A. Treffers E. de Moor E. Feijs

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool

Deel I

Overzicht einddoelen

Zwijsen

Michiel Doorman

PROEVE VAN ...

A. TREFFERS | E. DE MOOR | E. FEIJS

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool

DEEL I | OVERZICHT EINDDOELEN

ZWIJSEN

Met dank aan J. Bokhove en J. Janssen (Cito), K. Gravemeijer en L. Streefland (OW & OC), H. van Die en F. Goffree (SLO), H. Janssen en W. Oonk (VALO) en de vele honderden deskundigen, leraren basis- en voortgezet onderwijs, opleiders, begeleiders, inspecteurs, onderzoekers en ontwikkelaars, die onder meer aan de Panama-najaarsconferentie, de VALO-conferentie en andere conferenties deelnamen. Met dank ook aan Betty Dekker (OW & OC) voor de verwerking van de tekst.

Vormgeving Ton Ellemers bNO
Technische tekeningen: Piet Hermans

0 1 2 3 4 5 / 93 92 91 90 89

ISBN 90.276.1398.2
NUGI 724

Uitgeverij Zwijsen b.v. Tilburg

Voor België:
Uitgeverij Infoboek n.v. Meerhout
D/1989/1919/110

Inhoudsopgave

Voorwoord

Binnen het vakgebied rekenen-wiskunde heeft gedurende de afgelopen twintig jaar veel ontwikkeling, onderzoek en theorievorming plaatsgevonden.
De feitelijke effectuering van een vernieuwing kan zich pas voltrekken als er concrete lesmaterialen voorhanden zijn, als de opleiding van de aankomende leraren hierop voorbereidt en er gelegenheid tot nascholing wordt geboden. Maar vóór alles zal er consensus dienen te bestaan over het na te streven eindniveau.
De Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken Wiskunde Onderwijs (NVORWO) spant zich sinds 1982 in om de geledingen binnen de opleiding, begeleiding, ontwikkeling, onderzoek, inspectie en de onderwijsgevenden hierin te betrekken.
Instituties als de vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum (OW & OC) van de Rijksuniversiteit te Utrecht, het Panama-project van de Hogeschool Midden Nederland/SOL, de Centrale Werkgroep Rekenen Wiskunde (CWRW) van de Landelijke Pedagogische Centra, de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO), het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling (Cito) en de VALO-wiskunde en informatica (veldadvisering leerplan ontwikkeling) hebben de laatste jaren ten dezen eendrachtig samengewerkt.
Allereerst verscheen in 1984 het werkboek '10 voor de basisvorming' dat centraal stond tijdens de Panama-najaarsconferentie van 1984. Dit werkdocument legde de basis voor een nationale aanpak van het reken-wiskundeonderwijs van vier tot veertien jaar. Een grote groep deskundigen, waaronder onderwijsgevenden, heeft zich mondeling en schriftelijk over dit rapport in positieve zin uitgesproken. De resultaten van deze opiniepeiling zijn neergelegd in het onderzoeksrapport '10 voor de basisvorming onderzocht'

(1985). Hieruit kwam naar voren dat de beschrijving van zo'n nationaal programma zo concreet mogelijk voor de schoolpraktijk gepresenteerd en vooral in een didactische context geplaatst zou moeten worden. Hieraan is door de eerstverantwoordelijke auteurs gehoor gegeven door delen van de zogenoemde 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool' te laten verschijnen in het 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs', welk tijdschrift tevens het officiële orgaan van de NVORWO is.
Inmiddels ontwikkelde ook de overheid initiatieven tot kwaliteitsverbetering van het onderwijs. In 1986 gaf de minister het Cito de opdracht de feitelijke opbrengsten van ons basisonderwijs te peilen. De eerste resultaten die bekend zijn, zijn die voor rekenen. Het spreekt vanzelf dat de uitkomsten van deze Periodieke Peiling Onderwijs Niveau (PPON) van invloed kunnen zijn op de uiteindelijke vaststelling van de 'Proeve van een nationaal programma', waarvan dit het eerste deel is. Ook zal de 'Proeve ...' moeten stroken met de eindtermen, waaraan sinds 1987 door de SLO, OW & OC en het Cito gewerkt wordt. Speciaal H. van Die (SLO) heeft grote bemoeienis gehad met de samenstelling van de meer definitieve versie van de eindtermen die thans in de 'Proeve ...' zijn verwerkt. Het is verheugend te kunnen constateren dat de eerder genoemde groeperingen in dezen ook hun krachten bundelen, zodat eindtermen, toetsontwikkeling en de 'Proeve ...' op elkaar afgestemd zullen worden. Het bestuur van de NVORWO is met deze ontwikkelingen zeer ingenomen en in het bijzonder met de hoge mate van overeenstemming die er tot nu toe over de inhoud van de eindtermen blijkt te bestaan. Voor de eerste maal in de geschiedenis van het basisonderwijs wordt thans de mogelijkheid geboden tot een eensgezinde aanpak van het funderend reken-wiskundeonderwijs. Om deze reden willen wij deze publikatie van harte aanbevelen bij allen die betrokken zijn bij het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Dat zijn in de eerste plaats de leraren zelf. Maar willen de voorstellen ook werkelijk in de praktijk van de school geconcretiseerd worden dan zal de 'Proeve ...' mede de basis moeten worden voor opleiding, nascholing en begeleiding.

Geulle, 1989, H. Heidenrijk, voorzitter NVORWO

Inleiding
Domeinen, doelstellingen en didactiek

Dit boek bevat de doelstellingen voor rekenen-wiskunde op de basisschool. Deze doelen worden tevens 'beredeneerd', dat wil zeggen, gemotiveerd en toegelicht met domeinbeschrijvingen van leerstofgebieden en geïllustreerd met voorbeeldopgaven. Maar de didactische achtergrond van een en ander blijft tamelijk vaag en onuitgesproken. De beredeneerde doelbeschrijving biedt derhalve niet voldoende steun bij het ontwikkelen en uitvoeren van het beoogde onderwijs. Wel geeft de publikatie een behoorlijk overzicht van hetgeen in de volgende drie delen van de 'Proeve ...' nader wordt uitgewerkt voor de volgende zes leerstofgebieden:
- basisvaardigheden en cijferen;
- verhoudingen en breuken;
- meten en meetkunde.

Om nu toch wat beter zicht op de didactische achtergrond te bieden, zal in dit inleidende hoofdstuk één onderdeel uit 'basisvaardigheden en cijferen' worden gelicht, namelijk de staartdeling. Want juist aan de hand van deze aloude rekenprocedure kunnen doelstellingen en didactiek van nieuwe programma's helder worden toegelicht.
In Engeland bijvoorbeeld vindt men in brede onderwijskringen dat de staartdeling uit het onderwijs geweerd moet worden en dat de didactiek zich zowel op het hoofdrekenen als op het gebruik van de zakrekenmachine zou moeten concentreren. In de Verenigde Staten deelt men die mening, maar daar moeten de leerlingen toch ook wel eenvoudige staartdelingen kunnen maken. En in vele landen blijft wat dit aangaat alles voorlopig nog bij het oude.
In het volgende zal eerst worden samengevat wat dat 'oude' voor het leren van de staartdeling betekent, dus wat de zogenoemde reproduktiemethodiek behelst. Daarna schetsen we een geheel ande-

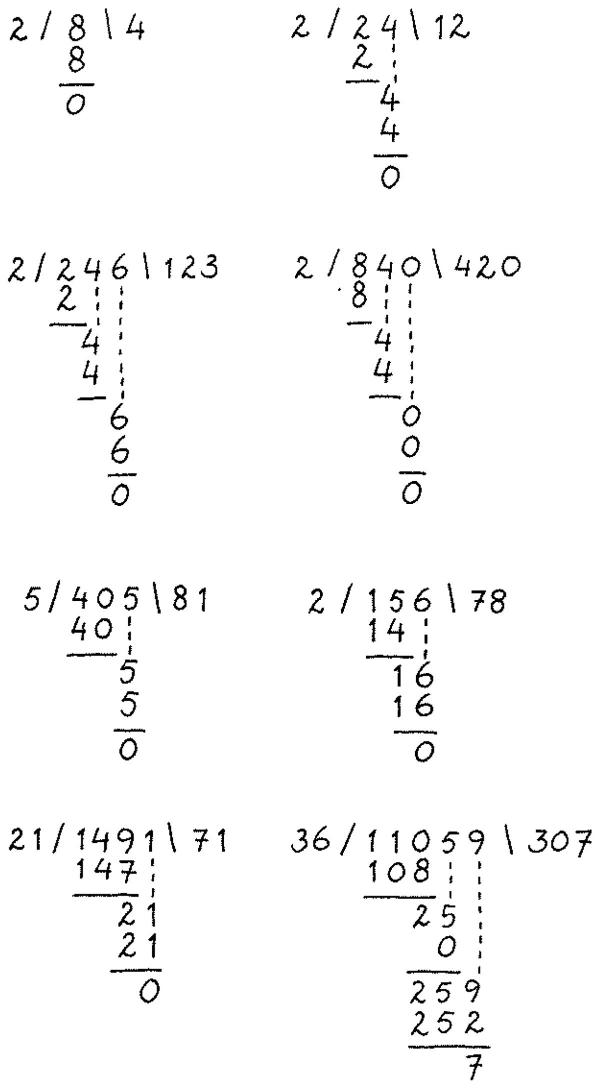
re leergang voor de staartdeling, passend in het kader van de reconstructiedidactiek en passend ook bij deze 'Proeve ...'. Vervolgens worden aan de hand daarvan vijf onderwijsleerprincipes geschetst die de algemene basis van de reconstructiedidactiek vormen en ook aan de onderhavige doelstellingen van rekenen-wiskunde ten grondslag liggen. We besluiten met enkele relativerende opmerkingen over onderwijs naar menselijke maat.

1 De staartdeling volgens de reproduktiemethodiek

Wat de staartdeling volgens de reproduktiemethodiek inhoudt is velen van ons uit eigen ervaring bekend. In tientallen lesuren wordt het delingsalgoritme geval-voor-geval in toenemende moeilijkheid ingeoefend, te beginnen met kleine opgaven en gevolgd door complexere gevallen (figuur 1).

De mate van complexiteit wordt vooral bepaald door de grootte van de getallen (deeltal en deler). Daarnaast tellen ook de benodigde inwissel- en leenhandelingen bij het vermenigvuldigen en aftrekken, plus de 'storende' nullen die in het quotiënt verschijnen (zie het laatste en verreweg moeilijkste geval van figuur 1).
Delingen met rest duiken pas tegen het einde van de leergang op, en dan alleen nog maar in de gedaante van kale sommen. Problemen als 'Er worden 1128 soldaten vervoerd in bussen met 36 plaatsen, hoeveel bussen zijn nodig?', ontbreken dus volledig. Met als gevolg dat slechts één op de drie leerlingen een dergelijke opgave aan het einde van de basisschool goed oplost, dus 32 als uitkomst geeft en niet 31 rest 12, of 31, of 31,33 of nog iets anders antwoordt. En indien de kinderen een zakrekenmachine mogen gebruiken, zakt de goedscore zelfs onder de tien procent!
Ook voor het kale delingsalgoritme geldt trouwens dat de onderwijsopbrengst van de reproduktieaanpak niet bijzonder bemoedigend is: meer dan een derde deel van de leerlingen slaagt er niet in het delingsalgoritme volledig te beheersen. Dit is dan het resultaat van vaak veel meer dan vijftig lesuren onderwijs.

FIGUUR 1



Enkele deelgevallen bij het staartdelen

Gelet op deze bevindingen en gezien ook het feit dat de zakrekenmachine enige ingang heeft gevonden, lijkt de hier en daar gesignaleerde trend om de staartdeling uit het onderwijs te weren alleszins begrijpelijk en verantwoord. In ieder geval is de discussie daaromtrent thans goed op z'n plaats – ook in Nederland.
In het volgende zal de keuze van de 'Proeve ...' terzake met didactische argumenten worden toegelicht.

2 De staartdeling volgens de reconstructiedidactiek

'De leerlingen kunnen cijferend delen volgens een (aangepaste vorm van de) standaardprocedure 'onder elkaar' of indien dit voor sommigen te hoog gegrepen is, volgens een of andere procedure van herhaald aftrekken met een wat langere 'staart', en kunnen deze vaardigheid toepassen.'

Een nogal ondoorgrondelijke omschrijving. Want hoe kan nu de staart van een deling langer worden gemaakt? Het gaat hier toch om een nauwkeurig bepaald rekenvoorschrift waaraan niet valt te tornen? Kortom, deze doelstelling moet 'beredeneerd' en didactisch onderbouwd worden.
Daartoe nemen we het genoemde bussenprobleem van '1128 : 36' tot modelvoorbeeld. Zoals gezegd, ontbreken dergelijke problemen in de traditioneel opgezette reproduktiemethodiek. En soortgelijke kale opgaven met rest verschijnen pas tegen het einde van het onderwijstraject.
Nu is er een totaal andere kijk op het leren cijferen mogelijk, volgens welke zo'n contextopgave over bussen juist wel een plaats in het onderwijs krijgt toegewezen. Sterker: waarin ze zelfs reeds tamelijk voor in de leergang staat. In tegenstelling tot de reproduktieaanpak werkt men in de reconstructiedidactiek niet direct naar de meest verkorte rekenwijze, maar krijgen de kinderen ruimschoots de gelegenheid de standaardprocedure zelf geleidelijk te construeren. Dit gebeurt via gedurige verkorting van handig rekenen en afschatten. Het bussenprobleem kent dan globaal de volgende drie oplossingen (figuur 2).

FIGUUR 2

```
36 / 1128 \
     360     10 bussen
     ---
     768
     360     10 bussen
     ---
     408
     360     10 bussen
     ---
      48
      36      1 bus
     ---
      12
```
a

```
36 / 1128 \
      720   20
      ---
      408
      360   10
      ---
       48
       36    1
      ---
       12
```
b

```
36 / 1128 \
     1080   30
     ----
       48
       36    1
       --
       12
```
c

Min of meer verkort staartdelen

In deze rekenwijzen tekent zich het abc van de reconstructieleergang af. Het is weliswaar de bedoeling dat alle leerlingen niveau c bereiken, alleen komt de ene leerling veel sneller tot de beoogde verkorte werkwijze dan de andere. Maar zelfs als een kind op niveau b blijft steken kan niet met rede worden beweerd dat het geen staartdeling kan maken. Om een misverstand te vermijden: het is natuurlijk niet zo dat in de twintig à dertig lesuren die aan deze aanpak van de staartdeling worden besteed steeds alleen maar toepassingsopgaven aan de orde komen. Zeker niet, want er dient vooral ook met kale delingsopgaven te worden geoefend. Maar mede om het werken met louter getallen betekenis te verlenen doen contextproblemen als die met de bussen wel voortdurend dienst. Al rekenend kunnen kinderen namelijk dergelijke situaties oproepen of voor ogen houden, waardoor de procedurehandelingen als het ware een concrete ondergrond krijgen en controle op het rekenwerk mogelijk blijft. En dat niet alleen: ook worden de kinderen zelf in de gelegenheid gesteld opgaven te produceren. Bijvoorbeeld in de vorm van kale delingsopgaven. Of om zelf probleemsituaties bij een opgaande deling als '1116 : 36' te bedenken (eigen produkties). Of moeilijker: toepassingsopgaven bij bijvoorbeeld '1128 : 36' waarin de uitkomst niet 32 is (zoals bij het bussenprobleem) maar 31 moet zijn.

Of een contextprobleem waar '1128 : 36' tot het antwoord

31,33 of 31⅓ voert.

Op het allerhoogste niveau kan de structuur van de staartdeling zelf tot voorwerp van onderzoek gemaakt worden. Bijvoorbeeld door '1128 : 36' op de zakrekenmachine te laten uitrekenen (31,333333) en vervolgens naar het restgetal aan het einde van de staart te vragen. Om dergelijke opdrachten te kunnen oplossen moet de basisstructuur van het staartdelingsschema worden ontleed, wat slechts voor een deel van de kinderen haalbaar is. Wel kunnen bijna alle kinderen via deze reconstructieaanpak een of andere vorm van de staartdeling leren uitvoeren en toepassen – zo wijst onderzoek uit.

Conclusie: door hoofdrekenen en handig rekenen op de geschetste reconstructiewijze via elementaire probleemsituaties met het cijferende delen te verbinden, is er geen steekhoudend argument aan te voeren om deze vorm van staartdelen af te schaffen, maar pleit er integendeel veel voor om deze rekenprocedure op het programma te plaatsen.

3 Vijf fundamentele leerprincipes van de reconstructiedidactiek

Aan de hand van de zojuist geschetste leergang van de staartdeling kunnen de belangrijke principes van het leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde kort en duidelijk worden beschreven. Bij ieder van de vijf principeparen zal steeds eerst het leerbeginsel worden genoemd. Dan volgt een korte verwijzing naar het leren van de staartdeling en het toepassen ervan. En ten slotte mondt één en ander uit in de formulering van het bijbehorende onderwijsprincipe. Hoewel de toevoeging 'bijbehorend' hier niet te strikt moet worden opgevat, omdat alle leerbeginselen en alle onderwijsprincipes zowel onderling als met elkaar hecht verbonden zijn.

Construeren en concretiseren

Als belangrijkste beginsel geldt de stelregel dat leren eerst en vooral construeren is, wat in schrille tegenstelling staat tot de opvatting van leren als absorberen. Dit constructiekenmerk kan in beide geschetste leergangen van de staartdeling onderkend worden. Zij

het in de reproduktieaanpak voornamelijk in zijn negatieve uitwerking. Namelijk bij de constructie van systematische procedurefouten in moeilijke deelgevallen, zoals bijvoorbeeld in het laatste geval van figuur 1 waar een nul in het quotiënt verschijnt maar die dan wordt overgeslagen. Kortom, het construeren kan negatief uitpakken indien de formele rekenhandelingen een concrete ondergrond missen. Waarop het onderwijs vervolgens weer kan reageren door de leergang nauwgezet in tientallen deelgevallen uiteen te leggen, die stuk-voor-stuk via steeds aanvullende voorschriften geabsorbeerd moeten worden.
Men kan echter ook voor een andere, meer effectieve onderwijsaanpak kiezen door er voor te zorgen dat er eerst een concrete oriënteringsbasis voor de te leren vaardigheid wordt gelegd – dit is het eerste onderwijsprincipe.
Het kan ook zo verwoord worden: het onderwijs moet aansluiten op de betekenisvolle realiteit van kinderen, zodat ze zich bij het opereren met getallen kunnen realiseren waar die rekenhandelingen werkelijk naar verwijzen – het genoemde bussenprobleem vormt daarvan een voorbeeld. Maar dat onderwijsprincipe beperkt zich uiteraard niet tot de staartdeling of het cijferen, doch slaat evenzeer op lange-termijnleerprocessen als tellen, breuken, meetkunde, kortom op het gehele gebied van het onderwijs dat op de gestelde einddoelen is gericht. In de betreffende domeinbeschrijvingen kan men het dan ook steeds op de achtergrond zien staan.

Niveaus en modellen

Het tweede beginsel luidt: leren van een reken-wiskundig begrip of een vaardigheid is een proces dat zich vaak over lange termijn uitstrekt en zich op verschillende abstractieniveaus beweegt.
Bij de reconstructie van de staartdeling bijvoorbeeld ligt er tussen het oplossen van het bussenprobleem en het doorzien van de interne structuur van de delingsprocedure een periode van enkele jaren.
Aanvankelijk wordt er op een concreet niveau gewerkt en refereren zowel de rekenhandelingen als de bijbehorende notatiewijzen aan een concrete delingssituatie zoals die van het bussenprobleem – zie oplossing (a) in figuur 2. Later, op het semi-abstracte niveau

in het leerproces, kan een dergelijke concrete verwijzing nog wel worden opgeroepen maar refereert de wijze van noteren er al niet meer aan – zie oplossing (b) of (c) van figuur 2. Terwijl op het derde, het abstracte niveau, de procedurehandelingen volledig binnen het getallensysteem worden begrepen. En tegelijkertijd wordt daar de structuur van het algoritme doorzien en is de toepasbaarheid van de delingsprocedure sterk verruimd. De vraag is echter hoe het onderwijs deze voortgang en niveauverhoging van het leren kan waarborgen.
Welnu, het onderwijsprincipe dat hierop inhaakt, luidt als volgt: het reken-wiskundeonderwijs dient de leerlingen hulpmiddelen in de vorm van materialen, visuele modellen, modelsituaties, schema's, diagrammen en symbolen te verschaffen, welke het hen mogelijk moeten maken de afstand tussen het werken op het concrete niveau en het opereren op het abstracte niveau te overbruggen. Daarbij dienen de termen 'concreet' en 'abstract' overigens in relatieve zin te worden opgevat. Wat namelijk in het aanvangsonderwijs nog abstract is, een kaal getal bijvoorbeeld, kan in de bovenbouw volstrekt concreet zijn. Waarmee tevens gezegd wil zijn dat een concrete oriënteringsbasis (zie het eerste onderwijsbeginsel) niet per se binnen de materiaalsfeer of in realistische contextsituaties zou moeten liggen: ook het getallensysteem kan op een gegeven moment voor het leerproces een concrete grondslag vormen. Al zal dat bij de introductie van nieuwe onderwerpen als verhoudingen, procenten, breuken, kommagetallen, meten en meetkunde meestal niet het geval zijn en verwijst 'concreet' daar inderdaad naar het niet-formele, zoals uit de domeinbeschrijvingen zal blijken.

Reflectie en eigen produktie

Het leren van rekenen-wiskunde wordt bevorderd door reflecteren, dus door na te denken over het eigen handelen, over de eigen oplossingsmethoden – dit is het derde beginsel.
In de beschrijving van de staartdeling volgens de constructiedidactiek schetsen we verschillende probleemstellingen die de leerlingen tot reflectie proberen aan te zetten: het bussenprobleem; de verschillende wijzen waarop het restgetal verdeeld kan worden; de relatie tussen het restgetal en het kommadeel van het quotiënt; en

vooral de opdrachten om zelf opgaven en probleemsituaties te produceren.

Als derde onderwijsprincipe formuleren we de volgende regel. In het reken-wiskundeonderwijs dienen de kinderen voortdurend de gelegenheid te krijgen om op belangrijke knooppunten in de leergangen zelf opgaven te produceren. Dit maakt het voor hen namelijk mogelijk om terug te blikken op de reeds afgelegde leerweg en zo mogelijk te anticiperen op wat voor hen ligt. Tevens zijn die specifieke vraagstukken van cruciaal belang welke de leerlingen aanzetten tot denken over hun eigen denken, zoals met name de zogenoemde conflictproblemen dat kunnen doen.

Een voorbeeld van zo'n conflictsituatie bij het delen is het volgende vraagstuk: 'Als van ieder van twee delingen de uitkomst '31 rest 12' is, zijn die delingen (quotiënten) dan noodzakelijkerwijs gelijk of gelijkwaardig?' Op grond van de gebruikelijke manier van noteren en redeneren zijn we geneigd hierop met 'ja' te antwoorden. Maar bij nadere doordenking rijzen er twijfels. En terecht, want met een deler van 36 is de uitkomst van de deling die '31 rest 12' oplevert in feite $31\frac{1}{3}$, maar bij een deling door 24 krijgen we dan $31\frac{1}{2}$! In ieder geval leidt een dergelijke probleemstelling tot een nadere doordenking van de staartdelingsstructuur.

In alle leerstofdomeinen zijn dergelijke vraagstukken voorhanden. Enkele treft men in de domeinbeschrijvingen en de opgavenverzameling aan.

Sociale context en interactie

Leren is niet louter een solo-activiteit maar speelt zich in een gemeenschap af en wordt door die sociaal-culturele context gestimuleerd – het vierde beginsel.

Bij het reconstructieve leren van de staartdeling vindt van meet af aan een levendige uitwisseling van ideeën plaats. De eerste vondst die wordt gedaan en besproken is de 'tienregel' om direct maar tien bussen te laten rijden – een oplossing die snel door ieder wordt begrepen en nagevolgd. Maar ook verdergaande verkortingen worden later besproken, gewogen en (soms) nagevolgd indien de leerlingen er aan toe zijn. Ook de eigen produkties van kale opgaven en aangeklede probleemsituaties (denk aan '1128 : 36' in wisselende contexten met gevarieerde uitkomsten van 31; 32; 31,33; $31\frac{1}{3}$ ...) worden in de groep besproken en kunnen (mede-)leerlingen aanzetten om op hun eigen handige of minder handige oplossingsmethoden te reflecteren. Kortom, naast het individuele werken fungeert het groepswerk mede als aanjager voor het leren. De solitaire sommenmakerij van de reproduktiemethodiek om de staartdeling te leren staat hiermee in schril contrast. Het vierde onderwijsprincipe luidt: reken-wiskundeonderwijs dient interactief van aard te zijn, dat wil zeggen, dat het naast het verschaffen van ruimte voor individueel werken ook gelegenheid moet bieden tot uitwisseling van ideeën, weerleggen van argumenten, en zo meer. Iedere laatste doelstelling van elk leerstofdomein verwijst nadrukkelijk in samenvattende zin naar dit interactieve onderwijsbeginsel. Bij meetkunde wordt zelfs iedere doelstelling interactief ingekaderd. Scherp gesteld kan men zeggen dat louter individueel werken het rekenen-wiskundeleren belemmert en derhalve niet in overeenstemming is met de doelen zoals die in de eindtermennota en deze 'Proeve ...' gesteld worden. Echt individualiseren (en dat is iets anders dan individueel werken) van leren over langere termijn is slechts mogelijk via interactief onderwijs waarin uiteraard ook plaats is voor zelfstandig werken – zo zou men het onderhavige onderwijsprincipe ook kunnen formuleren. En met deze stellingname wordt tegelijkertijd nog eens afstand genomen van de vroeger gangbare reproduktiemethodiek en de daarbij passende werkvorm voor de eenzame rekenaar en de druk bevolkte lessenaar.

Structureren en verstrengelen

Ten slotte maken we de beginselketting rond door weer aan te sluiten op de eerste schakel: leren bestaat niet uit het absorberen van een verzameling losse kennis- en vaardigheidselementen maar veeleer uit het construeren van gestructureerde kennis en vaardigheden die in een georganiseerd geheel passen. Nieuwe begrippen worden in het bestaande kennisbestand ingepast of zorgen ervoor dat die kennisstructuur in mindere of meerdere mate wordt aangepast.

Zo kan de delingsbewerking strak met de drie andere basisoperaties worden verbonden – denk maar weer aan het bussenprobleem – via herhaald optellen, herhaald aftrekken en aanvullend vermenigvuldigen. Hierdoor ontstaat een hechte kennisstructuur

waarin iedere basisbewerking steeds meer een eigen signatuur kan krijgen. Delen, zo bezien, is aanvankelijk een verkorte vorm van herhaald aftrekken (optellen) of een omgekeerde bewerking van vermenigvuldigen, die pas op de lange duur een geheel eigen status verwerft. Toepassingsproblemen van delen behoeven aanvankelijk dan niet direct op de meest verkorte wijze, dus via delen, te worden opgelost, wat bij een geïsoleerde benadering van de basisoperaties wel noodzakelijk is. En dan gaat het vaak fout en wordt een verkeerde bewerking 'gekozen' – een typisch gevolg van onderwijs waarin niet naar geïntegreerde kennis wordt gestreefd. Terwijl bij de reconstructiedidactiek de geleidelijke opbouw van het delingsalgoritme en de geleidelijke groei van de toepasbaarheid hand in hand gaan, en de inkorting van de staartdeling gelijk loopt met de verkorting van herhaald aftrekken en aanvullend vermenigvuldigen tot direct delen.
Voor het vijfde onderwijsprincipe betekent dit dat de leergangen uit de verschillende leerstofgebieden zoveel mogelijk met elkaar verstrengeld dienen te worden en verbonden met de realiteit als bron en als toepassingsgebied van wiskundige begrippen en structuren. Zonder dat daardoor overigens een onontkoombare kenniskluwen kan ontstaan, want dat is even onwenselijk en ondoelmatig als het bestand van losse kenniseenheden – ook hier weer kan het voorbeeld van de staartdeling als model dienen hoe zelfstandigheid en verwevenheid te realiseren zijn. En vooral ook hoe hoofdrekenen en cijferen met elkaar verbonden kunnen worden. Een dergelijke verbinding zien we ook bij:
– verhoudingen en breuken;
– meten en meetkunde.
Maar daar niet alleen: ook tussen basisvaardigheden en verhoudingen, basisvaardigheden en meten, verhoudingen en meten, verhoudingen en meetkunde, kortom tussen alle leerstofdomeinen bestaan nauwe betrekkingen. In de aparte beschrijving per domein zal men aanduidingen van die onderlinge verbindingen aantreffen. Er zit dus structuur in het geheel, net zoals trouwens in het onderwijsleerproces waarvan we in het voorgaande kort de vijf funderende principeparen hebben beschreven.

In het voorgaande werden de volgende leerbeginselen en onderwijsprincipes verbonden:

– de opvatting van leren als construeren (L1) met het leggen van een concrete oriënteringsbasis in het onderwijs (O1);
– het niveaukarakter van het leren over lange termijn (L2) met het verschaffen van modellen, schema's en symbolen (O2);
– het reflectieve moment van leren (L3) met onder meer het laten maken van eigen produkties (opgaven) door de leerlingen (O3);
– leren als sociale activiteit (L4) met interactief onderwijs (O4);
– en het structuurkarakter van het leren (L5) met het vervlechten van leergangen (O5).

Er werd echter ook al eerder gesteld dat de bovengenoemde koppeling in die zin tamelijk willekeurig is dat elk leerbeginsel in principe met ieder onderwijsbeginsel te verbinden is. Neem bijvoorbeeld L2 en O4: aan de hand van de staartdeling kan toegelicht worden hoe in interactief onderwijs de verschillende niveaus van het leerproces naar voren komen in de min of meer verkorte oplossingen en notatiewijzen – in het voorgaande is dit voldoende uit de doeken gedaan. Of L1 en O5: in de staartdelingbespreking kwam ook al ter sprake dat juist door de vervlechting van delen met de andere basisoperaties er een concrete ingang voor de delingsprocedure gevonden werd, en ook dat er op het abstracte niveau relaties met bijvoorbeeld kommagetallen en meten te leggen zijn. En zo zouden alle L-O-betrekkingen nader uitgewerkt kunnen worden. Maar dat laten we hier maar achterwege, omdat in het voorgaande de basisstructuur van de reconstructiedidactiek voldoende zichtbaar werd.

4 Onderwijs naar menselijke maat

Aangezien het onderwijs naar menselijke maat gemeten moet worden, is het noodzakelijk het hiervoor gestelde over de zogenoemde reconstructiedidactiek die aan deze 'Proeve ...' ten grondslag ligt enigszins te nuanceren en te relativeren.

Ten eerste werden met de reproduktiemethodiek en de reconstructiedidactiek twee extreme onderwijsvisies tegenover elkaar gesteld, terwijl er in de onderwijswerkelijkheid juist meestal tussenvormen of mengvormen worden gepraktizeerd. Of sterker: waar alleen maar mengvormen mogelijk zijn.

En dat brengt ons op een tweede nuancering: tussen de droom van de reconstructiedidactiek en de werkelijkheid van de alledaagse onderwijspraktijk staan combinatieklassen, heterogene groepen, wisselend onderwijspersoneel en allerhande andere belemmeringen om goed interactief onderwijs te organiseren. Alleen dient deze noodzakelijke relativering naar onze mening niet naar een nieuwe, of beter oude, absolute stelregel te voeren. Namelijk dat in deze moeilijke onderwijsomstandigheden *dus* de solitaire sommenmakerij in de individuele onderwijsopzet van de reproduktiemethodiek dan de meest aangewezen en doelmatige werkwijze zou zijn. Want daarmee vegen we de problemen onder het onderwijstapijt en sturen we de kinderen het donkere rekenbos in.
Ten derde kreeg het staartdelingsalgoritme veel meer aandacht dan het op grond van zijn inhoudelijk belang toekomt: in het geheel van de einddoelstellingen is dit onderdeel van het cijferen betrekkelijk onbelangrijk. Maar we hebben de reden van die aandacht toegelicht: de algemene onderwijs-leerprincipes konden er kort en goed mee worden toegelicht. En om deze didactische grondslag van de 'Proeve ...' ging het in deze inleiding speciaal. Nu we toch wat op die delingsprocedure gefixeerd zijn geweest, besluiten we dit hoofdstuk maar in dezelfde stijl met een veelzeggende grap over de oude staartdeling (figuur 3).

FIGUUR 3

```
              controle I      controle II
4/36\18         18               18
   4             4 ×             18
 ----          ----              18
  32            32               18
  32             4              ----
 ----          ----              32
   0            36                4 +
                                ----
                                 36
```

Was het alleen maar een grap! We hebben hier echter met enkele veelvuldig waargenomen systematische fouten te maken – enkele van de vele, want het reproduktieve cijferen eist zijn tol. En dat is ook de reden dat in Engeland ... we zijn weer terug bij het begin.

In alle ernst: met welke andere getallen kan de bovenstaande grap worden toegepast?
Misschien een probleempje dat een staartje in het onderwijs kan krijgen ... in interactief onderwijs wel te verstaan.

Deel I
Einddoelstellingen rekenen-wiskunde basisonderwijs

Inleiding

Het rekenonderwijs van de jaren zestig bevatte de volgende onderwerpen:
Klas 1: Introductie van de natuurlijke getallen 1 t/m 20. Structureren, optellen, aftrekken.
Klas 2: Getallen 20 t/m 100. Vermenigvuldigen.
Klas 3: Getallen 100 t/m 1000. Delen, delen met rest, begin van cijferen.
Klas 4: Getallen groter dan 1000. Staartdeling, introductie van breuken, redactiesommen.
Klas 5: Operaties met breuken, kommagetallen, cijferen, procenten, ontbinden in factoren.
Klas 6: Breuken, evenredigheidsvraagstukken, vreemde valuta, gemene delers en veelvouden.
Daarnaast vonden ook minder getalgerichte activiteiten plaats, zoals: klokkijken, metriek stelsel, lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, tijdrekening, temperatuur, bruto, tarra en netto.
De zogenoemde denksommen over lopende kranen, samenwerkende arbeiders en elkaar tegemoet rijdende fietsers waren toen al grotendeels verdwenen. En ook de kolossale cijfervraagstukken – de vormsommen – werden nog maar sporadisch aangetroffen. Meetkunde stond al lang niet meer op het programma.
Wat echter vooral opvalt in deze periode is, dat de didactische vernieuwing geïnspireerd door de denkpsychologische inzichten van Kohnstamm, Prins en Van Gelder zich wel in het aanvankelijke maar niet in het voortgezette rekenonderwijs had vastgezet. Slechts enkele, weinig courante methoden introduceerden leesrekenopgaven, stimuleerden het gebruik van materialen, modellen

en schema's, en doorspekten de verzameling vraagstukken met talrijke toepassingsproblemen. Sterker: de gangbare leerboeken keerden zich toentertijd juist steeds meer van het toepassingsgerichte en inzichtelijke rekenen af. Dit mede onder invloed van de individualisering welke zich ook in de jaren zeventig nog verder voortzette. Rekenen werd vooral zelfstandig rekenen. De didactische discussie ging niet over denkvormen maar over werkvormen. Niet de inhoud maar de vorm in casu de organisatie van het onderwijs stond voorop.

Omstreeks 1970 deden zich twee nieuwe ontwikkelingen voor:

1. De New-Math manifesteerde zich – de nieuwe wiskunde met verzamelingen, relaties, transformaties – als glinsterend alternatief voor het oude rekenen.
2. Wiskobas diende zich aan – het toepassingsgerichte contextrijke reken-wiskundeonderwijs als didactische tegenhanger van zowel de eenzijdig leerstofgerichte vernieuwing van de New-Math als van het steeds verder verschraalde rekenonderwijs.

Al snel werd duidelijk dat de New-Math het in Nederland niet zou redden. Maar of en in hoeverre de ideeën van Wiskobas zouden aanslaan, bleef nog lang onduidelijk. Omstreeks 1980 vond nog maar tien procent van de nieuwe reken-wiskundemethoden aftrek. In 1987 echter had al meer dan zestig procent van de basisscholen zo'n realistische methode – de naamsverandering van 'rekenen' in 'rekenen en wiskunde' dekte dus werkelijk ook een inhoudelijke vernieuwing. De meest opvallende veranderingen ten opzichte van het rekenonderwijs uit de jaren zestig:

– nadruk op het ontwikkelen en beheersen van basisvaardigheden, dus tellen, tafels, hoofdrekenen en schattend rekenen plus de toepassingen ervan via het zogenoemde rekenen in contexten;

– cijferen wordt vooral opgevat als een vorm van handig kolomsgewijs rekenen;

– verhoudingen worden vanwege het belang voor toepassingen veel breder uitgewerkt dan de formele evenredigheden van het vroegere rekenen;

– breuken en kommagetallen komen meer vanuit toepassingssituaties voort, hetgeen betekent dat niet rechtstreeks wordt aangestuurd op het beheersen van rekenregels voor optellen, aftrek-

ken, vermenigvuldigen en delen van (moeilijke) breuken;
– aan meten, rekenen met maten en het verwerken van meetgegevens in grafieken en schema's wordt meer aandacht geschonken en minder aan het exerceren in het metrieke stelsel;
– zowel de verkenning van de ruimte waarin we leven als de meetkundige kant van rekenen en meten vormen nieuwe onderdelen van de programma's voor rekenen-wiskunde.
De geschetste programmatische vernieuwing op zes leerstofterreinen zal in de volgende beschouwing tot uitdrukking komen. Maar ook het belang dat thans aan het werken in groepsverband wordt gehecht, naast het individuele werken, vindt men in de algemene leerdoelen terug.
Eerst schetsen we de algemeen nagestreefde schooldoelen en dan de algemene leerdoelen die permanent bij de onderwijsactiviteiten worden nagestreefd in rekenen-wiskunde. De laatste zijn leerdoelen die op gedragspatronen van algemene aard mikken, zoals het ontwikkelen van bepaalde strategieën, het stimuleren van een wiskundige attitude. Het zijn ook precies die doelen welke een bepaalde didactische aanpak rechtvaardigen. Neem bijvoorbeeld de staartdeling: indien men deze onderwijst, is het toch niet zo dat slechts de beheersing van die rekenwijze en het kunnen toepassen ervan uitsluitend de streefdoelen vormen, maar dat ook de wijzen waarop men die concrete leerdoelen tracht te bereiken op zich weer belangrijke doelen in zich sluiten. Dat nu zijn de algemene leerdoelen. Ze legitimeren echter niet alleen de didactische aanpak, maar omkleden ook de concrete leerdoelen en niet te vergeten die activiteiten waarvan men vindt dat de leerlingen ze nu eenmaal eens gedaan moeten hebben.
Kortom, deze algemene doelen zijn geen vage, boven het onderwijs zwevende doelen, maar integendeel juist doelen waarvan de concretiseringen in het onderwijs van alledag aanwijsbaar (zouden moeten) zijn.
In het tweede hoofdstuk staan de zes leerstofgebieden waarin rekenen-wiskunde uiteengelegd kan worden, te weten:

1. basisvaardigheden;
2. cijferen;
3. verhoudingen en procenten;
4. breuken en kommagetallen;

5. meten;
6. meetkunde.

Steeds worden per gebied de concrete leerdoelen geformuleerd na de typering van zo'n domein. Dit gebeurt met het oog op de leesbaarheid maar vooral ook om de samenhang van de betreffende doelen tot uitdrukking te brengen. Concrete leerdoelen worden immers niet alleen per stuk, doch evenzeer in hun onderlinge verband en met toepassingssituaties nagestreefd. Juist om die reden schetsen we in het analysedeel van ieder leerstofterrein enkele voorbeelden van opgaven en activiteiten.
In het slothoofdstuk staan wat specifieke moeilijkheden die bij het formuleren van eindtermen voor rekenen en wiskunde op de basisschool rijzen, in het bijzonder de toetsproblematiek.

1 Algemene doelen (schooldoelen en leerdoelen)

We onderscheiden vier schooldoelen (die overigens ook de criteria voor de selectie van leerinhouden en onderwijsactiviteiten leveren). Daarna volgt een intermezzo waarin een voorbeeld van onderwijs wordt geschetst. Dit dient als concrete grondslag voor de korte beschrijving van acht algemene leerdoelen voor rekenen-wiskunde. Ten slotte beschouwen we de algemene doelen, de concrete doelen en de onderwijsleeractiviteiten in samenhang.

1.1 Algemene schooldoelen

De vier algemene doelen van de basisschool zijn:
- de persoonlijke waarde;
- de voorbereidende waarde;
- de maatschappelijke waarde;
- de vakspecifieke waarde.

Vroeger werd rekenen-wiskunde nogal eens om haar *vormende waarde* aangeprezen. Grote mogelijkheden voor de ontwikkeling van persoonlijke kwaliteiten kreeg het reken- en het wiskundeonderwijs soms toegedicht, zoals het scherpen van het verstand, de bevordering van een nauwkeurige wijze van uitdrukken, waarde-

ring opwekken voor de schoonheid van de wiskunde, zin voor orde, samenhang en nog meer moois. Vooral ook de sociale betekenis werd onderlijnd: argumenteren, discussiëren, samenwerken en op waarde schatten van argumenten. Maar tevens bleven het persoonlijke plezier, de appreciatie en de voldoening niet ongenoemd. Thans echter zijn de beschouwingen over de persoonlijke waarde didactisch minder vrijblijvend, zeker ook ten aanzien van het sociale aspect. In het onderwijs zelf zou concreet aanwijsbaar moeten zijn dat er een afstemming op die 'verheven' doelen mogelijk is. Anders gezegd: via talloze voorbeelden moet plausibel gemaakt kunnen worden dat de leerlingen voortdurend de gelegenheid krijgen om te argumenteren, verschillende strategieën te gebruiken, zich helder uit te drukken, zelf wiskunde te produceren, te reflecteren op het eigen denken, plezier aan onderzoek te beleven, te puzzelen, samen te werken, kortom gelegenheid krijgen om bepaalde na te streven algemene gedragspatronen te ontwikkelen die persoonlijk waardevol zijn. Pas dan mag men met recht de persoonlijke waarde van rekenen en wiskunde aanprijzen.
De *voorbereidende waarde* voor het vervolgonderwijs is ook een algemeen doel van de basisschool en derhalve ook van toepassing op rekenen-wiskunde. De noodzakelijke basisvaardigheden voor het voortgezet onderwijs en het beroepsonderwijs dienen dus mede in het basisonderwijs te worden gelegd. Deze betreffen hoofdrekenen, schattend rekenen, cijferen, verhoudingen, breuken, meten en meetkunde – onderwerpen die verticaal gepland dienen te worden door de basisschool heen naar het voortgezet onderwijs toe en ook daarbinnen weer. In het verleden is die afstemming niet zelden gerealiseerd via een druk van bovenaf. Althans zo werd het vaak ervaren: het voortgezet onderwijs stelde zijn (al dan niet gerechtvaardigde) eisen. Toelatingsexamens konden daaraan kracht bijzetten. Maar zo eenzijdig is de relatie nu al lang niet meer, als die ooit zo was. En thans zijn er juist bij rekenen en wiskunde kansen om de verschillende programma's goed te laten sporen met de onderwijsontwikkeling voor wiskunde in (de eerste fase van) het voortgezet onderwijs.
Met *maatschappelijke waarde* wordt gedoeld op de betekenis die rekenen-wiskunde kan hebben voor het leven van alledag en het

werken in de beroepswereld als mogelijk onderdeel daarvan. Let wel 'kan hebben', namelijk indien de relatie tussen rekenen-wiskunde en de realiteit ook werkelijk wordt gelegd. Welnu, in het voorgaande werd er al kort op gewezen dat die verbinding er niet altijd was. Met name niet in het formele rekenen van de jaren zestig en in de geheel aan de realiteit onthechte New-Math uit dezelfde periode. Toen werd het zaad voor de realistische opvatting gezaaid. We moeten echter thans voor overdrijving waken: de maatschappelijke waarde is niet het enig relevante streefdoel, zoals hier en daar wel wordt beweerd.
Ten slotte de *vakspecifieke waarde*. Rekenen-wiskunde heeft ook een waarde in zichzelf. Maar dan dient de eigen aard van de reken-wiskundige activiteit wel gerespecteerd te worden. Wat de kenmerken daarvan zijn, zal in het volgende onderdeel van deze paragraaf nader worden uitgewerkt. Hier volstaan we met een negatieve typering, dus wat rekenen en wiskunde niet (uitsluitend) is: het is niet alleen regelgeleid rekenen en meten, werktuiglijk opereren met getallen en al evenmin, als ander uiterste, een slap aftreksel van de vakwetenschappelijk bepaalde bedrijvigheid.

Deze vier algemene schooldoelen leveren criteria voor leerstofselectie. Ook in de straks volgende algemene leerdoelen die permanent in rekenen-wiskunde worden nagestreefd, zal men de zojuist geschetste schooldoelen kunnen herkennen. Voor we echter die algemene leerdoelen beschrijven, geven we eerst een voorbeeld van een stukje onderwijs. Daaraan kan dan straks bij iedere doelstelling gerefereerd worden. Zodoende kunnen we de algemene leerdoelen duidelijker betekenis geven. Tevens wordt door dit intermezzo de verbinding met de onderwijswerkelijkheid niet uit het oog verloren.

1.2 Intermezzo: de grootte van Nederland

'Iemand zegt dat hij in de Larousse-encyclopedie heeft gelezen dat de oppervlakte van Nederland 36.842 vierkante meter is.'
Wat vind je daarvan? (zie figuur 1)

FIGUUR 1

Ziehier het probleem voor het hoogste leerjaar van de basisschool waarop we de volgende korte onderwijsbeschrijving zullen richten. Het gaat hier om leerlingen die voornamelijk traditioneel rekenonderwijs hebben gehad maar in dit laatste jaar soms ook met wat rijkere problemen worden geconfronteerd. In deze onderwijscontext krijgen de algemene doelen nog meer reliëf dan in een ideale of geïdealiseerde schets mogelijk zou zijn. Dit ter inleiding. En nu dan de lessen.

Les 1

De leerlingen gaan aan de slag. De onderwijsgevende loopt rond, biedt hulp aan groepjes leerlingen en leidt de nabespreking.
Allereerst enkele flarden uit een kort leergesprek dat de onderwijsgevende in het begin van de les met Mar heeft.

Mar: Dan zou ik eerst moeten weten wat een vierkante meter is. Ik weet dat een hectare een voetbalveld is. Een vierkante meter is misschien de helft ervan.

Ond: Hoe lang ben jij Mar?

Mar: Eén meter zeventig.

Ond: En nu een vierkante meter. Let eens op het woord 'vierkante'.

Mar: O, dat is vier keer een meter (tekent een vierkant in de lucht).

Ond: Is dit bureau ongeveer een vierkante meter groot? (Het is 1.30 m bij 1.70 m.)

Mar: Nee, 't is niet vierkant, dus 't is geen vierkante meter.

Nadere uitleg volgt. Mar vordert gestaag, maar steeds duiken nieuwe obstakels op. Bijvoorbeeld als de oppervlakte van Neder-

land via een rechthoeksmodel van 200 km bij 300 km bepaald moet worden. Overigens op basis van de prima schatting van 200 bij 300 km die door Mar zelf wordt gemaakt!
Mar berekent 200 × 300 cijferend 'onder elkaar'! Deze twee achtereenvolgende uitroeptekens markeren de uitersten waartussen de reken-wiskundige activiteiten van Mar zich bewegen: nadenkend schatten en onnadenkend rekenen.

```
  300
  200 ×
  ---
  000
 000.
600..
-----
60000
```

Er zijn echter ook leerlingen, die wel degelijk blijken te weten hoe groot een vierkante meter is en die ook een behoorlijk begrip van oppervlakte bezitten, maar de wiskundige instelling missen om uitgaande van die 36.842 vierkante meter eens wat vermenigvuldigingen te proberen, of omgekeerd om op grond van de beschikbare ervaringsgegevens over de grootte van Nederland zelf een oppervlakteschatting te maken. Als de onderwijsgevende langs komt, is hun commentaar: 'dat getal is zo groot, dat je je daarvan geen goede voorstelling kunt maken, er valt dus niets over te zeggen.' Een kleine aanwijzing om toch maar eens wat te proberen – de oppervlakte van een tuin of zoiets – zet hen al snel op het goede spoor. Na enige tijd is iedereen gericht op het probleem of die 36.842 vierkante meter voor de grootte van Nederland wel kan. In de nabespreking komt, kort samengevat, het volgende commentaar los:
– Als dat zou kloppen, zouden honderden mensen op één vierkante meter moeten wonen want op die 36.842 vierkante meter wonen miljoenen mensen, en dat kan dus niet.
– 36.842 vierkante meter is zoiets als een strook van 36 km lang en 1 meter breed, een paadje in Nederland.
– Een rechthoek van 200 meter bij 180 meter, zeg twee voetbalvelden, levert die oppervlakte van 36.842 vierkante meter.
– Nederland heeft ongeveer de oppervlakte van een rechthoek

van 200 km bij 300 km (onder meer Mars schatting), dus die 36.842 vierkante meter (let wel: meter) kan nooit kloppen.
Al dit commentaar wordt besproken. Vrijwel iedereen kan de verschillende argumenten begrijpen en afwegen tegen de zelf gevonden oplossing. De laatstgenoemde oplossing is voor de onderwijsgevende aanleiding om naar de precieze oorsprong van de vergissing te vragen. De hele groep stemt ermee in dat het niet vierkante meter maar kilometer moet zijn.

Les 2
De onderwijsgevende komt op het probleem terug: Hoe is het mogelijk dat men zo nauwkeurig op die 36.842 vierkante kilometer is kunnen uitkomen?
In een klassegesprek worden de bedenkingen geïnventariseerd. Wat doen we met rivieren, meren en heuvels? Horen die bij de oppervlakte van 36.842 vierkante kilometer? En wat te denken van eb en vloed: is Nederland bij laag water niet veel groter dan bij hoog water? Hoeveel zou dat wel niet schelen? Moet de oppervlakte niet variabel worden genomen? (zie figuur 2)

FIGUUR 2

Ten slotte de hamvraag: 'Zou het toch kunnen, zo'n precies getal, indien we van een bepaald vast model van Nederland zouden uitgaan?' Een vraag die door de onderwijsgevende grotendeels zelf wordt beantwoord. De 'vaste' laagwaterlijn en het 'vaste' kaartmodel bepalen de modelberekening. Een model dat uiteraard op onderdelen verschilt van de realiteit...

Schrijf maar eens een stukje over het startprobleem en maak degene die zoiets zegt duidelijk dat dit niet kan en wat het wel moet zijn en leg nog wat meer uit, bijvoorbeeld over laag en hoog water.

Deze opdracht voor thuis vormt het slot van de twee lessen over de grootte van Nederland – onze concrete grondslag voor de algemene leerdoelen.

1.3 Algemene leerdoelen

Er worden acht leerdoelen onderscheiden. Bij ieder van hen duiden we kort aan hoe het betreffende doel op 'de grootte van Nederland' past. Natuurlijk is het niet zo dat in het algemeen gesproken bij iedere onderwijsleeractiviteit alle acht aspecten van de wiskundige en rekenkundige bezigheid kunnen worden betrokken. Maar voor wat grotere onderwijsblokken zou dit wel het geval zijn. Het gaat hier immers om algemene leerdoelen in de zin van doelen die permanent worden nagestreefd, of in ieder geval steeds op de achtergrond staan. Het probleem van de grootte van Nederland is echter zo rijk, zo veelzijdig, dat hiermee een complete illustratie van de algemene leerdoelen kan worden gegeven. Voorts wijzen we erop dat, zoals gezegd, de algemene schooldoelen zich in de algemene leerdoelen weerspiegelen, respectievelijk de persoonlijke waarde in A1, de voorbereidende waarde in A2, de maatschappelijke waarde in A3 en de vakspecifieke waarden in A4 tot A8.

A1. Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat de leerlingen een goede wiskundige attitude en een positieve houding ten opzichte van rekenen-wiskunde ontwikkelen zodat het mogelijk wordt de kennis, vaardigheden en inzichten van de concrete leerdoelen te bereiken.

Dat houdt onder meer in:

– een onderzoeksgerichte instelling en een goed wiskundig aan-

pakgedrag ontwikkelen, zowel voor het individuele werken als voor groepsonderzoek;
– plezier beleven aan rekenen-wiskunde;
– appreciëren van reken-wiskundige werkwijzen;
– zelfvertrouwen ontwikkelen in het gebruiken van wiskundige werkwijzen en vaardigheden.

Weerspiegeling in 'de grootte van Nederland'
Het belang van het attitudeaspect, zoals algemeen verwoord in A1, blijkt in het zo juist beschreven intermezzovoorbeeld. Sommige leerlingen kunnen, willen of durven niet zonder meer met een dergelijk voorbeeld aan de slag te gaan. Met name onderwijs dat sterk op het aanreiken van rekenregels is gericht, lijkt zo'n onderzoeksgerichte attitude bepaald niet te bevorderen. Dit in tegenstelling tot onderwijs zoals met 'de grootte van Nederland' gerealiseerd kan worden.

A2. Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat de leerlingen de fundamentele vaardigheden op de terreinen van rekenen, meten en meetkunde in samenhang en in het verband van de totale basisvorming verwerven.

Dit houdt in:
– rekenvaardigheid verwerven, gebaseerd op inzicht, feitenkennis en routines (basisvaardigheden);
– strategieën en methoden verwerven voor het oplossen van problemen in contexten.

Weerspiegeling in 'de grootte van Nederland'
De vaardigheden, zoals algemeen verwoord in A2, betreffende rekenen, meten en meetkunde komen in dit voorbeeld op veel manieren aan bod: bij het benaderde uiteenleggen van 36.842 in twee factoren, bij het berekenen van geschatte rechthoeken en hun oppervlakte, het rekenen met nullen bij bijvoorbeeld 200 × 300 of 200 × 180, bij het bepalen van het verschil tussen laag water en hoog water, het omvormen van figuren met behoud van oppervlakte en zo meer.

A3. Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat de leerlingen zicht krijgen op allerlei praktische toepassingen van rekenen-wiskunde.

Dit houdt in:
- het leren kennen van toepassingen van rekenen-wiskunde in andere vakgebieden;
- het onderkennen van de invloed van rekenen-wiskunde in alledaagse situaties;
- het leren gebruiken van wiskundig georiënteerde apparatuur waaronder de zakrekenmachine en de computer.

Weerspiegeling in 'de grootte van Nederland'
Het praktische nut van rekenen-wiskunde, zoals algemeen verwoord in A3, is specifiek bij oppervlakte in allerlei alledaagse situaties zichtbaar. Vooral ook het verband met andere grootheden is sprekend: denk bijvoorbeeld aan bevolkingsdichtheid (ook in ons voorbeeld), prijs, enzovoort. In dit geval heeft oppervlakte betekenis voor de bepaling van de grootte van een land. Over het verstandig gebruik van de zakrekenmachine valt hier ook wel wat op te merken: het gaat om schattingen, een globale grootte bepaling, dus is het hier onverstandig rekenapparatuur te gebruiken. Het heeft weinig zin om 36.842 exact in twee factoren uiteen te leggen. Reken met nullen, reken niet exact en dus niet met de zakrekenmachine!
Een dergelijk verstandig niet-gebruik moet uiteraard ook onderwerp van het onderwijs zijn.

A4. Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat de leerlingen verbindingen leggen tussen rekenen-wiskunde als vaksysteem en de realiteit waarop dat systeem van toepassing is.

Dit houdt in:
- het gebruiken van ordeningsmiddelen, zoals tabellen, grafische voorstellingen, symbolen en formules voor het oplossen van toepassingsproblemen;
- het werken met modellen, dat wil zeggen het omzetten van ge-

gevens in geschikte modellen, het bewerken en verwerken ervan, en ten slotte het terugvertalen van de resultaten naar de oorspronkelijke probleemsituatie.

Weerspiegeling in 'de grootte van Nederland'
De toepasbaarheid, zoals algemeen verwoord in A4, betreft in het voorbeeld de oppervlaktematen vierkante meter en vierkante kilometer in verband met de werkelijke grootte van Nederland. Hebben de leerlingen een juiste voorstelling van die maten? Kunnen ze de betreffende maten inpassen in hun persoonlijke ervaringswereld? Maar ook: kunnen ze het begrip oppervlakte toepassen op niet-rechthoekige, grillige figuren? Tevens komt het wiskundige model aan bod, namelijk bij het 'gladstrijken' van Nederland, het elimineren van de wisseling van laag en hoog water en zo meer om een exacte oppervlaktemaat van een land te kunnen bepalen.

A5. Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat de leerlingen de benodigde wiskundetaal kunnen gebruiken en begrijpen.

Dit houdt onder meer in:
– het ter beschikking hebben van kennis van termen, symbolen, notatiewijzen en conventies;
– actief gebruiken van wiskundetaal bij het discussiëren, het formuleren van oplossingen, het verwoorden van onderzoekjes;
– en het kunnen lezen en interpreteren van wiskundige beschrijvingen in verbale, schematische en symbolische vorm in boeken, advertenties, pamfletten, tv-spots en via grafieken, kaarten, schema's en modellen.

Weerspiegeling in 'de grootte van Nederland'
Het taalaspect, zoals algemeen verwoord in A5, speelt in het voorbeeld een zeer specifieke rol bij de opvatting van 'vierkante'. Namelijk of het gaat om de vorm van een vierkant, ofwel om de grootheid van een oppervlaktemaat.
Mar interpreteerde 'vierkante' aanvankelijk als vorm, terwijl voor een goed begrip van het probleem de opvatting van grootheid noodzakelijk is.

Ook het onderscheid tussen oppervlak en oppervlakte valt onder deze taalrubriek. In de discussies en besprekingen doen zich overigens nog tal van andere taalmomenten van wiskundige aard voor en vooral ook in het opstel tot slot. Het schrijven en praten over maten, het aanduiden van de grootte ervan, het gebruiken van wiskundige symbolen, het argumenteren...

A6. Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat de leerlingen allerlei relevante reken-wiskundige verbanden, regels, patronen en structuren opsporen.

Dit houdt onder meer in:
- het ontdekken van orde en regelmaat in patronen van getallen, figuren en maten;
- het opsporen van eigenschappen van bewerkingen, verbanden en structuren bij basisoperaties met natuurlijke getallen, breuken, kommagetallen in onder meer verhoudingen en procenten, bij afstand, tijd, snelheid en zo meer;
- het vinden van regels en wetmatigheden en omgekeerd het geven van concrete voorbeelden bij algemene regels.

Weerspiegeling in 'de grootte van Nederland'
Het structuuraspect, zoals algemeen verwoord in A6, doet zich voor in het specifieke geval van ons voorbeeld bij de betrekkingen tussen meter en kilometer, vierkante meter en vierkante kilometer. Waarom wordt het aantal nullen verdubbeld indien we van lengtematen overstappen naar oppervlaktematen (en hoe zit dat met komma's)? Ook de relatie omtrek-oppervlakte heeft bijzondere trekken. Als we Nederland omvormen tot een rechthoek met ongeveer dezelfde oppervlakte, wordt de omtrek veel kleiner. Een (moeilijke) vervolgvraag zou kunnen zijn: 'Wat is de vorm van de figuur met een zo klein mogelijke omtrek bij een gegeven oppervlakte?' Of omgekeerd, een zo groot mogelijke omtrek bij een gegeven oppervlakte?

A7. Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat de leerlingen leren onderzoeksstrategieën en redeneerstrategieën te gebruiken en te verwoorden.

Dit houdt in:
- het experimenteren, observeren en testen van vooronderstellingen;
- het bewijzen (op verschillende niveaus) en het weerleggen van bewijzen, argumenten en redeneringen;
- het schatten en het verantwoord werken met benaderingen;
- het belang inzien van het proberen, simplificeren, overdrijven en veralgemenen om problemen op te lossen.

Weerspiegeling in 'de grootte van Nederland'
Het methodische aspect, zoals algemeen verwoord in A7, vertoont zich in het schatten, simplificeren, bewijzen van de onjuistheid van de gegeven oppervlakte. Maar ook in het kritisch oordelen over de exacte oppervlakte (36.842), in het vermoeden dat meter kilometer moet zijn, en in de variabele 'natuurlijke' oppervlakte en de vaste modelgrootte.

A8. Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat de leerlingen bekwaamheid verwerven om zelf rekenen-wiskunde te construeren en te produceren, en op hun eigen activiteiten te reflecteren.

Dit houdt in:
- binnen een globaal gegeven opdracht zelf vraagstukken bedenken, het produceren van ervaringsgegevens bij onvolledige opgaven en het bedenken van toepassingsopgaven bij kale sommen;
- het kritisch nadenken over de eigen oplossingsmanieren;
- het reflecteren op de gang van het eigen leerproces en dat van anderen, over langere termijn bezien.

Weerspiegeling in 'de grootte van Nederland'
Het ontwikkelingsaspect, zoals algemeen beschreven in A8, kan in ons voorbeeld alleen in subjectieve zin worden ervaren; de moderne kartografische methoden om de oppervlakte van grillige figuren te bepalen, voeren hier te ver.
Het probleem biedt een uitstekende gelegenheid verschillende oplossingen te produceren, te reflecteren op de zelf gevonden oplossing via de niet zelf gevonden oplossingen en zich zodoende be-

wust te worden van de ontwikkeling van het eigen wiskundige denkproces.

Tot zover de acht algemene leerdoelen waarin de essentiële kanten van de reken-wiskundige activiteiten naar voren komen, te weten:
- het attitudeaspect;
- de vaardigheidskant;
- het praktische nut;
- de toepasbaarheid;
- het taalaspect;
- het structuuraspect;
- de methodische kant;
- het ontwikkelingsaspect.

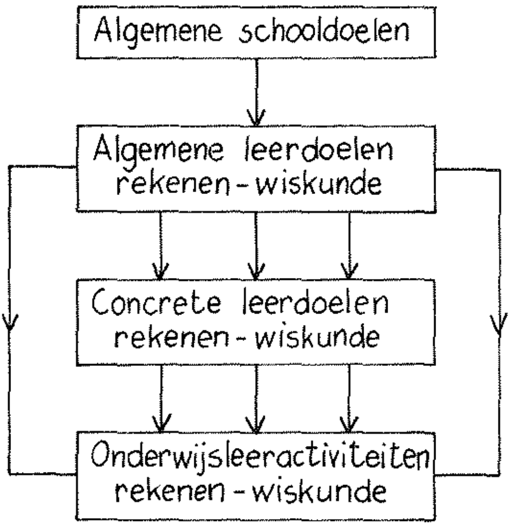
De gegeven formuleringen wekken door hun samenvattende vorm wellicht een gevoel van verhevenheid, van onthechting aan de alledaagse onderwijspraktijk. Dat is onontkoombaar misschien, maar toch ook onterecht, zoals uit de concrete toelichting over 'de grootte van Nederland' blijkt.

1.4 Samenhang algemene doelen, concrete doelen en onderwijsleeractiviteiten

We vatten de relatie tussen doelen en activiteiten samen in het schema van figuur 3.
Onderwijsleeractiviteiten zijn meestal georiënteerd op concrete leerdoelen die op hun beurt weer gericht zijn op algemene leerdoelen. Het is echter ook mogelijk dat er een directe verbinding tussen de onderwijsleeractiviteit en de algemene leerdoelen wordt gelegd. Concrete leerdoelen dienen in het kader van algemene leerdoelen te worden geplaatst. Worden ze geïsoleerd beschouwd, dan loopt het onderwijs gevaar in strijd met de omvattende algemene leerdoelen te handelen.

Voorbeelden van zo'n beperkte benaderingswijze van concrete leerdoelen vindt men in onderwijsprogramma's waar het onderwijs sterk leerdoel- en toetsgericht is. In dergelijke 'test-driven' onderwijsprogramma's worden algemene doelstellingen vaak niet

FIGUUR 3



eens genoemd; de bovenzijde en de zijkant van het schema ontbreekt daar.

Een ander uiterste vindt men indien het middelste blok van de leerdoelen wordt weggelaten. Ook hiervan zijn internationaal voorbeelden van onderwijsprogramma's te vinden. Het gevaar van tamelijk ongericht en onsamenhangend onderwijs is dan beslist niet denkbeeldig indien men over een wat langere termijn kijkt. Zoals duidelijk is, wordt hier een tussenpositie ingenomen. Dat wil zeggen: niet alle onderwijsleeractiviteiten dienen uitsluitend met concrete leerdoelen te zijn verbonden – we stelden het al – maar kunnen ook direct met de algemene leerdoelen in verbinding staan.

Algemene leerdoelen zijn de scharnierpunten van de eindtermen. De concrete leerdoelen die in het volgende zullen worden beschreven, moeten dan ook nadrukkelijk in het kader van de algemene leerdoelen worden gesteld en beschouwd.

2 Concrete leerdoelen

De concrete leerdoelen worden per leerstofgebied opgesomd. Eerst typeren we steeds het domein. Daarbij wordt gebruik gemaakt van enkele voorbeelden. Deze vervullen verschillende functies. Ze illustreren de schets van het terrein, maken de doelformulering duidelijker en geven soms de verbinding met de algemene doelen aan. Kortweg: ze hebben een grote beeldvormende waarde voor wat rekenen-wiskunde is of kan zijn.
Na de domeintypering worden gemiddeld zo'n zeven specifieke leerdoelen geformuleerd. We bespreken achtereenvolgens:
- basisvaardigheden;
- cijferen;
- verhoudingen en procenten;
- breuken en kommagetallen;
- meten;
- meetkunde.

We noemden eerder vier criteria, samenhangend met achtereenvolgens de persoonlijke waarde, de voorbereidende waarde, de maatschappelijke waarde en de vakspecifieke waarde. Het rekenwiskundeonderwijs moet belangwekkend, basisvormend, nuttig en wiskundig rijk zijn. Indien men dit alles ruwweg in één kerncriterium zou willen samenvatten, komen we bij de mogelijke toepasbaarheid terecht. Dit houdt in dat indien de leerlingen de elementaire toepassingen van een bepaald leerstofonderdeel niet of onvoldoende onder de knie kunnen krijgen, een dergelijk onderdeel niet op het programma van rekenen-wiskunde wordt gezet, of althans niet in de gangbare vorm. Met name voor verhoudingen, procenten, breuken, kommagetallen en meten heeft dit omvattende criterium nogal wat consequenties. Ten slotte komt in zowel de typeringen van ieder leerstofgebied als in de specifieke leerdoelen steeds het belang van de algemene leerdoelen naar voren.

2.1 Concrete leerdoelen basisvaardigheden

Tot de basisvaardigheden worden gerekend: het gevarieerd kunnen tellen, het kennen van de tafels (voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen), het vaardig hoofdrekenen en het schattend rekenen, plus het kunnen maken van elementaire toepassingen van de vier basisbewerkingen.

Tot omstreeks 1960 werd betrekkelijk weinig tijd aan het tellen en veel zorg aan het inslijpen van de tafels besteed. De aandacht voor het hoofdrekenen wisselde weliswaar maar was in het algemeen toch niet gering. Het schattend rekenen daarentegen kreeg bij benadering niet de aandacht die het verdiende en het toepassen evenmin.

Na 1960 kwam het rekenen steeds meer in de greep van het individuele, schriftelijke werken. Dit voerde soms sterk naar solitaire sommenmakerij. Zowel het uit het hoofd leren van de tafels als het hoofdrekenen kregen daar onder te lijden, om over het schatten en toepassen maar te zwijgen. Sommige onderwijsdeskundigen meenden dat met de schuchtere invoering van de zakrekenmachine aan het einde van de jaren zeventig zelfs de poten onder de rekentafels werden weggezaagd. Waarom zouden de leerlingen al die rekenfeiten nog in het hoofd moeten stampen als zo'n rekenhulpje eenvoudig allerlei gecompliceerde berekeningen voor hen kan uitvoeren? Maar in het algemeen gesproken denkt men daar nu ook in internationaal verband duidelijk anders over. Indien namelijk het 'domme' elementaire rekenwerk achterwege blijft, zullen niet alleen hoofdrekenen en schattend rekenen in het gedrang komen, maar ook het inzicht in de rekenbewerkingen en de toepassingen ervan, aldus luidt de opinie van de meeste vakdeskundigen.

Tellen is belangrijk voor de ontwikkeling van het getalbegrip in het aanvangsonderwijs; het is een noodzakelijke voorwaarde die echter niet voldoende is. Anders gezegd: indien leerlingen technisch kunnen tellen, houdt dat nog niet in dat zij die vaardigheid ook kunnen inzetten om problemen op te lossen. Dat vermogen ontwikkelt zich slechts geleidelijk. Ook handig en verkort tellen ontstaat stapsgewijs. Het vooruittellen en terugtellen met sprongen van vijf, tien, honderd, et cetera, is zelfs nog later realiseerbaar, namelijk indien de structuur van de telrij i.c. die van het

tientallige positiesysteem wordt doorzien. Om grote hoeveelheden (bijvoorbeeld knikkers in een pot) te tellen, is het handig die tienstructuur of tweemaal vijfstructuur zelf aan te brengen, of te turven ~~||||~~. Vooral voor het hoofdrekenen bij optellen en aftrekken is het handig kunnen tellen van groot belang. Getalbegrip, leren doorzien van de structuur van de telrij, kunnen tellen van grote hoeveelheden, verkort tellen, tellen ten behoeve van op-tellen en af-tellen zijn dus enkele belangrijke functies van het tellen.
De leerlingen moeten de *tafels* van de vier basisoperaties kennen, plus elementaire toepassingen kunnen maken. Bij het aanleren ervan dienen, zoals gezegd, vooral ook de algemene leerdoelen in het oog te worden gehouden. Negatief gesteld houdt dit in dat het louter mechanistische inslijpwerk daarmee in strijd zou zijn. Positief betekent het dat het uit het hoofd leren het resultaat is van een proces van steeds verdergaand verkorten van handig rekenen op basis van inzicht. Zo kan bijvoorbeeld bij de tafels van vermenigvuldiging gebruik worden gemaakt van de steunpunten tien keer, vijf keer en twee keer. Weet je dat $2 \times 7 = 14$, $10 \times 7 = 70$ en $5 \times 7 = 35$ (de helft van de vorige) dan kun je via één keer meer en één keer minder al het grootste deel van de tafel eenvoudig bestrijken. En op een gegeven ogenblik gaat dan het snel, handig, verkort rekenen over in 'weten', tenminste indien in de laatste onderwijsfase het inoefenen regelmatig in korte mondelinge lesjes plaatsvindt:

FIGUUR 4

Wim woont dertien kilometer van school en Saskia zeven kilometer. Hoever wonen Wim en Saskia van elkaar?

Men kan bij het leren van de tafels voortdurend gebruik maken van *toepassingsopgaven*, want dat geeft het rekenen houvast en maakt bepaalde eigenschappen inzichtelijk ($12 \times 7 = 10 \times 7 + 2 \times 7$ via de opgave 'hoeveel dagen zitten er in 12 weken', bijvoorbeeld). Maar er zijn ook verrassende toepassingsproblemen die wat later in de leergang geplaatst kunnen worden. Twee voorbeelden ervan staan in figuur 4 en 5.

FIGUUR 5

1. Er worden 26 mensen per auto vervoerd. In iedere auto kunnen er 4. Hoeveel auto's zijn er nodig?
2. Van een touw van 26 meter worden stukken van 4 meter geknipt. Hoeveel stukken kunnen eruit worden gehaald?
3. Er worden 26 bananen eerlijk verdeeld over 4 even grote groepen. Hoeveel bananen krijgt iedere groep?
4. Een wandelroute van 26 kilometer wordt in 4 gelijke etappes afgelegd. Hoe lang is ieder stuk?
5. Een rechthoekig patroon van 26 boompjes heeft 4 boompjes in iedere rij. Hoeveel rijen heeft de rechthoek?
6. Een rechthoekig terras van 26 m^2 heeft een breedte van 4 meter. Hoe lang is het terras?

Het antwoord van de opgave in figuur 4 is variabel: het kan 20 km of 6 km zijn of daar tussenin liggen. De antwoorden van de opgaven in figuur 5 variëren: 7, 6, 6½ en 6,5. Duidelijk blijkt uit deze opgaven dat toepassingen aparte zorg verdienen en dan niet alleen als vervolg op en in samenhang met de tafels, maar onder meer ook met hoofdrekenen.

Hoofdrekenen staat niet voor rekenen uit het hoofd als tegenhanger van rekenen op schrift, maar geldt van oudsher als tegenvoeter van het cijferen. Zo kun je 38 + 25 uit het hoofd berekenen via de stappen 48, 58, 58 + 5 = 63, maar ook cijferend 'onder elkaar'. En dat maakt meer verschil dan wellicht op het eerste gezicht lijkt: in het eerste geval wordt de grootte van de getallen steeds in het oog gehouden, maar in het tweede geval gaat het om een automatische handeling los van de grootte van de getallen, rekenend van rechts naar links. Beide aspecten zijn belangrijk voor het rekenen. Sturen we echter alleen aan op het makkelijke rekenen 'onder elkaar', dan doen we de leerlingen tekort: ze kunnen nu namelijk niet voldoende feeling voor (de grootte van) getallen ontwikkelen. Bij een opgave als 90 × 70 is een en ander nog duidelijker zichtbaar. In dit geval is uitrekenen 'onder elkaar' wel bijzonder onhandig. En hoofdrekenen is nu juist handig rekenen, wat betekent dat daarbij efficiënt gebruik wordt gemaakt van parate kennis, rekenwetten, bijzonderheden van getallen en relaties ertussen. In ons voorbeeld: 9 × 7 = 63, dus 90 × 70 = 6300, twee nullen erachter geplaatst en klaar.

En wat te denken van de opgaven in figuur 6? Indien je kunt hoofdrekenen win je het gegarandeerd van iemand die alleen de zakrekenmachine gebruikt.

FIGUUR 6

Reken de volgende opgaven zo snel mogelijk uit.
Je mag een zakrekenmachine gebruiken.

10 × 67 =	100.000 + 67 =
100 × 67 =	3456 × 0 =
1000 × 67 =	3456 + 0 =
10.000 × 67 =	101 × 67 =
100.000 × 67 =	6700 : 10 =
10 + 67 =	6700 : 100 =
100 + 67 =	6700 : 1.000 =
1000 + 67 =	6700 : 10.000 =
10.000 + 67 =	670 : 10 =

Elf juli 1987 was het de dag van vijf miljard. In de krant lezen we dat 'de wereldbevolking met 150 zielen per minuut toeneemt, dat wil zeggen met 220.000 per dag of 80 miljoen per jaar.' En verder 'voor het jaar 2000 zal de wereldbevolking zes miljard bedragen.' (11-7-'87, NRC Handelsblad, figuur 7)

FIGUUR 7

Bevolking van de aarde komt binnenkort op vijf miljard

Het duurde ruim een eeuw voordat – in 1925 – de wereldbevolking van één op twee miljard kwam. 35 jaar later, in 1960, waren er drie miljard mensen en veertien jaar la-ter, ten tijde van de eerste Wereldbevolkingsconferentie, telde UNFPA de vier miljardste aardbewoner. De vijfmiljardste is binnen dertien jaar bereikt.
UNFPA rekent voor dat nog voor het eind van de eeuw de aarde zes miljard bewoners zal tellen en zeven miljard nog geen elf jaar later, in het jaar 2010. Aan de explosieve groei komt dus voorlopig geen einde. Pas over een eeuw zal de wereldbevolking stabiel blijven rond de tien miljard, wanneer de huidige trend zich voortzet.
Per minuut komen er 150 zielen bij, dat wil zeggen 220.000 per dag of 80 miljoen per jaar; cijfers waarvan niet alleen demografen duizelen. Verantwoordelijk voor de indrukwekkende toename is het sterk verbeterde peil van voeding en gezondheidszorg, wereldwijd.

Op dezelfde dag wordt de elfde etappe van de Tour de France gereden van Poitiers naar Chaumeil. Ook daarover valt een schattingsvraag te stellen (zie figuur 8). Twee hoofdrekenopgaven in figuur 7 en 8 die de leerlingen vlot zouden moeten kunnen controleren respectievelijk oplossen. In ieder geval dienen dergelijke activiteiten met het oog op de algemene leerdoelen gedaan te worden.

FIGUUR 8

Vandaag (11-7-1987) wordt de elfde etappe van de Tour de France gereden van Poitiers naar Chaumeil over een afstand van 250 km. Het parkoers schijnt nogal slingerend te zijn. Onze tv-commentatoren zeggen dat er ongeveer 10.000 bochten zijn. Kan dat?

Schattend rekenen staat tussen blind gissen en exact berekenen, tussen de getalsmatige gok en de numerieke precisie. Vanwege dit manco aan nauwkeurigheid werd het vroeger in het rekenonderwijs inferieur geacht aan het precieze rekenwerk. Ten onrechte, want zowel in het leven van alledag als binnen het vakgebied bekleedt schatten een belangrijke positie:

- schatten moet nogal eens omdat nu eenmaal geen exacte berekening te maken is;
- schatten volstaat soms omdat een benaderde uitkomst goed voldoet aan het gestelde doel;
- schatten valt vaak zoveel gemakkelijker uit te voeren en is daarbij goed te doorzien en te overzien;
- schatten is niet zelden zinvoller dan exact berekenen.

Negatief gesteld: precies rekenen is soms niet mogelijk, voldoet vaak niet, is niet altijd doelmatig uit te voeren en nogal eens minder betekenisvol of correct dan schatten. Schatten is met name zinvol als het gaat om het ruwweg bepalen van de uitkomst, het globaal controleren van de uitkomst qua orde van grootte, en indien met niet exact bepaalde of exact te bepalen gegevens moet worden gewerkt (zie figuur 9).

In het laatste geval hebben we vaak te maken met schattingen die we op grond van onze ervaringen als referentiepunten kunnen gebruiken. Twee voorbeelden van dergelijke opgaven staan in figuur 9 en 10.

FIGUUR 9

Met de fiets ben je in 5 minuten op school.
Hoe lang loop je daar ongeveer over?

FIGUUR 10

Limiet

In het dit jaar verschenen boek dat Heineken-ontvoerder C. van Hout vanuit de Bijlmerbajes liet optekenen door de toenmalige Telegraafverslaggever P. de Vries, staan verder enkele opvallende passages over de hoeveelheid geld die de ontvoerders wilden eisen. Het bedrag van vijftig miljoen gulden dat ze aanvankelijk in het hoofd hadden, bleek bij nadere berekening fysiek te zwaar om te tillen.
Als voorbereiding op de ontvoering zaagde men houten blokjes die even zwaar en groot waren als een bundel van twintig bankbiljetten. Vijf postzakken vol blokjes wogen 400 kilo en waren de limiet van wat nog 'veilig' kon worden vervoerd. Omgerekend kwam dat neer op 35 miljoen, het bedrag dat ook door Heineken is betaald.

(Volkskrant 20-10-1987)

We gaan ervan uit dat het om één soort bankbiljetten gaat. Ga na welke biljetten het zijn:
a. biljetten van tien gulden;
b. biljetten van honderd gulden;
c. biljetten van duizend gulden.

De verschillende aanpakken die kinderen bij de opgave van figuur 9 volgen, weerspiegelen helder de algemene doelstellingen van rekenen-wiskunde:
– ik weet dat ik ongeveer 15 km per uur fiets en ongeveer 5 km per uur loop, dus doe ik er drie keer zo lang over (redeneren op grond van kennis uit de ervaringswereld);
– ik heb een proef genomen: precies 1 minuut gefietst en ben toen teruggelopen en ontdekte ... dus ... (redeneren met verhoudingen op basis van een proefneming plus generalisering ervan);

– ik weet uit ervaring dat ik er lopend drie à vier keer zo lang over doe als met de fiets (ervaringskennis als referentiepunt);
– het is moeilijk te zeggen, het hangt er van af of je een zware tas hebt of dat er veel stoplichten zijn (factoren die bij het maken van een model een rol spelen en waar op een gegeven moment van afgezien moet worden om ze later eventueel weer naar voren te halen – men noemt dit wel het 'verwiskundigen' van het probleem).
Ook in de opgave van figuur 10 zitten dergelijke elementen: het gebruik van een boek of pak papier als referentiepunt en dan eerst verder rekenen met die grotere gehelen om grofweg te kunnen bepalen dat het briefjes van honderd gulden geweest moeten zijn (waarvoor overigens andere redenen genoemd kunnen worden). Ook hier is de relatie met de algemene doelen duidelijk zichtbaar.
Samenvattend kan gesteld worden dat schattend rekenen betrekking heeft op het passend omgaan met ervaringsgegevens, benaderingen, afrondingen, (on-)nauwkeurigheden en schattingen in allerlei alledaagse toepassingssituaties en dat het als zodanig een sleutelrol vervult bij het ontwikkelen van 'feeling' voor getallen. Dit uiteraard op basis van kennis van de tafels en vaardigheid in hoofdrekenen (in het bijzonder rekenen met 'nullen') en in verbinding met (meet-)getallen in de realiteit.

Concrete leerdoelen 'basisvaardigheden'

1. Leerlingen kunnen gevarieerd tellen en terugtellen met eenheden, vijftallen en machten van tien.
2. Leerlingen kennen uit het hoofd
   a. de opteltafels tot tien en de aftrektafels die daarvan zijn afgeleid, en
   b. de tafels van vermenigvuldiging tot tien en de bijbehorende deeltafels.
3. Leerlingen voeren hoofdrekenopgaven vlot uit, waarbij ze de volgende bewerkingen inzichtelijk toepassen:
   a. optellen en aftrekken tot duizend,
   b. vermenigvuldigen en delen als uitbreiding van de tafels,
   c. vermenigvuldigen en delen met ronde grote getallen, en
   d. splitsen, aanvullen en vereenvoudigen.

4. Leerlingen kunnen schattend rekenen door
   a. de uitkomst van een berekening globaal te bepalen en op juistheid te controleren, en
   b. tel- en meetgegevens in verschillende graden van nauwkeurigheid te gebruiken.
5. Leerlingen kunnen de basisvaardigheden uit de leden 1 tot en met 5, zowel afzonderlijk als gecombineerd, in toepassingssituaties gebruiken.
6. Leerlingen kunnen de rekenmachine met inzicht gebruiken.
7. Leerlingen kunnen getallen schrijven als produkten van factoren.
8. Leerlingen hebben inzicht in het positiesysteem waarop de decimale schrijfwijze van de getallen berust.
9. Leerlingen zijn in staat op grond van een beschreven of figuraal gepresenteerde situatie zelf reken-wiskundeproblemen te formuleren en oplossingsmethoden met elkaar en de leerkracht te bespreken.

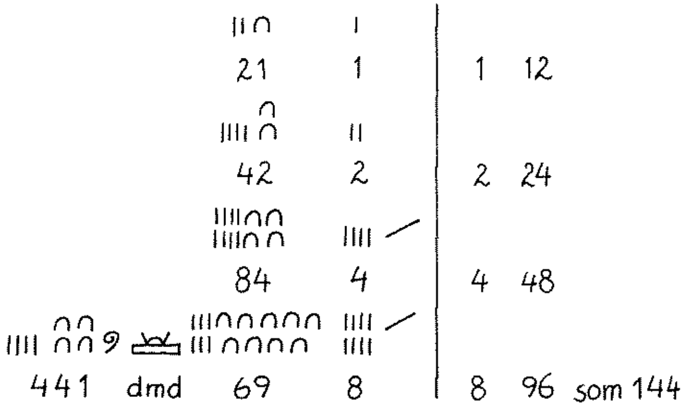
2.2 Concrete leerdoelen cijferen

Cijferen is kort gezegd rekenen-op-schrift dat voor iedere basisbewerking op één bepaalde manier gebeurt, namelijk volgens de standaardmethode van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en (staart-)delen 'onder elkaar'. Meestal cijferen we als het om wat grotere getallen gaat waarmee niet eenvoudig uit het hoofd kan worden gerekend.

Dat cijferende rekenen gebeurt bij iedere bewerking op een nauwkeurig voorgeschreven wijze die we op den duur automatisch volgens voorschrift uitvoeren. En soms weten we niet meer waarom precies die bepaalde rekenhandelingen uitgevoerd moeten worden. Wellicht is ook nooit uitgelegd hoe bijvoorbeeld de staartdeling in elkaar zit. In dat geval moeten er heel wat deelvoorschriften worden onthouden, namelijk hoe er gehandeld moet worden als een deling niet opgaat, als er een nul moet worden aangehaald en zo meer. Om op een dergelijke 'blinde' manier als een automaat te moeten leren rekenen, zijn in het geval van de staartdeling vaak meer dan vijftig lesuren nodig.

Deze leergangen van het cijferen, die niet-inzichtelijk zijn opgezet, starten met eenvoudige 'kale' rekenopgaven en vervolgen met een serie sommen die volgens opklimmende moeilijkheid zijn geordend. De mate van complexiteit wordt bepaald door de grootte van de getallen, de benodigde inwisselhandelingen en het aantal nullen. Steeds leren de kinderen per deelgeval de standaardmethode uit te voeren waarop ze dan in een volgend complexer geval kunnen voortbouwen. Een stap-voor-stapleergang op niet-inzichtelijke grondslag en gemarkeerd door honderden, ja zelfs duizenden sommetjes. Deze onderwijsaanpak nu is niet in overeenstemming met de algemene leerdoelen welke een dergelijke langdurige, regelgeleide training-volgens-voorschrift uitsluiten, omdat deze een volstrekt vertekend beeld van rekenen-wiskunde geeft en de vorming van een wiskundige instelling en een goed aanpakgedrag belemmeren. Dergelijke dril is overigens ook niet nodig om de cijferprocedures automatisch te leren uitvoeren. Cijferen is namelijk zeer goed inzichtelijk te leren... Dan moeten we echter niet van de meest verkorte standaardvormen uitgaan maar vanuit de wat 'langere' rekenwijzen starten die daarvan de voorstadia vormen; speciaal voor vermenigvuldigen en delen is dit van belang. Een korte kijk in de historie leert ons hoe dat kan. Op de ongeveer vierduizend jaar oude papyrus Rhind uit Egypte staat 12 × 12 als volgt uitgewerkt (figuur 11).

FIGUUR 11



Egyptische vermenigvuldiging (12 × 12) door middel van de verdubbelingsmethode

De figuur geeft links de hiëroglyfen (te lezen van rechts naar links) en rechts staat de uitwerking in moderne cijfersymbolen. In de kern komt deze vorm van Egyptisch vermenigvuldigen neer op het herhaald verdubbelen van een getal en vervolgens het samennemen van de passende veelvouden. Daarnaast wordt echter dikwijls met tien vermenigvuldigd. Ook bij het delen zijn tien keer en verdubbelen de rekenscharnierpunten van het cijferen. In de papyrus Kahun staat voor de deling 1120 : 80 de volgende aanwijzing: 'Tel op, te beginnen met 80, tot je 1120 krijgt.' De berekening ziet er als volgt uit:

1	80
10 /	800 /
2	160
4 /	320 /
som 14	1120

Delen is hier op-vermenigvuldigen: tien keer plus vier keer. Onze staartdeling werkt van boven naar beneden en is dus geen op- maar af-vermenigvuldigen of, indien men het stap voor stap doet, herhaald aftrekken. Uit het voorgaande kunnen we leren dat:

1. cijferalgoritmen voor één bewerking kunnen verschillen, hetgeen uit de historie blijkt;
2. binnen één algoritme verschillende vormen van verkorting mogelijk zijn;
3. zo'n algoritme op te vatten is als een 'gestolde' vorm van handig rekenen,
4. die als zodanig inzichtelijk blijkt te zijn.

Wij sturen echter, terecht, in het onderwijs voor iedere bewerking op één werkwijze aan, namelijk de bij ons gangbare standaardprocedure. Dus wat dit aangaat volgen we de veelvormige historische ontwikkeling niet. Maar wat inzichtelijkheid, handig rekenen en verkorten betreft, kan de les van de historie naar het onderwijs worden doorgetrokken.

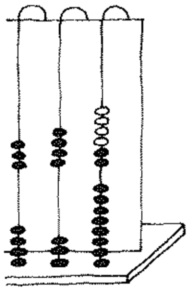
Dit houdt voor strikt cijferend *optellen* en *aftrekken* (de eerste methode) in dat de kinderen reeds in een vroeg stadium met relatief grote getallen werken. Alleen voltrekken de berekeningen zich op een aangepast niveau. Aanvankelijk wordt positiemateriaal, bijvoorbeeld de abacus, gebruikt. Daarna doet een positieschema dienst om eerst nog een tussenstap te kunnen noteren. En ten slotte wordt de standaardmethode met direct inwisselen geleerd, de meest verkorte werkwijze dus (figuur 12.1).

Er is echter nog een tweede methode om de opgaven uit figuur 12 op te lossen, namelijk via (kolomsgewijs) hoofdrekenen. Voor optellen gaat dat als volgt: (figuur 12.2).

Voor het aftrekken kan een dergelijke methode ook worden gevolgd indien we de leerlingen laten noteren hoeveel er te kort is: (figuur 12.3).

De werkwijzen (a) en (b) zijn heel natuurlijk, de kinderen vinden ze vaak zelf. Op de tussennotatiewijze $25\underline{2}$ (waar $\underline{2}$ duidt op 2 te kort!) van (c) kunnen we desgewenst op den duur aansturen. Ziehier hoe gestileerd hoofdrekenen tot een vorm van cijferen kan

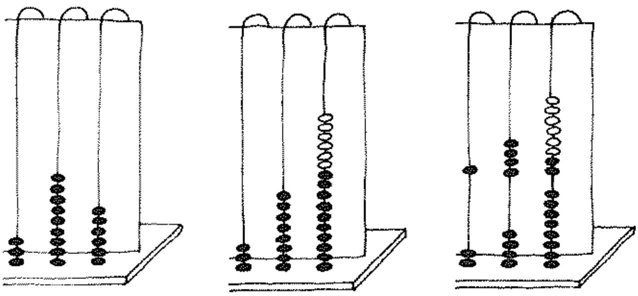
FIGUUR 12



4	3	8	
3	4	6	+
7	7	14	
7	8	4	

$$\begin{array}{r} 438 \\ 346 + \\ \hline 784 \end{array}$$

1. 2. 3.



3 9 6   3 8 16   2 4 8

3	9	6	
1	4	8	−

→

3	8	16	
1	4	8	−
2	4	8	

$$\begin{array}{r} 396 \\ 148 - \\ \hline 248 \end{array}$$

FIGUUR 12.1

$$\begin{array}{r} 438 \\ 346 + \\ \hline 14 \\ 70 \\ 700 + \\ \hline 784 \end{array} \quad \text{of} \quad \begin{array}{r} 438 \\ 346 + \\ \hline 700 \\ 70 \\ 14 + \\ \hline 784 \end{array}$$

FIGUUR 12.2

396 148 − of 200 +50 − 2 + 248	396 148 − of 200 + 50 − 2 = 248	396 148 − 252 248
(a.)	(b.)	(c.)

FIGUURG 12.3

voeren. Overigens zijn er andere hoofdrekenmanieren om 396 − 148 uit te rekenen, bijvoorbeeld via aanvullend op-tellen (doortellen) of af-tellen, maar het gaat ons hier om cijferachtige werkwijzen, vandaar dat we ons beperken tot het kolomsgewijze rekenen.

In de karakterisering van het cijferende optellen en aftrekken, ontbreekt nog één element en dat zijn de toepassingen. Deze kunnen namelijk:

1. beide cijfermethoden inzichtelijk maken, denk aan het geldrekenen;
2. houvast bieden bij het verkorten;
3. de toepasbaarheid van de cijfermethoden helpen bevorderen.

Toepassingsproblemen functioneren dus vanaf het begin van de leergang. Later duiken ook lastiger vraagstukken op, zoals die van figuur 13, waar verschil niet alleen naar aftrekken, maar ook naar optellen leidt.

FIGUUR 13

De Mont Blanc is de hoogste berg van de Alpen. Hij is 4810 meter hoog. De Maladeta in de Pyreneeën is 3404 meter hoog. Hoe groot is het verschil tussen de Mont Blanc en de Maladeta?

De Mount Everest in de Himalaya is 8848 meter hoog.
De Dode Zee in Israël ligt 392 meter onder het zee-oppervlak.
Hoe groot is het hoogteverschil tussen de Mount Everest en de Dode Zee?

Het *vermenigvuldigen* 'onder elkaar' kan zich ook in fasen voltrekken.

FIGUUR 14

62 x 45 =

(60 x)
10 x 45 = 450
10 x 45 = 450
10 x 45 = 450
10 x 45 = 450
10 x 45 = 450
10 x 45 = 450
2700

(2 x)
1 x 45 = 45
1 x 45 = 45
90

2700
90
2790

figuur 14.1

45
60 x
2700

45
2 x
90

2700
90 +
2790

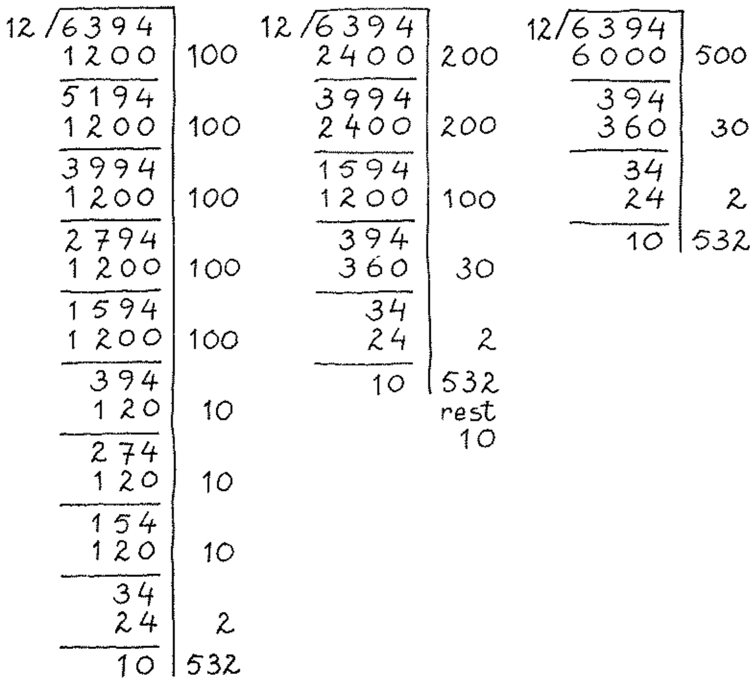
figuur 14.2

45
62 x
2700
90 +
2790

figuur 14.3

Eerst wordt de vermenigvuldiging als lange herhaalde optelling 'gedacht' (zie figuur 14.1). Daarin splitsen de kinderen happen van tien af, want daarmee kunnen ze handig rekenen met nullen. Later worden die happen direct samengenomen (figuur 14.2). Ze zijn dan al dicht bij de standaardmethode van 14.3. Zo kan het, maar het kan ook anders (bijvoorbeeld met rechthoeken, kruispunten en dergelijke). Hoe dan ook, steeds worden gedurende de leergang opgaven gegeven als 6 × 45 = ... en 6 × 457 = ... om het direct uitvoeren met inwisselen te oefenen. Maar in principe zou dit niet eens noodzakelijk zijn, want ook met tien keer en (herhaald) verdubbelen kan ieder produkt worden uitgerekend, zo zagen we zojuist bij het Egyptische vermenigvuldigen op de papyrus Rhind. Ook het *staartdelen* kan op een dergelijke geleidelijke manier worden geleerd. Eerst is de staart heel lang, figuur 15.1. Maar door steeds handiger rekenen wordt hij verder gecoupeerd, zoals in 15.2 het geval is, of tot de standaardvorm van 15.3 (die enigszins verschilt van de vroegere standaardvorm). De drie berekeningen van figuur 15 zijn van drie leerlingen uit één groep die op dat moment 15 lesuren aan dat onderwerp hebben besteed.

FIGUUR 15



figuur 15.1 figuur 15.2 figuur 15.3

Zowel bij vermenigvuldigen als delen fungeren *toepassingen* op dezelfde wijze als bij optellen en aftrekken; ze bieden houvast bij het verkorten, geven steun door bij 'kale' opgaven iets 'aangekleeds' te denken en verbinden cijferen met het maken van toepassingen. Twee voorbeelden van toepassingen staan in figuur 16. Een delingsvraagstuk geeft vaak specifieke moeilijkheden omdat het antwoord opnieuw geïnterpreteerd moet worden.

FIGUUR 16

De prijs van een bioscoopkaartje is *f* 8,–. Op een avond worden er 327 kaartjes verkocht. Hoeveel geld wordt er die avond ontvangen?

Kees verdient met het rondbrengen van folders *f* 7,50 per keer. Na hoeveel keer kan hij zijn fel begeerde draagbare televisie van *f* 299,– kopen?

Ook dienen de cijferalgoritmen in verbinding met de *zakrekenmachine* te worden beschouwd. Twee belangrijke onderzoeksvragen die voor vermenigvuldigen en delen kunnen worden gesteld, staan in figuur 17. Beide geven aanleiding de structuur van deze twee rekenwijzen diepgaand te beschouwen in samenhang met het positiesysteem. Lastig!

FIGUUR 17

1. Bereken de precieze uitkomst van 58766 × 77803 met behulp van een zakrekenmachine (waarin 8 cijfers in het venster kunnen).
2. Bereken de rest van de deling 616239 : 714 met behulp van een zakrekenmachine.

Rekenen met de zakrekenmachine

Deze onderzoeksactiviteiten plus de voorgaande over het aanleren van de verschillende cijfervormen passen in het kader van de algemene leerdoelen. Dit geeft mede aan dat ze meer en andere doelen beogen dan het traditionele cijferen.

Concrete leerdoelen 'cijferen'

1. Leerlingen voeren volgens standaardprocedures, of varianten daarvan, de volgende bewerkingen uit:
   a. optellen en aftrekken, en
   b. vermenigvuldigen en delen.
2. Leerlingen kunnen de in lid 1 genoemde cijferoperaties, zowel afzonderlijk als gecombineerd, in toepassingssituaties gebruiken.
3. Leerlingen kunnen een rekenmachine gebruiken voor het uitvoeren van een cijferopgave, en de uitkomst in verband brengen met het oorspronkelijke probleem.
4. Leerlingen hebben inzicht in de structuur van de cijferalgoritmen.

2.3 Concrete leerdoelen verhoudingen en procenten

Verhoudingen is een belangwekkend onderwerp: het is nauw te verbinden met de realiteit, aansprekend voor kinderen en zowel reken-wiskundig als maatschappelijk relevant. Toch werd er in het vroegere rekenonderwijs maar zeer beperkt aandacht aan besteeds — procenten uitgezonderd, waarover later meer.

Eerst geven we een kleine historische schets en beschrijven daarna hoe er in de nieuwste programma's tegen verhoudingen wordt aangekeken.

In het eerst bekende Nederlandse rekenboek, de Cijfferinghe van Willem Bartjens, worden de aangeboden verhoudingsvraagstukken met de zogenoemde 'regel van drie' opgelost. Deze schrijft precies voor hoe een vraagstuk als 'vier ellen linnen kosten negen gulden, hoeveel kosten zestien ellen?' moet worden opgelost. Namelijk via vermenigvuldiging van het te meten getal met het gegeven getal van de andere grootheid (16 × 9 dus) gedeeld door het andere gegeven getal (144 : 4). Rekenen volgens vast voorschrift, ook al kan het in dit geval veel handiger. Uit dit aloude rekenonderwijs sprak, zo blijkt, weinig didactisch besef.

Met de komst van de leerboeken van Versluys tegen het eind van de negentiende eeuw veranderde dit echter. Voor de oplossing van het linnenvraagstuk hield dit in dat de leerling de aanwijzing kreeg om eerst de prijs van één el stof te berekenen en daarna die van zestien. Ook een vast oplossingsschema en ook in dit geval niet de gemakkelijkste werkwijze, maar een toch wat inzichtelijker aanpak dan volgens de blinde regel van drie. Maar tevens een louter getalsmatige werkwijze waar geen visualisering aan te pas kwam. En zeker niet in de methode van Bouman en Van Zelm die in de eerste helft van de twintigste eeuw opgang maakte.

Die aanschouwelijkheid werd in de denkpsychologisch georiënteerde didactiek juist wel gepropageerd. Maar, zoals eerder opgemerkt, kregen deze opvattingen geen aanhang in de gangbare methoden uit de jaren vijftig en zestig.

Onderwijl verschraalde de leerstof van verhoudingen steeds verder. Zelfs het dunne linnen werd er af gehaald, getuige de volgende introductie uit omstreeks 1960: 'Wim heeft 10 cent en Joop heeft 5 cent. We kunnen ook zeggen: Wim heeft twee stuivers en Joop heeft één stuiver. Wim heeft tweemaal zoveel als Joop. We zeggen nu dat hun bezittingen zich verhouden als 2 staat tot 1. Dat schrijven we zo: 2 : 1. Deze getallen noemen we verhoudingsgetallen. Lees nu eerst deze regel: 10 cent en 5 cent verhouden zich als 2 : 1.'

Vervolgens worden dergelijke sommen geoefend. Later volgen evenredigheidsopgaven van het type:

– Twee getallen verhouden zich als 3 : 4, het kleinste getal is 30, wat is het andere getal?

– Twee getallen verhouden zich als 3 : 4, hun som is 70, bereken deze getallen.

Dat is, of beter was, de basisstof. De zin ervan? In ieder geval is de relatie van dit formele zinledige rekenen met de eerder geformuleerde algemene leerdoelen niet te leggen, zeker niet in eerste instantie, dus bij het aanleren van wat verhoudingen eigenlijk zijn in rekenen-wiskunde.

Wat zijn verhoudingen eigenlijk in rekenen-wiskunde? Wat kan de plaats van dit onderwerp in het onderwijs zijn? Hoe kunnen verhoudingen in zowel algemene leerdoelen als in zinvolle concrete leerdoelen worden neergelegd?

Allereerst zijn verhoudingen er om situaties te vergelijken. Dit vergelijken met alle consequenties van dien – ordenen, verschil bepalen, correcties aanbrengen, maar ook precies berekenen – zal dus een belangrijke plaats in de leergang moeten krijgen. Om te beginnen biedt de kijkwereld veel mooie aangrijpingspunten om verhoudingen te beschouwen: vergroten, verkleinen, verhoudingsgetrouwe afbeeldingen in tekeningen, modellen en kaarten op schaal. In eerste instantie kan het daarbij om louter visuele vergelijkingen gaan waaraan geen getal te pas hoeft te komen (figuur 18).

Men hoeft niet na te rekenen of dit wel klopt, dat kan niet eens, doch alleen maar goed te kijken om te kunnen beslissen of de verhouding tussen enerzijds de verkleinde Alice en de hond en anderzijds de gewone Alice en het karrepaard klopt.

Daarnaast kunnen dergelijke situaties waarin de verhoudingen in één opzicht duidelijk verstoord zijn ook aanleiding tot allerlei getalsmatige bewerkingen geven. Bijvoorbeeld bij vragen als: wat is de vergrotingsfactor, wat is naar verhouding groter, hoe groot is de vierde evenredige?

FIGUUR 18

Dit is een plaatje uit 'Alice in Wonderland'. Alice wisselt in dit boek steeds van grootte.
a. Schat de lengte van Alice in dit plaatje met de hond.
Alice was zo klein in verhouding tot het hondje dat het er veel op leek of ze een spelletje deed met een karrepaard en ze was ieder ogenblik bang onder zijn poten vertrapt te worden.
b. Klopt die vergelijking met mens en karrepaard?

Contexten te over: naast Alice staan Gulliver, Erik, Niels en... Madurodam natuurlijk. Ook in de 'echte' realiteit doet vergroten zich voor en stellen zich dergelijke problemen, bijvoorbeeld bij het kopiëren, projecteren, fotograferen, modelbouwen, tekenen. Daarbij komt het schaalbegrip met de standaardaanduiding ('1 : 10.000') pas aan het einde van deze visuele leergang. Vergelijken op het oog, hanteren van de schaallijn ('dit stukje – – – – is in werkelijkheid 10 km') en verschillende andere informele beschrijvingen van vergrotingsfactoren en schalen zouden aan dit schaalbegrip ten grondslag moeten worden gelegd. Trouwens ook het schattend rekenen vindt bij verhoudingen in de waarnemingswerkelijkheid een rijke bron van toepassingsmogelijkheden.
Een tweede belangrijke bron is die van het eerlijk verdelen, (eerlijk mengen, eerlijk inwisselen, eerlijk omzetten). Via het eerlijk verdelen in verschillende situaties worden namelijk klassen van gelijkwaardige verhoudingen voortgebracht. Deze kunnen vervolgens vergeleken worden. Ook kan één eerlijke verdelingssituatie op zich aanleiding tot verhoudingsrekenen geven. Met name de

verhoudingstabel is daarbij vaak een belangrijk hulpmiddel. Een voorbeeld: waar krijgt men meer, aan het tafeltje waar twee pizza's worden verdeeld over drie personen, of waar vijf pizza's zijn voor zeven personen? Een ander voorbeeld: noem eens een aantal tafelschikkingen waar men evenveel krijgt als bij de tafels met twee pizza's voor drie personen? Het lijken breukensommen, op het eerste gezicht, maar men kan ze eenvoudig met gelijkwaardige verhoudingen i.c. met behulp van de verhoudingstabel oplossen. Allereerst de gelijkwaardige tafelschikkingen van respectievelijk 'twee voor drie' en 'vijf voor zeven' (twee pizza's voor drie personen is gelijkwaardig met vier pizza's voor zes personen, enzovoort).

2	4	6	8	10	12	14
3	6	9	12	15	18	21

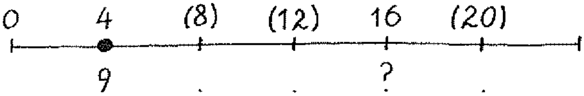
5	10	15
7	14	21

Vergelijking leert dat 'vijf voor zeven' gunstiger is: vijftien in plaats van veertien pizza's voor 21 personen. Binnen dergelijke tabellen kunnen de leerlingen op den duur heel handig leren rekenen. Laten we weer even het probleem van Bartjens nemen: 4 el kost 9 gulden, hoeveel kost 16 el?

4	16
9	?

Men kan van vier naar zestien toerekenen, bijvoorbeeld via herhaald verdubbelen of door negen met de factor vier te vermenigvuldigen. Het is ook mogelijk, maar in dit geval wat moeilijker, om van vier naar negen toe te werken en dan de zestien met een factor $2\frac{1}{4}$ vermenigvuldigen. Terugwerken naar één kan evenzeer, maar is onhandig. Denkend aan de tafelschikking als model, kunnen vier tafeltjes van 'vier voor negen' bij elkaar worden geschoven. Kortom, de verhoudingstabel laat inzichtelijk en flexibel rekenen met verhoudingen toe en verschilt als zodanig van Bartjens' strakke voorschrift van de regel van drie, of van het naar één toerekenen als vaste procedure bij Versluys.
Maar, zo kan men opmerken, het visuele element ontbreekt er aan. Dat is juist. Het is dan ook verstandig die verhoudingstabel

te laten voorafgaan door de tweezijdige getallenlijn – dus uit de eerste bron te putten – die er zo uitziet:



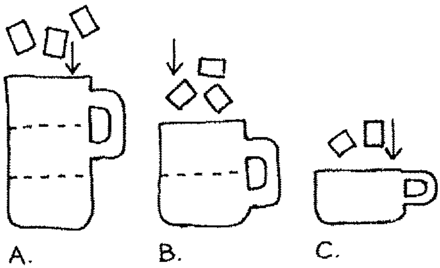
De tafels zijn als het ware tegen elkaar geschoven. In dit schema staan de getallen als meetgetallen in verhouding boven en onder de lijn: vier stappen van vier boven corresponderen met vier stappen van negen beneden. Of men kan symboliseringen gebruiken als $\frac{4}{9}$ die verwijzen naar vier pizza's op tafel waaromheen negen personen zitten, dus $\frac{4}{9}$ te lezen als 'vier voor negen' en dat in algemene zin gebruiken.

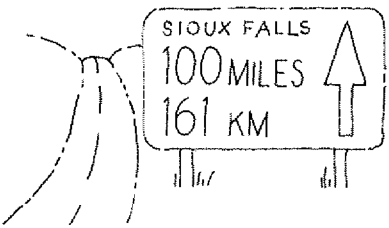
$$\frac{4}{9} = \frac{8}{18} = \frac{12}{27} = \ldots$$

Tot zover het rekenen met verhoudingen (en klassen ervan). In figuur 19 staan van het mengen en inwisselen, die ook onder deze tweede categorie vallen, twee voorbeeldopgaven uit de vele mogelijkheden die er zijn.

FIGUUR 19

In welk kopje zal de thee het zoetst worden?





In de USA.
De maximumsnelheid is 60 mijl/uur.
Hoeveel is dat in km/uur?

Als derde bron voor verhoudingen fungeren aan elkaar gebonden grootheden als prijs-gewicht, aantal-prijs, weg-tijd, afstand-benzinegebruik. Uiteraard kan de verhoudingstabel ook hier doelmatig worden ingezet, zowel bij het nauwkeurig berekenen als bij het schatten. Dat laatste doet zich voor in de problemen van figuur 20.

FIGUUR 20

Karel rijdt van Amsterdam naar Parijs.
De afstand is 506 kilometer. Hij wil op zijn hoogst 6 uur over de rit doen.
Na 4 uur heeft hij 325 km gereden.
Moet hij de rest van de rit sneller gaan rijden of kan hij het rustiger aan gaan doen?

Twee familieleden kibbelen over welke woonplaats het grootst is: Bennekom of Doesburg. Ze besluiten er het telefoonboek bij te halen.
De plaats Doesburg heeft 12 pagina's in het telefoonboek.
Bennekom heeft 17 pagina's in het telefoonboek.
Welke plaats zou het grootst zijn?
Wat valt er van het inwonertal van Bennekom te zeggen als je weet dat Doesburg 12.000 inwoners heeft?

Voor het aanbrengen van begrip van procenten en het rekenen met procenten is de verhoudingstabel evenzeer van grote betekenis. Neem bijvoorbeeld de volgende opgave:

> In een advertentie staat dat de prijs van een fiets nu 60 procent is van de oorspronkelijke prijs. Je kunt hem nu voor *f* 136,– kopen. Hoeveel kostte de fiets oorspronkelijk?

Deze opgave werd in de V.S. door twee procent (!) van de leerlingen goed opgelost. Indien men hem echter met de verhoudingstabel maakt, moet toch een (veel) betere score mogelijk zijn:

60	100
136	?

Men kan terugrekenen naar tien of twintig procent en dan overspringen naar honderd of via allerlei varianten daarvan. We be-

perken ons hier tot twee aanvullende opmerkingen die speciaal op procenten van toepassing zijn.
Ten eerste stelden we al eerder dat procenten slechts tot betrekkelijk eenvoudige toepassingsproblemen beperkt blijven. In figuur 21 staan daarvan enkele voorbeelden.

FIGUUR 21

	gecontroleerd	gebreken
Esweg	200	32
Damstraat	500	90
Kleinweg	350	70

Bij welke controleplaats was het percentage auto's met gebreken het grootst?

Welk gezin moet naar verhouding de grootste huurverhoging betalen?

gezin	oude huur	huurverhoging	nieuwe huur
A	*f* 450,–	5%	*f* 472,50
B	*f* 500,–	4%	*f* 520,–
C	*f* 300,–	8%	*f* 324,–
D	*f* 625,–	4%	*f* 650,–

De huurprijs van een kamer gaat 7% omhoog. Kas de Blauw betaalde per maand *f* 210,– aan kamerhuur.
Wat wordt het nieuwe maandbedrag?

2 op de 5 kinderen hadden een onvoldoende voor het proefwerk. Hoeveel procent is dat?

Ten tweede is het mede in verband met het gebruik van de zakrekenmachine van belang dat (groei-)percentages als een factor van vermenigvuldiging worden opgevat. Dus dat bijvoorbeeld een groei van 7% berekend wordt via een vermenigvuldiging met 1,07. Natuurlijk kan men eerst 7% nemen en dan de uitkomst optellen bij het oorspronkelijke bedrag en dat steeds herhalen, maar dat is met name bij samengestelde interest buitengewoon omslachtig, zelfs indien de zakrekenmachine wordt gebruikt. Concreet betekent dit voor de opgave van figuur 22 dat er tien keer achter elkaar met 1,07 moet worden vermenigvuldigd; het eindbedrag is dan ongeveer het dubbele van *f* 400,–.

FIGUUR 22

Een bank geeft 7% rente per jaar. Je zet 400 gulden op de bank.
Hoeveel is het totale bedrag na 1 jaar?
Hoeveel is het totale bedrag na 10 jaar?
Gebruik de zakrekenmachine.

Dergelijke eenvoudige samengestelde interestvraagstukken die praktisch van groot belang zijn (ook voor andere groeiprocessen) komen dus nu via de zakrekenmachine weer binnen bereik. Vervolgens wijzen we nog op de hechte band van verhoudingen en procenten met breuken en kommagetallen. Een opgave als die van figuur 23 is zowel met verhoudingen, procenten, breuken als kommagetallen op te lossen. Afgezien van welke berekening dan ook, kan worden beredeneerd dat de getrokken conclusie niet juist is (1 van de 3 is bijvoorbeeld minder dan 98 van de 100, dus bij gelijk verschil (van twee) neemt het percentage toe als de getallen groter worden. In het voorbeeld is het verschil ook twee, dus...). Rekenen en redeneren, schatten en zien, staan in evenwicht bij dit onderwerp.

FIGUUR 23

In de Volkskrant van 1 juni 1987 stond:
'Met twee doelpunten bracht Willaarts zijn totaal op 24 in 26 wedstrijden, hetgeen gemiddeld beter is dan Ajacied Van Basten.
Van Basten scoorde 31 doelpunten in 33 wedstrijden.'
Heeft Willaarts inderdaad het beste gemiddelde, zoals de Volkskrant beweert?

Afgezien van de rekentechnische verbinding met de genoemde gebieden vormen tenslotte verhoudingen een hechte band met de verschillende reken-wiskundegebieden onderling en tussen die terreinen en de realiteit. Voorts vindt dat onderwerp z'n vervolg in het voortgezette onderwijs, bij vakken als natuurkunde, scheikunde, biologie en aardrijkskunde.

Concrete leerdoelen 'verhoudingen' en 'procenten'

1. Leerlingen kunnen verhoudingsproblemen oplossen die optreden bij:
   a. vergroten en verkleinen,
   b. afbeelden op schaal,
   c. gelijkwaardig verdelen,
   d. mengen,
   e. inwisselen,
   f. relaties tussen de grootheden: gewicht en prijs, aantal en prijs, afstand en tijd, en
   g. verdelingsdichtheden
2. Leerlingen zijn in staat verhoudingen te vergelijken, gelijkwaardige verhoudingen te bepalen en een ontbrekend verhoudingsgetal te berekenen, met ondersteuning van modellen en tabellen.
3. Leerlingen kunnen verhoudingsproblemen schattend oplossen en de gevonden antwoorden controleren.
4. Leerlingen hebben begrip van 'procent' als gestandaardiseerde verhoudingsmaat van 'één op honderd' en als groeifactor.
5. Leerlingen kunnen aan de hand van alledaagse situaties praktische procentberekeningen maken, in het bijzonder met geld.
6. Leerlingen begrijpen het verband tussen verhoudingen, breuken en decimale breuken.

2.4 Concrete leerdoelen breuken en kommagetallen

Onderwijs in breuken en decimale breuken kent van oudsher twee obstakels, namelijk:

1. het aanleren van de regels voor de vier bewerkingen;
2. de toepassingen.

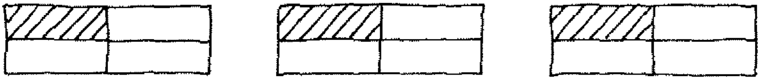
Historisch bezien zijn breuken allereerst verbonden met het eerlijk verdelen. In de bijna vierduizend jaar oude Egyptische papyrus Rhind staat: 'acht broden verdelen onder tien mannen.' Als oudste systeem werd het herhaald halveren genomen. De decimale breuken werden geconstrueerd om eenheid in het rekenen met maten, gewichten en prijzen te scheppen, die daartoe tiendelig werden verfijnd.

In het breukenonderwijs kon men tot voor kort deze concrete herkomst van de breuken, via eerlijk verdelen en meten, nauwelijks terugvinden. De gangbare onderwijsaanpak was als volgt: men startte met het verdelen en opdelen van pannekoeken en vervolgde na deze korte concrete instap met het maken van 'kale' sommen. Het opereren daarmee gebeurde volgens vaste regels die door dril en praktijk (sommenmakerij) werden ingeprent. Eén en ander leidde tot klassieke fouten als $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ en $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, waarbij de regels door elkaar werden gehaald.

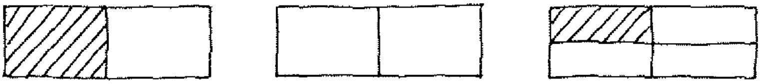
Bij kommagetallen was het al niet anders. Na de definiëring $\frac{1}{10} = 0{,}1$ en $\frac{1}{100} = 0{,}01$ werd aan het rekenen geslagen. Dit leidde tot fouten als $0{,}5 \times 0{,}25 = 1{,}25$.

Het breukenonderwijs zou erop gericht moeten zijn dat de leerlingen dergelijke fouten zelf kunnen weerleggen op basis van steekhoudende argumenten. Bijvoorbeeld $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ kan niet goed zijn want $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ is meer dan $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{6}$ is minder dan $\frac{1}{2}$ (omdat $\frac{3}{6}$ pas een half is). Of weerlegging via $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

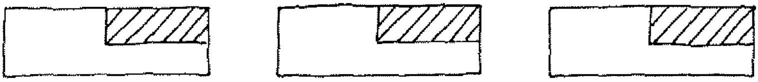
Welnu, om dit te kunnen bereiken, zal met het breukenonderwijs aansluiting gezocht worden bij de 'werkelijke' bronnen van herkomst waaruit het breukbegrip kan worden ontwikkeld. We noemden ze reeds: eerlijk verdelen en meten. Dit betekent dat via de activiteiten van breken, eerlijk verdelen, naar grootte vergelijken, meten, vergroten en verkleinen breuken ontstaan. Nemen we als voorbeeld het eerlijk verdelen. Dit gebeurt mooi volgens model: de eenheden zijn gelijkwaardig, de porties gelijk en er is geen rest. Om eenzijdigheid te vermijden en een natuurlijke werkwijze te stimuleren, worden daarbij meerdere eenheden tegelijkertijd verdeeld. Bijvoorbeeld: '3 repen eerlijk verdelen onder 4 kinderen' – dat kan als volgt, of beter, gaat bij kinderen zo:



Ieder krijgt $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.



Ieder krijgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

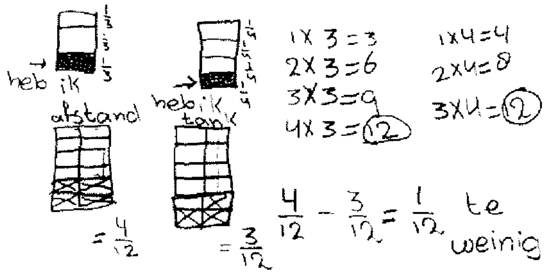


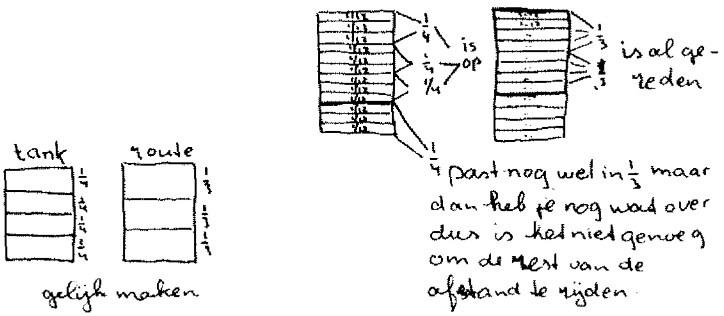
Ieder krijgt $1 - \frac{1}{4}$.

Op deze manier doen breuken zich in allerlei samenhangen en verbanden voor. Dit houdt in dat er vanaf het begin op basis van inzicht in de concrete probleemsituatie kan worden gehandeld. Dit gebeurt echter informeel en aanvankelijk nog niet regelgeleid of routinematig en dikwijls nog niet direct volgens de meest verkorte notatie- en rekenwijze. Een voorbeeld daarvan vinden we in de oplossingen van de opgave in figuur 24.

FIGUUR 24

Iemand vertrekt met volle tank voor een lange autorit. Wanneer hij ongeveer twee derde van de afstand heeft gedaan, is de tank nog voor een kwart gevuld.
Redt hij het nog met de benzine die hij heeft of zal hij onderweg moeten bijtanken? Waarom?





Hieruit blijkt dat het verwerven van het breukbegrip, de ontwikkeling van passende taalmiddelen en het informeel opereren ten nauwste samenhangen. Wat de breukentaal betreft, kan worden aangesloten bij de taal van het herhaald halveren (de helft – een half, een kwart, de helft van een kwart), een taal die veel kinderen min of meer spontaan gebruiken.

Dergelijke eenvoudige breuken, behorende bij het herhaald halveren, kunnen bij het schatten als goede referentiepunten fungeren:
– twaalf kinderen verdelen zeven repen, krijgt ieder meer of minder dan een hele reep of een halve reep?
– vier kinderen verdelen drie pizza's en acht kinderen vijf pizza's. In welk groepje krijgt een kind meer? Verschil?
Op deze wijze kan ook een hechte verbinding met verhoudingen worden gelegd; we wezen daar al eerder op. Het meetaspect kan onder meer ook met het eerlijk verdelen worden verbonden. Met name de bewerkingen met breuken kunnen via bemiddeling van meten op een verrassende wijze (verder) worden onderbouwd met inzicht. Bijvoorbeeld: je krijgt via verdelen $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ pizza (reep). Eén pizza (reep) kost zes gulden. Wat kost je portie? Berekening leert vlug dat dit $3 + 2 = 5$ gulden is, evenveel als $\frac{5}{6}$ pizza (reep).

Behalve prijzen, gewichten, grootten, en dergelijke, kunnen ook modellen en schema's helpen bij het breukrekenen.
Eerder noemden we de verhoudingstabel al om gelijkwaardigheden op te sporen.
Maar ook de getallenlijn en het rechthoeksmodel spelen een kernrol.
Om een indruk van enkele toepassingsmogelijkheden te geven, hebben we in figuur 25 wat opgaven bij elkaar gezet.

Samengevat: het formele rekenen met breuken behoort slechts in afgeleide zin tot het domein van rekenen-wiskunde op de basisschool, afgeleid namelijk voor zover het voortspruit uit het reële breukrekenen dat wel uitdrukkelijk tot het basisgebied gerekend wordt.
Concrete toegangen tot breuken liggen zoals gezegd bij verdelen en meten.
Het rekenen met grootheden kan vervolgens bemiddelen tussen het reële en het formele breukrekenen.
Voor opgaven als $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, en $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ bijvoorbeeld kan de prijs (zeg zes gulden) of kunnen het aantal stukjes (zes) als bemiddelende grootheid fungeren. Zo voert $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ dan via $3 + 2 = 5$ gulden naar $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ via $3 - 2 = 1$ gulden naar $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ via $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ gulden naar $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ via $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$.
Kortom, hier is dus sprake van breukrekenen via een omweg.

Het aangrijpingspunt voor de bewerkingen met kommagetallen ligt in toepassingsproblemen over geld, afstand, gewicht en dergelijke. Kortom, in meetgetallen.
De regel voor het plaatsen van de komma bij optellen en aftrekken is voor de leerlingen eenvoudig in te zien. Impliciet gebruiken ze hem vaak al bij het geldrekenen.

FIGUUR 25

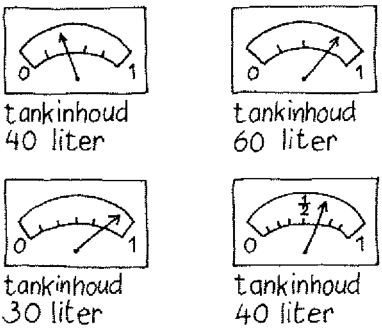
In een wijnglas gaat 1/8 liter wijn.
a. Hoeveel glazen gaan er uit een fles van 3/4 liter?
b. Kunnen zoveel glazen ook uit een fles van 7/10 liter?

President Reagan van de Verenigde Staten van Noord-Amerika vond dat alleen met steun van een grote meerderheid van het Congres (de Tweede Kamer) de belastingen verhoogd zouden mogen worden.
Bij een grote meerderheid dacht hij aan twee derde deel van de leden of aan drie vijfde deel.
Welke meerderheid van die twee is het grootst?

1/3 deel van de klas bestaat uit jongens en 3/4 deel uit meisjes.
Kan dat?

3/5 deel van de kinderen in de klas draagt een bril en 3/4 van de kinderen in de klas loopt op sandalen.
Kan dat?

Hoeveel liter zit er nog in elke benzinetank?



In een kookboek staat een recept voor uiensoep voor acht personen:
Recept (voor acht personen)

8 uien	2 lepels boter
1 liter water	1/2 liter room
4 aromablokjes	

a. Wat heb je nodig om zulke uiensoep voor vier personen te maken?
b. Iemand maakt uiensoep volgens dit recept voor zes personen. Hoeveel room is er voor nodig?

Voor vermenigvuldigen is dat anders. Maar daar hebben we de klassieke kommaregel achter de hand (net zoveel cijfers achter de komma als...). Het is echter niet passend – denkend aan de algemene leerdoelen – deze truc zomaar te verstrekken. Via schatten kunnen de leerlingen hem zelf ontdekken en verstandig leren hanteren. Een voorbeeld van zo'n schatopgave staat in figuur 26; belangrijk in verband met controle op machineberekeningen!

FIGUUR 26

Kies het goede antwoord.
Probeer het zo snel mogelijk te doen.

5 × 4,21 =	*1,01 × 5,80 =*	*35 × 0,41 =*
a. 2,105	a. 58,58	a. 0,1435
b. 21,05	b. 0,5858	b. 14,350
c. 210,5	c. 5,858	c. 143,5
17,1 × 30,8 =	*3,2 × 0,08 =*	*99,9 × 99 =*
a. 5266,80	a. 0,256	a. 989,01
b. 526,68	b. 2,56	b. 98901
c. 52,668	c. 0,0256	c. 9890,1

Een voorbeeld van enkele toepassingsproblemen voor de verschillende bewerkingen met kommagetallen vindt men in de opgaven van figuur 27.

FIGUUR 27

Gerrit meet de lengte van zijn kamer. Hij gebruikt daarbij een afgebroken meetlat die niet verder gaat dan 47 cm. Hij meet die lengte 12 keer af. De rest is nog 28 cm.
Hoe lang is die kamer ongeveer?

1 Franse franc = *f* 0,33.
a. De tol voor de autoroute kost 63 Franse francs. Hoeveel gulden is dat ongeveer?
b. Hoeveel francs krijg je ongeveer voor 250 gulden?

We concluderen dat de geweldige complexiteit van het hier beschouwde terrein een snelle formalisering met kale getallen en mechanisering via rekenregels niet wenselijk maakt met het oog op

de algemene doelstellingen. Trouwens ook (internationaal) onderzoek wijst uit dat zo'n aanpak slechts schijnresultaten op korte termijn tot gevolg heeft.
Dit alles betekent dat het onderwijsleerproces voor (decimale) breuken op de basisschool niet kan worden voltooid. Waarop de basisschool wel kan aansturen, toont het voorbeeld van figuur 28 waarvan we de volgende mogelijke oplossingen optekenen die door kinderen zijn gevonden.

FIGUUR 28

Een platenwinkel heeft de volgende aanbiedingen voor cassettebandjes:
3 halen, 2 betalen
2 halen, 1 betalen
2 halen, de tweede voor de halve prijs
Als je een stel cassettebandjes wilt kopen, van welke aanbieding kun je dan het beste gebruik maken?

Oplossingsmethodes:

1. Stel zo'n bandje kost 6 gulden. Dan: 3 voor 12 gulden, dus 4 gulden per stuk. 2 voor 6 gulden, dus 3 gulden per stuk. 2 voor 9 gulden, dus 4½ gulden per stuk.
2.

halen	3	6
betalen	2	4

halen	2	4	6
betalen	1	2	3

halen	2	4	6
betalen	$1\frac{1}{2}$	3	$4\frac{1}{2}$

In het eerste geval 2 gratis, in het tweede geval 3 gratis, in het derde geval maar 1½, dus de tweede aanbieding is het goedkoopst.

3. Rechtstreeks op de gratis bandjes aansturen
1 op de 3 gratis
1 op de 2 gratis
½ op de 2 gratis of 1 op de 4, dus...
4. Tabeloplossing: toewerken naar de 100 in verband met kommagetallen of percentages.

De geschetste oplossingen verwijzen niet alleen naar de algemene leerdoelen, maar ook naar een belangrijk concreet einddoel voor het voortgezet onderwijs, namelijk:

de leerling verwerft het inzicht dat het gelijknamig maken van breuken, het omzetten van breuken in kommagetallen of percentages in feite vormen zijn van een zelfde wiskundige methode. Op de basisschool kan dit inzicht in behoorlijke mate worden aangezet, maar nog niet volledig worden afgerond.

Concrete leerdoelen 'breuken' en 'kommagetallen'

1. Leerlingen zien in dat een breuk uitgelegd kan worden als:
   a. een deel van,
   b. een verhouding,
   c. een verdeling,
   d. een deling,
   e. een vermenigvuldigfactor,
   f. een getal op de getallenlijn,
   g. een meetgetal, en
   h. een kans.
2. Leerlingen geven een decimale breuk op verschillende manieren betekenis, als
   a. een breuk,
   b. een getal op de getallenlijn, en
   c. een meetgetal.
3. Leerlingen vergelijken verdeel- en meetsituaties met behulp van breuken en decimale breuken. Zij maken gebruik van notaties, schema's en modellen.
4. Leerlingen kunnen het gelijknamig maken van breuken in verband brengen met andere manieren van vergelijken:
   a. het omzetten in verhoudingen, en
   b. decimale breuken en procenten.
5. Leerlingen kunnen breuken met behulp van een verhoudingstabel of een rekenmachine omzetten in decimale breuken.
6. Leerlingen kunnen in toepassingssituaties eenvoudige breuken en decimale breuken optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen. Zij kunnen daarbij gebruik maken van modellen, en van maten als bemiddelende grootheden.
7. Leerlingen kunnen decimale breuken afronden en schattend rekenen met decimale breuken.

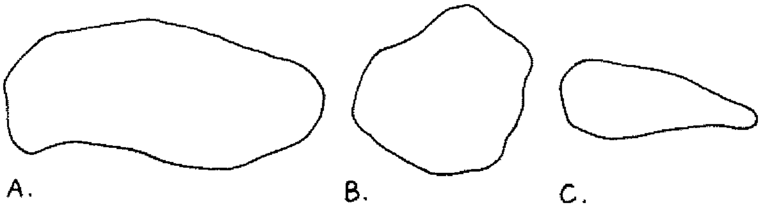
2.5 Concrete leerdoelen meten

Bij meten denken we aan lengte, tijd, gewicht en zo meer. Deze grootheden zijn getalsmatig uit te drukken. Wij krijgen dan meetgetallen als 2 m, 2 uur, 2 kg, waarmee je kunt rekenen. Niet alleen optellen en aftrekken, maar ook vermenigvuldigen en delen. Snelheid bijvoorbeeld is een samengestelde grootheid die wordt gemeten door de afgelegde weg (zeg km) te delen door de tijd (uur), km : uur, oftewel km per uur krijgen we dan. Kortom, met grootheden kan net zo gerekend worden als met 'gewone' getallen, ze gedragen zich als getallen. Maten kun je ook omrekenen, van de ene eenheid in de andere. Rekenen en omrekenen dat is precies wat er vroeger met meten gebeurde: geldrekenen en metriek stelsel. En dan natuurlijk ook nog wat echt meten, namelijk metingen uitvoeren: lengte, gewicht, oppervlakte...

In het verschraalde rekenonderwijs van de jaren vijftig en zestig (en zeventig ten dele) kregen geldrekenen en instrumenteel meten nog nauwelijks een plaats. Meten was voornamelijk metriek geworden. Het formele karakter van het rekenen kreeg juist in deze aanpak het meeste reliëf. Maar wie van de vroegere leerlingen weet of kan nu nog uitzoeken hoeveel cm^2 één ca is?

Omstreeks 1980 werd ook de kentering in de opvattingen over meten zichtbaar, hoewel er direct aan toegevoegd moet worden dat een enkele rekenmethode meten altijd al rijker en minder formeel aanpakte. Wat het meten en het werken met meetgetallen 'werkelijk' kan inhouden, kwam in het voorgaande al enigszins naar voren (basisvaardigheden, verhoudingen, breuken), maar zal in het volgende verder worden verduidelijkt. We bespreken een aantal samenhangende aspecten van het onderwijs in meten en geven weer wat voorbeelden.

Ten eerste moet bij veel grootheden het maatbegrip zich geleidelijk aan ontwikkelen. Begrip ontstaat niet op afroep als de maat gedefinieerd wordt. Neem oppervlakte. Wat zegt het dat we oppervlakte meten in vierkante cm, dm, m, km? In hoofdstuk 1 zagen we bij Mar en anderen welke problemen er nog aan het einde van de basisschool kunnen liggen. Oppervlak en oppervlakte, een vierkante meter die geen vierkant hoeft te zijn maar wel de grootte ervan moet hebben. Die grootte is de oppervlakte. Maar wat is oppervlakte? Bij het omschrijven draaien we dus begripsmatig gezien in een kringetje. Erger nog: we kweken schijnbegrip, wat het echte begrijpen blokkeert. Zo verwordt oppervlakte tot de toverspreuk 'lengte keer breedte' die niets met de 'werkelijke' oppervlakte van doen heeft.



Toch hebben kinderen een behoorlijke notie van oppervlakte. A is groter dan B zullen ze zeggen, dat kun je zo zien. En als het moet, tel je de stippen die erop staan. Op het ene eiland kunnen meer bomen worden geplant dan op het andere, volgens hetzelfde patroon. Zo kan oppervlakte voorstelbaar worden gemaakt, namelijk door het te binden aan een andere, concretere grootheid, of iets dat als zodanig kan fungeren. Op een gegeven ogenblik wordt dat 'iets' een vierkante maat (mm^2, cm^2, dm^2, m^2). Dit is een belangrijke stap. En veel verder liggen formules, metriek...
Beginnen met afspraken over maateenheden, vroeg invoeren van formules, formeel opereren in het metrieke stelsel van maten voordat het maatbegrip hecht verankerd is in de ervaringswereld, dat is de boel didactisch op z'n kop zetten. We krijgen dan onderwijs dat in strijd is met de algemene leerdoelen die eerder geformuleerd werden. Maatontwikkeling moet aansluiten bij ideeën die kinderen (en volwassenen) al hebben en deze noties door ervaringen aan de hand van probleemstellingen helpen verrijken, ze expliciet laten maken. We kunnen dit ook voor onszelf ervaren. Neem het voorbeeld van zojuist. Figuur B is compacter dan figuur A, dat kun je zo zien. Wat is compactheid eigenlijk? Het heeft in ieder geval niet alleen met oppervlakte te maken: B is niet compacter omdat het kleiner is, want C is het kleinst en juist het minst compact. Blijkbaar heeft de vorm – ronder of langgerekter – er ook iets mee van doen. Dus... de omtrek. Kunnen we nu eenvoudig een maat voor compactheid ontwikkelen waarin zowel oppervlakte als omtrek een rol spelen? Eenvoudig niet, maar we zijn op de goede weg...

Ziehier in een notedop wat maatontwikkeling op basis van intuïtieve noties wil zeggen. In ieder geval is het niet primair een kwestie van definiëren en rekenen. Duidelijk is ook dat in die begripsontwikkeling het 'echte' meten (en vergelijken) een belangrijke rol vervult; meten op het oog, meten via tellen, meten via een andere meting (oppervlakten vergelijken via wegen van uitgezaagde of geknipte vormen!). Waarbij we echter moeten bedenken dat de instrumentele meting op zich niet voldoende is of hoeft te zijn om de begripsontwikkeling te ondersteunen: aflezen van een wijzer is niet zonder meer een aanwijzing naar wat eigenlijk gemeten wordt. Wat betekent het precies als de snelheidsmeter van de auto op honderd staat? Wij rijden honderd km per uur, maar dat is maar even en geen uur! Moeilijk, en dit brengt ons op het tweede punt, dat overigens met het eerste verbonden is...
Ten tweede dienen allerlei 'alledaagse' grootheden nauw verbonden te worden met de voorstellings- en ervaringswereld van de kinderen. Meten dient realistisch te zijn. Want juist meetgetallen kunnen het rekenen in de realiteit verankeren, in de realiteit van kinderen wel te verstaan. Hier volgt een parade van steekwoorden die naar dergelijke meetgetallen verwijzen: wanneer ben je jarig – hoe lang ben ik – hoe snel loop ik, fiets ik – hoe groot is die tuin – hoe lang is de straat – hoeveel graden is het vandaag – hoeveel regen is er gevallen – hoe oud zou zij zijn – hoe zwaar zou zij wegen – hoe laat is het nu in New York – hoeveel inwoners heeft Nederland ongeveer – wat is m'n lichaamstemperatuur – heb ik koorts – hoe hoog is mijn polsslag – hoeveel zou zo'n reis kosten – hoe duur is dat – hoeveel cl zit er in die fles – welke maat schoenen heeft hij – hoe lang is dat geleden – wat is het waarderingscijfer – hoe groot is de bevolkingsdichtheid – getallen, getallen, getallen, alle verbonden met meten en weten.
In figuur 29 staat een serie opgaven waarin nadrukkelijk naar zulke referentiepunten wordt gevraagd – dit om de leerlingen op meetgetallen te attenderen en te helpen die getallen als het ware in te passen in hun persoonlijke waardeschaal en waarderingsschaal. Het zijn opgaven waarin gegevens bewust worden weggelaten om kinderen te dwingen zich het een en ander over meten en meetgetallen te realiseren. Dit is een uiterst belangrijke categorie vraagstukken, mede gelet op de algemene leerdoelen.

FIGUUR 29

Sjoerd blijkt bij de sportkeuring 184,3 cm te zijn.
Drie jaar geleden was Sjoerd bij de keuring 168,7 cm.
a. Hoeveel is Sjoerd in de laatste drie jaar gegroeid?
b. Hoe oud zou Sjoerd ongeveer zijn?

De komma's zijn vergeten. Waar moeten ze staan?

lengte van een baby	52 m
gewicht van Annemieke (12 jaar)	345 kg

In de eerste kolom de weerstations, in de tweede de weersgesteldheid, in de derde de windrichting en windsnelheid in meters per seconde, in de vierde kolom de maximum temperatuur en in de laatste de neerslag in millimeters.

station	*weer*	*wind*	°C	*mm*
Amsterdam	zwaar bew.	w 1	19	0
De Bilt	zwaar bew.	nw 1	20	0
Deelen	zwaar bew.	verand.	19	0
Eelde	licht bew.	wzw 2	17	0
Eindhoven	zwaar bew.	windst.	19	0
Den Helder	zwaar bew.	w 3	17	0
Rotterdam	zwaar bew.	z 1	18	0
Twente	half bew.	verand.	19	0
Vlissingen	zwaar bew.	n 2	18	0
Zd. Limburg	zwaar bew.	z 2	17	0

Welk van de volgende maanden is het meest waarschijnlijk voor dit weerrapport?

a. december c. mei
b. september d. februari

Vul de goede maat in:
een mens weegt ongeveer 70 ...
1 eetlepel is ongeveer 15 ... water
een brief weegt ... gram
er gaan 4 ... zout in de stamppot.

Vier lichaamstemperaturen:

Jolanda	36,8
Pieter	37,2
Kees	37,8
Anna	39,6

Wie heeft koorts? Wie heeft verhoging?

Ten derde is de ontwikkeling van meetstrategieën inherent aan het meten. Met name het schatten, waarover eerder in 2.1 werd geschreven, is hierbij van cruciale betekenis, en dan vooral schatten op basis van referentiepunten, waarover we zojuist schreven. We volstaan nu met enkele opgaven te noemen waarvoor specifieke meetstrategieën of gemotiveerde schattingen vereist zijn (zie figuur 30).

FIGUUR 30

Op een autoweg (2 rijstroken) staat een file van 14 km.
Schat het aantal auto's in deze file. Laat je berekening zien.

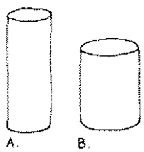
Vertel hoe je zo goed mogelijk de dikte van het blaadje papier kunt bepalen waarop deze tekst staat afgedrukt.

Ten vierde dienen bij het meten relaties tussen zowel maten als grootheden onderzocht te worden. Metriek valt onder dit punt, maar ook de betrekkingen tussen omtrek, oppervlakte, oppervlakte-inhoud, afstand-tijd-snelheid. Enkele voorbeelden uit de grote diversiteit aan mogelijkheden staan in figuur 31 (let vooral op het cilinderprobleem; in de lage gaat meer dan in de hoge, ook al is de cilindermantel hetzelfde, maar bij dezelfde omtrek kan de oppervlakte immers ook verschillen!).

FIGUUR 31

Mike uit groep 4 heeft geteld in hoeveel stappen hij naar school loopt.
Hij telt ongeveer vijfhonderd stappen.
De meester loopt in ongeveer vierhonderd stappen naar school.
Wie woont het dichtst bij school?

Vouw van een A4-blaadje een koker. Eerst in de lengte, dan in de breedte.



In welke koker kan het meest? Of in beide kokers evenveel?

Op 4 en 5 oktober 1987 was er in Spanje in de omgeving van Barcelona een hevig noodweer. In korte tijd viel er per vierkante meter land wel 200 liter water.
Wat was de hoogte van de regenval in centimeters?

Op 30 december 1987 zei de KNMI-medewerker in het NOS-journaal:
'Vandaag viel op sommige plaatsen 40 mm regen. Dat is 40 liter in een bak met een vloer van één bij één meter en 30.000 liter op een voetbalveld.'
Is het waar wat hij beweert?

Ten vijfde stelt het rekenen met meetgetallen soms bijzondere eisen. Niet zozeer bij geldrekenen – dat is ook heel concreet – maar vooral daar waar we met onnauwkeurige of afgeronde getallen te maken hebben. Duidelijk is dat precies rekenen met onnauwkeurige of afgeronde getallen ondoelmatig of niet passend is. Evenzeer is evident dat fouten opgeblazen kunnen worden, dus dat je bij vermenigvuldigen en delen van meetgetallen moet oppassen en in de juiste orde van grootte moet proberen te werken. Welnu, iets van deze problematiek zouden we – gelet op de algemene doelstellingen – met de kinderen kunnen onderzoeken. Een eenvoudig maar sprekend voorbeeld daarvan vinden we in de opgave van figuur 32:

FIGUUR 32

Jan heeft een kilometerteller op zijn fiets.
Hij stelt hem in op nul en rijdt langs het kanaal naar zijn vriend.
Daar staat 7,2 km op de teller.
Hij rijdt precies dezelfde weg langs het kanaal terug.
Dan staat er 14,5 km op de teller.
Hoe kan dit?

De kilometerteller slaat pas om als het hele honderdtal meters is afgelegd, maar dat betekent dat bij verdubbeling van de afstand het honderdtal wel overschreden kan worden terwijl dat bij één keer niet gebeurt. Rekenen met meetgetallen heeft dus iets specifieks en dat moeten de kinderen ervaren. In het bijzonder ook bij statistische onderzoekjes doet zich dit voor en bij gemiddelde en bij steekproefneming (zie figuur 33).

FIGUUR 33

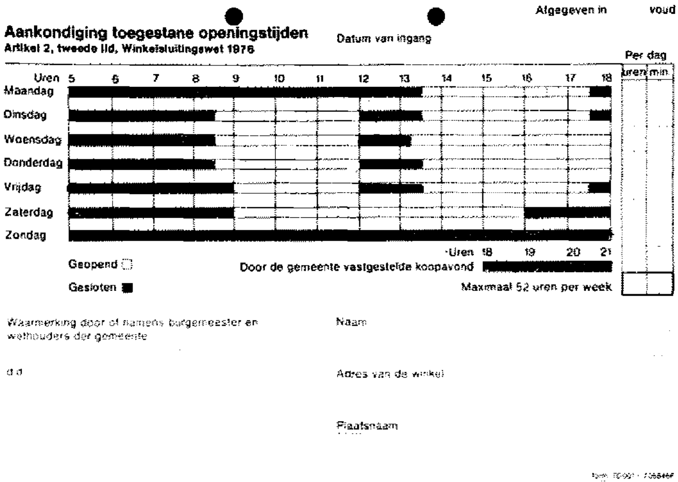
In een groep van 20 kinderen is het langste kind 1,62 m en het kleinste 1,41 m.
a. Kan de gemiddelde lengte 1,63 m zijn?
b. Kan de gemiddelde lengte 1,62 m zijn?
c. Kan de gemiddelde lengte 1,61 m zijn?
d. Kan de gemiddelde lengte 1,60 m zijn?
e. Kan de gemiddelde lengte 1,54 m zijn?
f. Welke van deze gemiddelde lengten zou het meest voor de hand liggen?

Enkele jaren geleden heeft een team van onderzoekers de hoogte van de Mount Everest (de hoogste berg van de wereld) gemeten voor officieel gebruik in atlassen en naslagwerken. Er werden namelijk nogal wat verschillende hoogtegetallen gebruikt: 8880 meter, 8848 meter, 8882 meter.
Het team van zes mensen besloot zes onafhankelijke metingen uit te voeren. Als officieel hoogtegetal zouden ze het gemiddelde van de zes uitkomsten nemen.
Er werd gemeten in voet (een Engelse maat). Een voet is 30,48 centimeter.
De uitkomsten waren:
28.990
28.991
28.994
28.998
29.001
29.026
a. Bereken het gemiddelde in voet.
b. Echter, het hoogtegetal dat uiteindelijk in de boeken terechtkwam was 2 voet hoger dan het zojuist gevonden gemiddelde.
Bedenk eens waarom de onderzoeksgroep het hoogtegetal veranderd heeft.

Dit laatste brengt ons ten slotte bij het zesde aspect: de verwerking van numerieke gegevens in tabellen en grafieken (staaf-, lijn- en cirkeldiagram onder meer) plus omgekeerd, het interpreteren ervan. Enkele voorbeelden staan in figuur 34, vele zijn toe te voegen (kalender, gids, et cetera).

FIGUUR 34

Aankondiging toegestane openingstijden



Aankondiging toegestane openingstijden
Artikel 2, tweede lid, Winkelsluitingswet 1976

Datum van ingang

Afgegeven in voud

Per dag: uren min.

Uren 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Maandag
Dinsdag
Woensdag
Donderdag
Vrijdag
Zaterdag
Zondag

Uren 18 19 20 21

Geopend

Gesloten

Door de gemeente vastgestelde koopavond

Maximaal 52 uren per week

Waarmerking door of namens burgemeester en wethouders der gemeente

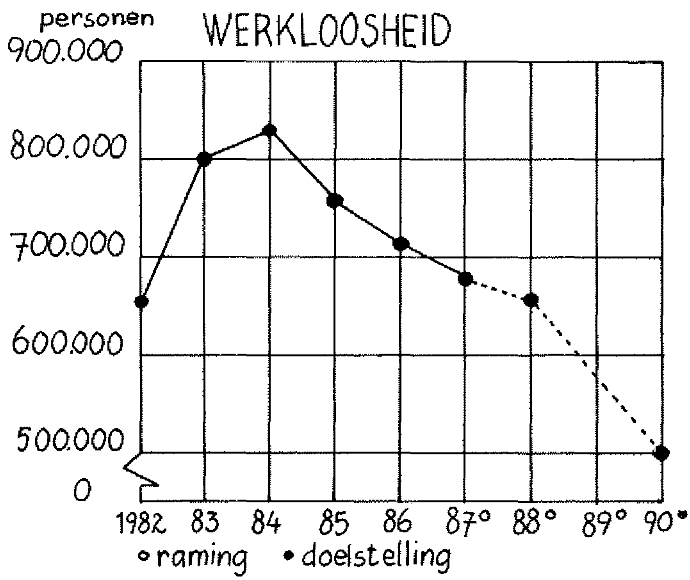
d.d.

Naam

Adres van de winkel

Plaatsnaam

Hoeveel uur per week is deze winkel open?

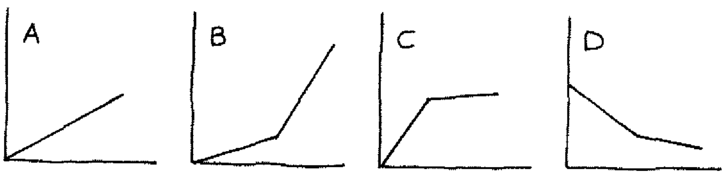


a. Hoeveel mensen zijn er in 1987 ongeveer zonder werk?
b. Hoeveel verwacht men dat er in 1990 nog werkloos zullen zijn?
c. In Nederland wonen 15 miljoen mensen. Hoeveel daarvan denk je dat er betaald werk hebben? Hoe heb je geredeneerd?

Maastricht			10 54
Bunde			10 59
Beek-Elsloo			11 05
Geleen-Lutterade			11 09
Sittard	A		11 14
Heerlen		11 00	
Hoensbroek			
Nuth			
Schinnen			
Spaubeek			
Geleen Oost		11 11	
Sittard	A	11 16	
Sittard			11 21
Susteren			11 26
Echt			11 30
Roermond	A		11 39

a. Hoe lang doet de stoptrein van Maastricht naar Roermond er over?
b. Hoe lang staat die trein in Sittard stil?

Wim heeft een emmer onder de kraan gezet. Hij draait de kraan open en loopt weg.
Piet komt even later langs en ziet dat de emmer bijna vol is. Hij draait de kraan dicht maar deze blijft druppen.



Welke grafiek hoort bij dit verhaaltje?

Tot slot
Algemeen geldt dat meten mede de grondslag van het rekenwiskundeonderwijs kan vormen, of althans de cement daarvoor levert. Meten biedt een natuurlijke toegang tot het rekenen (bijvoorbeeld geldrekenen) en het levert modellen (getallenlijn, rechthoek, grafiek) en contextproblemen die een groot terrein bestrijken. Het legt een verbinding tussen verschillende vaardigheden (rekenen, schatten, visualiseren, gegevensverwerking, meten) op verschillende terreinen (rekenen, meten, verhoudingen, meetkunde). Meten maakt rekenen realistisch.

Concrete leerdoelen 'meten'

1. Leerlingen hebben inzicht in de manier waarop tijd wordt gestructureerd. Zij kunnen klokkijken, tijdsintervallen berekenen, kennen de samenhang tussen tijdseenheden die bij het klok- en kalenderrekenen een rol spelen en hebben weet van langere perioden.
2. Leerlingen kunnen rekenen met geld in alledaagse situaties.
3. Leerlingen hebben begrip van de relatie tussen grootheid en maateenheid bij de grootheden:
   a. lengte,
   b. oppervlakte,
   c. inhoud,
   d. tijd,
   e. gewicht,
   f. temperatuur, en
   g. bij de samengestelde grootheid snelheid.
4. Leerlingen brengen gangbare maten van het metriek stelsel in verband met voor hen herkenbare situaties en referentiepunten.
5. Leerlingen kunnen ordenen, direct en indirect meten, en schattend meten met behulp van referentiepunten.
6. Leerlingen meten lengte, tijd, gewicht en temperatuur. Zij kunnen de daarvoor benodigde instrumenten hanteren en aflezen.
7. Leerlingen kunnen met meetgetallen werken. Zij realiseren zich dat er tijdens het meten meetfouten kunnen optreden en dat zij afgeronde getallen gebruiken.

8. Leerlingen lezen en interpreteren tabellen en grafieken en kunnen deze op grond van zelf verkregen meetgegevens samenstellen.
9. Leerlingen kunnen het gemiddelde van meetresultaten bepalen en interpreteren.

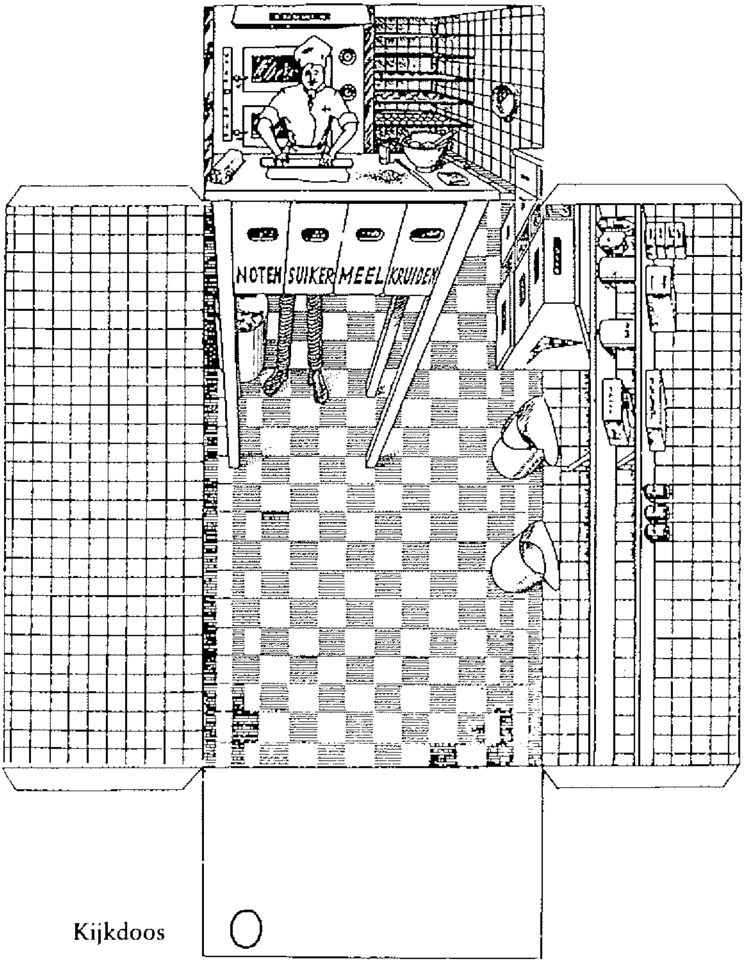
2.6 Concrete leerdoelen meetkunde

Honderd jaar geleden – in 1889 – werd meetkunde, of beter vormleer uit het leerplan van de lagere school geschrapt. Men hechtte geen geloof meer aan de vormende waarde die er door Pestalozzi en anderen aan werd toegeschreven, zijnde 'het verstand der kinderen te ontwikkelen en hunnen geest aan geregeld trapsgewijze denken te gewennen'.
Het visuele aspect verkommerde ook in rekenen en meten steeds meer. Met name de methode 'Bouman en Van Zelm' was daar debet aan.

Andere ideeën omtrent aanschouwelijkheid, bijvoorbeeld uit de denkpsychologische school, kregen geen kans. Net zo min als de meetkunde van de New-Math omstreeks 1970 die trouwens evenals de vroegere vormleer tamelijk formeel van aard was, dus weinig betrokken op de ons omringende wereld. Let wel: we hebben het over de lagere school. Op de kleuterschool lag de situatie totaal anders. Onder invloed van Fröbels ideeën zaten in de handenarbeid veel belangrijke meetkundige aspecten die buitengewoon waardevol zijn voor het ontwikkelen van intuïtieve noties (zie figuur 35).

Thans is nog niet te overzien of dit element in het basisonderwijs behouden is gebleven, juist nu dit soort meetkunde zich schuchter in de nieuwe programma's in de hogere groepen begint te manifesteren. Geen meetkunde als vormleer, maar meetkunde met als leerinhoud ruimtelijke oriëntatie. Meetkunde als onderzoek van de ruimte waarin wij leven, meetkunde als een wiskundige activiteit waarin allerlei natuurlijke fenomenen uit de waarnemingswerkelijkheid worden onderzocht. Meetkunde als wiskundige wereldoriëntatie. Hoe belangrijk dit Fröbelwerk is, worden we gewaar bij sommige allochtone leerlingen die het vroeger nooit gedaan hebben en dan iedere vaardigheid in dit domein (deze ruimte) missen.
In dit meetkundeonderwijs worden (wiskundige) vragen gesteld naar aanleiding van ruimtelijke ervaringen, mede opgedaan via gestelde problemen en gedane proeven.
– Waarom worden schaduwen langer als je van de lantaarnpaal

FIGUUR 35



Kijkdoos

Kopieer deze pagina, knip de kijkdoos uit en plak die in elkaar. Kijk dan door het gaatje!

wegloopt en niet als je van de zon wegloopt?
– Hoe komt het dat de kerktoren achter de huizen wegzakt als je de stad nadert?
– Waarom verspringt je duim die je vlak voor je ogen houdt, als je afwisselend het ene en het andere oog dichtknijpt?

– Je ziet de zon niet als je op een zonnige dag uit het raam kijkt. Kun je toch ongeveer bepalen waar hij aan de hemel moet staan?
– Hoe komt het dat de maan met je meeloopt?
Op grond van ervaring, waarneming en onderzoek aan de hand van dergelijke problemen ontwikkelen zich noties als punt, lijn en hoek zonder dat deze vooraf gedefinieerd zijn.
Eerst komt de ervaring, de waarneming. Om daarna het verschijnsel te verklaren met behulp van een tekening, althans als dat kan, zoals bij de lantaarnpaal, de kerktoren, de duim en de zon. Bij de maan is het lastiger, maar het probleem kan voor verre en nabije objecten wat aangepast worden. Visualisering maakt dan snel duidelijk dat het om de hoekverandering gaat bij voorwerpen die dichtbij zijn en dat bij voorwerpen die verder weg staan die hoek zich minder snel of vrijwel in het geheel niet wijzigt. Daarom geven die de illusie dat ze meelopen of -rijden. Meer algemeen gesteld geldt dat op grond van allerlei ruimtelijke ervaringen en onderzoek zich allerlei noties, vaardigheden en inzichten omtrent ruimtelijk oriënteren, projecteren, plaats bepalen, construeren, transformeren en dergelijke ontwikkelen, die een belangrijke voorbereidende waarde, maatschappelijke waarde, vakspecifiek-wiskundige waarde en persoonlijke waarde vertegenwoordigen. Kortom, dat deze meetkundige activiteiten in hoge mate aan de algemene leerdoelen van het reken-wiskundeonderwijs appelleren.
In het volgende zullen de belangrijkste facetten van deze meetkundige wereldoriëntatie worden opgesomd, steeds geïllustreerd met voorbeelden.
Op de zojuist gegeven voorbeelden plakken we het etiket projecteren en viseren (met één oog langs duim of object kijken). Het gaat er hier, zoals Goddijn het zo plastisch uitdrukt, vooral om licht op schaduw te werpen: lichtbron, viseren, mogelijke schaduwvormen en projecteren. Er is slechts ruimte voor één voorbeeld. Welke vraagstelling, welke proefneming, welk onderzoek en welk specifiek leerdoel over projecteren bij de grote Barribal uit figuur 36 passen, laat zich raden.

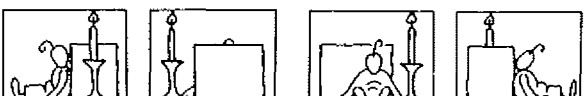
Lastiger is het enige indruk te krijgen (en te geven) welke rijkdom aan activiteiten licht op schaduw kan omvatten tussen de kijkdoos voor de kleuters (figuur 35) en de projectieve meetkunde voor de

FIGUUR 36

'Ik ben de grote Barribal!' sprak een zware stem die dreunend nagalmde. 'Geen stap verder; of ik zal jullie vermorzelen.'
'Niet doen, niet doen,' riep heer Bommel overspannen. 'Ik b-ben een vreedzaam heer! Ikkikik wil alleen maar een pr-praatje maken... Zeg nu z-zelf, Tom P-Poes!'
De reusachtige schaduw op de rotswand kwam schommelend nader en voetstappen knarsten op de kalkbodem. Het is dan ook geen wonder, dat het heer Bommel te veel werd. Hij stiet een piepende kreet uit, die duizendvoudig in de spelonk weerkaatst werd en snelde naar de uitgang.

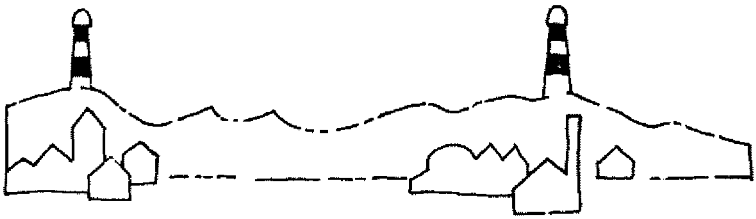
zestienjarigen. Voor gedetailleerder informatie verwijzen we de lezer dan ook naar de allernieuwste reken-wiskundeprogramma's en dat geldt trouwens evenzeer voor de nog volgende aspecten en activiteiten.
De tweede belangrijke cluster van activiteiten stellen we onder het hoofd oriënteren en lokaliseren, dat overigens niet strikt van de voorgaande categorie kan worden gescheiden – meetkunde is nu eenmaal moeilijk op te splitsen in deelterreinen. Twee voorbeelden staan in figuur 37.

FIGUUR 37

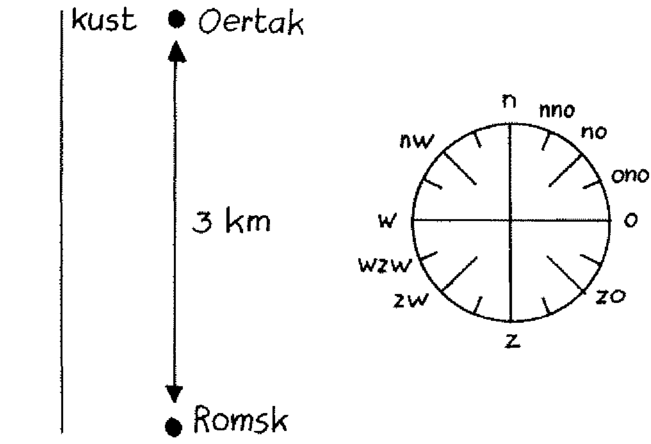


Kunnen dit foto's zijn van dezelfde situatie?

Op de kaart ligt Oertak recht boven Romsk.
De kust tussen de twee havenplaatsen Oertak en Romsk loopt precies noord-zuid.
Op een dag ziet de kustwacht van Oertak een noodsignaal in westzuidwestelijke richting.
De kustwacht van Romsk ziet hetzelfde signaal recht voor de kust, dus in westelijke richting.



Maak de tekening van de situatie (een landkaartje) af.
De afstand tussen Oertak en Romsk is 3 km.
Hoe ver ligt het schip uit de kust?

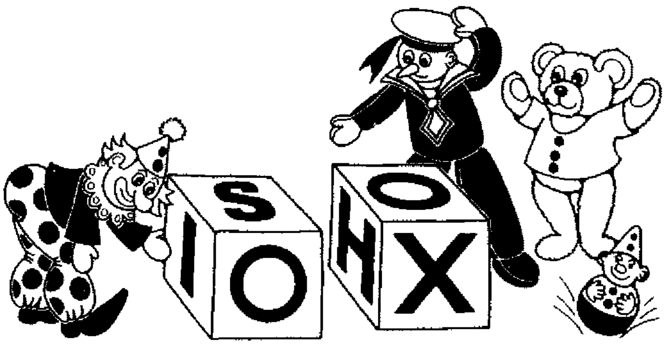


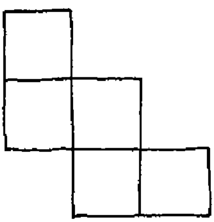
Het gaat bij oriënteren en lokaliseren om het 'in gedachten' in de ruimte bewegen, mede aan de hand van foto's, camerashots en dergelijke, en de plaats bepalen in de ruimte of op een kaart, maquette, et cetera, aan de hand van gegevens over richting, hoek en zo meer.
Bij de nu volgende categorie komt het ruimtelijke redeneren nog explicieter aan de orde dan hiervoor. We doelen dan speciaal op

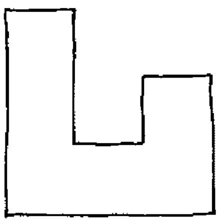
het redeneren op basis van aanzichten van blokkenbouwsels – bijvoorbeeld de opgave van figuur 38.

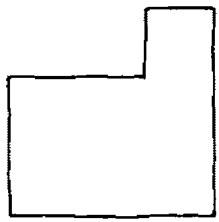
FIGUUR 38
Letterblokken

De beide kubussen die je hier ziet, zijn volkomen aan elkaar gelijk. Op de zijden staan de letters S, H, I, X, V en O.
Kun je nu uit de tekeningen opmaken welke letters tegenover elkaar staan?









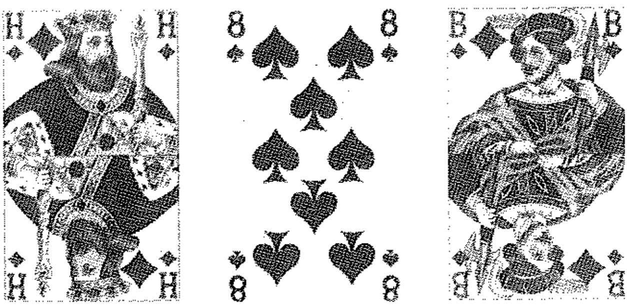
plattegrond | vooraanzicht | zijaanzicht

Daarin moeten hypothesen worden gesteld die de toets van de kritische beschouwing naar alle kanten moeten doorstaan, of men kan ook zeggen dat je alle mogelijkheden stuk voor stuk tracht te weerleggen, wat in één geval niet lukt. Ook in deze categorie is de relatie met de algemene leerdoelen weer bijzonder duidelijk zichtbaar: de kinderen krijgen hier namelijk de gelegenheid op een voor hen passend niveau een typisch wiskundige (natuurwetenschappe-

lijke) werkwijze te volgen, namelijk die van het beproeven, bewijzen en weerleggen.
Daarnaast staan activiteiten die met transformeren te maken hebben in de zin van spiegelen en draaien. Alleen de spiegel al geeft aanleiding tot intrigerende probleemstellingen als:
– Hoe komt het dat het gezicht van iemand anders (niet van jezelf!) er zo scheef uitziet in de spiegel?
– Waarom verwisselen in de spiegel wel links en rechts, maar niet onder en boven?
– Waarom blijf ik zo precies in de passpiegel passen of ik nu voor- of achteruitloop (een passpiegel hangt verticaal tegen wand of deur)?
In figuur 39 staan wat eenvoudiger problemen.

Dan een groep van activiteiten die we onder het kopje construeren vatten. Het gaat daarbij om het vouwen van figuren, het maken van bouwplaten, tangramfiguren, het construeren van vlakke figuren en dergelijke activiteiten voor hand en hoofd. Twee voorbeelden die met kubussen te maken hebben staan in figuur 40. Bij de vierkubers komen huisjes voor die wel op elkaar lijken, maar toch niet hetzelfde zijn (spiegelhuisjes). Een ander probleem is hoe bewezen kan worden dat alle mogelijke huisjes gevonden zijn: systematisch werken.

FIGUUR 39

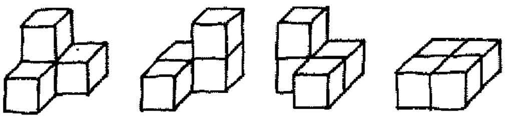


Welke van deze kaarten kun je spiegelen zodat je de hele kaart weer ziet?

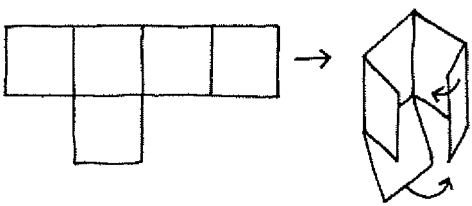
Teken waar je de spiegel moet neerzetten.

Het nieuwe beeldmerk van Wolters Kluwer is er opmerkelijk snel gekomen. Aan weerszijden komen nog de beide namen te staan. Links is het Kluwer beeldmerk, rechts dat van Wolters Samsom. Wat opvalt, is dat het Wolters-Kluwer-merk duidelijk trekken van enkele bladzijden van een opengeslagen boek vertoont. Het merk van Kluwer eveneens. De gelijkenis van het merk van Wolters Samsom is nog veel opvallender. Wanneer men één van de twee identieke helften een kwartslag draait en spiegelt, ontstaat een sterk gelijkend teken. Ra, ra hoe kan dat?

FIGUUR 40



Maak zoveel mogelijk vierkuberhuisjes.

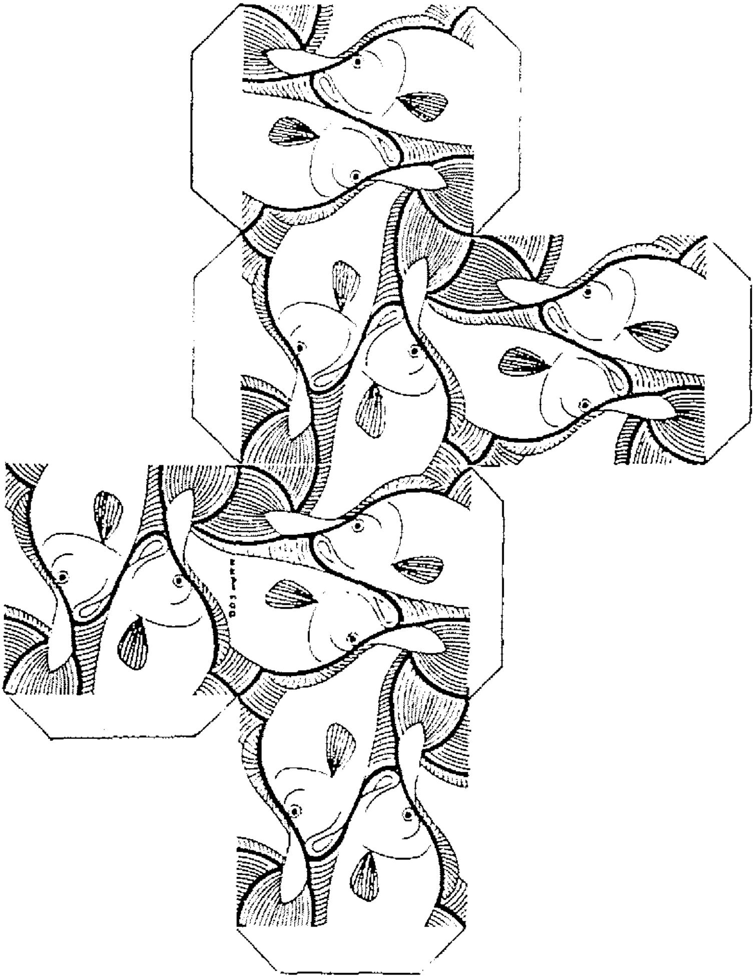


Van dit bouwplaatje kun je een open doosje vouwen.
Teken zelf twee andere bouwplaatjes waarmee je zo'n zelfde open doosje kunt vouwen.

Belangrijke meetkundige activiteiten staan vaak niet op zichzelf maar integreren meerkunde met meten en rekenen (verhoudingen). In het voorgaande zijn ze hier en daar aangeduid, we gaan er nu niet verder op in – meetkundige voorstellingen om niet-strikt meetkundige problemen te helpen oplossen, meetkunde als middel.

Tot zover een indicatie van belangrijke meetkundige aspecten en activiteiten. Men zou er nog meer kunnen onderscheiden: de vormleer bijvoorbeeld waarin het klassificeren van figuren voorop staat, bleef ongenoemd; we beperkten ons tot de hoofdpunten. We vatten het voorgaande nu kort samen en wijzen op de gemeenschappelijke trekken in al die activiteiten, door namelijk nu ook iets over de fasering te zeggen. Het gaat bij meetkunde om het wiskundig verwerken van ruimtelijke ervaringen, opgedaan in het leven van alledag en opgeroepen via probleemstellingen in het onderwijs. De structurering van de ruimtelijke verschijnselen is aanvankelijk voornamelijk visueel en loopt uit op inzichten van het type 'ik zie het zo' of 'ik doe het zo', die niet nader onder woorden worden gebracht. Er wordt als het ware in deze eerste onderwijsfase een fundering van intuïtieve noties gelegd. Later wordt hierop voortgebouwd: het ordenen van de meetkundige werkelijkheid gebeurt dan meer beredeneerd en beargumenteerd met behulp van onder meer taalsymbolen, plaatjes, redeneringen. Er worden nu geëxpliciteerde begrippen ontwikkeld als punt, lijn, hoek, richting, symmetrie, driehoek, kubus, spiegeling, gelijkvormig en dergelijke, die een zekere samenhang bezitten en waarop in het vervolgonderwijs kan worden voortgebouwd. Deze twee-fasenstructuur doet zich voor bij activiteiten rondom projecteren en viseren, oriënteren en lokaliseren, redeneren, transformeren en construeren, en bij meetkunde geïntegreerd met andere onderdelen (verhoudingen en meten). Dit alles houdt in dat vaardigheden en noties niet direct aangeleerd en gedefinieerd worden, maar zich ontwikkelen vanuit natuurlijke probleemstellingen omtrent de waarnemingswerkelijkheid: foto's, kijkdoos, spiegel, 'licht op schaduw', aanzichten, verhoudingen, uitslagen ruimtefiguren, bouwsels, projecties, perspectief... Wellicht is er geen onderdeel dat, naast het meten, zo de vorming van een wiskundige attitude kan bevorderen als het meetkundeonderwijs en, meer in het algemeen gesproken, dat zo aan de algemene leerdoelen appelleert. Dat komt met name door de zeer motiverende probleemstellingen en de grote veelzijdigheid van de wiskundige aspecten die in het meetkundeonderwijs worden aangesproken (visualiseren, modelleren, redeneren, reflecteren, toepassen).

FIGUUR 41



Kleur de bouwplaat van de wiskundekubus zo, dat de zes (leerstof)vlakken een samenhangend geheel vormen.

Om ten slotte de eenheid van rekenen-wiskunde te symboliseren en de vloeiende overgang tussen de zes besproken leerstofvlakken te accentueren, besluiten we met de opdracht van figuur 41.

Concrete leerdoelen 'meetkunde'

1. Leerlingen beschikken over noties waarmee zij de ruimte meetkundig kunnen ordenen en beschrijven:
   a. plaats,
   b. richting,
   c. afstand,
   d. evenwijdigheid
   e. patroon,
   f. vorm,
   g. grootte,
   h. schaal,
   i. spiegeling,
   j. symmetrie,
   k. coördinaat,
   l. plattegrond
   m. vooraanzicht, zij-aanzicht, bovenaanzicht,
   n. lengte, breedte, hoogte,
   o. omtrek,
   p. oppervlakte, en
   q. inhoud.
2. Leerlingen kunnen ruimtelijk redeneren door zich in standpunten te verplaatsen en verbanden tussen gegevens te leggen. Ze bedienen zich daarbij van bouwsels, plattegronden, kaarten en foto's, en gegevens over plaats, richting, afstand en schaal.
3. Leerlingen kunnen schaduwbeelden verklaren, figuren samenstellen en bouwplaten van regelmatige objecten ontwerpen en identificeren.
4. Leerlingen kunnen reken-wiskundeproblemen visualiseren en schematiseren.

3. Eindtermen en toetsen

Indien we ons uitspreken over algemene en concrete leerdoelen voor rekenen-wiskunde, zullen we ook de problematiek van de toetsing niet onberoerd mogen laten. Eindtermen in de hier geformuleerde zin vragen om passende toetsen. Deze toetsen dienen namelijk de totale bandbreedte van de leerdoelen te beslaan, dus zowel de algemene als de meer concrete leerdoelen. Dus niet alleen de lagere cognitieve vaardigheden van feitenkennis en procedures, maar ook vaardigheden die met toepassingen en toepasbaarheid te maken hebben, de hogere kwaliteiten derhalve.
De vraag is alleen hoe men de laatste kan toetsen. Laten we, om deze vraag te beantwoorden, terugkeren naar de in hoofdstuk 1 beschreven lessen over de grootte van Nederland. Aan het einde van les 2 werd de leerlingen gevraagd (thuis) een opstelletje te schrijven waarin degene die zegt dat Nederland 36842 m^2 groot is, tekst en uitleg krijgt dat dit niet kan; al het geleerde kan in dit geschreven antwoord worden verwerkt. Zo'n thuistoets is een voorbeeld van een peiling die past bij de leerdoelen van de lessenserie. Men kan echter ook een toetsles op school geven, waarin een verwant probleem wordt gesteld. In dit geval zou dit een probleem moeten zijn waarin de relatie m^2-km^2, het rekenen met nullen en het voorstelbaar maken van de betreffende maten en grote getallen (de leerdoelen van de grootte van Nederland) gepeild kunnen worden conform het onderzoeksgerichte onderwijs van de lessenserie (dus in overeenstemming met de algemene leerdoelen). Een voorbeeld van zo'n probleemsituatie (zie figuur 42).

'Zou de hele Nederlandse bevolking in theorie op 1 km^2 kunnen staan?' 'Zou de wereldbevolking in de provincie Utrecht kunnen staan?'

Het begin van de toetsles zou in groepsverband kunnen plaatsvinden – het deelnemen aan en het bijdragen tot groepsonderzoek is een belangrijke doelstelling die ook geregeld gepeild moet worden. Hoeveel personen kunnen er op 1 m^2 staan – dit wordt beproefd. De uitkomst is meer dan we dachten: 10 à 15 personen.

FIGUUR 42

Met dit gegeven in het hoofd gaan de leerlingen nu individueel aan het werk. Indien ze de relatie tussen 1 km^2 en 1 m^2 kennen of kunnen uitzoeken, is het eerste probleem snel opgelost... Tenminste als je weet hoeveel inwoners Nederland heeft. Hebben de leerlingen dit referentiepunt? De slotsom luidt in ieder geval dat het in theorie net zou kunnen als we uitgaan van 14 personen op 1 m^2.

Tijdens het individueel werken loopt de onderwijsgevende rond, helpt en observeert. Bij de tweede vraag herhaalt zich dit. Hoe bepalen de kinderen de grootte van Utrecht met behulp van de kaart? Werken ze globaal schattend? Rekenen ze handig met nullen? Maken ze gebruik van het zojuist gevonden gegeven van 10 à 15 miljoen mensen op 1 km^2? In zo'n toetsles zit een element van diagnostisch toetsen dat zo belangrijk is voor het onderwijs van alledag: welke leerling kan wel of niet met nullen rekenen, doorziet de relatie km^2-m^2, kan schattend rekenen, beschikt wel of niet over bepaalde referentiepunten? Voor eindtermen zou diagnostiseren echter niet (alleen) de juiste toetsvorm zijn. Maar de toetsles kan tegelijkertijd ook als criteriumtoets fungeren die peilt of de leerlingen aan de gestelde eisen voldoen en dat past precies bij de eindtermen, zeker als we daarbij ook nadrukkelijk de algemene onderwijsleerdoelen betrekken. Als normtoets die nagaat waar de kinderen in de prestatierij van de beste naar de slechtste staan, is de toetsles uiteraard minder geschikt, maar deze normering is bij eindtermen minder relevant. Voor de thuistoets geldt in zekere zin hetzelfde. De conventionele, individuele, schriftelijke toetsen kunnen ook bij de toetsing van de eindtermen een belangrijke rol blijven vervullen. De multiple-choicevorm is soms uitermate geschikt, bijvoorbeeld bij handig en schattend rekenen, maar in het algemeen gesproken is de meerkeuzevraag voor het reken-wiskundeonderwijs ondoelmatig en ongewenst, gelet op de hier geformuleerde leerdoelen. Een goed voorbeeld van een adequate toetsing, qua vraagvorm en inhoud, vinden we in de periodieke peiling van het onderwijsniveau voor rekenen-wiskunde, uitgevoerd door het Cito.

Naast landelijke toetsen zou er ruimte moeten komen voor meer lokale en schoolgerichte toetsen die ter keuze van de scholen staan en die dezelfde kwaliteit als de nationale toetsen bezitten. In ieder geval vragen de hier geformuleerde eindtermen in ruime zin (algemene en specifieke leerdoelen) ook om toetsen die in een ruim jasje zijn gestoken en niet in het keurslijf van vierkeuzevragen zijn ingesnoerd. Toetsen kortom die passen bij 'de grootte van Nederland' op het domein van rekenen-wiskunde.

Deel II
Honderd opgaven

I De honderd opgaven

De 100 opgaven geven een indruk van het beoogde reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool. Ze zouden zo uit een deeltje 6B van een nieuwe methode gehaald kunnen zijn. Daarbij is echter niet al te zeer op een evenwichtige verdeling over de zes leerstofgebieden gelet. Sommige opgaven kunnen door de kinderen zelfstandig opgelost worden, andere zijn vooral geschikt om er gezamenlijk aan te werken. Ook is het niet zo dat alle kinderen alle opgaven moeten kunnen maken. Welke daarvoor wel bedoeld zijn laten we hier in het midden. Uitspraken daarover zijn trouwens ook moeilijk te doen. Wel valt er wat over mogelijke oplossingsmethodes te zeggen. Dat doen we in een korte, niet-uitputtende nabespreking. Daarmee wordt tevens beoogd zicht te geven op het onderwijs dat gericht is op de onderhavige eindtermen.

1. Je hebt de cijfers 1, 2, 3 en 4.
Daarmee ga je vermenigvuldigopgaven maken met twee getallen.
Ieder cijfer mag je één keer gebruiken, bijvoorbeeld zo:
2 × 143
13 × 42
a. Bedenk de vermenigvuldiging met de kleinste uitkomst.
b. Bedenk de vermenigvuldiging met de grootste uitkomst.

2. Toen Elise van huis wegging stond de kilometerteller van haar fiets op 083,7.
Toen zij later terugkwam stond de teller op 105,3.

Hoeveel heeft Elise die dag gefietst?

3. a. Een getal is deelbaar door 8 en door 6.
   Dit getal is groter dan 100 en kleiner dan 140.
   Welk getal is dat?
   b. Een getal is deelbaar door 6 en niet door 3.
   Welk getal kan dit zijn?
   c. Een getal is deelbaar door 3 en niet door 6.
   Welke getallen kunnen dit zijn?

4. Guus en Jack gaan de hele buitenkant van het huis schilderen.
   Ze hebben zes potten verf nodig.
   Iedere pot kost *f* 16,55.
   Hebben ze aan *f* 100,– genoeg?

5. Jannies klas gaat kamperen. Ze gaan met auto's.
   Er zijn 29 kinderen en er kunnen 4 kinderen in een auto.
   a. Hoeveel auto's moeten er rijden?
   b. Geef eens een paar mogelijkheden van hoe de kinderen verdeeld zijn over de auto's.

6. Maak de volgende opgaven.
   Bepaal door schatting of je de komma op de juiste plaats hebt gezet.
   a. $2{,}7 \times 6 =$
   b. $6 \times 2{,}7 =$
   c. $0{,}6 \times 27 =$
   d. $0{,}3 \times 251 =$
   e. $1{,}3 \times 251 =$
   f. $13 \times 2{,}51 =$

7. Michel slaapt elke nacht ongeveer 8 uur.
   a. Hoeveel uur per jaar slaapt Michel ongeveer?
   b. Hoeveel uur per jaar is Michel ongeveer wakker?

8. Michel slaapt elke nacht ongeveer 8 uur.
   a. Het hoeveelste deel van de dag slaapt hij?

b. Het hoeveelste deel van de week slaapt hij?
c. Het hoeveelste deel van het jaar is hij wakker?

9. Kan iemand één miljard seconden oud zijn?
En kan twee miljard?
En drie miljard?
Hoeveel seconden oud ben jij zelf ongeveer?

10. Mirjam is jarig op 6 november.
Dat valt dit jaar op vrijdag.
Op welke dag is Mirjam volgend jaar jarig?

11. Nettie heeft berekend dat haar auto ongeveer 16 kilometer loopt op 1 liter benzine.
Ze maakt een tocht van 170 km.
a. Hoeveel liter benzine heeft ze ongeveer nodig?
b. Hoeveel kost die reis ongeveer?
c. Zoek eens uit hoeveel die reis met de trein kost.

12. De kilometerteller van de fiets van Rob staat op 99,9.
Hij fietst nog 100 meter.
Nu staat zijn kilometerteller op ...

13. Hoeveel tafeltjes staan er ongeveer in jouw school?

14. Zoek eens uit hoeveel je ongeveer gemiddeld op een dag loopt.

15. Eduard viert in 1987 zijn 54ste verjaardag.
In welk jaar is hij geboren?

16. Vier repen chocolade worden onder zes kinderen verdeeld.
a. Hoeveel krijgt één kind?
b. Teken verschillende manieren om vier repen met z'n zessen te verdelen en schrijf de breuken erbij.

17. Berry vraagt 28 klasgenoten wat hun favoriete sport is.
Negen kinderen noemen tennis.

Welk deel is dat ongeveer?
a. $\frac{2}{5}$
b. $\frac{1}{2}$
c. $\frac{1}{3}$

18. Adriaan heeft de volgende proefwerkcijfers voor taal: $6\frac{1}{2}$, 4, 8, 7, $5\frac{1}{2}$, 6.
Wat is zijn gemiddelde cijfer?

19. Karel rijdt in 9 uur 700 kilometer en verbruikt op die afstand een volle tank van 50 liter.
a. Wat is de gemiddelde snelheid?
b. Karel rijdt met dezelfde gemiddelde snelheid verder. Hoe lang doet hij dan ongeveer over 1000 kilometer?
c. En hoeveel benzine verbruikt hij voor die 1000 kilometer?

20. De auto van Wil verbruikt 20 liter benzine voor een afstand van 290 kilometer.
De auto van Henk verbruikt 12 liter benzine voor 170 kilometer.
Henk zegt dat zijn auto zuiniger is.
Wil zegt dat het niet veel uitmaakt.
Wat vind jij ervan?

21. 5 kilogram waspoeder kost *f* 7,98.
Een ander pak waspoeder van 6 kilogram kost *f* 8,98.
Welk pak is voordeliger?

22. In de groep van Maria zitten 10 kinderen.
Maria is de kleinste van de groep. Ze is 1,42 m.
De lengten van de andere kinderen zijn:

één	van	1,44 m
drie	van	1,46 m
één	van	1,49 m
twee	van	1,54 m
één	van	1,56 m
één	van	1,58 m

Schat de gemiddelde lengte van de kinderen uit de groep van Maria.

23. Het gemiddelde aantal kinderen per gezin in Nederland is 1,9.
Op enkele honderden scholen in Nederland is onderzocht hoeveel het gemiddelde aantal kinderen was van de gezinnen van die schoolkinderen.
De uitkomst van dat onderzoek was: een gemiddeld aantal kinderen van 2,8.
Hoe zou het komen dat dit gemiddelde zoveel hoger ligt dan het landelijk gemiddelde?

24. Harrie verdient *f* 12,– per uur.
Voor overwerk krijgt hij anderhalf keer zoveel uitbetaald.
Afgelopen week werkte Harrie 40 uur en maakte hij daarnaast nog 8 overuren.
Hoeveel heeft hij die week verdiend?

25. Pimmetje was jarig en zijn vriendjes hadden een cadeautje voor hem in de tuin verstopt. Pimmetje moest het cadeautje proberen te vinden. Hij kreeg de volgende aanwijzingen:

Ga bij de steen staan en kijk in de richting van de boom. Draai een kwartslag naar rechts en loop in die richting een afstand die even lang is als de afstand van de steen tot de boom.
Kijk dan weer naar de boom vanaf dit nieuwe punt.

Draai nu een achtste slag naar links en loop weer de afstand steen-boom.
Op het punt waar je nu aankomt kun je het cadeautje vinden.
Waar ligt het cadeautje voor Pimmetje?

26. Ome Willem wil in zijn testament zetten dat zijn oudste zoon $\frac{2}{3}$ deel van de bezittingen krijgt, zijn dochter een kwart en zijn jongste zoon $\frac{1}{5}$ deel.
Wat zou de notaris daarvan zeggen?

27.
a. Kan het gemiddelde aantal kinderen in twee gezinnen 3,6 zijn?
b. Kan het gemiddelde aantal kinderen in 5 gezinnen 1,8 zijn?
c. Kan het gemiddelde aantal kinderen in Amersfoort 5,1 zijn?

28. Zes vrienden hebben voor 30 keer een tennisbaan gehuurd. Op elke dag dat er getennist kan worden kunnen er vier mensen spelen.
Ze spelen even vaak.
Hoeveel keer mag iedereen spelen?

29. Je hebt geleerd dat je in sommen altijd eerst moet uitrekenen wat tussen haakjes staat.
Zo is

$$5 \times (3 + 2) = 5 \times 5 = 25$$
$$(5 \times 3) + 2 = 15 + 2 = 17$$

Plaats in ieder van de volgende opgaven haakjes op verschillende plaatsen en probeer zoveel mogelijk verschillende antwoorden te krijgen.

a. $4 + 6 + 7 =$
b. $12 - 6 - 2 =$
c. $4 \times 7 + 2 =$

d. 24 : 8 − 2 =
e. 12 + 6 × 2 =
f. 18 − 6 : 2 =
g. 15 − 5 + 2 =
h. 5 × 6 − 4 =

30. Kies bij de volgende opgaven het juiste antwoord, zonder het precies uit te rekenen. Probeer het zo snel mogelijk te doen.

1. 694 + 426 =	a. 1390	b. 1120	c. 870
2. 7200 + 320 =	a. 7520	b. 10.500	c. 450
3. 5525 + 5735 =	a. 1260	b. 25.260	c. 11.260
4. 4783 + 9790 =	a. 14.573	b. 10.573	c. 14.570
5. 9762 + 1003 =	a. 10.765	b. 9865	c. 8559
6. 6840 + 2203 =	a. 9043	b. 28.843	c. 2883
7. 4001 + 22.469 =	a. 62.470	b. 26.470	c. 22.870
8. 17.279 + 4007 =	a. 21.286	b. 57.286	c. 17.685
9. 83.004 + 71.012 =	a. 79.316	b. 154.016	c. 100.016
10. 24.067 + 610 =	a. 3077	b. 30.167	c. 24.677
11. 430 + 43.210 =	a. 47.510	b. 4661	c. 43.640
12. 18.051 + 924 =	a. 2775	b. 18.975	c. 27.291
13. 2501 + 20 =	a. 2521	b. 271	c. 2503
14. 14.641 + 17.417 =	a. 86.058	b. 32.058	c. 59.058
15. 4641 + 7417 =	a. 46.058	b. 12.058	c. 39.058

31. 1. Den Helder
2. Groningen
3. Amsterdam
4. Utrecht
5. Arnhem
6. Rotterdam
7. Breda
8. Eindhoven
9. Maastricht

Dit is een kaartje van Nederland. Er zijn een paar plaatsen aangegeven.
De afstand tussen Amsterdam en Utrecht is 40 km.
De afstand tussen Utrecht en Eindhoven is 90 km.

a. Hoe groot zou de afstand tussen Groningen en Arnhem zijn?
b. Hoe groot zou de afstand tussen Utrecht en Rotterdam zijn?
c. Hoe groot zou de afstand tussen Arnhem en Breda zijn?
d. Wat ligt verder van Maastricht: Den Helder of Groningen?
   Hoeveel scheelt dat ongeveer?

32. Vermenigvuldig.
Probeer het zo handig mogelijk te doen.

a. 528
357 ×

b. 319
10 ×

c. 319
100 ×

d. 319
101 ×

e. 319
111 ×

f. 843
1000 ×

g. 1000
843 ×

h. 1001
843 ×

33. Bij elke opgave is één van de antwoorden correct. Kruis aan welk dat is.

1. 52[redacted]
\+ 5[redacted]

a. 10
b. 105
c. 150

2. [redacted]7
\+ 3[redacted]0

a. 700
b. 400
c. 1090

3. 3[redacted]
× 1[redacted]

a. 3663
b. 2336
c. 9999

7. [redacted]29
3[redacted]9
+ 11[redacted]

a. 885
b. 18[redacted]5
c. 3[redacted]5

8. 5[redacted]8
− 1234

a. 4444
b. 444
c. 44

9. 8[redacted]
× 49[redacted]

a. 50[redacted]7
b. 421[redacted]
c. 321[redacted]

34. Kies bij de volgende opgaven het juiste antwoord, zonder het precies uit te rekenen.
Probeer het zo snel mogelijk te doen.

47,38 + 1,65 =
a. 47,93
b. 49,03
c. 54,33

731,51 − 2,81 =
a. 734,33
b. 703,42
c. 728,70

0,58 + 0,44 =
a. 0,14
b. 1,02
c. 10,20

47,1 − 23,4 =
a. 70,5
b. 2,37
c. 23,7

35. a. 76,753 : 10 =
b. 0,213 : 100 =
c. 26 : 1000 =
d. 1000 × 0,1 =
e. 17,23 × 1000 =

f. $0{,}03 \times 1000 =$

g. $1300{,}10 : 100 =$

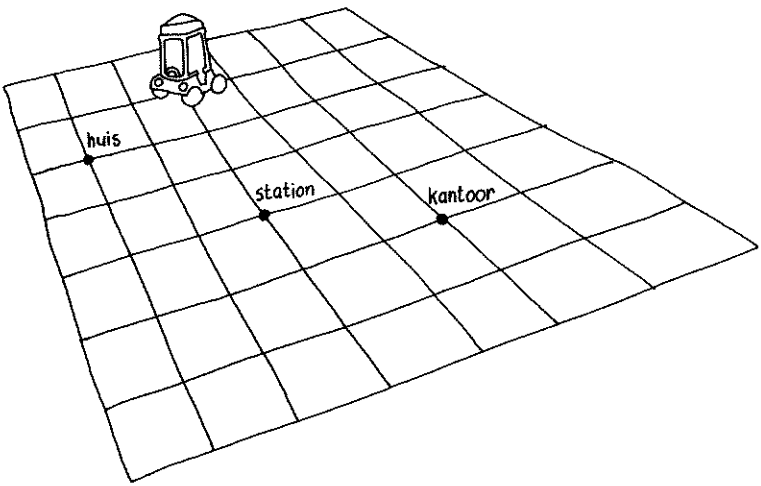
h. $0{,}003 \times 10 =$

36. Vul de lege hokjes in.

×	4		9
	12		
7		35	
	32		

×			
4		16	
		24	
	72	36	27

37.



Iemand rijdt iedere dag van huis naar kantoor.
Bij het station haalt hij een collega op.
Hij probeert elke dag een andere route te rijden.
Hoeveel dagen kan hij dat volhouden?

38. Vergelijk de volgende breuken.
Kies het juiste teken:
< (kleiner)
> (groter)
= (is gelijk)

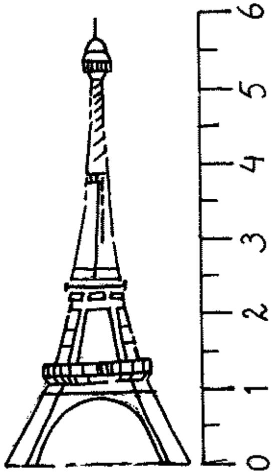
a. $\frac{1}{3}$ ... $\frac{1}{4}$
b. $\frac{3}{5}$ ... $\frac{3}{4}$
c. $\frac{4}{7}$ ... $\frac{4}{9}$
d. $\frac{11}{22}$ ... $\frac{7}{14}$
e. $\frac{1}{2}$ ... $\frac{13}{25}$
f. $\frac{13}{14}$ ... $\frac{14}{15}$

39. Dries schaatst een tocht van 50 km in $4\frac{1}{2}$ uur. Evert doet over een schaatstocht van 30 km $2\frac{1}{2}$ uur.
Wie van de twee heeft gemiddeld het snelst gereden?

40. Janine gebruikt vier schepjes koffie voor drie kopjes.
Annelies gebruikt drie schepjes koffie voor twee kopjes.
Wie zet de sterkste koffie?

41. Bij een grenswisselkantoor krijg je voor 100 Franse francs *f* 40,– , zo staat op een bord aangegeven.
Wat staat er nu op datzelfde kantoor voor de Fransen geschreven.
Vul in: ... gulden voor ... francs.

42.



De Eiffeltoren is in het echt 300 meter hoog. Op welke schaal is hij hier afgebeeld?

43. Bij een kaart staat deze schaalaanduiding:

Schaal 1 : 25000

1 km

Je vergroot de kaart met de overheadprojector.

a. Klopt de schaalaanduiding nu nog op de geprojecteerde kaart?
b. Je wilt vanaf de geprojecteerde kaart een afstand berekenen.
   Hoe moet je dat doen?

44. In een pannekoekenhuis krijgt een groep van acht kinderen zes pannekoeken. Aan een andere tafel worden acht pannekoeken onder twaalf kinderen verdeeld.
Aan welke tafel krijgen de kinderen het grootste stuk?

45. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$
$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$
$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} =$
$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$
$1\frac{1}{4} + \frac{6}{12} =$
$1\frac{1}{4} - \frac{6}{12} =$
$1\frac{1}{4} \times \frac{6}{12} =$
$1\frac{1}{4} : \frac{6}{12} =$
$2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} =$
$2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2} =$
$2\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{2} =$
$2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2} =$

46. De kat van Pauline gaat mee op een vakantie van twaalf dagen.
Pauline neemt het voer mee. De kat eet elke dag driekwart blikje.

a. Hoeveel blikjes moet Pauline meenemen?
b. Op hoeveel dagen en op welke dagen hoeft Pauline

geen aangebroken blikje met een rest kattevoer te bewaren?

47. De gemeenteraad gaat stemmen over een heel belangrijke kwestie.
In dat geval moet minstens vijf zesde deel van alle raadsleden aanwezig zijn. 19 van de 24 leden blijken aanwezig.
Kan er gestemd worden over die belangrijke kwestie? Waarom wel/niet?

48. **Waarom een Miele de voorkeur verdient:**

Zeer lange levensduur, gebouwd voor 5.000 wasbeurten.
De beste vuil- en vlekverwijdering met minimale slijtage van het wasgoed.
Ideale behandeling van elke textielsoort door digitale sturing.
Centrifugetoerental op 7 standen instelbaar van 600 tot 1250 omw/min.
Programma-instelling en vrije temperatuurkeuze gelijktijdig met één knop.
Behoedzame aanloop bij centrifugeren en automatische onbalansbewaking en dat betekent rustige werking.
Toets 'zonder centrifugeren', te gebruiken bij alle programma's.
Toets 'behoedzaam' voor voorzichtige wasbeweging bij kwetsbare textielsoorten.
Schakelaar voor extra spoelgang.
½-knop voor kleine wasjes.
Geschikt voor fosfaatvrije wasmiddelen.
Kinderveilige wasmiddellade.
Tijdens levensduur wasmiddelbesparing van vele honderden guldens mogelijk.
Duurzaam tweezijdig geëmailleerd.
Zuinig met water en stroom.

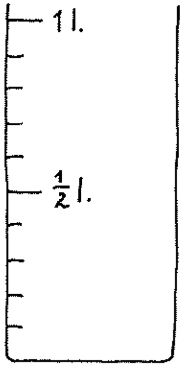
Dit is een wasmachineadvertentie.
Reken eens uit hoe lang zo'n wasmachine ongeveer meegaat in een doorsnee gezin.

49. 5 halen
4 betalen.
Hoeveel procent korting betekent het als je vijf flessen à *f* 6,25 per stuk koopt?

50. De windsnelheid is bij windkracht 11 ongeveer 30 meter per seconde.
Hoeveel kilometer per uur is dat?

51. Tapijt 4 m breed.
f 78,75 per strekkende meter.
Hoeveel kost het om een kamer van 3,60 m bij 7,40 m met dit tapijt te beleggen?

52.



Pieter giet 800 ml water in deze beker.
Teken hoeveel water er dan in de beker zit.

53. Yvonne rekent uit op de rekenmachine:

45,4 + 359,32 + 217,18

Zij noteert het antwoord: 6219.
Ze vergeet de komma.
Waar moet die staan?

54. Janna moet vier keer 663 aftrekken van het getal 6630.
Zij maakt één vermenigvuldiging en heeft gelijk het antwoord.
Welke vermenigvuldiging maakte de slimmerik?

55. De helft van een erfenis is voor oom Laurens.
De andere helft wordt gelijk verdeeld over zijn 3 kinderen.
Het hoeveelste deel van de totale erfenis krijgt elk kind?

56. Welk getal ligt even ver van 35½ en 36?

57. De bakker moet 1½ liter slagroom kopen. Er zijn alleen nog maar flesjes van ⅛ liter. Hoeveel flesjes moet hij meenemen?

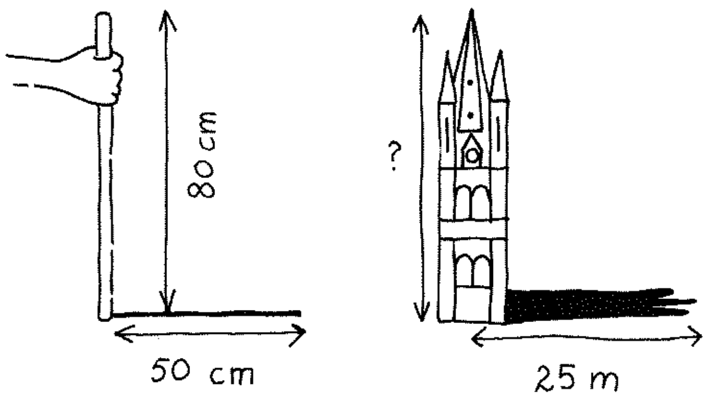
58. 38 personen huren samen een bus voor *f* 450,–.
Hoeveel moet elk betalen? Doe het zo nauwkeurig mogelijk.

59. Vader noteerde de stand van de kilometerteller van de auto op 1 januari 1986.
Precies een jaar later noteerde hij op 1 januari een stand van 84305 km. 'Dit jaar heb ik 15695 km gereden,' zei vader.
Wat was de stand op 1 januari 1986?

60. Welk van onderstaande weegschalen komt het dichtst bij 7,6 kg?

A 7,69 kg C 7,583 kg
B 7,06 kg D 7,506 kg

61.

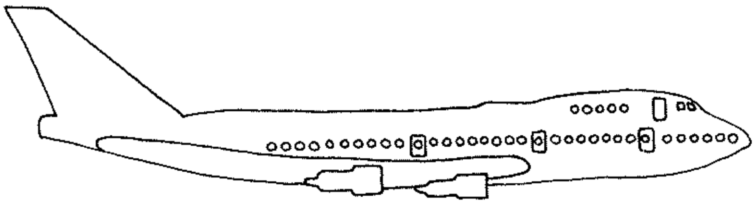


Een stok van 80 cm geeft een schaduw van 50 cm. Op dezelfde tijd is de schaduw van de toren 25 m.
Hoe hoog is de toren?

62. Vul steeds de goede maat in (na het getal):
   a. In onze woonkamer ligt ongeveer 24 ... vloerbedekking.
   b. De provincie Utrecht heeft een oppervlakte van ongeveer 910 ...
   c. Een gewone Nederlandse postzegel heeft een oppervlakte van 525 ...
   d. De oppervlakte van je rekenboek is ongeveer 4,5 ...

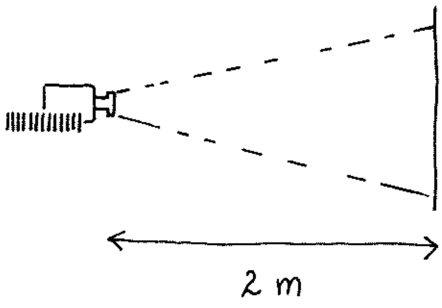
63. Hoeveel woorden bevat een boek van 200 bladzijden? Geef een antwoord dat het meest redelijk lijkt. Verklaar je antwoord.
   Kies uit:
   1. ongeveer 1000 woorden;
   2. ongeveer 10.000 woorden;
   3. ongeveer 100.000 woorden;
   4. ongeveer 1.000.000 woorden.

64. Schat op welke schaal de Jumbojet van 80 m lengte is getekend.

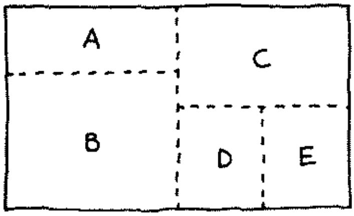


65. Jan kreeg bij de fietsenhandelaar 10% korting.
   Hij moest toen nog *f* 270,– betalen.
   Hoeveel kostte de fiets zonder korting?

66.



De diaprojector staat 2 m van het scherm af. Het beeld op het scherm is 90 cm breed en 60 cm hoog. De projector wordt nu op 3 m afstand van het scherm gezet.
Hoe groot zal het beeld dan zijn?

67. 

Van dit stuk grond zijn volkstuintjes gemaakt. Die worden verhuurd. Het hele stuk grond moet *f* 560,– opbrengen.
Hoeveel huur moet tuin D dan opbrengen?

68. Telefoneren buiten het eigen district in Nederland tussen 8 en 18 uur kost 16 cent per 47 seconden of een gedeelte daarvan.
Hoeveel kost een gesprek van precies 3 minuten?

69. Joop droomt dat hij zoveel geld op de bank heeft staan dat hij alleen van de rente kan leven. Hij zou dan *f* 3000,– per maand willen hebben. De bank geeft 6% rente per jaar.
Hoeveel geld zou hij dan op de bank moeten hebben?

70. Dit jaar bracht de fancy-fair *f* 3300,– op. Dat is anderhalf keer zoveel als vorig jaar.
Hoe groot was de opbrengst vorig jaar?

71. Een fles van ¾ liter is voor de helft gevuld.
Hoeveel liter zit er in die fles?

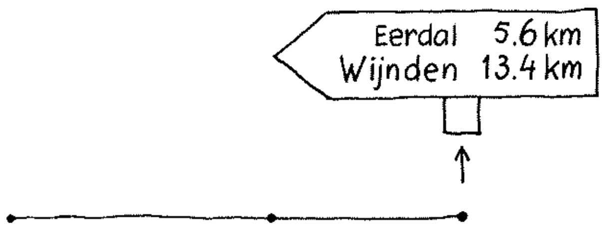
72. In een lege tank wordt 1200 liter olie gepompt.

Daarna geeft de wijzer aan dat de tank voor $\frac{3}{4}$ gevuld is. Hoeveel liter kan er in totaal in die tank?

73. De 80-jarige oorlog begon in 1568.
Hoeveel jaar is dat nu geleden?

74. De familie Klabbers doet mee aan een puzzeltoertocht met de auto.
De tocht is 195 km lang. Bij de start staat hun kilometerteller op:
025789
Aan het eind staat hun kilometerteller op:
026009
Hoeveel hebben ze omgereden?

75.



Wijnden Eerdal Zeldam

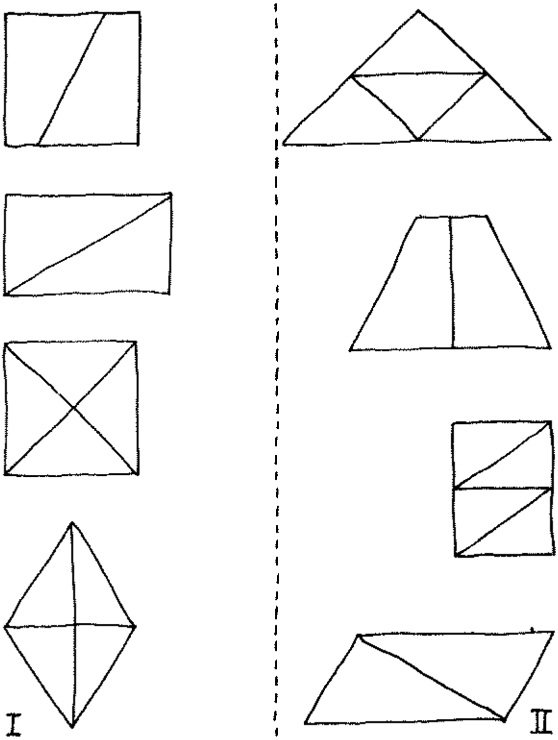
Hoeveel kilometer ligt Wijnden van Eerdal?

76. 100 Oostenrijkse schillingen kosten *f* 16,35. Angeline koopt in Oostenrijk iets voor 148 schilling.
Hoeveel is dat ongeveer in Nederlands geld? (Rond het antwoord af op hele guldens.)

77. $3\frac{1}{2}$ miljard is de afronding van
(Zet een rondje om de letter bij het goede antwoord.)
A 3525428109 C 3546892
B 34513725 D 346148

78. Uit de krant
Ongeveer 60% van de Nederlanders gaat jaarlijks met vakantie.
Daarvan blijft ongeveer 50% in eigen land.
Hoeveel Nederlanders gaan er per jaar ongeveer met vakantie naar het buitenland?

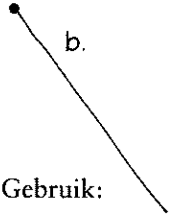
79.



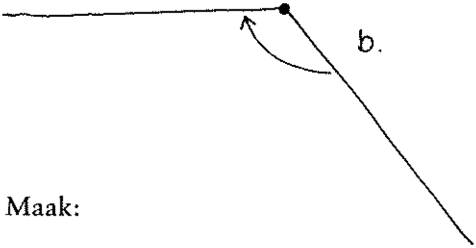
Welke figuren uit de vakken I en II horen bij elkaar?

80. Maak hoeken met een spiegel. Teken steeds de spiegellijn.

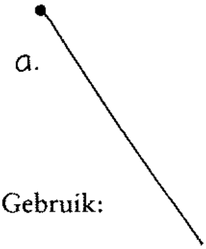
Gebruik:



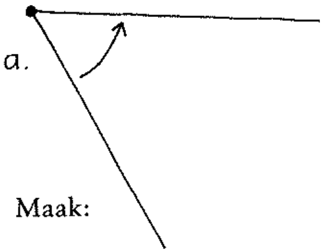
Maak:



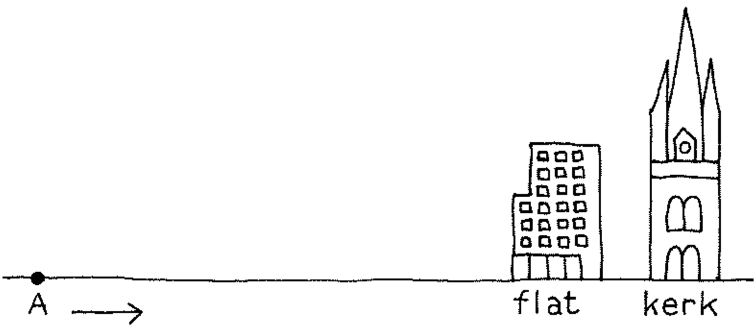
Gebruik:



Maak:

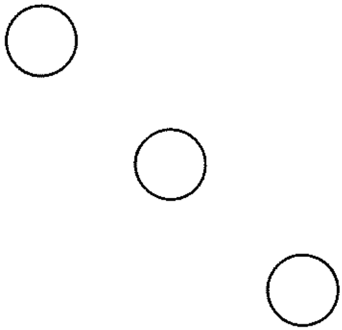


81.



Iemand loopt vanaf A naar de flat en de kerk. De kerk staat recht achter de flat.
Arceer het gedeelte van de weg van waaruit hij de torenspits niet meer kan zien.

82.

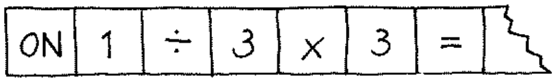


Een spiegel wordt loodrecht op het papier gezet.

a. Teken een stand van de spiegel zodat je vijf stippen ziet.

b. Teken ook de spiegelbeelden.

83.



Bij zakrekenmachine A is het antwoord: 0,999999999.
Bij zakrekenmachine B is de uitkomst: 1.
Hoe komt dat?

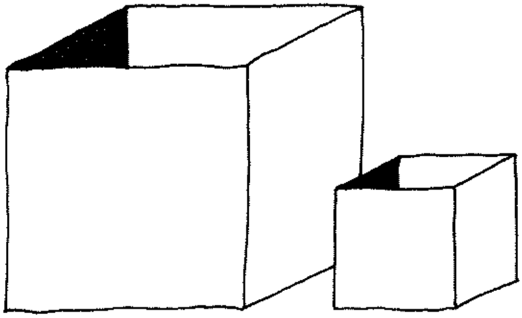
84. Vijf penselen kosten *f* 83,48 inclusief BTW (20%).
Hoeveel bedraagt de BTW?
Gebruik de zakrekenmachine.

85.

Hoeveel vierkante kilometer is Texel ongeveer? Gebruik je liniaal.

86.

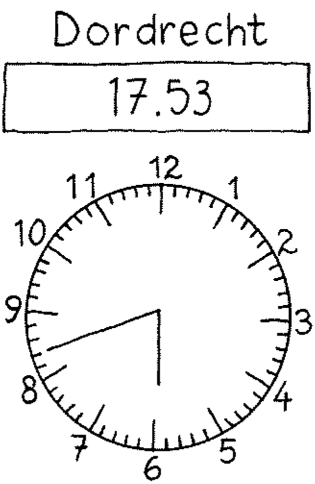
Op een brug staat dit bord. Kun je er met een personenauto overheen?
Motiveer je antwoord.

87. 

Hoeveel kleine bakjes kun je in het grote bakje gieten tot hij vol is?

88. Je ziet een bliksemflits. Na 5 tellen hoor je de donderslag. Hoe ver is het onweer ongeveer weg?

89. Hoe zou je het aantal rijstkorrels in een pak rijst kunnen schatten?

90. 

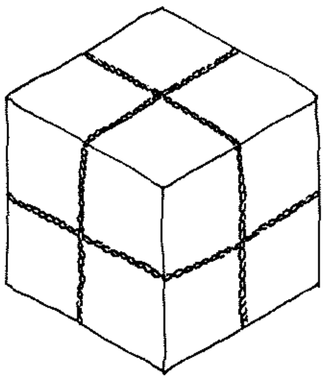
Hoeveel minuten heb je nog om de trein naar Dordrecht te halen?

91. Prijzen moeten per kilogram aangegeven worden.

Sperziebonen *f* 3,50/kg
Spinazie *f* 2,20/kg
Andijvie *f* 2,60/kg

a. Hoeveel kost 200 gram sperziebonen?
b. De snelweger van AH wijst 817 gram spinazie aan. Bereken de precieze prijs met de zakrekenmachine.
c. Hoeveel kost 1½ pond andijvie ongeveer?

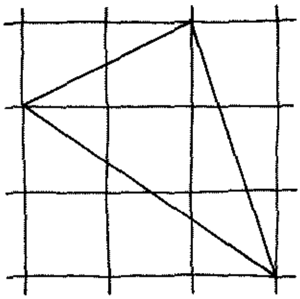
92. Een houten kubus wordt in een kartonnen doos verpakt met een touwtje eromheen:



Bij een andere kubus van hetzelfde soort hout is voor het inpakken vijf maal zoveel touw nodig.

a. Hoeveel maal zoveel karton is er dan nodig?
b. Hoeveel maal zo zwaar zal de tweede kubus zijn?

93.

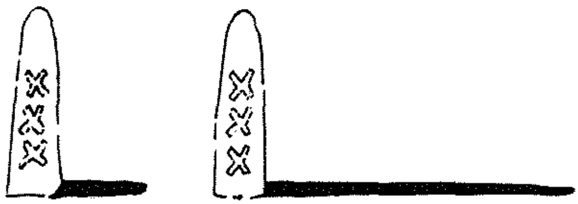


Hoeveel hokjes is de oppervlakte van deze driehoek?

94. Teken *drie* verschillende rechthoeken. Ze moeten allemaal oppervlakte 12 hebben. Zet bij alle rechthoeken de omtrek.

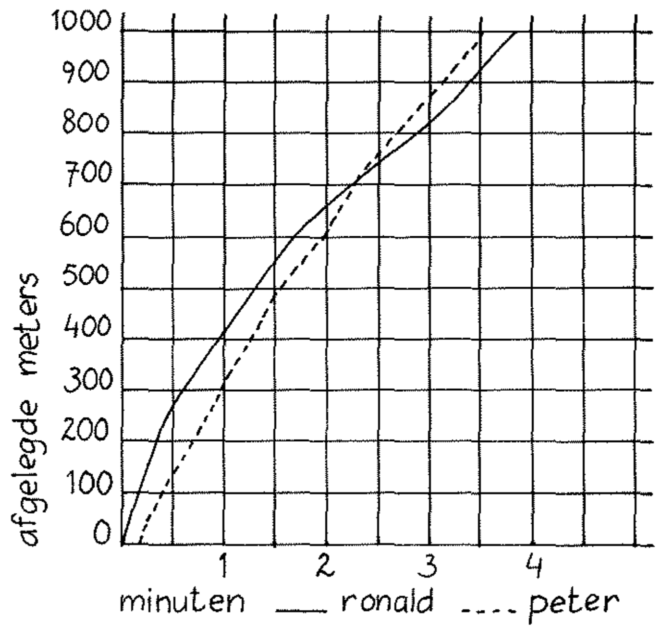
Teken *drie* verschillende rechthoeken. Ze moeten allemaal omtrek 14 hebben. Zet bij alle rechthoeken de oppervlakte.

95. Een lamp schijnt:



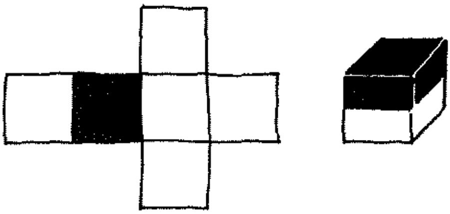
Twee paaltjes en hun schaduwen.
Teken de plek van de lamp.

96. 1000 meter hardlopen



a. Wie wint? In hoeveel minuten ongeveer?
b. Wie start het laatst? Hoeveel seconden later ongeveer?
c. Na hoeveel meter liggen ze gelijk?

97.

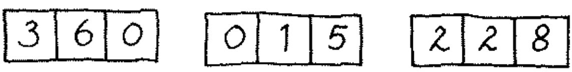


Van een kubus is de bovenste helft gekleurd.
Maak de kleuringen op de uitslag af.

98. Wat komt er in het venster van een zakrekenmachine te staan als je de volgende breuken uitrekent?

$^1/_9$ =
$^2/_9$ =
$^4/_9$ =
$^8/_9$ =
$^9/_9$ =

99. Een cijferslot heeft drie posities:



In elke positie kan één van de cijfers nul tot en met negen geplaatst worden. Hoeveel verschillende combinaties zijn er mogelijk?

100. Een dominospel gaat tot 4 stippen.

Hoeveel stenen bevat dit spel?

1. Lukraak proberen leidt tot een onoverzichtelijke hoeveelheid produkten. Alle mogelijkheden opschrijven is niet nodig, omdat je zo ziet dat 4×231 groter is dan 4×123. Van deze soort moet 1×234 de kleinste zijn. Vergelijking met 13×24, wat al meer is dan 240, geeft de zekerheid over 234 als kleinste produkt. Voor het grootste produkt bekijken we eerst $4 \times 321 = 1284$.
Van de tweecijferige gevallen hoeven we dan alleen nog te bekijken:
$41 \times 32 = 1200 + 80 + 30 + 2 = 1312$
$42 \times 31 = 1200 + 40 + 60 + 2 = 1302$
Inzicht in het positiesysteem, schatten en redeneren zijn de kernpunten van dit vraagstuk.

2. Voor de hand ligt $105{,}3 - 083{,}7 = 21{,}6$. Omdat de kilometerteller telkens bij honderd meter (0,1 km) verspringt kan 105,3 in feite 105,39 zijn en de beginstand kan bijvoorbeeld 83,71 zijn. Er zit dus een onnauwkeurigheid van honderd meter naar boven of beneden in het antwoord. Formeel genoteerd $21{,}6 \pm 0{,}1$.

3. a. Je kunt proberen. Het zesvoud 120 is meteen al goed. Deelbaar door 6 en 8 betekent ook deelbaar door 24 en $5 \times 24 = 120$.
   b. Elk getal dat deelbaar is door 6 is ook deelbaar door 3. Zo'n getal kunnen we dus niet vinden.
   c. Dit zijn de oneven drievouden 3, 9, 15, 21, et cetera.

4. $6 \times f\ 16,- = f\ 96,-$ en 6×55 cent $= 330$ cent $=$ f 3,30. Het gaat dus net.

5. a. Het gaat net niet met 7 auto's omdat $7 \times 4 = 28$. Dus rijden er 8.
   b. $29 = 7 \times 4 + 1 \times 1$
   $29 = 6 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 3$
   $29 = 5 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 3 + 1 \times 3$

Dit zijn verdelingen afgezien van de personen.

6. $6 \times 27 = 120 + 42 = 162$ (uit het hoofd).
$6 \times 2{,}7$ is meer dan 12 (6×2), minder dan 18 (6×3), dus 16,2.
Let ook op afleidingen uit elkaar: $0{,}6 \times 27 = (0{,}6 \times 10) \times (27 : 10) = 6 \times 2{,}7$.

7. Acceptabele schattingen zijn:
   a. $350 \times 8 = 700 \times 4 = 2800$ of $360 \times 8 = 2400 + 480 = 2880 \approx 2900$.
   b. Michel is per dag twee maal zo lang wakker als in slaap. Per jaar dus ook. Dus zo ongeveer 6000 uur.

8. Elke dag ⅓ deel, betekent ook ⅓ deel van een week of een ander tijdsdeel. ⅔ deel van de tijd is hij wakker. Dit principe is al in het vorige vraagstuk gebruikt.

9. In een jaar gaan $60 \times 60 \times 24 \times 365$ seconden. De rekenmachine laat zien 31.536.000, dus circa 31,5 miljoen. Eén miljard is duizend miljoen. Laten we eens uitgaan van 32 jaar. $32 \times 31{,}5$ is groter dan duizend. Dit kan dus zeker, we hebben de schrikkeljaren niet eens meegerekend. Ook twee miljard kan en sommigen kunnen drie miljard seconden halen. Je eigen leeftijd precies in seconden bepalen is een lastige zaak, je wordt al ouder terwijl je rekent.

10. Een jaar heeft 365 dagen, 364 is een zevenvoud. Dus elk jaar schuift op dezelfde datum de dag één op, in dit geval van vrijdag naar zaterdag. Als het echter om een schrikkeljaar gaat is er een verschuiving van twee dagen. Het is dan wel van belang er op te letten of de datum vóór of na 29 februari valt.

11. a. Ga niet delen, maar zeg voor 10 liter 160 km, dus zeker 11 liter.
   b. Als ze nog wat in de stad rijdt gauw 12 liter. Dat is ongeveer $12 \times f\ 1{,}50 = f\ 18{,}-$.
   c. Gebruik het prijzenboekje van de Nederlandse Spoor-

wegen. 161-171 km: *f* 29,30 (prijspeil 1988) voor een enkele reis. Maar is autorijden al met al goedkoper?

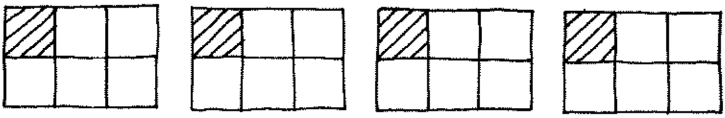
12. De teller komt op 100,0. We weten niet of dit is 100,01 of 100,05, et cetera. Je kunt tijdens het rijden wel zien of de teller direct of later doordraait.

13. Het kan niet anders dan een grove schatting zijn. Je kunt als volgt redeneren. We hebben 8 groepen, elke groep telt circa 25 kinderen dus zeker 8 × 25 = 200 tafeltjes.

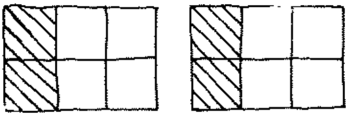
14. Een voorbeeld. Ik loop 5 minuten naar de tram, 5 minuten naar het station, 5 minuten bij het overstappen, 5 minuten naar het instituut. Dit ook terug. Thuis en op het instituut ook nog heel wat en een wandelingetje tussen de middag. Bij elkaar zeker een uur, dus zeg 5 kilometer op een doordeweekse dag.

15. Je eerste verjaardag is één jaar na je geboortejaar. Als je in 1987 54 jaar wordt, moet je dus in 1987 − 54 = 1933 geboren zijn. Je kunt in 1987 echter nog een hele tijd 53 zijn.

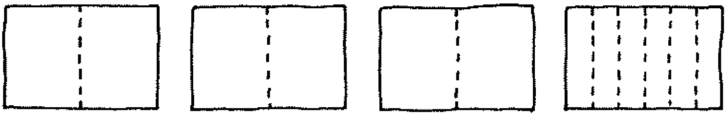
16. – Als de repen al in blokjes van zes zijn voorgestructureerd kun je per reep $\frac{1}{6}$ uitdelen:



Elk kind krijgt dan $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.
– Geef 3 kinderen 2 repen en dat nog een keer en deel weer een reep uit.



Elk kind krijgt $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
– Stel de repen zijn niet in blokjes verdeeld. Geef ieder kind eerst een halve reep en verdeel de laatste reep in zessen.



Elk kind krijgt $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{6}$.

17. 9 van de 28 is zeker minder dan de helft, 2 van de 5 zou al op 10 van de 25 komen en 9 van de 27 zou precies $\frac{1}{3}$ deel zijn. Dus ongeveer $\frac{1}{3}$ deel.

18. 4 en 8 liggen even ver van 6, $5\frac{1}{2}$ en $6\frac{1}{2}$ ook. Alleen die ene 7 wijkt nog af van het gemiddelde en dat over 6 cijfers. Het gemiddelde is dus $6\frac{1}{6}$. Maar wie alle getallen op wil tellen en delen door 6, vindt dit natuurlijk ook.

19. a. 700 : 9 = 77,7 (ca 78 km per uur). Je ziet heel snel dat het quotiënt van de staartdeling alleen maar zevens oplevert.

b.

km	700	350	1000
uur	9	$4\frac{1}{2}$	ca. 13

c.

km	700	100	1000
liter benzine	50	7,--	dikke 70

De gemiddelde snelheid kan exact gegeven worden, maar de antwoorden voor (b) en (c) moeten schattingen zijn.

20. Wil rijdt met 100 liter 5 × 290 = 1450 km.
Henk rijdt dus niet zuiniger. Dat blijkt ook volgens de standaardmethode:
Wil: 290 : 20 = 14,5 (1 op 14,5).

Henk: 170 : 12 = 14,2 (1 op 14,2).

Henk / km	170	1360	≈ 57	≈ 1420
benzine	12	96	4	100

In de praktijk zal het niet veel schelen. Denk aan stad, rijstijl, afstelling, en dergelijke.

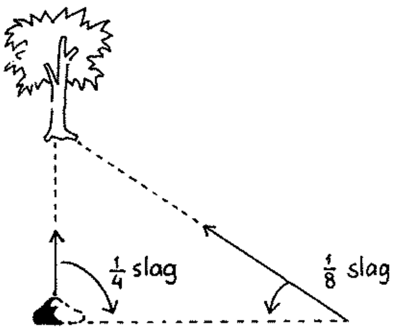
21. Niet exact gaan rekenen. 5 kg voor *f* 8,–, 6 kg voor *f* 9,– dus voor 1 gulden meer ook een hele kilo meer. Dat is goedkoop.

22. 1,50 meter zit in het midden, maar het gemiddelde moet wegens 3 van 1,46 m, 1 van 1,49 m en 2 van 1,54 m iets onder 1,50 m zitten.

23. Een steekproef waarbij alleen scholen gebruikt worden geeft een verkeerd beeld. Je mist namelijk alle gezinnen zonder kinderen.

24. Voor elk uur overwerk 1½ × *f* 12,–. Totaal 40 × *f* 12,– + 8 × *f* 18,– = *f* 624,–

25. Het cadeautje bevindt zich op de plaats van de steen.



26. ⅔ deel = 66⅔%
¼ deel = 25%

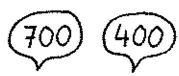
$\frac{1}{5}$ deel = 20%
Dit is samen meer dan 100%. “Dat gaat niet”, zal de notaris zeggen, “u kunt niet meer uitdelen dan u heeft.”

27. a. Nee, want dan zouden er in 2 gezinnen 7,2 kinderen moeten zijn.
b. Ja, want er kunnen in 5 gezinnen 9 kinderen zijn (9 : 5 = 1,8).
c. Amersfoort zal een redelijke afspiegeling geven naar gezindten en bevolkingsopbouw van geheel Nederland. Het is dus niet te verwachten dat het gemiddelde kinderaantal daar zo sterk zal afwijken van het landelijk gemiddelde. Is er überhaupt een gemeente in Nederland met een gemiddelde van 5,1?

28. – Maak een tabel.
dag 1 A B C D
dag 2 C D E F
dag 3 A B E F
Na 3 dagen heeft iedereen 2 keer gespeeld. Na 30 dagen dus 20 keer.
– Met 4 mogelijkheden en 6 mensen komt ieder maar $\frac{2}{3}$ deel van de tijd aan de beurt.
Dus $\frac{2}{3} \times 30 = 20$ wedstrijden.
– In totaal staan er $30 \times 4 = 120$ personen op de baan. Elke persoon $120 : 6 = 20$ keer.

29. De ‘Meneer van Dalen-regel’ is maar een afspraak die vooral problemen oproept als je een zakrekenmachine gebruikt. $2 + 5 \times 2 = 12$ volgens Van Dale, maar veel rekenmachines produceren 14. Gebruik daarom altijd haakjes als er verwarring kan ontstaan. Bij (a) is dat geen probleem, immers $(4 + 6) + 7 = 4 + (6 + 7)$, maar bij (b) gaat dat niet $12 - (6 - 2) = 8$ en $(12 - 6) - 2 = 4$. En zo voort.

30. Een oefening in vlot schatten:



1. $694 + 426 \approx 1100$.

7. $\overset{4000}{4001} + \overset{22.000}{22.469} \approx 26.000$.

Je neemt dus honderdtallen, duizendtallen, et cetera als een nieuwe maat.

31. Je schat op het oog of met een strook papier:

a. ca. 170 km (spoorafstand 182)
b. ca. 50 km (spoorafstand 56)
c. ca. 90 km (spoorafstand 105)
d. Groningen ca. 30 km verder (spoorafstand 298 en 331).

32. Cijferen onder elkaar moet uitgevoerd worden zoals (a) laat zien. Maar altijd zo handig mogelijk. 319 × 101 is direct te zien als:

$$\begin{array}{r@{\ }l} 31900 & \\ \underline{\ \ 319} & + \\ 32219 & \end{array}$$

Daarna volgt 319 × 111 als:

$$\begin{array}{r@{\ }l} 32219 & \\ \underline{\ 3190} & + \\ 35409 & \end{array}$$

Inzicht in eigenschappen en het positiesysteem, daar gaat het om.

33. Begrip van het positiesysteem en orde van grootte schatten zijn hier de eerste doelstellingen. Bijvoorbeeld in vraagstuk twee moeten beide getallen in de honderdtallen zitten en is het antwoord dus boven de duizend (c).

In nummer drie 300 × 10 = 3000, dus (a), et cetera. Een aardige uitbreiding is de precieze getallen te vinden.

34. Geld kan hier een goede steun zijn.

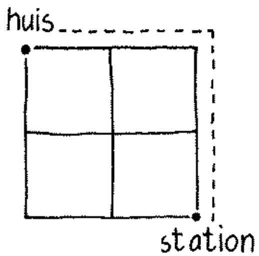
$f\ 47{,}38 \xrightarrow{+\ f\ 1,-} f\ 48{,}38 \xrightarrow{+\ f\ 0{,}65}$ boven f 49,–.

Cijferen is lang niet altijd nodig.

35. De kommaregels zijn belangrijk voor hoofdrekenen en schattend rekenen.

36. Een gevarieerde oefenvorm voor vermenigvuldigen en delen. De samenhang tussen deze operaties komt hierbij duidelijk aan de orde. Zoek eerst zoveel mogelijk de randgetallen.

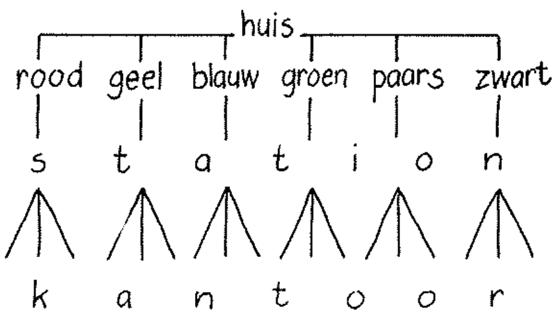
×	4	5	
3	12		
7		35	

37. 

De lengte van een kortste route van huis naar het station is 4 eenheden. Je moet 2 keer naar rechts (r) en 2 keer naar beneden (b). De gestippelde route is met rrbb aan te geven. Andere routes met r beginnend zijn rbrb en rbbr. Beginnen we met b dan ziet de hele lijst mogelijkheden er als volgt uit:

bbrr groen	rrbb rood
brbr paars	rbrb geel
brrb zwart	rbbr blauw.

Je kunt ze met verschillende kleuren aangeven. Van het station naar het kantoor zijn er 3 verschillende kortste routes (rrb, rbr, brr). In totaal zijn er dus $6 \times 3 = 18$ verschillende routes, zoals onderstaand diagram verduidelijkt.



38. – $\frac{1}{3}$ van 12 cent is 4 cent, $\frac{1}{4}$ van 12 cent is 3 cent. Dus $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

– Bij constant houden van teller en groter worden van noemer wordt de breuk kleiner (je verdeelt een portie met meer personen). $\frac{1}{2} = \frac{12,5}{25} < \frac{13}{25}$

– Bij ophogen van teller en noemer met eenzelfde getal nadert de breuk steeds meer tot 1. $\frac{13}{14}$ verschilt $\frac{1}{14}$ van 1 en $\frac{19}{20}$ verschilt $\frac{1}{20}$ van 1, en het verschil van $\frac{99}{100}$ met 1 is nog maar $\frac{1}{100}$.

39. – Dries zou over 150 km $13\frac{1}{2}$ uur doen, terwijl Evert $12\frac{1}{2}$ uur nodig heeft.

– Evert rijdt 30 : 2,5 = 60 : 5 = 12 km per uur. In 2 uur meer zou Evert dus op 54 km komen.

– Ook 50 : 4,5 = 11,11... (rekenmachine) leidt naar de oplossing.

Het is echter de vraag of Evert in werkelijkheid de snelheid van 12 km per uur zou kunnen volhouden.

40. – Hier ziet men duidelijk dat het ophogen van teller en noemer met een zelfde getal de breuk naar 1 doet naderen. 100 schepjes koffie voor 99 kopjes maakt de koffie steeds slapper, namelijk iets meer dan 1 schepje per kopje.

– Natuurlijk kan ook: Janine gebruikt $1\frac{1}{3}$ schepje en Annelies $1\frac{1}{2}$.

– Of 8 schepjes voor 6 kopjes en 9 schepjes voor 6 kopjes.

41. – De verhoudingstabel biedt uitkomst:

francs	100	200	50	250
guldens	40	80	20	100

– Op hoger niveau:

100 × 0,4 40 : 0,4 (of × 2,5)

$$\begin{tikzcd} 100 \arrow[r, bend left, "\times 0{,}4"] & 40 \arrow[l, bend left, ": 0{,}4\ (\text{of} \times 2{,}5)"] \end{tikzcd}$$

42. 6 cm op de tekening komt overeen met 300 m in werkelijkheid.
1 cm op de tekening komt overeen met 50 m in werkelijkheid.
1 cm op de tekening komt overeen met 5000 cm in werkelijkheid.
De schaal is dus 1 op 5000.

43. Natuurlijk klopt de schaalaanduiding 1 : 25000 niet meer. Stel je namelijk in gedachten maar voor dat je tot op ware grootte zou opblazen. Maar de visuele schaal (1 km-lengte) wordt in verhouding mee vergroot. Dus met afpassen van de vergrote afstand kan ook een afstand op de vergrote kaart gemeten worden.

44. – Maak van de tafel met 6 pannekoeken met 8 kinderen drie tafels met 18 pannekoeken en 24 kinderen. En maak van de tafel van 8 pannekoeken met 12 kinderen twee tafels met 16 pannekoeken en 24 kinderen. In het laatste geval krijg je dus minder.
– Deel aan de eerste tafel eerst een halve uit. Ieder krijgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Doe dit ook aan de tweede tafel. Ieder krijgt daar dan $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.
– Natuurlijk kan het ook formeel. Aan de eerste tafel $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ en aan de tweede $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

45. Ook kale breuksommetjes, op formeel niveau, komen aan de orde. Wel met eenvoudige breuken.

46.

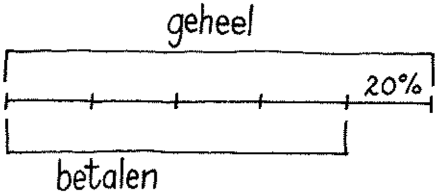
dag	1	2	3	4	....	12
blikjes	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	3	....	9

Hieruit zie je ook dat na dag 4, dag 8 (en dag 12) geen aangebroken blikje bewaard hoeft te worden.
– Natuurlijk kan het ook formeel $12 \times \frac{3}{4} = 9$, dus 9 blikjes.

47. $\frac{1}{6}$ deel van 24 is 4, $\frac{5}{6}$ deel van 24 is 20. Er zijn dus te weinig leden aanwezig.

48. Laten we zeggen dat er 4 keer per week gewassen wordt. Dit is circa $50 \times 4 = 200$ keer per jaar. Dus na 25 jaar zijn we pas aan $25 \times 200 = 5000$ wasbeurten toe.

49. Door de aangegeven prijs ben je geneigd te gaan rekenen: 5 flessen kosten *f* 31,25, je betaalt er maar *f* 25,–. Welk deel is *f* 6,25 van *f* 31,25? Precies $\frac{1}{5}$ deel of 20%, want we hebben net uitgerekend $5 \times$ *f* 6,25 = *f* 31,25. Veel gemakkelijker is het om niet op de prijs te letten. Het geheel is 5, je betaalt er maar 4, een vijfde deel is dus korting. Eventueel zelfs nog ondersteund door visualisering:



50. Snelheden betekenen wat als je ze met bekende snelheden als bijvoorbeeld van de auto of de fietser vergelijkt.
circa 30 meter per seconde
1800 meter per minuut
108.000 meter per uur.
Maar mag je zeggen 108 kilometer per uur? Windkracht 11 op de Beaufortschaal betekent boven land een snelheid die

ligt tussen 28 en 32 meter per seconde. De omrekening in kilometers per uur betekent dus 3600 × (30 ± 2) = (108 ± 7,2) km ofte wel: windkracht 11 kan variëren van 101 tot 115 km per uur. Ga voor het gemak uit van circa 110 km per uur, wat zware storm is.

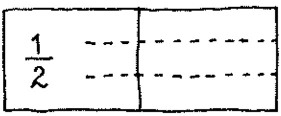
51. Leg je het tapijt in de lengte dan heb je geen naad. Laten we 10 cm extra nemen voor versnijden van niet rechte hoekjes. Dus 7,5 × *f* 78,75 = *f* 590,63 (met de rekenmachine). Bij in de breedte leggen met een naad in het midden, dus 2 stroken van 3,70 m, heb je 7,40 m nodig.

52. Kennis van het metriek stelsel blijft nodig: 800 ml = 800 milliliter (milli betekent duizendste). Dus 800 ml = $^{800}/_{1000}$ liter = 0,8 liter. De schaal langs de beker kan dus genummerd worden met 0,1 l = 100 ml; 0,2 l = 200 ml, et cetera.

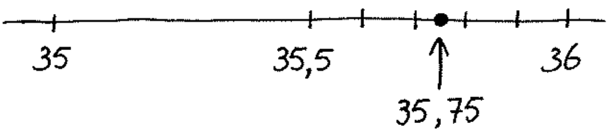
53. De orde van grootte schatten we als volgt: 50 + 360 + 200 = 610. Het antwoord is dus 621,9. Let op het verschil van weergave van een uitkomst op een zakrekenmachine en die bij een cijferopgave (621,90).

54. 6630 − 4 × 663 = 10 × 663 − 4 × 663 = 6 × 663.

55. – Elk kind krijgt $\frac{1}{3}$ deel van de helft, dus $\frac{1}{6}$ deel:



56. – Tussen $35\frac{1}{2}$ en 36 zit $\frac{1}{2}$. Dus $\frac{1}{4}$ verder dan $35\frac{1}{2}$, betekent $35\frac{3}{4}$.



– *f* 35,50 – *f* 35,75 – *f* 36,– (steeds een kwartje meer).

57. Hoe vaak past $\frac{1}{8}$ in $1\frac{1}{2}$? Nu is $4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, dus $12 \times \frac{1}{8} = 1\frac{1}{2}$. Hiermee is het formele delingsprobleem $1\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$ omzeild. Je kunt het uitscheppen van de $\frac{1}{8}$ delen als het ware concreet voor je zien.

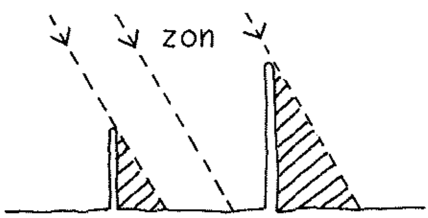
58. Niet alles kan schattend. Soms moet iets precies berekend worden. Je kunt een staartdeling uitvoeren, eventueel met 225 : 19 of met de zakrekenmachine. Maar nu komt daar uit 11,842105... Een redelijk bedrag lijkt dus *f* 11,84, maar 38 × *f* 11,84 = *f* 449,92. Dus we zullen er maar *f* 11,85 van maken. 38 × *f* 11,85 = *f* 450,30 (rekenmachine 450,3). Wie steekt die 30 cent in zijn zak?

59. Een gewone cijfersom:

$$\begin{array}{r} 84305 \\ \underline{15695} \; - \\ 68610 \end{array}$$

60. Lees 7,6 als 7,600. Neem 600.
Vergelijk 690, 60, 583 en 506 met 600.

61. Zonnestralen zijn evenwijdig en maken gelijkvormige 'schaduw-driehoeken'.



stok	0,8	8	40
schaduw	0,5	5	25

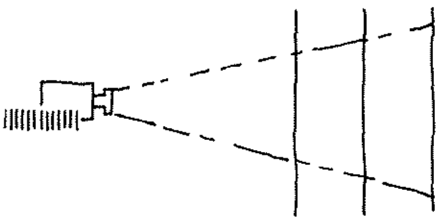
62. Metrieke maten dienen een betekenis te hebben. Dit kan als ze gebonden zijn aan alledaagse zaken. De oppervlakte in een woonkamer wordt in vierkante meters (m^2) uitgedrukt, de provincie Utrecht in vierkante kilometers (km^2), een postzegel in vierkante millimeters (mm^2) en de oppervlakte van een rekenboek kan in vierkante decimeters (dm^2) opgemeten worden.

63. Tel het aantal woorden van een paar regels. Kies een redelijk aantal (10). Tel het aantal regels (40). 200 × 40 × 10 = 8 × 10.000. Honderdduizend lijkt dus redelijk.
Een andere mogelijkheid is om te redeneren vanuit de alternatieven: 1000 woorden zou betekenen 5 woorden per bladzijde; 10.000 woorden 50 per bladzijde, et cetera.

64. De tekening van de Jumbojet is ongeveer 10 cm (op het oog of met een liniaal). 1 cm komt dus overeen met 800 cm. De tekening is dus 800 maal verkleind. De schaal is 1 op 800.

65. – Je probeert *f* 300,–. Dat klopt, want *f* 300,– – *f* 30,– = *f* 270,–.
– *f* 270,– komt overeen met 90%. Dus 10% komt overeen met *f* 30,– en 100% dus met *f* 300,–.

66.



In plaats van het achteruit schuiven van het lichtpunt kun je ook het scherm naar achteren zetten. Het scherm onderschept een groter lichtoppervlak. De 'schaduw'-vergroting loopt evenredig op met de afstand; twee maal zo ver weg, twee maal zo groot. In dit geval dus 1½ maal. Het beeld wordt dus 120 bij 90 cm. Gebruik eventueel een zaklantaarn.

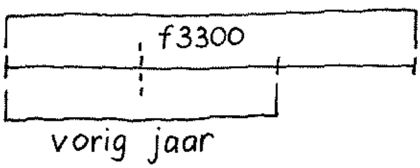
67. De rechterhelft moet *f* 280,– opbrengen en daarvan is D het vierde deel (*f* 70,–).

68. Delen is niet nodig. Eén tik (47 seconden) is iets meer dan ¾ minuut. Na 1½ minuut zit je nog in de tweede tik en bij 3 minuten is de vierde tik nog niet ingegaan. Je betaalt dus 4 tikken. Wie gaat delen 180 : 47 ≈ 3,8 moet naar boven afronden.

69. – 6% per jaar betekent al ½% per maand wat overeenkomt met *f* 3000,–. Het hele kapitaal moet dus 200 × *f* 3000,– = *f* 600.000,– zijn.
– *f* 3000,– per maand is *f* 36.000 per jaar. 6% komt overeen met *f* 36.000,–, dus 1% met *f* 6000,–, et cetera.

%	6%	1%	100%
geld	36.000	6000	.....

geld 36.000 6.000

70. 

Wat er dit jaar meer is, past twee keer in het vorige jaar. Elk van de drie getekende delen is dus *f* 1100,–. Vorig jaar dus *f* 2200,–.
– Formeler:

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r, bend left, "\times \frac{3}{2}"] & f3300 \arrow[l, bend left, ": \frac{3}{2}\ (= \times \frac{2}{3})"] \end{tikzcd}$$

71. De helft van $\frac{3}{4}$ liter is $\frac{3}{8}$ liter of 0,375 liter of 375 milliliter.

72. 1200 liter komt overeen met drie kwarten. Je kunt dus in elk schaaldeel 1200 : 3 = 400 noteren. Totale inhoud 1600 liter.

73. Laat je niet in de war brengen door het getal 80. Het is nu 1988. Dus 1588 is 400 jaar geleden en dan nog eens 20 jaar verder terug (of bij 1990, 22 jaar, of...).

74. Doortellen is wellicht makkelijker dan cijferen. 25789 $\xrightarrow{+11}$ 25800 $\xrightarrow{+200}$ 26000 $\xrightarrow{+9}$ 26009. Lengte van de rit 220 km. Omgereden 25 km.

75. 13,4 − 5,6 = 13,4 − 5,4 − 0,2 = 7,8. Dus vrijwel uit het hoofd.

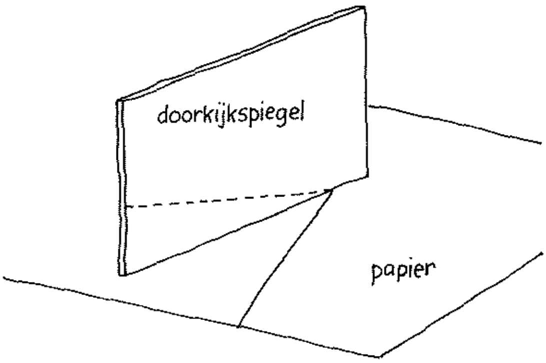
76. 148 schilling is ongeveer anderhalf maal 100 schilling. Bij *f* 16,35 komt dus nog ongeveer *f* 8,–. Laten we zeggen *f* 24,–.

77. 1000 × 1000 = 1 miljoen; 1000 miljoen is 1 miljard. We werken vaak met punten om de 3 cijfers van achteraf (in de VS komma's).
3.525.428.109 ≈ 3,5 miljard. Je gebruikt deze grote getallen in het dagelijks leven als een soort maten.

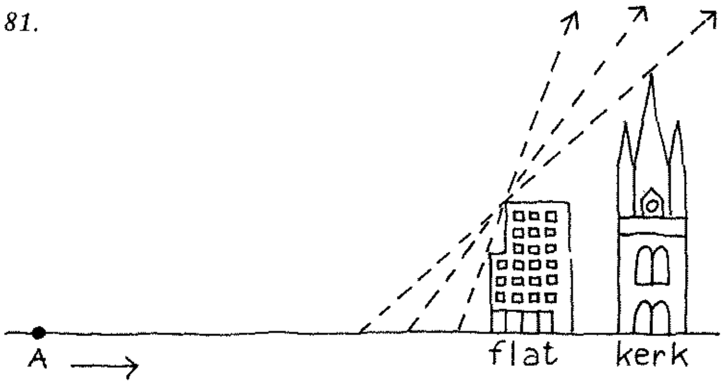
78. Je moet weten dat Nederland ongeveer 15 miljoen (miljoen als maat!) inwoners heeft. 60% daarvan is 0,6 × 15 miljoen is 9 miljoen. En daar de helft van. Dus ongeveer 4,5 miljoen. Alles uit het hoofd. Het is een grove schatting!

79. Het omvormen van figuren is een belangrijke meetkundige activiteit, met name voor het begrip oppervlakte. De figuren horen in paren bij elkaar en hebben dus ook dezelfde oppervlakte, zoals vierkant en trapezium, tweede vierkant en driehoek, rechthoek en parallellogram.

80. Een zogenaamde doorkijkspiegel (blauw perspex), die loodrecht op het papier wordt geplaatst, is een uitstekend hulpmiddel om lijnsymmetrie te introduceren. In dit geval komt ook nog het begrip deellijn (bissectrice) aan de orde.

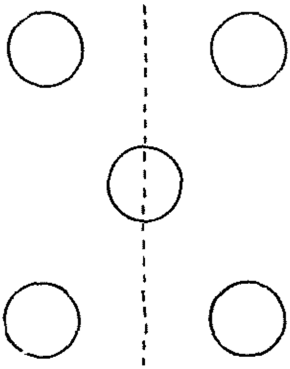


81.



Het zogenoemde viseren (in één lijn zien) legt een goede basis voor de meetkundige begrippen lijn, snijden, hoek, et cetera.

82. Een doorkijkspiegel kan hier goede mogelijkheden bieden, maar het is ook mogelijk om de oplossingen te bedenken. Er zijn er overigens oneindig veel want bijna alle assen van symmetrie van elk rondje kunnen gebruikt worden. Hier is één oplossing:



83. Je moet begrijpen dat de breuk $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\dot{3}$ een zogenoemde repeterende breuk is.
Ga maar gewoon staartdelen. De ene zakrekenmachine kapt de decimale ontwikkeling af. Andere onthouden dat ze de delingsoperatie door vermenigvuldiging moeten neutraliseren (1 : 3) × 3 = 1.

84. Enkele mogelijkheden: $\boxed{\text{ON}}\ \boxed{83{,}48}\ \boxed{\div}\ \boxed{6}\ \boxed{=}$ → 13,91

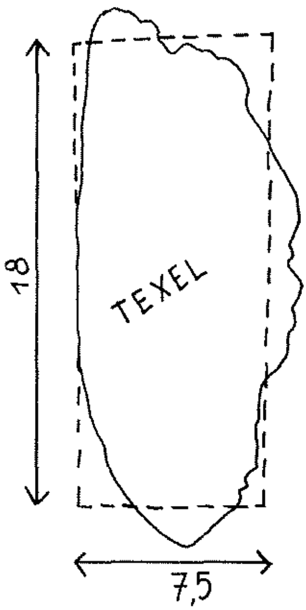
$\boxed{\text{ON}}\ \boxed{83{,}48}\ \boxed{\div}\ \boxed{120}\ \boxed{\times}\ \boxed{20}\ \boxed{=}$

$\boxed{\text{ON}}\ \boxed{83{,}48}\ \boxed{\div}\ \boxed{1{,}2}\ \boxed{-}\ \boxed{83{,}48}\ \boxed{=}\ \boxed{\pm}$

In dit geval maken we gebruik van de handigste methode om van 100% naar 120% en omgekeerd te rekenen, namelijk

× 1,2 respectievelijk : 1,2. De ± toets verandert het teken, maar die zit lang niet op alle machientjes. De procenttoets hebben we niet gebruikt. Het gebruik ervan draagt niet bij tot inzicht in procentrekenen, omdat deze functie veelal zeer onlogisch is geprogrammeerd.

85.



Schatting: 7,5 × 18 ≈ 140 km².

86. Een personenauto weegt meestal niet meer dan 1000 kg (= 1 ton). Een handig referentiepunt voor gewichtsmaten om te onthouden.

87. De afmetingen van de grote kubus zijn twee maal zo groot. er passen echter 8 (= 2 × 2 × 2) kleine kubussen in.

88. Een leuk referentiepunt voor snelheid is die van het geluid. In lucht bedraagt die ongeveer 330 meter per seconde. Dus 3 rustige tellen tussen flits en slag is ongeveer een kilometer directe afstand. De snelheid van het licht (300.000 km per seconde) heeft hierop geen invloed.

89. Neem een schepje, weeg het, tel het aantal rijstkorrels van het schepje. Bereken het aantal schepjes van het totale gewicht. Meerdere steekproeven verhogen de nauwkeurigheid.

90. De samenhang tussen digitale tijdsaanduiding en het gebruik van gewone klokken komt veelvuldig in het alledaagse leven voor. Uiteraard tel je op de klok even door.

91. a. 200 gram is een vijfde kilo, dus 70 cent.

b.

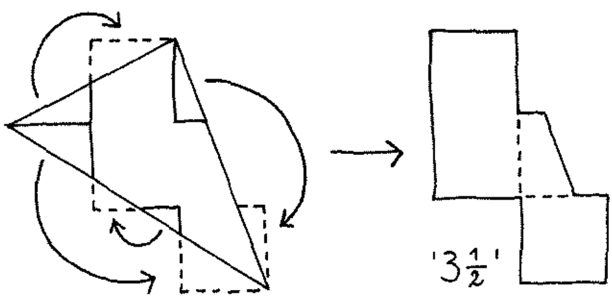
ON	0,817	×	2,2	=

f 1,7974 ≈ *f* 1,80

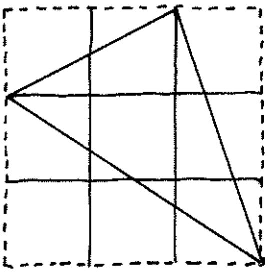
c. Pond en ons zijn geen officiële maten meer, maar veel mensen gebruiken ze nog in de omgangstaal. 1 pond voor *f* 1,30, ½ pond voor *f* 0,65. Dus ongeveer *f* 2,–.

92. Vijf maal zoveel touw betekent dat als de ribbe van de kleine kubus 1 is, die van de grote 5 bedraagt. De oppervlakte wordt dan 25 keer zo groot en de inhoud 125 keer.

93. Omstructureren van 'binnenuit' is mogelijk:



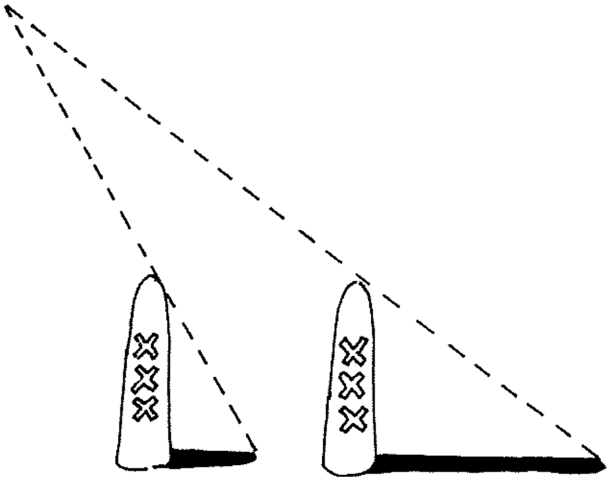
Handiger en algemener is het aanvullen tot een rechthoekige figuur, in casu een vierkant:



Van het vierkant (9 hokjes) gaan 3 halve rechthoeken af, respectievelijk 3, 1 en 1½ hokjes. Dus 9 − 3 − 1 − 1½ = 3½.

94. a. Rechthoeken kunnen dezelfde oppervlakte hebben maar verschillende omtrek. Werken we met gehele getallen dan hebben we hier: 6 × 2 (omtrek : 16); 4 × 3 (omtrek 14); 12 × 1 (omtrek 26).
    b. In dit geval gelijke omtrek, verschillende oppervlakte. Bijvoorbeeld 6 bij 1; 5 bij 2 en 4 bij 3.

95.

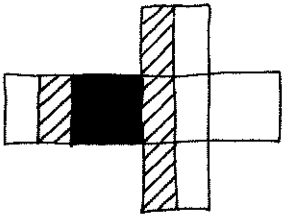


96. a. Peter wint. Hij legt de 1000 meter in minder dan 3,5 minuut af.

b. Peter start iets minder dan $\frac{1}{5}$ minuut later, zeg circa 10 seconden.

c. Na 700 meter.

97.



98. Elke breuk is als kommagetal te schrijven. Sommige met een eindige decimale ontwikkeling, andere met een oneindige. Deze laatste hebben altijd een repetendum, zoals bijvoorbeeld $\frac{4}{33} = 0{,}1212121212\ldots = 0{,}\cancel{12}$. Bij de breuk $\frac{1}{9}$ is dit slechts één cijfer (1) : $\frac{1}{9} = 0{,}11111\ldots = 0{,}\cancel{1}$. Daarom zijn $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$ et cetera makkelijk af te leiden. Stellen $\frac{9}{9}$ en $0{,}\cancel{9}$ dezelfde getallen voor?

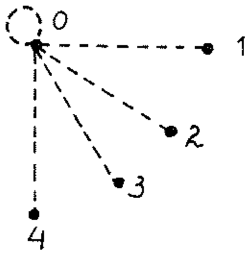
99. – Het kleinste getal dat je kunt maken is 000. Dan komt 001, 002, et cetera tot en met 999. Dus duizend mogelijkheden.

– In elke positie kun je tien symbolen plaatsen (nul tot en met negen). De tien mogelijkheden van de eerste positie zijn alle te combineren met die van de tweede positie. Dat levert dus al honderd mogelijkheden. En die honderd mogelijkheden kunnen we weer alle combineren met de tien mogelijkheden over de derde positie. Dus in totaal $(10 \times 10) \times 10$ = duizend mogelijkheden.

100. – Systematisch noteren:

0 – 0				
0 – 1	1 – 1			
0 – 2	1 – 2	2 – 2		
0 – 3	1 – 3	2 – 3	3 – 3	
0 – 4	1 – 4	2 – 4	3 – 4	4 – 4

In totaal dus $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ mogelijkheden.



Uit 0 vertrekken 5 pijlen (naar zichzelf, naar 1, 2, 3 en 4). Uit 1 vertrekken 4 pijlen (naar zichzelf, naar 2, 3 en 4, immers 1 – 0 hebben we al gehad), et cetera.

	0	1	2	3	4
0	0,0	0,1	0,2	...	...
1		1,1	...	...	...
2			2,2	...	...
3				3,3	...
4					4,4

Nawoord

Tot slot willen we nog enkele opmerkingen over de aard, de status en de haalbaarheid van de doelstellingen (eindtermen) maken.
De onderhavige eindtermen dienen te worden opgevat als streefdoelen, dus richtlijnen voor na te streven resultaten van leerlingen – concrete doelen in het licht van algemene doelen.
Deze streefdoelen zijn voor een brede groep leerlingen op gedifferentieerde wijze haalbaar: zwakke rekenaars bijvoorbeeld kunnen bepaalde doelstellingen alleen maar op een concreet niveau en in eenvoudige gevallen en met 'natuurlijke' getallen halen, terwijl sterke rekenaars dezelfde doelen in veel moeilijker operationaliseringen kunnen bereiken.
De genoemde niveaus zijn echter in de meeste doelformuleringen niet nader aangeduid maar zullen pas op wat langere termijn aanwijsbaar zijn, op grond van ervaring en onderzoek.
Uitgangspunt is echter dat (vrijwel) alle leerlingen in alle domeinen leerervaringen opdoen, met daarbij bijzondere aandacht voor de basisvaardigheden omdat die de grondslag voor het gehele reken-wiskundeprogramma leggen. Dit mag er echter niet toe leiden dat de kinderen die nogal wat moeite met rekenen hebben alsmaar 'onder de honderd' moeten rekenen en niet aan verhoudingen, meten en meetkunde toekomen.
De indeling in de genoemde zes leerstofdomeinen strookt weliswaar goed met wat internationaal gebruikelijk is, maar onaantastbaar is ze niet. 'Waarschijnlijkheid en statistiek' wordt bijvoorbeeld nogal eens als apart domein genomen, terwijl het hier onder 'Meten' is gesteld. En dan nog heel summier. Mocht uit reacties in de komende jaren echter blijken dat men in brede kringen van oordeel is dat dit leerstofgebied ondervertegenwoordigd is dan zullen de eindtermen in dit opzicht worden bijgesteld –

tenminste als het als een kernonderdeel wordt aangemerkt. Want het gaat bij de eindtermen om de kern van het reken-wiskundeonderwijs. Deze inperking houdt uiteraard niet in dat onderwerpen als 'kans' of 'functies' niet wat meer aandacht op een specifieke school of in een bepaalde methode zouden mogen krijgen. Het gaat er echter niet om lijsten te produceren waar werkelijk alles in staat, doch veeleer om de kern waar overeenstemming over bestaat.

Vroeger werd het rekenprogramma na de lagere school afgesloten. Tegenwoordig worden bepaalde onderwerpen voortgezet in het vervolgonderwijs. De COW-groep voor twaalf- tot zestienjarigen houdt rekening met wat er op de basisschool gebeurt. De uitgangspunten van deze commissie en de onderhavige eindtermen stemmen in belangrijke mate overeen. In de programma's van basis- en voortgezet onderwijs zijn toepassingen van rekenen-wiskunde van cruciaal belang. Met name ook Wiskunde A in het VWO en het nieuwe HAVO-programma zijn sterk toepassingsgericht.

De didactische grondslag van de hier gepresenteerde doelstellingen is globaal bepaald en aangeduid met de term 'reconstructiedidactiek'. Daarbinnen is er echter nogal wat ruimte voor verschillende didactische uitwerkingen – onderwijsvrijheid is een groot goed. Sprekend over realistisch wiskundeonderwijs kan men twee uiterste betekenissen aan 'realistisch' geven:

– de gerichtheid op doelstellingen van toepasbaarheid;
– de didactiek die de realiteit als aangrijpingspunt voor begripsvorming benut.

De eerste betekenis heeft didactische implicaties die nauwelijks met de reproduktie-methodiek te verenigen zijn. Maar, als gezegd, betekent dit niet dat men als gevolg van de gerichtheid op realistische doelen automatisch bij de reconstructiedidactiek terecht zou moeten komen zoals die in zijn zuiverste vorm in het inleidende hoofdstuk wordt geschetst.

De eindtermen kunnen enigermate als richtlijn dienen om methoden te kiezen. Het methodenbestand wijzigt zich geleidelijk naar realistisch reken-wiskundeonderwijs. Eén en ander zou er echter niet toe moeten leiden dat bepaalde methodes dwingend worden voorgeschreven.

Niet alle genoemde doelstellingen lijken haalbaar voor het LOM- en MLK-onderwijs. Zo zijn bijvoorbeeld de basisvaardigheden voor veel leerlingen uit die onderwijssoorten te lastig. Het is echter van belang dat daar niet alle energie in 'rekenen onder de honderd' wordt gestoken, maar dat ook die kinderen met elementaire onderwerpen uit alle domeinen in aanraking komen. Het zou aanbeveling verdienen dat een werkgroep van het speciaal onderwijs eindtermen voor het LOM- en MLK-onderwijs zou formuleren in de geest van de 'beredeneerde' doelstellingen voor het basisonderwijs uit deze 'Proeve ...': alleen nog wat concreter en met nog meer toelichtingen. Dus net zoals dat in de volgende Proeve-delen zal gebeuren.

In tegenstelling tot wat 'eindterm' suggereert hebben deze doelstellingen uiteraard geen eeuwigheidswaarde: het laatste woord is er nog niet over gesproken. De doelstellingen die hier zijn geformuleerd, zijn de eindtermen zoals die door de SLO, na een tweede inspraakronde met allerlei instanties en groeperingen, aan het ministerie zijn aangeboden. Worden daarop op korte termijn nog veranderingen aangebracht dan zullen die in de volgende delen van de 'Proeve ...' verwerkt worden.