wiskobas bulletin

rubriekdeel

Jaargang 8 nr. 4
september 1979

WISKOBAS-BULLETIN (rubrieken)
- bulletin ter begeleiding van het wiskunde-onderwijs
- verschijnt gedurende de achtste jaargang zes keer.

Jaargang 8 nr. 4 – september 1979

Redaktie
Dr. F. Goffree, Drs. R.A. de Jong (eindredakteur), G.H. Meijer, Dr. A. Treffers, Drs. E.J. Wijdeveld

Medewerkers
Prof. Dr. F. van der Blij, Drs. J. van den Brink, A. Dekker, K. Frenay, Prof.Dr. H. Freudenthal, L. Gilissen, J. de Gooijer-Quint, H. Jansen, H. ter Heege, Drs. J.H.F.M. Klep, Dr. K.B. Koster, E. de Moor, D.W. Oort, P. Scholten, W. Sweers, L. Streefland.

Vormgeving
Ton Voortman

Illustraties
Theo van Leeuwen

Redaktieadres
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht
t.a.v. Sylvia Pieters of Rob de Jong

Abonnementenadministratie
STICHTING IVIO,
Postbus 37, Lelystad.
Voor aanmeldingen, adreswijzigingen, betalingen, enz.

Abonnementsprijs
Per jaargang *f* 35,–.
De jaargangen lopen van september tot september

Annuleringen moeten minstens 14 dagen voor het einde van de jaargang worden opgegeven bij de abonnementenadministratie.

Gelieve uitsluitend te betalen met aksept-girokaarten. Deze worden u toegezonden.

INHOUD

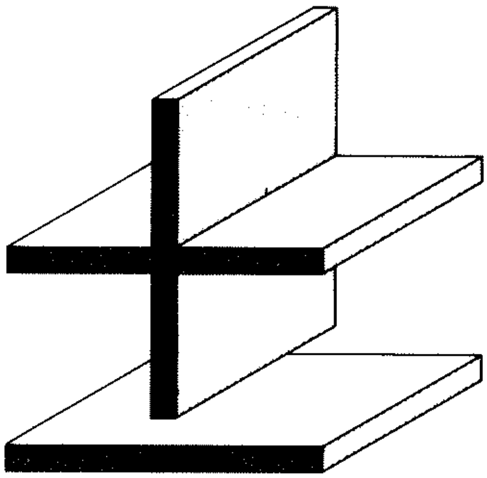
Aan de vraag naar volledige oude jaargangen van het wiskobas-bulletin kunnen we helaas niet meer voldoen. Verschillende nummers zijn uitverkocht.
Van de volgende afleveringen is nog een beperkt aantal eksemplaren verkrijgbaar:

jaargang 2, nr. 6	f 7,50
jaargang 3, nr. 2	f 7,50
jaargang 3, nr. 3	f 7,50
jaargang 3, nr. 4/5	f 7,50
jaargang 3, nr. 6	f 7,50
jaargang 4	f 37,50 (kompleet)
jaargang 5, nr. 2/3	f 25,00 (leerplanpublikatie 2)
jaargang 5, nr. 4	f 8,75 (leerplanpubliaktie 3)
jaargang 5, nr. 5/6	f 10,00 (leerplanpublikatie 4)
jaargang 6, nr. 2	f 10,00 (leerplanpublikatie 5)
jaargang 6, nr. 3	f 3,00
jaargang 6, nr. 4	f 10,00 (leerplanpublikatie 6)
jaargang 7, nr. 1/2	f 20,00 (leerplanpublikatie 7)
jaargang 7, nr. 3	f 10,25 (leerplanpublikatie 8)
jaargang 7, nr. 4	f 3,00
jaargang 7, nr. 5/6	f 15,00 (leerplanpublikatie 9)
jaargang 8, nr. 1	f 10,00
jaargang 8, nr. 2	f 10,00
jaargang 8, nr. 3	f 10,00

Alleen na ontvangst van uw storting op postgirorekeningnummer 3105662 t.n.v. R.U.-IOWO te utrecht, zal u de gewenste aflevering worden toegezonden.

© 1979 Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs
Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, mikrofilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het kopyright.

redaktioneel



SPELLENKULTUUR

Aan het eind van de vorige eeuw verscheen een fraai boekje van Edward Falkener: 'Games ancient and oriental and how to play them'.[1]) *Het is buitengewoon interessant, hierin te zien en te lezen hoe bijvoorbeeld een spelbord van koningin Hatasu (1600 voor Chr.) eruit zag, en vooral ook om eens te fantaseren hoe zo'n spel in die tijd gespeeld werd. Falkener geeft ook voorbeelden uit het oude rome, uit china, japan, burma, siam, enz. Zeer de moeite waard voor de echte spel- en puzzelliefhebber!*
Nog niet zo lang geleden (1961) is het boekje herontdekt en door Dover Publications opnieuw uitgegeven. Kennelijk kwamen spelletjes in het begin van de zestiger jaren in een nieuwe belangstellingsgolf terecht.

Is die belangstelling er nu (1979) nog? Willen we met een (zacht) tematisch nummer 'Spel en wiskundeonderwijs' *bij deze belangstelling aansluiten?*
Maar ... een woord als 'ludiek' doet zo langzamerhand overjarig aan!
En ... eerste generaties onderwijsspellen – gefiguurzaagd en met plakkaatverf van een frisse kleur voorzien – lijken al onder de schoolzolderstof te liggen.
Gaat wiskobas niet een beetje te vér achter de mode aanlopen?

ROB DE JONG

spellen in de mode
Spelletjes en puzzels zijn inderdaad in! Aan alle kanten kun je 't opmerken. In veel huiskamers tref je konstruktiespelletjes aan: blokjes hout die, op een bepaalde wijze in elkaar geschoven, een kubus o.i.d. vormen; metalen ringen die slimmerikken in en uit elkaar kunnen halen. Ook spelletjes als solitaire, tangram, doolhoven met knikkertjes, ... hebben hun plaats gevonden op de nederlandse salontafels.

De rijdende winkels, u kent ze wel: van de *srv*, hebben luciferspuzzels op de doosjes gedrukt. Een leuk idee en heel relevant. De konsumenten reageren geïnteresseerd, zo blijkt bij navraag. Misschien gaat de *srv* er wel mee verder: punaisepuzzels, paperclipspelletjes en sigarettenprobleempjes. Denk in dit verband ook eens aan de speeltjes die indertijd bij de soep werden meegegeven.

Een bijlage van het *'Reformatorisch Dagblad'* van 18 oktober 1978 stond in het teken van boek en spel. Zij bevatte o.m. een lezenswaard interview met een ontwerper-fabrikant van relatiegeschenken. Asbakken, balpennen en gedistilleerd blijken op de terugtocht te zijn; spellen als trio-dam en trio-schaak (dammen en schaken voor drie personen), allerlei puzzels en pentomino's zijn daarentegen sterk in opmars. In het betreffende bedrijf werkt een groep mensen die in voorkomende gevallen een nieuw spel uitdenkt voor een klant: een tapijtlegspel voor een tapijtfabriek, enz.

Het speciaalnummer van *'Science et Vie'* (160 pag.) van september 1978 was geheel gewijd aan 'Les jeux de réflection'.

Onder auspiciën van de 'Collectieve propaganda voor het nederlandse boek' verscheen in april 1978 als boek van de maand: *'Spelen met puzzels'*. Een schitterende uitgave, samengesteld door Pieter van Delft en Jack Botermans. In een gigantische oplage verkocht.

Kom eens in een spellenwinkel! Het assortiment is dermate groot dat je het spoor naar zo-maar-een-kadootje snel bijster bent. De vijftiger jaren keus (kwartet, pim-pam-pet, monopoly, vissen in een akwarium, elektro, domino, speelkaarten, halma, dammen, schaken, mens-erger-je-niet, hoedje wip, legpuzzels) is nu uitgebreid met tientallen denkspelletjes, simulatiespelen, konstruktiespelen en noem maar op. Per kategorie rekken vol!

Via een huis-aan-huis-blad werden we deze week (eind mei) met de nieuwste vondst gekonfronteerd: de *brain-trainer*.

---
[1]) London 1891.

'Brain-trainer' leuk nieuw spel voor jong en oud

Door J.Th. Kamlag bv te Weesp is een nieuw spel, 'Brain-trainer' genaamd, op de markt gebracht.

Het spelletje bestaat uit een grondplaat van doorzichtig hardplastic, waarin twee maal vijf rijen van zeven gaatjes zijn geboord. In deze gaten moeten 25 pionnen van verschillende kleuren worden geplaatst. Meegeleverd wordt een viertal kaarten, waarop 25 stippen in een bepaald kleurenpatroon voorkomen. Men legt zo'n kaart onder de grondplaat. De kunst is nu om door het verplaatsen van de pionnen (per beurt mag één pion, en dan nog volgens de spelregels, verplaatst worden) de pion van een bepaalde kleur op een stip van dezelfde kleur te krijgen. Men kan de Brain-trainer spelen met twee personen, dan worden beide aan elkaar gelijke helften van het spel gebruikt, of alleen. In het laatste geval is het de bedoeling om in een zo gering mogelijk aantal zetten de goede pionvolgorde te krijgen. In de doos van de Brain-trainer bevinden zich de uitwerkingen van de opgaven. Iemand die er in slaagt in minder zetten dan het aangegeven aantal de opgave op te lossen, kan zijn oplossing naar de (Noorse) fabrikant sturen. Hij ontvangt dan een prijs.
Het spel heeft een gebruiksaanwijzing in het Nederlands. Helaas is deze in erg kleine druk uitgevoerd.

Voor het overige achten wij de Brain-trainer qua handzame uitvoering en moeilijkheidsgraad een uitstekend zoethoudertje voor onderweg in de auto. Kinderen vanaf een jaar of zeven kunnen er prima mee overweg. Het spel kost in de winkel ƒ 14,95.

We hebben het spel aangevraagd en onze hersens getraind. Het is inderdaad 'een leuk nieuw spel voor jong en oud'.

De meest onthullende illustratie van onze spellenkultuur is ongetwijfeld het kansenspel over de rechten van het kind. Ontwikkeld onder auspiciën van de *unesco*, in het kader van het jaar van het kind. We citeren – met instemming – uit *'De Volkskrant'* van 31 mei 1979:

Kansenspel

Je zult toch maar kind zijn in het Jaar van het Kind. Plotseling word je geconfronteerd met een aantal onbegrijpelijke Rechten, waarin niets te vinden is over het Recht op tv-kijken of het Recht om laat naar bed te gaan. Verder word je voortdurend lastig gevallen over de arme kindertjes in de Derde Wereld en de zielige gehandicapte kinderen. Maar gelukkig, de Unicef heeft ook iets willen doen voor de Nederlandse kinderen. Op verzoek van Unicef heeft het Adviesbureau voor Onderwijsvoorlichting en Public Relations een spel gemaakt, het Kinderkansenspel.
Over de kansen of niet-kansen van de Nederlandse kinderen wordt met geen woord gerept. Daarentegen in de spelregels des te meer teksten die de sentimenten van de kinderen moeten opwekken voor andere kindertjes, die het veel minder goed hebben dan zij. Als je bij dit 'De 10 rechten van het kind'-ganzenbord op nummer 46 komt bijvoorbeeld, staat er: 'Kinderen hebben rechten. Rechten die wij heel gewoon vinden. In veel landen komt er van die kinderrechten weinig of niets terecht. Daar moeten we allemaal iets aan doen, jij ook. Sla drie beurten over om na te denken wat jij kunt doen om andere kinderen te helpen'.
De grote mensen zijn gemakkelijk klaar op deze manier. Je maakt van het Jaar voor het Kind gewoon het Jaar van het ene Kind voor het andere. Het wordt tijd dat de kinderen hun eigen ombudsman/vrouw krijgen om ze voor dit soort flauwekul te behoeden en aandacht te vragen voor hun eigen rechten.

Wat is er aan de hand? Is het verschijnsel van al die spellen relatief nieuw? Of: is er al eeuwenlang in huiskamers gespeeld, maar wordt er nu op *grotere schaal* en in meer *diversiteiten* geproduceerd (en gekonsumeerd)? Heeft, zo kan een teorie luiden, de televisie ons uitgeleverd aan onze huiskamers en daarmee aan een eigen huiskamer-speelgedrag?
De mode is grillig. Ook de spellenmode! Laten we er niet over filosoferen!

spel en wiskunde
Binnen de wiskunde is spel een uiterst serieuze aktiviteit. Overigens: nog niet zo lang. Eén van de grondleggers van de z.g. *spelteorie* is John von Neumann. Zijn boek *'Theory of Games and Economic Behavior'* dateert van 1944. Sinds die tijd is het hard gegaan met deze teorie. Zo verscheen in 1959 een vierdelig standaardwerk, met een literatuuropgave van maar liefst 985 titels. Niet allemaal over spel, maar toch wel erg veel.
Een bekend, wat recenter boek is van J.H. Conway *'On Numbers and Games'*. In de inleiding schrijft de auteur, dat je via spel een scherper beeld van de teorie van het getal kunt krijgen. Zo zie je maar! Waar spel al niet goed voor is! Een aardig rijmpje uit dit boek:

> 'For when the One Great Scorer comes
> to write against your name,
> He marks – not that you won or lost
> but how you played the game.'

Merkwaardig is, dat strategie, oorlog en ekonomie met elkaar verbonden zijn in de spelteorie. Of is dat niet zo merkwaardig?

spel en onderwijs
Ook hier mode?
Jaren voor er sprake was van de geïntegreerde basisschool, werd al door het *cps* de z.g. speelleerklas gepropageerd. Sinds jaar en dag zijn binnen met name het buitengewoon onderwijs talloze spelletjes ontwikkeld om algemene (motivationele) of bepaalde (leer)moeilijkheden het hoofd te bieden. Niets nieuws!

Toch lijkt er de laatste tijd een zekere versnelling op te treden. Zonder systematisch de leermiddelenmarkt te analyseren, vinden we in zomaar enkele folders en tijdschriften heel wat spelaanbiedingen.
- Onlangs (maart 1979) is het tijdschrift *'Spel Onderwijs'* gestart: 'voor allen die zich beroepshalve bezighouden met kinderen en hun spelen en hun speelgoed.'
- Het april- en meinummer van *'De wereld van het jonge kind'* bevat artikelen van Roelie Bouma over de z.g. 'speel-o-theek'.

Het verschijnsel van de 'speelmoeder' wordt o.m. in deze artikelen naar voren gebracht.

– Een grote edukatieve uitgever brengt een geschiedenismetode op de markt. In de folder staat – we citeren –:

> 'Per cursusjaar is bij een van de tien thema's een spel beschikbaar (bijvoorbeeld een ganzenbord bij thema 5 van de serie voor het vierde leerjaar). Het is volkomen geïntegreerd in het didactisch concept van de les (spel en les vormen een eenheid).'

– En tenslotte lezen we in een advertentie (mei 1979):

> 'Er is een nieuw spel. Kalkitos heet het. En het is meer dan spel alleen. Het is leerzaam. En het ontwikkelt de creativiteit van jonge kinderen. Bovendien is het nog leuk ook.'

Leerzaam en kreatief! De reklameteksten zijn dat in ieder geval wél!

spel en wiskundeonderwijs

Het wiskobas-bulletin van november 1972 was voor een belangrijk deel gewijd aan spelletjes. Toen al sprak een auteur erover dat we:

> 'overspoeld worden met zogenaamde matematische spelletjes, die wiskundig gezien weinig relevant zijn.'

Een bekend en toonaangevend tijdschrift van de *n*ational *c*ouncil of *t*eachers of *m*athematics, getiteld *'Arithmetic teacher'*, heeft in 1975 alle tot dan toe in dat tijdschrift verschenen spelletjes gebundeld.[1]) Ruim honderd artikelen over spelletjes met gehele getallen, negatieve getallen, breuken, meten, meetkunde, enz. We hebben voor u onderzocht hoe deze artikelen in de periode 1954-1975 geplaatst moeten worden. In de jaren tot 1968 blijken er nauwelijks spelletjes gepubliceerd te zijn. Vanaf 1968 is het aantal jaarlijks gepubliceerde spelletjes vrij konstant: ruim tien per jaar.

Het tijdschrift 'Junior Education' heeft z'n maartnummer van 1979 gewijd aan spelletjes en wiskundeonderwijs.
Verder zien we in hetzelfde tijdschrift een advertentie voor *equable*: 'a new game to develop arithmetic skills for up to 4 players'. Een soort scrabble met cijfers en bewerkingstekens (+, –, x, :) in plaats van letters. Het gaat hier niet om het leggen van (zinvolle) woorden, maar om sommetjes.

Het hoofdstuk over uitgangspunten in de bekende metode *'Getal in beeld'* dienen we, zo heeft u in het laatste spullenkatern kunnen lezen, ernstig te nemen. Er staat niet de gebruikelijke bla-bla en pseudo-wetenschap in. We citeren:

> 'Waarom brengen we wiskunde en spel met elkaar in verband? Zowel in de wiskunde als bij de kinderspelen worden spelregels afgesproken en vooraf vastgelegd, met de bedoeling om zich er streng aan te houden. Een spelsituatie is veel rijker dan zomaar iets doen. Vooral vanuit wiskundig standpunt gezien biedt een spelsituatie de mogelijkheid om belangrijke relaties te ontdekken.'

De metode bevat écht erg veel leuke spel-achtige aktiviteiten.

dit bulletin

Veel in het voorgaande zou aanleiding kunnen zijn, in het wiskobas-bulletin geen aparte aandacht aan spelletjes te besteden. We hebben er immers geen enkele behoefte aan, te echo-en op of aan te sluiten bij een wat bejaarde vernieuwing.
We hebben echter onze *eigen* (a-modische) redenen. In het artikel *'Spel ernstig nemen'* (pag. 33 e.v.) komen deze redenen uitgebreid naar voren. In dit redaktioneel kunnen we volstaan met de opmerking, dat spel mogelijkheden biedt om het oefenen (in het rekenen) op een andere manier te stofferen en dat strategiespelen de moeite waard zijn vanwege de (mogelijk) aantrekkelijke redeneerpartijen. Meer pretenties hebben we niet met dit nummer. Tóch genoeg, lijkt ons!
De redaktie heeft daarom de auteurs gevraagd, binnen het kader van de gebruikelijke rubrieken, zoveel mogelijk aandacht te besteden aan spelletjes. Het hóefde niet per se! Het hóefde geen krampachtig gedoe te worden! Het zou een nummer moeten worden met een 'zachttematisch' karakter: hoofdtema weliswaar steeds herkenbaar, maar met ook ruimte voor andere (kleinere) tema's.

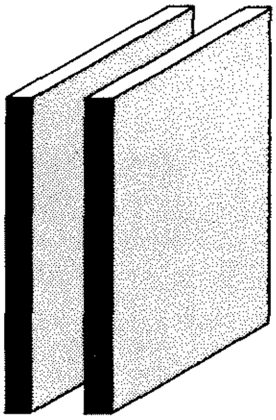
het volgende nummer

In de lopende (achtste) jaargang kunt u nog één nummer van het wiskobas-bulletin tegemoet zien, te weten: leerplanpublikatie 10 over *'Vermenigvuldigen en delen'*. Door de wat onrustige wateren waarin het *iowo* terecht is gekomen – zie elders in deze aflevering – konden we enige vertraging niet voorkomen. Wees er echter van overtuigd dat we er tijdens de negende jaargang weer stevig tegenaan zullen gaan. De redaktie heeft een zeer ambitieus programma!

---

[1]) *Nctm: 'Games & Puzzles for Elementary and Middle School Mathematics'*, reston 1975.

kolommen



STUIVERTJE WISSELEN

Het gebeurde in een amerikaans teacher center *dat een van mijn hoorderessen een reeks wiskobasopgaven beantwoordde met een puzzel van haar kant:*

zes blokjes: drie witte en drie zwarte

□□□■■■.

Je neemt de middelste twee en verplaatst ze naar het rechtereind, schuift het rijtje weer bij elkaar, en verplaatst wat dan de middelste twee zijn naar het linkereind. Hoe vaak moet je deze dubbele zet uitvoeren om de oorspronkelijke figuur terug te krijgen?

Dezelfde vraag voor acht blokjes, vier witte en vier zwarte:

□□□□■■■■.

Voor 10, 12, 14, 16 en ga zo maar door. Al proberend had zij er zelfs een algemene formule voor gevonden. Ik nodig u uit hetzelfde te doen. Als u mijn uitnodiging aanvaardt, lees dan pas verder als u klaar bent.

H. FREUDENTHAL

permutaties

Vanuit een wiskundige achtergrond denk je meteen aan *permutaties*, de wiskundige term voor stuivertje-wisselen.

Allereerst merk je op dat de gevallen 6, 10, 14, ... anders liggen, eenvoudiger zijn, dan 8, 12, 16, ...

De blokjes blijven paarsgewijs bij elkaar. Je kunt 6, 10, 14, ... vereenvoudigen tot 3, 5, 7, ..., waarbij dan steeds het middelste naar rechts en links verplaatst wordt. Wat gebeurt er dan? Laten we het geval '7' nemen. Ik nummer de blokjes:

1 2 3 4 5 6 7.

Dit wordt bij het stuivertje-wisselen opeenvolgend:

1 2 3 5 6 7 4

5 1 2 3 6 7 4.

Bij deze permutatie is tenslotte 1 op zijn plaats vervangen door 5, 5 door 6, 6 door 7, 7 door 4, 4 door 3, 3 door 2 en 2 door 1, waarmee de zaak sluit — een *kring* die ik aanduid door:

(1 5 6 7 4 3 2).

Preciezer: een zevenkring. Het is duidelijk dat ik na zeven keer dubbel stuivertje-wisselen (en niet eerder) de kring rond ben. Trouwens, wat ik hier voor zeven heb gedaan, geldt overeenkomstig voor elk oneven getal.

De gevallen 8, 12, 16, ... zijn een beetje lastiger. Laten we 16 als voorbeeld nemen. Ik gebruik de oneven nummers voor de witte en de even nummers voor de zwarte blokjes.

De beginsituatie is dus:

1 3 5 7 9 11 13 15 2 4 6 8 10 12 14 16.

Dit gaat over in:

1 3 5 7 9 11 13 4 6 8 10 12 14 16 15 2.

En dan in:

4 6 1 3 5 7 9 11 13 8 10 12 14 16 15 2.

Ik zeef er weer kringen uit. Ik begin met '4'. Dit leidt tot de kring:

(4 8 12 16 2 13 9 5 1).

Hiermee is het stuivertje-wisselen overigens nog niet uitgeput. Ik begin opnieuw, nu met '6':

(6 10 14 15 11 7 3).

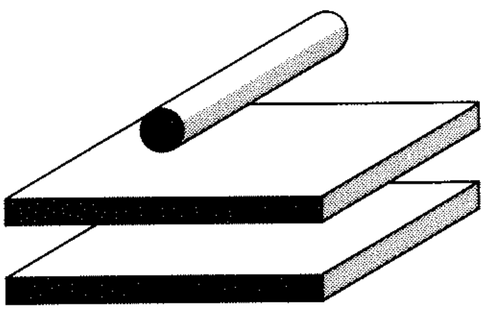
Dus één kring van negen en één van zeven. Dit betekent, dat je in 9 x 7 keer rond bent. In te zien dat het ook niet eerder geschiedt, vereist enig nadenken. Het hangt ermee samen dat in beide kringen de even nummers en de oneven nummers apart staan.

De beschouwing die ik hier voor 16 heb gehouden, gaat algemeen op voor $4n$ blokjes.

Het aantal stappen om de beginsituatie te herstellen is dus:

$(2n + 1)(2n - 1)$.

wiskunst



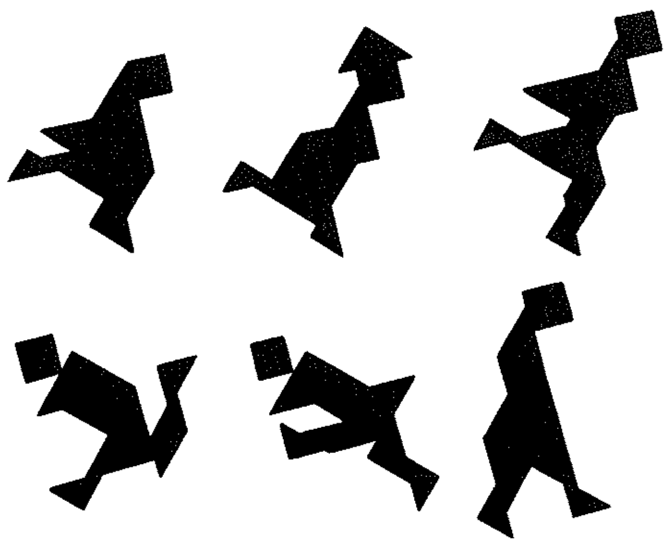
WISKUNDE — KUNST — SPEL

De drieklank 'wiskunde — kunst — spel' moet het tema voor dit artikeltje worden. Een eerste benadering geeft ons $\binom{3}{2} = 3$ *mogelijke tweetallen woorden om de onderlinge relaties aan de orde te stellen.*
Wiskunde — kunst *geeft weinig problemen. Alle voorgaande artikelen in deze kolommen probeerden iets over deze relatie te zeggen.*
Wiskunde — spel *lijkt ook niet zo moeilijk. Vrijwel alle andere artikelen in dit nummer gaan er immers over. En nog ongezien durf ik te zeggen dat het van* go *tot* boter, kaas en eieren *zal gaan. Van biljartspelers tot computerlegpuzzels.*
Kunst — spel *is ook al niet zo moeilijk. We spreken immers over het spel van een kunstenaar, violist, toneelspeler, ... Of vindt u dat een oneerlijk woordspel? Is spelen op een viool, op een toneel, iets anders dan spelen op een voetbalveld (is daar geen kunst aan?) en als spelen aan de tafels in monte carlo (is dat geen toegepaste wiskunde?)?*
Moeten we de $\binom{3}{1} = 3$ *mogelijke ééntallen maar gaan bezien?*

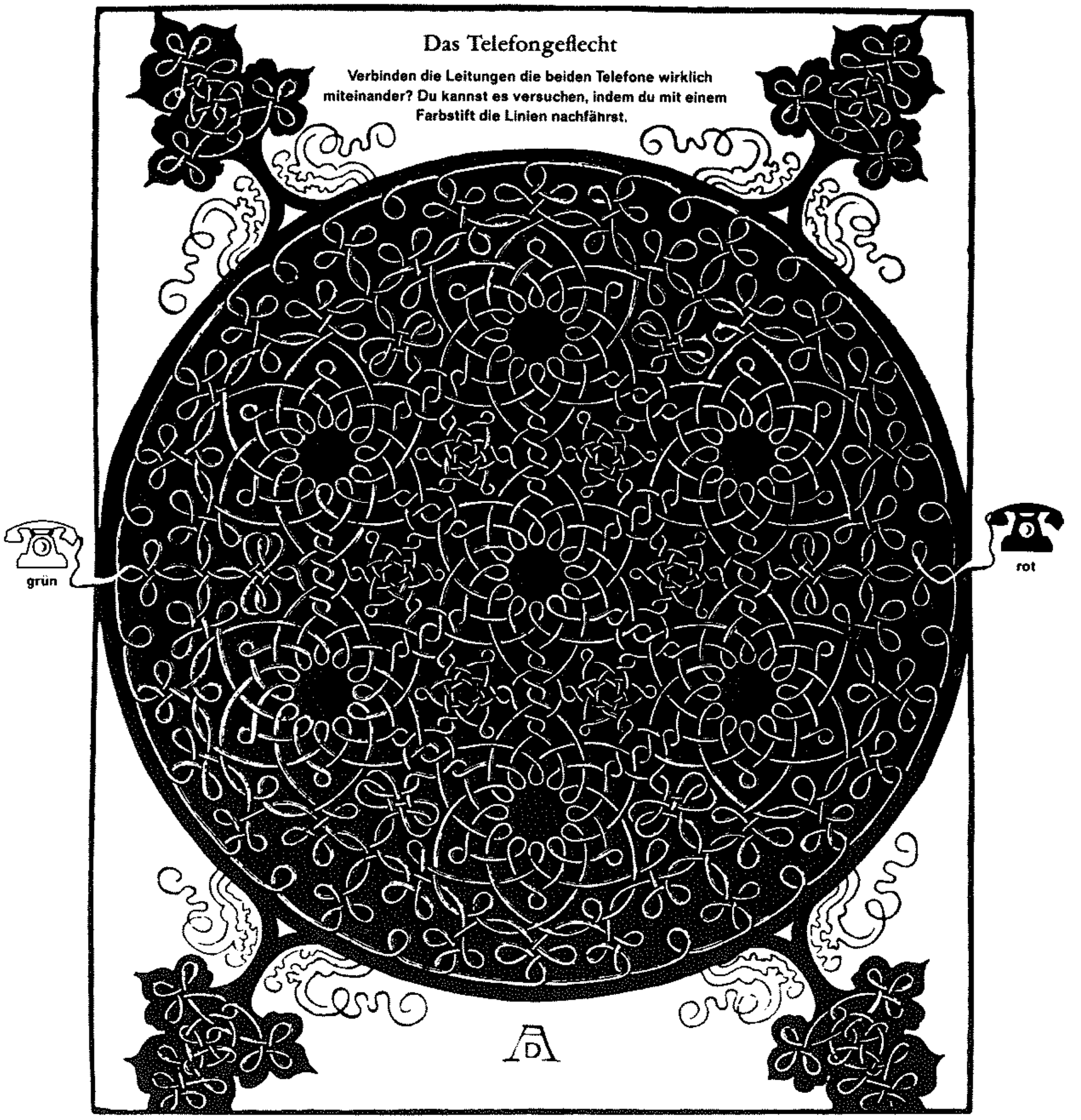
F. VAN DER BLIJ

ééntallen
Wiskunde: een bezigheid van mensen met de wereld om hen heen, met een eigen manier om bepaalde facetten te beschouwen. Matematiseren en daarna matematiek doen. Het begint met tellen en gaat door tot het oplossen van vierkleurenproblemen en de klassifikatie van singulariteiten van differentieerbare variëteiten, al dan niet ingebed in niet-euclidische ruimten.
Kunst: een bezigheid van mensen met de wereld om hen heen, met een eigen manier om bepaalde facetten te beschouwen. Kunstnijverheid en kunst. Het begint met de kindertekening en gaat door tot de monumentale muurversiering en het gepenseeldé miniatuur. Impressionistisch of nieuw-zakelijk, barok of minimaal.
Spel: een bezigheid van mensen met de wereld om hen heen, met een eigen manier om met bepaalde facetten om te gaan. Kinderspel en hoog spel spelen. Het begint bij de kinderen (of bij de jonge poesjes met een garenklosje!) en gaat door tot het olympisch gebeuren. Speeldoos en pierement enerzijds, speelhuis — weet u wel van Piet Blom in helmond: de kubus — anderzijds.
Zo komen we ook niet verder! Er zijn nog twee mogelijkheden: óf niets $\binom{3}{0} = 0$ kiezen en de bladzijden verder wit laten, of $\binom{3}{3} = 1$ drietal kiezen en erover schrijven.

wiskunde — kunst — spel
Dat komt goed uit. Dit moest toch ook van de redakteur en graag met niet te weinig plaatjes. We geven een aantal nogal los staande voorbeelden.
Natuurlijk kent u het oude chinese spelletje *tangram*, enkele jaren geleden weer opnieuw in de belangstelling gekomen.



met tangramstukjes gelegde figuren fig. 1



ontleend aan het 'Dürer-Spielbuch'

fig. 2

Een legpuzzel van zeven stukjes: driehoekjes en vierhoeken. In een vierkant doosje op te bergen. Met eindeloos veel voorbeelden. Met stukjes wiskundige teorie in opgavenboekjes. Van dit spelletje zag ik eens een forse uitvoering (was het ongeveer 100 x 100 cm?) in een galerie in amsterdam. Blinkend metaal en dof zwart. Stukken met magneten vastgekleefd op de grondplaat, die dan aan de muur kan hangen.

Door de beperktheid van mijn partikulier wiskunst-kunst-spel—budget, liet ik het multipel (van ongeveer *f* 1000,–) hangen. Nu ik eraan terugdenk, was het toch wel mooi. En heerlijk om alle gasten mee te laten spelen. Ieder mag zijn eigen figuur uit de zeven stukken formeren. Echte kunst, maar ook een echt spel en zelfs echte wiskunde!

das Glasperlenspiel

Een heel ander voorbeeld schiet me te binnen. Toen ik zo'n dertig jaar geleden begon met deze zondagsschrijverij, schreef ik een verhaaltje[1]) met als motto enkele zinnen uit Hermann Hesse's *'Glasperlenspiel'*. Een spel, een heel echt en ernstig spel met een Magister Ludens, een hoofdspelmeester. Ik zal u niet dwingen op zolder oude jaargangen te gaan zoeken, ik schrijf een deel van het citaat voor u over:

'Ihr seid grosze Gelehrte und Ästhetiker, ihr Kastalier, ihr messet das Gewicht der Vokale in einem

> alten Gedicht und setzt seine Formel zu der einen Planetenbahn in Beziehung. Das ist entzückend, aber es ist ein Spiel. Ein Spiel ist ja auch euer höchstes Geheimnis und Symbol, das Glasperlenspiel.'[2]

Dertig jaar geleden koos ik dit citaat. Vandaag geef ik voor de wiskobas-lezers een toegift:

> 'Ihr Mathematiker und Glasperlenspieler habet euch eine Weltgeschichte zurecht destilliert, die blosz noch aus Geistes- und Kunstgeschichte besteht, eure Geschichte ist ohne Blut und Wirklichkeit ... Ihr behandelt die Weltgeschichte wie ein Mathematiker die Mathematik, wo es nur Gesetze und Formeln gibt, aber keine Wirklichkeit, kein Gut und Böse, keine Zeit, kein Gestern, kein Morgen, nur eine ewige, flache, mathematische Gegenwart.'[2])

Ik laat het weerwoord aan de lezers over. Hesse heeft een nieuwe stroom van aktualiteit gekregen. Misschien heeft u *'das Glasperlenspiel'* wel gelezen. Toch een enkel woord als samenvatting. Kastalien is een provincie in een in de toekomst geprojekteerde staat, waarin kultuur centraal staat. Centrum van het werk is het glazen-kralen-spel. Uit de citaten begreep u dat wiskunde een belangrijk element in het spel is. De opvoering van het spel is de kulturele gebeurtenis. Het boek van Hesse is een levensbeschrijving van Josef Knecht, een schoolmeester wiens leven ook u wellicht zal boeien.

kunstnijverheid

Terug naar lagere regionen. We gaan de kunst specialiseren tot kunstnijverheid. Natuurlijk is er een vloeiende overgang. Een schilderij is kunst (als het tenminste kunst is). Een perzisch tapijt is gebruiksvoorwerp óf kunst, dat hangt af van de prijs of van de plaats waar het geknoopt is (deventer of isfahan). Een servies, een bloemenvaas, een stoel. Als de stoel van Le Corbusier of Rietveld is, is het kunst.

Zelf loopt u nu natuurlijk al voor. U verwacht een kaartspel met plaatjes van Matisse, een tarotspel van Chagall, een kwartetspel van Dürer.

Helaas, ik heb het niet kunnen vinden. Mocht u er een hebben of weten te vinden, dan stuurt u wel een berichtje! In ieder geval is er wel heel wat volkskunst te vinden op speelkaarten.

En schaakspelen? Een machtige opdracht voor mensen als Arp, Brancusi en Max Bill.

Van de laatste vinden we een mooie Möbiusband in het juniblad 1979 van de *'Mathematics Calendar'* van Springer Verlag (fig. 3).

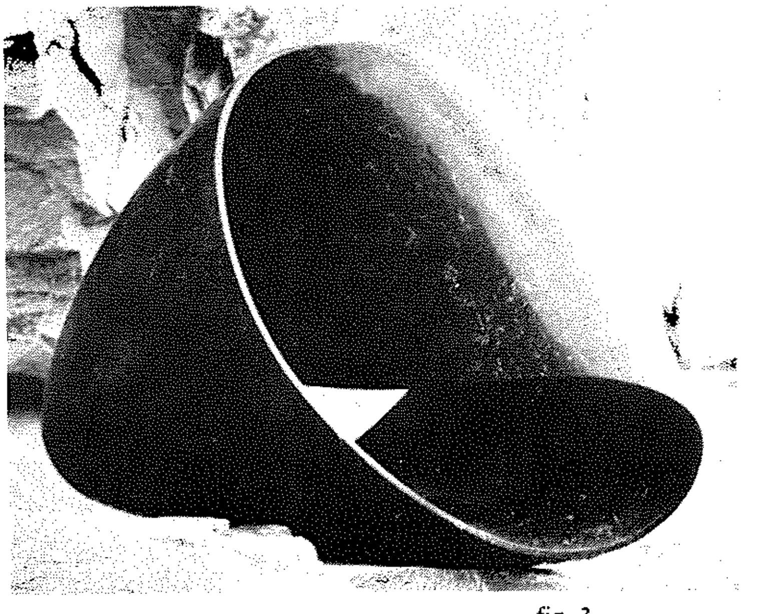


fig. 3

Van zijn hand zijn ook de fraaie objekten rond het matematisch instituut te karlsruhe (fig. 4).

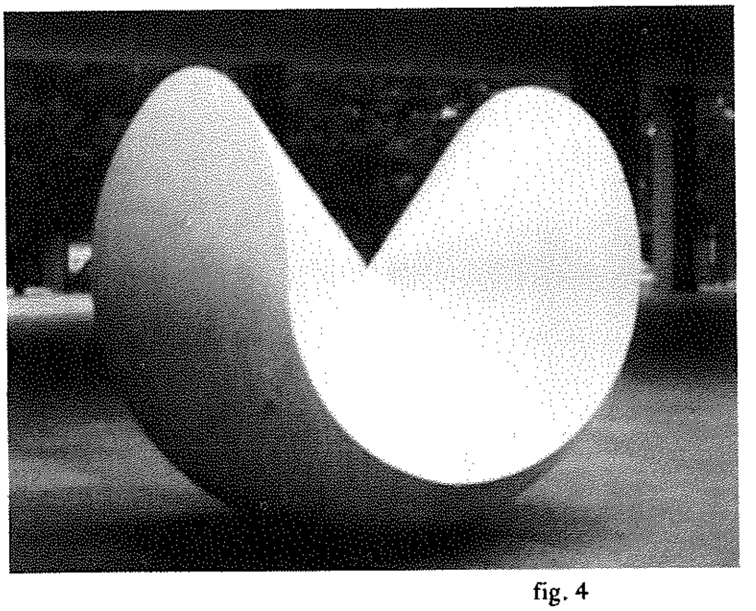


fig. 4

Als er nog eens een nederlands 'Oberwohlfach' komt, zou als opdracht in de 1% regeling, een groot formaat schaakspel – u kent ze wel van parken en volwassenenspeeltuinen – een aardig idee zijn.

Ik ben wat te ver van de wiskunde afgeraakt, goed schaken is geen wiskunde. Alhoewel: een computer kan niet zo best, maar wel een beetje

---

1) 'Euclides' 24, 1948, pag. 208-225 en 'Kroniek van Kunst en Kultuur' 11, 1950.

2) Hesse, Hermann: *'Das Glasperlenspiel'*, berlin 1953, pag. 253 en pag. 225.

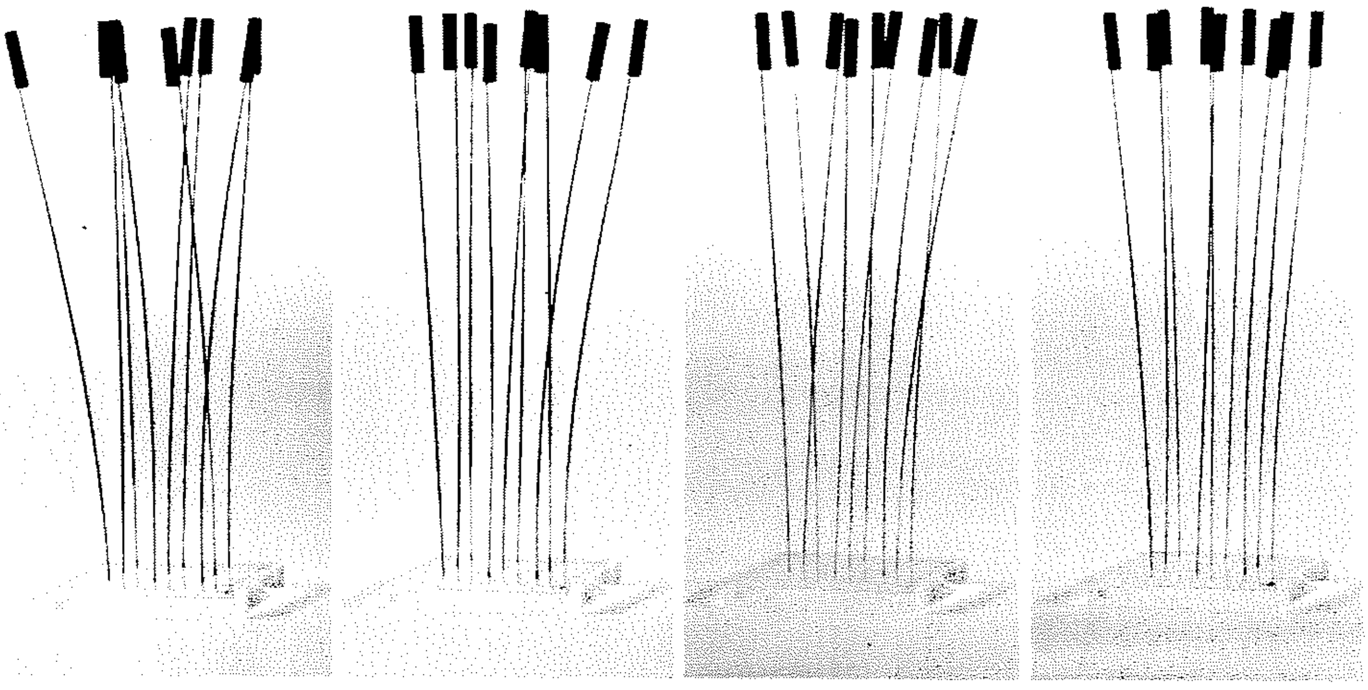


fig. 5

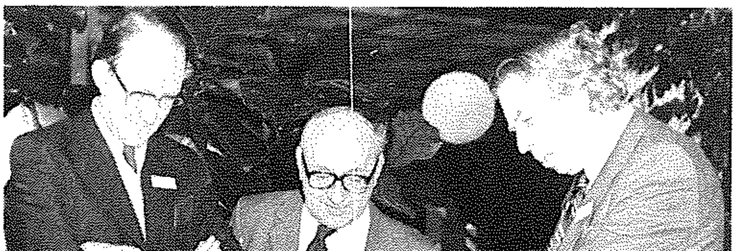
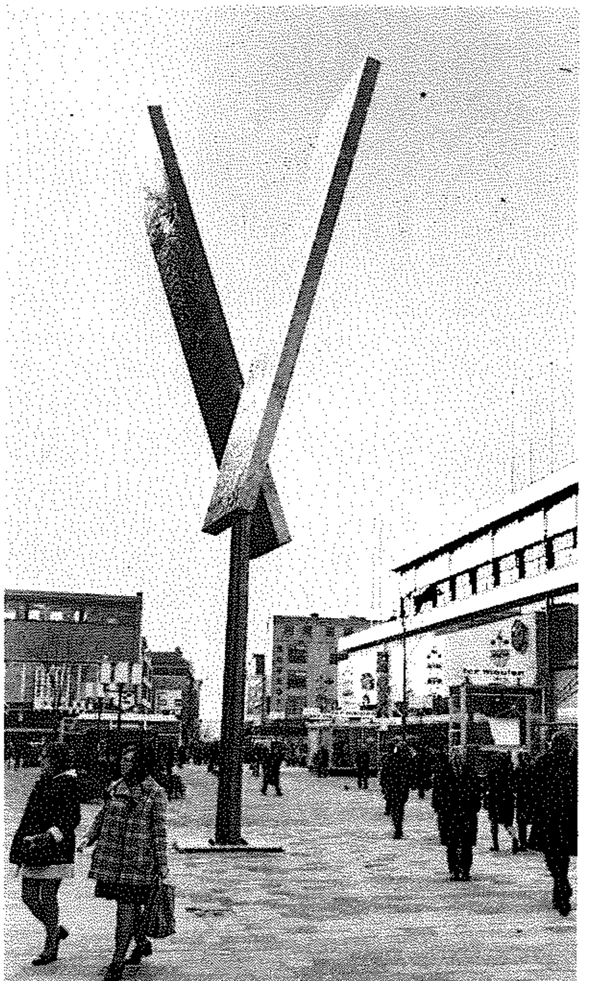
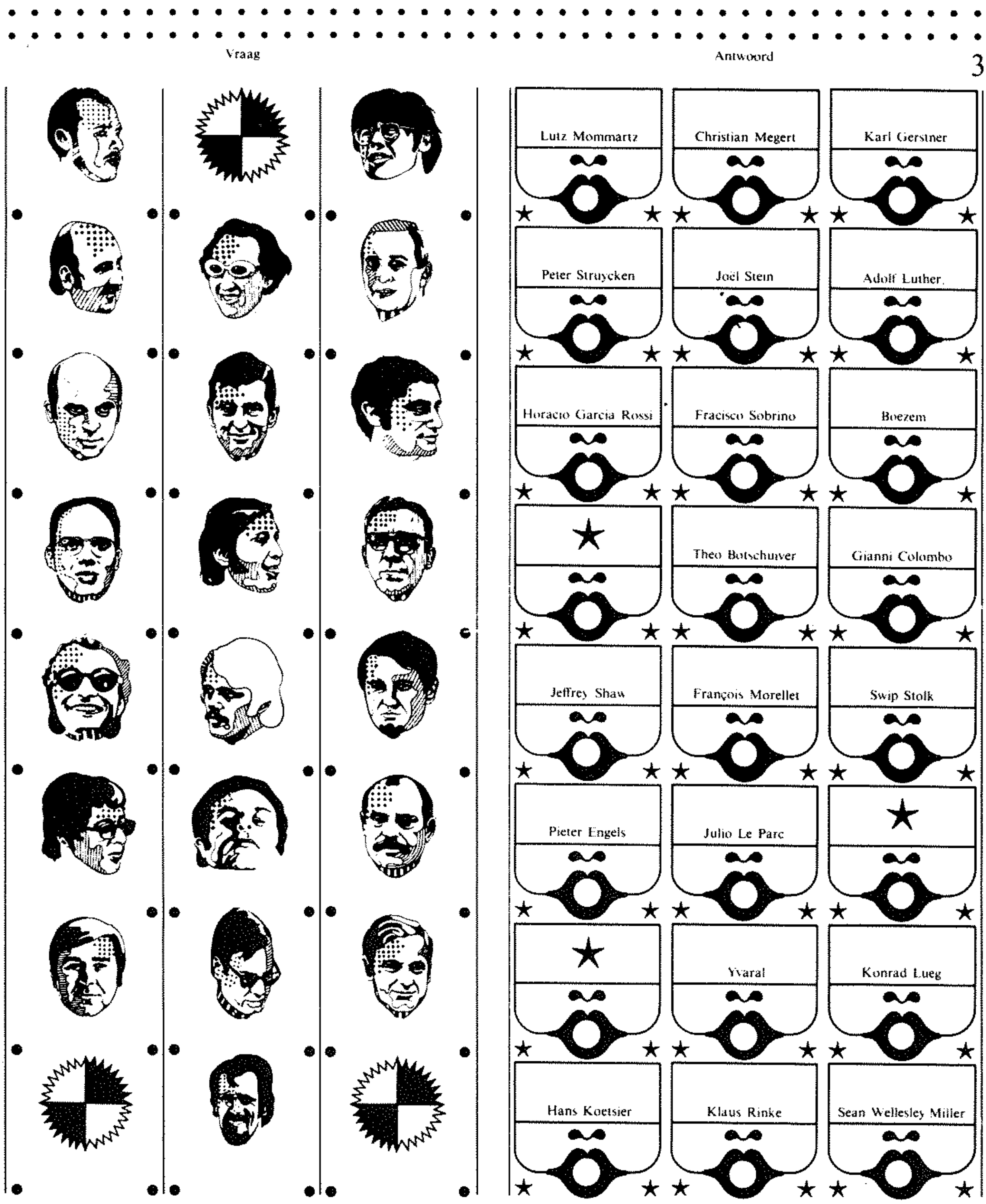


fig. 6: *Bij het 200-jarig bestaan van het wiskundig genootschap spelen prof. Kasteleyn, Lauwerier en van der Blij met een magneetspelletje. De opgehangen magneet wordt afgestoten door de op tafel liggende magneten. Zijn dolle bewegingen vermaken een teoretisch fysikus, een toegepast wiskundige en een zuiver wiskundige. Of zouden ze toch gaan rekenen?*



klapwiegvleugels van Ricky

fig. 7



een opdrachtblad uit 'Environments' fig. 8

schaken, en ook niet zo best, maar wel een beetje wiskunde bedrijven.

mechanisch-wiskundige spelletjes

Mechanisch-wiskundige spelletjes zijn in de kunstnijverheid te vinden. Ik noem slechts de gekoppelde slingers, waar ik al vaker op wees, een magneetspel, bestaande uit negen (3 x 3) verende sprieten, met bovenop magneetjes (fig. 5). U moest eens zien hoe aardig (on)berekenbaar het span reageert op iedere verstoring van het evenwicht. Ik vond het in een kunstnijverheidsafdeling van een parijs' warenhuis. Maar het is gemaakt in engeland.

Een meer speelse dan kunstnijvere variant was te zien en te bespelen bij het 200-jarig bestaan van het wiskundig genootschap (amsterdam 1978) (fig. 6).

Een kunstenaar zou dit tema best eens kunnen uitwerken voor een stads- of parkversiering.

De klapwiekvleugels van Ricky op de oude binnenweg te rotterdam kunnen alleen door de wind en niet door het publiek bespeeld worden (fig. 7). Met een kleine variant zou dit werk best aardige mogelijkheden, ook spelmogelijkheden, geven.
Nog een laatste voorbeeld van kunst—spel, al is de relatie met wiskunde wat zwakker. In 1968 vond in het kader van het studium generale van de utrechtse universiteit de tentoonstelling *'Environments'* plaats. De katalogus voor deze tentoonstelling verscheen in de vorm van een elektrospeeldoos.

U kent ongetwijfeld dat edukatieve kinderspeelgoed met een voorgedrukt (geheim) circuit van 24 vragen en antwoorden; twee stekkertjes op de goede plaats en het lampje gaat branden (fig. 8).

geen muziek en toneel
Eigenlijk hebben we ons wat goedkoop van de muziek en het toneel afgemaakt. Maar ja, bij spel hebben we meer aan spelletjes gedacht. Er staat dus niets over vioolspel in dit artikel, al had er best iets over spéélś vioolspel in gepast. We hadden het moeten hebben over artistieke labyrinten, over legpuzzels van matematische kunst, enz. Voor vandaag moet het toch maar voldoende zijn.

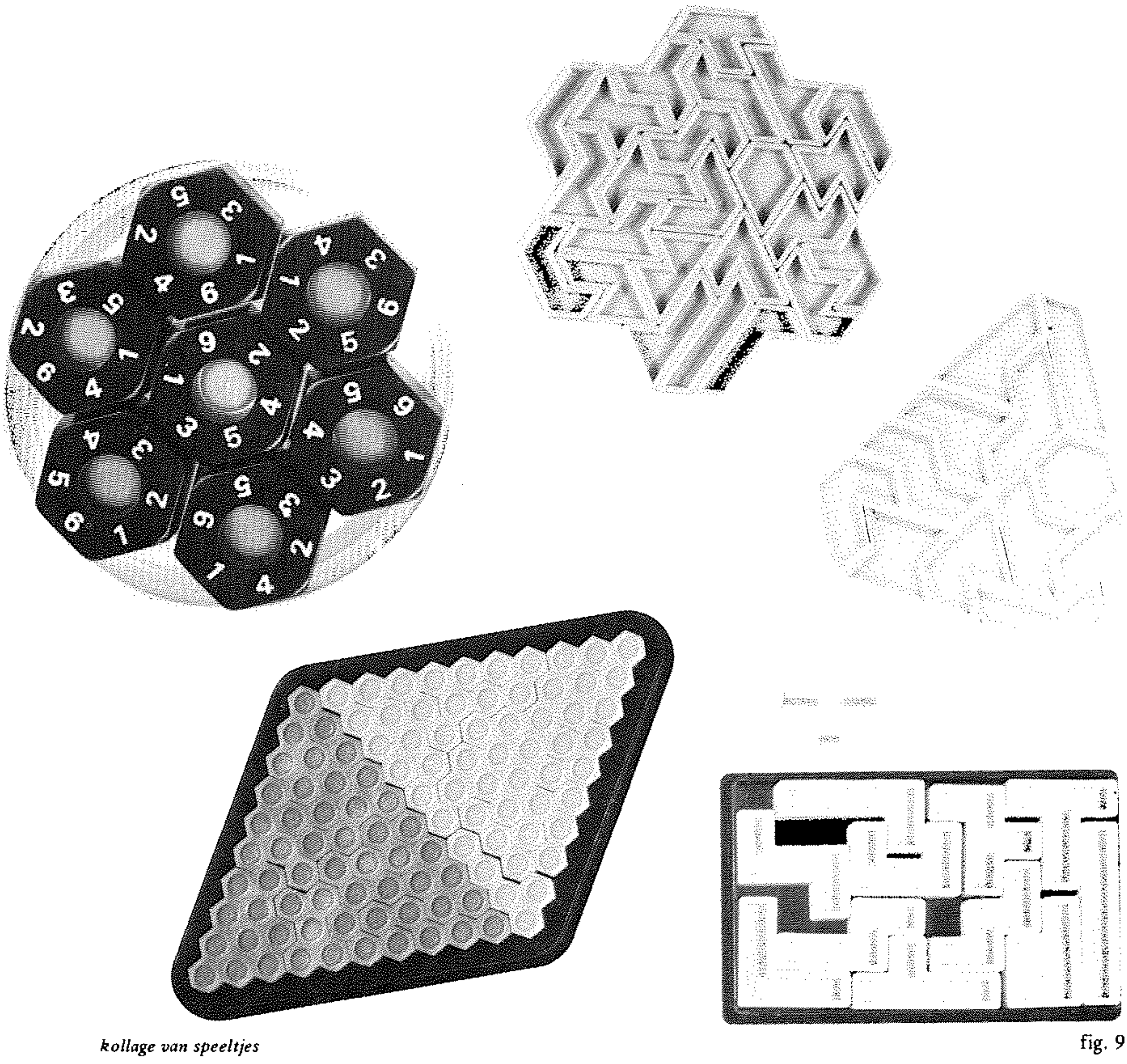
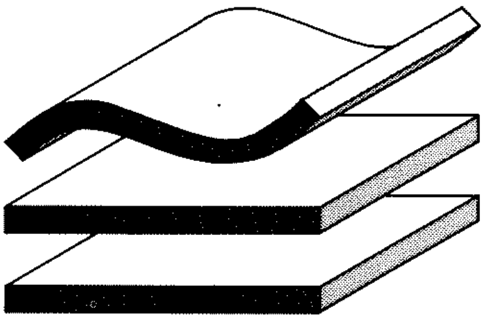


fig. 9

problematika



SPEELSE PROBLEMEN

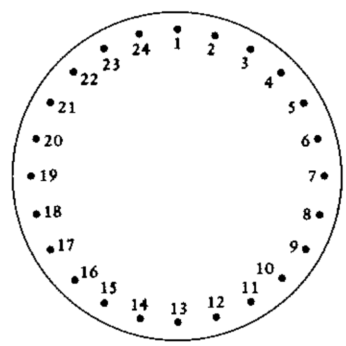
Dat wiskunde vooral spel is, behoort iedere schoolmeester te weten. Deze aflevering van het wiskobas-bulletin onderstreept dit slechts. Niet elk spel echter leidt tot wiskundige aktiviteiten. Wiskunde komt pas boven drijven als er geredeneerd moet worden. Als het gaat om het ontwikkelen en toepassen van strategieën. En vooral ook als er getallen aan te pas komen.
Dat getallen nuttige dingen zijn, is bekend. Maar dat getallen ook uitgevonden zijn om mee te spelen, is voor de meeste kinderen niet vanzelfsprekend. Het verplicht maken van honderden, duizenden sommen is niet bevorderlijk voor het ontwikkelen van speelse gedachten.
Vandaar deze problematika! *Meer speels dan problematisch. Bedoeld om onderwijzers(-essen) tot betere, meer speelse didaktische daden aan te sporen.*

HUUB JANSEN

1

geen wiskunde, tóch leuk

Teneinde elke overweging van zin en nut bij de lezer onmiddellijk te onderdrukken, beginnen we met een tweetal zinloze spelletjes. Om met uw leerlingen te spelen en waaraan ze niets – zelfs geen wiskunde – kunnen leren. Het effekt is alleen dolle pret en wie durft zoiets tegenwoordig nog in de doelstellingen van zijn leerplan op te nemen?
Voor het eerste getallenspel moet u uw leerlingen in een carré- of cirkelvorm opstellen. Beginnend met '1' krijgt iedere stoel een nummer.



Leerling op stoel '1' mag beginnen met het roepen van een willekeurig getal dat niet groter mag zijn dan het stoelnummer van de laatste leerling. De leerling wiens nummer is geroepen, moet onmiddellijk reageren door een ander nummer te noemen. Enzovoorts. Wanneer een leerling niet of niet snel genoeg reageert, zijn eigen nummer of een niet bestaand nummer roept, dan moet hij achteraan gaan zitten, terwijl de kinderen achter hem een plaats opschuiven. (Ze krijgen dus een stoel met een ander nummer!)
Het doel van het spel is, op stoel '1' te komen en daar zo lang mogelijk te blijven.
Sukses verzekerd! Ook voor bruiloften en partijen!

2

boem!

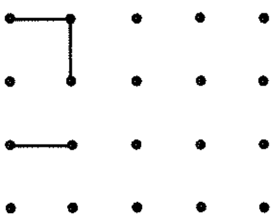
Wanneer u met uw leerlingen plezier wilt hebben op een nog simpeler nivo, dan bevelen we het *boemspel* aan. Het gaat als volgt. Een willekeurig cijfer, bijvoorbeeld '7', wordt vervangen door het woord 'boem'. Een ander woord mag ook!

Uw leerlingen zitten weer in een cirkel. U wijst nummer '1' aan en dan gaan de leerlingen hardop doornummeren. Maar, het woord 'zeven' mag nooit gezegd worden. Daarvoor in de plaats komt 'boem'. Aldus wordt afgeteld: één, twee, drie, vier, vijf, zes, *boem*, acht, ..., zestien, *boem*tien, achttien, ...
We nummeren steeds door. Wie hapert of een fout maakt, valt af.
De goedwillende lezer die met zijn leerlingen op een rekenkundig hoger nivo wil spelen, kan een ekstra regel invoeren. Deze luidt, dat ook alle zevenvouden (7, 14, 21, 28, ...) vervangen moeten worden door 'boem'. Het gevolg kan dan wel zijn, dat uw leerlingen nog wat leren ook.

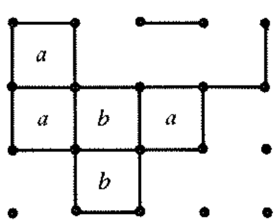
3

vierkantje

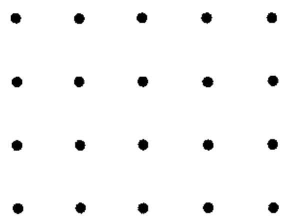
Een spelletje dat kinderen graag spelen, heet: *kamertje verhuren*. Op een rechthoekig stippenveld verbinden ze om beurten twee stippen met een lijn.



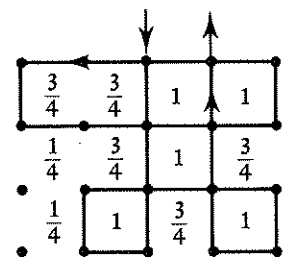
Wanneer een speler een vierkantje – of kamertje – af maakt, dan zet hij er zijn letter in. Wie op het eind de meeste kamertjes heeft gemaakt, is winnaar.



Wij vermoeden dat er weinig meer aan te leren valt dan de kunst, jezelf en je buurman tijdens een saaie les bezig te houden.
Daarom hier een afwijkende *variant*, waarbij het resultaat is dat er nog met breuken gerekend moet worden ook. Bovendien kan er met de hele klas een spannende wedstrijd van gemaakt worden.
Iedere leerling speelt individueel op dit stippenveld van vier-bij-vijf:



De opdracht luidt, om in een willekeurig punt te beginnen. Met een potlood of pen moeten de punten verbonden worden zodat vierkantjes ontstaan. Máár ... reeds getrokken lijnen mogen níet gesneden of opnieuw doorlopen worden. En potlood of pen mag onderweg niet van het papier gelicht worden.
Hier is een resultaat dat $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 9\frac{1}{4}$ punt waard is:



Een 'vol' hokje telt voor '1', een hokje waaraan één zijkant ontbreekt voor '$\frac{3}{4}$', enz.
Natuurlijk kan het beter! Maar daar komen uw leerlingen wel achter.

4

master-mind

In een voorgaand bulletin[1]) boden wij u master-mind-problemen uit de voorronden van het wereldkampioenschap master-mind 1978. Inmiddels zijn deze kampioenschappen al lang achter de rug. De zestienjarige John Serjeant uit nottingham wist zijn wereldtitel uit 1977 te heroveren, o.a. dankzij de snelheid waarmee hij alle problemen tot een goede oplossing bracht. Slechts tachtig sekonden voor de lastigste opgave! Aan de finale werd deelgenomen door elf deelnemers uit de gehele wereld, waarvan de jongste dertien en de oudste vijfentwintig jaar oud was.
Twee problemen uit deze denk-en-speelse strijd laten wij hier volgen.

1) Jaargang 7 nr 4.

gr	*w*	*b*	*b*	XO
b	*w*	*w*	*r*	XO
r	*gr*	*g*	*b*	XO
gr	*g*	*r*	*w*	XO
z	*w*	*gr*	*gr*	XO

U kent de afkortingen:

gr: groen; *r*: rood;
w: wit; *g*: geel;
b: blauw; *z*: zwart.

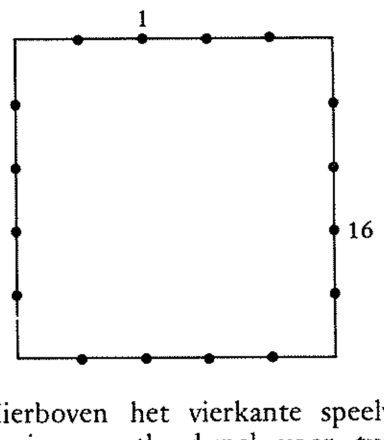
'X' betekent: één pion van de goede kleur en in de juiste positie.
'0' betekent: één pion van de goede kleur maar in de verkeerde positie.
De bedoeling van bovenstaande opgave: *beredeneer de goede oplossing*, dat wil zeggen: de juiste kleur en positie van de pionnen. Maksimum tijd: drie minuten.

Nog een probleem. Om u op de proef te stellen, delen wij mee dat vijf finalisten hier minder dan vijftien sekonden voor nodig hadden!

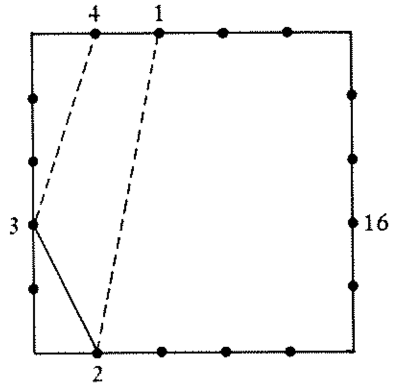
b	*gr*	*z*	*g*	X
r	*w*	*z*	*z*	00
r	*g*	*w*	*b*	00
z	*z*	*gr*	*gr*	00

5

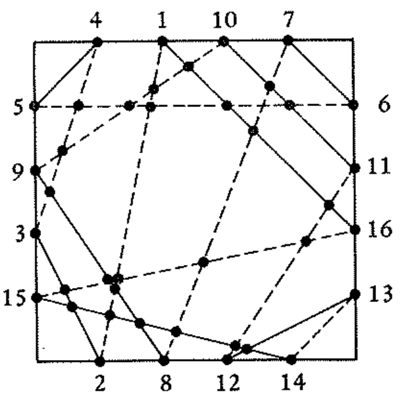
snijpuntje



Hierboven het vierkante speelveld van een papier-en-potlood-spel voor twee personen. Zestien punten worden op de vier zijden getekend en vóóraf krijgen twee punten op verschillende zijden het nummer '1' resp. '16'.
Speler *a* begint met het plaatsen van een '2' bij een willekeurig punt op een van die zijden waar punt '1' niét op ligt.
Speler *b* verbindt de punten '1' en '2' door een rechte lijn en plaatst een '3' bij een punt dat niet op dezelfde zijde ligt als '2'.
Speler *a* verbindt vervolgens '2' en '3' door een lijn van een *andere* kleur dan de lijn van *b*. Dan wijst *a* punt '4' aan. *b* trekt '3'-'4', enz.

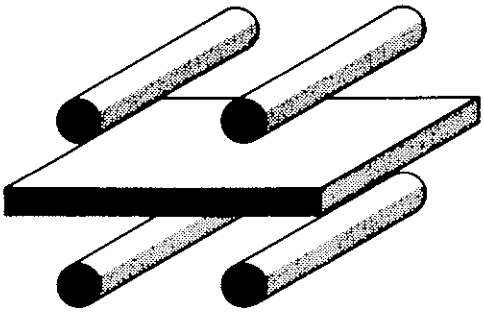


Het doel van het spel is het behalen van zoveel mogelijk snijpunten. Een snijpunt van twee lijnen van eigen kleur telt voor twee punten. Een snijpunt dat ontstaat als een 'eigen' lijn getrokken wordt óver een lijn van je tegenstander telt voor één punt.
Hieronder een eindstand:



Speler *b* (de onderbroken lijn) heeft negen snijpunten van eigen lijnen en tweemaal heeft een *b*-lijn een *a*-lijn oversneden (lijn 15-16 over lijn 2-3 en lijn 8-9). Totaal: 9 x 2 + 2 x 1 = 20. *a* heeft verloren: 17 punten in totaal (3 x 2 + 11 x 1).

kleuters en wiskunde



GEZELSCHAPSSPELLETJES

De laatste jaren zijn veel nieuwe gezelschapsspelen op de markt gekomen. Voor de leeftijdsgroep drie- tot zesjarigen is in de speelgoedwinkel dan ook een ruime keuze te vinden. Algemeen bekende groepsspelletjes voor deze leeftijdskategorie zijn o.a.: lotto, domino, memory, kwartet, mens erger je niet en ganzenbord. Deze spellen zijn in diverse uitvoeringen te verkrijgen. In nevenstaande kolommen zullen we ons richten op de volgende, nog niet zo bekende, ravensburger spelen:

- vier eerste spellen; *vanaf drie jaar;*
- zoo mix max; *vanaf vijf jaar;*
- hoedje jagen; *vanaf zes jaar.*

fig. 1

JEANNE DE GOOIJER-QUINT

vier eerste spellen
In de doos bevinden zich twee speelborden met vier verschillende speelvelden.
Bij ieder spel wordt een kleurendobbelsteen gebruikt. Een voorwaarde om te kunnen meespelen is, dat de kleuren herkénd moeten worden. Tijdens het spel kunnen de námen van de kleuren geleerd worden, voorzover het kind deze nog niet kent.

Het *vogelspel* is het eenvoudigst. Ieder van de maksimaal zes spelers moet zijn eigen weg afleggen naar het nest. Om beurten gooit een speler met de dobbelsteen en overeenkomstig de kleur mag de pion voorwaarts gezet worden.

fig. 2

De dobbelsteen bepaalt het verloop van het spel. Er wordt geen eigen inbreng vanuit het kind verlangd. Het spel heeft een korte speelduur en kan zeer goed dienen om de gang van zaken bij een gezelschapsspel te leren kennen: om de beurt spelen, gooien met een dobbelsteen, opletten wat de dobbelsteen aangeeft, kijken of een handeling verricht kan worden, wachten op de volgende beurt.
Van belang is, vooral bij de jongsten, iedere speler het eindpunt te laten bereiken en geen nadruk te leggen op de speler die het éérst zijn nest bereikt. De spelsfeer is immers belangrijker dan het resultaat.

Op het speelveld van het *bloemenspel* zijn vier bloementuintjes getekend. In iedere tuin staan vijf verschillend gekleurde bloemen.
Het gaat erom, met de gegooide dobbelsteenkleuren de passende bloemvormen te kiezen. Bij het gooien van de kleur groen heeft de speler pech, want een groene bloem staat niet in de tuin. Wie zijn tuin vol met bloemen heeft, is klaar.
Evenals in het vorige spel, bepaalt de dobbel-

steen het spelverloop. Soms duurt het wat lang eer een bepaalde kleur gegooid wordt. De aandacht verslapt daardoor en de animo om het spel te herhalen neemt af.

De spelers van het *spel met het kasteel* moeten een slingerende weg in de vorm van een spiraal volgen. Aan het eind van die lange weg staat een kasteel. De speler die de poort bereikt, wordt uitverkoren tot koning of koningin.
Opnieuw wordt de kleurendobbelsteen gebruikt om de pion naar een volgend gekleurd veld te zetten. Bij het spel horen ook twaalf kanskaartjes. Wordt met de dobbelsteen wit gegooid, dan mag een kanskaart, een bloem of dier, van de stapel gepakt worden. De pion mag daar naar toe lopen. Het is mogelijk zowel voorwaarts als achterwaarts gestuurd te worden.
De kanskaartjes maken het spel spannend en aantrekkelijk. Door de spiraalvormige weg is het voor kleuters nog wel eens moeilijk de juiste richting in het oog te houden.

Op het vierkante veld van 49 hokjes van het spel *worsthappen* liggen twaalf worstkaartjes. Aan elke zijde van het veld zit een hond (pion) hongerig te wachten. De pion mag in een rechte lijn verplaatst worden naar een veld dat in kleur overeenkomt met de via de dobbelsteen gegooide kleur.

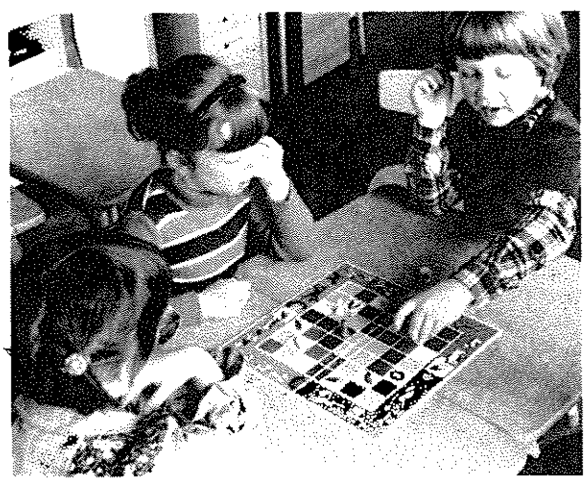


fig. 3

Wordt wit gegooid, dan probeert de speler vanuit zijn plaats naar een hokje met een worst te gaan. Het kaartje mag dan behouden worden.
Bij worsthappen moet de speler goed opletten waar hij z'n pion neerzet; er moet dus 'handig' gespeeld worden.

zoo mix max
De inhoud bestaat uit vijftien dierkaarten, die elk in vier stukken verdeeld zijn, te weten: kop, hals, buik en poten. Al deze stukken hebben op de achterzijde een afbeelding van de stippendobbelsteen, resp.:
⚀, ⚁, ⚂ en ⚃.

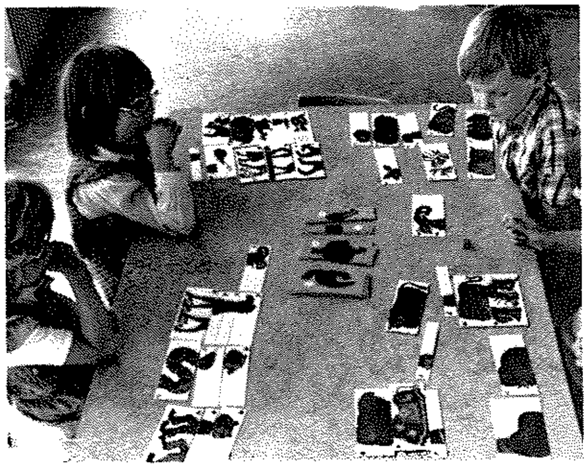


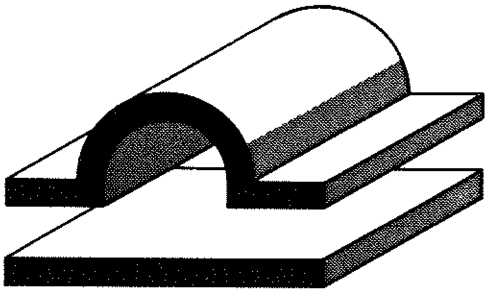
fig. 4

De kaarten liggen gesorteerd naar dobbelsteenafbeelding op tafel. Om beurten gooit een speler met de dobbelsteen en afhankelijk van de worp kan één of geen kaart gepakt worden. Wie ⚄ of ⚅ gooit, heeft pech. Tijdens het bemachtigen van de kaarten, proberen de kinderen allerlei fantasiedieren met meerdere buiken en halzen te leggen. Als de kaarten op zijn, probeert iedere speler uit de vier verschillende onderdelen zoveel mogelijk gekke dieren samen te stellen.
Het spel kan uitgebreid worden door geleidelijk aan de juiste dieren te laten ontstaan. Om beurten gooien de spelers weer met de dobbelsteen; nu worden de kaarten bij de medespelers geroofd.
Heeft iemand bijvoorbeeld de hals en staart van de slang, dan kan hij bij de worp ⚀ de kop bij een ander kind weghalen en bij de worp ⚂ de buik bij weer een ander bemachtigen, aldus de slang kompleet makend. Er mag alleen geroofd worden als de speler tenminste één kaart van het betreffende dier bezit. Na afloop wordt het aantal punten geteld en met de aantallen van de andere spelers vergeleken.
Zoo mix max is zeer aantrekkelijk vanwege de enorme fleksibiliteit die de losse stukken mogelijk maken. De kinderen kunnen, naast het leggen van de juiste dieren, een geweldige hoeveelheid kombinaties maken van fantasiedieren. Hiervoor kunnen dan nieuwe namen bedacht worden, zoals: 'zebraslangeaap' of 'eendepaardje'.

hoedje jagen
Dit spel is geschikt voor de oudste kleuters. In het veld zijn weggetjes getekend, die de speler stapje voor stapje kan doorlopen, afhankelijk van het aantal gegooide ogen. Iedere speler heeft een honk met vier hoedjes in een bepaalde kleur. Vanuit dit honk vertrekken de hoedjes en keren ze ook weer terug, nadat één of meerdere hoedjes van tegenspelers gevangen zijn. De richting die de speler met een hoedje inslaat, is vrij; een speler mag zowel vooruit als achteruit. Een hoedje is gevangen als een ander hoedje op hetzelfde veld uitkomt.
Een speler kan onderweg meerdere hoedjes vangen, maar hij moet wél uitkijken dat de hoedjes niet terug veroverd worden. De speler probeert daarom zo vlug mogelijk weer in z'n honk te komen. Gevangen hoedjes, die in een honk staan, kunnen niet meer bevrijd worden.
Bij dit spel wordt duidelijk een appèl op de speler gedaan, een strategie te bedenken om de tegenspelers te bereiken of juist te ontlopen. Bij iedere worp staat de speler voor de keuze, welke richting ingeslagen moet worden. De spelers wikken en wegen, waarbij ze nagaan, waar ze terecht zullen komen als ze voor- of achteruit gaan. Staan er meerdere hoedjes van dezelfde kleur in het veld, dan moet ook beslist worden, welk hoedje verplaatst zal worden.
Hoedje jagen laat veel ruimte vrij voor de eigen inbreng van iedere speler.

waarde van een spel
De gezelschapsspelen zoals hier beschreven, zijn gerangschikt naar de graad van moeilijkheid.
De waarde van een spel wordt o.i. bepaald door de mogelijkheden tot eigen inbreng van iedere speler, waardoor deze tot denkhandelingen gestimuleerd wordt, vervolgens een strategie bepaalt en beslissingen neemt.
Tenslotte: wij wensen alle kinderen, ouders en onderwijsgevenden veel speelgenot toe.

wiskunde in de brugperiode



WATERFIETSRACE
EEN SPEL ALS MODEL

De waterfietsrace is het laatste probleem uit wiskunde voor de brugklas, *een onderwijsleerpakket samengesteld door Piet Scholten* (not) *en Chrit Leenders* (iowo).
In het eerste televisieprogramma maken we kennis met Judith Bosch en Dick Passchier (bij velen bekend als spelleiders van de kwis 'Tweekamp'*). Beiden hebben ze de (on)hebbelijkheid, elkaar zo nu en dan voor problemen te zetten.*

WIM SWEERS
CHRIT LEENDERS

vakantieadres
Dick vertrekt per fiets voor een korte vakantie naar een plaats ergens in nederland. Judith wil hem daar opzoeken, maar in plaats van het vakantieadres, wordt haar een aantal problemen voorgezet. Door het oplossen van deze problemen moet zij – evenals de brugklassers – het vakantieadres te weten zien te komen.
Heeft Judith het adres gevonden, dan wordt er van rol gewisseld. Judith vertrekt voor een korte vakantie naar een kamping aan één van de friese meren. Ze schrijft Dick:

Beste Dick

Nu ben jij aan de beurt om te puzzelen.
Ik heb voor jou ook drie problemen verzonnen!
Eerst ben ik naar Leeuwarden gegaan. Daar heb ik een fiets gehuurd. Met die fiets ben ik naar één van de Friese meren gegaan.
Bij het eerste probleem moet je uitzoeken hoe lang ik gefietst heb. Als je goed rekent, vind je drie meren waar ik zou kunnen zijn.
Bij het tweede probleem zoek je uit bij welk meer ik precies zit.
En het derde probleem is: hoe laat moet je bij dat meer zijn?
Ik geef je bij elk probleem enkele aanwijzingen.
Voor het eerste probleem vind je een tekening waarop ik iets van snelheid en tijd heb aangegeven.
Ook zitten twee kaartjes van Friesland in deze envelop. Ik vertel erbij dat ik in het laatste half uur van de fietstocht (13.30 uur - 14.00 uur) niet langzamer heb gefietst dan in het eerste half uur. Maar ook niet sneller dan in het tweede half uur

fig. 1

Judith en Dick zullen namelijk samen deelnemen aan een wedstrijd waterfietsen, die ten behoeve van de kampinggasten georganiseerd wordt.

waterfietsproef
In het tweede televisieprogramma zien we, hoe Judith samen met de kampbeheerder uitprobeert hoe hard je op een waterfiets vooruitgaat als je samen trapt.
Tevens wordt vastgesteld, hoeveel het scheelt als een van beiden niet voldoende meetrapt (de kampbeheerder was moe!).
Bij de jukebox in de kantine hangt een blokschema als gebruiksaanwijzing. Dit brengt Judith op het idee, Dick haar ervaringen met het proef-waterfietsen ook in de vorm van een blokschema aan te bieden (fig. 2).

simulatiemodel
De leerlingen zien hier een stuk realiteit, voorgesteld door een model:
– het verloop van een race door simulatie;
– de echte wedstrijden door een wedstrijdbaan op schaal (fig. 3).

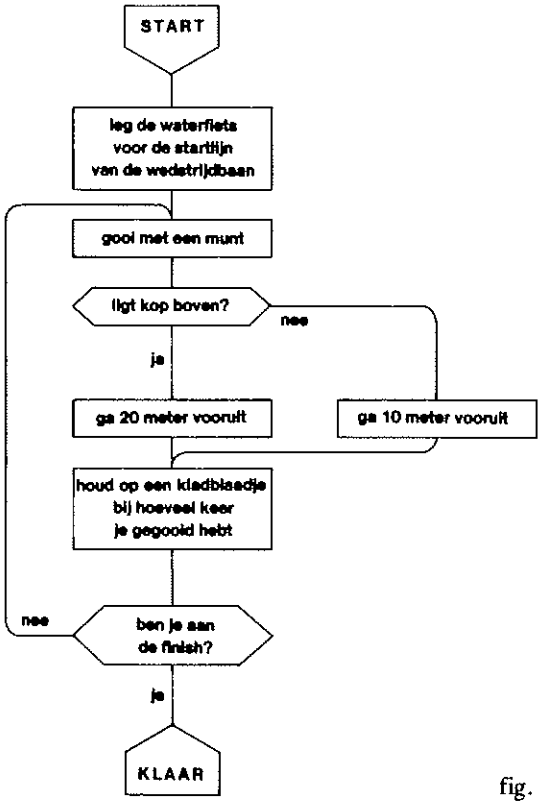


fig. 2

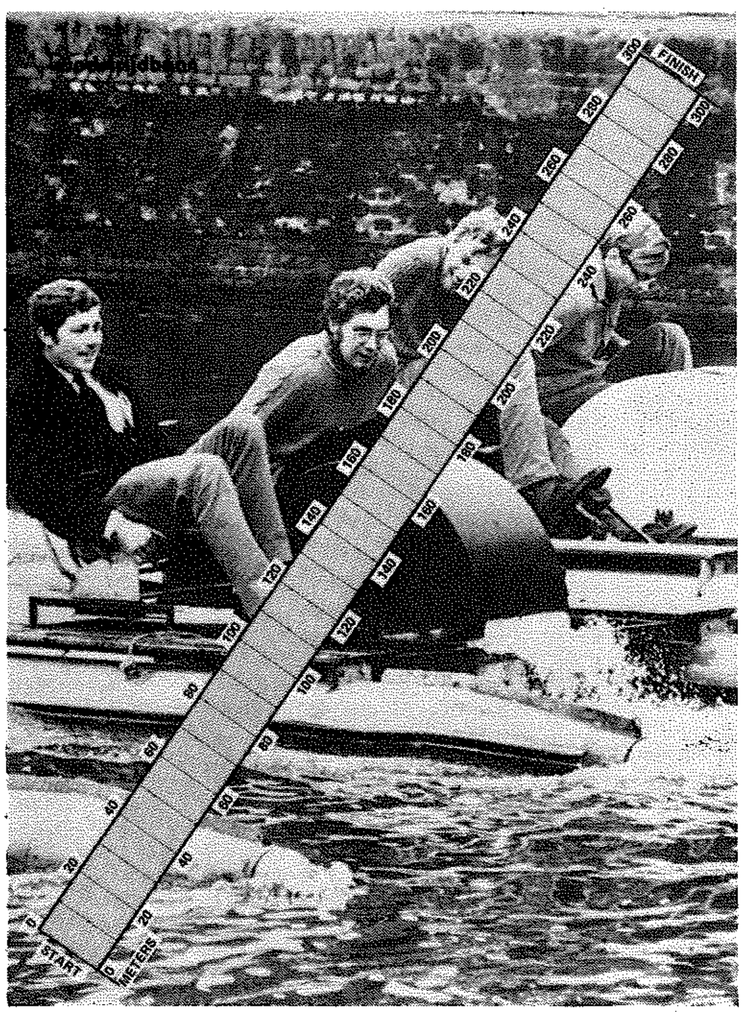


fig. 3

Je moet natuurlijk wel zorgen dat je op tijd bent. Anders kunnen we niet met de waterfietswedstrijd meedoen. Ik verklap niet hoe laat de wedstrijden precies beginnen. Je zult je moeten behelpen met de volgende gegevens:

* de prijsuitreiking vindt plaats om 17.30 uur
* er doen 32 teams mee. Steeds fietsen twee teams tegen elkaar. De verliezers van zo'n race vallen af en de winnaars gaan over naar de volgende ronde.
* bij deze brief vind je een blokschema. Met behulp van dat schema kun je uitzoeken hoeveel tijd je ongeveer nodig hebt voor een waterfietsrace van 300 meter.

Zorg dat je op tijd bent, ik wacht op je!

Judith

fig. 4

Nadat de leerlingen het laatste gedeelte van de brief gelezen hebben (fig. 4), komen zij bij een stukje tekst dat globaal aangeeft hoe het simulatiemodel, waarmee de waterfietsrace wordt nagespeeld, tot stand is gekomen:

'Dick gaat eerst uitzoeken hoe lang een waterfietsrace van 300 meter ongeveer duurt.
Hij kan daarvoor niet echt gaan waterfietsen en daarom gebruikt hij het blokschema dat Judith gestuurd heeft.
In dat blokschema heeft Judith er rekening mee gehouden dat je tijdens een race soms snel en soms langzaam vooruit gaat.
Je zult ook wel begrijpen dat niet elke race even lang zal duren.
Wij gaan ook een waterfietsrace naspelen met het blokschema.
Je hebt verder nodig:
- de wedstrijdbaan op bladzijde 32
- een munt
- de waterfiets (deze is samen met drie kaartjes losgeknipt van de ponskaarten).'

Dit model is zo eenvoudig mogelijk gehouden. Als enige relevante faktor is gekozen: het wel of niet tegelijk trappen van de teamleden. Deze faktor is gekwantificeerd: bij tegelijk trappen kom je twintig meter vooruit en als je niet gelijk trapt, kom je per worp (later wordt dit: in dezelfde tijd) tien meter vooruit. Ook is aangenomen dat de kans op tegelijk trappen even groot is als de kans op niét tegelijk trappen en dat deze door toeval bepaald wordt. Vandaar dat we het verloop van een race door het werpen van een munt laten bepalen.

terugkoppeling

Na afloop van een race op papier, wordt binnen het model teruggekoppeld naar de werkelijkheid. Een beurt in het spel komt in het model overeen met vijftien sekonden waterfietsen.

'Hoeveel keer heb je moeten gooien om van de start naar de finish te komen? [ ]
Elke keer gooien met de munt stelt in werkelijkheid 15 seconden waterfietsen voor.
Hoeveel seconden heeft jouw race geduurd?
[ ] sec.

Speel nu voor jezelf drie keer zo'n race na:

1e race	2e race	3e race
sec.	sec.	sec.

Noteer deze tijden ook op de drie losse kaartjes.'

Ieder gaat druk met een munt gooien. Sommigen proberen het blokschema los van de wedstrijdbaan te gebruiken en begrijpen dan ook het laatste vraagblok 'ben je aan de finish?' niet.
Nadat elke leerling de race drie keer gespeeld heeft en de tijdsduren met een viltstift op de kaartjes geschreven heeft, beschikken we over een groot aantal kaartjes.

klassegesprek

'We verzamelen de kaartjes van de hele klas en ordenen ze. Met elkaar beslissen we welke tijdsduur we voor een race zullen aanhouden.
▶ Volgens onze klas duurt een race ongeveer
[ ] sec.'

In een klassegesprek wordt nagegaan op welke manieren de kaartjes geordend kunnen worden.
Op het bord ontstaat, door het opplakken van de kaartjes, spontaan een histogram:

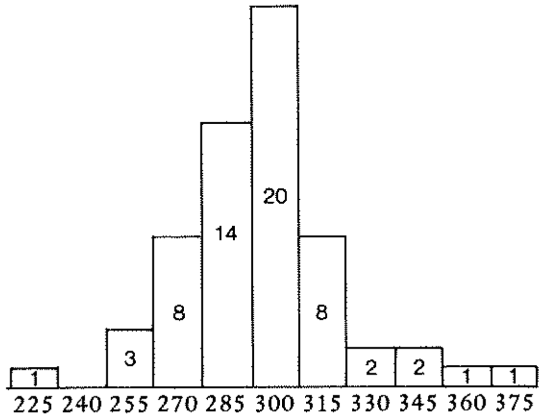


fig. 5

fragment uit een klassegesprek

....'Driehonderd! Wat een bende, hè? Maar van 285 zijn er ook veel!'
'Stel je eens voor dat dit de echte race was, wie had er dan gewonnen?' (docent)
'Nou, stel je eens voor, dat dit de echte waterfietsrace was?' (docent)

'Tweehonderdvijfentwintig.' (leerling)
'Hoe lang is die baan eigenlijk?' (docent)
'Nou, zoek eens op!' (docent)
'Driehonderd. Driehonderd meter lang.' (leerling)
'In hoeveel keer gooien is die dus aan de finish gekomen?' (docent)
'Vijftien keer.' (leerling)
'Hoeveel meter ging hij dus steeds vooruit?' (docent)
'Twintig.' (leerling)
'Die mocht steeds twintig vooruit, ja!' (docent)
'Wat heeft die dan steeds gegooid?' (docent)
'Kop.' (leerling)
'Zou dat wel vaker gebeuren: vijftien keer kop?' (docent)
'Ik denk van niet.' (leerling)
'Waarom niet?' (docent)
'Je gooit ook wel eens munt.' (leerling)
'Zeg, zou diezelfde de volgende keer weer vijftien keer kop gooien?' (docent)
'Dat zou wel erg toevallig zijn.' (leerling) ....

tijdsduren

Dan komt de zin:

.... 'Met elkaar beslissen we welke tijdsduur we voor een race zullen aanhouden.' ....

Een lastige opdracht! Het antwoord hangt mede af van de mate waarin naar het probleem wordt teruggekoppeld:

- neem je de tijdsduur die het meest voorgekomen is? dus: de tijdsduur behorend bij de hoogste staaf, de modus;
- neem je het gemiddelde van alle raceduren of een tijd die langer is? een veilige tijdsmarge is ook in de praktijk gebruikelijk;
- houd je er rekening mee dat die waterfietsen weer terug moeten naar de start?

Als de klas moet kiezen hoe lang een race zal duren, komen er twee alternatieven in aanmerking: 300 sekonden, omdat daar de meeste van zijn, en 315 sekonden.
Niemand realiseert zich nog dat er per race twee waterfietsen meedoen en dat er dus wel eens enkele malen een heel snelle tegen een langzame kan uitkomen met uiteraard gevolgen voor de duur van een race.
Uiteindelijk kiest de meerderheid — overigens op onduidelijke gronden — voor 315 sekonden.
Tenslotte wordt berekend, hoeveel wedstrijden er moeten worden gespeeld met 32 teams in een afvalkompetitie en hoe laat de wedstrijdmiddag zal moeten beginnen.
Dat kost veel hoofdbrekens: het aantal wedstrijden is goed te visualiseren met wybertjes op een overheadprojektor waarbij elk wybertje een team voorstelt.
Het berekenen van het aanvangstijdstip levert vooral rekenproblemen op. Veel gekreun en gesteun, maar niemand heeft moeite met het simpele probleem:

.... 'Als de school uitgaat om vier uur en de lessen hebben twee uur geduurd, hoe laat begon de school dan?' ....

Nu gaat het om van die 'rottige getallen'!

afronding

De leerlingen reageren entoesiast als ze de wedstrijd met de hele klas mogen spelen.
Dit kan met twee bedoelingen:

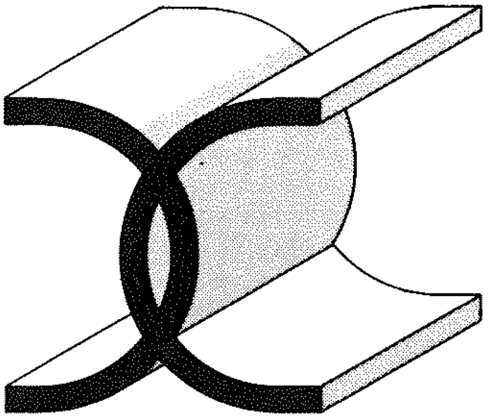
- Als afrondende aktiviteit van het projekt waarbij de afvalrace voor een spannend slot zorgt.
- Een wedstrijd waarbij de schatting van het begintijdstip gekontroleerd wordt.
  Een probleem, dat zich hierbij kan voordoen is: hoe komen we aan 32 teams als er minder dan 31 leerlingen in de klas zijn? Van elke race zal de duur bijgehouden moeten worden om te kunnen bepalen hoelang de wedstrijd geduurd heeft. Ook zal de keuze van het tijdstip waarop een race beëindigd is bepaald moeten worden: als het snelste team over de finish is, als het langzaamste team over de finish is, of — bij afspraak — als het team op de linkerbaan over de finish is. Welke invloed zal de gemaakte keuze op de totaaltijd van de wedstrijd hebben?

mogelijke uitbreidingen

- Het berekenen van het aantal races dat nodig is bij een afvalkompetitie met andere aantallen deelnemers.
- Door van de rechte baan over te gaan op een ovale baan ontstaat de noodzaak om de startpunten voor beide banen te gaan vastleggen.
- Door in te bouwen dat een team tussen twee races minstens tien minuten pauze moet hebben, ontstaat een interessant telprobleem dat (hoogstwaarschijnlijk noodzakelijk) door visualisering op een tijdlijn opgelost kan worden.

Een spel als model; een model waarvan je je kunt afvragen in hoeverre het een stuk werkelijkheid dekt. Het geeft echter aanleiding tot zoveel wiskundige aktiviteiten en wordt zo entoesiast door de kinderen ontvangen, dat twijfels over de realiteitswaarde van het model hierbij in de schaduw komen te staan.

opleiding



EEN PA-DOCENT TUSSEN UTOPIE EN REALITEIT?
VIJF JAAR REKENEN, WISKUNDE EN DIDAKTIEK

Dit wordt een subjektief verhaal over wiskobas en over pa-*studenten die moeten leren rekenen (wiskunde!) te geven aan kinderen op de basisschool, én natuurlijk over mijzelf*: de verbindende schakel.*
Dit verhaal gaat niet over 'Naar zelfstandig rekenen', *de rekenmetode die de studenten het meest tegenkomen op hun leerscholen in en rond amsterdam; dit verhaal gaat wél over al die kinderen, die nog steeds denken dat:*
REKENEN = RIJTJES SOMMEN MAKEN.
Op de pedagogische akademie zie je ze weinig — kinderen —; hoe centraal ze in mijn lessen hebben gestaan, wordt hopelijk al lezende wel duidelijk.

* *Heleen van Lohuizen is docente rekenen/wiskunde en didaktiek aan de Boumanakademie te amsterdam geweest tot 1 augustus 1979.*

HELEEN VAN LOHUIZEN

het begin
Eind 1974. Ik ben bijna afgestudeerd (*th* delft) en wil, voor ik de echte praktijk — dus het bedrijf — inga, graag alvast wat leservaring opdoen.
Een zwangerschapsvervanging op de Boumanakademie ... de oude kweekschool!
Ik kan er zo beginnen, maar wat moet ik er doen? Geen probleem; na aftrek van vakantie en tentamenperiode blijven er immers maar vier lesweken over.
Rekenen heb ik altijd erg leuk gevonden; het reken/wiskundeonderwijs op deze *pa* is veel leuker dan ik mij in mijn stoutste dromen heb kunnen voorstellen. Die eerste drie maanden worden voor onbepaalde tijd verlengd.

wat moet je je bij de Boumanakademie voorstellen?
Toen de grootste pedagogische akademie van nederland, gemiddeld twaalf klassen per leerjaar waaronder twee montessoriklassen. Een glazen nieuwbouwsel, twee verdiepingen hoog, rechthoekig met veel paars-roze gordijnen.
Om organisatorische redenen geven we maar ± 28 weken per jaar les; in blokuren van honderd minuten. Twee jaar rekenen is voor elke student verplicht, negentig uur totaal. Binnen deze uren en binnen je lokaal ben je helemaal vrij; daarbuiten wordt het moeilijker.
De individualiteit op deze *pa* viert hoogtij; kommunikatie is een belangrijk onderwerp van gesprek: tussen kollega's, tussen studenten, tussen iedereen ...
Straks (1979/1980) krijgen we nog maar vijf eerstejaarsgroepen, waarvan nog steeds twee montessorigroepen.

de sektie rekenen van de Boumanakademie
Wiskobassers vanaf het eerste uur? Positief staat iedereen er zeer zeker tegenover. Konferenties en werkgroepsbijeenkomsten worden trouw bezocht.
Kwa onderwerpen en te gebruiken materialen trekken we steeds één lijn; de invulling in de klas doet eenieder op zijn/haar eigen manier.
Een heel stimulerende groep mensen (Dick Oort, Wil Oonk, Dolly van Drooge en Pim van Drooge) voor iemand die van toeten noch blazen weet.
Terugkijkend op de afgelopen vijf jaar, realiseer ik me niet te weten, waar en hoe ieder binnen z'n les aksenten legt.
.... 'Wel jammer', zeg ik nu.
'Eigen schuld, dikke bult', zegt een kind. ....
Straks (1979/1980) staat Wil alleen voor de Boumanklus; ik denk dat hieraan niets toegevoegd hoeft te worden.

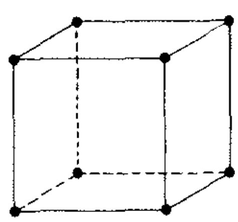
▶ WISKOBAS – DOCENT – STUDENT: GELIJKE VISIES?

Bij een opleidingschool hoort een visie, bij een vak ook!
Studenten willen immers weten waar ze aan toe zijn, een docent ook overigens.

wiskobas en een docente: gelijke visies op het vak rekenen/wiskunde?
Mijn visie anno 1974 was heel vaag:

- rekenen?
  Ja, rekenen kan erg leuk worden, mits je over goede ideeën beschikt én ze weet te gebruiken. Je docent wil jullie dit leren (ik ril, wat weet ik eigenlijk meer dan zij?).
- wiskunde?
  Ja, wiskunde kan heel zinnig zijn, mits je het ziet (zitten). Je docent zal jullie spelenderwijs op een hoger nivo proberen te brengen (ik hoop dat ik dat hogere nivo zelf herken).
- didaktiek?
  Ja, dat komt vanzelf aan de orde als jullie naar de oefenschool gaan (wat is didaktiek, hoe leg ik dat de studenten uit?).

Wiskobas heeft *haar visie* in onderstaande kubus neergelegd:



een kubus heeft:
- zes vlakken;
- acht hoekpunten;
- twaalf ribben.

Een kubus is:
- een vierkant;
- een vierkant met vijf vierkanten erop;
- een vierkant doosje met een vierkant dekseltje;
- een bouwplaat, bestaande uit zes even grote vierkanten (er zijn elf verschillende bouwplaten).

Leerplanpublikatie 1[1]) beschrijft het wel en wee van deze kubus. De hierop volgende *rode* delen werken deze visie systematisch uit.

reacties van mij en ervaringen op de pa *met deze kubus*
Uitgerekend een kubus, driedimensionale meetkunde ...

[1]) Treffers, A.: *'De kiekkas van wiskobas', iowo,* utrecht 1975.

Hoe komen ze erop? Mijn eigen leraar zag vroeger al niet in de ruimte; moet ik dit nu dan ook nog gaan uitleggen?
Jaren duurde het voor ik dat ding goed op papier kreeg.
Die zés leerstofvlakken? Een leuke vondst, heel kreatief.
Rekenen (al die oude sommenrijtjes), meten, meetkunde, kansberekening, relaties en funkties, taal en logika ... een indeling in zes leerstofgebieden.
De eerste vier kan ik wel aan de studenten verkopen, maar nummer vijf en zes?
Die ácht hoekdoelen, of zijn het uitgangspunten van goed wiskundeonderwijs?
Praten over algemene en konkrete doelen;
proces- en produktdoelen;
niet-matematische en gematematiseerde doelen;
ééndimensionale, tweedimensionale en driedimensionale doelen...
.... 'Eén doel is geen doel, twee doel is een half doel, drie doel legt het loodje', zing ik zachtjes voor me uit. ....
De eerste ruzie in de sektie is geboren: ik weiger nog een doel te bestuderen.

Die twaalf ribben? De studenten blijken uitgeteld te zijn. Stoppen dus! Aan hun spanningsboog denken! De mijne blijkt helaas al te ver

doorgebogen te zijn. Snel sis ik tussen mijn lippen door nog iets in de trant van:
.... 'Jullie mogen kiezen: lui of dom!' ....
Zij vinden dit niet zo grappig als ik vroeger.
Denk ik soms over een aanvullende studie onderwijskunde/pedagogiek, op dit soort momenten lijkt me psychologie toch ook wel heel aantrekkelijk.

Flauw?
Ach, natuurlijk stimuleert wiskobas mijn denken, geeft ze hieraan een duidelijk wiskundige richting en doordrenkt ze mijn onderwijs — en niet alleen op de *pa* — met haar ideeën.
Het is goed en noodzakelijk dat mensen de gelegenheid krijgen na te denken over hoe een reken/wiskunde-utopie eruit zou moeten zien, als zij maar blijven aksepteren dat ik dit in de realiteit van de *pa* moet zien waar te maken.
Anno 1979: dus toch twee gelijke visies? Allicht, het is alleen een kwestie van invullen en tijd.

een docente en studenten: gelijke visies op het vak rekenen/wiskunde?
Studenten hebben hun eigen herinneringen aan en dus meningen over rekenonderwijs. Ze staan zeker open voor vernieuwing, in elk geval voor verlevendiging van het rekenonderwijs. Het woordje wiskunde met betrekking tot de basisschool is nieuw voor hen. Ze schrikken er ook wel van.
Hun eigen ervaringen met het vak wiskunde zijn meestal niet zo positief.
Hun eigen kennis is vaak ook niet zo groot, vrouwen voelen zich op dit gebied vaak nog onzekerder dan mannen.
Dit valt vanaf het eerste moment op en zet je aan het denken: Waar en waarom gaat het mis? Hoe is hier door jou een verandering in aan te brengen?
Dit denken brengt je onherroepelijk op vragen als:
- hoe leerde ik zelf vroeger?
- van wie heb ik echt wat geleerd?
- wie stimuleerde mij om door te denken?
- waarom heb ik me altijd zo verveeld in de klas?

Maar ook:
- waarom maakten al die jaren van leren me steeds onzekerder in plaats van me boordevol zelfvertrouwen te stoppen?
- wat heb ik zelf gedaan, toen dit gebrek aan zelfvertrouwen tot me doordrong?

Ik probeer de studenten een eigen gedachtengang te laten ontwikkelen, onafhankelijk van de mijne. Ze moeten hem wel kunnen motiveren: in de klas op de *pa*, op tentamens en op de leerschool.
Ik hoop hen zo zekerder van zichzelf te maken, dus zelfvertrouwen te geven.

Straks — in hun eigen klas op de basisschool — moeten ze het tenslotte ook alleen doen. Met behulp van een metode, akkoord, maar wat gebeurt er als ze die klakkeloos gaan volgen, zoals nu nog zo vaak gebeurt op de basisschool?

Hoe kom je erachter, wat een kind leuk vindt om te leren?
Hoe kom je erachter, wat voor een kind zinnig is om te leren?
Hoe kom je erachter, hoe je een kind iets aan kunt leren?

Via de metode ... dus alle kinderen zijn gelijk?!!

Ik denk, dat een metode een heel goed uitgangspunt kan zijn, daar deze op grond van de ervaring van velen geschreven hoort te zijn, maar ik denk dat zelfvertrouwen onontbeerlijk is om er op een goede manier mee om te kunnen gaan! Jouw ervaring is toch niet de ervaring van de schrijvers?
Je hebt zelfvertrouwen nodig om je eigen weg te vinden door de (uitgewerkte) ideeën van anderen. Je hebt nog meer zelfvertrouwen nodig om met je eigen ideeën te durven komen! Dan immers kun je pas entoesiast en open voor de klas staan: luisteren naar anderen, toegeven dat jij ook weleens iets fout doet en zo de anderen in hun waarde laten ... en hen stimuleren tot meedenken.
Allicht moet hun (studenten) eigen kennis van voldoende nivo zijn, maar dat weten de studenten zelf ook wel; erg veel tijd besteed ik hieraan niet in de klas. Elke student heeft overigens weer andere wensen.
Mijn metode is wiskobas en het rekenprogramma, zoals het nu op de lagere school aangeboden wordt. Ik maak samen met de studenten lijnen (wat moet er zeker in? wat wordt hobbyisme?) meer kan tenslotte niet op de *pa* ... hun praktijk ligt elders.
Materialen, literatuur (leerplandelen van wiskobas, televisieseries), ze moeten de weg weten, ze moeten ook nagedacht hebben over ...

Docente en studenten: gelijke visies? Ik denk dat dit nog niet kan; ik kon dat tenslotte in 1974 zonder praktijkervaring in een eigen klas óók nog niet!

studenten en wiskobas; enkele opmerkingen, verzameld mei 1979

Tweedejaarsstudenten over de afgelopen twee jaar:

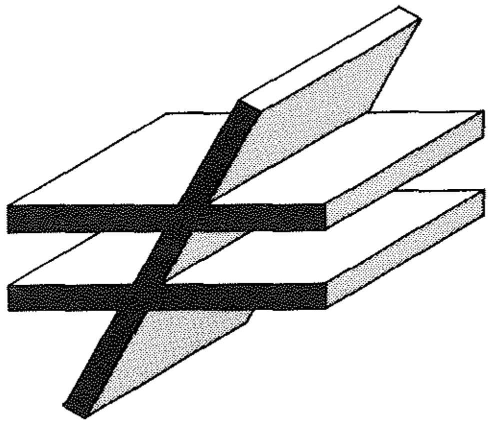
- De meesten van ons tienen vinden dat wiskobas (de vijf eerstejaars-*pa*-boeken) niet aansluit bij de praktijk; sommigen zeggen dat de metode afgeschaft moet worden en vervangen door wiskobas, weer anderen denken aan een aanvulling.
- In de *pa*-boeken missen we verwerkingen en cijferoefeningen, ze sluiten te slecht aan op de leerschoolmetode. Leuk vinden wij de vele lesideeën en werkbladen.
- De veelheid van materiaal waarmee kennis gemaakt is, wordt positief beoordeeld. Wat van wiskobas en wat van de docent is, kunnen wij vaak slecht beoordelen.
- De meesten van ons hebben nog niet het gevoel, volledig inzicht te hebben hoe ze het moeten gaan doen op de leerschool. Positief wordt beoordeeld, dat we aan het denken zijn gezet, negatief dat sommige dingen toch vaag bleven vanwege te weinig begeleiding in de les.

Ben van Tol, derdejaars rekenspecialist:

> 'Drie jaar rekenonderwijs op een *pa*, wat zijn mijn ervaringen?
> Allereerst een steeds groeiende frustratie dat er ten aanzien van de moderne rekendidaktiek feitelijk weinig nieuws onder de zon is.
> Op één positieve uitzondering na: wiskobas!
> Positief vind ik dat binnen de verschillende leerstofgebieden een totaal vernieuwde aanpak tot stand is gekomen, die naar eigen inzichten kan worden ingepast binnen het bestaande rekenonderwijs. Op de *pa* hebben we zo een aantal onderwerpen op eigen nivo behandeld en vervolgens naar de basisschool toe vertaald.
> Jammer vind ik het dat wiskobas nog in ontwikkeling is, en als metode niet inpasbaar is in het huidige rekenprogramma van de lagere school.
> De rekenkundige en wiskundige aktiviteiten in de onderwerpen die zoal aan de orde kwamen, maakten dat we plezierig en stimulerend bezig zijn geweest (in de *pa*-klas of in de basisschoolklas).
> Ik hoop, straks als ik zelf voor de klas sta, op een uitgebreider begeleiding voor onderwijsgevenden en op een afgerond werkplan voor de basisschool.'

Een pa-*docente tussen utopie en realiteit? Ik voelde me er wel lekker bij.*

nieuw op de markt



EEN BLOKJE OM

De not[1]) *gaat maar door met het maken van praktische en goede spullen voor het reken/wiskundeonderwijs. Dit keer het pakket:* 'Een blokje om'.
Het is bestemd voor het vierde leerjaar en als volgt samengesteld:
- *vier televisieprogramma's (in kleur);*
- *een werkboek (verbruiksmateriaal) (f 2,35);*
- *een handleiding met vier posters (f 9,50).*

Auteurs: Hans ter Heege en Piet Scholten.
De eerste programmaronde is, als dit tijdschrift verschijnt, reeds achter de rug. Toch willen we er om meerdere redenen aandacht aan besteden.

In het kader van dit temanummer zou het aardiger geweest zijn, aandacht te besteden aan het not*-programma over schaken, dat thans uitgezonden wordt. Helaas konden we bij het samenstellen van deze kolommen nog niet over het betreffende materiaal beschikken.*

ED DE MOOR

de televisieprogramma's
De vier televisieprogramma's zijn jammer genoeg het zwakste punt in het totaalpakket; ze vertonen in feite geen enkele samenhang met het werkboek en met het verhaal in het werkboek.

> Het lijkt een beetje op de *André van Duin didaktiek:*
> Kind komt te laat en huilend de klas binnen:
> .... 'Meester, ik ben uitgegleden over een bananeschil.'
> 'Wat een oen, jongens! Dat doet me denken aan een leuke som.
> Schrijf eens op:
> Eén kilo bananen kost *f* ...
> In één kilo zitten ... bananen.
> Hoeveel kosten dertien bananen?' (onderwijzer) ....

De moeilijkheid om inhoud van werkboek en televisieprogramma's op elkaar af te stemmen, is aldus door de makers opgelost.
Twee schatten van kinderen, Hiske en Xander, komen met meneer Block (Alexander Pola) in aanraking, omdat ze zijn agenda op straat hebben gevonden. En laat meneer Block nou toevallig bij de televisie werken en net een programma over het verkeer bij *'Een blokje om'* moeten maken. Daarom vraagt hij de kinderen wat zij zouden willen weten over de bus, de trein, de boot en het vliegtuig.
Zo ontstaan vier informatieprogramma's, zoals de handleiding ze zelf ook noemt. Op zich zijn de programma's heel instruktief. Allerlei zaken, waarvoor kinderen belangstelling hebben (of: kunnen krijgen), komen aan de orde. Het programma over het spoor, betreffende het systeem van besturing en beveiliging van treinen is echt verhelderend.
De beelden zijn mooi en de informatie is zinvol, maar zoals eerder gezegd: elk verband met het werkboek ontbreekt. Dit kan echter ook voordelen bieden. Als men namelijk niet gebonden wil zijn aan de uitzenddata, kan het werkboek ook heel goed los van de televisiebeelden doorgewerkt worden.

het werkboek
Het werkboek is ruim en mooi uitgevoerd. Het bevat dertig werkbladen, welke door een bindend verhaal tot één geheel worden gesmeed. Het verhaal gaat over een reis van twee jongens rond het ijsselmeer, waarin vooral de trein een belangrijke rol speelt.
Er zijn vier grote leerstoflijnen te onderscheiden:

[1]) Nederlandse onderwijs televisie, riouwstraat 163, den haag, 070-609815.

- roetes en verhoudingen;
- tabellen en dienstregelingen;
- rekenen;
- afstanden en rijtijden.

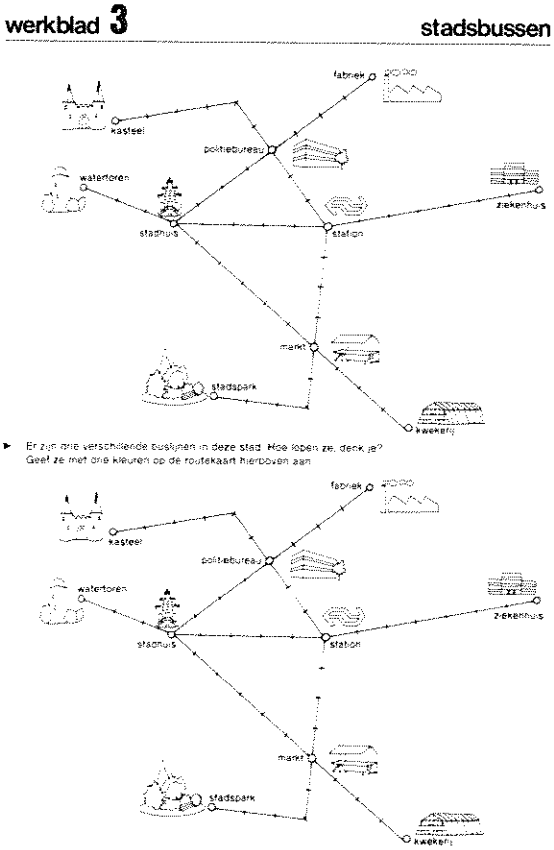


fig. 1

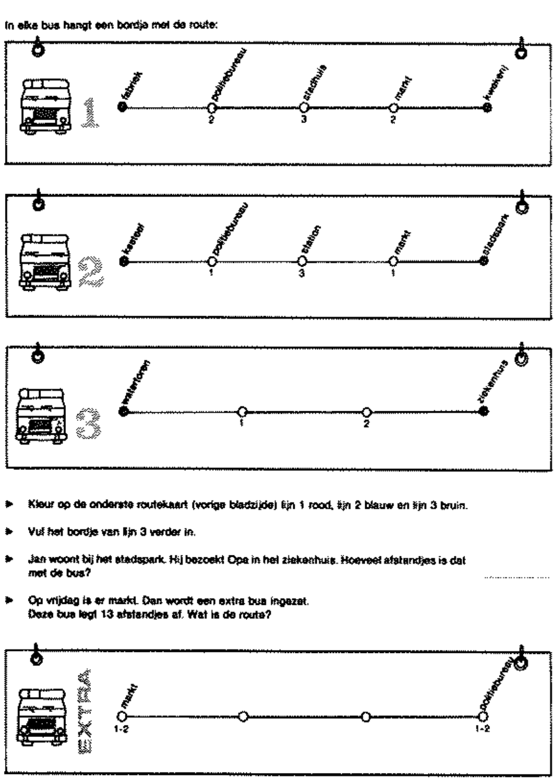


fig. 2

Aan deze onderwerpen kunnen we al aflezen, dat wiskunde op de basisschool niet formeel hoeft te zijn (zelfs niet mag zijn), maar dat de wiskunde wordt aangetroffen in onze omgeving.
Het begrip roete wordt opgebouwd vanuit aktiviteiten op een panoramische kaart en vanuit taalaanduidingen (links, rechts, hierlangs), uitlopend in het begrip roetelijn, zoals die in trams wel gebruikt wordt om de roete van een tramlijn te beschrijven. Een mooie zinvolle aktiviteit, zoals we uit *werkblad 3* kunnen opmaken (fig. 1 en 2).
Tevens kan zo'n roetekaart en het gebruik ervan voor buslijnen (afstanden, prijzen) leiden naar de verhoudingstabel, welke een 'machtig didaktisch hulpmiddel' (handleiding) is bij problemen rond verhoudingen.

een voorbeeld
Ik fiets met m'n zoon Bart (tien jaar) de polder *de ronde hoep* rond: 17 kilometer. Tijd: drie kwartier. Hij is natuurlijk benieuwd naar de gemiddelde uursnelheid.
....'Reken het maar uit', zeg ik.
'Dat kan ik niet', is zijn antwoord.
'Hoeveel zou je in anderhalf uur gedaan hebben, als je zo had kunnen doorrijden?'
'34 kilometer.'
'En in drie uur?'
'68 kilometer.'
'Dus in één uur?'
'Dat kan ik niet delen.'
'Weet je een getal dicht bij 68, dat je wel kunt delen?'
'69! Dus bijna 23 kilometer per uur!' ....
Schematisch met de verhoudingstabel:

km	17	34	68		bijna 23
uren	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3		1

fig. 3

Het mooiste is echter, dat hij het later zijn moeder op deze manier uitlegt. Zij repliceert met:
....'Ja, zo snap ik het ook!' ....

Aan het gebruik van deze verhoudingstabellen wordt in *'Een blokje om'* ruime aandacht besteed. Ook tabellen waarmee we dagelijks gekonfronteerd worden, hebben een praktisch karakter.
Al eerder is aan deze problematiek binnen de *not*-programma's aandacht geschonken. Bijvoorbeeld in *'Tel voor twee'*.
De praktijk leert, dat het omgaan met tabellen door leerlingen, die hier nog niet eerder ken-

werkblad 4 — tabellen

- Jan woont bij het stadspark. Hoe ver woont hij van de kwekerij als hij met de bus reist? Reken dat uit in afstandjes ....
- Hoe ver woont Jan van de fabriek, waar zijn vader werkt? ......
- Maak deze afstandentabel af

	stadspark	kwekerij	ziekenhuis	fabriek	watertoren
stadspark		9		16	
kwekerij					
ziekenhuis					
fabriek					
watertoren					

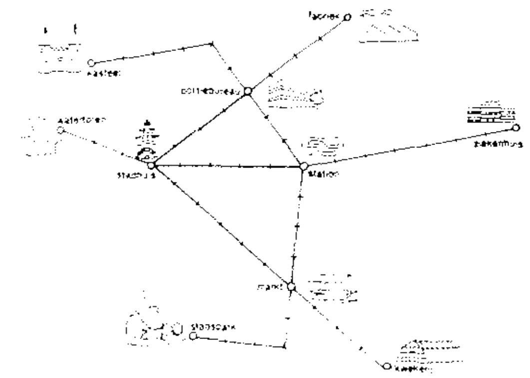


fig. 4

Op het routekaartje kun je ook zien hoeveel minuten de bus over een afstandje doet
In de buitenwijken kan de bus sneller rijden dan in het centrum
⟼ 2 minuten
⟼ 3 minuten

- Maak de rijtijdentabel voor lijn 2

	stadspark	markt	station	postkantoor	kasteel
stadspark	0				
markt		0			
station			0		
postkantoor				0	
kasteel					0

Overstappen op een andere buslijn duurt 5 minuten
- Hoe lang duurt Jans busrit van het stadspark naar het ziekenhuis?
- Jan begint bij het stadspark met een busreis die 44 minuten duurt. Waar stapt hij uit?

fig. 5

nis mee maakten, niet altijd even eenvoudig verloopt.

Een didaktisch probleem is hierbij, hoe de funktie en werking van een tabel dient te worden gepresenteerd. In *'Een blokje om'* wordt deze kwestie geïntroduceerd vanuit een plattegrond en een afstandstabel (fig. 4 en 5), waarbij we nog even wijzen op de vraag, die beoogt ook de rijtijden in een tabel op te slaan.

Het lijkt ons een didaktisch goede instap, omdat zich hier als het ware vanzelf de weg naar de 'werking' van zo'n tabel aanbiedt. De 'randhokjes' (bushaltes) hebben een ander karakter dan de 'cellen', die de getallen bevatten welke de afstanden aangeven; de 'bewerking' is vanzelfsprekend. Immers: steeds worden twee stations gebonden door hun afstand te noteren.

Met andere woorden: de afstandstabel lijkt een goede voorbereiding op tabellen, waarin:
- de randhokjes even groot zijn als de cellen;
- zowel de cellen als randhokjes getallen bevatten;
- soms ook nog een abstrakte bewerking is gegeven, al of niet van een leesrichting voorzien (zie als voorbeelden fig. 6).

↗	2	4	8
8			
12			
16			

×			9
4	8		
		56	
	14	49	

fig. 6

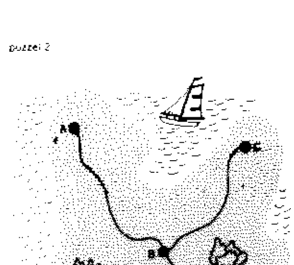
Niet zelden zagen we leerlingen, bij een tamelijk abrupte invoering van dit wat meer geavanceerde gebruik van tabellen, danig in de war raken.

Mits goed voorbereid, is hier echter sprake van een verrijking van het reken/wiskundeonderwijs. Gelukkig besteedt ook *'Een blokje om'* er aandacht aan. Soms in een leuke puzzelachtige sfeer (zie fig. 7).

In een tabelsoort van een wat ander karakter worden afstanden en prijzen gekoppeld, zoals ook in het spoorboekje gebeurt. Deze tabel wordt eveneens ruim verkend, voorzichtig voorbereid en zinvol toegepast.

werkblad 5 — puzzelen met tabellen

puzzel 1



	A	B	C	D
A		6		14
B				
C				15
D	14			0

puzzel 2

	A	B	C	D	E
A		15		23	
B					
C			0		34
D					
E	39				

fig. 7

Weer anders en lastiger zijn de zogenaamde dienstregelingstabellen, welke aanvankelijk in vereenvoudigde vorm zijn opgenomen, zodat op een geleidelijke manier naar het échte spoorboekje kan worden toegewerkt.

Uit de gegeven voorbeelden zal duidelijk geworden zijn, dat het rekenen ruimschoots aan de orde komt. Bovendien worden in de handleiding nog allerlei ekstra suggesties in die richting gegeven. Dit rekenen ligt echter ingebed in de kontekst van vraagstukjes en is geen doel in zichzelf. Zuivere cijfersommetjes komen vrijwel niet voor, hoewel een werkblad als afgebeeld in fig. 8, waarin het om in- en uitstappende aantallen passagiers gaat, deze kant toch sterk uitgaat.

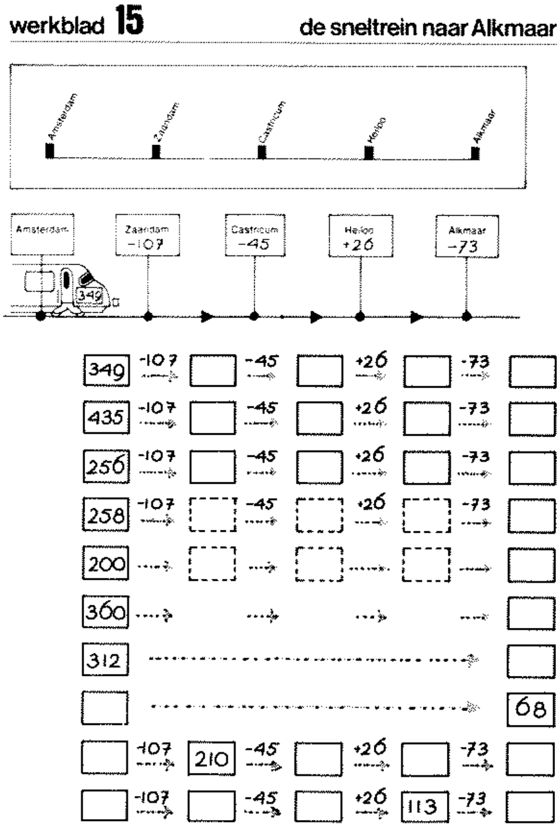


fig. 8

Wel zien we dat hier een andere notatievorm (pijlen) wordt gebruikt en dat de mogelijkheid wordt geboden, een handige manier (een regel) te ontdekken.
In het laatste gedeelte van het werkboek wordt een aanloop genomen naar het verband tussen afgelegde weg en rijtijd, oftewel het begrip snelheid (fig. 9). De kinderen zullen het wel niet zo gemakkelijk vinden, maar het lijkt ons zeer de moeite waard.
Tenslotte wordt geëindigd met een eenvoudige bestemmings-tijd-grafiek.

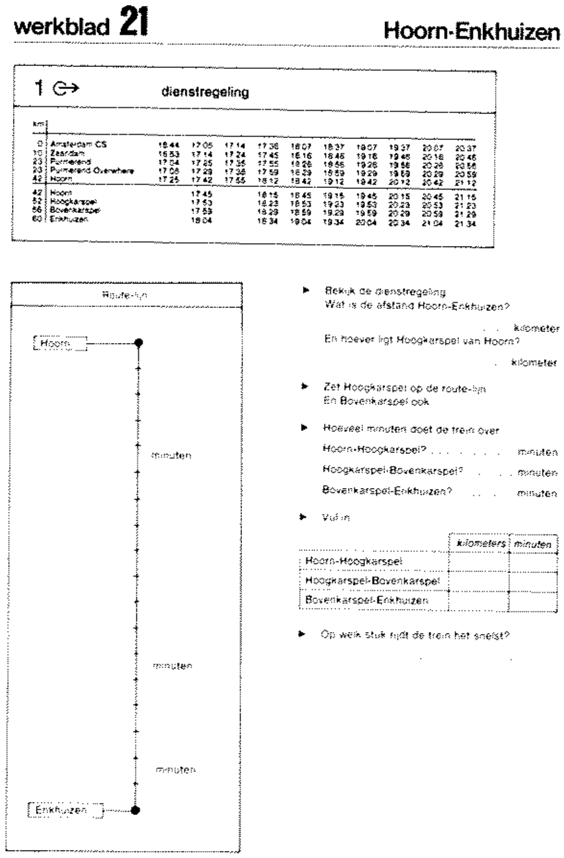


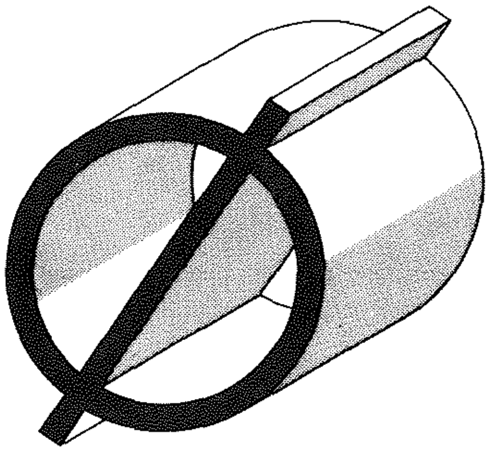
fig. 9

handleiding
De handleiding (38 pagina's) omvat:
- algemene informatie;
- verantwoording;
- toelichting op de televisieprogramma's;
- aanwijzingen voor drie verschillende trajektkeuzen door het werkboek;
- direkte organisatorische en didaktische aanwijzingen voor het gebruik van het werkboek in de klas.

Het is verheugend dat de auteurs zo'n ruime plaats voor laatstgenoemde gebruiksaanwijzingen hebben ingeruimd. De onderwijsgevende krijgt op deze wijze een flinke steun bij allerlei (nieuwe) kwesties als: tabellen, verhoudingstabel, pijlentaal en bestemmingsgrafiek.

samenvatting
- *'Een blokje om'* is een uitstekend onderwijsleerpakket voor het vierde leerjaar van de basisschool.
- Aan de orde komen: plattegronden, roetebeschrijvingen, tabellen, dienstregelingen, verhoudingen, tijd, rekenen; alsmede: een aanloop tot de begrippen snelheid en grafiek.
- De televisieprogramma's zijn instruktief, doch hebben nauwelijks enige samenhang met het werkboek.

wiskundige wereld-oriëntatie



SPELLETJES MET EEN REKENMACHINE

Ofschoon veel kinderen wel eens een rekenmachine in handen hebben gehad, zijn ze er toch vaak niet vertrouwd mee. Bij de introduktie van spelletjes met een rekenmachine moeten we daarop bedacht zijn. We kunnen een spel bijvoorbeeld eerst samen met een 'goede' leerling voor de klas uitvoeren. We doen dit zo'n twee à drie keer, waarbij we de spelregels en het gebruik van de machine demonstreren. De strategieën van het spel komen later wel aan bod.
Als we in het bezit zijn van meerdere rekenmachines, kunnen we het spel daarna door de klas in groepjes van twee of meer leerlingen laten spelen. Hebben we twee machines, dan kunnen we het spel door de goede leerling spelenderwijs aan een ander laten uitleggen.
Opvallend is, dat de kinderen zélf allerlei strategieën en afwijkende spelregels gaan invoeren. Vaak grijpen ze hierbij terug naar rekenstrukturen die ze eerder hebben geleerd.
Daarom vormen deze spelen een goed middel om de rekenvaardigheid te oefenen.

JAN VAN DEN BRINK

spel 1
dikteren

eerste leerjaar e.v.

- Het gebruik van de machine leren.
- Lezen en noteren van cijfers en opgaven.

voor
Twee spelers die elk een rekenmachine hebben.

bedoeling
Eén van de spelers vertelt de ander, welk getal of welke opgave hij op zijn rekenmachine maakt. De andere speler volgt de eerste op zijn woorden.

spelsituatie
.... 'twintig, erbij dertig, is ...', zegt José tegen tegen Albertine, terwijl beiden de toetsen indrukken.
Albertine vindt '50', José echter: '23'.
'50 klopt!', weet José en als ze de opgave herhaalt, blijkt dat ze $\boxed{0}$ $\boxed{3}$ in plaats van $\boxed{3}$ $\boxed{0}$ indrukte. Dan is Albertine aan de beurt om te dikteren.' ....

variaties
- De fout in de volgorde van cijfers komt vaak voor. De kinderen dikteren daarom '30' vaak als 'drie, nul'. Wijs op deze taalmogelijkheid om het elkaar lastiger of makkelijker te maken.
- Degene die de opgave dikteert, dient haar eerst zelf op zijn machine te maken, alvorens te vertellen wat de andere speler moet doen.
- Een andere mogelijkheid is, dat er vragen gesteld mogen worden.
  Bijvoorbeeld:
  .... 'Ik heb een som gemaakt en er komt 50 uit. Welke som is dat?'
  'Is het een min-som?', vraagt de ander. ....

spel 2
cijfers poetsen

tweede leerjaar e.v.

- Met plaatswaarden rekenen.

voor
Elk willekeurig aantal spelers van wie er één

de 'getallenbank' heeft. Elke speler heeft een rekenmachine.

bedoeling
De getallenbank dikteert een getal waarvan één cijfer door een ander cijfer moet worden vervangen, zonder de overige cijfers te veranderen.

spelsituatie
.... '300', dikteert de getallenbank. En daarna: 'De drie moet door een twee worden vervangen.'
Henk vindt: 297 (300 – 3). Hij is verbaasd en kijkt rond met een gezicht van: daar begrijp ik niets van.
Peter drukt in: $\boxed{3}$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$.
'298', zegt hij, 'de drie is in een twee veranderd. Klaar!'
Maar daarmee gaat de getallenbank niet akkoord. De andere cijfers moeten blijven.
'O, ik weet het al', zegt Henk en hij noteert 300 – 1000, maar herstelt dit met 300 – 100 = ...

variaties

- We kunnen de kinderen in groepjes van twee laten spelen. Om de beurt is een leerling dan getallenbank.
- Voor kinderen in *lagere* leerjaren kunnen we het aantal te gebruiken toetsen beperken.
  Bijvoorbeeld:
  .... 'Verander de '5' in een '9' in het getal 53, waarbij alleen de toetsen $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{+}$, $\boxed{-}$ en $\boxed{=}$ mogen worden gebruikt.'....
- Voor kinderen in *hogere* leerjaren kunnen we getallen van meer dan twee cijfers kiezen.
  Bijvoorbeeld:
  .... 'Verander de '4' in het getal 789456 in een '7'.' ....
  Of het spel met decimale getallen laten uitvoeren.
  Bijvoorbeeld:
  .... 'Verander de '2' in een '1' in het getal 0,325.' ....
- Verander niet één cijfer, maar bijvoorbeeld twee cijfers in een getal.

spel 3
van hier naar daar
tweede en derde leerjaar

- Opgaven vinden bij een gegeven uitkomst en gegeven begingetal.

voor
Twee spelers en een rekenmachine.

bedoeling
Probeer van een gegeven getal dat in het venster staat een ander gegeven getal te maken.

spelsituatie
.... Henry geeft aan Francesco de rekenmachine met het getal 22 in het venster.
'Het moet 66 worden', zegt hij.
Om beurten drukken ze getallen in.
Francesco begint met $\boxed{+}$ $\boxed{5}$:

$$22 \xrightarrow[\text{Fr}]{+5} 27 \xrightarrow[\text{H}]{+45} 72 \xrightarrow[\text{Fr}]{-3} 69 \xrightarrow[\text{H}]{-4} 65 \xrightarrow[\text{Fr}]{+1} 66.$$

En Francesco wint. Hij heeft het eerst 66 bereikt.
Overigens zijn veel kinderen direkt geneigd om één opgave te maken, namelijk:
$22 \xrightarrow{+44} 66$. ....

variaties

- Beperk het aantal toetsen dat mag worden gebruikt.
  Bijvoorbeeld: $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ en $\boxed{=}$.
  Laat de kinderen vervolgens zo dicht mogelijk vanaf '0' een bepaald getal, bijvoorbeeld 67, benaderen.
  Dat kan op deze manier: $\boxed{3}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{+}$ ... $\boxed{+}\boxed{3}$.
  Maar korter is: $\boxed{3}$ $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ ...
- Voor hogere leerjaren kunnen ook negatieve getallen en tiendelige breuken gebruikt worden.

spel 4
raad mijn sprong
derde leerjaar e.v.

- Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen met een vast getal.

voor
Elk willekeurig aantal spelers. De onderwijzer(es) of een leerling is spelleider in het begin.

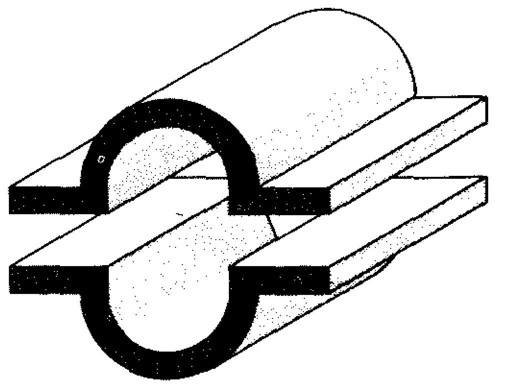
geschikte rekenmachine
Niet alle soorten rekenmachines kunnen bij dit spel worden gebruikt. Het moet een rekenmachine zijn die getallen met een vast getal kan vermeerderen, verminderen of vermenigvuldigen.
Probeer eens: $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$
Is de uitkomst '3', dan kunnen we de machine gebruiken.
Is het antwoord '1', dan is de machine niet geschikt.
Probeer dan nog eens: $\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$.
Ook '1'? Helaas.

bedoeling
Noteer een getal in het venster en voorspel welk getal zal verschijnen, als je op de $\boxed{=}$ toets drukt.

spelsituatie
.... De spelleider heeft $\boxed{+}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ ingedrukt. Hij probeert de machine eerst even, door $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ in te drukken. Er ontstaat nu '5'. De machine is goed: ze telt bij elk getal twee op.
De spelleider begint:
'Wat doet deze machine met een getal dat je hem geeft, als je daarna op $\boxed{=}$ drukt?'
'Geef maar eens een getal:
$\boxed{4}$ $\boxed{=}$ levert '6' op.
$\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ levert '12' op.
$\boxed{2}$ $\boxed{0}$: Welk getal zal het worden, denk je, als ik op $\boxed{=}$ druk?'
Enkele kinderen raden naar het antwoord. Sommigen rekenen, anderen kijken naar de getallenlijn. ....

variaties
- We kunnen variëren in de bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen) of in de spronggrootte.
  Bijvoorbeeld: $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$, $\boxed{+}$ $\boxed{2}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$.
- Herhaald op de $\boxed{=}$ toets drukken, geeft een nieuwe serie opgaven die de kinderen echter snel tot de spronggrootte brengt:
  $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ...
- Voor hogere klassen kunnen we decimale getallen gebruiken: $\boxed{+}$ $\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ of $\boxed{+}$ $\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ of $\boxed{+}$ $\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$
  ...

ander werk



EEN SCHOT VOOR OPEN DOEL

Met het hiernaast afgebeelde spelletje papiervoetbal *hebben we thuis al hele kompetities afgewerkt.*
De ervaring wijst uit dat kinderen – en (sommige) volwassenen – dit een erg leuk spelletje vinden. Het gaat vrij snel en je kunt het dus vaak spelen.
Afgezien daarvan, blijkt het spelletje ongekende mogelijkheden te bezitten voor mathematisch-didaktische aktiviteiten op vele nivo's.
Maar om dat 'aan den lijve' te ervaren, zou u 't eerst zélf een paar keer moeten spelen. Is er iemand in de buurt die mee wil doen, des te beter. Anders speelt u gewoon tegen uzelf.

EDU WIJDEVELD

het spel

doel	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	**doel**

fig. 1

regels

- leg de bal – een fiche o.i.d. – op de middenstip ('0');
- de eerste speler 'schopt' de bal evenveel plaatsen naar rechts als zijn dobbelsteenworp aanwijst; vanaf die plek 'schopt' de tweede speler de bal op dezelfde wijze naar links, enz., tot één van beide spelers het doel van de tegenstander passeert;
- speel het spel (bijvoorbeeld) tien keer; om beurten beginnen.

Een voorbeeld in pijlennotatie:

$0 \xrightarrow{+3} 3 \xrightarrow{-2} 1 \xrightarrow{+5} 6 \xrightarrow{-3} 3 \xrightarrow{+4}$ goal!

Het ontbreken van een dobbelsteen kunnen we opvangen. Hieronder (fig. 2) staat een rij zogenaamde toevalscijfers, die u kunt opvatten als de willekeurige uitkomsten van een tienzijdige dobbelsteen (getallen '0' tot en met '9'). We 'prikken' ergens een begingetal en gebruiken alleen de cijfers '1' tot en met '6' als uitkomsten van een 'echte' dobbelsteen.

In dit geval (fig. 3) heeft het spel dus dertien 'schoppen' geduurd.

Speel het spelletje nu eens tien keer en noteer daarbij:

- hoeveel keer de beginner won;
- het benodigde aantal 'schoppen' per spel (wat was over tien spelen het gemiddelde aantal benodigde 'schoppen', ofwel: wat was de gemiddelde spelduur?).

Zoals gezegd: er is matematisch-didaktisch veel aan het spelletje te ontdekken. Wilt u zelf op ontdekkingstocht gaan, speel dan eerst nog wat verder (letterlijk en figuurlijk).

Gaat u gerust 'papiervoetballen' in de klas – het 'speelveld' kunnen de leerlingen zelf maken – en kijk naar de reakties van de kinderen. De ideeën komen vanzelf!

76 08 34 66 07	27 83 96 71 14	75 55 79 77 38	62 30 42 92 93	66 52 67 77 53
90 24 83 83 63	29 66 95 31 29	88 11 02 19 01	50 37 67 92 37	82 86 16 57 18
15 55 92 43 99	10 35 12 90 54	43 64 54 65 19	07 26 41 95 98	36 21 32 08 19
30 19 56 01 20	94 47 53 23 14	37 31 56 11 39	91 79 50 98 21	52 81 65 68 26
82 35 59 90 05	74 02 41 73 13	61 89 66 87 62	28 68 16 45 69	41 01 74 85 50
01 09 00 87 47	77 44 32 03 14	47 16 19 03 58	30 85 69 08 60	65 31 02 74 65
72 80 44 12 65	11 06 75 42 82	54 34 55 56 26	85 50 96 55 29	31 72 09 57 45
26 27 89 40 76	91 14 79 49 91	03 89 74 71 83	06 00 03 97 72	35 09 74 61 38
53 52 16 36 15	53 24 12 46 59	61 88 35 36 63	17 50 88 79 64	44 03 06 27 92
98 70 60 81 12	59 42 96 04 05	02 61 55 52 31	19 19 58 74 12	28 64 04 29 89
35 51 07 73 87	71 97 22 56 19	10 72 21 56 75	55 79 06 80 35	70 17 01 82 81
35 51 23 88 08	78 51 54 86 11	25 18 57 77 71	69 90 97 47 92	07 54 70 90 78
57 30 67 12 83	36 77 21 62 75	90 64 11 70 53	57 55 59 03 80	32 40 24 88 82
04 98 08 87 04	81 54 97 23 73	91 08 41 47 87	96 87 15 21 46	67 41 34 62 85
01 48 34 19 42	50 07 24 32 24	08 05 74 29 80	12 41 95 85 09	11 46 69 15 18
82 41 33 13 42	98 01 72 34 08	00 68 43 97 92	18 94 89 20 70	63 50 52 27 51
67 20 70 31 68	70 93 02 10 42	42 91 53 49 64	48 03 80 86 19	08 60 79 41 10
66 40 12 40 77	64 73 79 63 73	01 36 48 52 75	26 15 04 10 96	08 79 16 98 26
18 32 93 62 12	01 89 81 64 01	19 52 56 41 12	15 97 60 44 37	09 08 64 43 19
46 57 44 11 21	54 96 29 51 55	22 17 78 46 53	40 38 00 21 44	07 79 66 85 38

fig. 2

Voorbeeld (zie pijl):

	+	–	+	–		+	–	+	–	+	–	+	–	+
toevalsrij	3	5	1	2	(9 0)	5	4	4	3	6	4	5	4	6 ...
spelverloop	+3	–2	–1	–3		+2	–2	+2	–1	+5	+1	+6	+2	goal!

fig. 3

vragen

Als u liever doorleest: prima. Maar dan eerst een paar vraagjes.

matematisch

- Heeft u al ontdekt dat het spel niet eerlijk is?
  Zo ja, formuleer dan eens zo scherp mogelijk wát er niet eerlijk is. En hoe vangen de spelregels dit op? (Overigens stoort deze oneerlijkheid de kinderen niet in het minst!)
- Wat is het minimum – resp. maksimum – aantal 'schoppen' dat een spel kan duren?
- Op welke mogelijke plaatsen kan de bal na drie 'schoppen' liggen? En, bewerkelijker: hoe ligt de kansverdeling over die verschillende plaatsen?
- Kunt u de gemiddelde speldnur van het spel berekenen? (voor insiders)
  (Ik kwam er niet uit en heb derhalve de computer als simulant te hulp geroepen; zie onder.)

didaktisch

Kunt u enkele suggesties noteren voor matematisch-didaktische aktiviteiten voor leerlingen van zes tot twaalf jaar op basis van dit spelletje? U kunt daarbij het speelveld en de spelregels uiteraard aanpassen aan nivo, doel en ervaring.

praktisch

Hieronder volgt een aantal suggesties onzerzijds. Ze zijn ontstaan achter het buro en stoelen niet op praktische ervaring. Daarvoor ontbrak ons helaas de tijd. (Het *iowo* is momenteel nog in een ander 'spel' verwikkeld.)
Om die reden draaien we de zaak eens om: als u student, onderwijzer, leraar wiskunde, wiskundige, of gewoon: belangstellende, nu eens met de voorgaande of volgende suggesties ging 'spelen' en ons úw ervaring liet weten.
Vandaar ook de titel van dit verhaal: *een schot voor open doel.*

suggesties

We geven u de suggesties nu net zo door, als we ze kort geleden spontaan op papier zetten. Kijkt u maar eens...

onderbouw

- Spel alleen op de velden '0' tot en met '6'.
  Aanvaller-verdediger: $\longrightarrow$ '6': één punt;
  $0 \longleftarrow$: 'af':
- Tellend.
  Noteren:

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 5 \longrightarrow \text{af.}$$

- Met sprongen.
  Noteren:

$$\begin{array}{ll} 0 + 3 = 3 & \text{of: } 0 \xrightarrow{+3} 3 \\ 3 - 2 = 1 & \phantom{\text{of: }} 3 \xrightarrow{-2} 1 \\ 1 + 4 = 5 & \phantom{\text{of: }} 1 \xrightarrow{+4} 5\,. \end{array}$$

NB: Dit laatste is een moeilijke notatie: '$\longrightarrow$': er gebeurt iets; '+2' en '–3': rechts, links, enz.
Wellicht leidt de notatie tot het voorstel de voetbal-getallenlijn naar links uit te breiden...

- Laat de kinderen zelf wedstrijdjes van twee, drie, vier, vijf ... stappen ontwerpen, die tot 'goal' of 'af' leiden.
- De lijn is uiteraard naar rechts te verlengen, maar de speldnur neemt snel toe.
  Wie deed er het langst/kortst over? Kan het in één stap? Kan het in honderd stappen?

middenbouw

- Zie onderbouw.
- Direkt op de tweezijdige voetballijn:
  – bedenk zelf een notatie;
  bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ll} 0 + 5 = 5_{gr} & 0 \xrightarrow{+5} 5_{gr} \\ 5_{gr} - 6 = 1_{ro} & 5_{gr} \xrightarrow{-6} 1_{ro}\,; \end{array}$$

  – handiger notatie:

$$\begin{array}{l} 0 \xrightarrow{+5} 5 \\ 5 \xrightarrow{-6} \overline{1} \\ \overline{1} \xrightarrow{+3} 2 \\ 2 \xrightarrow{-6} \overline{4} \\ \overline{4} \xrightarrow{+1} \overline{3} \end{array}$$

onderzocht zou moeten worden in hoeverre kinderen kunnen werken met dergelijke (negatieve) getalnotaties en hun bewerkingen

bovenbouw

- Zie middenbouw.
- Het spel is oneerlijk: elk kind mag tien keer achter elkaar beginnen. Hoeveel maal gewonnen?
  Inventariseren in de klas. Hoe komt dat?
  .... 'Ik begon op nul, maar Hans moest op min vier beginnen.' (Bart) ....
  In hoeveel worpen kan de beginner uit zijn? In hoeveel worpen de tweede?
- Empirisch is vast te stellen in welk aantal van honderd of tweehonderd gevallen, de beginner wint.
- Idem, met telefoonboek (strategie om snel winst voor links/rechts vast te stellen en het aantal benodigde stappen!)
  Wat blijkt de gemiddelde speldnur te zijn?
- Bereken (numeriek) in hoeveel gevallen de beginner na drie worpen in het voordeel is.

Bijvoorbeeld:

$$0 \rightarrow 6 \begin{cases} \xrightarrow{-1} 5 \longrightarrow 5 \text{ 'winstkansen'} \\ \xrightarrow{-2} 4 \longrightarrow 4 \text{ 'winstkansen'} \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \xrightarrow{-5} 1 \longrightarrow 1 \text{ 'winstkansen'} \\ \xrightarrow{-6} 0 \qquad \text{neutraal} \end{cases}$$

$0 \rightarrow 5$, enz.

.... 'Is het spel te ver-tweedimensionaliseren?' (Jeske) ....

computeruitslagen

Tot besluit nog enkele computeruitslagen. Eerst hebben we de computer gevraagd het spel duizend maal te simuleren, om iets over de gemiddelde spelduur en de mate van oneerlijkheid van het spel te weten te komen.
De uitslag (Piet begint in alle spelen):

veld-lengte	aantal spelen	Jan wint	Piet wint	gemiddelde spelduur
6	1000	343	657	12,43

Dit gaf te denken: de winstkansen voor Jan en Piet liggen zo te zien één op twee. Misschien kunt u daar wel een verklaring voor vinden.

Het is duidelijk dat het voordeel van de beginnende speler afneemt als we de veldlengte naar beide kanten uitbreiden. (We blijven met een gewone dobbelsteen spelen.)
Om u een indruk te geven – en een aanleiding nog wat verder te sleutelen – volgen hier enige computersimulaties (Piet begint in alle spelen):

veld-lengte	aantal spelen	Jan wint	Piet wint	gemiddelde spelduur
6	1000	343	657	12.43
7	1000	381	619	17.01
8	1000	388	612	21.64
9	1000	397	603	28.89
10	1000	432	568	35.06
11	1000	433	567	42.80
12	1000	405	595	49.83
13	1000	444	556	54.29
14	1000	431	569	68.09
15	1000	445	555	75.80

spel ernstig nemen

INTERVIEW SPELONTWERPERS

De titel suggereert dat we ons 'bloedserieus' met spel gaan bezighouden, dat we het spel van z'n vrijheid, onvoorspelbaarheid en vrolijkheid gaan ontdoen en het vervolgens tot onderzoeksgebied verklaren voor diepgravende droogstoppels. Wel, deze suggestie is onjuist. Het gaat ons om iets anders. Er is in de loop der tijd heel wat geteoretiseerd over het spel. Studenten op pedagogische akademies werden en worden steeds weer opnieuw gekonfronteerd met talloze, op zich interessante spelteorieën. Een overzicht van deze teorieën zou in dit bulletin wellicht niet misstaan: kennisname hiervan zou echter toch iets vrijblijvends houden; de resultaten zouden veelal tot niet meer dan wat oppervlakkige slogans leiden:
- *spel móet in het onderwijs;*
- *spel dient om de overgang van kleuternaar lagere school soepeler te maken;*
- *spel motivéért;*
- *het onderwijs dient ludiék te zijn;*
- *spel als elementaire behoefte van de mens;*
- *ons hele leven is een spel;*
- *... .*

ROB DE JONG

De redaktie acht de relevantie van een systematische weergave der slogans mét de onderliggende teorieën niet zo groot voor de praktijk van het wiskundeonderwijs. Het lijkt zinvoller en interessanter, tot een gedachtenuitwisseling te komen met bekende spelontwerpers. Ontwerpers die vanuit en vóór de praktijk van de huidige school werken. Mensen die het onderwijsgebeuren van haver tot gort kennen. De redaktie heeft daarom een viertal spelontwerpers op het gebied van het reken/wiskunde-onderwijs uitgenodigd voor een groepsinterview. Niet om de superorigineelste vondst te doen openbaren, maar om deskundigen die zich in hun dagelijks werk geen vrijblijvendheid kunnen veroorloven, aan het woord te laten over: spel, spel in het onderwijs, spel in het wiskundeonderwijs, spel in de opleiding tot wiskundeonderwijzer. Deze gebondenheid aan een praksis wordt in de 'ernst' van bovenstaande titel tot uitdrukking gebracht.
Uitgenodigd en aanwezig zijn:
Ger Janssen (gj), uitgever te tilburg, auteur van o.m. het 'Rekenactiveringsprogramma' *en* 'Kien'.
Jan Nieland (jn), docent wiskunde en didaktiek te hilversum, auteur van o.m. 'Klaar? Ga maar spelen!' *en* 'Getal in beeld'.
Piet Scholten (ps), programmamaker onderwijstelevisie te 's gravenhage, auteur van o.m. 'Wees wijs met wiskunde' *en de* not-*produkties:* 'Spelraam', 'Tel voor twee', 'Een beetje veel', 'Open kaart', 'Wiskunde voor de brugklas', 'Een blokje om'.
Adri Treffers (at), medewerker iowo *te utrecht, auteur van o.m.* 'Wiskobas doelgericht' *en van diverse artikelen over spelletjes.*
Voorts: *Sylvia Pieters en Rob de Jong van de redaktie van het wiskobas-bulletin.*

van links naar rechts: Jan Nieland, Piet Scholten, Adri Treffers en (op de rug gezien) Ger Janssen

een beginspel
ps: Je kunt niet over spelletjes praten zonder zelf een spelletje te hebben gespeeld. Hier heb ik zo'n spelletje: *drie op een rij*. Een kombinatie van een oefenspel en een strategiespel.

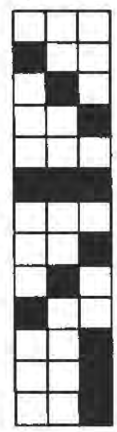
drie op een rij

Twee of meer spelers.
Drie dobbelstenen (bij voorkeur met getallen in plaats van stippen).
Getallenveldje, bijvoorbeeld 12 bij 3.

Hoofdbewerkingen met kleine getallen.
Geschikte kombinaties zoeken.
Strategisch belangrijke velden bezetten.

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
15	16	17
18	19	20
21	22	23
24	25	26
27	28	29
30	31	32
33	34	35

rijen



bijvoorbeeld
Speler *a* gooit met de dobbelstenen 4, 1, 3. Hij denkt dat het innemen van een middenveld verstandig is en bezet dus veld 7 ($1 \times 3 + 4$).
Speler *b* gooit 5, 4, 4. Hij wil niet zozeer zelf een rij volmaken, alswel speler *a* belemmeren. Hij bezet veld 6 ($5 + \frac{4}{4}$).
Speler *a* gooit 6, 2, 4. Hij bezet veld 3 ($\frac{6 \times 2}{4}$).
Speler *b* werpt 5, 2, 1 en kan veld 11 ($5 \times 2 + 1$) bezetten, aldus *a* belettend een trapjesrij te vullen.
Enz.

spel algemeen
gj: Wat zie je als spel? Tussen het maken van rijen sommen en het spelen van een strategiespel, ligt een grote verscheidenheid aan spelle-

tjes, die onderling ook weer op allerlei andere kriteria verschillend zijn, dat het erg moeilijk is ze onderling te vergelijken. Kijk, leg je het aksent op strategieën, dan valt het postbodespel[1]) af.

33a *Er waren eens twee postbodes...*

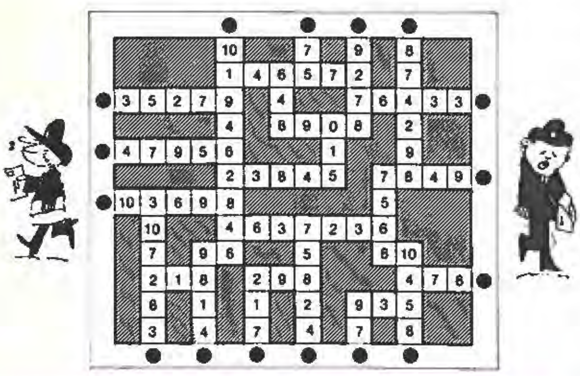
Er waren eens twee postbodes. De een wandelde graag en heette Jan Tippel en de andere was lui en heette Piet Gemak. Iedere dag moesten ze allebei precies honderd brieven rondbrengen.

Op de tekening hieronder zie je de straten staan. Op elk huis staat hoeveel brieven je daar in de bus kunt stoppen. Je mag overal aan de rand beginnen, en overal aan de rand eindigen, maar ... je moet dan precies honderd brieven in de bus gestopt hebben. Niet meer en niet minder!

Hoeveel wegen zijn er mogelijk? Zoek er eens een heleboel op. Teken ze maar met verschillende kleuren.

Jan Tippel zoekt natuurlijk de langste weg op.
Hoeveel hokjes (huizen)? ☐

Piet Gemak zoekt natuurlijk de kortste weg op.
Hoeveel hokjes (huizen)? ☐



gj: Gaat 't weer om iets anders, bijvoorbeeld om handig zoeken, dan hoort het postbodespel er weer wel bij. Waar trek je de grens?
Je kunt ook zeggen, wat in de klas vaak gebeurt: 'Ga je sommen maken. We gaan er een wedstrijd van maken. Wie het eerst klaar is. Een spelletje!' Dat heeft volgens mij niets met spel te maken.
Je zou een aantal kriteria moeten formuleren, die misschien wel vaag zijn, maar wel een richting aanduiden, op grond waarvan je iets een spel noemt. Zelf vind ik dat 'wie 't eerst zijn sommen af heeft, die heeft gewonnen', geen spel is, omdat het onder een bepaalde grens ligt.
Ik heb behoefte aan een vage definitie: wat verstaan we zo ongeveer onder een rekenspelletje?

jn: Er is een onderzoek van Wittgenstein. Wittgenstein toont aan dat je van het spel geen definitie kunt geven. Het woord spel wordt in diverse uiteenlopende situaties gebruikt en je merkt dat de kwaliteiten die bij elke spelsoort naar voren komen, zo met elkaar zijn verbonden dat spel eigenlijk een keten van aktiviteiten is. Een keten waarvan de eerste schakel niets te maken hoeft te hebben met de laatste schakel. De schakels zijn wél allemaal met elkaar verbonden.
Je kunt voetballen een spel noemen en het werpen met twee dobbelstenen en weet ik wat. Wittgenstein zegt, dat je strikt genomen geen definitie kunt maken van de term spel zoals die zich in het algemeen taalgebruik voordoet.
Maar, denkend aan de *schoolsituatie*, moet je toch wel enige kriteria naar voren brengen. Ik heb een paar aantekeningen gemaakt.
Ik denk dat het goed zou zijn, dat je bij een spel denkt aan een didaktisch doel. En in verband daarmee, moet zo'n spel ook een zekere oefenwaarde hebben.
Ja, nou ja, het nadeel is, als je dit soort kategorieën gaat aanbrengen, dan zit je het spel weer van diverse kanten te bekijken. Op een gegeven moment heb je dan alle elementen bij elkaar en je légt 't aan de kinderen voor en ... ze lusten het spelletje niet. Dus: je grijpt het spel toch niet altijd met dergelijke karakteristieken.

at: Je kunt in ieder geval zeggen dat een aantal spelen geweldig aanspreekt. Neem bijvoorbeeld het bekende spel *solitaire*, met pinnetjes waar je overheen moet springen.

solitaire

[1]) Uit: *'Kien'* 1, Malmberg, 's hertogenbosch.

Bovenstaand solitairebord bevat 37 gaatjes, waarin pinnetjes. Het middelste pinnetje wordt eruit gehaald.[1])
Een pinnetje kan verplaatst worden door over een ander heen te springen naar een leeg gaatje, net als bij dammen. Het pinnetje waar overheen is gesprongen, wordt weggehaald. Er mag alleen horizontaal of vertikaal worden gezet. Niet diagonaal. Ook een kettingsprong – een reeks opeenvolgende sprongen – is mogelijk.
De speler moet het spel zodanig beëindigen, dat hij slechts één pinnetje in het middelste gaatje overhoudt.

at: Dat staat bij ons altijd op tafel. Op zichzelf is het heel interessant te weten dat er een oplossing is, een strategie, zodat je op het eind uitkomt. Er zijn veel mensen, die het spel gaan spelen, terwijl ze een algemene strategie vermoeden. Ze vinden het spelen zélf echter leuk en zoeken naar lokále strategieën. Ze willen niet diepgaand de algeméne oplossing onderzoeken. Want: heb je die gevonden, dan kun je 't spelletje niet meer spelen, dan is het spelletje waardeloos geworden. Gelukkig ligt de oplossing ver weg. Je kunt in gemoede tijden blijven rommelen. Je komt dan niet gauw verder dan twee pinnetjes.
Er zijn ook mensen die willen per se de oplossing hebben. Hébben ze de oplossing, dan is 't spelletje af.
Nu heb je voor het onderwijs het *pak weg*-spelletje met de luciferspinnetjes.
Een uiterst mooi spelletje[2]), omdat je er enorm veel ruimte in hebt om vooruit te denken. Het is ook dáárom mooi, omdat je de oplossing terugredeneerd kunt vinden. Er zit, wiskundig gezien, een elegante oplossing achter. Daarom heeft dit spel ook een zekere didaktische waarde.
Bij *solitaire* is 't allemaal wat strijdig: het spel heeft (waarschijnlijk) een hele mooie oplossing, die je in verschillende boeken zult kunnen vinden, maar je kijkt er liever niet naar. De oplossing staat een beetje buiten het spel.
Bij het *pak weg*-spel is het spél veel nauwer verbonden met een soort algemene strategie. Rekreatief, maaar het heeft ook een andere waarde. Een soort puzzel, waar je kort mee bezig bent, met een elegante oplossing. Ook

pak weg

spullen
20 Lucifers.

begin
De 20 lucifers liggen op één hoop tussen de beide spelers *a* en *b*.

regels
- De spelers nemen afwisselend lucifers van de hoop.
- Per beurt neemt elke speler *tenminste* één en *hoogstens* drie lucifers weg.

doel
Degene, die de laatste lucifer oppakt, heeft verloren.

bedoeling
Speel het spel enige malen.
Begin afwisselend.
Noteer de winsten en houd er rekening mee wie begint.
Kunt u een strategie bedenken zodat één van beiden altijd wint?
Bedenk eventueel variaties en uitbreidingen.

dáárom elegant, omdat de oplossing bruikbaar is bij een heleboel andere dingen.

gj: Ik heb ook een voorkeur voor dit *pak weg*-spel. Dat komt omdat ik vanuit het onderwijs redeneer. Dan denk je aan een didaktisch doel. Je hebt hier een kombinatie van rekenen – stiekem hou je dat tóch in het oog – en een achterliggende strategie. Waarbij je ook nog de mogelijkheid hebt zó te variëren dat het spel onherkenbaar wordt, maar in principe hetzelfde blijft. Je kunt de kinderen oplossingen laten generaliseren. Belangrijk bij dit spel vind ik verder dat de strategie háálbaar is voor kinderen. Ze kunnen het thuis gaan doen met hun vader en moeder.

ps: Bepalend voor een spel is het onvoorspelbare, het onverwachte. Dat zie je ook als je naar een spel kíjkt. In het voetballen zit ook duidelijk het element van het onverwachte. Je kunt niet alles tevoren programmeren. Het leven is nu, zeker in vergelijking met vroeger, veel sterker geprogrammeerd. Veel dingen gebeuren niet meer onverwachts. Het is veelal meer voorspelbaar geworden. In bijna alle

[1]) Foto en beschrijving uit: Van Delft, Pieter en Jack Botermans: *'Spelen met puzzels'*, amsterdam 1978.
[2]) Beschrijving te vinden in: De Moor, E. en A. Treffers: *'De laatste les'*, *iowo*, utrecht 1975.

spelen die kinderen aantrekkelijk vinden, zit dat onverwachte. Ze weten niet wat er de volgende sekonde gaat gebeuren.
Vanmorgen vond ik een uitspraak van Georges Duhamel: 'De aardigheid van het spel verzet zich tegen elke analyse of logische interpretatie.'
Ik denk dat daar wel wat in zit.
Als je een spelletje ontwerpt en je legt 't aan de kinderen voor, dan sta je vaak voor verrassingen, ook al doe je 't reeds jaren! Tevoren weet je het niet. Wat maakt nu een spelletje als *drie op een rij* al dan niet aantrekkelijk? 't Kan best zijn dat kinderen er niets aan vinden. Ik weet het niet. Het is niet uitgeprobeerd.

gj: Ik denk dat heel belangrijk voor een spel is, dat de aktiviteit een *natuurlijk einde* heeft. Een variatie bijvoorbeeld van het *pak-weg*-spel is: wie 't eerst *bij honderd* is.

naar honderd

Speler *a* begint en noemt een getal. Hoogstens tien. Minstens één. Bijvoorbeeld 8.
Speler *b* noemt een getal. Hoogstens tien. Minstens één. Voegt dat bij het eerste getal. Bijvoorbeeld 9. Dus: $8 + 9 = 17$.
Speler *a* voegt weer toe. Bijvoorbeeld 6. Dus: $17 + 6$.
Wie 't eerst 'honderd' zegt, heeft gewonnen.

gj: De kinderen doen dit spel bizonder graag. Ik heb het spel vroeger van een oom gehoord. Hij vertelde, dat 't voor de oorlog in de treinen gespeeld werd. De eerste keer won jij, en dan kreeg je een gulden. Maar tegen de tijd dat je bij het eindstation was, had de ander een zak vol guldens van jou gewonnen.
Later herkende ik dat het een variatie is van het *pak weg*-spel met de lucifers: je moet steeds aanvullen tot een bepaalde waarde.
Ik heb het spel veel gedaan in de middelste en hogere leerjaren. Het is een afgerond geheel. Het is op een gegeven moment uit. Je kunt het nog een keer doen. Iedereen kan meedoen. En ... je kunt de getallen variëren. De kinderen vermoeden dat er een strategie is. Er ontstaan dan twee groepen.

Eén groep denkt: er is iets aan de hand. Dat schrikt hen af. Ze hebben het idee dat ze tegen iets aanzitten dat ze niet snappen en dat ze eigenlijk wel zouden móeten snappen. Heel vreemd! Sommige kinderen wenden zich er dan vanaf.
Een andere groep gaat de strategie zoeken. Maar ... ze blijven dan vaak hangen op die 89. Ook in de hogere leerjaren. Ze ontdekken op een gegeven moment dat als ze 89 zeggen, ze dan gewonnen hebben. Dan denken ze dat ze de logika van het spel doorhebben.

jn: Bij studenten op de *pa* is het net zo. Sommigen ontdekken dat getal 89 ($100 - 11$). De meesten komen niet verder.

gj: Ook ouders. Tijdens een ouderavond in veghel had ik de ouders in groepjes verdeeld. Ze hebben zich wezenloos gerekend. Eén groepje kreeg ik trouwens helemaal niet meer terug. Ze wilden het per se vinden. Maar ze vonden 't niet.

jn: Soms zitten er ook dingen achter, waarop ze helemaal niet zijn voorbereid. Het oplossingsprincipe ligt buiten het gezichtsveld. Bijvoorbeeld een spel met *drie dobbelstenen*.

drie dobbelstenen

Drie dobbelstenen waarop de getallen van één tot en met achttien verdeeld zijn. Als volgt: dobbelsteen nr 1: 1, 2, 9, 14, 15, 16; dobbelsteen nr 2: 3, 4, 5, 10, 17, 18 en dobbelsteen nr 3: 6, 7, 8, 11, 12, 13.
Op dobbelsteen nr 1 staat één streepje onder een getal, bij dobbelsteen nr 2 twee streepjes, bij dobbelsteen nr 3 drie streepjes. Ze zijn dus van elkaar te onderscheiden.
De eenheidsblokjes van het *mab*-materiaal kunnen als dobbelstenen fungeren.
De dobbelstenen worden geworpen en de resultaten per dobbelsteen worden geboekt.
Welke dobbelsteen wint?

jn: Na een voldoend aantal spelletjes blijkt dobbelsteen nr 1 op den duur te winnen van dobbelsteen nr 2, nr 2 wint op den duur van nr 3. En ... nr 3 wint op den duur van nr 1. Hoe kan dat? Ik sta dan voor een gedachtenknoop.[1])

Soms heb ik het gevoel dat er bij kinderen ook zo'n sprong is, bijvoorbeeld naar die 89.

[1]) Zie voor een oplossing: Scholten, P.: *'Spel ernstig genomen'*, op pag. 77 van dit bulletin.

Je ontdekt dat je met een nieuw principe te maken hebt gekregen.

gj: Ik heb me wel eens afgevraagd: waarom gaan de kinderen tóch niet door als zo'n denkknoop optreedt? Zelf heb ik het idee dat het ene kind vermoedt dat het andere kind het spel verder doordacht heeft, waardoor het zelf geen kans meer maakt. Z'n winstkansen zijn te klein geworden.

at: In een situatie waarin je met elkáár iets moet doen, zijn er veel faktoren die je belemmeren door te denken. Als je je vijf minuten zou kunnen terugtrekken, zou je de oplossing makkelijk kunnen vinden. Maar in een situatie waarin je in een kompetitie naar een oplossing moet zoeken, lukt het vaak niet.

gj: Als ik met mijn buurjongetje het *pak weg*-spel speel, gaat het eerst heel gewoon. Later vermoedt hij dat hij erin wordt genomen. Hij loopt dan letterlijk weg. Hij heeft gelukkig nog een primitief gedrag en zegt: 'Ik ga buiten spelen.'

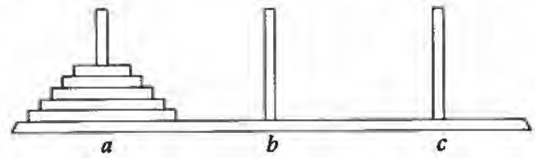
at: Als je in een groepje tegen elkaar speelt, is de kans aanwezig dat de één de strategie veel eerder ontdekt dan de ander. Iemand moet dan tegen zijn verlies kunnen. Als je verliest, komt dat omdat een ander veel handiger speelt. Dat blokkeert! Je hebt dat altijd in de kompetitiesfeer. Je hebt natuurlijk ook spelen, waarin je niet tegen een ander speelt, maar tegen materiaal. Een prachtig voorbeeld hiervan is *de toren van hanoi*.

links: Ger Janssen; rechts: Jan Nieland

de toren van hanoi

spullen
Een plankje met drie pinnen en vijf schijven (zie afbeelding).

begin
De toren is opgebouwd als in de afbeelding:



spelregels
- Per zet mag slechts één schijf van een pin naar een andere pin verzet worden.
- Alle pinnen mogen gebruikt worden.
- Er mag nooit een grotere schijf op een kleinere geplaatst worden.

doel
De toren van pin *a* moet weer op pin *c* opgebouwd worden.

bedoeling
Speel het spel om beurten en noteer het aantal zetten dat u nodig heeft.
Is er een minimum aantal zetten?
Bedenk eventueel variaties en/of uitbreidingen.

opmerking
Het spel kan ook gespeeld worden met munten en drie stippen op een vel papier. Of met bekertjes.[1])

at: Als je het materiaal neerzet op een bijeenkomst, op een feestje, en iemand begint er per ongeluk mee, dan is al gauw een grote groep mensen de hele avond zoet. Je speelt tegen materiaal en je komt steeds verder. Daardoor ben je rustiger. Eventueel kan een ander met je meedoen. Dan speel je sámen tegen het materiaal. Ik denk dat dit, didaktisch gezien, erg belangrijk is. En natuurlijk helemaal als er, wiskundig gezien, een belangrijke denkprocedure achter zit: iets van induktief denken, iets van analogieredeneren.

jn: Bij kinderen heb ik ook vaak gezien dat ze zich willen verliezen in het spel. Zó, zonder meer! Ze hebben dan helemaal geen belangstelling voor een wiskundige analyse. Je ziet

[1]) Beschrijving te vinden in: De Moor, E. en A. Treffers: *'De laatste les'*, *iowo*, utrecht 1975.

het bijvoorbeeld bij een trommeltje waarin vier kaartjes liggen. Iedere keer mogen ze er twee uitpakken. Soms kunnen ze er eindeloos mee bezig zijn. De analyse van 'hoeveel kombinaties van twee kun je uit het trommeltje halen?', staat heel ver van hun bed. En je kunt ze er ook haast niet toe brengen.
Hetzelfde merk ik op de *pa*. Studenten verliezen zich in het spel en vinden het vervelend als je hen dwingt tot een analyse van de zaak. Er is een groep die het niet wil. Er is een groep die het wel eens wil horen. Er is een groep die erop gebeten is de analyse te horen. Velen van de tweede groep vallen af als ze merken dat het toch wat moeilijk ligt.

spel en puzzel
at: Het *pak weg*-spel met de luciferspinnetjes begint eventjes als spel. Schijnbaar! Maar het wordt een puzzel. Het is bizonder aantrekkelijk als iets vanuit een spél begint. 't Lijkst alsof je ruimte hebt. Je kunt een oplossing proberen te zoeken.
Bij *de toren van hanoi* begin je wat te proberen. Een soort spelsituatie. 't Lijkt alsof je van alles en nog wat kunt doen. Dan merk je: er zijn allerlei beperkingen. Je denkt: er ís iets waardoor ik het kan vinden, een soort regel, een algemene oplossing. Het begint dus in een spelsituatie en eindigt in een puzzel.
Denk ook aan dat spel van: wie noemt het eerst *honderd*? Dat begint als spel. Maar... bepaalde mensen blijken steeds te winnen. Er moet dus iets uit te halen zijn. Er zit iets áchter. Dan wordt het een puzzel en die kun je oplossen. Dit is een heel belangrijke kategorie: schijnbaar onschuldig beginnen als spelletje, tot je merkt dat er iets algemeens achter steekt.

ps: Bij sommige kinderen werkt die wetenschap belemmerend. Als er een algemene strategie is, dan bestaat de kans dat de ander 't iets eerder ontdekt dan jij en dan is de lol eraf.

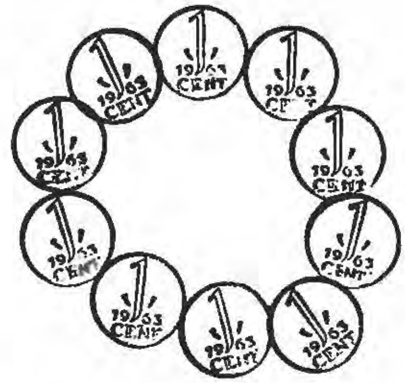
jn: Je hebt hier met een speciale kategorie spelen te maken. Spelen die vanaf een bepaald moment dood zijn omdat het inzicht aanwezig is. Je kunt het hoogstens nog een keer gebruiken om een ander te flessen.

at: Nog even over die *toren van hanoi*. Misschien is het toch geen spel, maar een puzzel. Je denkt in het begin dat je vrijheden hebt. Al gauw merk je dat je die vrijheden niet hebt, dat je een bepaalde procedure moet volgen om de oplossing te vinden. 't Is een puzzel, want je hebt er geen vrijheden in.

weg cirkel

spullen
Tien centen.

begin
De centen liggen in cirkelvorm, zodat elke cent twee andere aanraakt:



regels
- De spelers zijn afwisselend aan de beurt.
- U moet of één of *twee elkaar rakende* centen wegnemen.

doel
Wie de laatste wegpakt, heeft gewonnen.

bedoeling
Speel het spel een aantal malen en noteer de winsten.
Houd rekening met wie er begint.
Kunt u een strategie bedenken zodat één van beiden altijd wint?
Bedenk eventueel variaties.[1])

at: Bij het spel *weg cirkel* zit je ook dicht tegen een puzzel aan. Maar het heeft toch meer van een spel. Ook omdat je tegen elkáár speelt. En het is niet zo duidelijk wat je moet bereiken. Het is lang niet zo duidelijk voorgeschreven als bij *de toren van hanoi*.

ps: Elk kind dat met *de toren van hanoi* begint, weet al uit het materiaal dat er een bepáálde oplossing is, die al puzzelend gevonden kan worden. Als een kind aan het spel *weg cirkel* begint, heeft het in het begin helemaal

[1]) Beschrijving te vinden in: De Moor, E. en A. Treffers: *'De laatste les'*, *iowo*, utrecht 1975.

Piet Scholten in de time out

niet door dat er een bepaalde strategie is waardoor het kan winnen. Dat merkt het pas al werkend. En dat onverwachte, dat onvoorspelbare maakt het verschil uit tussen spel en puzzel.

at: Door de opdracht bij *de toren van hanoi* is duidelijk dat je aan iets moet voldoen, waaraan je kúnt voldoen. 't Doel is duidelijk bekend. Alleen: je moet het nog proberen te vinden.
Op het *weg cirkel*-spel krijg je in de loop van het spel meer greep. Eerst een beetje, later meer! Sommigen hebben het op den duur door. Anderen niet.
Dat geldt ook voor *solitaire*: op den duur kun je toch strategieën toepassen waardoor het wat beter gaat.
Veel spelen die dicht bij puzzels zitten, zijn op een gegeven ogenblik uit. 't Spelkarakter is dan weg.

ps: Door met dobbelstenen kansen in te bouwen, zijn toch weer allerlei variaties mogelijk.

at: Kinderen moeten op school ook met puzzels in aanraking komen. Ze leren dan dat je iets niet zomaar inéén ziet en dat je dan knap bent. Soms moet je zoeken. Eigenlijk moet iedereen zoeken om iets te vinden. Kinderen die geen probleemgeoriënteerd onderwijs hebben gehad, denken: sommige mensen zijn heel knap, die zien de oplossing meteen; ik zíe 't niet, dus kán ik het niet. Die puzzelhouding: je moet maar 'es wat proberen, verstandig proberen, hoort op school ontwikkeld te worden.

schaken
gj: Bij schaken heb je al heel snel dat de ene beter is dan de andere. In zo'n spel als waarmee we begonnen – *drie op een rij* – heb je dat niet. Er zit wel een strategie in, maar ieder doorziet ieders strategie. Daarom blijft het wat ontspannend. Maar bij schaken ontwikkelt de een zich veel sneller dan de ander. De lol is er dan af als je steeds met z'n tweeën schaakt.

at: Vorige week las ik een verhaal over een jonge hoogleraar uit utrecht. Natuurkunde. Op zijn vakgebied briljant. Maar ... hij kan heel slecht schaken. Hoe komt dat? Iedereen denkt dat deze man uitstekend zou moeten kunnen schaken. 'Wel', zegt hij, 'ik denk dat het komt omdat ik een natuurkundige ben en eigenlijk altijd geneigd om 'es wat te doen en dan te kijken wat er gebeurt. Zo schaak ik ook.'
Op den duur ga je zo fout. Je moet langs de lijnen van de teorie lopen, anders ga je de boot in. Deze man is echt een empirisch schaker. En veel mensen zullen dat met strategiespelen ook hebben: maar 'es kijken wat er gebeurt.

spelletjes met logiblokken
at: Er is een kategorie spelen die mij in hoge mate stoort: de zogenaamde wiskundige spelletjes. Ik denk dan aan spelletjes met *logiblokken*: de spelletjes met één verschil, enz. Het is verlakkerij om dit spelletjes te noemen.

spel met één verschil

Logiblokken zijn blokken die onderling verschillen in kleur (rood, blauw, geel), vorm (rechthoek, vierkant, driehoek, cirkel), grootte (klein, groot) en dikte (dik, dun).
Bij het *spel met één verschil* moeten de blokken aan elkaar gelegd worden, met als voorwaarde dat ze op precies één eigenschap moeten verschillen.
Voorbeeld:

.... ← klein, rood, cirkel dik →
klein, blauw, cirkel, dik →
klein, blauw, vierkant, dik → ...
enz.

ps: 't Zijn geen oefenspelen. Bij een oefenspel is het spel de verpakking. Meestal is het toch zo dat je zegt: ik wil dit of dat oefenen met de kinderen, ik zoek er een spel bij zodat het oefenen wat gemotiveerder verloopt. Bij logiblokken is het juist andersom: vanuit het materiáál moet gespeeld worden.

jn: Tot op zekere hoogte is het algemeen. Dat spelletje met logiblokken is echt een kennismakingsspelletje. En die kennismaking kan plaatsvinden langs de weg van het spel.

at: Ik heb er bezwaar tegen dat het spelletjes genoemd worden. Ik denk nu – daar zit het woord spel ook in – aan het *driespel*, het *vierspel*, het *vijfspel*. Eerlijk gezegd, vind ik dat geen spelen. De regels zijn zo star.

driespel

noteren we als 1

noteren we als 2

noteren we als 1 0

noteren we als 1 1

noteren we als 2 1

noteren we als 1 0 0

enz.

Dus: het noteren van aantallen in het drietallige stelsel.

gj: Het dominospel is wél een spel. Wat is dan het verschil?

at: Het gemotiveerde, het wedstrijdkarakter en de enorme ruimte die je er binnen hebt.

gj: Het *spel met één verschil* is een vorm van domino, hè? Je hebt blokken die al dan niet passen en je mag aan twee kanten aanleggen. Wat is het kenmerkende verschil tussen die twee soorten domino?

at: Ik denk dat het in het algemeen bij dit soort dingen is, dat het ene veel meer opgelegd is, door volwassenen, vanuit de wiskunde. Het is minder aantrekkelijk. Ik weet wel: er

links: Piet Scholten; rechts Adri Treffers

zijn grensgevallen. Het *driespel* vind ik al óver de grens. Dat vind ik echt helemaal geen spel meer!

spelletjes en onderwijs

at: Als je spelletjes in het onderwijs gebruikt, dan kunnen de doelen liggen in de *oefensfeer*. Er zijn enorm veel oefenspelen: memoriseren, handig rekenen (door doolhoven heenkruipen), enz. Buiten het oefenen kom je al gauw terecht bij de *kansspelen*: er zit iets van oefenen in, maar toch komt er nog iets bij, iets van strategie, van handig naar bepaalde dingen zoeken. En in de derde plaats heb je dan de zuivere *strategiespelen*, waaruit het kanselement vrijwel geëlimineerd is.

jn: In de rekenboekjes voor de basisschool zitten veel traditionele oefenvormen. Daarin kun je geen elementen van onderzoek en kreativiteit herkennen. Het zijn eenzijdige oefenvormen. De vraag is: kun je daarin terwille van het kind variatie aanbrengen? Er ontstaat dan door het spel een zekere verkinderlijking of vermenselijking van oefenvormen.
Spel is een oefenvorm náást andere oefenvormen. Ik merk bij m'n studenten wel eens, dat ze de spelletjes zó bevoordelen, dat ze in hun gedachten de traditionele sommetjes schrappen. Daarvoor moet je ook oppassen!

ps: Bij strategiespelen gaat het volgens mij vooral om een stukje attitudevorming bij kinderen: het leren proberen, het leren opnieuw beginnen, van je eigen fouten leren, planmatig leren werken, enz. Deze dingen zijn waarschijnlijk transferabel naar andere gebieden. Ze worden hier vallend en opstaand geleerd.

at: Al spelend raken de kinderen gemotiveerd, waardoor ze iets leren, iets oefenen. Deze motivatie (iets leuk vinden om te doen) heeft tot gevolg dat kinderen het heel lang kunnen blíjven doen. Ze worden er veel minder moe van. Een voorbeeld is het bekende televisiespel van Maartje van Weegen.

televisiespel

Kies willekeurig een getal onder de duizend (bijvoorbeeld 306).
Kies zes willekeurige getallen onder de honderd (bijvoorbeeld 2, 6, 8, 10, 34, 45).
Probeer met deze getallen zo dicht mogelijk bij 306 te komen.
Voorbeeld: $34 \times [[\{(8 + 10) : 2\} + 45] : 6] = 306$.

at: Het is verbazingwekkend dat het bijna altijd lukt. Als je één ernaast aksepteert, dan red je het. Waarom doe je 't?
Omdat het een kompetitie-element heeft: je kunt van een ander winnen, je kunt 't getal zélf misschien bereiken. En, om dat te doen, moet je veel rekenen: kreatief rekenen, kombineren.
Je leert er wat van. Je moet uit je hoofd rekenen. Je moet handig kombineren. 't Is belangrijk dat kinderen leren fleksibel met getallen om te gaan en basisoperaties uit te voeren. En dat ze dit zo snel mogelijk moeten doen. Het is een oefenspel, met een duidelijk doel.

gj: Volgens mij is 't doel voor de kinderen: het spel zélf. In de handen van de onderwijzer is het spel een middel.

jn: Daarom is het ook belangrijk de doelstelling die je hebt met een spel, over te brengen naar de kinderen. Dan kan het nóg zijn dat het spel zodanig gaat overheersen dat ze die doelstelling over het hoofd zien.

gj: Is dat zo? Stel, dat je het spelletje doet, wie het *eerst bij de honderd* is. En je zegt dan tegen de leerlingen: het doel is eigenlijk dat jullie de strategie gaan doorzien, dat jullie de overstappers (over de tientallen heen) goed leren kennen. Daarmee is het spel voor de kinderen wat geïnfekteerd!

at: Soms mag er een onderscheid blijven. Bij het *televisiespel* is het doel voor de kinderen, zo dicht mogelijk bij het eerstgekozen getal te komen en om dat zo snel mogelijk te doen. Het doel voor de onderwijzer is, dat dáárdoor 't een en ander geoefend wordt.

gj: Moet je dat bewúst maken bij kinderen?

at: Dat hóeft niet.

Kunnen we oefenspelen en strategiespelen duidelijk van elkaar afbakenen? Hebben goede oefenspelen niet steeds strategische aspekten in zich?
jn: Soms heb je oefenspelen en dán blokkéren de strategische momenten het oefenspel als oéfenspel. Neem bijvoorbeeld het honderdveld, waarin iedere keer negen bijgeteld moet worden. De leerlingen hebben al gauw in de gaten dat ze op de volgende regel steeds één stapje terug moeten. Het bijtellen van negen is niet meer aan de orde, omdat ze een ruimtelijke strategie hebben ontdekt.
Heel opmerkelijk vind je iets dergelijks bij het ganzenbordspel. Voor zover mij bekend, is het één van de eerste spelen die na de oorlog gepropageerd zijn door het nutsseminarie. De bedoeling van dit ganzenbordspel was, dat de kinderen zouden oefenen in optellingen tot honderd: iedere keer eenheden bijtellen. Wat bleek? De kinderen gingen dóórtellen. Het ganzenbordspel leent zich daarvoor. Je realiseert je niet eens dat je nu op 63 staat. Je maakt in ieder geval niet het sommetje 57 + 6. Je hebt hier dus een bijstrategie, waardoor je aan het beoogde oefendoel voorbij schiet.

at: De laatste tijd zijn er veel uitstekende oefenspelletjes verschenen. Ook in nederland. Ik vind dat een enorme winst voor het rekenonderwijs.

jn: Ik wil iets vertellen over een ervaring tijdens een applikatiekursus. Ik legde de mensen een spelletje met drie dobbelstenen voor. Met drie dobbelstenen kun je een getal gooien.

777

Werp drie dobbelstenen. Stel uit de gegooide stippen een getal samen.
Gooi nog een keer. Stel weer een getal samen.
Tel beide getallen op. Probeer een uitkomst te krijgen die zo dicht mogelijk bij 777 ligt.

Voorbeeld: eerste worp ⚁ ⚄ ⚃
tweede worp ⚀ ⚁ ⚅

Geschikte getallen:
$$\begin{array}{r} 524 \\ 261 \\ \hline 785 \end{array} +$$

jn: De mensen gingen met dit spel aan de gang. De meesten vonden 't leuk en aardig. Een paar kursisten zagen het probleem niet zo goed zitten. Na een kwartiertje vroeg ik: kunnen we er iets mee doen in het onderwijs? Mág er in de klas trouwens gespeeld worden: als middel om te leren? Sommigen staan er dan toch, terwijl ze net hard gerekend hebben met dat spel, negatief tegenover.
Een ervaring met *'Getal in beeld'* is ook dat de oefenspelen maar door een gedeelte van de mensen gebruikt wordt.

at: Ze zouden ook meer in het leerlingenmateriaal ingebouwd moeten worden. Als het alleen in de handleiding staat, denken velen dat ze 't ook wel kunnen laten.

gj: Je moet het aan de andere kant ook overlaten aan het initiatief van de onderwijzer.

at: Ze moeten wel op het spoor gezet worden. Ze moeten er het beláng van inzien. Tijdens een kursus is bijvoorbeeld het *televisiespel* van Maartje van Weegen aan de orde gekomen. De meeste mensen kenden het spel. Vanuit de kursus geïnspireerd, gingen ze het spel in de klas doen. Toen pas raakten ze entoesiast over de oefenmogelijkheden. Zélf waren ze niet op het idee gekomen.

jn: Enige huiver is overigens wel te begrijpen. De effektiviteit van veel oefenspelen is bizonder klein. Onderwijzers maken met recht een zeker voorbehoud.

vrijdagmiddagaktiviteiten

gj: Een toenemend aantal scholen reserveert de vrijdagmiddag voor allerlei aktiviteiten: kleien, dammen, schaken, spelletjes. Op deze wijze kan vrijdagsmiddags ook *de toren van hanoi* aan bod komen. In een spelletjessituatie, waarin ze ook kunnen pingpongen.

ps: 't Komend najaar hebben we op de onderwijstelevisie een programma over schaken. Onder schooltijd! Ik ben benieuwd of 't opgepakt wordt.

gj: Sommige scholen willen per se geen wiskunde, maar rekenen.
In hun eígen kader moeten ze leren kiezen uit de beschikbare spelletjes. Het gevaar is, dat alle spelletjes op een hoop worden gegooid. 'Zeker schaken in de klas', zeggen ze, daarmee alle spelletjes bij elkaar vegend. Ik denk dat velen onvoldoende inzien, wat de léér-effekten van spelletjes zijn.

at: Van de goede dingen kun je 't makkelijk duidelijk maken. Denk aan het spel van Maartje van Weegen. De waarde is evident.

gj: Teorétisch evident! Toch herkennen ze 't niet!

at: 't Moet ervāren worden!

gj: Velen willen tussen *cito*-toets en grote vakantie best spelletjes doen. Het is immers een goede manier om kinderen bezig te houden.

jn: Ik heb wel eens gedacht aan wat ze in de verenigde staten een shoebox-serie noemen: dozen met opdrachten op het gebied van de science. Het zou niet zo gek zijn om problemen als *de toren van hanoi* in zo'n serie op te nemen.
Spelletjes op de vrijdagmiddag zijn, geloof ik, een tegemoetkoming aan de serieuze onderwijzer, die spelletjes er toch eígenlijk niet bij vindt horen.

gj: 't Is tegen het weekend aan. Het mág! Je kunt de klas door elkaar gooien.

ps: De ouders houden het ook vaak tegen. Wanneer je aan honderd willekeurige ouders zou vragen: 'wat heb je liever: dat je kind breuken kan optellen of dat het kan schaken?', dan zeggen zeventig van de honderd: breuken optellen.

spelkontekst

jn: De vormgeving is erg belangrijk voor een spel: het gebruikte materiaal bepaalt ook of mensen er al dan niet naar reiken, zo is mijn ervaring op ouderavonden.

gj: Ja, ik heb dat gezien bij een tovervierkant met geld: een kwartje, dubbeltje, stuiver, cent. Kinderen vinden dat veel leuker dan met getallen.

tovervierkant

Zet de getallen 25, 10, 5 en 1 zodanig in de vakjes, dat iedere rij, kolom en diagonaal als som 41 heeft.

Je hebt vier kwartjes, vier dubbeltjes, vier stuivers en vier centen. Leg die zo in het vierkant, dat iedere rij, kolom en diagonaal als som 41 heeft.

	10	1	5	25	41
	5	25	10	1	41
	25	5	1	10	41
	1	10	25	5	41
41	41	41	41	41	41

at: Maar als de getallen op káártjes zouden staan, hadden ze 't ook leuk gevonden. Het element van het kunnen oppakken en schuiven is hier erg belangrijk.

jn: Toch speelt het geld ook mee. Het geeft een ekstra aksent.

gj: Het simulatiespel: *winkeltje spelen* en zo! Je hebt vaak dat, wanneer je tegen kinderen zegt: 'denk eens aan geld', dat ze dan ineens de som hebben. Heel merkwaardig.
Er ligt in sommige spelen een soort charme, namelijk dat ze aanleunen tegen een stuk werkelijkheid. Bij winkeltje spelen is dat heel duidelijk. Je hebt ook spelen die verzónnen zijn omdat ze (zogenaamd) iets simuleren: *duikbootje, stratego, monopoly* en – oorspronkelijk – *schaken*.

jn: De manier waarop je een spel of oefenvorm redigeert, is vaak erg belangrijk voor de aanvaardbaarheid van het gegeven. Een voorbeeld. In *'Getal in beeld'*, in de serie relatierekenen, had ik een jonge computer. Hij kreeg twee getallen die hij moest optellen en aftrekken.

computer

Noem twee getallen. Tel ze bij elkaar op en trek ze van elkaar af. Doe hetzelfde bij de nieuw ontstane getallen: tel op en trek af. En ga zo door.
Voorbeeld 4 en 7:

$4+7=11 \quad 11+3=14 \quad 14+8=22 \quad 22+6=28$
$7-4=\ 3 \quad 11-3=\ 8 \quad 14-8=\ 6 \quad 22-6=16.$

jn: Om en om krijg je dus steeds een verdubbeling van die getallenparen. Ik vond 't leuk, het in het kader van een jonge, speelse, wat doorrazende computer te plaatsen. Toen we hierover aan het filosoferen waren en ook de opgave bedachten 'als de som en het verschil van twee getallen gegeven zijn, probeer dan deze getallen te vinden', kwam er veel weerstand van kollega's. Ik mocht er geen computer bij halen. Goed, de tekst is veranderd. Het staat nu zo beschreven: twee getallen, *a* en *b*, kun je eerst gaan optellen en dan gaan aftrekken, dan heb je twee nieuwe getallen; die twee getallen kun je weer gaan optellen en aftrekken en dan krijg je wéér nieuwe getallen. En zo verder.
Volgens mij is deze manier van beschrijven fout. De kinderen kunnen er zich té weinig bij indenken. Ze moeten er een realiteit, een wereldje inzien. De wiskobaswereldjes zijn in dit opzicht erg nuttig.

gj: Konteksten zijn erg belangrijk. De kinderen kunnen zich er iets bij voorstellen. Konteksten roepen een sfeertje op. Maar er is meer aan de hand.

jn: Toen ik in *'Kien'* dat tovervierkant met die geldstukken zag, dacht ik: verrek, da's een aardig idee! Waarom valt je dat nu op? Ik ben al tientallen keren met tovervierkanten bezig geweest. Wel: dat kombineren met geldstukken is iets ekstra's waardoor er een beetje kleur komt aan de zaak. Misschien moet je het thuisbrengen onder de ingrediënten: peper en zout.

ps: Hoe ingewikkelder een spel is, hoe meer kontekst je nodig hebt. Een eenvoudig spel begrijpen de kinderen na één keer voordoen. Je hebt dan geen kontekst nodig. Wordt het wat ingewikkelder, zoals met die a, b, $a + b$, $a - b$, enz., dan heb je een vrij lange aanloop en dus een kontekst nodig.

jn: En in het verlengde van de kontekst is het soms ook de moeite waard aan het gebruikte materiaal te denken. Materiaal kan soms erg veel betekenen. Heb je bijvoorbeeld op een ouderavond iets leuks klaar liggen, een paar gekleurde blokjes, dan stormt de hele groep erop af.

spel en onderwijzer

Wanneer spel een eigen plaats krijgt in het (wiskunde-)onderwijs, wat moet de onderwijzer(es) dan kunnen en kennen? Wat voor vaardigheden en attituden worden dan van hem of haar verwacht? En hoe kan de onderwijzersopleiding daarop voorbereiden?

ps: Een onderwijzer moet van spelen houden. Ik denk dat onderwijzers die zelf veel van spelen houden, ook veel met de kinderen zullen spelen. Bij de oudere generatie onderwijzers zijn er die vinden dat spel en ernst elkaar uitsluiten: de ernst van het onderwijs sluit uit dat je met kinderen speelt. Na schooltijd en in het speelkwartier – let op het woord – mag gespeeld worden. Akkoord! Maar verder niet! Tijdens de opleiding moet het spelen-onder-schooltijd aan de orde komen. Ze moeten zélf ervaren dat ze via spelen kunnen léren. Ze moeten zélf entoesiast worden, spel-minded worden.
Ik heb nog een uitspraak van Huizinga voor 'ernstige' onderwijzers: 'Ernst tracht spel uit te sluiten, maar spel kan zeer wel de ernst in zich omsluiten'.

gj: Tijdens de opleiding moeten de studenten leren een spel te *kiezen*. En ook, wat nog niet is opgemerkt, leren *observeren* tijdens het spel. Het spel biedt daarvoor ruimte. De onderwijzer moet leren te kijken wat er gebeurt. Dat is belangrijk, maar ook erg moeilijk. Wanneer grijp je in? Laat je een strategie zitten als die wordt ondergesneeuwd of pak je hem juist op? Wat doe je, als een kind op een gegeven moment uitvalt omdat het niet naar de strategie wil kijken, er een beetje bang voor is? Of: wat doe je met kinderen die erg prestatiegericht zijn en liever rijen sommen maken dan een spel, omdat ze dan naar hun gevoel eigenlijk niets doen? Hoe pak je dat pedagogisch-didaktisch op?
Ze moeten kinderen ruimte gunnen. Ze moeten leren omgaan met vrijheid.
Er zijn ook onderwijzers die spelletjes verkrachten. Ze doen dan wel spelletjes in de klas, maar je slaat je handen erbij voor je ogen. Zó ijzig! Er blijft dan niets van heel. De onderwijzer heeft het eerst thuis gedaan. Híj kent de strategie en zit dan in de klas te gloriëren.

at: Een student moet zich op de *pa* heel goed *bewust worden* hoe hij tegenover dit soort dingen staat. Als je iets niet leuk vindt, als je ergens een hartgrondige hekel aan hebt, dan moet je ook bewúst kunnen zeggen: ik heb verschrikkelijk de pest aan spelletjes en puzzels. Het zijn namelijk heel emotionele zaken. Ik ken mensen die worden kwaad bij puzzels, die vinden het autoritair, die worden agressief. Vooral als jíj die ander een puzzel geeft: jíj kent dan de oplossing en zet de ander voor het blok. Sommigen doen dat in gezelschap. Onsportief gedrag!

gj: Ik vind voor de opleiding erg belangrijk, niet dat men véél spellen kent, maar dat men de spellen die eventueel in aanmerking komen, góed kent en er ervaring mee opdoet. Men moet op de *pa* een bepérkt aantal spelen doen.

strategie spelen

We beperken ons in dit artikel tot de strategiespelen. Het begrip strategie heeft in de teorie van het spelen een speciale betekenis. We zullen daarop in nevenstaande inleiding kort ingaan. De vraag naar de plaats van strategiespelen in het onderwijs, zal daar eveneens ter sprake komen.
Vervolgens bieden we een verzameling spelletjes aan, geschreven voor de onderwijzer, door hem/haar nog aan te passen en te bewerken voor de leerlingen:
- *spelletjes voor twee of meer kinderen* (2);
- *spelletjes om alleen te doen* (3).

*Aan het einde van dit bulletin (pag. 72 e.v.) geven we enkele achtergronden van de spelletjes die van een * zijn voorzien.*

ED DE MOOR
ADRI TREFFERS

inleiding (1)

strategie
Als in een spel twee spelers om beurten aan zet komen, dan verstaan we onder 'strategie' een voorschrift, dat de speler die aan zet is in staat stelt op elk moment van het spel de voor hem optimale zet te kiezen. Het is dus niets anders dan een beslissingsregel. Deze regel, als hij eenmaal ontdekt is, ontslaat de speler ervan de situatie steeds opnieuw te moeten analyseren. Hij kan zonder echt nadenken doorspelen tot de buit binnen is.
Voorbeelden van 'zuivere strategiespelen' zien we in: *pak weg, weg cirkel* en *nim.*
Het interessante van dit soort spelen is dan ook niet zozeer gelegen in het spelen zelf (hoewel dit aanvankelijk zeker z'n charmes kan hebben), alswel in het ontdekken van de strategieregel. Kent men de regel, dan is de aardigheid er af en kan het spel alleen nog dienen om anderen iets te laten leren van de denkwijzen, die bij het ontdekken van deze regels van pas kunnen komen.
Is het niet mogelijk een dergelijk voorschrift te formuleren, dan zouden we kunnen spreken van 'strategie op korte termijn' of 'halfstrategie'. 'Half-strategische spelen' houden een kombinatie in van bewust vooruit denken en intuïtief verder zien. Voorbeelden: *hex, master-mind* en *schaken.*
De 'kans-strategische' spelen bieden de mogelijkheid, door het gebruik van elementen uit de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, tot een optimale strategie te geraken. Voorbeeld: *dobbelstenenloop.*

bedoeling
Wat willen we met deze strategiespelen in het onderwijs?
Inhoudelijk gezien, komen we op een hoog nivo binnen de wiskunde terecht. Er komt vooral veel 'redeneren' aan te pas, waarmee we geen formele logika bedoelen, doch gewoon het gebruik van het gezonde verstand.
Als voorbeelden hiervan noemen we:
- als ... dan ... redeneringen (deduktie): '*als* deze regel mij vier witte pionnen oplevert, *dan* moeten alle kleuren goed zijn' (*master-mind*);
- enzovoorts-redeneringen (induktie): 'ik kan dit torentje van drie op die pin krijgen, dan kan ik het nieuwe torentje van vier ook verplaatsen' (*toren van hanoi*);
- ontkenningsredeneringen: 'het is niet dit, dan moet het dat zijn';

- omkeringen: 'uit *a* volgt *b*, dan geldt ook: uit niét *b* volgt niét *a*';
- terugredeneren (analyseren): je gaat uit van hetgeen je moet bereiken en werkt dan terug.

Voorafgaand moet al een aantal belangrijke wiskundige aktiviteiten ondernomen zijn, zoals:
- trial and error toepassen (verkennen van het probleem);
- van doen naar denken;
- symboliseren (een notatie bedenken);
- schematiseren (een schema, tabel, diagram, etc., maken);
- relaties zien (zoals bijvoorbeeld: symmetrie);
- het eventueel verwoorden (verslag geven, mondeling of schriftelijk);
- isomorfieën ontdekken (*boter, kaas en eieren* is 'hetzelfde als' *samen 15*).

Het is niet de bedoeling, hierop gebaseerd, een leergang strategiespelen te ontwerpen. Wel is in de praktijk reeds meerdere malen aangetoond, dat ook heel jonge kinderen (zelfs kleuters!) allerlei eenvoudige strategiespelen kunnen spelen en vaak ook de regels kunnen ontdekken. Dat zij daarbij de strategie niet kunnen verwóórden, doet niets af aan het leereffekt.

tips
- Laat de kinderen langzaam wennen aan de werkwijze bij de spelletjes. Begin bijvoorbeeld eens op een vrijdagmiddaguurtje. Doe elke week een spelletje; Overdrijf niet! 't Moet een aardigheidje blijven, maar wel een aardigheidje, waarvan we iets leren.
- Maak eventueel een doos met opdrachtkaarten, die in de klas staat, met spelletjes die de kinderen alleen kunnen doen.
- Zorg ervoor, zelf goed op de hoogte te zijn van de regels van een spel en van de moeilijkheden, die zich voor kunnen doen. Probeer het eventueel eerst eens met een klein groepje kinderen.
- Wees niet bang te erkennen, dat sommige spelletjes voor volwassenen even moeilijk (soms moeilijker) kunnen zijn dan voor kinderen. We leren zelf ook steeds verder!
- Bespreek achteraf de gevolgde strategieën en vraag naar de manieren waarop de kinderen het aangepakt hebben. Voor de laagste leerjaren zal dit niet altijd gemakkelijk zijn. Toch hebben we geprobeerd enkele eenvoudige voorbeelden te geven.
  Doe eerst eens iets met de hele groep, zoals *eerlijk verdelen, oppoten*, etc.
- Druk vooral niets door. Laat een probleem eventueel een tijdje rusten. Zeg de regels niet voor.
- Kies aanvankelijk vooral die spelen, die kort van duur zijn en een doorzichtige struktuur hebben, zoals bijvoorbeeld *blaadjes plukken, kat en muis, drie tegen drie* en *volle bak*.
- Bedenk, dat sommige kinderen faalangst hebben, zodat kwesties als het-willen-winnen gerelativeerd dienen te worden. Er zijn trouwens ook mensen, die een hekel aan spelletjes hebben, zodat dan een negatief effekt zou kunnen optreden. Sluit de emotionele aspekten, die het spel echt tot spel maken, niet uit.
- Maak het spel tenslotte niet dood door eindeloze analysen, zeker als deze analysen niet voor allen haalbaar zijn, zoals bijvoorbeeld in *nim*.

spelletjes voor twee of meer kinderen (2)

1 eerlijk verdelen

kleuterschool/onderbouw
Er liggen vier hopen fiches van verschillende kleuren op tafel.
Van één soort is er duidelijk minder dan van de andere.
De kinderen moeten zorgen van elke soort evenveel fiches te krijgen.
Ze mogen er om de beurt steeds vier pakken.
Het gaat om het leren inzien, dat je eerst zoveel mogelijk van de 'kleine hoop' inslaat.

variaties
Maak twee 'kleine hopen'; maak gelijke hopen; ...
Bespreek met de kinderen waarom ze dit of dat deden.

2 dammen

kleuterschool/onderbouw
De gewone damregels.
Voor de lagere klassen een eenvoudiger bord.
Het gaat om het leren vooruitzien.

variatie
Het bekende *wolf en geiten*.

3 domino

kleuterschool/onderbouw
De gewone regels. Eventueel andere regels bedenken, zoals: het aantal punten moet '1' verschillen.
Laat de kinderen zelf regels bedenken.

4 oppoten

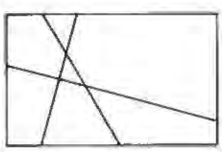
kleuterschool/onderbouw
Laat twee kinderen voor de klas oppoten.
Regels: hele voet, halve, teentje.
Achteraf strategie bespreken.

5 iet-wiet-waait-weg

onderbouw
Laat kinderen in groepjes van twee, drie of vier uitzoeken of je ervoor kunt zorgen, dat je bij dit aftelversje niet overblijft.[1])

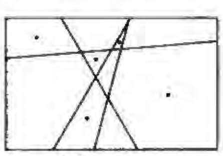
6 kleur-wedstrijd

onderbouw/middenbouw
Twee kinderen nemen beiden een (klein) velletje papier en maken daarop allebei de volgende tekening:

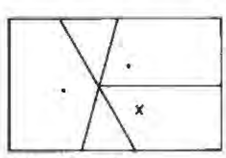


Elk moet de zeven gebieden kleuren met zo weinig mogelijk kleuren. De gebieden moeten wel goed te onderscheiden zijn (landkaart).
Degene, die het minste aantal kleuren nodig heeft, wint.
Voor deze kaart zijn twee kleuren voldoende.

Het even- of oneven-zijn van de knooppunten bepaalt, hoeveel kleuren we nodig hebben.



twee kleuren



drie kleuren

Bespreek de strategie, die de kinderen gevonden hebben.

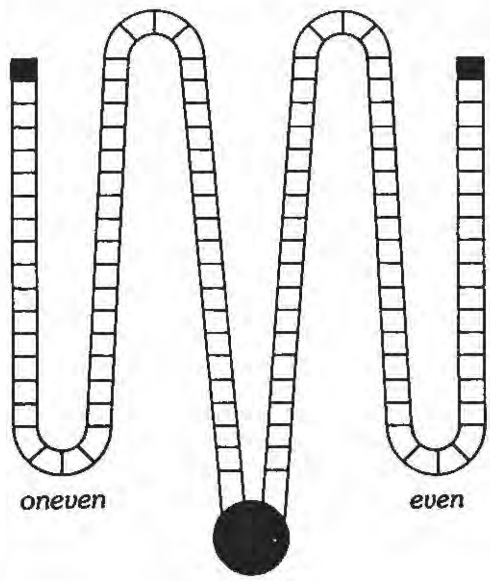
[1]) Zie ook: Gilissen, L. en L. Streefland: *'Afpotten'*, wiskobas-bulletin, jaargang 2 nr 1.

7 vlaggen kleuren

onderbouw/middenbouw
Twee kinderen proberen met drie kleuren zoveel mogelijk verschillende vlaggen te maken.
Als regel afspreken, dat de banen horizontaal dienen te zijn en dat alle drie kleuren gebruikt moeten worden.
Het aantal is 3 x 2 x 1 = 6.
Voor de hogere leerjaren kunnen de regels gevarieerd worden: meer kleuren, kleuren mogen meerdere malen gebruikt worden, enz.
Dit spelletje kan voeren tot het gebruik van het boomdiagram.

8 dobbelstenenloop (1)

kleuterschool/onderbouw



Twee kinderen *a* en *b* gooien om beurten met een dobbelsteen. Als *a* even gooit, mag hij met z'n pion één stapje vooruit. Als *b* oneven gooit, mag hij met z'n pion één stapje vooruit.
De bedoeling is, de kinderen gevoelig te maken voor het begrip gelijke kansen.
Laat ze tevoren raden wie zal winnen.

9 dobbelstenenloop (2)

kleuterschool/onderbouw
Hetzelfde speelplan als in **8**.
Je mag nu zoveel stappen doen als je ogen gooit.
▶ Wie denk je dat zal winnen?
De gemiddelde staplengte voor even is:

$\frac{2+4+6}{6} = 2$; en voor oneven: $\frac{1+3+5}{6} = 1\frac{1}{2}$.

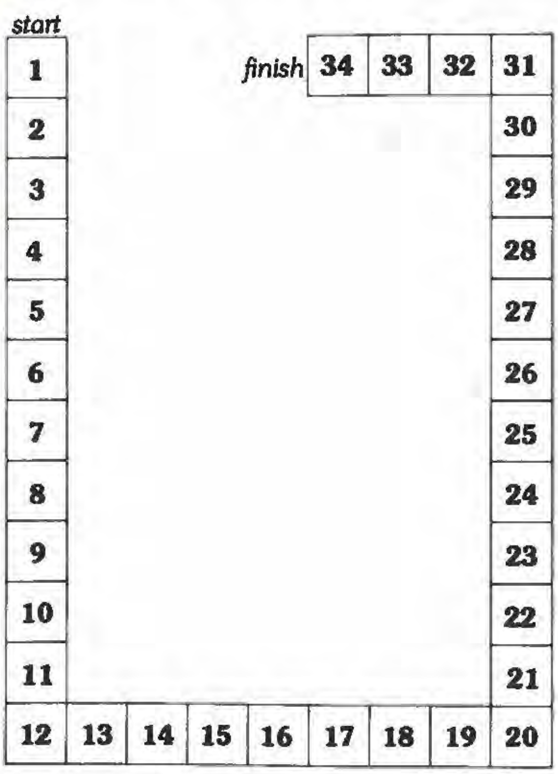
10 dobbelstenenloop (3)

bovenbouw
Hetzelfde speelplan als in **8**.
Nu mag het linkerspoor alleen vooruit als gegooid is: één, twee, drie of vier ogen, en rechts met vijf en zes ogen.
Wie denk je dat het meeste aan de beurt zal zijn?
▶ Wie zal het eerste uit zijn?

De gemiddelde staplengten zijn nu: $\frac{10}{6}$ en $\frac{11}{6}$.

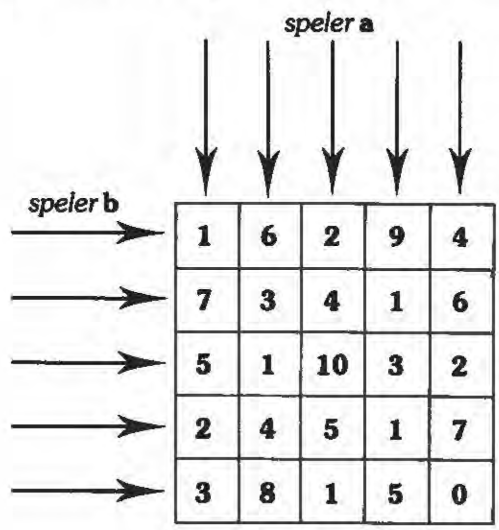
11 dobbelstenenloop (4)*

Materiaal: dobbelsteen en twee fiches (munten).
Spelers *a* en *b* zijn afwisselend aan de beurt.
Speler *a* mag steeds met de dobbelsteen gooien en zoveel stappen doen als het aantal ogen aangeeft. Speler *b* doet iedere keer vier stappen.
▶ Wie heeft de meeste kans om te winnen?
Speel het spel twintig keer, noteer de winsten en verliezen.
Is het resultaat te verklaren?



12 pijlen zetten

midden- en bovenbouw
Een spel voor twee personen.
Gebruik twee pijltjes (potloden, pennen) van verschillende kleur en 25 fiches (munten, knopen).
Speler *a* richt zijn pijl van bovenaf tegen één der kolommen. Speler *b* zet zijn pijl aan de linkerkant tegen één van de rijen. De twee pijlen richten zich op één van de vakjes. Speler *b* bedekt dit vakje met een fiche en noteert het bedekte getal op zijn skorelijst. De pijl van deze speler blijft voor de gekozen regel liggen. Dan verplaatst speler *a* zijn pijl en legt deze tegen een der andere kolommen. Hij bedekt het dan geschoten vakje en noteert de skore. Speler *b* verplaatst zijn pijl naar een andere rij. Bedekt het vakje en schrijft de skore op. Enz. Tot de rijen of kolommen zodanig bedekt zijn, dat verder spelen stagneert. Degene met de hoogste skore wint.[1])



13 raad mijn getal (1)*

hele basisschoolperiode
Speler *a* noteert een natuurlijk getal onder de honderd op zijn papier.
Speler *b* moet dit getal raden. Hij mag alleen maar vragen stellen als:
.... 'Is het getal groter dan getal ....?' ....
Speler *a* mag alleen maar met 'ja' of 'nee' antwoorden.
Speel het spel tien keer. Noteer het benodigde áántal vragen.
Wat is het minimale aantal, dat nodig is?

[1]) Ontleend aan 'Junior Education', maart 1979, Evans Brothers ltd., london.

14 raad mijn woord

hele basisschoolperiode
Twee kinderen schrijven allebei dezelfde lijst van 26 woorden onder elkaar.
Bijvoorbeeld: aap — beer — .... — zee.
De één is vrager en de ander antwoorder. De antwoorder neemt een woord in gedachten.
De vrager:
.... 'Is het maan?' ....
De antwoorder mag alleen antwoorden met: 'ja', 'erboven' of 'eronder'.
Een paar spelletjes tegen elkaar.
Laat de kinderen de aantallen vragen noteren.[1])

15 raad mijn getal (2)

hele basisschoolperiode
Dit keer neemt de antwoorder twee getallen in gedachten (1 — 100).
De vrager mag weer alleen vragen stellen als 'meer dan' of 'minder dan'. De antwoorder zegt 'ja' als het antwoord voor beide getallen bevestigend is.
Voorbeeld: Als de vraag luidt: 'minder dan 30?', en de getallen zijn 12 en 17, dan krijgt hij 'ja'.
Als de vraag is: 'minder dan 30?', en de getallen zijn 25 en 45, dan krijgt hij 'nee'.

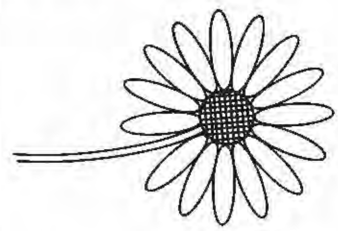
variatie
Je kunt afspreken dat er 'ja' volgt als het 'ja' voor één van beide of voor beide getallen geldt.
Voorbeeld: Als de vraag is: 'minder dan 40?', en de getallen zijn 12 en 20, dan krijgt hij 'ja'.
Als de vraag luidt: 'minder dan 40?', en de getallen zijn 27 en 43, dan krijgt hij ook 'ja'.[2])

16 raad mijn regel

bovenbouw
Dit spel kan met meerderen (vier of vijf) gespeeld worden.
De antwoorder neemt een 'regel' in gedachten (bijvoorbeeld 'allemaal even getallen') en geeft één voorbeeld (i.c. 18, 14, 10). De vragers moeten de regel raden door steeds drie getallen te geven, waarop de antwoorder alleen met 'ja' of 'nee' mag antwoorden.
Zo kan een vrager bijvoorbeeld geven: '11, 7, 3'.
Het antwoord is in dit geval: 'nee'.
De volgende vrager kan daaruit zijn konklusies trekken.
Als een vrager denkt voldoende reden te hebben de regel te kennen, schrijft hij deze op een stukje papier en laat het aan de antwoorder zien. Als het juist is, mag hij de volgende regel bedenken. Is het onjuist, dan is hij af.
Enkele voorbeelden van regels: allemaal deelbaar door drie; allemaal eindigend op twee; allemaal kleiner dan tien; allemaal rest '1' bij deling door vijf; het produkt van twee getallen is het derde getal; ...[3])

17 blaadjes plukken

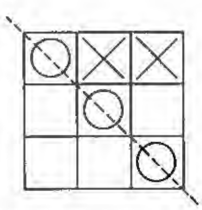
onderbouw



Je mag om beurten één of twee elkaar rakende bloemblaadjes wegpakken. Wie de laatste wegpakt, heeft gewonnen. Symmetrie![4])

18 boter, kaas & eieren (1)

hele basisschoolperiode
Het gewone *boter, kaas en eieren*, onder de spelregel: wie het eerst een rij, kolom of diagonaal heeft bezet, is winnaar.



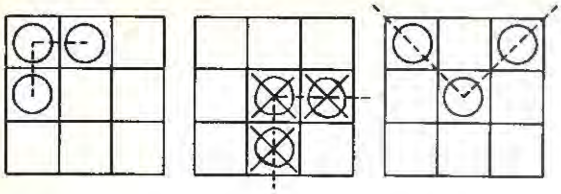
Bij juist tegenspel is dit spel altijd remise.

19 boter, kaas & eieren (2)

hele basisschoolperiode
Om en om rondjes en kruisjes zetten, maar nu is degene winnaar, die drie rondjes of kruisjes

[1]) Naar een idee van Nieland, J. uit: *'Klaar? Ga maar spelen!'*, Malmberg, den bosch.
[2]) Naar een idee van O'Brien, T.C.: *'Solve it!'*, Educational Teaching Aids, chicago.
[3]) Naar een idee van Wason, Peter and Johnson Laird: *'Thinking and reasoning'*, Pinguin Book.
[4]) Een variatie op *weg cirkel*. Zie in dit bulletin: *'Spel ernstig nemen'*, pag. 39.

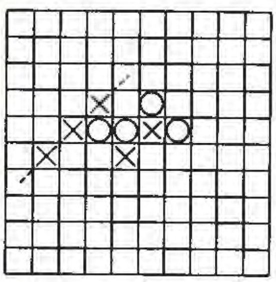
aaneengesloten in een rechte hoek krijgt.
Voorbeelden:



variatie
Weer dit spel, maar nu betekent drie op een rijtje (horizontaal, vertikaal of schuin) verliezen.
Nog eens dit spel, maar nu mag je kiezen of je een rondje of een kruisje zet elke keer als je aan de beurt bent.[1])

20 boter, kaas & eieren (3)

bovenbouw
Speel het spel volgens de genoemde regels, maar op een tien-bij-tien-veld. Winnaar is degene, die drie rondjes of kruisjes op een rij krijgt (horizontaal, vertikaal of diagonaal).



21 drie op een rij (1)

middenbouw

Om beurten zet elk van beide spelers een kruisje door één van de punten.
Wie het kruisje zet, waardoor een patroon van drie aaneengesloten kruisjes ontstaat, heeft gewonnen.
Bij een oneven aantal punten kan de eerste speler altijd winnen.
Hoe zit het met een even aantal punten?[2])

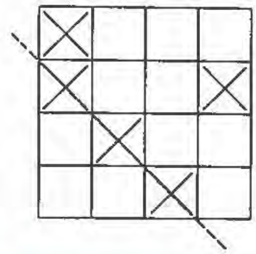
[1]) Naar een idee van O'Brien, T.C.: *'Solve it!'*, Educational Teaching Aids, chicago.

[2]) Naar een idee van Jansen, H.: *'Problematika'*, wiskobas-bulletin, jaargang 4 nr 5.

[3]) Zie ook: Jansen, H.: *'Problematika'*, wiskobas-bulletin, jaargang 4 nr 5.

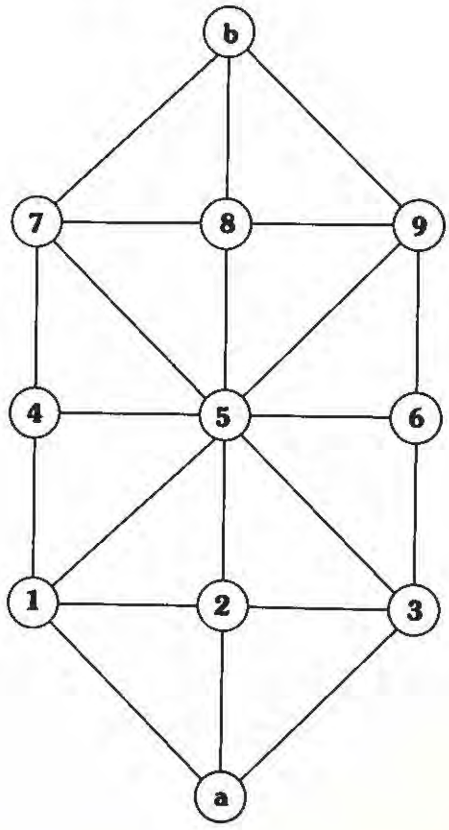
22 drie op een rij (2)

bovenbouw
Neem een vier-bij-vier, vijf-bij-vijf, of zes-bij-zes-rooster.
Zet om beurten een kruisje.
Wie als eerste een horizontale, vertikale of diagonale rij van drie maakt (hoeft niet aaneengesloten), is winnaar.[3])



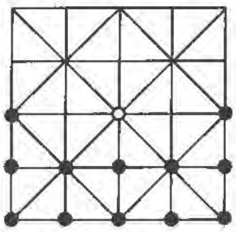
23 kat en muis

Materiaal: drie zwarte en één wit fiche (munten).
Wit (de muis) staat op 5.
Zwart (de kat) staat op *a*, 1 en 3.
Zwart en wit moeten om beurten zetten doen.
Zwart begint. Wit mag in alle richtingen langs een lijn naar een naburige lege plaats zetten.
Zwart doet hetzelfde maar mag *nooit* achteruit.
Zwart wint als wit niet meer kan schuiven. In elk ander geval wint wint.



24 haas & honden

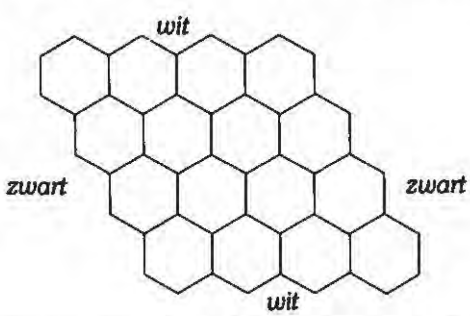
hele basisschoolperiode
Twaalf honden (zwarte fiches) willen de haas (wit fiche) vangen. Zowel de haas als de honden mogen langs de lijnen in alle richtingen bewegen, steeds naar een lege plaats. De haas mag een hond 'pakken' als hij over hem heen kan springen naar een lege plaats.



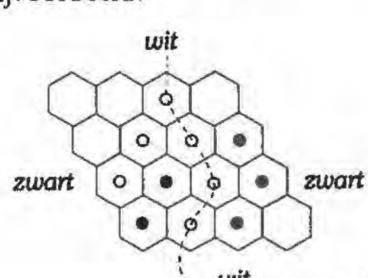
De honden moeten proberen de haas in een zodanige positie te manoeuvreren, dat hij 'vast zit'.

25 hex*

hele basisschoolperiode
Materiaal: acht witte en acht zwarte fiches (munten).
Wit speelt noord-zuid. Zwart speelt oost-west.



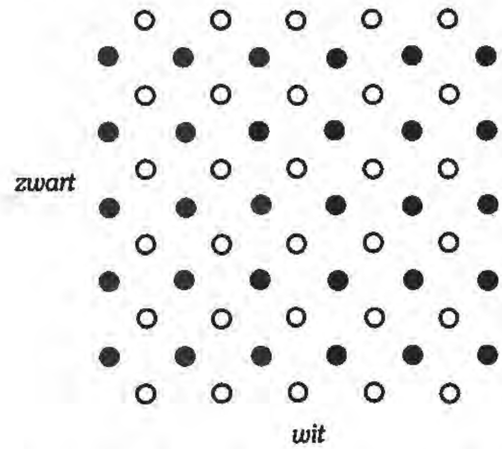
Om beurten leggen de spelers een fiche van hun kleur op het veld. Alleen op vrije velden mogen fiches worden gelegd.
Degene, die als eerste een samenhangende ketting met zijn fiches tussen zijn kanten heeft gemaakt, heeft gewonnen.
Bijvoorbeeld:



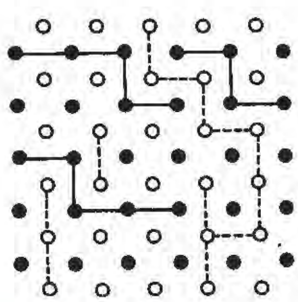
wit heeft gewonnen!

26 naar de overkant

bovenbouw

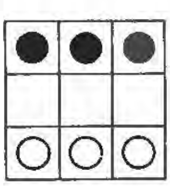


De ene speler moet de zwarte punten, de andere de witte met elkaar verbinden.
Het verbinden moet ook met verschillende kleuren gebeuren.
Per beurt mogen twee naast elkaar gelegen punten door een horizontaal of vertikaal lijntje verbonden worden.
Elke speler moet proberen de beide kanten van zijn speelrichting te verbinden.
Je mag beginnen waar je wilt. Je mag nooit de lijn van de ander snijden.
Voorbeeld, waarin wit wint


[1]

27 drie tegen drie

midden- en bovenbouw



Recht schuiven, alleen in de richting van de tegenstander.
Er mag schuin geslagen worden.
Een speler heeft gewonnen als hij één van zijn fiches aan de overkant heeft gekregen of als

[1] Naar een idee van Martin Gardner.

hij een situatie heeft, waarin de tegenspeler niet meer kan zetten.
Voorbeeld van een begin:

●	●	●
	○	
○		○

	●	●
	●	
○		○

De tweede speler wint altijd.
Variaties zijn gemakkelijk te bedenken (grotere velden, meer fiches).[1])

28 voetballen (1)

hele basisschoolperiode
Een spel voor twee personen. Gebruik een munt of fiche.
De eerste speler zet de bal (munt, fiche) op één van de hokjes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. De tweede speler gaat verder met de bal. Hij mag maksimaal tien hokjes verder. Enz. Tot het fluitsignaal voor het eind van de wedstrijd (100) klinkt.
Degene die 100 bereikt of op een ander balvakje (21, 36, 49, 62, 84) terecht komt, is winnaar.[1])

aftrap

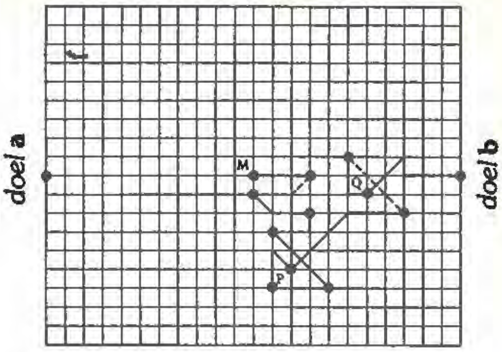
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

tijd

[1]) Ontleend aan 'Junior Education', maart 1979, Evans Brothers ltd., london.

29 voetballen (2)

midden- en bovenbouw



Vanaf de middenstip beginnen de spelers om beurten te zetten. Elke zet bestaat uit drie stapjes recht of schuin. De rand van het veld mag niet geraakt worden, terwijl ook een reeds getekende lijn niet geraakt of gesneden mag worden.
Wel geldt het volgende.
Als een speler zodanig heeft getekend, dat de tegenspeler niet meer verder kan spelen, dan mag hij een nieuwe zet doen van zes stapjes, waarbij hij wel andere lijnen mag snijden (zie figuur).
Wie het eerst skoort, heeft gewonnen.

30 drie op een rij (3)

bovenbouw

●	○	●	○
○	●	○	●

begin

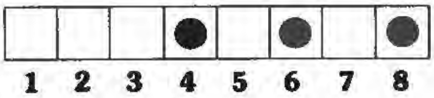
De spelers doen met de witte en zwarte fiches om beurten een zet in horizontale of vertikale richting naar een naastgelegen veld. Wie het eerst drie fiches op een rij heeft (horizontaal, vertikaal of diagonaal) heeft gewonnen.

	●	●	○
○	●		
	○	●	
		○	

De strategie is moeilijk.
Een leuk spel om een kompetitie mee te doen.

31 de laatste zet

bovenbouw



Op 4, 6 en 8 liggen fiches.
Om de beurt moeten de spelers één fiche verplaatsen, steeds in de richting van plaats '1'.
Je mag net zoveel plaatsen naar links als je wilt, ook over bezette.
Je mag niet op een bezette plaats gaan staan.
Wie *niet* als eerste plaats '1' bezet, wint.

32 even – oneven

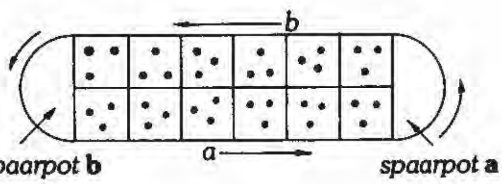
bovenbouw
Leg 13 fiches of lucifers op een rij.
Om beurten één of twee fiches pakken.
Degene die met een oneven aantal fiches eindigt, is winnaar.
Degene die begint, kan winnen. Dit is uit de situaties, die aan het eind van het spel voorkomen, terug te redeneren.[1])

33 samen 15*

hele basisschoolperiode
Materiaal: negen speelkaarten met de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
De negen kaarten worden op tafel gelegd, met de getallen naar boven. Om beurten nemen de spelers één kaart van de tafel. Degene die onder de door hem of haar opgenomen kaarten, er drie heeft die samen de waarde '15' hebben (bijvoorbeeld: 1 + 9 + 5), heeft gewonnen.

34 mancala

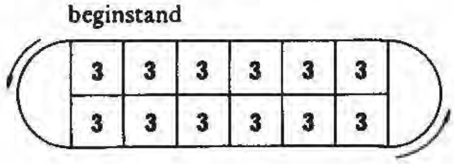
bovenbouw



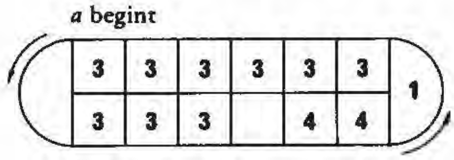
[1]) Naar een idee van Nieland, J.: *'Klaar? Ga maar spelen!'*, Malmberg, den bosch.

a en *b* hebben elk 18 fiches, die als boven verdeeld zijn aan het begin van het spel. Laat *a* bijvoorbeeld beginnen.
Hij neemt uit één van zijn vakjes alle fiches en verdeelt deze over de volgende vakjes, één voor één. De speelrichting is volgens de pijlen. Als het laatste fiche in *a*'s spaarpot komt, dan krijgt *a* nog een beurt. Komt het laatste fiche in één van de vakjes, dan is de ander aan de beurt. *a* moet altijd de spaarpot van *b* overslaan en omgekeerd.
Voorbeeld:

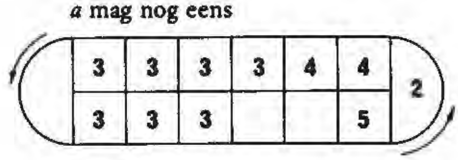
beginstand



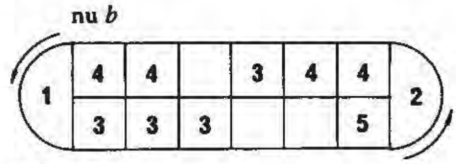
a begint



a mag nog eens



nu *b*

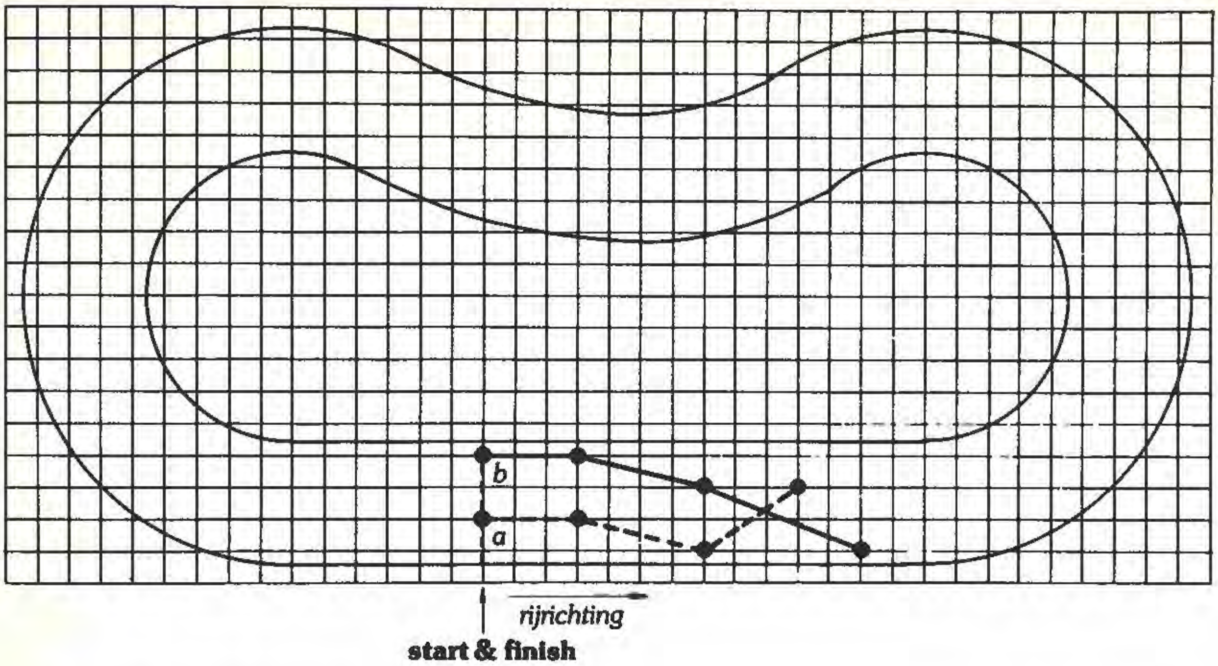


etc.

Het spel is uit, als één van de spelers al zijn vakjes heeft leeggemaakt. Degene, die de meeste fiches in zijn spaarpot heeft, is winnaar.

35 autorace

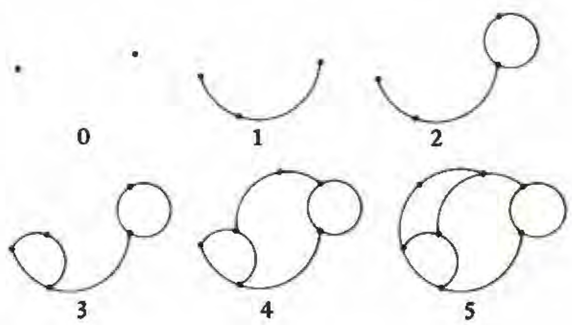
bovenbouw
a en *b* doen de volgende wedstrijd. Twee kleuren gebruiken.
Elk beginnen ze met een zet van drie horizontaal (en nul vertikaal).
Daarna moeten ze elk een zet doen, waarvan de horizontale één meer of minder is en voor de vertikale net zo.
Op $\binom{3}{0}$ kan dus volgen $\binom{4}{1}$ of $\binom{4}{-1}$ of $\binom{2}{1}$ of $\binom{2}{-1}$.



De spelers mogen de rand van de baan niet raken of overschrijden en na een zet niet in eenzelfde punt uitkomen (botsen). Wel mogen ze kruisen.
Komt een speler klem te staan, dan moet hij drie beurten overslaan en daarna een willekeurig aantal stappen horizontaal verder gaan. Het gaat erom wie het eerst over de finish gaat.
In het voorbeeld heeft b zich al vast gereden, want zijn volgende mogelijke zetten $\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ doen hem altijd buiten de baan belanden.[1])

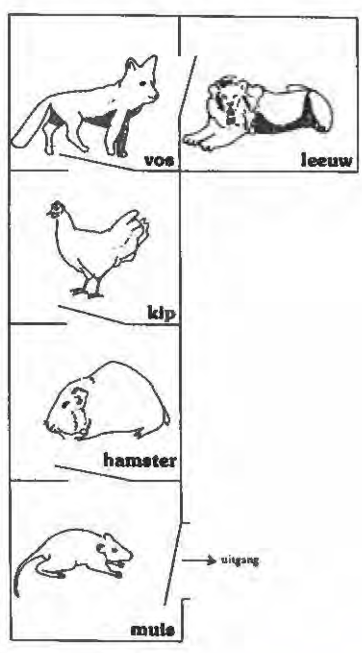
36 spruiten

bovenbouw
Zet een paar punten op het papier.
Twee spelers gaan bogen trekken tussen de punten.
Elke boog moet twee punten verbinden of naar zichzelf terugkeren. Op een boog moet een nieuw punt geplaatst geworden.
Een boog mag geen andere boog snijden en niet door een bestaand punt gaan. Een punt is 'dood' als er drie bogen vanuit gaan (of binnenkomen).
De speler die de laatste boog kan zetten, is winnaar.[2])



37 dierentuin

bovenbouw
Het totale bestand van een mini-artis:



1) Zie ook: Janssen, G.: *'Zodoende'*, Malmberg, den bosch
Jansen, H.: *'Problematika'*, wiskobas-bulletin, jaargang 3 nr 1.

2) Naar een idee van Martin Gardner (1967).

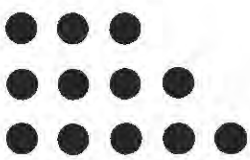
De dieren zitten in een speciale volgorde in de kooien. In elke kooi bevindt zich namelijk een draaideur, waardoor bijvoorbeeld de muis wel bij de hamster kan komen, maar de hamster niet bij de muis. En dat is maar goed ook, want elk dier vreet, als hij de kans krijgt, het dier dat zich beneden hem bevindt, met huid en haar op. De leeuw is dus de vijand van de vos, de kip, de hamster en de muis. En mogelijke prooien voor de kip zijn de hamster en de muis. Enzovoort.
Nu moeten de kooien eens per maand schoongemaakt worden. De oppasser stopt de dieren dan in een reservekooi, die identiek is aan de kooi hierboven.
Bovendien heeft de oppasser de beschikking over een derde, eveneens gelijke reservekooi.
Het probleem is nu:

▶ Hoe moet de oppasser deze maandelijkse verhuizing organiseren?

Een simpel ogend, maar nogal lastig probleem.
U kunt het probleem vereenvoudigen door het dierentuintje tot twee of drie beesten te reduceren.[1])

38 nim*

midden- en bovenbouw
Twaalf fiches (of lucifers) worden in drie rijen gelegd als afgebeeld in onderstaande figuur:



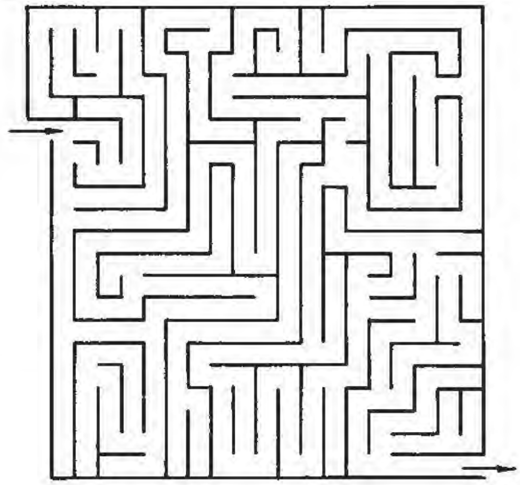
De spelers mogen om de beurt fiches (lucifers) wegnemen.
Bij zijn beurt mag elke speler net zoveel fiches wegnemen als hij wil, maar steeds uit één rij.
Een speler moet *tenminste* altijd één fiche wegnemen.
De speler die het laatste fiche moet wegnemen, heeft verloren.

[1]) Uit: Jansen, H.: *'Problematika'*, wiskobas-bulletin, jaargang 4 nr 5.

spelletjes om alleen te doen (3)

39 doolhof

kleuterschool/onderbouw



▶ Probeer een weg door dit doolhof te vinden.

Op dit doolhof zijn vele variaties te bedenken. Vaak staan ze in puzzelboekjes, kranten, etc. Laat de kinderen ook eens een doolhof ontwerpen.
Is er een strategie om er altijd uit te komen?

40 tossen

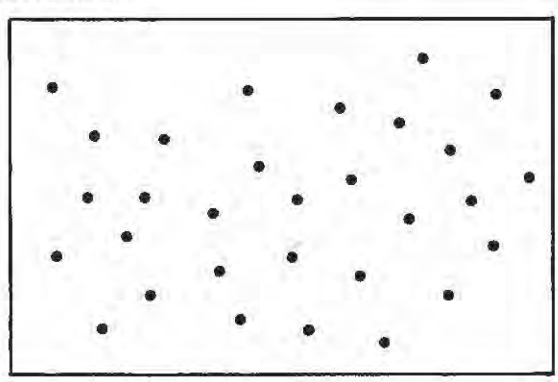
onderbouw
Met een munt kun je eerlijk tossen.

▶ Bedenk zoveel mogelijk manieren om eerlijk te tossen met een dobbelsteen.

Kun je met het opgooien van twee munten ook eerlijk tossen?

41 punten verbinden

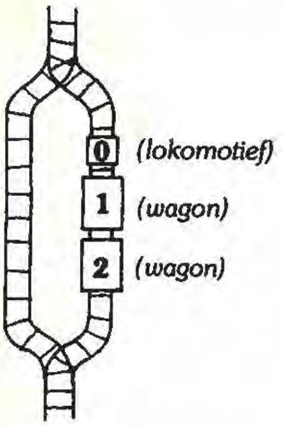
onderbouw



Een kaart met een willekeurig aantal punten erop.
▶ Trek een lijn, die alle punten verbindt en zichzelf niet snijdt.
Dit kan altijd. Welke strategie pas je toe?[1])

42 rangeren

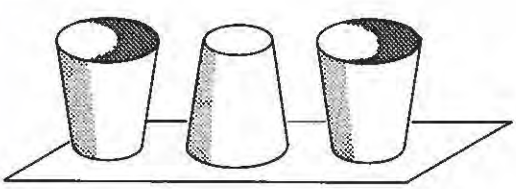
onderbouw
▶ Kan de lokomotief door rangeren op elke plaats in de rij komen?



Dit kan ook met drie, vier, vijf, etc., wagentjes gedaan worden (twee wagens als één beschouwen, etc.).
▶ Kan de lokomotief de wagons '1' en '2' verwisselen? (Ja.)
Gebruik fiches.

43 draai om

bovenbouw

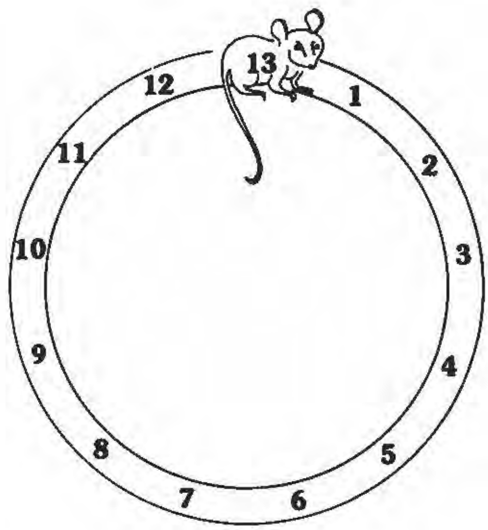


Drie bekertjes staan op tafel. Twee gewoon, de andere omgedraaid. Je mag er steeds twee omdraaien.
▶ Kun je bereiken dat ze alle drie rechtop staan? (Nee.)

Het bewijs kan bijvoorbeeld gevonden worden door alle mogelijkheden op te schrijven of een notatie 'rechtop (1), omgekeerd (0)' in te voeren. Let dan steeds op de som van de cijfers.
Probeer het spel eens uit te breiden en de regel te vinden.

44 spaar de muis

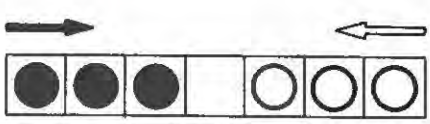
bovenbouw



Je mag niet op de muis terecht komen.
Begin op één of ander getal. En tel 13 met de klok mee. Het getal waarop je terecht komt, streep je weg.
Begin dan op het volgende getal en tel weer tot 13. Weer weg strepen. De weggestreepte getallen overslaan.
▶ Waar moet je beginnen om nooit op de muis te komen?[2])

45 uitwisselen

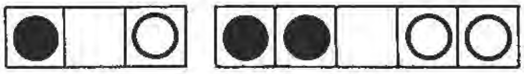
bovenbouw



15 zetten

De bedoeling is de zwarte en witte fiches van plaats te verwisselen. De fiches mogen in de richting van de pijlen met één plaats verschoven worden. Een wit fiche mag over een zwarte springen en omgekeerd.
▶ Wat is het minimale aantal zetten?
Begin eenvoudig met:

---
[1]) Naar een idee van Janssen, G.: *'Rekenactiverings-programma'*, Malmberg, den bosch.
[2]) Zie: Jansen, H.: *'Problematika'*, wiskobas-bulletin, jaargang 4 nr 1.



3 zetten 8 zetten

De algemene regel is: bij n witte fiches is het aantal zetten $n^2 + 2n$.[1])

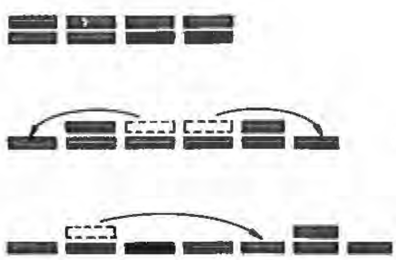
46 torentjes van twee

bovenbouw

acht fiches op een rijtje

▶ Maak in zo weinig mogelijk zetten, torentjes van twee.

Je mag steeds met één fiche naar links of naar rechts springen, maar je moet over twee fiches (een torentje geldt ook voor twee) heenspringen.
Hoe kun je in vier zetten klaar zijn?
Let op het terugdenken, zoals in de figuur is aangegeven:



twee zetten

derde zet

Een uitbreiding naar tien fiches kan het probleem weer tot dat van acht herleiden.[2])

47 mozaiek

midden- en bovenbouw

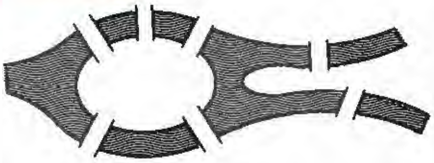
r	b	w	g
w	g	r	b
g	w	b	r
b	r	g	w

Je hebt 16 fiches van vier verschillende kleuren (van elke kleur vier).

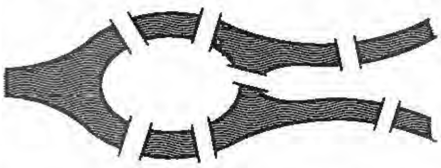
▶ Kun je deze fiches zo op het vier-bij-vier-rooster leggen dat in elke rij, elke kolom en elke diagonaal elke kleur voorkomt?

Een gunstige strategie is, eerst de vier hoekpunten met de vier kleuren te bezetten en daarna met een diagonaal door te gaan.
Er zijn zes essentieel verschillende oplossingen.

48 wandelen



▶ Kun je een wandeling maken, zodat je elke brug precies één keer passeert? (Ja.)



▶ Kun je een wandeling maken, zodat je elke brug precies één maal passeert? (Nee.)

▶ Kun je deze trek in één keer maken, zonder je potlood van het papier te nemen en zonder een boog meer dan één keer te doorlopen? (Ja.)

▶ En deze?

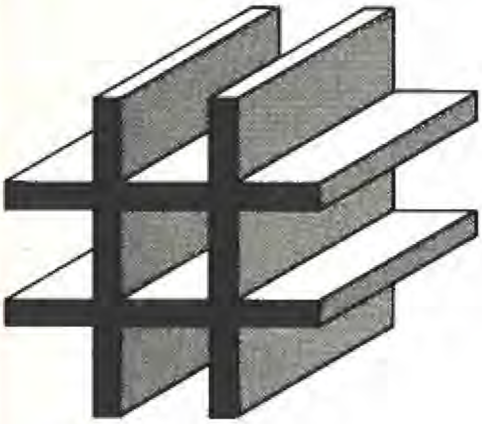
▶ Wat heeft dit met het bruggenprobleem te maken?

---

1) Johnson, D.: *'Games for learning mathematics'*, weston walch.

2) Naar een idee van Martin Gardner (1966).

oefen-stoffering



OEFENSPELEN

Deze keer staat de rubriek oefenstoffering in het teken van de oefenspelen *bij het rekenen.*
Kenmerkend hierbij is, dat de bepaling van de uitkomsten van allerlei opgaven geen doel in zich is, doch dienstbaar aan andere doeleinden. Veel suggesties binnen de andere oefenstofferingen droegen eveneens dit kenmerk.
Behalve het motiverende spelmoment in elk van de beschreven aktiviteiten, zijn er nog velerlei zaken aanwijsbaar, die de beschreven oefenspelen de moeite waard maken. Hierop gaan we bij die beschrijvingen zelf in. Vooraf geven we een aantal praktische tips en een leeswijzer, waarin een globaal overzicht staat van de oefengebieden, waarop de spelen betrekking hebben.

LEEN STREEFLAND

enkele praktische tips en leeswijzer (1)

- Van diverse spelen is een mogelijk spelverloop beschreven. Bij de beschrijving van deze spelen wordt echter nog geen volledig zicht geboden op wat zich allemaal kán voordoen. Wanneer het spelen voor twee spelers betreft, zou u deze een aantal malen kunnen spelen, met uw klas als tegenstander, zodat eventuele probleempjes gezamenlijk opgelost kunnen worden.
- De meeste van de beschreven spelen kunnen door tweetallen gespeeld worden. Ze zijn in tweeërlei opzicht geschikt voor de opvang van tempoverschillen:
  - als keuzetaak na een gemeenschappelijke basistaak;
  - in plaats van een basistaak, voor die leerlingen die nogal traag zijn bij het schriftelijk verwerken van taken.
- Bij diverse van de beschreven spelen – denk aan de kwartet- en dominospelen – is spelmateriaal nodig. Betrek de leerlingen ook bij de samenstelling van het materiaal. Binnen de doordenking van het te maken spel spelen de opgaven met uitkomsten al een belangrijke rol.
- Een oefenspel kan een bepaald programma-onderdeel vervangen. In de per spel beschreven bedoelingen komt tot uitdrukking, welke rekeninhoud in een bepaald oefenspel aan bod komt.
  Een stukje van het rekenprogramma in plaats stellen van een oefenspel is daarentegen minder eenvoudig, vanwege de ekstra's die een dergelijk spel meestal nog heeft.
- Oefenspelen zijn belangrijk voor de nodige afwisseling in het oefenen bij het rekenen.
- De bekende gezelschapsspelen vormen een belangrijke inspiratiebron voor de samenstelling van oefenspelen. In verband met het beoogde doel behoeven soms slechts wat spelregels aangepast te worden. Het bekende ganzenbord, gespeeld met twee dobbelstenen, is in de onderbouw uitstekend geschikt voor de verkenning van de telrij. Vinden we de mogelijkheden van dit spel te beperkt, dan kunnen we opdrachten als 'ga drie plaatsen terug', 'beurt overslaan', 'put' en 'gevangenis', vervangen door rekenopgaven. De daar geboekte resultaten en de beoordeling ervan, kunnen medebepalend gemaakt worden voor de al dan niet onbelemmerde voortgang bij het spel.
  Het bekende monopolyspel moet in dit

verband ook even genoemd worden, omdat de stapels 'algemeen fonds'- en 'kans'-kaarten mogelijkheden bieden voor rekenhindernissen onderweg.

- De in het vervolg gesuggereerde oefenspelen zijn als volgt ingedeeld:
  suggesties voor de onderbouw (2): getalbegrip en de vier hoofdbewerkingen;
  suggesties voor de middenbouw (3): de vier hoofdbewerkingen, met name ook het beoefenen van de tafels van vermenigvuldiging;
  suggesties voor de bovenbouw (4): de vier hoofdbewerkingen en breuken, procenten, e.d.
- We raden de lezers, die in een bepaalde bouw geïnteresseerd zijn, aan toch ook de suggesties voor de andere bouwen door te nemen. Het is vaak een kwestie van kleine wijzigingen (bijvoorbeeld: het kiezen van grotere getallen) om een bepaalde suggestie ook voor het eigen leerjaar geschikt te maken.

suggesties voor de onderbouw (2)

▶ **NATUURLIJKE GETALLEN**

Het spelprincipe van domino is ook voor het onderwijs al vele malen benut.[1]

1 domino (1)

Het gaat om het 'smeden' van een aantal stenen tot een keten, zodanig dat het bij de schakelpunten klopt. De ogen van het klassieke dominospel zijn dan meestal vervangen door sommen:

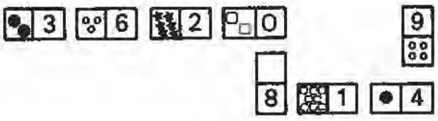
... | 9 | 7 + 4 | 11 | 18 − 16 | 2 | 7 − 4 | 3 | 12 − 4 | ...

Bij de ontwikkeling van het getalbegrip kan een dergelijk spel al benut worden.
Ter illustratie nemen we hiernaast een suggestie over uit het *'Rekenactiveringsprogramma'*.[2]

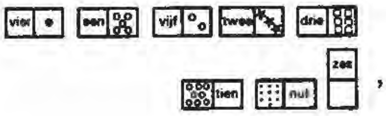
2 domino (2)

Doel oefening in het associëren van cijfer en aantal.

Werkwijze Voor deze oefening worden dominostenen gebruikt die voorzien zijn van hoeveelheden en cijfers.
De kinderen mogen om beurten leggen.
Wie niet kan leggen moet een beurt overslaan.



Eventueel kan men een derde aanduiding toevoegen: de geschreven getallen: vier, twee, zeven, enz.



Het doel 'oefening in het associëren van cijfer en aantal' geeft aan, dat het gaat om het kardinaalaspekt van het getalbegrip: het aantal. Voor de verdere verkenning en strukturering van de telrij zijn allerlei *vervolgen* op het beschreven dominospel denkbaar.

3 het 'groter dan – kleiner dan'-domino

| 5 | groter dan 2 | | 6 | kleiner dan 4 | | 3 | precies gelijk aan 7 | | 7 | groter dan 8 |

Het aardige van deze variatie is, dat de aansluitmogelijkheden niet eenduidig vastliggen. Hierdoor is een beperkte mogelijkheid tot het voeren van een strategie aanwezig.
Stel, op de stenen zijn de getallen van nul tot en met tien verwerkt en de voluitgeschreven grootterelaties inmiddels door tekens vervangen. Nu kan zich bijvoorbeeld de volgende situatie voordoen:

| 5 | 2 < | | 6 | 4 > | | 3 | 7 = |

De speler die de beurt heeft en o.m. beschikt over de stenen :

| 7 | 8 < | en | 7 | 10 > | ;

zal kiezen voor de aansluiting van de eerste steen, omdat '8 <' minder mogelijkheden tot vervolg heeft. Volgende spelers worden hierdoor wellicht van een beurt uitgesloten.
De keuze hangt natuurlijk ook af van de overige stenen, waarover de betrokken speler nog beschikt.

1) Zie in dit verband de katalogus van de Noordnederlandse stempelfabriek, pag. 70.

2) Janssen, G.: *'Rekenactiveringsprogramma'*, Malmberg, den bosch, pag. 66-67.

4 getal raden

Ter nadere verkenning van de telrij kan ook het *getal raden* benut worden. We verwijzen hiervoor naar het artikel *'Strategiespelen'* (pag. 49).

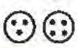
▶ **BEWERKINGEN MET NATUURLIJKE GETALLEN**
We laten het toeval getallen bepalen, waarmee vervolgens bewerkingen uitgevoerd kunnen worden, in dienst van een bepaald speldoel. Ook katalogi van edukatieve uitgevers vermelden dergelijke spelletjes.

5 het knopen-rekenspel

Bij dit spel[1]) gaat het om het 'sparen' van de ogentallen bij het werpen met een dobbelsteen. De stand wordt bijgehouden, door uit een doos knopen te kiezen met zoveel gaatjes als er ogen gegooid zijn – er zijn knopen met één, twee, drie of vier gaatjes –. Als een speler een samenstel van tien gaatjes kan maken, bijvoorbeeld:

 en ;

dan mag hij de knopen inwisselen tegen een fiche.
Zo mag:

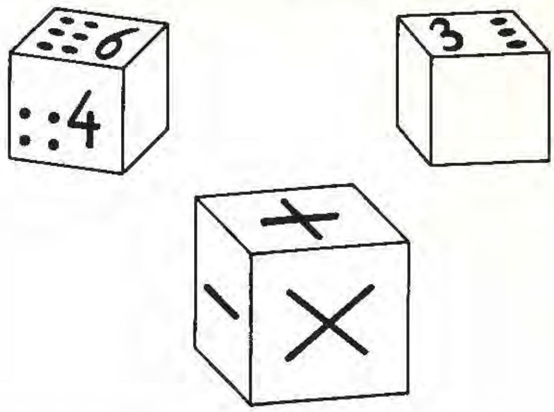
 en ;

ingewisseld worden tegen een fiche en .
Zijn de fiches op, dan is het spel uit.
Wie de meeste fiches heeft, is winnaar.
Het aantal fiches is oneven, een gelijk spel is dus uitgesloten.

Een aardig spel voor het oefenen van eenvoudige basisbewerkingen, het samenstellen van telkens '10' en het inwisselen.
Zo zijn er bijvoorbeeld ook dobbelstenen in de handel met aantallen ogen en getallen en stenen met bewerkingstekens.[2])

6 opgaven gooien

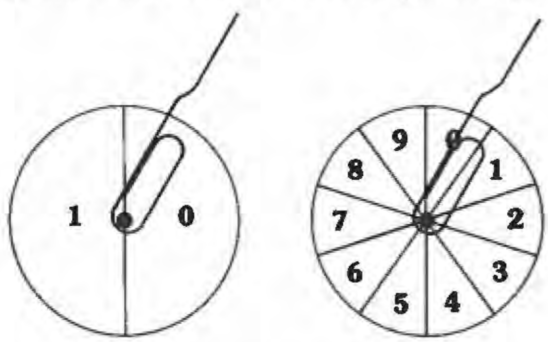
Door met deze dobbelstenen te werpen, brengt de leerling zijn eigen opgaven voort.



een voorbeeld
De leerling kan nu noteren:
$6 + 3 = \ldots$;
maar ook:
$3 + 6 = \ldots$
Al spelend ontdekt de leerling bepaalde wetten (zoals die van het verwisselen bij het optellen) waaraan bewerkingen met getallen gehoorzamen.

7 spinnen

De leerkracht beschikt over twee spinners[3]):



De linkerspinner bepaalt nu 'wel of geen tiental' en de rechterspinner het aantal eenheden. Uit de uitkomsten van beide spinners na éénmaal draaien (schieten met wijsvinger) wordt een getal samengesteld. Vervolgens worden met de rechterspinner enkele (bijvoorbeeld vijf) getalletjes gedraaid.
De bedoeling is nu, die getallen door optellen en aftrekken zó samen te stellen, dat het eerstgedraaide getal er precies uitkomt of zo dicht mogelijk benaderd wordt.
Elk getalletje, dat in tweede instantie gedraaid is, mag slechts éénmaal afzonderlijk gebruikt worden.

---

1) Uit: katalogus van de Noordnederlandse stempelfabriek, pag. 65.
2) Zie: katalogus van de Noordnederlandse stempelfabriek, pag. 65.
3) Papieren cirkelschijven, ingericht als op de tekening, op niet te harde ondergrond. Een punaise houdt een opengebogen paperclip als 'wijzer' op z'n plaats.

Wanneer een '2' en een '0' gedraaid zijn, mag daaruit niet '20' samengesteld worden.
Wel mogen de bewerkingen optellen en aftrekken door elkaar toegepast worden.
Het spel is uitstekend geschikt om met de hele klas te spelen.

voorbeeld spelverloop
Stel, dat na éénmaal draaien het getal 18 samengesteld kan worden. Vervolgens komen 4, 7, 2, 6 en 3 uit de tweede spinner.
Iedere leerling kan nu proberen met 4, 7, 2, 6 en 3 op 18 uit te komen of zo dicht mogelijk erbij.
Een 'precieze': 7 + 6 + 4 + 3 – 2 = 18.
Teneinde het spelverloop enige ekstra spanning te geven, kan een puntenwaardering worden toegepast, waardoor niet uitsluitend de snelle rekenaars aan hun trekken komen, bijvoorbeeld:

- voor de precieze uitkomst: twee punten;
- voor een uitkomst dicht erbij: één punt;
- voor een originele of slimme aanpak: één of twee punten.

Het gaat duidelijk om het oefenen van basisoptellingen en -aftrekkingen. In een later stadium kunnen ook vermenigvuldigen en delen als bewerkingen worden toegelaten.
U kunt ook met een eenhedenspinner volstaan. Het spel wordt dan meer geschikt voor de middenklassen. Voor de bovenbouw verwijzen we naar het televisiespel dat in het artikel *'Spel ernstig nemen?* (pag. 42) is opgenomen.
Het honoreren van slimme aanpakken en originele oplossingen bij de puntentoekenning motiveert de leerlingen tot een strategie.

We besluiten de beschrijving van dit spel met enkele voorbeelden. Zeker in de midden- en bovenbouw zult u dergelijke oplossingen kunnen verwachten.

- Uit 7, 6, 4, 3, 2 moet 18 samengesteld worden.
  Een leerling redeneert als volgt:
  Alle getallen, opgeteld, geven: 7 + 6 + 4 + 3 + 2 = 22. Dit is '4' meer dan het gevraagde getal. Als die '2' niet opgeteld maar afgetrokken wordt, is de uitkomst inderdaad '4' minder, en dus precies gelijk aan 18.
- Een leerling kan ook vanuit het samen te stellen getal redeneren: 18 – 7 = 11 en 11 – 6 = 5, en vervolgens proberen '5' samen te stellen uit de resterende getalletjes: 4 + 3 – 2 = 5. Dus: 7 + 6 + 4 + 3 – 2 = 18. Het probleem wordt dan als het ware omgekeerd en sterk vereenvoudigd.

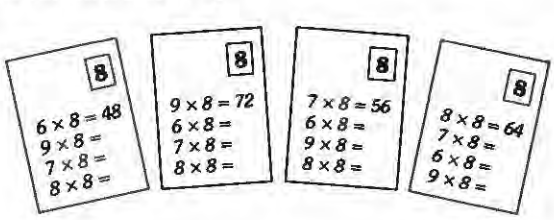
suggesties voor de middenbouw (3)

▶ **VOORAF**
Bij de nu volgende tips voor oefenspelen in de middenbouw blijft de weg terug open. Diverse suggesties zijn door een eenvoudige ingreep geschikt te maken voor de onderbouw, bijvoorbeeld door kleinere getallen te kiezen of het aantal bewerkingen te beperken.
Behalve de principes van ganzenbord, domino en dobbelen, zijn ook eigenschappen van allerlei andere gezelschapsspelen benut voor het samenstellen van oefenspelen. Voorbeelden hiervan zijn: kwartetten, memory, kaarten, e.d.
Het is ondoenlijk en ook weinig zinvol al deze spelen tot in de kleinste details te bespreken. We volstaan met het geven van een korte karakteristiek van enkele spelen.

▶ **BEWERKINGEN MET NATUURLIJKE GETALLEN**
In principe kan het idee van het kwartetspel benut worden voor alle onderwerpen, die in het rekenonderwijs aan bod komen. Het lijkt ons echter het meest geschikt voor het oefenen van de basisvaardigheden. Al te lastige opgaven belemmeren namelijk teveel de voortgang van het spel.
Men kan elk kwartet op verschillende manieren herkenbaar maken.

8 kwartet (1)

We geven elk kwartet een gemeenschappelijk plaatje of symbool: 'Mag ik van jou van de vos: 7 – 2 = 5?'
De gevraagde, mits bezitter van deze kaart, beslist op grond van de juistheid van de genoemde uitkomst of de kaart al dan niet gegeven wordt.
Ook een bepaald getal, bijvoorbeeld de gemeenschappelijke uitkomst van een kwartet of de gemeenschappelijke vermenigvuldigingstafel waartoe de opgaven op de kaarten van een kwartet behoren, kan het herkenningssymbool zijn.
Een tafelkwartet: [1])

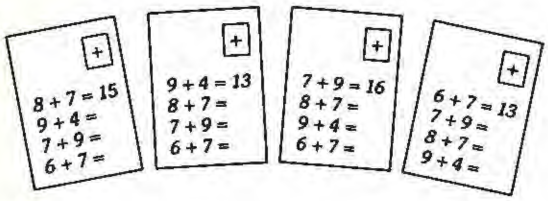


[1]) Zie ook: katalogus van de Noordnederlandse stempelfabriek.

Het aantal kwartetten per spel kan, evenals het aantal spelers, gevarieerd worden.
Ook met twee spelers blijft het spel mogelijk. Elke speler krijgt dan acht kaarten. De rest blijft 'blind' op tafel liggen. Een speler mag een kaart bijnemen, wanneer een kaart van de tegenspeler geraden is.

9 kwartet (2)

Nog een kwartet voor de basisbewerkingen. De bewérkingstekens vormen nu de herkenningssymbolen. Door kleurgebruik in het herkenningsvakje kunnen we per hoofdbewerking meerdere kwartetten maken:



10 memory

'*Aantal:* twee of meer kinderen.
Oefengebieden: 2 tot en met 23.
Materiaal: kaartjes ter grootte van speelkaarten.
Voorbereiding: er moeten twee typen kaartjes zijn die door kleur of kenteken aan de achterkant van elkaar onderscheiden zijn, te weten sommenkaartjes en antwoordenkaartjes. Op de eerste soort staat een som, bv. 9 + 6, op de tweede een antwoord, in dit geval 15. Men doet er goed aan, zeker in het begin, om niet meer dan tien sommenkaartjes en dus ook tien antwoordenkaartjes te geven.
Verloop: de kaarten liggen dicht en ze zijn verspreid over de tafel. Is een speler aan de beurt, dan keert hij naar keuze achtereenvolgens een sommenkaart en een antwoordenkaart om. Passen ze bij elkaar, dan mag de speler beide kaarten hebben. Dat levert hem aan het eind van het spel een punt op. Passen ze niet bij elkaar, dan legt hij beide kaartjes weer omgekeerd op hun oude plaats terug.
Wie aan het eind de meeste punten heeft, is winnaar.'[1])

NB: Met de oefengebieden 2 tot en met 23 worden achtereenvolgens bedoeld:

'1. Doorstructureren van getallen tot 10.
2. Tot 10: optellingen.
3. Tot 10: aftrekkingen.
4. Tot 10: optellingen en aftrekkingen.
5. Tot 20: oriëntatie.
6. Tot 20: optellingen.
7. Tot 20: aftrekkingen.
8. Tot 20: optellingen en aftrekkingen.
9. Tot 50: oriëntatie.
10. Tot 50: optellen met eenheden.
11. Tot 50: aftrekken met eenheden.
12. Tot 50: optellen en aftrekken met eenheden.
13. Tot 100: oriëntatie.
14. Tot 100: optellen met tientallen.
15. Tot 100: optellen met eenheden.
16. Tot 100: optellingen.
17. Tot 100: aftrekken met tientallen.
18. Tot 100: aftrekken met eenheden.
19. Tot 100: aftrekkingen.
20. Tot 100: optellen en aftrekken.
21. De afzonderlijke vermenigvuldigtafels.
22. Enkele vermenigvuldigtafels samen.
23. Alle vermenigvuldigtafels.'

Een variatie op het voorgaande spel is het zogenaamde *snapspel*.

11 snapspel

Bij dit spel liggen twee stapels kaartjes met opgaven op tafel.
Een diversiteit van opgaven met een beperkt aantal uitkomsten is bedacht. Deze staan op de kaartjes in de stapels.
In beide stapels komen bijvoorbeeld diverse kaartjes voor, met opgaven geïnspireerd op de uitkomst 56:

7 x 8 =	14 x 4 =
8 x 7 =	70 – 14 =
28 + 28 =	216 : 4 =
4 x 14 =	enz.

Het spel kan het beste met een beperkt aantal spelers gespeeld worden (twee tot vier). De speler, die aan de beurt is, draait van elke stapel een kaartje om.
Bijvoorbeeld:

17 – 12	en	19 – 14

Zijn de uitkomsten van beide opgaven gelijk, dan roept hij 'snap!' en mag zich vervolgens beide kaartjes toeëigenen.
Voor de andere spelers kunnen verschillende

[1]) Achter, V. van e.a.: *'Getal in beeld'*, Malmberg, den bosch 1971, algemene activiteiten, pag. 31.

regels bedacht worden, wanneer de speler die aan de beurt is in gebreke blijft of te langzaam is.
Bestaat bijvoorbeeld de groep uit min of meer gelijkwaardige spelers, dan kan de afspraak gelden: degene die aan de beurt is, heeft het recht van voorkeur, maakt hij een fout, dan grijpt de snelste van de anderen zijn kans.
Is de groep minder homogeen, dan kan de regel gelden dat alleen degene die de beurt heeft, het tweetal kaartjes kan bemachtigen. Zijn de kaartjes niet gelijk, dan worden ze apart gelegd. Nadat van beide stapeltjes alle kaarten op zijn, worden ze opnieuw geschud. Het spel is uit, wanneer of alle kaarten verdeeld zijn, of de afgesproken tijd om is. Wie de meeste tweetallen vergaard heeft, is winnaar.

Een met beide voorgaande spelletjes verwant spel is *sommen zoeken.*

12 sommen zoeken

'Aantal: naar keuze.
Oefengebieden: 2 tot en met 23.
Materiaal: een aantal kaarten met op elk een verhaaltje en kaarten met de bijbehorende sommen.
Verloop: op een verhaalkaart staat bijvoorbeeld: 'De broer van Jan heeft 6 dozen. In elke doos zitten 3 tennisballen.' De kinderen moeten bij dit verhaaltje de goede somkaart zoeken: $6 \times 3 = 18$.
Geef de kinderen niet te veel kaarten tegelijk: na een aarzelend begin voorlopig niet meer dan tien verhalen met de tien bijbehorende sommen.
U kunt veel opgaven die de kinderen vroeger al gemaakt hebben in dit spel verwerken. U kunt de kinderen ook zelf sommetjes laten maken (verhaalkaart en antwoordkaart) als uitbreiding van het spelmateriaal. Geef desgewenst de kaartjes met de verhaaltjes een andere kleur of vorm dan de sommenkaartjes.
We geven u enkele suggesties voor kaartjes maar wijzen er tevens nadrukkelijk op dat de kinderen zelf ook verhaaltjes kunnen maken.
- Moeder dekt de tafel voor 6 personen. Ieder krijgt 1 soeplepel en 1 lepeltje voor de pudding.
  $6 + 6 = 12$
- Jet had 18 aardappels gekookt. Na het eten waren er nog 3 aardappels over.
  $18 - 3 = 15$ of $3 + 15 = 18$
- Moeder koopt 18 eieren en bakt er 6.
  $6 + 12 = 18$ of $18 - 6 = 12$.'[1])

kanttekeningen
- Bij dit spel oefenen de leerlingen in het 'vertalen' van verwoorde opgaven naar sommen met cijfers. Omdat die sommen ook op kaartjes gegeven zijn, hebben de leerlingen een zeker houvast bij de gevraagde vertaling.
- Zoals de tekst uit *'Getal in beeld'* laat zien, kunnen bij éénzelfde tekstopgave best twee of meer sommenkaartjes passen. Dit is van belang voor de houding van de leerlingen tegenover het vak rekenen: het gaat niet altijd om het 'enig juiste' antwoord; er zijn ook situaties met meerdere oplossingen.
- Het samenstellen van kaartjes door de leerlingen zélf, ter uitbreiding van dit spel, lijkt uiterst nuttig. Leerlingen die hiermee belast worden, zetten dan hun zelf bedachte redaktieopgaven om in rekenformules. Deze ervaring zal de leerlingen van dienst zijn bij het interpreteren van door anderen bedachte opgaven op hun rekenkundige relaties.
  Wellicht kiezen de leerlingen andere situaties en konteksten voor hún opgaven, als de rekenboekjes geven.

Bij de suggesties voor de onderbouw hebben we de mogelijkheid van dobbelsteengebruik al even genoemd. We willen hier nog enkele suggesties geven. Illustratief is een voorbeeld uit *'Kien'* 2.[2])

13 een spelletje dobbelen

onderwijzerstekst

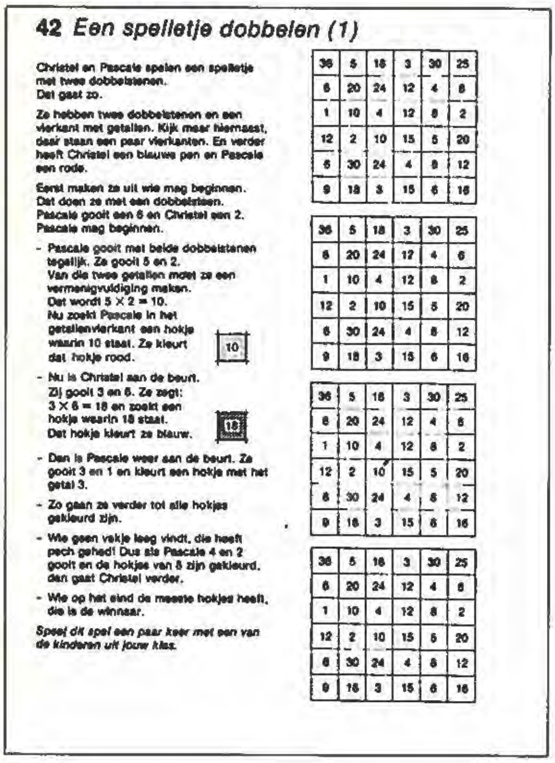
'42
Een spelletje dobbelen (1)
Opmerkingen
- Waarschijnlijk is het niet noodzakelijk dit spel eerst vóór te spelen; de spelregels zijn simpel.
- In de nabespreking zullen de leerlingen opmerken dat dit spel louter op geluk berust en een beetje accuraat kunnen rekenen.

42a
Een spelletje dobbelen (2)
Opmerkingen
- In tegenstelling tot het vorige spel speelt nu ook enige handigheid een rol. Men moet immers trachten zoveel mogelijk aaneengesloten hokjes te veroveren.

---
[1]) Uit: Achter, V. van e.a.: *'Getal in beeld'*, Malmberg, den bosch 1971, algemene activiteiten, pag. 36.
[2]) Janssen, G.: *'Kien'* 2, Malmberg, den bosch, pag. 56, 57.

– Ook dit spelletje sluiten we af met een gesprekje erover.'

werkbladen



42 *Een spelletje dobbelen (1)*

Christel en Pascale spelen een spelletje met twee dobbelstenen.
Dat gaat zo.

Ze hebben twee dobbelstenen en een vierkant met getallen. Kijk maar hiernaast, daar staan een paar vierkanten. En verder heeft Christel een blauwe pen en Pascale een rode.

Eerst maken ze uit wie mag beginnen. Dat doen ze met een dobbelsteen. Pascale gooit een 6 en Christel een 2. Pascale mag beginnen.

- Pascale gooit met beide dobbelstenen tegelijk. Ze gooit 5 en 2. Van die twee getallen moet ze een vermenigvuldiging maken. Dat wordt 5 × 2 = 10. Nu zoekt Pascale in het getallenvierkant een hokje waarin 10 staat. Ze kleurt dat hokje rood. 10
- Nu is Christel aan de beurt. Zij gooit 3 en 6. Ze zegt: 3 × 6 = 18 en zoekt een hokje waarin 18 staat. Dat hokje kleurt ze blauw. 18
- Dan is Pascale weer aan de beurt. Ze gooit 3 en 1 en kleurt een hokje met het getal 3.
- Zo gaan ze verder tot alle hokjes gekleurd zijn.
- Wie geen vakje leeg vindt, die heeft pech gehad! Dus als Pascale 4 en 2 gooit en de hokjes van 8 zijn gekleurd, dan gaat Christel verder.
- Wie op het eind de meeste hokjes heeft, die is de winnaar.

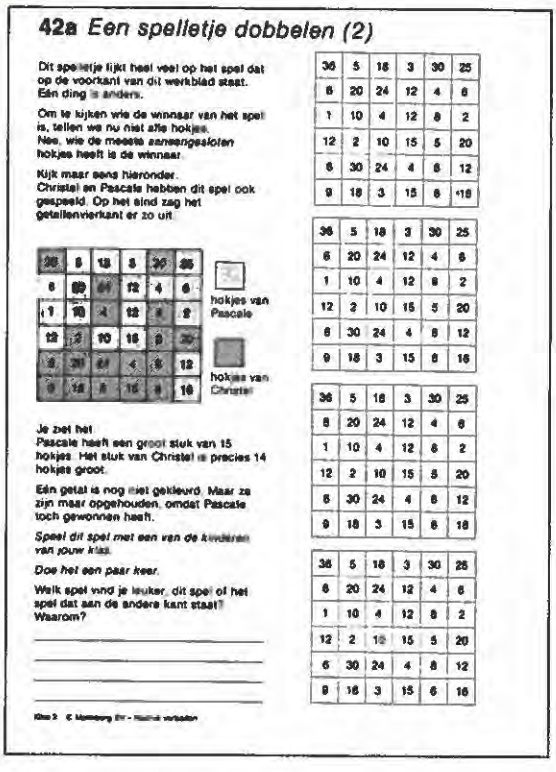
Speel dit spel een paar keer met een van de kinderen uit jouw klas.

36	5	18	3	30	25
6	20	24	12	4	8
1	10	4	12	8	2
12	2	10	15	5	20
6	30	24	4	8	12
9	18	3	15	6	16

36	5	18	3	30	25
6	20	24	12	4	8
1	10	4	12	8	2
12	2	10	15	5	20
6	30	24	4	8	12
9	18	3	15	6	16

36	5	18	3	30	25
6	20	24	12	4	8
1	10	4	12	8	2
12	2	10	15	5	20
6	30	24	4	8	12
9	18	3	15	6	16

36	5	18	3	30	25
6	20	24	12	4	8
1	10	4	12	8	2
12	2	10	15	5	20
6	30	24	4	8	12
9	18	3	15	6	16



42a *Een spelletje dobbelen (2)*

Dit spelletje lijkt heel veel op het spel dat op de voorkant van dit werkblad staat. Eén ding is anders.

Om te kijken wie de winnaar van het spel is, tellen we nu niet alle hokjes. Nee, wie de meeste *aaneengesloten* hokjes heeft is de winnaar.

Kijk maar eens hieronder. Christel en Pascale hebben dit spel ook gespeeld. Op het eind zag het getallenvierkant er zo uit.

Je ziet het. Pascale heeft een groot stuk van 15 hokjes. Het stuk van Christel is precies 14 hokjes groot.

Eén getal is nog niet gekleurd. Maar ze zijn maar opgehouden, omdat Pascale toch gewonnen heeft.

Speel dit spel met een van de kinderen van jouw klas.

Doe het een paar keer.

Welk spel vind je leuker, dit spel of het spel dat aan de andere kant staat? Waarom?

36	5	18	3	30	25
6	20	24	12	4	8
1	10	4	12	8	2
12	2	10	15	5	20
6	30	24	4	8	12
9	18	3	15	6	16

36	5	18	3	30	25
6	20	24	12	4	8
1	10	4	12	8	2
12	2	10	15	5	20
6	30	24	4	8	12
9	18	3	15	6	16

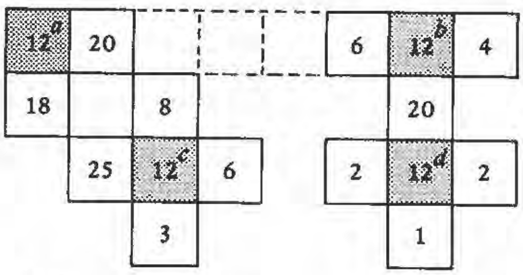
36	5	18	3	30	25
6	20	24	12	4	8
1	10	4	12	8	2
12	2	10	15	5	20
6	30	24	4	8	12
9	18	3	15	6	16

36	5	18	3	30	25
6	20	24	12	4	8
1	10	4	12	8	2
12	2	10	15	5	20
6	30	24	4	8	12
9	18	3	15	6	16

Aan de onderwijzerstekst bij 42*a* zouden we enkele opmerkingen willen toevoegen.
De genoemde handigheid kan door de leerlingen alleen maar ontwikkeld worden, als zij enig vermoeden krijgen over de verschillende kansen op het werpen van een bepaald produkt.

12	20	15	36	5	6	12	4
18	10	8	9	16	10	20	6
8	25	12	6	4	2	12	2
6	4	3	15	3	18	1	5

Dit acht-bij-vier-veld bevat de uitkomsten uit de vermenigvuldigingstafels die met twee dobbelstenen gegooid kunnen worden. Sommige uitkomsten komen meerdere malen voor, afhankelijk van de kans erop.
Stel, speler *a* gooit '12' (4 x 3 of 6 x 2).
Welke '12' moet hij nu kiezen?
Als het erom gaat zoveel mogelijk aaneengesloten vakjes te bezetten, lijkt de '12' links- of rechtsboven minder gunstig dan de beide twaalven in de derde rij, omdat die aan alle kanten door vakjes zijn ingesloten. Deze gedachtengang blijkt echter maar ten dele juist, wanneer we de kans op bepaalde uitkomsten in het geding gaan brengen:



vakje a
20 = 4 x 5 of 5 x 4;
18 = 3 x 6 of 6 x 3.
Dus: vier mogelijkheden (van de 32, bij het werpen met twee dobbelstenen) om een aangrenzend vakje te bezetten.

vakje b
Voor *b* zijn er negen mogelijkheden, namelijk:
6 = 1 x 6, 2 x 3, 3 x 2, 6 x 1;
20 = 4 x 5 of 5 x 4;
4 = 1 x 4, 2 x 2, 4 x 1.

vakje c
Eveneens negen mogelijkheden:
25 = 5 x 5;
8 = 2 x 4 of 4 x 2;
6 = 1 x 6, 2 x 3, 3 x 2, 6 x 1;
3 = 1 x 3 of 3 x 1.

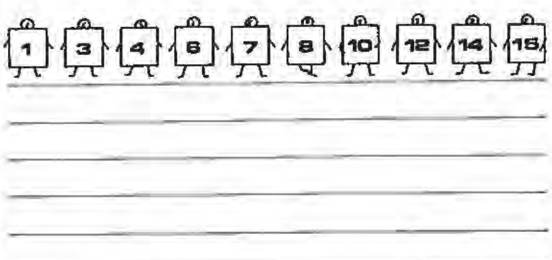
vakje d
Er zijn zeven mogelijkheden:
2 = 1 x 2 of 2 x 1;
20 = 4 x 5 of 5 x 4;
1 = 1 x 1;
2 = 1 x 2 of 2 x 1.

b en *c* bieden dus de meeste mogelijkheden om bij volgende worpen een aangrenzend veld te bezetten. Die mogelijkheden staan dan natuurlijk ook voor de tegenspelers open. In bovenstaand acht-bij-vier-veld zijn alle mogelijke produkten, die bij het werpen met twee dobbelstenen verkregen kunnen worden, opgenomen naar het aantal mogelijkheden van voorkomen.

14 dobbelstenenloop

Een soortgelijk spel als het voorgaande, maar dan met optellen (en aftrekken) werd eerder beschreven onder de naam *'Dobbelstenenloop'*[1]).

- Werpen met twee dobbelstenen van verschillende kleur. De kinderen mogen een kaart kiezen met daarop één van de getallen van één tot en met zestien. Deze kaart kan omgehangen worden.
- Er is een speelveld met evenwijdige lijnen. De leerlingen gaan op grond van hun kaartgetal in volgorde staan:



- De ogensom bij een worp met beide dobbelstenen bepaalt wie een stap voorwaarts mag doen. Wie het eerste aan de overkant van het speelveld is, heeft gewonnen.
- Het spel wordt enige malen herhaald. Tijdens het verloop van meerdere spelen zal de verzameling gekozen speelkaarten wel slinken. De getallen in het midden ('6', '7' en '8') raken steeds meer in trek.[2])

Achteraf proberen we de opgedane ervaringen te benutten om te verklaren hoe het kwam, dat de getallen in het midden zo vaak 'winnaar' waren. Een tabel van de dobbelsteenworpen kan hierbij goede diensten bewijzen:

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀				$\boxed{5}$		$\boxed{7}$
⚁			$\boxed{5}$		$\boxed{7}$	
⚂		$\boxed{5}$		$\boxed{7}$		
⚃	$\boxed{5}$		$\boxed{7}$			
⚄		$\boxed{7}$				
⚅	$\boxed{7}$					

Je ziet het zó: om '7' te gooien heb je zes mogelijkheden en voor '5' maar vier mogelijkheden.
Uitbreiding van het aantal dobbelstenen of van de toegestane bewerkingen, schept mogelijkheden om oefenspelen voor elk leerjaar te verzinnen.

Het volgende luciferspelletje staat in het artikel *'Spel ernstig nemen'* beschreven (pag. 36).

15 pak weg

Twee spelers mogen om beurten één, twee of drie lucifers van een stapeltje wegnemen. Wie de laatste lucifer(s) wegneemt, is winnaar.

Dit spelletje kan ook met getallen gespeeld worden. We verwijzen opnieuw naar *'Spel ernstig nemen'* (pag. 37).

16 naar honderd

Twee spelers mogen om beurten een getal kiezen uit een voorgeschreven keuzeverzameling, bijvoorbeeld de getallen van één tot en met negen. De getallen van hun keuze worden opgeteld. Elk nieuwgekozen getal wordt daarna bij de voorgaande som geteld.
Voorbeeld:
speler *a* 7 ;
speler *b* 8 → som 15 ;
speler *a* 4 → som 19, enz.
Wie de laatste aanvulling tot honderd geeft, is winnaar.

In het begin zullen beide spelers wellicht proberen snel op weg te gaan. Echter: wanneer honderd dichtbij komt, moet je voorzichtig worden.

---
1) Wiskobas-bulletin, jaargang 2 nr 1, pag. 521.
2) Het spel kan natuurlijk ook op een papieren speelveld of op het bord gespeeld worden.

Spelverloop:
speler *a* 7 ;
speler *b* 8 ⟶ som 15 ;
speler *a* 9 ⟶ som 24 ;
speler *b* 6 ⟶ som 30.
De tweede speler vulde aan tot dertig. Het gevolg is dat speler *a* nu gemakkelijk het getalletje van zijn keuze kan bijtellen:
speler *a* 8 ⟶ som 38.
Bij speler *b* begint nu een vaag idee door te breken: 'Als ik twee bijtel, dan...', enz.

Het gaat bij dit spel in de eerste plaats om het oefenen van basisvaardigheden bij de vier hoofdbewerkingen. Bij de beschrijving van een (mogelijk) spelverloop bleek dat al spelend een strategie bedacht kan worden.
Na de keuze door speler *a* uit één tot en met negen, weet de tweede speler zeker, dat hij het door de ander gekozen getal altijd kan aanvullen tot tien.
Hierdoor kan hij ervoor zorgen dat de tussensom ná zijn keuze telkens op een tienvoud uitkomt. Hij weet dan ook al vooraf dat hij de laatste aanvulling tot honderd kan maken, wanneer daarop gespeeld wordt.
Bijvoorbeeld:

beurt / speler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	7	8	7	1	5	6	7	8	9	2
b	3	2	3	9	5	4	3	2	1	8
tussensom:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Er is voor speler *a* geen ontkomen aan het naderend verlies, wanneer speler *b* het eenmaal over deze boeg gooit.

variaties
Er zijn diverse mogelijkheden om dit spel te variëren:
- door de keuzeverzameling van getallen te veranderen;
- door het te bereiken getal te veranderen;
- door te beginnen met een bepaald getal en de gekozen getallen eraf te trekken.

Bij enkele van die variaties plaatsen we kanttekeningen, omdat behalve optellen en aftrekken ook vermenigvuldigen en delen (met rest) een rol kunnen gaan spelen.

verandering van keuzeverzameling
Stel, dat gekozen mag worden uit één tot en met zeven.
De tweede speler weet nu *zeker*, dat hij het getalletje van de eerste speler steeds tot acht kan aanvullen. Evenwel: honderd is geen achtvoud (100 = 12 x 8 + 4).

Kent speler *a* de strategie ook, dan zal hij beginnen met '4'. Hij weet dat '4' nog met een achtvoud (96 = 12 x 8) moet worden aangevuld om honderd te bereiken. Nu is hij het, die de 'zet' van de medespeler telkens tot acht kan aanvullen, zich daarmee verzekerend van de overwinning:

beurt / speler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	4	3	1	4	6	5	4	1	1	7	6	2	4
b	5	7	4	2	3	4	7	7	1	2	6	4	

Het beste kan nu de stand opgemaakt worden, nadat speler *a* zijn zet gedaan heeft. Telkens blijkt dan vanaf het begin de som van de gekozen getallen een achtvoud plus vier te zijn. En daarop dient ook uitgekomen te worden.

aftrekken in plaats van optellen
Starten met een willekeurig getal, bijvoorbeeld 120.
Twee spelers trekken om beurten een getal af, naar keuze uit bijvoorbeeld één tot en met acht. Wie het laatste restje wegneemt, is winnaar.
Wil de eerste speler voor zichzelf een winnend spelverloop scheppen, dan zal zijn keuze bij de eerste beurt op '3' vallen, omdat:
120 = 13 x 9 + 3.
120 − 3 = 117, is een winnende situatie voor speler *a*. Hij kan de 'zet' van speler *b* dan telkens aanvullen tot '9'. Per twee beurten wordt dus telkens negen afgetrokken. Aangezien 117 een negenvoud is, heeft hij zich ervan verzekerd het 'laatste restje' te zullen wegnemen.

samenvatting
Samengevat (en beschreven in algemene termen) komen de gesuggereerde variaties neer op:
- Wijziging van de keuzeverzameling: $\{1, 2, 3, ..., n\}$.
  Bij de bewerkingen optellen en aftrekken van de gekozen getallen, leidt spelen op of uitgaan van een $(n + 1)$-voud tot winst.
  NB: De keuzeverzameling kan men ook uit niet opeenvolgende getallen samenstellen, bijvoorbeeld: $\{1, 3, 4, 6, 8, 10\}$. Dit maakt de strategie moeilijker te achterhalen. (In het gegeven voorbeeld gaat het om zevenvouden of zevenvouden plus twee).
- Wordt voor het te bereiken getal (of startgetal) niet precies een $(n + 1)$-voud gekozen, maar bijvoorbeeld een $(n + 1)$-voud $+ k$ (met $0 < k < n + 1$), dan zal de speler die beginnen mag, als eerste zet 'k' kiezen, daarmee voor zichzelf een winstsituatie scheppend.

Immers, zijn tegenspeler kan niet anders dan een keuze doen, die speler *a* vervolgens steeds tot $(n + 1)$ kan aanvullen.

Tenslotte noemen we nog een voorloper.[1])

17 voorloper

26 **op of over de honderd?**

ik pak een getal uit mijn zak.
even kijken.
het is 4.
ik doe er 4 bij, dat is 8.
weer 4 erbij, dat is 12.
zo ga ik door.
kan ik zo precies op 100 uitkomen of wip ik er net overheen?

nu jullie.
maar nu gaan jullie met een ander getal beginnen, bijvoorbeeld 13 (13 erbij, 13 erbij, ... en bij 100 uitkijken).

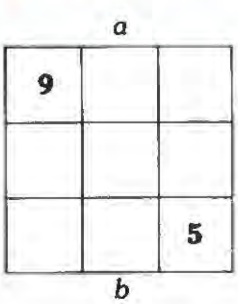
nu komt de opdracht:
zoek alle getallen op, waarmee je precies op 100 uitkomt en schrijf ze op.
hebben jullie de hele getallenfamilie?

weten jullie iets te vertellen van de getallen uit deze familie?
hebben jullie er al een naam voor?
stop alles in je familie-album.

klas: 1 2 3 4 5 6
groep: 1 2 3 allen

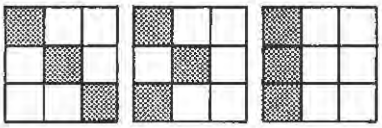
je hebt nodig:

18 een weg van dertig

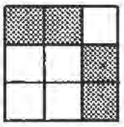


Getallenverzameling: $\{1, 2, 3, \ldots 20\}$, waarvan elk getal slechts eenmaal gebruikt mag worden. Het lot bepaalt wie begint.
▶ Maak een weg van dertig.
a vult een getal in naar keuze, zeg '9'.
b is aan zet en kiest '5'.
Door het centrumveld met '16' te bezetten, kan *a* de 'diagonaalweg' de vereiste waarde van dertig geven.
Dit betekent dus, dat in een weg naar de overkant ook door de tegenspeler ingevulde getallen gebruikt mogen worden.
NB: Onder een weg wordt verstaan: een aaneengesloten reeks van (in dit geval drie) vierkantjes, waarbij vierkantjes niet tot eenzelfde rij mogen behoren.

[1]) Uit: Nieland, J.: *'Klaar? Ga maar spelen'*, Malmberg, den bosch.



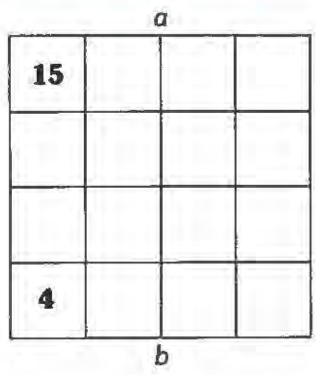
mag wel



mag niet

Om het spel wat langer zijn waarde als oefenspel te laten behouden, kunnen we het oefenveld vergroten en/of de getallenverzameling uitbreiden.

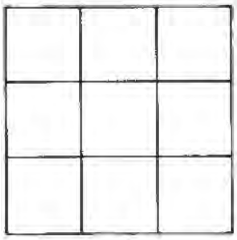
19 een weg van veertig



Getallenverzameling: $k = \{1, 2, \ldots, 20\}$.
Elk getal wordt slechts eenmaal gebruikt.
▶ Een weg van veertig maken.

20 getallen - boter, kaas & eieren

In plaats van kruisjes en rondjes, zoals bij het echte *boter, kaas en eieren,* worden getallen ingevuld. Bijvoorbeeld in een drie-bij-drieveld:



De bedoeling is nu in rij-, kolom- of diagonaalrichting getallen naar keuze (uit een gegeven keuzeverzameling) in te vullen, zodat een vooraf bepaalde som ontstaat. Hierbij mogen de door de tegenspeler ingevulde getallen eveneens gebruikt worden.

De spelvoering is nu wat lastiger dan bij *een weg van dertig,* omdat meerdere richtingen openstaan tot het samenstellen van een weg met voorgeschreven som.

Wanneer dit spel op een vier-bij-vier-veld gespeeld wordt, is de strategie moeilijker te ontdekken. Het spel wordt dan als oefenspel wat bruikbaarder.
Een weg van dertig en *getallen-boter, kaas en eieren* kunnen het beste als klassikale aktiviteiten (de ene helft van de klas tegen de andere, met de onderwijzer(es) als spelleider) benut worden.

suggesties voor de bovenbouw (4)

▶ **BEWERKINGEN MET NATUURLIJKE GETALLEN**

21 faktorspel

Twee spelers (of klas en onderwijzer(es)) hebben een blok getallen voor zich. Bijvoorbeeld:

2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37

Nadat het lot bepaald heeft wie mag beginnen, kiest speler *a* een getal.
Speler *b* mag al die getallen in het blok opeisen, die deler zijn van het getal dat *a* koos en die nog niet aan bod geweest zijn; pas daarna volgt zijn eigen keuze.
Wie de meeste getallen heeft, wanneer de getallen op zijn, is winnaar.[1])

Het is duidelijk dat de spelers in het begin priemgetallen zullen kiezen, of getallen met zo weinig mogelijk delers.
Bijvoorbeeld: de speler die in een vroeg stadium 24 kiest, geeft 2, 3, 4, 6, 8 en 12 weg. Bij keuze van 25 wordt alleen 5 weggegeven.

Een interessante variatie krijgt men door niet per verworven getal een punt toe te kennen, doch zoveel punten als het gekozen getal aangeeft. In dat geval moet degeen die aan 'zet' is, mogelijkheden gaan afwegen. Stel, dat eerst de priemgetallen 37, 31, 29 en 23 afwisselend door speler *a* en *b* gekozen zijn. De beurt is nu aan speler *a*. Wat zal hij kiezen? Het volgende priemgetal is 19, dus 19 punten. Kiest hij echter 35, dan geeft hij 5 en 7 weg, doch $35 - 12 = 23 > 19$. In dit geval is 35 dus een betere keuze.

Tweetallen leerlingen die samenspelen, oefenen heel wat basisvaardigheden bij het overwegen van de meest optimale keuze. Het getallenblok kan gemakkelijk wat gevarieerd worden, bijvoorbeeld door alle getallen wat op te schuiven in de getallenrij of door een reeks niet-opeenvolgende getallen te nemen. Ook kunnen bepaalde kleine getallen meerdere malen in het getallenblok worden opgeslagen. De gevolgen van al deze wijzigingen voor de meest handige speelwijze, zullen in de praktijk snel blijken.

▶ **BUITEN DE GEWONE HOOFDBEWERKINGEN OM**

22 spel met breuken

Een worp met een dobbelsteen bepaalt telkens de 'gebroken' punten die een speler met die worp verdient.
Bijvoorbeeld:
uitkomst 3 ⟶ $\frac{1}{3}$ punt;
uitkomst 5 ⟶ geen punt;
uitkomst 2 ⟶ $\frac{1}{2}$ punt;
enz.
De punten worden opgeteld. De speler, die het eerst '5' overschrijdt met zijn puntentotaal, is winnaar.
Waarom '5' als uitkomst geen punten geeft, zal duidelijk zijn.[2])

In plaats van de uitkomsten door het werpen met een dobbelsteen te bepalen, kunnen we natuurlijk ook breukenspinners maken. In plaats van de breuken zo maar op te tellen kunnen we ook een speelveld à la ganzenbord maken, waarop tussen start en finish al naar gelang de uitkomst van het spinnen en de hindernissen onderweg, wordt voortgeschreden.
Het spelletje heeft als voorwaarde, dat kinderen het een en ander van breuken en hun bewerkingen zullen moeten kennen, alvorens het te kunnen spelen. Dat geldt feitelijk ook voor de andere spelen die we nog willen beschrijven binnen dit oefengebied.

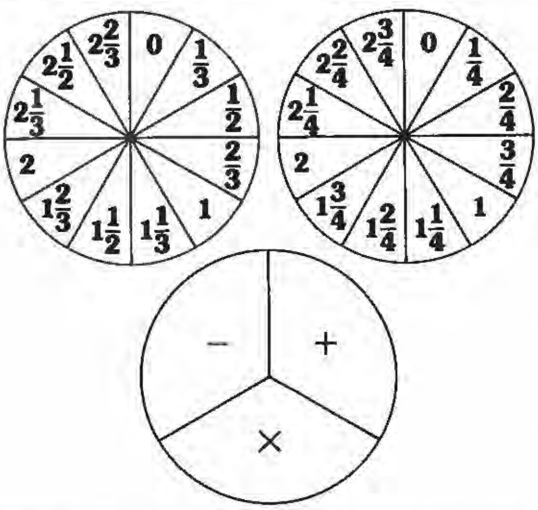
[1]) Naar een idee uit: Harkin, J.B. en D.S. Martin: *'The factor game'*, in 'Games and Puzzles for Elementary and Middle School Mathematics', *nctm*, reston 1975, pag. 145 e.v.
[2]) Janssen, G.: *'Kien'* 6, Malmberg, den bosch.

Om het spelverloop niet al te zeer te laten verstoren door onvoldoende voorkennis van breuken en vaardigheid in het uitvoeren van de bewerkingen ermee, kijken we alleen naar spelen waarbij we de leerlingen wat materiële steun kunnen bieden, bijvoorbeeld door middel van breukencirkels, getallenlijn, klok, overzichtelijke notatietabellen, e.d.

In de suggesties voor oefenspelen tot nu toe, is het principe van het *bingospel* voor het oefenen nog onbenut gebleven. Natuurlijk kan bingo eveneens gespeeld worden in onder- en middenbouw, waarvoor de basisbewerkingen en in het bizonder de vermenigvuldigingstafels, heel geschikte oefengebieden zijn.
Voor de bovenbouw zouden wij het volgende breukenbingo willen suggereren.

23 breukenbingo

Voor dit spel zijn de volgende drie spinners[1]) nodig:



Met behulp van deze drie spinners kunnen in totaal 432 opgaven samengesteld worden.
De uitkomsten van deze 432 opgaven dienen verwerkt te worden op kaarten. Bijvoorbeeld: 36 kaarten met elk twaalf uitkomsten.

Een voorbeeld van zo'n kaart, behorend bij de volgende 'gespinde' opgaven:

$0 \times 1 = 0$ $2 - 1\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ $\frac{2}{3} \times 2 = 1\frac{1}{3}$

$1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} = 2\frac{7}{12}$ $2 + 1\frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$

$2 \times 2 = 4$ $2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$

$1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

$2\frac{2}{3} - 2\frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ $2\frac{1}{2} \times 2\frac{2}{4} = 6\frac{1}{4}$.

	0		$1\frac{2}{3}$	
$\frac{5}{6}$		$2\frac{3}{4}$		5
$2\frac{7}{12}$	4		$3\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3}$	

kanttekeningen
- Als een opgave 'gedraaid' is, wordt deze aan de klas voorgelegd. Na bepaling van de uitkomst, mogen degenen die deze uitkomst op hun kaart hebben, een fiche op die plaats leggen.
- Sommige uitkomsten hebben een grotere kans gedraaid te worden dan andere. Bijvoorbeeld '0'. Het beste is daarom, eerst alle mogelijke opgaven uit te schrijven en die naar voorkomen van eenzelfde uitkomst zo eerlijk mogelijk over de bingokaarten te verdelen.
- Degene, die als eerste alle antwoorden met een fiche bedekt heeft, roept *'bingo!'* en is winnaar.
- Bij een geringer aantal leerlingen dan 36, kunnen sommige leerlingen belast worden met het bijhouden van meer dan één antwoordkaart.

Omdat dit breukenbingo vrij hoge eisen stelt aan de leerlingen, willen we wat voorbereidende suggesties geven, die eveneens in oefenspelvorm gedaan kunnen worden: *breuken dobbelen* en *twaalf uur verder.*

24 breuken dobbelen

Bij dit spel voor twee spelers bepaalt de uitkomst van een worp met twee dobbelstenen, welke breuk in het spel wordt gebracht. Daarbij geldt de afspraak: het grootste aantal ogen op één van beide dobbelstenen, stelt de noemer van de breuk voor. De volgende tabel laat alle mogelijke uitkomsten in breukvorm zien:

1) Zie voor de fabrikage: pag. 68.

	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

Verder is nodig aan breukencirkelmateriaal: 21 helen; 36 maal $\frac{1}{6}$; 25 maal $\frac{1}{5}$; 16 maal $\frac{1}{4}$; 9 maal $\frac{1}{3}$ en 4 maal $\frac{1}{2}$.

NB: We raden u aan de betrokken breuken *niet* op het materiaal te schrijven, omdat dit indruist tegen de relativiteit van het breukbegrip.

Het spel verloopt nu als volgt. Het lot beslist wie beginnen mag. Om beurten werpen de spelers met beide dobbelstenen. Afhankelijk van de uitkomst van de worp, worden delen van breukcirkels gekozen.

Bijvoorbeeld: speler *a* gooit (1, 2) $\longrightarrow \frac{1}{2}$.
Hij kan nu kiezen uit drie mogelijkheden, namelijk:
- een stuk ter waarde van $\frac{1}{2}$;
- twee stukken, elk ter waarde van $\frac{1}{4}$;
- drie stukken, elk ter waarde van $\frac{1}{6}$.

Al spelend zullen de spelers ontdekken, dat er meer kans is op een breuk met '6' als noemer dan de kans op een breuk met noemer '2'. Het is dus verstandiger, zesden te kiezen.

Wie precies een 'hele' kan volleggen, mag inwisselen voor een hele.

Als een speler flink voorstaat, zou hij kunnen wachten met inwisselen, daarmee de tegenspeler eventueel belettend bepaalde uitkomsten van worpen te 'verzilveren'. Als de helen op zijn, is het spel uit. Wie de meeste helen heeft, is winnaar.

25 twaalf uur verder

We vertalen breuken in minuten en spelen dan op héle rondgangen van de minutenwijzer van de klok:

▶ Wie het eerst twaalf uur verder is, heeft gewonnen.

Voor het bijhouden van de stand, zouden de leerlingen moeten beschikken over een klok(stempel) en een tussenstandentabel, bijvoorbeeld:

beurt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10							
worp	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$													
in minuten	30	15	20	50													
minuten – totaal	30	45	65	115													
uren	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{12}$	$1\frac{11}{12}$													

Door de breukdelen te vertalen in minuten, wordt het optellen van ongelijknamige breuken sterk vergemakkelijkt. De '60' van de klok speelt als het ware de rol van gemeenschappelijke noemer. Hierdoor hoeven de leerlingen zich niet het hoofd erover te breken, welke gemeenschappelijke noemer zij bij twee gegeven ongelijknamige breuken moeten kiezen.

besluit (5)

Er bestaan meer oefenspelen die in voorgaande bijdrage níet genoemd zijn, dan het beperkte aantal suggesties dat wél beschreven is. Vele van de gegeven suggesties zijn onvolledig, zowel in beschrijving, mate van uitwerking, tips voor benodigde materialen, als mate van doordenking.

Het geheel is bedoeld als ideeënbron voor levende oefenlessen bij het rekenen.

Oefenspelen richten zich op een bepaald speldoel. Dit speldoel maakt de oefenopgaven zinvol, omdat de bedoeling ervan nu buiten die opgaven zélf ligt. Dikwijls komt daar handigheid en strategie bij – omdat dit inherent is aan spel –. Met deze ekstra dimensie verwijzen de oefenspelen naar meer algemene bekwaamheden, die de moeite waard zijn in het onderwijs.

Allereerst echter zijn de gegeven suggesties bedoeld om de inkleding bij het oefenen te variëren. Laat ook deze bijdrage de nodige *oefenstof* doen opwaaien.

achter het spel

Van enkele spelletjes die in de artikelen 'Spel ernstig nemen' *en* 'Strategiespelen' *genoemd zijn, geven we hier wat matematische achtergronden.*
Uit 'Spel ernstig nemen':
- *pak weg;*
- *de toren van hanoi;*
- *weg cirkel.*

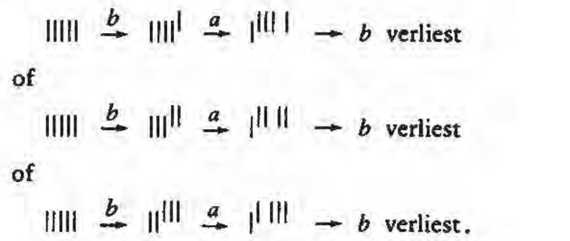
Uit 'Strategiespelen':
- *dobbelstenenloop (4);*
- *raad mijn getal (1);*
- *hex;*
- *samen 15;*
- *nim.*

We gaan in dit artikel niet op alle finesses in, maar duiden slechts wegen aan langs welke verder gewerkt kan worden.

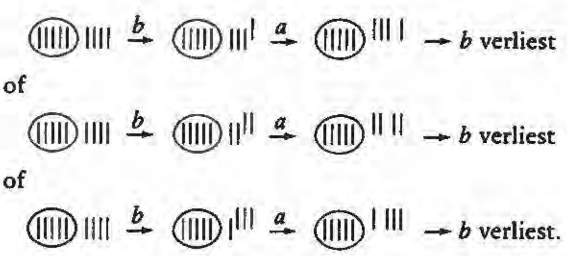
ED DE MOOR
ADRI TREFFERS

1 pak weg

We zoeken eerst naar de slotsituatie (terugredeneren).
Laat *a* de beginner zijn. Als hij in staat is een hoopje van vijf te kreëren, heeft hij gewonnen. Immers, *b* kan er dan één, twee of drie pakken, zodat de volgende spelverlopen mogelijk zijn:



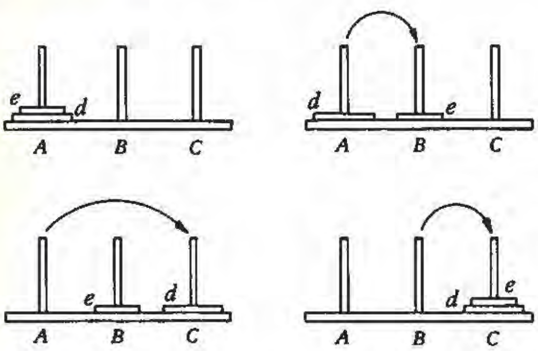
a pakt dus 'samen' met *b* vier lucifers weg.
Hoe kan *a* nu die situatie ||||| kreëren? Wel, *a* weet dat hij gewonnen heeft, als hij vijf weet te kreëren en er samen met *b* vier wegpakt. Daarom is voor hem de situatie '9' ook goed omdat hij dan *b* als volgt op vijf kan manoevreren:



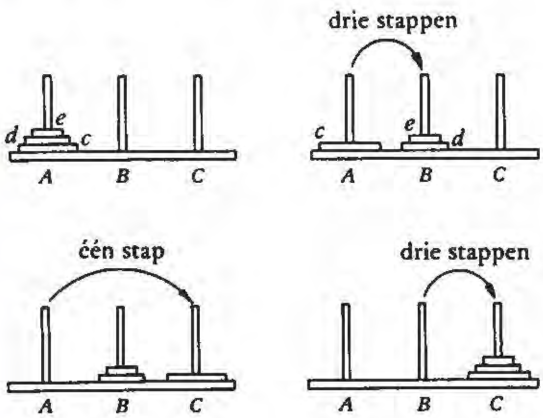
a weet dus door 'induktief' redeneren dat voor hem gewonnen situaties zijn: 1, 5, 9, 13, 17 lucifers. Als hij beginner is en er liggen 18 lucifers, dan pakt hij er één weg. Daarna pakt hij er 'samen' met *b* steeds vier weg, zijn tegenspeler *b* daarmee op de posities 13, 9, 5 manoevrerend.
Als we zo voortgaan kunnen we vaststellen, dat voor *a* gewonnen situaties zijn: 1, 5, 9, 13, 17, 21, etc. (viervouden plus één).
Begin je dus met, laten we zeggen: 40 lucifers, dan moet je als beginner maken 37 en daarna: 33 – 29 – 25 – 21 – 17 – 13 – 9 – 5 – 1.
Begin je als tweede speler, dan kun je van fouten van je tegenstander gebruikmaken om op deze situatie te komen.
Variaties zijn mogelijk door het aantal weg te nemen lucifers te variëren.
Een andere variatie is, de spelregel: 'wie de laatste lucifer wegneemt, heeft verloren', te veranderen in: 'wie de laatste lucifer wegneemt, heeft gewonnen'.

2 de toren van hanoi

We beginnen weer eenvoudig.
Met een torentje van één schijf ben je in één zet klaar.
Voor een torentje van twee schijven (d, e) heb je drie zetten nodig:

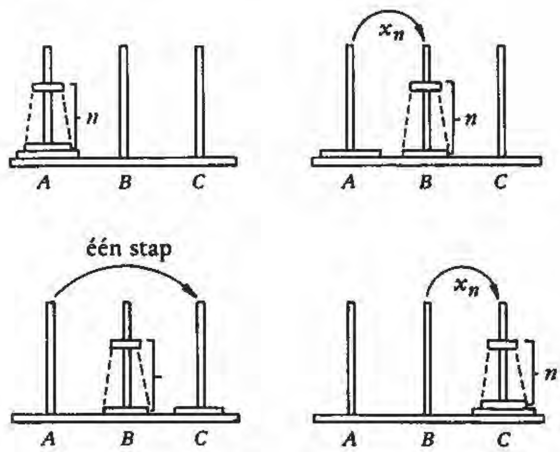


Maar als je het twee-schijven torentje (d, e) in drie zetten op pin C kunt krijgen, kun je door verwisseling van de pinnen B en C dit torentje ook in drie zetten op pin B krijgen. Dit nu biedt de mogelijkheid om te voorspellen hoeveel stappen we nodig zullen hebben om een torentje van drie schijven (c, d, e) van A naar C over te brengen. Immers, er zijn drie zetten nodig om toren (d, e) op B te brengen, daarna één om schijf 'c' naar pin C te brengen en daarna weer drie om toren (d, e) van B naar C te brengen, zodat het totaal is $2 \times 3 + 1 =$ 7 (zetten).
Zie ook het schema:



We gaan verder met deze induktieredenering. We kunnen nu een torentje van drie (c, d, e) in zeven zetten van A naar B overbrengen, daarna één zet voor schijf 'b' van A naar C en tenslotte weer zeven zetten voor het torentje van drie (c, d, e) van B naar C, zodat het totaal aantal zetten voor een torentje van vier schijven zal zijn: $2 \times 7 + 1 = 15$ (zetten).

Deze redenering kunnen we nu steeds stap voor stap voortzetten.
Bij elke schijf meer, brengen we het terug naar het vorige probleem. Zo zal je dus bij een torentje van vijf schijven (a, b, c, d, e) eerst het torentje van vier (b, c, d, e) in 15 zetten van A naar B manoevreren, daarna één zet voor 'a' van A naar C en tenslotte weer 15 zetten voor torentje (b, c, d, e) van B naar C. Totaal: $2 \times 15 + 1 = 31$ (zetten).
In het algemeen kun je dus zeggen, dat bij uitbreiding met één schijf het aantal zetten van het vorige torentje verdubbeld wordt met nog één vermeerderd. In gewone taal is dat een onmogelijke konstruktie, de wiskundetaal helpt ons daarin.
Als ik n schijven in x_n zetten kan verplaatsen, is het aantal voor $n + 1$ schijven $2x_n + 1$.
Nog korter: $x_{n+1} = 2x_n + 1$.
Of in schema:



De vraag dringt zich nu echter op:
Hoe groot is het aantal stappen (x_n) in verband met het aantal schijven (n)?
We maken een tabel:

aantal schijven	1	2	3	4	5	.	.	.	.	n	$n+1$
aantal zetten	1	3	7	15	31	.	.	.	.	x_n	x_{n+1}

Een nadere beschouwing van de getallen in de tweede rij leert ons, dat ze alle '1' minder zijn dan de machten van '2':

1	3	7	15	31
↓	↓	↓	↓	↓
$2-1$	$4-1$	$8-1$	$16-1$	32
↓	↓	↓	↓	↓
2^1-1	2^2-1	2^3-1	2^4-1	2^5-1

In feite is hiermee de formule gevonden:
$x_n = 2^n - 1$.
Dit soort stap-voor-stap-redeneringen noemen we in de wiskunde: volledige induktie.

3 weg cirkel

Dit spel is uitermate geschikt om het begrip strategie aan te demonstreren. De tweede speler kan namelijk altijd volgens een vast voorschrift een situatie kreëren, die gegarandeerd winst oplevert.
Het is, doordat het vlug gespeeld wordt en door z'n visueel-strategisch karakter ook zeer geschikt voor de basisschool. Een belangrijk principe hierbij is opnieuw: het beschouwen van de eindsituaties leidt tot de oplossing.
Een gewonnen situatie is bijvoorbeeld:

(a)

De tegenspeler moet één van beide fiches wegpakken en je hebt gewonnen.
Een verloren situatie is dus:

(b)

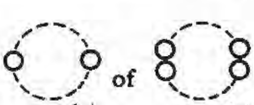
Omdat je tegenstander *(b)* tot *(a)* kan omvormen.
Ook gewonnen is:

(c)

Omdat er kan ontstaan *(b)*, zodat je dan weer gewonnen hebt. Of:

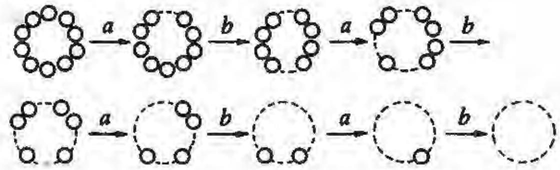
(d)

waarna je de laatste twee wegneemt.
Gewonnen situaties zijn dus:



(a) of (c)

Deze hebben alle gemeen, dat ze *symmetrisch* zijn. Nu kun je er door handig spelen voor zorgen, dat de konfiguratie symmetrisch blijft. De tweede speler kan dus altijd winnen, omdat hij steeds de symmetrie kan terugbrengen. Tot slot nog een voorbeeld:



Niet altijd is beginnen een voordeel!

Ga tenslotte zelf na, hoe je beginnend met een *oneven* aantal, ook als tweede speler kunt winnen. Alleen moet de tweede speler een andere beginzet doen. Welke?

4 dobbelstenenloop (4)

In dit spel is de strategie te ontlenen aan een kleine berekening die tot de waarschijnlijkheidsrekening behoort. We maken hierbij gebruik van het feit, dat de kans voor elk aantal ogen steeds $\frac{1}{6}$ is. *b* is bij elke beurt zeker van zijn vier stappen vooruit.
We berekenen nu wat *a* 'gemiddeld' per worp vooruit gaat. Bij een zeer groot aantal worpen *n* (laten we zeggen *n* = 10.000) zal er een vrijwel even groot aantal worpen ($\frac{1}{6}n$) met een '1', met een '2', etc., optreden, zodat het gemiddeld verwachte aantal ogen zal zijn:

$$\frac{\frac{1}{6}n \times 1 + \frac{1}{6}n \times 2 + \frac{1}{6}n \times 3 + \frac{1}{6}n \times 4 + \frac{1}{6}n \times 5 + \frac{1}{6}n \times 6}{n} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5.$$

a gaat dus gemiddeld 3,5 stap per beurt vooruit en zal derhalve op den duur van *b* verliezen.

5 raad mijn getal

Stel de ene speler heeft 49 in gedachten.

vraag 1: groter dan 50?	antwoord: neen	verschil → 25 ;
vraag 2: groter dan 25?	antwoord: ja	verschil → $\frac{25}{2}$;
vraag 3: groter dan $37\frac{1}{2}$?	antwoord: ja	verschil → $\frac{25}{4}$;
vraag 4: groter dan $43\frac{3}{4}$?	antwoord: ja	verschil → $\frac{25}{8}$;
vraag 5: groter dan $46\frac{7}{8}$?	antwoord: ja	verschil → $\frac{25}{16}$.
vraag 6: groter dan $48\frac{7}{16}$?	antwoord: ja	

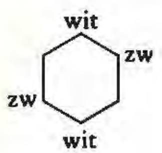
Let op: het getal kan nu alleen nog zijn 49 of 50.
Dus vraag 7: groter dan $49\frac{7}{32}$? Antwoord: neen.
Konklusie: het is 49!
Nu hoef je bij deze halveringsmetode niet zo

precies met de breuken te werken. De vragen: 'Is het groter dan 37,2; 43,2; 46,2; 48,2; 49,2'?, zouden ook goed geweest zijn. Zelfs hadden we kunnen nemen: 37, 43, 46, 48, 49!

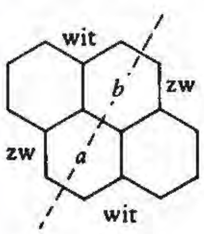
6 hex

Een spel dat in 1942 is uitgevonden door een deens fysikus, genaamd Piet Hein. Het is een spel, waarbij we vooral op grotere borden een strategie 'op korte termijn' kunnen toepassen. In ons geval was het bord van vier-bij-vier. Je kunt deze grootte natuurlijk variëren.
Bij het opsporen van de strategie, werken we vanuit vereenvoudigde situaties. Een metode, die ons bij het analyseren vaak goed van pas kan komen.

- Niet lachen! Het *één-bij-één-bord*. Ja, de beginner wint:

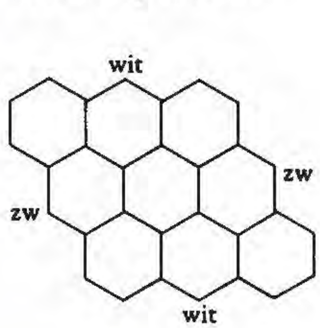


- Het *twee-bij-twee-bord*:



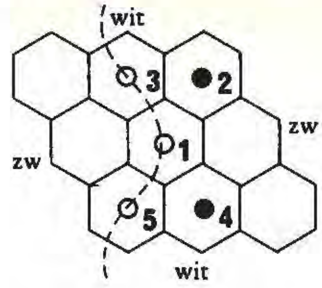
Het is heel eenvoudig na te gaan, dat degene die als eerste de velden *a* of *b* (één van de velden op de korte diagonaal) bezet, wint. De beginner kan dus bij een goede strategie winnen.

- Het *drie-bij-drie-veld*:

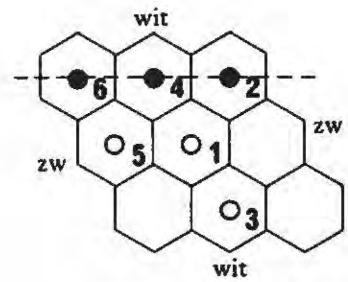


Bij de 'oneven x oneven'-velden bestaat een middelste veld. Dit lijkt een voor de beginner strategisch goed veld te zijn.

Voorbeeld:

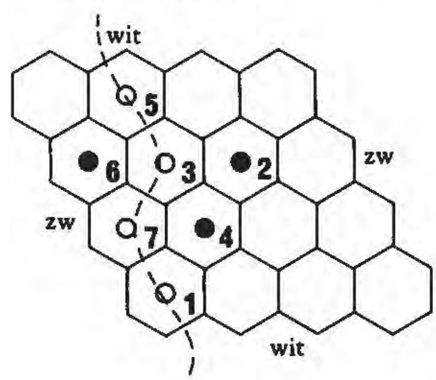


Wit moet wel goed blijven spelen. Dat wil zeggen: hij moet mogelijke verbindingskettingen van zwart meteen de kop indrukken. Hier volgt een voorbeeld van een foute voortzetting van wit:

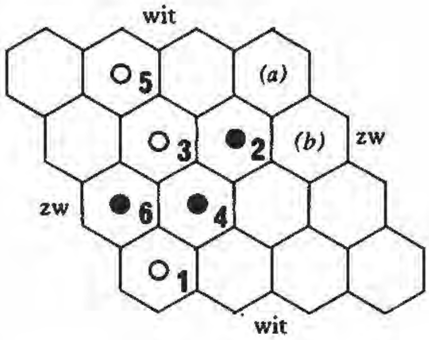


Het is niet moeilijk aan te tonen, dat de winnende strategie voor wit (beginner) is, het middelste veld te bezetten.
Het aantal mogelijkheden voor zwart is niet zo groot en de tweede zet voor wit laat zich makkelijk ontdekken.
Voor de één-bij-één-, twee-bij-twee-, drie-bij-drie-borden, is hiermee de strategie gevonden.

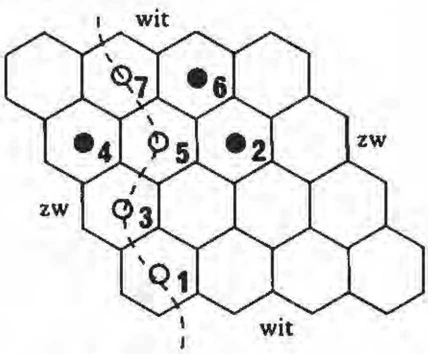
- Nu ons geval: het *vier-bij-vier-bord*.
  Het wordt snel moeilijker, omdat het aantal velden kwadratisch aangroeit: 1, 4, 9, 16, ...
  Enkele voorbeelden:



Zwart speelde hier op de zesde zet dom; zie hieronder: zwart wint, daar hij veld (*a*) of (*b*) kan bereiken.

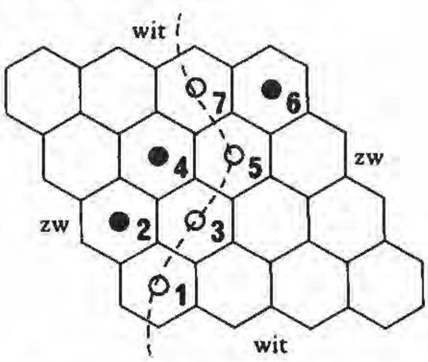


Betekent dit dat wit bij deze beginzet en de eerste zet van zwart verliest?
Toch niet:

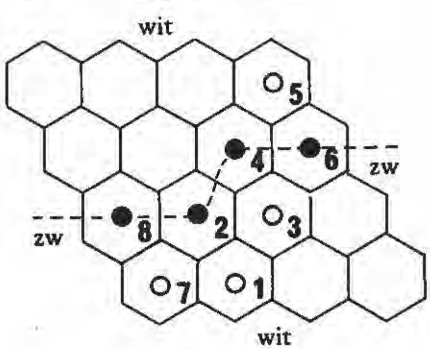


Het is al veel gekompliceerder, doch niet onontwarbaar, om na te gaan dat zwart bij juist spel van wit bij deze zet altijd verliest.

Zwart kan echter zoveel andere dingen doen, bijvoorbeeld:

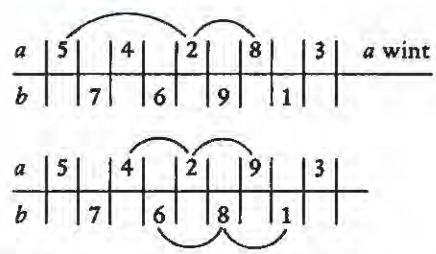


Kan zwart wel winnen?
Weer een voorbeeld:



Zijn dit al genoeg voorbeelden om iets over de winnende strategie te kunnen zeggen?
Kijken we nog eens naar het voorbeeld van het twee-bij-twee-bord, dan blijkt ook hier weer de korte diagonaal een belangrijke strategische lijn te zijn. Het ziet ernaar uit, dat de beginner door meteen deze lijn te bezetten en verder juist te spelen, altijd kan winnen.

7 samen 15



Aan het tweede voorbeeld zien we, dat allereerst de vraag rijst of deze partij voor *a* gewonnen is of remise. Dat is natuurlijk een kwestie van spelregels afspreken.
We zullen in het kort iets van de analyse duiden, onder de regel: het spel stopt als één van de spelers drie kaarten heeft, waarvan de som 15 is.
Door systematisch opschrijven vinden we, dat er precies acht kombinaties van de getallen één tot en met negen zijn, die als som 15 hebben. Deze acht optellingen zijn terug te vinden in een vierkant. Alle drie rijen, alle drie kolommen en de twee diagonalen leveren als som 15 op:

$1 + 5 + 9 = 15$
$1 + 6 + 8 = 15$
$2 + 4 + 9 = 15$
$2 + 5 + 8 = 15$
$2 + 6 + 7 = 15$
$3 + 4 + 8 = 15$
$3 + 5 + 7 = 15$
$4 + 5 + 6 = 15$

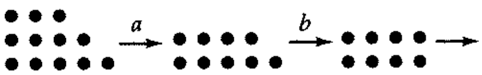
2	9	4
7	5	3
6	1	8

Omdat '5' in vier van de acht kombinaties voorkomt (midden in het vierkant staat), is het uit statistische overwegingen gunstig om als beginner kaart '5' te pakken.
De speler, die het tovervierkant in zijn achterhoofd heeft, is natuurlijk sterk in het voordeel.

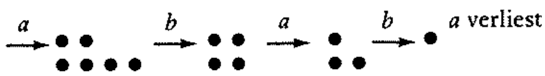
8 nim

Op dit oude chinese spel bestaan vele varianten.

We redeneren weer vanuit een eindsituatie. Stel, dat speler *a* de gehele bovenste rij wegneemt:



b zal winnen, omdat hij de situatie symmetrisch kan houden.
Bijvoorbeeld:



Pas echter op: In dit geval is symmetrie niet door te voeren tot: :;
want dan wint *a*.
Zodra *a* nog een hele rij wegneemt, neemt *b* alle behalve één uit de laatste rij weg.
Degene, die dus begint met een hele rij weg te nemen, zal bij juist tegenspel verliezen.

[1]) Naar aanleiding van het op pag. 37 weergegeven dobbelsteenspelletje.

spel ernstig genomen

BEREDENEREN IS EEN, MAAR HET JE KUNNEN VOORSTELLEN IS TWEE[1])

Overkomt u dat ook wel eens? Je hebt iets feilloos bewezen of beredeneerd en toch blijf je zitten met een onvoldaan gevoel. Je moet eigenlijk volledig overtuigd zijn, maar je bent het niet.
Twee voorbeelden.

- *Onze aarde is bolvormig. Maar ons landje is zo klein, dat de bolvorm nauwelijks van invloed is. Dacht u dat? Stel u eens voor: men graaft een rechte tunnel van maastricht naar groningen. In de buurt van zutphen is men halverwege en is de tunnel dus het verst onder het aardoppervlak. Hoe ver? Ruim 1500 meter! Reken maar na. Kunt u zich dat voorstellen? Ik niet!*
- *Heel lang geleden was er oorlog tussen het noordelijk halfrond en het zuidelijk halfrond. Om de grens tussen de beide grootmachten duidelijk te markeren, had men een touw van ongeveer 40.000 km rond de evenaar gelegd. Toen de oorlog voorbij was, bleek het grensverkeer nogal wat ongemak van het touw te hebben: struikelende voetgangers en vastrakende bootjes. Een wijze vrouw kwam op het volgende idee: hang het touw overal een meter boven de evenaar. Hoeveel ekstra touw is daarvoor nodig? Slechts 6,28 meter! Onvoorstelbaar weinig.*

PIET SCHOLTEN

een dobbelsteenspel

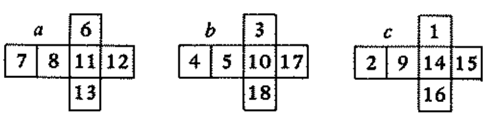
Bij dit genre probleempjes heb ik het gevoel dat mijn intuïtie me volledig in de steek laat. Datzelfde gevoel had ik bij het spelletje waarmee Jan Nieland ons tijdens een gesprek over spelen liet kennis maken.
Dat spelletje ziet er als volgt uit: de getallen 1 tot en met 18 zijn op een bepaalde manier over drie dobbelstenen verdeeld. Voor het gemak noem ik zowel de dobbelstenen als de spelers die met de betreffende dobbelstenen gooien: *a*, *b* en *c*.
a speelt tegen *b*. Ze gooien elk met hun dobbelsteen. Wie het hoogst gooit, krijgt een punt. *a* blijkt op den duur van *b* te kunnen winnen. Evenzo blijkt *b* van *c* te kunnen winnen. Tot zover is er niets vreemds aan de hand: *a* wint van *b* en *b* wint op zijn beurt van *c*. Maar nu laten we *a* tegen *c* spelen. Als uw intuïtie overeenkomt met de mijne, zult u ook denken dat *a* van *c* zou moeten winnen.
Het lijkt een soort transitieve relatie: *a* wint van *b*, *b* wint van *c*, dus *a* wint van *c*. Zoiets als: *a* is groter dan *b*, *b* is groter dan *c*, dus *a* is groter dan *c*.
Nu weten we allen wel uit ervaring dat je met die transitiviteit moet oppassen: als Jan met tennissen altijd van Henk wint en Henk wint altijd van Kees, kan het nog best zo zijn dat Jan van Kees verliest. En als Erik verliefd is op Tineke en Tineke is verliefd op Karel, hoeft Erik natuurlijk niet ...
Maar bij het spelletje met de dobbelsteen, waarbij je de kans op winnen eksakt kunt uitrekenen, verwacht je toch eigenlijk dat *a* dan ook wel van *c* zal winnen. We zullen zien!

welke verklaring?

De som van de getallen 1 tot en met 18 is:

$\frac{1}{2} \times 18 \times 19 = 171.$

De som van de getallen op elk van de dobbelstenen is $171 : 3 = 57$. Eerlijker kan het niet.



We maken de winstkansen zichtbaar:

a \ *b*	3	4	5	10	17	18
6	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*
7	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*
8	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*
11	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*
12	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*
13	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*

a wint van *b*

winstkans: $\frac{21}{36}$

b \ *c*	1	2	9	14	15	16
3	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*
4	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*
5	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*
10	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*
17	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*
18	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*

b wint van *c*

winstkans: $\frac{21}{36}$

c \ *a*	6	7	8	11	12	13
1	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*
2	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*
9	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*
14	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
15	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
16	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*

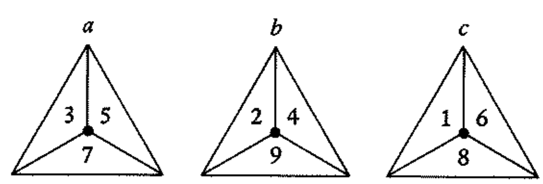
c wint van *a*

winstkans: $\frac{21}{36}$

U ziet het: de meest voor de hand liggende gedachte – *a* wint van *b* en *b* wint van *c*, dus *a* wint van *c* – blijkt onjuist te zijn en je blijft zitten met een onvoldaan gevoel. Je kunt je daarbij neerleggen natuurlijk en denken: ik heb me kennelijk weer eens vergist. Maar wie wiskunde bedrijft, is van huis uit nieuwsgierig. Het minste dat je toch wel wilt hebben, is een aannemelijke verklaring.

tolletjes

Een veel voorkomende werkwijze daarbij is: zoek een soortgelijk probleem, maar dan eenvoudiger. Na enig puzzelen lukte dat.
Drie tolletjes:



De getallen 1 tot en met 9 zijn zo over de drie tollen verdeeld, dat op elke tol de som van de getallen 15 is.
a wint van *b* (winstkans: $\frac{5}{9}$) en *b* wint van *c* (winstkans ook: $\frac{5}{9}$).
En ook hier weer: *c* wint tegen de verwachting in van *a* (eveneens met een winstkans van $\frac{5}{9}$).

We gaan de getallen op de tollen nader bekijken. We delen de getallen 1 tot en met 9 in drie kategorieën in: laag (1, 2, 3), midden (4, 5, 6) en hoog (7, 8, 9). Op elke tol staat een getal uit elke kategorie. We nemen twee willekeurige tollen: *x* en *y*. Het getal uit de kategorie 'midden' van tol *x* is groter dan het getal uit de kategorie 'laag' van tol *y*. Het getal uit de kategorie 'hoog' van tol *x* is groter dan de getallen uit de kategorie 'midden' en 'laag' van tol y. Van de 3 x 3 = 9 paren getallen van de tollen x en y zijn er dus altijd al drie waarbij het getal van tol x groter is dan dat van tol y. De andere twee ziet u in het volgende tabelletje door middel van pijltjes aangegeven:

a		*b*		*c*		*a*
3	------→	2	------→	1		3
5	------→	4		6	------→	5
7		9	------→	8	------→	7

a heeft ten opzichte van *b* vijf mogelijkheden om te winnen en vier om te verliezen. Evenzo *b* ten opzichte van *c* en *c* ten opzichte van *a*. Twee dingen zijn mij nu volledig duidelijk, namelijk dat *c* bij een voldoend aantal spelen toch van *a* wint en ook hoe dit spelletje gekonstrueerd is.

overtuigd?
Verstandelijk gezien, ben ik dus volledig overtuigd. Toch blijf ik nog steeds met het onvoldane gevoel zitten dat volgens mijn intuïtie *a* van *c* moet winnen.
Wie van u mij daarvan het meest overtuigend kan afhelpen, beloon ik graag met een boekenbon.

literatuur

*Er zijn honderden boeken over spelletjes verschenen. Met nevenstaande titels hebben we uit dit (totaal) aanbod een grove selektie gemaakt. De titels die we nog eens ékstra willen aanbevelen, hebben we van een * voorzien.*

HUUB JANSEN
ROB DE JONG

Van Delft, Pieter en Jack Botermans: *Spelen met puzzels*, amsterdam 1978.*
Dit fraai verzorgde boek verscheen indertijd als boek van de maand.

Elffers, Joost: *Tangram*, keulen 1973.
Veel probleempjes (met oplossingen). Puzzelstukjes bijgevoegd.

Games & Puzzles, the quarterly for all games and puzzles enthusiasts, Willow House Press, london.*
Dit tijdschrift verschijnt vier keer per jaar. 48 pagina's per aflevering. Bevat naast uitgebreide beschrijvingen van nieuwe (bekroonde) spelen, vele puzzeltjes. De top 20, de twintig meest verkochte spelletjes, is iedere keer weer verrassend. Soms staan er ook historische gegevens van spelletjes in.

nctm: Games & Puzzles for Elementary and Middle School Mathematics, reston virginia 1975.*
Een verzameling van meer dan honderd spelletjes die in de loop der jaren in 'The Arithmetic Teacher' zijn gepubliceerd. De bundel bevat hoofdzakelijk oefenspelen op de gebieden van: natuurlijke getallen, plaatswaarde, negatieve getallen, breuken, patronen, meetkunde, enz.

Gardner, Martin: *Mathematical Games from Scientific American*, new york, diverse jaartallen.*

Science et Vie, hors-série, Excelsior publications, paris.*
Het septembernummer van 1978 is geheel gewijzigd aan 'Les jeux de réflexion', Bevat recencies van 120 spelen. Interessant.

Junior Education, london, maart 1979.*
Het maartnummer van dit tijdschrift bevat vele aardige strategie- en oefenspelen.

Johnson, Donovan, A.: *Games for learning mathematics*, minnesota 1973.
Een verzameling oefen- en strategiespelen.

Gnirk, Hajo, e.a.: *Strategiespiele für die Grundschule*, hannover 1970.
Naast allerlei zinvolle 'Partnerspiele' staat in dit boekje ook een aantal 'Einzelspiele'.

Jacoby, Oswald en William H. Benson: *Wiskunde voor je plezier*, utrecht 1967.
Vooral verhaalprobleempjes binnen de rekensfeer.

Kolk, Wim van der: *Oosterse spelletjes: spelletjes uit Japan, Indonesië, China, Korea, Thailand en Burma*, den haag 1974.
Een boekwerkje van ca honderd pagina's, fraai geïllustreerd. Bevat een grote hoeveelheid van bekende (mah jong, go) en onbekende spelletjes.

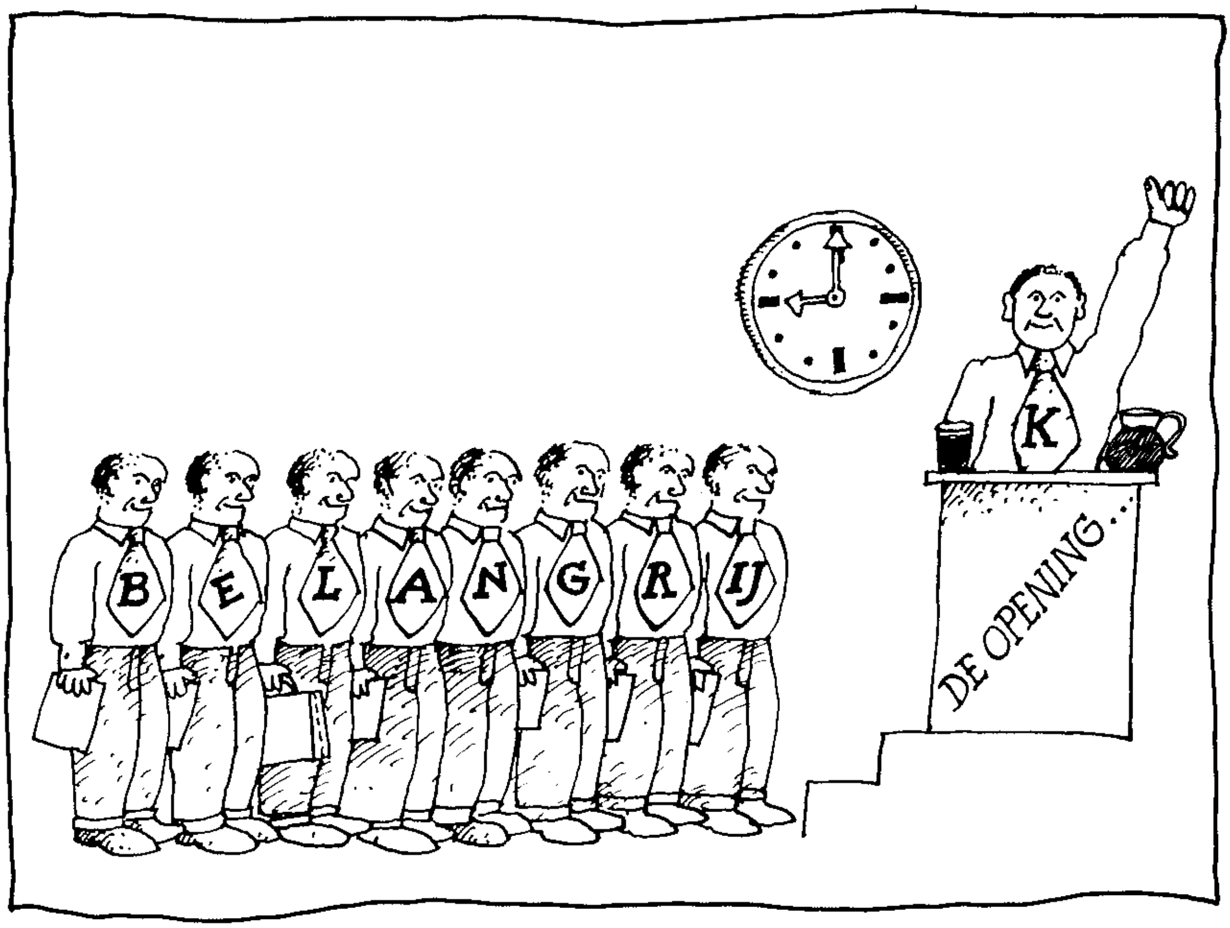
Falkener, Edward: *Games ancient and oriental and how to play them*, new york 1961.
De oorspronkelijke editie verscheen in 1892. Veel historische en eksotische informatie.

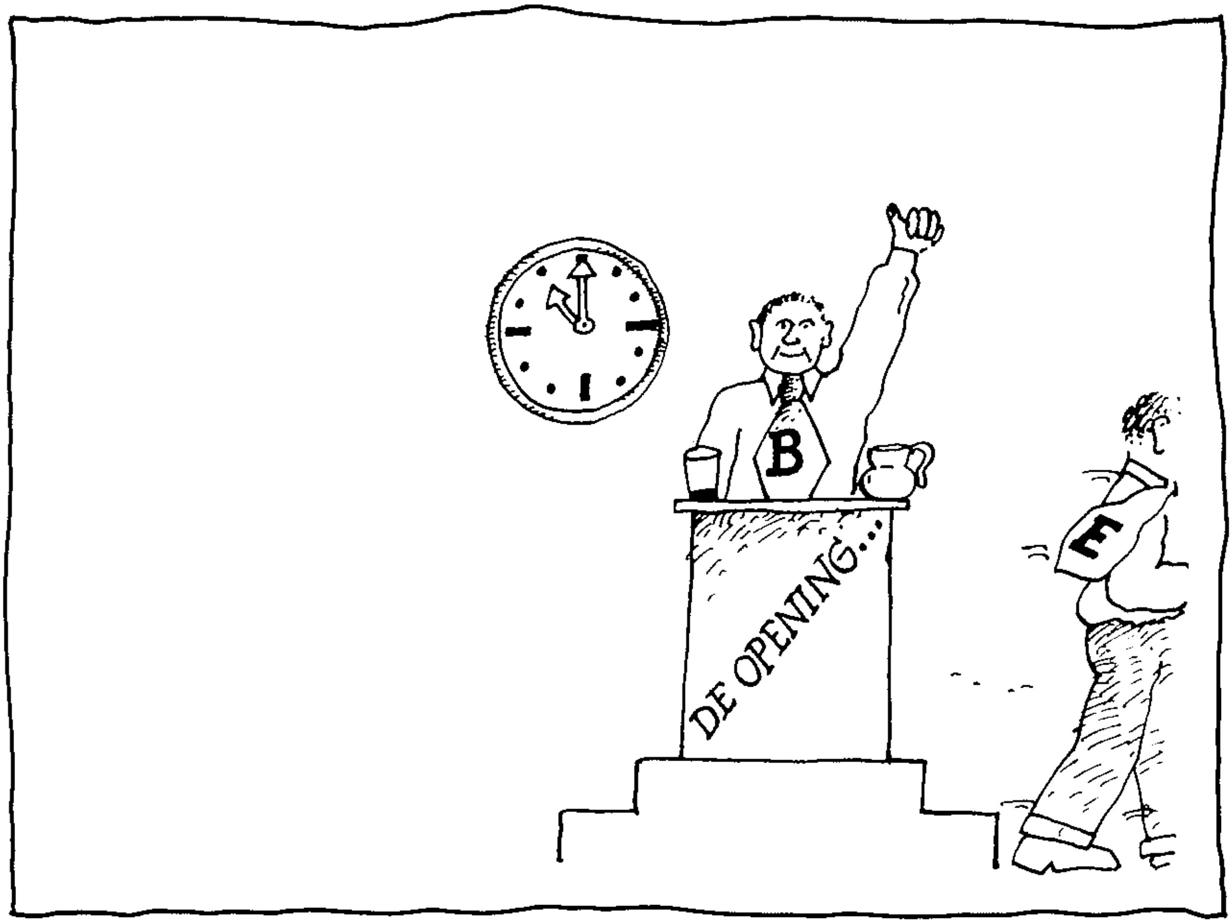
Dudeney, H.E.: *Amusements in Mathematics*, new york 1970.
De eerste druk van dit vermaarde boek dateert al van 1917.

Coxeter, H.S.M.: *Mathematical Recreations and Essays*, toronto 1972_{12}.
Een verzameling van wiskundige problemen en spelletjes, zoals nim, kalenderproblemen, magische vierkanten. Uitvoerige wiskundige uitwerkingen en uitleg. Het boek veronderstelt nogal wat wiskundige voorkennis.

Carroll, Lewis: *Pillow Problems and A Tangled tale*, new york 1958.
Twee boeken in één band verenigd. Het eerste boekje heeft als volledige titel: 'Pillow problems thought out during wakeful hours'. Herdrukken van edities uit het einde der negentiende eeuw. Eigentijds geïllustreerd.

Schuh, F.: *Wonderlijke problemen; Leerzaam Tijdverdrijf door Puzzle en Spel*, zutphen 1943.
Voor de echte liefhebber van strategiespelen.


B
E
L
A
N
G
R
IJ
K
DE OPENING...


B
DE OPENING...
E