

wiskobas

bulletin

multimedial



de laatste!

Jaargang 9, nr. 6
oktober 1980

Wiskobas-Bulletin,
Jaargang 9, nr. 6

WISKOBAS-BULLETIN (rubrieken)

- bulletin ter begeleiding van het wiskunde-onderwijs
- verschijnt gedurende de negende jaargang zes keer.

Jaargang 9 nr. 6 - oktober 1980

Redaktie

Dr. F. Goffree, Drs. R.A. de Jong (eindredakteur), G.H. Meijer, Dr. A. Treffers, Drs. E.J. Wijdeveld.

Medewerkers

Prof.Dr. F. van der Blij, Drs. J. van den Brink, A. Dekker, K. Frenay, Prof.Dr. H. Freudenthal, L. Gilissen, J. de Gooijer-Quint, H. Jansen, H. ter Heege, Drs. J.H.F.M. Klep, Prof.Dr. K.B. Koster, E. de Moor, D.W. Oort, P. Scholten, W. Sweers, Drs. L. Streefland.

Vormgeving

Ton Voortman

Redaktieadres

INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE
ONDERWIJS

Tiberdreef 4, Utrecht
t.a.v. Sylvia Pieters of Rob de Jong

Abonnementenadministratie

STICHTING IVIO,
Postbus 37, Lelystad.

Voor aanmeldingen, adreswijzigingen, betalingen, enz.

Abonnementsprijs

Per jaargang f 45,-
De jaargangen lopen van september tot september

Annuleringen moeten minstens 14 dagen voor het einde van de jaargang worden opgegeven bij de abonnementenadministratie.

Gelieve uitsluitend te betalen met akseptgirokaarten. Deze worden u toegezonden.

INHOUD

Redactioneel: Rob de Jong	1
Kolommen: H. Freudenthal	2
Wiskunst: F. van der Blij	4
Problematica: Huub Jansen	7
Kleuters en wiskunde: Jeanne de Gooijer-Quint ...	10
Wiskunde in de brugperiode: Aad Goddijn	13
Opleiding: Fred Goffree en Huub Jansen	22
Boekbespreking: Ed de Moor	25
Ander werk: Edu Wijdeveld	28
Spullenkatern: Ed de Moor en Adri Treffers	49
Cito item dito: Adri Treffers	81
Aktiviteitscentrum (2): Hans ter Heege	99
Wiskundige wereldoriëntatie: Jan van den Brink ...	106
Nieuw op de markt: Ed de Moor	110
Onderwijsontwikkeling: Abbes Dekker	117
Breuken (2): Leen Streefland	122
Berichten: Rob de Jong	128

Aan de vraag naar volledige oude jaargangen van het wiskobas-bulletin kunnen we helaas niet meer voldoen. Verschillende nummers zijn uitverkocht.

Van de volgende afleveringen is nog een beperkt aantal exemplaren verkrijgbaar.

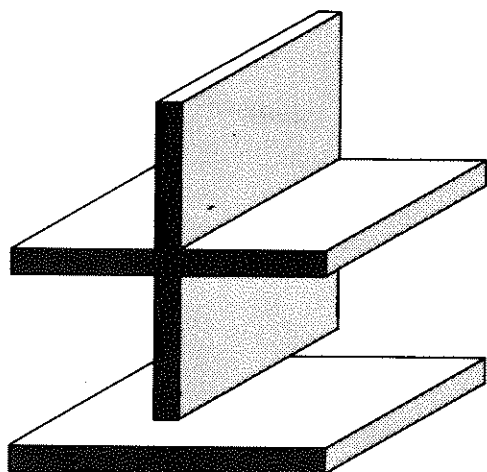
jaargang 3, nr. 2	f 7,50
jaargang 3, nr. 3	f 7,50
jaargang 3, nr. 4/5	f 7,50
jaargang 4 nr. 2	f 7,50
jaargang 4 nr. 3/4	f 7,50
jaargang 4 nr. 5	f 7,50
jaargang 4, nr. 6	f 7,50
jaargang 5, nr. 2/3	f 25,00 (leerplanpublikatie 2)
jaargang 5, nr. 5/6	f 10,00 (leerplanpublikatie 4)
jaargang 6, nr. 3	f 3,00
jaargang 7, nr. 1/2	f 20,00 (leerplanpublikatie 7)
jaargang 7, nr. 3	f 10,25 (leerplanpublikatie 8)
jaargang 7, nr. 4	f 3,00
jaargang 7, nr. 5/6	f 15,00 (leerplanpublikatie 9)
jaargang 8, nr. 1	f 10,00
jaargang 8, nr. 2	f 10,00
jaargang 8, nr. 3	f 10,00
jaargang 9, nr. 4	f 10,00
jaargang 8, nr. 5/6	f 15,00 (leerplanpublikatie 10)
jaargang 9, nr. 1/2/3	f 30,00 (leerplanpublikatie 11)

Alleen na ontvangst van uw storting op postgiro-rekeningnummer 3105662 t.n.v. R.U.-IOWO te utrecht, zal u de gewenste aflevering worden toegezonden.

© 1980 Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde
Onderwijs

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, mikrofilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

redak- tioneel



LAATSTE NUMMER!

Met het voorliggende nummer (jaargang 9 nr 6) verdwijnt het wiskobas-bulletin. Een bepaalde episode in de ontwikkeling van het nederlandse wiskundeonderwijs wordt daarmee afgesloten. Zie in dit verband ook de 'kleine kroniek', elders in het bulletin.

Dit laatste nummer bevat naast de gebruikelijke rubrieken een o.i. belangrijk spullenkatern en enkele fundamentele artikelen – o.m. van de hand van Edu Wijdeveld en Adri Treffers.

ROB DE JONG

start

Toen we in oktober 1971 startten met het wiskobas-bulletin, schreven we in het redactioneel dat het wiskobas om een democratische en simultane *wiskundeonderwijs-ontwikkeling* ging. Met betrekking tot het bulletin vervolgden we indertijd met:

'Daarbij komt dat het Bulletin geen zelfstandige presenties heeft. Het maakt namelijk deel uit van een omvangrijk *begeleidingspakket*. In dit pakket is een grote hoeveelheid leerstofblokken, materialen, cursussen, programma's en konferenties te onderscheiden.'

Het unieke van het bulletin is dat het negen jaargangen lang vanuit een te ontwikkelen en inspirerend totaalpakket kon functioneren.

cijfers

Cijfers zeggen op zich niet veel, maar kunnen wel indicatief zijn voor de krachtsinspanning die door het gehele wiskobasteam geleverd is:

negen jaargangen wiskobas-bulletin

	rubriekdelen	leerplandelen	totaal
totaal aantal pagina's	3.128	1.742	4.870
totaal aantal woorden	2.015.000	700.000	2.715.000

Ter vergelijking: een 'normale' paperback bevat zo'n 125 pagina's van elk cirka 160 woorden. Ongeveer 20.000 woorden.

De afgelopen periode is in het wiskobas-bulletin dus een bibliotheek van ruim 100 paperbacks bij elkaar geschreven.

oplage en invloed

Gedurende vele jaargangen bedroeg de oplage cirka 12.000 exemplaren. Als oplagen een belangstelling weerspiegelen, kan gesteld worden dat het nederlandse onderwijs geïnteresseerd is geraakt in de wiskobasactiviteiten.

Over de beïnvloeding hebben we geen directe cijfers voorhanden. Wel geven bepaalde gegevens indirecte informatie. Een voorbeeld: alle nieuw ontwikkelde reken/wiskundemetoden dragen wiskobaselementen in zich; deze methoden worden in toenemende mate gebruikt. Zie het spullenkatern.

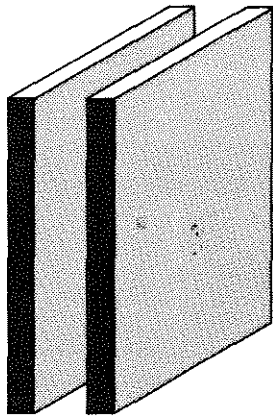
tenslotte

De redactie dankt u voor het gedurende negen jaar in haar gestelde vertrouwen. Velen van u zijn vanaf de eerste jaargang geabonneerd geweest. Uw respons vormde de stuwende kracht achter het wiskobas-bulletin.

De overheid dwingt ons om te stoppen.

Met een uiterst onvoldaan gevoel sluiten we dit bulletin af.

kolommen



NEGENPROEF

Van alle rekensnuffjes is de negenproef wel het meest bekende. Het treft me steeds weer dat maar heel weinigen weten wat erachter zit en dat van de rest weer slechts enkelen de behoefte gevoelen erachter te komen. De negenproef wordt klaarblijkelijk door de meesten gezien als een soort natuurverschijnsel, zoals de dagelijkse opgang van de zon of als een technisch wonder, zoals het geluid uit de ether als je de radioknop omdraait.

getal en cijfersom

Voor wie is dit stuk geschreven? Voor hen die een aanmoediging nodig hebben om de negenproef als een serieus stuk wiskunde te beschouwen, én voor hen die een steun behoeven om anderen daartoe aan te moedigen.

U weet natuurlijk waar het om gaat: om te weten of een getal door 9 deelbaar is, tel je zijn cijfers op; is de cijfersom door 9 deelbaar dan is het getal zelf ook door 9 deelbaar – en omgekeerd. Praktisch iedereen in onze streken weet het en praktisch niemand kan het 'waarom' iets schelen.

Als je het waarom van iets wilt inzien, verdient het – althans in de wiskunde – vaak aanbeveling het probleem uit te breiden, een meer algemene vraag aan de orde te stellen.

Neem het getal 27316478. De cijfersom is 38, dus niet door 9 deelbaar. Bij deling door 9 vertoont 38 de rest 2. Deel nu het gegeven getal door 9; ook dan blijkt de rest 2 te zijn. De uitbreiding waar ik op doelde, lukt.

Bij deling door 9 laten een getal en zijn cijfersom dezelfde rest.

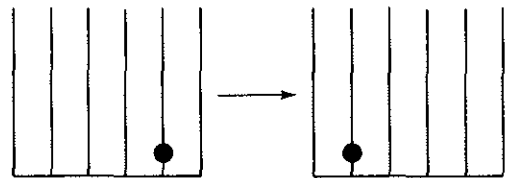
Het deelbaarheidskenmerk dat ik zoëven formuleerde, is hiervan een speciaal geval, te weten dat waarbij de rest 0 is.

Ook het kenmerk van deelbaarheid door 3 is er een speciaal geval van. In plaats van: ... is deelbaar door 3, kun je immers ook zeggen: ... laat bij deling door 9 de rest 0, 3 of 6 en dat moet dan gelijkelijk opgaan voor een getal én zijn cijfersom.

abakus

Hoe nu het hierboven kursief gedrukte te laten inzien? Of laat ik wagen: hoe het handtastelijk te maken?

Pak, wiskobasgewoonten getrouw, een abakus. Zet er ergens een kraaltje op. Het kan me niet schelen op welke beugel: 1, 10, 100, 1000, ... of wat dan ook. Wat valt u op?

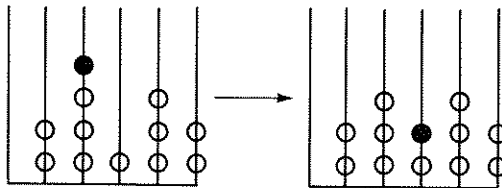


Paarsgewijs scheelt dit soort getallen zo iets als 9990, dat wil zeggen: iets dat door 9 deelbaar is. Anders gezegd: al deze getallen laten bij deling door 9 dezelfde rest, te weten 1. Dus:

Als ik een kraal van de ene beugel naar de andere verplaats, blijft de rest na deling door 9 onveranderd.

We veronderstellen tot hier toe dat er maar één kraal op de hele abakus zit. Maar stel nu dat er al

heel wat kralen op de abakus zitten en ik verplaats er een:



Het getal dat door de witte kralen wordt aangeduid laat een zekere rest na deling door 9 (in het onderhavige geval 2). De zwarte kraal die ik verplaats, levert een bijdrage tot de rest (te weten 1) die door de verplaatsing niet verandert. Dus verandert de rest bij deling door 9 in het geheel niet. Wat ik zonet kursief heb laten drukken, blijft gelden als er meer dan één kraal op de abakus zit.

En met dit inzicht gewapend, maken we schoon schip. Gegeven een getal op de abakus: we verplaatsen de ene kraal na de andere naar de beugel van de eenheden. Het oorspronkelijke getal en hetgeen nu op de beugel van de eenheden zit, laten dan dezelfde rest bij deling door 9. Maar op de beugel der eenheden zit juist de cijfersom van het gegeven getal. En hiermee is het gestelde bewezen:

Bij deling door 9 laten een getal en zijn cijfersom dezelfde rest.

meer wiskundig

Meer wiskundig ingekleed:

a en b laten bij deling door 9 dezelfde rest, wordt in wiskundetaal ook geschreven:

$$a \equiv b \pmod{9}$$

(lees: a kongruent b modulo 9).

Deze kongruëntierelatie is wat men wiskundig een ekwivalentie noemt:

$$a \equiv a \pmod{9};$$

$$\text{als } a \equiv b \pmod{9}, \text{ dan ook: } b \equiv a \pmod{9};$$

$$\text{als } a \equiv b \pmod{9} \text{ en } b \equiv c \pmod{9}, \text{ dan ook:}$$

$$a \equiv c \pmod{9};$$

zoals gemakkelijk is na te gaan.

Er geldt echter nog meer en daar hebben we boven in het bewijs – een beetje stiekum – gebruik van gemaakt.

Wat betekent dit eigenlijk: a laat bij deling door 9 de rest r ?

Ik kan het ook anders zeggen: a is een negenvoud plus r . Of anders:

$$a \equiv 9q + r;$$

waarvan q het kwotiënt en r de rest is. Neem nu nog een b met dezelfde rest r , dus:

$$b = 9m + r.$$

Trek de twee vergelijkingen van elkaar af en je ziet de r wegvallen en houdt een negenvoud over. Dus:

$$a \equiv b \pmod{9};$$

is hetzelfde als:

$$a - b \text{ is een negenvoud.}$$

Je mag derhalve in:

$$a \equiv b \pmod{9};$$

links en rechts hetzelfde optellen:

$$a + c \equiv b + c \pmod{9};$$

is ook juist, want het verschil van $a + c$ en $b + c$ is hetzelfde als van a en b .

(Van dit feit hebben we gebruik gemaakt toen we op de abakus aan het 'witte' een 'zwart' getal toevoegden.)

Je kunt nog verder gaan. Als:

$$a \equiv b \pmod{9};$$

$$c \equiv d \pmod{9};$$

dan ook:

$$a + c \equiv b + d \pmod{9};$$

en evenzo met zoveel summanden als je maar wenst. Dat is iets waarvan je gebruik maakt als je de negenproef van een proef op de som toepast, bijvoorbeeld voor een optelsom: de cijfersom van de summanden optellen en met die van de som vergelijken.

kenmerk van deelbaarheid

En nu nog eens terug naar het kenmerk van deelbaarheid door 9!

$$10^i - 1;$$

is een getal met alsmaar negens als cijfers, dus een negenvoud.

Of anders:

$$10^i \equiv 1 \pmod{9}.$$

Gegeven een getal met achtereenvolgens van rechts naar links de cijfers:

$$a_0, a_1, \dots, a_n.$$

Dus feitelijk het getal:

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n.$$

En dat is dan:

$$\equiv a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1;$$

kortom met de cijfersom:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

land van acht

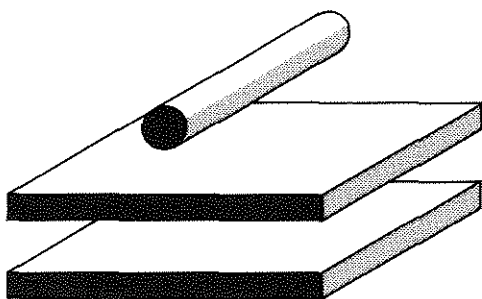
Hoe zit het in andere talstelsels?

Bijvoorbeeld in 'Het land van acht'?

Wie speelt dan de rol van de 9?

Iets om over na te denken.

wiskunst



DOODSKLOKKEN OVER HET IOWO

Het wiskunstonderwerp in dit nummer is typisch engels, het kontinent heeft er geen weet van. En toch is het wiskunst in optima forma, want 'the art of change ringing has always been considered highly mathematical'.

Via een artikel in 'Interface' (zie verder) citeer ik enkele regels uit Dorothy Sayers: 'The nine tailors' (1934):

'The art of change-ringing is peculiar to English, and, like most English peculiarities, unintelligible to the rest of the world. To the musical Belgian, for example, it appears that the proper thing to do with a carefully-tuned ring of bells is to play a tune on it. By an English campanologist, the playing of tunes is considered to be a childish game, only fit for foreigners; the proper use of bells is to work out mathematical permutations and combinations.'

change ringing

Wat is 'change ringing'? Het klokken luiden volgens strikte (wiskundige) regels. Ik weet er helaas veel te weinig van, de voorbereiding was te kort. Maar u weet: de dood komt toch altijd nog onverwacht, en daarom is er niet genoeg geoefend met het klokken luiden. Ik heb dus niet de tientallen jaargangen van het tijdschrift *'The Ringing World'* geraadpleegd; de standaardwerken van W.H. Thompson, E. Morris, J. and W. Snowdon, met titels als *'Grandsire Triples'*, *'History and Art of Change Ringing'*, *'Standard Methods in the Art of Change Ringing'*, lagen niet op mijn buro. Dus ga ik m'n gebrekkige kennis aanvullen met didactische fantasie.

Wilt u weten hoe ik op dit onderwerp kwam?

Jaren geleden liep ik in *'The Illustrated London News'* (christmas 1971, pag. 33-37) aan tegen een artikel van Neil Hepburn: *'Ringing the Changes'*. Een artikel in een kerstnummer, dus in het kader van kerstklokken.

In het tijdschrift *'Interface'* (vol 8, 1979, pag. 129-168) vond ik een artikel van Lejaren Hiller en Raveesh Kumra: *'Composing Algorithms II by means of Change Ringing'*. *'Interface'* is een vakblad voor elektronische muziek, abstracte muziektheorie, sonologie, e.d. Het bedoelde artikel was een deel van een Amerikaanse dissertatie in computer science.

Het derde signaal was een hoofdstuk over 'campanologie' in het fascinerende boek van F.J. Budden: *'The Fascination of Groups'*.¹⁾

kampanologie

Kampanologie is klokkenluiderswetenschap en dus nauw verbonden met the 'art of ringing'. Nu wilt u natuurlijk weten wat die 'art' dan wel is.

Ik vertel maar een vereenvoudigd didactisch verhaal. Ergens hangt een aantal klokken: *a, b, c, d, e, ...* met aflopende toonhoogte. We zullen ons beperken tot maximaal twaalf. Onder iedere klok staat een persoon met een rugnummer 1, 2, 3, 4, 5, ...

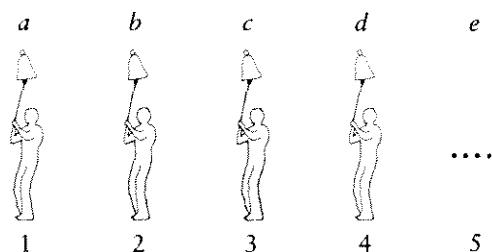


fig. 1

¹⁾ Cambridge university press, 1978.

In het begin staat 1 onder *a*, 2 onder *b*, enz. Nu gaan we luiden: achter elkaar trekken 1, 2, 3, 4, ... aan het touw het hele rijtje af. Dit heet een 'rounds'. Dan verwisselen de personen van plaats, maar ieder mag alleen met zijn direkte linker- of rechterbuur wisselen, bijvoorbeeld 1 en 2 onderling, 3 blijft staan, 4 en 5 wisselen onderling en 6 blijft staan. Nadat de boompjes zo gewisseld zijn, gaan we weer luiden: eerst persoon 1, dan persoon 2, etc. We kozen in ons voorbeeld de melodie *b-a-c-e-d-f*... We noteren de stand van de luiders. Deze was:

1 2 3 4 5 6;

en is nu geworden:

2 1 3 5 4 6.

Nadat alle luiders geluid hebben, gaan we weer wisselen en beginnen we opnieuw te luiden, dus bijvoorbeeld:

2 3 1 4 5 6.

De spelregels zijn:

- je mag alleen wisselen met je naaste buur;
- na één keer te zijn blijven staan, moet je bij de volgende ronde wisselen (hierop wordt een heel enkele keer een uitzondering gemaakt);
- iedere ronde moet een nieuw melodietje geven, alleen de laatste keer moet 't hetzelfde zijn als de eerste keer.

24 Ringing the changes: groups and campanology

The following gives the actual sound of the first five sequences of changes in a peal of eight bells:

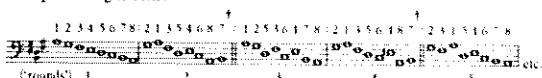


fig. 2

Echt mooi is het als alle melodieën ook werkelijk in het gebeuren voorkomen. Duidelijk is dat er bij *n* klokken precies *n!* melodieën (permutaties) zijn. Bij niet te weinig klokken kan het dus wel even duren eer we 'uitgeringd' zijn. In 1761 werd in Leeds (Kent) door opeenvolgende ploegen een volledig spel op acht klokken geluid. Dat zijn $8! = 40.320$ rondjes. Het spel, continu gespeeld, nam 27 uur in beslag. Een ander spel op acht klokken werd in juli 1963 in Loughborough bell foundry geluid. In de zeer snelle tijd van 17 uur en $58\frac{1}{2}$ minuut! Spelletjes met zeven klokken, dus $7! = 5040$ rondjes, kosten zo'n drie à vier uur en kunnen nogal eens opgevoerd worden.

drie klokken

Terwille van de duidelijkheid beginnen we met een erg eenvoudig spel van drie klokken. Het patroon is:

1 2 3;
1 3 2;
3 1 2;
3 2 1;
2 3 1;
2 1 3;
1 2 3;

en we zijn helemaal rond. (De enige andere mogelijkheid vinden we door van beneden naar boven te lezen.)

We voeren wat notaties in. Met *(ab)* geven we aan dat de mannen onder *a* en *b* wisselen. Bij drie klokken *abc* zijn maar twee verwisselingen mogelijk: *(ab)* en *(bc)*. Want *(ac)* mag niet, die staan niet naast elkaar. Geven we *(ab)* aan met α en *(bc)* met β , dan is bovenstaand spel ontstaan door achter elkaar β en α uit te voeren. Omdat $\alpha^2 = \beta^2$ de identiteit is en $(\alpha\beta)^3 = (\beta\alpha)^3$ ook de identiteit is, hebben we alles gehoord.

In dit spel zijn alle luiders 'hunting', ze gaan in dezelfde richting tot ze aan de rand staan, dan een rondje stilstaan en daarna konsekvent naar de andere kant. Geven we stilstaan aan met *s*, naar rechts met *r*, naar links met *l*, dan is de weg van luider 1 bijvoorbeeld *s, r, r, s, l, l*. Voor 2 en 3 gaat het analoog.

vier klokken

Nu iets over spelletjes met vier klokken. Eerst een aanloopje:

1 2 3 4;
2 1 4 3;
2 4 1 3;
4 2 3 1;
4 3 2 1;
3 4 1 2;
3 1 4 2;
1 3 2 4.

Een makkelijk systeem: als $\alpha = (ab)(cd)$ en $\beta = (bc)$, is het 't achter elkaar uitvoeren van α en β . Maar omdat $(\alpha\beta)^4$ de identiteit is, gaat het na acht keer mis, terwijl er 24 permutaties zijn. Toch was dit zo'n fraai systeem, iedereen was 'hunting'. Het voordeel van een 'hunting procedure' is, dat er niet veel aan te onthouden is. Maar als 1 weer op zijn plaats terug is, moet ingegrepen worden! De spelleider roept en men voert een andere verwisseling uit, namelijk *(ab)*, we schrijven γ . De volgende is dus:

3 1 2 4.

Nu gaan we weer gewoon 'hunting', dus afwisse-

lend α en β :

- 1 3 4 2;
- 1 4 3 2;
- 4 1 2 3;
- 4 2 1 3;
- 2 4 3 1;
- 2 3 4 1;
- 3 2 1 4.

En weer dreigt het mis te gaan. Opnieuw een signaal van de spelleider, en dus maar weer γ . We krijgen:

2 3 1 4.

En nu maar weer 'hunting', dat wil zeggen: afwisselend α en β :

- 3 2 4 1;
- 3 4 2 1;
- 4 3 1 2;
- 4 1 3 2;
- 1 4 2 3;
- 1 2 4 3;
- 2 1 3 4.

En het is weer tijd voor een signaal:

1 2 3 4.

We zijn rond, we hadden alle 24 permutaties en kwamen bij ons beginpunt uit.

Alle permutaties vormen een groep. De elementen α , β en γ hebben orde 2, dat wil zeggen: hun kwadraat is de identiteit. $\alpha\beta$ heeft orde 8. Dus uitsluitend met α en β genereren we alleen een ondergroep. Door gebruik te maken van γ konstrueren we de twee andere nevenklassen bij deze ondergroep; hun vereniging is de hele groep.

In het algemeen gezegd zal een mooi spel gebouwd zijn op een flinke ondergroep, dan behoeft de spelleider maar een enkele keer een signaal te geven.

Stedman Doubles (1668) met vijf klokken heeft zo'n mooie structuur (zie fig. 3).

vóór de groepentheorie

We moeten wel opmerken dat vele van deze klokspelen ontworpen zijn vóór de introductie van 'groepentheorie'. Ondergroepen en nevenklassen waren bij de kampanologen allang bekend 'avant la lettre du théorie des groupes'.

Even tussendoor een paar namen:

4 klokken: singles of minimus	24;
5 klokken: doubles	120;
6 klokken: minor	720;
7 klokken: triples	5.040;
8 klokken: major	40.320;

Table 24.10 (Stedman Doubles)

1	1 2 3 4 5	31	5 4 1 3 2	61	1 2 4 3 5	91	5 3 1 4 2
2	2 1 3 5 4	32	5 1 4 2 3	62	2 1 4 5 3	92	5 1 3 2 4
3	2 3 1 4 5	33	1 5 4 3 2	63	2 4 1 3 5	93	1 5 3 4 2
4	3 2 1 5 4	34	1 4 5 2 3	64	4 2 1 5 3	94	1 3 5 2 4
5	3 1 2 4 5	35	4 1 5 3 2	65	4 1 2 3 5	95	3 1 5 4 2
6	1 3 2 5 4	36	4 5 1 2 3	66	1 4 2 5 3	96	3 5 1 2 4
7	3 1 5 2 4	37	5 4 2 1 3	67	4 1 5 2 3	97	5 3 2 1 4
8	3 5 1 4 2	38	4 5 2 3 1	68	4 5 1 3 2	98	3 5 2 4 1
9	5 3 1 2 4	39	4 2 5 1 3	69	5 4 1 2 3	99	3 2 5 1 4
10	5 1 3 4 2	40	2 4 5 3 1	70	5 1 4 3 2	100	2 3 5 4 1
11	1 5 3 2 4	41	2 5 4 1 3	71	1 5 4 2 3	101	2 5 3 1 4
12	1 3 5 4 2	42	5 2 4 3 1	72	1 4 5 3 2	102	5 2 3 4 1
13	3 1 4 5 2	43	2 5 3 4 1	73	4 1 3 5 2	103	2 5 4 3 1
14	1 3 4 2 5	44	2 3 5 1 4	74	1 4 3 2 5	104	2 4 5 1 3
15	1 4 3 5 2	45	3 2 5 4 1	75	1 3 4 5 2	105	4 2 5 3 1
16	4 1 3 2 5	46	3 5 2 1 4	76	3 1 4 2 5	106	4 5 2 1 3
17	4 3 1 5 2	47	5 3 2 4 1	77	3 4 1 5 2	107	5 4 2 3 1
18	3 4 1 2 5	48	5 2 3 1 4	78	4 3 1 2 5	108	5 2 4 1 3
19	4 3 2 1 5	49	2 5 1 3 4	79	3 4 2 1 5	109	2 5 1 4 3
20	4 2 3 5 1	50	5 2 1 4 3	80	3 2 4 5 1	110	5 2 1 3 4
21	2 4 3 1 5	51	5 1 2 3 4	81	2 3 4 1 5	111	5 1 2 4 3
22	2 3 4 5 1	52	1 5 2 4 3	82	2 4 3 5 1	112	1 5 2 3 4
23	3 2 4 1 5	53	1 2 5 3 4	83	4 2 3 1 5	113	1 2 5 4 3
24	3 4 2 5 1	54	2 1 5 4 3	84	4 3 2 5 1	114	2 1 5 3 4
25	4 3 5 2 1	55	1 2 4 5 3	85	3 4 5 2 1	115	1 2 3 5 4
26	3 4 5 1 2	56	1 4 2 3 5	86	4 3 5 1 2	116	1 3 2 4 5
27	3 5 4 2 1	57	4 1 2 5 3	87	4 5 3 2 1	117	3 1 2 5 4
28	5 3 4 1 2	58	4 2 1 3 5	88	5 4 3 1 2	118	3 2 1 4 5
29	5 4 3 2 1	59	2 4 1 5 3	89	5 3 4 2 1	119	2 3 1 5 4
30	4 5 3 1 2	60	2 1 4 3 5	90	3 5 4 1 2	120	2 1 3 4 5
e	5 4 1 3 2	s_1	1 2 4 3 5	e	5 3 1 4 2	s_1	1 2 3 4 5

fig. 3

9 klokken: caters	362.880;
10 klokken: royal	3.628.800;
11 klokken: cinques	39.916.800;
12 klokken: maximus	479.001.600.

Bij de grotere spelen beperkt men zich óf tot klokspelen op papier óf tot een niet volledige serie van zo'n 5000 rondjes.

Veel voorbeelden zijn te vinden in het bovengenoemde boek van F.J. Budden.

Het artikel van T.J. Fletcher: 'Campanological Groups', in 'American Mathematical Monthly' (63, 1956, pag. 619-626), bevat eveneens veel lezenswaardigs. Ook in 'The Mathematical Gazette' (1969) verscheen een studie over kampanologie (van B.D. Price). 'The Computer Journal' (vol 3 and 13) bevat artikelen, enz.

De groepentheorie wordt in deze artikelen gebruikt om klassieke spelmethoden te analyseren. Ik noemde al de ondergroepen en nevenklassen. De voortbrengers van de verwisselingen, namelijk de verwisselingen van twee naast elkaar staande klokkenluiders, kunnen de hele groep voortbrengen. Maar kunnen ook al een paar van deze elementen het?

We kunnen een verwisseling ook door een matriks

weergeven; de overgang van (1, 2, 3, 4, 5) naar (2, 1, 3, 5, 4) kunnen we schrijven als:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De toegelaten verwisselingen geven matrices waarbij soms op de diagonaal een 1 staat, en verder 2×2 blokjes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

om de diagonaal.

Permutaties kunnen ingedeeld worden in even en oneven permutaties. Wanneer we als voortbrengers uitsluitend even permutaties kiezen, zullen we uitsluitend even permutaties krijgen en nooit alle permutaties. Er zal tenminste één oneven permutatie gebruikt moeten worden.

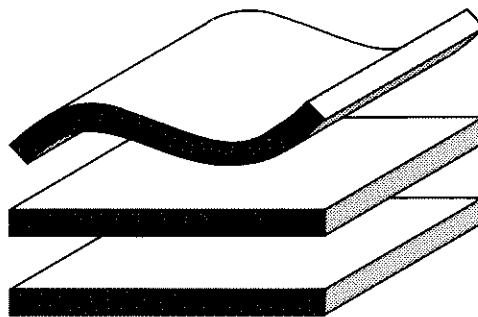
simpele hunting

Heeft u ondertussen Stedman Doubles al geanalyseerd? Het is een verdeling van vijf in drie en twee. De eerste drie spelen een simpel hunting spel; intussen wisselen de laatste twee heen en weer, heen en weer. De overgang van 6 naar 7 gaat via (ab), (cd). En dan gaan we weer met de eerste drie hunten en de laatste twee wiebelen. Probleem: voldoet Stedman Doubles aan de regel dat een luider niet langer dan twee beurten stil mag staan?

verzoek

Tot slot een verzoek aan staatssecretaris Hermes. Mag over het *iowo* een maksimum als doodsklokkenspel geluid worden? Ik bedoel: mag het *iowo* nog zolang blijven bestaan als nodig is om zo'n spel echt op klokken te spelen?

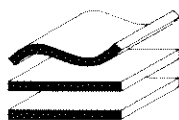
problematika



We beginnen ditmaal onze rubriek met een probleem óver en vóór kortzichtige bewindslieden.

1

leeftijden



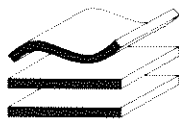
- *Een minister is twee maal zo oud als zijn staatssekretaris was toen de minister net zo oud was als de staatssekretaris nu is. Samen zijn ze 70 jaar oud.*

U kent dit soort problemen wel. Ingewikkelde zinskonstrukties die normale mensen niet motiveren om eraan te beginnen. En als je er toch aan durft te beginnen dan moet je in staat zijn om de gegevens die in zo'n zin liggen opgeborgen om te zetten in algebraïsche symbolen en formules waarna het gevraagde – in dit geval de leeftijden – met wat algebraïsch rekenwerk gevonden kan worden.

Ons probleem is of het eigenlijk ook zonder algebra kan. Gewoon met behulp van een plaatje of tekening. Het vertaalprobleem wordt er niet minder door, maar je kunt wel verrast worden door de wijze waarop een paar lijntjes een redenering kunnen ondersteunen. Een ervaring om te onthouden en te gebruiken voor uw eigen reken- of wiskundeonderwijs.

2

ponten



De vraag door welke problemen mensen 'geraakt' worden, lijkt net zo moeilijk te beantwoorden als de vraag hoe mensen al proberend en rommelend tot oplossingen komen.

Wat dit laatste betreft, moet u eens trachten binnen uzelf te kijken tijdens het oplossen van ons volgende probleem dat op 12 april j.l. verscheen in het 'NRC-Handelsblad':

Van beide oevers van het amsterdamse *ij* vertrekken gelijktijdig twee veerponten. De snelheden van beide schepen zijn verschillend. Ze ontmoeten, of zo u wilt: passeren, elkaar op 155 meter afstand van de oever waarvandaan het langzaamste schip is vertrokken. Elke pont blijft precies twaalf minuten wachten alvorens te beginnen aan een nieuwe oversteek. Tijdens deze tweede oversteek – op weg dus naar hun eerste vertrekpunten – ontmoeten zij elkaar op 85 meter van de oever waar het langzame schip zijn tweede oversteek is begonnen.

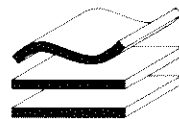
- *Hoe breed is het ij?*

Zoals u bemerkt: een heel verhaal, maar volgens ons de moeite waard om uw krachten op te beproe-

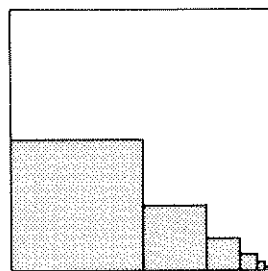
ven. Zeker als u uzelf de eis oplegt om een elegante oplossing te vinden.

3

oppervlakte



Beide voorgaande problemen zijn redeneerproblemen waarbij een goed gekozen plaatje het denkproces kan ondersteunen. Dit in tegenstelling tot ons volgende probleem. Het plaatje, dat wil zeggen: de meetkundige figuur, bevat een probleem waarvoor de oplossing redenerend gevonden moet worden:



U ziet het al. Een doorlopende rij van vierkanten, elk steeds een vierde deel van het vorige.

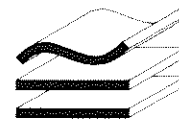
- *Toon aan dat de som van de oppervlakten van al deze vierkanten precies een derde is van het grote vierkant.*

Bent u in het bezit van wat kennis over oneindig voortlopende meetkundige rijen, dan produceert u glimlachend een bewijs.

- *Kunt u dat ook zonder van deze kennis gebruik te maken?*

4

afstamming



Dat problemen – en dus probleem-oplossen – een belangrijk bestanddeel vormen van het wiskundeonderwijs is u bekend. Maar welke problemen zijn geschikt voor goed wiskundeonderwijs?

Een vraag die natuurlijk alleen te beantwoorden valt door de leerkracht zelf. Hij immers kent zijn leerlingen, hun nivo, het programma en ... zichzelf! Kortom, het is een vraag die, zoals deskundigen zeggen, pas te beantwoorden valt nadat de totale kontekst van de onderwijsleersituatie in beschouwing is genomen.

Als voorbeeld kiezen we hier een probleem dat *niet* past binnen de kontekst van ons onderwijs. Het komt voort uit een uitspraak van een of andere Amerikaanse popzanger die op de televisie beweerde dat hij voor $\frac{1}{3}$ deel een cherokee-indiaan was.

Wij vertalen het naar onze situatie:

► *Iemand beweert dat door zijn aderen voor $\frac{1}{3}$ deel fries bloed stroomt.*

Wat vindt u daarvan?

Met de vraag: 'wat vindt u daarvan?', bedoelen we zoiets als: laat eens zien dat 't niet kan. Of: *bewijs* eens dat het niet kan.

Wellicht komt u, al rommelend, ook ons vorige probleem nog tegen!

5

oefenstoffering



In de rood-wit-blauwe leerplanpublicatie van wiskobas heeft u kunnen lezen met wat voor opgaven ons aller rekenonderwijs een beter gestoffeerd oefenveld kan krijgen. Opvallend daarbij is, dat veel van deze opgaven leiden tot wiskundige activiteiten als redeneren en bewijzen. Omgekeerd zijn er veel redeneerproblemen te vinden, waarbinnen gerekend en dus het omgaan met getallen beoefend moet worden. We geven daarvan een tweetal voorbeelden met de waarschuwing erbij dat de gevraagde bewijzen niet eenvoudig zijn te leveren. We laten u de bedoeling zien aan de hand van voorbeelden.

Voor het eerste probleem kiezen we een willekeurig geheel getal, bijvoorbeeld 18.

We bepalen vervolgens de som van de priemfactoren van dat getal, met inbegrip van 1.

Dus:

$$18 \rightarrow 1 + 2 + 3 + 3 = 9.$$

We herhalen deze procedure met het verkregen getal 9:

$$9 \rightarrow 1 + 3 + 3 = 7.$$

En weer:

$$7 \rightarrow 1 + 7 = 8.$$

En weer:

$$8 \rightarrow 1 + 2 + 2 + 2 = 7.$$

Verder kunnen we niet komen: 7 levert 8, en 8 weer 7.

► *Doet u hetzelfde eens met andere getallen.*

Wat ontdekt u? En ... kunt u dat bewijzen?

Nog zoiets.

Kies weer een willekeurig getal, bijvoorbeeld 8, en een ander willekeurig getal, maar kleiner, bijvoorbeeld 3.

We gaan eerst kijken op hoeveel verschillende ma-

nieren 8 is te schrijven als de som van drie termen (zonder te letten op de volgorde):

$$8 = 1 + 1 + 6;$$

$$1 + 2 + 5;$$

$$1 + 3 + 4;$$

$$2 + 2 + 4;$$

$$2 + 3 + 3.$$

U ziet het: vijf verschillende mogelijkheden.

Vervolgens gaan we na op hoeveel verschillende manieren 8 te schrijven is als een som, met 3 als hoogste term:

$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3;$$

$$1 + 1 + 1 + 2 + 3;$$

$$1 + 2 + 2 + 3;$$

$$1 + 1 + 3 + 3;$$

$$2 + 3 + 3.$$

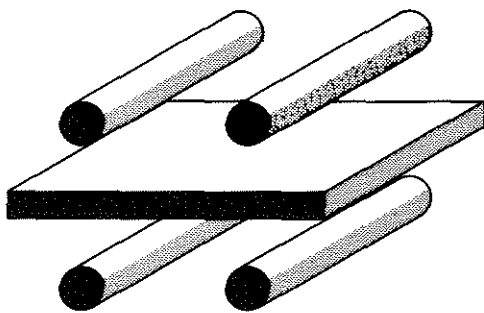
Wéér vijf mogelijkheden. Toevallig of...?

► *Zoekt u het uit!*

Wij sluiten deze rubriek en dit bulletin.

Wij danken u voor uw belangstelling, voor uw oplossingen en voor de door u toegestuurde problemen. De oplossing van het probleem hoe we tot beter probleemgericht reken- en wiskundeonderwijs kunnen komen, kunt u vinden in het oosten des lands. Hopelijk niet in een prullenbak!

kleuters en wiskunde



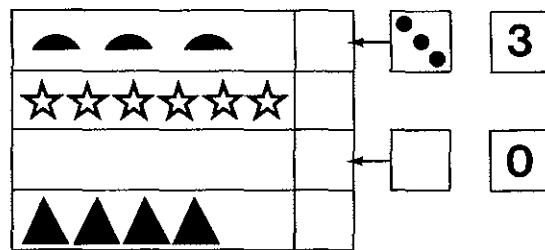
SPELMATERIALEN ONDER DE LOEP

Wegens het grote aanbod van zowel goede als slechte ontwikkelingsmaterialen is het noodzakelijk deze materialen kritisch te bekijken. De spelletjes zien er meestal kwa kleur en vorm aantrekkelijk uit. De keuze wordt dan ook vaak op grond van de uitvoering bepaald, en niet vanuit de inhoudelijke mogelijkheden. Gezien het ruime aanbod kunnen niet alle spelmaterialen in dit artikel besproken worden.

We beperken ons bij de beoordeling tot de spullen die ten behoeve van de taal-denkontwikkeling en het voorbereidend rekenen ontwikkeld zijn.

Tezamen met een groep studenten van de klos te utrecht hebben we een aantal materialen geanalyseerd.

tellotto



De getallen 0 tot en met 9 komen voor in de vorm van plaatjes, stippen en cijfersymbolen. De chronologische volgorde van de telrij is doorbroken, waardoor er 'echt' geteld moet worden. Dit kan verrassend zijn voor de kleuter.

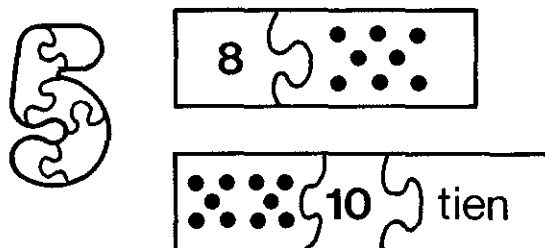
In plaats van één kaart met het aantal stippen erop, kunnen we het getal ook door twee kaarten laten samenstellen. Dus bijvoorbeeld: $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$ in plaats van $\begin{bmatrix} \cdot \cdot \end{bmatrix}$.

Om deze opdracht uit te kunnen voeren, moet een serie stippenkaarten toegevoegd worden. Het splitsen van getallen betekent een uitbreiding voor kinderen die het tellen van kleine aantallen al beheersen.

Het tellotto kan als groepsspel gehanteerd worden. Ieder kind (in totaal vier) krijgt een plank. De stippen- en/of cijferkaarten liggen omgekeerd in het midden. Om de beurt mag men een kaartje omdraaien en kijken of het op z'n plank past. Is dit niet het geval, dan wordt de kaart teruggelegd. Wie het eerst z'n plank vol heeft, is winnaar.

We kunnen dit spel aanbevelen.

cijferpuzzels

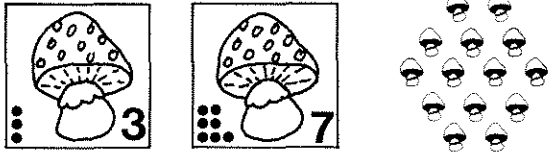


Door middel van puzzelstukjes kan een cijfer samengesteld worden. Ook kan een bepaalde hoeveelheid, uitgedrukt in stippen, symbool en woord, samengevoegd worden.

Dit spel heeft niets te maken met begrip van hoeveelheden en symbolen. De losse stukjes kunnen maar op één manier, via 'trial and error', aan elkaar gelegd worden. Het kind hoeft dus niet te kunnen tellen of lezen. De indruk kan echter gewekt worden dat de maker van de puzzel al kan 'rekenen'.

In de kleuterschool zijn genoeg puzzels aanwezig, die voor de kleuter veel aantrekkelijker zijn. Wij adviseren daarom de cijferpuzzels niet aan te schaffen.

paddestoelenset



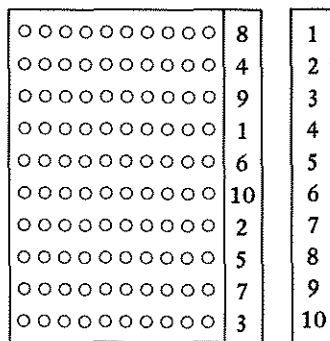
Iedere paddestoel heeft tien gaatjes, waarin zoveel dopjes gestoken moeten worden als linksonder met stippen en rechtsonder met een cijfer aangegeven staat.

Het kind dat nog niet aan tellen toe is, of er geen zin in heeft, zal waarschijnlijk alle gaatjes van een dopje voorzien. Voor degenen die het tellen beheersen, is het alleen maar een herhaling.

Zo'n oefenspel zal in de kast aanwezig moeten zijn, maar je moet er wel op letten dat er geen stapels van worden aangeschaft.

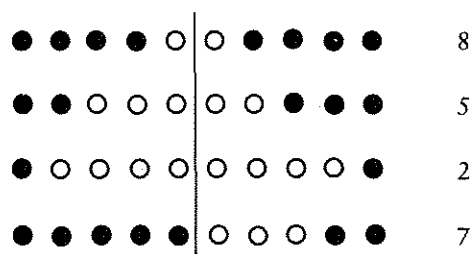
Dit spel komt ook in een andere uitvoering voor. De paddestoelen bevatten dan net zoveel gaatjes als het getal dat aangegeven wordt. Op die manier hoeft het kind helemaal niet te tellen en is de opdracht eigenlijk zinloos.

telplank



Deze plank bevat honderd gaatjes, hetgeen onoverzichtelijk voor kleuters kan zijn. Per rij wordt het aantal pennen geplaatst, dat door een cijfer aangegeven is. Dit kan volgens de telrij gebeuren of in een andere volgorde.

Door een verticale scheiding in het midden van de rijen aan te brengen (door middel van een lint of touw), kunnen de getallen gesplitst weergegeven worden.



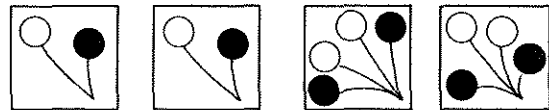
Aan de hand van deze activiteit kun je praten over 'eerlijke verdelingen'. De kinderen kunnen dan zelf

ontdekken, dat bepaalde aantallen eerlijk in tweeën te splitsen zijn, terwijl het bij andere aantallen niet lukt.

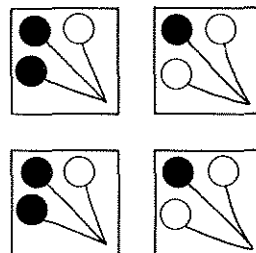
Deze telplank doet wat clean aan en nodigt niet uit tot spelplezier.

In de eerste klas is de plank misschien beter op z'n plaats.

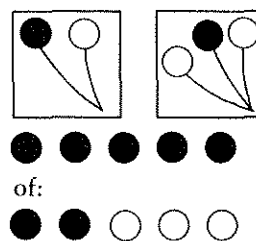
sorteerspel ballonnen



Er zijn twaalf combinaties van twee dezelfde plaatjes. De aantallen lopen van 1 tot en met 6, waarbij ieder aantal in twee uitvoeringen voorkomt. Behalve het aantal moet dus ook op de kleur van de ballonnen gelet worden.



Het kind kan op grond van visuele waarneming, dus zonder tellen, de plaatjes bij elkaar zoeken. Als uitbreiding kunnen er fiches bij gebruikt worden. Naast ieder kaartje komt een gelijk aantal fiches te liggen. Ook kunnen twee kaartjes samengenomen worden.



De kaartjes kunnen tevens gebruikt worden als memoryspel. Naast het sorteren zijn er dus meerdere toepassingen mogelijk, zowel individueel als voor een groep.

keverspel



Dit spel bevat 48 plaatjes, waarvan 24 plaatjes gehalveerd. De halve plaatjes moeten samengevoegd worden en op het juiste (bijpassende) hele plaatje gelegd worden.

Ieder plaatje is aan twee kanten bedrukt: aan één

kant zijn de kevers voorzien van stippen en aan de andere kant van cijfers. De aantallen 0 tot en met 5 worden gebruikt. Met de halve plaatjes zijn vele combinaties mogelijk.

Een opdracht kan zijn:

► Zoek alle kevers op met vijf stippen.



Een andere opdracht:

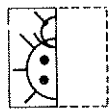
► Maak een kevertocht.

De eerste kever heeft geen (nul) stippen, de tweede heeft één stip en de volgende heeft één stip meer. Er komt dus steeds een stip bij.

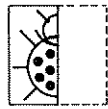


De kever met de meeste stippen kan ook vooraan gezet worden, zodat de volgende kever steeds één stip minder op z'n rug heeft.

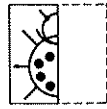
Nog een variatie: een halve kaart wordt gegeven en het totaal aantal stippen van de kever wordt medegedeeld:



samen vijf



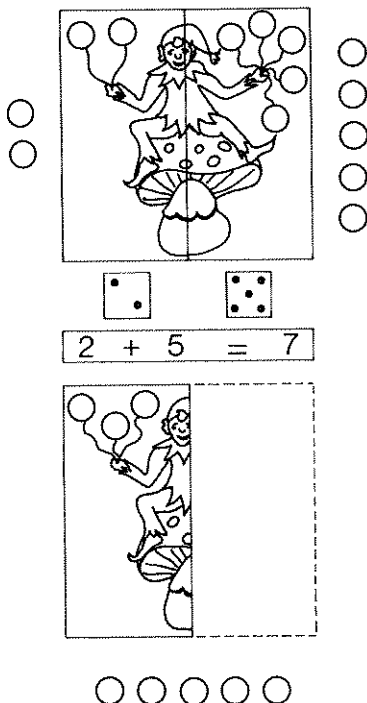
samen zeven



samen tien (!)

Dit spel biedt diverse mogelijkheden ten aanzien van samenvoegen, vermeerderen en verminderen. Het is ook in de eerste klas goed te gebruiken, men kan dan meer nadruk op de cijfers leggen.

kaboutertelspel



Dit spel is in feite een combinatie van het ballonnenspel en het keverspel. De suggesties die daarbij genoemd zijn, gelden eveneens voor het kabouter spel. De kaartjes met sommetjes vormen een uitbreiding.

Voor kinderen in de kleuterschool, die bekend zijn met de cijfersymbolen, kunnen deze kaartjes gebruikt worden om een relatie te leggen tussen de concrete (op)telactiviteit en de abstracte notatievorm.

Het is een spel waarvan kinderen op verschillende ontwikkelingsnivo's gebruik kunnen maken.

nabeschouwing

In z'n algemeenheid kunnen we zeggen dat een groot aantal materialen zich *uitsluitend* richt op: associatie van hoeveelheid met symbool. Belangrijker is echter: het opereren met aantallen, in de zin van samenvoegen en splitsen.

We kunnen het kind uitnodigen zijn (sommen)verhaaltje te vertellen aan de hand van een bepaalde situatie, bijvoorbeeld: 'de kabouter heeft in z'n ene hand twee ballonnen, en in zijn andere hand één, dan heeft 'ie drie ballonnen gewonnen op de kermis.'

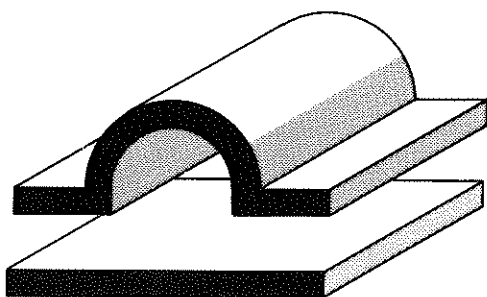
Bij een partijtje kegelen wordt aangegeven hoeveel kegels er zijn omgevallen, c.q. blijven staan. De kinderen ontdekken spelenderwijs dat een beperkt aantal kegels steeds op een andere manier gesplitst kan worden.

Het voorspellen of bedenken van situaties, die bijvoorbeeld bij het kegelen kunnen ontstaan, biedt een mogelijkheid om het mentale handelen te activeren.

Bij het analyseren van de materialen bemerkten we dat te weinig een beroep wordt gedaan op de zelfbedachte activiteiten (mentaal of materieel) van kleuters.

We zullen ervoor moeten waken dat te eenzijdige materialen aangeboden worden. Spontaan ontstane telsituaties zijn veelal zinvoller dan het gebruik van sterk geïsoleerde telmaterialen.

wiskunde in de brug- periode



MET HET OOG OP DIEPTE

In het vorige bulletin werd het pakket 'Licht op schaduw' besproken, ontworpen voor de tweede klas van het voortgezet onderwijs.

Dat pakket staat bol van de meetkunde die je overal om je heen ziet.

Een paar keer stuitten we toen al op de vraag: Hoe zie je wat je ziet?

rationalisatie

De zon bescheen kieviten en fazanten met evenwijdige stralen, maar het leek alsof alle stralen vanuit één punt kwamen. In de vlakke schaduw van de kubus kon je ook iets ruimtelijks zien. Van een veelvlak kon je evenveel vlakken tegelijk zien als je er tegelijk in de zon kon houden.

schijn

Wat je ziet en hoe je iets ziet, het zijn verschillende dingen: in de verte lijkt alles kleiner, maar dat is schijn. Of misschien is het wel geen schijn, maar echt zo: alles in de verte *is* kleiner, een liniaal ook, en daarom merk je dat niet als je in de verte bent. Denk er eens over door...

Nu wil vast iemand op me in gaan praten met plaatjes als dit (fig. 1):

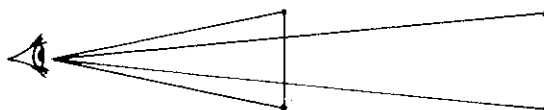


fig. 1

Zo raak je dan aan het rationaliseren over hoe we eigenlijk naar de dingen om ons heen kijken.

waarnemen en verklaren

Het is de moeite waard wat dieper in te gaan op de wiskunde achter de rationalisatie van het zien. We doen dat in 'Met het oog op diepte' aan de hand van een serie opdrachten waarin waarnemen en uitproberen erg belangrijk zijn. De meest elementaire zaken van het perspectieftekenen komen aan bod. Recepten over horizon en verdwijnpunten benadrukken we niet. Het gaat meer om het met simpele meetkundige middelen verklaren van verschijnselen rond het kijken. Er blijkt wat geëksperimenteerd te kunnen worden, met enige handigheid ook in een behoorlijk volgeladen klaslokaal.

plat of niet

Gewenning stompt af. Het vreemde schudt wakker. We starten het pakketje met wat rare plaatjes, waar je van alles in kunt zien. Dubbelzinnige plaatjes eigenlijk (fig. 2).

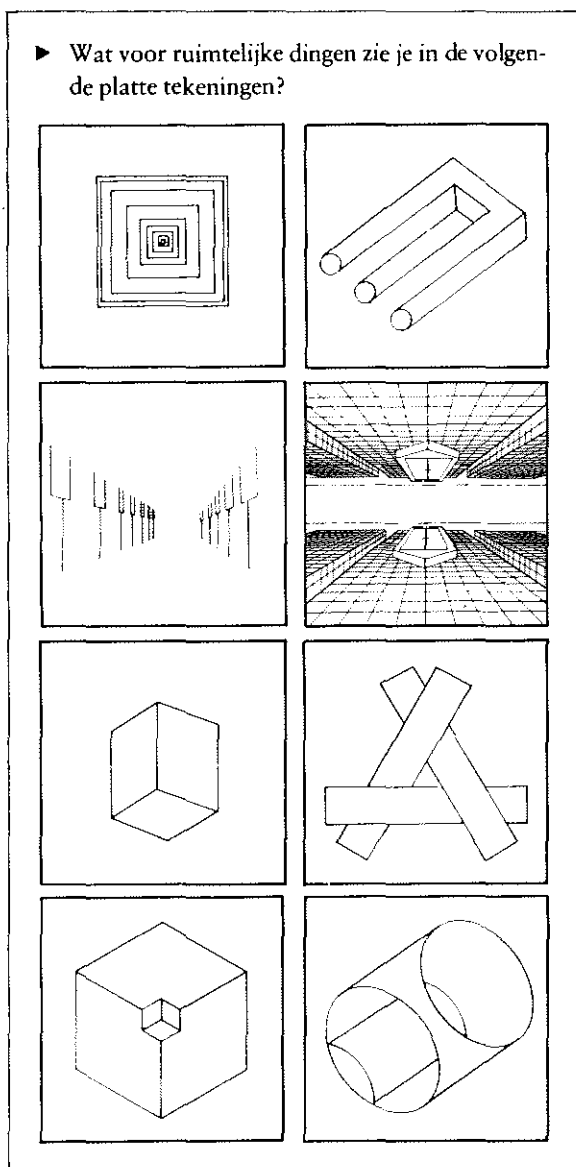


fig. 2

De eerste (linksboven): een piramide, een gang, een put, een fototoestel, een doolhof (waar je nooit uitkomt).

Linksonder levert vijf verschillende, meer wiskundige interpretaties op:

- een kubus met een kleintje eruit;
- een klein kubusje, gedraaid voor een grote geplakt;
- een kleine kubus in een hoek van het plafond;
- een zeshoek;
- als klap op de vuurpijl: een kubus met een gat; je ziet de achterkant door het gat.

Aan de hand van enkele voorbeelden (fig. 3) stellen we vast dat foto's wel echt lijken, maar het niet zijn. Ze geven wel weer hoe je de dingen ziet. Behalve de kleuren.

Later in het pakketje wordt een verklaring gezocht.



- Als de lokomotief drie meter breed is, hoe lang is de trein dan, volgens de foto?
Klopt dat met de werkelijkheid?
- Hoe hoog is de trein aan de voorkant?
- Meet hoe hoog de trein aan de achterkant is, volgens de foto.
- Klopt dat met de werkelijkheid?

fig. 3

De trein blijkt verkort te zijn tot vijf meter. Dat is te dol. Sommige leerlingen zeggen: dat komt door de bocht.

Of: in de verte is alles kleiner. Een precieze verklaring zal later toch erg moeilijk blijken te zijn.

het klappaam en het touwtje

De volgende prent van Albrecht Dürer (1471-1528) raakt de kern van het perspectiefprobleem. De activiteiten op de plaat zijn helemaal niet zo gemakkelijk te doorzien en weinig leerlingen komen er aan de hand van de vragen goed uit.

Kijk goed naar deze plaat (fig. 4b). Hij staat in een boek over tekenen met dieptewerking.

De twee mannen tekenen samen de luit die links op de tafel ligt.

De tekening zit scharnierend vast aan het raam. En ze gebruiken een touwtje.

- Met welke punt van de luit zijn ze nu bezig?
- Waarvoor dient het gewichtje aan het touwtje? (helemaal rechts op de tekening)
- Nu zoekt de zittende man een bepaald punt tussen de raamlijsten op. Daar houdt hij een krijtje. Welk punt is dat precies?
- Waarom draait de staande man de tekening in het raam en niet de zittende?
- Als het tekenvel in het raam gedraaid is zet de zittende man een stip, precies op de plek waar hij het krijtje heeft. Geef met een kruisje aan waar die stip komt.

fig. 4a



fig. 4b

Het vraagt om zelf doen. Moet je dan zo'n raam maken en een luit kopen? Nee hoor, het gaat uitstekend met een scharnierende zijkant van het bord en een stoel of kist op tafel. Het touwtje kan best vastgebonden worden, dan span je steeds maar opnieuw (fig. 5a en 5b).

Twee leerlingen zijn voor de klas aan het werk. En de rest dan? De activiteit vóór de klas blijkt voor de meer dan vijftientig andere *mavo-lbo* leerlingen boeiend genoeg om tien minuten lang nauwkeurig te volgen!

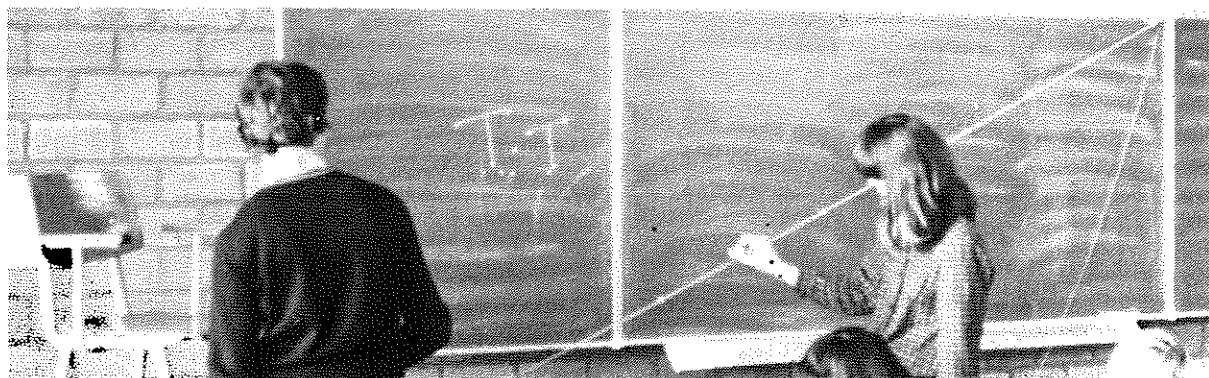


fig. 5a

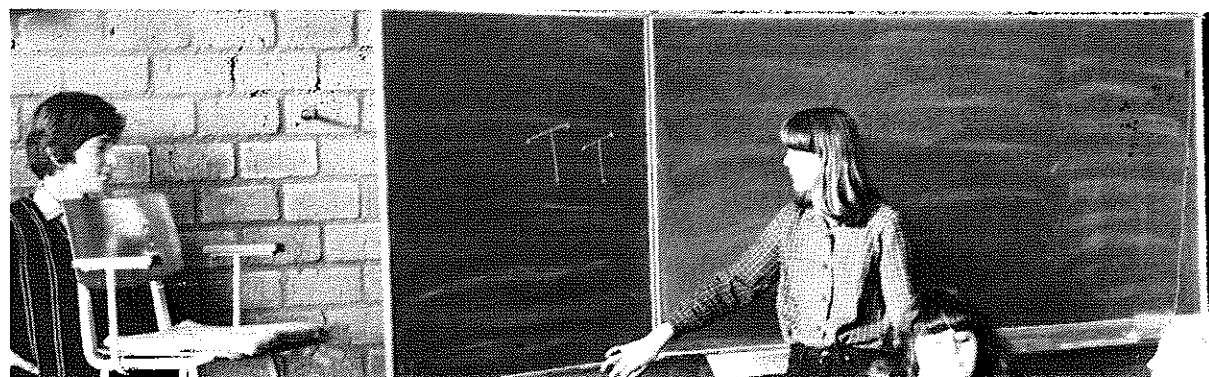


fig. 5b

Eerder in het pakketje 'Zie je wel' zijn deze leerlingen bezig geweest met tekenen op een glasplaat. Je tekent precies op de glasplaat waar je bijvoorbeeld de stoelleuning ziet. Dat is natuurlijk eenvoudiger, maar in de hier gebruikte opstelling is het rechtlijnige van de kijklijnen die uit één punt komen weer concreter.

Een lastige vraag!

Van één bepaalde plek in de kamer zou je kunnen denken: 'Zie ik nu door het raam de echte luit of zie ik in het raam de tekening?' Want van dat punt is dat eigenlijk hetzelfde.

► Welk punt is dat?

fig. 6

Sommige leerlingen beantwoorden deze vraag onmiddellijk. De meesten hebben echter moeite met deze omkering. Later zullen heel wat lijnen vanuit ogen getekend gaan worden. Het probleem staat dus niet geïsoleerd en er is nog voldoende gelegenheid om het te leren begrijpen.

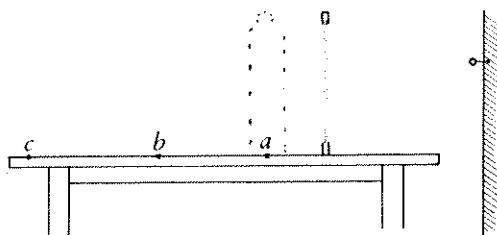
In een klasgesprek kan de functie van het touwtje ook nog eens naar voren komen: de lijn waarlangs je kijkt.

Na de activiteit met het klappende bord werken we met tekeningen van de tafel en het scherm in zijaanzicht. Met de volgende opgaven (fig. 7 en 8) heeft niemand veel moeite.

► Trek deze fles over op karton en knip hem uit.



Hier is een zijaanzicht van de tafel, het tekenschermbord en het oogje waar het touwtje door loopt. Zet de fles bij *a* op de tafel.



► Teken hoe het touwtje van het oogje naar de onder- en de bovenkant van de fles loopt. Hoe groot wordt de getekende fles?

fig. 7

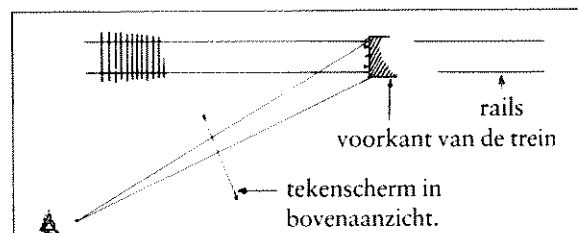
► Zet nu de fles bij *b*. Werk met blauwe lijnen. Dan bij *c*. Nu met rood. Hoe groot is de fles telkens op het tekenvlak?

fig. 8

Eigenlijk ontstaat nu precies de tekening die onder het kopje 'Hoe zie je wat je ziet' voorkomt. Wat in de verte is, lijkt kleiner, is nu heel duidelijk: er is een samenhangende verklaring bij ontstaan.

In een vroegere versie maten we nog de hoeken waaronder je de fles ziet. Tegelijk met de schijnbare flessen op het scherm heeft dat niet veel zin. Trouwens, de florentijnen die het moderne perspectief ontwikkelden, maten ook geen zichthoeken. Euclides doet het wel; dat type perspectief gebruiken we nog als we schijnbare beweging van zon, maan en sterren op een hemelbol weergeven.

De verklaring van de verkorting van de trein is wiskundig heel interessant, maar in deze vorm te moeilijk gebleken (fig. 9).



Trein, rails en tekenschermbord in *bovenaanzicht*.

► Hoe groot wordt de voorkant van de trein op het hier getekende tekenschermbord?

► Zoek nu met behulp van de foto uit, waar het achtereind van de trein op dit tekenschermbord moet komen.

Dan kun je nu ook op het bovenaanzicht de lengte van de trein aangeven!

► Hoe lang is de trein in werkelijkheid?

fig. 9

Er is weer een omkering: vanaf het tekenschermbord de realiteit terugvinden. En de realiteit is dan eigenlijk wéér een tekening van de trein. De foto van de trein moet in verhouding op het scherm worden gebracht. Dat is bij elkaar te veel. In een volgende versie komt dit later in het pakket, in een meer doe-het-zelf gerichte vorm.

De opstelling met het tekenschermbord hebben we nu in zijaanzicht en bovenaanzicht gehad. Gekombineerd kan ook, met verrassend resultaat (zie fig. 10).

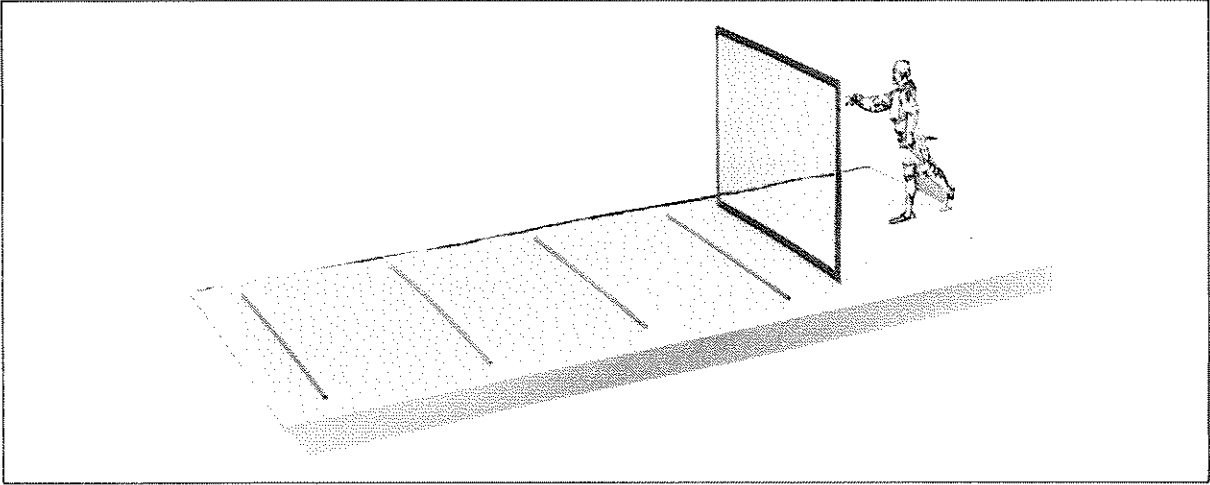


fig. 10

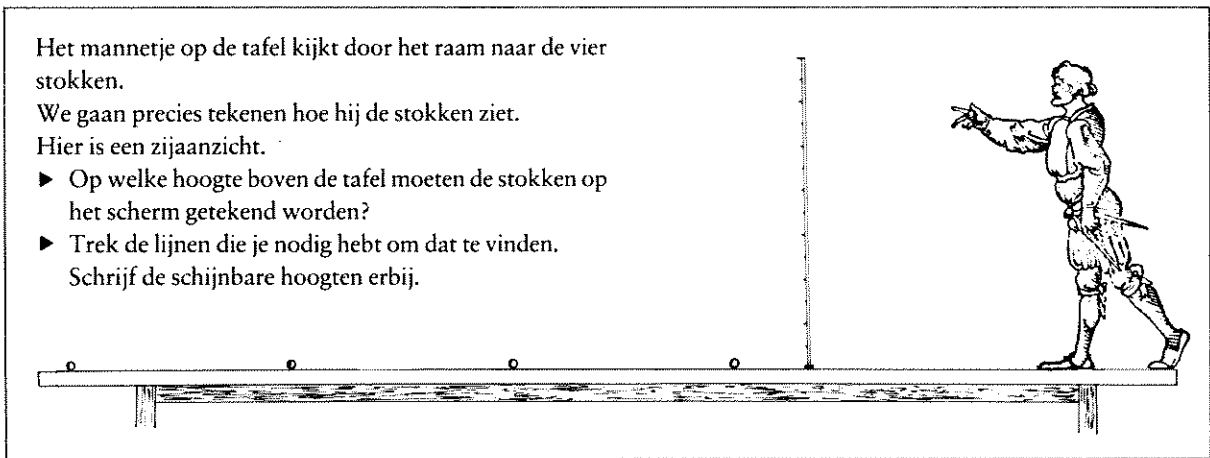


fig. 11

De schijnbare lengte van de stokken wordt het snelst in een bovenaanzicht gevonden (fig. 12).

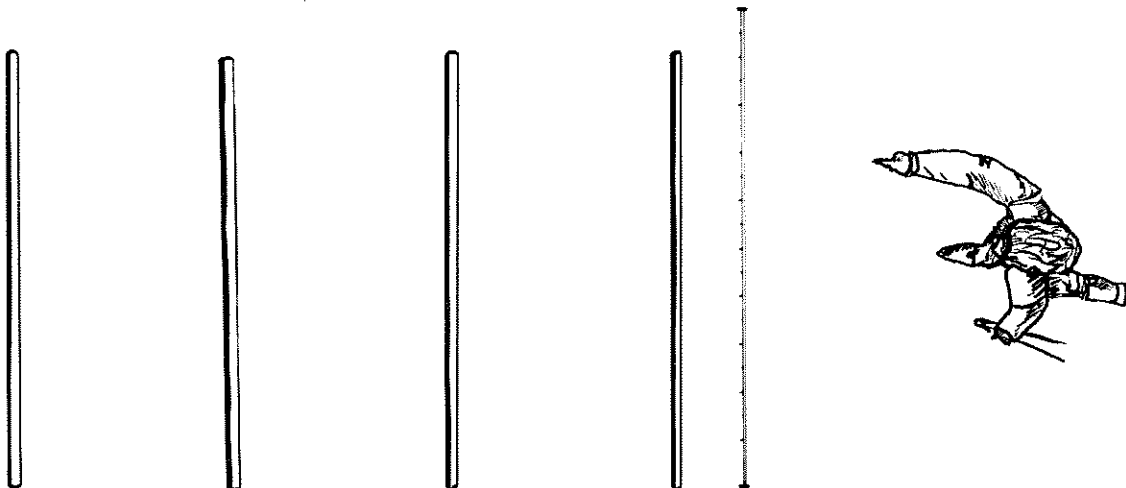


fig. 12

Boven- en zijaanzichten worden goed door de leerlingen verstaan in dit stadium. Dat komt ook door de wereldbol en het mannetje, die elke foute interpretatie uitsluiten.

De volgende stap ligt voor de hand maar is minder eenvoudig: combineren (fig. 13).

Met de hoogten en lengten die je in de vorige twee opgaven hebt gevonden kun je nu heel precies tekenen wat er door het scherm te zien is.

Hier is het scherm zoals het er van voren uitziet.

- Teken de stokken er maar op. (Je kunt de stippe lijn langs de randen handig als cm-verdeling gebruiken.)

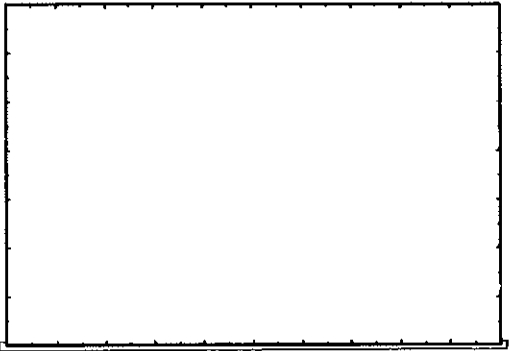


fig. 13

Officieel hebben deze leerlingen 'nog geen coördinaten gehad', maar dat blijkt er niet toe te doen. Er zijn heel wat vergissingen mogelijk (bijvoorbeeld: ondersteboven werken) maar toch blijkt het geheel



fig. 14

een succes. Hoe nauwkeuriger je werkt, des te beter natuurlijk. Als je millimeter-precies bent, komen de uiteinden van de stokken mooi op twee lijnen. Dat lukt de meesten heel goed en de minder nauwkeurigen corrigeren graag: het resultaat loont de moeite.

op weg naar de horizon

Wat gebeurt er als je veel meer stokken op een rij legt?

Het limietproces onderzoeken we direkter (fig. 15).

stappen met stokken

Werk met zijn tweeën aan deze opgave.

- Leg een stok van een meter lang dwars voor je op de grond. Doe één oog dicht en kijk verder met het andere. Neem een liniaal in je hand en strek je arm. Hoeveel centimeter van de liniaal heb je nodig om de stok juist af te dekken? Schrijf dat op.

- Nu moet iemand anders de stok een meter verder leggen.

Zelf blijf je staan.

Meet weer hoeveel centimeter je nodig hebt om de stok juist af te dekken.

Weer met één oog kijken en de arm gestrekt houden.

Ga zo door en maak een lijstje:

hoe ver de stok weg ligt	hoeveel centimeter nodig is om de stok juist af te dekken
1 stap cm
2 stappen cm
3 stappen cm
5 stappen cm
enz.	enz.

- Als je zo bijvoorbeeld een miljoen stappen door zou gaan, wat komen er dan voor getallen in de rechterrij?

- Je moest steeds een kleiner stukje liniaal nemen, maar je moest ook je arm na elke stap iets anders houden.

Hoe?

Wat gebeurt er op de lange duur met de stand van je arm?

fig. 15

De antwoorden liegen er niet om:
 'Zij is heel ver gelopen met de stok en toen ging mijn arm steeds omhoog tot zó, en toen stopte die.'....
 De limiet wordt dus echt bereikt ...

Tot slot van dit gedeelte wijzen we nog een paard in de verte aan. Hoe hoog is je hand? Op ooghoogte! En als het paard naar je toeloopt? Dat blijft zo.

Hoe wijs je een stok aan die in houten (5 km weg) ligt? Hanneke wijst trefzeker horizontaal, hoewel ze eerst beweerde dat het niet kon: de stok is niet te zien.

broer konijn en René Magritte

In het pakketje is nu een strip opgenomen over broer konijn (fig. 16). Barend Buizerd zien we schilderen, tenminste dat lijkt zo. Broer konijn is vol bewondering voor het zo echt lijkende landschap dat hij binnen de lijst ziet. Voor 50 gulden wordt hij eigenaar van... een lege lijst.



fig. 16

Heel duidelijk is verbeeld: het schilderij is een venster met uitzicht op de (gesuggereerde) ruimte achter het schilderij. Deze strip kreeg ik van een leerling uit de klas waar een eerdere versie van het pakket werd uitgetoetst.

Toen kwam een schilderij van René Magritte (1898-1967) in het boekje voor (fig. 17).

Yolanda schrijft op:
 'Dat je toch ziet hoe het er buiten uitziet.'....



René Magritte: 'La condition humaine I', 1933 fig. 17

Magritte zelf heeft meer woorden nodig:

'De geschilderde boom verbergt de boom die er precies achter staat, buiten de kamer. De boom bestaat voor het idee van de toeschouwer zowel binnen de kamer op het schilderij als buiten de kamer in het echte landschap. Dat is hoe we de wereld zien: we zien de dingen alsof ze buiten onszelf bestaan, terwijl we alleen bezig zijn met de mentale voorstellingen die we binnen ons zelf ervaren.'

Magritte gaat – als een echte surrealist iets te denken overlatend – niet in op het merkwaardige linkerrandje van het schilderij (op het schilderij). Enkele leerlingen deden dat wel:

.... 'Het kan geen glasplaat zijn (op die schilders-ezel), want dan moet je het gordijn zien.'....

De truuk met de lege lijst blijkt niet alleen voor Barend Buizerd winst op te leveren. De lege lijst is een handig hulpmiddel om de echte wereld op een denkbeeldig vlak (tussen de lijst) te kunnen voorstellen (fig. 18).



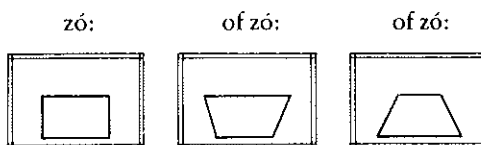
Achter in dit boekje zit een geel vel karton.

- Maak het los en knip alleen het binnenste stuk eruit.

Dóór deze schilderijlijst gaan we nu van alles met een oog bekijken.

Kijk maar eens door de lijst naar een van je klasgenoten en stel je dan voor dat je een foto in het lijstje ziet in plaats van een klasgenoot ongeveer een meter erachter.

- Ga recht voor je tafel staan, ongeveer op een meter afstand. Kijk door de lijst naar je tafel. Hoe zie je het tafelblad dan?



- Nu schuin voor je tafel. Wat zie je nu?

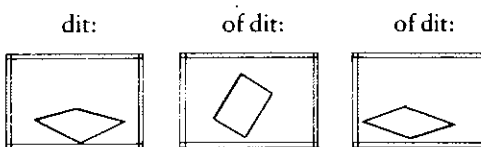
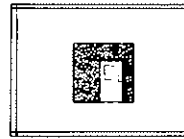


fig. 18

Bij deze opgaven merk je heel duidelijk het verschil tussen wat je ziet en hoe je iets ziet. Zonder het zelf geprobeerd te hebben blij je sceptisch, maar doe het eens! Het effect is onverwacht sterk.

De laatste opgave leidt heel scherp tot de indruk dat evenwijdige lijnen die van je aflopen, op de tekening zullen konvergeren (fig. 19).

Ga ergens in een rechte gang staan met de kartonnen lijst. De achterwand van de gang is het grijze stuk in deze tekening. Misschien niet precies zo, maar dat doet er niet toe.



- Let nu op de hoofdlijnen van de gang, die van je af lopen naar het eind van de gang. Teken ze zoals je ze door de lijst hebt gezien.

fig. 19

Met je vinger kun je de lijnen 'op het glas in de lijst' volgen.

Wat gebeurt er als de gang heel lang is?

Dan is de achterkant heel klein op de tekening. Dan lopen de lijnen naar elkaar toe.

verdwijnpunten

Als je op een spoorwegovergang staat zie je de rails 'in de verte elkaar raken'. Een foto van een hoge toren, naar boven genomen: evenwijdige verticale lijnen lopen nu naar elkaar toe. Het is aardig dat op foto's eens echt uit te proberen.

Het gaat ook mooi aan de hand van een kerk in oude rechthoekige basilicavorm (fig. 20).

- De Santa Maria Maggiore is een 1500 jaar oude kerk in rome. Ze heeft een rechthoekige vorm. Zoek in deze foto van de St. Maria Maggiore lijnen die in *werkelijkheid* evenwijdig zijn en van je af lopen. Trek ze langer door dan ze op de foto zijn.

Hoe lopen al die lijnen *op de foto*?

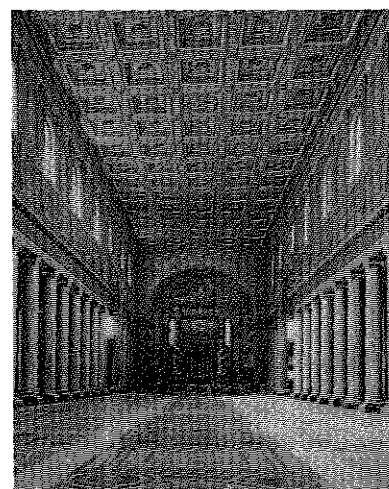


fig. 20

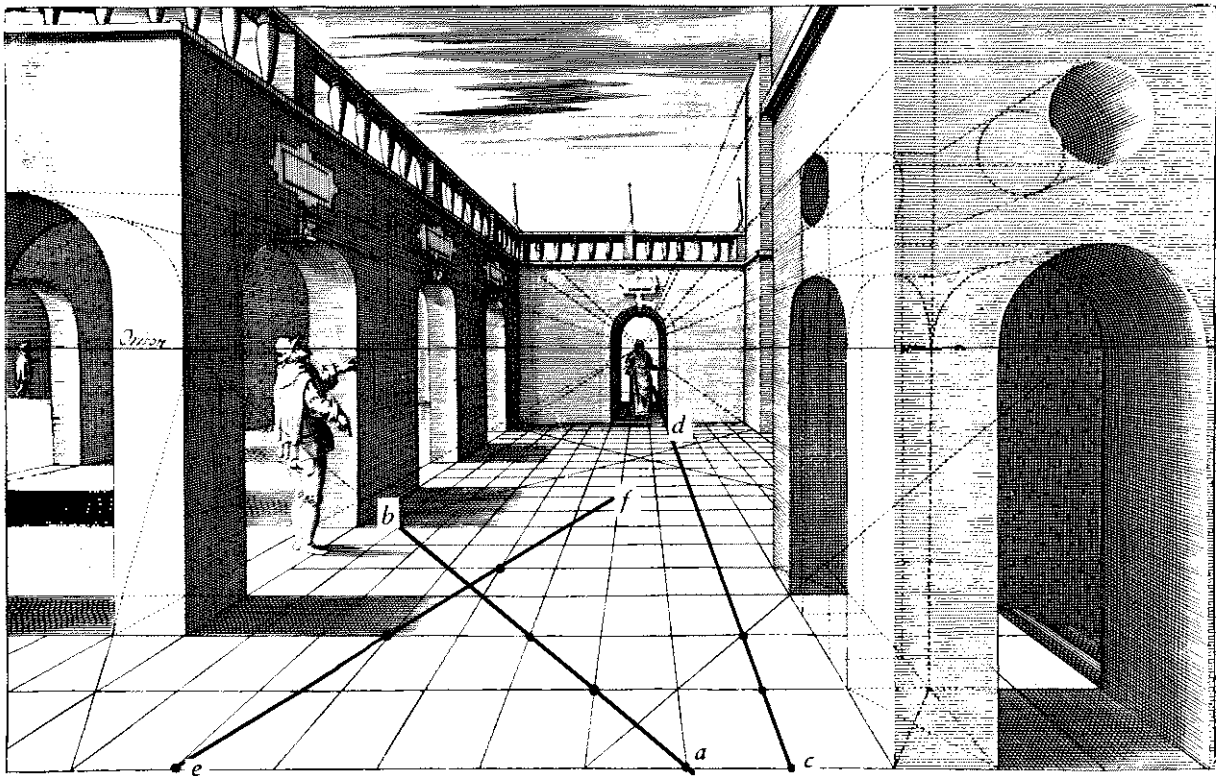


fig. 21a

Zo wordt dus wel geconstateerd dat evenwijdige lijnen toch op de tekening door één punt kunnen gaan. Een echt 'bewijs' geven we daar niet van, maar voorgaande activiteiten leggen in ieder geval voldoende concrete basis om daar nog ooit eens op te kunnen terugkomen.

Ook op tegelvloeren in perspektieftekeningen is allerlei interessants waar te nemen. Vooral als je kort tevoren in het pakketje 'Evenwijdigheden' hebt gemerkt dat je met behulp van de tegelstructuur gemakkelijk allerlei evenwijdige lijnen kunt vinden.

We gebruiken een gravure van Jan Vredeman de Vries, een architect die in 1599 een boek over perspektief publiceerde, met een opdracht voorin aan Maurits, prins van Oranje (fig. 21a).

Het blijkt dat ook de diagonalen van de tegels rechte lijnen vormen, die door één punt op de horizon gaan. Ook als je een andere lijn uitkiest en tegelgewijs verschuift, vind je – in werkelijkheid evenwijdige – lijnen, die op een punt op de horizon uitkomen. Weer: hoe nauwkeuriger je tekent, hoe beter het lukt!

slot

Het slot van het pakketje is het tekenen van een kubus en een eenvoudig trappetje in perspektief. Het belangrijkste doel van 'Met het oog op diepte' is dit tekenwerk echter niet. Het verklaren van verschijnselen met behulp van tekeningen, zijaanzichten en bovenaanzichten, neemt een veel grotere plaats in. Zelf waarnemen en op grond daarvan redeneren is in veel grotere mate gedaan dan het opvolgen van tekenrecepten.

Het is allemaal meetkunde waar je je niet aan kunt onttrekken. Je loopt er overal tegenop en je zit er altijd middenin. En dat geeft te denken. Of, zoals een leerling het formuleerde:

....'Heeft u dit boekje gemaakt? Wel aardig hoor, maar moeilijk.'....

Leuk is dat: best moeilijk, maar toch aardig.

Op de plaat zie je een tegelvloer (fig. 21a).

► Teken een paar lijnen op de getekende tegelvloer, die op de 'echte' tegelvloer evenwijdig zouden zijn met *ab*.

Zoek het verdwijnpunt bij die lijnen.

► Doe net zo met *cd* en *ef*.

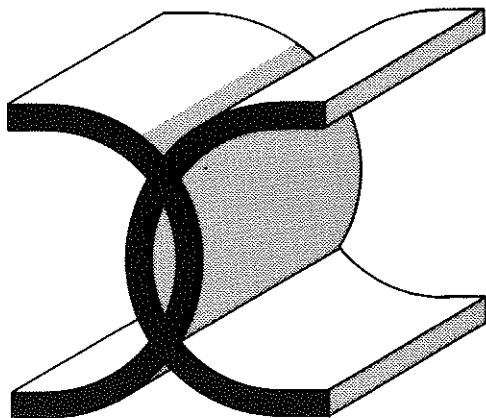
► Nu heb je drie verdwijnpunten op die tekening gevonden.

Hoe noemt de tekenaar de lijn waar ze op liggen?

► Wat is er nog meer precies op die lijn te vinden?

fig. 21b

opleiding



LEREN ONDERWIJZEN MET BIERVILTJES – EEN EKSPERIMENT –

In 'Leren onderwijzen met wiskobas'¹⁾ is beschreven hoe eerstejaars pa-studenten wiskunde leren én leren onderwijzen 'op de vierkante meter'. Vanuit het werken aan overzichtelijke problemen op eigen nivo, binnen de gebieden meetkunde en tellen, leren de studenten om korte, wiskundige activiteiten voor hun oefenschoolleerlingen in te richten en te begeleiden.

In het tweede schooljaar komt ook het 'lange afstandwerk' in beeld. Het gaat nu om het leren onderwijzen van langlopende leerprocessen, zoals het leren cijferen en het ontwikkelen van het verhoudingsbegrip.

FRED GOFFREE
HUUB JANSEN

opleidingsprobleem

Eén van de opleidingsproblemen daarbij vormt de inrichting en organisatie van het oefenschoolwerk van de studenten. Door de versnippering over de vele opleidingsvakken en de diskontinuiteit van de oefenschoolbezoeken blijken de studenten niet in staat langdurige leerprocessen dichtbij de kinderen en in detail te bestuderen. Deze situatie kan ertoe leiden dat in de opleiding volstaan wordt met een meer afstandelijke, theoretische beschouwing van deze leerprocessen. Een beschouwing die niet gemotiveerd wordt vanuit, en evenmin gebaseerd is op, eigen ervaringen van studenten met kinderen. Dit wordt nog versterkt door het feit dat het ook binnen het wiskunde leren op eigen nivo door de studenten niet eenvoudig is om leerprocessen te vinden, zoals het verwerven van algoritmische rekenvaardigheden, die leiden tot ervaringen aan de hand waarvan een beter zicht kan ontstaan op vergelijkbare leerprocessen van kinderen. Het zoeken naar een geschikt leerproces op het nivo van de student, vergelijkbaar met bijvoorbeeld het leren staartdelen door basisschoolleerlingen, leidde tot een *pa*-les waarvan we de inleiding en de hoofdpunten hierna aangeven.

donderdagmorgen

Stelt u zich een klas tweedejaars *pa*-studenten voor. Het is donderdagmorgen en op het rooster staat voor de eerste twee lessen: wiskunde en didaktiek. Achter op het bord, niet zichtbaar dus voor de binnendruppelende studenten, staat een vermenigvuldigopgave:

$$\begin{array}{r} 4572 \\ 983 \times \\ \hline \end{array}$$

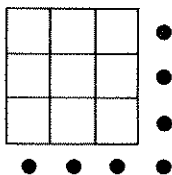
De docent begint de les met de vraag aan zijn gehoor, wie zich beschikbaar stelt als 'intelligente domoor'. En wanneer, zoals te verwachten, niemand zich spontaan meldt, geeft hij een toelichting: het gaat om iemand die zó intelligent is dat hij opdrachten van anderen precies kan uitvoeren, maar ook zó dom dat hij alleen maar getallen van één cijfer kan optellen en vermenigvuldigen.

Nadat een van de studenten zich aanmeldt, wat schuchter en onder instemmend gemompel van zijn kollega's, wordt aan de klas de volgende taak gegeven: jullie moeten proberen onze intelligente domoor zodanige opdrachten te geven dat hij de voor jullie onzichtbare vermenigvuldiging korrekt kan uitvoeren.

Het kost de nodige tijd en veel verwarde discussie voordat de eerste opdracht gegeven kan worden:

¹⁾ Goffree, F.: 'Leren onderwijzen met wiskobas', utrecht 1979.

Een korte opmerking van de docent om met één viltje te beginnen en dan het eerstvolgende, grotere 'vierkant' erom te leggen, blijkt voldoende en zo wordt het vierkant van 3×3 aangevuld met $2 \times 3 + 1$ om het volgende vierkant van 4×4 te krijgen ($9 + 7 = 16$):



Overigens blijkt een dergelijke schematische voorstelling (als in de figuur) niet spontaan 'gezien' te worden door de studenten.

Blijkbaar doet het experiment met de bierviltjes hiertoe niet de behoefte ontstaan. Deze behoefte komt even later wél naar voren, als het experiment vergeleken wordt met het algoritme dat nog op het bord staat.

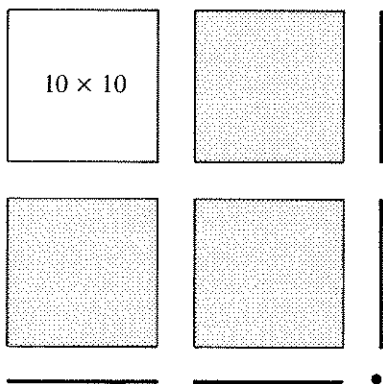
► *Wie begrijpt deze werkwijze wél?*, luidt de vraag aan de studenten.

Enkele studenten beginnen zich te roeren, pakken potlood en papier, maar de meeste kijken nog verwijfeld van bierviltjes naar schoolbord.

hint

Een hint is nodig. Deze wordt gericht op een bewustmaking van de positionele schrijfwijze. Van 625 wordt in de eerste stap niet één (bierviltje) afgetrokken, maar een groot vierkant van 100 (10×10 vierkantjes).

Nu is er aanleiding om de materiële handeling te gaan schematiseren:



Het (meetkundige) inzicht, dat de nieuwe aftrekker 41 verklaart, blijkt een belangrijk moment in het leerproces van de studenten. Niet alleen met betrekking tot het begrijpen van het algoritme, maar ook wat betreft de steun, die het gekozen materiaal te bieden heeft. Vooral dit laatste wordt zeer positief ervaren, en blijkt bij latere worteltrekkingen op het nivo van de studenten nog sterk na te werken.

In de logboeken kan de docent enige tijd later de diverse persoonlijke beschrijvingen van het leerproces nalezen. Materiële ondergrond en schematische voortzetting blijken inderdaad indruk gemaakt te hebben.

verkorting

Opmerkelijk is evenwel de geringe wendbaarheid, die de kennis van de hier beschreven *verkorting* (beginnen met het aftrekken van grote vierkanten) van de studenten nog heeft. Dit blijkt ruim een maand later, als de volgende opgave tijdens een afsluitend proefwerk gemaakt moet worden.

► *Bepaal 125×125 en trek – met het bekende algoritme – de wortel uit het produkt.*

Geen van de studenten denkt er dan aan om het getal 15625 zó te structureren: 1 56 25. De in de opgave expliciet gegeven 100×100 wordt niet gezien, en men brengt geen verkorting aan binnen het geleerde algoritme:

$$\begin{array}{r} 156|25 \\ -1 \\ \hline 155 \\ -3 \\ \hline \dots \end{array}$$

Overigens leidt de materiële voorstelling hen wel tot de juiste keuze van de nieuwe aftrekker (241) ($2 \times 120 + 1$).

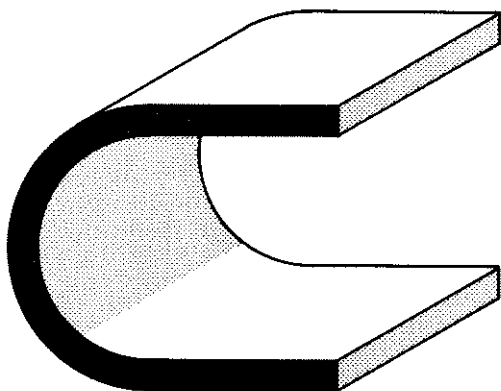
Men zou kunnen konkluderen dat juist bij het leren van algoritmen weinig gelegenheid wordt gegeven tot het leren van wendbare kennis. In dit geval was het nodig om ook met betrekking tot verkortingen de nodige aanwijzingen in het onderwijsleerproces op te nemen.

De vraag in hoeverre een flexibele aanpak binnen het leren van algoritmen gewenst is, is hiermee niet beantwoord.

Evenmin als de vraag of het hier beschreven experiment leidt tot leerervaringen aan de hand waarvan een student beter is toegerust om het leren van de bekende cijferalgoritmen door kinderen via progressief schematiserende werkwijzen te doorgronden.

Maar dat 'wiskunde en didaktiek' als vakgebied voor de (toekomstige) onderwijzersopleiding nog veel ontwikkelingswerk en onderzoek vereist, weet iedere lezer/*pa*-docent die alleen al daarom het *iowo* had willen behouden.

boek- bespreking



EEN VISIE OP REKENEN¹⁾

Er is de laatste jaren heel wat gepubliceerd over het rekenonderwijs. We kunnen daarbij grofweg een tweedeling in opvattingen constateren:

- rekenen omvat een verzameling algoritmen, die via een geatomiseerd, lineair leerproces verworven kunnen worden (1);
- rekenen dient naast het kunnen hanteren van de onder (1) bedoelde (basis-)vaardigheden te leiden tot een onderzoekende, kritische denkhouding (2).

Binnen beide stromingen wordt soms druk geschermd met leerpsychologische theorieën van 'wijzen uit het oosten'.

Tot welk een treurige gevolgen de onder (1) geschetste onderwijskundige opvatting kan leiden, bewijst nevenstaande ervaring, die één van mijn kollega's onlangs beleefde.

ervaring

Werkende met een combinatieklas (3/4) aan een activiteit over treintarieven, leken de kinderen begrepen te hebben hoe de kosten van een treinreis met behulp van een kilometerkaart en een kosten tabel uit het spoorboekje berekend kunnen worden. Ter afsluiting van de les werd het volgende probleem gesteld:

► Moeder, Jan (13) en Piet (9) maken een reis van Hilversum naar Alkmaar. Wat kost dat?

.... 'Dat weet ik niet.' (leerling)

'Waarom niet?' (onderwijzer)

'Ik weet niet hoe oud die moeder is.' (leerling)....

De onderwijzer, een voortreffelijk didaktikus, gaat hier als volgt op in:

.... 'Hoe oud denk je?' (onderwijzer)

'Ik denk 39.' (leerling)

'Zeer goed.' (onderwijzer)....

Nu wordt het probleem snel gekraakt:

$$39 + 13 + 9 = 61.$$

enkele reis		
km	2e klas	1e klas
35-36	5,50	8,—
37	5,75	8,50
38-39	5,75	8,50
40	6,25	9,25
41-42	6,25	9,25
43	6,75	9,75
44-45	6,75	9,75
46	7,25	10,50
47-48	7,25	10,50
49	7,75	11,25
50-51	7,75	11,25
52	8,25	12,—
53-54	8,25	12,—
55	8,50	12,50
56-57	8,50	12,50
58	9,—	13,—
59-60	9,—	13,—
61	9,50	13,75
62-63	9,50	13,75
64	9,75	14,25
65-66	9,75	14,25
67-70	10,25	15,—
71-76	11,—	16,—
77-82	11,75	17,—

In het lijstje van de kilometers wordt '61' gelokaliseerd! De prijs is f 9,50!

Hoe dit verder tot een uitstekend leergesprek heeft geleid, waarbij ook allerlei aspecten die niet direkt

¹⁾ Dit artikel is tevens verschenen in 'Pedomorfose', jaargang 12 nr 46, onder de titel: 'Een visie op rekenen (boekbespreking)'.

met rekenen te maken hebben, aan de orde kwamen, laat ik nu maar buiten beschouwing.

Waar het om gaat is het volgende: de kinderen – er was aanvankelijk geen enkel kommentaar van de overige uit de groep – hadden jarenlang met een methode gewerkt die mikt op een truukmatige aanpak. Hierdoor worden de kinderen bij aanbieder van een reëel probleem gekonditioneerd op het volgende idee: 'Ik zie een aantal getallen, waarmee ik wat moet doen.' Blind volvoeren ze daarna een aantal algoritmische handelingen. Als er maar een antwoord komt.

Dit voorbeeld is gemakkelijk uit te breiden tot een heel arsenaal. Daar gaat het hier echter niet om. Ik wil nu een boekje onder de aandacht brengen, waarin een visie op onderwijs naar voren komt, die meer tot de onder (2) genoemde categorie behoort. Een visie die bij praktisering kan bijdragen tot het voorkomen van dergelijke katastrofen.

getallenlijn

Het gaat om 'De getallenlijn', een uitgave in de 'Onderwijskundige Brochuren Reeks'. Deze reeks is zich uiterlijk en inhoudelijk aan het wijzigen. De auteurs, Louis Gilissen en Joost Klep, beiden reken/wiskundedidaktici, zijn goed op de hoogte van het *iowo*-werk (afd. wiskobas) en hebben, daardoor geïnspireerd, maar tevens zelf praktisch met kinderen werkend, een interessant boekje over het (aanvankelijk) rekenen samengesteld.

De titel ('De getallenlijn') is helaas misleidend, want het gaat maar gedeeltelijk over de getallenlijn sec. Het is veel ruimer van opzet. In feite behelst het eerste deel van de brochure 'de vorming van het getalbegrip' in al z'n facetten, terwijl het tweede deel over de 'begripsverwerving van de basisbewerkingen' met natuurlijke getallen handelt.

Gelukkig is ook nog een ondertitel toegevoegd in de volgende vorm: 'tellen, meten, rekenen en denken'.

geen leergang

Het boekje is geen leergang. Integendeel, het doet soms wat rommelig aan, omdat de auteurs geweigerd hebben de verschillende aspecten van het aanvankelijk rekenonderwijs in een opdelend overzicht aan te bieden. Daarmee demonstreren zij in hun eigen presentatie eigenlijk datgene, wat goed rekenonderwijs dient te zijn. Het bewust maken van het nut van een meersporige aanpak bij begripsvorming (bijvoorbeeld bij het getalbegrip), het leggen van verbanden daartussen, het leren kiezen van de juiste didactische aanpak in een specifieke situatie (zij spreken van anticiperen in de onderwijssituatie), het enorme belang van nabije observatie van de kinderen, het reflecteren daarop en op het eigen gedrag; dat alles is een heel kompleks van zaken, dat zich niet eenvoudig in laadjes en schotjes laat opdelen.

Of, zoals ze het zelf heel eenvoudig zeggen:

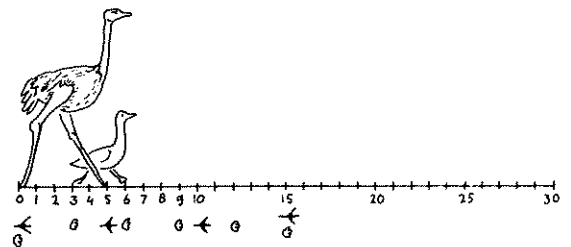
'Goed onderwijs zorgt ervoor dat de kinderen op onderling verschillende niveaus kunnen deelnemen aan elke aparte les en dat in de loop van een aantal lessen de kinderen op een steeds hoger niveau gaan denken. Belangrijk daarbij is dat de onderwijzer het leren van individuele leerlingen kan signaleren en erop in kan spelen.'

Dit geschiedt echter niet in algemene termen. Men vertrekt steeds uit konkrete onderwijssituaties, zoals het volgende verhaal over een gans en een struisvogel, die een wandeling op de getallenlijn maken, demonstreert:

'Een struisvogel en een gans lopen over een getallenlijn. De struisvogel zet stappen van vijf stukjes, de gans zet stappen van drie stukjes.

Ze hebben natte voeten. Op welke punten komt een voetafdruk van de gans op een voetafdruk van de struisvogel terecht?

Deze vraagstelling kan aanleiding geven tot de ontdekking dat de ontmoetingspunten de gemeenschappelijke tafelprodukten zijn van de vermenigvuldigtafels van drie en vijf. Misschien ontdekken de kinderen ook dat de gemeenschappelijke tafelprodukten veelvoud van het kleinste gemeenschappelijke tafelprodukt zijn.



Als de kinderen door het tekenen van de voetstappen bij 15 gekomen zijn en hebben geconstateerd, dat daar de voetstappen op elkaar terechtkomen, kun je vragen: 'Hoeveel stukjes hebben ze van daaraf nodig, voordat ze wéér bij elkaar komen?'

Toen ik dit aan Michelle (7;7) vroeg, was ze even stil en zei toen opgewonden: 'Wéér vijftien!'

Op dit antwoord moet je een goede vervolgvraag hebben. Maar laten we eerst eens kijken wat Michelle gedacht kan hebben. Het is mogelijk dat ze gedacht heeft:

na vijftien stukjes vallen de passen samen; dat betekent dat je daarvoor vijftien stukjes nodig hebt; en dat betekent weer, dat je vanaf 15 wéér vijftien stukjes nodig hebt.

Het is ook mogelijk dat ze een eenvoudige analogierekening heeft gemaakt:

tot nu toe hebben ze vijftien stukjes nodig gehad en dat zal nu ook wel weer zo zijn.

Ze realiseert zich dan niet, waarom dit zo is. Maar op grond van zo'n redenering zou ze niet zo enthousiast: 'Weer vijftien!' geroepen hebben.

Een derde mogelijkheid is, dat ze de tafels van 3 en 5 heeft nagelopen en ziet dat 15 het eerste gemeenschappelijke tafelprodukt is en 30 het volgende. Als ze dát gedacht had, had ze waarschijnlijk ook een ander

soort antwoord gegeven. Blijkbaar heeft Michelle de periodiciteit ontdekt: je hebt steeds een stuk 0-15 nodig voor een volgende ontmoeting.

De vervolgvraag waar we naar zochten kan zijn: kijk eens naar sprongen van 2 voor de gans en stappen van 3 voor de struisvogel. Waar komen dan hun sporen samen?

Om te voorkomen, dat de kinderen zonder na te denken gaan uitproberen, moet je tegelijk vragen: kun je dat nou uitvinden zónder sprongen op de getallenlijn aan te wijzen?'

individuele ervaring

Duidelijk is dat voorgaande onderwijsleersituatie de ervaring met één enkele leerling betreft.

Terecht zal men zich afvragen: Maar hoe zal ik dit moeten 'toepassen' in mijn groep leerlingen?

Dat is inderdaad een niet te verwaarlozen praktisch probleem, maar het didactische nut, dat uit het individuele werken met leerlingen gesorteerd kan worden, kan van onschatbare waarde blijken – ook als men in de grotere groep aan de gang gaat. Men heeft zich als het ware enigszins geprepareerd en langzamerhand zal de attitude van de onderwijsgevende zich kunnen wijzigen.

inhoud

De inhoud van het boekje is, ik zei het al, nogal divers. Er is aandacht voor:

- de verschillende aspecten van het getal (tel-, aantal-, meet-, verhoudings-, reken- en naamgetal);
- de operaties met getallen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen);
- het gebruik van verschillende modellen (groepjes, stroken, rechthoeken, boomdiagram, getallenlijn, etc.);
hierbij wordt de getallenlijn als bindend element tussen de andere modellen beschouwd; een beschouwing die m.i. een vraagteken behoeft;
- konteksten (verhaaltjessommen, redaktiesommen, etc.);
- notatiewijzen (pijlentaal, 'normale' symbolen).

Ook meer mathematisch-didactische componenten komen, hiermee verbonden, aan de orde, zoals:

- 'eensporigheid' versus 'meersporigheid' ten aanzien van begripsvorming;
- automatiseren en memoriseren;
- isomorfe problemen;
- matematiseren;
- etc.

Wellicht komen sommige van deze termen de lezer onbekend voor. Een reden temeer om het boekje eens ter hand te nemen.

Het zal aldus z'n functie kunnen hebben op de pedagogische academie, maar ook de schoolbegeleider kan er zijn voordeel mee doen. En niet te vergeten: de geïnteresseerde onderwijsgevende.

Het lijkt mij heel geschikt voor gebruik tijdens inte-

gratiekursussen. Ook al omdat het een aantal praktische lessuggesties bevat, zij het dat deze niet het overgrote deel van de tekst uitmaken.

de 'geest' van het boekje

Interessant is ook de mogelijkheid kennis te maken met de opvattingen, die de auteurs vertolken betreffende het leren en onderwijzen van rekenen en wiskunde in het algemeen.

Het hele boekje ademt een bepaalde geest.

Aan het eind wordt dit nog eens samengevat in een aantal steekwoorden, waarvan één het begrip 'samenwerken' betreft. Ik citeer:

'Problemen oplossen en taalverwerven kun je beter samen doen. Bij taalverwerving in communicatie is dat ten dele vanzelfsprekend, want ook bij taalverwerving zit iets probleemachtigs. Het inbrengen van suggesties, ideetjes, invallen, denkstappen en dergelijke in een gesprek en het oppikken van andermans gedachten moeten kinderen leren.

De rol van de onderwijzer is hier die van gespreksleider. Uitvallers moet hij er weer bij betrekken, te snelle praters moet hij zich leren inhouden. Hij kan kinderen leren echt in te gaan op elkaar, maar moet aan de andere kant de kinderen duidelijk maken dat ieder voor zich tijd en denkruimte nodig heeft om zijn gedachten even de vrije loop te laten, even te fantaseren, even eens niet mee te doen, even eens wat anders te proberen.

We stellen in onze ervaringen met kinderen en volwassenen maar al te vaak vast: een mens kan door de meest wonderlijke dingen op een idee komen.'

(aanvankelijk) rekenonderwijs

De auteurs zijn door de getallenlijn kennelijk op het idee gekomen een boekje over het (aanvankelijk) rekenonderwijs te maken.

Over de getallenlijn zelf hadden ze nog veel meer bijeen kunnen brengen, iets dat zijzelf ook al opmerkten. Ik denk dan bijvoorbeeld aan het gebruik van kralenlijnen in het kleuteronderwijs of aan de mogelijkheden voor het eigenschapsrekenen in de bovenbouw.

Zij hebben daarvoor niet gekozen. Het gevolg is, dat de titel niet deugt. Niettemin is een boekje ontstaan, dat de moeite waard is voor al diegenen, die in praktische zin iets aan hun rekenonderwijs willen doen.

Dat de auteurs zich daarbij niet hebben laten verleiden tot de mode ook enige leerpsychologie in hun geschrift te verwerken, maakt de lezing ekstra prettig.

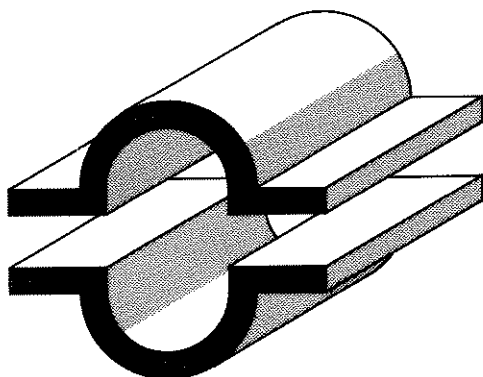
Titel: 'De getallenlijn: tellen, meten, rekenen en denken.'

Auteurs: Louis Gilissen en Joost Klep.

Uitgegeven in: 'Onderwijskundige Brochuren Reeks' (nr 287), Zwijssen, tilburg.

Prijs: f 17,50.

ander werk



MATEMATISEREN: EEN DIDAKTISCH DENKMODEL

In maart 1979 hield wiskobas in noord-wijkerhout een landelijke konferentie, '10 voor rekenen' genaamd.

Aan een brede vertegenwoordiging van het onderwijsveld: basisonderwijs (4-12 jaar), opleiding (pa, klos) en begeleiding, werden 'kernpunten van een ideaal rekenprogramma' voorgelegd.

Deze kernpunten betroffen zaken als:

- begripsvorming;
- gebruik van konteksten, modellen en notatievormen;
- veelzijdige inbedding en oefenvormen;
- leren cijferen;
- rekenen en wiskunde;
- enz.

Door wiskobas geformuleerd en toegelicht, werden deze kernpunten ter konferentie nader uitgewerkt en beoordeeld.

Zie voor een nadere toelichting van de punten ook paragraaf 6 van spullenkatern 9 in dit nummer.

Zelden werd een konferentie grondiger voorbereid dan deze '10 voor rekenen': tien jaar denken over rekenonderwijs werd door wiskobas ten grondslag gelegd aan het scheppen van een kader, waarbinnen toekomstige ontwikkelingen zich zouden kunnen afspelen. De toen al dreigende opheffing van het iowo gaf de voorbereiding tevens een soort 'testamentair' karakter. Ook de aanpak in de wiskobas-vergadering werd door die gedachte getekend: in wekenlange besprekingen haalde ieder het onderste uit de kan om deze (laatste?) konferentie tot een sukses te maken.

Binnen die sfeer ontstond onderstaand stuk, nu ruim een jaar geleden.

Vanuit z'n ervaring en doordenking, was het voor wiskobas in eerste aanzet niet moeilijk bovengenoemde 'kernpunten' boven water te krijgen. Scherpte en eenduidigheid van formulering was een volgende zaak.

Wél deed zich binnen de discussies de vraag voor naar de volledigheid en legitimatie van de kernpunten: hadden we ze allemaal en op welk uitgangspunt berustten ze?

Op dat moment had het weinig zin uitvoerig op deze theoretische vragen in te gaan: enerzijds mocht het wiskobasstandpunt voldoende bekend verondersteld worden, anderzijds garandeerde de representativiteit van de konferentie een antwoord uit de praktijk. Eventuele aanvullingen en wijzigingen zouden zeker door de konferentiegangers ter tafel worden gebracht, terwijl legitimatie van de kernpunten juist in de doelstelling van de konferentie besloten lag. Desondanks werd afgesproken een korte inleiding op de gekozen kernpunten te schrijven. En het is dáár dat ons verhaal begint.

Wat immers een korte inleiding op de konferentie moest worden, dijd al schrijvend uit tot een brede 'filosofie' over reken/wiskundeonderwijs, die alleen al door haar lengte onbruikbaar was voor de konferentie.

Bovendien was het verhaal niet af: het uitgangspunt om 'wiskundige wereldoriëntatie' didaktisch te doordenken vanuit een matematiseringsmodel, vereiste nadere studie en overweging.

Binnen de gegeven (iowo-)omstandigheden kwam daar niet veel meer van en het stuk bleef lange tijd onaangeroerd liggen.

Dat we het nu tóch uit de kast hebben gehaald, heeft uiteraard te maken met het naderend iowo-einde: we hopen immers dat het aangereikte model een bijdrage mag leveren tot een voortgezette discussie over reken/wiskundeonderwijs, ook ná 1 januari 1981.

Vandaar...!

► INLEIDING (1)

De tijd dat wiskundeonderwijs zich primair ten doel stelde leerlingen in te voeren in het wélgestructureerde eindprodukt van volwassen, mathematisch denken, ligt nog niet lang – of beter: nog lang niet – achter ons.

Mede beïnvloed door het structuurkarakter van de ‘moderne wiskunde’ is genoemde benadering eer versterkt dan verminderd, ondanks – én dankzij – de ruime didactische mogelijkheden die deze ‘moderne wiskunde’ al evenzeer bood. In deze benadering bleef ‘wiskunde’ een afvalrace voor intellectuelen, waarbij de afhakers achterbleven met een bezwaard gemoed en een betekenisloze wiskundige ballast.

Helaas zijn inmiddels ook voorbeelden voorhanden, waarin leerlingen uit het basisonderwijs – op hún nivo – geconfronteerd worden met vergelijkbare mathematische structuurbenaderingen. De didactische saus die deze kost overgiet is weliswaar dikker en mooier van kleur, de uiteindelijke indigestie is er niet minder om: schijnresultaten in schijnrealiteiten.

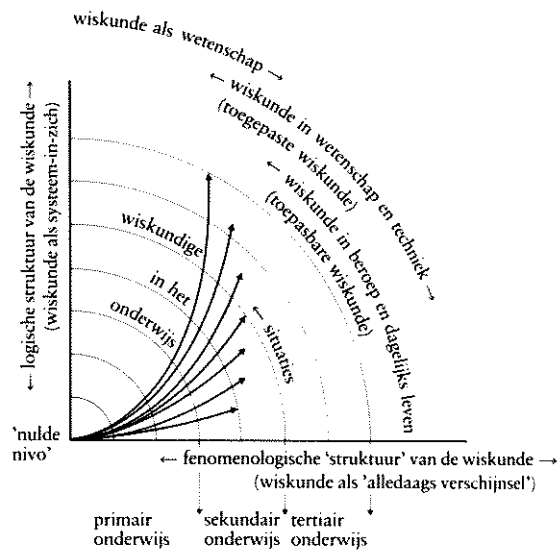
En als deze schijn niet bedriegt, wordt eerlang zelfs het kleuteronderwijs bedreigd met wanprodukten van mathematische begripsvorming, taal en logika. Alleen de verpakking zal nóg mooier zijn, nóg kleurrijker, nóg bedrieglijker.

Een ontwikkeling die niet alleen een bedreiging inhoudt voor leerling en onderwijzer(es), maar óók voor de wiskunde zelf. Immers, door de interne samenhang van de wiskunde – de logische structuur – tot uitgangspunt te kiezen van het didactische handelen, doet men ernstig tekort aan de externe samenhang van de wiskunde met de verschijnselen van alledag – de fenomenologische structuur. Men schept dan makkelijk het beeld van wiskunde, waarin alle antwoorden al klaar liggen, vóór de vragen nog maar gesteld zijn, waarin geen ruimte is voor eigen inbreng of creativiteit en die weinig van doen heeft met de wereld waarin je leeft.

Tegenover deze oriëntatie in de wereld van de wiskunde stelt wiskobas de *wiskundige wereldoriëntatie*. En meer dan een subtiel woordenspel, verlegt deze uitspraak het primaat van de wiskunde naar dat van het kind, van de leerstof naar het leerproces, van de kennis en vaardigheid naar de attitude. In deze opvatting zoeken we het didactische uitgangspunt in de ontmoeting van het kind met wiskundige aspecten in zijn omgeving. Vanuit zijn directe beleving en ervaring stellen we een mathematiseringsproces in werking, dat het kind inzicht moet bieden in de *bijdrage die de wiskunde kan leveren aan de oriëntatie in de wereld waarin je leeft*. Op deze manier manifesteert wiskunde zich als een menselijke activiteit die je helpt je werkelijkheid te

beschrijven, te begrijpen en zelfs: te voorspellen.¹⁾

- 1) We kunnen bovenstaande opvatting nog nader illustreren met een plaatje, waarin de eerdergenoemde logische en fenomenologische structuur van de wiskunde op twee verschillende assen zijn afgebeeld (waarbij we ons overigens wel moeten realiseren dat deze scheiding om strikt didactische redenen is aangebracht!). Daarbij vertegenwoordigen de verbindingscirkels als het ware de wiskundige situaties, waarmee de leerlingen in de school (en later daarbuiten) geconfronteerd worden. De ingetekende pijlen stellen dan de verschillend denkbare ‘wiskunde-karrières’ voor, die zich mogelijk in de tijd kunnen voltrekken.



Dit plaatje nu maakt duidelijk dat die ‘karrière’ zich vanaf het nulde nivo (zie pag. 40) primair richt op het functioneren van de wiskunde in de dagelijkse werkelijkheid van de leerling. Daarbinnen bouwt zich geleidelijk ook een meer ‘zelfstandig’ beeld van de wiskunde op: de pijlen stijgen. (En als we even denken aan het rekenonderwijs – hoofdbewerkingen, algoritmen, e.d. – dan kan die stijging zich op deelgebieden al veel sneller voltrekken dan het plaatje suggereert!)

In het vervolg van onderwijs en beroepsleven gaan die pijlen in lengte en hoogte steeds verder uiteenlopen: naast de ‘afhaker’ voor wie het abstraktienivo van de wiskunde te hoog reikt, manifesteert zich langzamerhand ook de potentiële wiskundestudent, wiens carrièrepijl steeds vertikaler tendenzen vertoont.

Binnen deze uitersten bewegen zich de overige pijlen in een richting, waarin de wiskunde op verschillend nivo functioneert in dagelijks of beroepsleven, in toepasbare of toegepaste vorm.

Maar op welk nivo dan ook, elke leerling heeft het recht op een wiskundeonderwijs dat een bijdrage levert tot zijn toekomstig functioneren, óók – en in het bijzonder – als hij/zij onverhoopt afhaakt!

(En dat binnen deze fenomenologische benadering op geschikte momenten, ook een uitbouw plaatsvindt in meer logische zin, spreekt vanzelf!).¹⁾ Bovenstaande beginselverklaring – niet meer, niet minder – is door wiskobas in vele toonaarden en richtingen nader uitgewerkt: van concreet-praktisch tot beschouwend-theoretisch, voor kleuter- en basisonderwijs, voor opleiding en heroriëntering.

Met de nu volgende uitwerking willen we slechts een begrippenkader schetsen, waarbinnen een *didactische discussie* zich verder zou kunnen voltrekken.

Centraal binnen bovengenoemde benadering van wiskunde als menselijke activiteit, staat het matematiseringsproces.

Laten we ons denken daarbinnen richten vanuit een ‘ideaal’-model van matematisering:

matematiseren: ‘verschrallen om te verrijken’

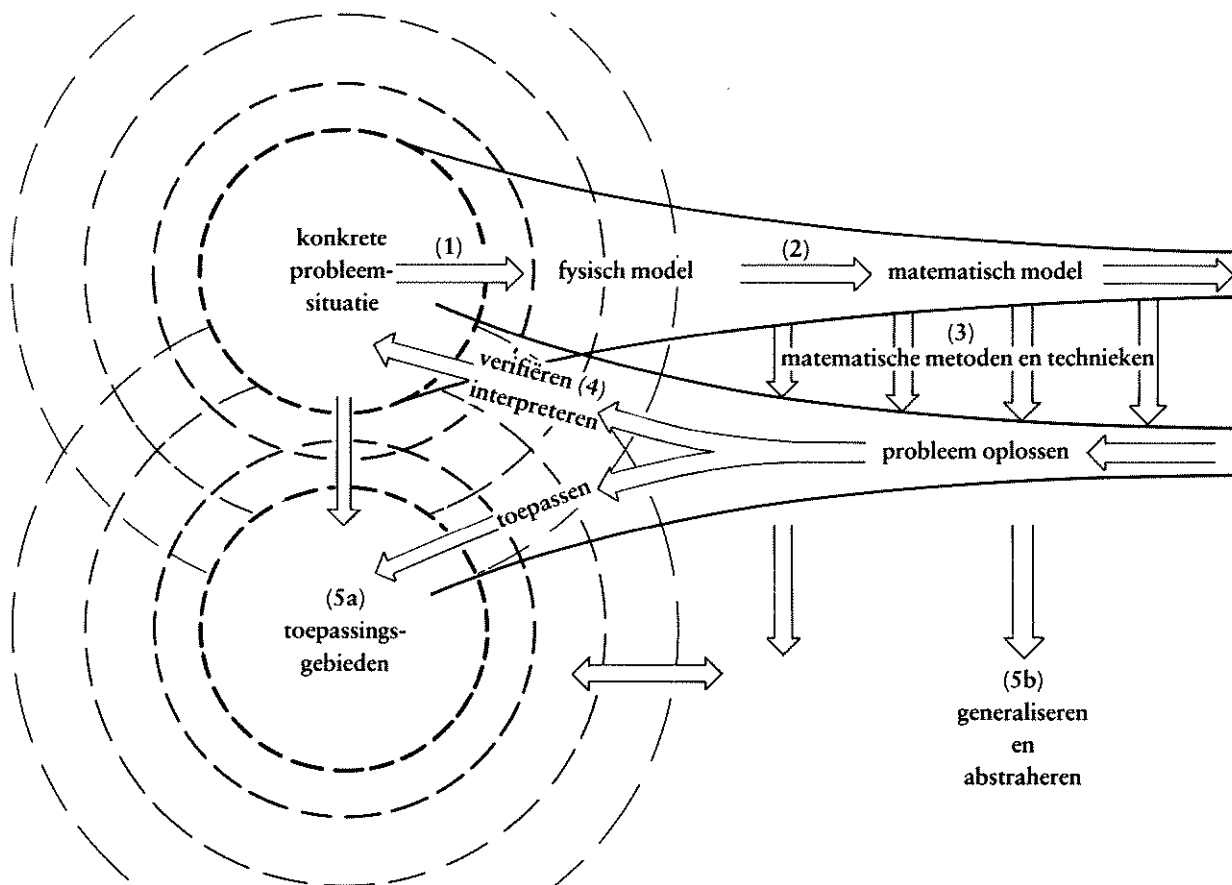


fig. 1

toelichting

(1) In een alledaagse situatie – hierna vooral onderwijskundig te interpreteren – ligt een concrete probleemstelling besloten, die we (ook) wiskundig willen bewerken.

(2) Na de probleemsituatie van z'n (wiskundig) niet-relevante gegevens te hebben ontdaan, trachten we er een concreet of meer abstract model van te konstrueren, dat een beter inzicht biedt in de betrokken relaties.

(3) Binnen dit ‘verschraalde’ model van de werkelijkheid proberen we nu via wiskundige methoden en technieken een oplossing voor het

(4) gestelde probleem te bepalen, in de hoop er de oorspronkelijke kontekst weer mee te verrijken.

(5) Generalisatie van de oplossingsstrategie en/of toepassing ervan op verwante problemen kan vervolgens het inzicht in de gevolgde metode(n) verdiepen, om deze weer toegankelijk te maken voor meer complexe toepassingsterreinen.

Bovenstaande summiere toelichting – hieronder aan vele voorbeelden geïllustreerd – roept onmiddellijk enkele problemen op:

- ons ‘ideaal’-model suggereert een (chrono)logische opeenvolging van fasen in het matematiseringsproces, waar in werkelijkheid sprake zal zijn

van een wisselwerking en wederzijdse ondersteuning;

- het model doet geen recht aan het nivo of de intensiteit waarmee een matematiseringsproces zich, geheel of gedeeltelijk, kan voltrekken (zie ook pag. 39);

- het matematiseringsmodel als zodanig is zuiver beschrijvend bedoeld en niet normatief¹⁾, dat wil zeggen: het model geeft aan welke fasen men (achteraf) in een matematiseringsproces zou kunnen herkennen, maar het biedt geen aanwijzing hoe zo'n proces is te leren of te onderwijzen; wat dit laatste betreft, zitten de wezenlijke problemen – als bij zoveel modellen – in de verbindingspijlen die het onderliggend denkproces representeren.

Deze laatste opmerking voert ons terug naar de oorspronkelijke doelstelling van het matematiseringsmodel: niet het leerproces als zodanig staat centraal, alswel de mathematisch-didactische door-denkning ervan. En vanuit dát perspectief is het matematiseringsmodel dan ook bedoeld als *didactisch denkmodel*. In die zin kan het model ons denken richten vanuit eerder geformuleerde uitgangspunten over wiskundeonderwijs en kan het ons helpen zekere uitgangspunten te verantwoorden, te legitimeren – bijvoorbeeld de uitgangspunten van een 'ideaal' rekenprogramma – en wellicht zelfs: te completeren.

Alvorens het matematiseringsproces nu nader te

¹⁾ Freudenthal maakt onderscheid tussen 'deskriptieve' en 'normatieve' modellen: het model als *nabeeld van iets*, resp. *voorbeeld voor iets*.

Zo is binnen ons matematiseringsmodel óók sprake van een 'fysisch en mathematisch model', met straks als voorbeeld een 'atoommodel'. Deze modellen zijn deskriptief: ze beschrijven – in gesimplificeerde vorm – een stukje werkelijkheid. In die zin, zegt Freudenthal, bezitten ze een zeker waarheidsgehalte dat je kunt pogen te vergroten door het model verder *aan* te vullen. Dit in tegenstelling tot een normatief model, dat aangeeft wat er van je normen terechtkomt. Een dergelijk model moet nog *vervuld* worden, hoewel, zegt Freudenthal, ze in de onderwijspraktijk veelal eerst *ingevuld* moeten worden omdat ze zo leeg zijn...! Als wij hieronder ons matematiseringsmodel tot 'didactisch denkmodel' verklaren, dan verschuiven we het modelbegrip van deskriptief in de richting van normatief: aan het didactische denkmodel (van matematisering) proberen we normen te ontleen om het matematiseringsproces te onderwijzen. Eerst vullen we het model dan *in* met een aantal voorbeelden, om nadien te trachten het enigermate te *vervullen*.

Zie: Freudenthal, H.: 'Een visie op onderwijskundig bezig-zijn', interne *iowo*-publicatie, utrecht 1980.

analyseren, geven we eerst een tiental voorbeelden – vrijwel alle uit de basisschool – die bovenstaand model geheel of gedeeltelijk illustreren.

► VOORBEELDEN (2)

1 atoommodel

Om chemische en fysische processen beter te kunnen begrijpen stelde Niels Bohr in het begin van deze eeuw zijn atoomtheorie op. Centraal in deze theorie stond het fysisch-mathematisch atoommodel (i.c. kern-protonen-elektronen-elektronenbanen). Dit atoommodel is uitgangspunt geweest voor verdere verfijningen, fysische en mathematische theorieën, die weer geverifieerd konden worden in het laboratorium en toegepast voor dagelijks gebruik (kernenergie).

Legio is het aantal voorbeelden in verschillende wetenschappen waarbij de waarneming leidt tot fysische en/of mathematische modelvorming, om via theoretische verdieping weer te leiden tot praktische toepassing. (Scheikunde: periodiek systeem der elementen; biologie: de kringloop van het water; economie: het Keynesiaanse verklarende model; astronomie: de planetenbanen, enz. enz.)

Duidelijk uit bovenstaande wordt, dat we onder *fysische of mathematische modelvorming* elk – verschaald – voorstellingsbeeld van de werkelijkheid verstaan (konkreet, visueel en zelfs: mentaal) dat tot een duidelijker inzicht in begrippen en relaties leidt.

Daar we het bovenstaande matematiseringsmodel echter geschapen hebben voor onderwijsdoelinden beperken we ons verder tot (basis)schoolvoorbeelden...

2 zonderdag

Ten tijde van de oliecrisis staat in de krant dat 'twee op de drie nederlanders' voorstander zijn van een autoloze zondag. Na beraad in de klas over een onderzoeksmethode, gaan de leerlingen van de zesde klas de straat op en ondervragen in totaal duizend mensen: 'Bent u vóór of tegen?'

Het resultaat van deze steekproef wordt op school in tabellen geordend. Duidelijk zichtbaar wordt dat bij toename van het aantal ondervraagden, de verhouding vóór-tegen steeds dichterbij 60% komt te liggen. Het krantebericht klopt dus ongeveer.

	voor	weet niet	tegen	totaal
groepen I + II	54%	18%	28%	100%
groepen III + IV	61½%	15%	23½%	100%
groepen V + VI	61½%	12%	26½%	100%
groepen I + II + III	57,6%	17%	25,3%	100%
groepen IV + V + VI	60,3%	13%	26,7%	100%
Judith	58,6%	12,6%	28,6%	100%

fig. 2

.... 'Wat zal daar nu de kansverdeling van zijn?', vraagt de onderwijzer aan de leerlingen. In de daarop volgende weken wordt duidelijk dat het maatschappelijke toepassingsbereik van de vraagstelling bepaald van meer factoren afhangt dan alleen de wiskundige bijdrage...!

3 kijk op kans

Een van de uitgangspunten van het project 'Kijk op kans'¹⁾ is het volgende:

- Drie kinderen besluiten twee munten op te gooien om uit te maken wie van de drie hem moet zijn.

Een van de kinderen kiest de uitkomst 'kop-kop', een ander 'munt-munt', de derde 'kop-munt'. Is dat eerlijk?

Aanvankelijk weten de kinderen niet goed raad met de probleemstelling, maar in de loop van het project leren ze diverse oplossingsstrategieën kennen:

de zweetkans

- gewoon proberen door gezamenlijk vele malen te gooien:

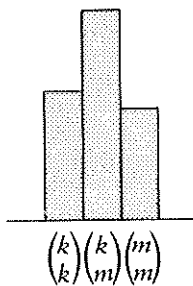


fig. 3

- idem, met behulp van twee tollen die beide munten representeren:

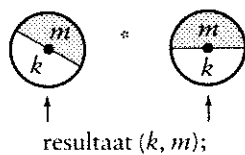


fig. 4

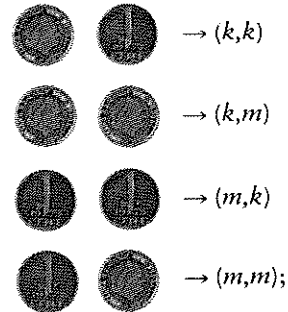
- idem, met behulp van het telefoonboek, waarin even 'kop' representeert en oneven 'munt':

telefoonnummers:
 271|68 → (k,k)
 394|49 → (k,m)
 721|56 → (m,k).

¹⁾ 'Kijk op kans' was een gezamenlijk televisieproject van *iowo* en *not* voor klas 5/6 van de basisschool in de periode 1972-1978; los van de televisie-uitzendingen is het inmiddels in aangepaste vorm in het schoolwerkplan wiskobas opgenomen.

de weetkans

- we leggen de mogelijkheden met twee munten gewoon neer:



- in een boomdiagram:

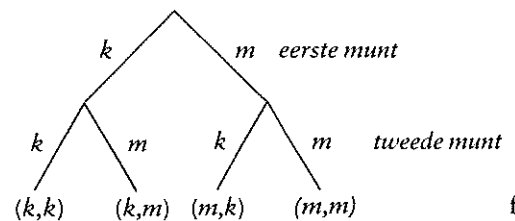


fig. 5

- in een roosterdiagram:

eerste munt		
	(k,k)	(k,m)
	(m,k)	(m,m)
	tweede munt	

fig. 6

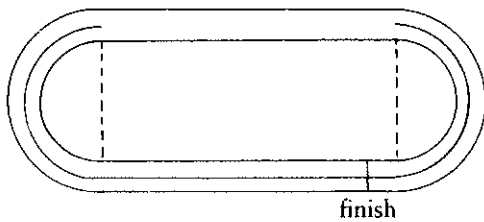
De leerlingen hebben het uiteindelijk goed door. In de vraag: 'hoe groot is de kans dat in een gezin met twee kinderen er een jongen en een meisje zullen zijn?', herkennen velen dan ook het muntenprobleem.

Ook de vraag naar de kansverdeling bij drie munten roept verschillende aanpakken op, maar uiteindelijk kunnen vrijwel alle leerlingen het probleem zelfstandig oplossen.

4 schaatsen

Tijdens de Europese kampioenschappen op de televisie stelt de onderwijzer de vraag of de leerlingen hebben opgemerkt dat start en finish bij de verschillende afstanden (500 m, 1500 m, 5000 m, 10.000 m) steeds op een andere plek van de baan plaatsvinden. Waarom gebeurt dat?

Ter beantwoording van de vraag wordt besloten een schaatsbaan (400 m lengte) op schaal na te tekenen. Dit betekent het beginpunt van vele activiteiten die te maken hebben met afstand, snelheid, tijdwaarneming, puntentelling en voor- of nadeel van de wind.



- 1 Dit is een plattegrond van een schaatsbaan. Iedere rijder rijdt op een aparte baan van 5 meter breed.
 - ▶ Op welke schaal is de plattegrond getekend?
 - ▶ Berekening:

- 2 Op de plattegrond is de *finishlijn* getekend.
 - ▶ Teken jij eens de *startlijn* voor de 500 m op de plattegrond.
- 3 We organiseren een wedstrijd!
 - ▶ Laat (op de plattegrond) twee rijders tegen elkaar rijden.
 - ▶ Teken met verschillende kleuren hoe ze rijden.
 - ▶ Maak er wel een *eerlijke* wedstrijd van (ieder rijdt even ver! 500 m).

fig. 7

Enkele weken later, bij de wereldkampioenschappen op de televisie, volgen 25 leerlingen met 'andere ogen' de schaatsverrichtingen van de deelnemers.

5 buljoekameer

De bewoners van vier eilanden in de oceaan bestrijden elkaar de visvangst in het ingesloten zeegebied. Hoe dit probleem op te lossen?

Met de kaart van het betrokken gebied in handen (fig. 8), opperen de leerlingen vele mogelijkheden. Dit leidt o.m. tot oppervlaktebepaling – via roostertelling – van eilanden en zeegebied. Ook worden zônes om de eilanden bepaald die een gegeven afstand tot de grillige kustlijn hebben. Net echt, want de onderwijzer(es) bespreekt met de kinderen ook de visserijoorlog rond ijsland wegens de vergroting van de vijf- tot de twintig-mijlszone.

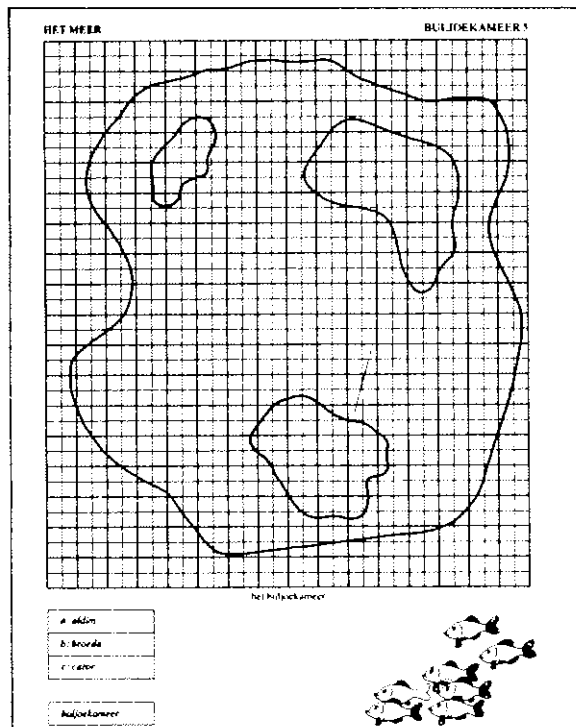


fig. 8

6 de vierkuber

In het kabouterdorp dienen allemaal verschillende huisjes van vier kamers gebouwd te worden. Hoeveel kun je er wel niet maken? En weet je zeker dat je ze nu allemaal hebt?

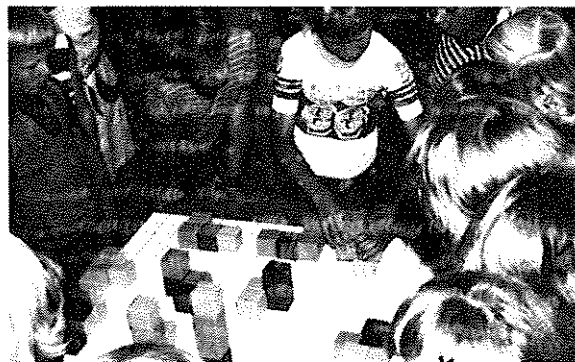


fig. 9

Die huisjes moeten bovendien geverfd worden. Kun je uit de kosten voor de één, die van de ander afleiden? En als een boef in de schemer het voor- en zijaanzicht van een huisje ziet, weet hij dan hoe het huisje precies gebouwd is?

(Als de kinderen in een later stadium uit bouwtekeningen vierkuberhuizen moeten optrekken – zie het project 'Belvia'¹⁾ – 'lezen' ze de tekeningen onmiddellijk korrekt.)

7 algoritmiseren

Via het gebruik van de abakus leren de kinderen het optelalgoritme, in toenemende mate van schematisering, elk naar eigen tempo en nivo. De één moet

¹⁾ 'Belvia', een projekt voor de brugklas; uitgave iowa 1974.

een opdracht nog manueel uitvoeren met inwisselen op de abakus, een ander werkt op papier met positiestrepen, terwijl een derde zich al waagt aan het direkt optellen onder elkaar.

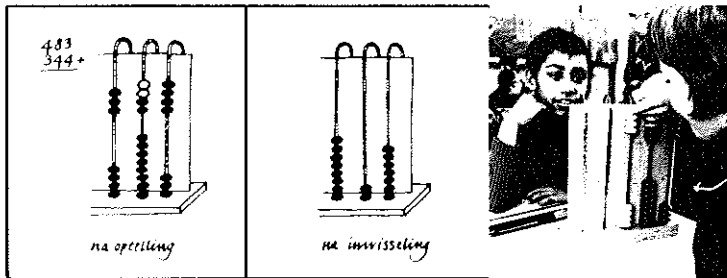


fig. 10

Gemeenschappelijk hebben de kinderen dat de (relatieve) grootte van de op te tellen getallen niet belangrijk is: lukt het niet met de direkte metode of het schema, dan laat de abakus zien hoe het moet.

8 muizen

In het gymnastieklokaal staan twee banken naast elkaar en daarachter nog eens drie banken. De kinderen lopen eerst over één van de twee banken en vervolgen hun weg over één van de drie.

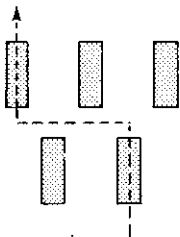


fig. 11

Terug in de klas tekent juf de banken op het bord en vraagt hoeveel verschillende weggetjes gekozen hadden kunnen worden.

Dan vertelt ze het verhaal van de muis en de kaas.

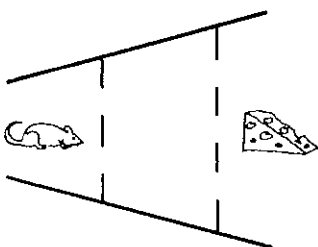


fig. 12

► Hoeveel weggetjes kan de muis kiezen om bij de kaas te komen?

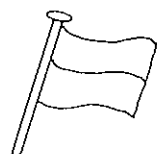


fig. 13

Langzamerhand ontstaat er systeem in de aanpak, en bij de vraag: hoeveel verschillende vlaggen kun

je maken als je voor de eerste baan over twee verschillende kleuren beschikt en voor de tweede baan over drie verschillende kleuren?, blijkt de systematische aanpak z'n werk al te hebben gedaan:

.... '3 × 2 = 6', zegt Kees, al kan niet iedereen hem nog volgen!

9 foto's

Twee jongens maken een vakantietocht naar waterland, waarvan de kaart voor de klas hangt. Op één van de foto's is over de hoofden van de kinderen heen duidelijk een deel van waterland herkenbaar.

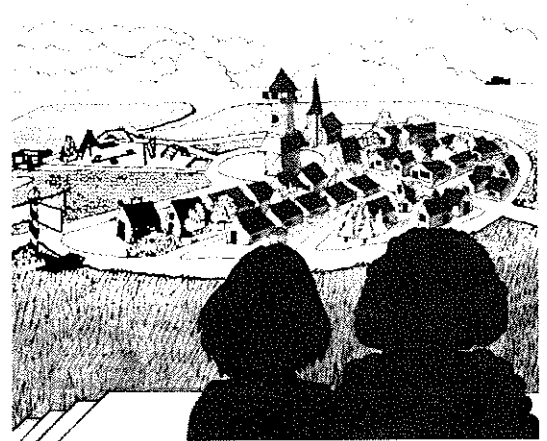


fig. 14

.... 'Waar is de foto genomen?', vraagt juf.

Die vraag is makkelijker gesteld dan beantwoord, maar al oriënterend en zich inlevend in de situatie, komen de kinderen er wel uit. Ook het feit dat de foto hoog genomen is, wordt ontdekt.

10 kaarsen

Op de tafel staan grote en kleine, rode en blauwe, dikke en dunne kaarsen.



fig. 15

De kleuters zitten er in een kring opheven. Heel voorzichtig mogen ze de kaarsen aansteken. Mooi hoor!

.... 'Welke kaars zal het eerst opgebrand zijn?', vraagt juf.
 'Nou die kleine dunne natuurlijk. Wel zonde, hij heeft zulke mooie krullen.'
 'En welke kaars is duurder', vraagt juf, 'die rooie of die gele?'
 'Die rooie', zegt Elsje, 'want die is veel mooier.'
 'Nietes', roept Karel.
 Maar Leo zegt: 'Allebei, want ze zijn hetzelfde.'

► ANALYSE (3)

Het voorgaande overziende, blijkt dat ons matematiseeringsmodel niet steeds eenvoudig herkenbaar is in de gegeven voorbeelden: sommige aspecten krijgen sterke nadruk, andere lijken nauwelijks of niet voor te komen. Begrijpelijk: ook in werkelijkheid zal het maar zelden voorkomen dat alle in ons 'ideaal'-model geschetste fasen evenveel aandacht krijgen. In het ene geval ligt immers de volle nadruk op het konstrueren van een geschikt fysisch of mathematisch model. Is dat gevonden dan wordt de oplossing van het gestelde probleem bij wijze van spreken in de schoot geworpen.

voorbeeld

► Twee broers gaan op de fiets naar school. De één gaat vijf minuten eerder weg en komt vijf minuten later aan dan de ander. De laatste doet er dertig minuten over.

Waar haalt hij zijn broer in?

Een probleem waar men lang over na kan denken. Ongetwijfeld zijn er heel goede getalsmatige of probeer-oplossingen te vinden. De wiskundig georiënteerde heeft het in dit geval wat makkelijker: hij 'herkent' een afstand-tijd-probleempje en tekent de bijbehorende grafiek. De oplossing valt hem dan in de schoot.

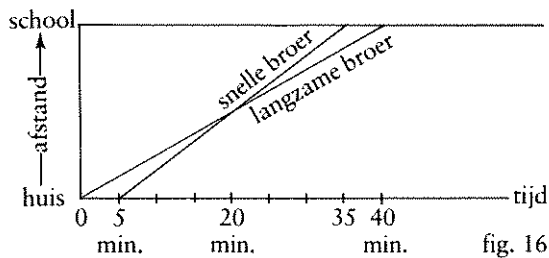


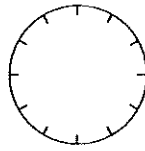
fig. 16

Maar wat te doen als je niet gewend bent in dergelijke afstand-tijd-termen te denken?

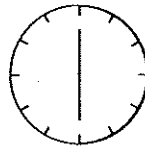
We citeren een stukje uit 'Leren onderwijzen met wiskobas'¹⁾ waar verslag wordt gedaan van de wijze waarop één van de kinderen de gelukkige greep naar een geschikt fysisch model doet:

¹⁾ Goffree, F.: 'Leren onderwijzen met wiskobas', iowo, utrecht 1979.

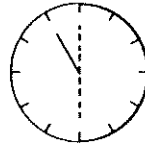
'Een leerling tekent een klok, tot verrassing van de anderen die vermoedelijk aan de weg van huis naar school zaten te denken. Met enige hulp in de vorm van vragen, blijkt het nu mogelijk actief aan het werk te gaan.



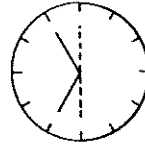
'Hoe lang doet de snelle broer erover?'



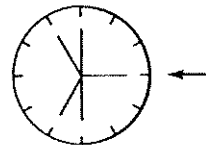
'Wanneer vertrekt de ander?'



'En wanneer komt hij op school aan?'



De symmetrie springt in het oog. Een meisje 'ziet' het ineens:



'Dáár', zegt ze, terwijl ze de pijl tekent.'

fig. 17

Een andere maal echter is niet de modelvorming het eerste probleem, maar valt het volle gewicht op de methode of de techniek die men moet toepassen. (Degenen die zich de vroegere 'redaktiesommen' herinneren of de staartdelingen die nooit uitkwamen, zullen met onze laatste konstatering geen moeite hebben.)

Tenslotte het verifiëren en/of toepassen in de alledaagse probleemsituatie: lang niet altijd is de probleemsituatie 'alledaags' (in wetenschapskringen bijvoorbeeld), lang niet altijd is het probleem aan een concreet voorstelbare situatie ontleend (de wiskunde), lang niet altijd is het probleem geschapen om ook werkelijk toegepast te worden (het rekenonderwijs).

Wat wij met ons 'ideaal'-model voor het matemati-

seren beogen, is om de *didaktische discussie* rond 'wiskunde als menselijke activiteit' te richten. En daarmee willen we dan ook beginnen via een analyse van de hiervoor gegeven voorbeelden.

voorbeelden (3.1)

1 atoommodel

Op het hoogst denkbare nivo, en soms over tijdsverloop van jaren (eeuwen..!) verloopt het denken langs banen van ons matematiseringsmodel (of zo men wil: fysiseringsmodel, chemiseringsmodel,... en elders bijvoorbeeld ook: musiceringsmodel, enz.). Elk nivo daarbij kent z'n specifieke moeilijkheden en soms peilloze diepgang: de modelkonstruktie, het hanteren van methoden en technieken om het model te bewerken, de oplossingsformulering, de verifikatie en interpretatie daarvan, maar ook: de generalisering van de methode, de oplossing en de toepassing daar weer van op verwante problemen. Op dit nivo van (matemat)iseren treedt vaak vergaande specialisatie op, waarbij we moeten bedenken dat de 'konkrete probleemsituatie' voor bijvoorbeeld een gespecialiseerd wiskundige zeer reëel moge zijn, maar voor ons wel erg ver van het dagelijks bestaan kan komen te liggen. Desondanks zijn er vele voorbeelden, dat 'ver weg'-oplossingen tot 'dicht bij'-toepassingen hebben geleid!

De didaktische les die we uit dit voorbeeld willen leren, is dat op alle nivo's, elk van de in ons model genoemde fasen doorlopen kan – en veelal: moet – worden.

Willen we dus ernst maken met ons uitgangspunt de leerlingen inzicht te bieden in de bijdrage die de wiskunde kan leveren aan het beschrijven, begrijpen en zelfs: voorspellen van de wereld waarin je leeft – zie pag. 29 – dan zullen we hen steeds weer, op hun nivo, gedifferentieerd en actief, voor matematiseringsprocessen moeten plaatsen in al facetten.

Dat dit geen eenvoudige opgave is, staat vast, dat – om mogelijk gerezen misverstanden te vermijden – leerlingen uiteraard kennis en vaardigheden moeten opdoen, staat evenzeer vast, net zo vast als het staat dat het *niet* aangaat kinderen jarenlang binnen het rekenen (of de wiskunde) slechts eenzijdig met één aspect van het matematiseren te doen kennis maken: de technieken. Met dit laatste bouwt men niet alleen een anti-matematische houding op – afgezien van de veelal bijbehorende frustraties – maar falsifieert men ook het werkelijke beeld van de wiskunde, en ontkent men op z'n minst de didaktische mogelijkheden ervan.

2 zonderdag

De realiteitswaarde – ook in verbinding met andere vakgebieden – springt bij de onderhavige pro-

bleemstelling sterk in het oog. Meer dan dat: door de gehouden enquête worden de leerlingen – praktisch én mentaal – in de problematiek betrokken. Daarmee wordt de matematische doelstelling: een sterk intuïtieve inleiding in het steekproefbeginsel, c.q. de wet van de grote aantallen, feitelijk ondergeschikt gemaakt aan een maatschappelijke doelstelling.

Om die reden ook is het zo belangrijk de mathematisch bepaalde probleemoplossing: 60% is vóór zonderdag, 'terug te vertalen' in die maatschappelijke kontekst. Dán ook blijkt dat die matematische oplossing slechts een *bijdrage* levert tot de algehele probleemidentifikatie: politiek-ekonomische factoren leggen blijkbaar meer gewicht in de schaal; een belangrijk bewustwordingspunt voor de leerlingen. Los daarvan is ook het matematische toepassingsbereik erg groot: uit eigen ervaring hebben de leerlingen ondervonden welke betekenis een steekproef heeft en welke waarde de daarop gebaseerde uitspraken hebben (met name ten aanzien van de relatie: aantal geënquêteerden versus nauwkeurigheidspercentage).

In het matematiseringsproces op zich herkennen we de nadruk die valt op de matematische methode: de steekproef (als het ware het fysische model, geheel binnen de reële situatie), het verzamelen, tabelleren en grafisch verwerken van de gegevens. De techniek: som, gemiddelde, percentage, speelt relatief een ondergeschikte rol. De interpretatie daarentegen: 'reeds een nauwkeurigheid van 2% bij 1000 ondervraagden', is weer van wezenlijk belang voor methode en toepassing.

NB: Het is evident dat dit zonderdagonderzoek slechts een basis legt voor het inzicht in de gehanteerde statistische methode. Meerdere onderzoekjes op ander gebied zullen het begrip moeten verdiepen!

3 kijk op kans

Wederom een kansrijk voorbeeld. Bewust gekozen om te illustreren dat een matematiseringsproces zich in al zijn facetten, zowel over een geheel project – duur circa zes weken – als binnen een onderdeel kan afspelen.

In het project als geheel worden de kinderen voortdurend geconfronteerd met voor hen levensechte situaties waarbinnen zich langzamerhand het kansbegrip ontwikkelt. Daarbij wordt het emotioneel beladen kansbegrip uit de realiteit 'verschaald' tot een fysisch model (de kanstol). Met dit model zijn reeds vele kansberekeningen te verrichten (de 'zweetkans'), maar het latere matematische model (bijvoorbeeld het boomdiagram) levert vaak sneller resultaat (de 'weetkans'). Beide modellen komen

min of meer tezamen in dat van het telefoonboek, als remplaceant voor de rij toevalsgetallen.

In principe kan elk kind blijven meedoen op zijn nivo: vanuit het intuïtieve kansbegrip, of meer geavanceerd, vanuit het matematische kansbegrip. Beide zullen uiteindelijk op eigen nivo het kansbegrip beter kunnen plaatsen in de alledaagse werkelijkheid.

4 schaatsen

Wederom is de binding met een voor de leerlingen betekenisvolle realiteit evident (ook al zal het de een meer aanspreken dan de ander...).

De matematische modelvorming – de schaatsbaan op schaal – ligt hier zeer voor de hand. Begrijpelijk: de werkelijkheid speelt zich immers al op een ‘model’ af, zeker waar wordt afgezien van emotionele factoren als het omringende publiek, de nederlandse kampioenspretendent, of de vallende schaatser.

De volle nadruk ligt daardoor op de rekentechnieken, al blijven die voortdurend hun betekenis ontleenen aan de motiverende, reële kontekst.

Langzamerhand wordt de directe binding met het aktuele schaatsgebeuren echter weer vergroot: hoe zit de puntentelling in elkaar, waarom worden bij harde wind nooit rekords gebroken? En de verifikatie/interpretatie van de uitkomsten van deze matematische activiteiten in de klas, gebeurt weer rechtstreeks in de werkelijkheid (of... een model daarvan: de televisie).

5 buljoekameer

De probleemstelling als zodanig is niet reëel meer. Dat zij het zou kunnen zijn, toont het toepassingsbereik aan: door de binnen dit projekt verworven matematische inzichten kunnen de leerlingen het probleem van de ijslandse visserijzone beter interpreteren. Ze kunnen de gigantische zeegebiedsuitbreiding rondom ijsland op de kaart ook zichtbaar maken. Kortom: al is de problematiek van het buljoekameer op zich een verschraald model van de werkelijkheid, de reële betekenis ervan voor de leerlingen blijkt uit de verrijking die het geeft naar het wel degelijk bestaande (konflikt-)model van ijsland. (Dat de onderwijzer(es) de matematische bijdrage weer – op aangepast nivo – plaatst in het geheel van de ‘sociale’ kontekst, spreekt vanzelf.)

Matematisch bezien ligt in het buljoeka-verdelingsprobleem de nadruk zowel op het model (de kaart) als op de methode (welke strategie) en de techniek (bijvoorbeeld oppervlaktemeting door roostertelling).

En zo reëel is de kontekst toch ook wel weer dat de leerlingen voor en na de gevonden verdelingsbepa-



ling, de konsekwenties ervan voor de denkbeeldige bewoners overdenken.

6 de vierkuber

Voor de derdeklassers is het huizenprobleem in de kabouterwereld minstens even reëel – en zeker: motiverender – als vergelijkbare problemen in de volwassenenwereld. De sociaal-maatschappelijke realiteitswaarde moge gering lijken, de eksistentiële realiteitswaarde¹⁾ is groot: het kabouterprobleem is hún probleem en de door de kabouters gehanteerde methoden en oplossingen lijken veel op de onze...!

Ook hier ligt binnen de gegeven kontekst het fysische model al gereed: de kubusjes, de vierkubushuisjes. (En dáár ligt een belangrijk verschil met de ‘echte’ werkelijkheid: juist in het ontdoen van de emoties om tot de kern door te dringen, ligt vaak het probleem voor volwassenen; de kinderen voegen – in eerste aanleg – juist hun emoties aan het materiaal toe.)


Binnen dit fysische model vindt de volgende verschraling plaats als de kinderen de verschillende


huisjes moeten beschrijven: huisje  wordt daarbij vervangen door .

Maar dit matematische model biedt weer het voordeel dat de gezochte en gevonden systematische aftelling van de huisjes ordelijk genoteerd kan worden op een groot roostervel.

Een tweede matematisch beschrijvingsmodel dient zich aan als we uit het voor- en zijaanzicht het bijbehorende huisje trachten te rekonstrueren.

Dat matematische methodiek en techniek tezamen gaan, blijkt als de leerlingen moeten berekenen:

► Wat kost het verven van huisje: , als je

het al weet van huisje:  ?

De interpretatie in de werkelijkheid? Het kabouterdorp is toch (hun) werkelijkheid!

7 algoritmiseren

Al eerder stelden we dat het matematiseringsproces zich in al zijn facetten op lange termijn kan afspelen (zie 3). Dat het óók mogelijk is pure rekentechnieken aan te leren via een matematiseringsproces, toont het abakusprogramma van wiskobas aan. Dat daarbinnen dan ook nog sprake is van een natuurlijke nivodifferentiatie, beklemtoont nogmaals de waarde van het denken uit dynamische (matematiserings-)processen tegenover het uitgaan van statische (wiskundige eind-)produkten. Door maals de waarde van het denken uit dynamische (matematiserings-)processen tegenover het uitgaan

¹⁾ Zie ook pag. 41.

van statische (wiskundige eind-)produkten. Door het systeem van progressieve schematisering: abakus, positiestrepen, schema, algoritme, wordt de kern van het matematische handelen veel scherper gesteld.

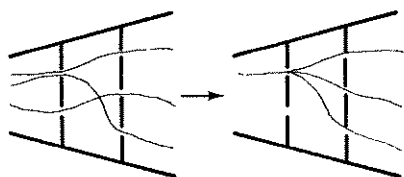
Tegenover de traditionele methodiek van opsplitsing van de moeilijkheidsgraad naar omvang van de getallen stelt zich het wezenlijk inzicht in het positiesysteem als geheel en het inwisselsysteem. Bovendien is het onmiddellijk toepassingsbereik van grote(re) getallen voor elk kind op elk schematiseringsnivo, daardoor van meet af aan bereikbaar.

Daarin openbaart zich de winst: niet de toepassing is ondergeschikt aan de wiskunde, maar andersom: de wiskunde is dienstbaar gemaakt aan de toepassing!

8 muizen

Binnen de veelheid van mogelijkheden op het nivo van de tweede klas is bewust gekozen voor het ogenschijnlijk 'onwezenlijke' muizenprobleem. Het realiteitsgehalte is, ondanks de aanloop in het gymnastieklokaal, schraal te noemen; de mathematische waarde lijkt op het eerste oog gering.

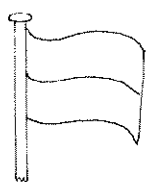
Dat dit laatste een vergissing is, weet eenieder die de wiskobaspublicaties de laatste jaren gevolgd heeft: het muizenprobleem is een paradigma (een concreet voorbeeld waarin een totale mathematische benaderingswijze besloten ligt) voor een veelheid aan isomorfe problemen. Hierbij voltrekt zich de matematisering in belangrijke mate als methodisch probleem: via het ongeordend tekenen van mogelijke roetes wordt een meer systematische concrete aanpak ontdekt, die kan leiden tot het abstrakte(r) inzicht dat er 2×3 mogelijkheden moeten zijn:



2 (ingangen) \times 3 (poortjes)

fig. 18

Op nog hoger nivo transfereert zich dit inzicht naar een isomorfe (structuur-gelijke) probleemstelling:



2 (kleuren) \times 3 (kleuren)

fig. 19

Ook het toepassingsbereik ligt dus in sterke mate binnen een 'aangeklede' mathematische kontekst.

Bovenstaande illustreert hoe ook op het 'lagere'

nivo van een tweede klas de matematisering een (relatief) grote diepgang kan bereiken, inclusief de mogelijkheid voor de leerlingen om op eigen nivo actief te blijven participeren. Daarnaast legt het voorbeeld iets bloot van de brede begripsinbedding van – in dit geval – het vermenigvuldigen.

9 foto's

Welhaast in tegenstelling tot het vorige voorbeeld, is de matematiserende activiteit in de fotoles op het eerste oog nauwelijks te ontdekken. (We hadden bijvoorbeeld ook de bekende 'autobussenaanpak' voor het aanleren van de bewerkingen '+' en '-' als voorbeeld kunnen nemen om het matematiseringsmodel in al zijn facetten te doen floreren.)

De tegenstelling tot het vorige voorbeeld is inderdaad opvallend: bij de muizen de volle nadruk op de methodische diepgang, bij de 'foto' treden we nauwelijks uit de concrete kontekst.

Het fotovoortbeeld – met de foto als 'fysisch model' voor de (kinderlijke) realiteit van een stukje waterland – wil dan ook niets anders aantonen dan dat in de allereerste verschravingsstap van het matematiseren al aanzienlijke problemen verscholen kunnen zitten. Het zich oriënteren op de probleemsituatie: 'waar is de foto genomen?', eist een zich voortdurend inleven van de kinderen in de werkelijkheid van waterland – op zich al een model van de echte werkelijkheid – en een zich realiseren van aspecten uit die werkelijkheid die op de foto niet, of slechts impliciet, zichtbaar zijn.

Al 'switchend' van werkelijkheid naar model wordt in toenemende diepgang de probleemoplossing naderbij gebracht: 'op die plek moet hij gestaan hebben, precies daar, zo en zo hoog, en hij keek in die richting'.

Wiskunde? Nou en of: een van de meest fundamentele facetten van het matematiseringsproces wordt op hoog nivo (van de eersteklassers) geanalyseerd, leidend tot essentiële aspecten van ruimtelijke oriëntatie.

10 kaarsen

In dit kleutervoortbeeld is de alledaagse werkelijkheid haar eigen model. Voor de kinderen is van een mathematische probleemstelling zelfs geen sprake: de kontekst is voor de kleuters beladen met de emotionaliteit van de kerstsfeer. Desondanks biedt de juf de kinderen die daar al gevoelig voor zijn, de kans om die subjektieve werkelijkheid ook even vanuit een ander (mathematisch) standpunt te bezien: 'welke kaars is duurder?', en: 'als die kaars een gulden kost, hoeveel zou die andere dan kosten?'

Een aantal kinderen is nog niet in staat – of op dat moment: niet bereid – afstand te doen van de ego-

‘matematische’ bril op te zetten, maar andere worden toch aan het denken gezet.

‘Die kaars is duurder want hij is mooier’, versus: ‘die kaars is duurder want hij is dikker’.

Het absolute begin van elk matematiseringsproces: het vermogen om de alledaagse werkelijkheid vanuit een specifieke gezichtshoek te beschouwen.¹⁾

het matematiseringsmodel (3.2)

In de mathematisch-didactische analyse van de tien voorbeelden is ongeordend een groot aantal aspecten van ons ‘ideaal’-model voor het matematiseren naar voren getreden.

Laten we, met slechts het model voorhanden, proberen er een zekere systematiek in te brengen.

matematiseren: ‘vershralen om te verrijken’

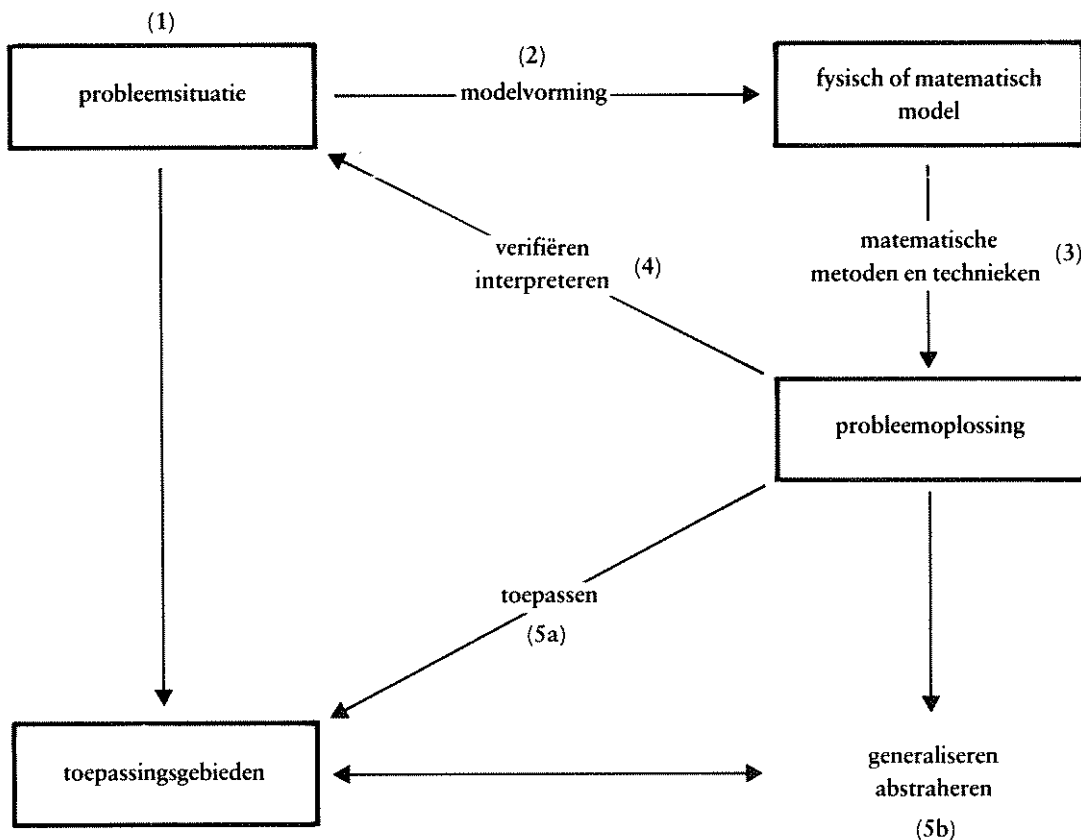


fig. 20

HET MODEL ALS GEHEEL

Uit de voorbeelden wordt duidelijk dat de volledige kringloop van het matematiseringsproces zich op alle nivo's kan afspelen, van kleuteronderwijs tot het meest geavanceerde wetenschappelijke onderzoek.

In het eerste geval zullen we de kontekst van de alledaagse ervaring nauwelijks verlaten, in het laatste geval is die dagelijkse kontekst veelal niet meer herkenbaar.

In het eerste geval beperkt de bijdrage van de wiskunde tot de wereldoriëntatie zich tot de bewustwording dat je de werkelijkheid überhaupt door een matematische bril kunt bekijken; in het laatste

geval heeft die bijdrage veelal het karakter van het (vergaand) voorspellen van die werkelijkheid.

Didactisch luidt de konsekventie dat we in het wiskundeonderwijs de leerlingen steeds weer het volledige proces van 'ingroeien in een mathematische beschouwingswijze' tot en met het 'voorspellen en toepassen van de wiskunde' actief moeten laten ervaren – ieder op zijn nivo – om een hanteerbaar beeld te schetsen van wat de wiskunde wél en niet vermag.

Daarbij dienen we ons te realiseren dat:

- het matematiseringsproces als geheel zich binnen één les, binnen een thema of projekt, binnen een complete leergang, binnen het geheel van de basisschool, het voortgezet onderwijs, de universiteit en zelfs: het gehele leven, kan voltrekken, ieder naar zijn belangstelling, zijn vermogen, zijn nivo;
- in vele gevallen slechts een enkel of maar één

¹⁾ Zie in dit verband: Wijdeveld, E.: 'Terug naar nul', in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, pag. 86 e.v.

facet van het matematiseringsproces aan de orde gesteld kán of móét worden.

Wat het laatste betreft: zonder kennis, vaardigheid en (be)oefening van matematische verworvenheden in een vorige fase, is het ondenkbaar verdere diepgang van matematische beschouwing te bereiken. Dit betekent echter evenmin een vrijbrief om in het onderwijs het volle gewicht op technieken en oefenrijtjes te gooien, als dat het ons ontslaat van de verplichting ook bij kennisverdieping en vaardigheidstraining het verband te blijven zoeken met een motiverende en betekenisvolle kontekst.¹⁾

HET MODEL PER FASE

De belangrijkste fasen die we in het 'ideaal'-model kunnen onderscheiden zijn:

- de uitgangssituatie, i.c. de concrete probleemstelling (1);
- de horizontale 'verschrallingsgang', ofwel de modelvorming (2);
- de verticale uitwerking via methoden en technieken (3);
- de weer horizontale 'verrijkinggang' als we de probleemoplossing weer confronteren met de gegeven – of een analoge – toepassings situatie (4);
- de eveneens verticale verdiepinggang: generaliseren en abstraheren om het mogelijke toepassingsbereik van de verwerkte probleemstelling te vergroten (5).

probleemsituatie (1)

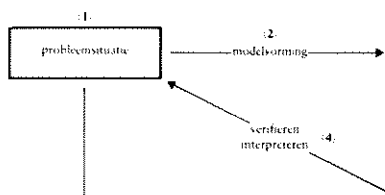


fig. 21

Wiskunde is een middel om de ons omringende wereld te beschrijven. Maar al eer we aan dat facet van de wiskunde zelfs maar toe zijn, zullen de leerlingen zich eerst moeten realiseren dat je de werkelijkheid überhaupt door die specifieke matematische bril kunt *beschouwen*!

(Zoals we dagelijks de ons omringende wereld, afhankelijk van het momentane doel, bekijken door

een politieke bril, een artistieke bril, enz.). En bij elke beschouwingswijze benadrukken we relevante aspecten, laten we irrelevante overwegingen weg. Bij elk van die beschouwingswijzen spreken we een specifieke taal (wij kopen voor de trein een 'kaartje', de kondukteur echter vraagt naar ons 'plaatsbewijs'), hanteren we een specifieke denkwijze (bij de kruidenier letten we op een dubbeltje prijsverschil; een dag later spreken we bij huizenkoop in termen van tonnen) en hanteren we een specifieke logika (in de wiskunde ontkracht één tegenvoorbeeld een algemene uitspraak; in het dagelijkse leven 'bevestigt de uitzondering de regel').

Welnu, op dit eenvoudigste 'nulle' nivo – maar ook op hoger nivo bij het aanboren van een geheel nieuw beschouwingsgebied (statistiek, scheikunde, economie) – zullen we de kinderen gelegenheid moeten geven om te gewinnen en in te groeien in de specifieke matematische beschouwingswijze met haar eigen aksentuering van gegevens, haar eigen denkwijze, taal en logika.

En dit juist *niet* als aparte begripsverwerving, geabstraheerd (= losgemaakt) van de emotionele kontekst, maar integendeel binnen het geheel van de komplekse, emotionele dagelijkse beleving.

Dááaraan immers ontleent wiskundige beschouwing haar specifieke kenmerken, dat ze zich – gezien de probleemstelling – onderscheidt van andere mogelijke benaderingen. Om met ons kleutervoorbeeld (kaarsen) te spreken: het feit dat je het kostenaspect van die kaarsen in relatie tot hun grootte óók in beschouwing kunt nemen, valt voor de leerling (impliciet) juist op binnen de andere, op dat moment meer voor de hand liggende, emotionele benadering van mooie kleuren, sfeervolle vlammetjes, enz. Zou men bij wijze van spreken de kleuters een werkblad aanbieden met de rechtstreekse vraag: 'welke kaars kost het meest?', dan ontnemt men hen de fundamentele ervaring dat het ook zinvol kan zijn binnen de gebruikelijke subjectief-emotionele beleving, dergelijke objektiverende, rationaliserende vragen te stellen.

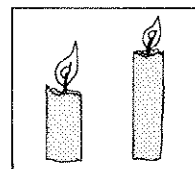


fig. 22

Vergelijkbaar is het met andere 'matematische' activiteiten in het kleuteronderwijs: niet de schrale aanbiedingsvorm in gekonstrueerde situaties, maar juist de rijke ervaring in natuurlijke konteksten leidt tot de zinvolle oriënteringsbasis van waaruit wiskundige activiteiten meer en meer geabstraheerd kunnen worden.²⁾

¹⁾ De reeks artikelen 'Oefenstoffering' van Leen Streefland in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 7 en 8, geeft van dit laatste een duidelijke illustratie.

²⁾ Zie in dit verband bijvoorbeeld: 'Het papieren tovenaarsfeest', in leerplanpublicatie 9, iowo, utrecht 1978.

Waar, wanneer en bij wie op een bepaald moment tot deze meer objektiverende benaderingsvorm kan worden overgegaan, is voorlopig nog een onopgelost onderwijskundig probleem, zeker in verband met de integratie kleuter-basisonderwijs.

Voorlopig kunnen we nauwelijks meer dan ons bewust zijn dat dit voorbereidend wiskundige beschouwingsniveau z'n start vindt in de emotioneel-subjektieve belevingswereld van de kleuters, en dat we voor de kinderen die er gevoelig voor zijn, slechts een ervaringsbasis kunnen leggen voor wiskundigen op hoger niveau in een later stadium. Onderzoek in praktijksituaties zal ons scherpere aanwijzingen in deze moeten geven.

Op dat hogere niveau trouwens – we stelden het al – wordt de meer gespecialiseerde wiskundige beschouwingswijze, didactisch gezien, vaak sterk onderschat. Zo zien we er geen been in om kinderen die alleen nog maar met gehele getallen gewend zijn te werken, binnen de kortste tijd te confronteren met getalsmatige verdelingen, pannekoeken en breuknotaties.

Ten faveure van veelal onbegrepen breukoperaties wordt voorbijgegaan aan deze toch geheel nieuwe beschouwingswijze van wiskundige aspecten in de werkelijkheid, om over de verwante verhoudingen en procenten maar te zwijgen!

(Trouwens, als de kinderen – ondanks alles – dan toch geleerd hebben dat $\frac{1}{6} = \frac{100}{600} = \frac{1000}{6000}$, e.d., blijkt dit in de statistiek opeens niet meer op te gaan: bij kans 1 op 6 (bijvoorbeeld om een '3' te gooien met een dobbelsteen) zal niemand zich verbazen als er na zes keer gooien nog geen '3' is verschenen: $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} \dots!$ Wél zijn we verrast als er na 600 keer gooien, precies 100 drieën genoteerd staan – 'toeval!' – omdat dat aantal normaal tussen 93 en 107 mag liggen: $\frac{1}{6} \neq \frac{100}{600}$!

Als ik anderzijds 6000 punaises opgooi en constateer dat er 987 met de punt naar boven liggen, verklaar ik de kans op de gebeurtenis 'punt', voorlopig $\frac{987}{6000} = \frac{1}{6} \dots!$) 1 op 6. Immers,



fig. 23

Samengevat: niet alleen bij de start van de wiskundige loopbaan, maar bij elke ingroei in een gespecialiseerd benaderingsveld, zullen we ruim aandacht moeten besteden aan de ingroei van de betrokken

beschouwingswijze – en in het bijzonder de taal, de denkwijze en logica – vanuit concrete belevings-situaties.¹⁾

Een tweede belangrijk aspect bij wiskundigeringsfacet (1): de concrete probleemsituatie laat zich didactisch formuleren in termen als realiteitswaarde, betekenis, instap, motivatie, e.d.

We hebben al gesteld dat, willen we wiskunde als menselijke activiteit beschouwen, dat wil zeggen: als activiteit dóór mensen, vóór mensen (in de samenleving), dat dan het wiskundeonderwijs zijn motivatie met name moet ontleen aan voor de leerling betekenisvolle situaties.

Dit betekent dat de situaties die we als uitgangspunt kiezen, door de leerlingen op hun niveau 'reëel' – d.i. betekenisvol – dienen te worden ervaren. Dit is niet zonder meer hetzelfde als: een reële situatie. Integendeel, het subjektieve belevingswereldje van het spel voor de kleuter, de imaginaire wereld van 'Het papier tovenaarsfeest' (kleuteronderwijs), van 'Waterland' (klas 1), van 'De Reus' (klas 2), 'Vierkubers' (klas 3), 'Buljoekameer' (klas 4), 'Ralph de zeeover' (klas 5), 'Gulliver' (klas 6), is in een tweevoudige interpretatie van 'betekenis' vaak reëler dan de 'reële' wereld: 'betekenis' heeft deze wereld in *eksistentiële* zin, omdat het als inlevings- en voorstellingsbeeld voor de leerlingen een stuk zelfverwerkelijkking oproept, 'betekenis' heeft deze wereld in *intentionele* zin, omdat de activiteiten daarbinnen bedreven, hun parallellen vertonen met de volwassenenwereld.

Primair is dan ook de eis dat de wiskundigerende activiteit die de leerlingen in deze voor hen motiverende en betekenisvolle wereld verrichten, zowel zinvolle ervaring, als kennis en vaardigheid oplevert die binnen, maar vooral ook: buiten de wiskunde, toepasbaar blijkt.

In dit verband herhalen we nog eens dat die wiskundigerende activiteit zich op korte termijn en op langere termijn, op 'laag' niveau en op 'hoog' niveau kan afspelen. Dit maakt duidelijk dat die 'gekonstrueerde' wereld waarbinnen de wiskundige activiteiten zich afspelen, velerlei gedaanten kan aannemen, zoals:

- het rijke probleem;
- een thema of project;
- een historie of lokatie;
- een leergang.

In de een verschaft de probleemstelling op zich de betekenisvolle motivatie (het 'bedwingen' van een intrigerend probleem kan zonder meer al een belangrijke motiverende kracht hebben), in een ander geval is het veeleer de kontekst waarin het probleem zich afspeelt, die zin en betekenis aan de probleemstelling verleent (vergelijk 'De kamping'²⁾). Onderwijskundig gezien is er geen ver-

¹⁾ Zie voor een verdere uitwerking van deze gedachte: Wijdeveld, E.: 'Terug naar nul', in 'Wiskobas-Bulletin' jrg 9 nr 4/5, pag. 86 e.v.

²⁾ Brink, J. van den en Wijdeveld, E.: 'De kamping', een schoolradioprojekt van *ncrv-iowo*, voor het derde leerjaar van het basisonderwijs, *iowo*, utrecht 1978.

schil: de 'betekenis' – impliciet of expliciet – dient gedurende het hele matematiseringsproces blijvend als motiverende kracht aanwezig te zijn.

In deze zin is de 'aankleding' of 'verpakking' van een probleem in een versierende kontekst eer een anti-matematiserend verschijnsel dan een bijdrage daartoe. De instap stelt niet alleen het probleem in alle duidelijkheid, maar het geeft ook de betekenis aan de erop volgende matematische activiteiten!

modelvorming (2)

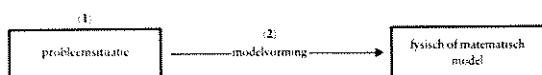


fig. 23

Zuiver wetenschappelijk gezien is modelvorming één van de moeilijkste aspecten van het matematiseringsproces: naast een totaalzicht op de al dan niet relevante gegevens binnen het probleemgebied vereist het creativiteit om die gegevens zó doorzichtig in schema te brengen dat de onderlinge relaties er zichtbaar door worden.

De geschiedenis van de wetenschap – eerste voorbeeld – toont aan dat dergelijke creatieve momenten veelal aan de bron staan van een wetenschappelijke doorbraak.

Onderwijskundig gezien zou dit kunnen betekenen dat we de leerlingen hooguit kunnen confronteren met de gigantische denkprodukten van wetenschappers op hoog nivo. Dit zou een fatale vergissing zijn, zowel naar de leerlingen als naar de onderwijzende. Waarom zou het de leerling niet gegeven mogen zijn op zijn nivo eenzelfde creatieve prestatie te leveren bij het doorzichtig weergeven van een 'simpel' probleempje? Niet iedereen hoeft het wiel opnieuw uit te vinden, maar het mag wel! Zeker omdat het een buitengewoon motiverende ervaring kan zijn. Maar ook de onderwijzer(es) kan profiteren van een 'geniale' inval van een leerling, met vergelijkbaar motiverende kracht.

Het voorbeeld van de leerling – pag. 35 – die nog niet geblokkeerd door wiskundige kennis, met een verrassend voorstellingsbeeld van het gestelde inhaalprobleem aan komt zetten, getuigt hiervan!

Kortom, juist in de fase van de modelvorming waarin matematiseren vooral de betekenis heeft van een organiserende activiteit, ligt een belangrijk exploitatieterrein voor het wiskundeonderwijs: ordenen en structureren, konkretiseren en visualiseren, symboliseren en schematiseren, alle ontlene ze in belangrijke mate hun functie aan een doorzichtige modellering van de probleemsituatie.

(En dat die modellering zich geheel binnen de realiteit kan afspelen, tot en met een onbepaalde afstand van die kontekst maakten de eerder gegeven voorbeelden duidelijk.)

Onderwijskundig gezien houdt het voorgaande in, dat we de kinderen natuurlijk confronteren met belangrijke voorstellingsbeelden uit het wiskundeonderwijs – getallenlijn, strook, honderdveld, boomdiagram, stok-schaduwmodel, enz. – maar dat we daarnaast steeds de openheid betrachten om leerlingen de kans te bieden zich een eigen 'model' te creëren om een originele oplossing aan te dragen. Niets immers werkt zo stimulerend – óók op de mathematische attitude – als de triomf van een eigen vinding; dat geldt voor de wetenschapper, maar evenzeer voor een kind van zes jaar!

Een speciale plaats binnen de 'organisatie van het probleemveld' wordt weer ingenomen door de taal van de wiskunde: de taal van afkortingen en symbolen, de pijltaal, de taal voor roosters en grafieken, de taal van relaties en functies, de taal van tabellen en 'machientjes', van getallenlijn en honderdveld, van spijkerbord en abakus, van foto's, plattegronden en kaarten, van ...

Al deze taalmiddelen staan ten dienste van de leerlingen om zich een eigen hanteringsmateriaal te verschaffen, om mathematische problemen te lijf te gaan.

Een 'eigen' hanteringsmiddel: inderdaad! Zoals verschillende volken verschillende talen spreken, zoals verschillende mensen, naar hun aanleg, verschillende taalvormen hanteren (politiek, wetenschappelijk, artistiek, handvaardig...), zo zal binnen de wiskunde de één meer gevoel ervaren/ontwikkelen voor de visuele taal van concrete materialen en visualiseringen, terwijl de ander liever op papier met symbooltaal manipuleert.

voorbeeld

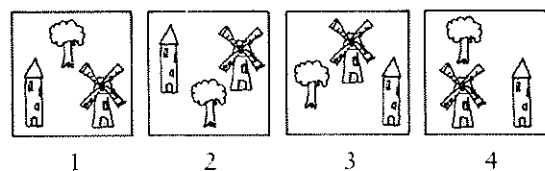


fig. 24

- Zijn de vier foto's van eenzelfde situatie genomen of zijn de objecten ook nog onderling verwisseld?

Welnu, de ervaring wijst uit dat de één zonder meer 'ziet' dat 1 en 3 resp. 2 en 4, verschillende opstellingen representeren van de drie figuurtjes.

Een ander poogt zich moeizaam in het tafereel van de foto's te verplaatsen, 'kijkt' erachter, 'draait' mee in gedachten.

Een derde pakt concreet materiaal en plaatst elke situatie voor zich, terwijl een vierde de oplossing slechts vindt door symbolisering:

foto 1: t(oren) – b(oom) – m(olen), met de klok mee;

foto 2: t-m-b, tegen de klok in;

enz.

Ieder lost het probleem op in de taal die hem/haar het beste ligt: de taal van de scherpe waarnemer, de mentale taal, de concrete taal, de symbolische taal.

Didaktisch willen we maar stellen dat we de leerlingen gelegenheid moeten bieden zich breed te oriënteren in de mogelijke beschrijvingstechnieken: wat bij het ene model onbegrepen blijft, zal in het andere z'n aanvulling vinden.

Maar hoe dan ook: het is voor alle 'talen' de geleidelijke maar gevarieerde ingroei in een wiskundig taalgebied, die uiteindelijk de kracht van het onderhavige materiaal als beschrijvingsmiddel zal moeten bloot leggen.

En dat 'taal' hier betrekking heeft op alle begrippen, relaties en structuren die de wiskunde hanteert, zal uit het voorgaande duidelijk geworden zijn, evenals het feit dat die rijke 'taal' z'n kracht eerst demonstreert in relatie tot een motiverende kontekst.

Vandaar dan ook dat binnen het wiskobasprogramma zoveel aandacht wordt besteed aan:

- gevarieerde visualiserings- en denkmodellen;
- 'veelsporige' begripsbedding;
- geleidelijke ingroei in algoritmisering;
- gevarieerde notatie- en oefenvormen;
- enz. enz.

methoden en technieken (3)

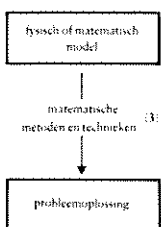


fig. 25

Een van de belangrijkste bezwaren tegen de aanpak van het traditionele rekenonderwijs is, dat ongeacht de leerstof – natuurlijke getallen, breuken, verhoudingen, procenten, meten, wegen, tijd, etc. – elke methodiek in dienst staat van het algoritmische einddoel.

In een fase, waarin we de leerlingen juist 'gevoelig' zouden moeten maken voor de rijk gevarieerde benaderingsmogelijkheden van de wiskunde, wordt het beeld geschapen van een eenzijdig technisch vakgebied, waarin nauwelijks ruimte is voor eigen inbreng of initiatief.

Vergelijkbaar kunnen we de lans breken voor het beeld dat wiskunde slechts bestaat bij de gratie van aksioma's, stellingen en deductie: de eerste wis-

kundige moet nog opstaan die niet aan het eind, maar aan het begin van z'n wiskundig onderzoek, rechtstreeks deductief naar het resultaat toewerkt. Ook voor hem geldt het zoeken en tasten, het gissen en missen, het vermoeden en verwerpen. Dat het resultaat, eenmaal gevonden zijnde, netjes deductief wordt geordend, wil nog niet zeggen dat dit dús ook de onderwijsgang zou moeten zijn.

Integendeel: wil de wiskunde óók – en vooral! – op het nivo van de leerling z'n kracht als menselijke activiteit bewijzen, dan zal ook de leerling dat proces van zoeken en tasten, van gissen en missen, van ..., actief moeten ervaren.

Waar de gestroomlijnde deductie aan het eind staat, is begonnen met de 'rommel'- en oriënteringsfase. Daartussen bewegen zich voortreffelijke wiskundige methoden die wij al eerder noemden: intuïtief en inductief redeneren, redeneren vanuit een plaatje of naar analogie, simuleren, gewoon rekenen tot je eruit bent, en uiteraard ook: (lokaal) deductief redeneren. En binnen al deze benaderingswijzen zullen in alle tijden de leerlingennivo's blijven uiteenlopen van concreet-manipulerend tot en met abstrakt-generaliserend.

Geen nood, als ieder op eigen nivo maar de waardering en stimulans krijgt die wiskunde voor hem blijvend waardevol maakt: geen 'afvalrace voor intellectuelen' maar een 'intellectuele activiteit zonder afvallers'. Aan ons om daarvoor de leerstof aan te dragen en de leerprocessen op te roepen.

Wie kennis heeft genomen van het wiskobasmateriaal weet dat juist aan de geleidelijke en gedifferentieerde 'ingroei' van de leerlingen in de specifieke methodiek van de verschillende leerstofonderdelen – als bij de taal en beschouwingwijze – grote aandacht wordt besteed.

Tussen de traditionele 'oppervlaktebenadering' – om een voorbeeld te noemen – en de desbetreffende voorstellen in de wiskobaspublicaties (leerplandelen 7 en 9) bestaat een wereld van verschil. In de wiskobasleergang worden de kinderen in de kleuterschool – impliciet en vanuit een totaalbeleving – al voor oppervlakte-ervaringen gesteld die in de lagere school geleidelijk worden uitgebouwd: via kwalitatief vergelijken, omvormen, binden aan andere grootheden, werken met 'natuurlijke' maten, roosteroverdekking en -verfijning, invoeren van standaardeenheden, de relatie omtrek-oppervlak, enz., wordt primair getracht dat 'wiskundig gevoel' bij de kinderen te ontwikkelen voor wat oppervlakte wezenlijk is en hoe je dat methodisch benadert.

Motiverende situaties, thema's en projecten – 'Het papieren tovenaarsfeest', 'Met de groeten van de reus', 'Kavelland', 'Buljoekameer', 'Ralph de zee-rover' – spelen daarin een essentiële rol.

De oppervlakteformule van een rechthoek: $O = l \times b$ – in de traditionele methoden veelal de belangrijkste doelstelling – is daarbinnen een relatief bijproduct. Dat wil zeggen: het bepalen van het oppervlaktegetal van vierkanten, rechthoeken, maar ook van andere recht- en kromlijnige figuren, vormt een ‘natuurlijk’ onderdeel van de benadering als geheel en is geen vooropgezet einddoel.

Ook de traditionele behandeling van *verhoudingen*, om nog een tweede voorbeeld te noemen, staat vrijwel uitsluitend in dienst van sommetjes als:

‘De knikkers van Jan en Piet verhouden zich als 3 : 5, samen hebben ze er 64; hoeveel heeft elk?’

En of de leerling nu wel of geen inzicht heeft in het wezen van het begrip verhouding, als hij maar opschrijft: ‘Jan heeft $\frac{3}{8} \times 64 = 24$ knikkers’, dan is het prima.

Maar voor ieder die zich realiseert welke essentiële rol (meetkundige) verhoudingen spelen vanaf de jongste leeftijd – ruimtelijke oriëntatie, tekenen – zal begrijpen dat er alle aanleiding is de behandeling van dit onderwerp al op de kleuterschool te starten.

Zowel in de dagelijkse beleving (vliegtuigen, gebouwen, bomen, ..., veraf en dichtbij) als in de materialen (grote/kleine puzzelstukken, blokken, mozaïekstenen, enz.), als in spel, verhaal en tekening, doen zich legio situaties voor waarin we de kleuters bewust kunnen maken van het bestaan van dit verhoudingsaspect.

In de lagere school bouwen we de opgedane ervaringen verder uit: kwalitatief vergelijkend (‘*Madurodam*’, ‘*Duimeliesje*’¹⁾), maar ook al kwantificeerend met bijvoorbeeld de strook²⁾ en de overheadprojector (‘hoeveel maal zo groot wordt het beeld van een potlood?’). Via de strokenbenadering, via torenhoogte-schaduw lengte, via grafieken, mengverhoudingen, snelheidsvergelijkingen, bevolkingsdichtheid, schaal, procent, breuken, etc., doen de leerlingen een veelheid van ervaringen op waarin de specifieke benadering van dit onderwerp langzaam vulling krijgt. En binnen die benadering maken de kinderen kennis met verschillende verhoudingsmethoden: strook, getallenlijn, stok-schaduwmodel, lineaire grafiek en verhoudingsmatriks als numeriek model.

¹⁾ Zie: Wiskobasteam: ‘*Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool*’, *iowo*, utrecht 1975, pag. 52 en 53.

²⁾ Idem, pag. 83 e.v.

³⁾ Idem, pag. 39 e.v.

Het eerdergenoemde ‘Jan-Piet-sommetje’ bijvoorbeeld krijgt binnen die matriks de volgende gedaante:

Jan	3					
Piet	5					
samen	8					64

fig. 26

Afhankelijk van hun vaardigheid en inzicht bepalen de kinderen stap voor stap ($8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64$, etc.) of in één sprong ($64 = 8 \times 8 \rightarrow$ Piet: 8×5 , etc.) de oplossing.

Maar evenals bij oppervlakte is deze – onmisbare – techniek functioneel bijproduct van een veelzijdige en begripsmatige opbouw en geen vooropgezet technisch einddoel.

Trouwens, het voorbeeld van het *abakusprogramma* voor optellen/afrekken (zie pag. 33 e.v.) toont aan dat óók waar techniek het eerste einddoel is, evenzeer een geleidelijke opbouw gerealiseerd kan worden die de kinderen inzicht biedt in het wezenlijke van de betrokken methode. In dit verband willen we ook de ‘autobusbenadering’³⁾ in herinnering brengen, waar een realiteitsgebonden situatie een methodisch veel bredere opbouw biedt van optellen en aftrekken dan het vanouds sommeren van stippen, fiches, beesten, e.d. Het voorbeeld van de muisenroetes (pag. 34) tenslotte, laat zien hoe een eenvoudige vermenigvuldiging resultaat kan zijn van een inspannende denk-akt, die naast de bekende ‘ $2 + 2 + 2 = 3 \times 2$ ’-benadering met stippen en plaatjes, een fundamentele inzichtsverdieping kan geven aan deze bewerking.

Zo heeft ieder leerstofonderdeel z’n karakteristieke methoden en technieken, die sterk samenhangen met de aanpak en denkwijze in het betrokken deelgebied: het algoritmische werken met hoofdbewerkingen, het meer meetkundig gerichte denken bij oppervlakte en verhoudingen, het overwegen en berekenen van kansen, het logisch beredeneren van aantallen muisenroetes, van vierkuberhuisjes, het opstellen en interpreteren van grafieken, enz., dat alles vereist van de leerlingen een steeds weer andere zienswijze en instelling.

En langzamerhand zullen de leerlingen – elk op hún nivo – dat ‘matematisch gevoel’ ontwikkelen dat hun vertelt welke methode/techniek in welke (toepassings-)situatie de meest aangewezen lijkt. Dát gevoel te ontwikkelen, is één van de belangrijkste doelstellingen van het aanvankelijk wiskundeonderwijs.

verifiëren/interpreteren (4)

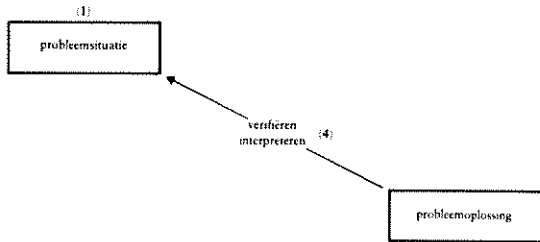


fig. 27

Er zullen weinig rekenmethoden te vinden zijn waarin – zeker in de handleiding – het onderdeel ‘schatten’ niet een belangrijke plaats inneemt. Of dat belang in de praktijk van het onderwijs ook tot uitdrukking komt, is maar zeer de vraag. Natuurlijk, regelmatig wordt van de leerlingen gevraagd het antwoord op sommetjes als $7,1 \times 3,4$ op voor- of achterhand te schatten. Maar het vereist een voortdurende training om de kinderen zover te krijgen dat ze metterdaad hun antwoord steeds verifiëren aan een schatting vanuit de opgave. Geen wonder: de enige motiverende kracht voor de kinderen is de hoop op die manier nog minder ‘fouten’ te maken.

Net zo min als de opgave krijgt de schatting immers betekenis vanuit een zinvolle kontekst. Betreft de $7,1 \times 3,4$ bijvoorbeeld het aantal vierkante meters van een kamervloer, dan maakt het groot verschil uit voor de nauwkeurigheid van het antwoord of men denkt aan het beschilderen van die vloer, aan het betimmeren ervan met hardboard, of aan het bedekken ervan met tapijttegels. In elk van de drie gevallen komt men realistisch bezien tot verschillende antwoorden, uitgedrukt in liter(s) verf, platen board of aantal tegels.

Met het voorgaande wil niet gezegd zijn dat er niet meer akkuraat gerekend zou hoeven te worden of dat het ‘kaal’ schatten zinloos is. Wél is het zo dat het verifiëren van een probleemoplossing z’n feitelijke betekenis pas krijgt bij de gratie van een kontekst. De puur technische benadering van het meten in het traditionele rekenonderwijs, spreekt in deze boekdelen: feilloos leren de kinderen meters en decimeters in centimeters omzetten, maar desgevraagd blijkt de inhoud van het klaslokaal te variëren van 15 m^3 tot 800 m^3 ...! Ook al hebben de kinderen vroeger de ganglengte gemeten, is op het schoolplein een ‘dam²’ uitgezet, is hen een ribbenkubus van 1 m^3 inhoud getoond: een betekenisvolle relatie van het meten met de realiteit heeft kennelijk ontbroken.

Maar het is juist die relatie ‘probleemstelling-reali-teit’ die een gevonden oplossing haar betekenis moet geven. En die relatie vindt onder meer haar

uitdrukkingsvorm in het verifiëren van de gevonden oplossing aan de kontekst.

Inderdaad: ‘onder meer’, omdat ook de interpretatie – en verdere toepassing – van de probleemoplossing een belangrijke bijdrage kan leveren tot het inzicht in de wezenlijke betekenis van die oplossing in de betrokken kontekst. En daaraan ontleent het matematiseringsproces per slot z’n belangrijkste doelstelling: verschralen om te verrijken. Als er tenminste al sprake is van verrijking; het ‘Zonderdagonderzoek’ toonde bijvoorbeeld aan dat het empirische bewijs dat twee op de drie mensen voor een zonderdag zijn, nog niet betekent dat een dergelijke autoloze zondag dús ook wordt ingevoerd.

Natuurlijk realiseren we ons dat het inhoudelijk nóch organisatorisch een eenvoudige zaak is, werkelijk betekenisvolle konteksten te vinden, waarbinnen verifikatie en interpretatie van wiskundige oplossingen een zinvolle functie vervullen.

Natuurlijk realiseren we ons dat er ook ‘gewoon’ gerekend en geoefend (*beoefend*) moet worden. Maar mocht de laatste opmerking al in tegenspraak zijn tot het voorgaande – wat uiteindelijk niet zo behoëft te zijn – dan nóg ontslaat ons dat niet van de verplichting te blijven streven naar een wiskundeonderwijs dat in uitgangspunt en doelstelling een relatie vertoont met de wereld waarin je leeft.

toepassen (5a)

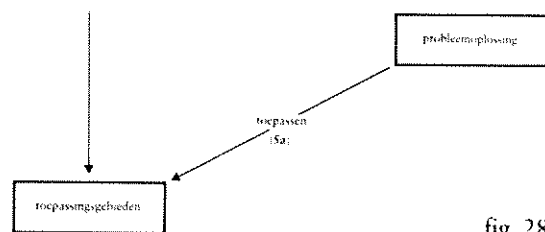


fig. 28

Na wat hiervoor gesteld werd over de relatie kontekst-probleemoplossing, kunnen we kort zijn over het toepasbaar (of toegepast) karakter van de wiskunde. Nergens immers zal de bijdrage die de wiskunde kan leveren aan het beschrijven, begrijpen of voorspellen van je werkelijkheid, zich duidelijker manifesteren dan in die toepassingen.

En al hebben we hier te maken met een nauwelijks ontgonnen terrein van het wiskundeonderwijs, toch zijn binnen het *iowo* al vele aanzetten geleverd die naar inhoud en geest voorgaande doelstelling belichamen. Dit geldt zowel het programma als geheel, als die tema’s en projekten die een zeker vakoverschrijdend karakter dragen: titels als ‘Autowegen’, ‘Licht op schaduw’, ‘De reis om de wereld in 80 dagen’ (voor de leeftijdsgroep 12-14), naast ‘Zon zien’, ‘Kavelland’, ‘Ijslandvisser’, ‘Zonderdag’ (voor het basisonderwijs), verwijzen

naar onderwijsleerpakketten waarin de wiskunde dienstbaar is gemaakt aan een veel bredere 'wereldoriëntatie'.

Ook voor hogere nivo's van wiskunde bedrijven blijkt het heel goed mogelijk traditioneel beladen leerstofonderdelen vanuit een toepassingsperspectief te presenteren: 'Vlieg er eens in' (goniometrie en vektorrekening), 'Exponenten en Logaritmen', waarin weekdieren, groeiprocessen en zelfs de gitaar, hun wiskundige diensten bewijzen, 'Functies van twee variabelen', waarin de Amerikaanse grand canyon letterlijk en figuurlijk model staat voor wiskundige beschouwing, enz.

Maar afgezien van het aanwijsbare toepassingskarakter in bovengenoemde leerstofpakketten, moge uit ons hele verhaal duidelijk geworden zijn dat juist in dit aspekt van het matematiseringsproces één van de belangrijkste ontwikkelingsterreinen ligt van het huidige wiskundeonderwijs.

Willen we op alle nivo's van wiskunde bedrijven in het onderwijs ernst maken met het uitgangspunt van 'wiskundige wereldoriëntatie', dan zal aan het aspekt van de toepasbaarheid (i.c. de zingeving) en van de toepassing (i.c. de bruikbaarheid), de grootste aandacht besteed dienen te worden.

Pas dan kunnen we de wiskunde uit z'n relatieve isolement tillen en streven naar een wezenlijke (en volledige?) integratie met andere vakgebieden. Of we daarbij in het jaar 2000 al het stadium bereiken dat apart wiskundeonderwijs niet meer bestaat¹⁾, blijft op dit moment – helaas meer dan ooit – een open vraag.

generaliseren/abstraheren (5b)

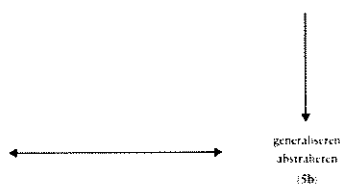


fig. 29

Kunnen toepassingsituaties inzicht bieden in de bijdrage die wiskunde levert aan je wereldoriëntatie, binnen de wiskunde zelf trachten we het nivo van die bijdrage steeds te verbreden en te verdiepen. De middelen die we daarvoor aandragen worden gevangen in termen van generaliseren en abstraheren.

Te menen echter, dat deze vaardigheden alleen op hoger wiskundig nivo bedreven kunnen worden, is een even fundamentele vergissing als te denken dat deductie 'de' wiskundige methode bij uitstek zou zijn.

¹⁾ Een (hoopvolle) verwachting, in 1978 uitgesproken door prof. Freudenthal tijdens een rede: 'Wiskundeonderwijs anno 2000'.

Ook op 't laagste (onderwijs-)nivo zijn generalisatie en abstraktie normale verschijnselen. Of abstraheert een kind soms niet dat na het leggen van blokjes, fiches en het tekenen van stippen, streepjes, enz., het rijtje '5 + 3 = ...' verder op papier uittekent? Generaliseert datzelfde kind soms niet, als het daarbij ook sommetjes uitrekent, die het daarvoor niet gelegd of getekend had?

In deze zin denkend, zijn generalisatie en abstraktie zelfs inherent aan elk onderwijs, in ieder geval: aan het wiskundeonderwijs.

Wat te denken bijvoorbeeld van het leerproces waarbij kinderen de 'muizenroetes' eerst zelf lopen, ze nadien moeizaam tekenen, om langzamerhand de wetmatigheid van de vermenigvuldiging erachter te ontdekken. Wat te denken van diezelfde kinderen die, eventueel het leerproces herhalend, ook in staat blijken het aantal muizenroetes inzichtelijk te bepalen voor meerdere muizenpoortjes en/of meerdere doorgangen.

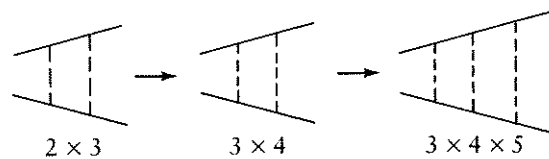
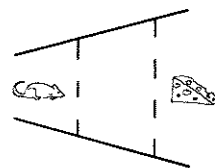
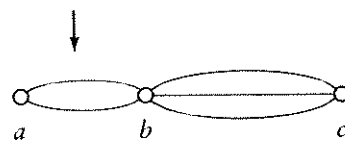


fig. 30

En tenslotte: wat te denken van de kinderen die hetzij direkt, hetzij na even proberen, dezelfde wetmatigheid van de muizenroetes in isomorfe gevallen herkennen:



► Hoeveel verschillende roetes naar de kaas?



► Hoeveel verschillende roetes van a over b naar c?



► Hoeveel verschillende vlaggen kun je maken als je voor de eerste baan uit twee kleuren mag kiezen en voor de tweede baan uit drie kleuren?

fig. 31

Verdere voorbeelden hoeven we nauwelijks aan te halen; we stelden het al: abstraheren en generaliseren zijn niet het alleenrecht – of het kenmerk – van de wiskundige die ver verwijderde werkelijkheden in formulevorm tracht te vangen, maar vormen ‘natuurlijke’ onderdelen van elk matematiseringsproces, op alle nivo’s.

En een wiskundeonderwijs dat de vorming van een mathematische attitude hoog in het vaandel heeft geschreven, zal de leerling dan ook voortdurend stimuleren en aanmoedigen z’n gezichtsveld te verbreden en te verruimen, als bijdrage tot z’n wiskundige wereldoriëntatie.

Daarbij zoveel mogelijk het aangrijpingspunt te zoeken in het matematiseringsproces in al z’n facetten, was het pleidooi van ons gehele verhaal.

► NASCHRIFT (4)

Tot zover het verhaal waarvan sprake was in de inleiding.

De primaire bedoeling van het stuk was, in een samenhangend model een soort beginselverklaring voor wiskundeonderwijs te geven. Een model waarin het didactisch doen en denken van wiskobas zich liet plaatsen en verantwoorden. Kortom: een didactisch denkmodel.

Binnen dit uitgangspunt zou het dus mogelijk moeten zijn eerder geformuleerde uitspraken te duiden en te verklaren, terwijl mogelijk zelfs aanvullingen erop naar voren zouden kunnen komen. Aan een systematische analyse in deze zin zijn we echter niet toegekomen.

Desondanks menen we dat een aantal bekende opvattingen over wiskundeonderwijs binnen onze beschrijving herkenbaar is geworden. Hierbij denken we bijvoorbeeld aan de uitgangspunten en integrale doelen zoals Adri Treffers die formuleerde:

‘Het uitgangspunt van wiskobas is een actief, gedifferentieerd, vertikaal gepland onderwijsleerproces, waarin het structuurkarakter, het taalaspect, de toepasbaarheid, de dynamiek en de specifieke benaderingswijze van de wiskunde tot hun recht komen en waarbij de integrale ééndimensionale doelen, die vormende, sociale, voorbereidende en maatschappelijke aspecten bevatten, evenzeer nagestreefd worden als de mathematische eendimensionale doelen, die de voornoemde mathematische aspecten in zich hebben.’¹⁾

Ook de ‘kernpunten voor een ideaal rekenprogramma’ die de aanleiding waren tot het opstellen van dit stuk (zie ook katern 9 in dit nummer) hebben ons inziens in het voorgaande duidelijk een

plaats gekregen (met uitzondering van die punten wellicht, die een meer specifiek leerstofkarakter dragen, zoals punt 7 en – ten dele – punt 8).

We vatten samen:

- 1) geïntegreerde activiteiten in het aanvangsonderwijs;
- 2) belang van konteksten;
- 3) veelzijdige benadering van begrippen, operaties, relaties;
- 4) gebruik van diverse modellen;
- 5) geleidelijk aanleren van cijferalgoritmen;
- 6) brede oefenstof;
- 7) zorgvuldige invoering van zakrekenmachientjes;
- 8) enkele belangrijke leerstofuitspraken.²⁾

(We noemen hieruit:

- geen verzamelingentaal en formalismen;
- gebruik van de abakus in verband met positie-systeem en algoritmen;
- inhoudelijke samenhang bewaren van hetgeen wiskundig verwant is, bijvoorbeeld: breuken, verhoudingen, schaal, procenten, kommagetallen;
- zoveel mogelijk aansluiten bij de aktualiteit;
- enz.)

Vervolgens noemen we de ‘*Doorkijkspiegelingen*’ van Fred Goffree, waarin vijftien mathematische verkenningen van wiskobasmaterialen – ‘bespiegelingen’ waarin de onderwijzende zowel het materiaal als zichzelf kan herkennen – ten dienste worden gesteld van een konstruktieve analyse van overige onderwijsleerpakketten.²⁾

In de samenvatting van het artikel worden deze ‘doorkijkspiegelingen’ als volgt gekarakteriseerd:

1 *instapprobleem*

Het onderwijs vindt zijn uitgangspunt in een voor het kind inleefbare situatie, waarin het een probleem ontmoet, dat het tot zijn eigen probleem kan maken.

2 *probleem-georiënteerd*

Het leerproces wordt in werking gehouden via een didactisch doordachte rij van problemen en bijbehorende aanwijzingen.

3 *materiaalfactoren*

De hierboven genoemde doordenking is herkenbaar in het ontworpen materiaal voor de leerlingen.

4 *nivo's*

Het moet voor de leerlingen mogelijk zijn op diverse nivo's aan de oplossing te beginnen (instapnivo's) en tot een oplossing te geraken.

5 *bewustmaking*

Er bestaat de mogelijkheid voor de leerlingen om zich de voortgang van hun eigen leren op bepaalde momenten bewust te maken.

1) Treffers, A.: ‘*Wiskobas Doelgericht*’, iowo, utrecht 1978, pag. 123.

2) In ‘*Wiskobas-Bulletin*’, jrg 3 nr 6, pag. 495.

6 *kommunikatie*

Het materiaal geeft aanleiding tot een gesprek tussen de leerlingen onderling en tussen leerlingen en onderwijzer met betrekking tot de inhoud van het leren.

7 *rijke kontekst*

De problematiek wordt aangeboden in een kontekst, waarin de leerling veel aangrijpingspunten herkent en die nadien dikwijls binnen zijn bereik zal komen.

8 *toepassingsbereik*

De wiskundige activiteiten zijn zodanig gekozen, dat het geleerde zo ruim mogelijk toepasbaar is.

9 *fundamenteel*

De kinderen worden door het materiaal in de gelegenheid gesteld actief te zijn met betrekking tot fundamenteel wiskundige zaken.

10 *niet-geïsoleerd*

Het onderwerp, waarop de wiskundige activiteiten van de kinderen zich richten neemt binnen het wiskunde-leren niet een geïsoleerde plaats in.

11 *oriëntatie*

Ten aanzien van elke problematiek worden de kinderen in de gelegenheid gesteld zich te oriënteren. Dit betreft vooral de wiskundig inhoudelijke kant hiervan.

12 *toepassen in plaats van oefenen*

Het oefenen van geleerde inzichten en vaardigheden dient te geschieden in daarvoor geschikte toepassingsgebieden.

13 *kreatieve aanpak*

Het materiaal laat een flexibel gebruik door leerlingen (instap) en onderwijzer (organisatie) toe. De creativiteit van de leerling dient gestimuleerd te kunnen worden.

14 *gevarieerde leeractiviteiten*

Het materiaal nodigt de leerkracht uit tot het organiseren van vele leeractiviteiten.

15 *flexibel gebruik*

De leerkracht wordt in de gelegenheid gesteld het materiaal, naar inhoud en werkvorm, flexibel te gebruiken.'

Een aantal van deze doorkijkspiegelingen blijkt direct herkenbaar vanuit ons 'didactisch denkmodel'; andere daarentegen zijn minder evident te plaatsen.

Mogelijk zit het verschil daarin, dat de doorkijkspiegelingen meer direct betrokken zijn op (de organisatie van) het onderwijsleerproces, terwijl wij ons uitgangspunt meer zochten in het op te roepen matematiseringsproces.

Hoe dan ook: het zou interessant zijn de betrokken verschilpunten scherper te analyseren en/of tot wederzijdse aanvullingen te komen.

Maar laten we oppassen: langzamerhand begeven we ons op glad ijs. Tot nu toe was ons didactisch denkmodel nauwelijks meer dan enigszins *ingevuld*, terwijl we nu al de neiging vertonen aan te nemen dat het ook al *vervuld* zou zijn (zie de noot op pag. 31). Z'n effectiviteit echter kan het model pas bewijzen in het onderwijsveld en vanuit de dagelijkse onderwijspraktijk en wat dat betreft laten we het 'filosoferen' nu verder over aan de lezer.

spullenkatern



OVERZICHTEN EN
BESCHOUWINGEN

Katern 9 bevat drie belangrijke onderdelen.

Het eerste gedeelte heeft voornamelijk het karakter van een overzicht. Nadat eerst de feiten van alle nederlandse reken/wiskundeonderwijs moeten kiezen (6). Deze beschouwing kan eveneens opgevat worden als een explicitering van de 'criteria' die bij de analyses en beschrijvingen in de voorgaande katernen gebanteerd werden.

Het tweede gedeelte geeft overwegingen en steunpunten ten behoeve van degenen die methoden op het gebied van het reken/wiskundeonderwijs moeten kiezen (6). Deze beschouwing kan eveneens opgevat worden als een explicitering van de 'criteria' die bij de analyses en beschrijvingen in de voorgaande katernen gebanteerd werden.

Het katern eindigt tenslotte met een lijstje korte kenschetsen van de in nederland gebruikte reken- en reken/wiskunde-methoden (7).

► INLEIDING (1)

Vanaf het begin van de zeventiger jaren is er een roep uit het veld geweest, onze mening over de methodenproblematiek openbaar te maken. In eerste instantie hebben we ons daarvan verre gehouden, behalve dat we aanvankelijk adviseerden geen wiskundig georiënteerde methoden voor het basisonderwijs aan te schaffen. Dit advies heeft in het algemeen, mede dankzij de steun van inspectie en begeleidingsdiensten, effect gesorteerd. Met elkaar hebben we in Nederland, in tegenstelling tot wat in andere westeuropese landen (denk aan West-Duitsland en Frankrijk) is geschied, een chaos op het gebied van het basisschoolrekenen kunnen voorkomen.

De belangrijkste reden dat wij deze immense 'methodentaak' niet direct op ons wilden nemen, was het feit, dat we eerst zelf een visie op het wiskundeonderwijs in de nieuwe basisschool (dus: inclusief het kleuteronderwijs) wilden verwerven. Deze visie is inmiddels via wetenschappelijke publikaties, praktische konferenties, kaderbijeenkomsten en 'Wiskobas-Bulletin' geëxpliciteerd, zoveel mogelijk in de vorm van concreet leerlingmateriaal. Vanuit vele ervaringen die wij werkend in de scholen hebben opgedaan, meenden wij ten slotte aan dit karwei te kunnen beginnen.

In 1976 verscheen de eerste publikatie. We schreven toen:

'In deze spullenkaterns willen we aandacht besteden aan vragen rond het plannen van wiskundeonderwijs. We willen proberen schoolteams bij inhoudelijke en organisatorische plannings te helpen. Of het ons zal lukken ...? U zult kennis maken met objectieve gegevens (inventarisaties) en subjectieve methodenverhalen.'¹⁾

Tijdens lezingen, in telefonische adviesaanvragen, in gesprekken met uitgevers en schrijversgroepen, is deze zinsnede meerdere malen aangehaald. Soms is ons deze opzet verweten! Het onderzoek zou niet wetenschappelijk gefundeerd zijn, de onderzoeksmethode diende een objectief meetinstrument (scoorbare vragenlijsten) te bevatten, enz. We hebben hierover al eens eerder verantwoording afgelegd, doch we menen, dat de lezer er het beste aan doet het voorliggende spullenkatern en alle voorgaande te bestuderen.

¹⁾ Wiskobasteam: 'Spullenkatern 1', in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 6 nr 1, pag. 18, Utrecht 1976.

²⁾ Voert een uitgever een methode niet meer in zijn fonds, dan betekent dit, dat de methode niet meer herdrukt wordt, niet meer in de katalogi voorkomt en niet meer 'gepromoot' wordt.

³⁾ *ara* betekent: amsterdams reken aanpak.

Hij/zij zal tot de ontdekking komen, dat we al schrijvend wel degelijk criteria gehanteerd hebben, zoals:

- zitten er matematische fouten in de methode?
- is de leergang cijferen goed opgebouwd?
- is er aandacht voor een veelzijdige inbedding van het getalbegrip?
- ...

Alle katernen nog eens overlezend, zijn we blij aan dit werk te zijn begonnen. We menen dat we er het onderwijs een dienst mee bewezen hebben.

Spullenkatern 1 was bedoeld als een aanzet en eerste inventarisatie van de volledige Nederlandse reken- en reken/wiskundemethoden. In de daarop volgende katernen (2 tot en met 7) hebben we telkenmale één of meerdere methoden geanalyseerd. Ons uitgangspunt was daarbij, uitsluitend die methoden in onze beschouwingen te betrekken, die volledig (dus tot en met het zesde leerjaar) afgerond waren en die nog in het fonds van de uitgever gevoerd werden.²⁾ 'Methoden' van schoolbegeleidingsdiensten, zoals de *ara*³⁾, hebben we buiten beschouwing gelaten. In katern 8 hebben we een overzicht van de additionele reken/wiskundematerialen gegeven.

Katern 9 geeft wederom een overzicht van de volledige methoden met de nieuwste gegevens. Tevens besteden wij enige aandacht aan herzieningen, aan in ontwikkeling zijnde methoden, aan activiteiten van niet-kommerciële (of toekomstig kommerciële) schrijversgroepen, teneinde een zo volledig mogelijk beeld te schetsen van hetgeen op dit moment (juni 1980) op de reken/wiskunde(boeken)markt te vinden en te verwachten valt.

Dat zo'n overzicht niet volledig kan zijn, is duidelijk. Immers, sommige schrijversgroepen willen hun ideeën nog niet prijsgeven. We kunnen daarbij niet op geruchten afgaan, zoals: 'Drs. Haverhout, die al enige jaren met de methode 'Cijferdorp' bezig is, schijnt er nu toch mee gestopt te zijn.'

We zullen in dit katern alleen officiële gegevens openbaar maken, die voor verantwoording van de uitgevers of schrijversgroepen zijn, die ze ons verstrekten. Tevens geven wij een aantal adviezen, die van nut kunnen zijn bij het kiezen en samenstellen van een methode.

► OVERZICHTEN (EDUKATIEVE UITGEVERIJEN) (2)

inleiding en tabellen (2.1)

Naar aanleiding van een eenvoudige enquête onder de edukatieve uitgeverijen stelden we een lijst op van de in de schoolboekhandel

verkrijgbare methoden. Wederom kostte het nogal eens wat moeite de gegevens te pakken te krijgen. Vooral de kwestie van de aantallen scholen, waarop de betreffende methode gebruikt wordt, bleek vaak een moeilijk punt. We verdelen de methoden, net zoals we in april 1979 deden, weer in drie categorieën:

- rekenmethoden;
- reken/wiskundemethoden;

— reken- en reken/wiskundemethoden (nog in ontwikkeling).

Wij hebben alleen die methoden opgenomen, waarvan de uitgeverijen meedeelden, dat zij deze in hun fonds blijven voeren.

Als uitbreiding op de vorige tabellen voegen wij één kolom toe. Hierin geven we aan, welke methoden nog herzien worden. Op deze 'herzieningen' zullen we in enkele gevallen dieper

overzicht 1980 (2.2)

rekenmethoden

naam	auteurs	uitgever	eerste druk	in gebruik op hoeveel scholen?	samenstelling leerlingenmateriaal	samenstelling onderwijzersmateriaal	wordt herzien
1 Naar aanleg en tempo	H. J. Lugtmeyer e.a.	Thieme	1954	± 500	15 leerlingenboekjes	per leerlingenboekje een onderwijzersboekje	ja
2 Uitkomst	werkgroep o.l.v. Cas Klavier	Zwijzen	1964		11 leerlingenboekjes 8 rekenbloks rekenkaarten, rekendoos, proeftaken, rekenborden, enz.	per leerlingenboekje een handleiding	neen
3 Nieuw rekenen voor het basisonderwijs	Hermien van den Heuvel e.a.	Bekadidact	1969	± 3000	12 leerlingenboekjes map werkbladen voorbereidend rekenen map werkbladen eerste leerjaar mappen controlebladen voor de leerjaren twee tot en met zes	algemene inleiding per leerlingenboekje een handleiding in multiband	ja
4 Operatoir rekenen	N. Buys e.a.	Zwijzen	1972		30 leerlingenboekjes 4 werkbloks sets kaarten	negen handleidingen in multiband	ja
5 Niveaucursus rekenen	werkgroep o.l.v. H.M.M. Vossen	Malmberg	1970	± 1700	nivo 1a tot en met 6b: per nivo een set leerlingenmateriaal rekenkasten, lotto's, tafelblokken, nakijkboekjes, lotto's, klassikaal opbergsysteem	per nivo een handleiding in multiband administratiesysteem programmering	neen
6 Op veilig spoor	C. Glimmerveen e.a.	H. ten Brink	1970	± 650	voorbereidend rekenen: hokus pokus (één boekje, werkbladen, leermiddelen) fundamenteel rekenen: blokrekken (twee boekjes, toetsboekje, leermiddelen) struktuurrekenen: werkbladen instrumenteel rekenen: 100 geplastificeerde kaarten	handleiding bij hokus pokus handleiding bij blokrekken twee handleidingen bij struktuurrekenen handleiding bij instrumenteel rekenen	neen
7 Naar zelfstandig rekenen (nieuwe versie)	N. Kuipers e.a.	Wolters-Noordhoff	1978	± 2600	14 leerlingenboeken 9 differentiatieboeken toetsboeken werkschrift antwoordenboeken	14 handleidingen begeleidingsbulletin toelichting	ja

ingaan. Tevens besteden we enige aandacht aan methoden, die nog in ontwikkeling zijn, zonder daarbij gedetailleerd beoordelend te werk te gaan. Het gaat er ons in dit katern slechts om zoveel mogelijk nieuwe ontwikke-

lingen te signaleren. Dit kan immers van belang zijn voor degenen, die een keuze moeten maken voor een nieuwe reken- of reken/wiskundemethode, nu of in de komende jaren.

reken/wiskundemethoden

naam	oorspr. naam	auteurs	uitgever	eerste druk	in gebruik op hoeveel scholen?	samenstelling leerlingenmateriaal	samenstelling onderwijzersmateriaal	wordt bezien
1 Elementair wiskundig rekenen	Elementary School Mathematics	Robert E. Eicholz e.a.	Van Gorcum	1970	± 250	12 leerlingenboekjes, werkschriften, toetsen, hulpmiddelen	per leerlingenboekje een handleiding een boekje 'wat zit er achter?'	neen
2 Wiskunde voor de basisschool	Mathematik in der Grundschule	B. Nicolai e.a.	Wolters-Noordhoff	1971	± 200	12 leerlingenboeken	per leerlingenboekje een handleiding begeleidingsbulletins	neen
3 Hoj! Rekenen!	Hej, Mathematik	M.H. van Beek e.a.	Meulenhoff Educatief	1973	± 150	per leerjaar een basisboek en twee oefenboekjes, overbruggingsboek, taken, hulpmateriaal, drie rekenprojecten	per leerjaar een handleiding antwoordenboeken toelichtingsboek	ja
4 Getal in beeld		T. Brinkman e.a.	Malmberg	1974	± 300	kaarten en boekjes, onderwerpsgewijs gerangschikt, hulpmiddelen	per leerjaar een uitgebreide handleiding in multiband, schoolwerkplandeel, oefenen memoriseerprogramma	ja

reken- en reken/wiskundemethoden (nog in ontwikkeling)

naam	auteurs	uitgever	eerste druk	in gebruik op hoeveel scholen?	samenstelling leerlingenmateriaal	samenstelling onderwijzersmateriaal	gereed	verdere planning
1 Taaltaal	J. Postema e.a.	Dijkstra, zeist	1976	± 300	leerlingenboeken en werkboekjes	toelichtingsboekje handleidingen leerstofoverzichten	klas 1 t/m 4	verschijning voor de leerjaren 5 en 6: in 1981 gereed
2 Aktief rekenen	J. Olivier e.a.	Dijkstra, groningen			leerlingenboeken, werkboeken, rekenkaarten	handleidingen		
3 De wereld in getallen	F. van de Molengraaf e.a.	Malmberg	1981		per leerjaar drie boekjes twee nakijkboekjes (leerhulpmiddelen)	één handleiding per 'nivo'		voorjaar 1981: nivo 1a en 2a najaar 1981: nivo 1b en 2b voorjaar 1982: nivo 3a, 3b, 4a, najaar 1982: nivo 4b voorjaar 1983: nivo 5a en 5b voorjaar 1984: nivo 6a en 6b

algemene opmerkingen (2.3)

Gaven we in ons vorige overzicht nog dertien methoden (negen 'traditionele' en vier 'moderne') op, thans is dit aantal teruggelopen tot elf (zeven en vier). Verdwenen uit het overzicht zijn namelijk 'De grondslag' en 'Reken maar'. Dit betekent geenszins dat deze methoden niet meer gebruikt worden op scholen. Wij weten uit de praktijk, dat soms nog veel 'oudere' titels in gebruik zijn, zoals 'Ik reken' (Bosdijk). Een onderzoek van de vakgroep onderwijskunde te leiden maakte dit ook nog eens duidelijk.¹⁾

Op zichzelf is het verheugend, dat het aanbod wat overzichtelijker wordt, zeker binnen de categorie traditionele methoden.

Voorts merken we nog op, dat in de eerste tabel onder de dubbele streep de methoden 'Niveaucursus rekenen', 'Op veilig spoor' en 'Naar zelfstandig rekenen' (nieuwe versie) genoteerd zijn. Deze methoden zijn sterk geïnspireerd door een organisatorisch denken over het rekenonderwijs.

Wat de volledige reken/wiskundemethoden betreft, maken we de volgende kanttekeningen. 'Elementair wiskundig rekenen' – zo deelt de uitgever mee – zal tot ca 1985 op de markt blijven. Hoe lang Wolters-Noordhoff 'Wiskunde voor de basisschool' in het fonds zal blijven voeren, is onbekend.

Meulenhoff Educatief wil 'Hoj! Rekenen!' gaan herzien, naar aanleiding van enquêtes, gebruikersbijeenkomsten, spontane reacties en commentaren van het *iowo*. Hoe dit zal gebeuren, wanneer en in welke richting, is ons niet medegedeeld. 'Getal in beeld' zal voorlopig in de huidige vorm gehandhaafd blijven. Er liggen voor deze methode nogal wat herzieningen in het verschiet, waarover hieronder meer.

Thans iets over de methoden, die nog in ontwikkeling zijn. De methode 'Taltaal' is nog niet volledig. Het aantal gebruikende scholen heeft zich inmiddels verdubbeld. In (4) zullen we enige opmerkingen over de methode maken. Ook zullen we in die paragraaf iets opmerken over 'Aktief rekenen'. Deze methode is sinds 1976 niet verder gevorderd dan het eerste leerjaar.

Hoe voorzichtig men moet zijn bij het aanschaffen van een methode die nog niet geheel compleet is, is ons duidelijk geworden uit het feit, dat de methode 'Rekenwijzer' na twee leerjaren gestopt is. Wel deelt de uitgever mede, dat de auteursgroep een vrijbrief heeft de methode alsnog bij een andere uitgever onder te brengen.

Tenslotte is er bij Malmberg een nieuwe methode in de maak door een werkgroep onder leiding van F.v.d. Molengraaf. Hierover staan ook in (4) de verdere gegevens.

► HERZIENINGEN (3)

algemene opmerkingen (3.1)

In deze paragraaf gaan we in op de informatie, die we ten aanzien van herzieningen hebben ontvangen. Men raadplege hierbij de laatste kolom van de overzichten.

'Naar aanleg en tempo' kondigde ook bij de vorige informatieronde al aan de methode te zullen herzien. Ook nu worden wij niet meer gewaar, dan dat de auteurs H. J. Lugtmeijer en N. A. Segaar zullen zijn, terwijl A. W. van Blijderveen de boekjes zal illustreren.

De herzieningen betreffende 'Nieuw rekenen' lijken van weinig ingrijpende aard te zullen zijn.

'Alleen de werk- en controlebladen zullen worden bijgesteld. Horizontale afstemming wordt verbeterd',

zo deelt Bekadidact ons mee.

'Naar zelfstandig rekenen' voorziet een 'gedeeltelijke herstructurering van de handelingen'.

De uitgever schrijft over 'Hoj! Rekenen!' dat binnenkort een herdruk komt van de delen 1 en 2:

'Auteursgroep maakt nu inventarisatie van alle gegevens uit het veld, verkregen via:

- enquête
- gebruikersbijeenkomsten
- spontane reacties
- commentaren i.o.w.o. (afd. wiskobas).'

operator rekenen (3.2)

Van 'Operator rekenen' is ons bekend, dat men al enige jaren doende is de methode in haar geheel te herzien. Dat hier serieus aan gewerkt wordt, moge blijken uit een lijvig informatieboek dat de uitgever uitgebracht heeft.²⁾

We citeren uit het voorwoord:

'De leergang die thans voor u ligt betekent een grondig gewijzigde uitgave van de methode Operator Rekenen. Voor de onderbouw is sprake van

1) Hulsman, W.L.L.: 'Inventarisatie van de rekenmethoden, die in gebruik zijn in de regio Leiden', oktober 1979.

2) Buys, N., Teunissen, F. en Bergen, T. van: 'Operator rekenen', tilburg 1980.

een volledige herziening. Voor de bovenbouw beperkten de wijzigingen zich tot een grotere systematiek en bruikbaarheid van de leergang.

Bij alle wijzigingen blijven de wezenlijke kenmerken van Operatoir Rekenen behouden: bij het aanleren van nieuwe begrippen grijpt de leergang bijna altijd terug op het handelend bezig zijn met concreet materiaal. Ook de werkelijkheid in en om de school komt consequent om de hoek kijken. Voor de onderwijsgevende is er een gedegen uitgebreide handleiding die waar nodig voldoende steun biedt.

Vergeleken met de eerdere versie is in de nieuwe uitgave de leerstofopbouw veel hechter, is meer en gevarieerder oefenstof opgenomen en hebben de leerlingen ruimte genoeg om te werken.

De methode heeft aansluiting gezocht bij de recente ontwikkelingen op rekendidactisch gebied. Naast de vertrouwde leerstof treft u regelmatig 'wiskundige' onderwerpen aan, ook al in de onderbouw (grafieken, meetkunde, relaties).

Ook bij de inleiding in het getallensysteem en de hoofdbewerkingen sluit Operatoir Rekenen aan bij ontwikkelingen van de laatste jaren. Voor de traditionele rekenstof zijn allerlei nieuwe werkmodellen ontworpen en reeds bestaande modellen zoals de getallenlijn en het honderdveld verdiept. Van deze verfrissing en verdieping is bij de nieuwe uitgave van Operatoir Rekenen grif gebruik gemaakt. Voor enkele onderdelen van de leerstof zoals het cijferen is gebruik gemaakt van elementen uit de leerpsychologie van Gal'perin en anderen. Hierdoor kan deze stof op systematische wijze aangeboden worden.

Wat betreft de differentiatie is gekozen uit verschillende ideeën rondom dit onderwerp. Opvattingen ontwikkeld door Wiskobaslieden die kort samengevat inhouden dat differentiatie in het oplossen van problemen mogelijk is. Elke leerling mag een rekenprobleem oplossen op zijn niveau. Daarnaast is gekozen voor een combinatie tussen het basisstof-verrijkingstofdidee en het systeem van mastery learning. Dit laatste wil zeggen dat de methode af en toe pas op de plaats maakt om na te gaan of de minimum leerdoelen zijn bereikt.²

Dit klinkt niet alleen veelbelovend, de herzieningen zijn ook erg goed en zonder meer een verbetering ten aanzien van de vroegere versie. Meer dan dit positieve geluid kunnen we niet laten horen. De belangrijkste reden daarvoor – we zeiden het al eerder – is het feit, dat we ons steeds op het standpunt gesteld hebben pas gedetailleerd beoordelend en analyserend te werk te zullen gaan, wanneer de methode in haar geheel klaar ligt. We kunnen op dit moment dan ook niet veel meer dan signaleren, dat het bijzonder de moeite waard is dit informatieboek goed te bestuderen en nadere

ontwikkelingen te blijven volgen. We beelden twee werkbladen af.

Fig. 1 is een werkblad uit werkboekje 4, leerjaar 1.

Fig. 2 is afkomstig uit werkboekje 5, leerjaar 4.

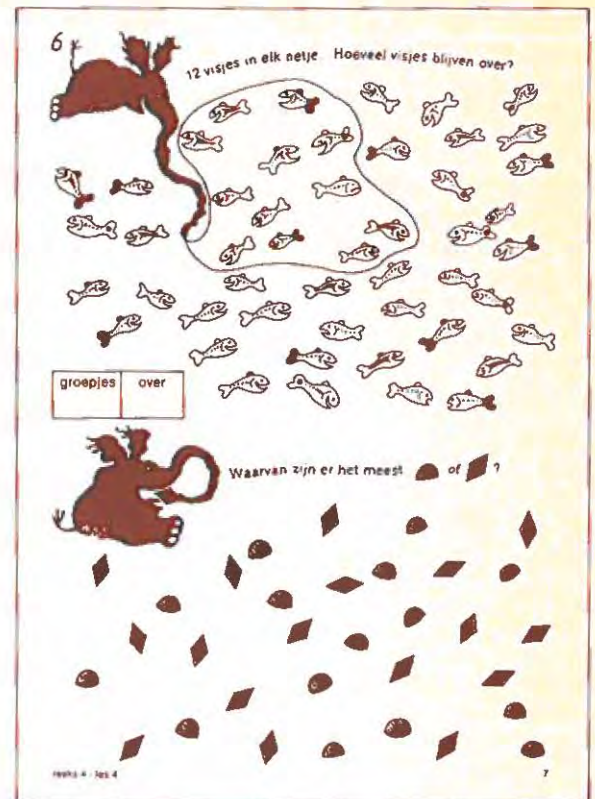


fig. 1

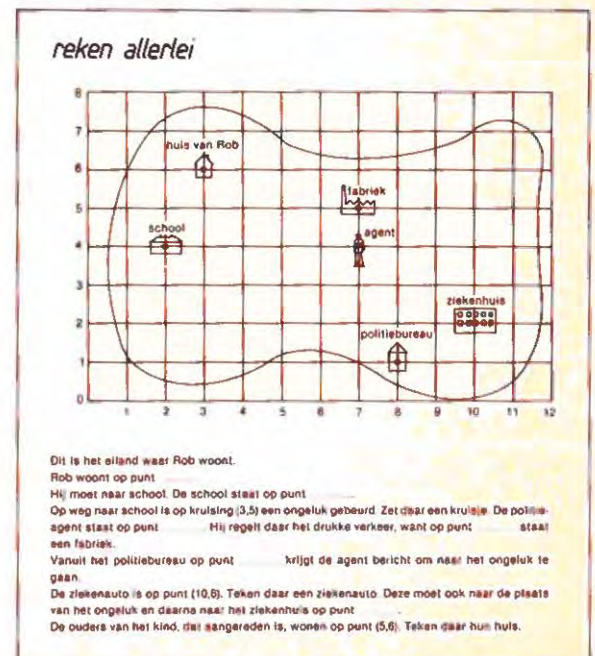


fig. 2

Tenslotte merken we nog op, dat de uitgever ons de materialen voor het eerste en vierde leerjaar vóór het begin van de cursus 1980-1981 ter inzage heeft gestuurd.

getal in beeld (3.3)

Ook van 'Getal in beeld' is de uitgever van zins, tamelijk diepgaande herzieningen aan te brengen.

De herzieningen betreffen:

- het verbruiksmateriaal voor de eerste drie leerjaren;
- alle handleidingen.

Wij hebben het materiaal voor de eerste twee leerjaren ter inzage gekregen. Zonder van de oorspronkelijke visie af te stappen, is de tamelijk formele benaderingswijze (inklusief de talstelsels) in de eerste twee leerjaren verdwenen. Het leerlingenmateriaal voor het eerste leerjaar zal anders gestructureerd worden aangeboden. Daarbij zal meer vanuit boekjes gewerkt gaan worden.

Betreffende het tweede en derde leerjaar schrijft de uitgever:

'Aanpassen 'Taken en oefeningen' klas 2 en 3 met name: de aftrekking, talstelsels, delen, vermenigvuldigen.'

En:

'Uitbreiding van het praktikum met aan MAB gereleerde abacus.'

Het leerlingenmateriaal voor het vierde tot en met zesde leerjaar zal niet gewijzigd worden. De handleidingen zullen gesplitst worden in drie delen, te weten:

- handleiding lespraktijk;
- schoolwerkplandeel als 'Amphideel';
- oefenen en memoriseren als 'Praxisdeel'.

Wij hebben de handleidingen indertijd inhoudelijk hoog geprezen. Tevens merkten we echter in de praktijk op, dat ze niet gemakkelijk hanteerbaar waren. We hebben de indruk dat juist deze hanteerbaarheid door de genoemde splitsing verbeterd zal worden. Als het 'Praxisdeel', dat o.m. het uitstekende algemene activiteitenprogramma zal bevatten, dezelfde kwaliteit krijgt als de meeste andere delen uit de 'Praxisreeks' van Malmberg, dan kunnen we daar zeker gelukkig mee zijn.

De geplande verschijningsdata van het vernieuwde 'Getal in beeld' zijn:

- leerjaar 1 en 2
(inklusief handleidingen) – voorjaar 1981;
- 'Amphideel' en
'Praxisdeel' – voorjaar 1981;
- leerjaar 3
inklusief handleiding – voorjaar 1982.

► METODEN IN ONTWIKKELING (4)

algemeen (4.1)

Ongetwijfeld zullen er meer methoden in ontwikkeling zijn dan we in deze paragraaf kunnen vermelden. We gaan echter uitsluitend op de verstrekte gegevens af. In ons overzicht van 1979 signaleerden we drie methoden. Daarvan is 'Rekenwijzer' thans, wegens voortijdige beëindiging, afgevallen.

Ook de ontwikkelingen rond 'Aktiefrekenen' kunnen ons niet al te optimistisch stemmen, aangezien we niet kunnen waarnemen wat eventueel aan proefmateriaal ontwikkeld is. Het leerlingenmateriaal is nog immer beperkt gebleven tot enkele rekenboekjes voor het eerste leerjaar. De uitgever kondigt wel sinds enkele jaren materiaal voor de hogere leerjaren aan. Tevens bestaat er een folder, waaruit blijkt dat het geen reken/wiskundemethode betreft. Men spreekt over rekenen, meten, cijferen en relaties, maar het is onduidelijk welke inhoud daaraan gegeven zal worden. Kortom, we kunnen over deze methode i.o., ook in aankondigende zin, vrijwel niets meedelen.

Iets anders lijkt dit met de volgende twee titels:

- 'Taltaal';
- 'De wereld in getallen'.

'Taltaal' is thans tot het vierde leerjaar gevorderd en heeft z'n schema vrij redelijk kunnen volgen. We komen er hieronder (4.2) uitvoerig op terug. Ook over 'De wereld in getallen' kunnen we in (4.3) wat meer vertellen, omdat we een volledige eksperimentele versie hebben kunnen bekijken.

taltaal (4.2)

Reeds bij de geboorte van deze methode konden we een bepaalde uiting van sympatie niet onderdrukken. We spraken bij het verschijnen van de boekjes voor de onderbouw over een veelbelovende start. Thans hebben we het definitieve leerlingenmateriaal tot en met het vierde leerjaar bekeken, alsmede enig voorlopig materiaal voor het vijfde leerjaar.

We zijn geneigd nu reeds enkele kanttekeningen te plaatsen – de methode is immers een heel eind gevorderd. We dienen daarbij echter te bedenken, dat cruciale delen, zoals de breukenleergang en de decimale getallen, nog niet rond zijn en ook de handleidingen bestaan – behalve die voor het eerste leerjaar – nog niet in definitieve vorm, terwijl het oorspronkelijk gepubliceerde leerstofoverzicht zich hier en daar gewijzigd heeft.

Laten we beginnen een aantal gegevens op een rij te zetten:

- de vormgeving van het tot nu toe versche-

- nen leerlingenmateriaal is, vooral wat de onderbouw betreft, voortreffelijk;
- ook de definitieve handleiding voor het eerste leerjaar ziet er prima uit;
 - het verschijningsschema loopt wat achter op de planning – hetgeen wel vaker met nieuwe methoden gebeurt;
 - auteurs en uitgever hebben ons verzekerd de methode geheel af te ronden.

Kijken we naar gegevens van inhoudelijke aard, dan moeten we constateren, dat de methode een reken/wiskundemethode genoemd mag worden, met de nadruk op het leerstofgebied rekenen. De wiskundige aspecten worden veelal aan het rekenen ontleend. Dit uitgangspunt kan, wat ons betreft, positief gewaardeerd worden. Aandacht wordt besteed aan zinvolle onderwerpen als: redeneren, coördinaten, spijkerbord, stadsplan, grafieken, plattegronden, blokjes bouwen, tabellen en meten. Met name wordt ook het taalaspect benadrukt, waardoor het rekenen niet direkt tot een abstrakt formalisme verwordt. Voorts kunnen we zeggen, dat de methode tracht via goede konteksten de kinderen mogelijkheden te bieden, zich bij het rekenen iets te realiseren. Deze uitdaging tot 'verwoorden' is een uitstekende bijdrage tot taalverwerving.

De vorming van het getalbegrip wordt veelzijdig aangepakt. Er bestaat ruime aandacht voor getallenlijn en honderdveld. Nadruk ligt op inzicht in het positiestelsel, waarbij gebruik gemaakt wordt van de abakus. Of men blij moet zijn met het feit dat in het tweede leerjaar nogal wat aandacht aan andertallige stelsels wordt besteed, is de vraag – we hebben over deze problematiek herhaaldelijk in deze katernen geschreven.

De algoritmeleergangen (cijferen) zijn door ons niet diepgaand geanalyseerd. Het lijkt echter, dat de onderwijsgevende bij het cijferend vermenigvuldigen zelf enige beslissingen omtrent het onderwijsleerproces zal moeten nemen. Hoe dan ook, hier wordt eveneens een serieuze poging ondernomen inzicht te laten prevaleren boven een truukmatige aanpak.

Bizondere aandacht verdient het zogenaamde *map* (memoriseer-automatiseer-programma). De methode heeft daarbij gekozen voor korte dagelijks terugkerende oefenactiviteiten (ca 15 minuten) betreffende de basisvaardigheden. Een prijzenswaardige gedachte, die in de praktijk ook goed schijnt te bevallen.

Daarnaast zijn er vele verlevendigungsaspecten op het gebied van de rekenvaardigheid waar te nemen, zoals: tabellen, diagrammen, kruisgetallenraadsels, etc.

Wie naar een andere methode uitkijkt, doet er goed aan ook de ontwikkelingen rond 'Taaltaal' nauwlettend in de gaten te houden.

We vatten nog enkele belangrijke punten samen:

- de methode is gericht op actief rekenen, met wiskundige aspecten;
- de methode bevat een goed aanvankelijk rekenprogramma;
- de methode maakt gebruik van de abakus;
- de methode bevat vele verlevendigungsaspecten;
- in de methode is een oefenprogramma opgenomen;
- aandacht wordt besteed aan de zakrekenmachine.

Maar:

- de methode is, volgens opgave van de uitgever, pas in 1981 klaar;
- de vraag is: hoe komt de 'bovenbouw' er uit te zien?
- wanneer zullen de handleidingen definitief klaar zijn?
- is de uitgever bereid bepaalde stukken te herzien?

Tenslotte kiezen we twee voorbeelden uit het leerlingenmateriaal. Fig. 3 ontleen we aan rekenboek 1 (pag. 25), waarbij we de docententekst afdrucken (fig. 4). Fig. 5 ontleen we aan werkboekje 6 voor het vierde leerjaar (pag. 47).

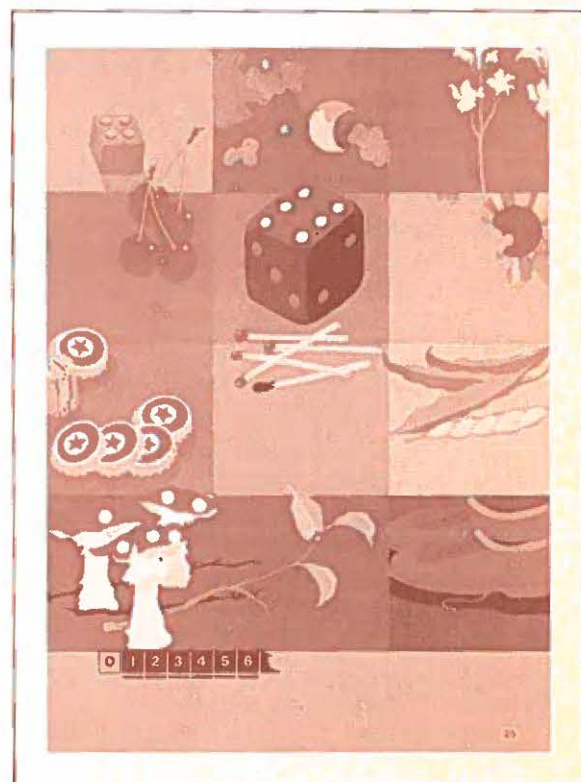


fig. 3

lessenserie 4 'zes'

lesdoelen

- 1 Kinderen moeten het getal 'zes' en de symbolen daarvoor ('6' en 'zes') kunnen verbinden met die groepen voorwerpen, die zes elementen bevatten en omgekeerd.
- 2 Kinderen moeten zes ook ervaren als het dubbele van drie en omgekeerd drie als de helft van zes.
- 3 Als doel 1, maar nu voor vijf.

activiteiten

N.B. Om het belang van enkele aspecten te onderstrepen noemen we ze nog eens:

- 1 Onze indeling van de activiteiten in lessen zal niet voor elke klas en elke onderwijzer(es) opgaan.
- 2 Observatie van de kinderen door de onderwijzer(es) is bij elke activiteit van groot belang.
- 3 Op grond van deze observatie wordt beslist
 - a welke activiteiten moeten worden overgeslagen of ingekort.
 - b welke activiteiten moeten worden ingelast of herhaald.
 - c welke 'ruggesteuntjes' moeten worden gebruikt.
- 4 Over vrijwel elke activiteit moet door de kinderen onderling en/of met de onderwijzer(es) worden gediscussieerd.
 - a Vaak aan het begin van de activiteit om na te gaan welke oplossingsstrategieën er voor handen zijn en wat de bedoeling is.
 - b Vrijwel altijd na afloop van een activiteit voor controle, bijzondere oplossingen, verbale herhaling (zie in de inleiding bij de didactische opbouw 'discussie').
- 5 Let op 'ruggesteuntjes' en 'probleempjes' aan het eind van de lessenserie.
- 6 Doelstellingen als boven vermeld zijn een geraamte. We willen met onze activiteiten veel meer bereiken. Zie daarvoor de inleiding.
Tenslotte:
In deze serie is de beschrijving van de activiteiten slechts kort omdat veel overeenkomt met de vorige lessenseries.

les 1

- 1 De kinderen krijgen allemaal zes fiches (blokjes), drie van elke kleur. Dan wordt gezamenlijk blz. 20 uit het rekenboek bekeken. We zoeken naar dingen waar er zes van zijn en controleren dat met de fiches. Zijn er zes stoelen? Eens kijken of het klopt. Leg op elke stoel maar een fiche. Hoeveel staan er in de voorste rij en hoeveel in de achterste rij? Drie voor en drie achter, dat is samen zes. Meer mogelijkheden zijn:
De ogen op de dobbelsteen.
De knopen op de kroon van de koning en de muts van Jan Klaassen.
De drie groene en de drie gele sectoren van de cirkel boven de poppenkast.
Ook andere getallen komen voor:
Vier kinderen op de stoelen, twee jongens en twee meisjes, vijf kinderen (één meer dan vier).
De figureren voor op de poppenkast (één meer dan zes). Maak ook gebruik van 'zes is het dubbele van drie' en 'drie is de helft van zes.'

fig. 4

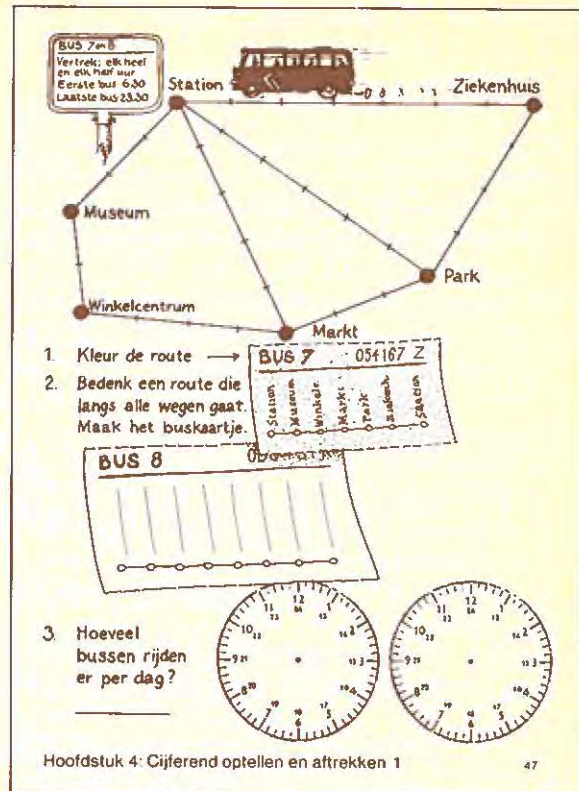


fig. 5

de wereld in getallen (4.3)

In het voorjaar van 1981 zullen de eerste boekjes van een nieuwe methode, 'De wereld in getallen', op de markt verschijnen. Dit heeft uitgever Malmberg ons schriftelijk medegedeeld. Het betreft de boekjes 1a en 2a bestemd voor resp. het eerste c.q. tweede leerjaar. Het geplande verschijningschema ziet er als volgt uit:

voorjaar 1981	:	nivo 1a en 2a;
najaar 1981	:	nivo 1b en 2b
voorjaar 1981	:	nivo 3a, 3b, 4a;
najaar 1982	:	nivo 4b;
voorjaar/zomer 1983	:	nivo 5a en 5b;
voorjaar 1984	:	nivo 6a en 6b.

Binnen drie jaar wil de uitgever dus een volledige methode op de markt brengen, waarvan het leerlingenmateriaal, zoals uit bovenstaande opgave is af te lezen, uit twee 'nivo's' per leerjaar bestaat. Tevens zal per nivo een handleiding uitgebracht worden. De samenstelling van het leerlingenmateriaal zal bestaan uit:
— leerjaar 1: twee verbruiksboekjes en één gebruiksboekje;
— leerjaar 2 tot en met 6: één verbruiksboekje, twee gebruiksboekjes en twee nakijkboekjes.

De samenstelling ziet er eenvoudig en overzichtelijk uit. Kan de uitgever deze beloften waar maken? 't Is me niet al wat!

Wij hebben inderdaad goede redenen om aan te nemen, dat dit geen loze beloften zijn. Deze redenen zijn:

- We hebben de methode in experimentele vorm in haar geheel naast onze schrijftafel staan.
- We hebben een school bezocht, waar de methode tot en met het zesde leerjaar is ingevoerd.
- We weten, dat reeds meer dan zes jaar (door een groep deskundige rekendidaktici) aan deze methode wordt gewerkt.

Enkele algemene karakteristieken:

- De methode is sterk geïnspireerd door de ontwikkelingen die zich in de jaren zeventig – mede onder invloed van wiskobas – hebben voorgedaan.
 - De nadruk in de methode als geheel ligt op het rekenaspect.
 - Binnen het rekensysteem is er steeds een uitgebreide oriënteringsfase bij de begripsvorming.
 - Bij de algoritmeleergangen wordt gebruik gemaakt van het principe van de zogeheten ‘progressieve schematisering’.
 - Er is veel aandacht voor het oefenen, waarbij opvalt dat de presentatie zeer gevarieerd is.
 - Ook het zogeheten ‘beoefenen’ door middel van reële problemen krijgt aandacht.
 - Wiskundige aspecten zijn niet alleen binnen het rekensysteem gevoegd, maar ook herkenbaar in eenvoudige meetkunde (plattegronden, blokjes bouwen), redeneren, schematiseren (tabellen), meten en grafieken.
- Hoewel we nog geen definitief oordeel willen vellen, is onze eerste indruk, evenals bij *Taltaal*, dat hier een goed doordachte methode in ontwikkeling is. Het is verheugend, dat de auteurs bij het leren cijferen hebben gekozen voor de abakusaanpak en daarbij in het tientallige stelsel starten. Bij het cijferend vermenigvuldigen heeft de aanpak van het herhaalde optellen de voorkeur genoten boven het zogenaamde kruispuntenmodel. Ook hier wordt het principe van de progressieve schematisering toegepast.

Alles overziend, hebben we de indruk dat hier een groep ervaren praktijkmensen aan het werk is: goede oude, maar niet verouderde verworvenheden van het rekenen en nieuwe inzichten, zowel stofinhoudelijke als didactische, zijn samengebracht. Illustratief daarvoor is ook, dat gekozen is voor een eenvoudig hanteerbare handleiding, die het onderwijsproces in eerste ronde per werkblad of activiteit wil begeleiden. Hoewel men hierbij de onderwijsgevende te kort kan

doen, lijkt deze opzet erg verstandig: men biedt de onderwijsgevende het nodige houvast. Of de moeilijke knelpunten: breuken, decimale getallen en verhoudingen, begripsmatig en in relatie tot elkaar aan de orde komen, kunnen we thans niet overzien. Hiervan zullen de auteurs ook zeker nog niet de definitieve versie hebben geschreven.

De methode zal geen zogenaamde ‘nivokursus’ worden, omdat gekozen is voor ‘inhoudelijke differentiatie’ binnen de jaarklas. Vanaf boekje 3a wordt echter ook de mogelijkheid van tempodifferentiatie ingebouwd. Wij kunnen nu niet nagaan hoe dat gestalte zal krijgen, maar willen wel opmerken, dat ‘inhoudelijke differentiatie’ (wij spreken ook wel over ‘nivodifferentiatie’) ons aanspreekt. Het vereist echter een verfijnder didactische en organisatorische aanpak door de onderwijsgevende, dan wanneer het rekenen als een verzameling min of meer technische vaardigheden wordt beschouwd.

Tenslotte beelden we uit de experimentele versie enkele werkbladen af. Fig. 6 bevat een werkblad uit nivo 1b en fig. 7 is ontleend aan nivo 5b.

1B-32

1. teken het cijferbosset.
begin bij 0.

		= of ≠	vol naar links
2 + 2 =	8 - 5 =	2 + 4 = 6	8 - 3 = 5
5 + 3 =	7 - 4 =	4 + 1 = 3	4 - 2 = 6
2 + 6 =	6 + 2 =	3 + 5 = 7	6 - 4 = 2
4 + 3 =	8 - 7 =	1 + 3 = 4	5 - 1 = 6
1 + 7 =	7 - 2 =	2 + 5 = 3	7 - 5 = 2

3. Wat is er gebeurd bij de verballing?
Iedereen steeds een verballing.

fig. 6

5-5-3

27 maart 1979

14 miljoen inwoners Lekker vol in Nederland

Van een ouder verjaagdesters
AMSTERDAM — Een deze dagen komt de 14-miljoenste inwoner van Nederland op de wereld. Niemand weet precies wanneer en die genaau pas- sieren en of het wel een baby is die ons inwonertal op de veertien miljoen brengt. Het kan ook een immigrant zijn.

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) verklaarde eerder dat er in 1980 nog maar 13 miljoen mensen in Nederland zouden leven. Bij deze berekeningen heeft het CBS een rekening met alle immigranten, die in ons land komen, maar in 1984 be- loofd onze bevolking nog uit 13 miljoen mensen. In het jaar 1984 wordt die bevol- king uit 13 miljoen mensen in 1978. Een derde het vorig jaar voorspel het aantal mensen van 13 naar 14 miljoen steeg. De 13 miljoen van nu, we misschien wel twee- tvieftien, meer dan het CBS.

Er worden namelijk steeds minder kinderen geboren. Om het aantal mensen gelijk te houden, moet er per vrouw 1,1 kind geboren worden. Ge- middeld komt er nu maar 1,6 kind per vrouw op de wereld.

De toekomst is dat er twee kinderen worden geboren maar dat het ene geslacht anders is. Het andere is anders. Maar het is niet meer een vrouw die een kind krijgt. Het is een man die een kind krijgt. Het is een kind dat geboren wordt. Het is een kind dat geboren wordt. Het is een kind dat geboren wordt.

Gezins haren
Doordat er minder kinderen worden geboren, is de Neder- landse bevolking ook in ver- mindering. De bevolking in het jaar 1984 wordt 13 miljoen. In 1980 was dat 13 miljoen. In 1978 was dat 13 miljoen. In 1976 was dat 13 miljoen. In 1974 was dat 13 miljoen. In 1972 was dat 13 miljoen. In 1970 was dat 13 miljoen. In 1968 was dat 13 miljoen. In 1966 was dat 13 miljoen. In 1964 was dat 13 miljoen. In 1962 was dat 13 miljoen. In 1960 was dat 13 miljoen. In 1958 was dat 13 miljoen. In 1956 was dat 13 miljoen. In 1954 was dat 13 miljoen. In 1952 was dat 13 miljoen. In 1950 was dat 13 miljoen. In 1948 was dat 13 miljoen. In 1946 was dat 13 miljoen. In 1944 was dat 13 miljoen. In 1942 was dat 13 miljoen. In 1940 was dat 13 miljoen. In 1938 was dat 13 miljoen. In 1936 was dat 13 miljoen. In 1934 was dat 13 miljoen. In 1932 was dat 13 miljoen. In 1930 was dat 13 miljoen. In 1928 was dat 13 miljoen. In 1926 was dat 13 miljoen. In 1924 was dat 13 miljoen. In 1922 was dat 13 miljoen. In 1920 was dat 13 miljoen. In 1918 was dat 13 miljoen. In 1916 was dat 13 miljoen. In 1914 was dat 13 miljoen. In 1912 was dat 13 miljoen. In 1910 was dat 13 miljoen. In 1908 was dat 13 miljoen. In 1906 was dat 13 miljoen. In 1904 was dat 13 miljoen. In 1902 was dat 13 miljoen. In 1900 was dat 13 miljoen.

1. Hoe schrijf je het getal 14 miljoen? In hoe 13,9 miljoen?

2. Vul het onderstaande lijstje in:

jaar	aantal inwoners
1964	
1970	
1979	

Van 12 naar 13 miljoen duurde .. jaar
Van 13 naar 14 miljoen duurde .. jaar
Wat kun je hiervan zeggen?

3. Maak een grafiek van de gezinsgroottes bij de kinderen in je klas.

4. Vul je het volgende lijstje van 10 gezinnen zo afmaken, dat daar een gemiddelde van 2,1 kind per gezin uitkomt.

Gezin	aantal kinderen
Gezin A	3
Gezin B	1
Gezin C	0
Gezin D	4
Gezin E	2
Gezin F	1
Gezin G	3
Gezin H	2
Gezin I	1
Gezin J	1

5. Reken eens uit hoe oud jullie nu samen zijn. In over dertig jaar?

fig. 7

In paragraaf (5.4) besteden we voorts aparte aandacht aan de activiteiten van het *cito*, omdat deze soms lijken te gaan in de richting van deelmethoden, die op de onderwijsmarkt gesleten mochten worden.

sac-programma (5.2)

Het rekenprogramma, dat sinds 1971 door het utrechtse schooladviescentrum ontwikkeld wordt onder leiding van J. Nelissen, W. Klukhuhn en A. Vuurmans, is gerelateerd aan zowel opvattingen van wiskundig-didactische aard zoals men die bij wiskobas ten dele aan- treft, alsook aan leerpsychologische inzichten van met name Gal'perin en Davydov. Via een werkgroep van de *wpro* nemen negentien diensten actief deel aan dit project.

Het project, waarin landelijk zo'n 500 scholen betrokken zijn, wordt uitdrukkelijk gepresen- teerd als een begeleidingspakket en *niet* als een 'methode van de begeleidingsdienst'. Men is namelijk uit op 'geleidelijke vernieuwing' en op 'attitudeverandering'. De begeleidings- aspecten hebben zich dan ook gewijzigd van het directe begeleiden van individuele leerkrach- ten naar teambegeleiding, gericht op school- werkplanontwikkeling, zoals één van de pro- jektleiders ons schriftelijk mededeelde.

De inhoud van het programma is enige malen veranderd. De materialen voor het eerste tot en met derde leerjaar zijn thans 'afgerond'. Voor elk leerjaar beschikt men over drie prak- tijkboeken — zeg maar: handleidingen — met elk vijf fasen. Onder een fase wordt verstaan: mogelijkheden voor ca twee weken rekenon- derwijs. Tevens wordt voor elk leerjaar een set werkbladen (onderbouw 60 bladen, boven- bouw 90 bladen) ter beschikking gesteld. Ook is thans een wiskundeprogramma voor kleu- ters in ontwikkeling.

De deelleergangen voor het cijferen in de bo- venbouw liggen eveneens vast. Verder is men nog bezig met praktijkboeken voor de leer- jaren 4, 5 en 6 betreffende breuken, redaktie- sommen, oppervlakte, kansrekening en gra- fiekken. Sommige van deze onderdelen zijn al in eerste versie verschenen.

In de praktijkboeken wordt getracht aandacht te schenken aan de relaties tussen de verschil- lende onderdelen.

Het project heeft van meet af aan kennis ge- nomen van de ontwikkelingen in nederland, met name ook die binnen het wiskobaspro- jekt, zoals bijvoorbeeld te zien valt aan de wijze waarop de cijferalgoritmen geleerd wor- den. Daarnaast oriënteert men zich vooral ook op leerteorieën en activiteiten die in leerpsy- chologische onderzoekingen in de belangstel- ling staan. Dit verklaart bijvoorbeeld de aan-

NIET-KOMMERCEIELE UITGAVEN (5)

algemeen (5.1)

In deze paragraaf besteden we aandacht aan (methoden-)ontwikkelingen, zoals we die bij enkele schooladviesdiensten en andere verzor- gingsinstituten signaleerden. Zoals bekend, behoren 'ontwikkelingstaken' eigenlijk niet tot de competentie van deze instanties. Van- daar dat ze veelal over 'rekenbegeleiding', 'schoolwerkplanontwikkeling', 'evaluatie', etc., spreken. Hoewel in nederlands onderwijs- land keurig gescheiden moet worden gewerkt — leerplanontwikkeling, begeleiding, onder- zoek, toetsing, scholing en nascholing — zit iedereen in andermans tuintje te wroeten. Wat ons betreft: prima, vooral als er nuttige zaken ontwikkeld worden, maar wat zal de onder- wijspolitie ervan zeggen?

De twee belangrijkste — ons bekende — pro- jecten zijn:¹⁾

- *sac*-programma (rekenprogramma van het utrechtse school- en adviescentrum);
- *osm* (reken/wiskundeproject van het pro- jekt onderwijs en sociaal milieu te rotter- dam — voorheen het Grandiaprojekt).

¹⁾ Op de valreep vernamen wij nog dat bij het peda- gogisch centrum te enschede de methode 'Gediffe- rentieerd rekenen' ontwikkeld wordt.

dacht, die het *sac*-programma – naast allerlei nieuwe onderwerpen – aan redaktiesommen besteedt. Het gevolg van een en ander is, dat het programma een merkwaardig tweeslachtig karakter krijgt. Aan de ene kant een nieuw wiskundig gedeelte en anderzijds een starre, versteende uitdrukking. Dit is echter voor een belangrijk deel slechts uiterlijke schijn.

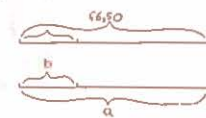
In wezen zijn de grondprincipes duidelijk dezelfde: aandacht voor een goede 'getrapte' begripsvorming, veelvuldig gebruikmakend van oplossingschema's en modellen, nadruk op het rekenaspect, en zo meer. En we voegen er aan toe, dat deze basisopvattingen niet in alle opzichten overeenkomen met die van wiskobas. Het zou echter te ver voeren, hier nu diep op in te gaan.



Wel willen we stellen, dat we de ontwikkeling van het *sac*-programma steeds met interesse gevolgd hebben en overtuigd zijn van de serieuze, weloverwogen ontwikkelingsgang die gevolgd wordt. De moeilijkheid is echter ook hier weer, dat de 'methode' bij lange na niet klaar is, hoewel de ontwerpgroep 1982 als einddatum gepland heeft. Vandaar dat we ons moeten onthouden van een gedetailleerd en definitief eindoordeel en ons, wat betreft het *sac*-programma, aansluiten bij de eerder gemaakte opmerkingen over 'Operatoir rekenen', 'Taltaal' en 'De wereld in getallen'.

We nemen tenslotte twee werkbladen uit het programma op (fig. 8 en 9).

1. Ik betaal bij de slager $\text{f } 6,50$.
De worst kost $\text{f } 2,-$. Hoeveel en hoe vaak ongeveer even duur.
Hoeveel moet Jan mij betalen?
Schema: maak het af.

Ref. Doc. 138
Rekblad 22.2.

in letters: 

2. Ik betaal $\text{f } 7,-$ in sociaal.
De kaas kost $\text{f } 3,-$.
Verder kocht ik drie doosjes magere kwark: een voor mij en twee voor mijn vriendin.
Hoeveel moet die vriendin mij betalen?
- Teken een schema
- in letters: 
- in getallen: 
- Reken het uit.

3. Als ik in sociaal $\text{f } 11,-$ heb betaald en voor de kaas $\text{f } 5,-$. Hoeveel had de vriendin mij dan moeten betalen?
Teken weer de schema's

4. Kun je zelf zo'n probleem maken; probeer het eens.
Laat je buurman in de klas het raadsel oplossen.
Je koopt bv. 2 sinaasappels en 3 appels, samen voor $\text{f } 3,50$.
Maak er zelf een raadsel van.

fig. 8

fase II klas 2 4

Speel samen kies een rondje uit, gooi dan met 2 dobbelstenen. kun je een som maken met + of - maak dan de rondjes vast met rood en schrijf het getal dat je gooide erby. dan gaat de ander. die maakt de rondjes vast met blauw wie de meeste sommen kan maken wint. elk rondje maar 1 keer gebruiken.

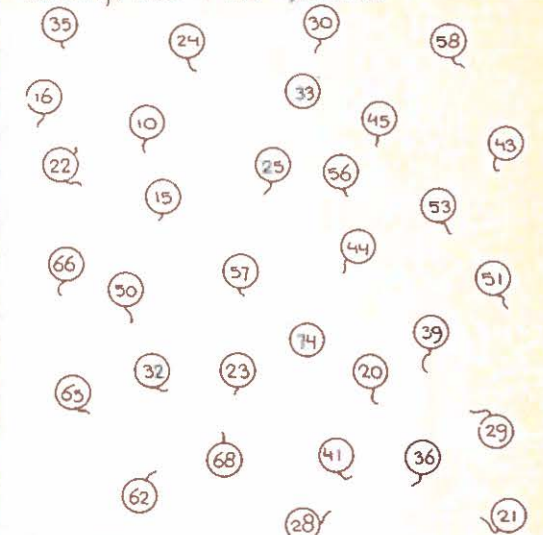


fig. 9

osm-project (5.3)

Bij het project *onderwijs en sociaal milieu* te rotterdam wordt onder leiding van K. Grave-meijer een rekenmethode ontwikkeld, die aansluit op het eveneens door *osm* ontwikkelde *kwowed*-programma.¹⁾ Het programma is thans in definitieve vorm gereed voor het eerste leerjaar. De auteur hoopt het programma begin 1985 voor alle klassen rond te hebben.

Tot goed begrip het volgende: het project *osm* heeft tot hoofddoelstelling: achterstanden weg te werken. Een moeilijkheid bij dit soort projecten blijkt de zich steeds wijzigende maatschappijstructuur. De sociale achterstand is vooral bij de niet-nederlandstalige kinderen erg groot, zodat men soms het idee heeft meer voor anderstaligen te ontwikkelen dan voor de oorspronkelijke doelgroep. Dat dit grote problemen met zich meebrengt bij de ontwikkeling van materialen, laat zich raden. Dit echter terzijde!

Wij hebben de mappen met materialen voor het eerste leerjaar bestudeerd. De inhoudelijke kant is voor een groot deel mede aan de leerplanpublicaties van wiskobas ontleend. De uitvoering is verzorgd en overzichtelijk. De organisatorische kant wordt gekenmerkt door een sterke structurering van de leerstof, volgens onderwijs in kleine stapjes. Ook de hand-

¹⁾ *kwowed*: kleuters willen ook wel eens denken (thans uitgegeven door Zwijsen).

leiding draagt daartoe bij, met een gedetailleerde beschrijving per les.

Bij elk leerjaar wordt een informatiekursus ontwikkeld, die bedoeld is om de onderwijsgevenden, in het jaar voordat ze met het programma gaan werken, te 'informer' en om de 'implementatiebereidheid' — zoals *osm* het omschrijft — te verhogen. Daarbij wil men het principe hanteren van de wiskobas-heroriënteringskursussen, waarin direkt praktijkgericht gewerkt wordt.

Naast de informatiekursus zal nog een model voor schoolbegeleiders ontwikkeld worden. De onderwijsgevenden zullen op den duur als het ware zelf-(na)-scholend te werk moeten gaan. Ook wordt nog een remedial-programma ontwikkeld. We mogen hopen, dat de ontwikkelaars niet in de knoop zullen raken met deze naar ons idee nogal ambitieuze planning. Het programma heet 'Rekenen en wiskunde' en de inhoud ziet er goed uit. Naast het rekenen komen inderdaad allerlei wiskundige aspecten aan de orde, zoals: oriënteren, kleine redeneringen, meten en meetkunde.

We beelden tenslotte nog een werkblad af (fig. 10) met de bijbehorende onderwijzers-tekst (fig. 11).

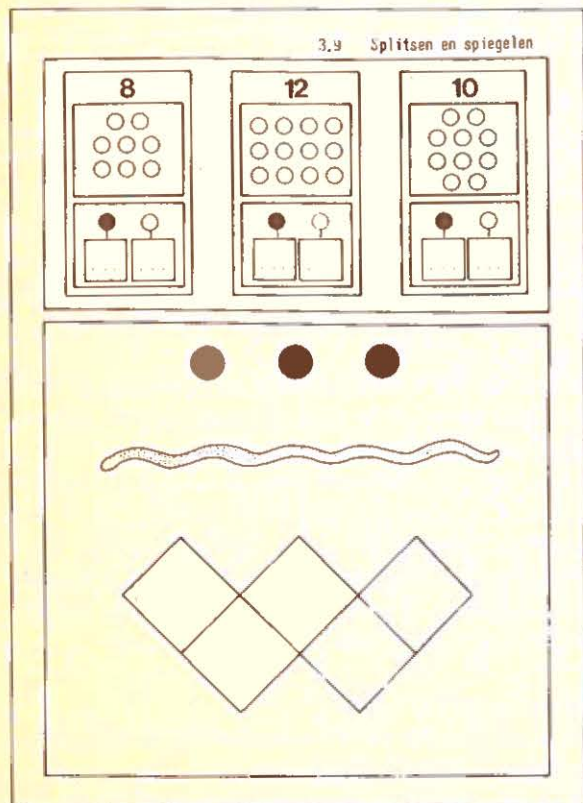


fig. 10

BLOK 3: 9e DAG.

- Bordtekening.	- Werkblad 3.9. "Splitsen + Spiegelen". - Spiegeltjes.
-----------------	-----------------------------------------------------------

1. Splitsen t/m 12.

Zelf splitsingen aanbrengen bij een getekende hoeveelheid. Het gaat om het verkennen van de structuren van de getallen t/m 12.

- De leerkracht heeft een met het werkblad vergelijkbare opgave op het bord geplaatst.

10

Een leerling mag een zelf gekozen deel van de tien stippen volmaken. Daarna mag hij in het onderste vak het aantal "zwarte" en "witte" stippen aangeven.

- De werkbladopgaven worden zelfstandig gemaakt (werkblad 3.9. "Splitsen en spiegelen").
- De gevonden oplossingen worden besproken.

(Er zijn natuurlijk talloze goede oplossingen mogelijk.)

2. Spiegelen.

Een verdere exploratie.

- Op het werkblad 3.9. staan drie grote stippen. De leerkracht vraagt een leerling er één stippen van te maken, door de spiegel te gebruiken. Daarna vraagt de leerkracht er minder stippen van te maken.

Vraag de leerlingen ook eens "één" stip resp. "zes", "vier" of "twee" stippen te maken (individueel controleren). Als dit goed gaat kunt u vragen 5 stippen te maken. Dit is vrij moeilijk door de leerlingen dan één stip midden door moeten delen.

Is de opdracht te moeilijk voor de leerlingen dan laat de leerkracht eerst de vorm langer resp. korter maken.

Vraag de leerlingen de vorm langzaam te laten groeien. (dit kan door de spiegel langzaam te verschuiven).

Daarna vraagt de leerkracht de leerlingen de spiegel rechts op het vak met de rondjes te plaatsen en dan de spiegel langzaam naar links te schuiven.

- "Kijk wat er gebeurt."
- "Tel steeds het aantal rondjes, dat je ziet."

- Bij de onderste opdracht mogen de leerlingen nog even zelfstandig experimenteren, zonder dat dit tot een klassale nabespreking leidt.

3. Terugtellen.

Het terugtellen vanaf 15 tot 1.

- De gehele klas telt langzaam vanaf 15 terug tot 1. (Eventueel m.b.v. de getallenlijn.)
- Daarna mogen enkele leerlingen het alleen proberen.

fig. 11

cito: leerdoelgerichte toetsen voor het basis-onderwijs (5.4)

Het *cito* heeft leerdoelgerichte toetsen voor het onderwerp meten samengesteld.¹⁾ Deze serie bestaat uit een handleiding en twee opgavenboeken (*a* en *b*). In de handleiding worden 75 leerdoelen geformuleerd over lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht en metriek stelsel. Bij ieder leerdoel is een toetsserie samengesteld.

De leerdoelen en bijbehorende toetsen staan op zichzelf, dat wil zeggen: zijn niet aan één of meerdere methoden gebonden. Een verwijzingschema in de handleiding bij deze toetsen over meten geeft precies aan welk leerdoel wordt nagestreefd in welke van de vier doorgeleichte methoden, te weten: 'Naar zelfstandig rekenen', 'Nieuw rekenen', 'Niveaucursus re-

1) *Cito: 'Leerdoelgerichte toetsen voor het basis-onderwijs: meten'*, arnhem 1979.

kenen', 'Operatoir rekenen'. Gebruikers van deze methoden kunnen dus eenvoudig nagaan welke toetsopgaven in hun specifieke geval van toepassing zijn – zo lijkt het.

In principe kan zo'n verwijzingschema voor elke methode gemaakt worden. Uit het resultaat van de analyse blijkt dan tevens in hoeverre de leerdoelen van de betreffende methode de *cito*leerdoelenlijst dekken. Of zo men wil: welke leemten die methode heeft wat betreft het onderwerp meten. Men kan vervolgens, indien nodig en gewenst, als schoolteam zélf deze leemten opvullen – aldus luidt één van de aanbevolen gebruiksmogelijkheden van de leerdoelgerichte toetsen.

Kortom, deze toetsserie zou dus voor leergangkonstruktie gebruikt kunnen worden – een reden om dit *cito*produkt hier niet ongenoemd te laten. Elders is reeds uitgebreid op dit nieuwe toetsverschijnsel ingegaan, zodat we hier met een enkele opmerking volstaan.

Welnu, naar onze mening kunnen deze toetsen pertinent niet verantwoord gebruikt worden voor leergangkonstruktie. We hebben geprobeerd aan te tonen dat essentiële elementen van het begrip meten niet in de leerdoelenlijst vervat liggen. Wil men verantwoord onderwijs ontwikkelen dan zal echter de essentie van het te leren gebied uitgangspunt van de ontwikkelingswerkzaamheden moeten zijn en niet de oppervlakkige kant van het meten.

Laten we ons eigen verwijzingschema maar eens gebruiken: indien men de kernonderdelen uit de *iowopublikaties* over oppervlakte¹⁾ vergelijkt met de leerdoelenlijst van oppervlakte uit de *cito*publikatie, dan kan men eenvoudig vaststellen dat er op essentiële punten veel leemten in die leerdoelenlijst zitten. Ergo: die lijst is ongeschikt voor leergangkonstruktie.

En dan hebben we het bij oppervlakte nog over het best uitgewerkte onderdeel! Met name de toetsen over het metriek stelsel doelen op verouderde leerstof.

Tenminste – naar ons idee.

Maar hoe denkt het *cito* hierover?

Dat nu blijft onduidelijk. Een funderende beschouwing over meten ontbreekt geheel. En dat verklaart ook het vreemde mengsel van oud en nieuw dat in die leerdoelenlijst tot uitdrukking komt: er zit geen conceptie van wiskundeonderwijs achter!

Jammer, dit ondoordachte produkt is het *cito* onwaardig – het *cito* dat in de afgelopen tien

jaar zo'n goede reputatie op het gebied van eindtoetsen opgebouwd heeft, en vele werkgroepen en instituten (waaronder het *iowo*) tot steun geweest is bij de formatieve en summatieve leerplanevaluatie.

► HET KIEZEN EN SAMENSTELLEN VAN EEN METHODE (6)

Het zou te hopen zijn dat in de toekomst de keuze van een reken/wiskundemethode met veel overleg plaatsvindt – dat spreekt! Maar dat gold in het verleden evenzeer voor de rekenmethoden, zou je kunnen zeggen. Toch zijn er, wat die keuze aangaat, nogal wat verschillen tussen toen en toekomst. Twee grote punten van onderscheid springen daarbij in het oog, te weten de differentiatie en de wiskunde.

Vroeger moesten de differentiatiemogelijkheden van een rekenmethode voornamelijk beoordeeld en gewogen worden vanuit het gezichtspunt van klassikaal onderwijs. Thans en in de toekomst dient de organisatorische basis van de differentiatie breder beschouwd te worden omdat er ook andere groepeeringsvormen zijn dan die van het jaarklassensysteem.

Vroeger lag de leerstof van het rekenonderwijs betrekkelijk vast. Hooguit varieerde de omvang per onderwerp enigszins. De onderwerpen waren traditioneel bepaald, al werden in de loop van de tijd – vooral na de tweede wereldoorlog – nogal wat besnoeiingen uitgevoerd. Maar met de komst van de wiskunde op de basisschool werd echter veel van het oude op losse schroeven gezet: de leerstof, de onderwijsaanpak, de visie op het onderwijs, de opbouw van de verschillende leergangen, de sommenrijtjes, de oefenmethodiek, de notatiewijzen, de redaktiesommen, de rekenvaardigheid, en zo meer.

Aanvankelijk werd de moeilijkheid om een nieuwe methode te kiezen nog enigszins opgeschoven door het advies dat men in het begin van de jaren zeventig in Nederland kreeg om zich voorlopig nog maar bij het oude te houden. Maar nu, anno 1980, kunnen vele schoolteams niet meer om een fundamentele keuze heen, en in de komende jaren zullen nog vele voor het blok komen te staan.

enkele stellingen (6.1)

Hoe moet men als schoolteam tot een verantwoorde keuze komen?

Als we op deze vraag nu eens een duidelijk antwoord konden geven! Eén ding staat vast: vele schoolteams zitten enorm met deze kwestie van de methodenkeuze omhoog.

Minder vast staat in welke mate 'Rapport-

¹⁾ Heege, H. ter en Moor, E. de: 'Oppervlakte (1)', utrecht 1977.

Jong, R. de (ed.): 'Oppervlakte (2)', utrecht 1978.

boekje 3' van wiskobas een goede richtingwijzer is om het juiste antwoord te helpen vinden.¹⁾ De enorme belangstelling voor dit rapportboekje is wellicht een aanwijzing dat een uitgebreide en diepgaande analyse van de leerboeken houvast kan geven. Maar we weten niet of zo'n analyse de keuze wezenlijk beïnvloedt. Dat hangt namelijk ook sterk af van de procedure die het schoolteam bij het kiezen volgt.

Over die procedure nu zullen we straks enkele aanbevelingen doen.

Vele mensen uit verzorgingskringen rondom de onderwijsgeveden spreken vandaag de dag over schoolwerkplanontwikkeling. Er wordt ook veel over geschreven. En dan vooral in de trant van: het schoolteam moet dit en het schoolteam moet dat, en het moet zus en het moet zo. Er vallen woorden als 'scholingsconcept', 'bezinning', 'dokument', 'visie', 'doelstellingen', en wat dies meer zij. Op zich een goede ontwikkeling, ware het niet dat zij de kant dreigt uit te gaan van een papierontwikkeling.

Laten we echter niet te veel lamenteren over de treurige bureaucratische draai die de leerplanontwikkeling in nederland lijkt te gaan nemen, maar ons bepalen tot de positieve mogelijkheden ervan in de vorm van een weloverwogen keuzeprocedure om tot de aanschaf van een nieuwe methode te komen. Immers, men kan zo'n keuze zeer wel tot het proces van schoolwerkplanontwikkeling rekenen. Sterker nog: een diepgaande bezinning en studie over een te kiezen methode is naar onze mening één van de belangrijkste en meest zinvolle onderdelen van wat men wel schoolwerkplanontwikkeling noemt — op één uitzondering na, namelijk de onderbouw van de (nieuwe) basisschool, waar in plaats van de methodenkeuze, het zélf samenstellen van een activiteitenplan voorop gesteld moet worden. Een methode bepaalt voor een belangrijk deel het reken/wiskundeonderwijs. Dat is *stelling één*. We kunnen haar nog wat nuanceren door eraan toe te voegen dat de methode globaal de ruimte aangeeft waarbinnen de onderwijsgevede zich kan bewegen.

Om die reden verdient de keuze van een methode hoogste prioriteit. *Stelling twee*. Ook deze moet eigenlijk uitgebreid toegelicht worden, want juist niet alleen de methode behoort het onderwijs te bepalen. Daartoe dient dan ook een speciaal soort methode gekozen te worden. En men zou, zo nodig, tevens een toegevoegd activiteitenplan voor 'buiten-

methodische' onderwijsactiviteiten moeten maken. Maar toch ...! De plaats van de methoden in het onderwijs blijft een belangrijke, hoezeer zij ook beperkt en afgegrensd is.

Een schoolteam moet bij de methodenkeuze ondersteund worden. Dit is onze *derde stellige overtuiging*. Een diepgaande analyse van één methode vergt naar onze ervaring enkele honderden uren, en aangezien er toch wel zo'n tien methoden zijn die serieuze aandacht verdienen, lijkt de konklusie die in stelling drie is neergelegd, volkomen gewettigd. Er zal dus een instantie moeten zijn die voor een bepaald vak- of werkelijkheidsgebied bij voortdurende methodenbeoordelingen maakt.

Laten we nu eens even aannemen dat er zo'n boekje met analyses ligt. Is een schoolteam daarmee dan voldoende ondersteund? Wellicht niet in alle gevallen. Want nu moet het team de relatie tussen de uitkomsten van de verschillende analyses en de eigen specifieke schoolsituatie proberen te leggen, wat uiteraard heel lastig kan zijn. In sommige gevallen zal het nuttig zijn om de hulp van een deskundige schoolbegeleider in te roepen. Toch zal een schoolteam naar onze overtuiging veelal op eigen kracht, of zo mogelijk in samenspraak met andere scholen, moeten trachten een goede keuze te doen. Maar hoe?

Stelling vier: een weloverwogen keuze voor een reken/wiskundemethode zou het best gedaan kunnen worden door er gedurende één schooljaar, zeg: één keer per maand, een uitgebreide teambespreking aan te besteden. Deze besprekingen zouden allereerst gericht kunnen worden op het maken van een grove selectie en vervolgens op het diepgaand analyseren van de geselecteerde kandidaatmethoden. Met name de kwestie of een methode zowel didactisch alsook organisatorisch toegesneden is op de eigen omstandigheden, zal uitgebreid aan de orde moeten komen. De uiteindelijke keuze kan tenslotte gedocumenteerd en gemotiveerd verantwoord worden. Men heeft dan tevens een belangrijke invulling gegeven aan de schoolwerkplanontwikkeling. Niet door vele mooie toekomstbeelden te schetsen of idealen te beschrijven, maar door zakelijk en nuchter een weldoordachte keuzeprocedure te beschrijven en de resultaten ervan vast te leggen. Dat is wat je zou kunnen noemen operationele schoolwerkplanontwikkeling: er is iets ontwikkeld dat klaar is om in de onderwijspraktijk gebruikt te gaan worden. En niet zomaar gebruikt, maar gehanteerd met het oog op de ideeën die men als school over het (wiskunde-)onderwijs bezit of heeft ontwikkeld. Vooral deze laatste toevoeging is belangrijk: men werkt als schoolteam naar

¹⁾ Wiskobasteam: 'Overzicht van rekenmethoden anno 1979', utrecht 1979.

iets toe, men ontwikkelt iets, niet vanuit vage algemene ideeën, maar juist andersom door te denken vanuit duidelijke konkrete produkten. Geen deductieve maar inductieve schoolwerkplanontwikkeling, geen kwasi-teorie maar echt praktijkwerk.

Welnu, de aangeduide procedure om te komen tot de keuze van een methode is het eerste en meest fundamentele nivo van werkplanontwikkeling. Uiteraard kan men proberen verder te gaan, en vaak zal men dit ook wel moeten, door 'additionele' materialen en activiteiten in te passen of eventueel zelf nog allerlei spullen te ontwikkelen. Maar, zoals gezegd, hoe belangrijk dit vervolg ook moge zijn, voor het gros van de scholen zal toch gelden dat de methode de basis van het reken/wiskundeonderwijs vormt. Dus moet dit ook onze eerste zorg zijn. Daarvan afgeleid is het van belang de methode flexibel te gebruiken, nieuwe stukken in te passen, etc.

werkagenda (6.2)

We willen een stapje verder gaan en een nadere uitwerking geven aan het zojuist gegeven voorstel over de procedure van de methodenkeuze.

Stel dat een schoolteam binnen afzienbare tijd – zeg: over één jaar – een nieuwe methode moet aanschaffen, hoe kan men dit dan gepland doen?

We geven als voorbeeld een indeling voor acht bijeenkomsten.

De eerste bijeenkomst, in september, dient ertoe te inventariseren wat de goede punten zijn van de 'oude' methode en vooral de tekorten ervan. Daarnaast zouden ook de wensen omtrent een nieuwe methode, in globale termen over didaktiek en onderwijsorganisatie, dus over de visie op onderwijs, leerstof en differentiatiemogelijkheden, voor de praktijk van het onderwijs geformuleerd moeten worden. Ieder lid van het team zal z'n bijdrage daaraan leveren. Er wordt een verslag van de uitkomsten van de bespreking gemaakt.

De tweede bijeenkomst, in oktober, biedt een overzicht van het additionele materiaal, dus *not*-boeken¹⁾, *Kien*-boeken²⁾, wiskobasmaterialen, e.d. Eén van de teamleden leidt de bijeenkomst en het totale team komt tot een vaststelling van het additionele materiaal dat mogelijk gebruikt kan worden.

Indien mogelijk start men reeds in de tweede

zitting met het zélf maken van wat opgaven. In iedere volgende zitting zou men ongeveer een half uur aan eigen activiteiten kunnen besteden om mede daardoor de visie op wiskundeonderwijs te verscherpen.

Als bronnen voor dit eigen werken met behulp van leerlingmateriaal kunnen bijvoorbeeld dienen: *'Kien'*, *'Gevarieerd rekenen'*³⁾ en de *not*-boeken. Eén van de teamleden zou dit aspect moeten coördineren.

De derde werkbijeenkomst, begin november, heeft het methodenoverzicht van wiskobas tot onderwerp. Eén van de teamleden geeft een samenvattend overzicht van de verzameling reken/wiskundemethoden en doet een voorstel op basis van de aanbevelingen uit de eerste bijeenkomst, om te kiezen tussen bijvoorbeeld drie methoden die voor de school in aanmerking komen, op grond van zowel organisatorische als inhoudelijke overwegingen. Het team bespreekt dit voorstel en komt tot een werkverdeling ten aanzien van de analyse van methoden in de komende drie werksittingen.

In bijeenkomst vier, weer een maand later, komt de eerste 'kandidaatmethode' aan bod. Per leerjaar wordt een schets van de achtergrond, inhoud en gebruiksmogelijkheden gegeven, plus een analyse van één deelleergang, bijvoorbeeld van het cijferen of de breuken. Aan de hand daarvan wordt de waarde van de betreffende methode voor de school globaal en voorlopig bepaald.

In de vijfde en zesde bijeenkomst gebeurt hetzelfde met de overige twee methoden. Ieder lid van het schoolteam levert z'n inbreng bij het analyseren.

In de zevende sessie vindt de definitieve keuze plaats. (Over de wijze van invoering, namelijk tegelijk in alle klassen of stap-voor-stap per leerjaar, bestaat vanaf het begin al duidelijkheid – zo veronderstellen we).

In de achtste bijeenkomst tenslotte wordt, in samenhang met de genomen beslissing over de aan te schaffen methode, zo nodig een beslissende keuze van het additionele materiaal gedaan. De gevolgde procedure wordt vervolgens kort beschreven en de genomen besluiten worden gemotiveerd toegelicht. Tevens wordt bepaald op welke wijze en wanneer het functioneren van de nieuwe methode gewogen wordt. In het schoolwerkplan kan dan in de volgende jaren beschreven worden, op welke wijze de methode gebruikt wordt, welke delen niet of anders aangepakt worden en eventueel welke nieuwe activiteiten ingepast worden. Vooral ook de geïntegreerde wiskundige activiteiten in de onderbouw van de basisschool (kleuterschool – lagere school) zullen apart beschreven moeten worden.

1) Boeken bij programma's van de nederlandse onderwijs televisie.

2) Malmberg, 1975.

3) Moor, E. de: *'Gevarieerd rekenen'*, utrecht 1980.

organisatie van het onderwijs en methodenkeuze (6.3)

Bij het kiezen van een methode worden de keuzemogelijkheden vaak sterk ingeperkt door de wijze waarop het onderwijs praktisch georganiseerd is. Stel bijvoorbeeld dat men een strak doorgevoerd systeem van individualiserend onderwijs kent, dan komen vele reken/wiskundemethoden eenvoudigweg niet voor keuze in aanmerking. De reden ligt voor de hand: slechts enkele methoden zijn inhoudelijk zodanig georganiseerd dat de leerling min of meer zelfstandig een passend onderwijstraject kan doorlopen. En dat zijn ook uitgerkend methoden die vakdidactisch onder de maat zijn – tenminste vanuit een bepaalde visie op onderwijs beschouwd! Slechts als men rekenen/wiskunde opvat als een kompendium van algoritmen, als een gesystematiseerde verzameling truukmatige vaardigheden, als een welomschreven leerstofgebied dat op een ongelimiteerde wijze in stukjes vermalen toegediend kan worden, ja dan kan men inderdaad het 'vak' individueel en zelfstandig uit een boekje leren. Maar als men rekenen/wiskunde als een onderzoeksgerichte, menselijke, sociale activiteit ziet die van persoonlijke en maatschappelijke waarde kan zijn, dan past een dergelijke conceptie niet bij een sterk geïndividualiseerde en geprogrammeerde organisatie van het onderwijs.

Op dit toegespitste punt nu van de spanning tussen onderwijsorganisatie en onderwijsconceptie komt een schoolteam vaak direkt al voor onoverkomelijke problemen te staan.

Heel eenvoudig: men heeft een tweemansschool of men moet werken met gekombineerde klassen, en men voelt als team voor inrichting van het reken/wiskundeonderwijs volgens een visie die vooral ook de opvoedende en praktische waarde van dat onderwijs beklemtoont. Welke methode moet men dan kiezen?

Enerzijds vraagt de schoolsituatie een methode waarbij de kinderen langdurig zelfstandig moeten kunnen werken, maar anderzijds vraagt onderzoeksgericht en sociaal georiënteerd onderwijs om veel gemeenschappelijke activiteiten en – min of meer informele – leiding en sturing van het groepswerk. Welnu, deze twee eisen zijn moeilijk te combineren: sla het methodenoverzicht van wiskobas er maar op na!

Het rekenonderwijs is van oudsher een bepaald rustpunt in het onderwijs geweest – althans vanuit de onderwijsgevende gezien en dan nog vanaf het tweede/derde leerjaar. En rekenmethoden die sterk vakdidactisch gericht waren, zoals bijvoorbeeld *'Functioneel reke-*

nen' van Reijnders en Snijders, hebben het op de onderwijsmarkt, commercieel gezien, nooit bijzonder goed gedaan. Zij lieten het ook bepaald niet toe om het rekenonderwijs te interpreteren als een tamelijk geruisloze bezigheid van sommenmakerij. Vandaar!

Met de komst van het wiskundeonderwijs op de basisschool, zoals dat in Nederland gestalte krijgt, is het beeld van de geruisloze sommenmakerij nog verder aangetast. Maar aan de andere kant is er een sterke tendens vanuit de algemeen-onderwijskundige hoek om te differentiëren, te individualiseren, het jaarklassenverband te doorbreken, nieuwe groepeeringswijzen in te richten, welke zich nu juist weer het beste met rekenen als sommenmakerij laat verenigen – althans organisatorisch! Inhoudelijk voelt deze algemene vernieuwingsbeweging zich vaak wel weer tot de 'rijke' opvatting van rekenen/wiskunde aangetrokken ... Zichier het dilemma voor zowel onderwijsgevers, methodenschrijvers als ... uitgevers.

Het is aan het schoolteam zich ten eerste goed bewust te maken van de mogelijkheden die men heeft om het onderwijs te organiseren, en ten tweede om organisatie en inhoud zo goed mogelijk op elkaar af te stemmen. In sommige gevallen zullen daarbij concessies moeten worden gedaan. Dat wil zeggen: men zal ófwel iets prijs moeten geven van z'n algemene ideeën over groepeeringswijzen ófwel iets van z'n ideeën over reken/wiskundeonderwijs. Nood breekt wetten, weliswaar. Maar 't zou een wet moeten zijn om de conceptie over wiskundeonderwijs geen geweld aan te doen, want men treft dan het hart van het onderwijs. Evenwel: je zult maar met gekombineerde klassen zitten, dan moet je hoe dan ook soms wel eens wat prijsgeven aan het ideaal-gedachte onderwijs.

Waarvoor wij hier pleiten is, deze problematiek nuchter en eerlijk onder ogen te zien ten einde verantwoord een methode te kunnen kiezen. In onze methodenbesprekingen hebben we steeds getracht een zo duidelijk mogelijk beeld van de mogelijkheden van de inhoudelijke organisatie bij de verschillende methoden te bieden, opdat het schoolteam dit uiterst belangrijke onderdeel van meet af aan bij de overwegingen zou kunnen betrekken.

Maar dit is natuurlijk niet alles: vooral ook de inhoudelijke kenmerken van de verschillende methoden moeten diepgaand bestudeerd worden.

Aan deze aspecten zal in het volgende aandacht geschonken worden, dit als steun om methoden te analyseren en methodenbeoordelingen beter op hun essentiële punten te kunnen vatten.

geïntegreerde activiteiten in het aanvangs- onderwijs (6.4)

Bij het analyseren van methoden of het samenstellen van werkplannen zal vooral ook het aanvangsonderwijs in beschouwing genomen moeten worden – zij het dat het betreffende materiaal meestal ontoereikend is, zodat het schoolteam hier zélf relatief veel zal moeten samenstellen, met name waar het de jongste kinderen betreft.

In onze analyses en besprekingen hebben we vooral het belang van geïntegreerde activiteiten benadrukt en ons verzet tegen onderwijs waarin overwegend geïsoleerde begripsverwervende activiteiten plaatsvinden. Dat betekent dus dat we tegenstander zijn van wiskundige leerstofgerichte activiteiten in het onderwijs aan vier- tot zevenjarigen, doch handelingen in een wiskundige sfeer voorstaan die niet ontstaan zijn van andere aspecten uit de totale belevingswereld van het kind. Tevens houdt dit in, dat we geïsoleerde werkbladen waarin rekenvoorwaarden getoetst worden, grotendeels afwijzen, evenals sterk voorgestructureerde materialen waarmee nauwkeurig voorgeschreven wiskundige handelingen verricht moeten worden.

Onze stelling luidt dat wiskundeonderwijs dat op losse, geïsoleerde begripsverwerving is gericht, te vergelijken is met taalonderwijs dat slechts oog heeft op het inprenten van woorden, dus het aanleren van een vokabulaire.¹⁾ Positief geformuleerd: goed wiskundeonderwijs dient evenals goed taalonderwijs plaats te vinden in een passende en natuurlijk gestructureerde omgeving. Dat wil zeggen: het moet aansluiten bij het sterke inbeeldingsvermogen van het jonge kind, mogelijkheden bieden tot zeer gevarieerde uitvoering en in een passende kontekst geplaatst zijn – passend bij het kind en nauw gerelateerd aan de echte of voorgestelde realiteit.

Dat is mooi gezegd, maar de vraag is hoe men dit soort onderwijs moet realiseren. Laten we vooropstellen dat er geen uitgewerkt voorbeeld van dergelijk onderwijs is. Wel zijn er allerlei belangrijke aanzetten tot zo'n aanpak. We kunnen hier niet anders dan een zeer globale lijn aanbieden en wat verwijzingen naar belangrijke onderwijsbeschouwingen en -beschrijvingen geven.

Van de kant van de onderwijsgevende gezien,

zijn er drie gezichtspunten vanwaaruit de onderwijsactiviteiten beschouwd kunnen worden, namelijk:

- de spontane, niet vooropgezette thema's;
- het werken met vooropgezette thema's;
- de totaliteit van het werkplan.

Onder *spontane, niet vooropgezette handelingen* van de onderwijsgevende verstaan we die, welke voortkomen uit spontane, onvoorziene reacties van de kinderen: het kind zélf komt met een probleem aanzetten en de onderwijsgevende haakt daarop in.

Vooral in het aanvangsonderwijs doen zich tal van situaties voor, waarin terloopse onderwijsleerprocessen kunnen plaatsvinden. We geven een voorbeeld van de hand van Jeanne de Gooijer:

'de vissenkom

In de klas staat een vissenkom die van tijd tot tijd schoongemaakt moet worden. De kleuters zijn erin geïnteresseerd hoe ik dat doe. De vissen moeten gevangen worden met een schepnetje en in een andere kom worden gedaan.

... 'Nu kunnen we de vissen makkelijk tellen', meent Ankie.

Ze heeft namelijk al eens geprobeerd ze te tellen, maar het was haar niet gelukt.

... 'Juf, ze zwemmen zo kris kras door elkaar', had ze gezegd.

Eén voor één schep ik de vissen van de ene kom naar de andere. Er zijn al drie vissen geteld, maar dan vangen we drie vissen tegelijk.

... 'Juf', roept Ankie benauwd, 'nu kan ik ze wéér niet tellen.'

'Misschien kun je de vissen tekenen. Als je ze allemaal getekend hebt, kun je ze op papier tellen.'

Dat is een goed idee. Vlug haalt Ankie een blaadje met een potlood.

... 'Dan moet je even wachten, hoor!'

Ze tekent eerst de drie vissen die al in de kom zitten en dan de drie vissen die erbij komen. Zo kan Ankie de stand makkelijk bijhouden, er wordt geen vis vergeten. Als de ene kom leeg is, gaat ze de vissen tellen.

... 'Trots roept ze: 'Nu weet ik hoeveel vissen er zijn: vijftien!'

Na enkele dagen zijn er twee vissen dood gegaan.

... 'Oh, nu klopt het niet meer', zegt Ankie.

Hoeveel levende vissen er nu in de kom zitten, weet ze niet.

... 'Pak je tekening met vissen er maar bij', suggereer ik.

Ze krast twee vissen door en gaat opnieuw tellen, zodat ze het juiste antwoord weet.'

Het spreekt vanzelf dat op deze toevallige wijze soms onderwerpen aan de orde kunnen

¹⁾ Freudenthal, H.: 'Onderwijsontwikkeling voor de kleuterschool – cognitief, wiskundig' (1 en 2) in 'De wereld van het jonge kind', jrg 7 (1979), pag. 143-147, pag. 168-172.

komen die voor een hele groep kinderen aanleiding tot een onderwijsleeractiviteit geven. Er ontstaat dan op een spontane wijze een thema waarin bijvoorbeeld belangrijke wiskundige activiteiten voorkomen. We wezen er reeds op: deze door een kind of een groep kinderen aangedragen problemen vormen een uitnemende voedingsbodem voor het onderwijs, al is het niet de enige.

Een voorbeeld van zo'n 'spontaan' thema is 'Een treintje ging uit rijden'.¹⁾ De activiteiten ontstonden hier toen een kleuter kondukteursattributen meebracht die meteen de aandacht van de kinderen trokken.

De wiskundige aspecten van dit thema – let wel: slechts één onderdeel van de activiteiten – bestaan uit:

- het vaststellen van een opeenvolging van handelingen, lopend van het vertrek van huis tot het vertrek van de trein;
- het vergelijken van lengten van treinen;
- het tellen van kleine aantallen in- en uitstappers;
- het doorlopen van verschillende trajekten.

Vaak zullen *tema's vooraf gepland* zijn. De onderwijsgevende is dan degene die de thematiek aandraagt – zij het dat deze, als het goed is, direkt aansluit bij de kinderen.

Waarom doet de onderwijsgevende dit?

In het algemeen heeft zij of hij daarmee een vooropgezette bedoeling. Wat de wiskunde aangaat, kan dit inhouden: het kind in aanraking brengen met bepaalde wiskundige activiteiten als tellen, ordenen, structureren, meten, schatten en op een rij zetten.

Deze activiteiten staan echter niet op zichzelf, dat wil zeggen: ze passen in een groter geheel en hebben een vervolg.

Een voorbeeld van een stukje onderwijs, waarvan de betekenis vooral duidelijk is in een groter verband, is 'Het papieren tovenaarsfeest'.²⁾ Wiskundige ervaringen vormen een belangrijk onderdeel van dit thema, hoewel niet het enige.

We noemen er enkele:

- de grootte van het oppervlak, c.q. de oppervlakte van een krant, door middel van ervaringen als: je kunt erop liggen, met z'n drieën op zitten, met z'n achten op staan;

- de krant is zo groot dat je er zomaar doorheen kunt kruipen;
- je kunt het oppervlak vervormen, verscheuren, versnipperen, verknippen tot bijvoorbeeld een hele lange smalle strook (brug).

In het grotere verband van de leergang oppervlakte gezien, zijn deze ervaringen van belang. Met name kwesties als 'oppervlak', de relatie omtrek-oppervlakte en het vervormen, komen later meer expliciet en formeel aan de orde.

Kortom, 'Het papieren tovenaarsfeest' past in een bredere samenhang van de leergang oppervlakte en ontleent daaraan zijn belang – tenminste vanuit de onderwijsgevende gezien, want voor de kinderen hebben de activiteiten met de krant een zin in zich.

En zo zijn er meer activiteiten te noemen die vroeg aangezet kunnen worden en in een lange lijn passen: tellen, getalbegrip, oriëntatie in de tijd, ruimtelijke oriëntatie, verhoudingen en meten.

Dit brengt ons naar *het geheel van een werkplan*, waarin al deze activiteiten geplaatst zouden moeten worden.

We spraken zojuist over:

- spontane, terloopse individuele ervaringen;
- thema's die spontaan opkomen;
- geïntegreerde activiteiten met wiskundige aspecten;
- geïntegreerde activiteiten met wiskundige aspecten die duidelijk in een lijn, zeg: een leergang, passen van bepaalde onderwerpen.

Nu gaat het om het totale werkplan.

Het is duidelijk dat onderwijs waarin ruimte is voor spontane aanzetten van de kant van de kinderen en waarin geïntegreerde activiteiten plaatsvinden, moeilijk te rijmen valt met een vooropgezette strakke planning van werkzaamheden. Maar evenzeer ligt het in de rede dat onderwijsactiviteiten niet volslagen ongepland en ongestructureerd dienen te gebeuren.

Kortom, een globaal, flexibel werkplan waarin een deel gereserveerd zou kunnen worden voor wiskundige aspecten, is zeker aan te bevelen. Laten we dit onderdeel noemen 'het deelwerkplan wiskunde'.

De vraag is nu: hoe moet zo'n deelwerkplan voor, zeg: vier- tot achtjarigen, eruit zien, hoe moet het ontwikkeld worden?

Zoals gezegd, wiskobas heeft geen voorbeeld van zo'n deelwerkplan kunnen samenstellen. Wel is een serie thema's van geïntegreerd onderwijs ontwikkeld, waarin wiskundige aspecten voor vier- tot zesjarigen voorkomen. Maar deze serie vormt geen gestructureerd deelwerkplan, al kan men er heel wat bouwlementen voor zo'n werkplan in aantreffen.

Naast hetgeen in nederland ontwikkeld is,

¹⁾ Gooijer-Quint, J. de: 'Een treintje ging uit rijden', in 'Wiskobas-Bulletin', jaargang 8 nr 2.

²⁾ In: Jong, R. de (ed.): 'Oppervlakte (2)', utrecht 1978.

willen we speciaal de aandacht vestigen op het *eme*-project 'Early Mathematical Experiences'.¹⁾

De hoofddoelen van dit project van 'The Schools Council in Britain' zijn:

- 'to identify and classify young children's play experiences, and to relate these experiences to the theoretical development of early mathematical concepts'
- 'to produce guidance for teachers to help them stimulate the development of mathematical concepts with young children.'

Er zijn boekjes samengesteld over meetkunde, getallen, tijd, gezin, water en de omgeving. Tezamen met de thema's van wiskobas vormt dit *eme*-project een rijke bron voor de samenstelling van een deelwerkplan voor wiskunde. Stellen we daarbij nog de ideeën zoals die regelmatig in het tijdschrift 'Child Education'²⁾ aangedragen worden, alsmede artikelen in 'De wereld van het jonge kind', dan zijn daarmee de belangrijkste aangrijpingspunten genoemd voor de samenstellers van werkplannen voor wiskundeonderwijs aan vier- tot achtjarigen, in de zin zoals wiskobas dat voor ogen staat met 'geïntegreerde activiteiten in het aanvangsonderwijs'.

Bij het beschrijven van de wiskundige aspecten van een deelwerkplan ten aanzien van de geïntegreerde activiteiten van vier- tot achtjarigen en daarbij speciaal ook van vier- tot zesjarigen, zou men kunnen volstaan met een verwijzing naar een of andere beschreven activiteit of een aanduidende beschrijving ervan, met daarbij gesteld een indicatie van de wiskundige aspecten zoals wij die hiervoor gaven, bijvoorbeeld 'vergelijken van lengten', 'tellen van kleine aantallen', 'omvormen van oppervlakken', etc.

Het totaal van deze indicaties geeft dan een globale indruk van de wiskundige aspecten die in de geïntegreerde activiteiten voorkomen op grond waarvan men, na analyse, eventueel kan vaststellen aan welke onderdelen men nog wat meer aandacht zou kunnen besteden, wat veranderd moet worden, etc. Vooral ook de verhouding tussen 'spontane' activiteiten (die achteraf kort aangeduid kunnen worden) en 'geplande' werkzaamheden, kan in zo'n deelwerkplan kort aangegeven

worden, alsook de 'kleur' en de sfeer van het onderwijs en de instelling ten opzichte van het onderwijs. Voor het wiskundeonderwijs zal er vooral ook in tot uitdrukking moeten komen, als het goed is, op welke wijze men attent is, of kan zijn op de wiskundige aspecten van de kinderlijke uitingen en speel/leeractiviteiten en hoe men daarin de aangrijpingspunten zoekt voor het onderwijs.

Samenvattend en uitbreidend bevelen we voor het aanvangsonderwijs aan, ruimte te laten voor spontane, individuele en groepsactiviteiten van een geïntegreerd karakter met daarbinnen ook wiskundige aspecten.

Daarnaast bepleiten we onderwijs met geplande, geïntegreerde activiteiten die wiskundige aspecten bevatten, welke in de lange lijn passen van onderwijs in een leergang. De aspecten zouden van veelzijdige aard moeten zijn, dus niet beperkt tot het getalaspect, maar ook meetkundige oriëntatie, meten, verhoudingen, tijd, e.d., dienen te omvatten, oftewel wereldoriënterend van karakter moeten zijn. En tenslotte zouden we willen waarschuwen voor geïsoleerde begripsverwervende activiteiten die een enorme vershraling van het onderwijs bewerkstelligen, en daartegenover het betekenisvolle geïntegreerde onderwijs plaatsen dat aansluit bij de wereld van het jonge kind.

Wat de beschrijving van dergelijk onderwijs aangaat, hebben we ons voorstander getoond van korte verwijzingen naar methoden, beschrijvingen, etc., of indicaties van activiteiten met een aanduiding in trefwoorden van de wiskundige aspecten daarin, alsook van aanduidingen achteraf op welke wijze men ingehaakt is op de wiskundige aspecten van kinderlijke uitingen en activiteiten.

Als bronnen voor ideeën werden aangegeven:

- artikelen van Jeanne de Gooijer en Jan van den Brink in het 'Wiskobas-Bulletin' en in de leerplanpublicaties van het *iowo*;
- het *eme*-project van Matthews (ed.);
- de tijdschriften 'Child Education' en 'De wereld van het jonge kind';
- bekende boeken op dit terrein die men in de genoemde literatuur en de bijbehorende literatuurverwijzingen kan aantreffen.

Tot slot merken we op dat men uit het voorgaande tal van belangrijke criteria voor de beoordeling van methoden, plannen, e.d., kan afleiden - criteria die de samenstellers van de voorgaande methodenbeschrijvingen, zij het veelal impliciet, ook gebruikt hebben voor met name het aanvangsonderwijs.

We noemen:

- het 'negatieve' criterium: pas op voor geïsoleerde begripsverwervende activiteiten;

¹⁾ Matthews (ed.), Addison-Wesley, London.

²⁾ Evans, London.

- het ‘positieve’ criterium: wees attent op wiskundige aspecten in geïntegreerde activiteiten die min of meer spontaan door de kinderen aangedragen worden;
- het feit of activiteiten in een lange lijn en in een groter geheel passen;
- de breedte en de inhoudelijke rijkdom van de wiskundige aspecten: naast het tellen en het getalsaspect ook de meetkundige oriëntatie, het meten, verhoudingen, relaties, ordenen, oriëntatie in de tijd, kortweg: de wiskundige wereldoriëntatie;
- de ruimte voor het zoeken van spontane aangrijpingspunten, het attenderen daarop;
- en tenslotte: de betekenisvolle kontekst waarin het onderwijs plaatsvindt – betekenisvol voor de kinderen wel te verstaan.

Dit laatste punt brengt ons bij het tweede kernpunt van het wiskundeonderwijs, zoals ons dat voor ogen staat. Of beter: het punt waarvan we in de loop van de jaren het grote belang ervaren hebben voor het leren van de kinderen.

belang van konteksten (6.5)

Konteksten zijn belangrijk, zowel voor de begripsvorming als voor het maken van toepassingen – vanuit deze twee functies dient het nu volgende begrepen te worden.

Wat is een kontekst?

Laten we eerst duidelijk maken wat ‘kontekstloos’ of ‘een zwakke kontekst hebbend’ is.

Kontekstloze sommen zijn ‘kale’ sommen, dat wil zeggen: opgaven die in klare rekentaal zijn gesteld, zoals: $5 \times 7 = \dots$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \dots$, etc.

We zouden ze ook opgaven in een wiskundige kontekst kunnen noemen, maar voor de duidelijkheid en korthed spreken we van ‘kontekstloos’.

Kontekstopgaven zijn daarentegen niet in ‘kale’ reken/wiskundetaal gesteld, maar ‘aangekleed’. We bedoelen met kontekstopgaven echter meer dan de geduchte tekststopgaven of redaktiesommen. Bij deze opgaven is de kontekst – dus daar waar de tekst naar verwijst – immers vaak zeer zwak en irrelevant.

Enkele voorbeelden:

- zes potjes jam à f 1,75; hoeveel kosten die samen?
- zeven potloden à 40 cent; hoeveel kosten die samen?
- film; Anita koopt zeven kaartjes à 50 cent; zij betaalt ... cent.

Wat is hier de kontekst? De winkel, de film?

In feite zijn deze verwijzingen niet van belang. Er worden namelijk open termen gebruikt die eenvoudig door andere vervangen kunnen worden, zonder dat daarmee de aard van de opgaven wezenlijk verandert. Dus: zo men al van konteksten zou willen spreken, zijn ze toch wel zeer zwak en diffuus.

Kortom, niet iedere tekststopgave kan zonder meer als een kontekstprobleem aangemerkt worden. Voorwaarde daarvoor is in eerste instantie, dat die tekst betrekking heeft op een ‘passende’ reële problematiek, waarin de kontekst een wezenlijke betekenis heeft en niet zomaar een vernisje is voor een reken-sommetje.

Hiermee zijn de genoemde tekststopgaven niet gediskwalificeerd. Wel wijzen we op de ontstellende betekenisarmoede van het reken/wiskundeonderwijs dat uitsluitend uit cijfersommen en dit soort opgaven bestaat: de sommen zijn gekunsteld, de problemen zitten vaak in de lastige tekst, de opgaven hangen veelal als los zand aan elkaar en worden door de kinderen als weinig zinvol ervaren.

Kontekstopgaven daarentegen zijn in een bepaalde samenhang, in een gestructureerd geheel geplaatst, waaraan ze hun betekenis ontleenen. Dit grotere geheel, de algemene kontekst dus, verleent eenheid aan de wiskundige activiteit en kan de volgende vormen bezitten:

- een centrale wiskundige probleemstelling (een rijk probleem);
- een belangstellingskern (een thema);
- een plaats waar de wiskundige handelingen gesitueerd kunnen worden (een lokatie);
- een verhaal met wiskundige aspecten en probleemstellingen (een historie);
- een niet specifiek wiskundig thema, maar één voor geïntegreerde activiteiten (een projekt);
- of combinaties hiervan.

Zoals uit de beschrijvingen van de methodenanalyses blijkt, hebben verscheidene moderne reken/wiskundemethoden dergelijke konteksten. Ook wiskobas maakt er veelvuldig gebruik van. We noemen enkele voorbeelden uit leerplanpublicatie 2: ‘Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool’¹⁾:

- ‘Waterland’ (een lokatie, pag. 26 e.v.);
- ‘Ralph de zeerover’ (een historie, pag. 247 e.v.);
- ‘Telefoneren’ (een thema, ook als projekt te realiseren, pag. 157 e.v.);
- ‘Duimeliesje’ (een rijk probleem, pag. 52 e.v.).

Deze formele onderscheiding van konteksten kan aangevuld worden met een meer inhoudelijke

¹⁾ Utrecht 1975.

lijke bepaling. De inhoud van konteksten is namelijk altijd, als het goed is, betrokken op de ervarings- en belevingswereld van het kind — zeg: de realiteit. Bij het thema 'Telefoneren' is dit de alledaagse werkelijkheid en bij 'Ralph' de fantasiewerkelijkheid, die echter weer allerlei verbindingen met de 'gewone' realiteit heeft. Kort gezegd, kontekstproblemen zijn dus problemen die nauw verbonden zijn met de realiteit.

Vanuit deze vaststelling wordt het belang van konteksten direkt zichtbaar: ze verschaffen ons toegang tot de realiteit en via de realiteit tot de wiskunde. Omgekeerd leggen ze de realiteit als toepassingsgebied van de wiskunde bloot.

Dit zijn dus de twee hoofdfuncties van konteksten waarover we in het begin van dit onderdeel spraken: begripsvormend en toepassend. Konteksten vormen aldus de kern van realistisch wiskundeonderwijs.

Toch is bij het ontwerpen van konteksten een waarschuwend opmerking op haar plaats — ja, juist bij konteksten. Want als kontekstopgaven onwerkkelijk, opgeplakt, geforceerd en gekunsteld zijn, tasten ze de kern aan van het wiskundeonderwijs.

Men dient bij het scheppen of aandragen of benutten van konteksten dan ook nauwgezet na te gaan of aan bepaalde voorwaarden voldaan is.

Sluiten ze op natuurlijke wijze aan bij het kind?

Worden de kinderen erdoor gemotiveerd?

Hebben ze een duidelijke functie bij de begripsvorming?

Vloeien de opgeroepen problemen op een natuurlijke wijze uit de kontekst voort?

Is de kontekst voor alle leerlingen even bekend?

Biedt de kontekst goede steunpunten voor het geheugen?

Biedt ze mogelijkheden tot reflectie, bewustwording, het zich realiseren van de eigen wiskundige handelingen (hechte oriënteringsbasis)?

Is de lengte van de kontekst op maat, dat wil zeggen: worden de kinderen niet te lang in de kontekst geplaatst?

Met name moet vermeden worden, een kontekst als gevelverfraaiing van een wiskundige

problematiek te laten fungeren, om als het ware de bittere pil van de wiskundige problematiek te vergulden.

Kortom, gewaakt moet worden voor het scheppen van kitsch-konteksten die louter als uiterlijke versierselen dienen en in wezen niet toegesneden zijn op de wiskundige problematiek in relatie tot de wereld van het kind.

De vraag is echter hoe je kunt weten of konteksten geëigend zijn?

Wel, het antwoord daarop kan in laatste instantie alleen maar uit de reacties van de kinderen zélf afgeleid worden.

Zijn ze gemotiveerd, ervaren ze de kontekstproblematiek als echt, stappen ze in de probleemsituatie?

In eerste instantie moeten we als onderwijsgevenden natuurlijk wel in algemene zin vaststellen of de wiskundige activiteit die in de opgave vervat ligt, overeenkomt met hetgeen bedoeld wordt. Maar, als gezegd, binnen dit raam blijkt de geëigendheid van de kontekst pas uit het gedrag van de kinderen zélf. Vaak valt daarover op voorhand wel heel wat te voorspellen, met name als het gaat om aktuele konteksten, die zich min of meer spontaan opdringen omdat de kinderen er zelf mee komen aandragen.

Gechargeerd gesteld, konteksten hebben een brugfunctie tussen de formele wiskunde en de realiteit waarop die wiskunde van toepassing is, of zo men wil, de werkelijkheid waaraan de wiskunde onttrokken is.

De laatste jaren is het eminente belang van een dergelijke brug van vele kanten beklemtoond.

Margaret Donaldson gebruikt voor de scheiding tussen het betekenisvolle kontekstgebonden leren en het formele kontekstloze leren de term 'apartheid'. Zij stelt dat het leren op school vaak 'apart' is, dus losgemaakt van de realiteit van het kind en dat het 'disembedded thinking' bevordert.

En ze voegt eraan toe:

'The attempt to become skilled in the disembedded modes of intellectual activity is for most of us defeating ...'¹⁾

Ook Donaldson houdt in haar belangrijke boek een pleidooi om uit te gaan van betekenisvolle konteksten, omdat deze de basis leggen voor begripsvorming, motiverend werken, zin verlenen aan het handelen en de verbinding leggen tussen wiskunde en realiteit, i.c. de wereld van het kind.

Het huidige reken/wiskundeonderwijs is betrekkelijk kontekstloos. De gevolgen van dit gegeven zijn kortelings vastgesteld in een

¹⁾ Donaldson, M.: 'Children's Minds', Fontana book, London 1978, pag. 85.

grootscheeps onderzoek waaraan 10.000 engelse kinderen hebben deelgenomen, uitgevoerd door het *csms*-project (concepts in secondary mathematics and science programme). Van dit onderzoek zal eind 1980 een uitgebreid verslag gepubliceerd worden.¹⁾ De resultaten bevestigen de scheiding tussen het kontekstloze rekenen en wiskunde bedrijven enerzijds en anderzijds het toepassen van de wiskunde op realistische problemen. Het is alsof er twee soorten wiskunde zijn voor het kind waartussen geen verbinding bestaat. Welnu, dit is het gevolg van kontekstloos onderwijs dat, na het aanvankelijk reken/wiskundeonderwijs in de onderbouw, veelvuldig plaatsvindt. Met name het onderwijs in verhoudingen kan model staan voor formeel, kontekstloos en betekenisarm onderwijs – waarover direkt meer.

Voor het kiezen van een methode en voor het samenstellen van een werkplan dient de plaats van de konteksten nauwlettend nagegaan te worden. En wel vanwege het feit dat deze konteksten als het ware de uitgangspunten en basisopvattingen van het onderwijs weerspiegelen, alsook de algemene sfeer waarbinnen het onderwijs plaatsvindt. Vooral ook dient nagegaan te worden of konteksten als vernis, als leuke opstapjes, als ornamenten dienst doen, of juist de belangrijke brugfunctie van verbinding tussen de wiskunde als systeem en de realiteit als toepassingsgebied van de wiskunde vervullen.

In de voorgaande methodenanalyses kwam veelvuldig de kwestie van de konteksten als belangrijk punt van bespreking naar voren.

Samen met de eerder besproken kwesties van:

- de inhoudelijke organisatie;
- en geïntegreerde activiteiten;

bepalen konteksten het gezicht van het reken/wiskundeonderwijs.

Het is om die reden dat we aan deze drie punten betrekkelijk uitgebreid aandacht hebben geschonken.

veelzijdige benadering van begrippen, operaties, relaties (6.6)

In het reken/wiskundeonderwijs zijn steeds tendenzen geweest om één aspect van een begrip, operatie, relatie, ordeningsmiddel, te benadrukken, ja zelfs te verabsoluteren. Dit

nu is aantoonbaar verkeerd: in het onderwijs dienen alle reële verschijningsvormen van een wiskundig begrip, een mathematische operatie, etc., tot uitdrukking te komen. Er mag dus wiskundig-didaktisch gezien geen leemte in zitten.

Waarom niet? Wat is in dit verband als leemte aan te merken?

We nemen als voorbeeld *het getalbegrip*. Wat betekent hier dat alle wezenlijke elementen van het betreffende fenomeen in het onderwijs betrokken moeten worden?

Dit houdt in dat vanaf het begin aandacht geschonken wordt aan alle aspecten van het getal, te weten:

- kardinaalgetal (aantal);
- ordinaalgetal (telgetal);
- meetgetal;
- rekengetal;
- naamgetal.

Dat het hiervoor gestelde niet altijd onderschreven wordt, blijkt bijvoorbeeld uit de aanpak van een aantal rekenmethoden, en vooral ook uit de 'New Math'-wiskundemethoden voor de basisschool, waarin het kardinaalgetal aanvankelijk vrijwel uitsluitend de aandacht krijgt.

Waarom is de genoemde veelzijdige benadering noodzakelijk? Het is toch juist kenmerkend voor een wiskundig begrip dat alle aspecten onder één noemer te plaatsen zijn en aldus 'gelijknamig' gemaakt kunnen worden? Als we de kinderen nu maar tot dit formele begrip kunnen leiden en hen ertoe brengen dat zij met dit begrip (formeel) kunnen werken, dan doet het er toch niet toe op welke wijze men toegang tot dit unificerende begrip heeft gekregen?

We hebben zojuist bij de beschouwing over konteksten en naar aanleiding van het werk van Donaldson en de uitkomsten van het *csms*-onderzoek gekonstateerd, dat formeel leren kan leiden tot 'onthecht' (disembedded) denken, waardoor de toepasbaarheid van het geleerde sterk ingeperkt wordt en de begripvorming in feite tekort schiet.

Laten we dit eens toelichten aan het onderwerp *breuken*.

Breuken worden van oudsher geïntroduceerd via 'deel van' en uitgebeeld door middel van de pannekoekverdeling. In de meeste methoden wordt snel doorgestoten naar het opereren met breuken, waarbij nauwgezet voor een trapsgewijze opklimming in moeilijkheidsgraad gezorgd wordt. We hebben hier met een sprekend voorbeeld van een éézijdige benadering van het breukbegrip te doen, leidend naar een snelle formalisering van de bewerkingen. En wat is het resultaat? Zowel nationaal als

¹⁾ Hart, K.M. (ed.): 'Children's Understanding of Mathematics 11 to 16', london 1980.

internationaal wordt steeds weer vastgesteld dat de opbrengst van het breukenonderwijs, gezien de geïnvesteerde tijd, ronduit bedroevend is: het overgrote deel van de kinderen beheerst de basisbewerkingen aan het einde van de basisschool niet, terwijl het zo mogelijk nog slechter gesteld is met het kunnen maken van toepassingen. We kunnen deze uitkomst ook anders verwoorden, door namelijk te zeggen dat de kinderen onvoldoende begrip van breuken hebben.

Hoe kan het anders en beter?

Het antwoord op deze vraag kan in grote lijnen uit het zojuist gegeven voorbeeld over het getalbegrip afgelezen worden. In vele gevallen vindt in het aanvankelijk rekenonderwijs een veelzijdige vorming van het getalbegrip plaats, dat wil zeggen: alle aspecten van het getal krijgen aandacht. We kunnen dit nog op verschillende andere wijzen uitdrukken: de verschillende vormen waarin het getal zich in de realiteit manifesteert en die in het getal op één naam gezet worden, krijgen de aandacht; via een verscheidenheid van activiteiten worden de verschillende aspecten van het getal als ordeningsmiddel ontdekt; er worden als het ware verscheidene ordeningsmiddelen uitgelokt. Deze benaderingswijze kiest als startpunt voor de begripsvorming een concreet aangrijpingspunt in de ervarings- en belevingswereld van het kind, c.q. de realiteit. Het wiskundig begrip wordt zodoende onttrokken aan de realiteit waarop het betrekking heeft en waarvoor het als ordeningsmiddel kan dienen. Aldus wordt het formele begrip vanaf de aanvang georiënteerd op de werkelijkheid, wat zowel voor de brede begripsvorming als de toepasbaarheid van wezenlijk belang is.

In het geval van de breuken betekent dit dat alle belangrijke 'breukverwekkende' fenomenen aan de orde komen in het onderwijs, zoals:

- het breken;
- het delen;
- het (eerlijk) verdelen;
- meten;
- verhoudingen;
- kans.

Dit houdt ook in dat een onthechting van die reële inbeddingen niet te snel plaatsvindt door een vroegtijdige formalisering en het snel cijferend rekenen met breuken.

Dit is kort en in tamelijk algemene termen gesteld – en voor vele lezers tamelijk 'onthecht' van de realiteit van het onderwijs – wat met 'een veelzijdige benadering van begrippen' bedoeld wordt.

Voor *operaties* geldt iets vergelijkbaars. Wiskundig gezien zijn de bewerkingen optellen,

aftrekken, vermenigvuldigen en delen éénduidig bepaald. Bijgevolg is ook een éenzijdige concrete toegang tot die operaties mogelijk. Optellen is dan 'erbij', aftrekken 'eraf', vermenigvuldigen 'zoveel keer', en delen 'gedeeld door'. In de realiteit van de toepassingen zijn deze operaties voor de lerende niet zo eenvoudig onder één noemer te plaatsen.

Optellen is inderdaad 'erbij', alleen kan dat 'erbij' – gezien de verschillende getalaspecten – zich op verschillende wijzen concreet vertonen. We noemen: samenvoegen (kardinaalgetal), zoveel meer of verder in de geordende rij (ordinaalgetal), achter elkaar stellen (meetaspect), 'plus' of 'de som van' (rekengetal), 'en' als verbinding (naamgetal).

Aftrekken manifesteert zich als: eraf halen, afhaken van lengten, zoveel minder dan, 'min', het verschil tussen twee getallen, of via de vraagstelling 'hoeveel is deze meer dan die?'

Vermenigvuldigen kent reële inbeddingen van herhaald optellen, herhaald 'springen', kruisen, 'rechthoeken', combineren, vergroten, schaal en verhoudingen.

Delen kan zich in al deze situaties als de inverse van vermenigvuldigen vertonen. Ook kan het zich direct als deling aandienen via het eerlijk verdelen en het verdelen in groepen door middel van de vragen 'hoeveel krijgt ieder?' en 'hoeveel groepjes kunnen samengesteld worden?' (verhoudingsdeling en verdeelingsdeling).

Veelzijdige benadering van bewerkingen is noodzakelijk om een goed inzicht te verwerven. Want juist door die veelzijdigheid van de verschijningsvormen in de realiteit kunnen de betreffende operaties volledig doorzien en toegepast worden. Zoals gezegd, het is noodzakelijk dat de realiteit waarop de operaties betrokken kunnen worden, als bron voor die operaties en als toepassingsgebied funktioneert.

Nu zou men zich kunnen afvragen of de veelzijdige benadering niet tot verwarring leidt. Dit zou inderdaad het geval zijn als in een kort tijdsbestek alle aspecten aan de orde gesteld zouden worden. Maar dit is niet de bedoeling. Veelzijdige benadering betekent vooral dat in een langlopende leerlijn, dus in een vertikaal gepland leerproces, alle mogelijke fundamentele aspecten aan de orde komen.

Zo kunnen verhoudingen aanvankelijk sterk meetkundig en metend in het onderwijs betrokken worden. Daarna wordt in dit gebied globaal getalsmatig, dus kwalitatief, aan verhoudingen gewerkt. En pas op langere duur verschijnt het kwantitatieve aspect, dat via

de zogenaamde verhoudingstabel steeds meer verfijnd kan worden. In dit verband betekent veelzijdig dat, voorafgaand aan en naast het kwantitatieve element, ook meetkundig-kwalitatieve aspecten onderzocht worden.

Over breuken kan iets vergelijkbaars gezegd worden. Breuken kunnen op informele wijze in het onderwijs betrokken worden, en wel overal daar waar breukverwekkende processen plaatsvinden, dus bij eerlijk verdelen, meten, verhoudingen en kans. Een en ander kan reeds in de onderbouw plaatsvinden. Geleidelijk aan wordt de breuk dan benut als beschrijvingsmiddel van het resultaat van dit breken, delen, meten en rekenen. En vervolgens worden vanuit deze realistische en informele toegangen de operaties met breuken verricht. Of beter: vanaf het begin wordt met eenvoudige breuken geopereerd, maar dan wel formeel en zeker niet roetinematig.

Bij een dergelijke opzet kan naar onze ervaring geen sprake zijn van het stichten van verwarring, omdat het begrip breuk aanvankelijk sterk gehecht blijft aan de realiteit. Men kan pas met recht van verwarring spreken – we zeiden het al – als vanuit één spoor snel toegewerkt wordt naar een formele benadering. Al moet gezegd worden dat deze verwarring dan niet dirékt aan het licht treedt. Integendeel, het lijkt alsof door de éénsporige benadering juist verwarring vermeden wordt. Maar dit is slechts schijn. Later blijkt dat de kinderen bij het minste geringste in verwarring gebracht worden, omdat ze allerlei reële verschijningsvormen van het begrip breuk in het geheel niet of niet goed genoeg hebben leren onderkennen.

Kortom, men dient bij veelzijdigheid te denken aan onderwijs dat in een lange lijn past, gehecht is aan de realiteit, niet-formeel van opzet is, niet aanstuurt op snel cijfermatig en roetinematig rekenen, en dat alle wezenlijke aspecten van het begrip bevat.

Duidelijk zal zijn dat een dergelijke veelzijdige aanpak van de begripsvorming niet eenvoudig te realiseren is. Maar onmogelijk is het niet, blijkens de opzet van het rekenen dat traditioneel (in de goede zin) al volgens deze principes is uitgezet. Ook voor de genoemde moeilijke onderwerpen als verhoudingen en breuken zijn hier en daar in de nieuwste methoden aanzetten tot een veelzijdige benaderingswijze. Toch zien we in vele methoden ook nog schrale, éézijdig opgezette leergangen, waarin snel aangestuurd wordt op formeel rekenen. In de methodenanalyses kan men daaromtrent tal van indicaties terugvinden. Hoe het zij, het is bij het kiezen en samenstel-

len van methoden en werkplannen zaak om nauwlettend de verschillende leergangen op hun veelzijdigheid te analyseren en na te gaan of de leerstof niet te eenzijdig wiskundig-logisch is ingedeeld en te weinig aangepast aan de kinderen.

Het gaat daarbij vooral om leergangen als:

- het getalbegrip, het opereren met getallen;
- het breukbegrip, het opereren met breuken;
- kommagetallen;
- verhoudingen en procenten;
- kans;
- maatontwikkeling.

Overigens moet gezegd worden dat een veelzijdige benadering pas zeer recent bij al deze onderwerpen – uitgezonderd het getalbegrip – gezocht wordt. En dan nog slechts hier en daar. De truukmatige rekenkundige benadering en de éézijdige wiskundige aanpak blijven, ondanks de voortdurende slechte resultaten, hun supporters houden.

Naar onze mening verdient het aanbeveling om in de toekomst een minder 'logische' en meer didactische benadering voor het onderwijs in breuken e.d. te kiezen, wat naar onze overtuiging wil zeggen: een meer veelzijdige aanpak – in de methodenanalyses klinkt dit standpunt duidelijk door.

gebruik van diverse modellen (6.7)

Opvallend in de wat oudere rekenboeken is het vrijwel volledig ontbreken van modellen als getallenlijn, honderdveld, abakus, tabellen, stroken, grafieken, e.d.

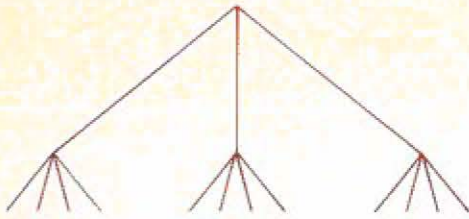
Met name in *'Bouman en Van Zelm'* is dit gemis duidelijk waar te nemen. Het ging in die methode om rekenkundige denkbaarheden – zoals de ondertitel zegt. Blijkbaar werden denkbaarheden opgevat als iets innerlijks, 'mentaal', logisch, wat zich moeilijk verdraagt met het werken met handzame en visuele modellen en schema's.

Ook de leerboeken uit de jaren veertig en vijftig zijn arm aan modellen, al bleek men er in het aanvankelijk rekenonderwijs wat meer aandacht aan te schenken.

Pas met het verschijnen van *'Functioneel rekenen'* van Reijnders en Snijders kwam er een duidelijke kentering. De denkpsychologische invloeden op deze methode kwamen onder meer tot uitdrukking in veelvuldig modelgebruik. Het leren van oplossingsmethoden stimuleerde dit gebruik: men kende blijkbaar aan modellen 'oplossingswaarde' toe.

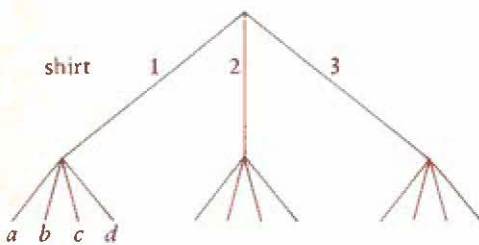
We willen deze waarde en andere mogelijke functies van modellen nu kort nagaan aan de hand van het onderwerp vermenigvuldigen.

Beschouw het volgende probleem:



► Hoeveel takjes zitten er aan deze 'boom'?

We hebben hier te doen met een visueel gestelde opgave over een zogenoemd boomdiagram waarin de vermenigvuldiging '3 x 4' op een specifieke wijze is uitgebeeld. Dit plaatje kan echter ook als hulpmiddel gebruikt worden om een probleem te helpen oplossen, en zodoende als model fungeren. Zo kunnen we de opgave: 'iemand heeft drie verschillende T-shirts en vier verschillende spijkerbroeken, op hoeveel verschillende manieren kan hij zich kleden?', als volgt met het zojuist geschetste boomdiagram uitbeelden:



Merk op dat in deze boom 'gedachtendingen' worden weergegeven – namelijk broek-shirt-kombinaties – en niet slechts concrete kledingstukken: er is maar één broek *a*, toch is hij in dit schema drie keer gepresenteerd. Het plaatje beeldt dus de abstracte gedachtenstructuur uit en daarom noemen we het een denkmodel, dit is een model dat als hulpmiddel dienst kan doen bij het denken, c.q. oplossen van problemen. In dit geval een middel om problemen met een vermenigvuldigingskarakter te helpen oplossen. Naast de denkfunctie of zoekfunctie kunnen modellen echter ook nog andere functies vervullen, namelijk als steun bij bijvoorbeeld:

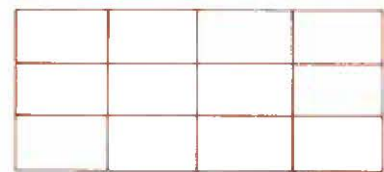
- het uitrekenen;
- het opsporen van eigenschappen;
- het aanleren van het cijferen;
- en nog meer.

Een bekend model voor het uitrekenen van relatief eenvoudige opgaven is bijvoorbeeld de getallenlijn.

De vermenigvuldiging '3 x 4' kan men via 'sprongen' uitrekenen:



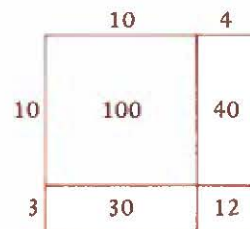
Maar in deze afbeelding is niet direct zichtbaar te maken dat $3 \times 4 = 4 \times 3$. Daartoe is een rechthoek beter bruikbaar:



3×4 (kijkend naar rijen)
 4×3 (kijkend naar kolommen) } of draaien

Of voor een ingewikkelde eigenschap als:

$$(10 + 3)(10 + 4) = 10 \times 10 + 10 \times 4 + 3 \times 10 + 3 \times 4:$$



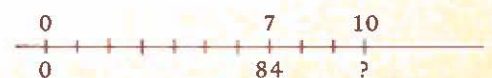
$$13 \times 14 = 100 + 40 + 30 + 12.$$

Bij het laatste geval kan men zich indenken dat zo'n rechthoeksmodel gebruikt kan worden voor het leren cijferen.

En bij een verhoudingsopgave als:

► Zeven potloden kosten 84 cent, hoeveel kosten tien potloden?,

kan een tweezijdige getallenlijn meerdere functies tegelijk vervullen:



Het model biedt steun bij het zoeken van de oplossing, maar ook bij het uitrekenen. Bijvoorbeeld de 'eeuwige' verwarring of het nu $\frac{7}{10} \times 84$ of $\frac{10}{7} \times 84$ moet zijn, is hier vrijwel uitgesloten: door het plaatje realiseert het kind zich beter welke bewerkingen achtereenvolgens uitgevoerd moeten worden.

Kortom, modellen kunnen gebruikt worden in alle fasen en bij alle facetten van het onderwijs, namelijk bij de begripsvorming, het oefenen en het toepassen, en ze kunnen meerdere functies vervullen.

Er zijn ook informele modellen. De meest bekende en meest handzame is wel die van de vingers: in het aanvangsonderwijs gebruiken kinderen vaak de vingers bij het rekenen. Soms zelfs zo langdurig dat ze op de vingers getikt worden.

Hiermee is tevens het gevaar van het star gebruik van een model aangeduid: de kinderen kunnen er dan niet meer buiten, ze kunnen de handeling niet 'verinnerlijken'. Op zich is dit nog geen pleidooi voor een veelvuldig gebruik van een variatie aan modellen, maar het pleit wel tegen een te star eenzijdig gebruik ervan.

Een gevarieerd aanbod van modellen is naar onze mening zeer wenselijk, omdat ze tezamen een brede toepasbaarheid herbergen.

We moeten het bij deze summiere beschouwing laten. Er zou nog veel te zeggen zijn over soorten, over subtiele gebruiksmogelijkheden, over al dan niet passend gebruik, over de samenhang tussen modellen, en zo meer.

In de methodenanalyses zijn we vaak uitvoerig op het modelgebruik ingegaan: denk bijvoorbeeld aan de beschouwing over inwisselmateriaal, abakus en positiekaarten naar aanleiding van de bespreking van 'Getal in beeld'.

Het is in ieder geval aan te bevelen om bij het analyseren van methoden en het samenstellen van werkplannen de belangrijke steunfunctie van modellen in het oog te houden. Deze functie komt wellicht het meest scherp tot uitdrukking bij het aanvankelijk rekenen, verhoudingen, breuken, procenten en kansrekening.

Ziehier de vier belangrijkste inhoudelijke kernpunten, te weten:

- geïntegreerde activiteiten;
- het gebruik van konteksten;
- veelzijdige benadering van begrippen, e.d.;
- het gebruik van modellen.

In het volgende zullen we er nog enkele aan toevoegen, waarover we echter wat korter zullen zijn, omdat:

- deze wat technischer van aard zijn en
- ze reeds vaker (o.m. in vorige leerplanpublicaties) aan de orde zijn geweest.

het leren cijferen (6.8)

In deze paragraaf kunnen we beknopt zijn, omdat de problematiek van het leren cijferen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met natuurlijke getallen) in haar uitgebreidheid aan de orde is gesteld in de leerplanpublicaties 6 en 10.¹⁾

Voorts verwijzen we naar het in (6.7) gegeven voorbeeld van het vermenigvuldigingsbegrip, dat zowel herhaald optellen, herhaald springen, kruisen, 'rechthoeken', combineren, vergroten, schaal en verhoudingen, in zich sluit. Verschillende situaties worden daarbij genoemd die alle het vermenigvuldigen betreffen.

Men zal, bij een veelzijdige benadering van de operaties, ook de *samenhang tussen deze operaties* niet uit het oog mogen verliezen. Optellen en aftrekken zijn elkaars omgekeerde bewerkingen. Soms trekt men af door middel van doortellen (dus eigenlijk optellen). Vermenigvuldigen is in feite herhaald optellen, terwijl het bekende delingsalgoritme neerkomt op herhaald aftrekken.

Vooraf bij het rekenen met verhoudingen komt de samenhang tussen de verschillende bewerkingen duidelijk naar voren.

We demonstreren dit aan het volgende vraagstukje:

In de verenigde staten worden afstanden nog steeds in mijlen aangegeven.

- Hoeveel mijlen komen overeen met 300 km, als we weten dat 1 mijl gelijk is aan 1,6 km?

In de volgende verhoudingstabel hanteren we uitsluitend vermenigvuldigingen, verdubbelingen, halveringen (optellingen) en aftrekkingen:

km	1,6	16	80	320	20	300
mijlen	1	10	50	200	12,5	187,5

Vergelijk deze aanpak met de, tot mechanisch werken aanleiding gevende, opdracht:

- Deel 300 door 1,6.

¹⁾ Jong, R. de (ed.): 'De abakus. Een belangrijk leermiddel voor het wiskundeonderwijs op de basisschool', iowo, utrecht 1977.

Treffers, A. (ed.): 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden', iowo, utrecht 1979.

Nogmaals: bij begripsverwervende activiteiten is een veelzijdige benadering noodzakelijk.

Om echter een vak efficiënt te kunnen uitoefenen, zal men over bepaalde vaardigheden dienen te beschikken. Het is dus zeker nodig (tenzij men beschikt over elektronische rekenapparatuur) de cijferalgoritmen goed te beheersen. En, omdat het cijferen een vrij technische aangelegenheid is, lijkt het ons aanbevelenswaardig, het *leren cijferen volgens één spoor* te doen verlopen.

Dit lijkt enigszins paradoxaal na hetgeen hiervoor beweerd is. Daarom stellen we nog eens duidelijk:

- begripsverwervende activiteiten met betrekking tot de operaties: veelzijdig aanpakken;
- het leren cijferen (algoritmiseren): aanpak volgens één spoor.

Gesteld kan worden, dat het uitgangspunt van de éénsporige aanpak bij het leren cijferen algemeen aanvaard is binnen de rekendidactiek. In de uitvoering is echter een grote diversiteit te signaleren.

Zoals bekend zal zijn, staan wij het principe van de *progressieve schematisering* voor, zowel voor het optellen en aftrekken als voor het vermenigvuldigen en delen. In deze aanpak ontwikkelen de leerlingen zélf, in eigen tempo en op eigen nivo, steeds schematische cijfermethoden. Konkreet en inzichtelijk wordt gestart, waarna in toenemende mate schematiseringen en verkortingen optreden, meestal eindigend met de normale cijferalgoritmen.

Deze aanpak volgens de progressieve schematisering is in leerboeken moeilijk te realiseren, omdat juist de didactische kwaliteit van de onderwijsgevende het proces als het ware moet bewaken. Per kind moet immers gediagnostiseerd en gestimuleerd worden. Deze hoge eis blijkt in de praktijk mee te vallen, vooral omdat de verschillende stadia vaak zeer snel doorlopen worden. Ook al is een en ander niet makkelijk in rekenboekjes neer te leggen, toch hebben we in sommige nieuwere leerboeken 'aanzetten' gesignaleerd. Dit gebeurt dan veelal via de handleidingen.

Het principe van de progressieve schematisering staat haaks op het (zeer bekende) principe van de progressieve complicering. In deze aanpak verloopt het leren cijferen volgens de stap-voor-stap-methode: van hele makkelijke via moeilijker tot de moeilijkste sommetjes. De verschillende moeilijkheidsgevallen zijn hierin onderscheiden, terwijl een sterke nadruk wordt gelegd op het produkt van het algoritmiseren en op een snelle en efficiënte uitvoering van het cijferen. Ook deze methode is éénsporig, maar niet inzichtelijk.

Kortom, leer het cijferen aan volgens de prin-

cipes van de progressieve schematisering en van de eensporigheid.

Wat het optellen en aftrekken betreft, blijven wij gecharmeerd van de abakusaanpak – als vervolg op het werken met inwisselmaterialen – en wel vanwege:

- het inzicht in het positionele stelsel;
- het duidelijke inwisselprincipe;
- het konkrete begin (eventueel voorafgegaan door *mab*-materiaal);
- de weg naar het inzicht blijft open;
- de differentiatiemogelijkheden;
- de progressieve schematiseringen.

Voor het vermenigvuldigen kan gekozen worden uit meerdere aanpakken:

- het kruispuntenmodel;
- het herhaalde optellen;
- het rechthoeksmodel.

Wat men ook doet, kies één spoor!

Voor wat betreft het vermenigvuldigen, wijzen onze ervaringen vooral naar het spoor van het herhaalde optellen. Bij het delen zouden we de voorkeur willen geven aan het spoor van het herhaalde aftrekken.

gevarieerd rekenen (6.9)

Onder gevarieerd rekenen verstaan we:

- motiverende rekenoefeningen;
- gebruik van andere notatievormen;
- eigenschapsrekenen;
- toegepast rekenen.

Dit alles heeft te maken met het *oefenen* van de rekenvaardigheden. De basisoperaties (optellen en aftrekken tot 20, maar ook 'overstapjes', zoals $47 + 5 = 52$) moeten geoefend worden. De tafels van vermenigvuldiging dienen gememoriseerd te worden.

Sinds mensenheugenis wordt het oefenaspekt van het rekenonderwijs gekarakteriseerd door eindeloze rijen sommen. Gelukkig kunnen we constateren, dat zich de laatste tien jaar veranderingen aankondigen.

Het opdreunen van de tafels (wat trouwens best wel eens mag) wordt vaker verdrongen door het inkleuren van honderdvelden, het leggen van puzzels, het spelen van snelheidsspelletjes, het ontmaskeren van geheimschriften, het invullen van tabellen, het zien van regelmatigheden in eindcijfers, het doorlopen van getallendoolhoven, enz.

Ook bij andere vaardigheden is een tendens signaleerbaar om het oefenen gevarieerder en speelser te doen plaatsvinden.

Naar onze mening is hier sprake van een positieve ontwikkeling.

Tot nu toe zijn de oefenvariëteiten in nederland voornamelijk in losse boekjes neergelegd, maar de nieuwere methoden integreren deze zaken steeds vaker in de leerlingenboekjes.

In het voorgaande spullenkatern hebben we aan de kwestie van de additionele materialen uitgebreid aandacht besteed.¹⁾

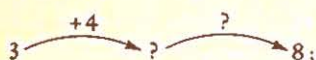
Met de verschijning van de nieuwere methoden zijn ook *nieuwe schrijfwijzen* geïntroduceerd.

We noemen:

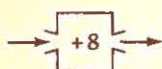
— open beweringen:

$$5 + \square < 8;$$

— pijlentaal:



— machientjes:

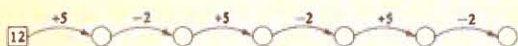


Deze nieuwe notatiewijzen zijn van belang omdat hiermee nieuwe middelen aangereikt worden om bepaalde eigenschappen van operaties (inverse nemen, schakelen, etc.) te onderzoeken en bewust te maken. Ook bieden ze gelegenheid om de vaardigheden te oefenen.

Vooraf de zogenaamde pijlentaal bevat vele mogelijkheden, in het bijzonder voor het aanvankelijk rekenonderwijs. Zeker indien deze taal in een betekenisvolle kontekst als bijvoorbeeld de autobussenproblematiek wordt gesteld.

Tevens willen we in dit verband nog eens wijzen op de mogelijkheden die hier voor de 'moeilijke' stipsommen liggen.

Bovendien kan het oefenen van de basisvaardigheden door middel van de pijlentaal een extra dimensie krijgen. Denk bijvoorbeeld eens aan de sliertsommen:



Ook het gebruik van machientjes, zoals bijvoorbeeld zinvol is aangepakt in de onderwijs-televisieserie 'Tel voor twee', kan een motiverende en zinvolle bijdrage voor een vernieuwd

rekenonderwijs leveren. Enkele nieuwere methoden hebben hiervan ruim gebruik gemaakt.

Wat het *eigenschapsrekenen* betreft, kunnen we kort zijn. Dit onderdeel van de rekenpraktijk is altijd sterk beklemtoond geweest en dient dat ook te blijven. Het gaat er daarbij om, te mikken op het ontwikkelen van een flexibele aanpak en van getalgevoeligheid, zowel bij leerling als onderwijsgevende.

We doelen daarbij op kwesties als:

$$\begin{array}{l}
 16 \times 25 = 8 \times 50 \quad ; \\
 \text{of} \quad = 10 \times 25 + 6 \times 25; \\
 \text{of} \quad = 4 \times 100 \quad ; \\
 \text{of} \quad 25 \xrightarrow{\times 2} 50 \xrightarrow{\times 2} 100 \xrightarrow{\times 2} 200 \xrightarrow{\times 2} 400.
 \end{array}$$

Lang niet alle handleidingen van leerboeken aksentueren dit eigenschapsrekenen.

Onder *toegepast rekenen* wordt het rekenen van alledag (bijvoorbeeld met geld en tijd) verstaan. Ook de aktualiteit (krant, reclame, televisie, etc.) biedt legio mogelijkheden.

De al vaker genoemde serie 'Kien' geeft hier toe goede tips.²⁾ Ook het variaboek van leerplanpublicatie 11 kunnen we hier niet onvermeld laten.³⁾

Het is verheugend dat de nieuwere methoden, maar ook de herzieningen van de traditionele methoden, ruime aandacht besteden aan het gevarieerd rekenen.

de zakrekenmachine (6.10)

De zakrekenmachine heeft haar plaats in maatschappij en voortgezet onderwijs reeds veroverd.

Hoe de invloed van dit apparaatje op het basisonderwijs zal zijn, is nauwelijks te voorspellen. Op het *iowo* zijn we al enige tijd bezig met literatuurstudie over deze problematiek. Daarbij blijkt dat het gebruik van de zakrekenmachine als didactisch hulpmiddel nog vrijwel niet onderzocht is. Anders gezegd: slechts de zakrekenmachine als rekenaar om snel iets uit te rekenen of te controleren is tot nu toe voornamelijk object van onderzoek geweest. Maar vragen als: 'hoe kan men met betrekking tot zo'n machientje beter leren schatten?', 'welke nieuwe leerstofgebieden worden nu toegankelijk?', 'kan het strategieën leren door de zakrekenmachine bevorderd worden?', 'hoe kan de 'rekenstructuur' van de machine als automaat door de kinderen ontdekt worden?', e.d., zijn tot op heden bijna niet gesteld, laat staan beantwoord.

We kunnen over deze materie dan ook uitslui-

1) Moor, E. de en Heege, H. ter: 'Spullenkatern 8. Additionele materialen', in 'Wiskobas-Bulletin', jrg 9 nr 4/5, pag. 65-85.

2) Janssen, G.M.: 'Kien', den Bosch 1975.

3) Moor, E. de: 'Gevarieerd rekenen', *iowo*, Utrecht 1980.

tend zeggen, dat diepgaand onderzoek verricht moet worden aangaande de vraag: hoe dient een zorgvuldige invoering op de basisschool te geschieden?

Een snelle invoering lijkt ons niet verantwoord.

leerstofinhouden (6.11)

Hiervoor bespraken we hoofdzakelijk inhouden die sterk met het rekensysteem te maken hebben. Ook al gebruikten we af en toe de termen rekenen/wiskunde en/of wiskunde, toch stond over het algemeen het bekende rekenprogramma centraal. En dit lijkt ons ook juist. Het rekensysteem blijft hoofdbestanddeel en ruggegraat van het reken/wiskundeonderwijs op de (nieuwe) basisschool.

Daarnaast kunnen echter 'nieuwere' inhouden aan het reken/wiskundeonderwijs onderscheiden worden, zoals:

- meten;
- meetkunde;
- relaties en functies;
- waarschijnlijkheidsrekening en statistiek;
- taal en logika.

Bij het kiezen van een methode kan men zich afvragen of aandacht moet worden besteed aan dergelijke 'nieuwe' onderwerpen. En voorts: op welke wijze?

De nieuwe wiskundige onderwerpen kunnen geïsoleerd worden aangeboden. Een aanpak die ons niet aanbevelenswaardig lijkt.

Het is ook mogelijk 'rekenachtige' activiteiten te integreren binnen deze gebieden. We noemen enkele voorbeelden:

- het rekenen met enkelvoudige en samengestelde grootheden; afronden en schatten; ontwikkelen van het metriek stelsel (meten);
- het rekenen op roosters (meetkunde en redeneren);
- het rekenen met kansen; het rekenen met grote hoeveelheden (waarschijnlijkheid en statistiek);
- het werken met allerlei grafieken (functies);
- het rekenen aan blokkenbouwsels (meetkunde);
- enz.

Ons inziens verdient het aanbeveling, het rekenen te verdiepen en te verbreden met betrekking tot: meten, gebruik van grafieken, combinatorische telproblemen, statistische onderzoekjes, meetkundige problemen, grote hoeveelheden, strategiespelen, eenvoudige redeneerproblemen en roostermeetkunde.

Dit kan zowel in de vorm van losse activiteiten als in grotere samenhangen (tema's of projecten) gegoten worden. Daarbij kan ook aan

aktuele onderwerpen (bijvoorbeeld het telefoneren) gewerkt worden, terwijl verbindingen met andere vakken voor de hand liggen.

Aan welk soort onderwijs men ook denkt:

- traditioneel rekenonderwijs;
 - rekenonderwijs met een wiskundige inhoud;
 - (geavanceerd) reken/wiskundeonderwijs;
- enkele punten over de *inhoud* en *opbouw* van de *leerstof* willen wij hier nog eens op een rij zetten.

Deze punten vorm(d)en een leidraad bij het ontwikkelen van een visie op het reken/wiskundeonderwijs. De punten zijn ook steeds in onze methodenbesprekingen, zij het impliciet, naar voren gekomen.

In trefwoorden geformuleerd, luiden ze (willekeurig geordend):

- veelzijdige inbedding van het getalbegrip;
- geen verzamelingentaal en formalismen;
- in de lagere leerjaren geen andere talstelsels dan het tientallige;
- beperkt gebruik van inwisselmateriaal (zoals het *mab*-materiaal);
- gebruik van de abakus in verband met positie-systeem, plaatswaarde en algoritmen;
- ruime aandacht voor grote hoeveelheden;
- inhoudelijke samenhang bewaren tussen hetgeen wiskundig verwant is (bijvoorbeeld: breuken, verhoudingen, schaal, procenten, kommagetallen);
- ordenend tellen;
- vroegtijdige start met verhoudingen en breuken (onderbouw);
- zoveel mogelijk aansluiten bij de aktualiteit;
- verbindingen leggen met en vanuit andere vakken;
- wiskundige wereldoriëntatie;
- meetkundige activiteiten uit de omgeving (schaduw, verpakkingen, plattegronden ...);
- meetkunde met blokken;
- geen formele meetkunde;
- aandacht voor een goede meetlijn;
- ordenen (zoals: tabellen maken);
- grafieken (lezen en maken);
- gebruik van roosters;
- aanzet tot statistische onderzoekjes;
- gevarieerde oefenvormen;
- eenvoudige redeneerproblemen;
- enz.

Met voorgaande paragrafen:

- geïntegreerde activiteiten in het aanvangs-onderwijs (6.4);
- belang van konteksten (6.5);
- veelzijdige benadering van begrippen, operaties, relaties (6.6);
- gebruik van meerdere modellen (6.7);

- het leren cijferen (6.8);
- gevarieerd rekenen (6.9);
- de zakrekenmachine (6.10);
- leerstofinhouden (6.11);

menen we u enige steun te kunnen bieden bij het analyseren en beoordelen van methoden.

AFSLUITENDE KENSCHETSEN (7)

Evenals we dat aan het slot van spullenkatern 7 gedaan hebben, besluiten we ook dit negende katern met een overzicht van korte kenschetsen.

- *naar aanleg en tempo*

Deze methode is zowel kwa leerstof als didaktiek verouderd. Uit de aankondiging is niet op te maken of de herziening hierop enig effect zal hebben.

- *uitkomst*

Traditionele methode met waardevolle elementen (tema's), maar naar huidige maatstaven toch niet meer akseptabel (bijvoorbeeld ten aanzien van de begripsvorming).

- *nieuw rekenen*

Overzichtelijk. Traditioneel. Veel nadruk op het oefenen. De opbouw als geheel is fragmentarisch en de indeling in taken is onvoldoende gemotiveerd. Leent zich wel voor eigen inpassing van additioneel materiaal.

De aankondigde herziening lijkt niet ingrijpend.

- *niveaucursus rekenen*

Stofinhoudelijk traditioneel. Een kompleks en dwangmatig organisatiesysteem overheerst de eigenlijke inhoud van het rekenen. Vérgaande fragmentering van de leerstof.

- *op veilig spoor*

Bestaat eigenlijk uit vier deelmethoden. Heeft naast traditionele ook nieuwere onderwerpen. Het aanvankelijk rekenen is wat star van opzet. Het rekengedeelte is beperkt gehouden en gericht op individualisering. De grote moeilijkheid van de methode ligt in de organisatie van zinvolle gedeelten uit het 'structuurrekenen' met 'het instrumenteel rekenen' (meten) tot één verantwoord geheel.

- *naar zelfstandig rekenen (herziene versie)*

Gericht op individualisering, waarbij door middel van eindeloze sommenrijen begrip verwacht wordt. Een haastig opgezette en onzorgvuldige herziening van een oude rekenmethode, waarbij nieuw ingepaste elementen niet in de aanwijzingen voor de

leerlingen verwerkt zijn. Kwa leerstof en didaktiek verouderd.

De aankondigde herzieningen lijken nauwelijks van ingrijpende aard te zijn.

- *elementair wiskundig rekenen*

In feite een traditionele (amerikaanse) rekenmethode. De rekenlijn is verantwoord opgebouwd. De wiskundige onderwerpen zijn afgeleid uit de formele wiskunde en lijken voor het merendeel ongeschikt voor het huidige nederlandse basisonderwijs.

- *wiskunde voor de basisschool*

Het aanvankelijk rekenen is doordacht opgebouwd, in hoofdzaak gebaseerd op het cuisenairemateriaal. De totale rekenlijn komt in de verdrukking door de talloze (te) lastige wiskundige onderwerpen, die aan het rekenen zijn toegevoegd.

- *boj! rekenen!*

Leunt tegen een vaksystematische (dus aan de wiskunde ontleende) opbouw aan. De rekenlijn, startend vanuit talstelsels, vertoont een konsekvente opbouw. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het cuisenairemateriaal. De verlevendigungsaspecten van het rekenen springen in het oog. Gedegen vakkennis bij invoering/gebruik van de methode is noodzakelijk. De handleidingen alleen bieden daartoe te weinig steun.

Het is onduidelijk, wat en hoe herzien zal gaan worden.

- *operator rekenen*

De oorspronkelijke versie staat tussen oud en nieuw. In de bovenbouw gericht op toepassingen in reële situaties. In de onderbouw minder. Bevat nieuwe aanzetten voor het opereren. Is in de opbouw vaak wat onevenwichtig: lange oriëntatie en een korte inoefeningsfase. Duidelijke handleidingen.

De methode wordt grondig herzien. De nieuwe versie is, voorzover we dat nu kunnen bekijken, zeer overzichtelijk, lijkt praktisch goed hanteerbaar en ziet er veelbelovend uit.

Wij adviseren, deze herzieningen nauwlettend te volgen.

- *getal in beeld*

Een methode met een geheel eigen karakter. De rekenlijn in de oorspronkelijke versie, gebaseerd op de talstelsels, is consequent van opzet. Daarbij wordt (te) lang gebruik gemaakt van het *mab*-materiaal. De verlevendiging van het rekenen via gevarieerde oefenvormen en de aanpak van het meten zijn zeer goed. De wiskundige onderwerpen liggen in de lagere leerjaren nog wat tegen het formele aan, maar hebben in het algemeen toch een bij de basisschool passend karakter. De handleidingen zijn zonder

meer goed. Het invoeren en hanteren van de methode eist veel inzet van het schoolteam. Wij hebben de indruk dat de herzieningen een minder formalistisch karakter hebben.

- *taltaal*

Deze methode is nog niet afgerond. Thans gereed tot en met het vierde leerjaar. Bevat een uitstekend programma voor het aanvankelijk rekenen. Tot nu toe is het schitterend uitgevoerd. De wiskundige activiteiten zijn zinvol en aan het rekenen gekoppeld.

We hopen dat uitgever en auteurs deze kwaliteit tot en met het zesde leerjaar handhaven.

- *de wereld in getallen*

Deze methode zal tussen 1981 en 1984 totaal uitgebracht worden. De methode mikt op creatief rekenen en op reële, bij het kind passende, wiskundige activiteiten. Differentiatie via verrijking. Het verdient aanbeveling, de methode nauwlettend in het oog te houden.

cito item dito

OVER LEERDOELGERICHTE TOETSEN EN TOETSGERICHTE LEERDOELEN*

De 'Eindtoetsen Rekenen Basisonderwijs' van het cito krijgen in brede kringen van het onderwijs terecht waardering.¹⁾ Vanuit landelijk standpunt beschouwd bezitten deze toetsen naast een evaluerende ook een bewakende functie, zonder nochtans konserverend te werken. Lettend op de eindtoetsen van de afgelopen tien jaren, konstateren we dat de onderwerpen van het minimumprogramma zoals die in de toetsen tot uitdrukking komen, mee-evalueren met de veranderingen in het gebied van het reken/wiskundeonderwijs. Kortom, bij alle beperkingen die dergelijke toetsen nu eenmaal kennen, over deze cito-producten geen kwaad woord, doch slechts deze konstruktieve opmerking dat zij op de punten van rekenstrategieën en standaardtoepassingen wat bijgesteld, c.q. aangevuld zouden kunnen worden. De laatste jaren heeft het cito echter ook toetsen gekonstrueerd die geen eindtoetsen zijn maar die betrekking hebben op belangrijke leerpunten van leergangen voor bepaalde onderwerpen. En daarover valt heel wat in kritische zin op te merken.

*De noten bij dit artikel staan op pag. 97.

leerdoelgerichte toetsen 'meten'

We doelen hier in het bijzonder op:

- 'Leerdoelgerichte toetsen voor het basisonderwijs: meten'.²⁾

Wat zijn leerdoelgerichte toetsen?

In de handleiding bij deze toetsen over meten staat hierover:

'Een leerdoel is een zo eenduidig mogelijke omschrijving van datgene wat een leerling moet kennen en kunnen als resultaat van leren. Dat resultaat moet omschreven worden als een waarneembare activiteit. Het geleerde moet blijken!

Vaak worden leerdoelen onjuist geformuleerd. Ze zijn dan te vaag, te algemeen; ze beschrijven geen waarneembare activiteit of ze beschrijven in feite het gedrag van de leerkracht.

Voorbeelden hiervan zijn gemakkelijk te geven:

- inzicht hebben in de getalstructuur: vaag, niet waarneembaar
- oplossen van veel voorkomende rekenproblemen: wel waarneembaar maar vaag, want het is niet duidelijk om welke problemen het hier gaat.

Bij zo'n leerdoel is het vrij eenvoudig na te gaan of het leerdoel bereikt is. Een beperkt aantal opgaven is al voldoende. We spreken in dat geval van leerdoelgerichte toetsen.³⁾

Er zijn 75 leerdoelen geformuleerd voor resp. lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht en metriek stelsel. De bijbehorende toetsen zijn neergelegd in twee opgavenboekjes met parallelle series A en B. In de handleiding staat bij ieder leerdoel aangegeven hoe de toets aangeboden moet worden (schriftelijk of mondeling), het materiaal moet worden gebruikt, etc. Voorts vermeldt de handleiding iets van zeer algemene aard over de beheersingsgraad (80%) en de interpretatie van de resultaten. De leerdoelgerichte toetsen meten zijn geënt op leerdoelen die nadrukkelijk op zichzelf staan. Dit houdt in dat de toetsen niet zonder meer gebruikt kunnen worden, en wel om de eenvoudige reden dat niet iedere methode zich op elk van de geformuleerde leerdoelen blijkt te richten.

Een verwijzingschema in de handleiding geeft aan welk leerdoel in welk van de vier doorgelichte methoden ('Naar zelfstandig rekenen', 'Nieuw rekenen', 'Niveaucursus rekenen' en 'Operator rekenen') wordt nagestreefd, zodat de gebruikers makkelijk kunnen terugvinden welke toetsopgaven in hun specifieke geval van toepassing zijn – zo wordt gesteld. In principe kan zo'n verwijzingschema voor elke methode gemaakt worden. Daarbij komt tevens tot uiting in hoeverre de 'impliciete' lijst van leerdoelen van een bepaalde methode de leerdoelenlijst van het cito dekt, of zo men wil: welke leemten de betreffende methode in dit opzicht heeft. Men kan dan, indien nodig en gewenst, als onderwijsgevende

zélf deze tekorten proberen op te heffen, zo luidt één van de gebruiksmogelijkheden.

De mogelijke gebruikswijzen zijn die van:

- voortgangskontrolé;
- voorttoetsing;
- diagnose;
- leergangkonstruktie.

voorbeeld 'oppervlakte'


Als voorbeeld nemen we de leerdoelgerichte toetsen oppervlakte.

We presenteren alle leerdoelen over oppervlakte en geven bij het eerste en het laatste leerdoel de bijbehorende toetsopgaven uit de A-serie, alsmede de verwijzing naar de eerstgenoemde methode ('Naar zelfstandig rekenen').

1. Vergelijken van oppervlakten:
 - op het oog
 - met behulp van roosters of patronen
 - met behulp van omvormen.
2. Bepalen van de oppervlakte van een figuur door het aantal maten te tellen met behulp van een gegeven binnen- of buitenrooster.
3. Aangeven welke oppervlakte aangeduid wordt met cm^2 en m^2 .
Kiezen van de juiste maat in een gegeven situatie uit cm^2 , m^2 en km^2 (ha).
Het gaat erom dat de leerling voldoende notie heeft van de aangegeven maat.
4. Berekenen van de oppervlakte van een rechthoekige figuur door het aantal hokjes per rij of kolom te vermenigvuldigen met het aantal rijen of kolommen.
Als maat wordt de vierkante centimeter gebruikt.
5. Berekenen van de oppervlakte van rechthoeken met behulp van de formule lengte \times breedte.
Twee manieren voor toetsing komen voor:
 - lengte en breedte zijn aangegeven
 - lengte en breedte moeten gemeten worden.
6. Berekenen van de oppervlakte van figuren die geen rechthoek zijn; de figuur moet door verdelen of omvormen omgezet worden in één of meer rechthoeken.
7. Oplossen van vraagstukjes waarin de moeilijkheid hoofdzakelijk wordt gevormd door de oppervlakteberekening.¹⁴⁾

De A-versie van de toets bij leerdoel 1 ziet er als volgt uit:⁵⁾


1



A B

Van welke figuur is het oppervlak blauw gemaakt?

2

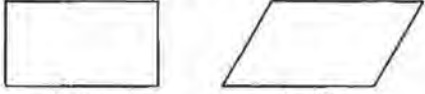


figuur 1 figuur 2

Wat is juist? Kies uit onderstaande antwoorden.

A. Figuur 1 heeft de grootste oppervlakte.
B. Figuur 2 heeft de grootste oppervlakte.
C. De oppervlakten van figuur 1 en figuur 2 zijn even groot.

3

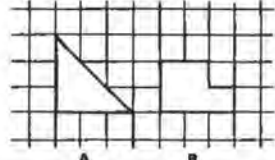


figuur 1 figuur 2

Wat kun je zeggen van de oppervlakte van deze figuren? Je mag je liniaal gebruiken. Kies uit onderstaande antwoorden.

A. Figuur 1 heeft de grootste oppervlakte.
B. Figuur 2 heeft de grootste oppervlakte.
C. Figuur 1 en figuur 2 hebben een gelijke oppervlakte.

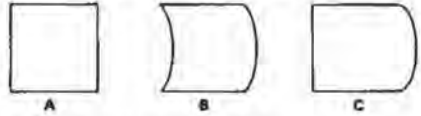
4



A B

Welke figuur heeft de kleinste oppervlakte?

5




A B C

Welke figuur heeft de grootste oppervlakte?

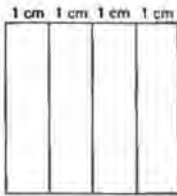
De A-versie van de toets bij leerdoel 7 luidt als volgt:⁶⁾

1



Een kamer van 4 m breed en 8 m lang wordt met nieuwe vloertegels belegd. Hoeveel m^2 heeft men nodig?

2 Hieronder staat een vierkant.

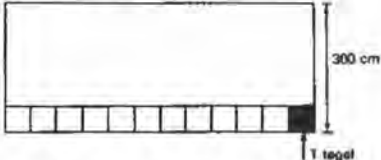


1 cm 1 cm 1 cm 1 cm

Hoe groot is de oppervlakte van dit vierkant?

3 Vader schildert een wand van 4 m lang en 2½ m breed. Op het verfblik staat: 'Voldoende voor 8 m^2 '. Hoeveel liter verf moet vader halen?

4



300 cm

1 tegel

Ik beplak deze wand met tegels van 60 \times 60 cm. Hoeveel tegels kun je op deze wand plakken?

Het verwijzingschema naar de methode 'Naar zelfstandig rekenen' (*nzr*) met betrekking tot de oppervlakte is als volgt:

leerdoel 1: deeltje 8 taak 21, 22;

leerdoel 2: deeltje 8 taak 22;

leerdoel 3: deeltje 8 taak 23, 32, 44;

leerdoel 4: deeltje 8 taak 22, 23;

leerdoel 5: deeltje 8 taak 23;

leerdoel 6: deeltje 10 taak 13;

leerdoel 6: deeltje 11 taak 31, 50.

Bij leerdoel 7 wordt geen verwijzing gegeven, deze categorie ontbreekt in het schema.

► EERSTE KOMMENTAAR (1)

volledigheid

Op het eerste gezicht zien de leerdoelgerichte toetsen oppervlakte er erg aardig uit. De inkleding van bepaalde opgaven is hier en daar wat anders dan gebruikelijk – met name bij de rechthoeken – en vooral enkele nieuwe onderdelen, zoals het gebruik van verschillende soorten roosters en het omvormen van figuren, verlenen de toetsserie een gevarieerde aanblik die zich gunstig onderscheidt van het traditionele beeld. Het verschil komt direkt al tot uitdrukking als we het verwijzingschema van het eerste leerdoel naar *nzr* volgen. In deze methode komt namelijk het omvormen van figuren niet voor: *nzr* beperkt zich tot ordenen van oppervlakten op het oog en via het tellen van roostereenheden.

Bij verder bladeren in *nzr* valt nog iets anders op. Bij het opstapje van taak 25-31 komt – zij het weinig nadrukkelijk – de kwestie van de relatie tussen omtrek en oppervlakte heel aardig aan bod, die in de *citolijst* echter geheel ontbreekt. Moet de relatie omtrek-oppervlakte niet als leerdoel geformuleerd worden?

Deze vraag verwoordt onze twijfel over de volledigheid van de gepresenteerde lijst leerdoelen als geheel.

dekking

Laten we nog even terugkeren naar het eerste leerdoel. Er is zojuist vastgesteld dat het omvormen niet in de betreffende methode voorkomt.

Wat nu als onderwijsgevende te doen? Om te beginnen kan de toetsserie *A* bij leerdoel 1 afgenomen worden. Wie weet, kunnen de kinderen de opgaven met betrekking tot omvormen toch wel maken zonder dat dit aspect onderwezen is. Laten we echter aannemen – wat redelijkerwijs te verwachten is – dat deze vraagstukken door het merendeel van de kinderen niet goed opgelost worden, dan zal er toch iets in het onderwijs moeten gebeuren, tenminste als we dat onderdeel van belang achten.

In de handleiding staat hieromtrent:

'Bij onvoldoende resultaat bij een leerling of een groep van leerlingen volgt een nieuwe periode van onderwijs

en oefening. Het resultaat hiervan kunt u nagaan met behulp van de paralleltoets.'⁷⁾

Stel, dat we besluiten het volgende te doen: we nemen toets *A* bij leerdoel 1 tot uitgangspunt van ons onderwijs, bespreken de opgaven stuk voor stuk, besteden uitgebreid aandacht aan gemaakte fouten en maken, zo nodig, onderwijl ook nog wat variaties in de opgaven. Dit alles neemt, laten we zeggen, één lesuur in beslag. Na een tijd geven we dan de toetsserie *B* bij leerdoel 1, die uit vrijwel identieke opgaven bestaat. En wat we verwachten komt uit: vrijwel alle kinderen hebben nu vier of meer vraagstukken goed.

Is dit zo de bedoeling?

Kunnen we nu zeggen dat de toets dekt wat we op het oog hebben met het omvormen in leerdoel 1?

Deze kwestie van de dekking is dus nogal onduidelijk. Met name ook de vraag, of de leerdoelen binnen de verschillende methoden dezelfde inhoud en betekenis krijgen, is van belang.

formulering

Eigenlijk moeten we veronderstellen dat hetgeen zojuist geschetst is, niet de bedoeling *kán* zijn. Weliswaar is de toets voldoende gemaakt, maar dit betekent nog niet dat het leerdoel ook werkelijk bereikt is. Want de toets werd juist voldoende gemaakt, omdat het onderwijs erop afgestemd werd. Was dit niet het geval geweest, dan zou wel eens hebben kunnen blijken dat, als het om minder bekende omvormingen gaat, de leerlingen het beoogde niet beheersen.

Maar ja, wat is het beoogde?

Eerlijk gezegd, blijkt bij nadere beschouwing het eerste leerdoel dus toch niet zo concreet geformuleerd te zijn.

Ook het laatste leerdoel is onduidelijk. Is het daarin gestelde volgens de *citonormen* eigenlijk wel als leerdoelformulering aan te merken?

In de zojuist geciteerde omschrijving van leerdoelen staat bij de formulering 'oplossen van veel voorkomende vraagstukken waarin de moeilijkheid hoofdzakelijk wordt gevormd door oppervlakteberekening' de aantekening dat deze te vaag is. Maar 'oplossen van vraagstukjes waarin de moeilijkheid hoofdzakelijk wordt gevormd door oppervlakteberekening' is niet veel duidelijker, want het gaat er maar net om deze soorten vraagstukjes min of meer concreet aan te duiden en dat gebeurt niet.

Kortom, de formulering van leerdoelen is problematischer dan zij wellicht op het eerste gezicht lijkt. Met name de relatie tot het gegeven of nog te geven onderwijs blijkt moeilijk te duiden.

fundering

Het geheel overziend rijst de vraag, op welke visie van wiskundeonderwijs en op welke conceptie van

meten de leerdoelenlijst eigenlijk gebaseerd is. De handleiding verschaft hierover geen duidelijkheid. Daarin staat echter wel iets over de gevolgde procedure:

'We zijn gestart met bestudering en analyse van een aantal methodes en ander leermateriaal. Hieruit kwam geen e nduidig beeld te voorschijn. Bovendien beantwoordden de methodes lang niet altijd aan de nieuwste inzichten op didaktisch gebied. Daarom was bestudering van andere bronnen – bekende didaktische werken, leerplannen e.d. – noodzakelijk.

Tenslotte is hieruit een eerste doelstellingenlijst te voorschijn gekomen. Deze lijst hebben we ter kritisering voorgelegd aan een twaalftal deskundigen. Hun op- en aanmerkingen vormden een belangrijke bron voor verbetering van de lijst.'⁸⁾

Over de aangeduide 'nieuwste inzichten', 'bronnen', 'leerplannen', e.d., blijven we in het ongewisse. De twaalftal deskundigen daarentegen worden met name genoemd. Maar uit publikaties van hun hand kan men eenvoudig afleiden dat zij geen overeenstemmende ideeën hebben. (Overigens hoorden ook enkele *iowo*-mensen tot de groep deskundigen.)

Wat vormt nu de fundering van de leerdoelen 'oppervlakte'?

Zijn bijvoorbeeld de leerplanpublicaties 7 en 9 van wiskobas geraadpleegd? En zo ja, waarom heeft men belangrijke onderdelen niet in leerdoelen neergelegd?

Niet dat alles wat wiskobas doet goed zou zijn, maar wat zijn de beweegredenen om bijvoorbeeld de ongebruikelijke aanpak van het omvormen w l en de relatie omtrek-oppervlakte niet in de leerdoelenlijst op te nemen?

tot slot

Wat zich aanvankelijk als een tamelijk vanzelfsprekende zaak aandiende en ons wellicht heel plausibel voorkwam, namelijk om nu maar eens via leerdoelgerichte toetsen precies na te gaan wat de konkrete opbrengst van het onderwijs in 'meten' is of zou moeten zijn, was bij nadere beschouwing met de leerdoelenlijst en een methode in de hand, toch zeer problematisch.

Kwesties van:

- volledigheid;
- dekking;
- formulering;
- fundering.

bleken tot tal van onduidelijkheden aanleiding te geven. Op zichzelf zou dat niet zo erg hoeven te zijn als we het idee hadden dat het met de grondgedachten van die leerdoelenlijst wel goed zat, maar dat is niet het geval.

Bij een eerste analyse leken er al leemten in de lijst te

zitten, bleek er met betrekking tot het onderwijs een dekkingsprobleem te zijn dat door de doelformulering niet opgelost werd, bleek de leerdoelformulering niet overeenkomstig de door het *cito* zelf onderschreven normen, en de fundering van het geheel van leerdoelen onduidelijk en onverantwoord. We kunnen nu ons eerste commentaar het beste aldus samenvatten: de praktische bruikbaarheid van de meettoetsen ten aanzien van de gebruiksmogelijkheden van de leerdoelen, te weten die van voortgangskontrolé, voortoetsing, diagnose en leergangkonstruktie, lijkt door alle genoemde onduidelijkheden in de uitwerking van deze toetsen bij nadere beschouwing bizonder diskutabel te zijn. Hier zouden we het bij kunnen laten.

Wij willen echter verder gaan en het zojuist gestelde als voorlopige konklusies formuleren om deze vervolgens aan nader onderzoek te onderwerpen, waarbij de problematiek teoretisch dieper beschouwd zal worden.

► VRAAGSTELLING EN VOORUITBLIK (2)

Uit het zojuist gegeven eerste commentaar volgt de vraagstelling van dit artikel:

Wat is het belang van de leerdoelen voor het onderwijs en de onderwijsontwikkeling?

We kunnen deze kernvraag in enkele onderdelen uiteenleggen:

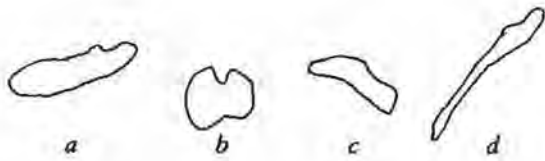
- is de vigerende leerdoelenlijst volledig?
- zo niet, kan deze lijst dan in principe zodanig aangevuld worden, dat de essentie van het begrip oppervlakte erin tot uitdrukking gebracht wordt?
- is de door het *cito* gehanteerde beschrijvingswijze daarvoor toereikend?
- voldoet de thans gevolgde procedure aan de eisen van een gefundeerde toetsontwikkeling?
- zijn leerdoelgerichte toetsen geschikt voor de doeleinden van voortgangskontrolé, voortoetsing, diagnose en leergangkonstruktie?

Dit zijn de vragen die we zullen trachten te beantwoorden.

Als basis van ons onderzoek zal een korte beschrijving van een stukje onderwijs over oppervlakte dienst doen, die in de volgende paragraaf gegeven wordt. Daarna komen de eerdergenoemde punten over resp. volledigheid, dekking, formulering en fundering aan de orde, waarna tenslotte de gebruiksmogelijkheden nog eens overwogen worden. Ziehier de globale indeling van het vervolg.

► EILANDENPROBLEEM ALS BASIS (3) instapprobleem

- Bepaal het kleinste van vier op een kaart getekende eilanden *a*, *b*, *c* en *d*.⁹⁾



Een dergelijke opgave bestemd voor de bovenbouw van de basisschool kan veelvuldig en in vele varianten en konteksten verschijnen.

Het is een fundamenteel probleem. Vrijwel alle algemene aspecten van meten kunnen ermee aan de orde gesteld worden, te weten:

- vergelijken op het oog;
- vergelijken door middel van knippen, plakken of omstruktureren;
- toekennen van een maat;
- verfijnen van een maat;
- relaties vaststellen tussen grootheden, i.c. omtrek en oppervlakte van één figuur;
- indirect meten via een andere grootheid, i.c. oppervlakte bepalen door wegen;
- schatten en afronden.

In de meeste gevallen hoeft de onderwijsgevende deze activiteiten niet zélf op gang te brengen, maar worden ze spontaan door de kinderen aangedragen.

Het meest voor de hand liggend is natuurlijk de vergelijking op het oog. De probleemstelling kan zo ingericht worden dat één eiland duidelijk het grootste oogt en dus direkt afvalt – zeg *a*.

Een tweede eiland kan via een werkelijke of 'gedachte' verplaatsing en verknipping geëlimineerd worden – zeg *b*.

Van de twee overblijvende eilanden, *c* en *d*, moet nu nog het kleinste bepaald worden.

Hoe lossen de kinderen dit op?

We geven enkele strategieën die veelvuldig door de kinderen gebruikt worden. (Deze staan uiteraard niet los van het genoten onderwijs. We gaan er hier vanuit dat de zeven leerdoelen beheerst worden, want dat was in de geobserveerde gevallen ook zo.)

strategieën

Ten eerste is er de meting via roostervierkantjes. Sommige leerlingen komen op 't idee de eilanden te bedekken met roosterpapier en dan de dekkende vierkantjes te tellen – een begrijpelijke gedachte, omdat oppervlakte en roosters voor deze kinderen sterk met elkaar geassocieerd kunnen zijn. Er doet zich echter een moeilijkheid voor. Of, er zijn eigenlijk meerdere problemen: hoe moet je 't rooster erop plaatsen? wat moeten we met de randvierkantjes die gedeeltelijk binnen het oppervlak liggen? hoe kunnen we het beste schatten? En het probleem is dan ook nog zó ingericht dat de grootten van de eilanden dusdanig weinig verschillen dat deze aanpak met het 'gewone' roosterpapier geen

uitsluitsel kan geven, wat wil zeggen dat het kleinste eiland niet met zekerheid aangewezen kan worden. Dit kan aanleiding zijn tot een tweede aanpak.

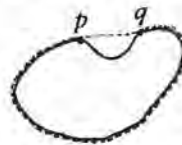
Ten tweede, en voortvloeiend uit het vorige, kan de methode van de maatverfijning gebruikt worden. Met name is dit belangrijk voor de randvierkantjes: door deze vierkantjes van 1 cm² onder te verdelen in mm² kan de marge, waarbinnen we de oppervlakte van de eilanden schatten, worden verfijnd. Op zichzelf is dit echter een tamelijk lastige procedure, omdat de binnenliggende vierkantjes wel nauwkeuriger bepaald kunnen worden, maar ook het aantal randvierkantjes toeneemt. Bij het schatten en afronden duiken kommagetallen en breuken op. Kortom, de hele gang van het onderzoek is zo uitgebreid en lastig dat de leerlingen hierbij herhaaldelijk geholpen moeten worden. De aanzet tot maatverfijning wordt weliswaar soms door de kinderen zélf gegeven, maar de voortgang en afronding van de procedure bepaalt de onderwijsgevende veelal zelf – tenminste, als hij de kwestie van de maatverfijning tot de doelstellingen van het onderhavige onderwijs wil rekenen!

Ten derde doen kinderen vaak de suggestie om de kleinste van de eilanden *c* en *d* te bepalen door eromheen te varen, dus om de kleinste oppervlakte te bepalen via de kleinste omtrek. Deze suggestie nu vormt een goed aangrijpingspunt voor een nieuw probleem en een belangrijk onderzoek omtrent de relatie tussen omtrek en oppervlakte van een vlakke figuur.

Hoe kunnen de kinderen ontdekken dat omtrek en oppervlakte niet gelijk opgaan, dus dat een grotere omtrek niet een grotere oppervlakte hoeft in te sluiten?

Wel, er zijn tal van mogelijkheden om de losse betrekking tussen deze grootheden duidelijk te maken.

We geven één van de vele ontdekkingen die door kinderen aan de hand van de eilanden-probleemstelling zijn gedaan.



De omtrek van het gestippelde eiland is kleiner dan die van het gelijnde, maar de oppervlakte is groter.

Ergo: de omtrek van een figuur is geen bruikbare maat voor de oppervlakte ervan.

Terug naar het eilandenprobleem, want per slot van rekening biedt de relatie omtrek-oppervlakte daar geen oplossing voor, maar voert ze ons slechts op een zijspoor – zij het een spoor dat zeker ook naar belangrijke doelstellingen leidt.

Ten vierde komen leerlingen soms op het idee het

probleem van de kleinste oppervlakte op te lossen via indirect meten. Zo kwam een kind op de originele gedachte de eilanden met een zandlaagje te bedekken en dan de twee porties zand te wegen. Een ander stelde voor de eilanden op tripleks te tekenen, uit te zagen en te wegen. Beide strategieën zijn bruikbaar en geven op zich weer aanleiding tot nieuwe probleemstellingen, met name over meetfouten en onnauwkeurigheden.

kernvraag

Ziehier een samenvatting van de belangrijkste onderwijsleeractiviteiten bij het kernprobleem van de oppervlakteordering van vier getekende eilanden – activiteiten die werkelijk hebben plaatsgevonden of kunnen plaatsvinden, doordat ze als het ware op een natuurlijke wijze door de probleemstelling uitgelokt worden.

Voor alle duidelijkheid dient gezegd, dat we ons nog niet over de doelstellingen van het aangeduide onderwijs hebben uitgelaten. Of beter: we hebben de kwestie van de doelstellingen open gehouden en slechts een indicatie gegeven van alle mogelijke doelstellingen die via het eilandenprobleem nagestreefd zouden kunnen worden, maar die zeker niet alle nagestreefd zullen worden, want dat zou te veel van het goede in één keer zijn.

Het voordeel van deze brede beschrijving is wel, dat met dit ene probleem een belangrijk deel van de problematiek van het meten aan de orde gesteld wordt. Derhalve is dit paradigma bijzonder geschikt om bezien te worden tegen de achtergrond van de zeven leerdoelen die in de *citopublikatie* staan opgetekend. Zoals gezegd, het gaat om het beantwoorden van de vraag of de essentie van het begrip oppervlakte in de genoemde leerdoelenlijst tot uitdrukking komt of eventueel gebracht kan worden. Hebben kinderen die de opgesomde leerdoelen of een zo compleet mogelijke kollektie leerdoelen beheersen, ook noodzakelijkerwijs een goed begrip van oppervlakte en oppervlakteberekening? Is de beheersing van de zeven opgesomde leerdoelen een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor begrip?

Bij de beantwoording van deze vraag kan het beschreven stukje onderwijs over de eilanden als toetssteen dienen.

► DE KWESTIE VAN VOLLEDIGHEID (4)

Allereerst een kleine doch niet onbelangrijke toevoeging aan de zeven leerdoelen op het punt van maattoekenning.

In leerdoel 2 gaat het om het 'bepalen van de oppervlakte van een figuur door het aantal maten te tellen met behulp van een gegeven binnen- of buitenrooster'. Ook in de toetsvragen bij leerdoel 3 en 4 is steeds een rooster gegeven. Maar het zelf kiezen van

een passende maat of rooster om de betreffende figuur te bedekken, of het zelf tekenen van een adequaat rooster – wat bij het eilandenprobleem moest gebeuren – is in feite veel essentiëler en natuurlijker, en heeft ook meer toepassingsmogelijkheden. Op dit punt zouden de leerdoelen dus wat aangevuld en uitgebreid moeten worden, waarbij ook het verfijnen van een rooster en het afronden betrokken dienen te worden.

relatie omtrek-oppervlakte

Fundamenteel is echter de problematiek van de relatie omtrek-oppervlakte. In de leerdoelenlijst wordt hierover niet gerept. Toch lijkt het kunnen voorzien van deze relatie een wezenlijk element voor een goed begrip van oppervlakte en oppervlakteberekening. Dit kwam ook bij het eilandenprobleem naar voren. De ervaring leert, dat veel leerlingen in geval van twijfel over de grootste of kleinste oppervlakte van figuren, de grootte van de omtrek als beslissend criterium hanteren.

Let wel: ook als deze kinderen de eerste leerdoelen van de *citolijs* kennelijk bereikt hebben, daar ze blijk geven te weten wat met oppervlakte bedoeld wordt en in staat blijken oppervlakten op het oog of met behulp van omvormen of door het tellen van roostereenheden te vergelijken en bij benadering te berekenen – zoals uit de beschrijving van het onderwijs over de eilanden bleek – dan nog grijpen ze vaak naar de vaststelling van de omtrek om beslissende uitspraken over de oppervlakte te kunnen doen.

Blijkbaar dekken deze leerdoelen dus niet wat we verstaan onder 'begrip van oppervlakte' en 'inzicht in oppervlakteberekening'. Ook de leerdoelen 4, 5 en 6 betreffende de oppervlakte van rechthoeken bieden geen nader zicht op de relatie omtrek-oppervlakte, om over het uiterst vage leerdoel 7 maar te zwijgen.

Sterker nog: we kunnen zelfs zeggen dat beheersing van wat in al die leerdoelen vervat ligt, in zekere zin soms inzicht-belemmerend werkt, met name indien – zoals in het traditionele rekenonderwijs – de nadruk heel sterk op oppervlaktebepaling van rechthoeken komt te liggen.

Een en ander moge nog eens ondersteund worden door het volgende gedeelte van een protokool:

'Doc. : Hoe oppervl. eiland bepalen?

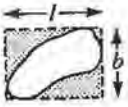


Il. : Er omheen lopen. Dan lengte \times breedte.

Doc. : Wat is dan de lengte?

Il. : ???

Mary : Uiterste lengte en breedte nemen.



Je hebt dan ongeveer de opp. v.h. eiland.

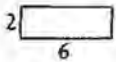
Silvia : Touwtje er omheen.

Doc. : Heb je dan opp. of omtrek?

Il. : Omtrek.

Marlies : Touwtje er omheen en er dan een rechtehoek van maken.

Docent legt uit dat dit niet kan:



omtr. = 16

opp. = 12



omtr. = 16

opp. = 16

Dit wordt door de leerlingen niet goed begrepen.¹⁰⁾

Let wel: het betreft hier leerlingen van het tweede leerjaar van het voortgezet onderwijs!

konklusie

Onze konklusie uit het voorgaande kan dan ook niet anders luiden dan dat de essentie van het begrip oppervlakte onvolledig door de *citolijst* van leerdoelen gedekt wordt. Want hoe valt anders te rijmen dat kinderen die de leerdoelen beheersen, naar zo'n oneigenlijk middel als omtrekmeting grijpen ten behoeve van oppervlaktebepaling? Dan moet er toch iets schorten aan het inzicht in het berekenen van oppervlakte.

Vanuit de lessen over het eilandprobleem zouden nog meerdere aspecten genoemd kunnen worden die essentieel blijken te zijn voor het oppervlaktebegrip, zoals het indirect meten en de verschillende strategieën voor meting, die evenmin in de *citoleerdoelen* genoemd worden. De verzameling is dus incompleet.

► DE KWESTIES VAN DEKKING EN FORMULERING (5)

Laten we ons echter tot de relatie omtrek-oppervlakte bepalen. Van deze kwestie hebben we niet beweerd dat ze niet door leerdoelen gedekt zou kunnen worden. Wat we slechts vaststelden, was dat ze er niet door gedekt werd.

Het is nu dus de vraag of wat herhaaldelijk kortweg met 'inzicht in de relatie omtrek-oppervlakte' werd aangeduid, in leerdoelen gevat kan worden. Met andere woorden: de kwestie is of we hier met een incidenteel tekort te maken hebben of met een structurele ontoereikendheid om 'hogere' doelen in leerdoelen te vangen – althans in leerdoelformuleringen zoals die in het leerdoelenboek gebruikt worden.

Om deze vraag te beantwoorden, gaan we eerst algemeen in op de kwestie van doelen en toetsen – een klein zijstapje dus.

leerdoelen en toetsen

Leerdoelen zijn doelen die dermate concreet geformuleerd zijn – zoals we eerder zagen – dat de goede verstaander vrij eksakt weet wat ermee beoogd wordt, dus wat de leerling na afloop van het onderwijs moet kunnen presteren. Bijgevolg kunnen ze tamelijk eenduidig omgezet worden in opgaven die het doel dekken. Als een leerling deze opgaven naar behoren oplost, kan gesteld worden dat hij het doel bereikt heeft. Zo kan men leerdoelen en toetsen voor oppervlakte samenstellen die aan de gestelde eisen voldoen, zoals bijvoorbeeld de eerdergenoemde leerdoelen 2, 3, 4, 5 en 6.

Tot zover zijn er geen onoverkomelijke problemen. Dat wordt anders als we de grens van het kennis- en vaardigheidsgebied overschrijden en het veld van de toepassingen binnentreden. Want hoe dient bijvoorbeeld concreet geformuleerd te worden dat de kinderen het geleerde over oppervlakte in allerlei kontekstsituaties moeten kunnen toepassen? Er zijn immers zoveel konteksten van wiskundige en niet-wiskundige aard waarbinnen zulks kan gebeuren.

Wel, deze problematiek deed zich bij leerdoel 7 voor. Hier hadden we echter met zo'n onduidelijke formulering te doen, dat we eigenlijk niet van een leerdoel kunnen spreken. Toch is het niet nodig om zich op een dergelijke manier er vanaf te maken: men kan zich namelijk ook beperken tot de meest gangbare situatietypen van toepassingen, dus tot de standaardgevallen die als minimumdoelen kunnen gelden. Ook bij deze leerdoelen kunnen dan voorbeelden van dekkende toetsopgaven gemaakt worden. In het geval van oppervlakte had men in ieder geval de meest voorkomende vormen van indirect meten en de daarmee verbonden verhoudingsproblemen kunnen proberen op te sommen. Dit is echter niet gebeurd, en dat levert zowel een onvolledigheid in de inhoud van de leerdoelenlijst als in de vorm van doelformulering op.

Met deze doelen betreffende kennis, vaardigheden en standaardtoepassingen zijn echter wel de grenzen van de mogelijkheden van de leerdoelgerichte toetsen bereikt – tenminste voorzover deze onafhankelijk van de onderwijskontekst geformuleerd kunnen worden. Let wel, we zeggen niet dat bij de doelen die een wat bredere toepasbaarheid van het geleerde aanduiden geen toetsen gemaakt zouden kunnen worden. Integendeel zelfs: zo'n voorbeeldtoets is juist een uitstekend middel om duidelijk te maken wat met een bepaald 'hogere' leerdoel omtrent begrip, inzicht, kunnen toepassen van het geleerde in relatief nieuwe situaties, e.d., bedoeld wordt. Alleen moet bij zo'n leerdoel plus toets wel expliciet het voorafgaande onderwijs duidelijk zijn om de 'nieuwheid' van de genoemde toepassingen te kunnen inschatten. Is een dergelijke kondi-

tiebepaling bij de hogere leerdoelen onduidelijk of niet gegeven, dan dreigt het gevaar dat het onderwijs op de voorbeeldtoets wordt afgestemd. En wat eerst als criterium voor inzicht diende, wordt een toetssteen voor kennis of vaardigheid. Anders gezegd: de toets is in dat geval niet meer doelgericht. Dit laatste deed zich voor bij leerdoel 1 betreffende het omvormen.

In ons eerste commentaar – paragraaf 2 – hebben we opgemerkt dat de *B*-toets over het omvormen het leerdoel niet zonder meer dekte omdat het onderwijs er via de sterk gelijkende *A*-toets te zeer op gericht zou kunnen worden.

We zouden nog een stap verder kunnen gaan en stellen dat het leerdoel veel te vaag geformuleerd is, omdat niet duidelijk is wat nu wel of niet als dekkende toets kan dienen. In ieder geval kan aan een bepaalde prestatie een enorm verschil in oplossingswijze en oplossingsnivo ten grondslag liggen. En dat komt, zoals gezegd, omdat niet globaal duidelijk is op grond van welk onderwijs die prestatie geacht wordt geleverd te worden. Dus als de konditiebepaling van het onderwijs bij een hoger leerdoel als dat van omvormen ontbreekt, is dat leerdoel eigenlijk geen leerdoel meer.

De uiterste konsekwentie van deze gedachtengang is dan ook dat de door het *cito* geformuleerde leerdoelen een variabele betekenis hebben al naar gelang de konditie, c.q. de methode verschilt – tenminste als het om de standaardtoepassingen en de hogere leerdoelen gaat.

De hier geschetste problematiek komt dus samengevat op het volgende neer: als men een doelstelling tot uitgangspunt neemt, dan rijst het probleem hoe deze doelstelling uiteengelegd kan worden in subdoelen die tezamen de omvattende doelstelling dekken en vervolgens hoe deze subdoelen verfijnd moeten worden om ze meetbaar te maken, zó dat wat beoogd wordt, gedekt wordt door wat men meet. De Groot heeft dit het dekkingsprobleem genoemd, dat naar zijn mening met de gangbare meetmethoden niet is opgelost.¹¹⁾ (In dit verband wijst hij op het belang van leerlingenrapportage in de trant van 'ik heb geleerd dat...'.) Het is overigens ook De Groot geweest die in een ander verband op het belang van het aangeven en meewegen van de onderwijscontext gewezen heeft.¹²⁾

Hoe het ook zij, de kwestie van de leerdoelformulering is bijzonder subtiel – vooral bij een niet-gegeven onderwijs-konditiebepaling. Het frappeert dan ook dat hieromtrent in de *cito*handleiding niets te lezen staat en dat men meent met een enkele verwijzing naar een of ander leerboek te kunnen volstaan. Het gevolg is dat de onderwijsgevende bij het eerste het beste leerdoel over oppervlakte direkt al in de problemen raakt als hij via dat leerdoel naar z'n methode verwezen wordt.

relatie omtrek-oppervlakte

Kan het anders en beter?

We hebben reeds aangeduid dat de leerdoelformulering duidelijker kan gebeuren door meer helderheid over de onderwijskonditie te verschaffen. Dat kan op verschillende manieren plaatsvinden. We zullen dit toelichten aan de hand van de doelstelling betreffende de relatie omtrek-oppervlakte.

De kwestie is dus de doelstelling 'inzicht in de relatie omtrek-oppervlakte' konkreet uit te werken tot een leerdoel – zij het dat dit leerdoel wat anders geformuleerd zal moeten worden dan de tamelijk zwenkende beschrijvingswijzen die in de *citolijs*t worden gehanteerd. Welnu, we zouden de intentie van 'inzicht in...' eerst eens wat nader kunnen specificeren met opgaven die de leerling moet kunnen maken.

Deze zijn bijvoorbeeld:

- een gegeven figuur onder behoud van z'n omtrek omvormen tot een figuur met een grotere of kleinere oppervlakte;
- een gegeven figuur onder behoud van z'n oppervlakte omvormen tot één met een grotere of kleinere omtrek;
- idem: grotere omtrek met kleinere oppervlakte;
- idem: kleinere omtrek met grotere oppervlakte;
- een figuur van een gegeven aantal tegels leggen met een grotere of kleinere omtrek dan een gegeven figuur;
- een rechthoek vormen met een gegeven oppervlakte en een zo groot mogelijke omtrek;
- een rechthoek vormen met een gegeven oppervlakte en een zo klein mogelijke omtrek;
- idem: een rechthoek met een gegeven omtrek en een zo klein of groot mogelijke oppervlakte;
- een figuur konstrueren van gegeven omtrek en zo groot mogelijke oppervlakte;
- etc.¹³⁾

We gaven eerder ook al het geváár van een dergelijke uiteenlegging aan, namelijk dat daardoor de nadruk in het onderwijs te zeer op dergelijke leerdoelonderdelen kan komen te liggen. Op deze wijze ontstaat een soort trainingseffekt dat juist in het geheel niet met het doel 'inzicht in de relatie omtrek-oppervlakte' beoogd wordt. Het onderwerp wordt dan te zeer op 'kleine' prestaties, gedragingen en eindhandelingen gericht met het gevolg dat aan het essentiële van de wiskundige activiteit, i.c. de 'grote' prestatie van het veelzijdig kunnen toepassen van het geleerde, de gedragspotentie, het proces van de handeling en de wiskundige attitude van de leerling, onvoldoende aandacht wordt besteed.

Laten we deze grote woorden met een klein voorbeeld toelichten. Neem de laatstgenoemde opgave 'een figuur konstrueren van gegeven omtrek en zo groot mogelijke oppervlakte'.

De uitkomst ervan is simpel een cirkel. Makkelijk te onthouden, het is maar een weet. En heel eenvoudig als leerdoel te formuleren in termen van 'de leerling moet in staat zijn tot...'. We kunnen in het onderwijs welhaast met een mededeling en een korte toelichting volstaan, zoals ook de docent in het geciteerde protocolgedeelte 'even' liet zien dat met een gegeven omtrek rechthoeken met verschillende oppervlakten gelegd kunnen worden.

Op deze wijze zouden ook de andere leerdoelen beheerst afgewerkt kunnen worden. Maar dan ontstaat wel een karikatuur van het bedoelde onderwijs, want het gaat hier niet om een verzameling weetjes, instrumentele vaardigheden, oppervlakke prestaties.

Waar gaat het dan wel om?

Het gaat globaal gezegd om begrip, inzicht, toepasbaarheid.

Dit houdt voor het onderwijs in, dat bijvoorbeeld het konstrueren van een figuur met een gegeven omtrek en een zo groot mogelijke oppervlakte als uitgangspunt en startprobleem kan dienen.

De kinderen krijgen opdracht een zo groot mogelijk gebied te veroveren (bijvoorbeeld in de kontekst van de verdeling van een erfenis, waarbij de nazaten voor een dergelijke opgave gesteld worden).

Dan volgt een onderzoek, waarbij van alles geprobeerd en nagespeurd wordt, waaronder de procedure van het 'uitdeuken' die ook in het eilandenprobleem ontdekt werd.



De gelijnde figuur heeft dezelfde omtrek als de gestippelde, maar een kleinere oppervlakte.

Via dit uitdeukprincipe kan onder andere het vermoeden ontstaan dat de cirkel – die immers geen 'deukje' bevat – wel eens de grootste oppervlakte zou kunnen omsluiten. 'Onder andere', want ook het vierkant, de gelijkzijdige driehoek en 'cirkelachtige' veelhoeken worden uiteraard door de leerlingen kandidaat voor de grootste gesteld. Nader onderzoek, vergelijkbaar met de activiteiten rond het eilandenprobleem, levert tenslotte de uitkomst op dat de cirkel de gezochte figuur is. Achteraf kan dan nog eens op het principe van 'uitdeuken' gewezen worden.

Het onderwijs als geheel is sterk onderzoeksgericht en heeft belangrijke matematische momenten en opbrengsten.

opbrengsten

Over die opbrengsten in termen van doelstellingen valt het volgende op te merken.

De leerlingen voldoen na afloop van deze onder-

wijsactiviteit aan het volgende leerdoel: ze kunnen van een figuur met gegeven omtrek er een met 'n maximale oppervlakte maken, namelijk de cirkel. Maar dat leerdoel dekt natuurlijk niet in het minst wat we met die activiteiten voor ogen hadden. Was dit namelijk de gehele opbrengst dan hadden we met simpele informatie kunnen volstaan.

Er is dus meer!

Namelijk: de kinderen weten en kunnen aantonen dat de oppervlakte van een figuur of het vergelijken van oppervlakten in het algemeen niet op een of andere wijze via omtrekmetering bepaald kan worden. Dit is dus een toevoeging bij de zojuist genoemde opbrengst van de cirkel als maximale oppervlakte, welke van groot belang is omdat hiermee voorkomen kan worden dat oppervlaktebepaling via de omtrek en de rechthoek zal gebeuren, zoals in het protocol werd beschreven.

De oogst van het cirkelonderzoek is echter nog groter. Vele leerlingen zullen in staat zijn een aantal van de opgaven die straks opgenoemd werden als specificaties van 'inzicht in de relatie omtrek-oppervlakte' nu min of meer zelfstandig op te lossen. Ze hebben dus niet één of twee aparte leerdoelen bereikt, maar kunnen het geleerde in relatief nieuwe situaties toepassen en hebben zagezegd een bepaalde mate van inzicht in de relatie omtrek-oppervlakte opgedaan (om dit inzicht vollediger te maken zal overigens nog wel een vergelijkbare activiteit moeten plaatsvinden, waarbij de oppervlakte konstant wordt gehouden en de omtrek varieert).

We mogen veronderstellen dat na het cirkelonderzoek of een ander soortgelijk onderzoek, de kinderen in staat zijn allerlei varianten van de opgave 'een gegeven figuur onder behoud van z'n omtrek omvormen tot een figuur met een grotere of kleinere oppervlakte' te maken.

leerdoelformulering

Al met al zou dus in eerste ronde het volgende leerdoel geformuleerd kunnen worden:

De leerling moet weten en kunnen aantonen dat de oppervlakte van een figuur of de vergelijking van oppervlakten in het algemeen, niet op een of andere wijze via omtrekmetering bepaald kan worden. Tevens moet hij allerlei varianten kunnen maken van opgaven als 'een gegeven figuur onder behoud van z'n omtrek omvormen tot een figuur met een grotere of kleinere oppervlakte' en 'idem ten aanzien van behoud van oppervlakte en variabele omtrek'.

Maar, als gezegd, hier moet een nadere bepaling bijgevoegd worden. Het gaat er immers om dat de beoogde beheersing voortvloeit uit onderwijsleeractiviteiten die een breed gebied van toepassingen ontsluiten, een grote toepasbaarheid hebben, transfer bezitten, of hoe men 'inzicht' ook wil vertalen. Het gaat dus om een bepaald soort onderwijs.

Om deze voorwaarde enigszins duidelijk te maken, worden bij leerdoelformuleringen vaak verschillende beschrijvingswijzen gebruikt.

Ten eerste plaatst men bij zo'n leerdoel wel een samenvattende, meer algemene doelformulering in de trant van 'inzicht in...', een soort opschrift dat, zij het vaag, iets tot uitdrukking brengt van het onderwijs dat tot het beoogde leerdoel voert. Indien het om een leerdoelformulering bij een gegeven onderwijspakket of methode gaat, is zo'n aanduiding vaak veelzeggend genoeg: de konditiebepaling van het leerdoel is dan namelijk vrij nauwkeurig bekend.

Ten tweede: als de leerdoelformulering, zoals bij de *cito*leerdoelenlijst het geval is, niet geënt is op een gegeven of welomschreven stuk onderwijs, zal op een andere wijze iets van de onderwijscontext in de konditiebepaling van het leerdoel opgenomen moeten worden, bijvoorbeeld in de vorm van een korte verwijzing of aanduiding, of een wat ruimere beschrijving van de aard en de 'sfeer' van de onderwijsleeractiviteiten die tot beheersing van de beoogde leerdoelen kunnen leiden. Doet men dat niet, dan ontstaat het gevaar van het gesignaleerde boemerangeffekt: het onderwijs richt zich te zeer op de verschillende deelprestaties, c.q. de 'kleine' producten, in plaats van op het 'grote' proces. Een leerdoel zonder duidelijke (impliciete of expliciete) konditiebepaling mist 'nivo', en is bijgevolg bijzonder ongericht en onduidelijk.

Ten derde is het natuurlijk vrijwel ondoenlijk, bij ieder leerdoel een uitgebreide onderwijsbeschrijving te geven. Een indicatie is echter wel mogelijk. Dat is ook precies wat in de verwijzingschema's van de handleiding bij meten gebeurt. Dit heeft echter het fundamentele bezwaar – we wezen daar reeds op – dat de kondities bij de leerdoelen zeer verschillen, daar de onderwijsaanpak van verschillende methoden nogal varieert. Het gevolg hiervan kan zijn, dat de toetsen van de leerdoelen in het geheel niet dekken wat het betreffende leerdoel binnen die bepaalde kondities (lees: binnen die methode) inhoudt, wat vervolgens leidt tot een aanpassing van het onderwijs aan... de toets. De toets die dan uiteraard niet dekt wat in het leerdoel vervat ligt. Maar over de werkelijke bedoeling moeten we als onderwijsgeveende in het duister tasten.

Ziehier de vicieuze cirkel waarin we met de *cito*leerdoelen kunnen geraken.

Al met al is dus een omvattende formulering bij deze leerdoelen weinigzeggend, vraagt een beschrijving van de onderwijscontext wat veel, en geeft een indicatie van die context via verwijzingen naar methoden geen duidelijkheid over het wenselijk geachte onderwijs.¹⁴⁾

Naar onze mening is er slechts één reële mogelijkheid om in het onderhavige geval van betrekkelijk

nieuwe leerdoelen, die niet gericht zijn op actueel gerealiseerd onderwijs, en niet rusten op de grondslag van de gangbare onderwijspraktijk, een redelijke, haalbare en duidelijke onderbouwing van de onderwijskondities te geven, en dat is door een fundamentele mathematisch-didaktische beschouwing over meten aan de leerdoelenlijst te koppelen. In ons geval een mathematisch-didaktische analyse over oppervlakte (meten). In zo'n analyse wordt het gebied in z'n totale structuur blootgelegd: alle belangrijke leerpunten komen erin naar voren. Dit betekent dat daarmee ook de eerder besproken kwestie van de volledigheid van de leerdoelen aan de orde gesteld kan worden. Maar tevens komt in die beschouwing de nadruk te liggen op de inhoud en de 'sfeer' van het onderwijsleerproces, dus op de wijze waarop begrippen, operaties, methoden, e.d., onderwezen worden en de implicaties daarvan voor de transfermogelijkheden van het geleerde.¹⁵⁾ Daardoor kan het aksent gelegd worden op de processen die aan het beoogde gedrag ten grondslag liggen, en dat is precies waarom het gaat, als we het hebben over doelstellingen betreffende 'omvormen' of 'relatie omtrek-oppervlakte', e.d.

samenvatting

Samengevat bepleiten we dus leerdoelformuleringen te omkleden met onderwijsbeschrijvingen zodat de konditiebepaling duidelijk is, of deze te funderen in een mathematisch-didaktische beschouwing, waarin de visie op onderwijs, de essentie van kernbegrippen en de onderwijsconceptie van het betreffende gebied tot uitdrukking gebracht worden – tenminste, voor onderwijsgebieden die betrekkelijk nieuw zijn en niet bestreken worden door de gangbare onderwijspraktijk.

Verzuimt men een dergelijke omkleeding of fundering van een geheel van leerdoelen te geven, dan loopt men het risico dat de leerdoelgerichte toetsen ongericht en oneigenlijk gebruikt worden. Sterker nog: men wekt deze ongerichtheid op doordat men van meet af aan verzuimt duidelijkheid over de ware bedoelingen te verschaffen, met als mogelijk gevolg dat het onderwijs op de toetsen wordt afgestemd. En aangezien deze toetsen onvolledig zijn en de essentie van het begrip oppervlakte niet dekken, krijgen we de vreemde figuur van gedesorienteerd onderwijs op basis van doelgerichte toetsen, kortweg: onderwijs op toetsgerichte leerdoelen.

► DE KWESTIE VAN FUNDERING (6)

Nu zou men kunnen tegenwerpen dat een dergelijke gefundeerde beschrijvingswijze het *cito*boekje wellicht te buiten gaat.

Misschien is dit wel zo, maar dan één van tweeën: ofwel men had een ruimere omkleeding of fundering van leerdoelen moeten geven, zodat het mogelijk

geweest zou zijn essentiële aspecten van het meten als cognitieve vaardigheid op niet mis te verstane wijze in de doelen aan te geven, ófwel men had de zeer beperkte waarde van het produkt moeten signaleren – om niet te zeggen dat men de konstruktie dan beter geheel achterwege had kunnen laten.

Let wel, we hebben 't over leerdoelgerichte toetsen bij een betrekkelijk 'nieuw gedachte' leergang en niet over die bij gangbaar onderwijs. We moeten dit onderscheid nadrukkelijk maken, omdat de status van leerdoelen in die gevallen sterk verschilt en bijgevolg ook de wijze van formuleren, funderen en konstrueren.

gangbaar onderwijs

In een artikel van Bakker van Van Bergen over leerdoelgerichte toetsen lezen we:

'Leerdoelgerichte toetsen sluiten nauw aan bij de doelstellingen die impliciet of expliciet in de onderwijspraktijk worden nagestreefd. Deze leerdoelgerichte toetsseries kunnen derhalve beschouwd worden als hulpmiddelen om na te gaan in hoeverre nagestreefde doelen bereikt worden. De op te nemen doelstellingen worden vastgesteld na grondige bestudering van de thans in de onderwijspraktijk nagestreefde doelstellingen en na adviezen te hebben ingewonnen bij ter zake kundige personen en instanties.'¹⁶⁾

Op grond hiervan wordt bij elk leerdoel een aantal toetsitems ontwikkeld. Dit gebeurt door een konstruktieteam. Daarna worden de toetsen uitgeprobeerd in de onderwijspraktijk en net zo lang verbeterd tot een definitieve versie kan worden samengesteld.

Deze procedure is duidelijk. Het fundament van de leerdoelgerichte toetsen ligt in de gangbare onderwijspraktijk, dus in de aktueel gerealiseerde leergangen van de leerboekseries. Men zou het fundament eventueel nog verder kunnen blootleggen in een ekspliciet gesteld betoog, maar dit is niet per se nodig omdat de gangbare praktijk op zich een weliswaar verzwegen, maar toch voldoende duidelijke basis van de leerdoelen en bijbehorende toetsen vormt. In feite was dit de gang van zaken bij de leerganggebonden rekentoetsen, althans de aanvankelijke opzet. Daar kwam echter door de snelle veranderingen in het reken/wiskundeonderwijs danig de klad in.¹⁷⁾

Hoe dan ook, een dergelijke werkwijze voor het ontwikkelen van leerdoelgerichte toetsen op basis van een gangbare onderwijspraktijk is voldoende gegrondvest door de onderwijstraditie en derhalve voldoende verantwoord – als men tenminste het vigerende onderwijs als zodanig wil aanvaarden.

niet-gangbaar onderwijs

Bij de leerdoelgerichte toetsen voor meten staan de zaken er heel anders voor. Het gaat hier niet om

leerdoelen bij een aktueel gerealiseerde leergang meten, dat is nu wel duidelijk.

Wat vormt nu de fundering van de leerdoelen voor oppervlakte?

En wat is de basis van de leerdoelen voor het metriek stelsel?

Hoe komt men aan dit fundament?

Wat doet men met de respons van de zogenaamde deskundigen?

Het *cito* legitimeert z'n werkwijze onvoldoende door het bij een verwijzing naar vage bronnen of duidelijke deskundigen te laten. Zeker bij een relatief nieuwe opzet als die van oppervlakte zou het matematisch-didaktische fundament waarop de leerdoelen rusten, blootgelegd moeten worden.

Nu dit niet gebeurt is, rijzen vragen waarop wij in het voorgaande – zij het een beetje in het duister rondtastend – geprobeerd hebben antwoorden te vinden.

Maar we zouden nog talrijke vragen aan de reeks gestelde kunnen toevoegen:

Waarom worden geen toepassingsproblemen aangeduid?

Waarom komt de kwestie van het vergroten niet aan bod?

Waarom worden geen oppervlakten van parallelogrammen en driehoeken in de leerdoelen vastgesteld?

Op welke observaties van leerprocessen zijn de leerdoelen gebaseerd?

Er is slechts één manier om zich hieromtrent in eerste ronde voldoende te verantwoorden en dat is: geef een duidelijk zicht op de fundering van de gekozen leerdoelen en op de motieven voor die bepaalde keuze.

We stelden al eerder de vraag of een dergelijke eksplicitering wel tot de taak van het *cito* gerekend kan en mag worden.

We laten het antwoord hierop open, maar stellen slechts vast dat zo'n leerdoelfundering noodzakelijk is en dat indien het *cito* deze niet kan maken of wenst te maken, dit dan maar in samenwerking of samenspraak met andere instanties binnen de verzorgingsstructuur gedaan moet worden. Want één ding staat vast: op de zwevende vloer van de eerder gegeven motivering kan geen verantwoorde toetsserie aangelegd worden – in ieder geval kunnen noch de onderwijsgeevenden, noch de onderwijsontwikkelaars, noch de deskundige respondenten bevroeden wat zij met zo'n leerdoelenlijst aan moeten.

matematisch-didaktische beschouwing

Hoe kan zo'n funderende beschouwing eruit zien?

Wat oppervlakte betreft, verwijzen we naar een tweetal leerplanpublikaties van wiskobas om antwoord op deze vraag te krijgen en wel naar het

eerste hoofdstuk van leerplanpublikatie 7 en het laatste van leerplanpublikatie 9.¹⁸⁾

Daarin komt onder meer naar voren:

- aandacht voor het kwalitatief vergelijken;
- samenhang omtrek, oppervlakte en inhoud;
- omstruktureren (omvormen) van meetkundige figuren;
- aandacht voor vergroten en verkleinen en het 'gedrag' van oppervlakte daarbij;
- insluitstrategieën voor berekening van oppervlakte;
- indirect oppervlaktemeten via andere grootheden;
- formules voor oppervlakteberekenen: rechthoek, parallellogram, driehoek;
- oppervlakte en dichtheid;
- toepassingen omtrent:
 - bevolking;
 - energie;
 - plattegronden;
 - binding met andere grootheden;
 - activiteiten als: schilderen, naaien, beleggen, bekleden, bebouwen.

We citeren twee onderdelen uit 'Oppervlakte – als verschijnsel benaderd' om enigszins een indruk te geven van zo'n analyse.

'Oppervlakte is een grootheid om voorwerpen mee te meten van een verscheidenheid die gevarieerder lijkt dan bij welke andere grootheid ook:

- een vel of rol papier of karton;
- een plaat hout of hardboard;
- een rol of coupon stof;
- een huid leer;
- een voetbalveld of zwembad;
- een stuk bouwland of bos;
- een perceel om te bebouwen;
- het territorium van een staat en zijn onderdelen naar aard van gebruik;
- het bronnengebied van een rivier;
- de spiegel van een meer of zee;
- een muur om te schilderen of te pleisteren;
- een vloer om te beleggen of te parketteren;
- een kantoortvloer of raamoppervlak om schoon te maken;
- een straat om te plaveien of te asfalteren;
- een dak om te dekken;
- een weiland om te maaien;
- een akker om te ploegen en te bezaaien, of te beplanten;
- een huidoppervlak om zijn warmteuitwisseling te kennen;
- een huidoppervlak, om nauw of luchtig te bekleden;
- het bladerenoppervlak van een bos om zijn verdamping en gasuitwisseling te kennen.

En verder:

- oppervlakken van meetkundige figuren, vlakke, afwikkeldbare en niet-afwikkeldbare, al dan niet in formules uitdrukbaar;
- als zodanig van belang, of als hulpmiddel om leng-

ten in andere uit te drukken (zoals bij de stelling van Pythagoras).¹⁹⁾

'Oppervlakte laat zich veelzijdig aangrijpen. Ik som de toegangen resumerend op:

- eerlijk verdelen:
 - door van regelmatigheid te profiteren;
 - bij wijze van schatten;
 - bij wijze van meten;
- vergelijken:
 - door in elkaar bevat zijn;
 - door knip-plak-procedures;
 - bij wijze van schatten;
 - bij wijze van meten;
 - door middel van afbeeldingen; dat wil zeggen: verplaatsingen, affiniteiten, scheringen;
- meten:
 - door uitputten met eenheden; met telkens verfijnde deelenheden;
 - door benaderingen van binnen en buiten; met vaste roosters; door aangepaste figuren;
 - door herleiding met knip-plak-procedures;
 - door middel van vaste formules; door middel van afbeeldingen; dat wil zeggen: verplaatsingen, affiniteiten, scheringen.

Uit didactisch oogpunt zijn al deze toegangen aanvaardbaar, de ene met meer, de ander met minder gewicht, en het laat zich niet rechtvaardigen als men zich terwille van de zuiverheid der methode tot één zou beperken. Integendeel, men zal zoveel mogelijk profiteren van de rijkdom. En dit niettegenstaande de didactische onmogelijkheid van het meer dan lokaal ordenen van dit begrippenveld; dat wil zeggen van:

- het stellen van de vraag naar inwendige en uitwendige consistentie van de onderscheiden toegangen;
- het afpalen van bereiken van geldigheid van die toegangen;
- de logische rechtvaardiging van die toegangen in hun onderlinge verband.

Dit betekent niet een zich beperken tot een geheel naïeve en onkritische activiteit in een veld, dat immers vol is van voetangels en klemmen. Zodra grootheden in 't geding zijn, is er kans op verwarringen: afstanden, tijden, snelheden, meters per seconde en seconden per meter, benzineverbruik per 100 km en afgelegde weg per liter, zijn er voorbeelden van. Voor de konstitutie van grootheden als mentale objecten is ook vereist, dat zij met andere gekonfronteerd worden. Bij oppervlakte is de omtrek de grote misleider. Op hetzelfde ogenblik dat kinderen er blijk van geven, een oppervlakte eerlijk te kunnen verdelen, laten ze zich toch maar door welgekozen voorbeelden misleiden, oppervlakten van figuren naar hun lineaire afmetingen te beoordelen.



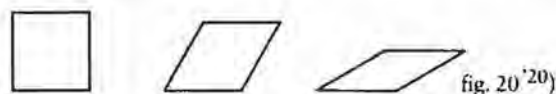
fig. 19

Fig. 19 toont een situatie, waarin sommigen aan de rechter figuur een grotere oppervlakte toekennen dan aan de linker, wegens de grotere omtrek, terwijl anderen de 'smalheid' van de figuur (gemeten als afstand

van de schuine parallellen) tot de omgekeerde conclusie verleidt. Dat men de oppervlakte van de peloponnesos niet kan bepalen door er omheen te zeilen, vond Plato waard om te beklemtonen. Galilei's 'zak' aan verschillende kanten dichtgenaaid, om binnen dezelfde oppervlakte verschillende inhouden op te nemen, is een ander historisch voorbeeld dat hier aangehaald mag worden.

Voor de konstitutie van het mentaal objekt oppervlakte zijn ook vereist:

- voorbeelden van figuren die hun (misleidende) afwijkingen in lineaire afmetingen ten spijt, dezelfde oppervlakte hebben, zoals de parallellogrammen met gelijke basis en hoogte;
- voorbeelden van figuren die hun (misleidende) overeenstemming in lineaire afmetingen ten spijt, verschillende oppervlakte hebben, zoals verschillende door buiging uit elkaar ontstaande ruiten (fig. 20).



Nu is zo'n funderende beschouwing natuurlijk ook niet onproblematisch. Men legt daarin immers zoveel mogelijk z'n kaarten op tafel: de essenties van het te leren gebied, de visie op het onderwijs, de globale leerlijn, de essentiële onderdelen van oppervlaktemeting, de 'sfeer' van het onderzoeksgerichte onderwijs, reacties van kinderen, de relatie met de realiteit, de relatie met verwante grootheden, de standaardtoepassingen en zo meer – wat natuurlijk in heel wat opzichten diskutabel kan zijn.

Maar bij het van gedachten wisselen heeft men aan zo'n funderende beschouwing tenminste houvast: men weet waar men over praat, en kan gemotiveerd reageren, iets wat ten aanzien van de zwevende leerdoelenlijst niet goed mogelijk is, omdat de achterliggende conceptie daarvan niet onthuld wordt. De wapperende verwijzingschema's die nu door het *cito* gehanteerd worden, maken de bedoelingen van de leerdoelen alleen nog maar onduidelijker.

matematisch-didaktische beschouwing en de leerdoelenlijst

Tegen de achtergrond van het zojuist gestelde over de mathematisch-didaktische fundering zal duidelijk zijn waarom we ons in het voorgaande betoog afgevraagd hebben wat toch wel de reden mag zijn om in de doelenlijst geen aandacht te besteden aan:

- essentiële onderdelen van het begrip oppervlakte als relaties omtrek-oppervlakte-inhoud, vergrotingen, e.d.;
- standaardtoepassingen in verband met indirecte meten;
- oplossingsstrategieën van insluiten, verfijnen;
- bepaalde formules;
- enz.

En ook: waarom men zulke inkonsequente en enge

formuleringswijzen hanteert. Waarom wordt er niet gesproken over de beperkingen van de gebruikte formuleringen?

In ieder geval bieden mathematisch-didaktische beschouwingen de mogelijkheid om zo'n ongestructureerde, ongemotiveerde, ongefundeerde leerdoelenlijst kritisch te doorlichten. Men moet dan echter ook de kwestie van de leerdoelformulering als geheel aan de kaak stellen.

Samengebonden in enkele zinnen bestaat de hoofdkritiek op de leerdoelenlijst bezien vanuit mathematisch-didaktisch standpunt hieruit, dat het meten nog te zeer gezien wordt als een instrumentele vaardigheid, waardoor essentiële aspecten van het begrip uit het oog verloren worden. Het *cito* mikt hier op de laagste cognitieve vaardigheden, laat de standaardtoepassingen buiten beschouwing en verliest de relaties met andere grootheden uit het oog. Om in stijl te blijven: het doelt te zeer op de oppervlaktestructuur van het leren, i.c. de waarneembare prestatie en verwaarloost de dieptestructuur ervan, i.c. het cognitieve proces dat aan die prestatie ten grondslag ligt. Daar komt bij dat de meettoetsen niet toegesneden zijn op het onderwijs dat vanuit de methoden aangezet wordt.

Verwarring alom, en vooral onnodige verwarring, want de onderwijsgevende is niet gebaat met toetsen die zich op de zoom van de begripsvorming richten.

► GEBRUIKSMOGELIJKHEDEN (7)

voortgangskontrolle

We noemden in navolging van De Groot het dekkingsprobleem als hét grote probleem van de doelformulering.

Bij de leerdoelgerichte toetsen is er echter – we signaleerden dat reeds enkele malen – een dubbel dekkingsprobleem, omdat hier de konditiebepaling van welomschreven onderwijs ontbreekt. Bij het vergelijken van de doelgerichte toetsen van het *cito* met de methodengebonden leerdoelen wordt men getroffen door de enorme verschillen: vaak dekt de toets in het geheel niet wat met het betreffende leerdoel in de methode beoogd wordt. Omgekeerd, in de methode worden doelen nagestreefd die in de leerdoelenlijst ontbreken – we wezen daar in het begin al op bij het eerste het beste leerdoel. En over toepassingen treffen we zegge en schrijve één serie in de leerdoelenlijst aan.

Kortom, er kan geen sprake van zijn dat de leerdoelgerichte toetsen geschikt zijn voor de eerstgenoemde gebruiksmogelijkheid, namelijk die van voortgangskontrolle.

leergangkonstruktie

Nu zou men kunnen beweren dat dit nu juist één van de sterke punten van die leerdoelgerichte toetsen is; het legt de tekorten van een methode bloot.

Dit is echter onjuist, men kan evenzeer het omgekeerde stellen – ook dit werd bij vergelijking van leerdoel 1 bij *nzz* duidelijk. En nog eens: juist bij de moeilijke gevallen, i.c. de standaardtoepassingen en de essentiële elementen van de begripsvorming, laat de toetsserie het afweten.

Overigens zijn in het voorgaande heel wat redenen genoemd om duidelijk te maken waarom de toetsserie wel een heel slecht middel is om leergangen op te zetten: de essentie van het begrip ontbreekt, de lijst is onvolledig, de cognitieve vaardigheden zijn van een laag nivo, de intentie van bepaalde doelen is onduidelijk, noem maar op.

Dus ook deze gebruiksmogelijkheid kan het bestaan van de leerdoelgerichte toetsen meten niet rechtvaardigen.

voortoetsing en diagnose

Natuurlijk kunnen de opgaven als voortoetsing gebruikt worden. Maar een voortoetsing tot wat? De structuur van de leerdoelenserie is te onduidelijk om als houvast bij het 'na-onderwijs' te kunnen dienen. Het is zeker niet zo dat leerdoel 1 vóór leerdoel 6 of 7 zou moeten komen: omvormen is vaak lastiger dan het louter toepassen van een formule.

Diagnose als gebruiksmogelijkheid biedt evenmin perspectieven. Wat in de zeven leerdoelen vervat ligt is niet voldoende voor een goed begrip van oppervlakte. Anders gezegd: men kan de beschreven leerdoelen beheersen zonder nochtans voldoende notie van oppervlakte, c.q. meten te hebben en in sommige gevallen werkt het aangeduide beheersingsdoel zelfs belemmerend om tot goed begrip te komen, zoals met name de te sterke nadruk op de rechthoek zoals die in het traditionele rekenen voorkwam.

Al met al zijn de leerdoelen dus ondeugdelijk voor zowel voortgangskontrolle, voortoetsing, diagnose, als leergangkonstruktie, omdat daarvoor nu juist wel noodzakelijk is dat de essentie van het begrip geraakt wordt.

Innovatief gezien kunnen de leerdoellijsten zelfs nadelig werken, want als onderwijsgeevenden, leerboekschrijvers, begeleiders, en anderen, de leerdoelgerichte toetsen tot richtlijnen voor onderwijs en ontwikkeling gaan gebruiken, richten ze zich daarmee niet op de kern van de begripsvorming. Met de leerdoellenlijst in de hand komt men dus niet door het ganse land van het meten, maar blijft men integendeel in het toegangsgebied steken of wat rondzwerven langs de grenzen ervan.

De beduchtheid die Cronbach uitte ten aanzien van beheersingsleren ('mastery learning') geldt mutatis mutandis ook voor leerdoelgerichte toetsen:

'To get the educated person we need, we are going to have a three-stage rocket. The first-stage rocket is

training. The training orientation produces trained responses, shapes the behavior we want in some basic and essential areas'...

'The second-stage rocket brings the person to intelligent analysis and problem-solving. And the third one goes beyond that to foster creative, self-expressive production. While I accept much that Dr. Bloom has said about the first stage, I think that a straightline curriculum pointing directly at the training target will miss the second- and third-stage outcomes.'²¹⁾

Cronbach stipuleert dat het eigentijdse beeld van onderwijs als een drietrapsraket niet klopt. Met name de daardoor gesuggereerde openvolging van training, problem-solving en creatieve produktie is misleidend. Het gaat er juist om de eenheid van deze aspecten in het onderwijs te bewaren.

Leerdoelgerichte toetsen, als gerealiseerd in 'meten', werken het bewaren van deze drieëenheid echter niet in de hand, maar bevorderen veeleer de lancering van een eenzijdige trainingsgerichtheid.

► AANBEVELINGEN (8)

Toetsontwikkeling is een belangrijk aspect van de ontwikkeling van onderwijs. Het *cito* vervult zonder twijfel een belangrijke functie bij het ontwikkelen van eindtoetsen en eveneens bij de leerplanevaluatie in ruime zin, waarvan ook het *lowo* heeft kunnen profiteren.²²⁾

Maar leerdoelgerichte toetsen zijn een zaak apart – ook binnen het *citowerk*. Althans voor zover het toetsen betreft die geen betrekking hebben op gangbaar onderwijs, zoals die omtrent meten.

Over deze kwestie heerst zoveel onduidelijkheid dat we menen dringend te moeten aanbevelen om, alvorens op ruime schaal tot ontwikkeling en verspreiding van dergelijke 'nieuwe' toetsen over te gaan, eerst eens diepgaand na te denken over, verantwoording af te leggen van en duidelijkheid te verschaffen aangaande de volgende punten:

- het begrip leerdoel, de vorm van leerdoelformulering;
- de inhoudelijke fundering van deze 'nieuwe' leerdoelgerichte toetsen;
- het inhoudelijke bereik van die toetsen;
- de status ervan met betrekking tot ontwikkeling en onderwijs.

vorm

Over de vorm die het *cito* bij de leerdoelformulering gebruikt, bestaat zowel in geschrift als in uitwerking nogal wat onduidelijkheid – we wezen daar reeds op.

Nu ligt aan de verhouding tussen een doelstelling en de 'bijbehorende' opgavenverzameling ook wel een ingewikkelde problematiek ten grondslag, waarvoor verschillende oplossingen gezocht worden.

Maar het gaat niet aan om deze uiterst gewichtige

en subtiele problematiek af te doen met wat obligate opmerkingen over helderheid van gedragsomschrijving en gespecificeerdheid van leerinhoud, zoals in de *cito*handleiding gebeurt. Alsof het allemaal zo eenvoudig zou zijn! Dat het overigens niet zo simpel is, blijkt wel uit de weinig consistente manier waarop men de leerdoelformulering zelf hanteert.

Speciaal wijzen we nog eens op het belang van leerdoelen op het tussennivo van de standaardtoepassingen en algemene strategieën bij rekenen en meten. Op dit punt zouden ook de einddoelen wat bijgesteld kunnen worden. De thans door het *cito* hiervoor gebruikte formuleringwijze is te algemeen en zou zeker wat meer gespecificeerd kunnen worden.

Hoe dan ook, er is alle reden om zich eens in een algemene beschouwing over de vorm van leerdoelformulering uit te spreken.

fundering

Het belang van een fundering bij 'nieuwe' leerdoelseries werd reeds uitgebreid beschreven.

Dat een bepaalde conceptie omtrent meten thans ontbreekt, blijkt wel uit de onevenwichtigheid van de verschillende categorieën. Inhoudelijk bezien is het onderdeel over oppervlakte nog het best uitgewerkt. De leerdoelen van het metriek stelsel bieden wel een erg verouderd onderwijsbeeld.

We hebben ons afgevraagd of funderende beschouwingen van wiskundig-didactische aard en observatiebeschrijvingen ten dienste van de motivering en legitimering wel tot de competentie van het *cito* gerekend moeten worden. Toch zijn die analyses nodig, wil men tot een verantwoorde samenstelling kunnen komen. De 'screening' van de leerdoelen door deskundigen neemt niets af van de noodzaak daartoe.

Wil men de zware taak van het samenstellen van leerdoelgerichte toetsen op zich nemen, dan zal dit in een zodanig samenwerkingsverband dienen te gebeuren – naar onze mening – dat een goede fundering gewaarborgd wordt. Pas dan zijn kwesties als competentie (wie bepaalt de doelstellingen?) en legitimering (hoe worden doelstellingen gevonden?) serieus bespreekbaar.

bereik

Bij de zaak van het inhoudelijke bereik van leerdoelgerichte toetsen gaat het erom in hoeverre in de gekozen leerdoelen bepaalde begrippen, relaties, standaardtoepassingen, strategieën, operaties, e.d., verwoord zijn en in bijbehorende opgaven getoetst worden.

Juist bij een onderwerp als meten zijn hogere produktdoelen en langere-termijn-doelen van essentieel belang. Want hoe paradoxaal het ook moge

klinken: meten kan in het domein van het wiskundeonderwijs bepaald niet als een instrumentele vaardigheid opgevat worden. Anders gezegd: je kunt pas gaan meten als je begrip hebt van meten en op dat begrip komt 't aan. Daarom is het van vitaal belang te weten in welke mate de leerdoelen het domein meten bestrijken en wat de beperkingen van deze doelen zijn ten aanzien van de cognitieve processen die aan wel-begrepen meetgedrag ten grondslag liggen.

Indien hieromtrent enige duidelijkheid verschaft is – wat zeer aan te bevelen zou zijn – kan ook de status van de leerdoelen wat duidelijker gemaakt worden.

status

Het verschijnsel van de leerdoelgerichte toetsen is een schimmig fenomeen. Het zou dan ook zeer aan te bevelen zijn als er duidelijkheid zou komen over de status van deze toetsen in het onderwijs en de onderwijsontwikkeling.

Volgens de *cito*geschriften zijn leerdoelgerichte toetsen voor vele doeleinden bruikbaar, namelijk voor didactische oogmerken als voortgangskontrolle en voorttoetsing, alsmede voor diagnostisch gebruik en leergangkonstruktie.

We hebben voor enkele van de genoemde punten eerder geprobeerd aan te tonen dat een dergelijke veelzijdige gebruiksmogelijkheid uitgesloten is. We gaan er nu niet verder op in, al zou met name over de aanwending van toetsen voor diagnose, werkplanontwikkeling en -evaluatie nog heel wat op te merken zijn.

Wel stellen we vast dat, indien er duidelijkheid verschaft is over de vorm, de fundering en het bereik van leerdoelen, het ook mogelijk is meer helderheid over de status van leerdoelgerichte toetsen te bieden.

slot

Ziehier onze korte toelichting op de aanbevelingen om meer informatie over de aard, de basis, de inhoudelijke reikwijdte en de gebruiksmogelijkheden van leerdoelgerichte toetsen te geven.

Veel van wat hier gevraagd wordt, is niet eenvoudig aan te bieden. Veel ook zal het specifieke *cito*werk te boven gaan. Tevens hangt een belangrijk deel van de geschetste problematiek samen met de specifieke aard van de wiskundige activiteit en vooral ook met de revolutionaire fase waarin het reken/wiskundeonderwijs op de basisschool zich thans bevindt. Het zij zo. Dat is des te meer een reden ervoor te waken dat de onduidelijkheid en verwarring in deze kontreien niet nog meer toeneemt. Duidelijkheid omtrent de status van leerdoelgerichte toetsen voor het reken/wiskundeonderwijs en zorgvuldigheid bij de ontwikkeling van die toetsen is daarom

een eerste vereiste. Vandaar dat wij hier zo uitgebreid op deze problematiek zijn ingegaan.

In feite zijn we nog te summier geweest. We hadden namelijk aan de hand van het voorbeeld oppervlakte moeten laten zien hoe de vier aanbevelingen concreet vertaald kunnen worden. We zouden dan nog eens onze eerdergedane suggesties ten aanzien van de doelbeschrijving op een rij gezet hebben. Met betrekking tot de fundering zouden we ons gebaseerd hebben op enkele beschouwingen uit *rowoleerplan*publicaties. Het bereik van de nieuwe leerdoelenlijst zou vooral afgeperkt zijn ten opzichte van de algemene doelstellingen. Ten aanzien van de beschrijving van de status zouden we zeer omzichtig te werk zijn gegaan, omdat de leerdoelenlijst makkelijk misbruikt kan worden. En als we dan klaar waren, zouden we moeten konstaten dat we een voorbeeld van een stuk onderwijs over oppervlakte ontwikkeld en beschreven hadden, waarvan de leerdoelgerichte toetsen slechts één klein onderdeel uitmaken...! Met toetsen als voorbeelden, als suggesties, als deelprodukten. Want toetsontwikkeling is toch in eerste instantie zaak van de onderwijsgevende zelf: het vormt een belangrijk reflectiemoment op het gegeven onderwijs.

Maar goed, in dit artikel zijn we met het grondidee van het *cito* meegegaan. Vanuit dit gezichtspunt beschouwd kunnen de leerdoelgerichte toetsen echter de toets der kritiek niet doorstaan.

► OVERZICHT (9)

Na een korte inleiding over leerdoelgerichte toetsen meten, waarin de leerdoelen over oppervlakte gepresenteerd werden alsmede voorbeelden van twee toetsen, werd vanuit praktisch standpunt bezien een eerste commentaar op deze toetsen gegeven. Daarbij signaleerden we direkt al problemen met betrekking tot volledigheid, dekking, formulering en fundering van de betreffende leerdoelen. Deze punten werden als voorlopige konklusies vastgesteld, welke vervolgens nader onderzocht werden. Dit gebeurde mede aan de hand van een voorbeeld van een stukje onderwijs over oppervlakte.

Wat betreft de volledigheid kwamen we eens te meer tot de slotsom dat de leerdoelenlijst oppervlakte belangrijke leemten heeft. En wat de dekking en formulering van de leerdoelen aangaat, luidde de konklusie dat met name het gemis van een konditiebepaling betreffende het onderwijs zich duidelijk deed gevoelen, wat tot gevolg heeft dat grote onduidelijkheid en misverstanden kunnen ontstaan. Het tekort aan onderwijsondergrond welke inherent is aan dit soort 'nieuwe' toetsseries die niet gebaseerd zijn op gangbaar onderwijs, c.q. één bepaalde methode of onderwijsleerpakket, is naar onze mening slechts te ondervangen door een funderende mathematisch-didaktische analyse van het betreffende ge-

bied. Daarin dienen onder meer de visie op onderwijs, de essenties van begripsvorming en de globale leerlijn aangegeven te worden. Als voorbeeld van een dergelijke analyse verwezen we naar een tweetal leerplanpublicaties. Mede aan de hand van deze analyse werd nog eens duidelijk hoezeer het verwijzingschema naar methoden de inhoud van de leerdoelen op losse schroeven stelt. Of beter: wat het belang van de onderwijscontext is voor de bepaling van de inhoud van leerdoelen en de bijbehorende toetsen. Met name bleek dat de toetsen niet zonder meer als dekkend beschouwd konden worden. Sterker: in de meeste gevallen kan men met de methode in de hand eenvoudig vaststellen dat de toetsen vaak op geen enkele wijze toegesneden zijn op de leerdoelen, zoals die vanuit de methoden geïnterpreteerd moeten worden. Het argument dat een dergelijke vaststelling aanleiding zou kunnen zijn om het onderwijs bij te stellen, blijkt niet steekhoudend te zijn. Veelal zal een dergelijke vaststelling tot een training op de toets leiden, en niet meer dan dat, zodat we onderwijs krijgen op toetsgerichte leerdoelen. Dit alles maakt de noodzaak van een funderende mathematisch-didaktische analyse des te dringender. Ook het bespreekbaar maken van zo'n leerdoelenlijst met betrekking tot onvolledigheid pleit voor een funderende beschouwing.

Van de vier gebruiksmogelijkheden van de leerdoelgerichte toetsen, te weten die van voortgangskontrolle, voorttoetsing, diagnose en leergangkonstruktie moest vastgesteld worden dat ze ondeugdelijk waren.

Tenslotte werden aanbevelingen gedaan om bepaalde aspecten van de leerdoelformulering te herzien en vooral ook om de gehanteerde beschrijvingsvorm te verantwoorden en te verduidelijken. Daarnaast werd erop aangedrongen de in sommige gevallen onduidelijke fundering van leerdoelgerichte toetsen bloot te leggen. Op deze wijze kan tevens het inhoudelijke bereik van de beschreven leerdoelen beter bepaald worden, wat ook een harde noodzaak is. En als vierde onduidelijke punt werd de status van de leerdoelen genoemd, ofwel de gebruiksmogelijkheden ervan met betrekking tot onderwijs en onderwijsontwikkeling.

Ter afsluiting werd er nog eens op gewezen dat vooral in het gebied van het wiskundeonderwijs uiterste behoedzaamheid met betrekking tot ontwikkeling en gebruik van leerdoelgerichte toetsen geboden is, dit zowel vanwege de specifieke trekken van de wiskundige activiteit – die juist in het onderwerp meten zo goed tot uitdrukking komen – als ook wegens de onzekere stand van zaken in de huidige overgangsfase van traditioneel rekenonderwijs naar min of meer nieuw reken/wiskundeonderwijs.

Behoedzaamheid heeft het *cito* ten aanzien van de

eindtoetsen rekenen steeds in acht genomen en het is daardoor een belangrijke en noodzakelijk stabiliserende faktor in de woelige jaren zeventig geweest. Indien de ontwikkelingen met betrekking tot leerdoelgerichte items zich in de jaren tachtig op het gebied van het reken/wiskundeonderwijs zouden voortzetten – waarvan wij, als gesteld, geen voorstander zijn – dan ware het in ieder geval te wensen dat het *cito* dezelfde behoedzame formule zou toepassen: *cito item dito*.

► NOTEN

- 1) CITO: 'Eindtoets Basisonderwijs. Doelenboek', arnhem 1978.
- 2) CITO: 'Leerdoelgerichte toetsen voor het basisonderwijs: meten', handleiding, arnhem 1979.
- 3) Zie noot 2, pag. 7.
- 4) Zie noot 2, pag. 33, 34 en 35.
- 5) Opgavenboekje a, pag. 21, 22.
- 6) Opgavenboekje a, pag. 31.
- 7) Zie noot 2, pag. 15.
- 8) Zie noot 2, pag. 10.
- 9) Zie voor een uitgebreide beschrijving van deze problematiek het thema 'Ralph de zeerover', in: Jong, R. de (ed.): 'Oppervlakte (2)', handleiding bij een werkblok voor het basisonderwijs, iowo-leerplanpublicatie 9, utrecht 1978, pag. 57-65.
- 10) Wiskivonteam: 'Leerplanontwikkeling onderweg 2a', iowo-publicatie, utrecht 1980, pag. 60.
- 11) Groot, A.D. de: 'Over fundamentele ervaringen: prolegomena tot een analyse van gesprekken met schakers', in 'Pedagogische Studiën', jrg 51, 1974, pag. 329-349.
- 12) Groot, A.D. de en Naerssen, R.F. van: 'Studietoetsen construeren, afnemen en analyseren', den haag 1969, pag. 156 e.v.
- 13) Zie voor een uitgebreide beschrijving van de relatie omtrek-oppervlakte: Heege, H. ter en Moor, E. de: 'Oppervlakte', handleiding bij een werkblok voor het basisonderwijs, iowo-leerplanpublicatie 7, utrecht 1977, pag. 133-142.
- 14) Zie met betrekking tot een 'dichtbij-beschrijving' van leerdoelen: Treffers, A.: 'Wiskobas Doelgericht', iowo, utrecht 1978.
- 15) Greeno spreekt over 'cognitive objectives of instruction'. Hij illustreert zijn opvattingen onder meer aan het optellen met breuken en laat zien hoe de onderscheiden benaderingswijzen verschillende transferen toepassingsmogelijkheden bieden. Wij zouden in dit verband spreken van een fundamentele wiskunde-didaktische analyse. Greeno's analyse schiet echter in een aantal opzichten tekort, met name wat betreft het weergeven van alle didaktische mogelijkheden (bijvoorbeeld ten aanzien van het eerlijk verdelen en meten) en vooral ook het belang van het gebruik van contexten en niet-zuiver cognitieve aspecten daarbij, zoals bijvoorbeeld van het begrip 'meaning', waaraan met name ook Donaldson aandacht besteedt. Maar dat doet niets af aan de belangrijke mogelijkheden die Greeno aangeeft. Wij hebben een formuleringswijze van doelen aangegeven – zie bijvoorbeeld 'Land van acht' in 'Wiskobas Doelgericht' – die bepaalde overeenkomsten met

de werkwijze van Greeno vertoont. We schetsten de onderwijsaanpak van 'Land van acht' en gaven de transfermogelijkheden van het geleerde aan in verbinding met het gerealiseerde onderwijs, waarbij we vooral begrippen uit de wiskundendidactiek gebruikten.

Zie:

Greeno, J.G.: 'Cognitive Objectives of Instruction: Theory of Knowledge for Solving Problems and Answering Questions', in 'Cognition and Instruction' – Klahr, D. (ed.) – hillsdale 1976, pag. 123-159.
Donaldson, M.: 'Children's Minds', london 1978.

- 16) Bakker, G. en Bergen, J. van: 'Leerdoelgerichte toetsen wiskunde', in 'Euclides', jrg 7, pag. 318-325.
- 17) We doelen hier op: CITO: 'Rekentoetsen leerjaar 2, 3 en 4 basisonderwijs', handleiding, arnhem 1979.
- 18) Zie noot 13 en noot 9.
- 19) Zie noot 9, pag. 111.
- 20) Zie noot 9, pag. 118 en 119.
Het gaat hier om een beschouwing van H. Freudenthal.
- 21) Cronbach, L.J.: 'Comments on Mastery Learning and its implications for curriculum development', in: 'Confronting Curriculum Reform' – Eisner, E.W. (ed.) – boston 1971, pag. 55.
- 22) Als voorbeeld van het samenwerkingsproject *iowo-cito* noemen we de evaluatie van het bekende lespakket 'Autobusproblemen', waarover onder meer in leerplanpublicatie 2 een uitgebreide beschrijving staat. De leerdoelen en de toetsen bestrijken hier een veel breder cognitief gebied dan die van de leerdoelgerichte toetsen meten.
We noemen de eerste drie van het totaal van veertien doelen bij dit pakket:
 - 1 het kunnen weergeven van een kwantitatieve verandering in de pijlentaal: getallen, pijlnotatie, +, -;
 - 2 de pijlnotatie (met één of meerdere pijlen) kunnen vertalen in gebeurtenissen, verhaaltjes, e.d.;
 - 3 vanuit een gegeven begintoestand en gegeven verandering de eindtoestand kunnen vaststellen door middel van doortellen of terugtellen met behulp van fiches, vingers of op de getallenlijn; de begintoestand en de verandering moeten in pijlentaal gegeven zijn:
voorbeeld: $4 \xrightarrow{+5} \dots$
 Nu zou men kunnen tegenwerpen dat dit soort formuleringen slechts mogelijk is op basis van een gegeven pakket.
Dit nu is naar onze mening niet juist. Ook op de grondslag van een fundamentele wiskunde-didaktische beschouwing kunnen dergelijke ruime doch duidelijke formuleringen gegeven worden – aldus is de strekking van ons betoog. Wij stelden ons teweer tegen een enge interpretatie van het begrip leerdoel, waarbij alleen maar de allerlaagste instrumentele vaardigheden getoetst worden, en vooral ook tegen de enge niet-dekkende toetsopgaven die erbij gesteld worden!
Ook in dit opzicht kan het motto '*cito item dito*' als aansporing voor het *cito* gelden niet af te glijden naar de aangeduide oppervlakkige interpretatie van de leerdoelgerichte toetsen, c.q. toetsgerichte leerdoelen.

Vóór publikatie in het 'Wiskobas-Bulletin' hebben we het artikel van Adri Treffers door het cito laten lezen, met de vraag er desgewenst kort op te reageren. Hieronder treft u de reactie van het cito aan.

► REAKTIE VAN HET CITO

Het is verheugend te konstateren dat het iowo zo uitgebreid aandacht schenkt aan onze publikatie 'Leerdoelgerichte toetsen voor het basisonderwijs: meten'.

Eén van de doelstellingen van dergelijke series toetsen is immers de discussie over onderwijs een concrete basis te verschaffen. De auteur snijdt in zijn artikel een aantal problemen aan waar we graag dieper op in zouden gaan. Helaas bedraagt de ons toegemeten ruimte slechts één pagina! Veel van zijn kritiek moeten we zodoende onbeantwoord laten. Alvorens op enige hoofdpunten in te gaan willen we eerst enige opmerkingen vooraf maken:

- 1 Een aantal beweringen betreffende tekortkomingen van het pakket worden onderbouwd met onjuiste of onvolledige citaten. Zo ontbreekt bijvoorbeeld in de opsomming van leerdoelen 'oppervlakke' het eerste leerdoel dat betrekking heeft op het begrip oppervlakte.¹⁾
- 2 Het betoog is gelardeerd met aannamen en veronderstellingen: stel nu (pag. 83), we gaan ervan uit (p. 85), we mogen veronderstellen (pag. 89), met als mogelijk gevolg (p. 90), etc.
- 3 De uitgave betreft een eerste versie. We citeren uit het 'Woord vooraf':

'Met de uitgave van deze versie leerdoelgerichte toetsen is de ontwikkeling ervan niet afgesloten. Het Cito realiseert zich dat dergelijke toetsen slechts ontwikkeld kunnen worden in nauwe samenwerking met de onderwijspraktijk. Het materiaal moet 'getoetst' worden in de praktijk van het onderwijs en op grond van ervaringen van onderwijzers en onderwijzeressen aangepast worden aan de eisen die de onderwijspraktijk stelt. Dit zal zijn neerslag moeten vinden in een volgende uitgave.'

Inmiddels is er een onderzoek gestart naar het feitelijke gebruik van leerdoelgerichte toetsen en worden verbeteringen aangebracht naar aanleiding van de resultaten van dit onderzoek. Verder is een werkgroep aan het werk de verwijzingen uit te breiden met didaktische aanwijzingen om hiermee de bruikbaarheid te verhogen.

Nu dan enige hoofdpunten van kritiek. Het komt ons voor dat de auteur zich te weinig gerealiseerd heeft voor wie deze serie leerdoelgerichte toetsen gemaakt is, namelijk voor de onderwijzers en on-

derwijzeressen van verreweg het grootste deel van de basisscholen die een of andere 'niet-wiskundige' rekenmethode gebruiken. We hebben getracht aansluiting te vinden bij datgene wat momenteel in het rekenonderwijs gerealiseerd wordt. Daarbij horen ook bepaalde didactische vernieuwingen. Hiervan hebben we enkel opgenomen in de leerdoellijst en de toetsen wat verwerkt is in voor ieder beschikbaar materiaal en waarover redelijke overeenstemming bestaat bij terzake kundigen. Hiermee is het bezwaar van de ontbrekende onderwijskondities tenminste gedeeltelijk weerlegd. Verder is dit ook een verklaring voor mogelijke onvolledigheden. De onvolledigheid die de auteur meent te moeten konstateren, namelijk het ontbreken van de relatie omtrek/oppervlakte, is volstrekt uit de lucht gegrepen. De relatie omtrek/oppervlakte krijgt in veel methoden weinig of geen aandacht. Omdat de auteur, en met hem alle andere deskundigen dit zo'n belangrijk leerdoel vinden hebben we hier expliciet aandacht aan geschonken bij leerdoel 3.1.1 'begrip omtrek' en 4.1.1 'begrip oppervlakte'.²⁾ De ruimte laat het volledig afdrukken van de betreffende toetsen helaas niet toe. Het vinden van de juiste weg tussen onderwijsrealiteit en didactische wenselijkheid en haalbaarheid is een moeilijke opgave die grote zorgvuldigheid vereist. Daarom hebben we alle middelen aangewend om een optimaal resultaat te bereiken: analyseren van methoden, bestuderen van rekendidactische werken, raadplegen van deskundigen en een uitgebreide proeftoetsing.

Overigens zijn de vernieuwingen allemaal niet zo nieuw als de auteur ons wil doen geloven. Men raadplege maar eens enige bekende rekendidactische publikaties en de handleidingen van een aantal rekenmethoden. Het is veeleer zo dat bekende didactische principes en hulpmiddelen onvoldoende toegepast worden omdat ze organisatorisch in een klas moeilijk uitvoerbaar zijn. Dit is waarschijnlijk de reden dat bijvoorbeeld het feitelijk uitvoeren van de meethandeling (meten met een duimstok, wegen met een weegschaal) minder plaatsvindt dan herleiden.*

De auteur besteedt veel aandacht aan de kwestie van de doelformulering. Het is onmogelijk om uitvoerig in te gaan op dit probleem. Hier is trouwens in de onderwijskundige literatuur al veel over geschreven. Natuurlijk dekt een toets nooit het hele domein van gedragingen dat beschreven wordt door een leerdoel, zeker wanneer het 'hogere' leerdoelen betreft waarin de verzameling van gedragingen in principe oneindig is. De toets is slechts een bescheiden steekproef uit die gedragingen en de vraag is dan of het goed beantwoorden van de toetsvragen betekent dat het hele domein van gedragingen beheerst wordt en het leerdoel dus bereikt. Dit is in ieder geval niet zo als de leerkracht

alleen maar de toetsvragen onderwijst. We zijn hier echter niet zo bang voor. Er is genoeg leermateriaal voorhanden om rijke didactische situaties te creëren en achten de leerkrachten voldoende bereid en in staat hiervan op verantwoorde wijze gebruik te maken.

* Zie bijvoorbeeld:

- Goffree, F., Hiddink, A.A., Dijkshoorn, J.M.; 'Rekenen en didaktiek';
- Gelder, L. van: 'Grondslagen van de rekendidaktiek';
- Boomsma, G.: 'Handboek voor het moderne rekenonderwijs';
- diverse *iovo*publicaties.

¹⁾ en ²⁾ Noten redactie 'Wiskobas-Bulletin'.

De redactie van het 'Wiskobas-Bulletin' voegt voor de volledigheid leerdoelgerichte toets 4.1.1 toe. Het gaat hier om een leerdoel dat in het artikel 'Cito item dito' ontbreekt omdat het niet in strikte zin met 'oppervlakte' als maat, maar met 'oppervlak' te maken heeft.

4.1.1 Aangeven van het oppervlak van objecten en figuren:
- door met de hand het oppervlak aan te duiden
- door het oppervlak te kleuren

Dit begrip is op eenvoudige wijze te toetsen door de leerling met zijn hand het oppervlak van een vlak of object te laten aangeven door het te bedekken of erover te strijken.

Voor het aangeven van het oppervlak kan men de vlakken van in de klas aanwezige voorwerpen gebruiken, bijvoorbeeld: schoolbord; tafelblad; stoelzitting; voorkant van een doosje; het hele doosje; een bal.

Het begrip oppervlakte wordt nogal eens verward met ontrek.

Voorbeeldopdrachten

- 1 Geef met je handen het oppervlak van je stoelzitting aan.
- 2 Wijs het oppervlak van de bovenkant van een lucifersdoosje aan.
- 3 Geef het oppervlak van een bal aan.
- 4 Gegeven een houten balkje.
Opdracht: Geef het oppervlak van dit blok aan.
- 5 Teken je handsdruk en kleur het oppervlak.
- 6 Teken je vingerafdruk en kleur het oppervlak.
- 7 Je moet de kastdeur schilderen. Wat schildert je: de ontrek of het oppervlak?

aktivitei- ten- centrum (2)

Het aktiviteitencentrum heeft z'n belangrijkste betekenis voor de middenklassen van de basisschool.

Het is van groot belang een ruime keuze uit activiteiten en werkjes te hebben.

In deze tweede aflevering zullen we daarom veel voorbeelden van mogelijke activiteiten geven, zowel op het gebied van de wiskunde als op andere leerstofgebieden, zoals algemene kennis, wereldverkenning en taalonderwijs.

Bovendien lijkt het gewenst aanwijzingen te geven voor de werkorganisatie met een aktiviteitencentrum. Nu reeds wijzen we erop dat de leerkracht de activiteiten goed moet kennen, de activiteiten dus zelf gemaakt moet hebben om te weten welke problemen hij kan verwachten.

Dit heeft weer consequenties voor de manier waarop een aktiviteitencentrum wordt opgebouwd. Onze voorkeur gaat uit naar een geleidelijke start van zo'n aktiviteitencentrum.

lucifersproblemen

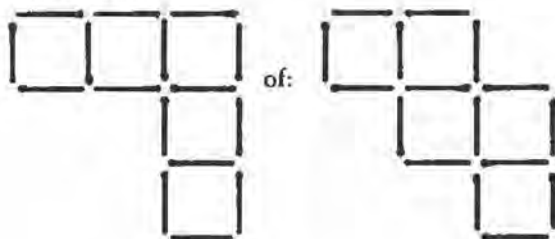
We geven een achttal niet te moeilijke lucifersproblemen.

lucifersprobleem 1

► Door twee lucifers van deze figuur te verleggen, kun je vijf in plaats van vier vierkanten vormen.

fig. 1

antwoorden:



lucifersprobleem 2

► Als je uit deze figuur twee lucifers weghaalt, kun je zes vierkanten overhouden.

fig. 2

lucifersprobleem 3

► Kun je van deze figuur twee lucifers verleggen, zodat er vijf in plaats van vier vierkanten ontstaan?

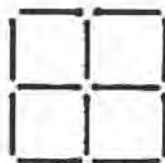
fig. 3

lucifersprobleem 4

► Deze figuur bestaat uit twaalf lucifers. Zie jij nu kans om van die twaalf lucifers geen drie, maar vier vierkanten te maken?

fig. 4

antwoord:

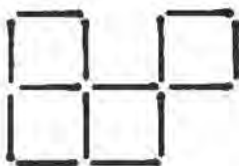


lucifersprobleem 5

► Door vier lucifers te verwijderen, kun je vier vierkanten overhouden. Er zijn meerdere oplossingen mogelijk. Probeer er maar eens een te vinden.

fig. 5

antwoord:



lucifersprobleem 6

- ▶ Door drie lucifers te verleggen, kun je een nieuwe figuur maken, die niet uit vijf, maar uit zeven vierkanten bestaat.

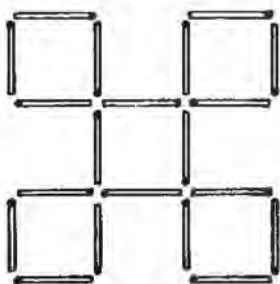


fig. 6

lucifersprobleem 7

- ▶ Door acht lucifers te verleggen, kun je één groot en één klein vierkant maken.

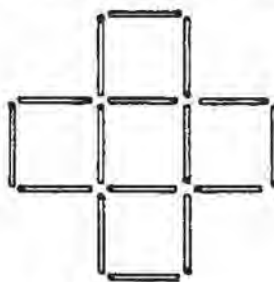
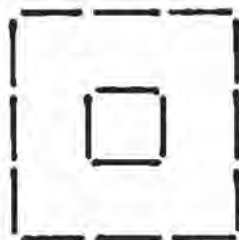


fig. 7

antwoord:



lucifersprobleem 8

- ▶ Neem vier lucifers weg, zodat er drie vierkanten overblijven.

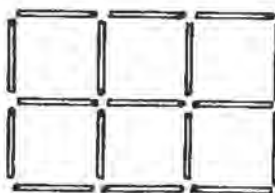


fig. 8

antwoord:



Indien u wel eens met luciferspuzzels heeft kennis gemaakt, zult u begrijpen dat de moeilijkheidsgraad van deze acht puzzels niet erg hoog is. De eerste zes probleempjes zijn vrij eenvoudig op te lossen door het verplaatsen van enkele lucifers (dus: door omvormen).

Een extra moeilijkheid ontstaat bij *probleem 7*, waarbij vierkanten van verschillende grootte ontstaan. *Nummer 7*, maar ook *8* zijn daardoor van een 'hogere' moeilijkheidsgraad.

Probleem 5 is eenvoudig tot één van een moeilijker soort te transformeren. Als je drie vierkanten in plaats van vier over zou moeten houden, is de oplossing bijvoorbeeld:

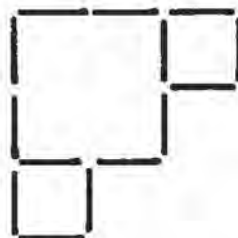


fig. 9

Hoe moeten we tegenover lucifersproblemen in het activiteitscentrum staan? We menen dat deze erin thuishoren, maar dat voor overdrijving moet worden gemaakt.

loco en mini-loco¹⁾

Bekend is het *loco*-materiaal dat vooral zeer aantrekkelijk is, vanwege de zelfcorrectie waarop het systeem is gebaseerd. *Mini-loco* onderscheidt zich van *loco* door de afmetingen van de antwoordenpuzzel: bij *mini-loco* vormen twaalf antwoordskaartjes een patroon, bij *loco* is dit aantal 24.

Het materiaal is te gebruiken op velerlei gebied: aardrijkskunde, biologie, enz., maar ook rekenen. Van de inhoud zijn we niet altijd ondersteboven, maar we achten sommige oefeningen zeker nuttig. We nemen twee voorbeelden uit het gebied van het rekenen op (fig. 10 en 11). Beide voorbeelden kunnen in het tweede, derde of vierde leerjaar gebruikt worden.

1	30 is 10 meer dan	13	60 is 2 minder dan
2	50 is 2 meer dan	14	80 is 10 minder dan
3	40 is 5 minder dan	15	20 is 4 meer dan
4	70 is 3 meer dan	16	10 is 3 minder dan
5	20 is 10 meer dan	17	20 is meer dan 14
6	40 is 7 minder dan	18	10 is 5 minder dan
7	80 is 4 minder dan	19	80 is meer dan 75
8	60 is 4 meer dan	20	70 is minder dan 72
9	30 is 8 meer dan	21	50 is meer dan 46
10	40 is 7 meer dan	22	10 is 7 minder dan
11	10 is 3 meer dan	23	30 is meer dan 29
12	80 is 3 minder dan	24	90 is minder dan 93

fig. 10

1	$4 \times 2 + 1 =$	13	$5 \times 4 + 1 =$
2	$8 \times 4 + 3 =$	14	$10 \times 2 + 3 =$
3	$5 \times 4 =$	15	$9 \times 2 + 1 =$
4	$6 \times 4 - 2 =$	16	$2 \times 4 + 2 =$
5	$7 \times 4 - 3 =$	17	$8 \times 2 + 1 =$
6	$6 \times 4 =$	18	$8 \times 4 =$
7	$2 \times 2 + 1 =$	19	$7 \times 4 + 2 =$
8	$7 \times 4 - 1 =$	20	$7 \times 2 + 1 =$
9	$3 \times 2 + 1 =$	21	$9 \times 4 + 1 =$
10	$7 \times 2 =$	22	$6 \times 2 =$
11	$4 \times 4 =$	23	$2 \times 2 =$
12	$9 \times 2 =$	24	$6 \times 4 + 2 =$

fig. 11

Naar ons idee horen *loco* en *mini-loco* in het activiteitencentrum thuis, met name vanwege het oefen-karakter van de sommen voorzover het over rekenen gaat en vanwege de uiterst simpele en motiverende 'korrektiesleutel'.

lettersommen

Op het nivo van het vierde, eventueel vijfde leerjaar past in het activiteitencentrum een aantal opgaven met lettersommen. Deze geven de mogelijkheid de kinderen opnieuw bewust te maken van bepaalde rekeneigenschappen.

We geven daarvan een voorbeeld:

$$a + a = ba.$$

Hierbij staan a en b voor onbekende cijfers. Dit sommetje geeft ons de volgende informatie:

- a kan slechts 5, 6, 7, 8 of 9 zijn;
- b kan slechts 1 zijn.

Al probeerend komen we erachter dat er geen a en b bestaan waarvoor het sommetje $a + a = ba$ 'uitkomt'.

Immers:

$$5 + 5 = 10 \text{ en geen } 5 + 5 = 15;$$

$$6 + 6 = 12 \text{ (niet 16);}$$

$$7 + 7 = 14 \text{ (niet 17);}$$

$$8 + 8 = 16 \text{ (niet 18);}$$

$$9 + 9 = 18 \text{ (niet 19).}$$

De enige mogelijkheid zou zijn $0 + 0 = .0$, wat ook fout is.

We geven drie voorbeelden van letteropgaven. Ook voor deze categorie geldt: overdaad schaadt.

$$a + a = bc$$

$$bc + bc = dc$$

► Welk getal is a ? En b ? En zo verder.

fig. 12

$$c \times c = a$$

$$c + c + c = a$$

$$ab \times b = ab$$

► Welk getal is a ? En b ? En zo verder!

fig. 13

$$ab \times c = adc$$

$$ab : c = d$$

$$ab + c = de$$

$$ab - c = c$$

► Welk getal is a ? En b ? En zo verder.

fig. 14

kijkboeken¹⁾

Zeer geschikt voor het activiteitencentrum zijn de kijkboeken voor de middenklassen. Hierin is algemene informatie verzameld uit artikelen, met veel plaatwerk en weinig tekst, uit allerlei bladen, zoals 'Margriet', 'Kampioen', 'De dierenvriend', of uit kalenders, e.d.

Een rijke bron vormen ook de uitstekende jeugdtijdschriften 'Okki', 'Jippo', en 'Taptoe'. Uit 'Okki' haalden we het volgende blad over vlinders:



fig. 15

Kenmerkend voor de kijkboeken is, dat kinderen informatie kunnen opdoen die aansluit bij hun belangstelling. Informatie die door de leerkracht zelf is samengesteld en gekozen op het motiverende karakter ervan voor de kinderen (en niet op bijvoorbeeld de encyclopedische waarde van de informatie).

vierkanten

In het activiteitencentrum zou zich een aantal doosjes met de volgende inhoud kunnen bevinden.

Een aantal stukken karton, gesneden uit een vierkant van acht bij acht centimeter.

De opdracht voor de leerlingen is, de vierkanten samen te stellen uit de delen. Deze opdracht is niet eenvoudig, vooral niet als het karton er aan de voor- en achterzijde hetzelfde uitziet.

Van de mogelijke verdelingen van het vierkant geven we tien voorbeelden:

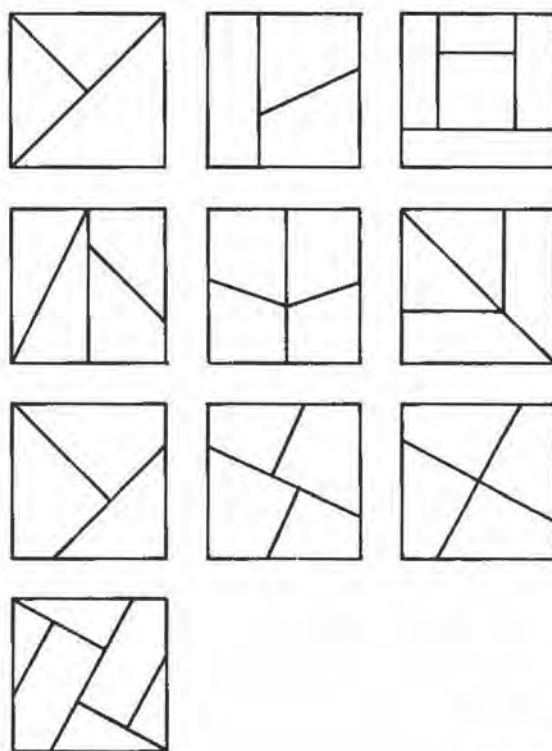


fig. 16

Deze legpuzzelvierkanten zijn te beschouwen als voorloper van het tangram.

Op een aardige, motiverende wijze maken de kinderen kennis met een belangrijk stukje meetkunde-onderwijs.

ons leeshoekje

De serie 'Ons leeshoekje'²⁾ bestaat uit 36 kleine boekjes. Elk boekje bevat ongeveer acht bladzijden tekst en acht bladzijden illustraties, veelal bijzonder sfeervol. De serie is uitstekend geschikt als basismateriaal voor het activiteitencentrum.

Er zijn zes categorieën boekjes:

- dieren uit koude streken;
- dieren uit warme landen;
- vogels, onze vrienden;
- dieren van de boerderij;
- kinderen in andere landen;
- wat de mensen geleerd hebben.

¹⁾ Zie ook het artikel: Heege, H. ter: 'Veldwerk' in 'Jeugd in School en Wereld', jrg 63 nr 1, augustus 1978, pag. 39 e.v.

²⁾ Uitgeverij Wolters-Noordhoff, groningen 1967, 1968 en 1969.

Het nivo van de boekjes is: tweede à derde leerjaar. De inhoud mikt, zoals ook de titels van de categorieën al aangeven, op verbreding van de algemene kennis.

We geven twee voorbeelden waarin de algemene kennis met behulp van een invullesje wordt vastgelegd. Het eerste voorbeeld is uit 'De poolvos' (categorie 'dieren uit koude streken'):

Hier is hij naar de rand van de zee gekomen om voedsel te zoeken.



fig. 17

Bij dit boekje wordt een verwerkingsopdracht in de volgende geest gemaakt:

de poolvos

- ▶ De staart van de vos lijkt op een
- In de winter is de kleur van zijn pels
- Het is dan om hem in de sneeuw te vinden.
- Hij eet
- ▶ Schrijf op wat je nog meer van de poolvos weet.
- Teken een poolvos.

fig. 18

Het tweede voorbeeld is uit 'Zoeloekinderen' (categorie 'kinderen in andere landen'):

Een Zoeloedorp noemen we een kraal.

Elk huis lijkt op een bijenkorf.

Het is gemaakt van houten palen

en heeft een rieten dak.



fig. 19

Bij dit boekje stellen we twee verwerkingsopdrachten samen:

zoeloekinderen

- ▶ De zoeloekinderen wonen in
- Ze hebben een donkere huid en hun haar is
-
- Het dorp noemt men een
- Het huis lijkt op een
- ▶ Ze hebben grote kudden op hun weilanden.
- De kleren die ze dragen zijn gekleurd.

fig. 20

Of:

<i>zoelokinderen</i>
► De zoelokinderen wonen in afrika. Zij Maak dit verhaaltje af!

fig. 21

organisatieaspecten

In het eerste en tweede artikel over het activiteiten-centrum hebben we een groot aantal voorbeelden opgenomen uit rekenen/wiskunde, maar ook daarbuiten:

- redeneerproblemen;
- tellen;
- lucifersproblemen;
- loco;
- lettersommen;
- kijkboeken;
- vierkanten;
- ons leeshoekje.

We zouden deze opsomming verder kunnen uitbreiden.

We kunnen het activiteitencentrum administreren, zo we dit wensen, door van elke leerling aan te kruisen of hij/zij een werkje of activiteit heeft gedaan.

Daarvoor krijgt elk kind een eigen aankruisschrift waarin de categorieën met een serie nummers voorkomen. Bijvoorbeeld:

meetkunde									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

fig. 22

Het gaat ons er vooral om, eraan te wennen het betreffende werkje of de activiteit pas aan te kruisen indien we er zeker van zijn dat de kinderen de activiteit begrepen hebben. Daarvoor is het nodig dat we de activiteiten goed kennen, weten waar de moeilijkheden in een bepaalde activiteit zitten, zodat we eigenlijk in één oogopslag kunnen zien of de leerling de activiteit goed heeft gemaakt.

De inhoud van het activiteitencentrum is niet gericht op een programma. De doelstelling ligt meer in zaken die met attitudevorming te maken hebben: het zelf uitkiezen van een aardige activiteit, het motiverende van zo'n activiteit en het oplossen van eventueel voorkomende problemen.

De onderwerpen liggen op het brede terrein van de algemene vorming. Dit houdt enerzijds algemene kennis in, zoals in de kijkboeken en in de serie leesboekjes 'Ons leeshoekje', anderzijds houdt het een probleem-oplossend-bezig-zijn in, zoals met de lucifersproblemen en de vierkanten.

Als onderwijsgevende hebben we nogal wat ruimte, onze eigen ideeën gestalte te geven in het activiteitencentrum.

wiskun- dige wereld- orientatie



ONDERZOEK

Dit artikel wordt wellicht de laatste aflevering in de serie 'Wiskundige wereldoriëntatie'.

In deze reeks hebben we verslag gedaan van onze pogingen de gedachtenwerelden van kinderen te begrijpen. De laatste maanden is het onderzoek naar die gedachtenwerelden duidelijk op gang gekomen, omdat met name in het onderbouwprogramma¹⁾ allerlei 'principes' beproefd moesten worden, maar ook omdat binnen dit programma stereotiepe fouten optraden.

principes

Bij de term 'principe' moeten we denken aan keuzen die al dan niet in het onderwijs gemaakt worden. Zo kunt u uw kinderen opzettelijk in een konfliktsituatie brengen, of ze voorspellingen laten maken, of ze rekening laten houden met onzichtbare hoeveelheden. Het zijn dus niet zozeer de beschreven leerstofeenheden en leersituaties van wiskobas die wezenlijk zijn. Het is meer de keuze die we uit deze onderwijsprincipes maken om het onderwijs zoveel mogelijk op de gedachtenwerelden van kinderen te laten aansluiten.

Maar zijn deze principes wel 'des kinds'? Dit hebben we geprobeerd na te gaan. In een serie 'Proeven op de som van wiskobas'²⁾ hebben we een en ander beschreven.

systemen

Kinderen zijn wel gericht op systemen die wij, volwassenen, hanteren maar ze hebben er zo hun eigen gedachten over. Dit is vooral in kringgesprekken op te merken.

postbode en bus

Aan tien kleuters van vijf jaar en aan tien eersteklassers hebben we (per kind) verschillende vragen gesteld omtrent 'onze' systemen.

We vroegen bijvoorbeeld:

.... 'Hoe weet de postbode waar hij een brief aan jou moet brengen'?....

Een andere vraag was:

.... 'Met welke bus kan ik bij jouw oma komen'?....

De groep kleuters gaf zes verschillende antwoorden op de eerste vraag:

.... 'Ik weet het niet.'

'Door de post gewoon gebracht.'

'Door de brievenbus.'

't Staat erop geschreven.'

'Er staat een naam op.'

'Er staat een nummer op de brief.'....

De spreiding van de antwoorden was bij de tien kleuters veel groter dan bij de eersteklassers. Laatstgenoemden kozen vrijwel unaniem (namelijk acht van de tien) voor één antwoord: aan naam, achternaam en adres kan de postbode zien waar de brief heen moet.

¹⁾ Het onderbouwprogramma rekenen/wiskunde zoals in eerste instantie ontworpen in en voor de Dr. W. Dreeschool te arnhem.

²⁾ Interne publikatie *iowo*.

Maureen (een van de kleuters) denkt bij de eerste vraag over de postbode lang na en zegt tenslotte:

....'Hij stopt hem gewoon in de brievenbus.'....

Je realiseert je bij zo'n antwoord pas goed dat kleuters niet kunnen lezen en dus alleen op de handelingen van de postbode zullen letten.

Norman (eersteklasser) antwoordt op dezelfde vraag met een aantal voorwaarden:

.... 'Omdat er een postzegel op zit en een stempel en ook wel eens een naam.

De postbode kan ook wel vragen aan mensen waar Norman woont.'....

Ook bij de tweede vraag (Met welke bus kan ik naar je oma?) gaven kleuters meer *verschillende* antwoorden dan eersteklassers.

Vijf van de tien kleuters antwoordden met een kleur:

....'Met de blauwe of de gele.'....

Twee noemden een getal.

De overige twee wisten niet met welke bus je naar oma gaat.

Bij de eersteklassers was er een sterke tendens om te kijken naar het nummer op de bus: zes van de tien gaven deze oplossing aan.

Twee kinderen kozen de kleur van de bus en twee kozen het nummer van de *bushalte* als criterium waarop gelet moet worden.

Niemand van de eersteklassers zegt dat hij geen oplossing weet.

Natalie (eerste klas) zegt over de bus die je naar oma brengt, dat ze dit wel van de gele bus weet, maar niet van de blauwe.

En verder merkt ze op dat ze tot nu toe nooit op het busnummer kon letten:

.... 'Mamma zegt altijd: 'Daar komt 'ie aan'. Maar dan is hij er al en dan zie ik het nummer niet meer.'....

onzichtbare hoeveelheden

Het ging bij deze proef om het onderzoeken van gedachten van kinderen over onze systemen.

We vragen ons echter in deze 'Proeven op de som van wiskobas' ook af of kinderen vertrouwd zijn met bepaalde systemen en situaties die wij kunnen gebruiken binnen ons wiskundeonderwijs.

Eén van wiskobas' aloude principes, dat overigens

steeds belangrijker blijkt te zijn, is de keuze om in het onderwijs rekening te houden met *onzichtbare hoeveelheden*.

Het idee erachter is, kinderen zich te laten richten op het kardinale aspect van het getalbegrip en niet steeds maar weer over te laten gaan tot tellen. Bovendien moeten handelingen met onzichtbare hoeveelheden wel 'in gedachten' uitgevoerd worden, waarbij het kind een duidelijke voorstelling van zaken moet hebben.

We ontdekten dat deze doelstelling met *goochelsituaties* bereikt kan worden: de kinderen zijn sterk gericht op het kardinaalaspect (het aantal) en op de handelingen die met de onzichtbare hoeveelheden worden uitgevoerd. Bovendien motiveert het goochelen de kinderen erg.

de goochelaar

We ontwierpen de volgende proefsituatie voor negen kleuters en acht eersteklassers.

We nemen twee kartonnen dozen. Laten we ze *a* en *b* noemen. In *a* stopten we vijf schuimplastik stukjes; in *b* zit niets.

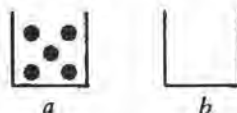


fig. 1

(We nemen schuimplastik omdat daarmee geen geluid gemaakt wordt.)

Ik vertel de kinderen dat ik kan goochelen en vraag hoeveel stukjes er in elke doos zitten. Ze mogen in de doos kijken.

Dan pak ik uit *a* met mijn rechterhand twee stukjes schuimplastik, laat die aan de kinderen zien, terwijl ik erbij zeg dat ik ze in *b* ga stoppen. Maar in feite glijdt mijn rechterhand langs mijn linkerhand en ik breng daarmee de twee stukjes ongezien terug in *a*, terwijl voor de leerling de rechterhand de twee stukjes in *b* stopt.

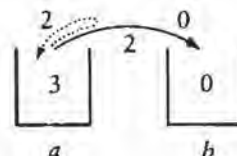


fig. 2

De verdeling is dus als bij het begin: vijf in *a* en nul in *b*.

Maar als ik vraag:

.... 'Hoeveel zitten er in *b*?', zegt elk kind:

'Twee', omdat ik die er schijnbaar net ingebracht heb.

Op de vraag: 'Hoeveel in *a*?', zegt elke leerling, vaak na even denken: 'Drie.' ($5 - 2 = 3$)

De kinderen hebben dus deze situatie in gedachten:

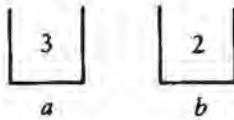


fig. 3

Nu gaan we ermee goochelen.

....'Sim sala bim.'....

Ik doe net alsof ik uit *b* één stukje schuimplastik haal en dat in *a* stop.

In feite voer ik alleen maar de beweging uit, zonder één stukje plastik in mijn hand – de kinderen kijken gespannen toe. Ze ondergaan dit magisch ritueel als iets dat nodig is.

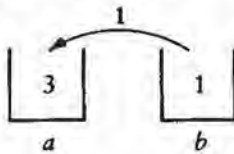


fig. 4

Na deze truuk vraag ik weer naar de verdeling. De kinderen antwoorden dat er nu in *b* nog maar één zit, en in *a* vier, want er is één stukje overgebracht. Dit herhaal ik nog eens: één onzichtbaar stukje plastik uit *b* naar *a*, zodat nu de feitelijke situatie en de bedachte situatie bij de kinderen dezelfde is: vijf in *a*, nul in *b*:

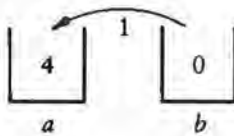


fig. 5

Dan mogen de kinderen in de dozen kijken of het werkelijk zo is. Ze zijn erg verbaasd.

Maureen (kleuter) zegt, als ze in de dozen kijkt:
'Hoe kan dat nou, je hebt er helemaal niks uitgehaald.'....
 En Kitty (eersteklasser) zegt:
'Je pakte er toch geen? O, wacht even: het lijkt maar zo.'....

nader tot het onderwijs

Uit dit onderzoekje kunnen we enkele konklusies trekken ten behoeve van het onderwijs:

- Goochelen interesseert de kinderen in kleuterschool en eerste klas erg. Dit pleit ervoor enkele goocheltruuks te leren en die eens uit te voeren in de klas.

- De kinderen letten goed op de gemaakte bewegingen. De bewegingen vervangen als het ware de onzichtbare stukjes plastik die overgebracht worden maar ook de stukjes die in de dozen verstopt zijn.

Davydov wijst in zijn proefnemingen met onzichtbare hoeveelheden op deze representerende bewegingen. Zijn kinderen tikten bijvoorbeeld vijf keer op een doos waarin vijf fiches moesten zitten.¹⁾

Zo is ook te veronderstellen dat bij het representeren van onzichtbare hoeveelheden met behulp van *vingers*, naast de één-één-relatie die gelegd wordt, ook het *bewegen* van de vingers sterk meetelt.

- Bij elke goocheltruuk halen de kinderen zich de situatie scherp voor de geest. Het is opvallend dat dit zowel de eersteklassers als de kleuters lukt – zonder uitzondering. Er is geen enkel verschil in voorstellingsvermogen tussen deze leeftijdsgroepen!

Om kinderen op het kardinaalgetal te wijzen, kan het goochelen dus een geschikte kontekst zijn.

Zelfs met vierjarige kleuters is deze truuk uit te voeren.

Dan moet *b* niet in twee keer, maar in één keer leeg goocheld worden.

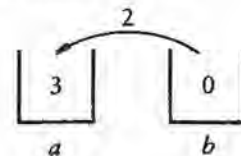


fig. 6

Het idee 'nul' kennen vierjarigen al heel goed.

- De kinderen komen in konflikt met hetgeen ze *denken* (bijhouden van de aantallen die 'overgedragen' worden van de ene doos in de andere) en hetgeen ze *zien* (er wordt namelijk alleen een beweging gemaakt, zonder échte stukjes).

Het zou jammer zijn de truuk direkt prijs te geven aan de klas. Zelfs eersteklassers doorzien de truuk immers niet. Laat bijvoorbeeld tweedeklassers eens naar een verklaring zoeken. In het eerste leerjaar heeft de truuk dan zijn taak gedaan ten behoeve van het getalbegrip.

¹⁾ Zie: Parreren, C.F. van en Carpay, J.A.M.: 'Sovjetpsychologen aan het woord', groningen 1972, pag. 158 e.v.

- Ten slotte nog twee praktische opmerkingen:
 - Na het overleggen van een onzichtbaar stukje plastic van doos *b* naar *a* vroegen we steeds eerst naar de hoeveelheid *achterblijvende* stukjes in *b* en pas daarna naar de *aangevulde* hoeveelheid in *a*. Deze vraagvolgorde geeft ook de beweging van *b* naar *a* aan en is gemakkelijker te beantwoorden dan de tegengestelde volgorde.
 - Dreigt de truuk te mislukken, dan is er reding te verwachten door suggestieve vragen te stellen.

vormen waarin onzichtbare hoeveelheden voorkomen

Goochelen is slechts één van de uitingsvormen waarin van onzichtbare hoeveelheden sprake is. Je kunt het 'onzichtbare' echter ook in andere onderwijsleersituaties tegenkomen.

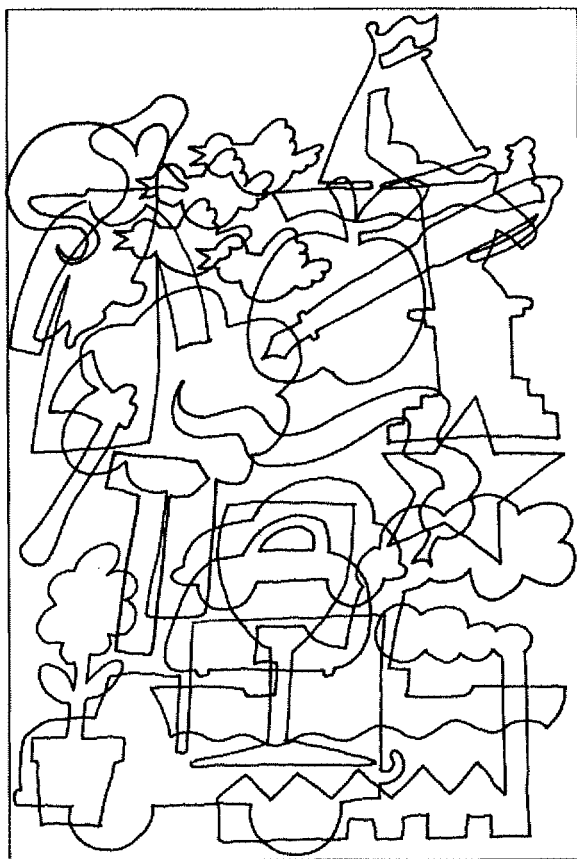


fig. 7

- *Hoeveel tekeningen zijn hier door elkaar gemaakt?*

Figuren, door elkaar getekend, worden 'onzichtbaar' waardoor van de kinderen een bepaalde strategie gevraagd wordt om het probleem op te lossen.

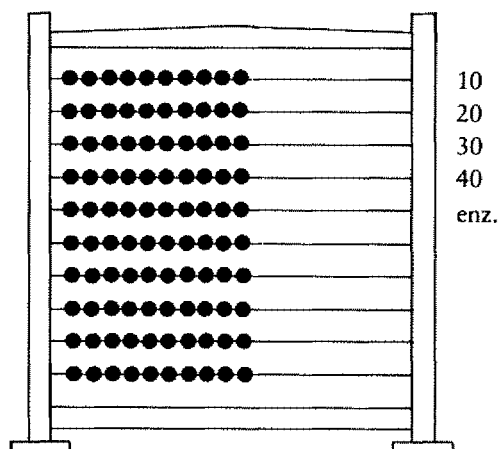


fig. 8

- *Hoeveel kralen?*

Om het aantal kralen van een telraam snel te vinden, kun je tellen met tien tegelijk: 10, 20, 30, ... Dit tellen maakt de losse kralen 'onzichtbaar' voor de kinderen.

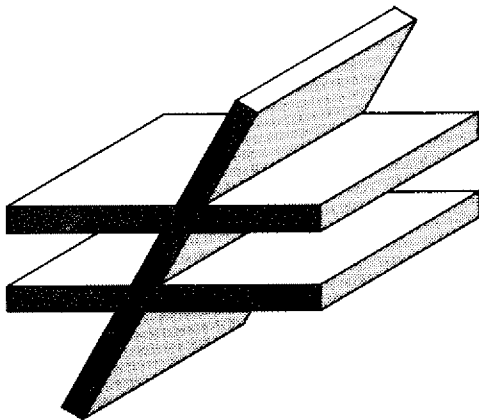
Met opzet geven we twee voorbeelden waarin de voorwerpen niet écht onzichtbaar zijn, om u ervan te overtuigen dat het 'onzichtbare' duidelijk kan tellen in het bedrijven van wiskunde.

wiskobas onzichtbaar

Tenslotte moeten we konstateren dat ook wiskobas onzichtbaar gaat worden. U allen bent getuige geweest van de grote tovertruuk die ons instituut van het toneel laat verdwijnen.

Ik hoop echter dat voor het onderwijs veel van wiskobas in uzelf zal blijven hangen, zodat we kunnen blijven zeggen: 'Je moet rekening houden met onzichtbare zaken.'

nieuw op de markt



De spullen die in deze rubriek besproken werden, genoten in het algemeen onze waardering. Een gevolg daarvan was wel eens, dat alle in deze rubriek genoemde materialen door sommige adviseurs ongezien op hun lijst met aanbevelingen werden geplaatst. Dit is door ons in de praktijk gekonstateerd, nadat wij éénmaal een negatieve kritiek publiceerden.

Vanaf dat moment hebben we ons in deze rubriek van afbrekende kritiek onthouden. Ook hebben we ons steeds verre gehouden van het bespreken van eigen iowo-spullen. We hebben in al die jaren überhaupt weinig tijd in 'image building' gestoken. Niet zelden overkomt het ons op cursussen en in gesprekken, dat wiskobas nog steeds als een 'methode' wordt gezien, die iets met 'verzamelingen' te maken zou hebben (!).

Een domme fout of een integere opstelling? De onderwijsgeschiedenis zal het leren. Toch kan ik het niet laten, ditmaal het tweede principe (we bespreken slechts spullen van anderen) te verlaten.

Afgezien van een emotionele achtergrond noem ik twee argumenten.

verantwoording

Aanvankelijk hebben we gezocht in de in spullenkatern 8 gepubliceerde lijst naar die additionele materialen, die voor het onderwijs grensverleggend en inhoudelijk een nadere beschouwing waard zouden kunnen zijn. Deze speurtocht kon tot niets anders leiden dan dat we ons met zaken zouden zijn gaan bezighouden, waarvan we menen dat ze beter in de onderwijspraktijk getoetst kunnen worden. Bovendien zou alles weer sterk in de reken- en cijfersfeer gekomen zijn en daar hebben we de laatste tijd al veel aandacht aan geschonken.¹⁾

Een andere reden is het gegeven, dat ons in deze periode van het schooljaar (ná de cito-toets) vaak om advies gevraagd wordt over wat men zoal zou kunnen doen als aansluiting op het voortgezet onderwijs.

Wel, dat is een mooi onderwerp!

aansluiting bo – vo

Op deze problematiek wordt en werd driftig gestudeerd, zelfs door deftige commissies als de 'commissie analyse voortgezet onderwijs', in de wandeling de 'knelpuntencommissie' genoemd.

Her en der vinden wel enige experimenten plaats, maar veel vorderingen lijken nog niet geboekt.

Afgaande op onze ervaringen met heroriënteringscursussen voor onderwijzers (*bo-wiskobas*) zou het een goede zaak zijn om onderwijsgevend van basis- en voortgezet onderwijs eens gezamenlijk aan de studie te zetten, zoals dit bijvoorbeeld wel in de 'teachers-centre'-projecten in de *usa* en *uk* wordt beproefd.

En dan geen structurele, leerpsychologische of agogische prietpraat, maar gewoon aan het werk met leerlingenmateriaal. Het *vo* is vaak nauwelijks op de hoogte van de wijzen, waarop in het *bo* gewerkt wordt en van wat er eigenlijk onderwezen wordt; in omgekeerde richting wordt veelal tegen die 'hoge school' opgekeken: 'Zeggen jullie maar wat ze moeten kunnen en kennen, dan bereiden wij hen er wel op voor.'

Bekijken we de zogenaamde aansluitingsboekjes op het gebied van rekenen/wiskunde dan kan men nauwelijks geloven dat hier enige serieuze poging op leerplanontwikkelingsgebied is verricht.

Wat zou men al niet van elkaar kunnen leren op belangrijke gebieden als moedertaal en rekenen/wiskunde?

Spullen die voor het laatstgenoemde gebied geschikt zijn, vinden we in nevenstaande lijst. Deze materialen zijn alle door de afdeling wiskivon (*wiskunde in het voortgezet onderwijs*) van het *iowo*

¹⁾ Treffers, A. (ed.): 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)', utrecht 1979.

Moor, E. de: 'Gevarieerd rekenen', utrecht 1980.

titel	auteur	te bestellen	pakket	docentenhandleiding
Op het spoor	W. Sweers e.a.	<i>ivio</i>	f 4,50	f 4,-
Ken je klas	C. Leenders	<i>ivio</i>	f 2,50	f 4,-
Spionnen in de stad	W. Sweers en G. van Barneveld	<i>ivio</i>	f 3,50	f 4,-
Breuken	G. Janssen	<i>ivio</i>	f 3,-	f 4,-
Zie je wel	G. Schoemaker	<i>iowo</i>	f 2,50	nog niet voorradig
Lijngrafieken	A. Goddijn	<i>iowo</i>	f 2,50	f 4,-
Verpakkingen	W. Sweers	<i>ivio</i>	f 3,-	f 4,-
Klein en groot	A. Goddijn	<i>iowo</i>	f 4,-	-
Autowegen	M. Kindt	<i>ivio</i>	f 3,50	f 3,50
Hoeken	G. Schoemaker	<i>ivio</i>	f 4,-	f 4,-
Honderd procent	G. Janssen	<i>ivio</i>	f 3,-	f 5,-
Regelmatige figuren	M. Kindt	<i>ivio</i>	f 3,50	f 5,-
Licht op schaduw	A. Goddijn	<i>iowo</i>	f 3,50	-
Pythagoras	M. Kindt	<i>iowo</i>	f 3,50	-
Greep op kans	G. van Barneveld	<i>iowo</i>	f 1,50	f 1,-
Reis om de wereld in 80 dagen	M. Kindt en W. Sweers	<i>ivio</i>	f 6,50	f 5,-
Rekenkalender	E. de Moor en G. Schoemaker	<i>iowo</i>	f 12,-	-

De meeste materialen zijn verbruiksmaterialen.

ten behoeve van het *mavo* en *Ibo* ontwikkeld.

Een uitgebreide beschrijving is te vinden in 'Wiskrant' 21.¹⁾

Over sommige onderwerpen is al eerder in ons bulletin bericht, en wel in de rubriek 'Wiskunde in de brugperiode'.

klas 6

Het is uiteraard niet mogelijk alle pakketjes uit voorgaande lijst te bespreken en op hun bruikbaarheid voor de zesde klas te onderzoeken.

We maken daarom een keuze en besteden aandacht aan:

- 'Zie je wel', een meetkundepakket;
- 'Klein en groot', over schaal en verhoudingen;
- 'Rekenkalender', rekenen.

zie je wel

Dit pakketje geeft een indruk van wat we op het *iowo* onder meetkunde verstaan. Het gaat daarbij in wezen om het begrijpen van alledaagse reële verschijnselen, zoals:

- waarom loopt de maan met je mee?
- waarom verdwijnt een schip achter de horizon?
- waarom zie je met twee ogen anders dan met één?
- waarom wordt een fiets zo langgerekt afgebeeld op het fietspad?
- enz.

Begrijpen betekent hier letterlijk: het 'grijpen' van de 'ruimte' die ons omringt. Het gaat dus niet over driehoeken en parallellogrammen; er komen geen droge definities en stellingen aan te pas.

Kun je dan wel van meetkunde spreken?

Ja, want zó omringt meetkunde ons en zó is deze ontstaan: een middel om verschijnselen te verklaren en problemen op te lossen. De meer formele meetkunde is er later door wiskundigen bij bedacht. Terecht, maar niet voor de beginner bedoeld!

Opvallend is hoeveel je, als onderwijsgevende en als leerling, uit zo'n pakketje kunt leren. Niet alleen in de zin van hetgeen we boven als meetkunde omschreven, maar ook in de betekenis van de aansluiting *bo-vo*.

Menige wiskundeleraar in het *vo* verbaast zich dat leerlingen niet met een stereometrische afbeelding van een kubus kunnen omgaan. En juist aan dit aspect van het afbeelden van ruimtefiguren wordt in 'Zie je wel' ruime aandacht besteed. De kinderen wordt bewust gemaakt hoe een afbeelding van een ruimtefiguur op het platte vlak tot stand komt en dat het er maar helemaal van afhangt vanuit welk standpunt je kijkt.

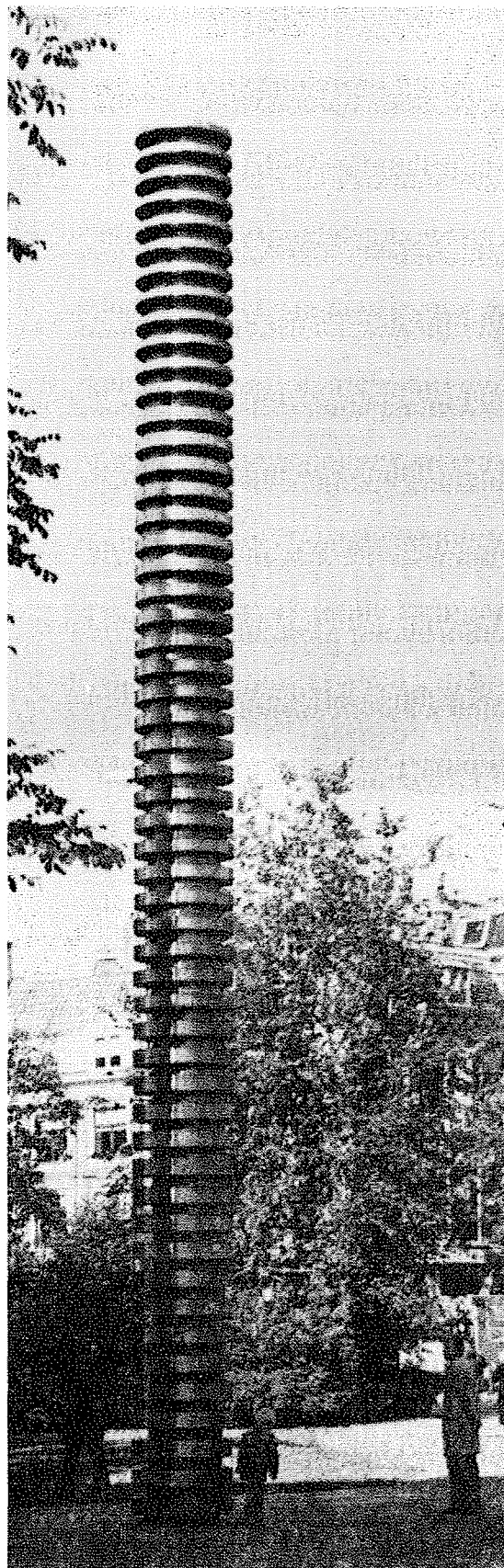
Kortom, niet alleen het interpreteren van voor-, zij-, bovenaanzichten en scheefperspektivische afbeeldingen komt ter sprake, maar ook heel eenvoudige konstrukties, die daarmee te maken hebben (zie fig. 2).

Je leert met rechte lijnen werken, de cirkel wordt verkend, passer en liniaal komen eraan te pas, er wordt geredeneerd, veel getekend en vooral echt nagedacht over de ruimte, waarin we leven.

Het is oriënteren, zowel in wiskundige als onderwijskundige betekenis.

¹⁾ Te bestellen bij het *iowo*.

meet in amsterdam: de knakenpaal



Dit kunstwerk staat in amsterdam op het frederiksplein.

Amsterdammers noemen het 'de knakenpaal'.

Een knaak, dat is een rijksdaalder.

► Zou de knakenpaal vier meter hoog kunnen zijn?
.....

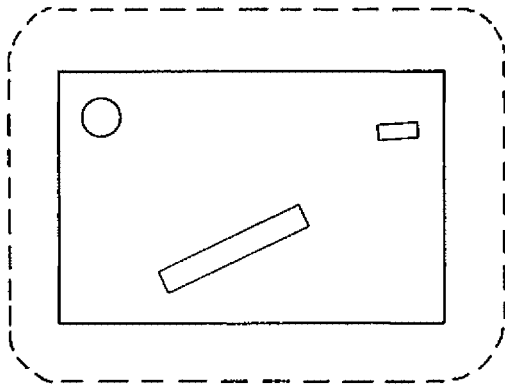
► Waaraan kun je dat snel zien?
.....

► Hoe hoog is de knakenpaal dan wel?
.....

► Kun je ook de hoogte van de huizen op de achtergrond op dezelfde manier meten?
.....

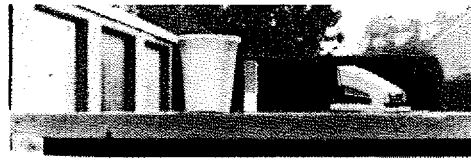
► Waarom wel of waarom niet?
.....
.....
.....
.....

Van boven gezien.



- ▶ Loop (in gedachten) rondom de tafel van de tekening.

fig. 2a



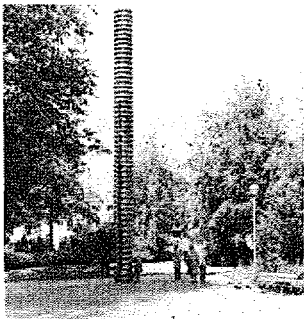
- ▶ Waar sta je en in welke richting kijk je als je ziet wat op deze foto staat? Geef dat aan in de tekening op het voorgaande blad.
- ▶ Doe dat ook bij de volgende foto's.



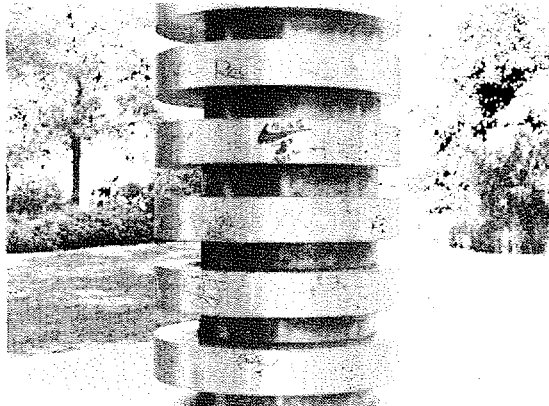
fig. 2b

klopt dat wel: knakenpaal?

Op het eerste werkblad stond de knakenpaal:



Hier van dichtbij:



- ▶ Waarom zouden de amsterdammers dit kunstwerk zo noemen?
.....
.....

- ▶ Hoe dik is een schijf?
.....

- ▶ En hoe breed?
.....
.....

- ▶ Is zo'n schijf precies een vergrote rijksdaalder?
.....
.....
.....

fig. 3

klein en groot

We kijken eerst naar het werkblad waarop de eerste opdracht van het boekje staat (zie fig. 1).

Daarna nodigen we de lezer uit de 42^e opdracht (het boekje bevat er 43) te maken (zie fig. 3).

Als u de laatste lastige opdracht heeft kunnen maken, begrijpt u al dat dit pakketje over verhoudingen en schaal gaat.

Tussen die eerste (fig. 1) en laatste (fig. 3) opdracht zit echter heel wat. En dat 'heel wat' bouwt aan een inzichtelijke ontwikkeling van het schaalbegrip, en niet alleen zoals het meestal op ietwat dorre wijze in reken- en aardrijkskundeboekjes voorkomt:

1 : 250.000 betekent: 1 cm is in werkelijkheid 250.000 cm.

Nee, in het pakketje wordt dit begrip zorgvuldig opgebouwd, waarbij aanvankelijk veel aandacht is

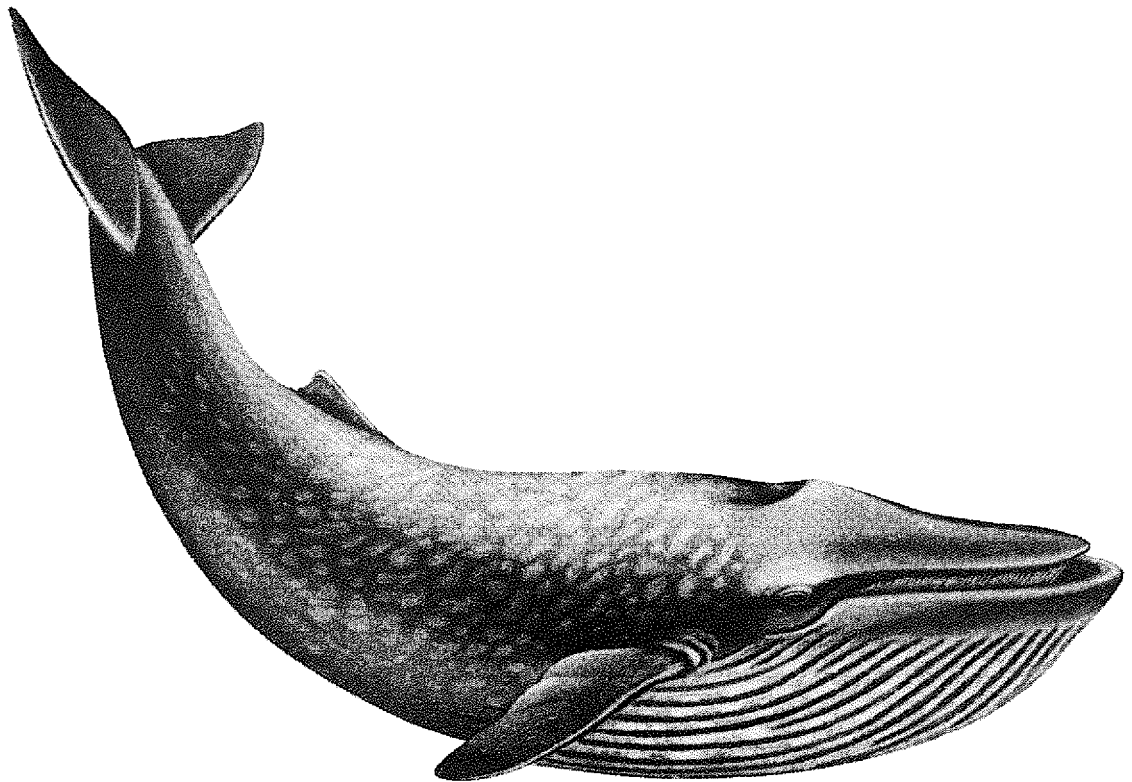
voor de 'visuele schaal' of 'schaallijn'. Dit betekent: je tekent naast de figuur een lijnstukje dat voor die figuur de werkelijke maat aangeeft (zie fig. 4).

Op allerlei wijzen wordt steeds het verhoudingsbegrip meegenomen, zoals bij vergroten en verkleinen. Het verhoudingsbegrip speelt een belangrijke rol bij het meten, meettechnieken, natuurkundige verschijnselen, in de meetkunde, enz.

Vrijwel alle opdrachten zijn gekonstrueerd aan de hand van foto's, die jammer genoeg wel eens wat zwart zijn afgedrukt. Aan de hand van deze foto's (en tekeningen) worden, behalve genoemde wetenschappelijke aspecten, ook tal van andere interessante kwesties aangeroerd. Zaken die van sociale en culturele aard zijn, zodat dit pakketje ook anderszins tot een echte verrijking kan leiden.

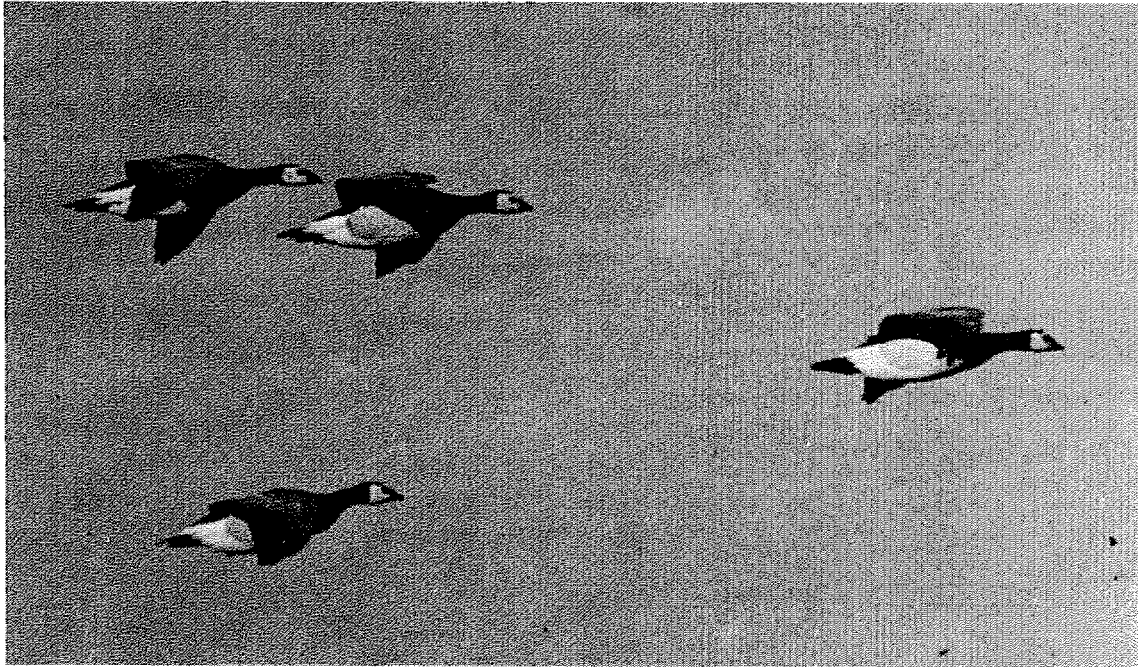
Zo'n meetlatje bij een plaat of kaart heet 'schaallijn'.

Het grootste nog levende dier: de blauwe vinvis.
Deze hier is in werkelijkheid 20 meter lang.



- ▶ Maak de schaallijn af.
- ▶ Zijn de vinnen groter dan jijzelf?
Teken jezelf naast de blauwe vinvis.
- ▶ Pas in de gang de lengte van de blauwe vinvis eens af.
Maak een papieren akwarium-guppierodeg dat erbij.

op reis met de brandganzen



- ▶ Op nova zembla verblijven 's zomers ongeveer 40.000 brandganzen. In november vliegen deze naar nederland: de waddeneilanden, flevopolder en zeeuwse eilanden.

Zoek met een atlas uit hoe ver ze dan vliegen. Gebruik de schaallijn die onder op de kaart staat.

-
- ▶ Op groenland en spitsbergen zijn 's zomers ook zo'n 30.000 brandganzen. Deze overwinteren op de eilanden ten westen van schotland.

Een gans vliegt zo'n 70 km per uur. Hoeveel vliegreizen duurt de jaarlijkse trek voor deze brandganzen?

-
-

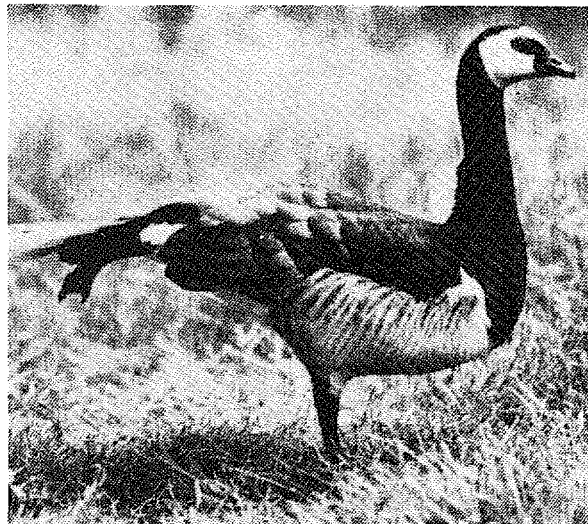


fig. 5

rekenkalender

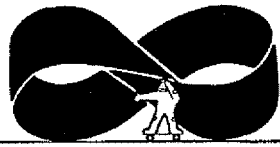
Over de rekenkalender wil ik kort zijn, omdat ik er zelf de hand in heb gehad.

De kalender bevat 77 problemen en tips voor de docent om de rekenvaardigheid in de brugklas op peil te houden. De praktijk heeft ons geleerd, dat er ook in de basisschool nuttige ideeën uit opgepikt kunnen worden.

Ik beperk me nu slechts tot het geven van enkele voorbeelden, die hopelijk voor zich spreken (zie pag. 116).

samenvatting

- In de laatste 'Nieuw op de markt' besteedden we aandacht aan het brugklasmateriaal dat ontwikkeld is door wiskivon (afdeling voortgezet onderwijs van het iowo).
- Sommige van deze pakketjes zijn heel goed bruikbaar in de zesde klas van het basisonderwijs.
- Het verdient aanbeveling de pakketjes in samenwerking tussen docenten uit basis- en voortgezet onderwijs vooraf te bestuderen. Dit mede als een mogelijkheid om bij te dragen aan de oplossing van het aansluitingsprobleem basisonderwijs – voortgezet onderwijs.



reken uit

$$\begin{aligned} 41 \times 49 &= \\ 42 \times 48 &= \\ 43 \times 47 &= \\ 44 \times 46 &= \\ 45 \times 45 &= \end{aligned}$$

- ▶ Merk je iets bijzonders?
- ▶ Wat is het bijzondere aan:

$$\begin{aligned} 9 \times 11 \\ 19 \times 21 \\ 29 \times 31 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

fig. 6a

reken uit

Het eerste rijtje is van het type:

$$\overline{ap} \times \overline{aq} \text{ met } p + q = 10.$$

Een 'truukje':

$$57 \times 53 = \left\{ \begin{array}{r} \overline{3 \times 7} \\ 3021 \\ \overline{5 \times 6} \end{array} \right.$$

Verbindingen kunnen gelegd worden met algebra en het positiesysteem:

$$(10a + p)(10a + q) = 100a(a + 1) + pq;$$

of ook:

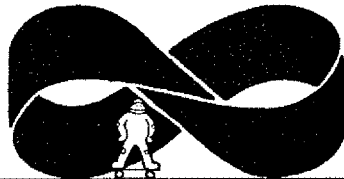
$$(55 + 2)(55 - 2) = 55^2 - 4.$$

Een vraag:

- ▶ Welke vermenigvuldiging uit zo'n rijtje levert het grootste produkt op?
- ▶ Kun je dit ook meetkundig verklaren?

Leg bij het tweede rijtje verband met $(a + 1)(a - 1)$.

fig. 6b



een spel

Kies willekeurig een getal onder de duizend (bijv. 306).

Kies zes willekeurige getallen onder de honderd (bijv. 2; 6; 8; 10; 34; 45).

Wie komt binnen vijf minuten zo dicht mogelijk bij 306?

Je mag alle getallen maar één keer gebruiken en alleen gebruik maken van de bewerkingen: +, -, × en :

Voorbeeld:

$$34 \times [\{ \{ (8 + 10) : 2 \} + 45 \} : 6] = 306.$$

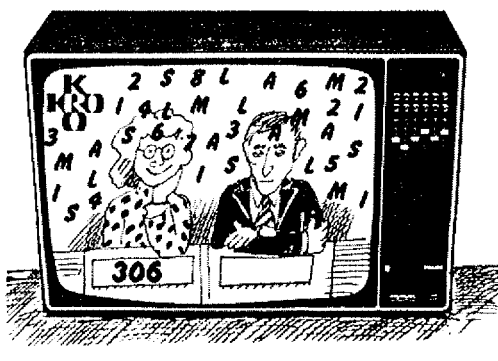


fig. 7a

een spel

Willekeurig kiezen kan m.b.v. een telefoonboek. Prik drie keer een telefoonnummer en neem daarvan steeds het laatste cijfer.

Dit spelletje¹⁾ is heel geschikt om in 'verloren ogenblikken' (eind van de les) met de hele klas te doen. Door groepjes in de klas te vormen kan het individuele kompetitiekarakter wat ontkracht worden. Let bij de besprekingen op de verschillende oplossingsstrategieën, de wijze van noteren en ga vooral in op het juiste gebruik van haakjes.

Op dit spel kan men zelf allerlei variaties bedenken, zoals:

- groter, c.q. kleiner getalbereik;
- gebruik van mooie getallen (5, 10, 20, 50, ...);
- decimale getallen;
- negatieve getallen.

Voorbeeld:

Kies een geheel getal van -20 t/m +20 (zeg: -2). Kies nog vijf andere getallen (zeg: -13, 7, -5, 2, -20).

Mogelijke oplossing:

$$2 \times \{-13 + 7 + (-5)\} - (-20) = -2.$$

¹⁾ Zie ook: televisieprogramma: 'Cijfers & Letters', kro.

fig. 7b

onderwijs- ontwik- keling

VLAARDINGEN

In de serie bijdragen over onderwijsontwikkeling hebben we in het eerste artikel de verschillende nivo's van onderwijsontwikkeling beschreven. In de volgende artikelen hebben we geprobeerd een beeld te geven van mogelijkheden op verschillend nivo. Daarbij hebben we steeds een schoolteam aan het woord gelaten om vanuit het dagelijks werk praktische tips te geven. Het hoogste nivo van onderwijsontwikkeling op het gebied van rekenen/wiskunde is tot nu toe buiten beschouwing gebleven. De reden hiervoor was, dat daarbij aan zeer veel voorwaarden voldaan moet zijn.

Toch is het wel mogelijk om in de school geleidelijk aan toe te werken naar een nieuw, eigen gekozen programma.

Huug de Vries, schoolbegeleider van de onderwijsbegeleidingsdienst 'Nieuwe waterweg noord', beschrijft zijn werkwijze met een groep scholen in vlaardingen.

Aan het eind van dit vlaardingse verhaal zullen we in een samenvatting nog eens wijzen op de voorwaarden om op dit nivo onderwijsontwikkeling te bedrijven.

HUUG DE VRIES
ABBES DEKKER

werkgroep

Reeds een aantal jaren is men op de Erasmus-, Jan Ligthart-, Juliana van Stolberg-, Prins Hendrik- en Prof. Teldersschool in vlaardingen bezig het rekenonderwijs te veranderen. Er bestond op deze scholen enige onvrede over de methode, die men in gebruik had.

In afzonderlijke teambesprekingen werd in 1976 besloten op 'wiskobasachtige' wijze aan de slag te gaan. Voorts werd vastgesteld dat er een aanpak van onderaf zou plaatsvinden; dat wil zeggen: in de eerste klas werd begonnen en elk jaar kwam er een volgend leerjaar bij.

Waar mogelijk zouden ook activiteiten worden doorgetrokken tot en met klas 6. Afsproken werd dat elke school de televisielessen: 'Spelraam', 'Tel voor twee', 'Een beetje veel' en 'Vier kan 't' zou volgen.

Er werd een werkgroep samengesteld o.l.v. een schoolbegeleider. Elke school leverde een zogenaamde 'wisbaas' voor de werkgroep.

De taak van de werkgroep is:

- het verzamelen van materialen;
- het samenstellen van deelleergangen;
- het vervaardigen of doen vervaardigen van werkbladen;
- het organiseren van evaluatiebijeenkomsten;
- het onderhouden van contacten met het *toowo*.

De taak van de 'wisbaas' is, naast het participeren in de werkgroep, de activiteiten van de werkgroep naar de school en die activiteiten in de school te ondersteunen, waar nodig en mogelijk.

De werkgroep komt wekelijks bijeen op woensdagmiddag.



teambijeenkomsten

In de teambijeenkomsten worden in het kader van de begeleiding de uitgewerkte 'programma's' besproken en toegelicht.

Voorts wordt op die bijeenkomsten aandacht besteed aan het zich bekwalen in een wiskobasaanpak door het werken met de materialen.

Zo is in een aantal bijeenkomsten *oppervlakte* aan de orde geweest. Hierna heeft elke school zijn eigen leergang over oppervlakte samengesteld.

De ene school koos voor een meer tematische aanpak, de andere school voelde meer voor een traject, waarbij omtrek, oppervlakte en inhoud aan elkaar gerelateerd zijn, enz.

Ook is in teambijeenkomsten aandacht besteed aan *oefenstoffering*.

Uitgangspunt is en blijft: wiskunde leer je door ermee bezig te zijn. Dit geldt niet alleen voor de kinderen, maar ook voor de leerkrachten. Zij gaan deze stelling ook zelf steeds dikker onderstrepen.

Zo werd gewerkt met:

- honderdveld;
- tabellen;
- machientjes;
- pijlen en slingers;
- kruisgetalraadsels;
- tovervierkanten.

eerste leerjaar

Om nu weer terug te komen op de werkzaamheden van de werkgroep: in het schooljaar 1976-77 is een programma voor het eerste leerjaar voorbereid.

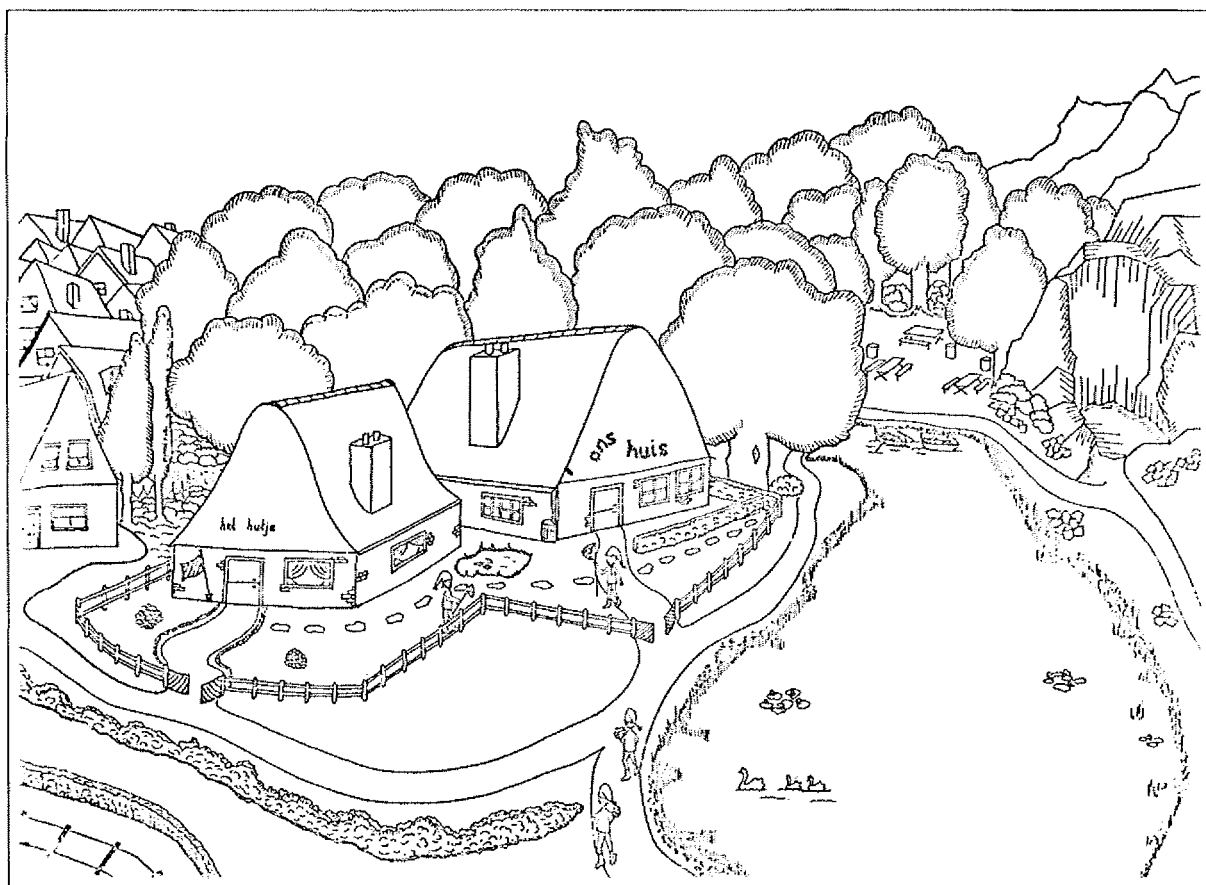
Dit programma ziet er als volgt uit:

- ± 8 weken – tellen in pinkeltjesland;
- ± 4 weken – ordenen, groeperen, splitsen en samenvoegen;
- ± 15 weken – bussen;
- ± 13 weken – de laatste 13 weken.

In grote lijnen is in *'Tellen in pinkeltjesland'* het grote '1 + boek' gevolgd. Rond een zelfvervaardigde plaat (fig. 1) en een verhaal, dat zich afspeelt in pinkeltjesland worden allerlei telactiviteiten gepleegd.

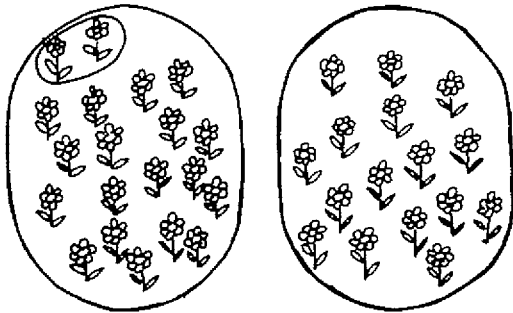
Suggesties over de wijze van werken, het gebruik van concrete materialen, het verwerken van werkbladen, staan in een handleiding beschreven.

Het pakket *'Ordenen'* is in hoofdzaak samengesteld uit bestaande werkbladen.



groepjes van twee maken

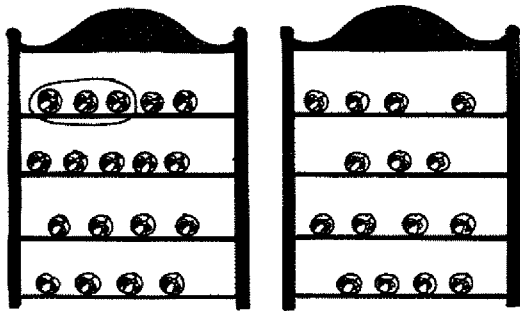
werkblad 13



- In welke tuin staan de meeste groepjes van twee?

.....

groepjes van drie maken



- In welke kast staan de meeste groepjes van drie?

fig. 2

'Bussen', waarin het optellen en aftrekken tot 20 wordt aangeleerd, komt weer overeen met hetgeen beschreven staat in het grote '1+ boek'. 'De laatste 13 weken' bevat een aantal ideeën om het aangeleerde te automatiseren. Voorts wordt aandacht besteed aan meten, klokkijken, geld, enz.

Tijdens het schooljaar 1977-78 werd met dit programma gewerkt.

Om de twee maanden kwamen de leerkrachten van het eerste leerjaar bijeen om ervaringen uit te wisselen en het programma, waar nodig, bij te stellen. Ook in het eigen team werden deze dingen besproken opdat iedereen op de hoogte was van hetgeen zich in het eerste leerjaar afspeelde.

Ieder was het erover eens dat het werken in het eerste leerjaar konsekventies heeft voor de andere leerjaren.

Deze procedure wordt jaarlijks gevolgd, ook in verband met mutaties binnen de school.

De ervaringen in het eerste jaar waren erg positief en zijn het nu nog steeds. Aardig te vermelden, dat uiteraard op zeker moment vergelijkingen worden gemaakt met het tijdstip waarop bepaalde leerstof wordt beheerst, nu en het jaar ervoor met de methode.

Enige paniek ontstond. Verrassing echter toen aan het eind van 'Bussen' bleek dat de meeste kinderen alle sommen, dus ook de zogenaamde stipsommen beheersten.

Enige weken daarvoor had men het idee ver achter te zijn; nu was men ineens voor.

Bovendien had men intussen ook allerlei activiteiten gedaan, die verrijkend werkten. Bijvoorbeeld wordt hier gedacht aan: combinatoriek, grafieken, generaliseren, het vinden van strategieën, kansen, pijlentaal.

Terwijl het eerste leerjaar met het programma werkte, werd in de andere leerjaren incidenteel ook iets met tellen gedaan, onder andere grote hoeveelheden. In het zesde leerjaar bijvoorbeeld 'Het schaakbord', in het vijfde leerjaar 'De voetbaltafel'.

tweede leerjaar

Intussen werd ook gewerkt aan het programma voor het tweede leerjaar.

De werkgroep maakte eerst een inventarisatie van de leerstof in de methodenboekjes en het leerplan.

Aanvankelijk werd gedacht aan 'schrappen en inpassen', maar het resulteerde tenslotte in een volledig programma.

Voor het optellen en aftrekken tot 100 werden het honderdveld, de getallenlijn en het dozenmodel als denkmodellen gebruikt. Ook wordt in het tweede leerjaar de abakus geïntroduceerd, in eerste instantie nog als 'telmachine'.

Over deze en ook andere zaken werd weer met de afzonderlijke teams overlegd en gewerkt. Het hanteren van de modellen en het gebruik van de abakus heeft gevolgen voor het rekenonderwijs in de andere leerjaren.

In het schooljaar 1978-79 werd in het tweede leerjaar met het programma gewerkt.

De evaluatie verliep op identieke wijze als in het eerste leerjaar.

derde leerjaar

In dit schooljaar werd ook het programma voor het derde leerjaar voorbereid.

Dit werd op dezelfde wijze aangepakt als in het tweede leerjaar, hetgeen leidde tot het volgende overzicht:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	
1	x												t	t											
augustus	x																								
2	x													t	t										
augustus	x																								
3	x													t	t										
september																									
4	x													t	t										
september																									x
5	x													t	t										
september																									
6	x													t	t										
september																									x
7	x													t	t										
oktober																									x

fig. 3

In het kader van een stukje differentiatie werden zes pakketjes samengesteld, die door de leerlingen zelfstandig verwerkt kunnen worden.

De werkbladen zijn door de teams gemaakt. Het ene team maakte werkbladen met tabellen, het andere team met kruisgetalraadsels, enz. De werkbladen werden verdeeld over de verschillende pakketjes, zodat elk pakketje een gevarieerde inhoud heeft.

Deze werkwijze leverde in betrekkelijk korte tijd een schat aan oefenstof op.

In het lopende schooljaar wordt met het programma gewerkt. Ook hier verloopt de evaluatie als bij de andere leerjaren.

In het tuintje van Polletje Graspiek (P.G.) staan vier soorten bloemen.

Iedere bloemsoort heeft een eigen stukje grond.

rozen	tulpen
nar- cissen	hya- cinten

► Welke bloemen staan er?

Je kunt aan de stukjes grond zien, hoeveel bloemen er van elke soort staan:

8	7 rozen tulpen
5	6 narcissen hyacinten

In de tuin van Vingertje Groen (V.G.) staan dezelfde bloemsoorten, maar van allemaal zes bloemen meer.

► Schrijf op hoeveel bloemen Vingertje Groen in zijn tuin heeft staan:

$\begin{matrix} P.G. & & V.G. \\ \begin{matrix} 8 & 7 \\ 5 & 6 \end{matrix} & \xrightarrow{+6} & \begin{matrix} & \\ & \end{matrix} \end{matrix}$
 Vul nu ook in V.G.
 $\begin{matrix} \begin{matrix} 2 & 10 \\ 8 & 7 \end{matrix} & \xrightarrow{+8} & \begin{matrix} & \\ & \end{matrix} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \begin{matrix} 5 & \\ & 7 \end{matrix} & \xrightarrow{+6} & \begin{matrix} 16 & \\ & 4 \end{matrix} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \begin{matrix} 15 & 20 \\ 10 & 12 \end{matrix} & \xrightarrow{-5} & \begin{matrix} & \\ & \end{matrix} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \begin{matrix} & 20 \\ 15 & \end{matrix} & \xrightarrow{-7} & \begin{matrix} 12 & \\ & 10 \end{matrix} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} P.G. & & V.G. \\ \begin{matrix} 6 & 8 \\ 12 & 9 \end{matrix} & \xrightarrow{+6} & \begin{matrix} 14 & 16 \\ & \end{matrix} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \begin{matrix} 19 & 11 \\ 15 & 8 \end{matrix} & \xrightarrow{+3} & \begin{matrix} 6 & \\ & 10 \end{matrix} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} & & & \xrightarrow{+3} & \begin{matrix} 10 & 3 \\ 6 & 5 \end{matrix} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} & & & \xrightarrow{-4} & \begin{matrix} 14 & 10 \\ 12 & 17 \end{matrix} \end{matrix}$

fig. 4

andere leerjaren

Bij de voorbereiding van het programma voor het vierde leerjaar moesten de teams zich, na de gewenste informatie, uitspreken over de aanpak van het vermenigvuldigen. Hierin worden de scholen volkomen vrij gelaten, evenals bijvoorbeeld bij oppervlakte.

Vier scholen kozen voor het vermenigvuldigen als herhaald optellen; één school gaf de voorkeur aan het kruispuntenmodel.

Was het rekenen in het begin een zaak die alleen de lagere school betrof, sinds vorig jaar zijn ook de kleuterleidsters bij de teamgesprekken betrokken, in het kader van integratie en schoolwerkplan.

Dit is voor de werkgroep aanleiding geweest een tussentijdse evaluatie met de teams te houden en daarop wellicht een andere werkwijze af te stemmen.

Dat de verandering van het onderwijs in de school gedragen moet worden door het hele team, werd in alle teams overduidelijk uitgesproken; het door de teams samenstellen van de pakketjes voor het derde leerjaar werd ervaren als: 'Je erbij betrokken voelen'.

De werkgroep zal wellicht een andere functie moeten hebben. Gedacht wordt bijvoorbeeld aan het aangeven van een raamwerk voor een bepaald leerstofonderdeel, het verschaffen van literatuur en materialen, enz.

De teams werken het onderdeel dan uit, hetzij iedere school voor zich, hetzij dat er afspraken in deze worden gemaakt.

Momenteel is bijvoorbeeld één school bezig om een stukje schoolwerkplan voor vier- tot twaalfjarigen te maken over *meten* (lengte, gewicht en inhoud). De andere koppels hebben geïnventariseerd wat zij aan dit onderdeel gaan doen, zowel in de kleuter- als op de basisschool.

Een ander schoolteam is op deze manier bezig met *tellen*.

Weer een ander koppel houdt zich bezig met *grafieken*.

tenslotte

Bij al het werk dat tot nu toe is verricht, mocht de werkgroep steun ontvangen van de medewerkers van het *iowo*, waarvoor zij hen heel dankbaar is.

Zij, de scholen en de ouders, betreuren dan ook in hoge mate dat het allemaal gelopen is zoals het nu loopt. Ze zien de toekomst toch met enige zorg tegemoet als straks op eigen kracht moet worden verder gegaan.

Wat betreft de ouders moet nog worden opgemerkt, dat deze over de aanpak van het rekenonderwijs op de hoogte worden gehouden, onder andere op ouderavonden, waar zij zelf aan het werk worden gezet, want ook voor hen geldt: *wiskunde leer je door wiskunde te doen*.

nawoord

Onderwijsontwikkeling op hoog nivo is geen sine kure, valt uit bovenstaand verhaal op te maken. Er zijn nogal wat voorwaarden te noemen om zover te kunnen komen:

- *Het schoolteam moet bereid zijn om met elkaar, binnen de eigen mogelijkheden, zo goed mogelijk onderwijs te geven. Daarbij dient het kind centraal te staan. We zijn dan vanzelf kritisch ten aanzien van onze eigen werkwijze.*
- *In vlaardingen is een formule gevonden waardoor er voldoende begeleiding in de school is voor grote veranderingen.*

De samenwerking tussen schoolbegeleider, wisbaas en schoolteam funktioneert goed. Voorwaarde is wel dat een begeleider door een dienst in staat wordt gesteld aldus te werken.

De begeleider moet goed op de hoogte zijn van de ontwikkelingen op reken/wiskundegebied. Bovendien moet hij ervaring hebben met de problemen die zich gaan voordoen zodra onderwijsgeevenden anders tegen hun reken/wiskundeonderwijs aankijken.

De begeleider zal een belangrijke rol spelen bij de materiaalkeuze en de verzorging ervan. In vlaardingen is dit alles gewaarborgd door de enorme steun van Huug de Vries.

De functie van 'wisbaas' in de school is onontbeerlijk. De wisbazen verzetten veel werk bij de uiteindelijke samenstelling van het programma. In eerste instantie vangen zij de praktische problemen op, waaraan een schoolbegeleider niet toekomt.

Problemen worden in de werkgroep besproken en samen worden de lijnen uitgezet.

- *Duidelijk is dat met het maken van een totaalprogramma voor het vak rekenen/wiskunde jaren gemoeid zijn. Dat is een hele tijdsinvestering die wel eens onverantwoord lijkt. Gelukkig blijkt uit ervaring dat je voor die tijdsinvestering heel wat terugkrijgt. Veel meer dan alleen maar een ander programma voor rekenen. Je doet aan onderwijsontwikkeling die ver voorbij dat ene vak reikt.*

Huug de Vries schrijft tenslotte:

'Wiskunde leer je door wiskunde te doen. Dit geldt voor kinderen en onderwijsgeevenden. De onderwijsgeevenden zijn verrast, zo blijkt telkens weer, dat nieuwe benaderingen van onderwijs bij nieuwe materialen zo'n heel ander resultaat opleveren. Door op deze manier te werken kun je zinnig praten over scholingsconcepten, leergangen, integratie kleuteronderwijsbasisonderwijs.

Vrijheid van onderwijs begint namelijk bij een goede keuzemogelijkheid. Alternatieve werkwijzen en materialen moeten afgewogen kunnen worden tegen bestaande en bekende materialen.

Laten we, zoals onder andere in vlaardingen gebeurt, voor onderwijsgeevenden een hulp zijn in hun dagelijkse werk door ze met concrete spullen een vernieuwing van hun onderwijs te laten bewerkstelligen. Praten over onderwijs is daarvan een afgeleide en komt vanzelf naar voren.'

Deze stelregel zou uitgangspunt moeten zijn voor al diegenen die het beste met het onderwijs voor hebben. Zeker ook op het terrein van schoolwerkplanontwikkeling en onderwijsvernieuwing.

breuken (2)

DE WEKKER ZETTEN

Na 'Breuken (1)' over 'verdelen en gelijkwaardigheid', besteden we aandacht aan 'breuken en klokkijken'. Daarmee blijven we dichtbij huis, als het om eerlijk verdelen gaat. Immers, bij het klokkijken gaat het erom het juiste tijdstip vast te stellen op basis van de wijzerstand.

De manier waarop de uurwijzer¹⁾ op zeker moment een eenheid op de wijzerplaat verdeelt, vormt al een vrij nauwkeurige aanwijzing voor het tijdstip. Bovendien kan de stand van de minutenwijzer eruit afgeleid worden. Als de uurwijzer een kwart van de eenheid, zeg: tussen zes en zeven, heeft afgelegd, heeft de minutenwijzer een kwart van een nieuwe, volle rondgang volbracht: het is kwart over zes.

Klokkijken wil zoveel zeggen als het aflezen van een tijdmeetschaal en daarop breuken in meetgetallen vaststellen. De eenheden op die schaal worden 'eerlijk verdeeld', maar wel met een heel andere bedoeling dan bij het verdelen van pannenkoeken het geval was. Het met zorg ontwikkelen van een 'breuken-taal' is reeds bepleit in de eerste bijdrage van deze rubriek. Juist bij tijd, tijdsaanduidingen en klokkijken, vervullen de niet-belaste breuknamen, zoals 'half', 'helft' en 'kwart', een belangrijke rol. Daarvan uitgaande kunnen breuken als 'een vierde' ($\frac{1}{4}$), 'een achtste' ($\frac{1}{8}$), etc., hun 'breuken betekenis' verwerven.

► OVERZICHT (1)

- Kort samengevat komt de inhoud van de volgende werkbladen, met beschrijvingen en lessuggesties – opnieuw bedoeld voor de middenklassen – neer op:
- hernieuwen van de nodige vaardigheid in klokkijken;
 - met elkaar in verband brengen van de (ronde) wijzerplaat en de (rechte, doorlopende) tijdlijn;
 - begrijpen van de kwartierenschaal van de wekker en deze in verband brengen met de stand van de uurwijzer bij het klokkijken;
 - wekker 'zetten' tot op kwartieren nauwkeurig; aangeven op de schaal en getalsmatig beschrijven;
 - 'zet-schaal' van de wekker verfijnen en die verfining beschrijven in breukentaal: ($\frac{1}{3}$ deel van een kwart);
 - zichtbaar maken van tijduitspraken op de tijdlijn en (impliciete) toepassing van het breukbegrip daarbij;
 - bedenken van tijduitspraken bij gegeven visualiseringen op de tijdlijn.

► 'T WORDT TIJD (2)

We beginnen met een korte terugblik op het klokkijken als zodanig, opdat tekortkomingen bij het wekker zetten het lesverloop niet al te zeer hinderen. De wijze waarop dit gebeurt is duidelijk afgestemd op het vervolg. Het gaat om oefeningen in het klokkijken en redeneren over de stand van de wijzers daarbij.

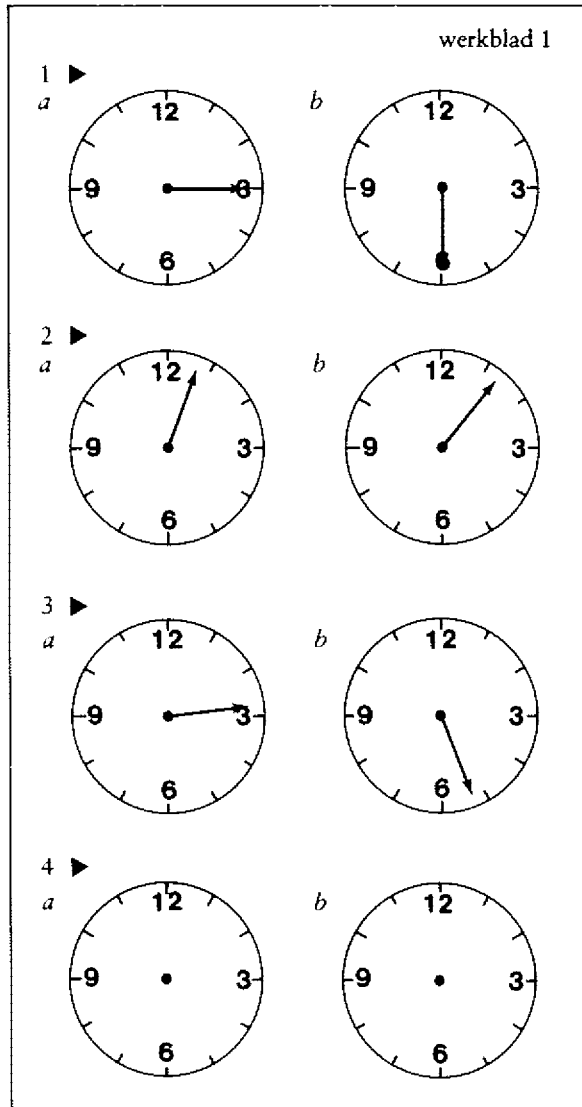
eerste opdracht

- De minutenwijzer staat op de drie. Het is tussen vijf en zes uur.
 - Teken de uurwijzer (kleine wijzer).
- De minutenwijzer staat op de zes. Het is 's middags na schooltijd, maar we hebben nog geen avondeten gehad.
 - Teken de uurwijzer zo precies mogelijk. Hier zijn twee oplossingen mogelijk: half vijf en half zes.

Met klokstempels en een gedeeltelijk bedekte demonstratieklok zijn allerlei opgaven van deze soort te bedenken en snel te tekenen.

¹⁾ In afwijking van het spraakgebruik worden naar engels voorbeeld de termen 'uurwijzer' en 'minutenwijzer' zeer nadrukkelijk toegepast. Wij zijn van mening dat dit voor kinderen een groot voordeel is bij het (leren) klokkijken. Immers, in de naamgeving brengt men de functie van de wijzers al tot uitdrukking.

werkblad 1



tweede opdracht

Deze opdracht vraagt het omgekeerde, namelijk: het aangeven van de stand van de minutenwijzer bij een gegeven stand van de uurwijzer.

Een eerste kwalitatieve benadering kan een steun zijn voor sommige leerlingen bij de meer precieze bepaling van het gevraagde tijdstip.

Bijvoorbeeld:

- ▶ Wie kan dit zeggen: het is later dan ... uur. Het is vroeger dan ... uur. Het is tussen ... en ... uur.
- ▶ Hoe laat is het? (kwart voor één)
Eerst een streepje zetten, waar de minutenwijzer naar wijst.
- ▶ Teken de minutenwijzer.
Hoeveel tijd is er tussen beide tijdstippen (a en b) verlopen?

derde opdracht

Als tweede opdracht.

vierde opdracht

De minutenwijzer is afgebroken.

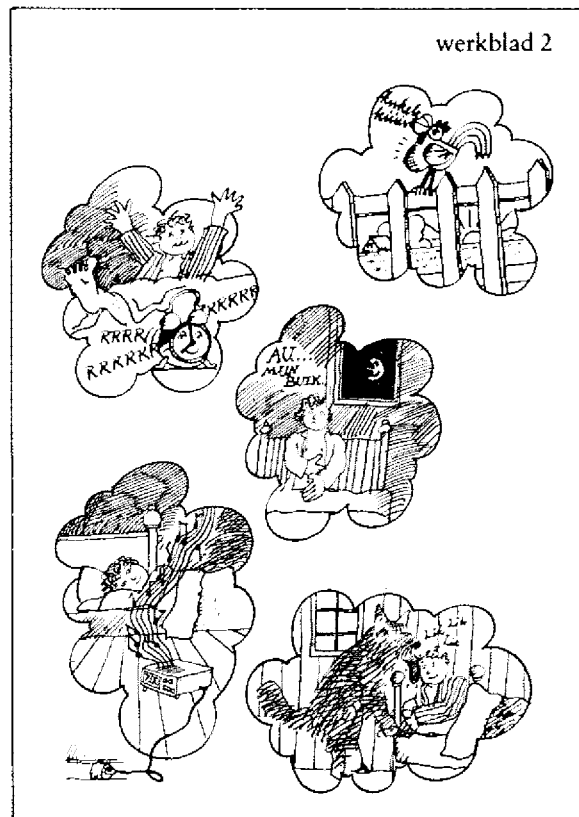
Laat nu met de uurwijzer het begin en eind van de pauze op school zien. De uurwijzer en haar stand en het feit, dat daarmee de stand van de minutenwijzer (en dus het betrokken tijdstip) redelijk te rekonstrueren valt, vormen de inleiding op het volgende werkblad.

▶ WEKKER ZETTEN (3)

We beginnen eerst eens met de vraag:

- ▶ Hoe komt het dat mensen wakker worden?

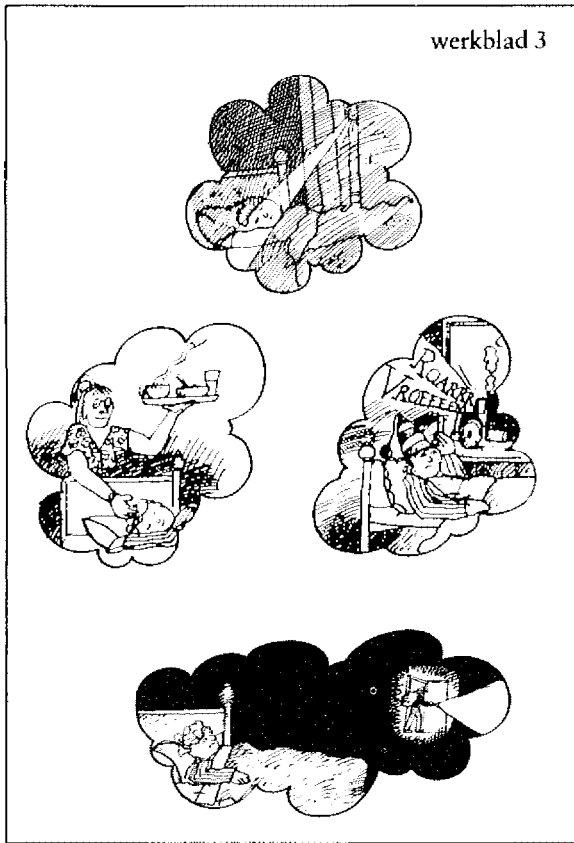
werkblad 2 en 3



We kijken naar een negental (of meer) situaties (*werkbladen 2 en 3*) en komen op een aantal oorzaken voor ontwakken:

- lawaai van het verkeer;
- kraaiende haan;
- hond, wekker, moeder, wekkerradio;
- zon in je gezicht, inbreker, buikpijn, toilet.

werkblad 3



Maar ook:

- uitgeslagen zijn;
- onweer;
- straaljager, harde wind, kou;
- enz.

We zoeken naar criteria om situaties in te delen, bijvoorbeeld:

- ontwaken door geluid – ontwaken zonder geluid als oorzaak;
- vrijwillig – onvrijwillig;
- gepland – niet gepland.

Bij veel situaties blijkt (hard) geluid de grootste boosdoener te zijn.

We bedenken met elkaar, wat we tegen ongewild ontwaken kunnen doen: raam dicht (bezwaar?), watjes of stopjes in je oren, ...

werkblad 4

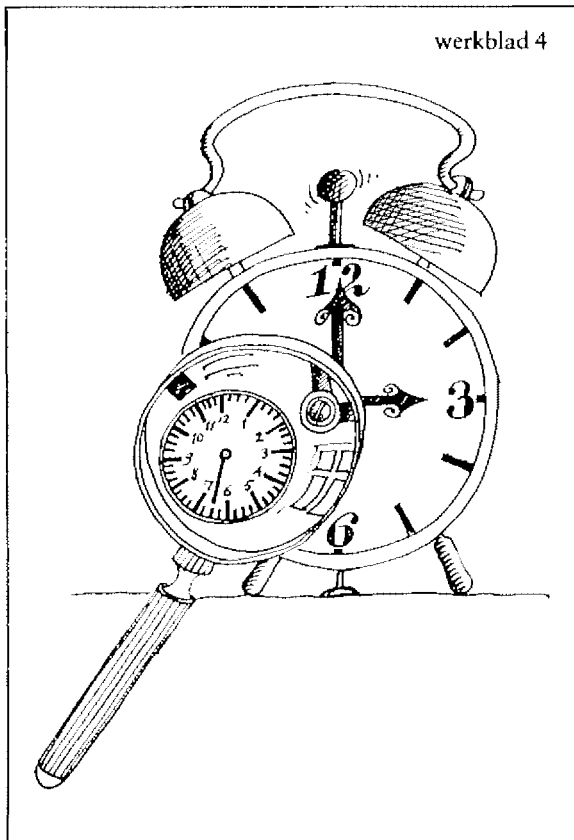
- ▶ Hoe kan het nu, dat die wekker op tijd afloopt? (zetten; neem een echte wekker mee in de klas)
- ▶ Hoe laat gaat deze wekker aflopen? Wie legt uit hoe dat zit?
- ▶ Is het dan morgen of avond? Kan het ook avond zijn?
- ▶ Wie zou de wekker op 's avonds half zeven kunnen zetten? (nachtwaker, iemand die nachtdienst heeft of bij de politie werkt)

Belangrijk is, dat de stand van de 'zetwijzer' in verband gebracht wordt met de stand van de uurwijzer bij het gewone klokkijken.

De schaal, die door het vergrootglas is uitvergroot, heeft (dus) betrekking op de verdeling van de uren in kwartieren. (Hoeveel keer vergroot het vergrootglas?)

Hiermee wordt eerst enige ervaring opgedaan aan de hand van de *werkbladen 5 en 6*.

werkblad 4



werkblad 5

1 ▶ a b c werkblad 5

2 ▶ d e

3 ▶ a b

7 6 5

eerste opdracht

Deze wijzerplaat stelt het kleine wijzerplaatje van de wekker voor (vergroot). De streepjes tussen de hele uren geven de kwartieren aan.

- Schrijf onder de wijzerplaatjes, hoe laat deze wekkers aflopen.

tweede opdracht

Een stukje van de schaal op de wijzerplaat van de 'zetwijzer' is sterk vergroot.

- Hoeveel keer ongeveer?

De afstand tussen 5 en 6 en tussen 6 en 7 is telkens verdeeld in vieren. Elk stukje stelt – zoals we eerder gezien hebben – een kwartier voor.

- Hoeveel streepjes moeten er tussen de 5 en 6 staan als de wekker ook precies op 5 en 10 minuten gezet moet kunnen worden?
- Teken die streepjes. Hoe noem je één zo'n stukje? (Welk deel van een uur?)

Beschrijving:

We hadden het $\frac{1}{4}$ deel, daarvan hebben we het $\frac{1}{3}$ deel genomen:

$$\frac{1}{3} \text{ van } \frac{1}{4} = \frac{1}{12};$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

derde opdracht

Een 'gewone' wijzerplaat. De uurwijzer is getekend.

- Het is nacht. De meeste mensen slapen. Hoe laat is het nu? Teken de minutenwijzer even. Vader slaapt al twee uur. Hoe laat sliep hij in? (a)
- Vader wil gaan vissen. Over drie uur loopt de wekker af. Teken de 'zetwijzer'. (b)

► **DE 'AFGEROLDE' WIJZERPLAAT (4)**

De tijdlijn is vanuit de wijzerplaat afgerold. Sta hierbij nadrukkelijk stil met de leerlingen. We proberen het cirkulaire verloop van de klok met het lineaire verloop van de tijdlijn in verband te brengen.

- Waarom loopt de klok rond?
- Waarom is dat gemakkelijk?
- Zouden de mensen het-steeds-opnieuw-beginnen van de klok ergens van afgekeken hebben?
- We maken er een 'doorlopende' wijzerplaat van! Een tijdlijn! Waarom moet 'ie doorlopen? Is er verschil tussen de ronde en de doorlopende wijzerplaat? (Hoe zit het met de tijd?)
- Er is een televisieprogramma geweest dat heette: 'De tijd stond even stil'. Wat vind jij hiervan? Wat zal er in zo'n programma geweest zijn?

werkblad 6

werkblad 6

zondag

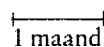
maandag

⊗ Het klokkenmuseum is open van 9 uur 's morgens tot 5 uur 's middags.
Op *zondag* van 10 tot 4 uur. ⊗

- Kleur de openingstijden van het museum in op de doorlopende 'wijzerplaat' en de 'klok voor maandag'.
- Hoe lang is het museum open?
Op zondag: welk deel van de dag?
Op maandag: welk deel van de dag?

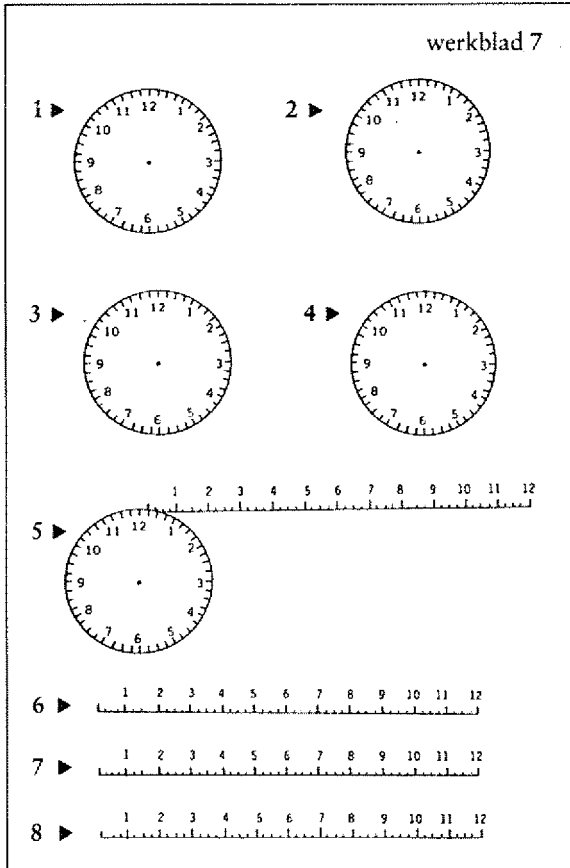
Enkele suggesties in verband met *werkblad 6*:

Dit lijnstukje stelt op de tijdlijn één maand voor:



- Teken: een kwartaal, een half jaar, een week.
- Hoe lang wordt hierbij je 'levenslengte' op de tijdlijn? (schatten)

► TERUG NAAR WEKKER EN TIJDLIJN (5)
werkblad 7



We gaan nu zelf de wekker zetten (wijzertjes tekenen) voor de volgende situaties:

- Vader wil om half acht gewekt worden. (1)
- Klokslag zeven uur liep de wekker af. (2)
- Moeder zet de wekker op kwart voor zeven. (3)
- Zon op om 4.30 u. (4)
- We maken de wijzerplaat nu weer recht. Teken ook een pijl bij de rechte schaal. Toen de wekker afliep was 't bijna zeven uur. (5)
- Welk getalletje zou bij deze rechte wijzerplaat aan het begin moeten staan? Even na zes uur rinkelde de wekker en schrok Piet wakker. (6)
- Als de rechte wijzerplaat nu eens doorgetrokken werd, wat zouden de volgende getalletjes dan zijn? Welk getalletje aan het begin?

De wekker liep precies om kwart over vier af. (7)
Sommige leerlingen vinden hier, dat opnieuw begonnen moet worden met 1 – 2 – 3 – enz. Anderen zijn van mening, dat doortellen met 13 – 14 – 15 – enz. beter is, omdat je dan meteen kunt zien of het morgen of middag is. Hier doet zich een goede gelegenheid voor, spoor- of televisiegidstijden aan de orde te stellen.

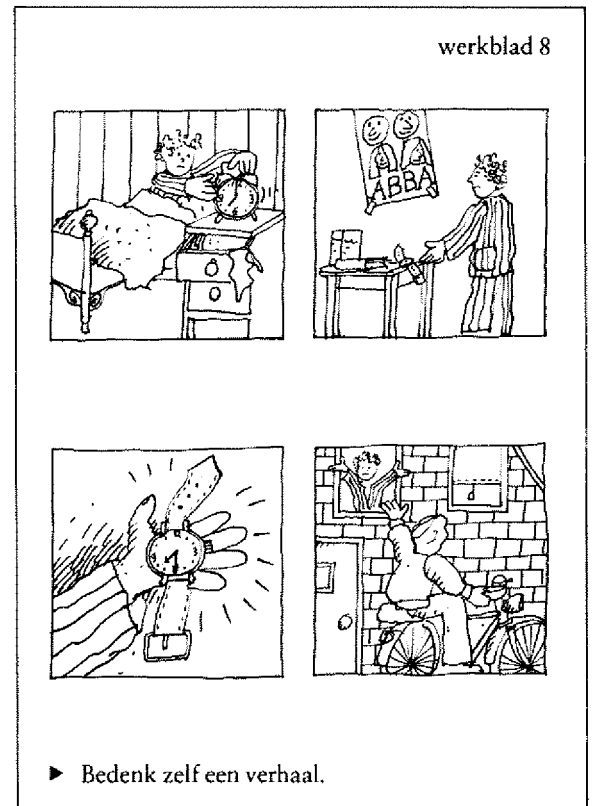
- Het was nog maar net vijf uur geweest, of de wekker begon te ratelen. (8)

In een klassikale activiteit (bord) zouden nog meer uitspraken in verband met tijdstippen en tijdsduren gevisualiseerd kunnen worden waarbij de volgende 'kernwoorden' aan bod kunnen komen:

precies;	op de kop af;
nauwelijks;	op slag van;
bijna;	net niet;
haast;	net wel;
ruim;	zoveel later dan;
krap;	zoveel vroeger dan;
klokslag;	ruim een kwartier voor;
even voor;	ruim een kwartier over;
nog maar net;	te laat;
even over;	
te vroeg;	etc.

Deze activiteit kan ook omgekeerd worden. Dus: gegeven een situatie, waarin een wekker gezet is; gevraagd: bedenk daarbij een verhaal. Een voorbeeld met plaatjes:

werkblad 8



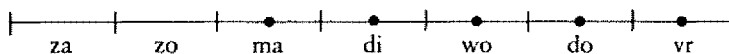
- Bedenk voor deze plaatjes een passende volgorde, zodat er een verhaal in zit. Schrijf het verhaaltje op.

Enkele voorbeelden van leerlingenwerk:

Jan heeft zijn horloge en ziet dat het vijf is.
 Hij trilt zijn penne aan en gaat slapen.
 De volgende morgen wordt Jan om 7 uur wakker.
 Hij gaat naar het raam en schuift de gordijnen weg.
 De ochtendzon schijnt in zijn gezicht.
 Hij ziet dat vaders de deur uit komen op zijn fiets.
 Jan gaat zich gauw aanbeden.

...ind.

JAN HEFT MET ZIJN VRIENDJE AFGESPROKEN.
 ZE SPREKEN AF DAT ZICH OM 7:00 uur naar het zwembad gaan.
 JAN gaat slapen, hij wordt wakker op 7:00 uur.
 Jan wordt wakker.
 Hij pakt zijn horloge en ziet dat het al 7:30 uur is.
 Buiten ziet hij zijn vriend.
 Zijn vriend yakt weg.

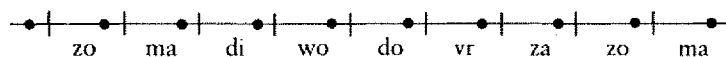


Je moet als leerling zorgen, dat je op de dagen die voor 'school' in aanmerking komen, 'in het midden gaat zitten'.

Bij sommige uitspraken kunnen twijfels rijzen over 's morgens of 's avonds.

Hierbij kan de waarschijnlijkheid van beide mogelijkheden kwalitatief gewogen worden. Ook hier kan de kwestie weer omgedraaid worden.

Voor de volledigheid een enkel voorbeeld:



► Wie bedenkt een gebeurtenis, die hierbij past?

Voorbeeld: wij eten elke dag om ongeveer zes uur.



Deze strook stelt iemands leven voor en het gearceerde stukje zijn leeftijd!

► Hoeveel heeft hij er al op zitten? Wat heeft hij nog tegoed?

► Stel, hij is acht jaar, hoe oud wordt hij dan? Idem, met andere getallen.

Ook: stel, hij wordt tachtig, hoe oud is hij nu?

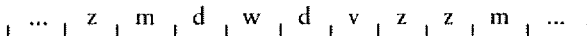
Eventueel tabel invullen.

leeftijd	7	8	-	-	
leven	56	64			

Iemand heeft het $\frac{1}{8}$ deel van zijn leven erop zitten.

► TIJDSUITSPRAKEN OP DE TIJDLIJN (6)

Opdracht 7 op *werkblad 7* gaf onder andere aanleiding tot de vraag naar uitbreiding van de 'rechte wijzerplaat' naar een tijdlijn voor een heel etmaal of meerdere dagen. Wij grijpen zowel daarop terug, als op de suggestie bij de afgerolde wijzerplaat, om een tijdlijn voor een week (en meer) te maken:



► Teken een lijnstuk of strook. Deze stelt één week plus één dag voor.

Maak (teken) een verdeling in dagen.

Ook hierop kunnen allerlei uitspraken gevisualiseerd worden:

- De school gaat elke dag om twaalf uur uit.
- De school begint iedere dag om negen uur.
- Elke middag gaat de school om vier uur uit.
- De kleintjes hebben al om drie uur vrij.
- Meneer Jansen komt iedere dag om zes uur voorbij op de fiets.
- Mevrouw Jansen laat haar hondje steeds omstreeks acht uur uit.
- Meestal is vader om zes uur thuis, maar soms wat later.

Een dergelijke activiteit kan al in een pril stadium bij het breukbegrip-in-ontwikkeling gedaan worden, omdat sprake is van een impliciete toepassing. Verder hoeft niet over breuken gesproken te worden.

Voorbeeld: de school gaat elke dag om twaalf uur uit.

► TERUGBLIK (7)

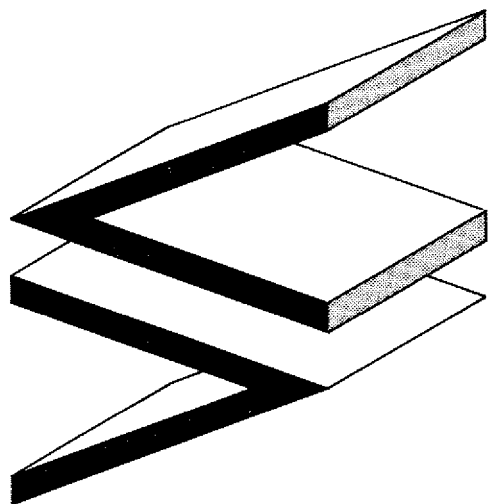
Nadenken over tijdstippen en tijdsduren, en redeneren in verband daarmee op grond van gegeven wijzerstanden, vormden de inleiding op 'De wekker zetten'.

Binnen de bredere kontekst van het ontwaken ging het bij het zetten van de wekker vooral om tijdstippen en tijdsintervallen, waarbij de taal een belangrijke rol speelde.

Allerlei uitspraken die met tijd verband hielden, werden geïnterpreteerd en gevisualiseerd op de tijdlijn, bijvoorbeeld: 'klokslag zeven uur liep de wekker af'.

Een goede gelegenheid deed zich hierbij voor, ook het logische element te laten meespelen en de notie van moeilijk grijpbare begrippen als 'precies', 'nauwelijks', 'bijna', 'haast', 'ruim', etc., bij de leerlingen te verscherpen.

berichten



BERKELEY

Van 9 tot 16 augustus 1980 vond in Berkeley (Californië) de vierde ICME-konferentie plaats (ICME: international congress on mathematics education).

De IOWO-vertegenwoordiging heeft zich – daartoe uitgenodigd – op vele fronten via lezingen, werkgroepen en een tentoonstelling kunnen presenteren.

De algehele indruk is dat de 'New Math'-periode in de schoolwiskunde definitief voorbij is en dat de IOWO-lijn internationaal veel steun ondervindt.

Een konferentieverslag is in voorbereiding.

vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs

Zoals u weet, stopt het *iowo* per 1 januari 1981. Met ingang van deze datum start de vakgroep *ow & oc* (vakgroep onderzoek wiskundeonderwijs en onderwijscomputercentrum) van de subfakulteit wiskunde (*ru*, Utrecht).

Over het adres van deze vakgroep is op dit moment nog niets bekend. Nadere gegevens zullen zo snel mogelijk gepubliceerd worden.

In principe zet de vakgroep de ontwikkelingen voort, zoals die aangezet zijn ten behoeve van het voortgezet onderwijs. Voorts is zij beheerder van de wiskobas-erfenis en zal zij onderzoekstaken verrichten die voortvloeien uit eerder verricht onderwijsontwikkelingswerk.

We citeren uit de taakstelling:

'Voortzetten en zonedig uitbreiden van het reeds aangezette onderzoek in de sector van het basisonderwijs betreffende specifieke onderwerpen als cijferen, breukrekenen, aanvankelijk rekenen, wiskundige wereldoriëntatie, alsmede van meer algemene problemen als de aansluitings- c.q. integratie-problematiek kleuterschool-lagere school en de implicaties van reken/wiskundemethoden, onderwijsleermaterialen en automatiseringsapparatuur voor de praktijk van het onderwijzen.

Vervolgens het opzetten van nieuw onderzoek betreffende wiskundeonderwijs op punten die zich als relevant en gewichtig aandienen.'

Het beheer van de rechten van alle bij het *iowo* ontwikkelde materialen berust voorshands bij deze groep.

Wij wensen de groep veel sterkte in de komende tijden. Een wens die de sectie basisonderwijs (Jan van den Brink, Leen Streefland, Adri Treffers, Betty Dekker en Sylvia Pieters) zeker nodig zal hebben.

afscheid iowo-medewerkers

De volgende *iowo*-medewerkers (afd. wiskobas) nemen afscheid van u: Jeanne de Gooijer, Petra van Stam, Abbes Dekker, Fred Goffree, Hans ter Heege, Huub Jansen, Rob de Jong, Henk Meijer, Ed de Moor en Edu Wijdeveld.

Zij wensen u veel succes in het onderwijs en hopen dat belangrijke elementen uit het wiskobaswerk en vooral ook de onderwijsvisie van wiskobas een blijvende invloed zullen hebben op het reken/wiskundeonderwijs.