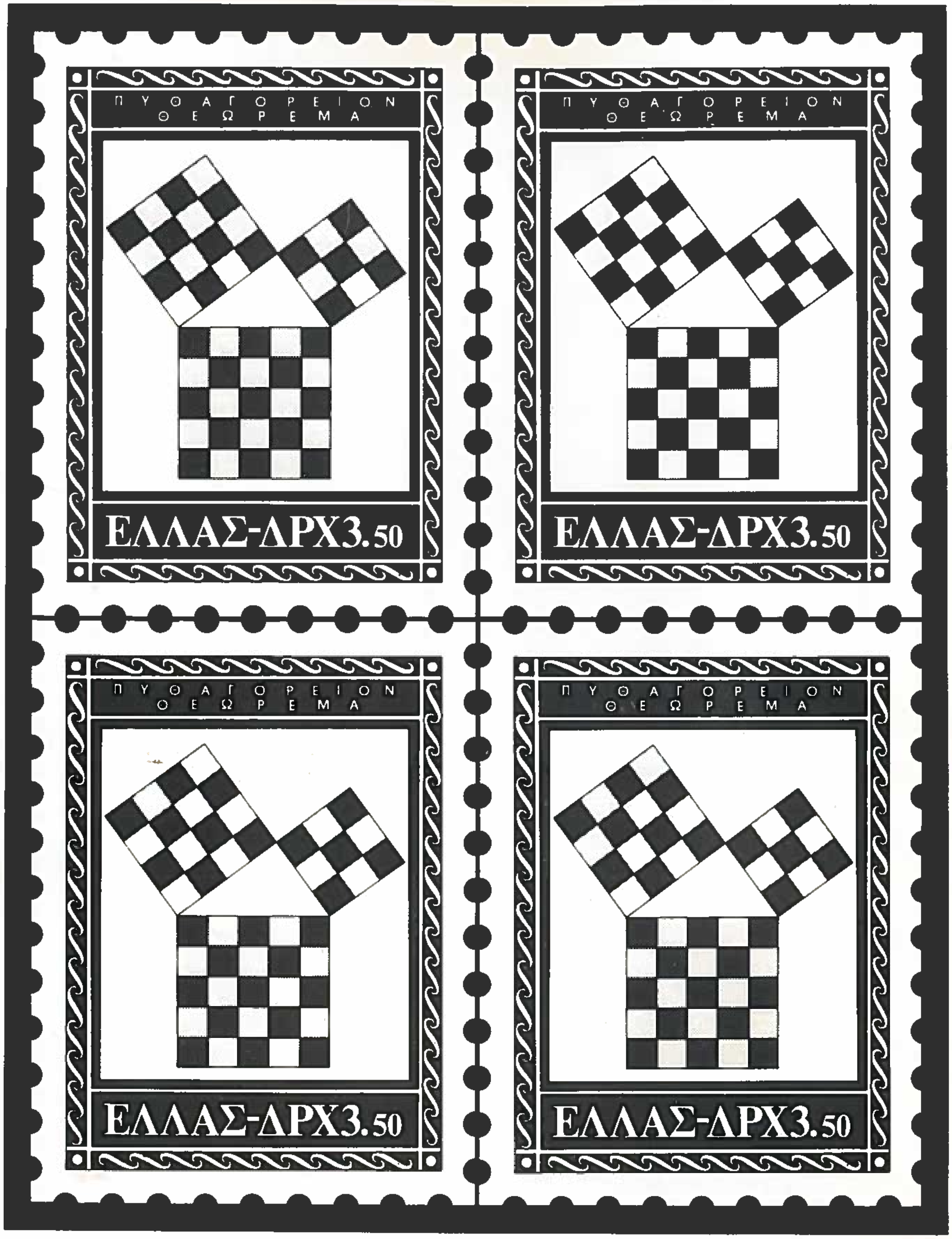
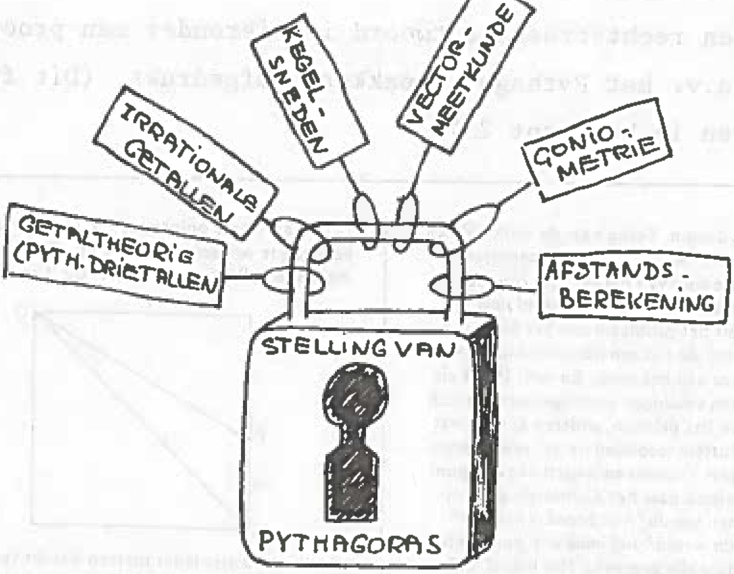
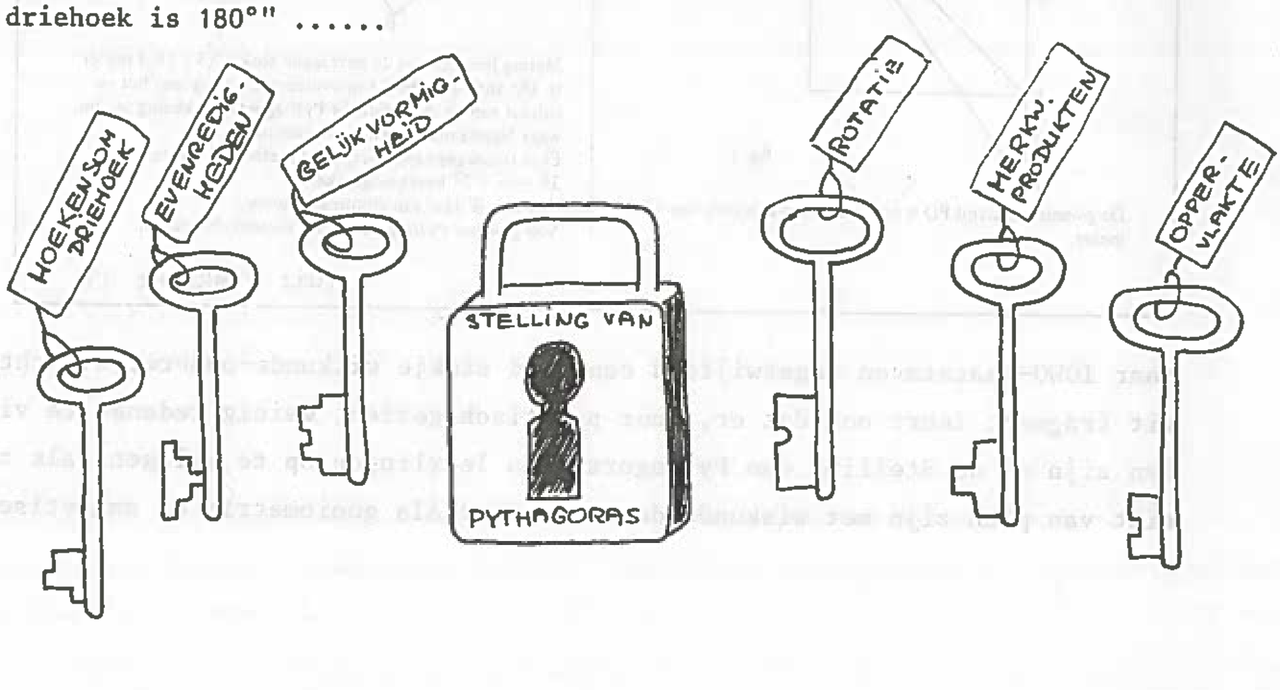


DOCENTENHANDLEIDING

Of het nu een klassiek-euclidische opzet of een transformatie-getinte opbouw van de school-meetkunde betreft, de Stelling van Pythagoras mag niet ontbreken, sterker nog, ze neemt een sleutelpositie in. Ze is als het ware systeem-invariant. En haar rol blijft geenszins beperkt tot het ontsluiten van meetkundige problemen ....



Die sleutelpositie neemt zij in op puur inhoudelijke gronden; voorkennis van de Stelling van Pythagoras is eenvoudig onontbeerlijk bij de behandeling van een aantal onderwerpen. Ook als men de "antecedenten" van de Stelling beziet, blijkt duidelijk hoe centraal zij in de meetkunde staat. In de traditionele deductieve opbouw waren die antecedenten "gelijkvormigheid" en "evenredigheid", in de huidige opzet wordt de Stelling van Pythagoras meestal via "oppervlakte" en "rotatie" verklaard, soms ook met "merkwaardige produkten". En elke bewijsvoering steunt op de "hoekensom van een driehoek is 180°" ......



Twee vragen zou ik hier willen opwerpen:

1. Past de Stelling van Pythagoras in de visie op meetkunde-onderwijs zoals Wiskivon die heeft ontwikkeld en vorm heeft gegeven in pakketjes als: "Zie je wel", "Verpakkingen", "Schaduw en diepte"?
2. Is het zinvol dat leerlingen die *niet* met wiskunde doorgaan de Stelling van Pythagoras moeten leren?

In plaats van een rechtstreeks antwoord is hieronder een proeve van een stukje onderwijs n.a.v. het Pythagoras-pakketje afgedrukt. (Dit fragment werd eerder beschreven in Wiskrant 23).

Tot zover mijn mooie droom. Terug naar de werkelijkheid nu. Leao-mavo Lunetten, tweede klas, dinsdagmorgen, vierde lesuur. De laatste som van het boekje: *Hoeveel meter is de langste stok die in het wiskundelokaal past?*

De lerares (Nanda) stelt het probleem aan het begin van de les: jullie krijgen even de tijd om dat samen uit te vinden. In groepjes gaan ze aan het werk. En hoe! Het is als na het startschot bij een veldloop: sommige nestelen zich meteen aan de kop van het peloton, anderen komen wat trager op gang, maar luttele seconden na het sein is iedereen in beweging. Vingers zwaaien en wijzen van een punt in de hoek van het plafond naar het diametrale punt op de vloer. Vragen barsten los. *Juf hoe breed is het hier? De hoogte moet je toch weten? Juf, mag je schuin meten?* Nanda verstrekt geduldig alle gegevens. Het lokaal blijkt 7 bij 7 bij 3 meter te zijn, verdacht mooie getallen. Schuin meten gaat moeilijk met al die tafels en stoelen, verzin daar maar eens wat op.

In een paar groepjes wordt de vloerdiagonaal keurig met Pythagoras uitgerekend: $7^2 + 7^2$ en daar de wortel uit, het rekenmachientje geeft 9,9. Bij inventarisatie van de antwoorden blijkt één groep niet verder gekomen dan die 9,9, al zijn ze er wel van overtuigd dat dit niet de lengte van de langste stok is. Een andere groep heeft alleen de muurdiagonaal berekend.

Het groepje van Olanda heeft het zó gedaan (fig. 1):

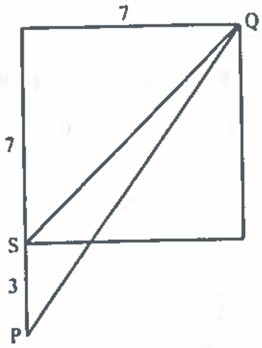


fig. 1

De gemeten afstand PQ is ca 12 cm, dus een stok van 12 meter.

Een interessante oplossing, waard om van alle kanten bekeken te worden, vindt Nanda. De eerste protesten maken het alleen maar fouter: die 3 moet naar boven:

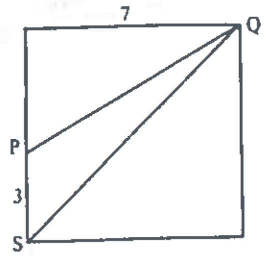


fig. 2

Maar hiervan ziet ieder meteen dat dit veel te kort is. Overhead-projector uit, aanwijzen in het lokaal (dat misschien wel het beste onderwijsleermiddel bij meetkundelessen is). Nanda laat de vloerdiagonaal en de opstaande ribbe naast de deur met de vinger volgen. Bij Anja breekt het inzicht door: PS moet haaks op SQ staan (fig. 3).

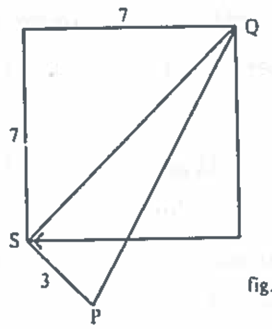


fig. 3

Meting leert nu dat de gevraagde stok 10,3 à 10,4 meter is. Dit antwoord blijkt in overeenstemming met het resultaat van de dubbeldikke Pythagorasberekening te zijn, waar Nanda met de klas op aanstuurt.

Er is trouwens een groepje dat meteen de wortel uit $3^2 + 7^2 + 7^2$ heeft uitgerekend.

Hoe ben je daar aan gekomen Conny?

Nou gewoon Pythagoras, maar nu met drie zijden ...

(Uit Wiskrant 23)

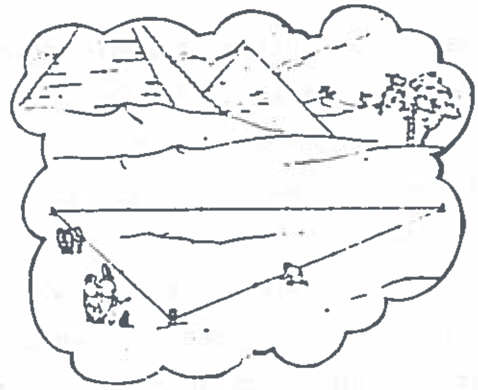
Naar IOWO-maatstaven ongetwijfeld een goed stukje wiskunde-onderwijs. Echter, dit fragment leert ook dat er, puur praktisch gezien, weinig redenen te vinden zijn om de Stelling van Pythagoras aan leerlingen op te dringen, als zij niet van plan zijn met wiskunde door te gaan. Als goniometrie en analytische meetkunde buiten je gezichtskring blijven, wat moet je dan met Pythagoras? Voor het bepalen van "schuine" afstanden ligt de "natuurmethode" (tekenen op schaal en meten) toch het meest voor de hand! Van leerlingen die hebben leren vertrouwen op hun gezonde verstand kun je toch niet verwachten dat ze zoiets ingewikkelds doen als kwadrateren, optellen en worteltrekken, wanneer het ook simpeler kan? De tweede vraag, gesteld op de vorige bladzijde, zouden we dus met "nee" moeten beantwoorden.

Er is echter een andere reden te bedenken om toch een Pythagoras-pakket voor de tweede klas te ontwerpen. Is het niet zo, dat elke leerling toch minstens één keer in zijn leven kennis zou moeten maken met de typische wiskundige denkwijze? Al was het alleen al om straks een verantwoorde keuze te kunnen maken bij de samenstelling van zijn vakkenpakket ......

> Het probleem van de langste stok in het lokaal is een van de serie "kleine" toepassingen, die we in het tweede hoofdstuk van het proefpakket Pythagoras aan de leerlingen voorleggen. Bij dit soort sommen verlang je van de leraar dat hij een "schijnbare" omweg maakt. Bij echte wiskunde een gebruikelijk procédé: je vertaalt een probleem, transformeert het, er rolt iets uit, je vertaalt weer terug. Voor outsiders vaak een onbegrijpelijke weg.
> Dit leggen van een "extra-structuur" op een probleem is een moeilijkheid die we als wiskundeleraar gemakkelijk onderschatten. Getraind als we zijn in het flexibel hanteren van stellingen en formules. Voor leerlingen betekent zoiets gauw: het uitschakelen van je gezonde verstand, doen wat de leraar verlangt, trucmatig handelen. Dat wil je als leraar voorkomen door een zo inzichtelijk mogelijke behandeling, door de leerlingen zoveel mogelijk zelf ontdekkingen te laten doen. Maar de lijn is lang, en wie weet nog het begin als hij bijna aan het eind is? Ontegenzeggelijk bestaat er een flinke categorie leerlingen voor wie de hier geschetste wiskundige aanpak ontzettend belangrijk is, maar de vraag is natuurlijk of elke Nederlander onder dit juk door moet. Nou ja, juk. In die bewuste tweede klas van Nanda kreeg ik niet de indruk dat ze er zo onder gebukt gingen. Afgezien van een paar moeilijke momenten vonden ze het Pythagoraspakket best leuk. Een juk wordt het wèl, als de verzameling kunstgrepen en toverformules een beetje te groot wordt. En voor een aantal uit de klas die straks welgemoed het C-programma gaan volgen zit dat er dik in.
> De ervaringen in de Lunettenklas hebben mij gesterkt in de opvatting dat de stelling van Pythagoras een goede kennismaking met de typisch wiskundige werkwijze is. Ik doel daarbij op een viertal aspecten:
> - de ontdekking van een niet-triviale relatie tussen figuren of getallen;
> - de gang van het exemplarische naar het algemene: het nadenken over "waarom klopt het altijd?", de bewijsvoering;
> - het toepassen van dezelfde wiskundige stuctuur in ogenschijnlijk uiteenlopende situaties.
>
> Je zou kunnen zeggen: de wiskunde in een notedop.
>
> (Uit Wiskrant 23)

Nemen we verder nog in aanmerking dat de Stelling van Pythagoras gemakkelijk centraal kan staan bij een aantal gezonde wiskundige activiteiten, zoals:
- oppervlakterekening (op het spijkerbord)
- telproblemen
- meetkundige legpuzzels
- rekenen (met kwadraten en wortels)

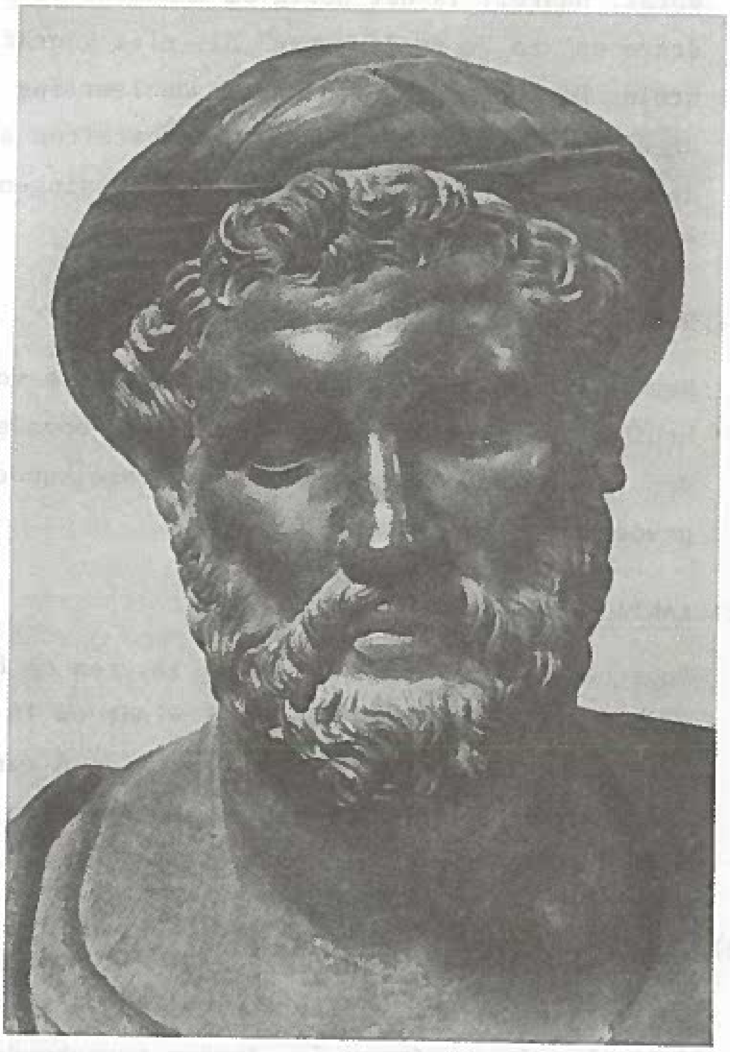
dan lijkt hiermee de keuze van de leerstof in dit pakket voldoende verdedigd.



Overbekend is de legende van de Egyptische touwspanners die bij de "constructie" van rechte hoeken gebruik gemaakt zouden hebben van een driehoek met zijden 3, 4 en 5.. Als het niet waar is, dan is het toch leuk verzonnen. Het schijnt dat Cantor dit verhaal voor het eerst in de wereld bracht.

In zijn "Ontwakende Wetenschap" schrijft van de Waerden hierover:
In 90% van alle boekjes kan men de mededeling vinden dat de Egyptenaren de rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5 kenden en gebruikten voor het uitzetten van rechte hoeken. Wat is deze mededeling waard? Niets! Waarop berust zij? Op twee feiten en een redenering van Cantor. De feiten zijn: bij de grondlegging van een Egyptische tempel kwamen "koordspanners" te pas, en de basishoeken van tempels en pyramiden zijn meestal zeer nauwkeurig recht. Cantor redeneert nu zo: die rechte hoeken moeten door de koordspanners geconstrueerd zijn, en ik (Cantor) kan mij geen andere manier voorstellen, met gespannen koorden een rechte hoek te construeren dan door middel van drie koorden ter lengte 3, 4 en 5, die een driehoek vormen. Dus moeten de Egyptenaren deze driehoek wel gekend hebben.
Is het niet ongelooflijk? Niet dat Cantor deze hypothese eens opgesteld heeft, maar dat zij door het vele afschrijven tot een "algemeen bekend feit" is geworden!

"In 90% van alle boekjes" is misschien wat overdreven, maar het is waar dat er heel wat populaire wiskundige werkjes en schoolboeken zijn die dit verhaal meer of minder smakelijk presenteren. En het is zeker niet revolutionair om de behandeling van de Stelling van Pythagoras aan te vangen met de 3-4-5 driehoek. Martin Wagenschein geeft in zijn mooie boek "Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken" aan hoe de Stelling van Pythagoras aan jonge kinderen "voorbeeldig" onderwezen kan worden. (Zie appendix: "das Exemplarische Lehren als fächerverbindendes Prinzip"). Dat wij ook voor de 3-4-5 instap gekozen hebben is een gevolg van het inzicht dat de Stelling van Pythagoras voor het berekenen van afstanden een gekunsteld instrument is. Het probleem: "hoe moet ik de zijden van een driehoek kiezen om een "echte" rechthoekige driehoek te maken", leek me het meest natuurlijke standpunt. Het 12-knopentouw biedt bij zo'n opzet een goede mogelijkheid voor een eerste oriënterende activiteit, vandaar toch maar de legende van de Egyptische touwspanners. Onnodig te zeggen dat er geen enkel bezwaar tegen is dat deze "story" door de leraar van meet af aan wordt gerelativeerd. Dat geldt trouwens voor het gehele verhaal waarin de kleurrijke figuur die Pythagoras geweest moet zijn, nieuw leven ingeblazen wordt. Het is duidelijk pseudo-historisch. Op blz. 13 van het leerlingenboekje wordt dit uitdrukkelijk gezegd; op dezelfde bladzijde kan men een paar serieuze opmerkingen over de geschiedenis van Pythagoras vinden. Een bron voor de leraar die wat meer over de oude geschiedenis kwijt wil is het eerder genoemde "Ontwakende Wetenschap" van van den Waerden. (Engelse titel: "Science Awaking").



Man met tulband, misschien Pythagoras. Sculptuur uit de 4de of 5de eeuw vóór Christus.
Uit: L. Schefold, Bildnisse der antiken Dichter und Denker, Basel 1943.

a) INHOUD

Het leerlingenboek bevat twee grote hoofdstukken.
In A wordt de Stelling van Pythagoras stapje voor stapje ontwikkeld. Hulpmiddelen daarbij zijn: het 12-knopen-touw, kartonnen vierkanten van verschillend formaat, het spijkerbord, legpuzzels van karton.
De afwisseling van mentale en manuele activiteiten maakt het pakket ook voor de "zwakke" wiskunde-leerling goed verteerbaar. Aan het slot van deel A wordt de Stelling van Pythagoras geformuleerd in "oppervlakte-taal".
Hoofdstuk B gaat over het algoritmisch toepassen van de Stelling van Pythagoras. Daarbij is het nodig om aandacht te besteden aan de operatie "kwadrateren" en "worteltrekken" die niet vooraf als bekend worden verondersteld. Dit hoofdstuk vraagt van de leerling een voortdurend overstappen van algebraïsche naar meetkundige activiteiten en vice versa. Aan het einde van deel B is een gevariëerde serie toepassingen van de Stelling van Pythagoras te vinden.

b) BOEK EN WERKBLOK

Het leerlingenboek bevat geen invulruimte voor antwoorden, het is een "gebruiksboek". Omdat het bij een aantal opgaven prettiger is om met werkbladen te werken is een werkblok ("verbruiksboek") met 25 opdrachtbladen toegevoegd.

c) AANTAL LESUREN

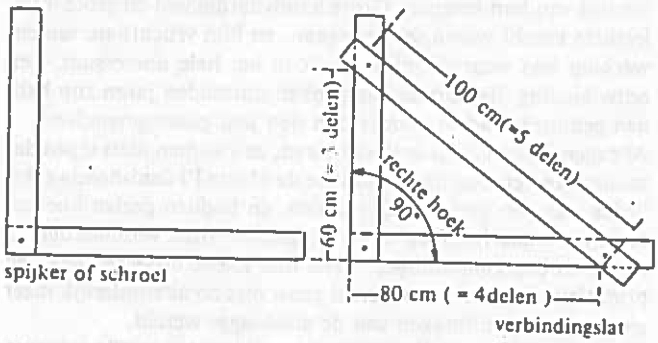
Voor beide delen kan het aantal lesuren op 8 worden geschat. Het is heel goed denkbaar dat u het te veel vindt om 16 uur achtereen met één onderwerp bezig te zijn en tussen deel A en B een ander onderwerp wilt behandelen. Dat kan zonder bezwaar, want het begin van deel B heeft een beetje een herhalingskarakter.

d) WERKVORM

In bijna elke handleiding van een IOWO-pakketje kunt u lezen dat groepswerk de aanbevolen werkvorm is. Zonder terughoudendheid sluit ik me wat dit pakket betreft hierbij aan, waarmee niet gezegd is dat het de enig denkbare vorm is. Welke vorm u ook kiest, de leraar zal zeker van tijd tot tijd moeten stilstaan en terugblikken om de grote lijn voor de leerlingen te verhelderen.

Het Egyptische 3-4-5 verhaal mag dan wat dubieus zijn, heden ten dage wordt wel degelijk gebruik gemaakt van de 3-4-5 driehoek in de bouw, zoals blijkt uit deze tekst ontleend aan "Handig Thuis".

> **De 3-4-5-steek.** Voor het maken van een forse winkelhaak kan een handig trucje uit de bouwwereld, de zgn. 3-4-5-steek, goede diensten bewijzen. Het gaat daarbij, zoals de schets laat zien, om 3 latten van resp. 60, 80 en 100 cm, in de verhouding 3 : 4 : 5 dus, die op de juiste, overigens eenvoudige wijze aan elkaar gespijkerd, een zuivere winkelhaak opleveren. De vloerhoogte wordt dan met ingeslagen kleine paaltjes op uitgelegde stukken steen nauwkeurig over het gehele oppervlak vastgelegd. Een lange pas-lat over de paaltjes of stenen toont duidelijk en vooraf hoe het allemaal gaat worden.



Zo wordt uit drie latten een winkelhaak volgens de '3-4-5 steek' gemaakt

De vermaardheid van de 3-4-5 driehoek spreekt ook uit het volgende fragment uit de Science Fiction-literatuur ("Een nieuwe dageraad", auteur Arthur C. Clarke) waarin het verschil in ontwikkeling tussen de Phileni (een handvaardig volkje) en de Mithraneanen (geestelijk hoog ontwikkeld en beschikkend over telepatische vermogens, maar letterlijk onhandig). In de loop van het verhaal wordt natuurlijk duidelijk dat beide volkeren elkaar nodig hadden om voort te bestaan.

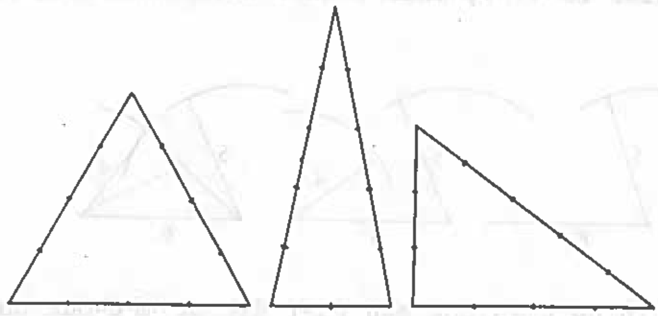
> De geestelijke evolutie van elk ras wordt geconditioneerd, ja, gedomineerd, door fysieke factoren, die in bijna alle gevallen voor lief worden genomen: Zo liggen de dingen nu eenmaal en niet anders. De uiterst gevoelige handen van de Phileni hadden hen bijvoorbeeld in staat gesteld om via experimenten keer op keer te proberen dingen te ontdekken die het enige andere intelligente ras op de planeet duizend keer zoveel tijd gekost hadden, omdat dat enkel en alleen deductief te werk ging. Heel vroeg in hun geschiedenis hadden de Phileni al eenvoudige werktuigen ontdekt. Hun ontwikkeling was verder gegaan met het ontdekken van weven en spinnen, pottenbakken en het gebruik van vuur. Toen Therodimus ze ontdekte stonden ze op de drempel van hun eerste Metalen Tijdperk, met alles wat dat impliceerde.

Zuiver intellectueel bekeken was hun vooruitgang minder snel gegaan. Ze waren slim en vaardig, maar ze hadden een hekel aan abstracte gedachten en hun wiskunde was alleen empirisch. Ze wisten bijvoorbeeld dat een driehoek met zijden in de verhouding drie-vier-vijf een rechthoekige driehoek was, maar hadden nooit vermoed dat dit maar één bijzonder geval was en dat de wiskundige wet waartoe die behoorde een veel grotere reikwijdte had. Hun kennis wemelde van dit soort lacunes en ondanks de hulp van Therodimus en zijn tientallen leerlingen schenen ze niet veel haast te maken om ze weg te werken.
Therodimus vereerden ze als een god, en ze gehoorzaamden hem nu al twee hele, zij het korte generaties lang, gaven hem alles wat hij nodig had en wat zij konden maken, en vervaardigden ook op zijn advies nieuwe gereedschappen en andere gebruiksvoorwerpen. De samenwerking was ongelooflijk vruchtbaar geweest, want het was alsof beide rassen plotseling waren bevrijd van hun ketenen. Grote handvaardigheid en grote intellectuele kracht waren samengegaan, en hun vruchtbare samenwerking was waarschijnlijk uniek in het hele universum. Een ontwikkeling die normaal gesproken duizenden jaren zou hebben geduurd, had in minder dan tien jaar plaatsgevonden.
Al zagen Eris en Jeryl veel wonderen, ze kwamen niets tegen dat ze niet konden begrijpen nadat ze de kleine Phileni-handwerkslieden aan het werk hadden gezien, en hadden gezien hoe natuurlijke materialen op bijna magische wijze veranderden in mooie of bruikbare dingen. Zelfs hun kleine nederzettingen en primitieve boerderijen waren al gauw niet zo uitzonderlijk meer en gingen deel uitmaken van de alledaagse wereld.
Therodimus liet ze kijken zolang ze wilden, tot ze alle aspecten van deze vreemd geavanceerde Stenen Tijdperk-beschaving in zich hadden opgenomen. Omdat ze niet beter wisten, zagen ze niets ongerijmds aan het schouwspel van een Phileni-pottenbakker, die nauwelijks tot tien kon tellen, bezig aan een serie complexe algebraïsche vlakken, onder leiding van een jonge Mithraneaanse wiskundige. Net als alle leden van zijn ras bezat Eris indrukwekkende machten tot geestelijke visualisatie, maar hij besefte dat meetkunde veel en veel gemakkelijker zou zijn als je de structuren waarmee je je bezighield ook kon *zien*. Uit dit begin zou op een dag het idee van een geschreven taal ontstaan, al had hij daarvan nu nog geen flauw vermoeden.
Jeryl werd vooral geboeid door de kleine Phileni-vrouwen die op hun primitieve weefgetouwen aan het werk waren. Urenlang bleef ze zitten kijken naar de heen en weer vliegende spoeltjes, en wenste diep in haar hart dat *zij* zo iets kon. Als je eenmaal had gezien hoe het moest, leek het allemaal zo eenvoudig, zo voor de hand liggend, en zo onmogelijk voor een ras als het hare, met zijn onhandige, onbruikbare ledematen.

De opdracht om een knopentouw of streepjestouw te maken eist een grote dosis handvaardigheid. Sommige leerlingen tonen zich op dit punt onverwacht inventief. Zo heb ik een meisje een touw zien wikkelen om een kartonnen kaartje waarna ze met één haal alle streepjes aanbracht. Er zijn ook leraren die het tijdverspilling vinden om zoiets in de wiskundeles te doen; die leraren kunnen bijvoorbeeld ≫ 2 vooraf als huiswerk opdragen.

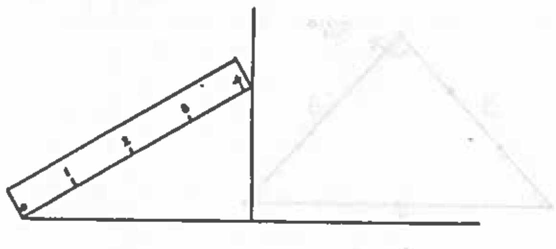
IMPRESSIE UIT DE LES

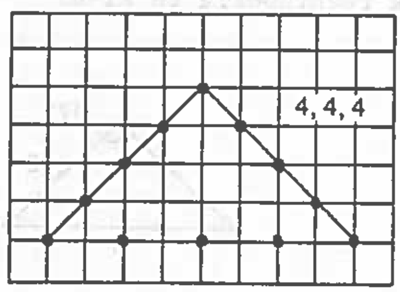
Het 12-knopen-touw blijkt direct een aantal mogelijkheden te bieden tot een stukje meetkunde verkenning. Aanvankelijk raken de leerlingen bij de vraag naar het aantal verschillende driehoeken een beetje verstrikt, zowel in het touw als in het ogenschijnlijk grote aantal mogelijkheden. Maar na een poosje groeit het besef dat oplossingen die op het eerste gezicht verschillend zijn, in feite hetzelfde zijn. Zo komen dan de volgende driehoeken op papier:



4, 4, 4 2, 5, 5 3, 4, 5

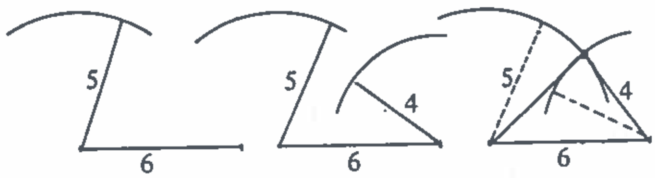
En passant wordt een taaltje ontwikkeld om die driehoeken te beschrijven; in de meeste gevallen wordt als heel vanzelfsprekend het "zijden-tripel" gekozen, al zijn er ook leerlingen die in de knoop raken omdat de knopen geteld worden in plaats van de tussenstukjes.
Een driehoek 3,3,6 lijkt ook tot de mogelijkheden te behoren, vooral als er een beetje rek in het touw zit. Maar een nauwkeurige weergave op papier ("teken die driehoeken nauwkeurig op schaal, neem voor de knopenafstand 1 cm") helpt de meesten uit de droom. Het is anders nog niet zo eenvoudig om een driehoek met drie gegeven zijden te tekenen. Bij de symmetrische exemplaren redden een paar leerlingen zich er handig uit: middelloodlijn van de basis, met liniaaltje de top zoeken. Eén meisje maakte een wat vrij gebruik van haar ruitjesschrift ....





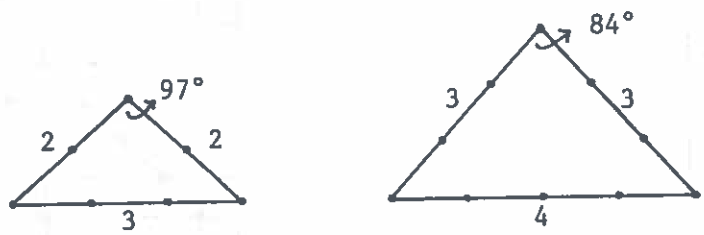
Bij de nabespreking komt de 3-4-5-driehoek op het bord, waarbij de rechthoekszijden heel handig horizontaal resp. vertikaal worden getekend. De juf is een beetje eigenwijs en begint nog eens, nu met een horizontaal lijntje van 5.
Nog geen man overboord, teken die 3 maar op de gok, meet de andere zijde, uitvegen, een beetje draaien, ... na twee of drie stapjes staat hij er toch!

Maar Nanda (de juf) is niet zo erg tevreden met die "approximatie-methode" en geeft een nieuwe opdracht: *"6,5,4 en als het kan zonder gummen!"*
"Waarom juf, het gaat toch goed zo?"
Het lijkt te mislukken en net als ze op het punt staat om het op te geven en de klas verder te laten werken uit het boekje, steekt een meisje haar vinger op: *het kan ook met dat "ding"*. Ze bedoelt de bordpasser. En ze wordt vriendelijk uitgenodigd te demonstreren wat ze bedoelt.
Het gaat allemaal niet zo vlot, maar zonder noemenswaardige hulp komt zij er uit:



Ondertussen zijn er in de klas ook een paar die de methode ontdekt hebben. Nou nog even oefenen, waarbij de driehoek 6,3,3 definitief door de mand valt. Van die passerconstructie gaat duidelijk enige bekoring uit.

In de opdracht ≫ 7 wordt gevraagd om alle "geheelzijdige" driehoeken (in de leerlingentekst: knopendriehoeken) met een omtrek kleiner dan 12 te tekenen. Dat is nog een hele uitzoekerij; het zijn er vijftien, te beginnen met 1,1,1 en eindigend met 3,3,4. Maar met een beetje werkverdeling is het goed te doen en ... het inzicht groeit dat het fenomeen rechthoekige driehoek echt iets bijzonders is, tenminste als je gehele zijden (of sterker gezegd: onderling meetbare zijden) wilt hebben. Pythagoras beschikte weliswaar over een hele lijst, maar toch ...
In het lijstje van 15 driehoeken komen er twee voor die de indruk kunnen wekken ook rechthoekig te zijn.



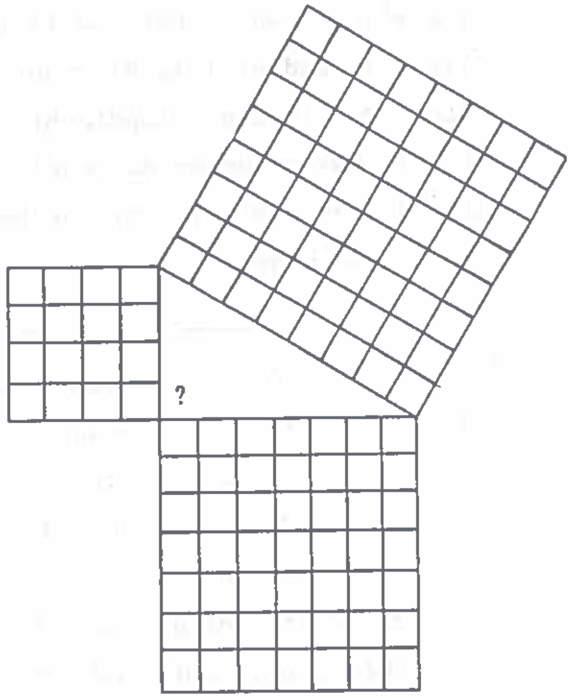
Er moet wel heel precies getekend worden om te kunnen constateren dat de driehoeken 2,2,3 en 3,3,4 scheefhoekig zijn!

Een didactisch probleem bij de behandeling van de Stelling van Pythagoras is de overstap van *lengte* naar *oppervlakte* en vice versa.
Aan de getallen zoals die op de perkamentrol voorkomen (blz. 4 van het leerlingenboek) ontdekt de leerling niets. Zelf zal hij niet op het idee komen te kwadrateren of vierkanten om de driehoek te leggen. Vandaar dat nu de tegelzetter van de Farao op het toneel verschijnt als een didactische wonderdoener: hij maakt driehoeken van vierkanten. Het idee om langs deze weg de Stelling van Pythagoras te ontdekken is al eerder gebruikt in Wisbrug/ Oliesheik Abdoel (zie Wiskrant 11).
Opgave ≫ 9 is een telopdracht waarbij de leerling zelf de relatie tussen de rij van kwadraten en de tegelvierkanten ontdekt. Dat dit ontdekken lang niet altijd probleemloos verloopt bewijst dit groepsgesprekje, afgeluisterd in een tweede klas:

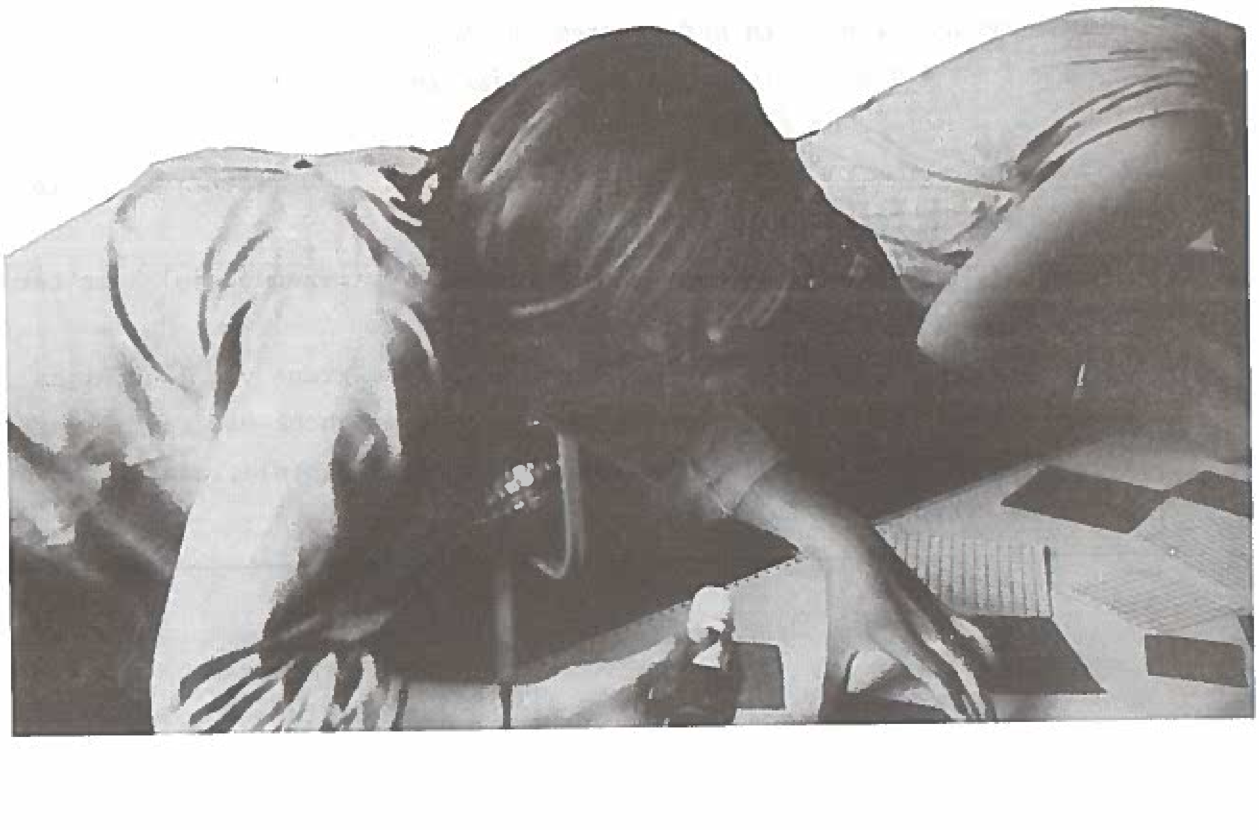
A (na enig nadenken): 1250 gedeeld door 4.
Leerling B kijkt met vragende ogen, zegt niets (C en D) zijn nog even bezig met de laatste hand te leggen aan de vorige opdracht).
A: Nou, 1250 gedeeld door 4.
B: ??? (verbaasdheid neemt zichtbaar toe).
A (iets voorzichtiger nu): bij elk vierkant zitten er vier in.
B toont opnieuw zwijgend onbegrip.
A leest nog eens de tekst: Oh, verschillend van grootte, dus eh. 1,4,6, 8,10, ...
C en D mengen zich nu in het gesprek en vragen om uitleg.
A: Nou 1 en 4 die zie je hier al (ze wijst in de tekening) en verder 3 bij 3, 4 bij 4, en zo ga je maar door.
Na enig geharrewar wordt dan ontdekt dat "3 bij 3" betekent: 9 tegels, "4 bij 4": 16 tegels, enz.
De "machine" komt op gang en een andere machine (rekendoosje) komt ter tafel.
De kwadraten worden uitgerekend, opgeteld tot de grens van 1250 bijna bereikt is. Daarna volt het uitknippen van de driehoek uit ruitjeskarton, worden er driehoeken uitgelegd, opgeplakt, tegels geteld, aantallen vergeleken, hoeken bekeken.

Bij het formeren van driehoeken met vierkanten worden allerlei ontdekkingen gedaan. Bijvoorbeeld dat het vierkant van één tegel onmogelijk mee kan doen. Op vraag ≫ 11 wordt meestal gereageerd in de trant van: het grote vierkant (de zijde wordt bedoeld) mag niet gelijk zijn aan de som van de kleinen, een soort zwakke driehoeksongelijkheid dus. Om verwarring tussen zijden en oppervlakten, die in de toekomst nog wel eens voor zal komen, tegen te gaan zal hier tamelijk precies geformuleerd moeten worden!

De opgaven ≫ 12 t/m ≫ 15 leiden naar de hypothese van Pythagoras, al kunnen de "quasi-rechthoekige driehoeken" nog wel wat paniek zaaien. Eerlijkheidshalve moet ik bekennen dat ik dit, zittend achter mijn bureau, niet voorzien had. Achteraf zag ik echter de mogelijkheid om hier didactische munt uit te slaan: er kan dus nog twijfel heersen aangaande Pythagoras' hypothese en dit kan prikkelen tot nader onderzoek. Bovendien kan er de behoefte naar een bewijsvoering door ontstaan!



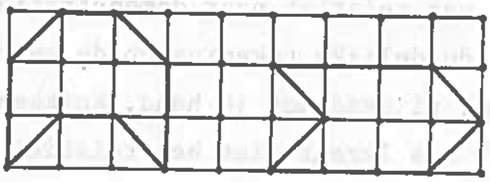
$16 + 49 \approx 64$



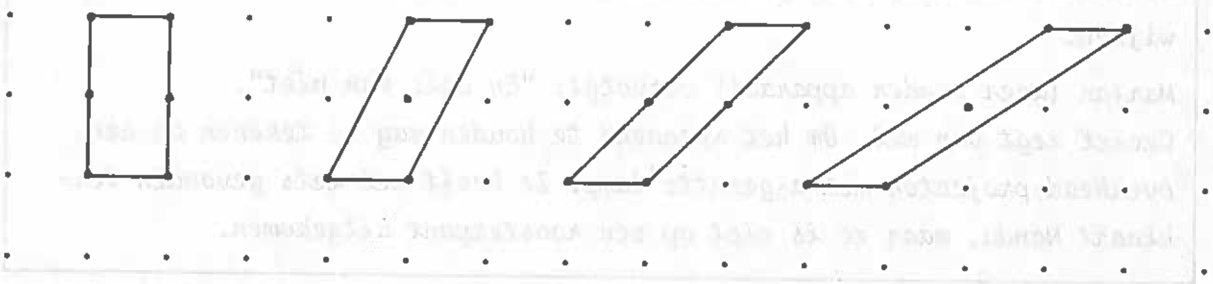
Met de opdrachten van de bladzijden 8, 9 en 10 belanden we deels op een zijspoor; het berekenen van oppervlakte van spijkerbordfiguren leidt even af van de Pythagoras stelling.

Het spijkerbord als materialisatie van het vierkantjesrooster biedt echter de mogelijkheid om met zekerheid te beslissen over het rechthoekige of scheefhoekige karakter van een driehoek, terwijl ook de oppervlakte van de vierkanten op de zijden exact bepaald kunnen worden. Voor dat laatste doel zijn een serie inleidende opgaven (16 t/m 22) ingebouwd, die op zichzelf ook aardig en nuttig zijn.

Hoewel het niet beslist noodzakelijk is om spijkerborden te gebruiken, men kan zich natuurlijk behelpen met roosterpapier, is het toch zeer de moeite waard om spijkerborden aan te schaffen of te laten vervaardigen bij handenarbeid. Het werken met elastiekjes is letterlijk en figuurlijk een flexibele activiteit! Zo kwam bij opgave 18 een groepje leerlingen tot de strategie om uitgaande van een rechthoek van 2 bij 3 door gelijktijdig afnemen en toevoegen van congruente stukken, nieuwe figuren te maken. Het was duidelijk dat het materiaal hierbij stimulerend werkte.



Het spijkerbord is een goed leermiddel bij oppervlaktebeschouwingen, o.a. omdat een elastiekjesveelhoek zich zo gemakkelijk laat transformeren en deformeren. Als voorbeeld ziet u hieronder het zogenaamde "afschuif-procédé".



Het oppervlakte-behoudend karakter van dergelijke afschuivingen is hier onmiddellijk duidelijk. Bij het maken van vierkanten die scheef staan t.o.v. het rooster, voor sommige leerlingen toch een hele puzzel, biedt het materiaal het voordeel van de mogelijkheid om snel te corrigeren (even het elastiekje naar een buurspijker verplaatsen), bij tekenwerk gaat dat aanzienlijk moeizamer. Het is belangrijk om de gemaakte elastiekjesfiguur ook nog even met potlood en papier te registreren. Allereerst natuurlijk om later nog eens te kunnen nakijken, maar ook omdat het overtekenen van een "scheef" vierkant op een rooster (eventueel met andere schaal!) bijna vanzelf leidt tot het uittellen van hokjes of spijkers. Zo kan dan het "maniertje" van de fakir worden ontdekt en het bijbehorende taaltje worden ontwikkeld.

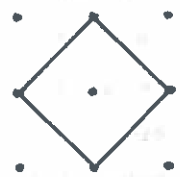
Een fragment uit de les over ≫ 22 (beschreven door George Schoemaker):

De vierkanten met oppervlakte 1,2,3,... worden besproken.

1: Is gemakkelijk, één ruitje.

2: Marjan mag het zeggen: "Nou je neemt eerst vier hokjes, daar neem je de helft van en dan zet je daar even de puntjes.

Nanda volgt op de overhead-projector.

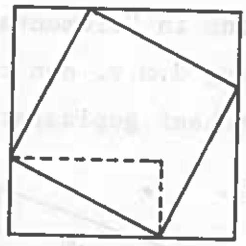


De taal van Marjan is een mengeling van demonstratief en relatief. Misschien gaat ze wel over van relatief naar demonstratief taalgebruik omdat Nanda volgt met een duidelijke tekening op de overhead-projector. Dan kun je "daar" zeggen, wijzend met je hand, knikkend met je hoofd en het staat er al. Volg je als leraar niet het relatief taaltje van één leerling met een ondersteunende tekening, dan kunnen de anderen niets volgen. Alleen die ene leerling krijgt een goeie taaloefening. De anderen haken af, ook al omdat de opstelling van één sprekende leerling naar de klas toe nooit deugt. Misschien kun je als leraar toch sturen in de relatieve richting door je wat van de domme te houden voor knikken en wijzen.

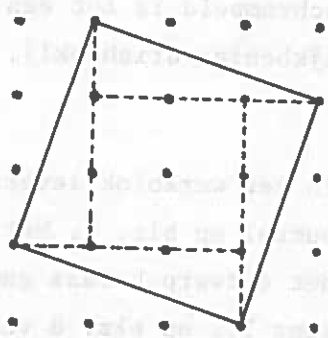
Marjan (weer zonder apparaat) vervolgt: "En drie kan niet".

Ceciel zegt van wel. Om het spannend te houden mag ze tekenen op een overhead-projector met afgezette lamp. Ze heeft wel iets gevonden verklaart Nanda, maar ze is niet op een roosterpunt uitgekomen.

4: Dat kan.
5: Kan ook. Mariska mag tekenen.
Ze meet de omliggende driehoeken als volgt:



Nanda zegt dat ze het zō moeilijk kan natekenen.
De klas moet precies zeggen wat ze moet doen. José mag sturen: "twee omhoog .... ēēn opzij en dan ook twee opzij en ēēn naar beneden en dan twee naar beneden zo, ēēn opzij". Dit ging vrij snel. De klas heeft het niet helemaal gevolgd. Nanda stelt voor dat ze er "links" en "rechts" bij zegt bij "opzij".
Nu mag José het nog eens doen, de klas volgt: "Twee naar boven en ēēn naar rechts, twee naar links en ēēn naar boven, twee naar beneden en ēēn naar links". Bij 6 stilte. Een stem uit de klas - ik meen dat het Gabrie is - "Kan 6 dan niet?" De verklaring van Nanda gaat in de richting: "Als niemand 'm heeft gevonden, is ie er niet".
7: Stilte.
8 en 9 zie je zo, 8 was die van Mariska. Bij 10 volgt weer het stuurspel.
Monique: "Drie omhoog, ēēn naar rechts. Drie naar rechts en dan ēēn naar beneden en dan ēēn, twee, drie naar beneden en dan ēēn naar links en lijnen trekken".
Door dit sturen ontstaat een prima taal, ondubbelzinnig, maar .... demonstratief. De taalvorm van Marian was heel anders. De aard van deze opgave vraagt om stapjes die ondubbelzinnig bepaald zijn. Dat is beter te volgen dan een totaalbeeldtaal als: "Neem een vierkant van vier bij vier, zet op elke zijde een stip, zo dat je links- of rechtsomdraaiend die stip 1 cm van het hoekpunt vindt".
Zo'n tekenopdracht vraagt kennelijk om een algoritme. De andere taal is niet algoritmisch maar globaal.
Nanda: "Nu nog kijken of je gelijk hebt dat het er tien zijn".
Monique: "In het midden liggen er al vier en dan boven in die hoek daar past het aan mekaar, eve kijke hoor".
Nanda helpt met tekenen. "Dat stukkie moet nog, dan is het twee bij mekaar hē ... het komt wel uit. Nanda helpt nu wat met vier driehoeken elk van drie rondom het vierkant.



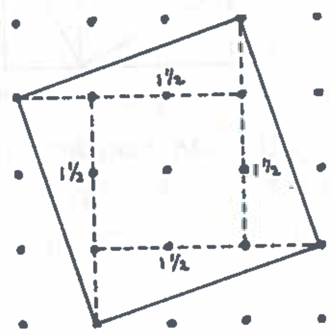
Er zijn twee "algemene" strategieën om de oppervlakte van een roosterveelhoek te bepalen:

a. Verdeling in "elementaire" stukjes.

b. Omheining d.m.v. een rechthoek.

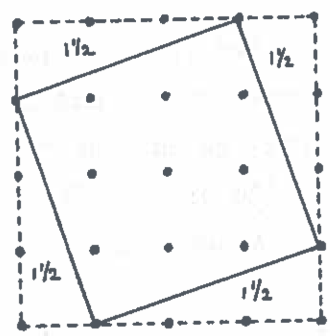
Voor een scheef geplaatst vierkant levert dit op:

a.



opp.= $4 + 4.1\frac{1}{2} = 10$

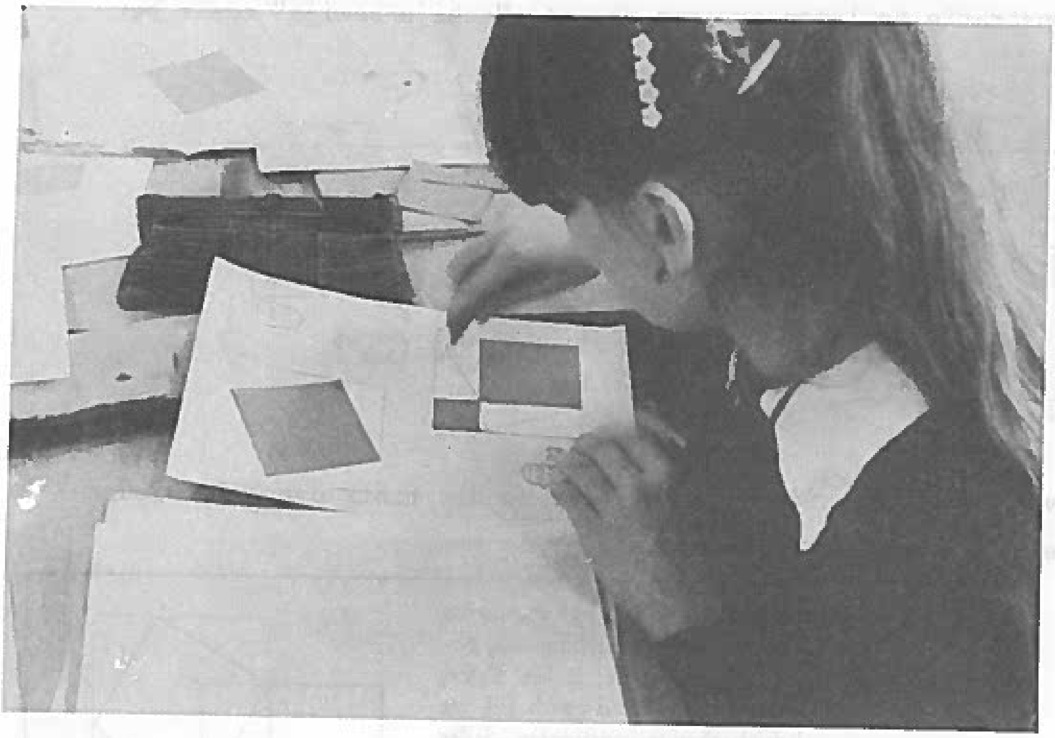
b.



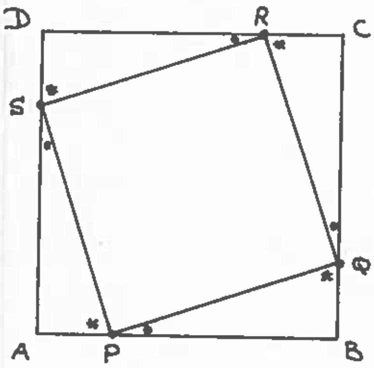
opp.= $16 - 4.1\frac{1}{2} = 10$

De eerste methode wordt door de leerlingen spontaan gevonden (zoals Monique in het voorafgaande lesfragment demonstreerde). Met de tweede is dat helaas zelden het geval; helaas, omdat juist deze methode ten grondslag ligt aan het meest simpele bewijs van de Stelling van Pythagoras.
Bij de bespreking van ≫ 17 en ≫ 21 kan de leraar de aandacht vestigen op de "omheiningsmethode" als alternatieve strategie!
De twee legpuzzels op blz. 11*) sluiten bij de genoemde twee methoden aan en kunnen worden gezien als een generalisatie van de op bladzijde 10 gevolgde rekenmethoden die tot de ontdekking c.q. formulering van de Stelling van Pythagoras hebben geleid. Op dat generaliserende aspect zal in een klassegesprek moeten worden gewezen.
Het is duidelijk dat de specifieke getallenkeuze niet relevant is bij de oplossing van de puzzels, maar dat zal voor de leerlingen expliciet moeten worden gemaakt. Aan een volledige, min of meer strenge bewijsvoering zitten dan nog genoeg haken en ogen. Zo zou bij de tweede puzzel (oplossing blz. 30) eigenlijk het geval moeten worden bekeken waarin het inwendige vierkantje verschrompeld is tot een punt (namelijk in het geval van een rechthoekig-gelijkbenige driehoek!).

*) In het werkblok levert het werkblad 8 een aanwijzing voor de eerste puzzel op blz. 7. Met de graad van doorschijning van het papier was in het ontwerp helaas geen rekening gehouden. In een nieuwe druk zal vierkant III op blz. 8 verticaal geplaatst worden.

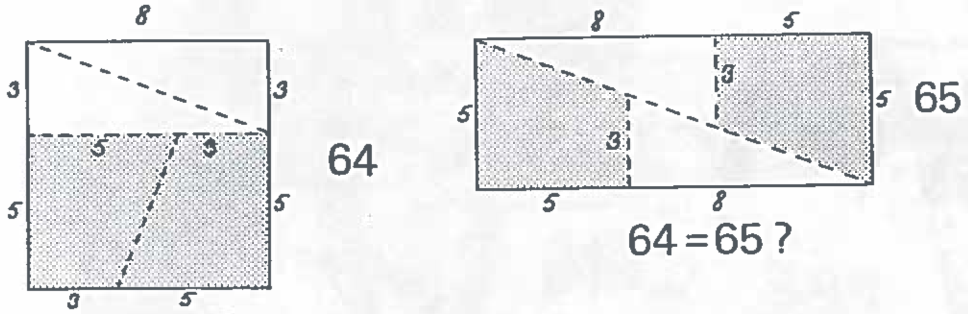


Voor beide legpuzzels vereist een correct bewijs nog wat redeneerwerk m.b.v. congruente figuren en hoekberekeningen. Zo zal in legpuzzel I (boek blz. 29) op zijn minst moeten worden aangetoond dat vierhoek PQRS (zodanig beschreven in vierkant ABCD dat AP ≅ BQ ≅ CR ≅ DS en bijgevolg PB ≅ QC ≅ RD ≅ SA) zelf ook een vierkant is. Dit kan via de congruentie van de afgesneden driehoekjes en de hoekensom van een driehoek (• + * = 90° !).



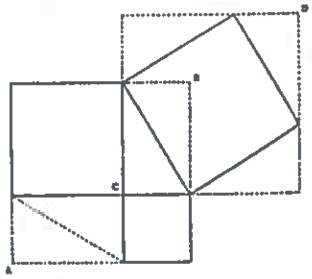
Zijn de leerlingen vertrouwd met meetkundige transformaties, dan levert de rotatie over 90° om het middelpunt van het vierkant een belangrijke bijdrage tot zo'n bewijs.
Analoge gedachtengangen kan men op puzzel II toepassen.
Voor een LBO-MAVO-leerling lijkt een uitvoerige rechtvaardiging van een van de legpuzzelbewijzen ongeschikt en overbodig. Maar we kunnen ons goed voorstellen dat een leraar van een HAVO/VWO-klas het wel belangrijk vindt om zo'n "strenge" bewijsvoering te demonstreren, of liever nog, in een klassegesprek te ontwikkelen. Daarbij zal de leerling op de een of andere manier overtuigd moeten worden van de "noodzaak" van een dergelijk bewijs. Een goede suggestie is misschien om de leerling de hachelijkheid van een leg-

puzzel-demonstratie te laten ervaren via een "schijn-bewijs" zoals het bekende:



Multatuli verkondigt in zijn "Ideeën" niet zonder trots dat hij legpuzzel-bewijs I zelf gevonden heeft:

116. Ik vond onlangs een nieuw bewijs voor de Stelling van PYTHAGORAS. Hier is het. Door, als op nevenstaand voorbeeld, zes driehoeken te construeren – ieder gelijk aan de gegeven rechthoekige driehoek – verkrijgt men twee gelijke kwadraten, A B en C D. Als men van elk dezer figuren vier driehoeken aftrekt, bewijst de gelijkheid van 't overschot aan weerszij, wat er te bewijzen was.



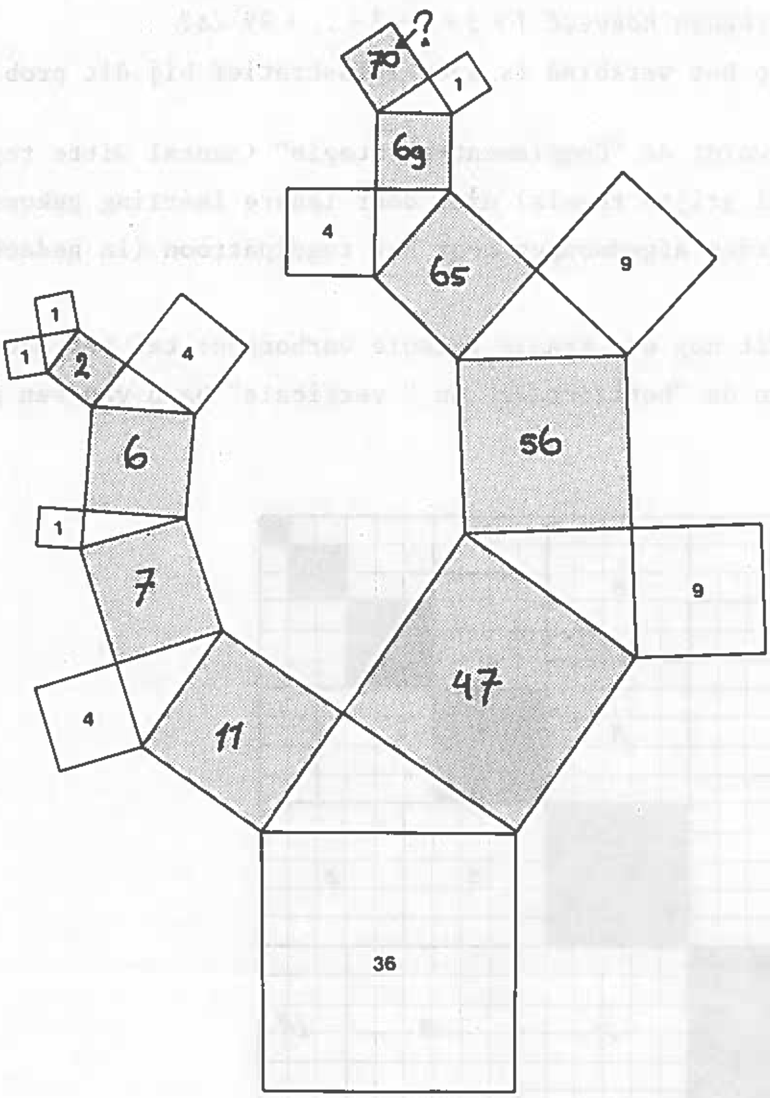
Eenvoudiger kan het niet, dunkt me. Na dit bewijs gevonden te hebben, vernam ik, dat er een werkje bestond, waarin dit onderwerp werd behandeld. Ik schafte mij dat boekje aan[1] en vond er mijn demonstratie niet in. Ook meen ik dat geen der daarin voorkomende bewijzen, zo aanschouwelijk en helder is als 't mijne. Wie beweren mocht, dat het reeds vroeger was gevonden, zou me verplichten met de opgave waar 't gepubliceerd is? Professor HOFMANN kende 't niet, en ook STROOTMAN zou er wel melding van gemaakt hebben, als 't hem bekend ware geweest. HOFMANN schijnt een speciale studie te hebben gemaakt zowel van de propositie zelve, als van de litteratuur over dit onderwerp.

Ik hoop, dat iemand vragen zal, welk nut het heeft te zoeken naar eenvoudiger bewijzen voor 'n bekende waarheid? Dit streven leidt tot helderheid van opvatting, en gewent ons aan duidelijke voorstelling. '*Bien poser une question, c'est presque la résoudre.*' Dit geldt zowel in menskunde, moraal, politiek, enz. als in de eigenlijk gezegde wiskunde. De Natuur kent al die onderscheidingen niet. Zij streeft – onbewust – met één middel naar één doel, en er is verband tussen de helderheid van mijn bewijs voor de stelling van PYTHAGORAS, en de eenvoudigheid der geloofsbelijdenis, die ik neerlegde in de vertelling over LIJSTERMANNETJE.

De leerlingachtige verdeling in verschillende soort van *kunden*, in *logiën*, is 'n gevolg onzer kleinheid, die niet in staat is alles tegelijk te omvatten. Wij ontleden, waar de Natuur samenvat en spellen wat zij schrijft. Nu, schande is 't niet, dat wij door spellen tot lezen moeten komen. Maar 't is van belang te onthouden, dat ons spellen geen lezen is.

1. *De 47e Propositie van* EUCLIDES *door* J.J.I. HOFMANN, *hoogleraar in de wiskunde te Aschaffenburg, vertaald door* H. STROOTMAN, *lector in de wiskunde, aan de militaire akademie te* BREDA. (1865).

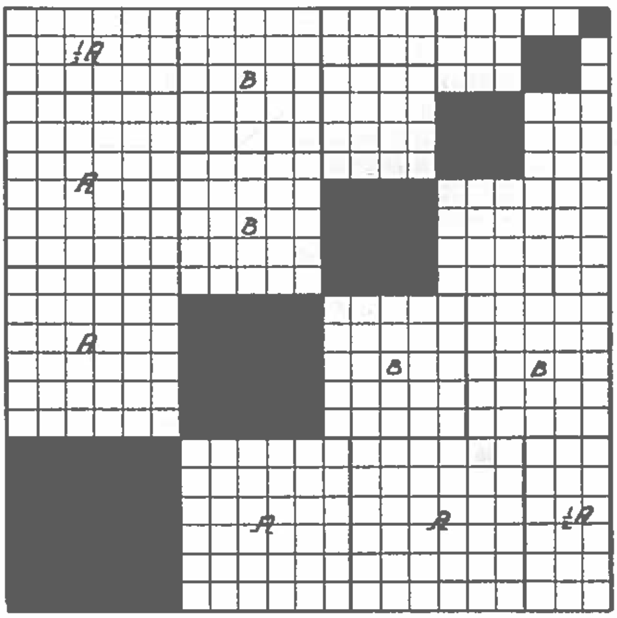
Op blz. 12 wordt de stelling tenslotte geëxpliciteerd in "oppervlaktetaal". De toepassingen in dit stadium (≫ 30 en ≫ 31) liggen nog geheel in de sfeer van oppervlakteberekening.
Bij de boom (≫ 30) vereist het vinden van een start (links-boven) wel enig zoekwerk, maar de meeste leerlingen vinden dit beginpunt wel.
Onder aan de "stam" moet er geswitcht worden van "optellen" naar "aftrekken" en daar tuinen nogal wat leerlingen in:



Dat levert tenslotte rechts boven een veel te groot getal op, namelijk 70. Vrijwel iedereen ontdekt n.a.v. deze calamiteit zijn fout en wordt zich bewust van de twee mogelijke toepassingen van de Stelling van Pythagoras, waarmee natuurlijk niet gezegd is dat het vervolg gladjes zal gaan met de "aftrek-sommen" ....

In deel B wordt de Stelling van Pythagoras voor het eerst geformuleerd in "algebra-taal" en wordt er toegewerkt naar een meer algoritmisch toepassen van de Stelling. De bewerkingen *kwadrateren* en *worteltrekken* die in deel A alleen impliciet aan de orde zijn geweest, krijgen nu extra aandacht.
Werkblad 11 brengt een mooie eigenschap van de "rij der kwadraten" aan het licht, een eigenschap die heel misschien intuïtief al ontdekt is bij het knippen van de vierkanten in ≫ 10.
Een pittige extra vraag (blikwisseling) kan hier zijn:
Kun je snel uitrekenen hoeveel 1 + 3 + 5 + 7 + .. + 99 is?
De tegelstapel op het werkblad is zeer illustratief bij dit probleem!

Bij werkblad 12 wordt de "Complement-strategie" (aantal witte tegels = totaal min aantal grijze tegels) niet door iedere leerling gekozen. Deze strategie kan worden afgedwongen door het tegelpatroon (in gedachten) uit te breiden.
In het patroon zit nog een fraaie formule verborgen: tel het aantal witte vierkanten die in de "horizontale" en " verticale" baan van een grijs vierkant passen.



Er zijn: 0 witte vierkanten van 1 tegel
1 wit vierkant van 4 tegels (verknipt in 2 halve)
2 witte vierkanten van 9 tegels
3 witte vierkanten van 16 tegels (waarvan één verknipt)
....

Kortom: n - 1 witte vierkanten van n^e tegels.
In de n^e "winkelhaak" zitten dan: $(n-1)\cdot n^2 = n^3 - n^2$ witte tegels.
Dit leidt tot:

$$\underbrace{(1^3-1^2)+(2^3-2^2)+\ldots+(n^3-n^2)}_{\text{aantal witte tegels}} = \underbrace{(1+2+\ldots+n)^2}_{\text{totaal aantal tegels}} - \underbrace{(1^2+2^2+\ldots n^2)}_{\text{aantal grijze tegels}}$$

ofwel: $1^3+2^2+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2$.

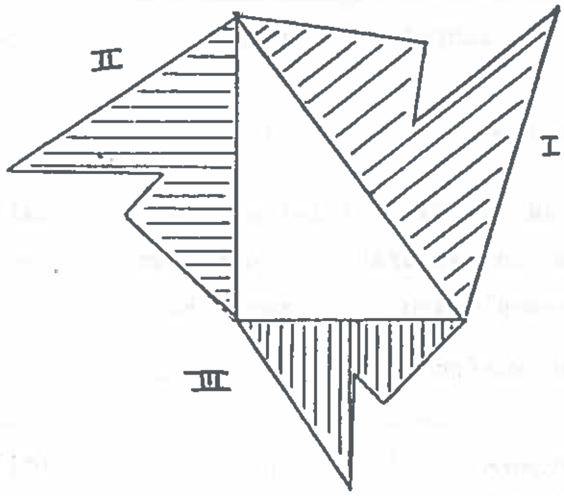
Werkblad 13. Bij het tellen van de aantallen witte, zwarte en grijze vierkantjes in het Brabants bont doen zich in de klas verschillende niveaus van probleemoplossen voor, zoals blijkt uit onderstaand stukje groepswerk:

José en Marlene doen niets. Jacqueline en Jolande tellen de grijze vierkantjes. Ze zetten tijdens het tellen streepjes door de hokjes die ze geteld hebben. José, na een hoestbui, vraagt iets aan Jacqueline, die daardoor de tel kwijt raakt. Jolande telt onverstoorbaar door en vindt 168 grijze vierkantjes. Ik heb 180, zegt Marlene! Ze wil gaan uitleggen hoe ze dat gevonden heeft, maar de tel-sters hebben er geen aandacht voor. Ze gummen hun doorgestreepte hokjes weer schoon. José begint na te tellen. Zij zet nummertjes in de getelde hokjes. Jolande begint niet opnieuw. Ze zoekt naar een minder tijdrovende methode. "Er zijn 100 zwarte en 81 witte" zegt ze, "als je nu de hele oppervlakte uitrekent, dan kun je de zwarte en de witte aftrekken, dan heb je de grijze! Ze wordt ondersteund door Marlene. José telt door en heeft niets gehoord. Jacqueline telt 9 grijze in één rij, 10 in de volgende, dan weer 9 enz. Ze komt met een klein beetje hulp van de leraar tot 10 × 9 + 9 × 10 = 180 grijze hokjes.
Vrijwel gelijktijdig met Jolande en Marlene die 361 - (100 + 81) hebben uitgerekend. José ziet nu in dat haar manier te omslachtig is en geeft toe: "nou ja zo kan het ook".

De volgende vraag leidt bij sommige leerlingen in eerste instantie tot de bekende verwarring van "worteltrekken" met "halveren" : "Van 180 grijze vierkantjes kun je een vierkant van 90 bij 90 maken ...". Ze zien echter gauw in dat het Brabants bontje dan aanzienlijk groter zou moeten zijn en de correctie vindt meestal snel plaats.

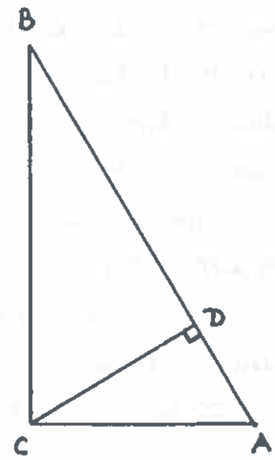
Werkblad 14. Dat je kwadrateren niet aan het "vierkant-structuurtje" vastzit is eigenlijk wel verrassend. De terugkoppeling van werkblad 11 "kwadraat + oneven getal = volgende kwadraat" kan hier verhelderend werken.

Werkblad 15 licht een tipje van de sluier van de generalisatie in Pythagoras op, die de formule $a^2 + b^2 = c^2$ in feite geeft. Zet op de zijde van een rechthoekige driehoek geen vierkanten, maar andere onderling gelijkvormige figuren I, II, III, dan is:

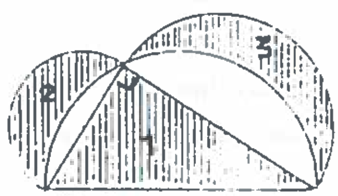


opp. I = opp. II + opp. III

Deze gegeneraliseerde Pythagoras levert het idee tot het volgende zeer elegante bewijs (zie ook: G. Polya, Mathematics and plausible reasoning, vol. 1, hoofdstuk I).

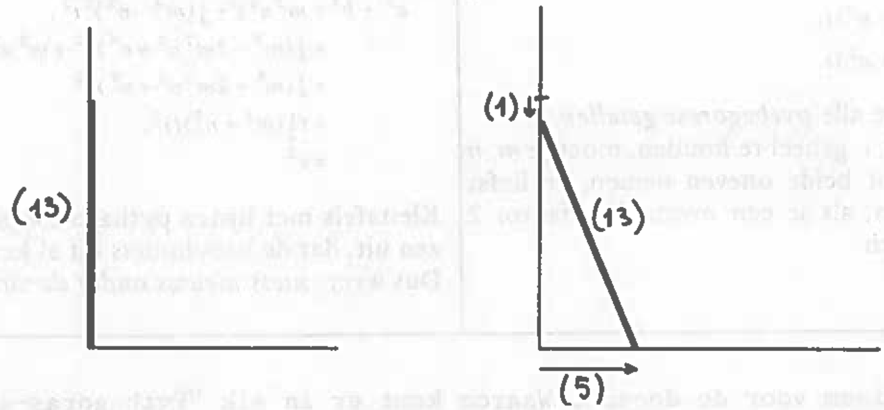


Een rechthoekige driehoek wordt door de hoogtelijn uit het hoekpunt met de rechte hoek verdeeld in driehoeken die beide gelijkvormig zijn met de oorspronkelijke driehoek.
De oppervlakte van respectievelijk driehoek ACD, CBD en ABC verhouden zich als de kwadraten van de resp. schuine zijden, dus als AC^2, BC^2 en AB^2.
Uit opp. ACD + opp. CBD = opp. ACD volgt nu
$AC^2 + BC^2 = AB^2$.
Een aardige toepassing van de gegeneraliseerde Stelling van Pythagoras vindt men bij de zogenaamde maantjes van Hippokrates:



opp. 1 = opp. 2 + opp. 3

De opdrachten ≫ 34 t/m ≫ 38 komen nog allemaal "goed" uit, d.w.z. de zijden van de rechthoekige driehoek, zijn zgn. Pythagoreïsche drietallen.
De bekendste drietallen: 3,4,5 en 5,12,13 spelen een rol in ≫ 34.
Bij onderdeel b komt de leerling via vermenigvuldiging op 15,20,25 en 10,24,26.
In ≫ 37 gaat het om het drietal 20,99,101; er zijn wel wat leerlingen die er hier in lopen en het antwoord 2 (= 101 - 99) geven, vandaar de explicie-te vraag naar de tekening die als controle kan dienen.
Opgave ≫ 38 kan aanleiding zijn tot een zekere verbazing:
1 meter omlaag betekent 5 meter naar voren!



De Babyloniers aan wie dit vraagstuk wordt toegeschreven moeten al beschikt hebben over een algemene oplossing van de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$ (a,b,c geheel), getuige het feit dat op één van de kleitabletten het Pythagoreïsche drietal 4961, 6480, 8161 voorkomt. Prof. Freudenthal schreef hierover in het Wiskobas bulletin (jaargang 7):

Hoe kan men alle oplossingen vinden van

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

met gehele a, b, c?
Bij het leerlingentijdschrift *Pythagoras* komen er telkens weer inzendingen binnen van her-ontdekkers van de procedure om alle oplossingen van

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

met gehele a, b, c te achterhalen. Het is inderdaad niet zo moeilijk!
Schrijf de formule iets anders:

$$a^2 = c^2 - b^2.$$

Oftewel:

$$a^2 = (c + b) \cdot (c - b).$$

Of als je

$$c + b = p,$$
$$c - b = q,$$

stelt:

$$a^2 = p \cdot q.$$

Het getal links is een kwadraat, dus moet $p \cdot q$ ook een kwadraat zijn.
Splits van p, resp. q, het grootst mogelijke kwadraat af:

$$p = m^2 \cdot s,$$
$$q = n^2 \cdot t.$$

Dus:

$$a^2 = m^2 \cdot n^2 \cdot s \cdot t.$$

Wil dit kunnen, dan moet $s \cdot t$ weer een kwadraat zijn, terwijl in s noch t een kwadraat zit.

Dus $s = t$.

Dus:

$p = m^2 t,$
$q = n^2 t.$

En nu terug naar a, b, c:

$pq = a^2,$
$p - q = 2b,$
$p + q = 2c.$

Dus:

$a = m \cdot n \cdot t,$
$b = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)t,$
$c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)t.$

Zo krijgen we alle *pythagorese getallen.*
Wel, om a, b, c geheel te houden, moet je m, n beide even of beide oneven nemen, en liefst beide oneven, als je een overbodige faktor 2 wilt vermijden.

Voorbeelden:

m	n	a	b	c
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37

enz.

En nu algemeen de proef op de som:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= m^2 n^2 t^2 + \tfrac{1}{4}(m^2 - n^2)^2 t^2, \\ &= \tfrac{1}{4}(m^4 - 2m^2 n^2 + n^4)t^2 + m^2 n^2 t^2, \\ &= \tfrac{1}{4}(m^4 + 2m^2 n^2 + n^4)t^2, \\ &= (\tfrac{1}{2}(m^2 + n^2)t)^2, \\ &= c^2. \end{aligned}$$

Kleitafels met lijsten pythagorese getallen wijzen uit, dat de babyloniërs dit al kenden.
Dus weer: *niets nieuws onder de zon!*

Aardig probleem voor de docent: Waarom komt er in elk "Pythagoras-drietal" een vijfvoud voor?

En voor de leerling: Vind in elk rijtje de ontbrekende Pythagoras getallen.

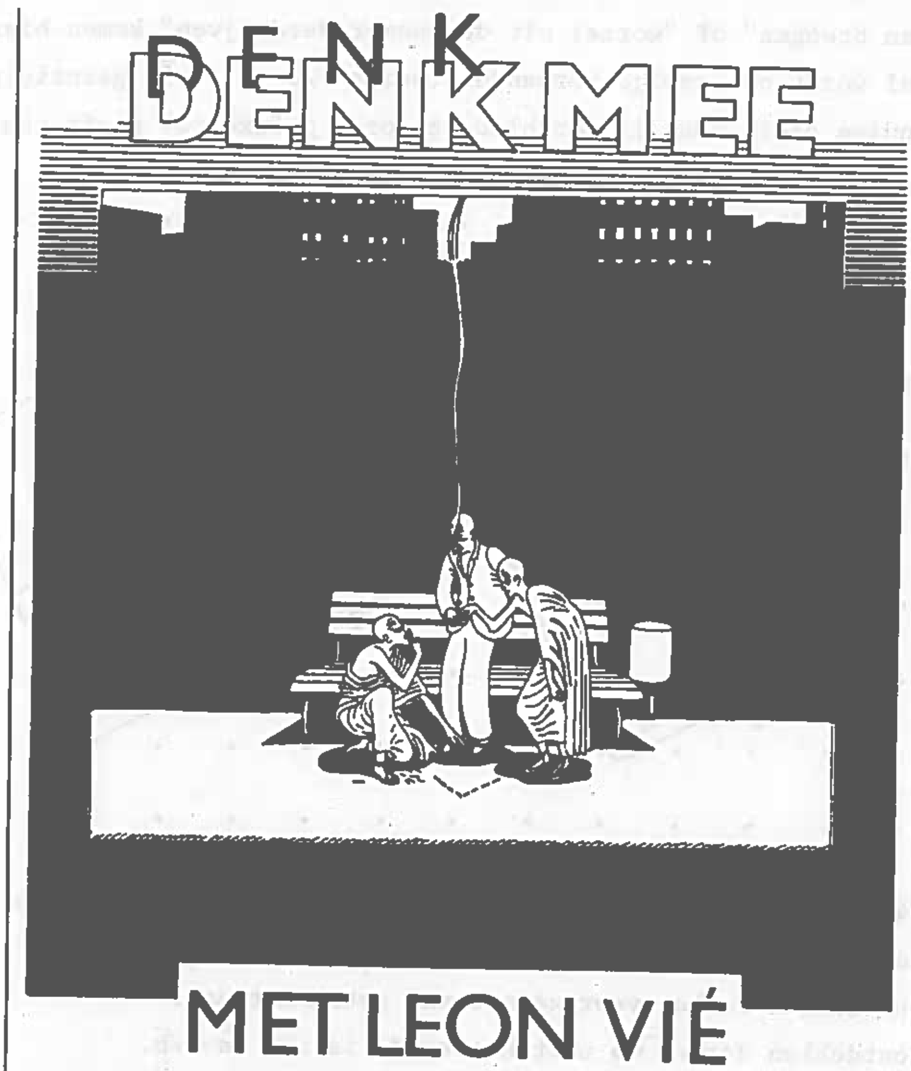
n	a	b	c
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	...	...
6	..	...	...
:			
10	...	...	...

n	a	b	c
1	4	3	5
2	8	5	17
3	12	35	37
4	16	63	65
5	...	...	...
:			
10	...	...	...

n	a	b	c
1	12	5	13
2	20	21	29
3	28	45	53
4	36	77	85
5	...	...	...
:			
10	...	...	...

Het uitdrukken van a, b en c in n en het daarmee verifiëren van het Pythagoras-karakter is een pittig stukje probleem-gerichte algebra!

Dat de puzzelredacteur van het NRC Handelsblad ook van Pythagoreïsch wanten weet, blijkt uit het volgende stukje:

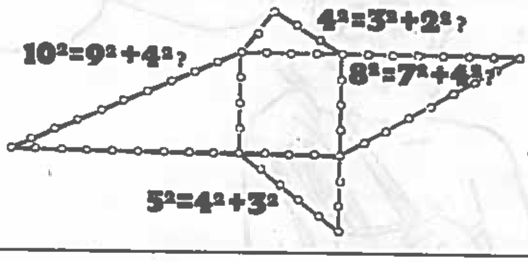


illustratie Paul Hulshof

PYTHAGORAS EN DIOPHANTOS

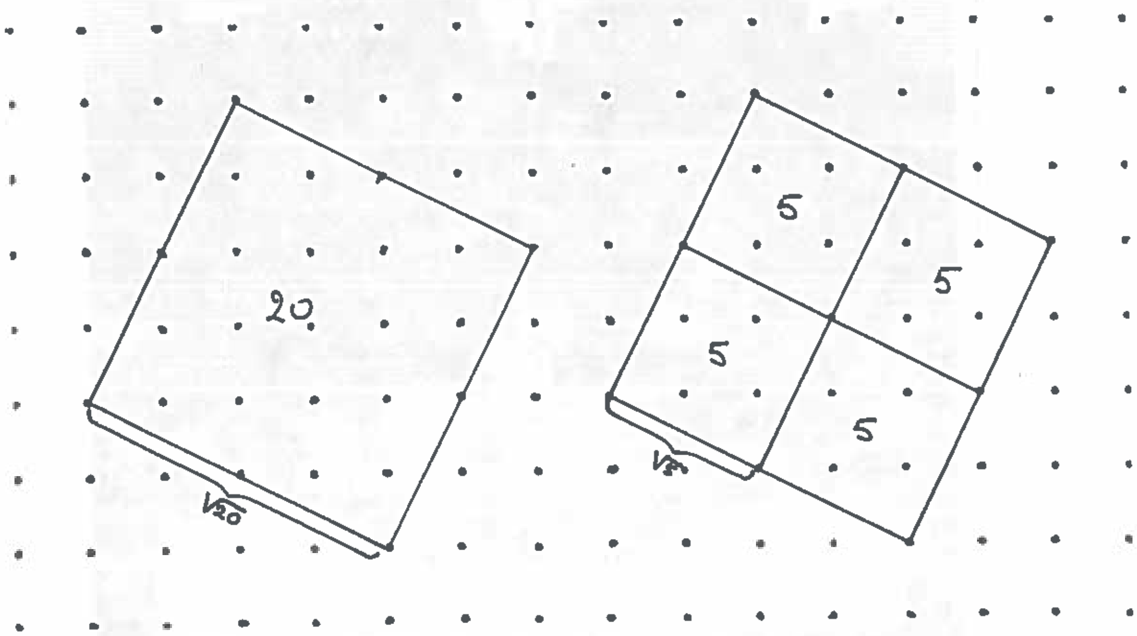
Het is de bedoeling dat u, met lucifers die alle een gelijke lengte hebben, eerst een vierkant maakt en vervolgens vier rechthoekige driehoeken. Eén van de zijden van die driehoeken wordt telkens gevormd door één der zijden van het vierkant. Geen driehoek mag gelijk zijn aan een der andere.

Gevraagd wordt het aantal lucifers dat minimaal nodig is om die vier driehoeken te construeren.
De tekening is, zoals u ziet, niet meer dan een benadering van hetgeen wordt bedoeld, daar alleen de onderste driehoek correcte afmetingen heeft. Met een vierkant van 4 × 4 gaat het dan ook niet.
Oplossingen dienen uiterlijk vrijdag 23 januari in het bezit te zijn van de redactie van het Zaterdags Bijvoegsel, Postbus 295, 3000 AG Rotterdam. Onder de inzenders van een goede oplossing worden drie boekebonnen van ƒ 25 verloot.



Oplossing:
198 lucifers, (aangenomen dat de driehoeken buitenwaarts gemaakt moeten worden.)

In de tekst wordt de bewerking worteltrekken "elementair" behandeld, het gaat in feite slechts om de definitie van de vierkantswortel uit een niet-negatief getal. De bekende eigenschappen en technieken zoals "voor het wortelteken brengen" of "wortel uit de noemer verdrijven" komen hier niet aan bod. Wel wordt op sommige verbanden (zoals $\sqrt{20} = 2 \times \sqrt{5}$) geanticipeerd. Het meetkundige beeld (dat is werkblad 16 wordt gefixeerd) geeft een mogelijkheid om dit soort verbanden meetkundig te verklaren.

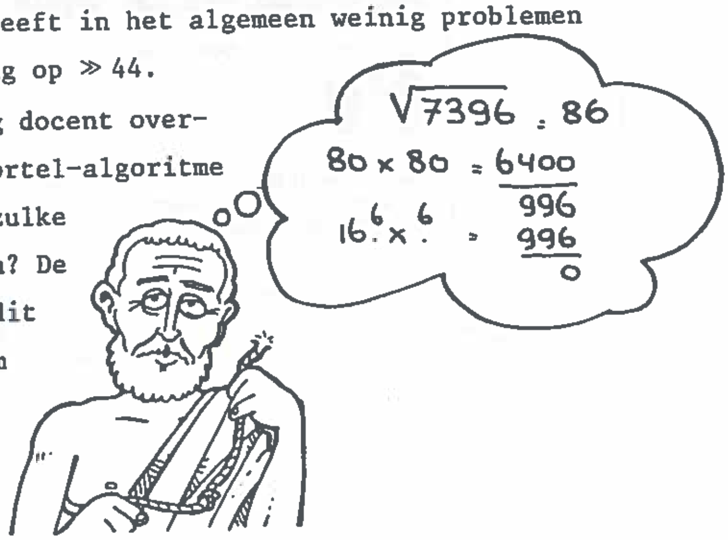


Bij ≫ 41 verdwijnt het meetkundige beeld als sneeuw voor de zon. Er zitten twee doelen in de rijtjes verstopt:
- het herkennen en het voortzetten van getalpatronen;
- het ontdekken dat $\sqrt{a+b}$ niet hetzelfde is als $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

De ervaring leert dat "gewone" sommenrijtjes t.a.v. het tweede doel weinig effect sorteren; hier komt in elk geval de verbazing boven bij onderdeel C ("moet ik nog even hetzelfde doen?").

Het afschatten van wortels (≫ 42) geeft in het algemeen weinig problemen en is o.a. bedoeld als voorbereiding op ≫ 44.

Die laatstgenoemde opgave zal menig docent overbodig voorkomen. Waarom het oude wortel-algoritme van stal gehaald, terwijl we over zulke aardige rekenmachientjes beschikken? De ervaring is wel dat de leerlingen dit algoritme (in zijn meetkundige vorm althans) leuk vinden, hoe ingewikkeld het er ook op het eerste gezicht uitziet.



Er zijn een paar redenen te noemen om ≫ 44 niet over te slaan:

- het legt een verbinding tussen het meetkundige beeld en het cijfermatige worteltrekken;
- het black-box-effect van het rekenmachientje wordt een beetje weggenomen (weliswaar volgt dat machientje een geheel ander procédé, maar de leerling heeft in ieder geval het idee dat worteltrekken systematisch kan gebeuren);
- het maakt duidelijk dat het werkelijk iets heel bijzonders is als een wortel "mooi" (=rationaal) uitkomt.

De meest elementaire wijze om wortels te benaderen is natuurlijk het insluitprocédé. Daarbij is het rekenmachientje onontbeerlijk, maar het "vervelende" is dat op die machientjes vrijwel altijd een worteltoets vorkomt. Eigenlijk zouden de leerlingen eerst een poosje met een machientje-zonder-worteltoets moeten werken. Bij een klas waarin zulke machientjes in gebruik waren, kwam het probleem om $\sqrt{10}$ te benaderen aan de orde.

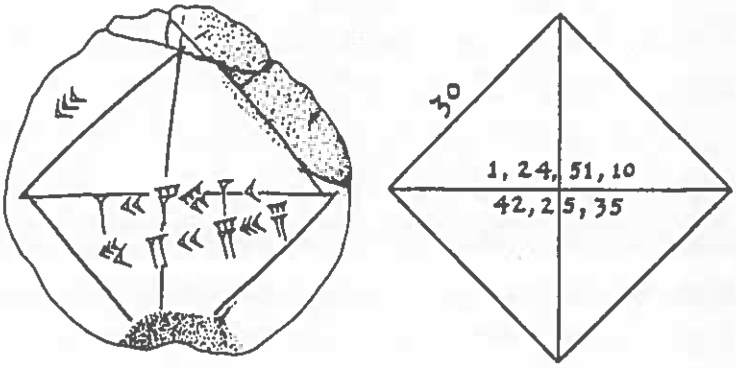
Marja, het machientje ignorerend, zegt: $3\frac{1}{7}$. *(De geschiedenis herhaalt zich; was er in de Oudheid niet iemand die* $\sqrt{10}$ *als benadering voor* π *koos?)*
De redenering van Marja luidt als volgt: $16 - 9 = 7$ *en 10 is 1 verder dan 9.*
De lerarens laat controleren: $3\frac{1}{7} \times 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} \times \frac{22}{7} = \frac{484}{49}$, *kleiner dan 10 dus!*
Dan komt uit de klas de suggestie van $3\frac{1}{5}$ *(met zo'n vijf in de noemer, zou het wel eens mooi uit kunnen komen).*
Controle: $3\frac{1}{5} \times 3\frac{1}{5} = \frac{16}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{256}{25}$, *te veel dus.*
De conclusie zou nu moeten zijn dat $\sqrt{10}$ *tussen* $3\frac{1}{7}$ *en* $3\frac{1}{5}$ *ligt, helaas breekt de bel dit leergesprekje af, ...*

Het merkwaardige van het lesfragment is dat de wortel niet decimaal benaderd werd. Natuurlijk is dat bij een volgende les wèl aan de orde geweest. Het voordeel van een decimale benadering is dat de leerling intuïtief kan zien dat $\sqrt{10}$ nooit precies met een eindige decimaal voorstelling gevonden kan worden; er blijft immers "troep" achter de komma! Daarmee is het irrationaliteitsprobleem natuurlijk niet opgelost, maar die kwestie kan beter nog een poos rusten.

In de tijd van de Babyloniers werden wortels "zestig tallig" benaderd. Op het kleitablet staat te lezen:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000}$$

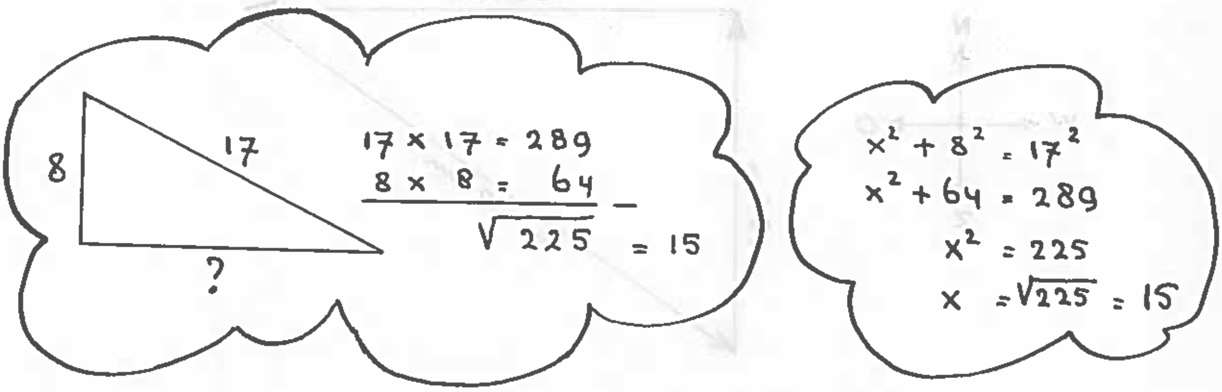
en $\sqrt{1800} = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{3600}$



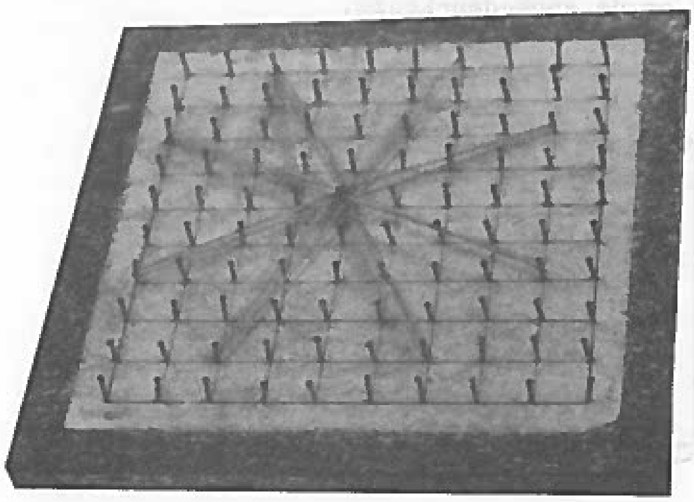
en in onze decimale schrijfwijze (afgerond in 5 decimalen) levert dit op:
$\sqrt{2} = 1{,}41421$ en $\sqrt{1800} = 42{,}42639$.
Controleert u het even op uw rekenmachientje!

De opgaven met de worteltoets (≫ 47 t/m ≫ 50) kunnen natuurlijk gemakkelijk worden uitgebreid en dat geldt met name voor ≫ 50.
Vrijwel iedere leerling rekent uit: $\sqrt{683} = 26,\ 134269$ en $26{,}134269^2 = 683{,}00002$.
Na een paar analoge voorbeelden gaat een lichtje branden en dan is er de uitdaging "leg nou eens uit hoe dat zit" een prima aanleiding tot expliciteren van de definitie van de vierkants-wortel.

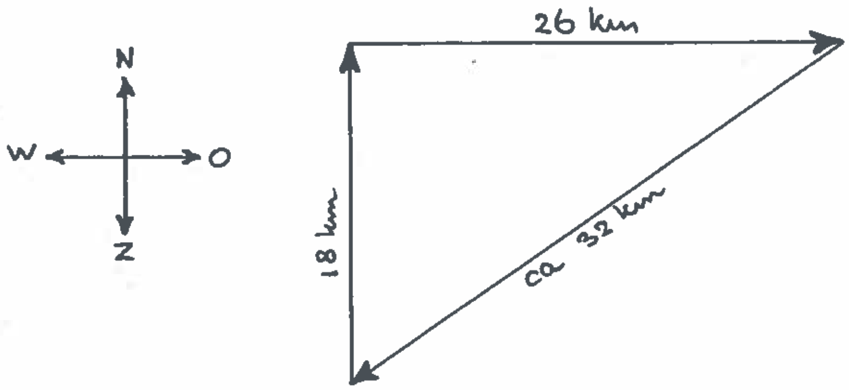
In ≫ 51 wordt al vast kennisgemaakt met de (halve) parabool en wordt het teruglezen-uit-de-grafiek geoefend.
De werkbladen 20 en 21 (bij ≫ 52) dwingen onverbloemd een schematisering van de oplossing van Pythagoras-sommen af, zoals wiskundigen die graag zien. De vraag is natuurlijk of je die schematisering bij leerlingen moet forceren. Een van de ervaringen in het Gabsstraatproject was dat een leerling bij een proefwerk vroeg: "juf, moet ik het zo rottig opschrijven, of mag het ook gewoon?". Ze mocht zelf kiezen en uiteindelijk leverde ze voor de zekerheid maar twee oplossingen in:



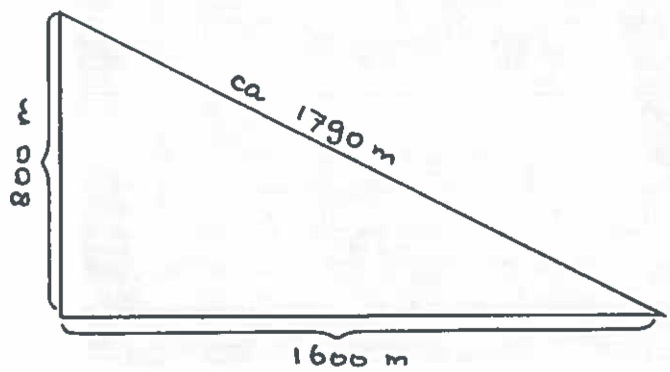
Als er in ≫ 54 eenmaal een "wortel-twintiger" gevonden is, komen de andere snel via symmetrie-overwegingen. Het vraagstuk anticipeert op de cirkelvergelijking ($x^2 + y^2 = 20$).



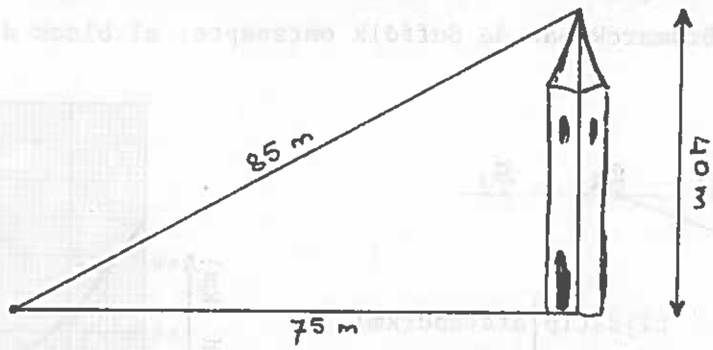
Het slot van het boekje geeft de leerlingen de mogelijkheid om "in een aantal uiteenlopende situaties de Stelling van Pythagoras "echt" toe te passen. De waarde van dit soort vraagstukjes zit hem niet in het resultaat (dat eenvoudig ook via tekenen op schaal en meten verkregen kan worden), maar in het ontdekken van de "kale" rechthoekige driehoek in een wat complexere situatie, kortom in het mathematiseren. De opgaven zijn wat dit aspect betreft geordend in moeilijkheid.
In ≫ 55 bevindt de rechthoekige driehoek zich in een "horizontaal vlak":



Omdat $\sqrt{1000} \approx 32$ is de lengte van de rondvlucht ongeveer 76 km.
Er zijn leerlingen die het antwoord op zo'n vraag in ettelijke decimalen geven (via $\sqrt{1000} = 31{,}622777$) en dit geeft een goede gelegenheid om over "afgeronde getallen" te praten (hoe precies is die 18 km ....).
In ≫ 56 speelt de situatie zich af in een verticaal vlak. Bovendien moet de leerling alert zijn op de eenheden-keuze.

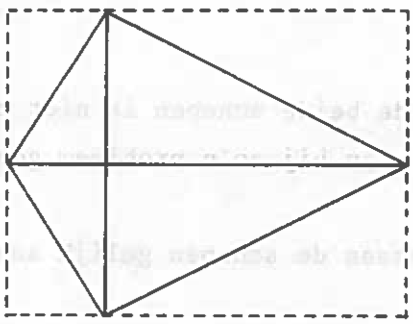


≫ 57 geeft nog eens een "verschil-toepassing":



≫ 58 heeft het verrassende resultaat dat de omtrek van de vlieger wèl en de oppervlakte niet verandert, als staander en dwarshout t.o.v. elkaar worden verschoven.

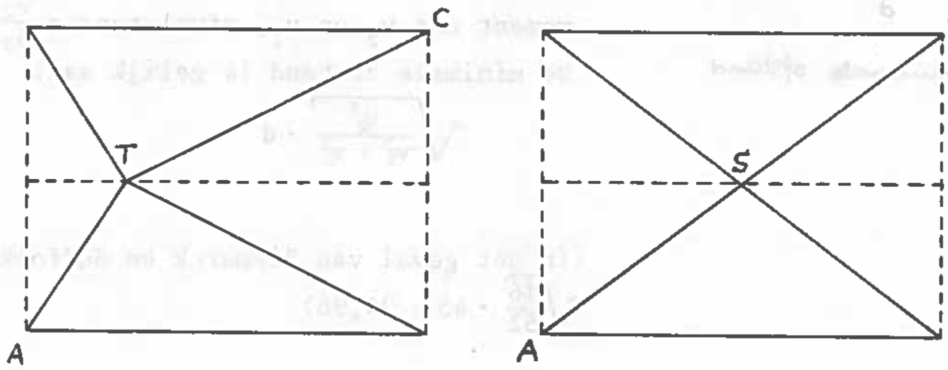
Het laatste volgt fraai uit:



opp. vlieger = $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ dm²

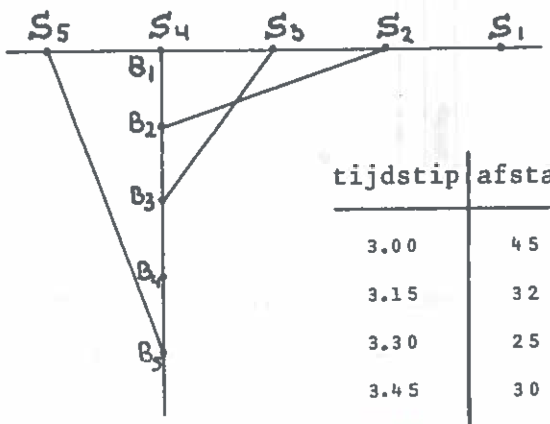
en sommige leerlingen ontdekken dit ook!

De omtrek is minimaal en wel 20 m als de vlieger een ruit is. Het "bewijs" daarvan is lastiger te vinden. Een fraaie truc is om de onderste helft van bovenstaande figuur aan de bovenkant van de bovenste helft vast te plakken.

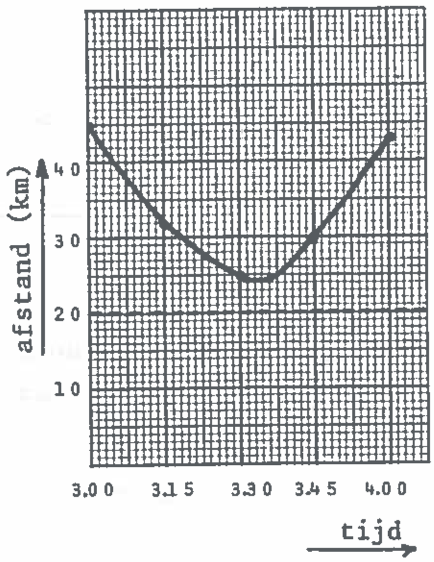


AT + TC > AS + SC

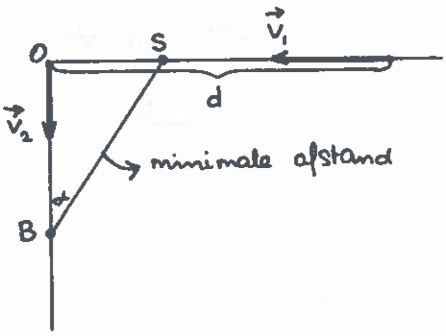
Het probleem van de Bismarck benadert de historische realiteit (zie ook Wiskrantboek 13/24 blz. 18, of Differentiëren 1 blz. H10).
In vraag a worden wat gegevens voor de grafiek van b verzameld en die grafiek leert dat de Bismarck aan de Suffolk ontsnapte, al bleek dat uitstel van executie.



tijdstip	afstand(km)
3.00	45
3.15	32
3.30	25
3.45	30
4.00	43



Het vinden van de minimale afstand tussen de beide schepen is niet zo'n simpel karwei. De meeste wiskunde-leraren zijn bij zo'n probleem geneigd tot een algebraïsche aanpak:
na t uur is het kwadraat van de afstand tussen de schepen gelijk aan $(45-60t)^2 + (40t)^2$, ...
Generalisatie via $(d - v_1 t)^2 + (v_2 t)^2$ leert na enig rekenwerk dat de minimale afstand bereikt wordt op het tijdstip $t = \frac{dv_1}{v_1^2 + v_2^2}$.

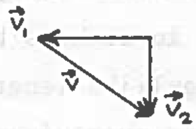


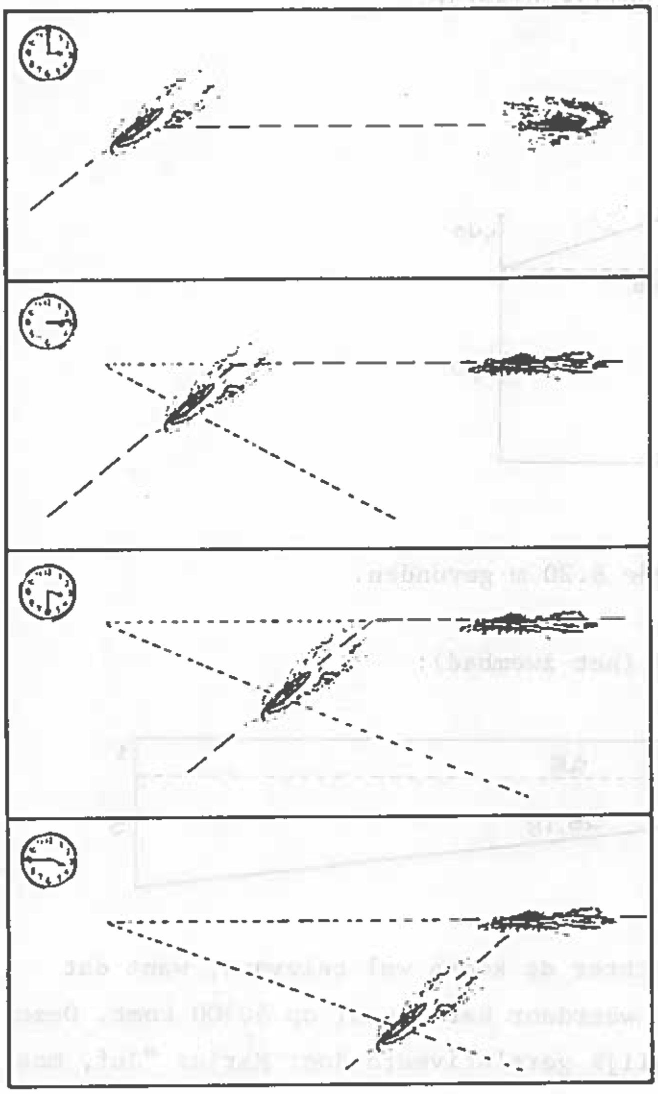
De afstanden OS en OB verhouden zich op dat moment als v_2 en v_1, ofwel $\tan\alpha = \frac{v_2}{v_1}$.
De minimale afstand is gelijk aan:

$$\sqrt{\frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}} \cdot d$$

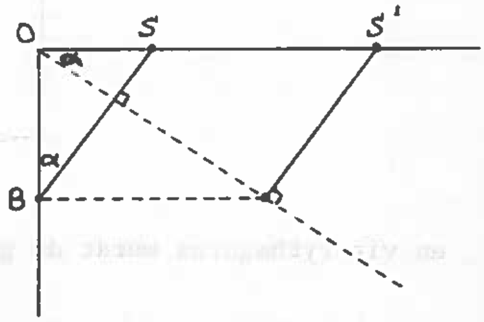
(in het geval van Bismarck en Suffolk dus $\sqrt{\frac{16}{52}} \cdot 45 \approx 24{,}96$)

Het vraagstuk kan ook meetkundig worden aangepakt.
De relatieve snelheid $\vec{v}$ van de Bismarck t.o.v. de Suffolk is het verschil van de vectoren $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_1$.
De Bismarck beweegt zich t.o.v. de Suffolk langs een rechte lijn met richtingsvector $\vec{v}$!





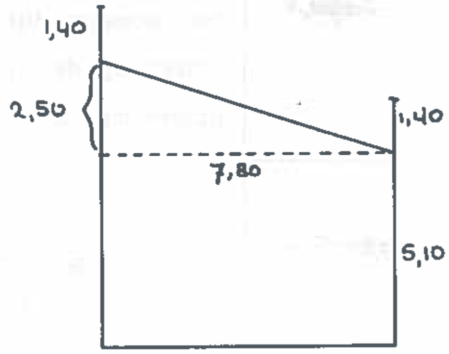
De *constructie* van de kortste afstand is nu niet moeilijk meer. Op het moment dat de lijn BS loodrecht staat op de stippelroute is de afstand minimaal.



En via $\tan \alpha = \frac{v_2}{v_1}$ en OS' = d vinden we bovenstaand resultaat.

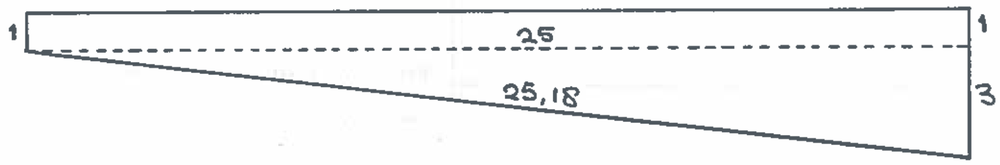
Bij ≫ 60 moet de leerling zich een goede voorstelling maken hoe de pingpongtafel eventueel door het raam naar binnen zou kunnen. Omdat de diagonaal van het raam ongeveer 1.28 m is en de breedte van de dubbelgeklapte tafel 1.30 m lukt het helaas net niet.
Toen dit probleem in de klas werd gemaakt, werd ik door een leerling gewenkt: Ze had zojuist $0{,}8^2$ ingetoetst. "Hoe kan dat nou meneer, bij een kwadraat krijg je toch altijd meer?"
Het computertje bovenin wordt door het werken met dat kleine handapparaatje dus toch niet uitgeschakeld!

Voor ≫ 61 verwijs ik naar het wiskrant-fragment op blz. 2.
Bij het Urker schip is het vinden van het meetkunde-plaatje niet zo simpel. Ik zie in de klas hoe een meisje drie andere leerlingen met twee potloden van ongelijke lengte, die ze loodrecht op het tafelblad heeft geplaatst, probeert te overtuigen.
Tenslotte besluiten ze tot een dergelijk plaatje:



en via Pythagoras wordt de gevraagde 8.20 m gevonden.

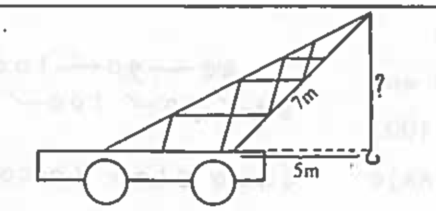
Het "model" rijmt met dat van ≫ 63 (het zwembad):



Voor de tegelzetter is die 18 cm achter de komma wel relevant, want dat scheelt toch maar even 400 tegels, waardoor het totaal op 50400 komt. Deze oplossing werd in de klas onmiddellijk gerelativeerd door Marja: "Juf, moet je de voegen ook meetellen?"
Het probleem van de inhoud van het zwembad staat natuurlijk los van de inhoud van dit boekje, maar dat neemt niet weg dat het toch wel verrassend is dat er 1¼ miljoen liter water in het zwembad blijkt te gaan. Ook bij dit vraagstuk is wel wat ruimtelijk voorstellingsvermogen nodig, al kun je als leraar gewapend met doos en bodemvlak, natuurlijk een mooie demonstratie geven.
Bij een toets over het boekje had de juf (Nanda Querelle) in de voorafgaande les aan de kinderen gevraagd om zelf ook eens Pythagorassommen te verzinnen, liefst met een verhaaltje. De leukste sommen worden op de "repetitie" ge-

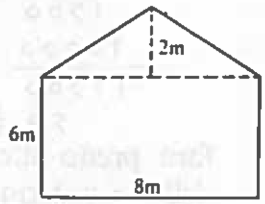
vraagd, dus ... Bij het ophalen bleken sommige leerlingen niet in hun opzet geslaagd: "ik heb wel een leuke som juf, maar het heeft niets met Pythagoras te maken". Uiteindelijk werden er drie inzendingen gepromoveerd tot toetsopgave (de redactie van de leerlingen werd met een paar kleine wijzigingen gehandhaafd):

1.



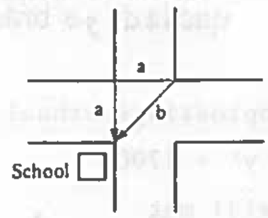
Hoe lang is het touw?

2.



Hoeveel dakpannen van 30 cm gaan er op de schuine rij?

3.



Kruispunt met vier straten van 5 m breed.
René loopt route a. Benny route b.
Hoeveel meter loopt Benny meer?

Eenvoudige sommetjes? Misschien wel, en in de verte leken ze ook wel op de vraagstukken die al eerder waren geweest. Maar toch, een creatieve prestatie en leerzaam is het zeker geweest. Een ideetje om te onthouden?

Tot slot een 15e eeuwse Pythagoras-toepassing (uit "De arithmetica, Filippo Calundri, Florence 1491).

De twee torens hebben een hoogte van resp. 90 en 80 en de onderlinge afstand is 100. De vogels die naar het plasje water duiken moeten dezelfde afstand afleggen.

Gevraagd: de afstand van het plasje tot de beide torens.

De beschreven oplossing vereist wat speurwerk om te achterhalen hoe Filippo het vraagstuk aangepakt heeft.

Esono dua torri in nun piano che luna e alta 80 braccia et laltra e alta 90 braccia: et dal luna torre allaltra e 100 braccia: et intra queste dua torri e una fonte dacqua in tal luogho che mouendosi due uccegli uno diciascuna et uolando dipari uolo giungono alla decta fonte nun tracto. Uo sapere quanto lafonte sara presso a ciascuna torre

80 — 90 — 100

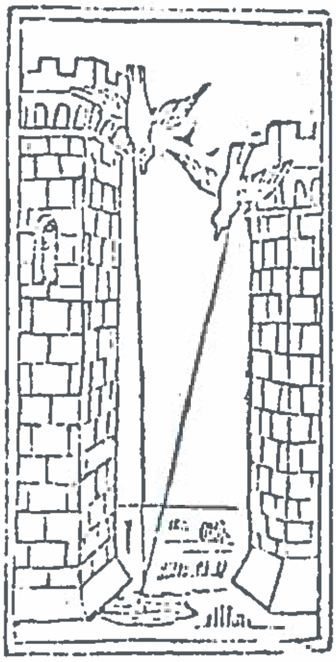
80✓ 90✓ 100✓

6400 8100 10000

8100
6400 -
1700

10000 | 200
11700
58 ½

sara presso alla torre dell 80 braccia a braccia 58 ½ et lauanzo in fino i 100 che ne 41 ½ braccia sara presso a quella di 90 braccia



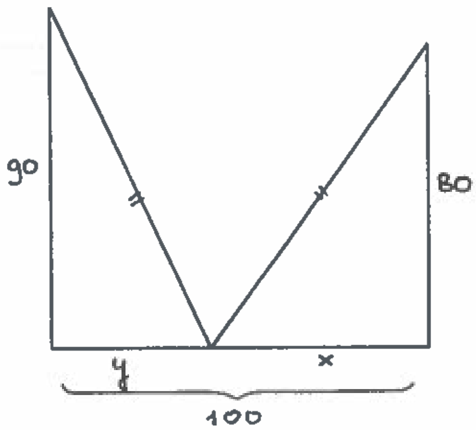
In hedendaagse notatie zou het oplossingsverhaal er ongeveer zó uitzien:
uit $90^2 + y^2 = 80^2 + x^2$ volgt $x^2 - y^2 = 1700$.
Dit laatste gecombineerd (opgeteld) met
$(x+y)^2 = 100^2 = 10000$ levert:

$$2x^2 + 2xy = 11700$$

ofwel: $x \cdot (2x + 2y) = 11700$

ofwel: $x \cdot 200 = 11700$

Conclusie: $x = 58\frac{1}{2}$ en $y = 100 - 58\frac{1}{2} = 41\frac{1}{2}$.



Uit het oogpunt van communicatie valt een "modern" beschreven oplossing te prefereren en in dat licht gezien is het gerechtvaardigd om de leerlingen strakke schema's (zoals op werkblad 21) te leren hanteren. En misschien dat een voorbeeld in de geest van Calundri de leraar voldoende argumentatie verschaft om de leerlingen ervan te overtuigen dat het zo "moet".

Het volgende fragment is overgenomen uit "Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I" van Martin Wagenschein.

Das Exemplarische Lehren als fächerverbindendes Prinzip

I

Alle Flüsse werden überschreitbar,
wenn man sich den Quellen nähert. XENOPHON

Wenn ich als Thema den Satz aus PYTHAGORAS wähle, so deshalb, weil man an ihm gut alles zeigen kann, was zum „exemplarischen" (oder „paradigmatischen") Lehren dazugehört.
Er ist zunächst geeignet, weil er eine „Pfeilerstellung" oder, in einem anderen Bild, eine „Schlüsselstellung" im Gefüge der Elementarmathematik einnimmt, zumindest eine beziehungsreiche.
Ich wähle ihn aber auch deshalb, weil sich an ihm gut darstellen läßt, was ein „Einstieg" ist.

Wir sind gewohnt, diesen „Satz" in einem gewissen mittleren Stockwerk des mathematischen Schulturmes angesiedelt zu denken und deshalb zu meinen, wer zu ihm hinwolle, müsse notwendig all die Treppen der sogenannten Vorkenntnisse vorher durchsteigen und hinter sich bringen.
Ich möchte nun gern davon überzeugen, daß das bei ihm — und es gibt noch mehr solcher Sätze — nicht nötig ist; daß es Themen gibt (nicht zu einfach, nicht zu kompliziert), in die man ohne Vorkenntnisse hineinspringen und die man doch aufklären kann; und dies, *ohne* daß dabei der systematische Aufbau der Mathematik zu kurz käme, im Gegenteil.
Welchen Vorteil sollen aber solche „Einstiege" haben, welche Nachteile das übliche (doch so naheliegende und sichere) Verfahren: von unten Schritt für Schritt hinauf zu steigen? Die Erfahrung zeigt, daß diese unsere Unterrichtspläne beherrschende Vorratswirtschaft („Das wird später irgendwann für irgend etwas gebraucht. Merkt es Euch!") zwar logisch nicht falsch ist, sich aber pädagogisch als ärmlich und wenig erfolgreich gezeigt hat: Sie führt zur Häufung der Vorräte, damit zur Eile und vor allem: sie langweilt die Kinder, statt sie herauszufordern. *Deshalb* ist in Kürze fast alles vergessen.
Das Herausfordernde und Aktivierende des Einstieges gehört notwendig zum „Exemplarischen".
Wir sollten deshalb seine erfrischende Wirkung auf allen Stufen ausnutzen.
Ich bin also nicht der häufig zu hörenden Meinung, das „Exemplarische" könne erst einsetzen, nachdem auf der Unterstufe „die erforderlichen Fundamente" gelegt seien. Zwar ist es für den Lehrer, der das Exemplarische Lehren zum erstenmal versuchen will, vielleicht einfacher, es zuerst auf der Oberstufe zu probieren. Aber auch die Fundamente können „exemplarisch" gelegt werden. Das exemplarische Vorgehen steht eben *nicht* im Gegensatz zum „Systemdenken", sondern führt — unter anderem — auch zu ihm hin, wie ich zeigen möchte. —
Gegen ein Verschieben auf die Oberstufe spricht auch dies: Die Geister sind dann häufig schon eingeschlafen vom anhaltenden Vorratslernen und Fundamentelegen.

Denken wir uns also Schüler, die zwölf Jahre alt sind, oder älter, und fast ganz frei von mathematischen Kenntnissen. Nur rechnen sollen sie können und verstehen, wie man den Flächeninhalt eines Rechteckes findet. Auch sollen sie mit *Dingen* praktisch, handwerklich umzugehen gelernt haben. — Das Thema ist also nicht unbedingt an die Höhere Schule gebunden. — Auch der Leser, sofern er nicht Mathematiker ist, wird von allen Vorkenntnissen ausdrücklich entbunden, falls das nötig sein sollte. Seine Urteilsfähigkeit wird dadurch nicht eingeschränkt.

Ich muß nun gleich etwas berichtigen und damit das exemplarische Lehren weiterhin charakterisieren. Nicht eigentlich „der Pythagoras" schon selber ist das Thema. Niemals kann etwas fachlich schon so Auskristallisiertes ein exemplarisches Thema sein.
Der Lehrer darf nicht so anfangen: „Nun wollen wir mal einen Satz betrachten, der nach PYTHAGORAS benannt ist." *Deshalb* nicht, weil er so nicht die Spontaneität der Kinder herausfordert, sondern bestenfalls ihr höfliches Hinhören erreicht. Das Thema darf, ja muß, zwar auf eine Schlüsselstellung zielen, aber nicht dort schon einsetzen. Es muß eine die Spontaneität des Lernenden herausfordernde Staunensfrage sein, die dem „Leben" möglichst nahestehen sollte. Der „Einstieg" ist also nicht als Fenster, sondern als „Gang" zu denken. Er hat einen „lebensnahen" Zugang und einen schon fachlich bestimmten Ausgang; ist aber im ganzen jedenfalls Frage, Problem. (Es kann freilich sein, daß auch *ohne* „Lebensnähe" [im Sinn des „Praktischen"] schon ein reines Zahlen-Problem [wie das des Primzahlensatzes !] oder ein Figuren-Wunder auf Kinder anziehend und auslösend genug ist: die Welt der reinen Zahlen und Figuren „lebt" dann in sich selbst genug und öffnet ihre Tore *ohne* „Gang".)
Ein Beispiel aus der Physik: Man kann die ganze Wellenlehre des Lichtes sehr gut auf den „FRESNELschen Spiegelversuch" gründen. Aber er darf allenfalls am Ausgang des Einstiegs liegen. Der Eingang wäre etwa gekennzeichnet durch die Frage: Wie kommt es, daß die Ölflecke, die auf dem nassen Asphalt liegen, periodische bunte Ringe zeigen? Diese Frage kann die Spontaneität der Lernenden wachrufen; der FRESNELsche Versuch, vom Lehrer am Anfang aufgebaut, könnte nur ihr „Mitgehen" bewirken. Der Einstieg wäre *hier* also ein ziemlich *langer* Gang, der aus einer ersten Analyse der „Farben dünner Blättchen" zu dem Gedanken führt, den reinen Interferenzversuch von FRESNEL zu machen.
Hier, beim „Pythagoras", könnte die Zugangs-Frage diese sein: Was steckt dahinter, daß Eisenbahner und Zimmerleute, wenn sie im Gelände einen rechten Winkel abstecken wollen, drei Latten mit den Maßen 3, 4, 5 zu einem Dreieck zusammenfügen?
Es sei gelungen, diese Frage den Kindern zu „stellen". So wie ein Segel gestellt werden muß, damit es vom Wind auch gefaßt wird, so ist die Frage gestellt, wenn die Kinder vom Sog des Problems ergriffen sind. Das kann lange dauern. Diese Zeit muß man geben. Exemplarisch lehren heißt nicht Zeit sparen. Es nützt nur die Zeit wirksam aus. Alles hängt davon ab, daß — in einem anderen Bild gesprochen — die Kinder sich für die Frage erwärmen, vielleicht sogar Feuer fangen.

Der Gedanken„gang" könnte dann etwa folgendermaßen weitergehen:
Der Lehrer berichtet, als Variation, die Seilspannergeschichte: ein geschlossenes Seil mit 12 in gleichen Abständen daran befestigten Kugeln wird gemacht und zum Dreieck (3, 4, 5) gelegt.
Gibt es noch *mehr* „solcher" Seile? Oder handelt es sich bei (3, 4, 5) um einen „Zufall"? — Natürlich wird das Dreieck (6, 8, 10) gefunden. Aber es wird sehr schnell durchschaut als „eigentlich" nichts Neues, eigentlich dasselbe. Man braucht nur eine andere Längeneinheit zu wählen, die halbe etwa, und das Dreieck (6, 8, 10) ist „dasselbe" wie das Dreieck (3, 4, 5) war. Wer geduldig sucht, wird vielleicht noch ein *wirklich* neues finden: das mit 30 Kugeln. Als Dreieck (5, 12, 13) wird es ebenfalls rechtwinklig. Seine Form ist nun aber anders, schmäler als die des Dreiecks (3, 4, 5).
(Die anderen vielen Formen, die es noch gibt, wird wohl keiner ohne Hilfe finden. Der Lehrer hat einstweilen nichts dagegen: Der Seitenweg zu den „pythagoreischen Zahlentripeln" läßt sich später weiter verfolgen.)
Rätselhaft, daß diese beiden Zahlen-Tripel gerade mit der Rechtwinkligkeit zu tun haben sollen. Zahlen können ja gar nichts Rechtwinkliges an sich haben, meint man.

Haben diese Zahlentripel wenigstens etwas unter sich *Gemeinsames?* Man wird sie vergleichend anschauen:

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 12 & 13, \end{matrix}$$

und nach einigem Spielen wird man — vermutlich erst auf den Vorschlag des Lehrers hin — erst einmal jede der 3 Zahlen mit sich selbst multiplizieren:

$$\begin{matrix} 9 & 16 & 25 \\ 25 & 144 & 169 \end{matrix}$$

und dann etwas sehen. Dann ist nämlich das Gemeinsame dies:

$$9 + 16 = 25$$
$$25 + 144 = 169$$

oder, in den ursprünglichen Zahlen ausgedrückt:

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 5 \cdot 5$$
$$5 \cdot 5 + 12 \cdot 12 = 13 \cdot 13.$$

„Allgemeine Zahlen" brauchen die Kinder nicht „gehabt" zu haben. Sie werden trotzdem jetzt das Schema

(*) $a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c$

als das neu entdeckte Gemeinsame erkennen und damit *anfangen*, allgemeine Zahlen zu verstehen. (Das Zeichen a^2 ist hier überflüssig, ja störend.)

Hat diese gemeinsame Formel (*) etwas mit der gemeinsamen rechtwinkligen Form des Dreiecks zu tun? Vorläufig ist nicht zu sehen, woher ein Zusammenhang kommen sollte.

Was uns interessierte, sind rechtwinklige Dreiecke, die so zustande kommen, daß die Seitenlängen ganzzahlige Vielfache derselben Längeneinheit sind. Nun gibt es aber natürlich rechtwinklige Dreiecke, für die das nicht zutrifft, und auf der anderen Seite kann man das Schema (*) ebenfalls durch *nicht*-ganzzahlige Werte erfüllen.

Wenn das Schema (*) etwas mit der Rechtwinkligkeit zu tun hat, dann müßte man zusehen, ob seine Koppelung zwischen *a*, *b* und *c* nicht vielleicht auch *dann* Rechtwinkligkeit bedeutet, wenn *a*, *b* und *c nicht* ganze Zahlen sind.

Machen wir also eine *glatte* Schnur, *ohne* Kugeln. Formen wir aus ihr dann irgendeines der vielen möglichen rechtwinkligen Dreiecke und messen seine Seiten, etwa:

$$2{,}7 \qquad 5{,}5 \qquad 6{,}1.$$

Wir finden, daß wirklich auch hier $2{,}7 \cdot 2{,}7 + 5{,}5 \cdot 5{,}5$ recht genau $6{,}1 \cdot 6{,}1$ ist, denn $7{,}29 + 30{,}25 = 37{,}54$ liegt nahe bei $37{,}21$.

Neue Proben mit anderen Dreiecken: „Es stimmt immer", sagen die Kinder.

Vorsichtiger: Es *scheint* immer zu stimmen. Weder wissen wir, ob es *genau* stimmt („auf den hundertstel Millimeter"), noch ob es in Zukunft bei neuen Proben immer *wieder* stimmen wird. Die Zukunft kann niemand zwingen.

Jedenfalls aber: Der Zusammenhang der Formel $(a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c)$ mit der Form des rechtwinkligen Dreiecks ist höchst wahrscheinlich geworden. — Aber „Wie-So"?

Weiter kommt man erst, wenn einem einfällt, daß man sich bei $a \cdot a$ etwas Anschauliches vorstellen kann. Das wäre gut, denn auch die Form ist ja etwas Anschauliches. Soll die Gleichung (*) an etwas Anschauliches gebunden verstanden werden, so muß sie selbst anschaulich interpretiert werden.

Nun bedeutet (das sollte ja zu den wenigen Vorkenntnissen gehören) $a \cdot a$ die Fläche des Quadrates, das sich über einer der beiden kleineren Seiten, *a*, aufbauen läßt.

Damit wird $(a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c)$ vorstellbar und sagt aus, daß ein gewisses großes Quadrat (das nämlich, das über der größten Seite *c* des rechtwinkligen Dreiecks steht) genau so viel Fläche hat wie die zwei Quadrate, die über den beiden kleineren Seiten gebaut werden können, zusammen. Die bekannte Pythagoras-Figur steht da.

($a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c$) verstehen, heißt nun also: *Dies* verstehen: Daß es bei jedem rechtwinkligen Dreieck der Fall sein soll. (Oder auch umgekehrt, daß jedes Dreieck, wo das der Fall ist, ein rechtwinkliges sein muß. — Daß aus dem einen nicht notwendig das andere folgen muß, die Unterscheidung also zwischen einer Behauptung und ihrer Umkehrung, verschieben wir auf später. Diese Frage darf hier nicht aufhalten.)

Wir wissen jetzt endlich anschaulich, *was* wir verstehen wollen. Die Sache mit den Eisenbahnern hat ein ganz anderes Gesicht angenommen. Sie ist fast vergessen. Wir stehen jetzt am *Ausgang* des Einstiegs.
Praktisch, wie Kinder sind, werden sie es durch Auswägen der ausgeschnittenen Pappquadrate entscheiden wollen: „Es stimmt immer." Die Frage ist nur, ob es genau stimmt! Und „warum" es stimmt. Ob es so sein „muß". Ob man es „einsehen" kann.
Man könnte auch nach Art eines Legespiels das große Quadrat in geeignete Stücke schneiden, die sich dann in den beiden kleineren Quadraten restlos müßten unterbringen lassen, oder umgekehrt. Und vielleicht könnte man das *einsehen*.
Das gibt eine langwierige Schnippelei. Aber sie muß wirklich getan werden, vielleicht eine halbe Stunde lang, von jedem. Gerade um ihrer Vergeblichkeit willen. Denn natürlich wird kein Kind auf den genialen Gedanken kommen, den der Araber ANNAIRIZI vor 1000 Jahren hatte, und auf den der Lehrer nun hinauswill. Aber nach einer halben Stunde des vergeblichen Probierens wird jedes Kind einen Sinn für diese Genialität bekommen.
Als weitere notwendige Voraussetzung des exemplarischen Vorgehens wird dabei deutlich: Viel Zeit für Gründlichkeit und vor allem für die Selbsttätigkeit der Lernenden. (Es ist ein Mangel dieses Beispiels, daß die Selbsttätigkeit hier recht beschränkt ist: Der Lehrer muß verhältnismäßig stark führen. Es gibt Beispiele, die in dieser Hinsicht günstiger sind. Ein anderer Mangel: Der „Einstieg" ist zu eng. Aber ein einzelnes Beispiel kann nicht alle Merkmale in gleicher Intensität vorzeigen.)
Noch ist nichts darüber gesagt, inwiefern dieses Thema des „Pythagoras" exemplarisch wäre. Man sieht aber wohl einstweilen schon einige notwendige Voraussetzungen: 1. die Schlüsselstellung des angezielten Themas innerhalb des fachlichen Gefüges, 2. der „Einstieg" (als möglichst lebensnahe Staunensfrage), 3. die Selbsttätigkeit. Alles dient derselben Absicht: den Lernenden vom Einzelnen aus in das *Ganze* der Sache zu führen und, zugleich, ihn, den Lernenden, wirklich mit der Sache in Fühlung zu bringen, seine Spontaneität herauszufordern und damit auch *sein* Ganzes, *seine* Mitte in Resonanz zu bringen. Das Exemplarische Lehren drängt auf das Ganze, der Sache wie des Lernenden. — Kehren wir nun zur Sache zurück.

Der Lehrer wird weiterhelfen, indem er nahelegt, das große Quadrat in den beiden *schon aneinander gesetzten* zwei anderen unterzubringen, die damit als eine neue Figur, ohne Naht, gesehen werden (Figur 2).
Da die Schnitzel sich an die Seiten der Figuren anlehnen und in ihre Ecken passen müssen, wäre es gut — falls es überhaupt eine einfache Lösung gibt —, wenn die Stücke, wenigstens zum Teil, 1. rechte Winkel, 2. hie und da die Seiten a, b und c in sich und an sich trügen.
Dabei bietet sich nun das ursprüngliche Dreieck selbst als ideales Schnitzel an! Das wäre freilich fast zu einfach, um aussichtsreich zu sein. Aber versuchen wir's:
Legen wir also das als Schnitzel erwählte ursprüngliche rechtwinklige Dreieck (a, b, c) in das größte, das c-Quadrat, günstig hinein (Figur 1).
Das hätten wir nun an *jeder* der 4 Seiten tun können. Tun wir's also gleich *noch einmal* nebenan. (Das muß jeder mit Papier selber machen.)
Dabei zeigt sich etwas Auffälliges. Sieh da! sagt man sich. Das macht sich gut: die passen nahtlos aneinander.

Der Nachdenkliche hält ein. Der Tätige macht weiter. Folgen wir zunächst ihm. Er könnte also das Dreieck, da es so gut an sich selber sich anfügt, *noch* zweimal unterbringen, viermal im ganzen, rundherum. Ja, das könnte man, wird der Lehrer sagen, aber tut's nicht, ich rate ab! Denn, ob ihr's glaubt oder nicht: mehr als 3 Schnitzel hat der Araber überhaupt nicht nötig gehabt! – Nicht?

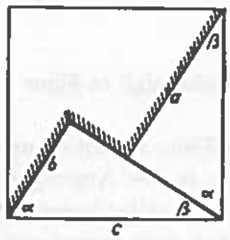


Fig. 1

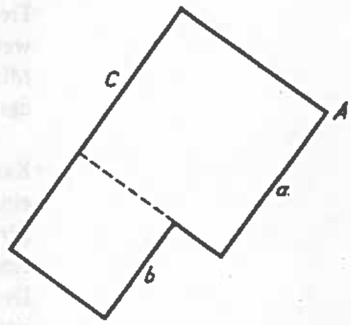


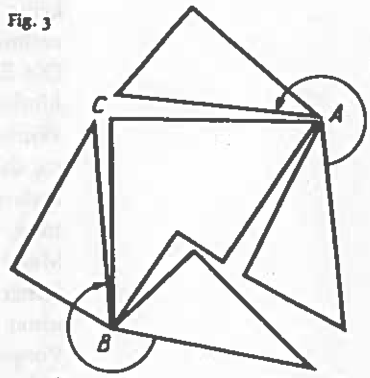
Fig. 2

Dann müßte es möglich sein, aus nur diesen 3 Schnitzeln der Figur 1 die Figur 2 zusammenzulegen?

Wenn der Lehrer die Figur 2 schon – wie hier geschehen – in die geeignete Stellung bringt, vielleicht auch die Naht zwischen den zwei Quadraten *aa* und *bb* wegläßt, und wenn er gar in Figur 1 noch die (hier schraffierte) gebrochene Linie mit dem Finger entlang fährt, merken sie es vielleicht:

Es geht in der Tat, und am elegantesten durch Drehen! Man kann dann die Figur 1 ohne weiteres (in zwei Akten) in die Figur 2 umwandeln (Figur 3): „Fertig ist die Laube!" (Man kann eine Art Hampelmann-Modell aus Holz bauen: *Ein* Seilzug, und beide Dreiecke klappen herum.)

Fig. 3



Man erkennt deutlich an der neuen Figur, daß es tatsächlich nur drei Schnitzel waren, die man brauchte. – (Man kann die Umwandlung auch ohne Drehen vorführen, indem man diese drei Schnitzel aus Figur 1 herausschneidet und in Figur 2 herumschiebend verteilt. Dann geht aber die *Einsicht* verloren.)

Haben wir denn die Einsicht? Es gab da noch ein zweites Mal, wo man „Sieh da!" sagen mußte: Als man nämlich merkte, daß sich die Figur 2 wirklich bildete, die ja aus zwei *Quadraten* bestehen muß.

Der Tätige sieht: „es ist so" und freut sich. Der Nachdenkliche wird tiefsinnig. Folgen wir jetzt *ihm:* Ist es denn auch *wahr?* Gibt das *wirklich* rechte Winkel bei den Drehpunkten *A* und *B*? Und eine „Gerade", *ohne Knick* bei *C*? (Siehe Figuren 2 und 3.)

Hier zeigt sich, wer von den Lernenden überhaupt so weit ist, daß er sich mit Mathematik abgeben sollte. Er sollte es nämlich nur dann, wenn in ihm das Organ für diese Frage anspricht. Hier scheiden sich die Geister.

Denn, nicht wahr – *war* das denn überhaupt Mathematik, was wir bis jetzt da machten? Nein, es war Schreinerei. Schreinerei eines Modells für den Mathematik-Unterricht. Mathematik beginnt erst.

Man *sah*, daß es „so kommt", so zu kommen *scheint*. Man sah noch *nicht*, daß es auch so kommen *mußte*.

Zweimal sagte man sich während der Handlung: „Siehe da!" Man staunte an diesen Stellen, man fand es bemerkenswert, daß da etwas so gut „klappte": „Von selbst", „freiwillig". – Kann man „einsehen", daß es „*immer* klappen *muß*"?

Man muß sich hineinfühlen in diese Worte: „Einsehen", „immer", „muß".

1. „Einsehen" heißt: „dahinter kommen"; sehen, was „dahinter steckt"; „woher es kommt"; „womit es zusammenhängt"; „es herausbringen"; „worauf es beruht"; „wie es begründet ist".

2. „Immer" heißt nicht nur: auch morgen und übermorgen und allezeit, sondern: nicht nur für *dieses*, im Bild gerade gezeichnete, Dreieck, sondern für *jedes* rechtwinklige. — (Deshalb brauchen wir mindestens zwei solcher Hampelmann-Modelle.)

3. Und schließlich: Was heißt hier „müssen"? Es heißt: nicht zufällig, nicht aus Freundlichkeit, nicht aus Freiheit. Offenbar herrscht hier etwas wie Zwang, Notwendigkeit. Aber wieso?

Mit dem Nachdenken erst über solche Fragen *beginnt* „Mathematik" und beginnt der *„Beweis"*.

Kann man also „einsehen", zunächst daß in Figur 1 die zwei Dreiecke immer aneinander *passen* müssen?

Man kann es, wenn man (siehe Figur 1, rechte untere Ecke) den Befund „$\alpha + \beta =$ einem rechten Winkel" als eine *innere* Angelegenheit *desselben* rechtwinkligen Dreiecks formuliert (das sich ja hier *selbst* begegnet) und als *solche* „einzusehen" versucht: Die zwei Dreiecke passen *dann* immer aneinander, wenn *immer* (d. h. in *jedem* rechtwinkligen Dreieck) die zwei kleinen Winkel zusammen genausoviel geben wie der dritte, der größte, der rechte Winkel [2].

Die Frage ist damit völlig aus dem „Pythagoras"-Zusammenhang herausgelöst und als eine Angelegenheit allein des rechtwinkligen Dreiecks, *jedes* rechtwinkligen Dreiecks, erkannt.

Man kann dem Dreieck, aus Papier geschnitten, die zwei engeren Ecken abreißen und in die dritte Ecke hineinlegen: es stimmt immer. Aber, und hier trennen sich *wieder* die Geister: das gibt *keine Einsicht*. Man weiß nicht, warum. — Es *kann* keine Einsicht geben, weil man die Figur *zerrissen* hat. Die Gestalt geht dabei verloren.

Die Einsicht gelingt, wenn man nicht zerreißt, sondern das eine zum andern sich *hinfinden* läßt, indem man die Winkel verschiebt: Wenn man nämlich den einen Winkel, α, längs der einen Seite bis zur nächsten Ecke fortgleiten läßt, und zwar so, daß der eine seiner Schenkel auf dieser Seite, sich mit ihr deckend, gleitet. Der andere bleibt dann immer zu sich selbst parallel, er weist immer in dieselbe Richtung, die er auch anfangs hatte (Fig. 4).

Macht man das Entsprechende mit β und erkennt ferner γ in seinem Gegenüber wieder, so ist man schon fertig. (Und bemerkt *nebenbei*, daß dieses Vorgehen auch dann „geht", wenn das Dreieck gar nicht rechtwinklig ist! Man hat im Vorbeigehen den allgemeinen Satz von der Winkelsumme im Dreieck gefunden: *immer* geben die drei Winkel zusammen zwei Rechte.) Daß auch das zweite „Sieh da!" (kein Knick bei C, und rechte Winkel an den Drehpunkten *A* und *B*, Figur 3) aus demselben Satz von der Winkelsumme „hervorgeht", darf dem Nachdenken des Lesers überlassen bleiben.

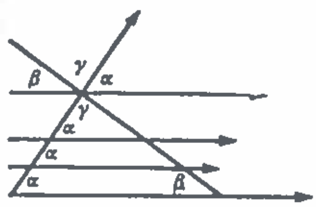


Fig. 4

Für das Kind oder den Jugendlichen, den wir hier voraussetzen, ist an diesem Beweis für die Winkelsumme „alles klar"; „geht in Ordnung". Denn dieses Verschieben der Winkel „geht" immer, und daß die beiden Scheitelwinkel γ einander gleich sind, ist ebenfalls „selbstverständlich".

Erst wenn man im mathematischen Beweisen anspruchsvoller geworden ist und mißtrauischer gegen das „Selbstverständliche", kann man noch etwas herauswittern, das vielleicht doch nicht selbstverständlich ist: Bleibt der verschobene Schenkel mit Sicherheit sich selbst parallel?

---

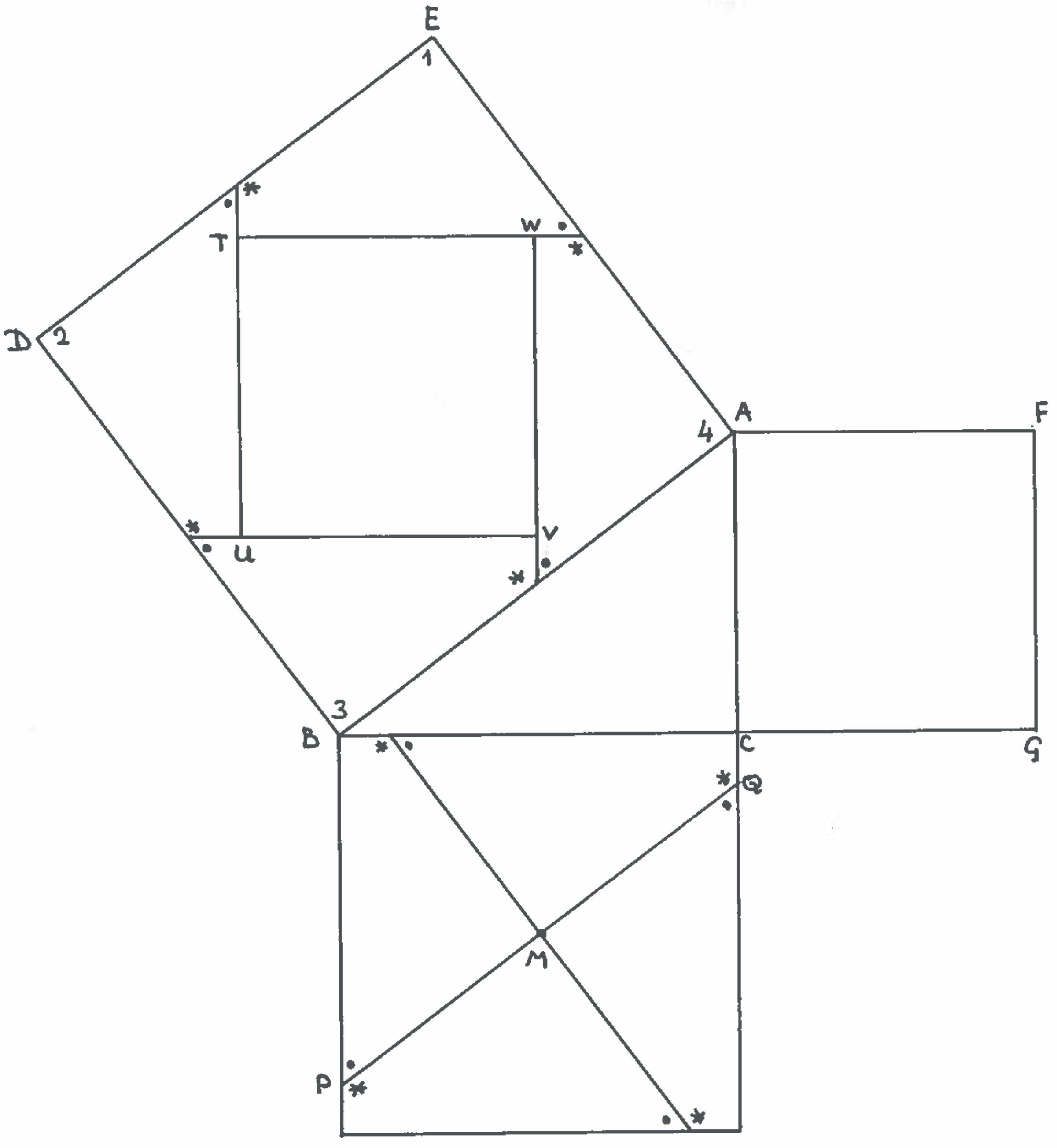
[2] Frage eines Referendars: Kann ein Kind ohne Vorkenntnisse hier mitkommen? Muß es nicht erst einmal wissen, was überhaupt ein Winkel ist? Und daß er in Grad gemessen wird? — Eben nicht: Die Einteilung des vollen Winkels in 360° hat gar nichts mit der Sache zu tun. Was ein Winkel ist, insbesondere ein „rechter", weiß jedes Kind, das schon einige praktische Erdenjahre hinter sich hat. Die Definition ergibt sich, sobald sie notwendig wird. Hier kündet sie sich an in den Worten „parallel", „Richtung".

Wohl erst der Primaner wird dafür empfänglich werden; und auch erst dann, wenn er bemerkt, daß ein Dreieck, das er auf eine *Kugel*fläche aus Großkreisstücken gezeichnet hat, den Beweis *nicht* zuläßt, und zwar deshalb nicht, weil sich bei der Verschiebung die Parallelität *nicht* halten läßt.
Sehen wir davon ab, so werden wir also unter Jüngeren mit ihnen feststellen dürfen: Der Satz von der Winkelsumme ruht nur noch darauf, daß es bei der Verschiebung Parallele „gibt". Und diese Aussage ist „selbstverständlich", sie ruht auf nichts mehr, ist ein „Axiom".
So entsteht nun also – blicken wir zurück – für die Begründung, den Beweis, des „Pythagoras" folgendes Schema: Der „Pythagoras ist" richtig, weil der Satz von der Winkelsumme richtig ist, und der ist richtig, weil es Parallelen gibt. Und *das* ist „klar", ist „selbstverständlich". Darüber staunt man nicht mehr.
Das versteht jedes gesunde Kind, das über zwölf Jahre alt ist. Es braucht dazu weder mathematische Vorkenntnisse noch die sagenhafte besondere Begabung, die als angebliche Voraussetzung immer wieder mit gruselnder Verehrung genannt wird.

Achterin het leerlingenboek zijn, behalve de twee legpuzzelbewijzen waar in deel A op aangestuurd wordt, nog twee bewijzen van de Stelling van Pythagoras opgenomen.

Het bewijs van Leonardo da Vinci (blz. 32) is op het eerste gezicht heel verrassend, maar kan bij nader inzien onmiddellijk teruggebracht worden tot het legpuzzelbewijs van blz. 29.

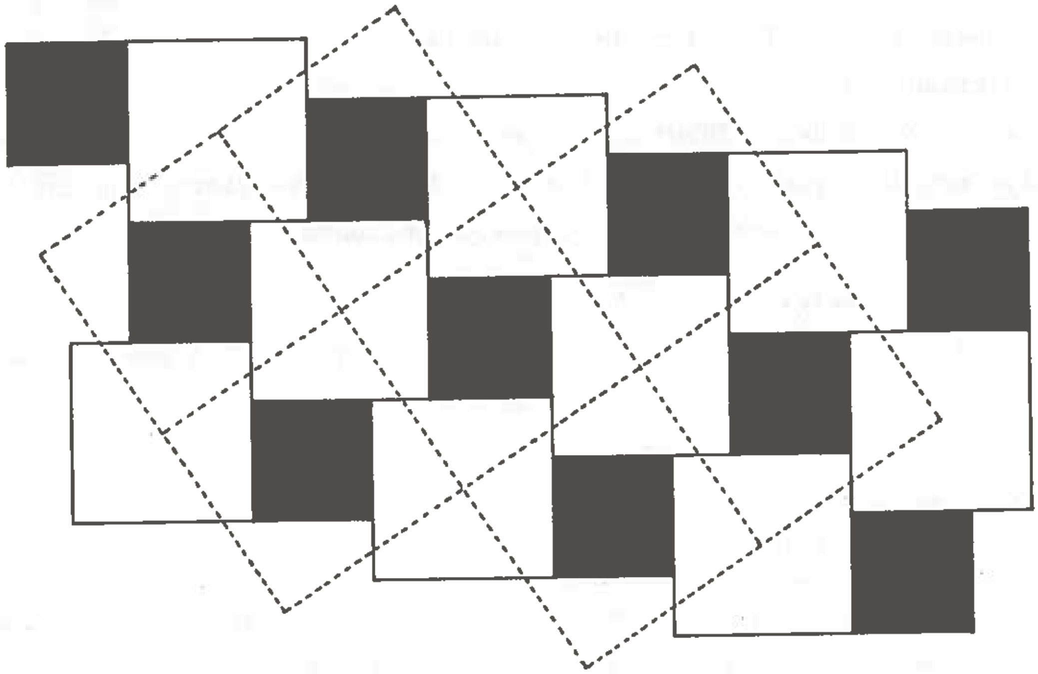
Het bewijs van Perigal heeft de charme van een fraaie verdeling van de vierkanten. Een pluspunt is ook dat er met één figuur kan worden volstaan. Meetkundig is het bewijs echter aanzienlijk minder doorzichtig.



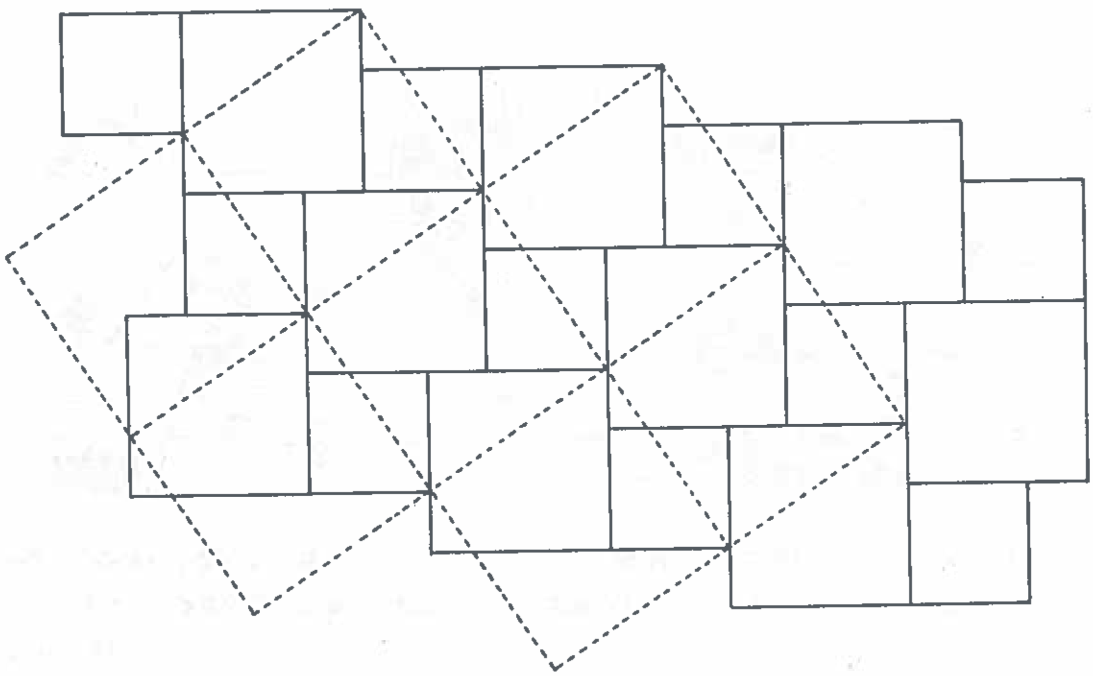
De lijnstukken PQ en RS gaan door het middelpunt van het vierkant op BC en zijn parallel met de zijden van het grote vierkant (op AB). Via rotaties om M over 180° en 90° kan men gemakkelijk nagaan dat de vierhoeken waarin PQ en RS het vierkant op BC verdelen onderling congruent zijn. Bovendien (ABPQ is een parallellogram!) geldt: PQ ≅ AB èn RS ≅ BD en na het vergelijken van enige hoeken (• + * = 180°!) is het zonneklaar dat die vier stukken in het grote vierkant passen
Het overblijvende deel (TUVW) nu, is een vierkant, waarvan de zijden parallel zijn met de zijden van ACGF. Uit AQ ≅ BP volgt tenslotte nog dat TU en AC even lang zijn en daarmee is het bewijs voltooid.

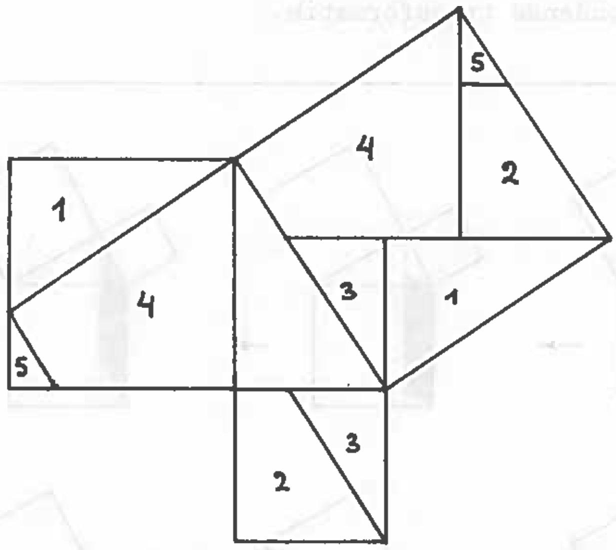
Het bewijs van Perigal kan ook op fraaie wijze met tegelvloeren worden gedemonstreerd. In een van de experimentele versies van deel A deed Pythagoras op zijn ontdekkingsreis ook nog even een Babylonische tuin aan. (In de definitieve versie is dit fragment weggelaten uit de aanloopfase van de Stelling van Pythagoras, enerzijds om die aanloopfase niet tè lang te maken, anderzijds omdat er voor de leerlingen weinig zelf aan te ontdekken viel).

Door op het tegelpatroon een scheef vierkantjesrooster te leggen, wordt het bewijs van Perigal in één klap duidelijk. Via de rotatie die het tegelpatroon èn het vierkantjesrooster invariant laten, kan het bewijs worden gepreciseerd.



Verschuiving van het vierkantjesrooster leidt nog tot een ander bekend Pythagoras-bewijs.

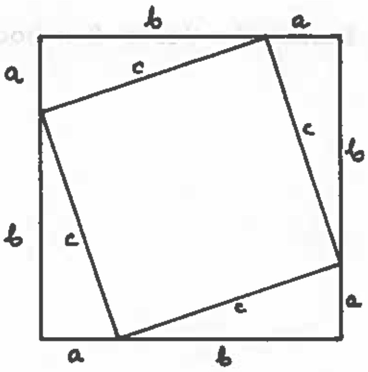


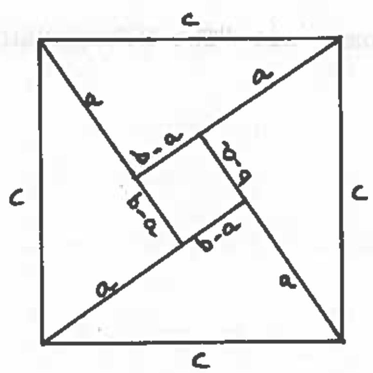


Zoals bekend zijn er in de loop der tijden meer dan honderd verschillende bewijzen van de Stelling van Pythagoras gevonden. Sommige van die bewijzen kunnen eventueel verderop in de cursus ter sprake komen. Zo kan als bij de gelijkvormige figuren de kwadratische oppervlakte-toename behandeld wordt, het fraaie bewijs van Polya (handleiding blz. 22) worden gedemonstreerd. Bij een behandeling van merkwaardige produkten zou aandacht kunnen worden besteed aan de "algebra-bewijzen" van Pythagoras.

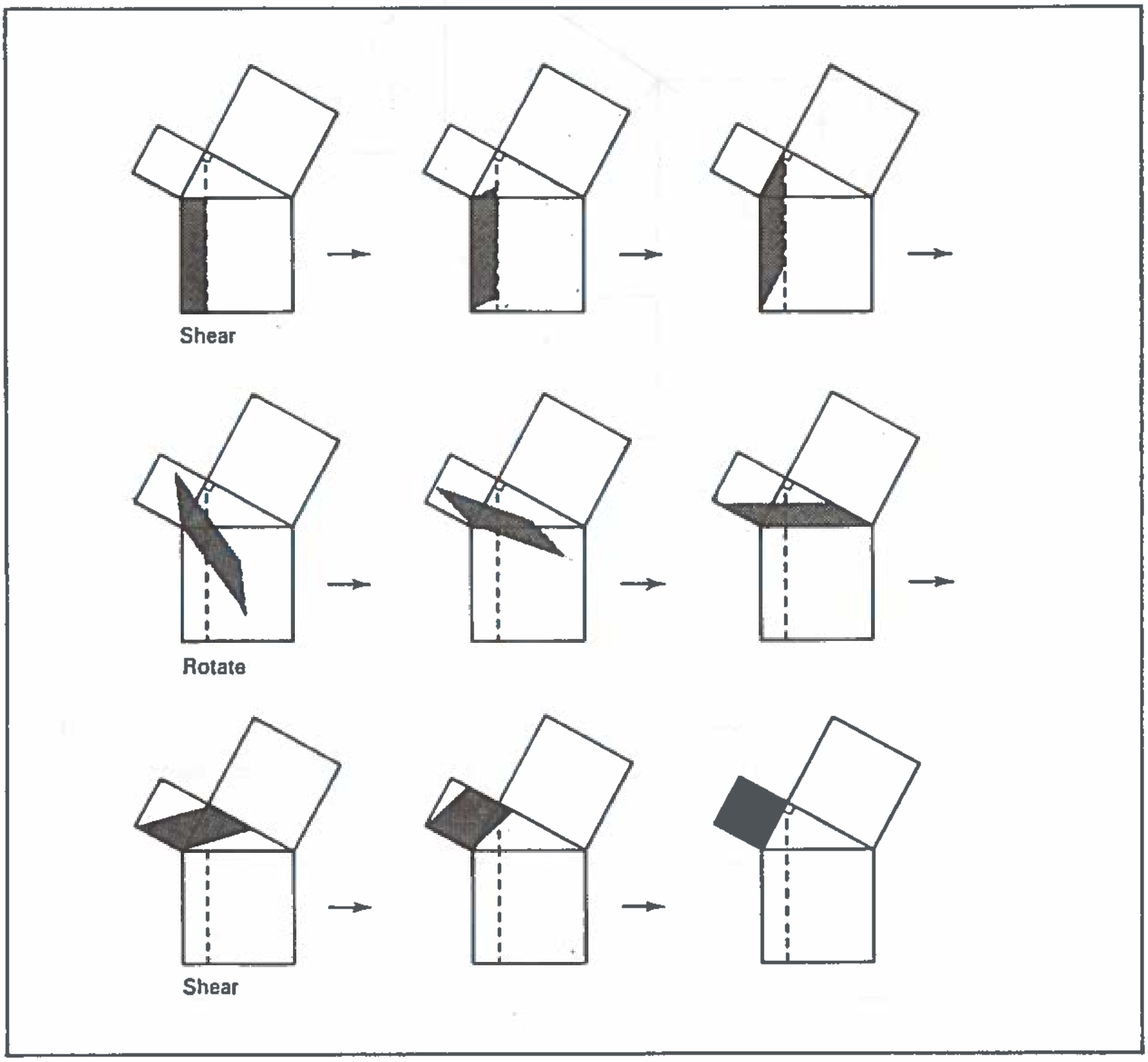
$$\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\ 4.\tfrac{1}{2}ab & = & 2ab \\ \hline c^2 & = & a^2 + b^2 \end{array} \;-$$

$$\begin{array}{rcl} (b-a)^2 & = & b^2 - 2ab + a^2 \\ 4.\tfrac{1}{2}ab & = & 2ab \\ \hline c^2 & = & b^2 + a^2 \end{array} \;+$$





Tenslotte willen we nog het klassieke bewijs van Euclides vermelden dat eventueel ter sprake kan komen bij de behandeling van afschuiving van figuren als oppervlakte-behoudende transformatie.



Overgenomen uit "The School Mathematics Project", Teacher's Guide for book G.