezen of schrijven, dat die ene dus geen boodschappenbriefje kan schrijven of lezen, geen ondertitels op de TV kan volgen, geen krant kan lezen, geen brief kan samenstellen.

Stel je voor 1 op 25 Nederlanders, bewoners dus van een land dat mensen uitstuurt naar ontwikkelingslanden om daar de bevolking te leren lezen en schrijven. 1 van de 25 Nederlanders dat is 25%! En hoeveel inwoners heeft Nederland? Veertien miljoen? Dan wil dat wel zeggen dat in ons hoog-ontwikkelde land maar liefst drie-en-een-half-miljoen mensen niet kunnen lezen of schrijven.

Daar word je even stil van!

Uitgaande van die 1 op 25, hoeveel ongeletterden zijn er dan in Nederland?

Misschien antwoordt u op deze vraag, dat het er ruim een half miljoen zijn of 560 duizend.

Als u dit kunt, bent u niet ongecijferd.

Hoewel ...? Mogen we bij die 1 op 25 wel uitgaan van 14 miljoen?

Mogen we de babies, de kinderen, de mensen tot 20 jaar wel mee-rekenen? En hoeveel zijn dat er ongeveer: 3 miljoen, 4 miljoen? Zou 400 duizend dan niet een beter antwoord zijn?

Vindt u zo'n vraag bruikbaar voor het rekenonderwijs?

Ziehier de kwesties waar deze rede over zal gaan.

Het bovenstaande fragment is ontleend aan 'Wie kan nog rekenen?' (pag.10). En het diende tevens als startprobleem van het schriftje met opdrachten dat de bezoekers voor de aanvang van deze rede kregen uitgereikt.

Als tweede probleem werd gesteld: 'Hoeveel toetsen heeft een piano precies of ongeveer?'

Voorts bevat het schriftje alle afbeeldingen uit de nu volgende tekst.

Het voorkomen van ongetuigdheid op de basisschool

Waarde toehoorders,

Het woord ongetuigdheid is nogal nieuw.

1. Hoe ziet ongetuigdheid eruit, wat is het vóórkomen ervan?
2. In welke mate komt het op de basisschool voor?
3. En hoe zou het voorkómen kunnen worden?

Deze drie vragen stellen we hier achtereenvolgens aan de orde. Eerst wordt ongetuigdheid nader omschreven. Daarna worden gegevens over ongetuigdheid op de basisschool verstrekt. En tenslotte zal ongetuigdheid onderwijstheoretisch onder de loep worden genomen, waarbij speciaal het domeinspecifieke karakter ervan naar voren komt. Maar nu eerst het accent op het eerste deel, het vóórkomen.

*

Wat is ongetuigdheid, hoe ziet het eruit?

Het was Van der Blij die het woord als eerste gebruikte.¹ Hij deed dit in een lezing op de welbekende Panama-najaarsconferentie in 1986. Het staat bij hem voor 'wiskundige ongeletterdheid'.

In 1988 verscheen een boek van Paulos onder de titel 'Ongetuigdheid'.² Paulos omschrijft 'ongetuigdheid' als het onvermogen om op een passende manier met de fundamentele noties van getal en kans om te gaan. Als eerste voorbeeld kiest hij het volgende probleem: de tv-weervoorspeller zegt dat de kans op regen voor zaterdag 50 procent is en voor zondag ook 50 procent, en concludeert vervolgens dat de kans op regen in het weekend dus 100 procent is. Niemand in Paulos' gezelschap merkte de fout op. Ziehier een voorbeeld van wiskundige ongeletterdheid, aldus Paulos. In dit geval de onbekwaamheid om met kansen te rekenen.

Welnu, deze betekenis zou ik zeker niet aan ongetuigdheid willen

toekennen. Twintig jaar geleden startte het Wiskobasproject namelijk de vernieuwing van het rekenonderwijs op de basisschool met de tv-serie 'Kijk op Kans'.³ Dit gebeurde onder de inspirerende leiding van de Wiskobas-pioniers Wijdeveld en Goffree. Thans weten we echter uit ervaring van de jaren zeventig dat de kans om dit onderwerp in te voeren, aanzienlijk kleiner is dan die op een droog weekend. Kansrekening is daarom ook niet in het recente advies voor de einddoelstellingen van de basisschool opgenomen.⁴

Onder ongecijferdheid zal hier derhalve verstaan worden: het onvermogen om op passende wijze met getallen en getalsmatige gegevens om te gaan. En wel voor de basisschool speciaal getallen in situaties en sommen die uitnodigen tot hoofdrekenen en schattend rekenen.

Een sprekend, maar tamelijk lastig voorbeeld voor de basisschool is dat van afbeelding 1.

Nederland heeft zo'n veertien miljoen inwoners, tegen de Verenigde Staten ruim drie miljard, tweehonderd keer zoveel.
De oppervlakte van Nederland is pakweg 40.000 vierkante meter, tegen de Verenigde Staten 33.000 vierkante kilometer, bijna duizend keer zoveel.

> Geef commentaar op de getallen in dit kranteknipsel.
(Volkskrant, 1984)

afbeelding 1

Welnu, uit het commentaar van ruim 200 leerlingen blijkt duidelijk wat ongecijferdheid inhoudt.

Vijf procent van de leerlingen stelt, op zich terecht, dat die 'duizend keer zoveel' niet juist is en 'miljoen keer zoveel' had moeten zijn. Maar vervolgens wordt niet bedacht dat 'miljoen' natuurlijk niet kan.

Tien procent doet dat echter wel en ontdekt dat de oppervlaktegetallen niet kunnen kloppen. Nederland zo groot als een sportpark van 200 bij 200 meter. En de Verenigde Staten op het formaat van

Nederland: een rechthoek van ruim 200 bij 150 kilometer. Sommigen merken daarbij op dat de bevolkingsdichtheid van Nederland bij deze gegevens ook wel wat aan de hoge kant zou zijn, te weten 400 mensen per vierkante meter. En een enkeling dat het inwonertal van de Verenigde Staten niet correct is, omdat de totale wereldbevolking thans op meer dan 5 miljard wordt geraamd.

Het overgrote deel van de leerlingen echter is het ofwel met de gegevens en de berekeningen eens, of vindt juist dat de aanduidingen van 'tweehonderd keer zoveel' en 'duizend keer zoveel' niet precies genoeg zijn.

Blijkbaar brengt het onderwijs getallen niet tot leven. Blijkbaar legt het rekenonderwijs leerlingen een dwangmatige gerichtheid tot getalsmatige exactheid op, ook in die situaties waar numerieke precisie niet voldoet of minder aangewezen is. Blijkbaar laat het onderwijs het schattend rekenen liggen, zodat de kinderen op de basisschool onvoldoende feeling voor getallen kunnen ontwikkelen. Want dat mag men toch wel concluderen bij een goedscore van 10 procent bij het kranteknipselfprobleem.

Sterker: het ging hier niet eens om leerlingen van de basisschool, maar om, u mag raden beginnende Pabo-studenten, toekomstige leraren basisonderwijs!

De betreffende opgave maakte deel uit van een serie sommen waarmee de rekenvaardigheid van de Pabo-student werd gemeten. Het onderzoek stamt uit 1986. Het werd door Corrie Jacobs uitgevoerd in samenwerking met de vakgroep Onderwijskunde en de vakgroep OW & OC.⁵ Over de commotie die de uitslag van dit onderzoek teweeg bracht, zal ik het hier niet hebben.⁶

Hoe het zij, uit het voorbeeld heeft u enig idee kunnen krijgen van het vóórkomen van ongecijferdheid, dus hoe het eruit ziet. In het volgende zal dat nog duidelijker worden.

**

Nu de tweede vraag: in welke mate komt ongecijferdheid op de basisschool voor? Eerst verstrekken we gegevens over hoofdreke-

nen en daarna over schattend rekenen.

Ongecijferdheid als het onvermogen om op passende wijze met getallen om te gaan, houdt voor hoofdrekenen in dat sommen als bijvoorbeeld $1250 - 400$ en 60×70 en $60 : 15$ uit het hoofd kunnen worden opgelost. En ook dat leerlingen op een verstandige manier gebruik maken van de rekenmachine, dus hem soms niet inschakelen, zoals bijvoorbeeld bij 945×1000 . Zie de opgaven van afbeelding 2.

1250	-	400	=
60	x	70	=
60	:	15	=
945	x	1000	=

afbeelding 2

Eerst de resultaten van een grootscheeps onderzoek in de Verenigde Staten.⁷

- $1250 - 400$ wordt daar door 40 procent van de dertienjarigen goed opgelost met hoofdrekenen.
- En 60×70 wordt door zegge en schrijve 45 procent correct uit het hoofd berekend.
- $60 : 15$ lukt 30 procent van de Amerikaanse kinderen uit het hoofd - u hoort het goed.
- Ook 30 procent zegt, desgevraagd, dat ze 945×1000 schriftelijk zouden uitrekenen en nog eens 30 procent dat ze daarbij de rekenmachine willen inschakelen. Wat betekent dat slechts 40 procent de eenvoudige nulregel hier zou toepassen.

Nu de scores in Nederland. Hier liggen de resultaten aanzienlijk hoger: 70 tot 90 procent maakt dergelijke opgaven goed, zo blijkt onder meer uit recent Periodiek Peilings ONderzoek (PPON) van het Cito.⁸ Toch zijn ook onze leerlingen evenzeer op een cijfermatige aanpak gericht en geneigd tot hoofdcijferen in plaats van hoofdrekenen, zo blijkt uit andere gegevens.⁹

De algemene conclusie uit het beperkte aantal voorbeelden en uit

wat nog zal volgen is, dat hoofdrekenen hier weliswaar op een aanzienlijk hoger peil staat dan in de Verenigde Staten, maar dat het zeker nog voor verbetering vatbaar is. Dat laatste valt ook uit de vergelijkbare scores van de traditionele en de moderne methoden op te maken. Leerlingen die moderne leerboeken gebruiken scoren wat hoofdrekenend vermenigvuldigen en delen betreft significant hoger dan de leerlingen met traditionele methoden.¹⁰

Hoofdrekenen is terug van weggeweest - althans in de leerboeken. De reden daarvan is ten dele aan de steeds meer merkbare invloed van de rekenmachine toe te schrijven. Maar er zijn ook andere, didactische motieven in het geding, waarover straks meer.

Nu nog wat opmerkingen over de prestaties van schattend rekenen. We volstaan weer met enkele voorbeelden (afbeelding 3)

288 x 908

Welke van de onderstaande berekeningen geeft de beste schatting?

- a. 200 x 900
- b. 200 x 1000
- c. 300 x 900
- d. 300 x 1000

afbeelding 3

Tachtig procent van de Nederlandse leerlingen eind groep 8 maakt deze opgave goed, noemt dus c. En uit andere gegevens weten we dat het overgrote deel van hen vervolgens ook de berekening uit het hoofd kan uitvoeren.¹¹

Een ander voorbeeld:

Yvonne rekent uit op haar rekenmachine:

$$715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091$$

Bij het opschrijven van het antwoord is ze de komma vergeten.
Wat moet het antwoord zijn?

afbeelding 4

Slechts 30 procent van de leerlingen maakt deze opgave aan het eind van de basisschool goed. En daarvan blijkt minder dan de helft de handige strategie van het schattend rekenen met afgeronde getallen te volgen.¹² Dus: $700 + 600 = 1300$, het antwoord moet zijn 1309,1.

Hoe hoog is een gebouw van vier verdiepingen ongeveer?

afbeelding 5

Uit onderzoek blijkt dat ruim de helft van de kinderen tot een redelijke schatting van 10 tot 20 meter komt.¹³ De rest schat veelal boven de 20 meter: 80, 100, 150, 800, 2500 meter zijn niet uitzonderlijk.

Met de PPON-onderzoekers Bokhove en Janssen kan men concluderen dat ten eerste slechts weinig leerlingen de oplossingsstrategie van het rekenen met afgeronde getallen volgen. En ten tweede dat het uitvoeren van bewerkingen in open contextsituaties, zoals in afbeelding 1 en afbeelding 5, extreem moeilijk blijkt te zijn.

Uit Amerikaans onderzoek weten we bovendien dat de resultaten bij schattend rekenen gemiddeld 25 procent lager liggen dan bij cijferend rekenen in vergelijkbare opgaven.¹⁴

Moderne methoden scoren bij schattend rekenen niet hoger dan traditionele methoden - althans niet significant hoger.¹⁵

Al met al blijkt schattend rekenen een tamelijk onontgonnen gebied: het rekenen met afgeronde getallen wordt nauwelijks geoefend, en het rekenen in toepassingssituaties waarin de leerlingen zelf ervaringsgegevens moeten aandragen, ook weinig.

Samenvattend kan worden vastgesteld, dat zowel hoofdrekenen en vooral ook schattend rekenen op een aanzienlijk hoger peil kunnen worden gebracht. Of anders gezegd, dat ongecijferdheid kan worden teruggedrongen, of idealiter misschien zelfs voorkómen. Maar hoe?

Om deze vraag te beantwoorden zullen we ons tot het aanvaardbare rekenonderwijs bepalen. En wel tot het hoofdrekenen en schattend rekenen voor optellen en aftrekken tot honderd.

Eerst schetsen we een contrasterende achtergrond in de vorm van een zogenoemde structuralistische aanpak, waarin de nadruk bij het rekenen tot honderd eenzijdig op het cijferen wordt gelegd.

En vervolgens een zogenoemde realistische werkwijze waarin een ruimere plaats aan hoofdrekenen en schattend rekenen wordt gegeven.¹⁶

Eén en ander doen we aan de hand van de volgende som over Hans (afbeelding 6).

Hans maakte een tocht van 75 km.

Na 48 km rustte hij even.

1. Hoeveel km moest hij na het rusten nog afleggen?
2. Hoe maakte hij die tocht, denk je: met de auto, de fiets, lopend....?
3. Hoe lang zou hij ongeveer over de hele tocht van 75 km gedaan hebben?

afbeelding 6

Als voorbeeld van een structuralistische benadering kiezen we het werk van Resnick.¹⁷ Haar 'Psychology of Mathematics for Instruction' wordt tot het meest geciteerde en gezaghebbende werk gerekend uit de cognitieve psychologie van het afgelopen decennium.

De denkbeelden van Resnick kunnen als volgt worden getypeerd:

- Ze zou zich tot de eerste vraag beperken over hoeveel km er nog afgelegd moet worden.
- Om een dergelijke opgave te kunnen oplossen dienen kinderen het herkennen van afreksituaties te beoefenen, zoals die zich voordoen bij het weghalen, scheiden, vergelijken en aanvullen,

kortom in deel-geheelrelaties, zoals zij zou zeggen. Schema's en diagrammen kunnen daarbij helpen.

- Het uitrekenen van $75 - 48$ gaat *cijfermatig*, onder elkaar. Het aanleren van het aftrekalgoritme kan het beste gebeuren via de methode van de 'mapping instruction'. Daarbij wordt eerst met blokken gewerkt, vervolgens met afbeeldingen ervan en tenslotte met louter gedachte voorstellingen.

Een instructiewijze die geheel in de lijn ligt van Bruners driestap enactive-iconic-symbolic en Gal'perins trapsgewijze vorming van mentale handelingen, en die grote navolging in het aanvankelijke rekenonderwijs heeft gevonden. Met name in het onderwijs aan kinderen die zwak zijn in rekenen.

Wat, samenvattend, in deze benadering opvalt is dat daarin geen plaats is voor hoofdrekenen - het woord 'mental arithmetic' komt in Resnicks standaardwerk over de psychologie van het wiskundeonderwijs zelfs in het geheel niet voor - en er is ook geen ruimte voor schattend rekenen.

Algemeen geldt trouwens dat men zich in het cognitief psychologisch onderzoek omtrent de invloed van de semantische structuren tot voor kort vrijwel uitsluitend tot de schoolse opgaven van de eerste vraag uit de som over Hans bepaalde.¹⁸ Met daarbij, zoals gezegd, een exclusieve aandacht voor de cijfermethode.

Kan het anders? Laten we, om deze vraag te kunnen beantwoorden, nu eens de realistische wijze van werken beschouwen. Een wijze van werken die overigens ook nog niet in de moderne realistische leerboeken is opgenomen, welke met name in het aanvangsonderwijs nog niet volledig tot wasdom zijn gekomen.

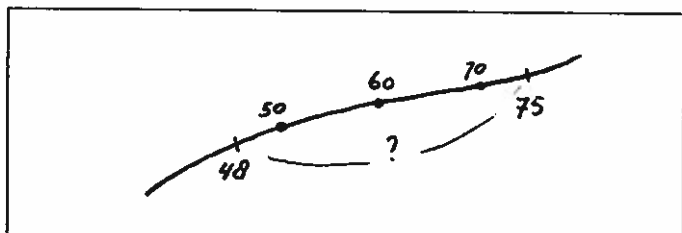
Om te beginnen is er in dat onderwijsconcept geen plaats voor cijferen in het aanvankelijke rekenonderwijs - dus dat is al direct een fors verschil. En een tweede essentieel onderscheid zit 'm in de aard van de toepassingssituaties die in het onderwijs aan de orde worden gesteld, in casu de tweede en de derde vraag in de Hans-som.

Eerst nu echter de eerste vraag over de af te leggen weg.

Welnu, 2 van de 3 kinderen in de middenbouw van de basisschool herkennen in deze opgave geen aftrekking.¹⁹ Met het gevolg dat ze in dat geval ook de methode van het cijferende aftrekken, zo ze die al zouden kennen, niet toepassen.

Wat ze wel doen is doortellen. En dat brengt ons bij de eerste natuurlijke methode van het aanvankelijke rekenen, het *rekenen-oprij*.²⁰

Deze methode kan visueel worden ondersteund door de lege getallenlijn - zie onderstaande afbeelding.



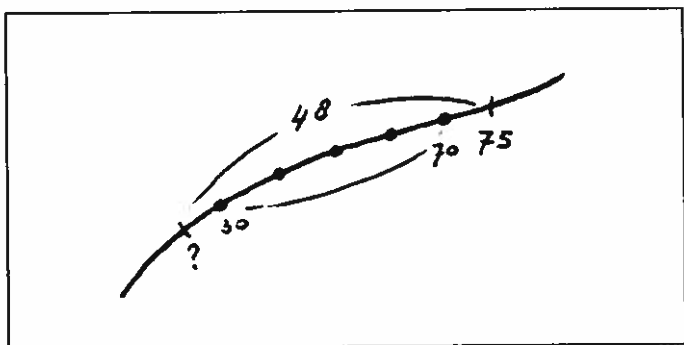
afbeelding 7

Het gaat er bij het doortellen om de afstand tussen 48 en 75 te overbruggen.

Iedere leerling kan in principe zijn of haar steunpunten kiezen, bijvoorbeeld bij 50, 60, 70. Of anders, bij 58, 68, 78. Er zijn vele wegen die naar 75 leiden, lange en korte. De lange weg is de telweg, de korte gaat met sprongen. Bijvoorbeeld de sprong van $2 + 25$, of van $2 + 20 + 5$, of van $30 - 3$. Kortom allerlei methoden tussen tellen en hoofdrekenen.

Het is de bedoeling dat de kinderen op den duur tot sterk verkorte rekenwijzen komen. Dat geldt uiteraard ook voor degenen die in de Hans-som wel een aftrekking herkennen en vanaf 75 het aantal van 48 gaan terugtellen - zie afbeelding 8. Ook daarbij kunnen weer geschikte steunpunten worden gekozen en kan de rekenwijze op den duur sterk worden ingekort.

Dit rekenen-op-rij is niet alleen van belang voor het kunnen maken van toepassingen, maar zoals gezegd ook voor het hoofdrekenen. Opgaven als $101 - 13$ of $101 - 88$ of $143 - 75$ zijn cijfermatig rekenend onder elkaar lastig, maar met rekenen-op-rij simpel op te lossen.



afbeelding 8

Rekenen-op-rij is natuurlijk en concreet. Het vloeit voort uit het tellen en de verkortingen ervan. De lege getallenlijn biedt daarbij steun, het is een rekenmodel. Maar ze helpt ook bij het oplossen van toepassingsproblemen, en is dus tevens een denkmodel. Dat wil zeggen dat de deel-geheelrelaties en vergelijkingsrelaties van het aftrekken heel geschikt op de lege getallenlijn kunnen worden afgebeeld.

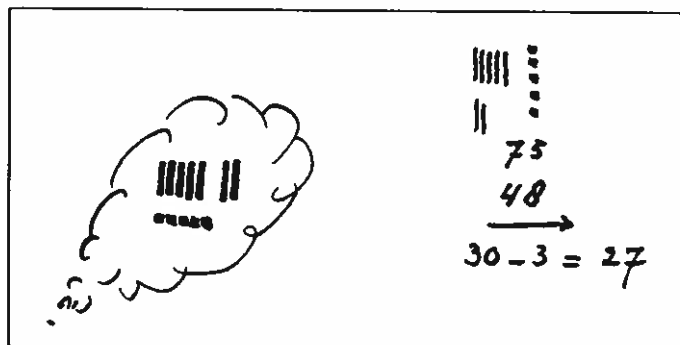
De tweede natuurlijke methode, na het rekenen-op-rij, is die van het *kolomsgewijze hoofdrekenen*. We spreken hier weer van 'natuurlijk' omdat ook deze methode door de kinderen zelf wordt ontwikkeld. Dit in tegenstelling tot de cijfermethode die niet natuurlijk is maar opgelegd - althans in eerste ronde.

We kunnen dit weer aantonen met het voorbeeld van $75 - 48$. Wanneer deze opgave met tienstaven en eenheidsblokken wordt opgelost, blijken de manipulaties van de kinderen niet tot de gewenste

cijferprocedure te leiden, zo wijst onderzoek van Madell en anderen uit.²¹

De natuurlijke manier is de volgende.

Leg neer: 7 staven en 5 blokjes - zie afbeelding 9. Daarvan moeten worden weggenomen 4 staven en 8 blokjes. Eerst weg 4 staven, over blijven 3 staven, oftewel 30. Dan 8 blokjes weghalen van de stapel van 5. Dat gaat niet, er zijn er 3 te weinig. Die 3 nemen we dan van de 30. Uitkomst $30 - 3 = 27$



afbeelding 9

Er is vrijwel geen kind dat, vrijgelaten, begint bij de losse blokjes en vervolgens het tekort aanzuivert door het inwisselen van een tien.

Er wordt ten eerste dus niet van klein naar groot, maar van groot naar klein, van links naar rechts gerekend. Ten tweede wordt bij een tekort niet een tien ingewisseld, maar wordt dat tekort afgehaald van het totaal aan tientallen. En ten derde kunnen kinderen met tekorten rekenen: de vraag hoeveel er te weinig is, blijkt in principe niet moeilijker dan hoeveel er te veel is.

Ziehier twee alternatieven voor het aanvankelijke cijferen:

- het rekenen-op-rij;
- en de methode van het kolomsgewijze hoofdrekenen.

Beide methoden worden overigens thans door de ontwikkelgroep van de nascholingscursus Speerpunt Rekenen nader uitgewerkt en beproefd.²² Ze werden geïllustreerd met de eerste vraag uit de som van Hans over de afstand tussen kilometerpaal 48 en 75.

Nu het schattend rekenen, de tweede en de derde vraag van de Hans-som uit afbeelding 6. Vragen die in het genoemde cognitief psychologische werk van Resnick geen plaats krijgen, omdat ze verder gaan dan alleen het globaal controleren van de uitkomst van een precieze berekening.

Rare vragen, vindt u misschien ook, omdat er geen éénduidige, precieze oplossing voor is te geven.

Wat is de zin van dergelijke vragen? Soorten vragen die bijvoorbeeld ook door Van den Heuvel-Panhuizen en Gravemeijer in het Methoden Onderzoek REkenen (MORE) worden gesteld, een samenwerkingsproject van de vakgroep Onderwijskunde en de vakgroep OW & OC.²³ En niet te vergeten in recente studies van De Jong, Nelissen, De Lange, Streefland en Van den Brink.²⁴

Querelle beschrijft wat voor bijzonders er bij het stellen van dergelijke vragen kan gebeuren. Ik citeer enkele fragmenten uit haar artikel, getiteld 'Realistisch? Welnee!'²⁵

'Na mijn suggestie dat je dan misschien zou kunnen schatten stond ik perplex. Als nieuw keken ze tegen de som aan. Waar ging het eigenlijk over?

Kortom, het werd pas reëel toen ze zelf iets moesten invullen.'

'Realistisch onderwijs krijg je blijkbaar niet door reële probleempjes te nemen. Voor een aantal leerlingen in ieder geval blijven het sommen waar je niets mee te maken hebt.'

'Mede door deze opgave weet ik dat je ze moet dwingen wakker te worden. Voorlopig geef ik ze van tijd tot tijd een opgave waarbij te weinig gegevens zijn om klakkeloos wat te gaan doen.' - einde citaat.

Het is bij dit soort situaties alsof er ineens een mentaal gordijntje wordt opengetrokken, waardoor de leerlingen zicht krijgen op de

wereld buiten de school, op getallen in de realiteit.

Hoe ver is 75 km? Hoeveel km legt een auto ongeveer per uur af? Hoe hard gaat een fiets? Wat is de snelheid van een voetganger? Hoe lang zou een fietser over 48 km rijden? Is het zinnig om al na een half uur te gaan rusten, en na twee uur? Wat is 'even' rusten: een kwartier, een half uur, een paar uur?²⁶

In de discussie die naar aanleiding van de vragen 2 en 3 van de som over Hans wordt gehouden, komen allerlei getallen tot leven. Rijd je 10 km per uur met een fiets, zoals Janna beweert? Of is het 5 km, wat Henk zegt? Wat denk je van de volgende redenering: je doet er 5 uur over, want van Doetinchem naar Enschede doe ik 3 uur? Enzovoort. Er wordt geargumenteed, er worden allerlei oplossingen en berekeningen aangedragen op verschillende niveaus. Er wordt nagedacht over de eigen oplossingen en die van anderen. Allerlei kenniselementen worden door deze opgave op verrassende wijze met elkaar verbonden.

Schattend rekenen is, in combinatie met hoofdrekenen, dus een krachtig middel om ongecijferdheid te helpen voorkómen, of beter gezegd, om gecijferdheid te bevorderen.

Weliswaar moet nog meer onderzoek gedaan worden om deze stelling hecht te verankeren. Maar er zitten in het recente PPON-onderzoek duidelijke aanwijzingen dat een accentuering van bepaalde onderdelen plus een passende didactiek ook werkelijk loont.²⁷

Vergelijking van de twee met afstand grootste methoden, ieder met een marktaandeel van ongeveer 25 procent in 1987, levert op dat de moderne, zogenoemde realistische methode 'Operatoir Rekenen' op 10 van de 27 gemeten onderdelen significant hoger scoort dan de traditionele, zogenoemde mechanistische methode 'Naar Zelfstandig Rekenen'. Op de overige 17 onderdelen scoort 'Operatoir Rekenen' in 12 gevallen hoger, maar niet significant, en op geen enkel onderdeel significant lager. Tot de significant hogere scores behoren hoofdrekenen en schattend rekenen, en daarnaast onder meer de domeinen van de basisoperaties, de toepassingen van de

hoofdbewerkingen en het meten.

Ik presenteer deze nieuwe gegevens over ruim de helft van het methodenbestand echter met grote terughoudendheid. Omdat men daaruit niet mag concluderen dat de moderne methoden dus beter presteren dan de traditionele. Tussen methoden kunnen namelijk aanzienlijke verschillen bestaan. Daarover hebben we thans echter geen betrouwbare cijfers, gelet op het geringe marktaandeel van de allernieuwste methoden.

En hiermee is de vraag over het voorkómen in eerste ronde beantwoord.

Vervolgens zullen we nu wat dieper ingaan op de onderwijstheoretische achtergronden van de beschreven structuralistische en realistische concepties.

In het geval van Resnick is het structuralisme een domeinspecifieke uitwerking van haar cognitief psychologische opvattingen over leren uit de beginjaren tachtig. Kenmerkend voor de cognitieve psychologie is dat men inzicht probeert te verkrijgen in het leerproces en in de wijze waarop mensen informatie verwerken en kennis verwerven, opslaan en gebruiken.

Vijf fundamentele leerprincipes

- Constructieprincipe
- Rijk gestructureerde kennis
- Reflectieve attitude
- Sociaal aspect
- Niveau-karakter

afbeelding 10

Eén van de fundamentele assumpties daarbij is dat nieuwe kennis door de lerende zelf wordt geconstrueerd (zie afbeelding 10)
Resnick zegt het zo:

'Lerenden voegen niet eenvoudigweg nieuwe informatie aan hun kennisbestand toe. In plaats daarvan moeten ze in-

formatie verbinden met de reeds bestaande kennisstructuren en ze construeren nieuwe relaties tussen die structuren. Dit proces van opbouw van nieuwe relaties is wezenlijk voor leren.

Dit betekent dat wiskundige kennis altijd minstens ten dele, door iedere individuele lerende wordt uitgevonden.²⁸

Het onderwijs zal dit principe moeten respecteren en benutten. Een tweede belangrijk principe is dat het onderwijs rijke, welgeoordende kennisstructuren zal moeten ontwikkelen bij de lerende. Dat wil zeggen rekenkennis die intern hecht geïntegreerd is, kennis die correspondeert met de kennis van experts, en die verbonden is met alle mogelijke toepassingen in de realiteit en binnen het rekenstelsel zelf.²⁹

En een derde principe is dat het onderwijs een reflectieve attitude bij de lerende zou moeten opwekken. Deze moet het mogelijk maken dat de leerlingen hun eigen denkproces controleren en reguleren, kortom hun strategische kennis kunnen inzetten om problemen op te lossen.³⁰

Een vierde cognitief psychologisch principe is dat leren niet louter een solo-activiteit is, maar mede een sociale bezigheid, waarvan het interactieve karakter in het onderwijs tot uitdrukking moet komen. Dit principe is pas in de jaren tachtig heel nadrukkelijk in de cognitieve theorieën betrokken.³¹

Een vijfde principe is dat in het leerproces verschillende niveaus kunnen worden onderscheiden tussen informeel contextgebonden rekenen en formeel vaksystematisch opereren.

Mede op basis van deze vijf leerprincipes komt Resnick, zoals gezegd, tot haar structuralistische operationalisatie van het rekenen. Maar nu dringt zich vervolgens de vraag op: zou men op basis van die algemeen cognitieve principes niet ook tot een realistische uitwerking hebben kunnen komen?

Het antwoord is na het voorgaande niet moeilijk: ja! Men zou bijna zeggen: tot een realistische concretisering hebben *moeten* komen. Neem ten eerste het constructieprincipe. Naar realistische opvatting

is de invulling die Resnick aan het rekenen tot honderd gaf niet volledig in overeenstemming met dit principe. Omdat er ten eerste geen rekening wordt gehouden met de wijze waarop kinderen toepassingsopgaven oplossen. En ten tweede omdat er geen ruimte is voor de natuurlijke wijze waarop kinderen met positieblokken manipuleren, welke naar het kolomsgewijze hoofdrekenen voeren en later ook naar cijferen. Hetgeen beide in de realistische aanpak wél gebeurt. Wat betekent dat het fundamentele constructieprincipe in de realistische onderwijsaanpak meer wordt gerespecteerd dan in de structuralistische uitwerking.

Hetzelfde kan van de rijke kennisstructuur worden gezegd. Denk bijvoorbeeld alleen al aan de verbinding tussen kaal rekenen en het maken van contextopgaven. Deze is realistisch beschouwd hecht maar structuralistisch vrijwel los. Of bijvoorbeeld de verbinding tussen tellen en hoofdrekenen. Idem dito.

En wat de reflectieve attitude aangaat: de open opgaven van schattend rekenen uit de realistische richting wekken in hoge mate reflectie in de zin van zelfcontrole, bijsturing op. De onnatuurlijke manipulaties doen dat veel minder of in het geheel niet....³²

Het sociale aspect kan in realistische richting vollediger benut worden dan in de structuralistische aanpak, omdat zowel hoofdrekenen als schattend rekenen een grote variatie aan oplossingsmethoden bieden die met elkaar kunnen worden besproken.

En tenslotte de niveaus. In het structuralistische onderwijs hebben de niveaus van het leren vaak vooral betrekking op het met of zonder materiaal werken bij het uitvoeren van standaardprocedures. Terwijl in het realistische onderwijs de niveaus zich over een veel langere periode uitstrekken, waarbij het niet alleen en niet zozeer om structuurmateriaal, als wel om contextproblemen of modelsituaties gaat waaraan het niveau van het leren wordt afgemeten, plus de mate van schematisering, verkorting en generalisering van de rekenwijzen die worden toegepast.

Blijkbaar kunnen dergelijke algemene leerprincipes binnen één do-

mein in verschillende richtingen worden uitgewerkt. Omgekeerd mogen die verschillen dan ook niet louter tot algemene leertheoretische verschillen worden herleid.

Maar waar zijn die verschillende inrichtingen dan wél op gebaseerd?

Antwoord: op een verschil in opvatting over het domeinspecifieke van rekenen-wiskunde. Of anders gezegd, over wat de kern van het mathematiseren is. Dit blijkt duidelijk uit de opzet van het eerder besproken rekenen tot honderd.

	mathematiseren	
	horizontaal	verticaal
mechanisme	-	-
structuralisme	-	+
empirisme	+	-
realisme	+	+

afbeelding 11

De structuralisten benadrukken - zie afbeelding 11 - het belang van het verticale mathematiseren, oftewel de inzichtelijke opbouw en uitbouw van kennis en vaardigheden binnen het vaksysteem. Zij nemen daartoe bij het ontwikkelen van onderwijs de vakstructuur tot uitgangspunt. Er wordt bijvoorbeeld in de opgave over Hans rechtstreeks op het eindalgoritme aangestuurd. De concrete ondergrond bestaat uit structuurmateriaal dat het tientallige positiesysteem representeert. Reële problemen spelen bij het aanleren van rekenprocedures geen essentiële rol. Toepassingen zijn dan ook echt toe-'streepje'-passingen en verschijnen dus pas na het leren opereren met pure getallen. Deze keuze voor het vakstructurele uitgangspunt impliceert tevens dat niet nadrukkelijk op de natuurlijke, informele werkwijzen van kinderen kan worden voortgebouwd - in

ons voorbeeld is dat het tellen, het rekenen-op-rij. En tenslotte valt op dat de aangeboden vraagstukken nogal schools van opzet zijn. De realisten besteden daarentegen veel zorg aan het horizontale mathematiseren, dat wil zeggen aan het zodanig modelleren van probleemsituaties dat deze met mathematische middelen kunnen worden aangepakt. De open contextopgaven 2 en 3 uit de Hans-som zijn daarvan voorbeelden. Voor het verticale mathematiseren worden ook reële problemen ingezet - zie bijvoorbeeld de eerste vraag uit de Hans-som als modelsituatie voor het rekenen-op-rij. En daarmee krijgt dit verticale mathematiseren een geheel eigen signatuur. De informele oplossingsmethoden van kinderen vormen hier juist het aangrijpingspunt om via een geleidelijk proces van schematiseren, verkorten en generaliseren tot rekenprocedures te komen. Het contextgebonden rekenen wordt in dienst gesteld van het formele rekenen. Althans indien die rekenwijzen op elkaar passen, in elkaars verlengde liggen. Daarom dienen de contexten, willen ze als model kunnen fungeren, met zorg te worden gekozen, zoals bijvoorbeeld de afstandsom voor het rekenen-op-rij.

Rekenen-wiskunde wordt door de realisten opgevat als een menselijke activiteit. Hetgeen onder meer inhoudt dat men meent dat het elementaire rekenen zo natuurlijk is dat het kind het zelf onder begeleiding en in groepsverband kan construeren, zij het langs geleidelijke weg en via bemiddeling van geschikt gekozen modellen, schema's en symbolen - dus niet louter zelfontdekkend. De realisten komen via het kind tot de vakstructuur en niet omgekeerd, zoals bij de structuralisten van de vakstructuur tot het kind.

Tot de realisten behoren wiskundigen en denkers over wiskundeonderwijs als Sawyer, Whitney, Freudenthal, Thom en Hilton. En tot de structuralisten tal van gezaghebbende onderwijs-leerpsychologen. Hoewel er bij de laatste groep ook wel aanhangers van de mechanistische richting zitten, zoals bijvoorbeeld Robert Gagné en Ellen Gagné die zich heel weinig aan het mathematiseringsproces, in welke vorm dan ook, gelegen laten liggen. Maar deze mechanis-

tische opvatting en ook de empiristische, die voornamelijk het horizontale mathematiseren accentueert, laten we hier verder onbesproken.

Het verschil in beoordeling van het domeinspecifieke karakter van rekenen-wiskunde tussen de structuralisten en de realisten in casu het verschil in opvatting over mathematiseren, blijkt het meest treffend uit de vorm en de functie van contextproblemen. Deze ontbreken namelijk goeddeels bij de structuralisten, denk aan de opgave over Hans, terwijl ze bij de realisten juist een spilfunctie vervullen. Ze fungeren daar namelijk *en* als bron *en* als model *en* als toepassingsgebied voor het leren rekenen, dus dienen zowel het horizontale als het verticale mathematiseren. En als zodanig weerspiegelen ze helder het domeinspecifieke karakter van rekenen-wiskunde, althans volgens de onderwijstheoretische visie van de realisten.

Iets van dat domeinspecifieke, namelijk de horizontale mathematiseringscomponent, wil ik u zelf laten ervaren via het piano-probleem afkomstig uit een werkstuk van Marie-José Jansen, het eerste dat ik in mijn nieuwe functie onder ogen kreeg.³³

'Hoeveel toetsen heeft een piano precies of ongeveer?'

We sommen, weliswaar wat ingekort, enkele oplossingen op - misschien herkent u er iets in van uw eigen aanpak (indien u het zelf eerst wilt oplossen).

1. 'Do, re, mi, fa, sol, la, ti, do, dat is 8 tonen. Een piano heeft 3 toonladders: één links, één rechts, en nog één in het midden. Dat zijn 3 keer 8 is 24 toetsen. En dan nog wat zwarte toetsen, zeg 8, dat is samen 32 toetsen.'

2 'Je hebt a b c d e f g, dat is 7 tonen. En er zijn denk ik 7 toonladders $7 \times 7 = 49$. Als ik denk hoever mijn armen uitwijken bij het spelen, dan klopt het wel zo'n beetje. Maar dan zitten er per 7 witte ook nog eens 5 zwarte toetsen op. Dus dat is $7 \times 5 = 35$. Ik had er 49, 35 erbij is 84.'

3 Het speelveld zal ik maar zeggen, schat ik op $1\frac{1}{2}$ meter. Er zitten per decimeter ongeveer 6 toetsen, 2 zwarte en 4

witte. Ik had 15 decimeter, dus $15 \times 6 = 60 + 30 = 90$ toetsen.'

- 4 'Is de afstand tussen mijn handen ongeveer net zo lang als mijn lichaamslengte? Ik denk van wel. Dat is dan 1 meter 70. Een toets schat ik op $1\frac{1}{2}$ centimeter. Dat zijn er $160 : 1\frac{1}{2} = \dots$ tjonge, dat komt beroerd uit zeg... Nou, ruim 100 toetsen, 110 ongeveer. Dan komen er nog zwarte bij. Dat kan nooit, dat worden er veel te veel. Nou laat ik één toets op 2 centimeter stellen, dat is misschien ook beter. Dan heb ik $160 : 2 = 80$ witte. Zeg dat er de helft aan zwarte bijkomt, dan zit ik op 120 toetsen.'

Tot zover enkele oplossingen. Grofweg worden er twee methoden bij het horizontale mathematiseren gevolgd om het probleem binnen het rekenen te trekken, namelijk de toonladder-strategie en de toetsbreedte-methode. Van beide zijn er vele varianten.

De antwoorden variëren van 32 tot 120. Nu varieert het aantal toetsen bij piano's ook wel, maar natuurlijk niet zoveel. De bovengrens zal ik in code via de standaardformule aangeven die aan het einde van de oratie wordt uitgesproken.

Kunnen de vijf genoemde fundamentele leerprincipes over construeren etc. in een dergelijk voorbeeld volledig tot hun recht komen?

Het antwoord is nee! Het verticale mathematiseren komt er namelijk onvoldoende in tot uitdrukking. De onderwijs-leerstructuur die ik voor het realistisch reken-wiskundeonderwijs heb ontwikkeld, op basis van het werk van Wiskobas, heeft mede betrekking op dit verticale mathematiseren, op het leren over lange termijn, op de globale structuur van de leergangen.³⁴ Waarmee maar gezegd wil zijn dat de beeldvorming van het realisme die louter betrekken is op rijke contextproblemen ten dienste van het horizontale mathematiseren wel erg eenzijdig is en de funderende onderwijs-theoretische denkbeelden ervan tekort doet. Kalm aan daarom met piano-voorbeelden zeg ik weleens zachtjes.

Dames en heren, ik kom tot een afronding.

In het voorgaande werden drie aspecten van het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool besproken.

In het eerste deel omschreven we gecijferdheid in termen van hoofdrekenen en schattend rekenen en juist los van het cijferen.

In het tweede deel verschaften we gegevens over het vóórkomen van ongecijferdheid. Daarin kwam vooral naar voren dat op schattend rekenen zwak gepresteerd wordt.

In het derde deel werd geschetst dat dit op zich begrijpelijk is, gelet op de inrichting van het onderwijs in hoofdrekenen en schattend rekenen. Daarin wordt namelijk veelal het horizontale mathematiseren aan de hand van open contextsituaties onvoldoende beoefend. Ook in de algemeen cognitief psychologische theorieën wordt dit wezenlijke deel van het reken-wiskundeonderwijs niet voldoende belicht, zo was de strekking van mijn betoog. Naar mijn mening wordt daarmee dan ook onvoldoende recht gedaan aan het domeinspecifieke element van rekenen-wiskunde in casu aan de opvatting van wiskunde als een algemeen menselijke activiteit.

Wellicht zal een recidivist de titel van de rede zelfs nog op een vierde manier interpreteren, namelijk als een strafzaak tegen ongecijferdheid. En wel in het bijzonder als een proces tegen het structuralisme.

Toch is die interpretatie niet juist. Ik hield veeleer een pleidooi voor gecijferdheid en voor een realistische onderwijsaanpak. Omdat ik van mening ben, zoals ik vijf jaar geleden al betoogde, dat die realistische didactiek zeer wel binnen de algemeen onderwijsleertheoretische kaders in te passen zou zijn.³⁵

Het beste bewijs daarvoor levert ook nu weer het werk van Resnick. Daarin heeft zich namelijk zeer recent een duidelijke wending naar het realisme voltrokken.

Ik citeer uit een samenvatting van een lezing gehouden in het afgelopen jaar (1989) over een project in het aanvangsonderwijs: Deve-

loping thinking abilities in arithmetic class:

'Het leerboek en het leren van procedures zijn vrijwel geheel verdwenen ten voordele van hoofdrekenen, van het uitvinden van verschillende manieren om problemen op te lossen en van uitgebreide discussies over wiskundige ideeën die aan de voorgestelde oplossingen ten grondslag liggen. Er worden activiteiten voor thuis ontworpen om kinderen te stimuleren zelf rekenproblemen uit het leven van alledag op te sporen, en zodoende hun activiteiten op school en die van alledag te verbinden en aldus meer praktijkervaring op te doen met contextproblemen dan schoolopgaven hen zouden kunnen verschaffen.³⁶

Een stevige theoretische steun in de rug voor de realistische aanpak van Wiskobas.

Toch zal dergelijk onderwijs niet te open, niet te empiristisch ingericht moeten worden, maar duidelijk gestructureerd, realistisch moeten zijn met structuurverlenende instructie. En daar ontbreekt in sommige moderne methoden nog wel wat aan. Het is dan ook zeker niet zo dat het etiket 'realistisch' ook automatisch 'goed' zou betekenen. Ik behoor in ieder geval tot de realisten die voorstanders van een betrekkelijk strakke onderwijsaanpak zijn, en dus qua onderwijsvorm naar een doelgerichte, gestructureerde werkwijze neigen, maar qua onderwijsinhoud uitgesproken realistisch georiënteerd zijn. En ook behoor ik tot de mensen die van mening zijn dat we als vertegenwoordigers van verschillende richtingen met elkaar in discussie moeten blijven. Zie in dit verband de bijdragen van Van Luit, Van Erp, Van der Heijden, Verschaffel, Beishuizen, Buijs, Blakenburg, Groenewegen, Van Parreren, Van Mulken, en anderen in de laatste jaargangen van het 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs'.³⁷ Overigens liggen de verschillen in Nederland thans niet zo scherp meer. En voor zover dat nog wel het geval mocht zijn zal ik zeker proberen in de komende jaren een brugfunctie te vervullen.

En net toen ik met deze rede op dit punt was, op 5 december, rolde

met de NRC de volgende praktische steun door de brievenbus³⁸ - zie afbeelding 12.

De vakken van de basisschool (4) Rekenen

Paul Stapel

De tekst in het rekenboek oogt nog vertrouwd: 'Margriet fietst van Hilversum naar Arnhem. Ze vertrekt om acht uur. Na anderhalf uur ziet ze een wegwijzer. Daarop staat dat ze nog 45 van de 75 kilometer af moet leggen. Dat schiet lekker op', denkt ze. Maar wat ontbreekt is de vraag: 'Hoe laat is ze in Arnhem?'

Nico Schilder, leraar van groep 7 van 'De Zuidwester' in Volendam vraagt iets anders: 'Waarom denkt Margriet dat ze opschiet?' Het begin van een *leergesprek*. Jaap weet het: 'Omdat ze snel rijdt.'

'Hoe snel dan?'

'Twintig kilometer per uur.'

'Wie vindt dat snel?'

De meesten. Het hangt er wel van af of Margriet wind mee of wind tegen heeft. Arnold vindt het niet zo snel, die rijdt zelf op de fiets meestal dertig kilometer per uur, zegt hij. Dertig? Dat wordt bestreden door zijn klasgenoten: dat is zo snel als een brommer. Hoe hard rijden wielrenners in de Tour de France? Hoe kun je zelf je snelheid meten? De leerlingen zijn ongemerkt bezig met het verband tussen tijd en afstand. Terloops komt nog aan de orde hoe laat Margriet in Arnhem is. Het antwoord is minder belangrijk dan de rekenkunde zelf.

afbeelding 12

Ziehier 'Leren en onderwijzen in context', zoals het in Kanselaars oratie heet³⁹.

Ziehier hoe 'Leerlingen tellen', om met Deen te spreken.⁴⁰

Ziehier een concrete basis voor samenwerking en discussie met nieuwe collega's en studenten over domeinspecifieke onderwijs-theorieën in het kader van algemene onderwijsleertheorieën. En over de praktische implicaties ervan, voor bijvoorbeeld het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool.

Geachte aanwezigen,

Tot slot wil ik nog enkele persoonlijke woorden tot u richten. Om te beginnen tot de leden van het bestuur van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken Wiskunde Onderwijs. Ik dank u voor mijn benoeming in de bijzondere leerstoel die door de NVORWO wordt onderhouden.

Twaalf jaar geleden koos ik als motto voor mijn proefschrift dat ik onder de gewaardeerde leiding van Hans Freudenthal en Jelle Sixma schreef, een citaat uit het werk van Nescio. Het luidt:

'Een nieuwe tijd zou aanbreken, nog konden wij groote dingen tot stand brengen. Ik deed mijn best 't te gelooven, heel erg mijn best.'

Het Instituut voor Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (IOWO) stond op springen, en ik geloofde niet meer zo erg in die verdere mogelijkheden tot ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs.

Mede dank zij de NVORWO hoef ik daarvoor nu niet meer zozeer mijn best te doen - althans wat dat geloven aangaat. Voor het realiseren van mijn leeropdracht is het tegengestelde waar. Er valt nog veel te doen, speciaal voor de opleiding. U hebt de resultaten van Pabo-studenten vernomen bij de opgave van afbeelding 1. Maar veel verontrustender nog is de terugloop van de onderwijsmogelijkheden voor rekenen-wiskunde op de Pabo zelf. En niet te vergeten het feit dat thans éénderde deel van de docenten voor wiskunde en didactiek op de Pabo geen specifieke bevoegdheid voor dit vak heeft, maar van huis uit gymnastiekleraar, bioloog of pedagoog is. En nascholingsmogelijkheden hebben zij nauwelijks. De kwaliteit van de opleiding van onderwijsgevendens wordt met dit alles op het spel gezet. En daarmee ook de kwaliteit van rekenen-wiskunde op de basisschool.

De begeleidingsdiensten schakelen steeds meer over op specialis-

ten - een positieve ontwikkeling. Maar de nascholing voor rekenen moet het zonder begeleiding doen.

En de faciliteiten voor onderwijsgeevenden bij de nascholing zijn minimaal.

Kortom er valt nog veel te doen voor de opleiding, de begeleiding, de nascholing en ook op het gebied van het onderzoek.

In het bijzonder aan de vorming van een nieuw, jong kader van deskundigen op de genoemde terreinen hoop ik mijn bijdrage te kunnen leveren

Ik weet me daarbij gesteund door de collega's en vrienden van de vakgroep OW & OC. En ik hoop op een produktieve samenwerking met nieuwe collega's van de vakgroep Onderwijskunde en niet te vergeten met het Centrum voor de Didactiek van de Bèta-wetenschappen waarvan OW & OC tevens deel uitmaakt.

Van mijn leermeesters, vrienden, collega's, studenten kan ik er hier slechts enkelen noemen.

Allereerst het voormalige Wiskobas-team als groep. Vervolgens gaat mijn dank voor de benoeming uit naar Hans Freudenthal, Gellouf Kanselaar, Nijs Lagerweij, Dirk Siersma, Herman Heidenrijk, Klaas Koster en speciaal ook naar Ed de Moor, Rob de Jong, Koeno Gravemeijer en Hannie van Dongen. Niet allen hooggeleerd, maar wel hooggeëerd, wat mij betreft.

En mijn naaste familieleden laat ik verder ongenoemd: er is in het voorgaande al voldoende over schatten gesproken.

En tenslotte richt ik me tot u allen. Ik ben u namelijk nog de oplossing van het pianoprobleem (de bovengrenswaarde) schuldig. Geheel in de lijn van deze rede over wiskundige geletterdheid ligt die in de volgende slotformule.

Ik heb gezegd.⁴¹

Noten

1. Blij, F. van der: Hoe ver moet je komen?, in E. Feijs en E. de Moor (eds.) *Innovatie realistisch reken-wiskundeonderwijs*, (Panama Curcusboek 5), OW & OC, Utrecht 1987, pag.83-92.
2. Paulos, J.A.: *Innumeracy. Mathematical illiteracy and its consequences*, Hill & Wang, New York 1988.
In het Nederlands uitgegeven bij Bert Bakker, Amsterdam, 1988, onder de titel 'Ongecijferdheid'.
3. 'Kijk op Kans' was een samenwerkingsproject van IOWO, NOT en TELEAC waaraan meewerkten Wijdeveld, Goffree, Scholten, Jansen, Oort en anderen. De tv-serie werd uitgezonden in de periode van 1972-1975.
4. Zie voor een overzicht van de eindtermen:
Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs: *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskunde-onderwijs op de basisschool. Deel I. Overzicht einddoelen*, Zwijzen, Tilburg 1989.
5. Jacobs, C.: *Rekenen op de Pabo*, OW & OC, Utrecht 1986.
6. Wel lijkt duidelijk dat de maatregel om wiskunde in het pakket voor toelating tot de Pabo verplicht te stellen, nu niet direct soelaas biedt voor het gesignaleerde probleem van de ongecijferdheid. Want dat heeft betrekking op de instelling tot rekenen. En die is met wiskunde verplicht, of een verplichte bijspijker cursus dan wel een wiskunde vakantie voor aankomende Pabo-studenten niet zonder meer te verhelpen. Wel echter 'met meer'. Dat wil zeggen met meer studie-uren in de opleiding zelf. Met daarin uiteraard een ruime plaats voor de basisvaardigheden van hoofdrekenen en schattend rekenen. Plus onderwijs te geven door goed geschoolde docenten. Maar vooralsnog moet men het thans op de Pabo in alle opzichten 'met minder' doen....
7. Zie:
Reijs, R.E.: Testing mental computation skills, *The Arithmetic Teacher*, 33,3, 1985, pag.15.
8. In het PPON-onderzoek lagen de scores van $480 : 6$ en 7×90 beide omstreeks 90 procent. Deze items zijn onder strikte condities afgenomen, namelijk enkele seconden kijken (via flap) en dan antwoorden noteren. Er was dus geen mogelijkheid tot cijferen.
In het hoofdrekeningedeelte zitten opgaven die ook niet op papier gemaakt konden worden, maar die per item niet aan tijd waren gebonden doch wel wat de totale tijd betreft.
 $600 : 300$ en 20×2400 halen een goedscore van ongeveer 70 procent.

9. Bokhove, J. en J. Janssen: Periodiek Peilingsonderzoek in het basisonderwijs (4), *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenwiskundeonderwijs*, 7(2), 1988, pag.16-35.
10. Wijnstra, J.M. (red.): *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool*, Cito, Arnhem 1988, pag.155.
11. Zie noot 8.
12. *ibid.*
13. De scores in het ongepubliceerde onderzoek van Van Dongen en Trefers in enkele groepen 7 en 8 komen overeen met de gegevens uit ander onderzoek. Zie:
 Benton, S.E.: A summary on teaching and learning estimation, in H.L. Schoen and M.J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation*, N.C.T.M., Reston 1986, pag.239-248.
 Markovits, Z., R. Hershkowitz en M. Bruckheimer: Estimation, Practice and Process, *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, OW & OC, Utrecht 1985, pag.389.
14. Reijs, R.E.: Evaluating Computational Estimation, in H.L. Schoen and M.J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation*, N.C.T.M., Reston 1986, pag.230.
15. Uit een nadere analyse op de PPON-gegevens blijkt dat er tussen methoden wel significante verschillen bestaan.
16. Verder in de tekst komen nog 2 andere richtingen kort ter sprake, namelijk de mechanistische en de empiristische richting.
17. We baseren ons hierbij op:
 Resnick, L.B. and W.W. Ford: *The Psychology of Mathematics for Instruction*, Erlbaum, Hillsdale 1981.
 Resnick, L.B.: A developmental theory of number understanding, in H.P. Ginsburg (ed.), *The Development of Mathematical Thinking*, Academic Press, New York, 1983, pag.110-153.
 Resnick, B.: Syntax and Semantics in Learning to Subtract, in T. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*, Erlbaum, Hillsdale 1983, pag.136-156.
 Resnick, L.B. en S.F. Omanson: Learning to Understand Arithmetic, in R. Glaser (ed.), *Advances in Instructional Psychology*, (vol 3), Erlbaum, Hillsdale 1987, pag.41-97.
18. Zie bijvoorbeeld de discussie tussen Greeno en Confrey, naar aanleiding van:
 Greeno, J.G.: Instructional Representations Based on Research about Understanding, in A.H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive Science and Ma-*

- thematics Education*, Erlbaum, Hillsdale 1987, pag.89-123.
19. Zie voor gegevens over operaties herkennen:
 APU: *Mathematical Development*, HMSO, London 1980.
 Carpenter, T.P. e.a.: *Results from the Second Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*, N.C.T.M., Reston 1981.
 20. Rekenen-op-rij komt in de volgende werken voor:
 Whitney, H.: Verantwoord wiskunde-onderwijs, *Willem Bartjens*, 6, 1987, pag.90-92.
 Goffree, F.: *Wiskunde & Didactiek* (deel I), Wolters Noordhoff, Groningen 1982, pag.76 e.v.
 Treffers, A. en E. de Moor: *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel II Basisvaardigheden en Cijferen*, Zwijsen, Tilburg 1990.
 21. Zie:
 Madell, R.: Children's natural processes, *The Arithmetic Teacher*, 32(7), 1985, pag.20-22.
 Cochran, B., A. Barson and R. Davis: Child-created Mathematics, *The Arithmetic Teacher*, 17, 1970, pag.211-215.
 Davis, H.B.: A second grader's subtraction techniques, *Mathematics Teaching*, 83, 1978, pag.15-16.
 Carnihan, H.: Danny's method of subtraction, *Mathematics teaching*, 89, 1979, pag.6-7.
 Nuttael, T.: Readers Dialogue, *The Arithmetic Teacher*, 28(2), 1980, pag.55.
 Becker, S.: Readers Dialogue, *The Arithmetic Teacher*, 35(4), 1987, pag.5.
 22. De ontwikkelgroep bestaat uit vertegenwoordigers van de SLO, het Cito, het Panamaproject, begeleidingsdiensten, onderzoeksinstituten en Landelijke Pedagogische Centra. Aan het betreffende onderdeel is gewerkt door S. Huitema, A. Vuurmans, D. van Eerde en A. Treffers.
 23. Zie voor informatie over MORE:
 Heuvel-Panhuizen, M. van den en K.P.E. Gravemeijer: *De invloed van onderwijs op 'numberfacts'*, ORD-papervoorstel, 1990 (interne publicatie).
 24. Jong, R. de: *Wiskobas in methoden*, OW & OC, Utrecht 1987 (dissertatie).
 Nelissen, J.: *Kinderen leren wiskunde*, De Ruiter, Culemborg 1987 (dissertatie).
 Lange, J. de: *Mathematics, Insight and Meaning*, OW & OC, Utrecht

- 1987 (dissertatie).
 Streefland, L.: *Realistisch breukenonderwijs*, OW & OC, Utrecht 1988 (dissertatie).
 Brink, J. van den: *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*, OW & OC, Utrecht 1989 (dissertatie).
25. Jansen, H. en F. Goffree (red.): *Nanda, lerares wiskunde*, SLO, Enschede 1989, pag.115.
 26. We hebben deze opdracht in twee klassen uit de middenbouw gegeven. Het overgrote deel van de leerlingen had vraag 1 goed opgelost. De meerderheid gaf bij vraag 2 'met de fiets' als antwoord. Minder dan de helft daarvan gaf een redelijke schatting van de tijd. Sommigen gebruikten referentiepunten. Bijvoorbeeld: 'ik schat 5 uur want naar Enschede doe ik 3 uur' (vanuit de Achterhoek).
 27. Nadere analyse van de PPON-resultaten door Eggen en Verhelst, in opdracht van OW & OC, leert dat de resultaten bij de verschillende schalen nogal fluctueren per methode. Deze wisselingen moeten waarschijnlijk aan de methode-factor worden toegeschreven. Later zal hierover worden gepubliceerd door Van den Heuvel-Panhuizen, Gravemeijer en Treffers.
 28. Resnick, L.B. and W.W. Ford: *The Psychology of Mathematics for Instruction*, Erlbaum, Hillsdale 1981, pag.249-250.
 29. *ibid*, pag.198 e.v.
 30. Resnick, L.B. and S.F. Omanson: Learning to understand arithmetic, in R. Glaser (ed.), *Advances in Instructional Psychology*, (vol 3), Erlbaum, Hillsdale 1987, pag.93.
 31. We citeren uit:
 Bruner, J.: *Actual mind, possible worlds*, Harvard U.P., Cambridge, Mass., 1986, pag.127.

'Some years ago I wrote some very insistent articles about the importance of discovery learning - learning on one's own, or as Piaget put it later (and I think better), learning by inventing. What I am proposing here is an extension of that idea, or better, a completion. My model of the child in those days was very much in the tradition of the solo child mastering the world by representing it to himself in his own terms. In the intervening years I have come increasingly to recognize that most learning in most settings is a communal activity, a sharing of culture.'

32. Gravemeijer, K.: Het gebruik van concreet materiaal onderwijs-theoretisch beschouwd, *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(1), 1989, pag.3-19.
33. Jansen, M.J.: *Schatten. De verborgen schat in het rekenonderwijs*, Pa-per VOU, 1989.
34. Zie inleiding van:
 Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs: *Proeve van een Nationaal Pro-gramma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I. Overzicht en einddoelen*, Zwijsen, Tilburg 1989, pag.9-23.
 De 5x5-onderwijsleerstructuur is gebaseerd op werk van vooral Freu-denthal:
 Freudenthal, H.: *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dor-drecht 1973.
 Freudenthal, H.: *Didactical phenomenology of mathematical structu-res*, Reidel, Dordrecht 1983.
35. Zie bijvoorbeeld:
 Treffers, A.: Analyseren en ontwikkelen van reken-wiskundeonder-wijs vanuit twee verschillende basisconcepten, *Pedagogische Studiën*, 63(1), 1986, pag.14-16.
 Treffers, A.: *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Descrip-tion in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project*, Reidel, Dor-drecht 1987.
36. Uit een samenvatting van een lezing op de Third European Conference for Research on Learning and Instruction van 4-7 september 1989 te Madrid, *Earli-gids*, pag.468.
 De genoemde richtingsverandering kondigde zich al eerder aan. Zie: Resnick, L.: *Learning In School and Out*, *Educational Researcher*, de-cember 1987, pag.13-20.
 We citeren enkele passages uit dit artikel:

'First, most of the effective programs have features charac-teristic of out-of-school cognitive performances. They in-volve socially shared intellectual work, and they are orga-nized around joint accomplishment of tasks, so that ele-ments of the skill take on meaning in the context of the whole. Second, many of the programs have elements of ap-prenticeship. That is, they make usually hidden processes overt and they encourage student observation and com-mentary. They also allow skill to build up bit by bit, yet permit participation even for the relatively unskilled, often

as a result of the social sharing of tasks. Finally, the most successful programs are organized around particular bodies of knowledge and interpretation - subject matters if you will - rather than general abilities. The treatment of the subject matter is tailored to engage students in processes of meaning construction and interpretation that can block the symbol-detached-from-referent thinking that I have noted as a major problem in school. Just such self-conscious meaning construction and interpretation skills are likely to be needed in conditions of breakdown and transition outside school, when one uses powers of reflection and analysis to craft sensible responses to new situations.' (pag.18-19).

Vergelijk de rubriek voor kinderen die zelf opgaven bedenken: Klabbers, V. en O. van Lith: Prijsvraag voor kinderen (2), *Willem Bar-tjens*, 9(2), pag.158-162.

Merk op hoezeer dit alles past in de 5x5-onderwijsleerstructuur van het realistische reken-wiskundeonderwijs. Zie voor de 5x5-onderwijsleerstructuur de 'Proeve ... deel I'.

37. Naar mijn mening is een dergelijke aanpak vooral ook geschikt voor zwakke rekenaars. Zie ook in dit verband de discussie in *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs* in de jaargangen 1988 en 1989 met Van Luit, Van Erp, Verschaffel, Van der Heijden, Beishuizen, Blakenburg, Buijs, Van Parreren, Van Mulken, Groenewegen en anderen.
38. Een stukje uit NRC-Handelsblad van 5 december 1989 van de hand van Paul Stapel dat precies op het moment verscheen dat ik deze oratie had geschreven.
39. Kanselaar, G.: *Leren en Onderwijzen in Context*, Utrecht 13.10.1989 (oratie).
Zie ook:
Kanselaar, G.: Onderwijsonderzoek: appels en peren en fruit, *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(2), 1989, pag.43-50.
40. Deen, N.: *Leerlingen tellen*, Utrecht 12.1.1990 (oratie)
41. De bovengrens die uit 'Ik heb gezegd' kan worden gehaald is 89 (zet letters om in getallen....). Piano's hebben 85 of 88 toetsen.

Voorwerk aula

6 februari 1990

16.00-16.15

- Hoeveel toetsen heeft een piano precies of ongeveer?

'Gisteren, maandag 9 oktober, werd in AVRO's Servicesalon aandacht besteed aan het analfabetisme in Nederland. Uit de voor dat programma verzamelde gegevens is opnieuw gebleken dat maar liefst 1 van de 25 Nederlanders niet kan lezen of schrijven, dat die ene dus geen boodschappenbriefje kan schrijven of lezen, geen ondertitels op de TV kan volgen, geen krant kan lezen, geen brief kan samenstellen.

Stel je voor 1 op 25 Nederlanders, bewoners dus van een land dat mensen uitstuurt naar ontwikkelingslanden om daar de bevolking te leren lezen en schrijven. 1 van de 25 Nederlanders dat is 25%! En hoeveel inwoners heeft Nederland? Veertien miljoen? Dan wil dat wel zeggen dat in ons hoogontwikkelde land maar liefst drie-en-een-half-miljoen mensen niet kunnen lezen of schrijven.

Daar word je even stil van!

- Uitgaande van die 1 op 25, hoeveel ongeletterden zijn er dan in Nederland?

Rede

Nederland heeft zo'n veertien miljoen inwoners, tegen de Verenigde Staten ruim drie miljard, tweehonderd keer zoveel.

De oppervlakte van Nederland is pakweg 40.000 vierkante meter, tegen de Verenigde Staten 33.000 vierkante kilometer, bijna duizend keer zoveel.

► Geef commentaar op de getallen in dit kranteknipsel. (Volkskrant, 1984)

afbeelding 1

$$1250 - 400 =$$

$$60 \times 70 =$$

$$60 : 15 =$$

$$945 \times 1000 =$$

afbeelding 2

$$288 \times 908$$

Welke van de onderstaande berekeningen geeft de beste schatting?

- a. 200×900
- b. 200×1000
- c. 300×900
- d. 300×1000

afbeelding 3

Yvonne rekt uit op haar rekenmachine:

$$715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091$$

Bij het opschrijven van het antwoord is ze de komma vergeten. Wat moet het antwoord zijn?

afbeelding 4

Hoe hoog is een gebouw van vier verdiepingen ongeveer?

afbeelding 5

Hans maakte een tocht van 75 km.

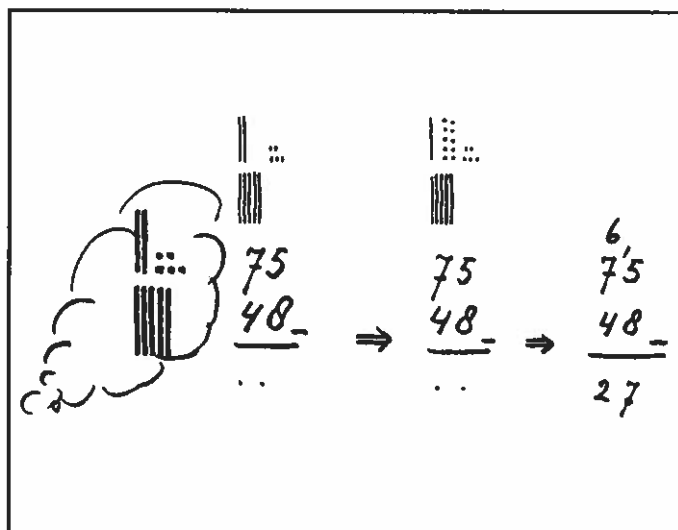
Na 48 km rustte hij even.

Hoeveel km moest hij na het rusten nog afleggen?

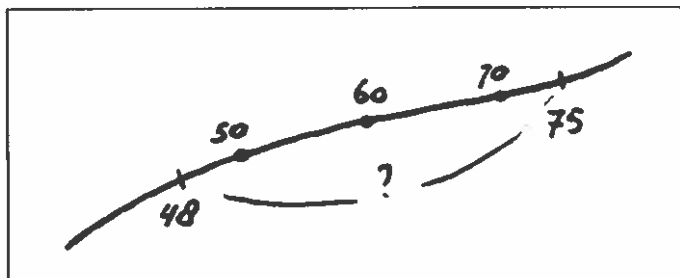
Hoe maakte hij die tocht, denk je: met de auto, de fiets, lopend....?

Hoe lang zou hij ongeveer over de hele tocht van 75 km gedaan hebben?

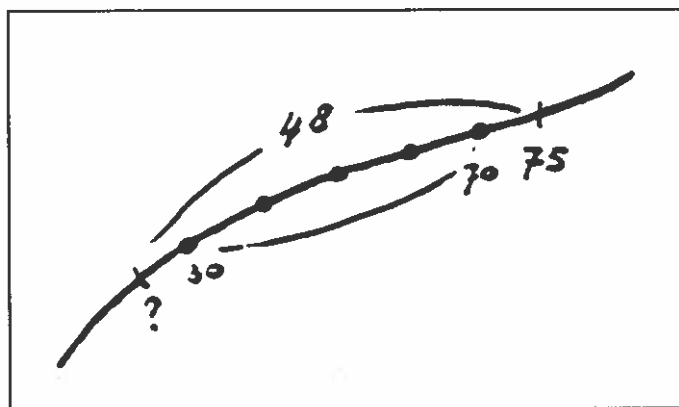
afbeelding 6



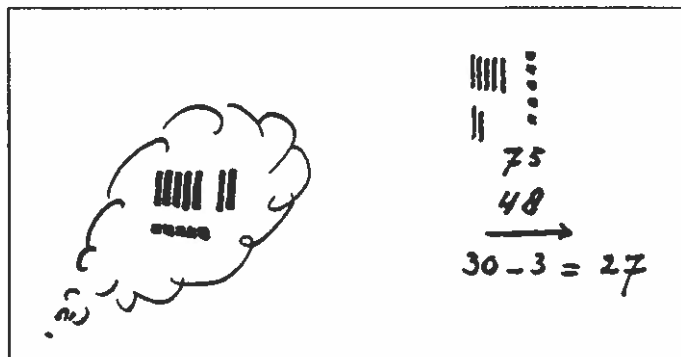
afbeelding 6a



afbeelding 7



afbeelding 8



afbeelding 9

Vijf fundamentele leerprincipes

- Constructieprincipe
- Rijk gestructureerde kennis
- Reflectieve attitude
- Sociaal aspect
- Niveau-karakter

afbeelding 10

	mathematiseren	
	horizontaal	verticaal
mechanisme	-	-
structuralisme	-	+
empirisme	+	-
realisme	+	+

afbeelding 11

De vakken van de basisschool (4) Rekenen

Paul Stapel

De tekst in het rekenboek oogt nog vertrouwd: 'Margriet fietst van Hilversum naar Arnhem. Ze vertrekt om acht uur. Na anderhalf uur ziet ze een wegwijzer. Daarop staat dat ze nog 45 van de 75 kilometer af moet leggen. Dat schiet lekker op', denkt ze. Maar wat ontbreekt is de vraag: 'Hoe laat is ze in Arnhem?'

Nico Schilder, leraar van groep 7 van 'De Zuidwester' in Volendam vraagt iets anders: 'Waarom denkt Margriet dat ze opschiet?' Het begin van een *leergesprek*. Jaap weet het: 'Omdat ze snel rijdt.'

'Hoe snel dan?'

'Twintig kilometer per uur.'

'Wie vindt dat snel?'

De meesten. Het hangt er wel van af of Margriet wind mee of wind tegen heeft. Arnold vindt het niet zo snel, die rijdt zelf op de fiets meestal dertig kilometer per uur, zegt hij. Dertig? Dat wordt bestreden door zijn klasgenoten: dat is zo snel als een brommer. Hoe hard rijden wielrenners in de Tour de France? Hoe kun je zelf je snelheid meten? De leerlingen zijn ongemerkt bezig met het verband tussen tijd en afstand. Terloops komt nog aan de orde hoe laat Margriet in Arnhem is. Het antwoord is minder belangrijk dan de rekenkunde zelf.

afbeelding 12

Slotformule in verband met pianoprobleem:

.....

- **Zet letters om in getallen om de bovengrenswaarde vast te stellen.**