wiskobas bulletin

rubriekdeel

Jaargang 8 nr. 1
oktober 1978

WISKOBAS-BULLETIN (rubrieken)
- bulletin ter begeleiding van het wiskunde-onderwijs
- verschijnt gedurende de achtste jaargang zes keer.

Jaargang 8 nr. 1 – oktober 1978

Redaktie
Drs. F. Goffree, Drs. R.A. de Jong (eindredakteur), G.H. Meijer, Dr. A. Treffers, Drs. E.J. Wijdeveld

Medewerkers
Prof.Dr. F. van der Blij, J. van den Brink, A. Dekker, K. Frenay, Prof.Dr. H. Freudenthal, L. Gilissen, J. de Gooijer-Quint, H. Jansen, H. ter Heege, Drs. J.H.F.M. Klep, Dr. K.B. Koster, E. de Moor, D.W. Oort, P. Scholten, W. Sweers, L. Streefland.

Vormgeving
Ton Voortman

Illustraties
Theo van Leeuwen

Redaktieadres
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht
t.a.v. Sylvia Pieters of Rob de Jong

Abonnementenadministratie
STICHTING IVIO,
Postbus 37, Lelystad.
Voor aanmeldingen, adreswijzigingen, betalingen, enz.

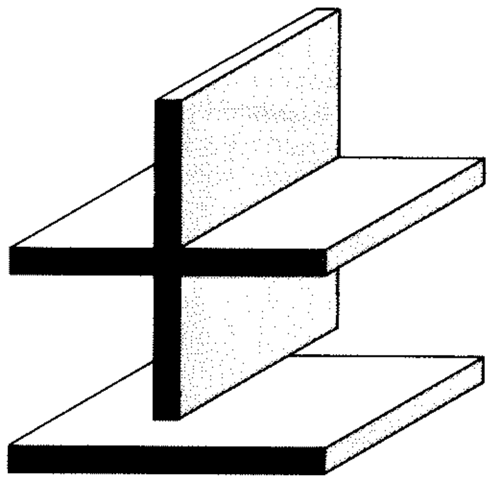
Abonnementsprijs
Per jaargang *f* 35,–.
De jaargangen lopen van september tot september

Annuleringen moeten minstens 14 dagen voor het einde van de jaargang worden opgegeven bij de abonnementenadministratie.

Gelieve uitsluitend te betalen met aksept-girokaarten. Deze worden u toegezonden.

INHOUD

redaktioneel



ACHTSTE JAARGANG

Met deze aflevering van het wiskobas-bulletin starten we de achtste jaargang. Een jaargang waarvan we veel verwachten. Een jaargang ook met nogal wat veranderingen. Veranderingen die, binnen een eenmaal aangezette ontwikkeling, inhaken op denkbeelden en vragen anno nu. De splitsing in rubriekdelen (groen) en leerplandelen (rood) blijft gehandhaafd.

De te verschijnen rubriekdelen proberen we te verbreden. Enerzijds door het aantal rubrieken uit te breiden. Zo treft u in dit nummer de volgende nieuwe rubrieken aan (met de naam van de verantwoordelijke auteur tussen haakjes):
- *onderwijsontwikkeling (Abbes Dekker);*
- *nieuw op de markt (Ed de Moor);*
- *respons (wisselend).*

Anderzijds door voor de gebruikelijke rubrieken meer ruimte beschikbaar te stellen. Plaatsing van langere artikelen wordt daardoor mogelijk.

ROB DE JONG

De grotere aandacht voor de rubriekdelen mag niet ten koste gaan van de leerplanpublikaties. We doen ons best de komende produkties kwalitatief minstens op hetzelfde nivo te houden.
Er zijn inmiddels negen delen verschenen, elk met een oplage van cirka 12.500. Ondanks deze hoge oplagen bleken toch van enkele nummers nog herdrukken nodig. *Op zich bemoedigend!*
In de komende jaargang komt in ieder geval een leerplanpublikatie over *vermenigvuldigen en delen*. Een groep auteurs is al intensief met het voorbereidende werk bezig.
Voorts streven we ernaar een leerlingenboekje en onderwijzershandleiding over de zogenoemde *autobusproblemen* te doen verschijnen.

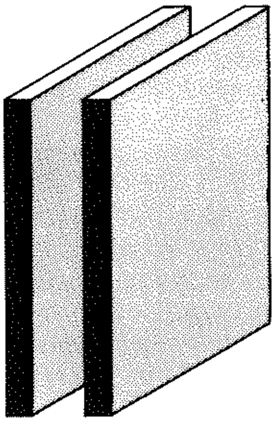
nipo

Ondanks het feit dat we wiskundeonderwijs voor de basisschool ontwikkelen in samenwerking met degenen die er direkt bij betrokken zijn, hebben we toch wel eens het gevoel dat we in kontakt staan mét en derhalve onze informatie krijgen vanuít een bepaald gedéelte van het onderwijsveld. Daardoor kan een vertekend (te optimistisch) beeld ontstaan van de wensen en mogelijkheden van de totaliteit van genoemd veld.
Toch is het nodig, zo nauwkeurig mogelijk te weten hoe deze totaliteit tegenover de wiskobasaktiviteiten aankijkt. Wellicht moet bijgestuurd worden. Het kan immers zijn dat wiskobas te hard of te langzaam loopt. Het is mogelijk dat we onverstaanbaar zijn geworden (jargon). Misschien worden we zelfs niet eens meer opgemerkt. Mede om hier inzicht in te krijgen hebben we het *nipo*, een onafhankelijk instituut, ingeschakeld. In mei/juni 1978 vond een onderzoek plaats. Later zullen we hierover in ander verband nog wel eens uitgebreid rapporteren.
Uit het cijfermateriaal kan voorzichtig gekonkludeerd worden dat ingrijpende koerswijzigingen op dit moment niet voor de hand liggen. Althans, vanuit het gezichtspunt van het onderwijs bekeken.

metoden

- In 'De vacature' van 29 augustus 1978 werden twee volledige sets van een 'moderne' rekenmetode te koop aangeboden. Bij telefonische navraag bleken twee scholen nogal teleurstellende ervaringen met deze metode te hebben opgedaan. *Triest*?
- Een jonge, veelbelovende metode, nog maar net in ontwikkeling, is, zo hoorden we, al op 120 scholen in gebruik. *Lichtzinnig*?

kolommen



HOE WEET JE DAT?

'Hoe weet je dat?' Een vraag waarop het antwoord zou kunnen luiden: 'uit de krant'. Of: 'de meester heeft het gezegd'. Of: 'ik zie het zo'. Of: 'zomaar'. En al die antwoorden kunnen goed zijn – het hangt van de situatie af –.
Ook op de vraag '8 + 5 is ... ?', kan het antwoord – goed of slecht – aanleiding geven tot doorvragen: 'hoe weet je dat?'. Natuurlijk is het antwoord dan niet 'uit de krant' en vermoedelijk ook niet 'van de meester'. Maar 'ik zie het zo' kan best deugen – je hebt van die kinderen, en het zijn er niet weinig, die het optellen voor hun geestelijk oog zien gebeuren –. Ook 'zomaar' kan – ze weten het al van buiten –. Maar dan kun je verder vragen: 'hoe ben je het ooit te weten gekomen?'. En misschien herinneren ze zich hoe ze het deden toen ze het nog niet van buiten wisten, bijvoorbeeld met doortellen of bij wijze van (8 + 2) + 3.

H. FREUDENTHAL

'Hoe weet je dat?', kun je jezelf soms ook afvragen, en in alle gevallen vereist het antwoord een wroeten, een zelfonderzoek. Ineens weet je iets, het lijkt een ingeving, maar dan ben je er nog niet, want wat je zelf weet, moet je kunnen uitdragen, je moet er anderen van kunnen overtuigen, en die kunnen aan jou weer de vraag stellen: 'hoe weet je dat?'.

verdubbelen of halveren
De oudst bekende wiskundeles, en trouwens de oudste les waarover we iets weten, is die bij Plato, waar Socrates zijn leerling, de slaaf van Menon, een vierkant laat verdubbelen – een echt socratische les –. Na die vaak nagebootst te hebben, ben ik uiteindelijk bij dé manier terecht gekomen om dit didaktisch aan te pakken. Niet verdubbelen, maar halveren! Ik heb het inmiddels vele malen geprobeerd. Een zakdoek of een papieren servet zo laten plooien dat er een vierkant met de helft van die oppervlakte ontstaat. Natuurlijk is het eerste dat geprobeerd wordt, het vierkant evenwijdig met een van de zijden te vouwen, maar meteen is overduidelijk dat de uitkomst geen vierkant is. Na dit eerste onvermijdelijke wansukses hebben ze het spontaan of vrijwel spontaan, gauw te pakken – zes- tot achtjarigen –: de slippen van zakdoek of servet naar het midden vouwen en het is voor elkaar: een half zo groot vierkant. Een vierkant halveren is gemakkelijker dan het verdubbelen, omdat je dan de oorspronkelijke figuur niet te buiten hoeft te gaan. Maar heb je een keer het halveren door, dan is het verdubbelen ook geen moeite.

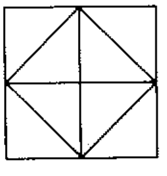


fig. 1

Maar hoe weet je dat? Ik bedoel, dat de gevouwen figuur weer een vierkant is en dat het de helft van het oorspronkelijke is. Zou iemand die vraag stellen? Je ziet het immers zo. Wát zie je dan? Je hebt de zakdoek maar slordig gevouwen, geen uitgestreken plooien, en als je het gevouwen papieren servet nader bekijkt, blijken de randen niet zo netjes aan elkaar te sluiten als eigenlijk zou moeten. Je weet het, omdat je het ziet, maar wat je feitelijk ziet, wordt door je verstand gekorrigeerd. Je ziet het als het ware met je geestelijk oog.

weerspiegelen
'Ik zie het zo', is een goed antwoord, waar je

toch op door mag vragen: 'hoe weet je dat dit allemaal zo mooi op elkaar aansluit?' En met het beantwoorden van deze vraag begint het probleem. Want om te weten te komen, hoe je iets weet, moet je bij jezelf te rade gaan, je moet reflekteren over wat je zelf doet en denkt. Ik zeg 'reflekteren', hetgeen woordelijk 'weerspiegelen' betekent: je moet jezelf in de spiegel zien, om je je gedachten bewust te maken.

Iets dergelijks geldt ook voor wie een ander wil helpen bij het beantwoorden van de vraag: 'hoe weet je dat?' Hij moet de gedachte van de ander trachten te weerspiegelen, zich in de ander verplaatsen, zeg je ook.

Voor wie met sukses meetkunde op school heeft geleerd, is het een koud kunstje om te bewijzen dat de opgevouwen zakdoek weer een vierkant en de helft van het oorspronkelijke is. Hij heeft termen als kongruentie en stellingen over evenwijdige lijnen paraat, om er een sluitende redenering van te maken. Hij kan het de ander voorredeneren en het hem laten naredeneren. Een koud kunstje.

Maar als je niets van meetkunde afweet, hoe doe je het dan? Je zíet het immers, dat de opgevouwen zakdoek weer een vierkant is en de helft van het oorspronkelijke. Je bent er ook zonder redeneren van overtuigd. Hoe? Dit is zo moeilijk te achterhalen, omdat je op school geleerd hebt, het ook nog te beredeneren.

gewoon doen

Laten we proberen gewoon te doen. Het gaat over vierkanten. Wat is dat, een vierkant? Een vierhoek, en wel een heel bizondere, een regelmatige. Regelmatig – wat is dat? Hij ziet er van alle kanten eender uit, hij past op zichzelf, als je hem draait, vier keer, bij elk van de vier hoekpunten. Je haalt bij elk hoekpunt een slip over, bij elk hoekpunt dezelfde slip, dus wat er ontstaat, is een figuur die dezelfde regelmatigheden vertoont als het oorspronkelijke vierkant – een vierhoek, die je weer vier keer op zichzelf kunt leggen, dus weer een vierkant –. De helft van het oorspronkelijke, want met dat overslaan van de slip heb je wat eronder ligt, verdubbeld. Zou je zo redeneren? Symmetrieën spelen een grote rol in al hetgeen je 'zo ziet' en waarvan je je afvraagt: 'hoe weet je dat?'.

andere voorbeelden

Een ander voorbeeld. Probeer het zelf!

Een gesloten touw loopt glijdend over de hoekpunten *a, b, c* van een gelijkzijdige driehoek en vormt er dus de omtrek van. Deze omtrek is in drie gelijke stukken verdeeld door middel van de punten *p, q, r,* waar lusjes aan het touw vast zitten, en door de lusjes bij *p, q, r* loopt een gesloten elastiek. Hoe je het touw ook over de omtrek van de driehoek *abc* beweegt, de lussen bewegen mee en de elastieken driehoek *pqr*, variërend van afmeting, is en blijft eveneens een gelijkzijdige driehoek. Waarom? Je ziet het zo. Maar hoe weet je dat?

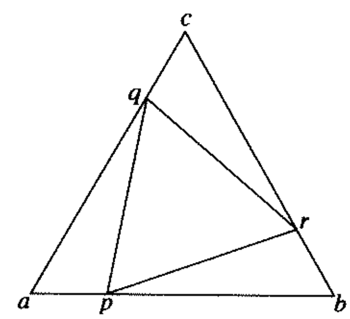


fig. 2

Je mag hetzelfde ook met een vierkant doen. De vaste punten *a, b, c, d* vormen een vierkant; het touw, dat om *abcd* als omtrek loopt, is in vier gelijke delen verdeeld, met lusjes bij *p, q, r, s* en door de lusjes loopt weer een gesloten elastiek. De variabele figuur *pqrs* is weer een vierkant.

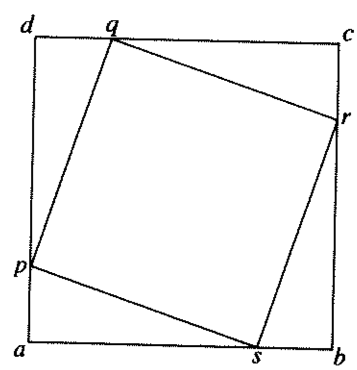


fig. 3

Misschien doet de laatste figuur u ergens aan denken. Kijk naar de oppervlakten:

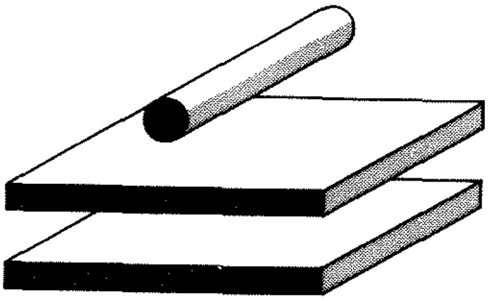
$$\overline{pq}^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}\overline{ap} \cdot \overline{as} = (\overline{ap} + \overline{pd})^2$$
$$= \overline{ap}^2 + 2\overline{ap} \cdot \overline{pd} + \overline{pd}^2.$$

Schrap de tweede summand rechts en links tegen elkaar en je krijgt:

$$\overline{pq}^2 = \overline{ap}^2 + \overline{pd}^2.$$

Een welbekend bewijs van de stelling van Pythagoras.

wiskunst



WAT ZAL IK NU WEER 'ES VOOR JULLIE VERZINNEN?

In deze artikelen zijn we ten opzichte van het verschijnsel kunst maar op een smal terrein bezig. Ten opzichte van het verschijnsel wiskunde is de bandbreedte trouwens nog smaller.
De doorsnee van wiskundige en artistieke aktiviteiten is, zo probeerden we aan te tonen, niet zonder enige inhoud. Maar dat zegt niet zoveel omdat de aktiviteiten niet door scherpe definities begrensd worden. Zodra je wiskunde en kunst als menselijke aktiviteiten betitelt en daarbij de mogelijkheid openlaat ook sommige computeraktiviteiten én als wiskunde én als kunst te interpreteren, dan is een element uit de doorsnee snel gevonden.

F. VAN DER BLIJ

Is in de wiskunde de abstraktie soms een hulpmiddel voor de konstruktie van nieuwe teorieen, in de kunst is minimalisering soms aanleiding tot een nieuwe blikrichting, een artistiek beleven. Minimal art en eigenlijk ook conceptual art laten zoiets zien. Als ik in een enorme tentoonstellingsruimte van een museum slechts iets uit het midden, één klein tafeltje zet met een bierblikje erop, dan laat ik een nieuw licht op dit blikje vallen. Om het gekompliceerder te maken kan ik het bierblikje vervangen door een blikje cola, sinas of seven-up. Bovendien kan ik via een toevalsprocedure (eventueel met behulp van een computer gekonstrueerd) iedere ochtend bepalen of er bier, cola, fanta of seven-up zal staan.
Een in deze richting ver doorgevoerd proces heeft plaats gevonden bij Hans Koetsier, die van tijd tot tijd kunstwerken maakte, bestaande uit een advertentie van een hele pagina in een dag- of weekblad. Geen erg blijvende kunst, maar een muziekimprovisatie is dat ook niet.
Op 31 december 1974 stond er in het '*nrc-handelsblad*' één pagina zwart met witte letters: *'wat zal ik nu weer es voor jullie verzinnen?'* Het is alsof ik een opsteller van eindeksamenvraagstukken wiskunde (of olympiade) bezig hoor.
Zo zat ik even aan mijn buro temidden van kranteknipsels, tentoonstellingskatalogi en overzichtswerken. En ineens wist ik het! En wat ik weet ga ik niet als een wilde amsterdamse plakker aanplakken, maar als titel schrijven: *computerkunst*.

Bij computerkunst denk ik eerst aan computergrafiek, maar ook aan computerklankkomposities. Ook noem ik nog computerkleurentelevisiebeelden. Bij pauzebeelden van sommige omroepen, bij enkele opvulsels tussen de sterreklame, bij enkele waaghalzen van regisseurs (Jaap Drupsteen, Wilhelmina Hoedemaker, e.a.) vind je ook computerkunst. En als laatstgenoemden geen rekentuig gebruiken, dan stel ik de vraag naar de grens tussen computer, mikroprocessor en elektronische beeldstuurapparatuur.
Laten we ons in hoofdzaak beperken tot de computergrafiek. Dat wil zeggen: we werken met een computer waarop een plotter of analoog tekenapparaat (eventueel monitor) is aangesloten. We willen kunst (minimaal of maksimaal) maken. Hoe kunnen we te werk gaan? Hoe kunnen we het elektronisch brein in dienst stellen van ons bloederig brein?
Eén mogelijkheid: de computer kan onvermoeid foutloos gelijkmatig tekenen. Ook kan hij sneeuwvlok-krommen maken, moirépatro-

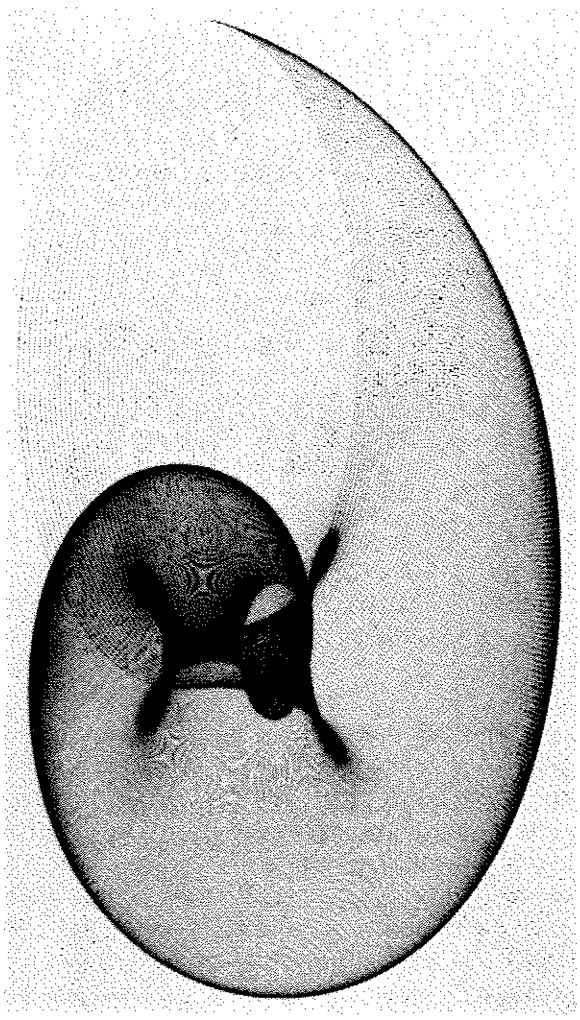


fig. 1

nen uitwerken, zoals bij één van de meest verspreide voorbeelden: *'The snail'* van Kerry Strand uit 1968 (zie fig. 1).

Dit affiche is overal verspreid, en veel varianten erop zijn populair geworden.

Een andere mogelijkheid is, ruwweg strukturen vast te leggen en dan de computer via randomgenerators toevalstreffers te laten uitvoeren binnen door ons gestelde grenzen. Ik heb in dit verband al eens gewezen op het werk van Peter Struycken. De publikatie *'Toeval'* bij het projekt van de studium generale 1972 van de rijksuniversiteit utrecht geeft uitvoerige dokumentatie. En wat is random in dit geval? De computer heeft geen dobbelsteen om mee te gooien, maar konstrueert randomgetallen via getalteorieformules.

Voor de enkele wiskundemaniak en/of bezitter van een programmeerbare handrekenmachine, de vraag of de rij: x_{n+1} is het gehele deel van:

$\alpha x_n (1 - \frac{1}{100} x_n)$, startwaarde $x_0 = 1, 2, \ldots$ of 99, α ergens tussen 3 en 4, een toevallige rij van getallen van drie cijfers geeft.

De toevalsgegevens kunnen gebruikt worden om de keuze – wit of zwart vakje – vast te leggen, om de keuze – rechte lijn of stukje cirkel – vast te leggen, enz.

Bij vrijwel ieder voorbeeld is sprake van een stukje sterk deterministisch gegeven informatie (zoals in 'De slak') en een stukje 'toeval'. De verhouding van die twee kan erg verschillend zijn.

We geven nu een aantal voorbeelden. Ons kommentaar zal vaak alleen maar bestaan uit wat de kunstenaar er zelf van zegt. Een vroege happening op dit gebied was de tentoonstelling *'Cybernetic serendipity'*, gehouden van 2 augustus – 20 oktober 1968 in londen. Een speciaalnummer van 'Studio international', met dezelfde titel, bevat vele vroege voorbeelden.

Van nederlandse aktiviteiten noem ik alleen de tentoonstelling computergrafiek in 'De groenland' van Buhrmann papier, van 11 – 31 december 1970.

Nu konkrete voorbeelden:

'We kiezen n punten $p_r = (x_r, y_r)$ willekeurig of niet willekeurig (?). We definiëren $p_{n+r} = p_r$. We kiezen vier opeenvolgende punten p_r, p_{r+1}, p_{r+2}, p_{r+3} en bepalen kubische funkties f_r en g_r, zodat $f_r(0) = x_r, \ldots f_r(3) = x_{r+3}$, $g_r(0) = y_r, \ldots g_r(3) = y_{r+3}$.
We gebruiken dit paar kubische funkties om een boog van p_r naar p_{r+1} te trekken. Nu vervangen we p_r door $[f_r(0,1), g_r(0,1)]$ en herhalen het proces voor de punten $p_{r+1}, p_{r+2}, p_{r+3}, p_{r+4}$. En zo maar door, totdat de operateur besluit het proces te stoppen.' (Sam Schmitt) (zie fig. 2).

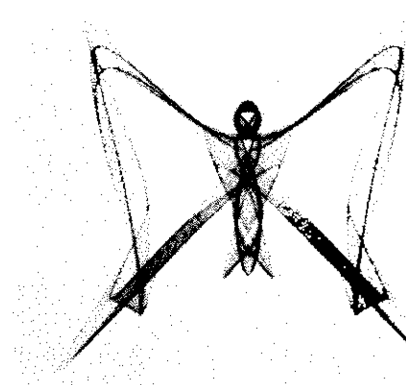


fig. 2

'Computergrafiek wordt in het algemeen vastgelegd door vier basisveronderstellingen:

- een precies idee van een estetisch probleem;
- de noodzaak om dit idee in deelproblemen te splitsen, die in de vorm van een programma weer opgebouwd kunnen worden;
- een scherpe kontrole van het rekenproces om volledig voordeel te benutten van de machine-mens-dialoog;

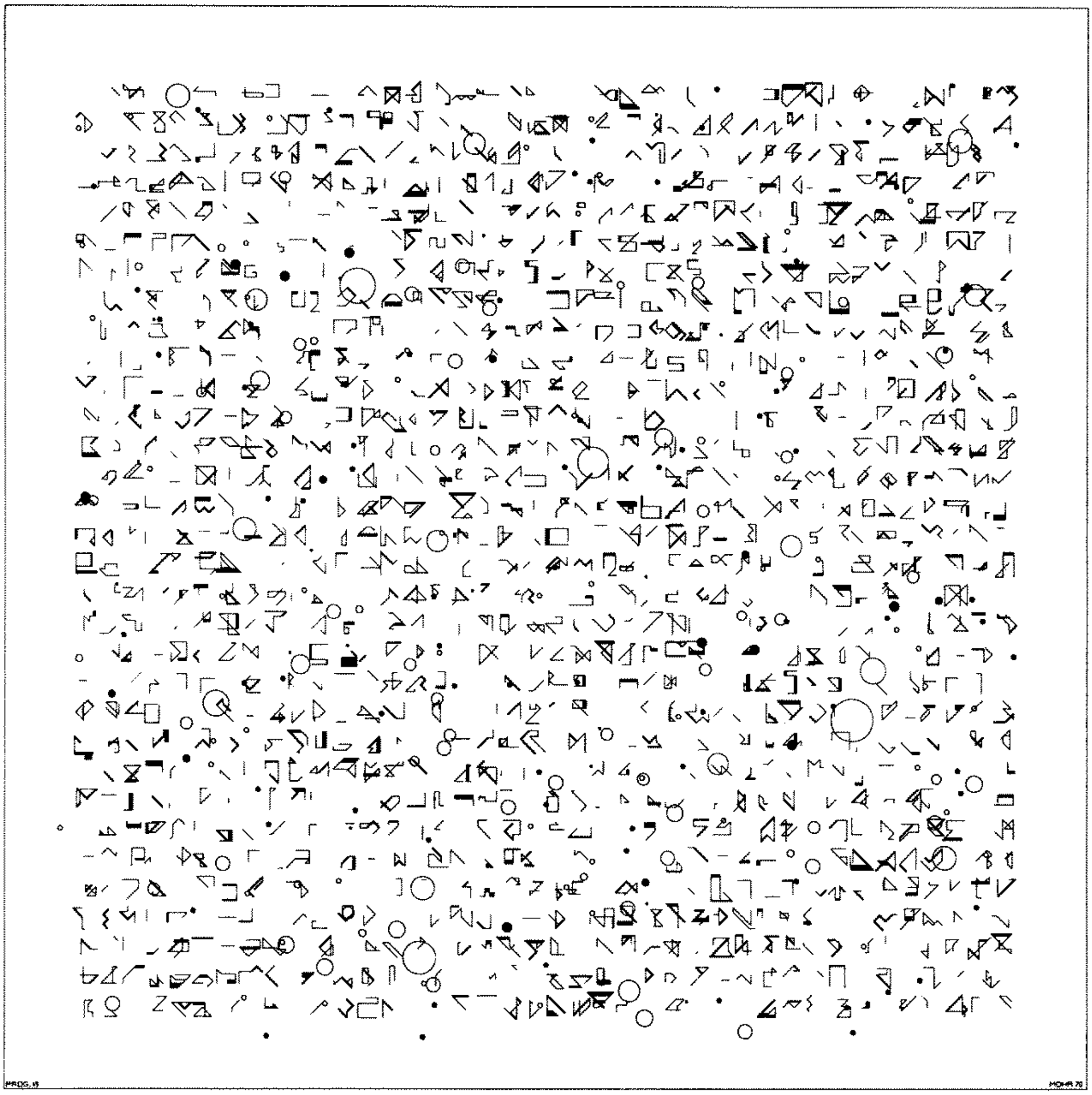


fig. 3

– de noodzakelijkheid de logika van de gebeurtenissen waarneembaar te maken.' (Manfred Mohr)[1])

Fig. 3 laat een werkstuk van Mohr zien met als naam: '*A formal language*'. Bij toeval zijn cirkeltjes gestrooid op een blad met figuurtjes die uit maksimaal zeven dunne of dikke rechte lijntjes zijn opgebouwd.

Fig. 4 laat een geheel ander werkstuk – '*Quark-lines*' – van Manfred Mohr zien.

Recenter is een mooie kollektie, bijeengebracht door Melvin L. Prueitt.[2]) De bronnen omvatten bivariante normale verdelingsfunkties, speciale funkties zoals $(|x|-|y|)^2 + 2\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, nukleaire spektra, ...
De resulterende vormen zijn merkwaardig nieuw, maar de basisvormen kunnen beschreven worden als wenteltrappen, huizen, putten, trappen, cilinders, verzonken piramides en eksperimentele vormen. De meeste tekeningen zijn bepaald door het programma, maar voorbeelden van echte computerkunst zijn ook toegevoegd. Geheel andere tekeningen ontstaan als de computer toevalsgetallen voortbrengt en benut.[3])

1) Katalogus: *'Manfred Mohr Computer Graphics'*, Musée de l'Art Moderne de la Ville de Paris, 11 mei – 6 juni 1971.

2) *'Computer graphics'*, Dover publications, new york 1975.

3) Vrije bewerking van de tekst op de omslag van het boek.

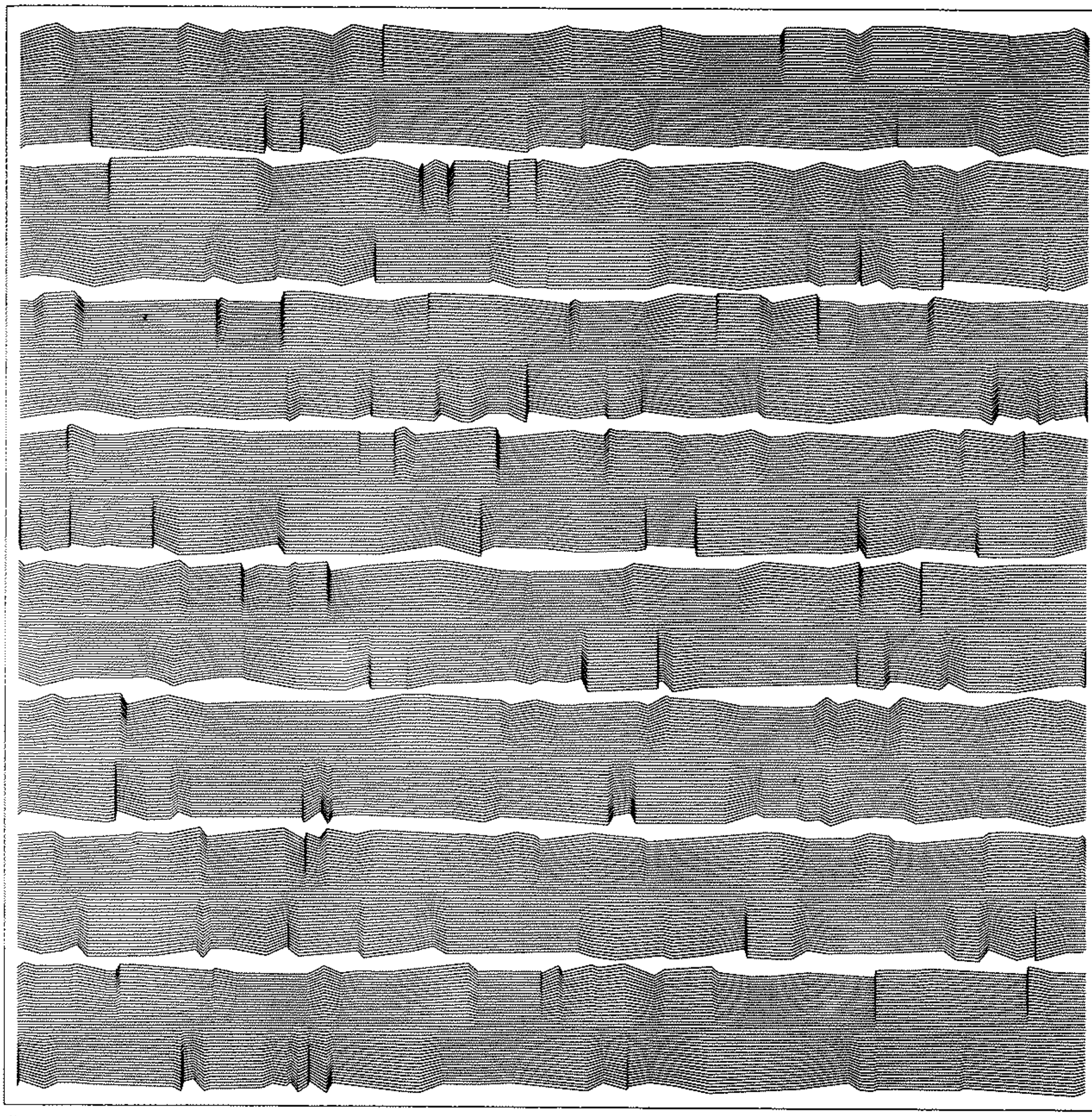


fig. 4

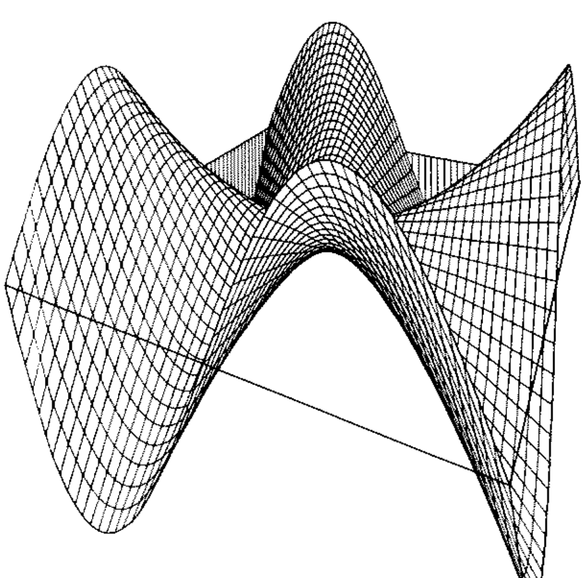


fig. 5

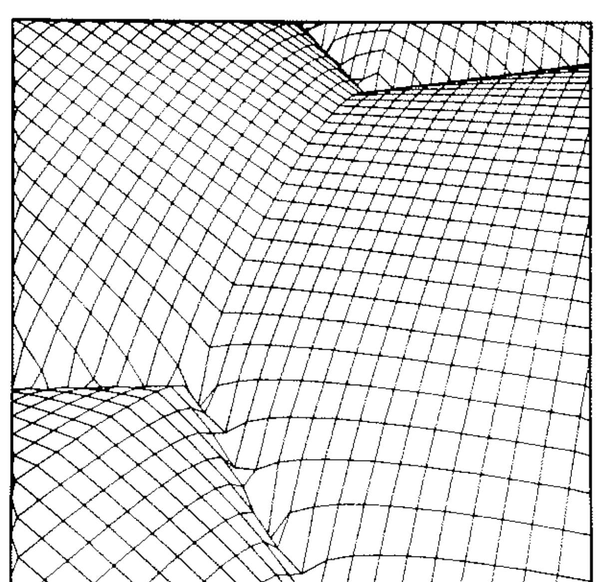


fig. 6

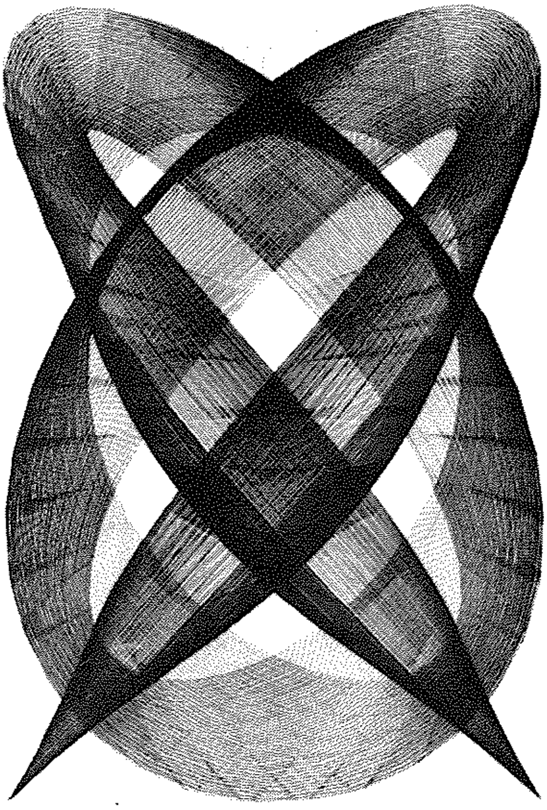


fig. 7

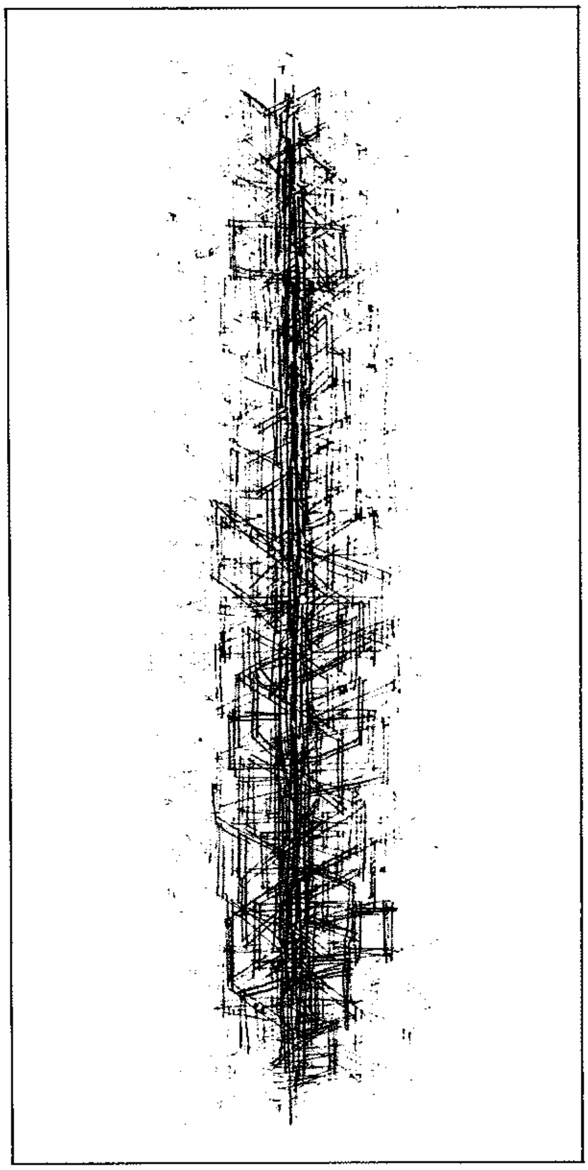


fig. 9

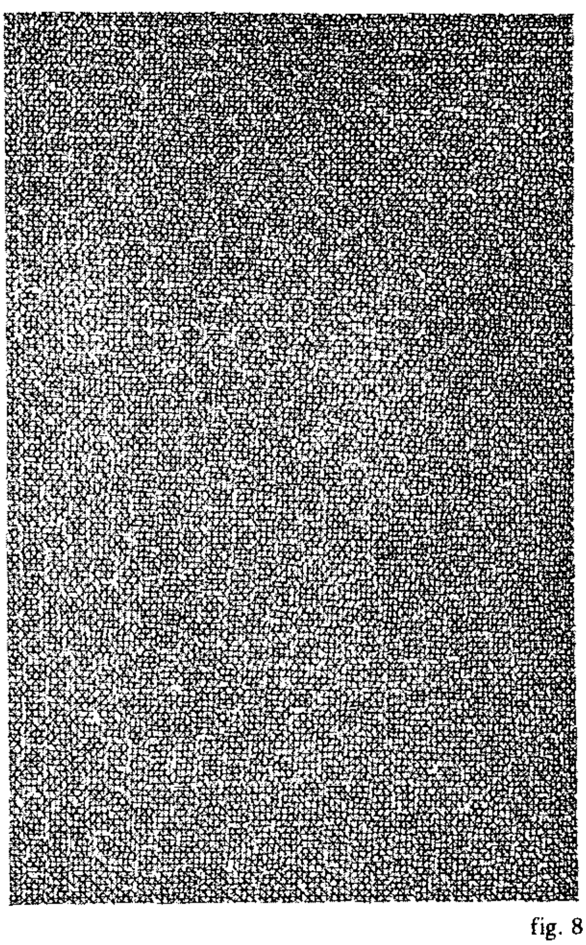


fig. 8

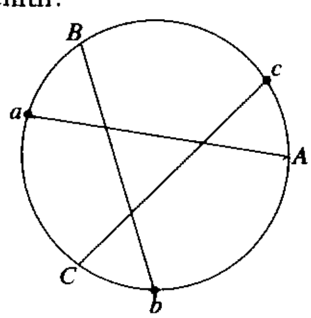
Fig. 5 is zo'n gewone grafiek:
$(xy\,(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-1})$.
Fig. 6 heet een '*Experimental shape*'.

In '*Computer graphics, computer art*' van Herbert W. Franke [1]) is zeer veel materiaal te vinden. Ik noem slechts de lissajous figuren, die u misschien bekend zijn uit de natuurkunde: een trechter die is opgehangen zodat hij in twee loodrecht op elkaar staande vlakken kan slingeren en waar zand uit loopt. Of moderner: twee trillende spiegels waar licht op valt, of twee velden om een katodestraal af te buigen. De computer kun je opdragen zo'n lissajous figuur te tekenen (zie fig. 7).

[1]) Phaidon, london 1971; duitse uitgave: F. Bruckmann, münchen 1971.

Tot slot noem ik, zonder er verder op in te gaan, het boek van H.F. Franke en Gottfried Jäger: *'Apparative Kunst'* [1]), met zeer vele zowel zwart-wit als gekleurde computerbeelden. Verder nog vele publikaties over het werk van Peter Struycken en een artikel van Reinhard Lehnert: *'A contribution to a reform of mathematics and art teaching'*. [2])
Als kontrast tenslotte nog twee niet-computertekeningen van Jan Schoonhoven (fig. 8) en van de beeldhouwer Carel Visser (fig. 9).

PS
Ik had u lang geleden al eens beloofd nog terug te komen op de naaldentorens van Kenneth Snelson. Een boekje van Anthony Pugh: *'An introduction to tensegrity'* [3]) geeft technische aanwijzingen, o.a. voor deze naaldenbouw. Houten stokjes van ± 18 cm en elastiekjes van ± 6 cm zijn nodig; ronde stokjes (diameter ± 9 mm) zijn te verkrijgen bij doe-het-zelf-winkels, elastiekjes bij de kantoorboekhandel. Aan beide uiteinden van de stokjes twee kleine spijkertjes slaan (in de richting van het stokje) waarover de elastiekjes gespannen kunnen worden. Neem drie stokjes, houd ze zo dat de middens vrijwel samen vallen en span alle twaalf elastiekjes van uiteinde naar uiteinde. Dan hebben we een oktaëder, niet zuiver omdat de stokjes dikte hebben. Haal op een verstandige manier drie elastiekjes weg en er ontstaat een fraaie vaasvorm met losse stokjes.
Schema van het ding bij projektie uit het zenith:

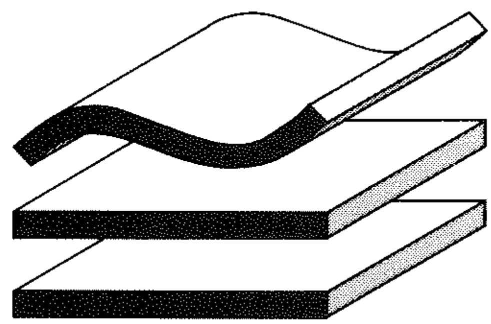


punten A, B en C op de grond; a, b en c op hoogte h; houtjes Aa, Bb, Cc; elastiekjes AB, BC, CA, ab, bc, ca en Ac, Ba, Cb

Bent u zover, dan gaat het vanzelf wel verder. Er staan bij mij thuis nu al een stuk of acht vormen met ieder zes of acht stokjes en 20 à 30 elastiekjes. De kondities zijn: de houtjes mogen elkaar niet raken, ook niet in de uiteinden en er moet tenminste één symmetrie-as zijn, liefst nog iets meer symmetrie.

[1]) Dumont, keulen 1973.
[2]) In 'Mathematics in school', volume 4, 1975.
[3]) University of California Press, 1976.

problematika



In het vorige nummer van dit bulletin heeft Edu Wijdeveld u lastig gevallen met kievitseieren die op een ingewikkelde manier verdeeld moesten worden. Het probleem stamde uit 'De vernieude cijfferinge' *van meester Willem Bartjens en inspireerde ons om de 'bijbel' van de vaderlandse rekendidaktiek eens door te bladeren op zoek naar geschikte problemen voor deze rubriek.*
Bartjens begint zijn boek met het geven van recepten en voorbeelden van de algoritmen van optellen (additio), aftrekken (substractio) en vermenigvuldigen (multiplicatio), weinig verschillend van onze twintigste eeuwse rekenwijzen. Dit in tegenstelling tot 'divisio', waarvoor het staartdelen nog niet was uitgevonden.

HUUB JANSEN

1

DIVISIO

Ons eerste probleem ontstond bij het bekijken van de wijze waarop Bartjens opgaven aanpakte als:

28550553 : 7863.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \cancel{7} & & & & \\
 & & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{8} & & & \\
 & \cancel{4} & \cancel{9} & \cancel{6} & \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{6} & & \\
\cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{3} & \\
 & \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} & \\
 & & \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} & & \\
 & & & \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{8} & & & \\
 & & & & \cancel{7} & & & &
\end{array} \Bigg\} \text{ komt 3631}$$

Een fraai schema dat aanleiding geeft tot vragen:

▶ *Hoe verliep zo'n deling?*
Wat moest uit het hoofd berekend worden?
Welke ondersteuning gaf het schema?

Het lijkt ons een aantrekkelijk probleem voor lezers die zich interesseren voor rekenalgoritmen en hun ontstaanswijzen.

2

JONGMANS

Het rekenen in vroeger tijden werd vooral bemoeilijkt door de ingewikkelde maten, gewichten en vooral door de vele muntsoorten. Bartjens geeft daarvan legio voorbeelden.
Maar hij geeft ook problemen binnen andere konteksten. Aardig, maar (nog) niet moeilijk is deze:

'In een vermaarde stad zijn 25 grote straten, in elke straat zijn (dog de eene min de andere meer) 50 schone huizen, in elk huis zijn 3 kamers, op elke kamer 2 edele jonge dogters, bij elke dogter zijn 2 jongmans: vrage, hoe veel jongmans daar zijn?'

3

JONGE DOGTERS

Eerlijk gezegd worden wijzelf meer geïnspireerd door romantische, dan door geldproblemen. De laatste vindt u trouwens in voldoende mate in allerlei rekenboekjes, waarin het slechtste deel van Bartjens' erfgoed in ere wordt gehouden.
Daarom verschaffen wij u hier een probleem waarvan inkleding en moeilijkheidsgraad ons een indruk geven hoever de vrouwenemancipatie destijds al was gevorderd:

'In een hof werden 4 jonge dogters vereert van hare vrijers met 483 stuks boomfruit, waar af de eene neemt een zeker getal, de ander neemt $\frac{1}{4}$ des getals (min 2 stuks) meer, de derde neemt het $\frac{1}{4}$ des getals (meer 15 stuks) minder als de eerste, en de vierde neemt tweemaal zoveel (min 10 stuks) als de derde: vrage, hoe veel stuks yeder dogter nam?'

4

BREUKEN

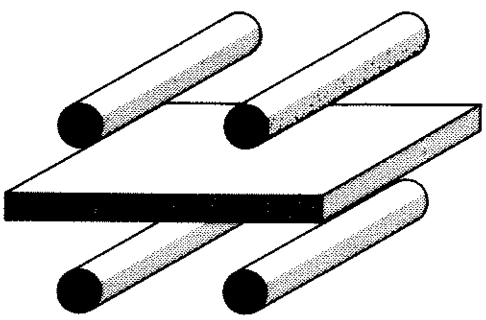
Bartjens behandelt tevens breuken. Hij doet dat op een wijze die ook vandaag de dag het vaderlandse rekenonderwijs nog voor een groot deel bepaalt.
Eerst wordt een nieuw geval behandeld. Dat wil zeggen: er wordt verteld en vóórgedaan hoe de nieuw te leren rekenregel in elkaar zit. Vervolgens wordt een groot aantal sommen als inoefening gegeven en tenslotte worden enkele problemen in een kontekst gepresenteerd, waarin het geleerde kan worden toegepast.
Een fraai voorbeeld van dat vóórdoen vinden we bij het 'abbrevieren ofte verkleynen' van breuken.
Wij geven het weer met de vraag: is dat wel goed wat Bartjens hier doet?

*'Abbrevieert $\frac{221}{247}$, en zal komen $\frac{17}{19}$.
Te weten: divideert den noemer door den teller, komt 1, rest 26. Divideert 221, die den teller is, met 26, komt 8, rest 13: divideert 26 door 13, komt 2, rest 0, welke 0 een teken is dat $\frac{221}{247}$ door 13, daar gij lest mede gedivideert hebt, geabbrevieert mag worden, als hier volgende gedaan werd, doet zo mede met alle anderen.*

$$\begin{matrix}(26\\ \cancel{247}\\ \cancel{221}\end{matrix}\Big\}\,1 \qquad \begin{matrix}(13\\ \cancel{221}\\ \cancel{26}\end{matrix}\Big\}\,8 \qquad \begin{matrix}(0\\ \cancel{26}\\ \cancel{13}\end{matrix}\Big\}\,2 \qquad \frac{221}{247}\ \overset{(13}{\Big|}\ \frac{17}{19}$$

een bewijs dat 't met 13 moet.'

kleuters en wiskunde



DE KAARSENWINKEL

In een hoek van het speellokaal staat permanent een winkeltje. Hier wordt druk gebruik van gemaakt. Van tijd tot tijd veranderen de artikelen van de winkel. Zojuist is besloten er een kaarsenwinkel van te maken.
Om de kaarsen in de etalage mooi uit te kunnen stallen, worden ze eerst gesorteerd en geordend. Bij het kopen van een kaars moet een omschrijving gegeven worden, waarbij de kleur, grootte en dikte van belang zijn.
De waarde van een kaars kan bepaald worden aan de hand van een gegeven prijs voor één kaars; hierná wordt dan gewerkt met de termen 'duurder dan', 'goedkoper dan', 'evenveel als'.
Het aansteken en uitblazen van kaarsen geeft de mogelijkheid met kleine hoeveelheden te tellen.

JEANNE DE GOOIJER-QUINT

kaarsen bekijken

.... 'De winkeljuffrouw wil de kaarsen graag netjes in de etalage zetten. Bedenken jullie eens hoe je dat zou kunnen doen.' ....
De kaarsen staan op een tafel uitgestald.
.... 'Erik vertel jouw idee eens.'
'Ik zoek de rode kaarsen bij elkaar en dan de witte.'
'Er zijn ook gele.'
'En twee rose.'
'Hé, er is één blauwe, maar die hoort bij deze.'
'Waarom vind je dat?'
'Want die hebben allemaal bobbeltjes.'
'Deze zijn helemaal glad, voel maar.'
'Hé, dit is een lange, zeg.'
'Nee, die is nog langerder.'
'Kijk eens wat een dikke.'
'Juf, dit is de dikste.' ....

Drie kinderen kiezen een kleur uit en gaan alle kaarsen van die kleur bij elkaar zetten.
.... 'Je moet ze zó neerzetten.' (van hoog naar laag)
'Net als een trappetje.' ....
De kinderen volgen deze raad op en de kaarsen worden per kleur geordend naar lengte.
We kunnen ook nog op de dikte letten, dat heeft Peter al eerder gezegd. Vier andere kleuters mogen de kaarsen per kleur op dikte ordenen. Het gaat er nu heel anders uitzien.
.... 'Je krijgt geen trappetje meer.'
'Die hoort daar niet.'
'Hij is dikker.' ....
Het ordenen naar dikte blijkt moeilijker te zijn dan naar lengte. Er zijn kaarsen die precies hetzelfde zijn wat kleur, lengte, dikte betreft. Ook zijn er kaarsen die dezelfde kleur hebben en even lang zijn, maar verschillend van dikte. Of: dezelfde kleur, even dik en verschillend van lengte. Of: even dik, even lang, maar verschillend van kleur.

winkeltje spelen
Bij het kopen van een kaars moet de klant duidelijk vertellen welke kaars hij uit de etalage wenst, zonder deze meteen aan te wijzen.
.... 'Ik wil die rode kaars.'
'Er zijn meerdere rode kaarsen, welke bedoel je?'
'Eh, die lange daar.'
'Ik zie twee lange rode kaarsen.'
'De kaars die een beetje vooraan staat.' ....
De tweede klant komt binnen.
.... 'Ik wil die mooie dikke kaars.'
'Alle kaarsen zijn mooi en ik zie wel drie dikke kaarsen.'
'Die hele dikke kaars.'
'Zeker die gele met van die ribbeltjes.' ....
Er is nog een klant.
.... 'Ik wil twee witte kaarsen, die hetzelfde zijn.'
'Ze zijn een beetje dik en niet zo groot.'
'Er zijn nog meer van dezelfde.'
'Ja, één, twee, drie, vier.' ....

De kaarsen moeten natuurlijk betaald worden.
.... 'Hoeveel kost de kaars van jou, Linda?'
'Wat denk je?'
'Twee gulden.'
'Hier, één, twee.' (er wordt met doppen betaald)
'Nu de kaars van Erwin.'
'Honderd gulden.'
'Dat bestaat niet.'
'Zal hij meer moeten betalen?'
'Ja, want het is een dikke kaars, hoor.'
'Wel vijf gulden.'
'Wat is meer: twee of vijf?'
'Natuurlijk vijf. Kijk maar, dit zijn vijf doppen.'
'Twee is weinig.'
'Erik heeft twee kaarsen gekocht.'
'Die is kleiner dan de rode en die kost twee gulden.'
'Hij moet er zeker één gulden voor betalen.'
'Nee, hij heeft twee kaarsen.'
'Eén en één is twee.' ....

kaarsen aan, kaarsen uit
In het midden van de kring wordt een tafeltje gezet. Vijf kleuters mogen een kaars uit de etalage kiezen en op tafel plaatsen. Juf steekt één voor één de kaarsen aan.
.... 'Hoe ziet de eerste kaars die aangestoken wordt eruit?'
'Hij is geel.'
'En dik.'
'Het is de dikste.'
'Hij is niet groot, maar ook niet klein.' ....
De tweede kaars wordt aangestoken.
.... 'Die is langer.'
'En een beetje dun.'
'En helemaal rood.'
'En de derde kaars?'
'Dat is de kleinste.'
'En wit met een beetje rose.'
'De volgende is de dunste.'
'Net zo dun als je pink.'
'En lang, maar niet zo lang als de rode.'

'Deze is ook geel.'
'De laatste is met ribbeltjes en helemaal wit.'
'Die is net zo lang als die hele dikke.' ....

De kaarsen branden mooi.

.... 'Welke kaars zal het eerst opgebrand zijn?'
'Die kleine kaars met dat wit en rose.'
'Nee hoor, die hele dunne gele.'
'Welke kaars zal het langst branden?'
'Die dikke natuurlijk.'
'Dat duurt wel een dag voordat 'ie op is.' ....

We kunnen natuurlijk niet wachten totdat de kaarsen allemaal opgebrand zijn. Eén van de kleuters mag proberen de kaarsen uit te blazen.

.... 'Wat gebeurt er nu?'
'Er is één kaars uit.'
'Er zijn nog vier kaarsen aan.'
'Shirley, blaas jij eens.'
'Ze heeft er twee uitgeblazen.'
'En er branden er nog twee.'
'Er zijn nu drie kaarsen uit.'
'Wat kan er gebeuren als er nog iemand blaast?'
'Ze alle twee uit maken.'
'Dan brandt er niets meer.'
'Misschien gaat er maar één kaars uit.'
'Dan blijft er nog één over.'
'Iwan, probeer het eens.'
'Ik kan heel hard blazen hoor.'
'Hoi, ze zijn allemaal uit.' ....

De kinderen vinden het erg spannend en vragen meteen het nog een keer te doen.

.... 'We kunnen het ook met onze hand doen.'
'Kijk maar, de vingers zijn de vlammen.'
'Nancy, blaas maar eens.'
'Hé, er zijn twee kaarsen uit.' (twee vingers zijn verdwenen)
'Er zijn nog drie kaarsen aan.' ....

Harald mag in de kring gaan staan en z'n vlammetjes laten zien. Hij steekt twee handen omhoog en roept:

.... 'Ik heb tien kaarsen.'
'Dat zijn er veel.'
'Juf moet blazen.'
'Hé, wat gebeurt er?'
'Er zijn vijf kaarsen (één hand) weg.'
'En er branden nog vijf kaarsen.'
'Juf mag nog een keer blazen.'
'Alle kaarsen zijn uit.' ....

nabeschouwing

Bij het sorteren en ordenen van kaarsen is getracht een *zinvolle kontekst* te vinden, waarbij het van belang is de verschillende kriteria (kleur, grootte, dikte en patroon) aan te geven. Dit komt naar voren bij het etaleren van de kaarsen en bij het kopen van een bepaalde kaars. Omdat er zoveel verschillende kaarsen zijn, wordt het kind gedwongen zich nauwkeurig uit te drukken. Eén kaars wordt dan ten opzichte van de andere kaarsen bekeken.

Het *meten* speelt hier een belangrijke rol. De ordeningsbegrippen komen volop aan bod, zoals groot-klein; hoog-laag; dik-dun, en nuanceringen als groter-grootste.

De *relaties* van de kaarsen per kleur worden dan bekeken en aangegeven met 'is groter dan', e.d.

Het *toekennen* van een waarde aan een kaars is voor oudste kleuters mogelijk, indien we gebruikmaken van de getallen één tot en met tien en dan spreken van één gulden, twee gulden, etc.

De waarde van de eerste kaars is bepalend voor de andere kaarsen. De kleuters worden aangespoord *logisch* te *redeneren*: 'als ... dan'.

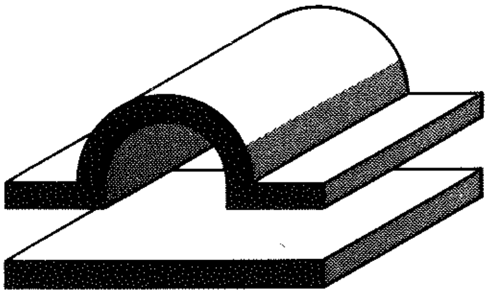
Het *vergelijken van hoeveelheden* komt spontaan aan bod bij het uitblazen van de kaarsen.

Het *voorspellen* wat er kan gebeuren met de kaarsen die nog branden, lokt de kinderen uit, verschillende mogelijkheden te bedenken.

Kleuters die toe zijn aan het *tellen* van allerlei zaken, gaan entoesiast het spel met 'de vingers als vlammetjes' herhalen.

In deze open situatie is het voor iedere kleuter mogelijk het spel op zijn/haar manier te beleven en aktief mee te doen.

wiskunde in de brug-periode



VAN GANSSTRAAT NAAR LUNETTEN

De mavo-leao *in de gansstraat te utrecht gaat verhuizen naar het uitbreidingsplan lunetten.*
Voordat het oude gebouw verlaten wordt, brengen de brugklassers als laatste hulde de school nauwkeurig in kaart.
In het begin van het tweede leerjaar volgt dan het meetkundetema bouwwerk, *waarin balken, kubussen en bouwsels nader worden bekeken.*
Ter afsluiting worden de bestek-tekeningen van de nieuwe school bestudeerd.
In dit artikel wordt beschreven hoe het in kaart brengen van de oude school in zijn werk is gegaan.

AAD GODDIJN

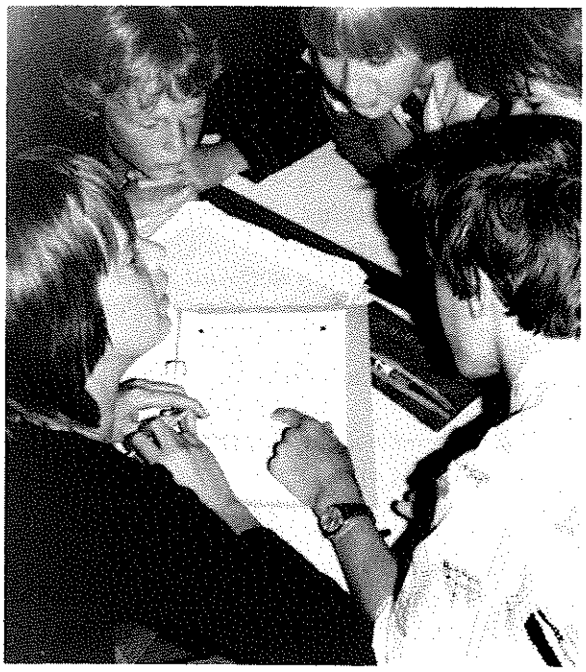
inleiding
Het sluitstuk van het schooljaar voor de eerste-klassers van de *mavo-leao* in de gansstraat te utrecht waar ons voorlopig werkplan [1]) proef draait, vormde het in kaart brengen van schoolgebouw en speelplaats.

De leerlingen zijn gewend samen te werken in kleine groepjes, maar tot nu toe is dat steeds gebeurd aan de hand van min of meer omlijnde, op werkbladen geformuleerde, opdrachten. Nu zal moeten blijken of de leerlingen een veel ruimere opdracht, ook zonder die richtinggevende steun, met elkaar tot een goed eind kunnen brengen.
Om kort te gaan: dat kúnnen ze; behoorlijk zelfstandig lossen ze al doende en diskussiërend een aantal meetkundige problemen op, die zich tijdens het werk voordoen.

afspraken
Voor het eigenlijke werk — meten en tekenen — aangevat kan worden, moeten er afspraken gemaakt worden. Per groepje wordt daarover gepraat en het afsluitend klassegesprek levert twee belangrijke afspraken op: over de *werkverdeling* en over de *schaal*.
De klas zal in vijf groepen gaan werken. Bovenverdieping, benedenverdieping, vooraanzicht, achteraanzicht en speelplaats, worden elk door een groep aangepakt.
Elk groepje noteert per les:
- werkplan voor de les;
- werkverdeling,
- wat we deze les gedaan hebben.

Zo'n werkverdeling blijkt toch wel moeilijk te zijn. 'We doen alles samen', is soms de enige

[1]) Een door de afdeling *wiskivon* van het *iowo* ontwikkeld plan.



verdeling. Even later wordt dan ook een liniaal met vier man sterk afgelezen. Daarna groeit de 'goede' samenwerking en het overleg vanzelf. Als schaal wordt 1 : 50 gekozen, maar dit heeft meer voeten in de aarde.

schaal

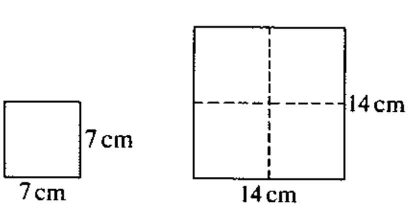
Een eerste voorstel is 1 : 10. Dit wordt al gauw als onhanteerbaar verworpen. Dan maar 1 : 100. Een lokaal wordt dan zeven bij zeven centimeter. Echter, een papieren vierkantje van die afmeting is toch wel erg klein. Dan maar twee keer zo groot. Een klaslokaal van 14 bij 14 cm. Dat is prima! De school is acht lokalen lang. Dan past de hele tekening nog net op twee banken.

.... 'Maar welke schaal is dat nu?'

'1 : 200', wordt er gezegd. ....

Met veel moeite rekenen we 14 : 700 om tot 1 : 50. Erg overtuigend is dat blijkbaar niet. Daarom houden we het op: eerst honderd keer zo klein en dan twee keer zo groot. En dat is voor het zelf tekenen van de plattegronden en aanzichten ook veel handiger dan: één centimeter op de tekening is 50 cm in werkelijkheid. Immers, je wilt juist weten hoeveel centimeter iets op de tékening moet worden.

Alleen Jan is nog ontevreden. Hij ziet de twee vierkantjes naast elkaar:



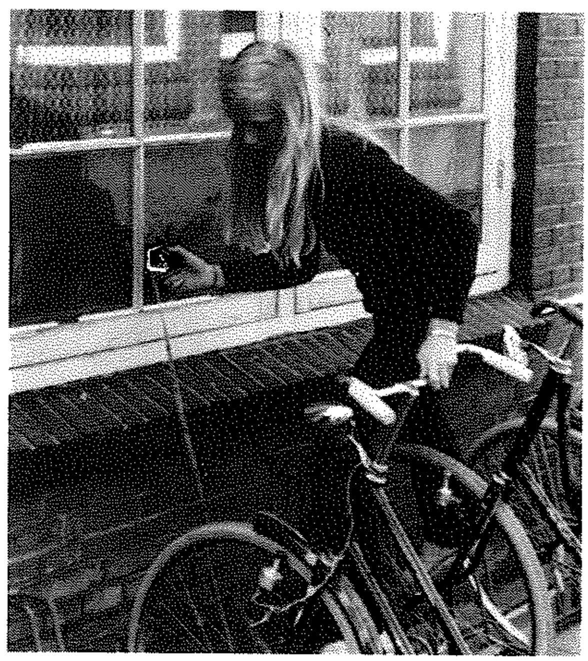
En redeneert: die daar is schaal 1 op 100, de andere is vier keer zo groot, dus schaal 1 op 25.

Ja, maar bij schaal kijken we alleen naar de afstanden en niet naar de oppervlakten!

chaos

Na het klassegesprek ontstaat een schijnbare chaos waarin de leerlingen zes lessen lang zelfstandig werken. Veel zicht op het totale gebeuren heb je als buitenstaander niet, maar je hulp is overal welkom. En zo zie je dan steeds kleine stukjes wiskunde even 'opgloeien' en veroverd worden. In de volgende reeks beelden komt dat wel naar voren.

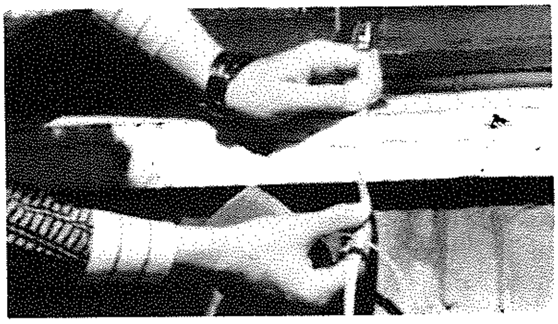
achter de fietsen



Zo doe je dat niet meer als je zestig bent. Maar dan heb je intussen ook ontdekt dat je de lengte van de gevel ook een eindje van de gevel af kunt meten, gebruik makend van de rechte lijnen in het nederlandse stoeptegelpatroon.

De lengte van de zijgevel wordt gemeten. Die is, onzichtbaar voor u, achter de struiken. Nood maakt vindingrijk!

details, afronden



Te veel afronden kan nare gevolgen hebben. Gelukkig wordt eerder een cijfer te veel als te weinig achter de komma meegenomen.

de hoogte van de school

.... *'Corrie, ik weet een manier om de hoogte van de school te meten!'*
'Hoe dan?'
'Daar de meter tegen de muur zetten, dan op afstand gaan staan en ...

zo het potlood houden, tot 'ie even lang is als de meter en dan naar boven afpassen.' ....

Even later is de meetlat tegen de muur gezet. Bert past het stukje dat met de meetlat korrespondenteert af op het potlood.

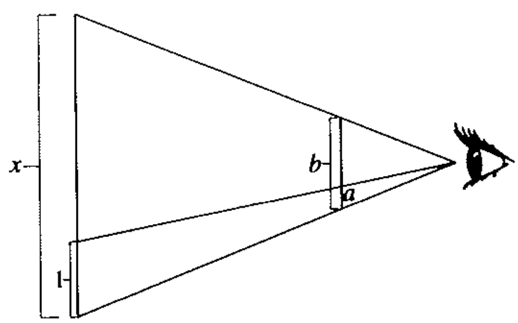
De docente komt te hulp en dan wordt het stukje gemeten.

.... *'Ja, dat is dus twee. En hoe ga je nu de hoogte meten, met welke lat?' (docente)*
'Gewoon, zo afpassen naar boven toe.' (Bert)
'Je kunt natuurlijk ook één lange lat nemen.' (docente)
'Dan moet je wel een lange lat hebben.' ....

Corrie houdt nu de meetlat vast en Bert past weer af.

.... *'Hier is het. Tweeënvijftig. Dat gaat 26 keer.'*
'Dan is de school ...?' (docente)
'26 meter.' (Cor)
'Dat lijkt me wel te hoog!' ....

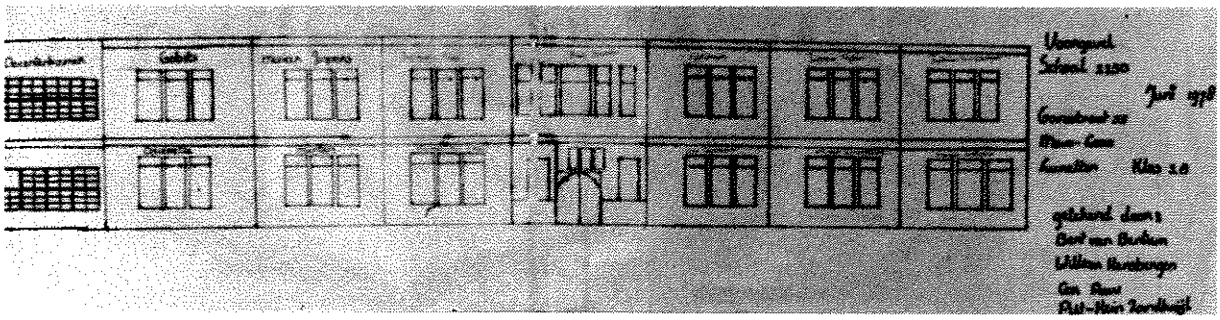
Zie je als docent zo'n idee om de hoogte te meten ontstaan, dan is de verleiding natuurlijk groot even te helpen en te zorgen dat er inderdaad een goed resultaat uitkomt. Maar wat gebeurt er eigenlijk?
Bert past als het ware de meetlat van een meter met het stukje potlood op de gevel af. Daarom wil hij 'op afstand' gaan staan.
Een wiskundedocent denkt echter al gauw aan hoeken, evenredigheid en plaatjes als:



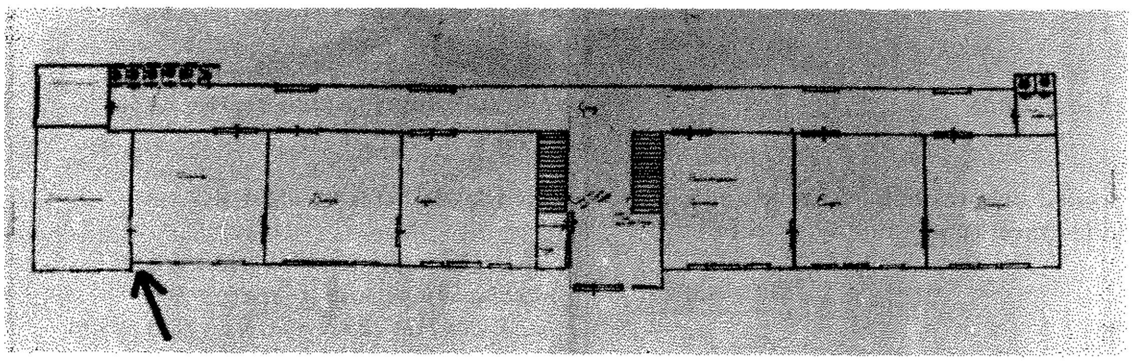
En ziet $x : 1 = b : a$.
Bert is daarentegen helemaal niet van plan stukje a (het eindje potlood) te meten. Hij past de meter heel direkt op de gevel zelf af. Als hij dan toch a en b gaat meten, gaat de hele metode de mist in: de meetlat, die nodig is om b te meten, wordt veel verder van het oog gehouden dan het potlood en zo komen we dan op een te — even nadenken, lezer! — grote hoogte uit.
Gelukkig wist Cor, die al die meetkundige subtiliteiten wat minder zag zitten, nog een andere metode: een verdieping meten (bij de trap) en dat tweemaal nemen, met iets erbij voor de vloeren.

onverwacht laag

De hoogte van de school is ongeveer 11 m en de lengte zo'n 60 m. Hier is het vooraanzicht in de uiteindelijke tekening:



Heel wat leerlingen reageren op de eerste grote lijnen met: 'hé, wat laag'. En als ik nog even naar de foto bij de inleiding kijk, denk ik dat ook. Maar ja, we hebben het gemeten en dus is het zo.



diepte
Hierboven een plattegrond van de benedenverdieping. Bij de pijl zit een lastig punt voor de tekenaars van het vooraanzicht.
.... 'Hoe teken je zo'n inspringend stuk?' ....
Verschillende mogelijkheden komen naar voren:

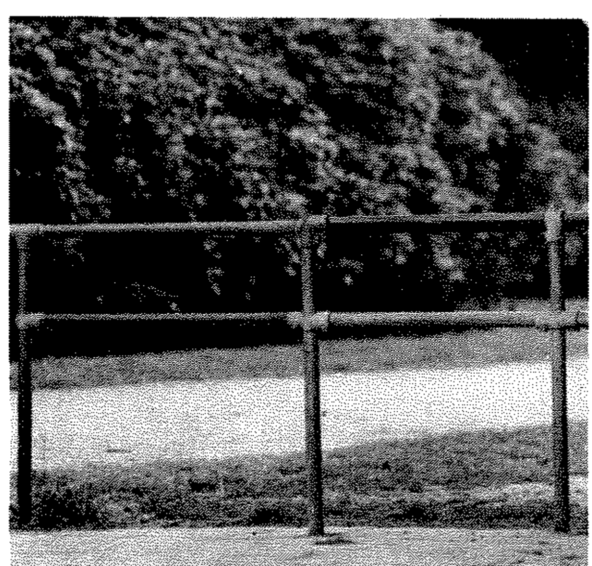
- het inspringende stukje gewoon tussen de lokalen tekenen (zoals je bij een bouwplaat moet doen);
- het stukje schuin omhoog tekenen (zoals bij een perspektieftekening).

Als we (buiten) vastgesteld hebben dat je het inspringende muurtje niet kunt zien als je recht van voren kijkt, is de konklusie: je moet het niet tekenen.
Cor en William willen dan de lijn van de grond één centimeter hoger laten beginnen bij het tweede lokaal.
.... 'Anders kun je niet zien dat het inspringt.' ....
Zo:

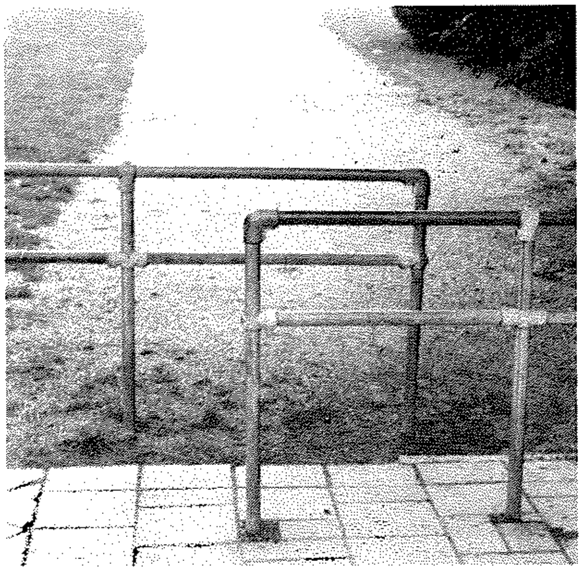
Maar dan kom je met de hoogte fout uit. Of je moet het boven ook doen. Uiteindelijk passen ze zich bij Bert en Piet-Hein aan, maar als de deurpartij getekend moet worden, komt dezelfde diskussie nog eens.

We gaan dan maar bij het groepje kijken, dat de plattegrond maakt: daar kun je het inspringende hoekje wél op zien.
Het blijft voor Cor moeilijk zo'n konventie bij het tekenen van vooraanzichten te aksepteren.

bouwwerk
In een meetkundepakket '*Bouwwerk*' zal later op dit probleem worden ingegaan, aan de hand van blokken, bouwsels en foto's als:



dat wordt klimmen!

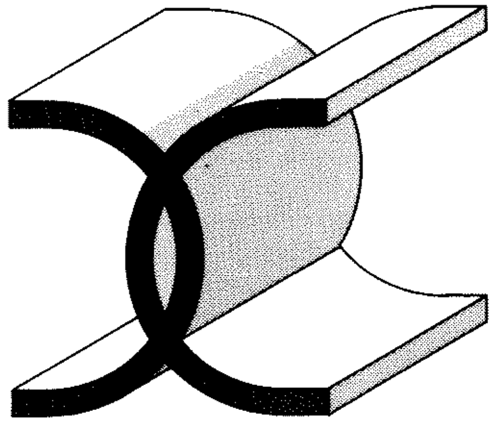


je kunt er toch door!

Voor een goed begrip van bestektekeningen is zo'n stukje meetkundeonderwijs echt wel nodig.

afwerking
Tot slot worden de tekeningen in de inkt gezet. Technische gegevens worden toegevoegd. Ieder werkt hard om alles puntgaaf te krijgen. Een groepje gaat zelfs onder de pauze van de laatste schooldag verder.
Vele handen maken licht werk!

opleiding



RICHTING STRAATSBURG

Tijdens de wiskobaskonferentie van oktober 1978 voor docenten aan pedagogische akademies kregen de bijna honderd deelnemers een taak, zoals zij zelf ook hun studenten geven: het vóórdenken, uitvoeren en doordenken van een wiskundeonderwijsaktiviteit met groepen kinderen van de basisschool.
24 groepen van vier docenten gingen aan de slag. Iedere groep met één van een twaalftal beschreven didaktische opdrachten.
Meer dan twee dagen — en nachten — is er gebrainstormd, gediskussiëerd, geëvalueerd en onderwijs gegeven aan zo'n 700 kinderen van scholen in egmond, bergen en alkmaar.
Het resultaat is een — nog niet gepubliceerd — boekwerk, waarin een beeld van de matematisch-didaktische bekwaamheden van nagenoeg alle nederlandse wiskunde- en didaktiekdocenten aan pedagogische akademies naar voren komt.
Niet alleen van vaderlandse kollega's. Er was ook een viertal buitenlandse 'deskundigen' uitgenodigd. Met Edu Wijdeveld als tolk, inspirator en toegevoegd deskundige.

ANN MOGENSEN - VAN VERWEKE
HEINRICH BAUERSFELD
TRYGVE BREITEIG
ARTHUR MORLEY
EDU WIJDEVELD

De opdracht die aan deze groep werd verstrekt betrof de probleemstelling:
▶ *Zoek uit in welke richting straatsburg ligt.*
In het konferentieboek 'De didaktische opdracht' *werd dit probleem omkleed door een logboekaantekening n.a.v. aktiviteiten van studenten die met een soortgelijke opdracht in hun oefenschool aan de slag waren gegaan én door een artikeltje in* 'Euclides'.[1])

Het resultaat van het geworstel van onze buitenlandse gasten rond deze opdracht geven we hier – vertaald uit het engels – weer. Wij doen dit niet alleen uit beleefdheid, maar ook omdat wij van mening zijn dat in dit werkstuk op beknopte en indringende wijze een belangrijke matematisch-didaktische ervaring is beschreven, waarvan docenten, mentoren en studenten iets kunnen meenemen.
Zelfs al betreft dit alleen de inspiratie om met het probleem aan de slag te gaan.

Dit verhaal over een les, over de voorbereiding en de uitvoering ervan, en vooral over de gezamenlijke diskussies eromheen, die de groepsleden brachten tot een intimiteit waarin het leren van en over elkaar kon plaatsvinden, is waard in een boek beschreven te worden. Een boek, dat niet geschreven zal worden, omdat het meest waardevolle in het onderwijs niet in woorden is uit te drukken. Daarom beperkt dit verslag zich tot het geven van informatie over slechts drie aspekten van het werk:
- onze gedachten over de leerlingen en over dat wat zij óns geleerd hebben;
- onze ideeën over de realisering van het onderwijs en over de uitwerking daarvan;
- alles wat wij geleerd hebben rond het onderwerp van deze les.

De lezer zal hier geen gedetailleerd lesplan of een systematisch beschreven lesverslag vinden.

▶ ONZE GEDACHTEN OVER DE LEERLINGEN EN OVER DAT WAT ZIJ ONS GELEERD HEBBEN

de leerlingen
We kregen te horen dat wij les moesten geven aan acht kinderen – zeven engelse en een amerikaans – van ongeveer 12 jaar. Samen een pas gevormde groep in de europese school te bergen (noord-holland). We wisten niets van hun vorige schoolervaringen, maar we vermoedden dat zij beter waren dan de gemiddelde leerlingen van dezelfde leeftijd.
En inderdaad, zij werden niet afgeleid door de bezoekers, ze toonden veel geduld met ons. Ze waren aardig en geïnteresseerd, en vooral sterk gemotiveerd hun opdracht tot een goed eind te brengen.

kernprobleem
Als kernprobleem voor de leerlingen zagen we de behoefte aan een onafhankelijk oriëntatiesysteem. Voor het nauwkeurig bepalen van de richting naar straatsburg door middel van het vastleggen van een vertrekpunt en het plaatsen van een pijl op de vloer, is een maat nodig. Dit kan de hoek zijn tussen de lijnen *bergen-noord* en *bergen-straatsburg*. Daarom moest de kern van het proces zich richten op:
- het vinden van een noord-zuidlijn in het klaslokaal;
- het bepalen van de hoek tussen de gezochte richting en de noord-zuidlijn.

Met andere woorden: dit proces betreft de 'geo'-metrische definitie van het begrip richting en bepaalt de wiskundige inhoud van de les.
De kinderen bleken moeilijkheden te hebben met beide aspekten: het vinden van de 'richting' noord en het meten van hoeken.
Zoals we verwachtten, identificeerden ze 'noord' met een punt op de muur van het klaslokaal en in gedachten trokken ze lijnen vanaf iedere plaats in het lokaal naar dit punt (fig. 1*a*).
Het inzicht dat, als gevolg van de grote afstand tot de noordpool, alle noord-zuidlijnen door verschillende punten in het lokaal nagenoeg evenwijdig lopen (fig. 1*b*), werd niet bereikt.

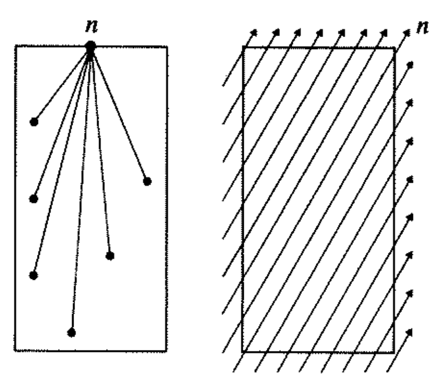


fig. 1*a* fig. 1*b*

Dit ondanks het feit, dat kaarten, op verschillende plaatsen op de grond gelegd en elk met behulp van een kompas noord-zuid georiënteerd, dit 'aantoonden'.

Deze ervaringen gaven de kinderen echter wel voldoende ondersteuning bij het vinden van de uiteindelijke oplossing van de opdracht – richting straatsburg –, maar ze waren niet voldoende om een meer algemeen begrip 'rich-

[1]) Goffree, F.: *'Vakdidaktische notitie no 2: vakbekwaamheid'*, in 'Euclides', jrg. 52 nr 9.

ting' te ontwikkelen en om tot inzicht te komen in de betekenis van het oriëntatiesysteem.

materialen en vaardigheden

We rekenden erop dat de kinderen zouden vragen naar een kaart, naar een kompas, en later naar een gradenboog. Deze materialen moesten dus aanwezig zijn. De kinderen moesten weten hoe zij een kompas konden gebruiken om de richting noord te bepalen. Maar wij dachten dat zij moeilijkheden zouden ondervinden bij het leggen van een kaart in de goede richting.

De kinderen toonden slechts vage ideeën, maar ze leerden snel, gemotiveerd door de opdracht. De moeilijkheden met de beschikbare kompassen konden wij niet voorzien: ze vertoonden grote afwijkingen ten opzichte van elkaar. Dit leidde tot verschillende resultaten met de kaarten en zo tot een storende afleiding voor de kinderen van tijdelijke aard.

hints

Omdat we moeilijkheden voorzagen met het aangeven van de noord-zuidlijn, hadden we enkele hints en hulpmiddelen vóórgedacht.

Eén ervan was de kustlijn, die de kinderen zeker zouden kennen, omdat bergen aan zee aan de kust ligt. In deze streek loopt de kust ongeveer noord-zuid. Een andere hulp verwachtten we van het laten aanwijzen door de kinderen van de vliegrichting naar huis. We dachten dat dit gemakkelijker voor hun zou zijn en ook motiverender dan het gaan naar straatsburg. In ieder geval zou het een instap kunnen zijn voor de voorgestelde opdracht.

Dit alles bleek echter onjuist. Het vragen naar de kustlijn riep geen enkele ondersteunende aktiviteit op (misschien hadden we toevallig te maken met een groep kinderen met watervrees). Het aanwijzen van de richting naar huis veroorzaakte moeilijkheden, omdat 'huis' voor sommige kinderen geen punt op de kaart betekende, maar een heel gebied.

overschatting

Terwijl we dachten over de bevolking van een internationale school, overschatten we de aanleg en bekwaamheden van onze leerlingen.

We verwachtten dat sommige leerlingen zouden weten dat je bij het precies volgen van een gegeven richting in het luchtruim terecht komt: een richting op de aarde heeft te maken met een beweging over het aardoppervlak, dus met de kromming van de aardbol. Dit levert moeilijkheden op bij het meten van de hoek tussen dergelijke richtingen.

Een ander aspekt had te maken met de mogelijke kennis van de leerlingen van het verschil tussen het gebogen aardoppervlak en de projektie daarvan op een kaart. Een verschil dat meer dan één hoek op de kaart oplevert, afhankelijk van de verschillende kaartprojekties. We dachten bovendien dat sommige kinderen het verschil zouden kennen tussen de geografische en magnetische noordpool, hetgeen een nadere uitleg zou vragen over de magnetische afwijking en het bijbehorende merkteken op de kompasroos.

Niets van dit alles gebeurde. Integendeel! Toen we vroegen of het licht van een sterke vuurtoren in straatsburg bergen zou bereiken, als de heuvels ertussen weggehaald zouden worden, antwoordden de leerlingen met een duidelijk 'ja'.

Het begrip richting heeft te maken met een beweging over de aarde van het ene punt naar het andere, maar niet met het meetkundige begrip rechte lijn. Ook het verband tussen het magnetische en het geografische noorden is onduidelijk.

▶ ONZE IDEEEN OVER DE PRAKTISCHE UITVOERING EN HUN UITWERKING

We merken allereerst op dat noch in deze paragraaf, noch in de voorgaande, de beschreven volgorde van ideeën in overeenstemming is met de gedachtenontwikkelingen tijdens onze diskussies.

start en lesdoel

Een fundamenteel punt voor iedere les: de kinderen moeten een duidelijk beeld hebben van datgene, waar hun inspanningen toe moeten leiden. Daarom probeerden wij hen te konfronteren met een duidelijk probleem:

- wat wordt er van hun verwacht?
- wat is het doel van hun aktiviteiten?

Het is niet voldoende *richting straatsburg* met de hand of een vinger aan te wijzen: 'Daar ligt ...'

Gaat het om een geschikte beschrijving in woorden, om het goed leggen van een kartonnen pijl op de grond, om het aangeven van een punt op een windroos, of om iets anders? Laten we het over aan de leerlingen?

We besloten een touw te gebruiken, het ene eind ervan met een spijker als startpunt te fikseren en te vragen het andere eind vast te leggen in de juiste richting (we hoopten dat het losse eind een voortdurende uitdaging zou betekenen). Dit werkte uitstekend, vooral toen er een ander idee aan werd toegevoegd: uitgaande van eenzelfde beginpunt gaf iedere leerling zijn eerste vermoeden aan met een touwtje, waaraan zijn naam was bevestigd.

motivatie
Bij een treffende inkleding van een probleem neemt de emotionele betrokkenheid toe. Daarom dachten we na over een goed verhaal.
Hoe kun je de vraag naar de richting straatsburg motiveren: een duif of een helikopter die precies hier vandaan start, een pijpleiding die gelegd moet worden, het jaar 2010, als de post per raket van bergen naar straatsburg wordt gestuurd, of ... ?
Het raketidee lieten we varen omdat we veronderstelden dat de leerlingen in verwarring zouden raken door de rotatie van de aarde onder de vliegende raket (waarschijnlijk weer een overschatting). Een vogel zou waarschijnlijk niet vliegen volgens vaste richtingen, een pijpleiding leek ons te kolossaal. Dus bleef de helikopter over.

We overwogen met een plaatselijk probleem te beginnen: het aanwijzen van de richting naar een bekend huis of bekende toren in bergen; de plattegrond van het dorp kon, zonder een kompas te gebruiken, evenwijdig aan de weg langs de school gelegd worden. Dit plan werd verworpen omdat een grotere afstand gemakkelijker naar een oplossing voert dan een plaatselijk probleem met alle kansen op storende en afleidende faktoren.

We bespraken ook een benadering van het probleem in twee fasen: eerst het konstrueren van een windroos op de vloer van het klaslokaal en daarna de vraag naar de richting straatsburg. Een voordeel van deze aanpak zou de scheiding van bepaalde technische moeilijkheden zijn. Maar dit idee werd opgegeven omdat we van mening waren dat we het vinden van de oplossing dan teveel manipuleerden en leidden.
Het helikopterverhaal bleek een goede ondersteuning te geven. Tijdens konfliktsituaties wees de onderwijzer naar boven: 'Daar wacht 'ie op onze instrukties!' Aan de andere kant zou de aanpak in twee fasen beter in overeenstemming zijn geweest met de aanwezige kennis en vaardigheden van de kinderen. Het totále probleem bleek welhaast t́e kompleks.

materiaal
Voor het begin van de les hadden we een aantal kompassen, passers, touwtjes en de kaart van centraal europa (pagina's uit de atlas) klaar gelegd. De onderwijzer wilde deze materialen niet direkt aanbieden, maar liever wachten tot het ogenblik dat de behoefte eraan ontstond. Een globe is niet erg bruikbaar, want de afstand bergen-straatsburg is slechts (ruw geschat) $\frac{1}{50}$ deel van de omtrek van de aarde. Denkend aan de kleine groep leerlingen, hadden we het gebruik van de wandkaart niet gepland. Wel hadden we eraan gedacht enige andere oriënteringsmiddelen dan de kompas te laten gebruiken:
- oriëntering op de sterren heeft niet veel kans op dit tijdstip van de ochtend;
- de padvindersmetode, het zuiden te bepalen met een horloge en de zon, zal wel onbekend zijn bij de leerlingen;
- ditzelfde kan ook gelden voor de oost-west-richting van oude kerkgebouwen.

Inderdaad dachten de leerlingen aan geen andere zaken dan kaart en kompas. Tot onze grote verbazing bleek het verschrikkelijk moeilijk de noord-georiënteerde kaarten op de goede manier op de grond te leggen. Daarop was namelijk ons 'vertrekpunt' getekend. Niet omdat een andere oriëntatie noodzakelijk was, maar vanwege de vraag: welk punt van de kaart moet precies op het 'vertrekpunt' gelegd worden?
De kinderen reageerden snel: 'het midden', en wezen wat vaag naar de achterkant van de atlas. Maar wat wordt nu precies met midden bedoeld? Men wilde wel graag straatsburg zeggen, omdat 'dat de plaats is, waar we heen moeten gaan' (een gevoel van: het midden is waar we naar wijzen). Het is niet duidelijk of de beslissing om bergen als midden te nemen, genomen werd op basis van de autoriteit van de onderwijzer of dat men zo maar iets zei ('omdat hij daar boven zat te wachten').

uitbreiding van de problemen
Daar we niet in staat waren te voorspellen hoeveel tijd nodig zou zijn voor de oplossing, moesten we nog wat verwante problemen bedenken. We besloten de volgende uitbreidingen aan te bieden:
- welke richting moeten we nemen als we van straatsburg terug zouden gaan? welke richting zouden de mensen in straatsburg op de grond tekenen? (omkering);
- de vuurtoren van bergen ontvangt het *sos*-signaal van een schip, de vuurtoren van ijmuiden ontvangt hetzelfde signaal onder een andere hoek; waar ligt het schip? (een kaart was hiervoor beschikbaar);
- teken precies de richting naar je huis op de grond (individuele opdracht).

Daar het hoofdprobleem meer moeilijkheden opriep dan we hadden gedacht, bleef er slechts tijd beschikbaar om de eerste en derde uitbreiding even aan te stippen.

WAT WIJ ERVAN HEBBEN GELEERD

een goed probleem

Klaarblijkelijk hebben we een goede opdracht gekregen. De leerlingen waren gedurende de les aktief en lieten geen verveling of vermoeidheid blijken.
Het probleem scheen enige 'eksistentiële' betekenis voor hun te hebben. Een dergelijk probleem kan zodoende op verschillende nivo's opgelost worden:

- op een intuïtief nivo in de brugklassfeer, waar fundamentele ervaringen en noodzakelijke begrippen slechts in beperkte mate beschikbaar zijn;
- op een meer geavanceerd nivo in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs, waar de leerlingen zich bewust zijn van de middelen en moeilijkheden met betrekking tot het probleem.

taal en betekenis

Een onderwijzer moet goed luisteren naar wat zijn leerlingen proberen te zeggen en naar de manier waaróp zij het zeggen. Hij moet de betekenis achterhalen van hun vaak misleidende formuleringen. Bij misverstanden is hij de eerste die daarvoor verantwoordelijk kan worden gesteld, en niet de leerling. Wij wisten niet dat het woord richting een dynamisch begrip was voor onze leerlingen en dat het zoiets betekende als 'het wijzen naar een punt' of 'het duiden van een vér liggend doel'. Het wijzen (de aktiviteit) en het doel schijnen belangrijke elementen van dit begrip.
In vergelijking met deze twee elementen krijgt de plaats van de aktiviteit vanwaar je naar het doel wijst, veel minder aandacht, omdat deze plaats ook kan veranderen. Daarom ligt dit begrip in psychologische zin ook ver verwijderd van het statische meetkundige begrip van een lijnstuk dat twee punten verbindt. Tussen de twee punten bestaat geen voorkeur.
Het begrip bij de kinderen ligt dichter bij het idee van een straal, van een rechte halflijn die in een zeker punt 'begint', of van een vektor. Maar het zijn juist de eenvoud en onvolledigheid van het begrip die de leerlingen in staat stellen een oplossing te vinden, omdat de betekenis van 'richting als een rechte lijn' in konflikt komt met de kromming van het aardoppervlak.
Aan de andere kant is het 'vertrekpunt' een essentiële voorwaarde voor het meten, omdat het vertrekpunt het centrum van het oriëntatiesysteem is. En dit systeem bestaat uit een bepaalde richting (noord) en de hoek waarmee het 'verschil' tussen de noordrichting en de gevraagde richting wordt gekwantificeerd. Deze onvolledigheid van het begrip richting stelt de leerlingen derhalve enerzijds in staat de kromming op de aardbol te volgen en veroorzaakt anderzijds moeilijkheden met de kwantificering van de gewenste richting.

Het zal duidelijk zijn dat de ontwikkeling van het begrip veel meer lessen en veel meer aktief leren behoeft dan in deze ene les mogelijk was. Even goed moet uit de voorgaande overwegingen duidelijk zijn dat het welslagen in hoge mate van het begrip en de gevoeligheid van de onderwijzer afhangt.

revisie en ontwerp

Als een goede fee ons in de gelegenheid zou stellen alles nog eens over te doen, dan zouden we de twee-fasen-benadering kiezen. Tijdens de eerste fase zou meer fundamentele ervaring opgedaan moeten worden met betrekking tot de (bijna) evenwijdige lijnen zuidnoord: teken pijlen uit verschillende steden op de kaart naar steden die er ten noorden (ten zuiden) van liggen; vergelijk deze pijlen. Konstrueer windrozen op verschillende plaatsen op de grond in de klas. Maak windvaantjes op verschillende plaatsen op het schoolplein en vergelijk de richtingen als er een flink briesje staat. Enzovoort. Of: alkmaar ligt ten noorden van haarlem en ten zuiden van ... ?

effekt van de voorbereiding

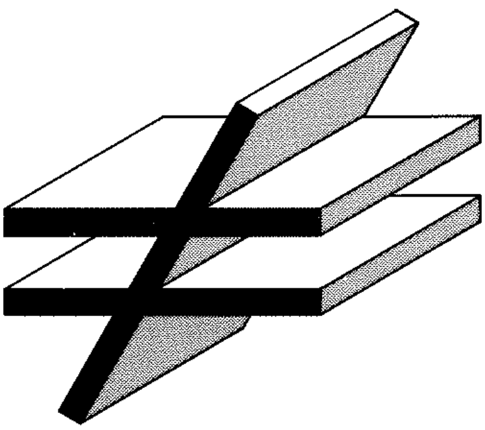
Ondanks alle voorbereiding, al het zorgvuldige voordenkwerk, het voorzien in alternatieven, het doordenken van elke voorspelbare gebeurtenis en een planning op langere termijn, zal het onderwijsleerproces in de klas zich toch anders ontwikkelen.
Maar hoe fleksibel de onderwijzer kan reageren met betrekking tot het afwijken van zijn voorbereiding, hoe hij kan takseren wat de alternatieven, die hij onder druk van de aktuele gebeurtenissen moet kreëren, waard zijn, en hoe gedifferentieerd de onderwijzer de mogelijke betekenissen van de leerlingenreakties kan interpreteren, dit alles hangt in hoge mate af van de kwaliteit van zijn voorbereiding. Daarom is het indirekte effekt van de voorbereiding belangrijker dan de direkte invloed op de les.

dank u

We zijn de europese school in bergen veel dank verschuldigd.
Veel dank gaat ook uit naar de organisatoren van de egmondkonferentie.
Het is zoals de opdracht uit *'The Horse at Pooh Corner'* van A.A. Milne luidt:

'It would be my present to you ...
If it weren't your gift to me.'

nieuw op de markt



OPEN KAART

Na enige jaren geleden met de recensierubriek te zijn gestopt, pakken we in deze jaargang de beschrijving/bespreking van materialen voor wiskundeonderwijs op de basisschool weer op.[1] *Het blijkt nodig te zijn. Immers, de spullenkaternen zijn zich vooral gaan richten op de bespreking van grotere gehelen (metoden), terwijl* nieuw op de markt *toch m.n. te maken heeft met aktuele uitgaven van 'lossere' (zogenoemd: additionele) spullen.*

In principe worden uitsluitend die spullen beschreven, die aan te bevelen zijn. Onder de (meer dan 90) titels van 'lossere' spullen, die we in onze biblioteek hebben, komen er aldus misschien een tiental in aanmerking. Negatieve besprekingen hebben o.i. weinig zin. Selektie voor deze rubriek betekent dus, dat het spul de moeite waard is. Eventuele kritiek die toch nog genoemd wordt, beoogt m.n. een zo verstandig mogelijk gebruik van het materiaal te bevorderen.
We beginnen met een bespreking van de onderwijstelevisieserie 'Open kaart'.

ED DE MOOR

▶ **INLEIDING (1)**
Met de onderwijstelevisieserie *'Open kaart'* biedt de *not* opnieuw een unieke gelegenheid ons reken/wiskundeonderwijs een verlevendigingsinjektie toe te dienen.
Dit onderwijsleerpakket (auteur: Piet Scholten), dat een mooi voorbeeld is hoe aardrijkskunde en rekenen/wiskunde geïntegreerd kunnen worden, is bedoeld voor het zesde leerjaar van de basisschool en voor de brugperiode. In z'n totaliteit is het pakket niet gemakkelijk, maar dat mag geen bezwaar zijn. Het is te hopen, dat ook het voortgezet onderwijs (van *lbo* tot en met *vwo*) gebruik zal gaan maken van de serie, omdat de aangesneden onderwerpen nog tal van uitbreidingsmogelijkheden bieden.

Het pakket[2]) is als volgt samengesteld:
- vijf televisieprogramma's (in kleur), welke in 1979 vanaf 3 april om de twee weken zullen worden uitgezonden;
- een werkboek voor de leerlingen (plus plastic kompasroos) (*f* 3,40);
- handleiding voor de leraar (*f* 4,95).

De uitvoering en lay-out van het leerlingenboek is in kleur, ruim en een lust voor het oog. De televisieprogramma's worden door Marnix Kappers levendig gepresenteerd.
Onder regie van Willem Gerritsen, wiens betrokkenheid bij de inhoud van het onderwijs ook in de televisiebeelden valt te bespeuren (op les 5 na, die wat gezocht is), zijn uitstekende films gemaakt.

Uit deze inleiding zal duidelijk zijn, dat wij de serie van harte willen aanbevelen. Toch willen we in het volgende hier en daar enkele kritische kanttekeningen plaatsen.
We bespreken achtereenvolgens de televisieprogramma's (2), het werkboek (3) en de handleiding (4).

▶ **DE TELEVISIEPROGRAMMA'S (2)**
De televisielessen, als je ze tenminste 'lessen' wilt noemen, bevatten — vooral de eerste vier — veel interessante informatie. Zo komen o.m. aan bod: verkeer, dienstverlening, zeevaart, technische hulpmiddelen, onze aarde, kaartprojekties, schaal, lucht- en veldkartering, geschiedenis en bouwplanning.

---

[1]) Zie voor een overzicht van besproken materialen: Moor, E. de: *'Nieuw op de markt'*, wiskobas-bulletin, jaargang 5 nr 5/6, pag. 33 e.v.
[2]) Uitgever: *not*, Riouwstraat 163, den haag, tel. 070-609815.

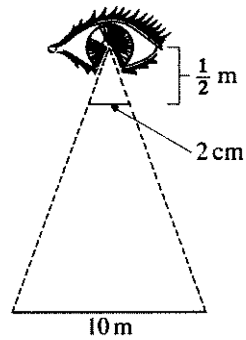
Een voordeel van televisie is, dat je van alles de school kunt binnenhalen, wat anders nauwelijks te realiseren valt. Een sympatieke medewerker van rijkswaterstaat vertelt bijvoorbeeld boeiend over het in kaart brengen van een rivier.
Aan de andere kant ... mensen blijken nauwelijks in staat om, direkt na een uitzending van het journaal, de verstrekte informatie over bijvoorbeeld het weerbericht weer te geven! Daarin schuilt nu één van de nadelen van televisie: er wordt een macht informatie gegeven, waarmee een passief gedrag bij de kijker (leerling en onderwijzer) te weeg gebracht kan worden.

Een voorbeeld van een dergelijk passief gedrag is te vinden in het derde televisieprogramma. Toen we dit programma met zo'n vijftien wiskundigen bekeken, viel het niemand in eerste instantie op, dat de leuke didaktische vondsten toch aardig wat stof tot nadenken geven. Immers, laten we Marnix' truuk met de lat eens beschouwen.
Marnix weet dat er onder aan de toren van zaltbommel een lat ligt van tien meter. Boven op de toren houdt hij z'n hand een eindje (de televisiebeelden suggereren zo'n 50 cm) van z'n oog en hij schat de lat tussen duim en wijsvinger op twee centimeter. Nu redeneert hij, terwijl wij het plein van zaltbommel als een soort kaart op het televisiescherm zien:
.... 'Twee centimeter is in het echt tien meter, dus 1000 cm. Eén centimeter is 500 cm. Dus: schaal 1 op 500.' ....

Maar hoe zit dat nou, als hij z'n hand op tien centimeter van z'n oog had gehouden? Dan krijgen we toch een heel andere schaal? De afstand tussen duim en wijsvinger wordt dan kleiner.
Nog verwarrender wordt de zaak als je kaarten met aanduidingen als '1 : 100.000' op het scherm projekteert, terwijl de ene kijker een grootbeeldtoestel en de andere een kleinbeeld heeft.

Als passief kijker heb je dat eerst niet in de gaten, vooral omdat de les in haar totaliteit gaat om het aardige idee: hoe hoger je boven het land zit, hoe kleiner je alles ziet. De steeds 'kleinere' schaal is toch wel lastig. Immers, de getallen 1 : 100.000 ..... 1 : 200.000 lijken steeds gróter te worden. We komen hier nog op terug.

Nog verwonderlijker wordt het als we, afgaande op deze filmsuggesties, eens gaan rekenen. Ik zie een voorwerp van tien meter lang – op een afstand van een halve meter van m'n oog – als een lengte van twee centimeter.



Dit betekent dat het voorwerp 500 maal zover weg is als de afstand van m'n oog tot het waargenomen beeld. Dus bevindt Marnix zich op een hoogte van $500 \times \frac{1}{2}$ m = 250 m boven de grond! En de toren van zaltbommel is ongeveer 70 m hoog. (En wat te denken, als we hóren dat Marnix 193 treden heeft geteld?
– 193×15 cm ≈ 29 m ! –)

Via de televisiebeelden wordt dus gesuggereerd, dat je het plein beneden als een káárt op een bepaalde schaal waarneemt. Maar ... er kan pas over schaal gesproken worden als je voorwerp en afbeelding met eenzélfde maateenheid vergelijkt, waarbij het er tévens van afhangt op welk vlak je het bedoelde voorwerp projekteert.
Oorspronkelijk is in de televisieles via een modelspoorbaan ook aandacht besteed aan dit vergelijken. Het onderwijzersboek spreekt bij de zaltbommeltruuk voorzichtig van een 'optische' schaalverandering.
Voor het verloop van de lessen in de klas is dit niet belangrijk, maar het voorbeeld toont wel hoe een televisieprogramma de kijker weinig gelegenheid biedt tot een kritische instelling. Niettemin kan een dergelijk programma een mooie aanleiding zijn tot diskussie, uitbreiding en voorbereiding bij de lessen. Misschien een idee voor een studiemiddag op de begeleidingsdiensten om lessen voor te bereiden of voor een studieprojekt op pedagogische akademie of lerarenopleiding.
In de televisiefilms schuilen meer van dergelijke aanleidingen. We noemen:
- wat is het diepste punt van een rechte tunnel door de aarde van groningen naar maastricht? (televisieprogramma 3);
- echoloodwerking en isodieptelijnen (televisieprogramma 2);
- plaatsbepaling op een rivier (televisieprogramma 2);
- projektiemetoden (televisieprogramma 3);

• vierkleurenprobleem (televisieprogramma 4). Dit zijn wiskundige onderwerpen, maar het lijkt voorstelbaar, dat dergelijke ideeën ook vanuit de geografie kunnen worden aangedragen. Verschillende werkbladen bieden hiertoe eveneens mogelijkheden, zoals bijvoorbeeld het begrip afstand in les 7. De werkbladen kunnen echter vooral in didáktisch opzicht interessante studiestof opleveren. We komen hierop nog terug.

samenvatting
De televisieprogramma's kunnen dus dienen als:
- informatieverstrekkers (een bizonder mooi stuk is de animatiefilm over kaartprojekties in programma 3);
- aanleiding tot voorbereiding van de lessen (schoolbegeleidingsdiensten, pedagogische akademies, lerarenopleidingen);
- aanleiding tot aktiviteiten met het werkboek (de klas);
- aanleiding tot voortzetting van sommige aktiviteiten (ontwerpers).

▶ HET WERKBOEK (3)

Aan het totale televisieprojekt gaat een aantal lessen vooraf. Hierbij is het de bedoeling de eigen school in de meest ruime zin in kaart te brengen.
Als voorbeeld daartoe is een prachtig kollageverslag van de school *de wilge* ingevoegd. Hierin zitten suggesties voor eigen aktiviteiten als:
– plattegrond van school en wijk maken;
– historie van de school;
– informatiegrafieken over de school;
– fotopuzzeltocht;
– korrelatieonderzoekjes.
Over het algemeen aardige en nuttige zaken, welke zeker twee à drie weken vóór de aanvang van het televisieprogramma gestart dienen te worden. Alle grafieken zijn door de keuze van de onderzoekjes staafgrafieken. Dit kan een enigszins eenzijdig gebruik van het onderwerp in de hand werken. Heel leuk is het korrelatieonderzoek tussen spanwijdte en lengte van de leerlingen. Hierbij ligt weer zo'n mogelijkheid tot verder onderzoek, i.c. over afwijking van de verwachte korrelatie.

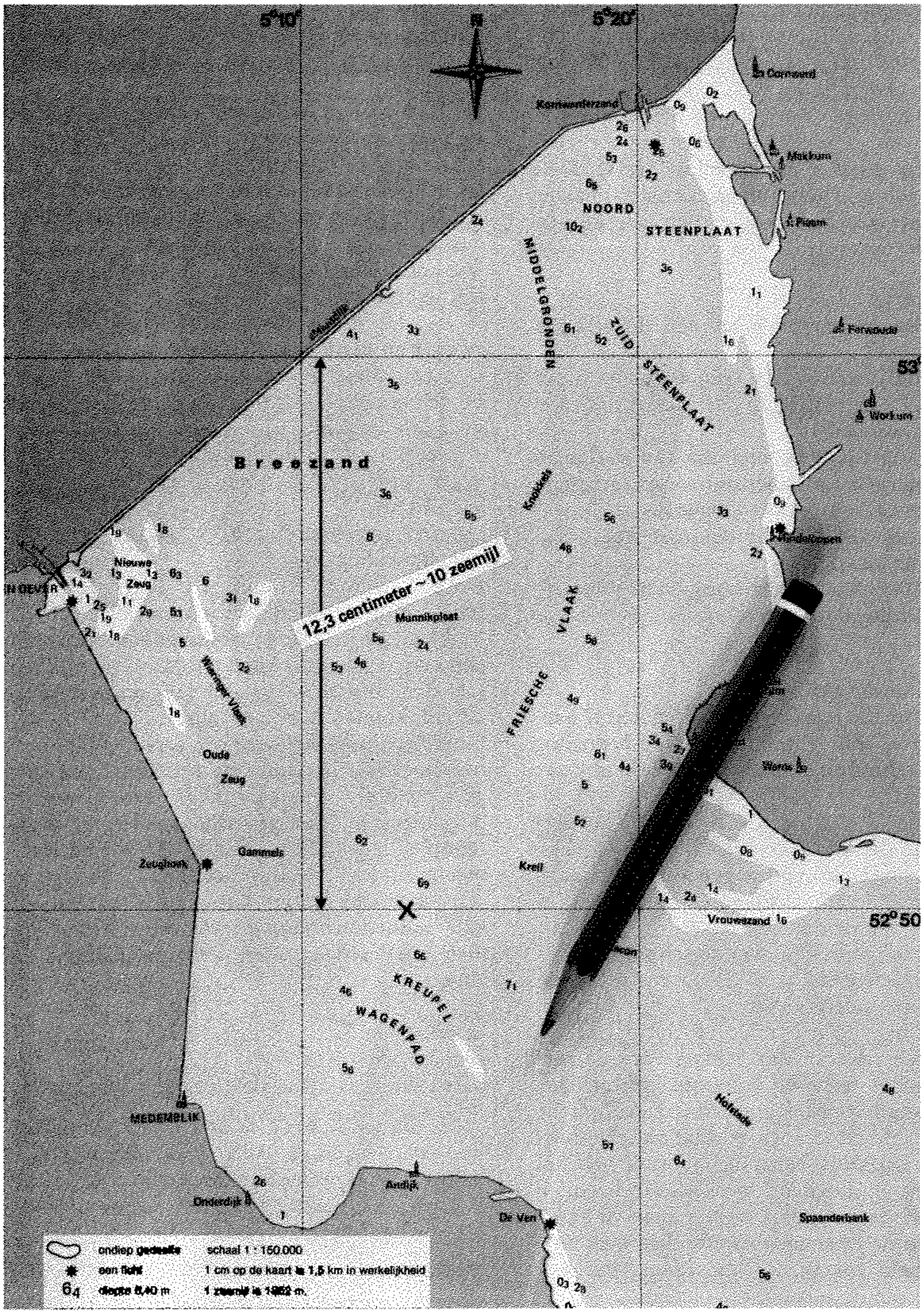
eerste lessencyklus
De lessencyklus na het eerste televisieprogramma (lessen 2 tot en met 5) is niet gemakkelijk, maar zeer nuttig. De opdrachten hebben een sterk aardrijkskundig karakter. Hoewel lastig, zijn de oefeningen in waarnemen, vergelijken en weergeven zeer waardevol, omdat hierbij geleerd moet worden af te zien van overtollige gegevens. Dit eerst globaal kijken om daarna gedetailleerder te werk te gaan, is iets wat bij andersoortige problemen ook vaak naar voren komt.
Heel leuk is de wijze van aanbieding om de legenda van een kaart te leren lezen met behulp van foto's, kaart en symbolen.
Deze lessencyklus kan een voortzetting krijgen als de suggestie uit de handleiding gevolgd wordt om via een kaart van de eigen omgeving (topografische dienst) een en ander in de praktijk te brengen.

tweede en derde lessencyklus
De tweede lessencyklus (lessen 6 tot en met 9) heeft een sterk meetkundig karakter. Aan de orde komen o.m.:
– plaatsbepaling met behulp van koördinaten;
– plaatsbepaling met behulp van richtingen;
– hoeken;
– koers uitzetten op zee;
– afstandsbepalingen.
Hoewel les 6 ('voorkomen is beter dan blussen') vanuit een bizonder leuk probleem start, blijkt uit de reakties van de kinderen, dat dit één van de lastigste opdrachten is. Het werken met de kompasroos zou o.i. zorgvuldiger voorbereid kunnen worden, juist omdat dit een mooie toegang biedt tot een eerste vulling van het hoekbegrip. Opnieuw een idee voor een gezamenlijke voorbereiding: schoolbegeleidingsdiensten, pedagogische akademies, lerarenopleidingen. Hetzelfde geldt voor het probleem van les 7, waarbij het afstandsbegrip van een punt tot een lijn of een figuur onderzocht zou kunnen worden. Niettemin zijn de sommen van les 6 en 7 erg leuk, motiverend en zinvol.

In de lessen 8 tot en met 12 komt de schaalproblematiek naar voren.
Laten we eens vraagstuk *b* van les 8 bekijken:

> 'Het patrouillevaartuig de RP 7 van de Rijkspolitie te water vertrekt uit de haven van Enkhuizen. Het vaart eerst 5 zeemijlen richting Noord (0°), dan 4 zeemijlen richting NW (315°) en vervolgens 9 zeemijlen richting NO (45°).
> Bij welke plaats is de RP 7 nu?'

Het gaat in dit vraagstuk om verhoudingen, meten, rekenen en tekenen.
Prima, maar hoe pakken we dit probleem didáktisch aan? De handleiding biedt behalve de antwoorden weinig steun.
Laten we eens wat vóórdenkwerk proberen te verrichten. We willen de eerste slag van vier zeemijlen (daar zit de moeilijkheid met de kompasroos nog nauwelijks in) uitzetten.



voor opname in het bulletin is de kaart verkleind

Enkele mogelijkheden en nivo's:

- vanuit begrip zeemijl en kaart naar *visuele schaal*: 10 meridiaanminuten ~ 10 zeemijlen
  Op de kaart staan de meridiaancirkels 52° 50′ en 53°.
  Meten met de liniaal geeft dus: 10 zeemijl = 12,3 cm. Dit lijnstuk is de *visuele schaal*.

Verder rekenen: 1 zeemijl ~ 1,23 cm.
Maar welke fout maak je dadelijk met afronden als je 1,2 cm zou nemen? Wat nemen we voor het stuk van vier zeemijlen: 4,8 (= 4 x 1,2) of 4,9 (= 4 x 1,23)?

- *verhoudingsmatriks*
  We maken gebruik van de gegevens op de kaart:

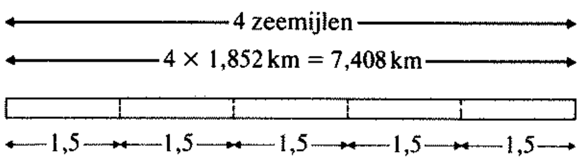
  1 cm komt overeen met 1,5 km;
  1 zeemijl is 1852 m;

cm	1	0,2	0,03	1,23
m	1500	300	50	1850

:5 :30

(1 zeemijl).

- *strook*
  Eerst rekenen: vier zeemijlen ~ 4 x 1,852 km = 7,408 km.
  Hoe vaak gaat 1,5 km (~ 1 cm) op dit stuk?



Ongeveer vijf maal. Immers: 5 x 1,5 = 7,5. Wat onnauwkeurig, maar de mogelijkheid openend naar de formelere (algebraïsche) aanpak.

- *algebraïsch*

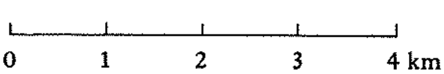
cm	1	x
km	1,5	1,852

$1,5 \times x = 1 \times 1,852;$

$x = \frac{1,852}{1,5} = 1,23.$

De opgave is nieuw, nuttig en motiverend, maar de didaktische aanpak blijft de traditionele: 1 : 150.000 betekent dat één centimeter in werkelijkheid 150.000 cm is, etc.
Het is echt jammer, dat aan de hele schaal- en verhoudingsproblematiek in didaktisch opzicht eigenlijk geen aandacht is besteed.

Het woord 'schaal' is ontleend aan het latijnse 'scala', dat letterlijk ladder betekent. In het geval van kaarten: een maatladder, een lijntje met streepjes erop, bijvoorbeeld:



In de praktijk is dit dé manier om handig met kaarten te werken. We noemen het de visuele schaal. Op gebruikskaarten komt dit ook op deze manier voor. Deze praktische metode missen we in dit pakket (maar kan er natuurlijk gemakkelijk ingebracht worden).
Direkt wordt gebruik gemaakt van de gebruikelijke 1: ... (1 op ...) notatie. Notatie en uitspraakwijze zijn dáárom verwarrend omdat 't groter wordende tweede getal aangeeft, dat de schaal kleiner wordt. In feite is het een verkleiningsfaktor als je naar de kaart toe denkt en een vergrotingsfaktor andersom; 1 : 100 betekent: elke lengte op de kaart is 100 maal zo klein als in werkelijkheid en de werkelijkheid is 100 maal zo groot. Op deze manier krijgt de 1 : 100 notatie z'n enige zinvolle betekenis: zonder tekening de verkleiningsfaktor van de werkelijkheid meedelen. Verder blijft de visuele schaal in de praktijk het handigst, ook al omdat bij vergroting of verkleining via overheadprojektor of foto, de visuele schaal te gebruiken blijft.
Weliswaar wordt op de kwesties van verkleinen en vergroten in de derde televisieles ingegaan (modelspoorbaan), maar ... in didaktisch opzicht is toch een kans gemist.
Nogmaals: alle lof voor het geboden leerlingenmateriaal, doch het verdient aanbeveling een en ander vooraf goed te doordenken.

De derde lessencyklus sluit af met een aktiviteit (les 13), waarin met behulp van gegeven foto's van wegwijzers, een fietstocht gerekonstrueerd moet worden. Een mooie opgave, die ook weer niet makkelijk is. Opvallend is hierbij, dat hoe reëler je de vraagstelling brengt (i.c. met échte foto's van échte wegwijzers), dit 't probleem alleen maar lastiger maakt. Getékende wegwijzers, zonder overtollige informatie die 'ruis' kan veroorzaken, hadden het probleem sterk kunnen vereenvoudigen.

vierde en vijfde lessencyklus
De lessen 14 tot en met 21 (twee cykli na het vierde en vijfde televisieprogramma) bieden tenslotte een grote variëteit aan overwegend zinvolle opdrachten.
Hierbij komen aan de orde:
- het vergelijken van kaarten van vroeger en nu; lessen 15 en 16 (heel goed);
- oriëntatieproblemen; les 17 (leuk);
- ontwerpen van huis- en wijkindeling; lessen 18, 19, 20 (kreatieve bezigheid die door de kinderen erg gewaardeerd wordt);
- stripkaarten; les 21 (modelvorming, erg nuttig).

Les 22 gaat tenslotte over bevolkingsdichtheid. Aan begripsvulling van deze samengestelde grootheid wordt nauwelijks aandacht besteed. De sommen hebben een echt cijfermatig karakter.

▶ DE HANDLEIDING (4)
Uit de vorige paragraaf zal reeds duidelijk geworden zijn, dat de handleiding het minst

uit de reakties van leerlingen

- 'De televisieuitzendingen vond ik niet zo heel leuk. Maar het werkboek was erg leuk. In het begin vooral, maar de laatste drie bladzijden waren erg moeilijk.'

- 'De stripkaart was helemaal iets nieuws voor ons. We hadden er nog nooit van gehoord. In het begin snapte niemand er iets van. De meester heeft een voorbeeld gemaakt. Door een roete te lopen in de klas en toen moesten wij er een stripkaart van maken. Toen snapten we het allemaal.'

- 'De boeken waren erg leuk. De televisieprogramma's waren leuk om te zien, maar ik keek wel van programma 3 op, waarin werd verteld dat als je een tunnel zou maken van groningen naar maastricht, kaarsrecht, d.w.z. horizontaal, dat je dan wel $1\frac{1}{2}$ km onder de grond zou komen!'

- 'Met de gradenboog was het ook leuk werken, in het begin snapte ik er niks van maar naderhand wel.
We hebben ook met schalen gewerkt, maar dat vond ik niet zo leuk, ik snap dat niet.'

- 'In het begin was het heel erg gemakkelijk, later werd het moeilijker.'

- 'Open kaart' was een projekt, waarbij je het gevoel kreeg alsof het wiskunde was, wiskunde van de hogere scholen. Dit projekt heeft me gekalmeerd voor het voortgezet onderwijs.'

- 'Jullie projekt wordt nog eens beroemd in nederland. Ik vind dat jullie zo door moeten gaan.'

- 'Vooral de bladzijde met 'zo zouden wij de wijk indelen', dat vond ik leuk.'

- 'Het boek van Open kaart blijf ik altijd houden. Ik gooi het nooit weg. O ja, nog een vraagje. Wil Marnix eens een keertje terug schrijven?'

- 'Verder klopt er volgens mij iets niet op pag. 65 bij de stripkaarten bij opgave f.'

- 'Ik vond het programma Open kaart een leuk, moeilijk en interessant programma.'

- 'Ik hoop dat er nog meer van deze programma's komen.'

- 'Ik vind Open kaart erg leuk. Vooral het begin en les 18, 19 en 20. Ook was het erg moeilijk, maar met wat hulp van de meester en van andere kinderen kom je er wel.'

sterke deel van het pakket *'Open kaart'* vormt. Didaktische aanwijzingen van enige importantie ontbreken. Aan de hand van enkele voorbeelden (o.a. over schaal) hebben we laten zien dat van een vernieuwde didaktiek nog nauwelijks sprake is. Wij weten, dat de handleiding aan een bepaalde omvang gebonden is, maar er waren al 12 pagina's meer ter beschikking geweest, als het alleen voor insiders interessante hoofdstuk over kartografie achterwege gebleven was. O.i. is het leerlingenmateriaal een ruimere handleiding zeker waard. Het is te hopen dat via heroriënteringskursussen, voorlichtingsdagen van begeleidingsdiensten, lerarenopleidingen en studiedagen in deze leemte voorzien kan worden.

▶ SAMENVATTING (5)

- *'Open kaart'* is een uitstekend televisieprojekt op het gebied van aardrijkskunde en rekenen/wiskunde.
- Het is verheugend dat via de *not* op het gebied van het reken/wiskundeonderwijs innovatieve pogingen op wat grotere schaal worden ondernomen.
- Hoewel sommige delen lastig zijn, mag dit geen beletsel zijn, uitgebreid aandacht aan dit projekt te besteden, aan het einde van het zesde leerjaar. Ook voor de brugklas is het projekt zeer de moeite waard, vooral waar het om de meer wiskundige aspekten gaat.
- Het is aanbevelenswaardig en leerzaam de lessen grondig in teamverband voor te bereiden.

onderwijs-ontwikkeling

OP WEG NAAR EEN WERKPLAN VOOR WISKUNDEONDERWIJS OP DE BASISSCHOOL

Met de rubriek onderwijsontwikkeling beogen we de onderwijsgevenden steun te verlenen bij het samenstellen van werkplannen voor wiskundeonderwijs.
In allerlei onderwijs(kundige) publikaties wordt in allerlei betekenissen gesproken over 'schoolwerkplanontwikkeling'. Veelal gaat het daarbij om niet veel meer dan het maken van een 'papieren plan'. De term onderwijsontwikkeling mikt verder, voorbij het papier. Het onderwijs zélf, in de school, in de klassen, moet verder komen, moet ontwikkeld worden. Werkplannen zijn daarbij noodzakelijk, maar ... ze vormen niet het eindpunt. Een groot probleem bij het samenstellen van een werkplan voor wiskundeonderwijs is, dat we te maken hebben met een nieuw vak. Gelukkig zijn er al veel publikaties waaruit een ieder een idee kan krijgen van hetgeen met wiskundeonderwijs voor de basisschool bedoeld wordt. Nochtans is omzichtigheid bij de invoering geboden.
In nevenstaand artikel besteden we aandacht aan verschillende nivo's van werkplanontwikkeling.
In volgende bijdragen zullen we scholen introduceren die al vast begonnen zijn, op diverse manieren en onder verschillende omstandigheden. U zult zien, dat er veel manieren zijn om uw onderwijs geleidelijk aan te passen. Aangezien iedere school haar eigen wensen en mogelijkheden het beste kent, zal ieder zelf moeten uitmaken wat haalbaar is.

ABBES DEKKER

▶ HOE KUNNEN WE TE WERK GAAN? (1)

Om goed te kunnen kiezen wat je wel of niet op de basisschool gaat doen, is ervaring met de nieuwe materialen en inhouden nodig. Reakties van kinderen hierop zijn een onmisbare schakel in de reeks aktiviteiten die tot een werkplan leiden. Eerst vanuit ervaringen met nieuwe onderwijsinhouden en bedoelingen, krijg je een idee voor de opzet van het werkplan voor je eigen leerjaar.
De metode die je nu gebruikt, kan voorlopig houvast blijven geven. Geleidelijke veranderingen, die je in je leerjaar wilt invoeren, doorkruisen zodoende niet de opbouw binnen de hele school.

Een werkplan maken kan betekenen dat je noteert wat je doet. Dit is overigens niets nieuws. Theo Thijssen deed het al vele jaren geleden, zoals te lezen is in '*De gelukkige klas*'. Hij had er nogal wat moeite mee:

> 'Ik zal het nooit leren, elke week een overzicht van het behandelde op te schrijven. Verleden week heb ik ontdekt, dat ik getrouw vergeten had op te schrijven wat ik van metriek stelsel heb 'behandeld', terwijl ik toch heus wel degelijk af en toe sommetjes met meters en hektometers en kilometers heb laten maken. 'k Heb dat verzuim hersteld, en vanaf de eerste week bijgeschreven: 'lengtematen, herleidingen', en de laatste twee weken heb ik gezet: 'repetitie gewichten'. En dan heb ik verleden week ook genoteerd: 'Begin breuken'. 'k Zie al aankomen, dat daar op volgt: 'Voortzetting breuken' — en over enige tijd 'herhaling breuken'. Maar het wordt toch in de grond van de zaak niets anders, dan wat die ondeugend-geestige Koning nu heeft uitgevonden. Die is in z'n overzicht door het stadium van de 'kennismaking' met de klas heen, en een nieuw ingetreden: dat van 'zie leerplan'.
> Ook met v.d. Lee z'n overzicht-bijhouden schijnt het niet helemaal pluis te zijn. Ik had het er laatst met hem over, en vroeg: —Zeg, zet jij bij lezen nou elke week dat van beschaafde uitspraak en natuurlijke toon?
> —Nee natuurlijk niet, zei v.d. Lee.
> —Maar dan geeft je overzicht toch de indruk, dat je bent gaan slabakken.
> —Och loop naar de maan met je indruk, zei v.d. Lee, het is toch niet om de indruk begonnen, als ze maar zien dat je geregeld doorgewerkt hebt.
> Ik heb er geen ruzie over willen maken — maar die opvatting schijnt me toch helemáál nonsens. Wie zal je beletten, àls je eens niet geregeld doorgewerkt hebt, om dan in dat schrift te schrijven van wél? Ikzelf ben al een schoon voorbeeld voor deze kunst: 'k heb sinds de vakantie één keer 'natuurkunde' gedaan (nog zonde van de tijd geweest, vind

ik). Maar in m'n register staat week-voor-week een pracht van een serie-les: begrippen warm en koud – warmte – proef met ring en bol – repetitie van 't behandelde – wet der uitzetting – dagelijks leven. Met die hele serie heb ik moeite gehad om drie kwartier vol te kletsen, maar op papier is het nu iets solieds van wéken... Aanstaande Zaterdag zet ik met kalm gemoed: 'herhaling warmte'.

Neem daartegenover de aardrijkskunde: Nederland provincies, Nederland eilanden, Nederland wateren... ziedaar alles wat m'n overzicht aangeeft; en we hèbben toch heel wat aardrijkskunde verwerkt, hoor. Ik zie al een of andere autoriteit in mijn overzicht bladeren: tjongejonge, zal-ie denken, wat hééft de kerel een werk van Natuurkunde gemaakt – maar aardrijkskunde... dunnetjes hoor.

Ja ja, dat moet dan verbeelden een verslag te zijn van de laatste vijf weken. Maar van de wezenlijke gebeurtenissen in m'n klas staat er niets in. Bij voorbeeld niets van het opnemen van Louis van Rijn in de klas, en dat is toch in mijn oog van honderdmaal meer belang dan de hele rest.'

Thijssen geeft een beginnetje aan: je aanpak vastleggen met het oog op het volgende jaar. Immers, voor het maken van een werkplan wiskundeonderwijs is meer nodig dan de aanschaf van een nieuwe methode en het sukses-sief doorwerken daarvan.

▶ NIVO'S VAN WERKPLANONTWIKKELING (2)

nivo 1

Het werkplan komt al duidelijk op een hoger nivo als een metode fleksibel gebruikt wordt: je durft eens wat dingen over te slaan; je pakt sommige dingen anders aan en je noteert hetgeen kinderen aanspreekt.

Laten we dit *nivo 1* noemen: fleksibel gebruik van de eigen metode. In de volgende nivo's wordt andere leerstof ter aanvulling van de metode gebruikt. Fleksibel gebruik van de eigen metode spreekt daarbij voor zich.

nivo 2

Het gebruik van additionele materialen, die als losse aktiviteiten gedaan kunnen worden, zonder het werk met de metode wezenlijk aan te tasten. We moeten hierbij niet alleen denken aan losse werkbladen (bijvoorbeeld uit '*Kien*', of uit het wiskobas-bulletin), maar ook aan aktiviteiten uit rekenaktiveringsprogramma's. Er is al een behoorlijk aantal goede additionele materialen op de markt.[1] Veel scholen kunnen dit nivo van werkplanontwikkeling goed realiseren, omdat hulp van buitenaf (begeleidingsdiensten, heroriënteringskursussen) niet nodig lijkt.

nivo 3

Ter aanvulling van de eigen metode wordt gebruik gemaakt van een televisieserie of schoolradioprogramma (bijvoorbeeld: *'De kamping'*). Zo'n serie lessen moet nauwkeurig in het werkplan opgenomen worden, omdat het hier gaat om een periode van enkele wéken wiskundeonderwijs. Het werk op *nivo 3* is daarom ingrijpender dan dat van *nivo 2*. Je bent genoodzaakt een duidelijke keus te maken: er moet immers goed overwogen worden wat het programma vervangt binnen je eigen metode. Het rendement van zo'n serie is te verhogen door samen met een begeleidingsdienst of pedagogische akademie een bijeenkomst te beleggen over de mogelijkheden van de serie.

Verschillende akademies en diensten geven voorlichtingsbijeenkomsten als daar behoefte aan is. In verband met het radioprogramma *'De kamping'* zijn daar goede ervaringen mee opgedaan. Toch is, in het algemeen gesproken, ook voor dit nivo nog niet per se direkte hulp van buiten noodzakelijk!

nivo 4

Het gebruik van onderwijstema's ter aanvulling van de eigen metode. Evenals bij *nivo 3* zal, gezien de tijd die nodig is om zo'n tema te realiseren, een keuze gedaan moeten worden uit de eigen metode: wat laten we weg?

Toch is er een duidelijk verschil met het voorgaande nivo. Immers, het werken met en aan een tema vereist vaak een andere werkwijze in de klas. Veel meer dan bij de bovenstaande nivo's is de aanpak van belang. Dit geldt overigens niet voor alle tema's in even sterke mate.

Een ander verschil is, dat tema's niet veel voorkomen in rekenmetoden. Voor de produktie van werkbladen moet dus vaak zelf gezorgd worden. Hulp van buitenaf is derhalve gewenst bij de didaktische aanpak, maar ook om het produktieprobleem gemakkelijker op te lossen. Leerplanpublikatie 9[2]) geeft voor ieder leerjaar de mogelijkheid tematisch te werken.

met de groeten van de reus

Ter illustratie van hetgeen bedoeld wordt met een andere aanpak bij het werken met een tema, geven we een korte impressie uit het tema: *met de groeten van de reus.*

[1]) Zie voor een overzicht: wiskobas-bulletin, jaargang 5 nr 5/6, pag. 33 e.v.

[2]) Jong, R. de: (ed.): *'Oppervlakte (2)'*, *iowo*, utrecht 1978.

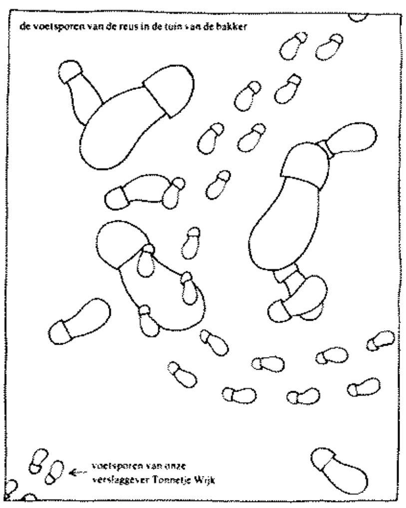
In dit tema voor het tweede/derde leerjaar van de basisschool wordt een reus ten tonele gevoerd. De hand van de reus heeft een afdruk op het bord achtergelaten. Deze afdruk wordt vergeleken met (de oppervlakte van) de handafdruk van juf om een schatting te krijgen van de grootte van de reus. Al doende krijgen de leerlingen o.m. inzicht in het feit, dat wanneer bijvoorbeeld de lengte vier keer zo groot wordt, de oppervlakte vier maal vier keer zo groot wordt.

In de derde les is ontdekt dat de reus graag boterkoeken lust, uiteraard is er dan sprake van reuzekoeken.
De bakker die voor reuzekoeken zorgt, ziet in zijn tuin vreemde voetstappen:

VREEMDE SPOREN **DE REUS 2**

In de tuin van bakker Korstbrood zijn vreemde voetstappen gezien.
De bakker vindt het maar vreemd dat allerlei onbekende mensen in zijn tuin rondlopen.
Wie helpt bakker Korstbrood bij het oplossen van de volgende vragen?

- ▶ Hoeveel verschillende mensen hebben in de tuin gelopen?
- ▶ Wie kan er meer vertellen over die voetstappen? Van wie zouden ze zijn?
- ▶ Wie was het eerst in de tuin? De reus misschien?
- ▶ Welke voetstap wordt vermist? Is die van een rechter- of van een linkerschoen? Waar zou die voetstap zitten?



Wie de bakker helpen kan, moet hem maar een briefje schrijven.

In zo'n tema komen meer aspekten van het reken/wiskundeonderwijs aan de orde. Bij werkblad 2 gaat het behalve om oppervlakte, ook om verhoudingen, en taal en logika.

Vanuit de gestelde opdrachten zal duidelijk zijn dat de onderwijsgevende terughoudend moet zijn. Het redeneren van de kinderen en de ambities bij het opsporingswerk kunnen anders verstoord worden.

nivo 5
Zelf zorgen voor veranderingen van oefenvormen. Ter illustratie nemen we het artikel over het gebruik van tabellen als uitgangspunt.[1]

tabellen

In dit artikel wordt gewezen op de efficiënte manier van oefenen door middel van tabellen. Bovendien staat er:
'Belangrijker nog dan deze efficiency-overweging, vinden wij dat werken met tabellen niet alleen vaardigheidsverhogend werkt, maar dat daarbij van de leerlingen een hoge mate van inzicht in de struktuur van de getallenwereld wordt verlangd.'
Als het invullen van een vermenigvuldigtabel geen probleem meer is, wordt nog eens precies naar de tabel gekeken. Zo komen o.m. de volgende problemen aan bod:

- '

x	1	2	3
2	2	4	6
4	4	8	12
6	6	12	18

welke eigenschap veroorzaakt de symmetrie? (denk aan 2 x 3 = 3 x 2)'

- '

x				
3	6		18	
	8			28
		25		
		30		42

Algemeen blijkt dus, dat een vermenigvuldigtabel ook als deeltabel geïnterpreteerd kan worden, door randgetallen weg te laten.
De omgekeerde relatie tussen de bewerkingen vermenigvuldigen en delen, komt daarmee nadrukkelijk onder de aandacht van de leerlingen.'

- 'De twee-bij-twee-tabel kan ook als 'model' dienen bij het niet-cijfermatig berekenen van het produkt van twee getallen.
Bijvoorbeeld 12 x 13:

		12	
	x	10	2
13	10	100	20
	3	30	6

dus 12 x 13 = 156.'

[1]) Streefland, L.: *'Tabellen'*, wiskobas-bulletin, jaargang 6 nr 5/6.

- Onderweg naar de algebra in de brugklas (merkwaardige produkten):

'$(a + 2b)(2a + b) \Rightarrow$

$\times$	a	$2b$
$2a$	$2a^2$	$4ab$
b	ab	$2b^2$

$\Rightarrow 2a^2+5ab+2b^2$.'

Op basis van zo'n publikatie moeten de spullen zelf nog ontworpen en geproduceerd worden. Hierbij dient gelet te worden op de moeilijkheidsgraad voor het betreffende leerjaar. Om een lijn aan te geven van gemakkelijk naar moeilijk, is de eigen ervaring bij het oplossen van tabellen van belang.
Voor er per leerjaar goed bruikbare werkbladen ontstaan zijn, die ook nog een beetje op elkaar zijn afgestemd, moet er heel wat werk verricht worden. Hulp is hierbij dan ook zeer gewenst.

nivo 6

Vervanging van een deelleergang die in de metode onvoldoende aandacht krijgt. Zo'n vervanging tast dus niet het wezen van de metode aan.
We denken hierbij aan een onderwerp als oppervlakte. In de meeste bestaande metoden is slechts heel weinig over dit onderwerp te vinden. De kant van de begripsontwikkeling wordt veelal sterk verwaarloosd.
Met behulp van bestaande publikaties over dit onderwerp, is nu zo'n deelleergang voor de hele basisschool te vervangen. Toch is ook deze vervanging geen eenvoudige zaak. Een korte heroriëntering is hierbij zeker noodzakelijk. We denken aan een kursus van zes avonden van twee uur (6 x 2-kursus). In zo'n zogenoemde 6 x 2-kursus staat het praktisch werken in de klas centraal. Belangrijke ervaringen voor de onderwijsgevenden zijn:

- Wat is mogelijk met zo'n onderwerp?
- Hoe belangrijk is zo'n onderwerp – vertaald in aantal lessen per leerjaar –?
- Hoe lossen we allerlei problemen op en wat kunnen we in onze klassen verwachten?
- Op welke wijze kunnen we – didaktisch gezien – bepaalde werkbladen en aktiviteiten het best aanbieden?
- Het uitproberen in de eigen klas van losse ideeën om ervaringen op te doen.
- Het uitzoeken van materialen en het vermenigvuldigen ervan ten behoeve van de eigen klas.
- Hoe komen we met zo'n onderwerp tot een werkplan voor de hele school?

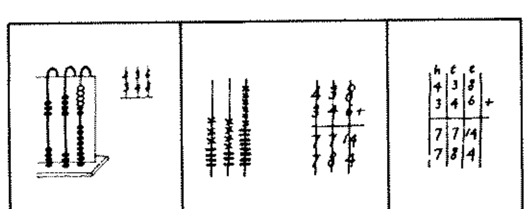
Nivo 6 is daarom voor een groot deel van de scholen onhaalbaar. Hulp van buiten is in ieder geval onontbeerlijk.
De meeste diensten en akademies zijn bovendien op dit moment niet voldoende toegerust om deskundige hulp te bieden.
De genoemde 6 x 2-kursus is pas onlangs door het *iowo* ontwikkeld en verkeert thans in een eksperimentele fase, zodat ook vanaf die kant nog geen direkte steun is te verwachten.

nivo 7

Ter verbetering van je onderwijs wordt een kernleergang vervangen.
Dit betekent een totale verandering van de aanpak in de metode. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het gebruik van de abakus [1]) voor het aanleren van het cijferend optellen en aftrekken (het optel- en aftrekalgoritme).
De onderwijsgevende zal dit niet verantwoord, zonder hulp van buiten, kunnen aanpakken. Via heroriëntering kan men een idee krijgen hoe met het nieuwe leermiddel te werken. Ook observaties van leerlingen, om te kijken hoe ze met het aanleren van de algoritmen bezig zijn, zijn nodig.
Wil het werken met de abakus goed tot z'n recht komen, dan moet de onderwijsgevende zélf een optel- en aftrekprogramma kiezen. Dit betekent veelal dat het optellen en aftrekken uit de metode vervangen gaat worden. Is het algoritme op deze manier aangeleerd, dan is het natuurlijk best mogelijk alsnog oefenstof uit de metode te halen.

abakus

Ter illustratie tonen we uit leerplanpublikatie 6[1]) de aanpak van het optelalgoritme met behulp van de abakus.



abakus positiestrepen positiekaart gewone algoritme

Bij het aanleren in de beginfase wordt zelfgekozen oefenstof aanbevolen!

[1]) Zie: Leerplanpublikatie 6: *'De abakus'*, *iowo*, utrecht 1977.

Het aanleren van optellen en aftrekken is in het tweede en derde leerjaar aan de orde. Een andere aanpak hiervan heeft echter ook konsekwenties voor de hogere leerjaren. Het hele schoolteam dient dus op de hoogte te zijn van deze manier van werken. Al met al niet eenvoudig. Misschien te realiseren met behulp van een korte kursus.

nivo 8

Het hoogste nivo van werkplanontwikkeling voor dit nieuwe vak is nauwelijks te realiseren. Immers, zelf een volledig programma voor de school maken, is een (te) zware taak. Zelfs het gedeeltelijk vervangen van de metode geeft al heel wat werk en problemen. De meeste scholen komen wat dit betreft ook niet verder dan *nivo 4*. Sommige scholen die in een zeer gunstige situatie verkeren, komen nog wel eens wat verder.
Echter, ook binnen die eerste nivo's is al heel wat goeds tot stand te brengen. Laten we dit niet onderschatten!

▶ **KONSTRUKTIEVE ANALYSE (3)**

In het voorgaande bleef de wijze waarop men verantwoord een nieuwe metode ter vervanging van de oude kan kiezen – het zogenoemde *konstruktief analyseren van metoden* – volledig buiten beschouwing. Op deze problematiek zullen we in de toekomst zeker ingaan. Thans volstaan we met een verwijzing naar de katernen van het wiskobas-bulletin, waarin allerlei metoden besproken worden.

Overigens zal ook, indien men een metode gekozen heeft, de kwestie van de onderwijsontwikkeling zoals hier geschetst, aktueel blijven: zelfs die nieuwe metode zal niet in alle opzichten toegesneden zijn op het onderwijs van de eigen school.

In een volgende aflevering zullen we beschrijven op welke wijze schoolteams met deze werkplanontwikkeling aan de slag gegaan zijn.

gesprekken met kinderen

BEWUSTMAKINGSMOMENTEN (2)

In een vorig artikel[1]*) hebben we u uitgenodigd het verslag van het gesprek te bekijken op bewustmakingsmomenten.*
U weet het misschien nog wel: het ging om de afmetingen van de ruimbagage die een reiziger op een interkontinentale klm-*vlucht mag meenemen – de som van lengte, breedte en hoogte van één stuks ruimbagage mag niet meer bedragen dan 158 cm –.*
De vraag luidde:

▶ *Als je binnen de bepalingen van de* klm *zoveel mogelijk bagage mee wilt nemen, welke afmetingen kan je koffer dan het beste hebben?*

In het gesprek met Mirjam (vierde klas basisschool), Sandra (zesde klas basisschool) en Thera (tweede klas mavo*) bleek het bijvoorbeeld nodig, het begrip inhoud, dat nieuw was voor Mirjam, ook nog eens op te halen voor de andere twee. 'Hoeveel kun je in de koffer stoppen? hoe kun je dat uitrekenen? hoeveel legoblokjes kunnen erin? hoeveel liggen er op de bodem?', waren vragen die beoogden de kinderen bewust te maken van hetgeen ze doen, wanneer ze de formule* l x b x h *banteren.*

In het volgende gesprek zullen we ons weer op bewustmakingsmomenten richten. Tevens zullen we aangeven welke momenten wij als zodanig beschouwen.

LOUIS GILISSEN
JOOST KLEP

1) Zie: jaargang 7 nr 4, pag. 23 e.v.

hoe laat is het?

We hebben ons oog laten vallen op het werkblad *de klokkenwinkel* uit het schoolradioprogramma *'De kamping'.*[1])

We werden vooral geïntrigeerd door het redeneerprobleem:

▶ Er zijn precies drie klokken die de juiste tijd aangeven. Het is dus ... uur.

De tekst bij het betreffende werkblad luidde:

> 'Het zou de moeite waard zijn om ook in het vierde, vijfde en zesde leerjaar eens na te gaan in hoeverre de leerlingen beide redeneerproblemen kunnen oplossen, zonder dat we ze van tevoren op het spoor zetten via het noteren van alle tijden van de klokken afzonderlijk. Afgezien van de doelstellingen van het klokkijken op zich natuurlijk, zullen de kinderen van de derde klas het redeneerprobleem zeker niet aankunnen zonder de kloktijden afzonderlijk te noteren.'

strategieën

We nodigen u uit, alvorens verder te lezen, eerst zelf beide redeneerproblemen op te lossen, en te proberen vanuit uw eigen oplossingsstrategie te voorspellen hoe kinderen uit een derde klas deze opdracht te lijf zullen gaan.

Misschien is uw strategie ten aanzien van het eerste probleem wel een van de volgende:

- de tijden van de klokken *a* tot en met *o* opschrijven en van bovenaf bij elke tijd kijken of deze ook bij een andere klok staat;
- het lijstje met tijden opschrijven en 'op zicht' — wat minder systematisch — de drie gelijke tijden eruit halen;
- helemaal geen lijstje maken, maar systematisch (analoog aan de eerstgenoemde strategie) de drie klokken die op dezelfde tijd staan, opsporen;
- niets noteren en analoog aan de tweede genoemde strategie de drie gelijke standen eruit halen.

Onze strategie was de laatste: kijken naar de klokken en letten op dezelfde konfiguratie van de wijzers; een (hoewel misschien wel wat primitieve) meetkundige aktiviteit.

We hadden er eerlijk gezegd geen idee van hoe kinderen uit een derde klas deze problemen zouden oplossen. Wel vonden we de uitspraak in het hierboven vermelde citaat aan twijfel onderhevig.

Het leek ons daarom de moeite waard dit werkblad met een viertal kinderen uit het begin van het derde leerjaar te bespreken en direkt op het eerste redeneerprobleem in te gaan, zonder eerst het lijstje met de tijden te laten maken.

We besloten nog geen aandacht aan de digitale (*tv*-gids-)notatie te besteden, maar er pas op in te gaan als daar aanleiding toe zou zijn.

We voeren een gesprek met Astrid, Janneke, Maaike en Maarten uit de derde klas van de basisschool *de grote lier* te molenhoek. De vier kinderen kunnen volgens hun onderwijzer klokkijken.

Zoals we in de inleiding hebben aangekondigd, zullen we in de beschrijving van het gesprek aandacht besteden aan bewustmakingsmomenten, maar tevens interesseren we ons natuurlijk voor de oplossingsstrategieën die de kinderen, meer of minder systematisch, spontaan kiezen.

gesprekje

Als instap kiest Louis een kort gesprekje over een klokkenwinkel.

.... 'Ben je al eens in zo'n winkel geweest? Lopen alle klokken daar gelijk? Wat een getingel zou het zijn, als al die klokken gelijk zouden slaan. Hier heb je een foto van een etalage van een klokkenwinkel. Lees eens wat die trol daar rechtsbeneden zegt?' (Louis) ....

Astrid leest voor. Het blijkt nodig de bedoeling nog eens duidelijk uit te leggen. De kinderen gaan aan de slag. Janneke zegt direkt, zodra ze

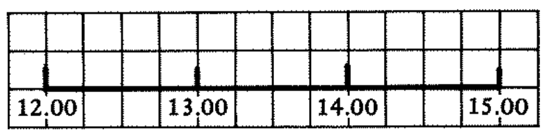
---

[1]) Zie: Leerplanpublikatie 8: *'De kamping'*, *iowo*, utrecht 1978, pag. 48-49.

het werkblad voor zich krijgt, dat je zeker moet opschrijven hoe laat het is, maar net als de anderen kijkt ze toch naar de klokken en begint ze naar paren te zoeken.
Erg snel nadat eerst enkele tweetallen klokken met dezelfde tijd erop zijn gesignaleerd, vindt Janneke juichend de drie klokken en even later hebben de andere kinderen ze ook opgespoord.
Ze noteren: zeven uur.

tweede probleem
Wat optimistisch geworden door deze snelle oplossing durft Louis het tweede probleem aan de orde te stellen: twee klokken geven de juiste tijd aan en twee klokken lopen precies een kwartier voor.
We praten eerst nog even over 'vóórlopen':
.... 'Als jouw horloge, Maarten, een kwartier voor zou lopen, hoe laat zou het dan op jouw horloge zijn? Het is nu drie uur.' (Louis)
'Kwart over drie.' (Maarten, direkt) ...
Even later schrijft Maarten 'kwart voor twaalf' op zijn werkblad. De overige kinderen komen niet op gang. Maarten pakt, als enige, deze opdracht net zo aan als het vorige probleem, hij trekt alleen de verkeerde konklusie. Louis besluit te gaan sturen. Kennelijk verloopt dit niet zoals daarnet, daarvoor is het probleem te kompleks. Er zal genoteerd moeten worden. Louis stelt dan ook voor:
.... 'Schrijf eens wat op, zou je dat niet verder helpen?' ....
Even later:
.... 'Schrijf al die tijden eens op.' ....
Als de kinderen aan de slag gaan, blijken sommige klokken problemen op te leveren.
Janneke kan klok *a* niet lezen. Maarten duidt voor haar een verdere verdeling van de wijzerplaat aan met hele dunne potloodstreepjes en nu kan Janneke het wel.
Maaike wordt door Maarten geholpen bij klok *f*.
.... 'Je moet naar de drie kijken', zegt hij. ....
Bij klok *i* vraagt Janneke:
.... 'Is het nou half elf of half twaalf?' ....
Omdat Janneke klok kan kijken, besluit Louis tot een 'leerduwtje door bewustmaking' aan de hand van de volgende vragen:
.... 'Waar staat de kleine wijzer?' (Louis)
'Tussen 11 en 12.' (Janneke)
'Is het dan vóór of ná elf uur?' (Louis)
'Na elf uur, dus is het half twaalf.' (Janneke) ....
Maarten heeft thuis een klokradio, daarom is hij in staat de tijden digitaal te noteren. Hij doet dat ook op advies van Louis.
De andere drie hebben problemen met klok *j*; 14.45 staat erop.
Janneke weet wat 14.00 uur is: dat is twee uur na 12.00 uur.
.... '14.45, is dat 45 minuten vóór of ná twee uur?' (Louis)
'Na', zeggen de kinderen.
'60 minuten en 60 minuten min 40 minuten is 20 minuten en dat nog min 5 is 15 minuten.' (Astrid)
'Dus 15 minuten vóór drie.' (Louis) ....

tijdbalk
Ook door middel van deze vragen probeert Louis de kinderen bewust te maken van dingen die ze al weten om daarmee het probleem de baas te worden. Om helemaal zeker te zijn haalt hij er een tijdbalk bij op ruitjespapier (vier ruitjes – één uur):



.... 'Dat lijkt wel een klokradio.' (Maarten)
'In een klokradio loopt zo'n soort papiertje achter een raampje, zou je kunnen zeggen. Maar hier loopt een tijdmannetje langs het lijntje en waar hij is, zó laat is het.' (Louis) ....
Met behulp van het tijdmannetje worden de halve uren (30 minuten na 12.00, 13.00 uur) en de kwartieren (15 en 45 minuten na het hele uur) door de kinderen ontdekt. Dan wordt 14.45 door de kinderen vertaald in kwart voor drie.

opnieuw de tweede vraag
Als de kinderen hun lijstje af hebben, wordt de tweede vraag van de trol opnieuw gesteld. De lijst gaat nu fungeren als middel tot de oplossing.
.... 'Er zijn er twee met zes uur', zegt Maaike, 'die zouden het kunnen zijn.'
'Op welke tijd moeten de andere klokken dan staan?' (Louis)
'Kwart vóór of kwart over zes.' (Maaike)
'En als ze voor moeten lopen?' (Louis)
'Dan kwart over zes', zegt Maaike. ....

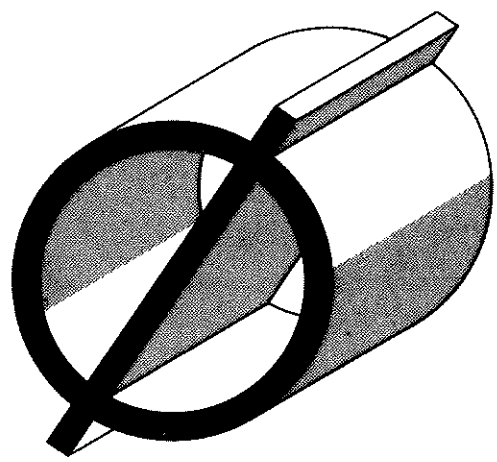
Janneke heeft twee klokken gevonden die op zeven uur staan, ze zoekt naar twee klokken die kwart over zeven aangeven.
Astrid zet kruisjes bij de klokken die het niet zijn.
Janneke:
.... 'Ik heb ze: half twaalf en kwart voor twaalf.'....

De gevolgde strategie, die door de vragen van

Louis al wat gesuggereerd was, verloopt als volgt: in de lijst worden paren opgespoord en bij elk paar wordt een passend ander paar gezocht.
Aan het eind van de les moet nog even worden vastgesteld of het nu half twaalf of kwart voor twaalf is, maar na een korte herhaling van het gesprekje over 'kwart voor' en 'kwart over' komen we daar ook uit.

nawoord
Een ons inziens verrassend gesprek. Het eerste redeneerprobleem werd zonder haperen door alle vier de kinderen op meetkundige wijze opgelost.
Het tweede redeneerprobleem werd niet op dezelfde manier aangepakt. Naar aanleiding van de suggestie van de gespreksleider gingen ze noteren. Er werd niet erg systematisch gezocht naar twee bij elkaar behorende paren. Achteraf bezien had deze zoekmetode ook toegepast kunnen worden, wanneer ze van de getekende klokken waren uitgegaan.
Bewustmakingsmomenten ontstonden bij het bewustmaken van al aanwezige inzichten en kennis, benodigd om tot de beantwoording van vragen en tot de oplossing van tussenproblemen te komen; met name op het terrein van het klokkijken en noteren.
In tegenstelling tot het bij het werkblad vermelde kommentaar, lijkt het wél mogelijk dat kinderen zonder noteren tot de oplossing van het eerste probleem komen en misschien ook wel tot de oplossing van het tweede redeneerprobleem.

wiskundige wereld-oriëntatie

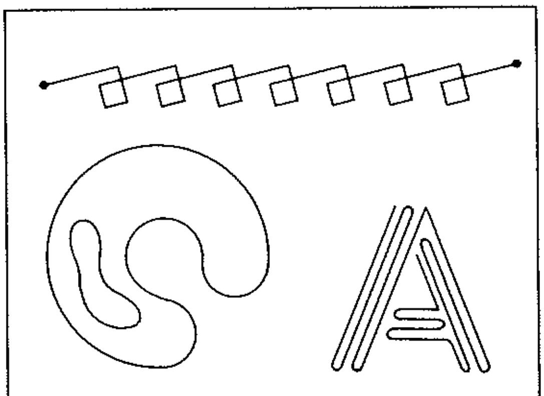


DOOLHOVEN, OFWEL: OPEREREN IN TOPOGRAFISCHE STRUKTUREN

In dit artikel wordt een beschouwing over doolhoven gegeven. Soorten doolhoven en hun essentiële kenmerken komen daarbij o.m. ter sprake. We trachten de plaats van doolhoven binnen het kader van de wiskundige wereld-oriëntatie te bepalen. Zo zijn we bijvoorbeeld geïnteresseerd in de vraag of je al dan niet in een doolhof geweest moet zijn om doolhofproblemen te kunnen oplossen.

JAN VAN DEN BRINK

lijntrekken
Kenmerk van het traditionele doolhof is het *lijntrekken.* Een gegeven lijn moet bijvoorbeeld worden gevolgd, tussen een lijnenspoor moet een derde lijn getrokken worden, enz. Het is daarom niet verwonderlijk dat we in het eerste leerjaar doolhoven gekoppeld hebben aan het technisch schrijven van letters en getallen.



▶ *Overtrekken.*

fig. 1

Maar is het lijntrekken de enige aktiviteit die kinderen met doolhoven kunnen uitvoeren?

andere kenmerken
Allerlei wiskundige facetten zitten in doolhoven verborgen. We noemen:

- *Open of gesloten circuits*, zoals die in fig. 1 aan de orde komen.
  En daarmee samenhangend:
- *Problemen van bereikbaarheid*, die een wezenskenmerk van doolhoven vormen.
- We wijzen op de *driedimensionale* doolhoven, waarbij gangen onder en over elkaar heen liggen en soms gedeeltelijk onzichtbaar zijn (fig. 2).[1]
- We noemen de *taaloefeningen*, waarin de leerlingen personen moeten verbinden die via de telefoon met elkaar praten (fig. 3).

mechanismen
Het belangrijkste wiskundig-didaktisch facet van doolhoven is echter het *operatoire karakter*. Steeds wordt gevraagd een beweging uit te voeren of voor te stellen in een *statisch* plaatje.
Kinderen worden gekonfronteerd met vragen als:
.... 'Nu heb ik dit punt bereikt, hoe verder?' ....

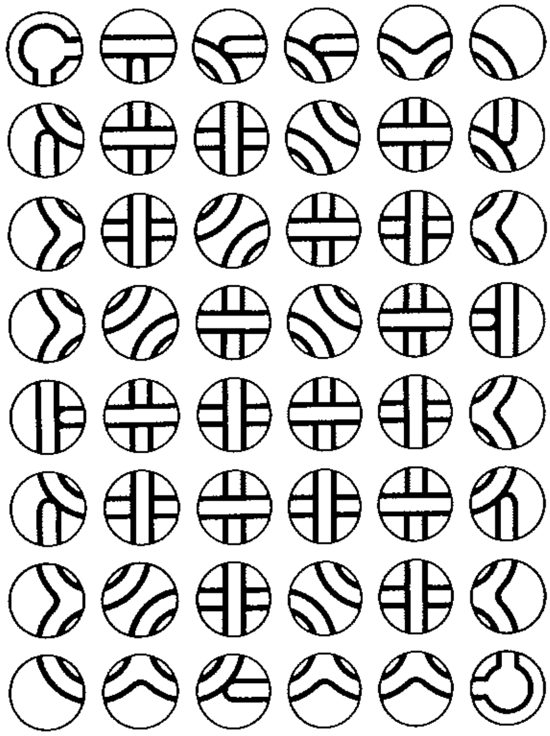


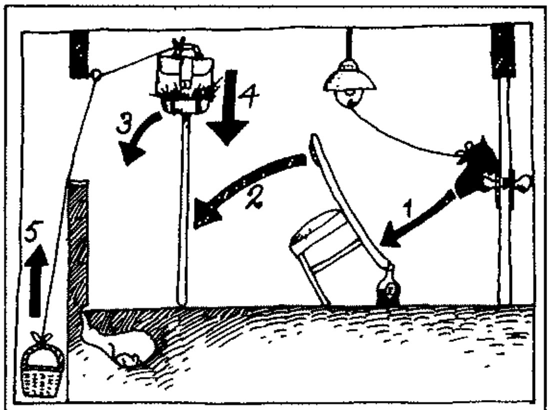
fig. 2

▶ *Wie spreekt met wie?*

fig. 3

En:
.... 'Mag ik ook vanaf het eindpunt starten?'
'Even proberen of ik die kant op kan.' ....
Kortom: allerhande vragen over *bewegingen*. Daarom hebben we gemeend ook mechanismen in dit artikel te moeten betrekken.

[1]) Dit voorbeeld komt uit: Fuller, R.: *'Amazement 2'*, palo alto 1978, *usa*.



▶ *Vertel eens wat er gebeurt.*

fig. 4 [1]

In mechanismen is de ene beweging de oorzaak van de andere, terwijl nog niet duidelijk is hoe het 'doolhof' van bewegingen zal uitpakken.

Het doolhof is als het ware nog verborgen. Het is wel al te voorspellen.

> De overdracht van bewegingen in deze mechanismen doet onwillekeurig denken aan de transitiviteitseigenschap, die voornamelijk in statische proefsituaties is onderzocht en te moeilijk bevonden voor jonge kinderen.[2]
> We zouden meer aandacht aan het operatoire in deze proeven moeten besteden.

In al deze grafische strukturen gaat het voortdurend om het operéren.
Vandaar de ondertitel van dit artikel: *opereren in topografische strukturen.*

topografische strukturen en wiskundige wereldoriëntatie

In deze rubriek – *wiskundige wereldoriëntatie* – zijn we vooral geïnteresseerd in verbanden tussen topografische strukturen en ervaringen van kinderen.

.... 'Moet je in een doolhof geweest zijn om er iets wiskundigs mee te kunnen doen?'
'Zijn er topografische strukturen die kinderen al goed kennen?'
'Of is een doolhof voor een kind niets anders dan een plaatje waarin je lijnen kunt trekken?'

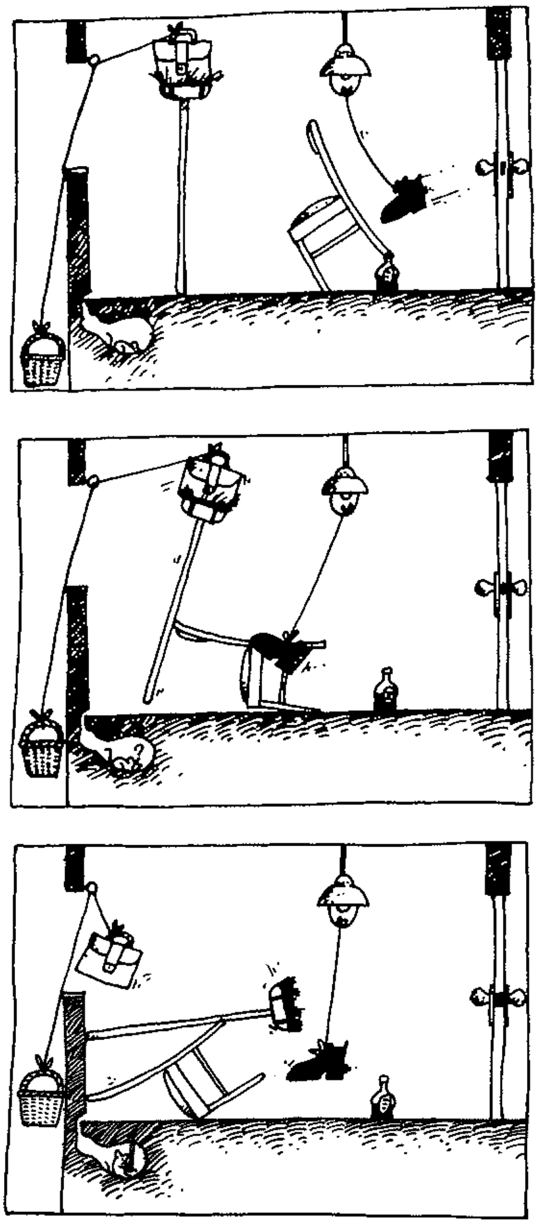


fig. 5

'Moet je voor de duidelijkheid doolhoven koppelen aan reële situaties?' ....

Ziehier een aantal vragen die we in gesprekken met kinderen nader hebben onderzocht. We zullen momenten uit deze gesprekken lichten die een uitbreiding kunnen vormen voor het denken over wiskundige wereldoriëntatie.

realiteitswendingen

Met 'realiteitswendingen' bedoelen we het door elkaar halen of vervangen van realiteiten, zoals dit bijvoorbeeld vaak bij poppenkastspel optreedt:

> Jan Klaassen weet de politieagent te overtuigen hem niet in de gevangenis te stoppen, omdat hij op school nog poppenkast moet spelen.

Dergelijke realiteitswendingen komen voort-

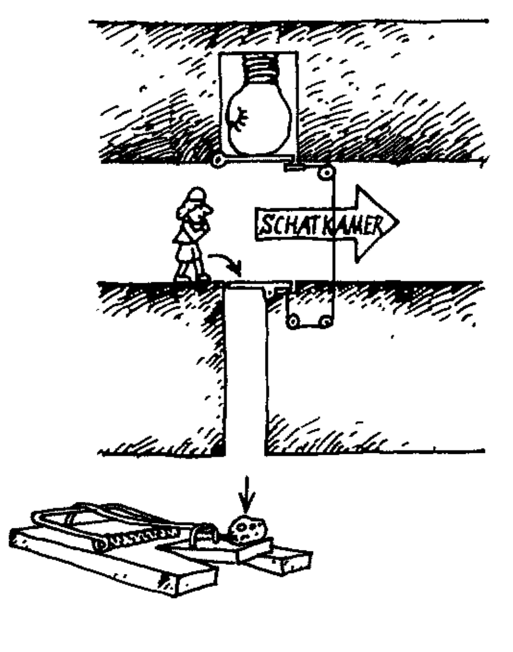
---

[1]) Dit plaatje komt uit het kinderboek van Paul Maar: '*Zeven dagen zaterdag*', Querido, amsterdam 1977. Het plaatje is aanleiding geweest tot een onderzoek naar mechanismen in ons wiskundeonderwijs.

[2]) Bryant, P.: *'Perception and understanding in young children'*, london 1974.

durend voor bij de beeldstrip die de beweging van fig. 4 in een aantal plaatjes vastlegt (zie fig. 5).

Het voorspellen na elk plaatje wat er verder zal gebeuren, wordt bemoeilijkt door 'verkeerde' interpretaties van het plaatje. Geleidelijk aan ontwerpen de kinderen het bewegingspatroon zodat ze met het plaatje van fig. 4 precies kunnen vertellen wat er gebeuren zal.
Eersteklassers kunnen zelf de pijlen in de tekening zetten. Sommige kleuters vertellen het verhaal omgekeerd: 'de mand gaat omhoog, want de tas valt, want ...'
Opvallend bij deze gesprekken zijn de realiteitswendingen: nu eens nemen de kinderen het bewegingsbeeld in beschouwing dat ze tot dan toe zelf hebben ontworpen, dan weer bekijken ze het plaatje op zich. Vaak zijn deze wendingen erg verrassend.



▶ *Teken pijlen.*

fig. 6

Dit plaatje bijvoorbeeld, leverde het volgende verrassende bewegingspatroon op. Eric en Marcia uit de eerste klas bekijken de tekening en vertellen precies wat er gaat gebeuren indien het mannetje doorloopt. Ze vinden er zelfs een uitbreiding op: het mannetje zou namelijk direkt naar de muizenval worden doorgestoten, terwijl aanvankelijk beide mechanismen apart werden bekeken.
Er wordt hard om deze onverwachte wending gelachen.

ervaring
Ervaringen spelen een belangrijke rol, zoals blijkt uit reakties van kinderen op doolhoven die sterke overeenkomsten vertonen met hun eigen wereld. Zo herkende een kleuter direkt de muizenval van oma in fig. 6.
.... 'Een muisje snoept van de kaas, dan gaat de boog, plats, heel hard klemmen', zegt hij. ....
Hoe het ding technisch werkt, interesseert hem eigenlijk niet.

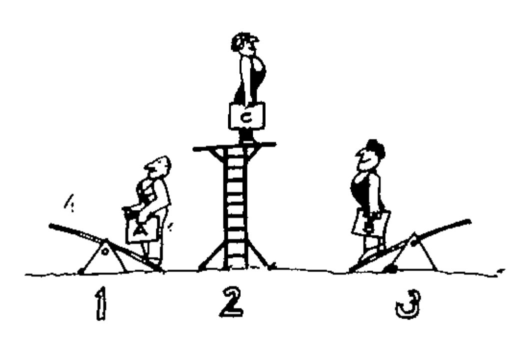
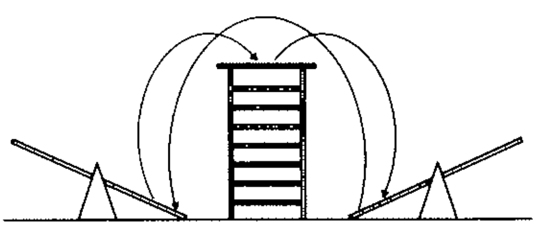
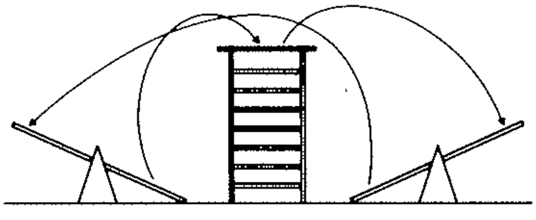


fig. 7

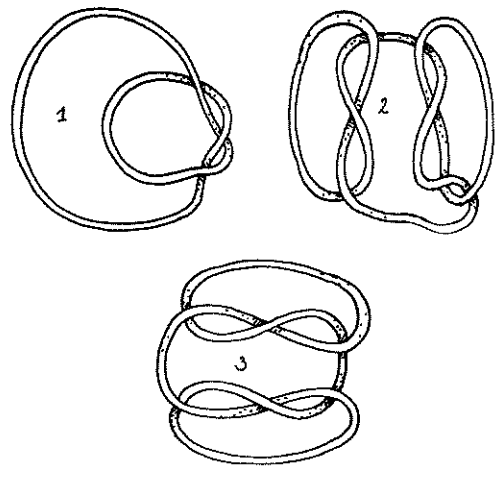
Ook bij de akrobaten valt dit op: kleuters weten wat er gebeurt, maar de bewegingsoverdracht door de wip beschouwen ze niet. Ze tekenen namelijk:



In tegenstelling hiermee hebben eersteklassers geen moeite met de bewegingsoverdracht bij de wippen:



Ook gebrek aan ervaring speelt de kinderen parten bij problemen over gesloten circuits in een huis, zoals: centrale verwarming, riool, waterleiding. Dergelijke gesloten circuits kunnen beter gekoppeld worden aan zaken die puur grafisch gegeven worden, los van interpretaties uit de realiteit (fig. 8).



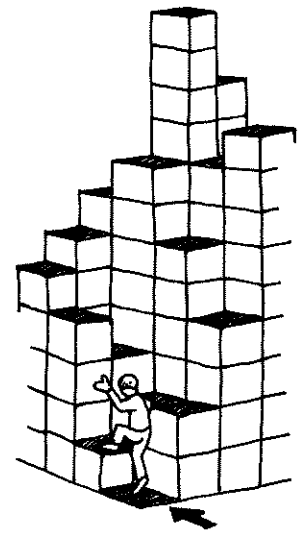
▶ *Hoeveel touwen in elke knoop?*

fig. 8

Anderzijds zijn ook in de kinderwereld geschikte doolhoven te vinden. In een panoramische tekening van enkele straten met winkels, zijn de stoepen en zebrapaden slechts voor een gedeelte te zien (zie de omslagtekening achterin dit bulletin).
Els doet boodschappen voor moeder.
.... 'Op de stoep blijven hoor, of op het zebrapad', waarschuwt moeder. ....
Kleuters herkennen direkt de situatie. Ze hebben ook geen moeite met het vinden van veilige roetes via bijna geheel verscholen zebrapaden en onzichtbare trottoirs achter een huizenrij.

driedimensionale doolhoven
Het doolhof van mollengangen onder de grond met hier en daar genummerde kamers, vormt een geheel eigen wereld.
De kinderen uit de eerste klas gaan meteen van start om de kamers in de gegeven volgorde te bezoeken. Ze glijden met hun vingers door de gangen die onder en over elkaar lopen. De leerlingen doen dit feilloos. Ze vergissen zich niet. En ze maken er een zacht zoemend geluid bij. Beklemtonen ze daar niet het operatoire karakter van doolhoven mee?
Bij het zoeken van wegen naar de top van een getekende blokkenberg (fig. 9), komen de aktiviteiten die de kinderen ondernemen op verrassende wijze overeen met sommige optimaliseringsmetoden.[1])

[1]) Zie bijvoorbeeld de gradiëntmetoden uit: Prof.Dr. De Leve: *'Mathematische programmering'*, amsterdam 1978, hoofdstuk 8.



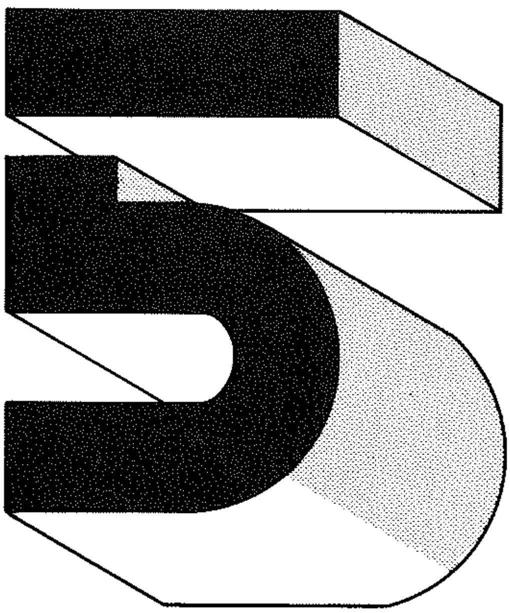
6	9	10	9	7	6	5	4	3
5	6	7	8	9	8	12	8	9
4	3	8	12	10	7	4	2	4
1	2	6	8	9	6	3	12	2
0	2	4	9	6	5	4	1	0

fig. 9

Ze onderzoeken bijvoorbeeld na elke stap, in welke richting en hoe groot de volgende stap zal zijn. Ze houden daarbij rekening met ravijnen en andere beperkingen.

tot slot
In veel van de hier besproken doolhofproblemen, bijvoorbeeld de gesloten circuits in een woning, is het beter niet aan te sluiten bij de ervaring van kinderen — zo die er al zou zijn —.
In andere problematieken kunnen we wél starten vanuit de ervaringen van kinderen. Bijvoorbeeld: de zebrapaden.
Ook zijn vraagstukken genoemd, waarin voorspellingen van kinderen juist van belang zijn voor het zich realiseren van bewegingspatronen.
Weer andere opdrachten tonen aktiviteiten die sterk overeenkomen met vragen uit een bepaald soort wiskunde. Doolhoven kunnen daar als illustrerend model dienen.
Binnen deze verschillende soorten 'realiteiten' (matematisch, psychologisch, didaktisch) kunnen we elk doolhofprobleem beoordelen.

spullenkatern



Toen we twee jaar geleden met de spullenkaternen begonnen, konden we niet vermoeden dat er zoveel belangstelling voor zou gaan bestaan, van zoveel verschillende zijden. Immers, zowel door opleidingen en begeleidingsdiensten, als door basisschoolteams, worden veel losse katernen nabesteld. Technisch zijn deze nabestellingen niet goed mogelijk — alleen volledige afleveringen worden geleverd —. Maar dit terzijde! We signaleren slechts het feit.
Natuurlijk konden we indertijd wél voorzien dat de katernen een eigen plaats zouden gaan innemen. Was er niet herhaaldelijk op aangedrongen dat wiskobas iets aan metodenvoorlichting moest gaan doen? De nood bleek echter hoger dan we op grond van de uitgeoefende aandrang takseerden.

INLEIDING (1)

Naast de grote (kwantitatieve) vraag, blijken de katernen ook (kwalitatief) te worden geapprecieerd. Uit telefoontjes, gesprekken met praktijkmensen en interviews, hebben wij tot nu toe veel waardering ondervonden voor deze artikelenreeks. Het geeft ons vertrouwen en moed met dit tijdsintensieve werk door te gaan.
In steeds mindere mate wordt aangedrongen op het uitspreken van een 'wiskobasvoorkeur', omdat de goede lezer zijn voordeel heeft kunnen doen met de tot nu toe gepubliceerde beschrijvingen én omdat het besef steeds duidelijker wordt, dat de keuze van een metode van zoveel randvoorwaarden afhangt, dat een *iowo*-fiat niet te geven valt.
De 'traditionele' metoden zijn in de eerste drie katernen (zesde jaargang) besproken. Duidelijk is geworden, met welke metode(n) het beste te werken is overeenkomstig de ideeën van wiskobas.
Van de twee metoden die we in het vierde katern wilden bespreken, viel er al één direkt af.[1]

De in dit katern besproken metode — *hoj! rekenen!* — hoort tot een andere (latere) generatie als de metoden *elementair wiskundig rekenen* en *ontdek het zelf. Hoj! rekenen!* hebben we ingedeeld bij de metoden van de twéédе generatie, d.w.z.: ontwikkeld in de zeventiger jaren.
Graag hadden we in dit katern ook nog een metode van de éérste generatie besproken: *wiskunde voor de basisschool*. Aangezien het laatste deeltje voor het zesde leerjaar op dit moment (eind augustus) echter nog niet verschenen is en we kennis van ál het materiaal noodzakelijk achten, stellen we de bespreking uit tot katern 6.

---

[1]) *Ontdek het zelf* werd uit de markt genomen. En terecht! Wel zagen we onlangs dat de uitgever er toch nog reklame voor maakte. Lijkt ons niet zoals het hoort!

HOJ! REKENEN! (2)

ED DE MOOR
ADRI TREFFERS

De opzet van de bespreking is de volgende:
Na een opsomming van de materialen waaruit de metode is samengesteld **(1)**, *vindt in de algemene inleiding* **(2)** *een globale karakterisering plaats.*
In **(3)** *wordt het rekenen uitvoerig aan de orde gesteld, en wel in een vijftal paragraafjes:*
- *getalbegrip, optellen en aftrekken* **(3.1)**;
- *vermenigvuldigen* **(3.2)**;
- *delen* **(3.3)**;
- *het overige traditionele rekenen* **(3.4)**;
- *verlevendiging van het rekenen* **(3.5)**;

In **(4)** *vindt een onderzoek plaats van de wiskunde in de metode. Ook hier weer onderverdeeld in een aantal paragraafjes:*
- *meten* **(4.1)**;
- *waarschijnlijkheid en statistiek* **(4.2)**;
- *meetkunde* **(4.3)**;
- *relaties, funkties, taal en logika* **(4.4)**.

Vervolgens worden de reakties van onderwijsteams kort samengevat **(5)**, *de reakties van uitgever (auteurs) weergegeven* **(6)** *en samenvattende konklusies geformuleerd* **(7)**.

▶ MATERIAAL (1)

samenstelling

Eerste leerjaar: één basisboek plus twee oefenboeken; één onderwijzersboek.
Tweede tot en met vijfde leerjaar: als bij eerste leerjaar.
Zesde leerjaar: één basisboek plus één oefenboek plus één onderwijzersboek (moet nog verschijnen) plus drie projektboekjes.
Antwoordenboekjes bij derde tot en met zesde leerjaar.
Eén overbruggingsboekje voor het eerste naar het tweede leerjaar, wanneer in het eerste leerjaar niet gewerkt is met *hoj! rekenen!*.
Een algemene toelichting.
Het materiaal voor het eerste tot en met derde leerjaar is verbruiksmateriaal (invulboekjes).
Daarna wordt in schriften gewerkt.

titel, uitgever en auteurs

Hoj! rekenen!, wiskundig rekenen voor de basisschool, amsterdam 1973, Meulenhoff Educatief.
Hoj! rekenen! (verder: *hr*) is een vrije bewerking van de zweedse metode *hej mathematik*, auteurs M. Håstad, L. Svensson en C. Öreberg.
De nederlandse bewerking is van Marijke van Beek, N.B. de Groot en J.H. Meijer.

hulpmateriaal

- Asco-denkblokken, ook wel logiblokken genoemd;
- Asco- of cuisenaire-rekenstaafjes;
- *mab*-materiaal;
- honderdveldjes met gekleurde steentjes;
- verder: hulpmateriaal als dobbelstenen, kanstolletjes, dominostenen, balans, maatglazen, geld, etc.;
- allerlei soorten papier.

uitvoering en prijzen

De uitvoering van alle basis- en oefenboeken, uitgezonderd de projektboekjes voor het zesde leerjaar, is in vierkleurendruk.
De lay-out doet ruim en prettig aan, vooral voor de onderbouw.
We begroten de eerste algemene aanschafkosten voor een zesklassige basisschool met 30 leerlingen per klas, op ca *f* 3400,– (inklusief leerlingenmateriaal).
Jaarlijks terugkerende kosten aan verbruiksmateriaal: ca *f* 1000,– (voor 180 leerlingen).

▶ ALGEMENE INLEIDING (2)

- *Hr* is een metode die tendeert naar de strukturele richting.[1]) Dit betekent dat heel wat onderwerpen verbonden zijn met de meer formele wiskunde van het voortgezet onderwijs. Als eerste voorbeelden noemen we de nogal ruime aandacht, die aan logika, relaties, verzamelingen, kansrekening en transformatiemeetkunde wordt gewijd. In sommige gevallen leidt dit tot heel interessante probleemstellingen, maar er zijn ook verschillende voorbeelden in het bizonder binnen de meetkunde te vinden, die tot een tamelijk formele en kale wijze van wiskunde leren en onderwijzen kunnen leiden.
- Vermeldden we zojuist dat '*hr* tendeert naar de strukturele richting', dan bedoelen we daar niet mee: *hr* behóórt tot die richting.
  Zeker valt de metode niet onder de 'New Math' (aritmetische richting), weinig treffen we aan van de empirische stroming (het meten komt er in de metode bekaaid af). Binnen het gebied van het traditionele rekenen zien we vele verlevendigingsaspekten, die zeer sympatiek aandoen. We noemen

[1]) Binnen het reken/wiskundeonderwijs worden naast het vigerende rekenonderwijs grofweg drie richtingen onderscheiden: de aritmetische richting (New Math), de strukturele richting en de empirische richting. Zie voor nadere omschrijving: Treffers, A.: '*Wiskobas doelgericht*', *iowo*, utrecht 1978, pag. 17 e.v.

hier alvast: rekenspelletjes, gebruik van tabellen en sliertsommen, waarover later meer.

Kortom, we zouden kunnen zeggen: een 'zacht-strukturele' metode, voorzichtig vooruitlopend op de formele wiskunde.

- Hoewel we de oorspronkelijke zweedse metode niet naast *hr* hebben gelegd, vermoeden we dat de toevoeging 'vrije bewerking' juist is. Dit leiden we o.a. af uit het feit, dat we her en der, maar vooral in de bovenbouw, duidelijke beïnvloedingen vanuit het wiskobasmateriaal aantreffen.
- Er zijn echter ook duidelijke verschillen tussen *hr* en wiskobas. Vooruitlopend op de inhoudelijke bespreking, noemen we een belangrijk verschilpunt.
  Zoals bekend verondersteld mag worden, stelt wiskobas zich op het standpunt, het getalbegrip in het aanvankelijk rekenen te starten vanuit het 'gewone' tientallige stelsel. Hierin nu verschilt de filosofie van *hr* in sterke mate. Immers, *hr* start elke nieuwe stap binnen het rekengebied in een andertallig stelsel. Soms hoort men voorstanders van de metode beweren (dit geluid komt vooral van begeleiders uit de diensten), dat alles met talstelsels ook overgeslagen kan worden, daar het cuisenaire- en *mab*-materiaal ook tientallig is te gebruiken. Dit lijkt ons echter strijdig met de zeer konsekwente opbouw, waarvoor men in deze metode heeft gekozen.
- Ook binnen de leerstofgebieden relaties en funkties, meetkunde, taal en logika, en waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, is een stapsgewijze opbouw te konstateren.
  Omdat de leerstofvlakken in *hr* zo duidelijk zijn aan te wijzen, zullen we straks proberen de tracés van deze gebieden afzonderlijk te bespreken.
- De organisatie van *hr* is via de handleidingen overzichtelijk gemaakt door een piktogrammensysteem, waardoor men steeds kan zien wat uit handleiding, basisboek en oefenboek bij elkaar hoort.
  De zelfwerkzaamheid kan gestimuleerd worden, mede door een geraffineerd systeem van zelfkontrole, waarbij bepaalde vraagstukken een omcirkeld nummer hebben, waarvan de antwoorden achterin het boek staan.
  Hoewel de onderwijzersboeken met zorg lijken samengesteld, beperken ze zich toch hoofdzakelijk tot aanwijzingen van stofinhoudelijke aard, opdat de leerkracht in ieder geval geen fouten kan maken met de nieuwe stof.
  Didaktische aanwijzingen beperken zich veelal tot het nivo van: 'Nu moet u regelmatig de tafels oefenen'.
- Richtlijnen voor periode-indelingen van de stof, de te geven lessen, afnamen van bijgevoegde toetsen, kunnen de beginnende onderwijzer wellicht tot steun dienen, hoewel de voorgestelde hoeveelheid stof soms rijkelijk veel lijkt in verhouding met de beschikbare tijd.
- Het is verheugend dat er geen matematische fouten zijn te ontdekken; wel wijkt enkele malen het taalgebruik wat af van de 'normale' wiskundetaal. Overigens dient vermeld te worden, dat redelijk gewaakt is tegen mogelijk verbalisme.
- De differentiatieproblematiek tracht men op te lossen door middel van nivodifferentiatie. Hierbij wordt weer gebruik gemaakt van piktogrammen: een zwarte sterke gewichtheffer staat voor de goede leerling, terwijl de wat zwakkere broeder het met een blauwe gewichtheffer moet doen, die het gewicht (nog) niet omhoog kan krijgen.

▶ **HET REKENEN (3)**

getalbegrip, optellen en aftrekken (3.1)

Gestart wordt met groeperingsopgaven, waarbij de verzamelingensymboliek – kringetjes en etiketten – gebruikt wordt. Gelukkig krijgt de zogenoemde verzamelingenleer [1]) bij het getalbegrip geen formele nadruk, zoals ook uit fig. 1 blijkt. [2])

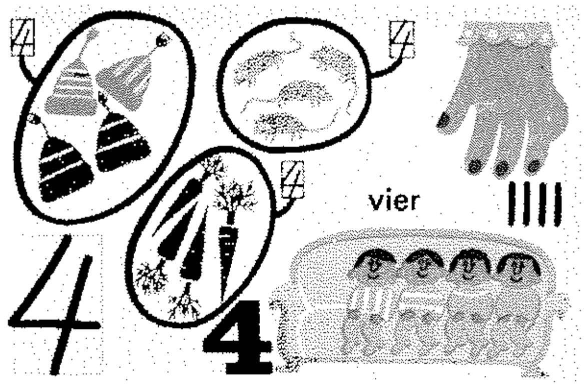


fig. 1

Door het groeperen krijgt het kardinaalaspekt (aantal) van het getal veel aksent, waardoor het ordinaalaspekt (telgetal) aanvankelijk enigszins verwaarloosd wordt. Wel zien we later een ruim gebruik van de getallenlijn.

---

1) Reeds in 1971 legde Freudenthal de matematische en matematisch-didaktische feilen van dit onderwerp bloot. Zie artikelen in de eerste nummers van het wiskobas-bulletin.

2) Helaas komt het kleurgebruik niet tot zijn recht in onze afbeeldingen.

Voorafgaande aan de groeperingsoefeningen, zijn de bekende 'meer-minder'-oefeningen aan de orde geweest bij het vergelijken van twee groepjes onder de één-één-relatie. Vaak worden echter objekten met elkaar vergeleken, die geen enkele verwantschap hebben (zie fig. 2).

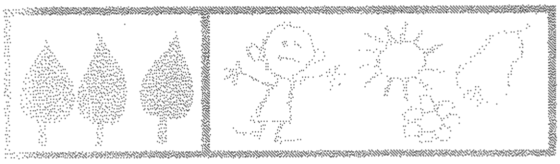


fig. 2

Hoewel de handleiding [1]) meedeelt, dat bewust gekozen is voor een afwijkende volgorde van het aanleren van de natuurlijke getallen (1, 4, 3, 5, 2, 0), missen we een argument daarvoor.
Later volgen de getallen en cijfers voor 6 tot en met 10 in de gewone volgorde [2]), daarna wordt verondersteld dat ook 11, 12, etc., bekend zijn.[3])
Na ruime en veelzijdige aandacht voor het splitsen van de getallen 1 tot en met 5, waarbij veelvuldig gebruik wordt gemaakt van het cuisenairemateriaal, en na voorbereidende oefeningen op talstelsels [4]), treffen we op pag. 56 van het basisboek de eerste talstelselproblemen aan (zie fig. 3) met behulp van cuisenairestaafjes.
NB: Voor degenen die onbekend zijn met talstelsels en cuisenairestaafjes: de bedoeling is dat 11 witte staafjes (enen) ingewisseld worden voor twee paarse (vijf) en één losse witte; genoteerd in het vijftallige stelsel als '21'. Dus $11_{(10)} = 21_{(5)}$.

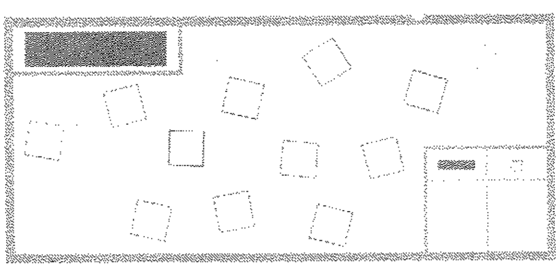


fig. 3

Bij de opbouw binnen het optellen en aftrekken, die tot in het vijfde leerjaar doorloopt, is heel konsekwent gekozen voor het principe dat elke nieuwe rekenstap voorafgegaan dient te worden door een analoge stap in een andertallig stelsel (kleiner dan tien). Steeds wordt daarbij ook eerst een handelingsnivo (het werken met cuisenaire-, later *mab*-materiaal) gewenst geacht.
Als argumenten hiervoor worden door *hr* aangevoerd:

- voorbereiding op de positionele schrijfwijze in het tientallige stelsel (overschrijden van tiental);
- kleine groepjes (3, 4 en 5) zijn gemakkelijker te overzien dan groepjes van 10;
- inzicht in het tientallige stelsel wordt versterkt door het voorbereidende werk in andertallige stelsels;
- cijferen in andertallige stelsels geeft een goed inzicht in het gewone tientallige cijferen.

Zoals bekend, stelt wiskobas zich in deze op een ander standpunt.[5])
Binnen de door *hr* gekozen opbouw kunnen we voor het optellen en aftrekken de volgende stappen onderscheiden:

– optellen tot 5; – optellen tot 10;	eerste leerjaar
– optellen tussen 10 en 20; – optellen over de 10; – optellen van een tiental met een aantal lossen (20 + 7); – optellen van een aantal lossen zonder inwisselen (45 + 32); – optellen van een getal van twee cijfers met een getal van één cijfer met inwisselen (23 + 9);	tweede leerjaar
– optellen van honderdtallen en tientallen (70 + 50); – optellen van getallen van één, twee en drie cijfers zonder inwisselen (372 + 423); – optellen van getallen van twee en drie cijfers met een getal van één cijfer met inwisselen (528 + 7); – optellen van twee getallen van twee en/of drie cijfers met inwisselen (46 + 38); – optellen van twee getallen van twee of drie cijfers met inwisselen van tientallen (272 + 44);	derde leerjaar

[1]) Deel 1, pag. 14.
[2]) Basisboek 1, pag. 49-53.
[3]) Basisboek 1, pag. 54.
[4]) Basisboek 1, pag. 32.
[5]) Zie voor uitgebreide informatie: Leerplanpublikatie 6: *'De abakus', iowo,* utrecht 1977.

- optellen van twee getallen van twee of drie cijfers met inwisselen van eenheden en tientallen (255 + 278);
- optellen van twee getallen van vier cijfers met inwisselen van eenheden, tientallen en honderdtallen (2574 + 1867);

} vierde leerjaar

- optellen van twee getallen van vijf cijfers met inwisselen van eenheden, tientallen, honderdtallen en duizendtallen.

} vijfde leerjaar

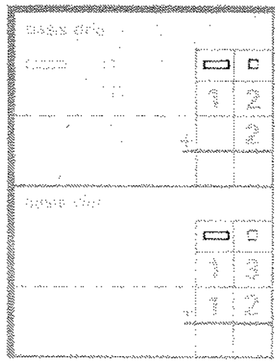


fig. 4*a*

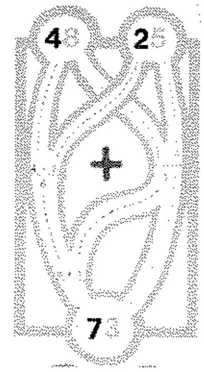


fig. 4*b*

Voor het aftrekken is een analoge opsomming te maken, zij het dat deze wat later ingezet wordt[1]); het verband tussen optellen en aftrekken wordt nóg weer later aangeboden.[2])
Fig. 4 laat zien hoe de strakke opbouw: 'talstelsel, gebruik van hulpmateriaal, hulpmateriaal gevisualiseerd, symbolische notatie, gewoon algoritme', is gerealiseerd.
Deze trits zien we bij alle stappen als een vast stramien terugkeren.
In fig. 4 is de stap voor twee getallen met alleen inwisseling van eenheden weergegeven.

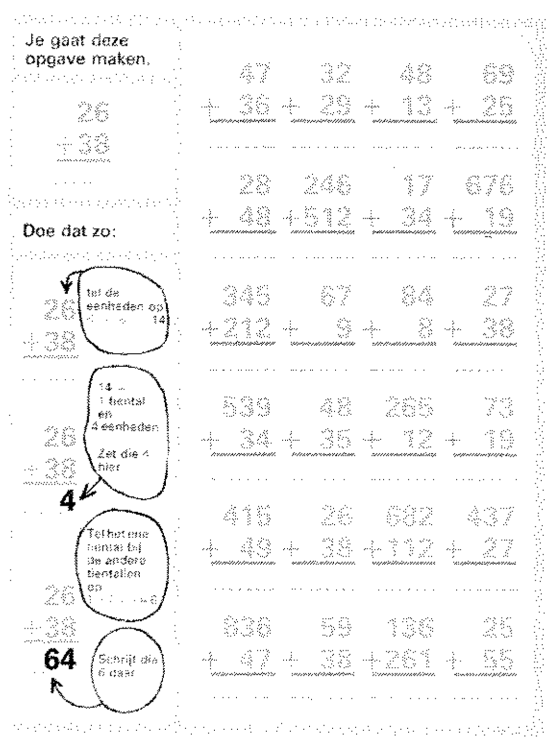
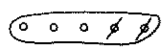
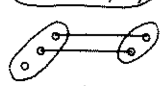
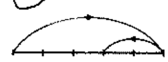


fig. 4*c*

Hoewel wij niet gelukkig zijn met de start vanuit de talstelsels en de abakus node missen, dient toch opgemerkt te worden dat binnen *br* zowel het optellen als het aftrekken veelzijdig is ingebed.
Zo ontdekken we voor de aftrekking de modellen:

- wegnemen  ;
- één-één-relatie  ;
- bewegen op de getallenlijn  .

En als 'vormen', waarin de aftrekking naar voren komt:
- machientjes;
- pijlensommen;
- afbeeldingen.

Tevens wordt gebruik gemaakt van diverse hulpmaterialen als cuisenaire en honderdveldje. (zie fig. 5).

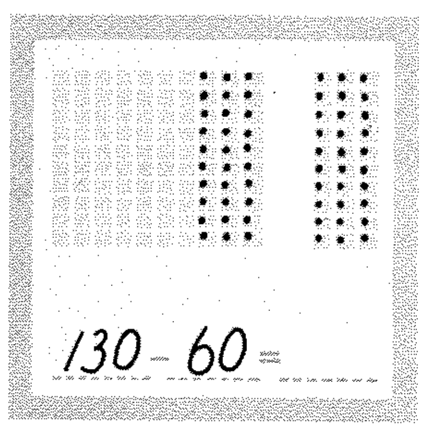


fig. 5

vermenigvuldigen (3.2)
Het vermenigvuldigen wordt reeds in het tweede leerjaar aangezet. Begonnen wordt met het samenvoegen van een aantal groepjes met een

[1]) Basisboek 1, pag. 75.
[2]) Basisboek 1, pag. 99.

gelijk aantal elementen. Er moeten nu heel wat etiketten ingevuld worden, zoals fig. 6 ons toont:

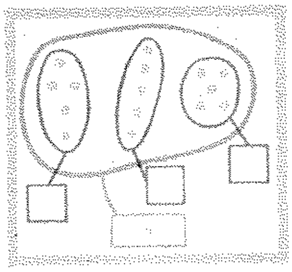


fig. 6

Daarnaast zien we het vermenigvuldigen als herhaald optellen. Tevens wordt de aanpak met het springen op de getallenlijn gebruikt. Terwijl we ook al een eerste aanloop tot het rechthoekmodel (x rijtjes van y objekten) zien. Zelfs komen al eenvoudige toepassingen voor:

> 'Carla, Linda en Jan gaan naar de film. Toegang *f* 4,–. Dat kost dus ... .'

En:

> 'Karel kookt 4 eieren in een grote pan. Ieder ei moet 5 minuten koken. Na ... minuten zijn de eieren klaar'[1]),

om het receptmatige nadoen van veel onderwijs te doorbreken.

Na deze voorbereidende oefeningen volgt vrij snel de kommutatieve eigenschap ($a \times b = b \times a$) van de vermenigvuldiging, waarvan nog vaak gebruik gemaakt zal worden. Zie hiertoe fig. 7.

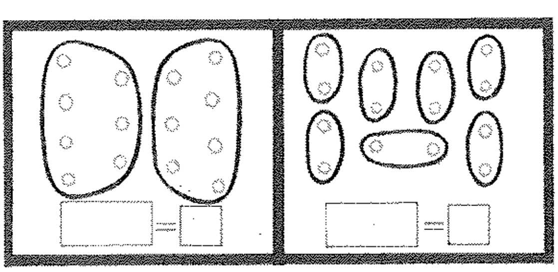


fig. 7

Daarna zien we een aanloop naar de tafels van één tot en met vijf, die later gememoriseerd dienen te worden, terwijl ook de overige tafels (zes tot en met tien) tot de basisstof van het tweede leerjaar behoren.
Bij het aanleren van de 'hogere' tafels wordt gebruik gemaakt van de distributieve eigenschap ($a\ (b + c) = ab + ac$)) en de kommutatieve eigenschap ($ab = ba$), al dan niet met behulp van visualiseringen (getekende of gelegde steentjes).
De metodiek hierbij is de volgende:

$$\begin{array}{ll} & 6 \cdot 8 = ? \\ 4 \cdot 8 = & 8 \cdot 4 = 32 \\ \underline{2 \cdot 8 =} & \underline{8 \cdot 2 = 16} \\ 6 \cdot 8 & \qquad = 48. \end{array}$$

De aansporing in de handleiding[2]) omtrent het inprenten van de tafels:

> 'Besteed hieraan vanaf nú, elke dag 10 minuten!',

is waarschijnlijk goed bedoeld, maar elke aanwijzing hoe dit te realiseren ontbreekt. Even wordt de mogelijkheid van het ingevulde honderdveld alsook van de tabel aangetipt, maar dit had zeker in de handleiding verder uitgewerkt moeten worden.
Tegen het eind van het tweede leerjaar wordt al direkt de verbinding met het delen gelegd, waarbij het vooral heel zinvol is de ontbindingen van een getal te zoeken door middel van het leggen van alle rechthoeken. Ook de logiblokken zijn in dit opzicht goed gebruikt met vraagstukken als:

> 'Er zijn 12 driehoeken in 2 diktes, dat zijn dus 2 • 6 = 12 driehoeken.'

Duidelijk is gekozen voor een aanpak van het vermenigvuldigen, waarbij eerst de basisfeiten (tafels) in het tweede leerjaar ingeprent worden, zoals we uit de verdere opbouw van het vermenigvuldigingsalgoritme, die tot in het vijfde leerjaar doorloopt, kunnen aflezen:

tweede leerjaar:
- voorbereidende oefeningen voor het vermenigvuldigen;
- kommutatieve eigenschap: $a \times b = b \times a$;
- tafels één tot en met vijf;
- tafels zes tot en met tien;
- distributieve eigenschap: $a \times (b + c) = ab + ac$;
- ontbinden;

derde leerjaar:
- vermenigvuldigen met tienvouden: $10 \times a$ $20 \times a$ etc.;
- vermenigvuldigen onder elkaar zonder 'onthouden' (getal van twee cijfers met een getal van één cijfer): 14×2;
- schematische aanpak:

5 • 61	5 • 1 =			5
	5 • 60 =	3	0	0
	5 • 61 =	3	0	5;

- idem 'onder elkaar';

[1]) Basisboek 2, pag. 48.
[2]) Pag. 52.

— idem met onthouden:

$$\begin{array}{r} 37 \\ \cdot\ 4 \\ \hline 148 \end{array}$$;

— getal van drie cijfers vermenigvuldigen met een getal van één cijfer in deelstappen:

$$\begin{array}{r} 198 \\ \cdot\ 4 \\ \hline 32 \\ 360 \\ 400 \\ \hline 792 \end{array}$$;

(vierde leerjaar)

— idem, maar dan met onthouden;

— vermenigvuldigen van een getal van vier cijfers met een getal van één cijfer:

$$\begin{array}{r} 4385 \\ \cdot\ \ \ 7 \\ \hline 35 \\ 560 \\ 2100 \\ 28000 \\ \hline 30695 \end{array}$$;

— vermenigvuldigen van een getal van twee cijfers met een getal van twee cijfers volgens het schema:

•	30 +	7	37 28
8	240 +	56	→ 296
+ 20	600 +	140	→ 740
			1036;

— idem drie cijfers met twee cijfers;

— idem vier cijfers met twee cijfers (ook met kommagetallen);

— idem vijf cijfers met één of twee cijfers.

(vijfde leerjaar)

Deze opbouw wijkt in de volgende opzichten af van de traditionele:

- Bij verschillende stappen wordt weer de voorbereidende stap in een lagertallig stelsel gedaan, hoewel dit in de hogere leerjaren steeds minder gebeurt. De stap 'vermenigvuldigen met tientallen' wordt aldus sterk benadrukt, waarbij gebruik gemaakt wordt van de associatieve eigenschap:
  $a(bc) = (ab)c : 5 \times 30 = (5 \times 3) \times 10 = 15 \times 10$ (tientallig).
- Tot in de hogere leerjaren blijft het *mab*- of cuisenairemateriaal, vooral getekend, zichtbaar (zie fig. 8).

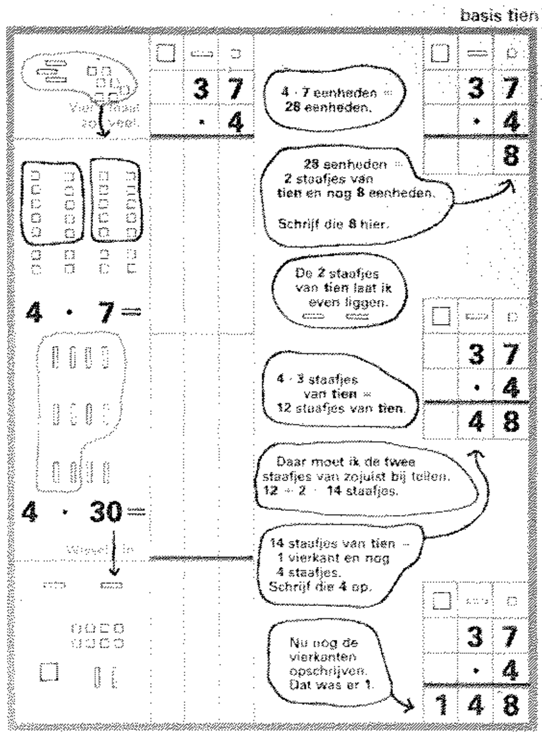


fig. 8

- Het gebruik van de tabelvorm om vermenigvuldigingen als 25 x 34 inzichtelijk aan te bieden.

Enkele *opmerkingen* over deze punten.
Wat betreft het werken met andere talstelsels, is wiskobas van mening dat dit voor het aanvankelijk rekenonderwijs onnatuurlijk en verwarrend kan zijn, maar dat het op zich genomen niet zo'n wezenlijk punt is.
De aanpak met het *mab*-materiaal echter, waarmee aanvankelijk konkreet gewerkt wordt en dat later getekend op de achtergrond blijft staan, heeft naar onze mening wel een essentieel nadeel. Of beter: tussen het werken met *mab*-materiaal en het opereren met getallen, ontbreekt één belangrijke schakel. En dat is de abakus, waarmee de inwisselproblematiek overzichtelijker voorgesteld kan worden dan met het *mab*-materiaal, omdat het abstrakter is en daardoor handzamer gebruikt kan worden bij het opereren met getallen. We geven dus niet de voorkeur aan de abakus boven het *mab*-materiaal, maar benadrukken dat zowel het een als — een vervolg op — het ander zinvol gebruikt kan worden.
Ook naar aanleiding van het derde genoemde punt — de tabel — nog enkele kanttekeningen over de vertikale planning. Deze tabel kan inderdaad uitstekend gebruikt worden voor vermenigvuldigingen, waarbij het verband met het bekende algoritme duidelijk kan worden:

×	20 + 5		25 × 34
4	80 + 20	→	100
+			
30	600 + 150	→	750
			850

Aan dit tabelstadium kunnen echter nog verschillende stadia voorafgaan, die tenslotte tot de tabel en het algoritme geschematiseerd worden. We doelen hier op het zogenoemde kruispuntenmodel.[1])
Gingen de opmerkingen betreffende het *mab*-materiaal over het te lang vasthouden aan konkreet materiaal, wat de tabel betreft zijn we van mening dat er te snel geschematiseerd wordt.
Dit alles neemt echter niet weg, dat er op alle genoemde punten — het positiesysteem en het aanleren van het vermenigvuldigingsalgoritme — sprake is van een verbetering vergeleken met de traditionele aanpak.

delen (3.3)
Het delen is weliswaar in het tweede leerjaar impliciet aan de orde geweest via vraagstukjes als '□ · 5 = 35', eerst in het derde leerjaar komt het voor als een op zichzelf staande operatie.[2])
Steeds gaat het daarbij om het verdelen van een aantal objekten over, zeg: een aantal personen. In feite wordt deze aanpak tot en met het algoritme van de staartdeling gehanteerd. Hoewel in het derde leerjaar ook machientjes, ontbindingen en afbeeldingen gehanteerd worden, moeten we toch konstateren dat een zeer strakke en eenzijdige opbouw is gerealiseerd. Deze loopt van eind derde leerjaar, via midden vierde leerjaar tot in het vijfde leerjaar, volgens de volgende stappen:

derde leerjaar:
- verdelen (groepjes maken); machientjes; ontbinden;

vierde leerjaar:
- schatten van een aantal malen dat deler op deeltal gaat: $\frac{28}{3} = 9 + \ldots$; plus notatie:

$$\begin{array}{r} 9 \\ 3\,\overline{)28} \\ \underline{27} \\ 1 \end{array};$$

- idem maar deeltal ≥ 10 × deler: $2\,\overline{)74}$; (zie voorbeeld in basisboek 4)[3]);
- idem deler < 10, deeltal (drie cijfers), honderdtallen opgaand: $3\,\overline{)693}$;
- idem deler < 10, deeltal (drie cijfers), honderdtallen niet opgaand: $4\,\overline{)378}$;

vijfde leerjaar:
- idem deler < 10, deeltal (vier cijfers);
- idem deler (twee cijfers), deeltal twee of drie cijfers;
- deelbaarheid door 2, 4, 5 en 10;
- verband tussen vermenigvuldigen en delen door 10 en 100 (kommagetallen);
- doordelen tot achter de komma.

Het aantal stappen is belangrijk kleiner dan bij het optellen. Talstelsels zijn nu verdwenen. Cuisenaire wordt alleen nog getekend.
Aan het verband met herhaald aftrekken wordt voorbijgegaan. Kennelijk heeft men zo snel mogelijk willen doorstoten naar het bekende algoritme.
We besluiten dit onderdeel met een voorbeeld (fig. 9).

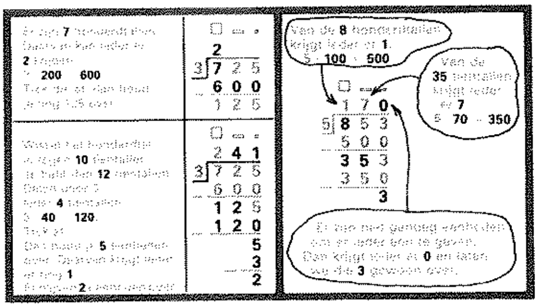


fig. 9

Bij het bepalen van het kwotiënt wordt gebruik gemaakt van schattingen:

$$\frac{6537}{28} \approx \frac{7000}{30} \rightarrow \begin{array}{l} 200 \cdot 28 = 5600 \\ 300 \cdot 28 = 8400 \end{array}.$$

Het kwotiënt bevat dus geen duizendtallen, maar begint met twee honderdtallen:

$$\begin{array}{r} 02\,.\,. \\ 28\,\overline{)6537} \\ \underline{5600} \\ 937, \text{ etc.} \end{array}$$

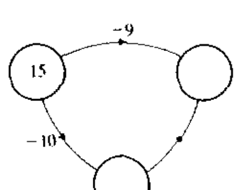
[1]) Zie: Leerplanpublikatie 2: *'Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool'*, *iowo*, utrecht 1975, pag. 138.
[2]) Basisboek 3, pag. 91.
[3]) Pag. 76.

het overige traditionele rekenen (3.4)
Zoals we reeds eerder opmerkten, komt het tellen er binnen het aanvankelijk rekenen schraal af.
De mogelijkheden die hier liggen via:
– doortellen;
– terugtellen;
– tellen met sprongen;
– tellen tussen een tweetal getallen;
– voortzetten van getalpatronen;
zijn binnen het aanvankelijk rekenen weinig uitgebuit, op een enkele uitzondering na.
Bij het ordenen van de getallen wordt aanvankelijk in hoofdzaak gebruik gemaakt van het cuisenairemateriaal, terwijl later ook de getallenlijn daarbij haar kans krijgt.
Ruime aandacht krijgt het afronden van getallen, echter hoofdzakelijk als een bezigheid op zich, om er rekenvraagstukjes mee te maken, zoals:

$2428 + 5156 \approx 2400 + 5200 = \ldots$

Praktische aanleidingen tot afronden (meten, geldbedragen, etc.) komen pas later. Dat het afronden ook iets met schatten te maken heeft, blijkt nergens uit.

Van het *eigenschapsrekenen* door de leerjaren heen noemen we:
- splitsen van getallen met behulp van cuisenairestaafjes:
  $(5 = 5 + 0 = 4 + 1 = 3 + 2 = \ldots)$;
- verschillende splitsingen leggen van een getal tot 20 met behulp van cuisenaire:
  $(15 = 5 + 5 + 5 = 6 + 6 + 3 = \ldots)$;
- halveren en verdubbelen treffen we vooral in de onderbouw aan;
- aan het verschijnsel dat optellen en aftrekken (en vermenigvuldigen en delen) inverse bewerkingen zijn, wordt regelmatig aandacht besteed;
- berekeningen waarbij een tiental overschreden wordt, worden van het begin af aan door middel van handige splitsingen aangezet:
  $18 + 6 = 18 + 2 + 4$;
  dit heeft ook in hogere leerjaren effekt bij vraagstukjes als:
  $499 + 901$;
  analoge kwesties bij het aftrekken, die ook via geschakelde pijlensommen worden aangeboden:



- de distributieve eigenschap $(5 \times 29 = 5 \times (30 - 1))$, de kommutatieve eigenschap $(45 \times 6 = 6 \times 45)$ en de associatieve eigenschap $(2 \times 31 \times 5 = 2 \times 5 \times 31 = 10 \times 31)$ komen alle aan de orde;
- de laatstgenoemde eigenschappen voor de optelling worden toegepast in sommetjes als:
  $32 + 47 + 18 + 23 = (32 + 18) + (47 + 23)$.

Het eigenschapsrekenen wordt het meest toegepast bij hetgeen vanaf het derde leerjaar 'hoofdrekenen' wordt genoemd. Hiertoe is achterin de basisboeken een aantal aparte hoofdrekenpagina's opgenomen.

> 'Natuurlijk moet u zich niet tot deze bladzijden beperken',

schrijft de handleiding van het derde boek[1]), en dat lijkt ons meer dan juist.

Over de onderwerpen tijd, geld, lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht en metriek stelsel, valt weinig meer te melden, dan dat ze volgens de bekende metodiek worden aangeboden.

Ook de *breukenaanpak* biedt geen opzienbarend nieuws. Wel konstateren we een bewuste keuze voor de hoeveelheid en diepte van de stof van dit onderdeel. Het breukbegrip wordt aanvankelijk gevuld met het bekende taartmodel, waarbij van gegeven meetkundige figuren (vaak een strook) gedeelten gekleurd zijn. Weinig mogelijkheid is geboden, zélf verdelingen te kunnen aanbrengen. Daarnaast wordt de breuk als operator ingevoerd (zie fig. 10).

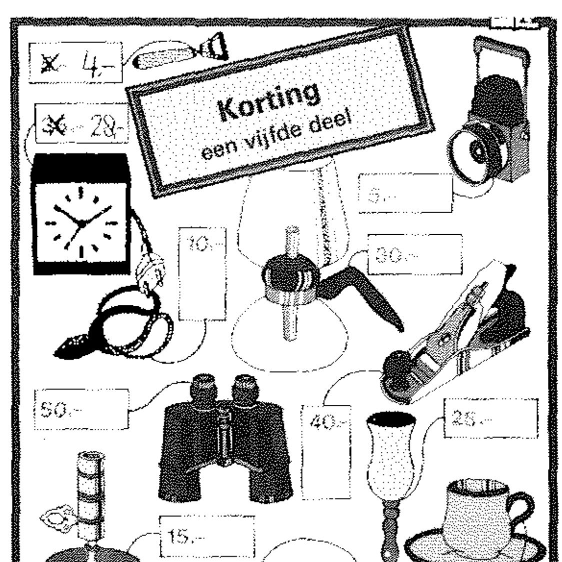


fig. 10

[1]) Pag. 4.

In het vierde leerjaar krijgen we toch al gauw de formele notatie (zie fig. 11).

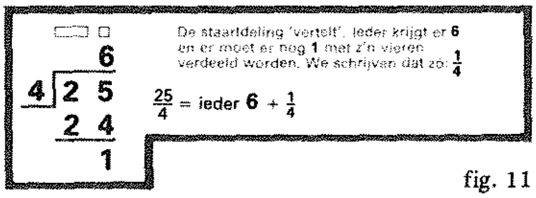


fig. 11

Ook de ordening van eenvoudige breuken ontmoeten we in de vierde klas (fig. 12).

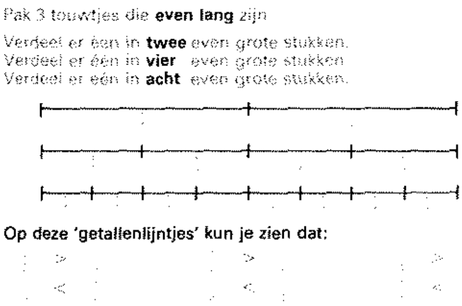


fig. 12

In het vijfde leerjaar wordt de breuk als ekwivalentieklasse gepresenteerd (zie fig. 13), wat op zichzelf heel goed is. Echter, zo kan men zich afvragen, is het in dit geval wel verstandig telkens een nieuwe eenheid te kiezen? Dan lijkt ons de 'strokenaanpak' van fig. 12 duidelijker.

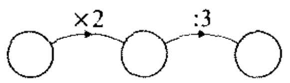
fig. 13

Heel goed is het, steeds het honderdveldje te betrekken bij de visualiseringen, en aldus verband te leggen met de kommagetallen.

De leergang 'operaties met breuken' beperkt zich tot het optellen en aftrekken van eenvoudige breuken, aanvankelijk zonder het inwisselen van helen. Als modellen worden daarbij gebruikt: strook (zie fig. 12) en getallenlijn. Uiteraard krijgt daarbij het gelijknamig maken aandacht, zonder dat het overdreven wordt. In het vijfde en zesde leerjaar wordt dit voortgezet door middel van oefeningen, terwijl dan tevens het vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal, als herhaalde optelling geïntroduceerd wordt.
Dus:

$5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ (vijf sprongen op de getallenlijn).

Via de kommutatieve wet komen ook vraagstukjes als $\frac{2}{5} \times 3$ naar voren, terwijl tevens het delen van een breuk door een geheel getal ($\frac{1}{3} : 2$) wordt geïntroduceerd. Bovendien zien we de machine-aanpak als een aan te bevelen oefenvorm:



Interessant is, dat de vermenigvuldiging van twee gewone breuken buiten beschouwing blijft. We kunnen trouwens met vreugde konstateren, dat de hoeveelheid oefenstof en de moeilijkheidsgraad van de breukenvraagstukken beperkt is gehouden.

De *kommagetallen* worden geïntroduceerd met behulp van het geld en het onderverdelen van de meter. Tevens wordt verband gelegd met het honderdveldje. Dit betekent dat we uitsluitend getallen met twee cijfers achter de komma zien, waarbij het verband met delen en vermenigvuldigen met 100 ook gelegd wordt. Wel verschijnen aan het eind van het zesde leerjaar repeterende breuken, terwijl we al eerder wezen op het verband dat steeds tussen gewone breuken en kommagetallen wordt gelegd.
Noemenswaard is de wijze van vermenigvuldigen van twee kommagetallen. Men laat namelijk door middel van een schatting de plaats van de komma in het antwoord bepalen. De didaktiek is dus de volgende:

3,4 × 5,2 = ?

Reken uit alsof het een vermenigvuldiging zonder kommagetallen is:

$$\begin{array}{r} 3{,}4 \\ \underline{5{,}2} \\ 68 \\ \underline{1700} \\ 17{,}68 \end{array}$$

We kunnen schatten: $3{,}4 \times 5{,}2 \approx 3 \times 5 = 15$. Dus moet de komma twee plaatsen van achteren.

Procenten worden traditioneel aangeboden via 1% is $\frac{1}{100}$ deel (wel weer met behulp van het honderdveldje), terwijl de techniek van het rekenen met procenten zeer star is:

20% van *f* 125,–; 1% is *f* 1,25, etc.

In plaats van:

$\frac{1}{5}$ deel van *f* 125,– is *f* 25,–.

Het *schaalbegrip* wordt eveneens vrijwel direkt getalsmatig (1 : 3) aangeboden, waarbij de mogelijkheid een visuele schaal te gebruiken (1 km) gemist is. Bij verhoudingen wordt ook gebruik gemaakt van de lineaire grafiek (zie fig. 14).

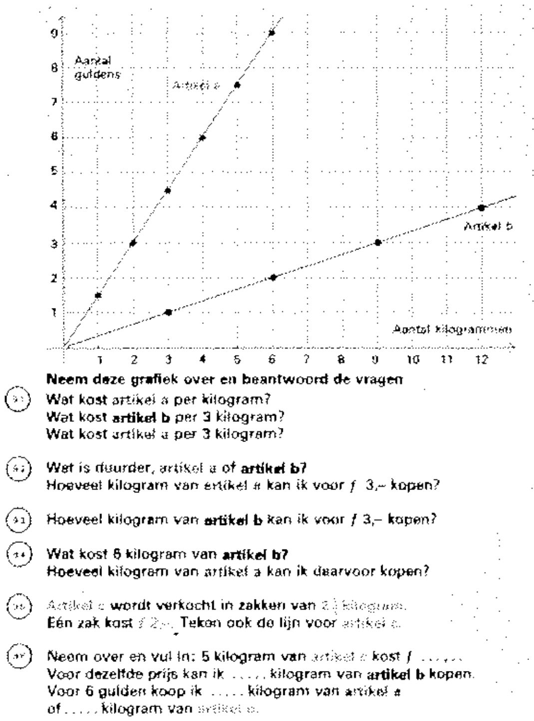


fig. 14

Verbanden tussen kommagetallen, procenten, breuken en verhoudingen, worden veelal gemist. Dit lijkt ons een ernstige leemte in de gevolgde didaktiek van *br* op dit belangrijke onderdeel.

Redaktievraagstukken ontbreken niet. Heel motiverend lijken in dit verband de vraagstukjes in de vorm van een soort stripverhaaltjes, zoals ze vooral in de lagere leerjaren voorkomen (zie fig. 15).

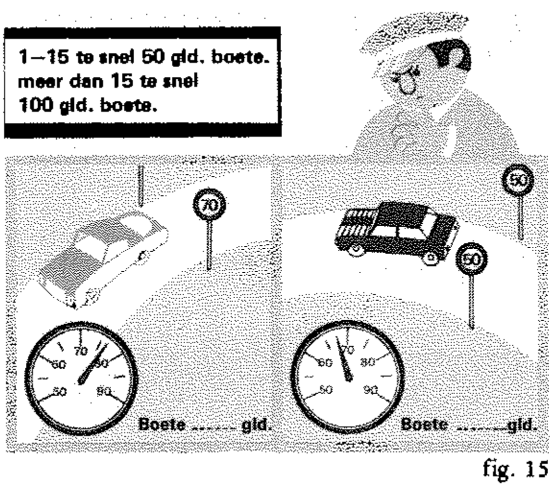


fig. 15

verlevendiging van het rekenen (3.5)
Onder de verlevendiging van het rekenonderwijs verstaan we al datgene uit het rekensysteem, dat door middel van een nieuwe aanpak een motiverende, doch tevens verhelderende kijk kan geven op het traditionele rekenen.
In *br* krijgt dit aspekt een duidelijke nadruk. Allereerst hebben we daar:

NIET TRADITIONELE OEFENVORMEN
Hieronder vatten we samen allerlei rekenspelletjes, puzzels, gevarieerde oefenvormen, waarbij soms ook strategieaspekten een rol kunnen spelen:

- *pinkelen*

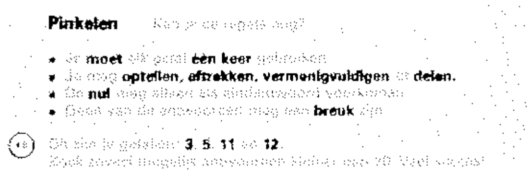


fig. 16

Dit bizonder motiverende spel [1]) wordt op vele manieren gevarieerd: eenvoudiger getallen, meerdere getallen, moeilijker getallen, antwoorden onder andere voorwaarden (bijvoorbeeld drievouden), getal zoeken dat zo dicht mogelijk bij een gegeven getal ligt, etc.

- *tekens plaatsen*
  7 ... 5 ... 2, kan bijvoorbeeld worden:
  7 = 5 + 2 of 7 – 5 = 2.

- *kermissommen*

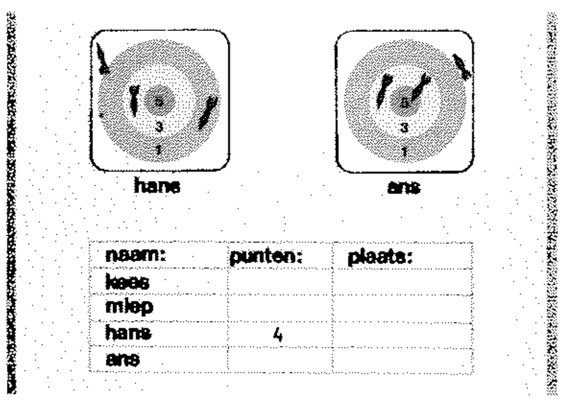


fig. 17

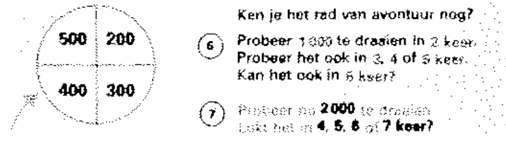


fig. 18

---

[1]) De *kro*-televisie gebruikte dit spel als kwis (*'Cijfers en letters'*).

- *magische vierkanten*[1])

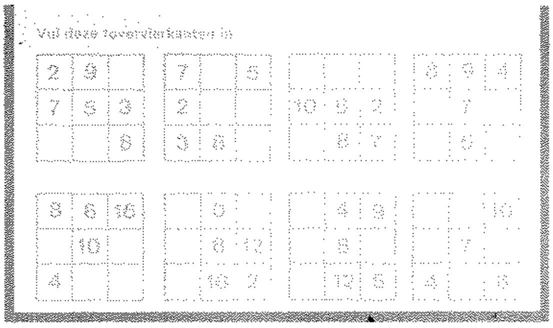


fig. 19

- *trapjessom*

fig. 20

Dit vraagstuk is jammer genoeg niet verder uitgebuit als oefenvorm. (Er is trouwens ook wiskundig allerlei leuks aan te ontdekken.)
Hoewel ook de tabel en het honderdveld wel even aan de orde komen in het kader van het oefenen, zouden deze onderwerpen aanleiding kunnen zijn tot verdere variatie en uitdieping. Kortom: er komen verschillende leuke oefenvormen voor, maar het is jammer dat ze in de onderwijzershandleiding niet als één aktiviteitenpakket bij elkaar gezet zijn.

DYNAMIEK IN DE OPERATIES
De sleur van eindeloze rijtjes sommen onder elkaar, is in *br* doorbroken. Van allerlei vormen wordt gebruik gemaakt, die het dynamische karakter van de operaties benadrukken:

- *pijlensommen*

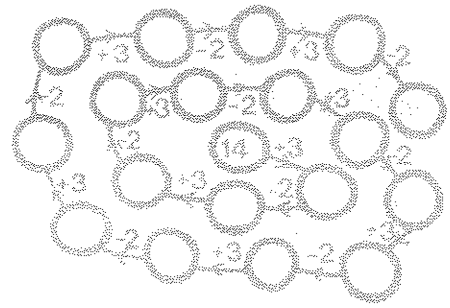


fig. 21

De pijlen geven het dynamische van de 'erbij'-handeling weer. Bovendien biedt dit mogelijkheden tot handige strategieën door middel van het schakelen van pijlen. Ook hier worden de mogelijkheden tot variatie onvoldoende benadrukt. Denk bijvoorbeeld aan het geven van het eindgetal of een tussengetal. Dit is vooral een omissie van de handleiding. Bovendien zijn de problemen veelal kontekstloos.[2])

- *machientjes*

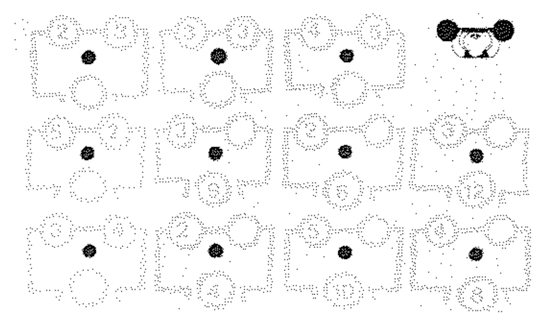
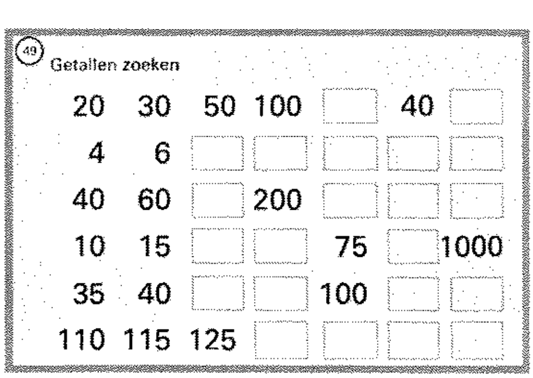


fig. 22

De punt in de machine betekent: vermenigvuldigen van de twee getallen die er ingaan. Goed, dat ook het produkt gegeven wordt en één van de ingaande getallen gevraagd. Maar waarom alleen voor de 'goede' leerlingen (zwarte gewichtheffer)?

- *matriks*
Deze oefenvorm is een soort 'ontdek de pijl'-som door verschillende kolommen te vergelijken.



49 Getallen zoeken

20	30	50	100		40	
4	6					
40	60		200			
10	15			75		1000
35	40			100		
110	115	125				

fig. 23

[1]) Hierop zijn tal van variaties te bedenken.
[2]) Zie voorbeeld: Leerplanpublikatie 3: *'Bussen en blokken'*, *iowo*, utrecht 1976.

- *open beweringen* (□ + *8* = *12)*
  Deze krijgen al gauw de vorm van vergelijkingen. Ook de 'groter dan' en 'kleiner dan' tekens (> en <) worden daarbij gebruikt, waardoor het antwoord vaak meerdere getallen bevat. Op zichzelf geeft dit een belangrijke uitbreiding van het gewone rekenen.

$x + 12 = 18$	$x = \square$	$y - 6 = 10$	$y = \square$
$15 - x = 7$	$x = \square$	$4 + y = 4$	$y = \square$
$13 - 6 = x$	$x = \square$	$y + 15 = 20$	$y = \square$
$18 - x = 10$	$x = \square$	$16 - y = 8$	$y = \square$
$7 + x = 14$	$x = \square$	$18 - 7 = y$	$y = \square$

fig. 24

- *getallenlijn*
  Deze wordt veelvuldig gebruikt om getallen uit te breiden (ook naar de negatieve getallen), om getallen te ordenen, om operaties te verduidelijken (springen op de getallenlijn).

- *splitsen en redeneren*
  In de onderbouw komt het splitsen van getallen regelmatig aan de orde. Hierbij is niet nagelaten ook de mogelijkheid van het aantal splitsingen van een getal te ontdekken:

  5 = 5 + 0, 4 + 1, 3 + 2, 2 + 3, 1 + 4, 0 + 5;
  zes (5 + 1) splitsingen.

KOMBINATORIEK
Hieronder verstaan we vraagstukken die een systematische wijze van tellen vereisen. Vandaar dat het ook vaak ordenend tellen wordt genoemd. Aan dit onderdeel is in *hr* vanaf het tweede leerjaar ruime aandacht besteed. De vraagstukjes zijn vaak sterk voorgestruktureerd.
Hoewel dit onderwerp op zichzelf heel interessant is en ook echt zinvolle wiskundige aspekten in zich bergt, vragen we ons af of vooral in de onderbouw niet wat al te voortvarend allerlei soorten lastige problemen door elkaar aangesneden zijn. Zo meent de onderwijzershandleiding ook, dat bijgaande opgave (fig. 25) inderdaad lastig is en dat het niet noodzakelijk is dat de kinderen inderdaad alle mogelijkheden vinden. ('Dat komt later wel.')
Een moeilijk didaktisch punt is hierbij echter wel, dat men heel goed moet kunnen observeren of de kinderen al systematisch werken en wat die latere voortgang betekent.

Een zekere ondersteuning bij de kombinatorische problemen en het ordenend tellen kan uitgaan van het boomdiagram, dat in *hr* veelvuldig gebruikt wordt.

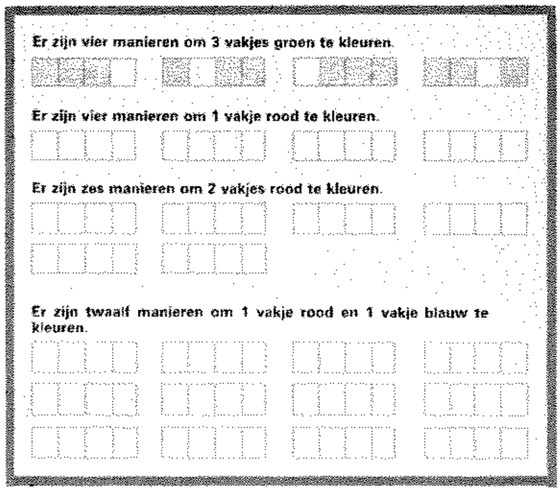


fig. 25

PROJEKTBOEKJES
Bizonder aardig zien de eksperimentele projektboekjes voor het zesde leerjaar eruit. We konden er twee van de drie bekijken. In deze boekjes is gebruik gemaakt van onze dagelijkse omgeving, waaraan wiskundige, rekenkundige en andersoortige problemen onderzocht moeten worden. Zo gaat het eerste projektboekje over allerlei soorten kommunikatie. Krant, folder, verkeer, radio, telefoon en televisie, blijken tal van mogelijkheden te bieden ons onderwijs te aktualiseren en dus te verlevendigen.
Beslist jammer is het, dat de boekjes bedoeld zijn: 'voor na de *cito*-toets', zodat ze, wat de vernieuwing van het rekenonderwijs betreft, een beetje als mosterd na de maaltijd komen.

▶ DE WISKUNDE (4)
Hr voert als ondertitel 'wiskundig rekenen voor de basisschool'. Dit geeft aan dat de metode een reken/wiskundemetode pretendeert te zijn.
Het rekenen is in de voorgaande paragraaf onderzocht. Thans zullen we analyseren of de metode ook een wiskundemetode genoemd kan worden. Daarbij is van belang wat men onder wiskunde verstaat, wat daarvan voor de basisschool geschikt wordt geacht en hoe de didaktische opbouw verzorgd is. Via de vijf 'wiskunde'-leerstofvlakken: meten, statistiek en waarschijnlijkheid, meetkunde, relaties en funkties, taal en logika, welke samen met het rekensysteem een globale indeling geven van de leerstof, zal *hr* aan een verdere analyse onderworpen worden.

meten (4.1)
Het meten komt er in *hr* nogal schraal af. Een verantwoorde opbouw kunnen we niet ont-

dekken. Achtergrondinformatie van enige importantie ontbreekt. Meten gaat snel in de richting, waaraan men traditiegetrouw gewend is. Dat betekent: het hanteren van meetlat, gewichtsmaten, enz. Een voorzichtige opbouw via vergelijken, ordenen, zelf een maat zoeken, missen we node. Hier en daar worden in de handleidingen wel hints gegeven teneinde de onderwijzer te stimuleren ook in werkelijkheid eens iets door middel van een onderzoekje met behulp van meetinstrumenten (al of niet gestandaardiseerd) aan te zetten. Door de aanbieding van de stof in de leerlingenboeken, waar alles direkt getalsmatig gebonden is, kan men echter betwijfelen of daar veel van terecht zal komen. Met name het meten van lengten en oppervlakten geschiedt op een onvolledige basis. Inhouds-, gewichts- en tijdmeting daarentegen, worden veelzijdiger aangepakt.
Het gebruik van tabellen en grafieken voor de verwerking van meetgegevens gebeurt op een zinvolle wijze. Maar, zoals gezegd: het schort in *br* vooral aan de wijze waarop die gegevens verkregen worden en aan het oproepen van een noodzaak voor de ontwikkeling van een maat voor verschillende grootheden.
In z'n totaliteit bezien behoort het leerstofvlak van het meten zeker niet tot de rijkste en meest geëksploreerde gebieden van *br*.

waarschijnlijkheid en statistiek (4.2)
Van dit onderdeel valt de nadruk op de kansrekening. Al in een vrij vroeg stadium worden empirische kans (zweetkans) – verkregen door een groot aantal eksperimenten – en a priori kans (weetkans) – uittellen van het aantal mogelijkheden – met elkaar in verband gebracht.
De opbouw van de leergang – we laten de kombinatoriek buiten beschouwing – vangt aan in het derde leerjaar en bevat hoofdzakelijk vraagstukken, die een sterk gestruktureerd karakter hebben. Dat wil zeggen: veel wordt gebruik gemaakt van dobbelsteenspelletjes, gokspelletjes, e.d. Regelmatig keren dergelijke vraagstukken terug tot in het zesde leerjaar. In het derde leerjaar zien we de zogenaamde kansladder (zie fig. 26).

fig. 26

Hoe moeilijk kansrekening ligt, weten ook de bewerkers van *br*, als ze in de algemene toelichting[1]) schrijven:

> 'Een ander punt is, of de basisschool, zij het op een laag pitje, iets aan dit onderdeel kan doen.'

En hoe lastig de sommen kunnen zijn, blijkt uit het feit dat het antwoord van vraag *d* in de onderwijzershandleiding foutief wordt beargumenteerd.
De ervaringen met *'Kijk op kans'*[2]) hebben geleerd, dat waarschijnlijkheid en statistiek geen eenvoudig onderwerp voor de basisschool is. Het is dan ook de vraag of men zo vroeg (derde leerjaar) met al tamelijk strukturele zaken moet beginnen. In dit opzicht zou veel meer aandacht aan beschrijvend-statistische onderzoeken geschonken kunnen worden [3]), waarbij statistiek ook een veel reëler toepassingsgebied krijgt.
Hoewel wij de kansrekening in *br* dus nogal formeel vinden, is dit niet ons belangrijkste bezwaar (de vraagstukjes zijn vrijwel alle echt aardig). Nee, eerder zijn wij wat huiverig voor de moeilijkheidsgraad van de gestelde problemen. Een voorbeeld moge dit tenslotte verduidelijken (fig. 27).

meetkunde (4.3)
Het vervolgonderwijs heeft duidelijk model gestaan voor de meetkundige aktiviteiten. We doelen hiermee vooral op de transformaties: spiegelen, draaien en transleren.
Met spiegelen en draaien zijn best aardige zaken te doen, ook binnen het basisonderwijs, maar laat het dan gebonden zijn aan een of ander reëel probleem en model staan om het belangrijke symmetriebegrip te vullen.
Zoals dit onderdeel binnen *br* gebracht wordt, achten wij het eerder een achteruitgang dan een stap voorwaarts voor de vernieuwing van het wiskundeonderwijs. Met hetgeen meetkunde zo geschikt maakt voor het basisonderwijs, namelijk greep krijgen op de ons omringende ruimte, heeft 't aan transformaties gebodene niets te maken. Ook thans ontbreken

[1]) Pag. 27.
[2]) Televisieprojekt (1973–1977) voor het zesde leerjaar (*not*).
[3]) Zie bijvoorbeeld enkele tema's in het wiskobas-bulletin: *'Zonderdag'*, *'Telefoontema'*.

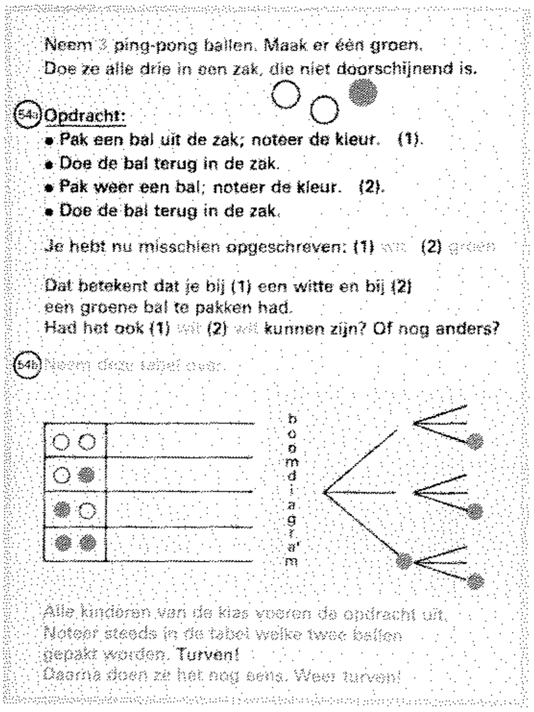


fig. 27

weer argumenten waarom bepaalde opgaven worden aangeboden. Slechts enkele wiskundige termen worden in de handleiding toegelicht.
Kijken we naar fig. 28 dan kan men nog denken: wel dat is niet zo'n onaardige waarnemings- en koncentratieoefening.

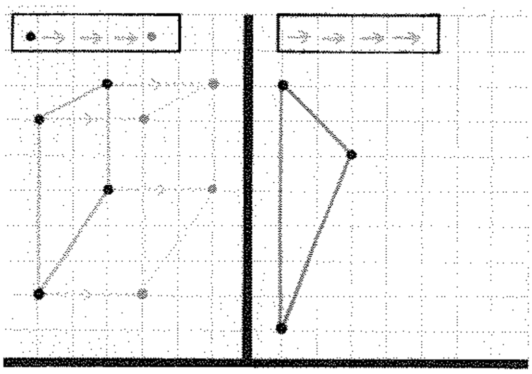


fig. 28

De handleiding deelt o.m. mee:

> '1. Door verschuiven verandert de vorm niet, de figuur heeft alleen een andere plaats gekregen.
> 2. Als een figuur verschoven wordt, worden *alle* punten van die figuur verschoven.'[1])

Afgezien van het feit dat het bij een translatie juist gaat om het verschuiven van het gehele vlak, moet de onderwijsgevende maar gissen, dat dit voorbereidt op het feit dat vlakke figuren invariant blijven onder translaties. Wie zou dat eigenlijk niet snappen? Alleen een wiskundige maakt zich er druk over om z'n systeem kloppend te krijgen.

Verder treffen we uit de formele meetkunde nog aan:
- figuren benoemen;
- hoeken;
- evenwijdige lijnen;
- loodrechte stand;
- formele notatie voor een vektor;
- afstand van punt tot lijn.

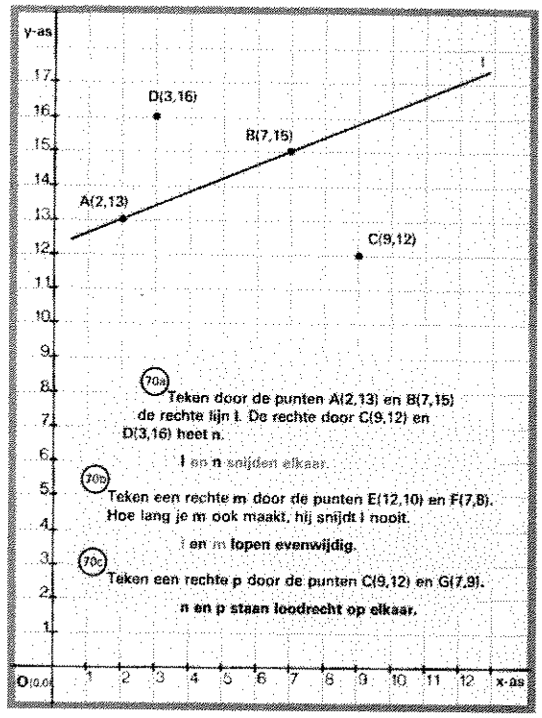


fig. 29

In het eerste leerjaar komen gesloten en open krommen, binnen- en buitengebied, aan de orde, zonder opgave van redenen en zonder dat er verder iets mee gedaan wordt.
In het vijfde en zesde leerjaar komt een aantal aardige opgaven voor over blokjes bouwen en de kubus (zie fig. 30).

Jammer is het, dat waar het rooster in de onderbouw gebruikt wordt voor enkele opgaven die in de richting van de stadsplanmeetkunde gaan, dit niet verder is uitgebuit.[2]) Wel komen koördinaten aan de orde. Al met al is het meetkundepakket van *hr* te weinig motiverend, te schraal en te lastig (hoeken!). Uit het bovenbouwdeel kan men echter afleiden, dat de auteurs een koerskorrektie willen aanbrengen. We mogen hopen dat zij in een volgende versie het totale meetkundedeel grondig zullen herzien.

[1]) Handleiding bij basisboek 2, pag. 43.
[2]) Zie: Leerplanpublikatie 4: *'Inter-lokaal'*, *iowo*, utrecht 1976.

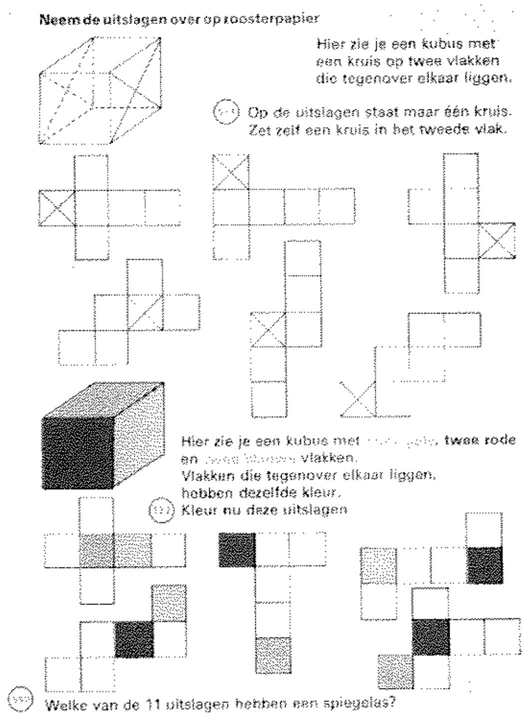


fig. 30

relaties en funkties, taal en logika (4.4)

Daar deze leerstofgebieden zo dicht bij elkaar liggen, zeker binnen *br*, bespreken we deze nu tezamen.
Aan één voorbeeld is het eigenlijk al duidelijk te maken. In *br* wordt veelvuldig gebruik gemaakt van *logiblokken.* Deze 'denkblokken', zoals ze ook wel genoemd worden, bieden tal van mogelijkheden tot verkenningen binnen genoemde leerstofgebieden. Het voordeel van de aktiviteiten met de logiblokken is, dat je duidelijk je matematische doelen kunt omschrijven en het materiaal door z'n overzichtelijke struktuur ook gestruktureerde opgaven met zich meebrengt. Deze voordelen worden als nadelen gezien door degenen die wiskunde niet opvatten als een door anderen uitgedacht systeem, maar als een mogelijkheid om zelf orde en strukturen te scheppen. Bovendien voeren tegenstanders vaak het argument aan, dat de logiblokken weinig mogelijkheden bieden tot realiteitsgebonden aktiviteiten.
De logiblokken in *br* bieden mogelijkheden tot: klassificeren, ordenen, afbeeldingen, eenvoudige redenaties, gebruik van tabellen, gebruik van boomdiagrammen, schakelen van afbeeldingen, vinden van het afbeeldingsvoorschrift, strategiespelletjes.
Gezegd dient te worden dat, hoe men ook over het gebruik van logiblokken moge denken, de auteurs het werken ermee niet tot een kultus hebben laten uitgroeien.

Relaties worden op verschillende manieren aangeboden:
- met pijlen binnen een verzameling;
- met pijlen van een verzameling naar een andere verzameling;
- met tabellen;
- met machientjes;
- met pijlen van getallenlijn naar getallenlijn (nomogrammen);
- met grafieken;
- met variabelen ($x \longrightarrow x + 3$).

Een voorbeeld:

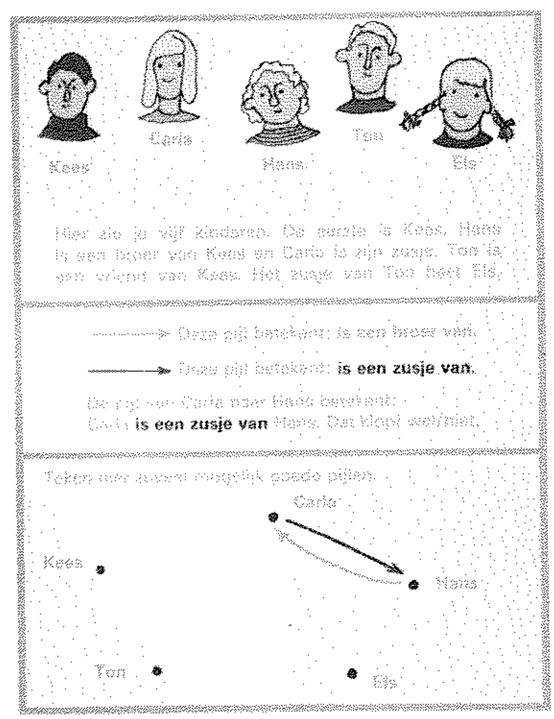


fig. 31

Wat de *taal* van de wiskunde betreft, merken we op dat aandacht is besteed aan: koördinaten, symboliseren, pijlentaal, formele verzamelingentaal (helaas!) en het gebruik van letters. Laatstgenoemde wordt voorbereid door middel van open beweringen. Hoewel het gebruik van letters voor variabelen nog altijd als het voorrecht van de algebra gerekend wordt, valt het te betwijfelen of dit juist is. Waarom zouden we er niet iets eerder gebruik van maken? In vele gevallen versimpelt het een probleem, zoals ook uit verschillende voorbeelden in *br* blijkt. Een vooruitstrevende gedachte, die de moeite van het uitproberen waard is, mits een en ander niet tot formele algebra leidt.

Tot slot wijzen we op een aantal bizonder aardige redeneersommen, die in *br* voorkomen.

Sabrina heeft **vier** dominostenen en ze schrijft op een blaadje:

1 steen met de som 8	1 steen met het verschil 1
1 steen met de som 11	2 stenen met het verschil 0
1 steen met de som 2	1 steen met het verschil 6
1 steen met de som 6	

Ze noemt een steen een 'dubbele' als er links en rechts hetzelfde aantal ogen staat. Bijv.

(75.2) Hoeveel **dubbele** stenen heeft ze?
Kun je ook beredeneren **welke** stenen ze heeft?

Om de oplossing te zoeken, kun je **boomdiagrammen** maken.

fig. 32

Zet een kruisje in het goede vakje

Bart is ouder dan Henk. Henk is ouder dan Kees.
Els is vijf jaar.

	onmogelijk	mogelijk	zeker
Henk is ouder dan Kees	☐	☐	☐
Bart is ouder dan Kees	☐	☐	☐
Bart is jonger dan Henk	☐	☐	☐
Els is jonger dan Henk	☐	☐	☐
Kees is ouder dan Bart	☐	☐	☐
Kees is ouder dan Els	☐	☐	☐
Henk is jonger dan Bart	☐	☐	☐

fig. 33

Komen we nu terug op de in de aanvang van deze paragraaf gestelde vraag, dan zal uit het voorgaande duidelijk zijn geworden, dat *br* inderdaad een wiskundemetode genoemd kan worden.
Samenvattend gesteld, blijken het meten en de meetkunde er nogal schraal af te komen, lijken de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek moeilijke maar interessante mogelijkheden te bevatten, terwijl binnen relaties, funkties, taal en logika aktiviteiten aangevat worden die sterk de strukturele richting uitgaan.

▶ REAKTIES UIT DE PRAKTIJK (5)

Vanuit gesprekken met onderwijsmensen die in de praktijk met *br* werken, kunnen nog de volgende aanvullingen gegeven worden:

- Om met *br* bevredigend te kunnen werken, is motivatie om het reken/wiskundeonderwijs te willen vernieuwen en enige matematisch-didaktische kennis (via heroriëntering of pedagogische akademie) een noodzakelijke voorwaarde.
  De metode nodigt uit zélf materialen en/of aktiviteiten te vervaardigen resp. toe te voegen.
- Een algemene klacht is dat er te weinig oefenstof in de metode zit. De verschillende aanbiedingsvormen voor het oefenen, als beschreven in (**3.5**), worden weliswaar geapprecieerd, maar vragen nochtans om ekstra stof. Daarbij wordt o.m. gebruik gemaakt van meer traditionele oefenboekjes, waaruit 'rijtjes' worden gekozen (bouw) of men stelt zelf oefenstof samen. Een verzuchting luidde: '... je blijft dan wél stencillen!'
- Men onderschrijft het gesignaleerde gemis van de abakus, de geringe aandacht voor het telgetal en de telrij op het honderdveld. Ook het meten wordt schraal gevonden. Wel is het mogelijk zelf aktiviteiten toe te voegen. Hiervoor zijn in de handleiding enkele aanwijzingen te vinden.
- Ervaringen met talstelsels blijken in de praktijk nogal eens tot tegenstrijdige oordelen te leiden. De ene leerkracht acht dit onderwerp zinvol en verhelderend voor de kinderen, terwijl ook wel geluiden te horen zijn, dat talstelsels tot verwarring leiden.
  De inwisseloefeningen daarentegen, vinden in het algemeen waardering.
  De ondervraagde gebruikers staan daarmee licht positief ten aanzien van het gebruik van talstelsels in de lagere leerjaren.
- De vraagstukken over kansrekening worden in het algemeen te lastig gevonden en daarom veelal overgeslagen. Ook het gebruik van de zogenaamde kansladder blijkt niet erg handzaam.
  Wel acht men de problemen op het gebied van het ordenend tellen zinvol. Vooral de problemen waarbij gebruik gemaakt wordt van het boomdiagram.
- Logiblokken worden in de lagere leerjaren gewaardeerd bij gebruik in de spelsfeer. Daarbij worden ideeën en materialen veelal ontleend aan andere bronnen dan *br*.
- De door de recensenten gehanteerde betitelingen 'schraal', 'formeel', etc., bij niet-traditionele onderwerpen als meten en meetkunde, kunnen alleen betekenis krijgen als tegelijkertijd voorbeelden gegeven worden van een andere aanpak.
- De kritiek op de handleiding, vooral waar het gaat om het gekonstateerde gemis aan motiveringen, wordt onderschreven.
  Ook zou de handleiding meer praktische suggesties moeten bevatten.
- Van differentiatie is nauwelijks sprake. Er is te weinig spreiding in moeilijkheidsgraad. Vooral wat betreft de wat moeilijker vraagstukken (zwarte gewichtheffer), wordt nogal eens te laag gemikt. De aanvangsboekjes (eerste klas) zijn te eenvoudig en te uitgebreid, terwijl later aan bepaalde vaardigheden (bijvoorbeeld: sommetjes tussen de 10 en 20) te weinig aandacht wordt besteed.
- Het gebruik van het *mab*-materiaal wordt gewaardeerd, doch men vindt dat het te lang doorgezet wordt. De abakus wordt in dit verband gemist.
- In organisatorisch opzicht blijkt de schei-

ding basisboek en oefenboek soms lastig te zijn.

- De veelkleurige uitvoering spreekt de kinderen in de lagere leerjaren sterk aan, hoewel het soms ook wat onrustig werkt.
- Ondanks de instemming die de geïnterviewden deelden met de door de recensenten geuite kritiek, meenden zij allen, dat de metode voor de kinderen in letterlijke zin toch betekende: *boj! rekenen!*
- Over de bovenbouwproblematiek omtrent breuken, procenten en verhoudingen, hebben we niet veel respons gekregen. Enerzijds wellicht, omdat men nu juist aan het zesde leerjaar toe was, anderzijds omdat men naast *br* veel oefenmateriaal uit traditionele rekenmetoden gebruikte. Het is dus niet duidelijk geworden of de geuite kritiek op de verbrokkelde aanpak van de sleutelonderwerpen, ook werkelijk hout snijdt. 't Is in ieder geval een punt dat we in de gaten zullen houden.

REAKTIE AUTEURS EN UITGEVER (6)

Met waardering hebben wij kennis genomen van de intensieve wijze waarop de recensenten zich hebben verdiept in onze metode *boj! rekenen!* Dat één van de samenvattende konklusies *boj! rekenen!* aanmerkt als een degelijke en konsekwente metode geeft ons voldoening. Van de ons geboden mogelijkheid tot reaktie maken we graag gebruik.

We zijn het met de recensenten eens, dat *boj! rekenen!* een zacht-struktureel karakter heeft en wel in die zin, dat naast onderwerpen uit wiskundige leerstofgebieden (talstelsels, logika, statistiek, enz.) volle aandacht besteed wordt aan het traditionele rekenen.

Het invoeren van nieuwe leerstofgebieden, al vanaf de eerste leerjaren, brengt met zich mee dat een deel van de tijd en ruimte, daaraan moet worden besteed. Dit gaat volgens sommige gebruikers enigszins ten koste van de traditionele rekenstof. Deze laatste zal moeten worden uitgebreid.
In de afgelopen jaren hebben de auteurs en de uitgever van de metode uitgebreide informatie ontvangen over praktijkervaringen en resultaten van onderzoek met betrekking tot *boj! rekenen!*
Die informatie kwam uit:

- bijeenkomsten met vrijwel alle leerkrachten die met de metode werken (in 1974 en 1977);
- een vergelijking tussen *boj! rekenen!* en het leerplan van wiskobas, die op verzoek van Meulenhoff Educatief gemaakt werd door de heer T. v.d. Goor, medewerker van een schoolbegeleidingsdienst, speciaal voor het vak rekenen;
- een bijeenkomst met leden van het team van wiskobas, die de boekjes van de klassen 1 tot en met 4 aan een kritisch onderzoek onderworpen hadden (1976).

Daarnaast kwamen de auteurs tijdens het samenstellen van de stof voor de hogere leerjaren tot het inzicht, dat voor de stof van de klassen 1 en 2 nieuwe mogelijkheden toepasbaar zijn.
Uit al deze informatie trokken wij de konklusie dat in het bizonder de delen voor de klassen 1 en 2 in de toekomst uitgebreid kunnen worden met bijvoorbeeld meer didaktische aanwijzingen, ekstra rekenaktiviteiten en het aangeven van meer mogelijke werkvormen.

Met de recensenten zijn wij van mening dat de abakus na gebruik van het *mab*-materiaal een nuttig leermiddel kan zijn. Met nadruk stellen wij wel dat de abakus een hoger abstraktienivo vereist. Daarnaast hebben wij o.a. bedenkingen tegen het niet funktioneel zijn van het kleurgebruik bij de abakus.
Niettemin lijkt dit een bruikbaar leermiddel en hebben we in overweging genomen hiervoor didaktische mogelijkheden aan te geven in de onderwijzersboeken.

Jammer, dat de recensenten de, overigens zeer geprezen, projekten voor klas 6 als mosterd na de maaltijd beschouwen. Wij kozen voor deze projektvorm om leerkracht en leerling voor de periode na de toets, ekstra motiverende rekenmogelijkheden te bieden. Immers, de leerlingen hebben dan voldoende vaardigheden om de stof op deze wijze te kunnen verwerken en er is na het afleggen van de toets ook tijd voor beschikbaar.

Enkele detailpunten uit het verslag van de recensenten menen wij niet zonder kommentaar te mogen laten.

pag. 42
Naar onze informatie en uit eigen waarneming, weten wij dat wiskobas wel in het bezit was van een gedeelte van de zweedse metode. De recensenten kunnen dus zeker weten, dat *boj! rekenen!* voor de klassen 1 tot en met 3 een zeer vrije bewerking is, en dat de delen voor de klassen 4 tot en met 6 geheel oorspronkelijk nederlands werk zijn. Vandaar ook dat de 'bewerkers' van *boj! rekenen!* juister zijn aangeduid met de titel 'auteurs'.

pag. 49
Recensenten zeggen hier dat nergens uit blijkt

dat afronden ook iets te maken heeft met schatten. Wij willen erop wijzen dat dit verband heel duidelijk wordt aangetoond en praktisch benut vanaf klas 5, o.a. bij het schatten van de uitkomst van bewerkingen met kommagetallen.

pag. 50
Wij maken ernstig bezwaar tegen de opmerking van de recensenten, dat in *boj! rekenen!* de procenten traditioneel worden aangeboden en dat de techniek van het rekenen met procenten zeer star is. Dit beargumenteert men door als voorbeeld te geven dat de metode niet het verband zou leggen tussen bijvoorbeeld 20% = $\frac{1}{5}$ deel. Het zou ons werkelijk te ver voeren, en bovendien ekstra beslag leggen op de ons toegemeten kommentaarruimte, om hier alle pagina's te vermelden waarop dit verband juist wel blijkt en wordt toegepast in de metode. Op dezelfde grond hebben wij ernstig bezwaar tegen de mededeling op pagina 51 (en zelfs als konklusie herhaald op pagina 59) dat de verbanden tussen kommagetallen, procenten en breuken worden gemist.

onze samenvattende konklusies
- De recensenten leverden op een aantal punten reële detailkritiek.
- Gebruikers van de metode hebben bepaalde wensen tot verbetering.
- Kinderen ervaren het werken met deze metode als '*boj! rekenen!*'

▶ SAMENVATTENDE KONKLUSIES (7)
- De ontwikkeling van het getalbegrip en het opereren met getallen wordt binnen *br* mede gebaseerd op de gedachte dat talstelsels hieraan vooraf dienen te gaan. Deze aanpak is in de metode konsekwent doorgezet.
  Men kan echter z'n twijfels hebben over de juistheid van de vertikale planning van een en ander. Het is met name de blijvende betekenis die aan het *mab*-materiaal toegekend wordt, die deze twijfels oproept.
- Binnen het rekenen treffen we verschillende motiverende en gevarieerde oefenvormen aan. Ook de veelzijdige inbedding bij de vorming van nieuwe begrippen is in het algemeen goed. Vooral het veelvuldige en veelzijdige gebruik van pijldiagrammen dient naar onze mening positief gewaardeerd te worden.
- Het werken met zogenoemde open beweringen, waarbij ook de relaties 'groter dan' en 'kleiner dan' betrokken worden, geeft aan de gebruikelijke sommenseries een goede verruiming.
- Hoewel het op zich verheugend is te konstateren dat het breukrekenen beperkt is gehouden, lijkt de ontwikkeling van het breukbegrip niet voldoende aangezet te worden, en komen de betrekkingen tussen verhoudingen, procenten en breuken onvoldoende uit de verf. Vooral het onderwerp verhoudingen wordt niet veelzijdig genoeg verkend.
- Wat de wiskundige leerstofonderwerpen betreft:
  - komt het meten er schraal af;
  - staat de meetkunde te zeer in dienst van de — vermeende — voorbereidende waarde voor het voortgezet onderwijs, waarvan de moeilijkheidsgraad onderschat wordt en de motiverende waarde kennelijk overschat;
  - tenderen de overige wiskundige onderwerpen soms in de richting van de formele wiskunde, terwijl we daarnaast vooral in de bovenbouw aardige aanzetten signaleerden.
- Men zou *br* dan ook kunnen bestempelen als een metode van 'zacht-struktureel' karakter. De opmerking dat *br* verklaart 'in grote trekken het wiskobasplan te volgen' is om die reden dan ook onjuist.
- De algemene toelichting is in het algemeen gesproken beneden de maat en staat in schrille tegenstelling tot de heldere leerlingenteksten.
  De onderwijzershandleidingen zijn — zoals de gehele metode — overzichtelijk, maar schieten tekort in didaktische aanwijzingen en vooral in verantwoording van de gekozen leerstof en didaktische opbouw.
- In z'n totaliteit gezien maakt *br* een degelijke en konsekwente indruk.
  Bij de overwegingen om *br* in te voeren, dient men naar onze mening vooral z'n eigen standpunt te bezien ten aanzien van:
  - talstelsels;
  - meten;
  - breuken en verhoudingen.

  Op deze punten wordt immers de bestaande rekenaanpak doorbroken.
  De schrale meetkundeaanpak van *br* hoeft men minder zwaar te laten wegen, omdat deze niet ingrijpt in het rekenonderwijs en eenvoudig vervangen kan worden door andere meetkundige aktiviteiten (zoals de bewerkers in de bovenbouw hier en daar al gedemonstreerd hebben).

VERVOLG (3)

We schreven het al in de inleiding: katern 6 zal een bespreking bevatten van de metode wiskunde voor de basisschool. *Tevens zijn we ons, ten behoeve van dat katern, aan het oriënteren op de nieuwe versie van* naar zelfstandig rekenen. *Ook proberen we, met het oog op latere katernen, een beeld te krijgen van de spullen die schoolbegeleidingsdiensten op het gebied van het reken/wiskundeonderwijs ontwikkelen.*

In een volgende fase komen we dan toe aan: getal in beeld, taltaal *en* rekenwijzer.

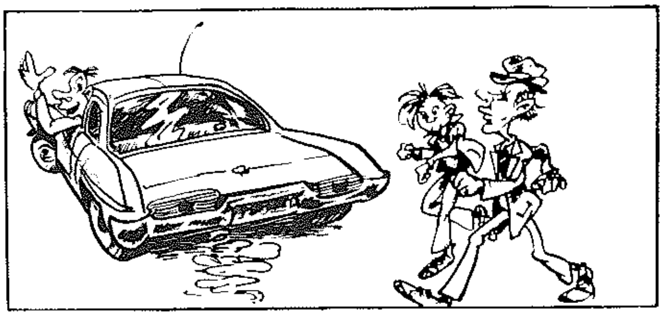
Voorlopig is er heel wat werk aan de winkel.

In 1981 autodichtheid 1 op 3

De ontwikkeling van de autodichtheid in Nederland heeft ten opzichte van het buitenland een achterstand van één jaar. Dit betekent dat pas eind 1981 de autodichtheid 1 op 3 bereikt zal worden, die de RAI zeven jaar geleden voor 1980 had voorspeld. Door de vertraging in de bevolkingsgroei houdt dit ook in dat Nederland dan niet 4,86 mln auto's zal tellen, maar 200 000 minder, zo luidt een prognose in het jaarverslag van de RAI. Ook de latere ontwikkeling van het wagenpark is natuurlijk in hoge mate afhankelijk van de ontwikkeling van de bevolking.

Op 1 augustus 1975 bedroeg de autodichtheid in Nederland bij een bevolking van 13,6 mln 1 auto op 4 inwoners, tegen 1 : 9,7 medio 1965.

Op een totaal van 3,4 mln personenauto's waren er 3,2 mln in gebruik bij gezinnen en 200 000 bij anderen (dienst- en zakenauto's).



1 Zoek de betekenis op van: R.A.I.; prognose; wagenpark; medio 1975; mln; C.B.S.; gelijke tred houden met.

2 Wat betekent het dat de autodichtheid in 1981 in ons land 1 op 3 zal zijn?

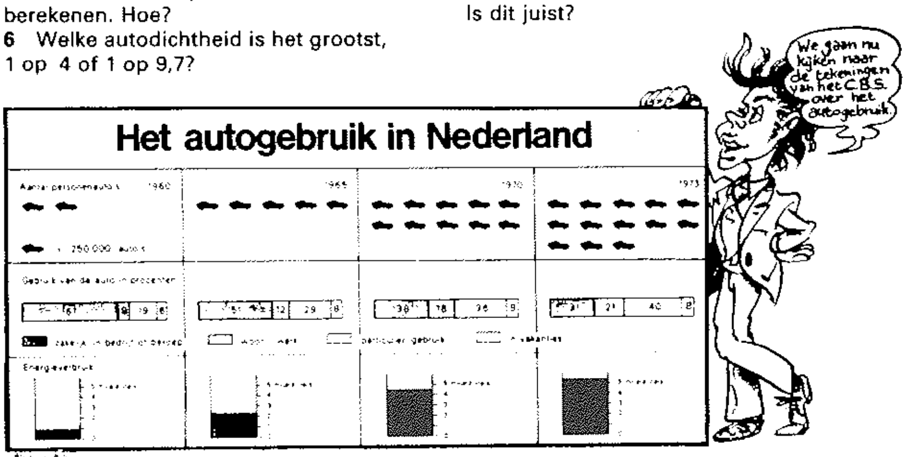
3 Hoeveel auto's zal Nederland volgens de prognose in 1981 tellen?

4 Hoeveel auto's telde Nederland in 1975? (Het antwoord staat in de laatste zin.)

5 Dit aantal kun je uit de voorlaatste zin berekenen. Hoe?

6 Welke autodichtheid is het grootst, 1 op 4 of 1 op 9,7?

7 In 1975 waren totaal 3,4 mln auto's in gebruik, waarvan 3,2 mln bij gezinnen en 200 000 bij anderen, staat er aan het eind van het artikel.
Als dit klopt, is 3,4 mln = 3,2 mln + 200 000.
Is dit juist?



8 Hoeveel personenauto's waren er achtereenvolgens in 1960, 1965, 1970 en 1973?

9 In 1965 was het aantal auto's ... keer zo groot als in 1960 (figuurtjes gebruiken).
In 1965 is het aantal auto's ten opzichte van 1960 dus gestegen met ...%.

10 Midden op de tekening staan rechthoekjes. In elk rechthoekje staan telkens vier getallen. De som van die vier getallen is in elk rechthoekje ...
Verklaar dat.

11 Teken ook zo'n rechthoekje, dat 1 dm lang en 1 cm breed is. In een bepaald jaar is het gebruik in procenten: zakelijk 27%; woon-werkvervoer 22% en vakantie 9%.
Teken nu de verdeling in de rechthoek.

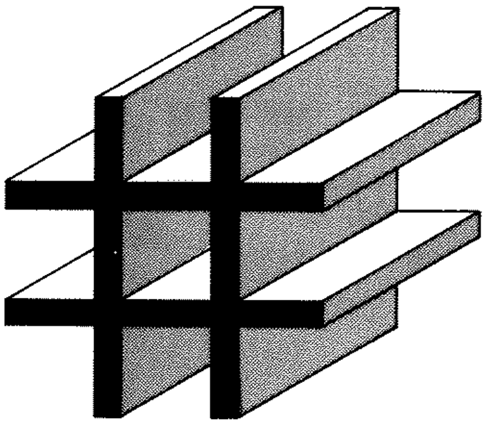
12 Is het juist, dat de toename van het benzinegebruik ongeveer gelijke tred houdt met de toename van het aantal auto's?

13 Voor 1960 staan er 2 auto's getekend. In 1975 worden dat bijna ... figuurtjes.

14 Teken nu een staafgrafiek van het aantal auto's in 1960, 1965, 1970, 1973 en 1975. Gebruik de figuurtjes boven in het overzicht.

een voorbeeld uit één van de projektboekjes (klas 6)

oefen-stoffering



KRUISGETALRAADSELS EN MAGISCHE VIERKANTEN

In de derde bijdrage van deze rubriek gaan we twee, enigszins met tabel en honderdveld verwante inkledingen voor het oefenen na, namelijk kruisgetalraadsel en magisch vierkant.
Bij het honderdveld *wordt de gebruikswaarde mede bepaald door de getallenverzameling van 1 tot en met 100 (eventueel 0 tot en met 99), die het herbergt. Dit betekent dat het honderdveld in zekere zin ook zijn beperkingen heeft. We noemden het honderdveld bij uitstek geschikt voor de onderbouw (bijvoorbeeld voor de verkenning van de getallenrij tot 100), hoewel het ook voor de hogere leerjaren nog zeer wel bruikbaar bleek.*
Bij kruisgetalraadsel *en* magisch vierkant *kan in principe vrijwel ieder onderwerp uit het basisschoolrekenen aan bod komen. Beide presenteren zich als middelen om de uitkomsten van oefenopgaven overzichtelijk en op speciale wijze te ordenen. Beide oefenvormen bieden zekere garanties tot zelfkontrole en zelfkorrektie.*
Op pag. 94 e.v. van dit bulletin treft u een aantal werkbladen op gebruiksgrootte aan.

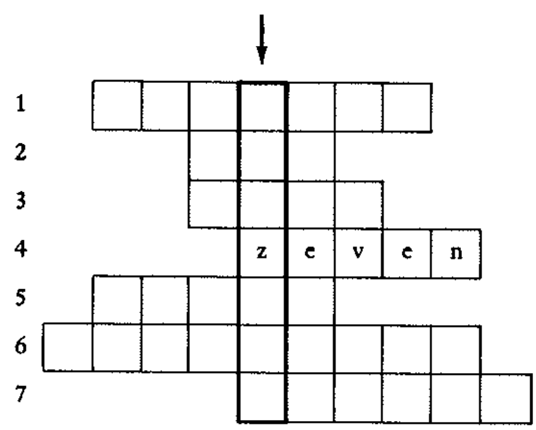
LEEN STREEFLAND

kruisgetalraadsels (1)

▶ **INSTAP (1)**

Kruiswoordpuzzels met sommen zijn motiverend bij het oefenen. Hiervoor zijn verschillende redenen te noemen.
Behalve het moment van zelfkontrole (en -korrektie) bergt het puzzelkarakter van deze vorm van oefenen ook de mogelijkheid tot het volgen van een strategie in zich. Zo is het mogelijk op verschillende plaatsen in de puzzel te beginnen. ('Eerst een paar eenvoudige opgaven en dan ...').
Ook het feit dat een ingevulde uitkomst al gedeeltelijk nog te bepalen uitkomsten onthult, kan bij het bepalen van een oplossingsweg een rol spelen. ('Als ik eerst dit horizontaal uitreken, dan ...').
De leerlingen zijn er benieuwd naar of de opgave wel juist is samengesteld. Klopt alles wel?
Tenslotte is de omvang van een opdracht duidelijk te overzien.
Wanneer we met deze oefenvorm beginnen, bijvoorbeeld in de middenbouw, is het wenselijk eerst puzzels te geven, waarbij de aandacht zich vooral richt op de techniek van het invullen.
Een voorbeeld:

Vul alle woorden in: van *links* naar *rechts*.
Nummer 4 is al gedaan.

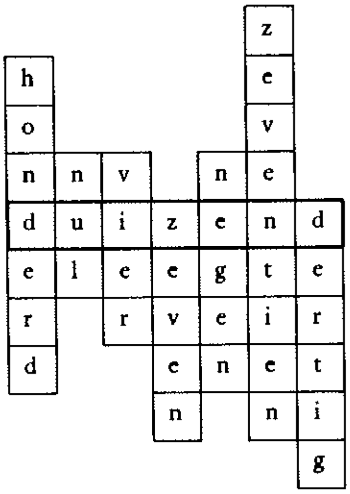


1 het dubbele van 50
2 een heel klein getal
3 het vierde deel van 16
4 de helft van 14
5 een getal onder de 10 in de tafel van 3
6 8 + 9
7 een getal in de tafel van 3 én in de tafel van 10

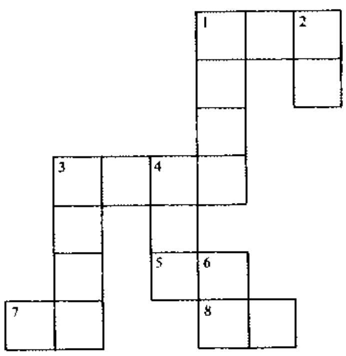
Klaar? Wat staat onder de pijl? (Van *boven* naar *beneden*).

Schrijf dit getal ook in cijfers.

Zo'n puzzel kan natuurlijk ook benut worden voor de beoefening van het vertikaal invullen:



Een andere — mijns inziens betere — start, vormen de zogenaamde 'kris-kras-puzzels':



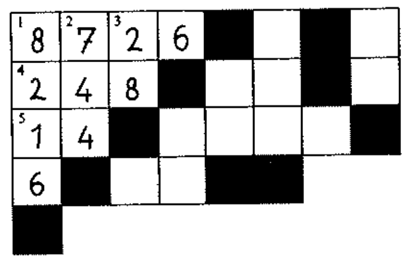
van *links* naar *rechts*:	van *boven* naar *beneden*:
1 37 + 37 + 37	1 55 + 45
3 10 x 101	2 4 x 4
5 35 — 17	3 10 x 10 x 10
7 de helft van 100	4 11 x 11
8 Els, Jan en Hans verdelen 36 knikkers. Elk krijgt ...	6 9 x 9

Het voordeel van deze instap is, dat behalve het invullen in beide richtingen, de aandacht van de leerlingen ook gevestigd wordt op hokjes, die zowel in horizontale als in vertikale antwoorden een rol spelen.

▶ SAMENSTELLING (2)

De konstruktie van een kruisgetalraadsel is betrekkelijk eenvoudig.

- Begin met het tekenen van een tabel, waarin u bepaalde vakjes uitsluit (zwart maken / arceren). Zorg er daarbij voor dat een uitkomst hoogstens een getal van resp. twee, drie of vier cijfers kan zijn, afhankelijk van de bedoeling die u met het kruisgetalraadsel heeft.
- Plaats nu getallen in de tabel, die voldoende mogelijkheden bieden, om er opgaven bij te bedenken. Wanneer de puzzel bedoeld is voor het maken van vermenigvuldigingen, let dan op deelbaarheid.



- Voltooi vervolgens de puzzel, door een vakkenaanduiding aan te brengen en bij de ingevulde getallen omschrijvingen horizontaal en vertikaal te bedenken.

Bijvoorbeeld horizontaal:
- ingevuld is 8726; u wilt een optelling als omschrijving hebben, dan 8726 — 3907 = 4819 (de aftrekker 3907 is volkomen willekeurig gekozen), dus omschrijving : 3907 + 4819;
- ingevuld is: 248; ook een deling dient naar uw mening voor te komen, dan bijvoorbeeld 248 x 8 = 1984 (de faktor 8 is weer willekeurig gekozen), dus omschrijving: 1984 : 8 ...;
- enz.

NB: In het vervolg zullen voor de aanduiding van de invulrichtingen steeds pijlen gebruikt worden. Maak ook met uw leerlingen deze afspraak.

▶ TOEPASSINGSBEREIK (3)

In principe is vrijwel ieder onderwerp uit het basisschoolrekenen geschikt om in deze oefenvorm te presenteren. De breuken vormen wellicht een uitzondering. Ingewikkelde afspraken over het invullen moeten vermeden worden. Als dat het geval zou zijn, belémmert de gekozen stoffering het oefenen.

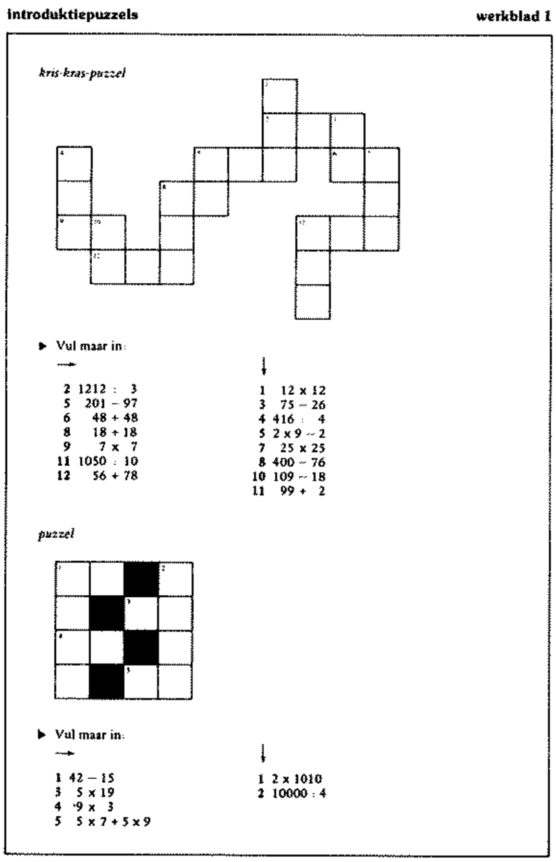
De opgaven bij een kruisgetalraadsel kunnen afgestemd worden op de bedoelingen:
- rekentaal;
- eigenschapsrekenen (hoofdrekenen);
- één of meer hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen;
- hoofdbewerkingen met kommabreuken

(mits een duidelijke afspraak gemaakt wordt over te plaatsen komma's).[1])

▶ VOORBEELDEN (4)

We ronden dit gedeelte af met enkele voorbeelden van werkbladen.

werkblad 1



Dit blad kan als introduktie benut worden. Door de aard van de opgaven past het blad binnen een les gewijd aan eigenschapsrekenen. In sommige opgaven ligt het aksent op de kenmerken van ons getallennotatiesysteem, m.n. de plaatswaarde en de nul:

— *plaatswaarde en nul:*

→ 2 1212 : 3 of ↓ 11 99 + 2.

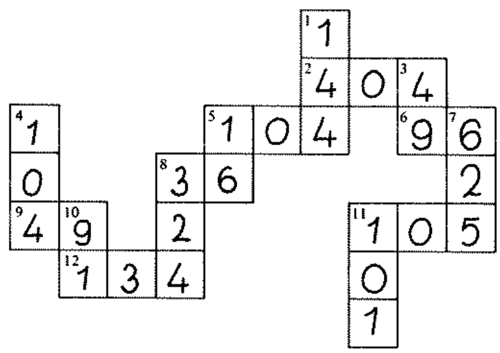
— *eigenschappen:*

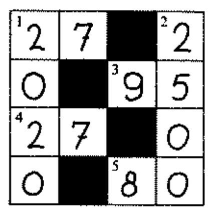
→
6 48 + 48
8 18 + 18

↓
1 12 x 12 = (10 + 2) x 12
= 10 x 12 + 2 x 12

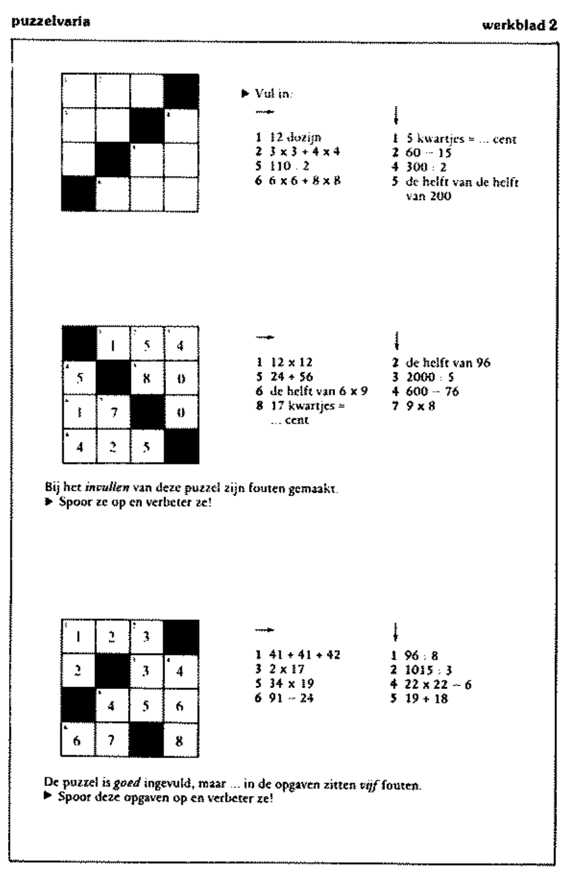
redenering: bij 18 + 18 is elk getal 30 minder dan in de opgave daarvoor; bij elkaar dus twee keer 30 minder.

uitkomsten



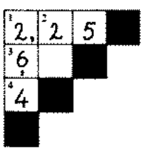


werkblad 2



---

[1]) Bijvoorbeeld: → 1 1,5 x 1,5 ↓ 1 8 x 3,3.
De komma wordt in dit voorbeeld in een vakje geplaatst achter of onder het cijfer van de uitkomst, dat de eenheden representeert.



Met dit blad bereiden we de leerlingen voor op het zélf samenstellen van een kruisgetalraadsel (in *werkblad 3*).
Na de start met een gewone puzzel, wordt een kruisgetalraadsel gegeven, dat al is ingevuld. Er zijn echter enkele foutjes ingeslopen. Aan de leerlingen de uitdaging deze te ontmaskeren.
Bij de volgende opdracht wordt de aandacht verplaatst van het ingevulde diagram naar de omschrijvingen. Uitgangspunt is de korrekt ingevulde tabel. De leerlingen worden uitgenodigd de sommen zó te veranderen, dat 'alles klopt'.

uitkomsten

1	4	4	
2	5		1
5		5	5
	1	0	0

	1	~~8~~ 4	4
5		8	0
~~1~~ 2	7		0
4	2	5	

1	2	3	
2		3	4
	4	5	6
6	7		8

▶ 1 41 + 41 + ~~42~~ 41
3 2 × 17
▶ 5 ~~34~~ 24 × 19
6 91 − 24

1 96 : 8
▶ 2 ~~1015~~ 1005 : 3
▶ 4 22 × 22 − ~~6~~ 16
▶ 5 ~~19~~ 29 + 18

'De 'foute' opgaven zijn van een driehoekje voorzien. De aangebrachte verbeteringen liggen voor de hand, hoewel antwoorden hier kunnen variëren.

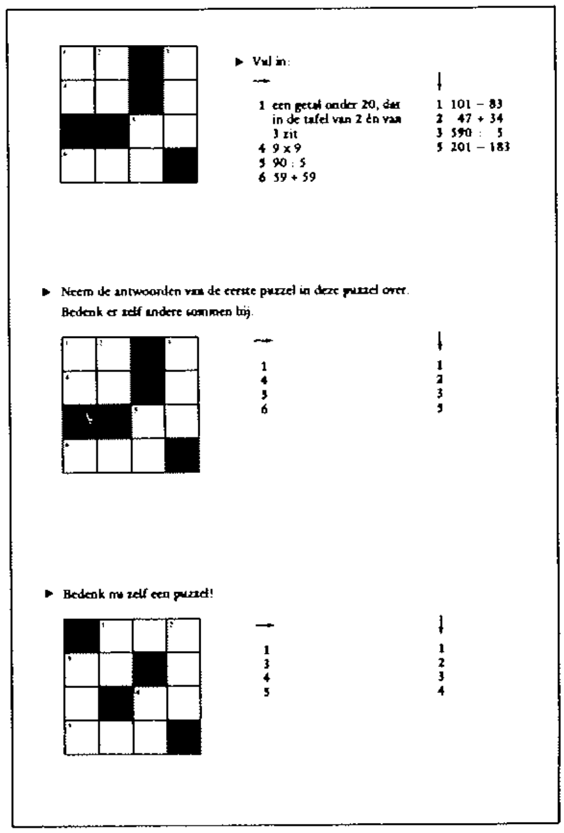
werkblad 3

Dit blad nodigt de leerlingen uit zelf een kruisgetalraadsel samen te stellen.
Na een 'gewoon' puzzeltje, waarvan de uitkomsten benut worden voor het daarbij zelf bedenken van omschrijvingen, vraagt de laatste opgave het zelf samenstellen van een eenvoudige puzzel.

uitkomsten

1	8		1
8	1		1
		1	8
1	1	8	

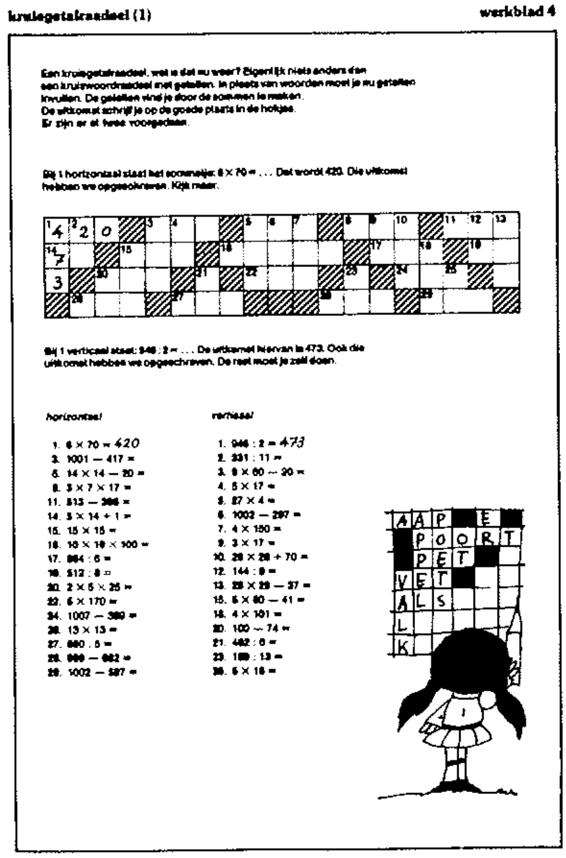
maak zelf een puzzel — werkblad 3

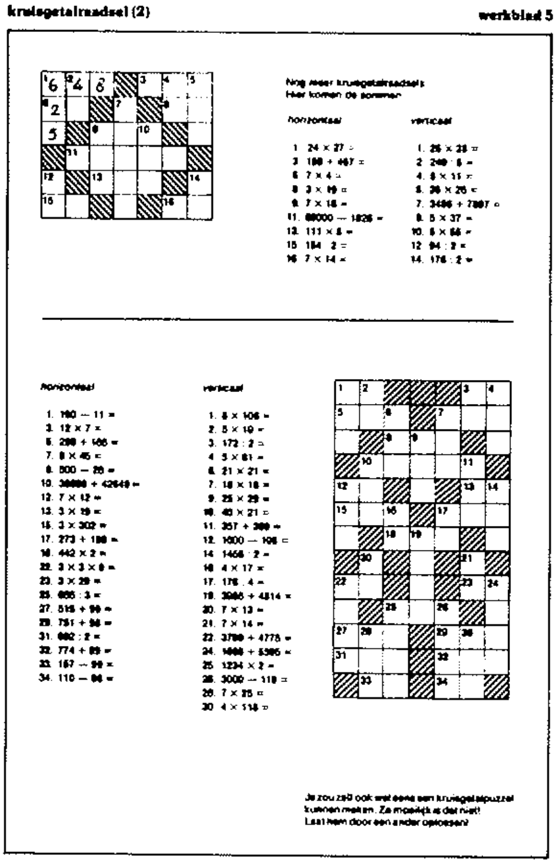


De antwoorden in de tweede en derde puzzel kunnen variëren. Wek de leerlingen wel op tot verschillendsoortige opgaven.

werkbladen 4 en 5

kruisgetalraadsel (1) — werkblad 4



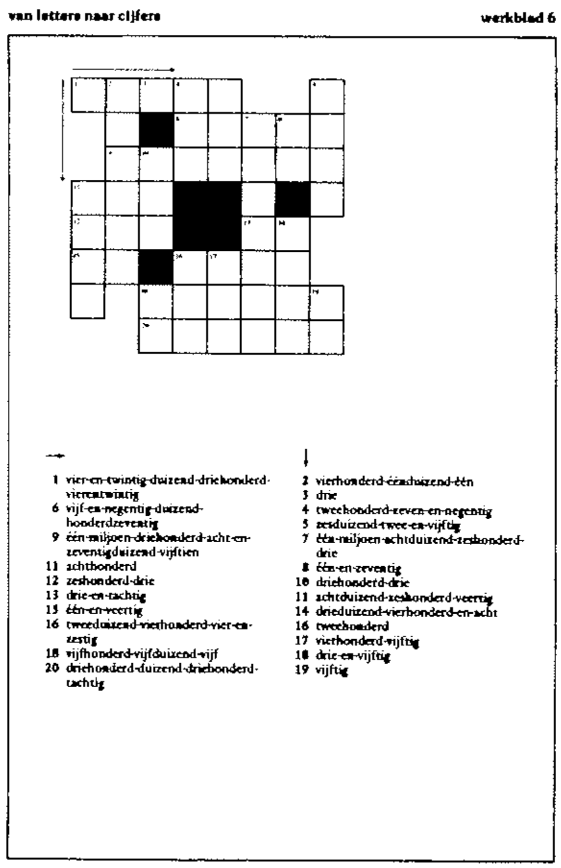


Twee werkbladen uit '*Kien*'.[1])

(1) 6	(2) 4	8	■	(3) 6	(4) 5	(5) 6
(6) 2	8	■	(7) 1	■	(8) 5	7
5	■	(9) 1	1	(10) 2	■	6
■	(11) 5	8	3	7	4	■
(12) 4	■	(13) 5	5	5	■	(14) 8
(15) 7	7	■	3	■	(16) 9	8

Voor de hogere leerjaren nemen we tenslotte een vijftal werkbladen op, die elk min of meer eenduidige bedoelingen hebben. Ze zijn afkomstig uit het bovenbouwgedeelte van het wiskobas-integratieplan.

werkblad 6



Het omzetten van getallen in letters in getallen in cijfers.

uitkomsten

(1) 8	(2) 9	■	■	■	(3) 8	(4) 4
(5) 4	5	(6) 4	■	(7) 3	6	0
8	■	(8) 4	(9) 7	2	■	5
■	(10) 8	1	2	4	(11) 7	■
(12) 8	4	■	5	■	(13) 5	(14) 7
(15) 9	0	(16) 6	■	(17) 4	6	2
2	■	(18) 8	(19) 8	4	■	8
■	(20) 9	■	7	■	(21) 9	■
(22) 8	1	■	7	■	(23) 8	(24) 7
5	■	(25) 2	2	(26) 2	■	2
(27) 6	(28) 1	4	■	(29) 8	(30) 4	9
(31) 4	7	6	■	(32) 8	7	3
■	(33) 5	8	■	(34) 1	2	■

---

1) Deel 4 (uitg. Malmberg, den bosch).

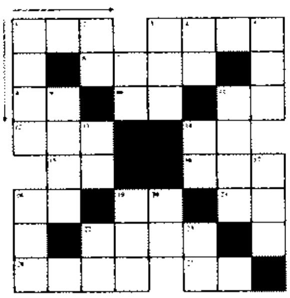
(1) 4	(2) 2	0	■	(3) 5	(4) 8	4	■	(5) 1	(6) 7	(7) 6	■	(8) 3	(9) 5	(10) 7	■	(11) 1	(12) 1	(13) 7
(14) 7	1	■	(15) 2	2	5	■	(16) 1	0	0	0	0	■	(17) 1	4	(18) 4	■	(19) 6	4
3	■	(20) 2	5	0	■	(21) 7	■	(22) 8	5	0	■	(23) 1	■	(24) 6	0	(25) 8	■	7
■	(26) 1	6	9	■	(27) 1	7	6	■	■	■	(28) 3	3	7	■	(29) 4	0	5	■

uitkomsten

2	4	3	2	4			6
	0	■	9	5	1	7	0
	1	3	7	8	0	1	5
8	0	0	■	■	0	■	2
6	0	3	■	■	8	3	
4	1	■	2	4	6	4	
0		5	0	5	0	0	5
		3	0	0	3	8	0

werkblad 7

optellen **werkblad 7**



→

1 28 + 25 + 49
3 getallen waarvan de *som* 16 is
6 getallen waarvan de *som* 24 is
8 19 + 23 + 21
10 de *som* van 10, 14 en 12
11 23 meer dan 16
12 54 + 267 + 446
14 3 + 33 + 47
15 18 vermeerderd met 19
16 getallen waarvan de *som* 13 is
18 2 + 9 + 4 + 6
19 59 vermeerderd met 27
21 11 is de *som* van deze twee getallen
22 getallen waarvan de *som* 20 is
24 578 + 692 + 361 + 860
25 getallen waarvan de *som* 12 is

↓

1 458 plus 212 plus 797
2 17 + 6
3 82 + 108 + 84 + 82
4 49 meer dan 48
5 273 vermeerderd met 116
7 25 meer dan 68
9 534 + 3097
11 getallen waarvan de *som* 15 is
13 49 + 28
14 de *som* van 19, 7, 21 en 23
17 163 + 430 + 15 + 207
18 getallen waarvan de *som* 8 is
19 84 + 97 + 78 + 257 + 365
20 26 vermeerderd met 38
22 getallen waarvan de *som* 11 is
23 de *som* van de eerste acht oneven getallen

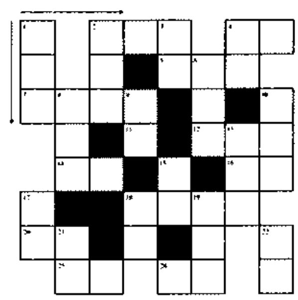
Het optellen van natuurlijke getallen en de rekentaal daarbij.

uitkomsten

1	0	2		3	9	1	3
4	■	3	9	5	7	■	8
6	3	■	3	6	■	3	9
7	6	7	■	■	8	3	
	3	7	■	■	0	6	7
2	1	■	8	6	■	3	8
4	■	2	8	4	6	■	5
2	4	9	1		4	8	■

werkblad 8

aftrekken **werkblad 8**



→

1 het verschil tussen 69 en 77
2 236 min 125
4 92 − 37
5 1341 − 547
7 884 minder dan 6040
11 102 min 98
12 950 − 125
14 13 − 7
16 hoeveel is 49 minder dan 61
18 5000 min 2484
20 trek van welk getal 23 af en houd 19 over
23 verschil tussen 91 en 34
24 187 minder dan 205

↓

1 1003 − 108
2 verschil tussen 319 en 514
3 66 minder dan 83
4 73 is hoeveel minder dan 127
6 108 minder dan 1036
8 364 − 184
9 82 min 18
10 1000 eraf 48
13 138 minder dan 354
15 verschil tussen 17 en 82
17 73 − 49
18 64 min 38
19 63 minder dan 201
21 41 min welk getal is 16
22 hoeveel is 84 meer dan 36

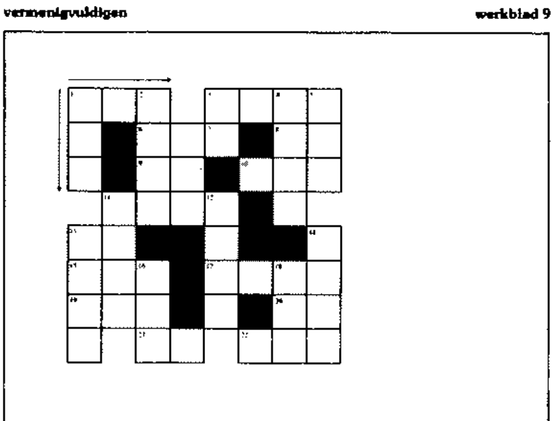
Het aftrekken van natuurlijke getallen en de rekentaal daarbij.

uitkomsten

8		1	1	1		5	5
9		9	■	7	9	4	
5	1	5	6	■	2	■	9
	8	■	4	■	8	2	5
	0	6	■	6	■	1	6
2	■	■	2	5	1	6	
4	2	■	6	■	3		4
	5	7		0	8		8

De *werkbladen 7 en 8* geven eveneens aangrijpingspunten om over eigenschappen bij het rekenen te spreken. Bijvoorbeeld, wanneer u de manier waarop de leerlingen een uitkomst bepaald hebben, ter diskussie gaat stellen:
- werkblad 7: $19 + 23 + 21 = (19 + 21) + 23$;
- werkblad 8: $1003 - 108 = (1003 + 5) - 108 - 5$.

werkblad 9


vermenigvuldigen

werkblad 9

→

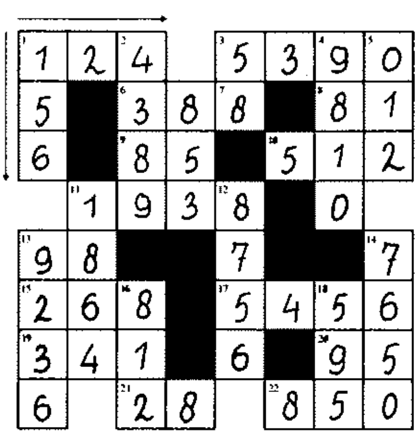
1 vier keer één-en-dertig
3 7 x 7 x 11 x 10
6 het produkt van 4 en 97
8 8 = ... x ....
9 40 = ... x ....
10 2 x 16 x 16
11 24 x 82 – 30
13 2 x 7 x 7
15 4 x 67
17 16 x 11 x 31
19 11 x 31
20 het produkt van twee getallen is 45; als je die twee getallen optelt komt er 14 uit
21 12 maal welk getal is gelijk aan 336
22 5 x 17 x 10

↓

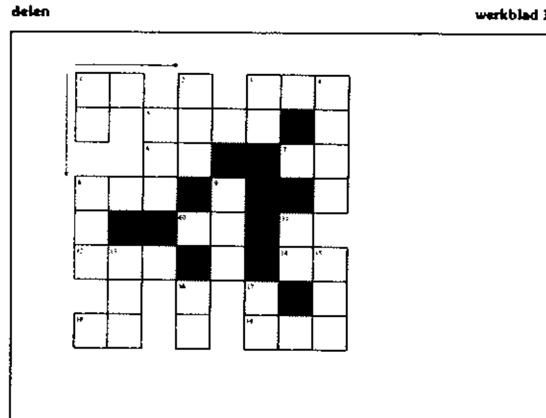
1 16 x 9 + 3 x 4
2 11 x 3 x 7 x 19
3 het dubbele van 29
4 10 x (31 x 31 + 20)
5 drie getalletjes opgeteld geeft 3; als je ze vermenigvuldigt komt er 0 uit
7 29 x 28 plus 41
11 8 x 233
12 welk getal kun je schrijven als 44 maal 199
13 311 x 31 min 5 x 9 x 9
14 3 x 3 x 5 x 10 x 17
16 4 x 203
18 35 x 17

Het vermenigvuldigen van natuurlijke getallen en de rekentaal daarbij.

uitkomsten



werkblad 10


delen

werkblad 10

→

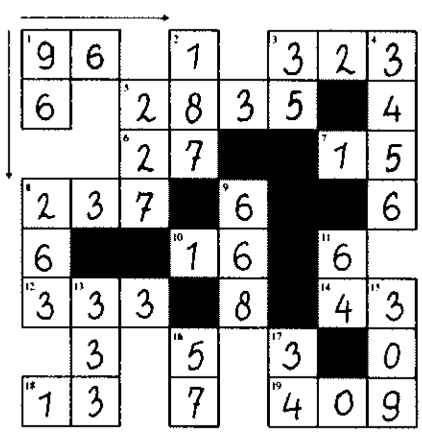
1 dit getal gedeeld door 8 is gelijk aan 12
3 234 : 13 = ... x 2 x ...
5 19845 : 7
6 625 : 25 + 2
7 wat is de rest van 1450 : 35
8 3555 : 15
10 wat is het kwotiënt van 256 en 16
12 27/8991
14 989 : 23
18 de rest als 975 gedeeld wordt door 37
19 13/3317

↓

1 het kwotiënt van 384 en 4
2 8/1496
3 als je dit getal op 1225 deelt komt er 35 uit
4 19/65664
5 5448 : 24
8 576 : 16 = ... x 6 ...
9 dit getal gedeeld door 4 is gelijk aan 167
11 dit getal gedeeld door 4 is 16
13 8991 : ... = 27
15 21/6489
16 343 : 7 + 8
17 1156 : 34

Het delen van natuurlijke getallen en de rekentaal daarbij.

uitkomsten

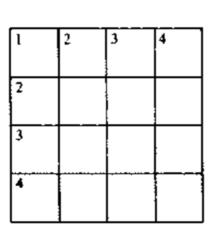


magische vierkanten (2)

▶ **INSTAP (1)**

Willen we het magische vierkant (in het vervolg *mv*) benutten voor de inkleding van oefenopgaven, dan zullen de leerlingen eerst moeten weten wat een *mv* is.

Wellicht zijn ze wel eens 'magische vierkanten' in de puzzelrubriek van een jeugdtijdschrift tegengekomen; bijvoorbeeld:



1 peulvrucht *(boon)*
2 hoofdstad van noorwegen *(oslo)*
3 plaats in overijssel *(olst)*
4 rekening *(nota)*

Deze puzzel vertoont in zoverre enige overeenkomst met het *mv*, dat in beide richtingen hetzelfde gebeurt:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Bij een *mv* is de som van de getallen in elke rij, kolom of diagonaal konstant. Deze konstante, ook wel magische konstante genoemd, is in het voorbeeld dus 34. Het is vooral dit principe, dat we bij het stofferen van oefeningen willen benutten, en wel op de volgende wijze:

▶ Vul in elk veldje één cijfer in:

→		
1		
2		
3		

→
1 12×33
2 $5 \times 166 + 11 \times 11$
3 $\frac{1}{4} \times 1000 + 4 + 47$

▶ Vul in:

↓ 1	2	3

↓
1 $1764 : 6$
2 $28 \times 28 - \frac{1}{6} \times 186$
3 $357 + 196 + 65$

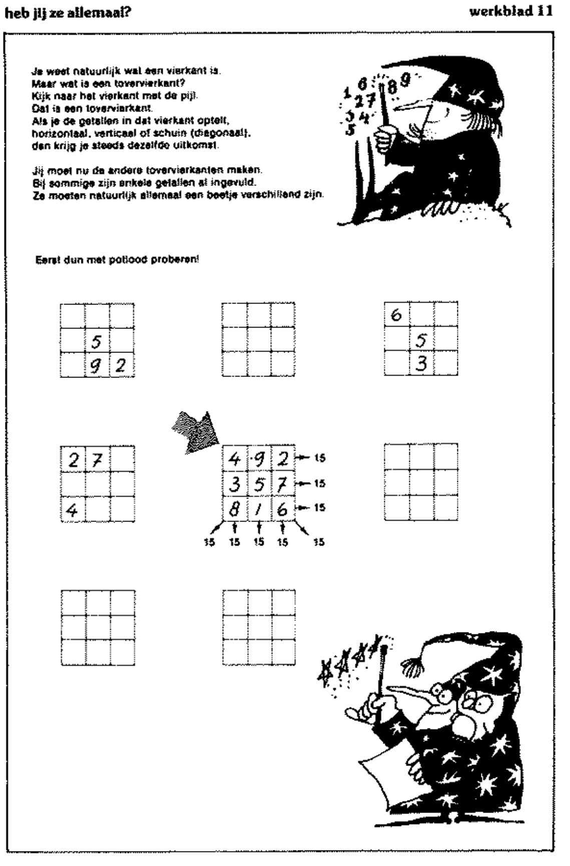
▶ Vergelijk de twee vierkanten.

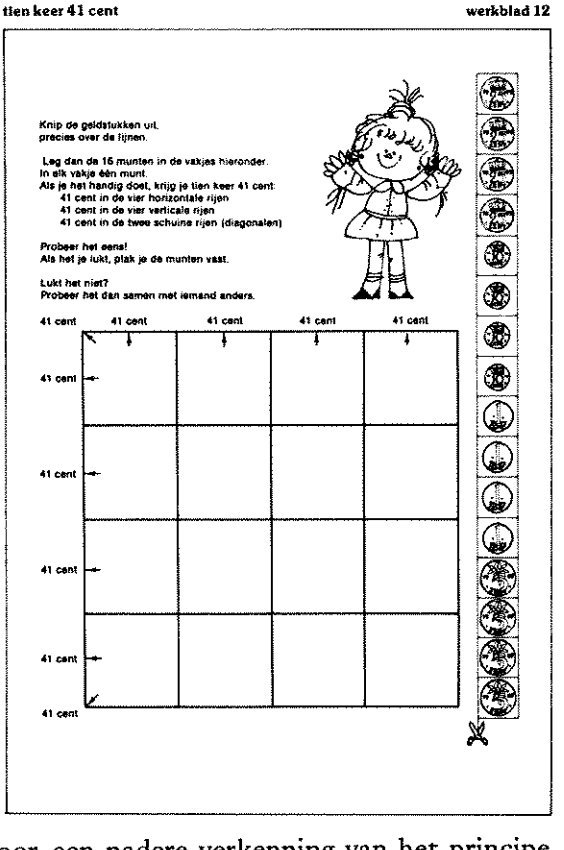
Dit eerste voorbeeld resulteert in:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

In elke rij, kolom en diagonaal zijn de ingevulde getallen samen steeds 15. Deze eigenschappen kunnen de leerlingen meegedeeld worden. Ook het zelf ontdekken behoort tot de mogelijkheden, mits de aandacht van de leerlingen wat gericht wordt.

werkbladen 11 en 12





Voor een nadere verkenning van het principe van het tovervierkant, hebben we uit *'Kien'*[1]) twee werkbladen met onderwijzerstekst opgenomen.

[1]) Deel 3 (uitg. Malmberg, den bosch).

Bij het verwerken van *werkblad 12* komt het principe van het tovervierkant goed tot zijn recht. De leerling(e) die eerst de kwartjes weglegt, merkt dat wanneer hij/zij er aan een rij, kolom of diagonaal twee toekent, de waarde in die rij, kolom of diagonaal de voorgeschreven 41 cent al ruimschoots overschrijdt.

uitkomsten

'**Heb jij ze allemaal?**
Oplossing
Er zijn acht mogelijkheden:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

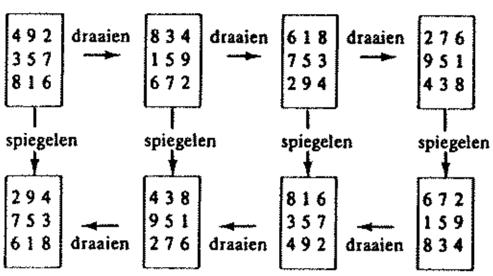
4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Opmerkingen
- Alle oplossingen kunnen uit één oplossing verkregen worden door draaien en spiegelen. Vgl.:



De leerlingen merken iets dergelijks zeker op, al zullen ze bij het beschrijven van het verschijnsel eigen woorden gebruiken. In zekere zin bestaat er dus slechts één tovervierkant van negen hokjes.
- Niet alle leerlingen hoeven alle oplossingen te hebben, al zijn er kinderen die niet tevreden zijn voor ze alle varianten gevonden hebben.
- Het blijkt dat niet alle leerlingen onmiddellijk doorhebben, dat in elk veld uitsluitend de getallen 1 tot en met 9 gebruikt mogen worden, en wel elk getal één keer.'

'**Tien keer 41 cent**
Oplossing

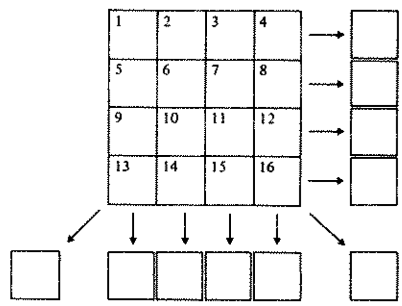
stuiver	dubbeltje	cent	kwartje
kwartje	cent	dubbeltje	stuiver
dubbeltje	stuiver	kwartje	cent
cent	kwartje	stuiver	dubbeltje

Opmerkingen
- Dit is een variant op de magische vierkanten (zie werkblad 14), waarin de som van de getallen in de rijen, kolommen en diagonalen gelijk is.
- Zoals dat vaak het geval is, treedt ook bij deze opdracht een natuurlijke differentiatie op: sommige leerlingen gaan verbazend handig te werk, bij anderen zijn we tevreden als de totalen in de rijen en kolommen f 0,41 opleveren (en met afwijkende totalen in de diagonalen).'

nog een voorbeeld

▶ In elk veld een *antwoord.*

1 9×20	9 $6 \times 7 \times 4$
2 24×5	10 $3 \times 11 \times 4$
3 12×3	11 6×4
4 9×8	12 $7 \times 3 \times 4$
5 6×8	13 3×4
6 12×5	14 $6 \times 8 \times 2$
7 24×8	15 $13 \times 6 \times 2$
8 9×12	16 $3 \times 12 \times 4$



▶ Tel nauwkeurig op in de richting van de pijlen.

Ook bij deze oefenvormgeving bestaat de mogelijkheid tot zelfkontrole en -korrektie. Overigens eist deze vorm van oefenen ook wat zelfdiscipline van de leerlingen. Hebben ze in het laatste voorbeeld eenmaal 408 als som van de getallen in rij 1 en rij 2 bepaald, dan is het verleidelijk het voor de rest maar voor gezien te houden.
Beschikt u over een ingevuld *mv*, dan is het betrekkelijk eenvoudig zelf opgaven bij de veldgetallen te bedenken. De procedure kan analoog verlopen als bij de konstruktie van kruisgetalraadsels.
Uit een beschikbaar tovervierkant zijn bovendien gemakkelijk nieuwe vierkanten af te leiden.

▶ **SAMENSTELLING (2)**
Bij *werkblad 12* werd al opgemerkt, dat zich bij het wegleggen van de kwartjes, de noodzaak opdringt ervoor te zorgen, dat géén rij, kolom of diagonaal meer dan één kwartje bevat. Deze aanpak kan als uitgangspunt dienen bij het zelf construeren van een *mv*:
- kies een getal; in het voorbeeld '1';
- zorg ervoor, dat elke rij, kolom of diagonaal telkens een '1' bevat;
- vul de overige velden met nullen:

0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	1

Het had nog minder hoofdbrekens gekost, wanneer we élk veld van een '1' voorzien hadden:

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Het bezwaar van dergelijke voorbeelden is echter, dat de gebruikswaarde, voor de bedoelingen die we ermee hebben, gering is.
De vraag is, of uit de twee nu beschikbare voorbeelden nieuwe *mv*-en afleidbaar zijn.
Samenvoegen, d.w.z.: overeenkomstige veldgetallen sommeren, geeft:

0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	1

+

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

=

1	1	2	1
2	1	1	1
1	2	1	1
1	1	1	1

Het resultaat is opnieuw een *mv*, zoals gemakkelijk voorspelbaar was. Nieuwe eksemplaren blijken dus voortgebracht te worden vanuit *mv*-en van zeer eenvoudige samenstelling.
Zo hadden we bijvoorbeeld ook twee keer de eerste plus drie keer de tweede kunnen nemen.
We moeten dan nog wel vaststellen:

- wat we onder het produkt van een getal en een *mv* verstaan;
- of het resultaat van die bewerking weer een *mv* is.

De definiëring van het bedoelde produkt ligt natuurlijk weer voor de hand: elk veldgetal van het gegeven *mv* met het betrokken getal vermenigvuldigen, levert weer een *mv* op.
Zonder nu verder op de wiskundige verantwoording in te gaan[1]), willen we voor drie-bij-drie en vier-bij-vier *mv*-en voortbrengers geven, waaruit door samenstelling alle mogelijke *mv*-en van die 'afmetingen' gekonstrueerd kunnen worden.

drie-bij-drie-voortbrengers

1	1	1
1	1	1
1	1	1

,

1	2	0
0	1	2
2	0	1

en

0	2	1
2	1	0
1	0	2

Voorbeeld:

1 x

1	1	1
1	1	1
1	1	1

+ 1 x

1	2	0
0	1	2
2	0	1

+ 3 x

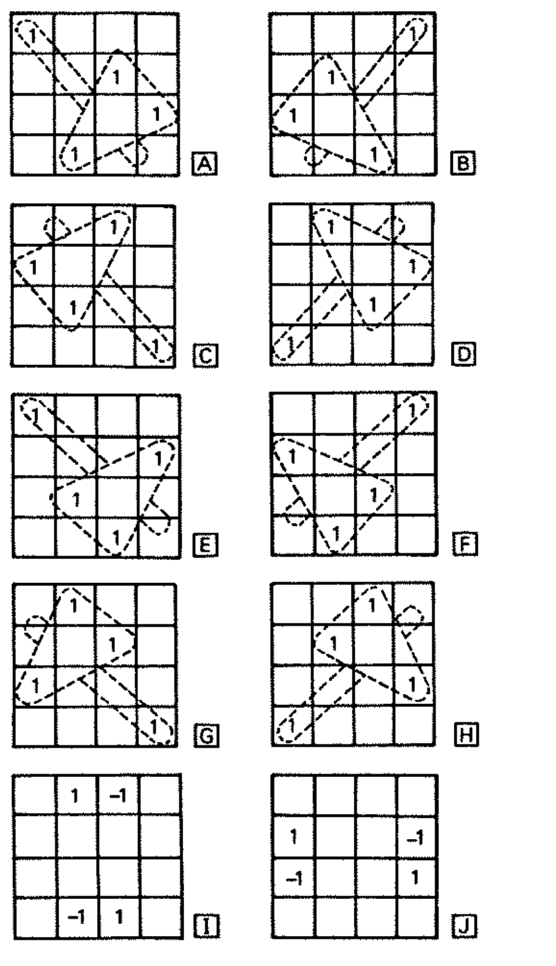
0	2	1
2	1	0
1	0	2

=

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Het verkregen vierkant is een echt klassiek *mv*, omdat de getallen van één tot en met negen zijn ingevuld. Door elk veldgetal met een vast getal te vermeerderen, zijn weer nieuwe *mv*-en afleidbaar met in elk veld een ander getal.

vier-bij-vier-voortbrengers



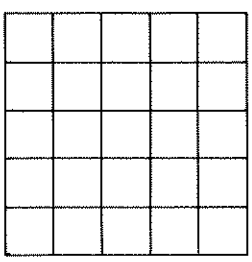
1) Zie in dit verband: F.M. Vriesendorp: *'Magische vierkanten als voorbeeld voor lineaire ruimten'*, in 'Euclides', jrg 52 nr 2.

In de *mv*-en *a* tot en met *h* is als geheugensteuntje voor het plaatsen van de enen telkens een ‘strijdbijl’ getekend.[1]) Om alle mogelijke vier-bij-vier *mv*-en voort te brengen, is het mogelijk nog twee voortbrengers weg te laten, maar niet willekeurig: *a* en *b* kunnen weggelaten worden, of *c* en *j*, of *g* en *j*.

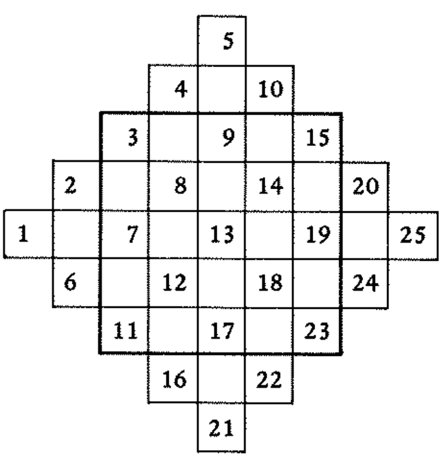
een voorbeeld
$3 \times a + 1 \times b + 2 \times c + 12 \times e + 1 \times g + 3 \times h =$

15	4	10	1
2	9	7	12
5	14	0	11
8	3	13	6

Willen we wat grotere getallen per veld, dan kan bij elk getal een vast bedrag opgeteld worden.
Tenslotte laten we — zonder verdere uitleg — nog een andere metode[2]) zien, waarmee eenvoudige *mv*-en van een oneven aantal rijen en kolommen gekonstrueerd kunnen worden:
stap 1: teken een vierkant met de gewenste onderverdeling (bijvoorbeeld vijf-bij-vijf):



stap 2: breid het vierkant naar buiten toe uit op de volgende manier:

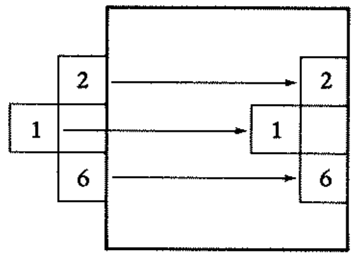


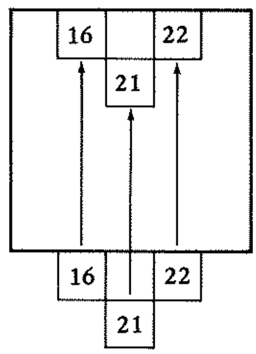
[1]) Figuur overgenomen uit: F.M. Vriesendorp: *‘Magische vierkanten als voorbeeld voor lineaire ruimten’*, in ‘Euclides’, jrg 52 nr 2.

[2]) Voor een historisch overzicht van enkele konstruktiemetoden van *mv*-en verwijzen we naar *‘Spelen met puzzels’*, boek van de maand, april 1978.

stap 3: vul nu de getallen van 1 tot en met 25 (we kozen voor een vijf-bij-vijf-vierkant) in een diagonaalrichting in;

stap 4: zorg ervoor, dat alle getallen die nog buiten het vierkant vertoeven, er binnen komen, en wel op de volgende manier:





evenzo voor de getallen aan de rechter- en bovenzijde van het vierkant;

stap 5: laat de ‘franjes’ buiten de rand weg en het *mv* is gereed voor gebruik.

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

▶ **TOEPASSINGSBEREIK (3)**
De vraag is: wat kunnen we met *mv*-en doen? Het ontdekken van de geheimen van een *mv* is op zichzelf best leuk. Is het principe eenmaal bekend, dan kan de aardigheid er toch snel af zijn.
We gaan in op de diensten, die het *mv* aan het oefenen kan bewijzen:

kontrole
Het kontroleren of een gegeven getallenvierkant al dan niet een *mv* is (het uit het hoofd optellen van kleine getallen).

aanvullen
Een onvolledig getallenvierkant aanvullen tot een *mv*.
Bijvoorbeeld:

	3	2	13
5		11	
	6	7	
4	15		

Merk op, hoe hier zowel de optelling als de aftrekking met kleine getallen beoefend wordt.

opslag van uitkomsten
Toepassing van het principe van het *mv* bij de opslag van uitkomsten van oefenopgaven.
Bij deze laatste mogelijkheid kan in principe weer het brede gebied van het rekenen aan bod komen. De uitkomsten bij de opgaven worden in een vierkant ingevuld. Het ingevulde vierkant blijkt dan een *mv* te zijn.
Het opent, zoals al werd opgemerkt, de mogelijkheid tot zelfkontrole en -korrektie. Bij niet overdadige toepassing zullen de leerlingen benieuwd zijn naar het resultaat (klopt het ook nu weer?). 't Kan bovendien voldoening geven, wanneer ze zelf onmiddellijk kunnen vaststellen of ze een taak tot een goed einde gebracht hebben.

magische vierkanten en eigenschapsrekenen
- *uitgaan van een gegeven* mv

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

- ▶ Is het een *mv*?
- ▶ Kun je een *mv* met een getal vermenigvuldigen?
- ▶ Welke regel voor die vermenigvuldiging zou je dan moeten afspreken? (elk veldgetal met het betrokken getal vermenigvuldigen)
- ▶ Krijg je weer een *mv*?
- ▶ Stel, er wordt met drie vermenigvuldigd, wat wordt er dan van het gegeven *mv*?

48	6	9	39
15	33	30	24
27	21	18	36
12	42	45	3

De getallensom per rij, kolom of diagonaal was 34.
- ▶ Wie voorspelt de magische konstante van het nieuwe vierkant?
- ▶ Wie legt dat uit?
- ▶ Wie kan het laten zien?

Natuurlijk moet die magische konstante ook driemaal zo groot geworden zijn.
Bijvoorbeeld – eerste kolom – :

$3 \times 16 + 3 \times 5 + 3 \times 9 + 3 \times 4 =$
$3 \times (16 + 5 + 9 + 4) \qquad = 3 \times 34.$

(distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging over de optelling).

NB: Zo zou ook de deling van een magisch vierkant door een getal bekeken kunnen worden.
- ▶ Welke regel moet je hiervoor afspreken?

We nemen het resultaat van zo'n deling:

$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{7}{12}$	1	$1\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Deze vormgever voor het oefenen blijkt dus ook mogelijkheden te openen voor aktiviteiten in verband met breuken.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

- ▶ Wat gebeurt er als je bij elk veldgetal hetzelfde getal – bijvoorbeeld '4' – optelt?

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

- ▶ Is het weer een *mv*?
- ▶ Wie legt dat uit?
- ▶ Wat wordt de magische konstante nu?
- ▶ Wie legt dat uit, zonder per rij, kolom of diagonaal op te tellen?

Bijvoorbeeld: 16 + 5 + 9 + 4 (= 34) wordt nu 50; want:

(16 + 4) + (5 + 4) + (9 + 4) + (4 + 4);
= (16 + 9 + 5 + 4) + 4 x 4;
= 34 + 16;
= 50

(associatieve en kommutatieve eigenschap van de optelling).

- *kunnen* mv-*en worden opgeteld?*
  Een vier-bij-vier en een drie-bij-drie-vierkant kun je niet optellen. Je moet even grote vierkanten nemen.
  - ▶ Wat betekent 'even groot'? (evenveel rijen en kolommen)
  - ▶ Is evenveel diagonalen ook goed?
  - ▶ Welke regel moet voor de optelling van *mv*-en afgesproken worden?

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

+

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

=

Ook al is het 'dichtbij huis', toch is het onder woorden brengen nog lastig genoeg: getallen in overeenkomstige velden optellen.

16+20	2+6	3+7	13+17
5+9	11+15	10+14	8+12
9+13	7+11	6+10	12+16
4+8	14+18	15+19	1+5

=

36	8	10	30
14	26	24	20
22	18	16	28
12	32	34	6

- ▶ Is de uitkomst nu weer een *mv*?
- ▶ Wat is de magische konstante van de uitkomst?
- ▶ Wie had dat vooraf al kunnen voorspellen en wie legt dat uit? En als we de *mv*-en nu eens verwisseld hadden, dus zo:

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

+

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

=

Deze verwisseling heeft natuurlijk geen invloed op het resultaat. Bij optellen mogen de getallen immers verwisseld worden.

zelf magische vierkanten bedenken
Ga bijvoorbeeld uit van:

□−3		
	□	
	□−1	□+3

- ▶ Kies □> 5. Vul dit voor elk raampje (frame) in en voltooi het *mv*.
- ▶ Vul ook nog eens een ander getal voor □ in. Maak er weer een *mv* van.
- ▶ Wie voorspelt de magische konstante?
- ▶ Wie kan het in één keer voor alle *mv*-en zeggen, die je hieruit maken kunt? (drie keer het getal, dat in □ wordt ingevuld)
- ▶ Wie maakt het *mv* af, zonder dat we voor □ een getal kiezen?

□−3	□+1	□+2
□+5	□	□−5
□−2	□−1	□+3

NB: Hier liggen duidelijk raakpunten met de wiskunde van het voortgezet onderwijs, waar het begrip variabele zo'n belangrijke rol speelt.

- ▶ Wie legt uit waarom we een getal groter dan vijf moesten kiezen? Wat gebeurt er als we dat niet doen?

▶ VOORBEELDEN MIDDENBOUW (4)

Als de leerlingen het tovervierkant verkend hebben (*werkbladen 11 en 12*), kunnen *werkbladen* als *13* en *14* verwerkt worden.

werkblad 13

ontbrekende getallen **werkblad 13**

▶ Dit is een magisch vierkant:

○	7	6
○	5	○
4	○	○

Spoor de ontbrekende getallen op.

▶ Doe hetzelfde met:

○	3	2	13
○	10	11	8
○	6	7	○
4	○	○	○

29	○	○	20	25	○
○	32	○	27	23	19
31	3	8	22	○	26
2	34	33	11	○	15
36	○	28	○	14	10
4	○	35	○	12	17

○	15	10	○
○	50	55	40
○	30	35	○
20	○	○	○

170

Bij dit werkblad gaat het om de omgekeerde relatie tussen optellen en aftrekken. Er komt wel iets van strategiebepaling kijken bij het zoeken naar de ontbrekende getallen. De leerlingen kunnen niet zomaar in het wilde weg beginnen.
Bij de eerste opdracht dient, na het vaststellen van de magische konstante, eerst de bovenste rij aangevuld te worden, waarna vervolgd kan worden met óf de eerste kolom, óf de andere diagonaal, enz.
Dit is ook kenmerkend voor de tweede en derde opdracht. De laatste opdracht wijkt in zoverre iets af, dat nog een getal is weggelaten, maar nu is de magische konstante gegeven.

uitkomsten

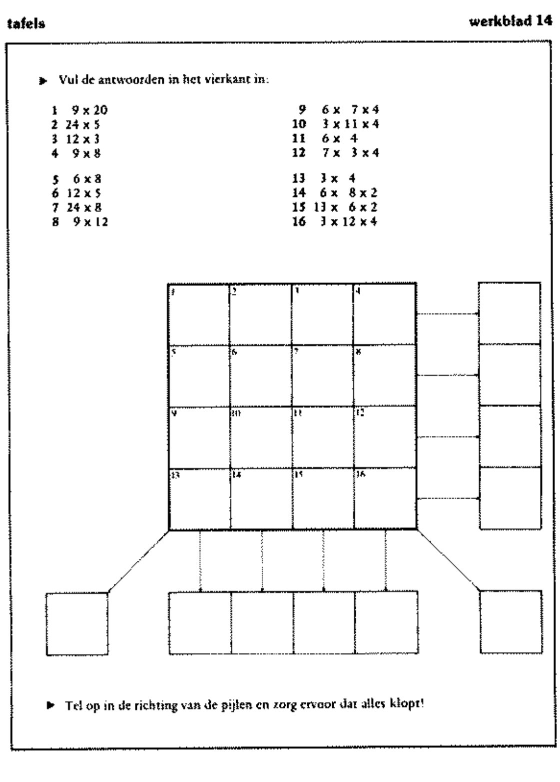
2	7	6
9	5	1
4	3	8

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

29	7	6	20	25	24
9	32	1	27	23	19
31	3	8	22	21	26
2	34	33	11	16	15
36	19	28	4	14	10
4	16	35	27	12	17

180	15	10	65
25	50	55	40
45	30	35	60
20	75	70	5

werkblad 14



tafels **werkblad 14**

▶ Vul de antwoorden in het vierkant in:

1 9 x 20
2 24 x 5
3 12 x 3
4 9 x 8

5 6 x 8
6 12 x 5
7 24 x 8
8 9 x 12

9 6 x 7 x 4
10 3 x 11 x 4
11 6 x 4
12 7 x 3 x 4

13 3 x 4
14 6 x 8 x 2
15 13 x 6 x 2
16 3 x 12 x 4

▶ Tel op in de richting van de pijlen en zorg ervoor dat alles klopt!

Dit blad richt zich uitsluitend op de bepaling van tafelprodukten, zij het hier en daar in wat samengestelde vorm.

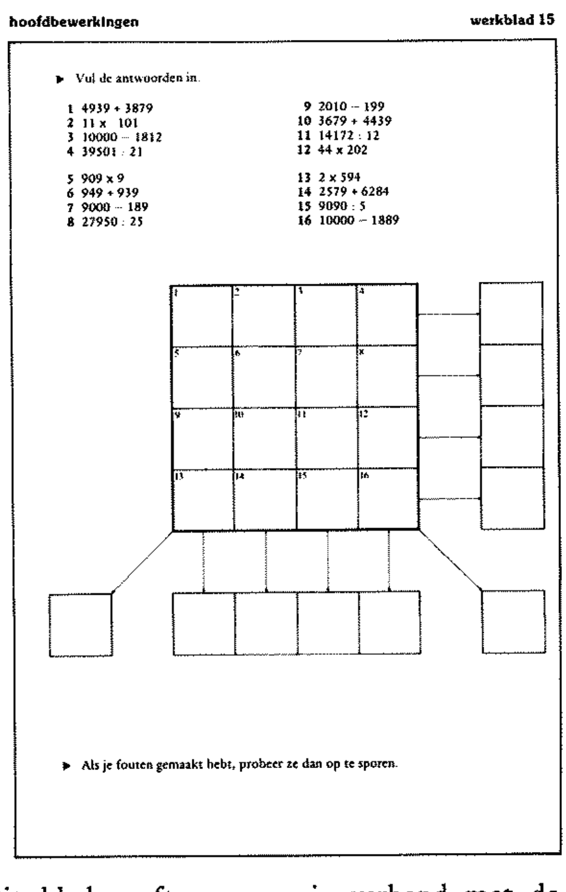
uitkomsten

180	120	36	72	408
48	60	192	108	408
168	132	24	84	408
12	96	156	144	408
408	408	408	408	408
408				

Voor verdere suggesties verwijzen we naar het volgende gedeelte.

▶ VOORBEELDEN BOVENBOUW (5)

werkblad 15



hoofdbewerkingen **werkblad 15**

▶ Vul de antwoorden in.

1 4939 + 3879
2 11 x 101
3 10000 – 1812
4 39501 : 21

5 909 x 9
6 949 + 939
7 9000 – 189
8 27950 : 25

9 2010 – 199
10 3679 + 4439
11 14172 : 12
12 44 x 202

13 2 x 594
14 2579 + 6284
15 9090 : 5
16 10000 – 1889

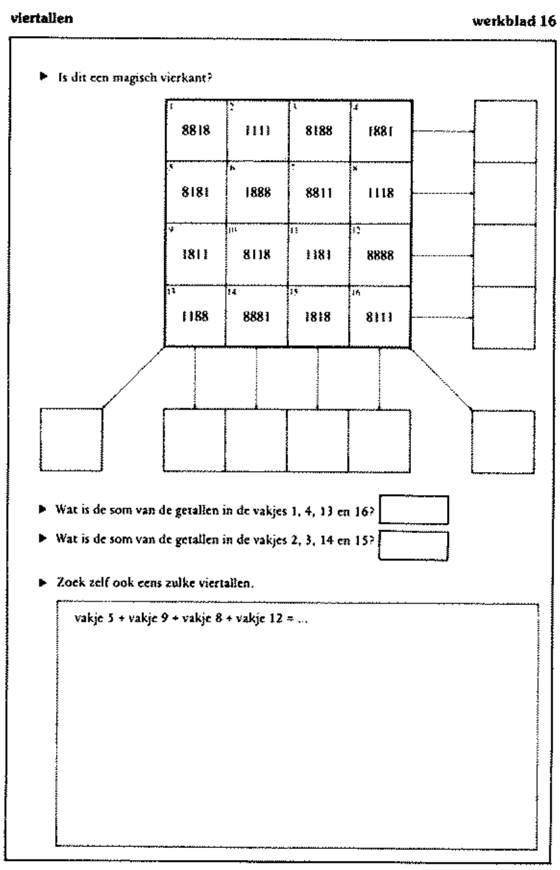
▶ Als je fouten gemaakt hebt, probeer ze dan op te sporen.

Dit blad geeft opgaven in verband met de hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen.

uitkomsten

	8818	1111	8188	1881	19998
	8181	1888	8811	1118	19998
	1811	8118	1181	8888	19998
	1188	8881	1818	8111	19998
19998	19998	19998	19998	19998	19998

werkblad 16



In dit werkblad gaat het om het zoeken van viertallen getallen, die niet op een rij, kolom of diagonaal staan, doch wel de magische konstante als som hebben.

uitkomsten

nr 1 + nr 4 + nr 13 + nr 16 = 19998;
nr 2 + nr 3 + nr 14 + nr 15 = 19998.

Enkele voorbeelden van zulke viertallen zijn nog:

nr 5 + nr 2 + nr 15 + nr 12 = 19998;
nr 3 + nr 8 + nr 9 + nr 14 = 19998;
nr 1 + nr 2 + nr 5 + nr 6 = 19998;
nr 3 + nr 4 + nr 7 + nr 8 = 19998;
nr 11 + nr 12 + nr 15 + nr 16 = 19998;
nr 9 + nr 10 + nr 13 + nr 14 = 19998;
nr 6 + nr 7 + nr 10 + nr 11 = 19998.

Naar aanleiding van dit voorbeeld is het misschien wel interessant eens een hoofdrekenles te wijden aan het *mv* dat op de *'Melancolia'*, een prent van Albrecht Dürer uit 1514, voorkomt:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Het aantal eigenaardigheden van dit vierkant doet enig recht aan het adjektief 'magisch'.

aktiviteiten

- de som van de getallen per rij, kolom en diagonaal bepalen (34);
- de som bepalen van de getallen in de hoekveldjes (16 + 13 + 4 + 1 = 34);
- de som bepalen van de vier getallen in het midden (10 + 11 + 6 + 7 = 34);
- de som bepalen van de getallen in de dikgetekende twee-bij-twee-vierkanten:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

(34);

- de volgende getallen sommeren:

	3	2	
	15	14	

5			8
9			12

		2	
			8
9			
	15		

	3		
5			
			12
		14	

(34);

- vermenigvuldig in de eerste twee rijen elk getal met zichzelf en tel op; dus:

16 x 16 + 3 x 3 + 2 x 2 + 13 x 13 + 5 x 5 + 10 x 10 + 11 x 11 + 8 x 8 (=748);

- idem met de getallen in de resterende twee rijen; dus:

9 x 9 + 6 x 6 + 7 x 7 + 12 x 12 + 4 x 4 + 15 x 15 + 14 x 14 + 1 x 1 (=748);

- als voorgaande, maar nu met de getallen uit de eerste en derde rij en de tweede en vierde rij (748);
- als beide voorgaande, maar lees nu in plaats van rij: kolom (748);
- de som bepalen van de getallen op de diagonalen en de som bepalen van de overige getallen (68);
- de som bepalen van de kwadraten van de getallen op de diagonalen en de som van de kwadraten van de overige getallen (748);
- de som bepalen van de derde machten van de getallen op de diagonalen en de som van de derde machten van de overige getallen (9248).

werkblad 17

allerlei **werkblad 17**

▶ Vul de antwoorden in de veldjes van het vierkant in.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1 4% van *f* 400,–
2 *f* 12,–; hoeveel procent van *f* 400,– is dat?
3 120 minuten = ... uur
4 een machine wordt eens per vier weken nagekeken; hoeveel kontroles zijn dat per jaar?
5 Jan fietst 18 km in één uur; hoeveel meter fietst Jan per sekonde?
6 $\frac{1}{6}$ minuut = ... sekonden
7 vader is vier keer zo oud als Jan; vader is 44 jaar; hoe oud is Jan?
8 ☐ x $12\frac{1}{2}$ = 100
9 hoe lang duurt een fietstocht van 108 km, als er gemiddeld 12 km per-uur gereden wordt?
10 Jan wandelt in één minuut 100 m; hoe ver loopt hij zo in één uur?
11 op een kaart staat : schaal 1 : 100.000; hoe lang is een weg van zeven kilometer op die kaart?
12 op een kaart staat schaal 1 : 200.000; een weg op die kaart is zes centimeter; hoe lang is die weg echt?
13 spoortijd 16.00 uur = 'gewone' tijd ... uur
14 een auto rijdt vier keer zo snel als een fietser; de auto rijdt 60 km per uur; de fietser rijdt ... km per uur
15 van een tuin, die zeven meter breed is, is de oppervlakte 98 vierkante meter; hoe lang is die tuin?
16 hoe groot is de oppervlakte van een rechthoek, waarvan de lengte 1,25 dm is en de breedte 0,8 dm?

▶ Heb je een magisch vierkant? Dan is het in orde.
Zo niet, spoor dan je misser(s) op.

Dit blad laat zien hoe alle mogelijke onderwerpen als schaal, percentages, verhoudingen, enz., met deze oefenstoffering aan de orde gesteld kunnen worden.

uitkomsten

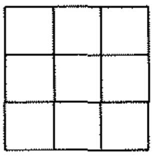
1: 16	2: 3	3: 2	4: 13
5: 5	6: 10	7: 11	8: 8
9: 9	10: 6	11: 7	12: 12
13: 4	14: 15	15: 14	16: 1

Het is natuurlijk ook mogelijk opgaven te putten uit allerlei meer recente ideeën. Bijvoorbeeld:

▶ Wat is het volgende getal in deze rij? (15)

1 3 6 10 ?

▶ Hoeveel vierkanten verbergt deze figuur? (14)



▶ MAGISCHE VIERKANTEN EN BREUKEN (6)

In (3) werd zijdelings al ingegaan op de vraag of een *mv* ook door een getal gedeeld zou kunnen worden. Dit blijkt het geval te zijn. Daarbij doet zich de gelegenheid voor het *mv* in verband te brengen met het onderwijs in breukrekenen. De plaats, die dit onderwerp in het huidige rekenprogramma inneemt, is nog altijd te omvangrijk en het belang dat eraan gehecht wordt, te groot.
De volgende suggesties dienen niet opgevat te worden als een onderschrijving van belang en omvang van het breukrekenen, maar eerder als een bijdrage tot beperking.
Uitgangspunt vormt bijvoorbeeld dit *mv*:

9	6	3	16
4	15	10	5
14	1	8	11
7	12	13	2

▶ Kan het door een getal gedeeld worden? Zo ja, welke regel moet dan afgesproken worden?

Stel, we delen door 12. Bij vrijwel alle veldgetallen gaat de deling niet op. De deling resulteert in breuken. De leerlingen worden nog eens herinnerd aan dit aspect van het breukbegrip (verdelen kan breuken veroorzaken).

$\frac{9}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{16}{12}$
$\frac{4}{12}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{14}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{7}{12}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{2}{12}$

Het resultaat van de deling door 12 vraagt om nadere bewerking:

- helen uithalen en
- gelijkwaardigheid van breuken (vereenvoudigen).

$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{7}{12}$	1	$1\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Hoewel het in (3) niet zo uitdrukkelijk gezegd is, werd het bewerken van *mv*-en alleen maar als zinvol geaksepteerd, wanneer er na de toegepaste bewerking weer een *mv* uit kwam.
De vraag luidt:
▶ Is het nu nog een *mv*?
De argumenten van de leerlingen voor het (ongetwijfeld bevestigende) antwoord verschillen:

- somkontrole per rij, kolom of diagonaal;
- terug naar het uitgangspunt en ieder veldgetal weer vermenigvuldigen met 12.

In de laatste suggestie schuilt een zinvolle aanpak voor de optelling van ongelijknamige breuken. We gaan uit van een *mv*, waarin elk veldgetal een breuk is:

$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{15}$
$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$

Over het *mv* wordt nog de volgende informatie verstrekt: eerst was dit een *mv* met hele getallen.
▶ Door welk getal zal dit *mv* gedeeld zijn?
▶ Zijn er nog meer mogelijkheden behalve 15?
Het *mv* wordt eens met 15 vermenigvuldigd.

15 ×

$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{15}$
$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$

geeft

2	9	4
7	5	3
6	1	8

.

De magische konstante van dit *mv* is 15. De konstante van het *mv* met de breuken was dus '1'.

Na enige voorbeelden proberen we ons met de leerlingen te realiseren hoe deze procedure voor het optellen van ongelijknamige breuken in het algemeen benut kan worden.
Bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \ldots$$

- stel, het is een rijtje van een breuken-*mv*;
- met welk getal vermenigvuldigen? (12, 24, ...);
- $12 \times (\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12}) = \frac{12}{4} + \frac{12}{3} + 5$
  $= 3 + 4 + 5 = 12;$
- som van de breuken 12 : 12 = 1.

We besluiten met een werkblad waarin breuken en *mv*-en samengaan.

werkblad 18

breuken **werkblad 18**

▶ Een magisch vierkant met gehele getallen werd door een getal gedeeld. Dit is het resultaat:

$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{12}$
$1\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{7}{12}$	1	$1\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Hoe zag dat magisch vierkant met gehele getallen er dan uit?

▶ Bereken:

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1\frac{1}{3} = \ldots$ $\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \ldots$

$\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} + \frac{5}{6} + \frac{5}{12} = \ldots$ $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \ldots$

$\frac{2}{3} + \frac{11}{12} = \ldots$ $1\frac{1}{6} + \frac{7}{12} = \ldots$

$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + 1\frac{1}{12} = \ldots$

▶ Maak de volgende magische vierkanten af.
De som van de breuken per rij, kolom of diagonaal moet telkens '1' zijn.

	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{15}$
	$\frac{1}{3}$	

$\frac{4}{9}$		
	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{2}$		

	$\frac{1}{3}$	
	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$

uitkomsten
De antwoorden van het eerste vierkant kunnen variëren: 12, 24, 36, ... Ook bij het tweede vierkant zijn variabele antwoorden mogelijk. Ervan uitgaande, dat 12 de meest voor de hand liggende faktor is, krijgen we:

9	6	3	16
4	15	10	5
14	1	8	11
7	12	13	2

Met behulp van de verkregen resultaten kunnen nu de in de derde opdracht gevraagde sommen bepaald worden:

$2\frac{5}{6}$	$2\frac{5}{6}$
$2\frac{5}{6}$	$1\frac{1}{12}$
$1\frac{7}{12}$	$1\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{4}$	$2\frac{5}{6}$.

Voorgaande principes zijn ook toepasbaar bij het kompleteren van de in de vierde opdracht gegeven vierkanten: vermenigvuldigen met veelvouden van resp. 15, 18 en 24:

	9	4
	5	

8		
	6	
9		

	8	
	9	10

Daarna de *mv*-en voltooien, rekening houdend met het feit, dat de magische konstanten resp. 15, 18 en 24 geworden zijn – of een veelvoud daarvan, afhankelijk van de gekozen vermenigvuldigingsfaktor – :

2		
7		3
6	1	8

	7	3
1		11
	5	4

6	7	11
13		3
5		

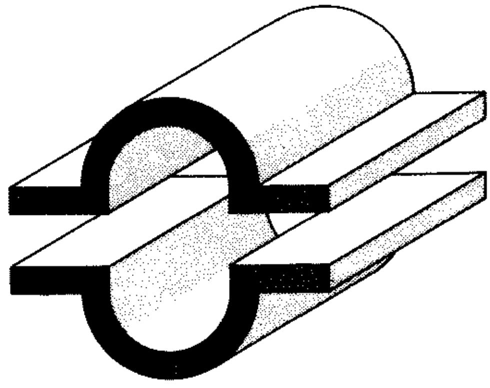
Vervolgens weer delen door 15, 18 en 24 of door een veelvoud daarvan.

Er zijn uiteraard nog andere mogelijkheden om tot de gevraagde uitkomsten te komen.

besluit (3)

Ter afsluiting van deze bijdrage nog een uitspraak ter overweging:
'Oefenen verstopt de bronnen van de inzichtelijkheid'. (Hans Freudenthal)

ander werk



DIDAKTISCH PERSPEKTIEF

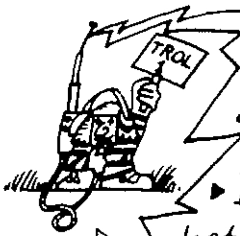
In het schoolradioprojekt 'De kamping'[1]) *komt nevenstaand werkblad voor, waarvan het de moeite waard is, eerst zelf de oplossing te bepalen, alvorens verder te lezen.*

. . . .

. . . .

Men kan zich voorstellen – zeker nu het werkblad is losgemaakt uit de kontekst van het kampingverhaal – dat onderwijzer(es) en leerlingen wat vreemd tegen deze opdracht aankeken.
De beperkte(r) doelstelling en de eenmalige aktiviteit binnen het kampingprojekt, gaven het klimrek dan ook een minder goede pers: desgevraagd wees 17% van de deelnemers dit werkblad als een van de mindere aan.
Wat kan dan de 'diepere zin' van dit werkblad zijn geweest?
Natuurlijk, het is zinvol kinderen eens te laten ervaren, hoe details van foto's, konklusies toelaten over het standpunt van de fotograaf, maar dan nog ...

EDU WIJDEVELD



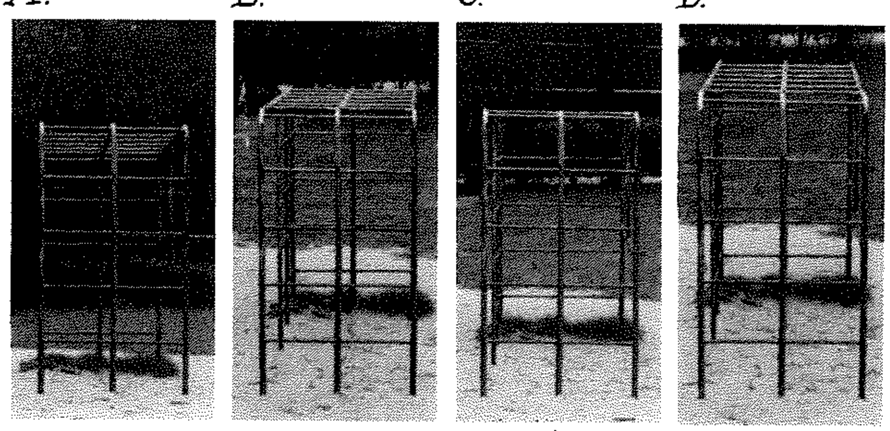
Ik heb vier foto's van het klimrek genomen. Maar ik heb het foto-toestel niet steeds even hoog gehouden.

▸ Bij welke foto hield ik het foto-toestel het hoogst?

En bij welke foto 't laagst? Zet ze eens op volgorde van hoog naar laag: ☐ ☐ ☐ ☐

hoogst laagst

A. B. C. D.



Toen ik de foto's nam, stond ik niet aldoor op dezelfde plek.

▸ Bij welke foto stond ik precies midden voor het klimrek? ______

▸ Bij welke foto stond ik iets naar links? ______

▸ Bij welke foto stond ik iets naar rechts? ______

fig. 1

het klimrek

Laten we eens te rade gaan bij een van de deelnemers aan het projekt:

> 'Omdat op de makette die we van kamping 'Berg en bos' gemaakt hadden (werkblad 10), een klimrek ontbrak, heb ik de kinderen het klimrek van werkblad 13, twee aan twee laten namaken, met rietjes en plakband.
>
> Dat viel nog niet mee. Lang niet alle kinderen bijvoorbeeld letten op het goede aantal buisjes aan de bovenkant of aan de zijkant van het klimrek. Samen hebben we het mooiste klimrek uitgezocht en op de makette geplaatst. Daarna maakten de kinderen een tekening van een speeltuin met hun eigen klimrek erin. Het was verrassend om te zien hoe ze ruimte en perspektief in hun tekening probeerden te brengen. (Ik ga hier zeker op door!) Werkblad 11 kostte daarna weinig moeite meer, omdat de kinderen al zo intens met het klimrek bezig waren geweest.'

---

1) Voor derde klassen van het basisonderwijs; zie: Leerplanpublikatie 8: *'De kamping'*, *iowo*, utrecht 1978.

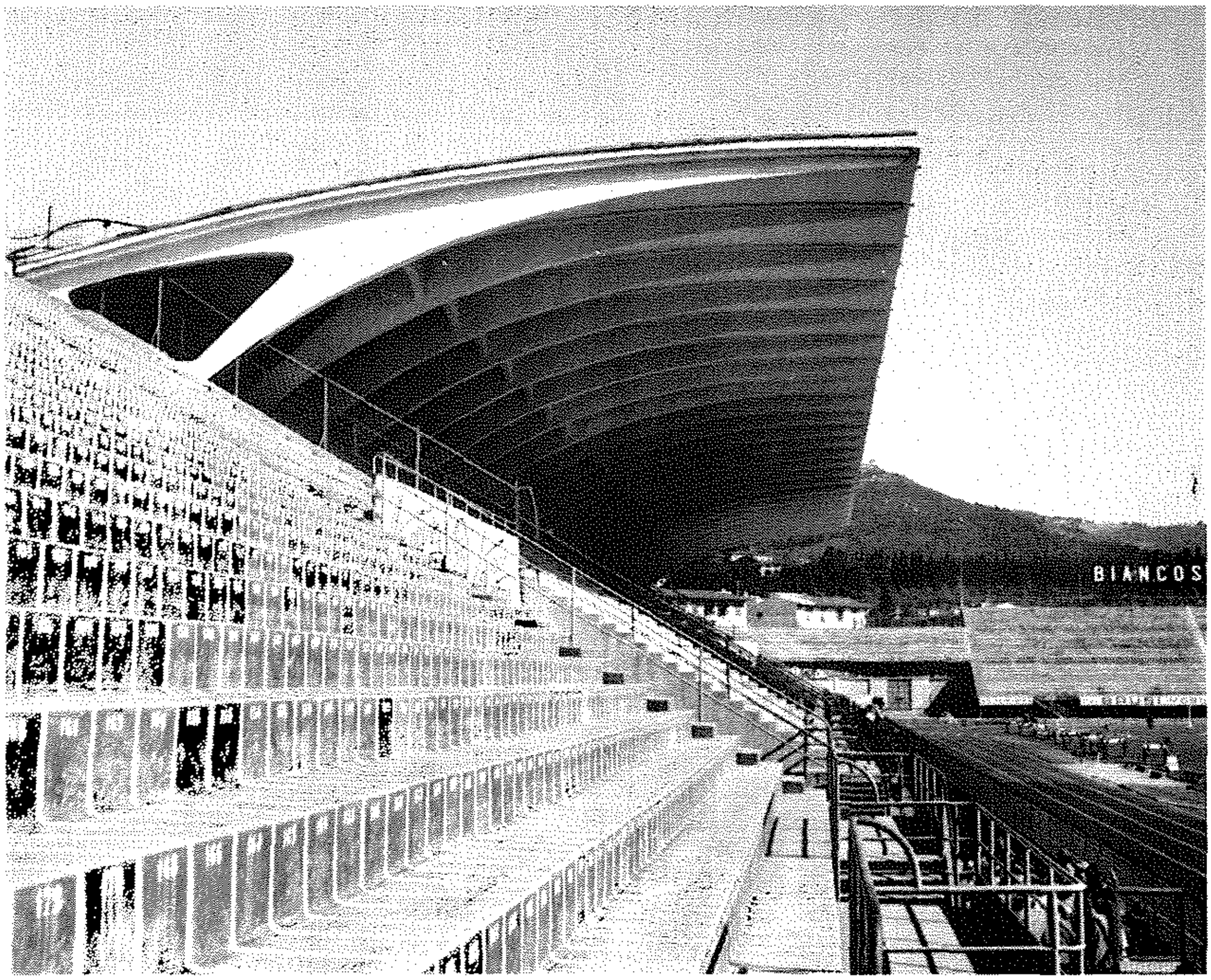


fig. 2

perspektief

Het is duidelijk dat het werkblad door deze benaderingswijze uit z'n isolement is getild en een belangrijke funktie heeft gekregen: de kinderen hebben zich niet alleen het eerdergenoemde 'standpunt van de fotograaf' gerealiseerd, maar bovendien is op 'natuurlijke wijze' – zoals een andere kollega schreef – het verschijnsel perspektief naar voren getreden. Daarmee heeft de serie foto's als het ware een stukje dagelijkse beleving vastgelegd, waar kinderen op die leeftijd zeker niet bij stilstaan.
Trouwens, 'kinderen op die leeftijd': hoe is het met 'kinderen op ónze leeftijd'?
Natuurlijk kennen we het verschijnsel van de vertekening van foto's door het standpunt van de fotograaf: oom Dirk die op het strand ligt met zóó'n hoofd en héèle kleine voetjes, omdat we de lens vlak voor z'n neus hielden. Natuurlijk kennen we het verschijnsel perspektief uit de verdwijnende spoorrails, het bootje dat op de kust af vaart en als maar groter wordt, enz.

Maar eigenlijk ligt perspektief zo in ons dagelijkse waarnemingsbeeld vervlochten, dat we het pas opmerken als het ontbreekt (een kindertekening) of als het overtrokken wordt. En dan nog ...

stadion

Bovenstaande foto bijvoorbeeld van het stadion in florence[1]) zullen we primair ervaren als een kunstzinnig plaatje. Een effekt dat de fotograaf heeft weten te bereiken door het perspektief vanuit een bizonder standpunt te overtrekken. Een perspektief, waarvan we de proporties pas goed ontdekken, als we met potlood en liniaal wat gaan spelen op de foto.
En doet u dat vooral! Leg desnoods een overtrekblaadje op de foto.

Bijvoorbeeld:

- ▶ Konstrueert u eens het 'verdwijnpunt' op de foto. (Gaan inderdaad álle 'voor-achter'-lijnen naar dit punt toe, zoals die op de sintelbaan, van de dakrand, van de staanplaatsen? En 'gelooft' uw oog dit meetkundig resultaat ook?)

---

1) P.L. Nervi; 1927–1932.

▶ Tekent u eens de (fotografische) horizon op de foto.
▶ Probeert u eens een scheidingslijn van de staanplaatsen naar boven te volgen, bijvoorbeeld vanuit het midden van het onderste standvlak (kortom: wie staan vertikaal achter elkaar?).
▶ Kunt u precies de richting aangeven van waaruit de fotograaf z'n plaatje schoot?
▶ Hoe hoog hield de fotograaf het toestel ongeveer boven z'n standvlak?

andere ogen
Wat zo'n foto allemaal niet verraden kan!
Maar in wezen doet zij dat pas als je er met een wat matematisch ingesteld oog naar kijkt. Dán word je je pas goed bewust van het geometrisch lijnenspel dat het sfeervolle plaatje in zich bergt en van de fysische wetten die daarachter verborgen zijn.
Welnu, dát was nu ook precies de bedoeling van het werkblad met het klimrek. Dáárom ook is het plaatje met het klimrek wat schraal gehouden. Het gaat er immers om dat de kinderen met het oog van de fotograaf naar deze momentopname(n) van de werkelijkheid kijken, om zich aan de hand van details het standpunt van de fotograaf bewust te worden.
Zinvol? Zoals gezegd: als eenmalige aktiviteit binnen '*De kamping*' misschien niet. Maar daarvoor draagt het projekt dan ook het karakter van een kennismaking. Een kennismaking voor de leerlingen, maar vooral ook: voor de leerkracht! Aan hem of haar is het immers om deze kennismaking — desgewenst — een vervolg te geven.
En wat het klimrek betreft, liggen daar meerdere mogelijkheden.

foto's
In het wiskobas-bulletin is al eerder beschreven welke betekenis foto's in het (wiskunde-) onderwijs kunnen innemen.
- Bijvoorbeeld voor de lagere klassen:
  Gewapend met de huls van een lucifersdoosje of het kartonnetje van een *wc*-rol, gaan de kinderen in de klas 'fotograferen'.
  .... 'Waar moet je gaan staan om juf helemaal op de foto te krijgen? En nu alleen haar gezicht? Hoeveel kinderen kun je op de foto krijgen, als je vooruitloopt, achteruit of schuin opzij?' ....[1])

De bedoeling van dit soort aktiviteiten is, dat kinderen zich meer bewust worden van de relatie tussen afstand en blikgrootte.

[1]) Zie ook: Jeanne de Gooijer: '*Kijken*', wiskobas-bulletin, jaargang 6 nr 5/6, pag. 13 e.v.


fig. 3


fig. 4

NB: Enigszins vooruitlopend, zal het duidelijk zijn, dat zo'n *wc*-kartonnetje zich ook uitstekend leent om een verschijnsel als perspektief scherper te observeren.

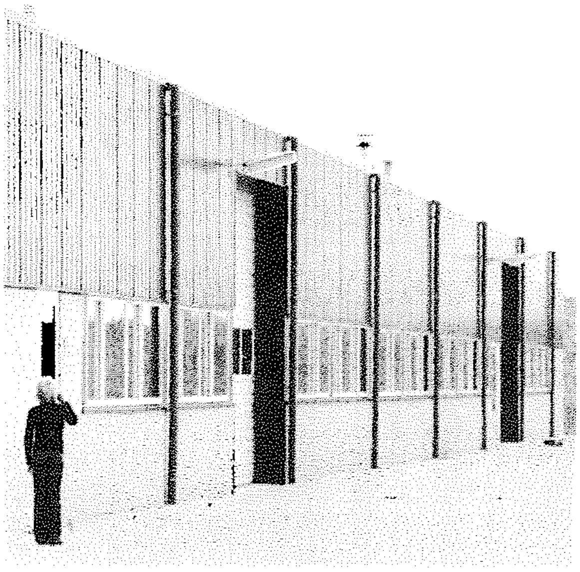


fig. 5

- In het artikel '*Kieken*'[1]) heeft Jan van den Brink o.m. beschreven hoe kinderen een serie foto's in en om de school moeten sorteren op afstand (en hoogte), van waaruit ze genomen zijn.

fig. 6

- Vergelijkbaar laat Hans ter Heege in '*Je raakt er wegwijs*'[2]) groepjes kinderen uitzoeken waar een zevental foto's genomen moet zijn, met de plattegrond van de wijk erbij.

fig. 7

fig. 8

- Tenslotte noemen we nog '*Meetkunde in de buurt*'[3]) waarin beschreven wordt hoe Gerard Wegman foto's op veelzijdige wijze gebruikt voor een stuk buurtverkenning met vijfdeklassers.

---

[1]) Wiskobas-bulletin, jaargang 4 nr 1, pag. 48 e.v.
[2]) Wiskobas-bulletin, jaargang 4 nr 1, pag. 55 e.v.
[3]) Wiskobas-bulletin, jaargang 5 nr 5/6, pag. 25 e.v.

bewustwording
Al deze aktiviteiten zijn er (mede) op gericht, kinderen bewust te maken van de 'verborgen feiten', die foto's als beschrijvingsmiddel van de werkelijkheid in zich dragen.
En het klimrek kan daar weer een aspekt aan toevoegen: perspektief!

Om te beginnen lijkt het niet onwaarschijnlijk dat de kinderen al op de hoogte zijn van het verschijnsel van de 'verdwijnende' spoorrails, of van een 'kleiner' wordende rij bomen, o.i.d.

fig. 9

Maar afgezien daarvan, zal het niet moeilijk zijn de kinderen ter plekke met het verschijnsel te konfronteren: dichtbij huis of school is zeker een rij paaltjes van een lang hek, een rij bomen, een rij lantaarnpalen, een rij even hoge huizen of flats te vinden, waaraan het perspektiefverschijnsel te observeren is.
Eenmaal daarop opmerkzaam gemaakt, zullen de kinderen er plezier in hebben zélf meer voorbeelden te ontdekken van 'kleiner worden in de verte': de vogel, de vlieger, dichtbij en veraf; het vliegtuig, hoog in de lucht en op schiphol; de wegrijdende trein of auto, enz.
Ook kunnen we de kinderen reprodukties laten zien van schilderijen en tekeningen, waarin de kunstenaar de wetten van het perspektief heeft toegepast.

fig. 10

En foto's natuurlijk: in kranten, tijdschriften of boeken zijn zeker foto's te vinden, waarin het perspektief duidelijk tot uitdrukking komt, zoals op onze stadionfoto. Het mooist zou dan zijn, als de kinderen – hopelijk net als u met het stadion van florence – met potlood en liniaal, op de foto (het) verdwijnpunt(en) zouden kunnen konstrueren.
(In dit verband mag u de kinderen trouwens best laten ontdekken, dat de tekeningen van kamping 'de wigwam' en 'berg en bos' in het werkschrift van het radioprojekt, eigenlijk niet deugen. Als u er dan maar bij vertelt dat deze 'dichterlijke vrijheid', het doel van duidelijkheid en overzichtelijkheid dient!)
Andersom mogen de kinderen natuurlijk ook in eigen ontwerp perspektief trachten toe te passen in een tekening.

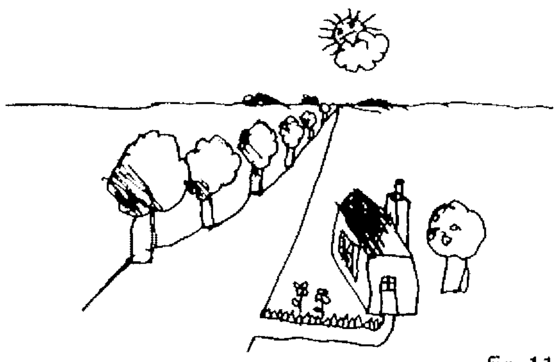


fig. 11

Dat is overigens gemakkelijker gezegd dan gedaan, zeker op het nivo van een derdeklasser.

waarschuwing

En dat brengt ons tot een tweezijdige waarschuwing:

- De belangrijkste doelstelling achter de aktiviteiten die wij tot nu toe beschreven, is de *bewustwording* van het perspektiefverschijnsel.
  Het gaat er niet om de kinderen tot volmaakte perspektiefkonstrukteurs te maken, maar om hen even te laten 'zien', te laten ervaren, wat het verschijnsel inhoudt.
- Nauw verband hiermee houden nivo en tempo, waarmee voorgaande – of andere – aktiviteiten in de klas aan de orde komen: 'bewustwording' laat zich niet afdwingen en bovendien moet het voor de kinderen speels en leuk blijven!
  Via het klimrek hebben we een aanloopje voor de derde klas, maar hoe en wanneer vervolgaktiviteiten aan de orde komen, ligt strikt individueel.

verklaring

Om die reden hebben we de kwestie van het 'waarom' achter het perspektief, ook tot het laatst bewaard.

Kinderen in de middenklassen zullen zeker genoegen nemen met de loutere waarneming: hoe verder weg, hoe kleiner. In hogere klassen echter is het denkbaar dat de vraag komt:

.... 'Maar hoe kan dat nou, die lantaarnpalen worden toch niet écht kleiner?' ....

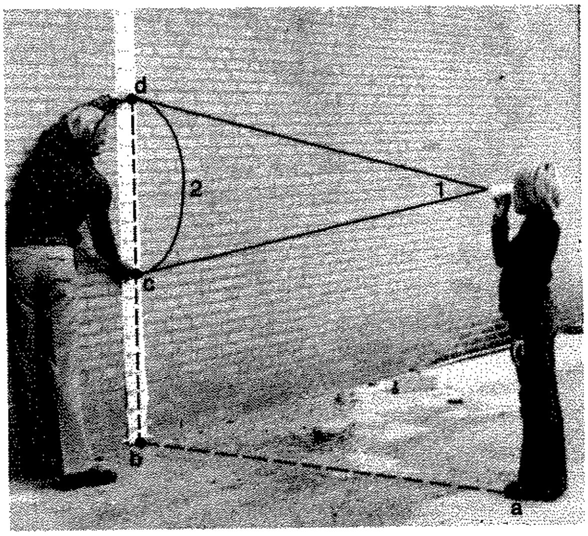
Deze vraag eist in wezen al een zodanige afstandelijke beschouwing van het perspektiefverschijnsel, dat sommige kinderen de vraag in eerste instantie niet eens begrijpen.

.... 'Nee, natuurlijk wordt hij niet kleiner, hij staat alleen verder weg.'
'Ja, maar waaróm lijkt hij dan kleiner in de verte?' ....

aktiviteiten

We willen er niet te diep op ingaan, omdat onze eigen ervaring niet verder gaat dan een aantal aktiviteiten met een zesdeklasser.

- Na op de hierboven omschreven wijze het perspektiefverschijnsel bewust gemaakt te hebben, vroeg ik Bart – we stonden bij de spoorlijn – waarom de elektriciteitsdragers steeds kleiner werden in de verte. Na enige diskussie begreep hij de vraag en kwam met het antwoord: 'omdat je in de verte steeds meer ziet'.
  In wezen zit in dit antwoord de goede verklaring besloten. Kunst was nu om die ekspliciet te maken.
- Daartoe hebben we dat 'je ziet in de verte steeds meer' gekwantificeerd.
  Met een *wc*-rolletje gewapend om de 'kijkhoek' van het oog te verscherpen, zijn we op steeds grotere afstanden van een grote muur gaan staan en hebben de 'kijkcirkel' gefikseerd en gemeten (fig. 12).

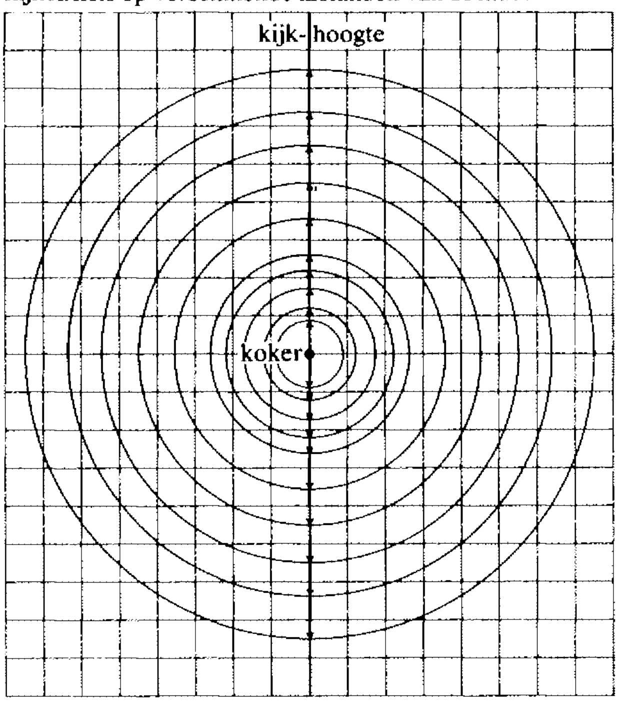


1 : kijkhoek
2 : kijkcirkel
ab : variërende afstand tot de muur
cd : gemeten middellijn van de kijkcirkel (steeds drie maal gemeten en gemiddelde genomen)

fig. 12

- De kijkcirkels hebben we thuis op schaal getekend (fig. 13).
  Terzijde: in een later stadium hebben we ook de oppervlakte gemeten – in hokjes geteld – van de cirkels met één, twee en vier meter middellijn en de kwadraatwet voor oppervlakte 'ontdekt'.
- De middellijn van de kijkcirkels hebben we ook in grafiek gezet (fig. 14).
  Nadat de vaste kijkhoek van het – bewapende – oog ontdekt was, hebben we de grafiek naar grotere afstanden geëkstrapoleerd.
- Vervolgens hebben we op verschillende afstanden, een stok van één meter in de grafiek geplaatst, en steeds de kijkhoek getekend waaronder die stok gezien werd (fig. 15).
  .... 'Waardoor lijkt die stok nu in werkelijkheid steeds kleiner te worden als je hem verder weg plaatst?', vroeg ik Bart. ....
  De vraag bleef moeilijk, maar uiteindelijk kwam toch een bevredigend antwoord:
  .... 'Omdat de kijkhoek waarmee je hem ziet steeds kleiner wordt.'
  'En de kijkhoek van je oog?'
  'Die blijft hetzelfde.' ....

kijkcirkels op verschillende afstanden van de muur

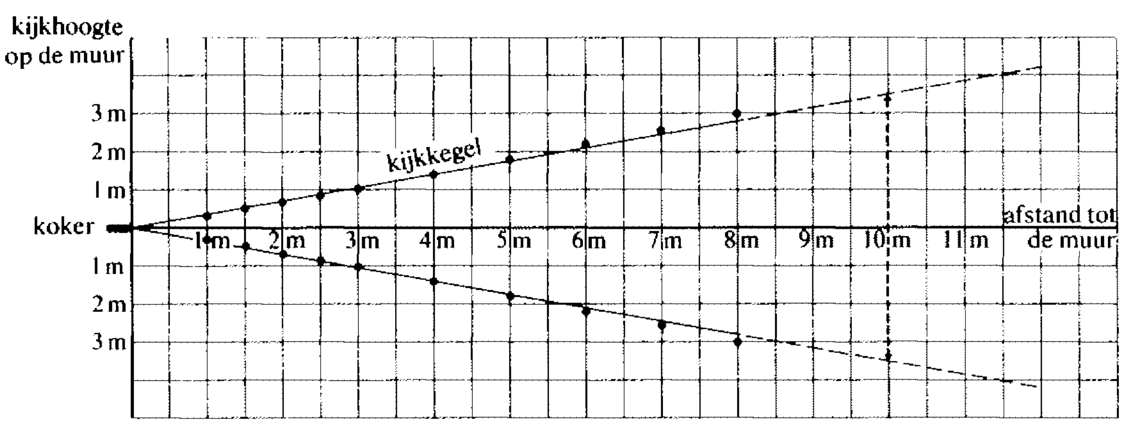


schaal: $\frac{1}{2}$ cm → 20 cm

waarnemingen:

afstand tot de muur	kijkhoogte op de muur	
0 cm	4 cm	← koker
100 cm	36 cm	
150 cm	50 cm	
200 cm	69 cm	
250 cm	89 cm	
300 cm	106 cm	
400 cm	142 cm	
500 cm	180 cm	
600 cm	218 cm	
700 cm	255 cm	
800 cm	298 cm	

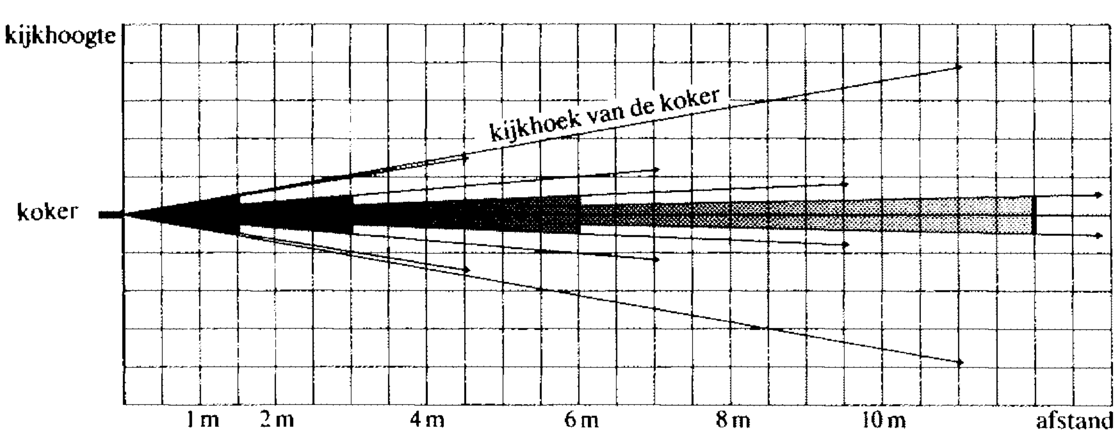
fig. 13



schaal: $\frac{1}{2}$ cm → 50 cm

		10 ×	10 ×
afstand	10 m	100 m	1000 m
hoogte	$3\frac{1}{2}$ m	35 m	350 m
		10 ×	10 ×

fig. 14



de stok blijft even groot, maar de kijkhoek wordt steeds kleiner

fig. 15

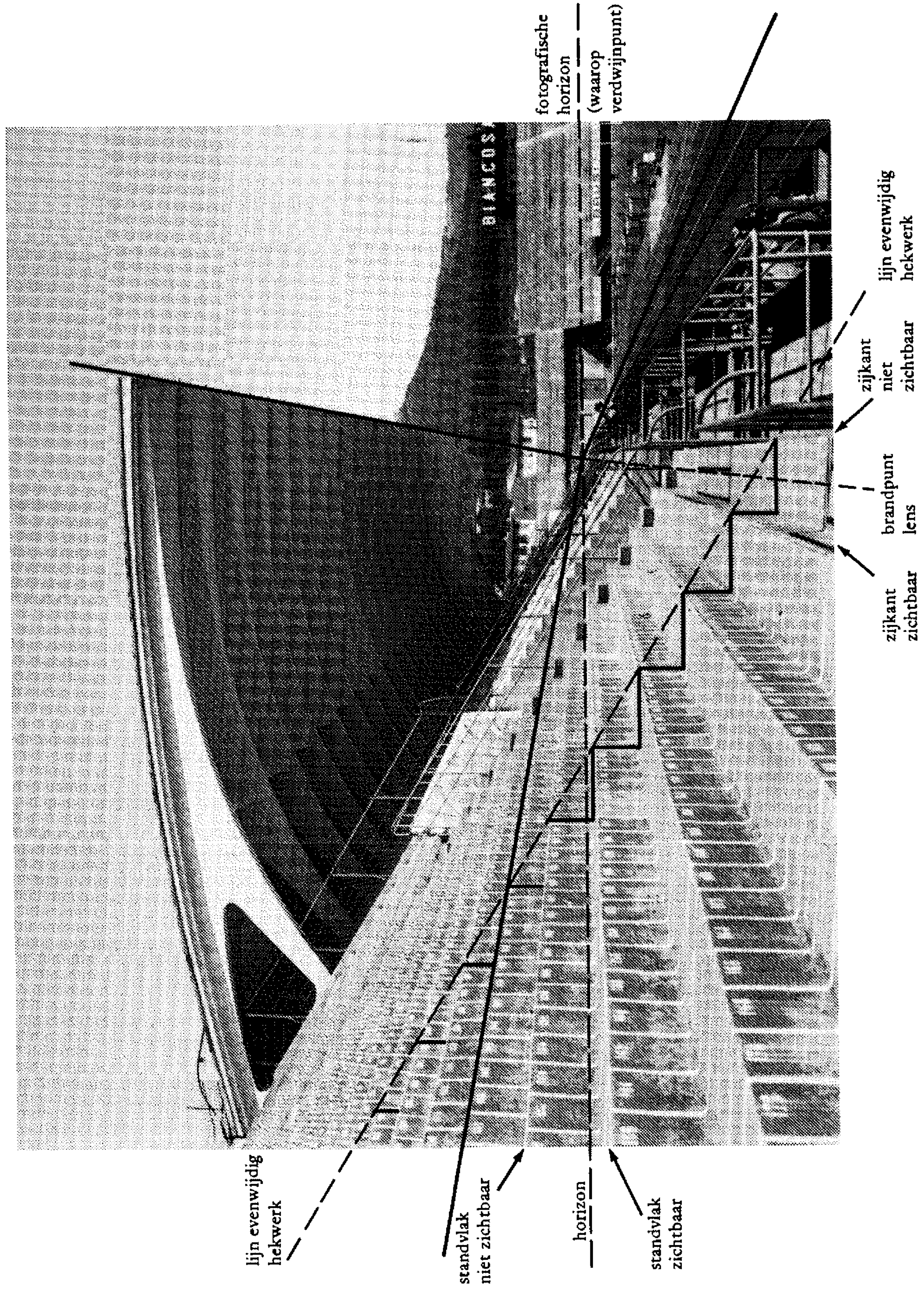
fig. 16

te snel
Het principe is hiermee beschreven. Bart doorzag de zaak ongeveer. Maar het was te snel gegaan, terwijl hij bovendien de moeilijkheid had te overwinnen dat bij de muur zijn 'oog' steeds van plaats verwisselde, terwijl in de grafiek de 'muur' steeds verschoof.
Om die reden heb ik met een gefikseerd fototoestel – 'dat werkt net als jouw oog' – bovenstaande serie foto's genomen, met een vaste achtergrond en een naar achteren verschuivend 'beeld'.
Een paar dagen later was Bart zeer geboeid door die foto's en ze gaven een mooie aanleiding het geheel nog eens op te halen en te overzien.

'blikwisseling'
Zoals gezegd: het ging allemaal wat vlug. Per slot is het ook geen eenvoudige zaak. Het eist van kinderen immers een vrij hoog nivo van 'blikwisseling': van de kleiner wordende stok (lantaarnpaal, enz.) in het – ogenschijnlijk – gelijkblijvende blikveld, naar de gelijkblijvende stok in het groter wordende blikveld.
Dit, naast de overgang van kijkcirkel (= blikveld) naar kijkhoek, maakt het geheel tot een kompleks inzicht. En al zal Bart op dit moment zeker niet precies kunnen navertellen wat er gebeurd is en hoe de vork in de steel zit, het is mijn overtuiging dat hij op basis van voorgaande ervaringen, de zaak in een later stadium veel gemakkelijker en scherper zal leren doorzien!

tenslotte
We zijn ons bewust het klimrek met deze laatste beschrijving in een erg breed perspektief gesteld te hebben; niet alleen in de tijd, maar ook kwa organisatie en nivo.
Maar de bedoeling van het voorgaande was dan ook slechts, aan te geven tot welke vervolgaktiviteiten *het klimrek* aanleiding kán geven. Niet: móet geven. Integendeel, ieder beoordele dat naar zijn of haar specifieke mogelijkheden!

Rest mij nog te verwijzen naar nevenstaand 'ingevuld' plaatje van het stadion van florence.


fotografische horizon (waarop verdwijnpunt)
lijn evenwijdig hekwerk
zijkant niet zichtbaar
brandpunt lens
zijkant zichtbaar
lijn evenwijdig hekwerk
standvlak niet zichtbaar
horizon
standvlak zichtbaar

respons

WISKOBAS BIJ HET BUITENGEWOON ONDERWIJS

Van de heer N. van Waart, inspekteur bij het buitengewoon onderwijs, kregen we een uitgebreid verslag van een 'kubusprojekt'. Dit projekt is uitgevoerd op zestien scholen voor moeilijk lerende kinderen: 225 leerlingen, in leeftijd variërend van tien tot dertien jaar.
Het is een eerste poging om na te gaan of en in hoeverre enkele ideeën die oorspronkelijk afkomstig zijn van wiskobas, een basis kunnen zijn voor het ontwerpen van reële stukken onderwijs voor moeilijk lerende kinderen. Heel voorzichtig aan wordt gestart met de verkenning van een kubus.
Van belang is dat zo'n verkenning kan plaatsvinden 'met de handen' om zodoende aan te sluiten bij de mogelijkheden van moeilijk lerende kinderen. Tegelijkertijd wordt echter nogal wat verwacht van het formuleren en redeneren der kinderen. Een onderzoek van de mogelijkheden en grenzen is zeker de moeite waard.

Met de problemen van het rekenonderwijs aan moeilijk lerende kinderen wordt de heer van Waart dagelijks gekonfronteerd. Hij is zélf met zijn projekt de boer opgegaan en heeft niet gewacht tot eindelijk eens een instantie de tijd en know-how zou hebben zich er intensief mee te bemoeien. We hebben veel respekt voor zijn initiatief.

In nevenstaande kolommen laten we zoveel mogelijk de auteur aan het woord. Hier en daar hebben we zijn tekst wat ingekort. Deze samenvattingen staan kursief gedrukt.

N. VAN WAART

inleiding
Reeds vanaf de eerste wiskobaskonferentie die ik in 1970 meemaakte, heeft het probleem van de toepasbaarheid van de wiskobasprincipes op het buitengewoon onderwijs me bezig gehouden. Uiteraard moest eerst worden aangetoond dat de nieuwe ideeën uitvoerbaar waren bij het onderwijs op de normale scholen, maar nu dit vaststaat en we in het stadium van de aktuele uitvoering zijn beland, acht ik de tijd gekomen te gaan denken aan de toepassing op andere onderwijsgebieden.
Afgezien van het onderwijs aan blinden waar een geheel eigen metodiek noodzakelijk is en waar slechts enkele projekten zoals we die kennen uitvoerbaar zijn, is het op de meeste soorten scholen voor buitengewoon onderwijs waarschijnlijk mogelijk om, zij het na enige aanpassing, het reken/wiskundeonderwijs volgens de wiskobasprincipes te geven.

Enkele soorten scholen geven daarbij typische moeilijkheden, met name de scholen voor kinderen met leer- en opvoedingsmoeilijkheden en de scholen voor moeilijk lerende kinderen (debielen). Kinderen met rekenmoeilijkheden op een *lom*-school zijn er volgens mij altijd mee gebaat wanneer wij hen in de gelegenheid stellen ordenende en strukturerende aktiviteiten te bedrijven, omdat zij dit nog veel harder nodig hebben dan normaal lerende kinderen. Dit wil uiteraard niet zeggen dat *lom*-kinderen probleemloos leren rekenen met wiskobas, maar het valt niet te ontkennen dat de voorontwikkeling die bij deze kinderen ontbreekt of achtergebleven is, tenminste wordt aangevuld door de wiskobasaanpak, en dat verschillende voorwaarden die vervuld moeten zijn om tot rekenen te kunnen komen, voldoende aandacht krijgen. Bij de klassieke rekenmetoden beginnen we praktisch altijd op een te abstrakt nivo. Door hun ijver en die van hun leerkrachten leren de kinderen op den duur wel een beetje rekenen, maar ze snappen er niets van zodat het een aangeleerd kunstje blijft.

Met de moeilijk lerende kinderen ligt de zaak geheel anders. Tengevolge van hun geringe intellekt zijn zij in de regel niet in staat enigszins draaglijk te leren rekenen. Door hun geringe denkvermogen is het voor hun echter ook niet mogelijk al redenerend tot de oplossing van allerlei probleempjes te komen, zoals we dat bij wiskobas gewend zijn. Aan de andere kant geeft wiskobas zeer veel aanschouwelijk materiaal, iets wat deze kinderen altijd nodig hebben en waarmee je bij hun tenslotte nog het meest bereikt. Voeg daarbij het feit, dat we bij de kleuters toch ook met zeer sim-

pele dingen beginnen en de gedachte ontstaat: waarom niet ook eens wat geprobeerd met moeilijk lerende kinderen?
Daarbij komt, dat deze kinderen vaak jaren en jaren achtereen bezig zijn met het maken van sommetjes op het nivo van het tweede leerjaar, soms zelfs met behulp van een telraam of de vingers. Als er zoveel tijd vrijwel nutteloos wordt besteed, dringt de gedachte aan iets zinvollers zich vanzelf op.

kubusprojekt
Vandaar dat ik een eenvoudig kubusprojekt samenstelde, dat naar mijn mening door elf- en twaalfjarige moeilijk lerende kinderen verwerkt zou kunnen worden. Ik kon echter de uitwerking niet aan de groepsleerkrachten overlaten, omdat deze de intenties van wiskobas niet kenden en teveel zouden blijven 'doceren'. Er moest zoveel mogelijk uit de kinderen zelf komen. Ik besloot daarom zelf de boer op te gaan met mijn programma, waardoor tevens een zekere uniformiteit in de aanbieding tot stand kwam, hetgeen het vormen van een eindoordeel gemakkelijker maakte.

Aan de hand van een grote kartonnen kubus (ribbe: 25 cm) wordt een gesprek gevoerd over de kubusvorm: hoekpunten, vlakken, ribben. Omdat het formuleren erg moeilijk is, mogen de kinderen aanwijzen.

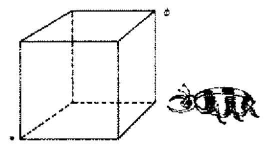
De volgorde is meestal zo:
De kinderen zien het eerst de hoekpunten. Deze worden geteld, hetgeen vrijwel altijd goed gaat. Daarna zien ze de platte vlakken. Tellen gaat goed, soms wordt de onderkant vergeten. Benoemen gaat ook goed: bovenkant, onderkant, voorkant, achterkant, zijkanten (linker- en rechterkant onderscheiden valt soms ook nog niet mee).
De ribben zien verschillende kinderen niet, ze moeten er op gewezen worden. Toch zijn er altijd wel enkele kinderen die de ribben zien als iets dat wel bij een kubus, maar niet bij een bal aan te wijzen is.
Het tellen van de ribben levert soms weer moeilijkheden op. Afgesproken wordt dat we zo tellen: eerst die aan de bovenkant, dan die aan de onderkant en daarna de ribben die van boven tot onder lopen. Verder wordt een praatje ingelast over onze eigen ribben, hoeveel dat er zijn, waar ze zitten, enz.

Via een draadkubus wordt vervolgens het inzicht verscherpt. Het ontbreken van de zijvlakken zet de kinderen aan het denken: is dit wel een kubus? Uit voorbeelden van het dagelijks leven die de kinderen daarna noemen, blijkt dat het nog steeds moeilijk is een kubus te herkennen.

Het voorgaande vormde een inleiding op het bekende probleem van de kubuskruiper.

kubuskruiper [1])

Vanuit china is een raar beest naar ons land gekomen: de kubuskruiper.
Hij kruipt over de ribben van een kubus (aanwijzen!).



Hij wil van * naar ϕ langs de korste weg.
Op hoeveel verschillende manieren kan hij dit doen?

Meestal wordt op verschillende wijzen de weg gekozen langs een ribbe en daarna diagonaal over het bovenvlak. Op een stuk papier dat het voorvlak en bovenvlak bedekt, mag de leerling met een viltstift de door hem gekozen weg tekenen. De volgende leerling in een andere kleur, tot drie à vier keer toe.
Pas na lang aandringen wordt in een derde deel van het aantal groepen door een enkeling de kortste weg gevonden. Wanneer op deze manier de kortste weg niet wordt gevonden, leggen we het papier plat en vragen dan weer naar de kortste weg die dan meestal snel wordt gezien.

kleine kubussen
Nu wordt het deksel van de grote kartonnen kubus gedaan. De kubus wordt omgekeerd en opgetild. Er blijken kleine kubussen in te zitten, in rijen van drie. De buitenkant is rood. Nadat de kinderen even hun ogen dicht hebben gedaan is hij wit. Terwijl ze toekijken, wordt de kubus weer rood gemaakt.[2])

Bij de vragen die hierna worden gesteld, blijkt duidelijk dat de kinderen er nu pas echt 'in' zijn. Ze proberen goed na te denken over de vragen die in de meeste gevallen ook goed beantwoord worden.

▶ Hoeveel zouden het er zijn?
De vele verkeerde antwoorden hierop worden voor een groot deel veroorzaakt doordat de kinderen de rekentechniek onvoldoende beheersen.

---

[1]) Zie ook: wiskobas-bulletin, jaargang 2 nr 6.
[2]) In de grote kubus zitten 27 kleine kubussen, die zo met rood papier zijn beplakt, dat ze tezamen een grote rode kubus vormen.

- ▶ Zitten er aan alle kubusjes evenveel rode kanten?
- ▶ Wie kan er een aanwijzen met drie rode kanten?
- ▶ Wie nog meer? Wijs er nog een aan.
- ▶ Waar zitten de kubusjes met drie rode kanten? Hoeveel zijn er?

Op dezelfde wijze vragen over kubusjes met twee rode kanten en met één rode kant.
Deze aantallen worden op het bord geschreven; opgeteld zijn het er 26.

- ▶ Er waren toch 27 kubusjes? Waar zit die ene die we tekort komen?

Dit is voor de meeste kinderen een onoplosbare puzzel, maar er zijn toch ook altijd wel een paar kinderen die vrijwel direkt zeggen: helemaal binnenin. We zoeken hem op om aan te tonen dat deze kubus inderdaad ongekleurd is.

Voor we de les vervolgen, wordt de kubus verzet waarbij een paar – of alle – kleine kubusjes 'per ongeluk' op de grond vallen. Het herstel gaat gemakkelijk wanneer het er inderdaad maar enkele zijn. Het opbouwen van de gehele kubus geeft veel moeite, hetgeen er op duidt dat de kinderen zich in abstrakto nog geen goede voorstelling van het geheel kunnen maken. Het kan ook komen door het 'teveel ineens' dat de kinderen te verwerken gekregen hebben.

we gaan bouwen
De kinderen krijgen elk acht kleine houten kubusjes met de opdracht:

- ▶ Bouw hier een grotere kubus van.

Op enkele uitzonderingen na lukt dat meteen. Moeilijker in te zien is, dat de kubus die ze gebouwd hebben bestaat uit 2 x 2 x 2 = 8 kleine kubussen. Dit herhaald vermenigvuldigen begrijpen ze niet, zodat we in het vervolg steeds vragen:

- ▶ Hoeveel kubussen op elke laag, en hoeveel lagen?

Het aantal kubussen per laag wordt dan evenzovele malen onder elkaar gezet als er lagen zijn en daarna opgeteld.
Nu komt de vraag:

- ▶ Als je met z'n drieën de kubusjes bij elkaar doet, heb je er dan genoeg om een nog grotere kubus te bouwen?

Sommigen komen er maar niet achter dat dit niet kan. Ze zien pas dat ze er drie tekort komen, als ze gaan proberen de 'drie-kubus' te bouwen van drie 'twee-kubussen'. Hieruit blijkt ook dat sommige kinderen nog steeds geen helder begrip hebben van de kubus: ze houden op nadat ze twee lagen op elkaar gebouwd hebben en zien dan niet dat het nog geen kubus is.

We gaan weer een stap verder en rekenen uit hoeveel kleintjes we nodig hebben voor een 'vier-kubus'. Al gauw wordt gevonden dat je dan per laag 4 x 4 = 16 kleintjes nodig hebt. Voor vier lagen zijn er dan 64 nodig (gevonden door optelling). Enkele slimmerds vinden dan uit dat je twee 'drie-kubussen' moet nemen met nog tien lossen erbij.
Op dezelfde manier gaan we dan door met de 'vijf-kubus'. De optelling is nu gemakkelijker, tenminste wanneer ze het aantal van 25 kubusjes associëren met het kwartje, iets waar lang niet elk kind zelf opkomt.

Het aardigste dat ik bij dit proces van kubussen bouwen opmerkte, was dat het gaandeweg beter lukte. Het bouwen van de 'vijf-kubus' is niet zo'n probleem als van de 'drie-kubus'. Over het begrip inhoud is niet gerept om niet teveel tegelijk overhoop te halen, maar het zelf bouwen met blokjes lijkt mij wel de beste metode om – althans deze kinderen – het begrip inhoud bij te brengen.

Tot besluit van de les wordt in een andere kontekst nog even teruggekomen op de kwestie hoekpunten, vlakken en ribben aan de hand van een ander lichaam: een prisma of afgeknotte piramide, met vijf opstaande zijvlakken.

Om na te gaan of inzicht/vaardigheid door de genoemde aktiviteiten verdiept is, krijgen de kinderen een tweetal evaluerende werkbladen: één over de kubus en een ander over de kubusdeling. Hierbij kan gekonstateerd worden dat de kinderen duidelijk begrepen hebben waar 't om ging – hoe primitief ze het soms ook formuleerden –.

nabeschouwing
In de eerste plaats moet ik melding maken van het enorme entoesiasme waarmee elke groep, zonder uitzondering, aan de slag ging en dit tot vrijwel de laatste minuut ook volhield. Voor de meeste leerkrachten was het een openbaring; niet alleen de animo waarmee werd gewerkt maar ook wat er allemaal 'uitkwam'. Deze mensen waren het dan ook eens met mijn opvatting dat wat deze kinderen met zoveel entoesiasme hadden 'geleerd', waardevoller was dan een aantal klassieke rekenuurtjes. Om het rendement van dit eenmalige gebeuren te verhogen, werd meestal met de leerkracht afgesproken dat de groep er op een of meer van de hieronder genoemde wijzen verder aan zou blijven werken:

- iedere leerling maakt op de handenarbeid- of handwerkles een kubus, van materiaal

naar eigen keuze; hij/zij mag wel worden geholpen met de techniek maar moet zelf zorgen dat het een kubus wordt;
een variatie hierop is: geef elke leerling een brok klei van hetzelfde gewicht; als de kubussen klaar zijn moeten ze precies even groot geworden zijn;
- elke leerling bouwt op zijn beurt van kleine kubusjes de hele serie grotere, van de 'twee-kubus' tot en met de 'vijf-kubus';
- leerlingen die de rekenkunst daarvoor voldoende beheersen, rekenen uit hoeveel kubussen nodig zijn voor het bouwen van de 'twee-kubus' tot en met de 'tien-kubus';
- per groep worden een of meer 'drie-kubussen' van buiten geverfd, waarna elke leerling probeert zonder hulp de kubus op te bouwen.

Het bezwaar van de *lange duur* van de les over de kubus werd opgeheven toen de stof in drieën werd gedeeld en op drie verschillende scholen, die vrij dicht bij elkaar lagen, met tussenpozen van een week werd behandeld. Er was dan ook meteen gelegenheid na de eerste en tweede les opdrachtjes te geven waarvan de uitwerking in de volgende les besproken kon worden. Dit gaf een veel rustiger beeld van het hele verloop van de lessen, maar het was niet van grote invloed op het resultaat.

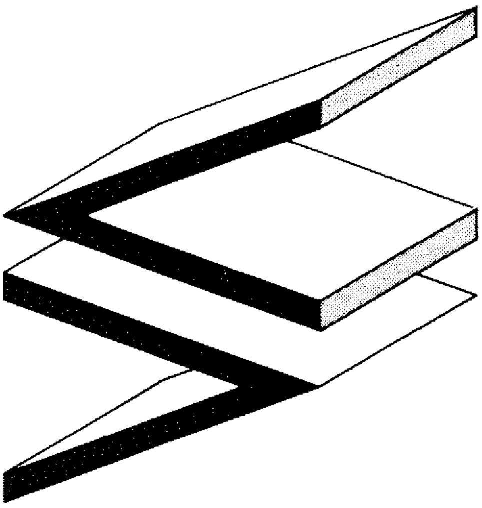
Doordat de kinderen niet aan *samenwerking* gewend waren, kwam daar dikwijls maar weinig van terecht. Voorts werden de resultaten nadelig beïnvloed door de geringe reken- en leesvaardigheid. Er werden geen pogingen gedaan de rekenvaardigheid te verbeteren, in verband met het korte tijdsbestek waarin alles moest plaatsvinden. Om dezelfde reden werden weinig rekenopdrachten gegeven. Dit laatste is ook bewust achterwege gelaten, omdat het in de eerste plaats in de bedoeling lag na te gaan of de algemene wiskobasprincipes met dit soort kinderen uitvoerbaar waren. Wat dit betreft is het eksperiment naar mijn mening ten volle geslaagd.
Er werd nagedacht – en dat voor moeilijk lerende kinderen! – waarbij gekonstateerd kon worden dat dit gaandeweg beter ging: naarmate de les vorderde werd er steeds minder zomaar uitgeflapt en kwamen er meer antwoorden waaruit bleek dat over het probleem was nagedacht.
Gaandeweg durfden ze ook meer, hadden zo nu en dan kritiek op elkaar, kregen er steeds meer plezier in en hadden bijna altijd spijt dat het afgelopen was omdat het maar voor één keertje was geweest.
Het programma werd op zestien scholen voor moeilijk lerende kinderen uitgevoerd met in totaal 225 leerlingen, variërend in leeftijd van tien tot dertien jaar, waarvan het leeuwendeel uit elf- en twaalfjarigen bestond.

Hetzelfde programma werd ook uitgevoerd op een school voor zeer moeilijk opvoedbare kinderen en op een school voor ziekelijke kinderen. Afgezien van een betere rekenvaardigheid op deze scholen, waren er nauwelijks verschillen te konstateren.

konklusies
Na afloop van het projekt kan worden vastgesteld:
- De wiskobasaanpak is ook mogelijk met moeilijk lerende kinderen, mits we de stof aanpassen aan het peil van de leerlingen. De manier van aanbieden is zeer belangrijk.
- Er is met ontzettend veel plezier en animo gewerkt. Het kan niet anders of deze wijze van 'leren' heeft meer effekt dan andere metoden. Eksakt aantoonbaar is dit uiteraard niet.
- Opzettelijk werd te weinig aandacht besteed aan het voor dit vak gebruikelijke rekenonderricht. Natuurlijk blijft het aanleren van rekenvaardigheden even hard nodig als altijd. De afwisseling van sommen maken met dit soort projekten, zal bij de meeste kinderen de motivatie om te leren rekenen, versterken, doordat ze het gevoel krijgen dat rekenen ergens voor nodig is.
- Zeer verheugend was de konstatering dat het 'naar meer smaakte'. Niet alleen de kinderen gaven hiervan blijk, ook vele leerkrachten die de les met hun groep meemaakten zouden graag wat meer op deze wijze gaan werken.

van de redaktie
Van diverse scholen voor moeilijk lerende kinderen kregen we reakties op projekten als 'De kamping' *en* 'Vierkubers'. *We overwegen, deze ervaringen regelmatig bekend te maken. We weten dat er belangstelling is binnen de kringen van het buitengewoon onderwijs.*

berichten



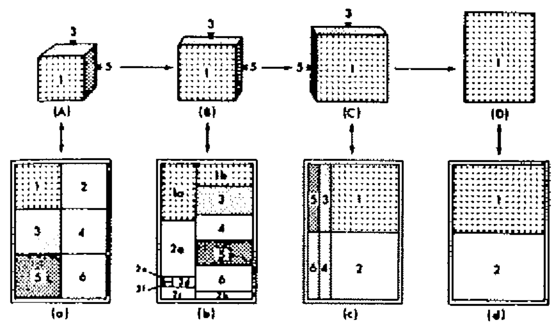
PROEFJES OVER OPPERVLAKTE

In een wiskobas-bulletin van enkele jaren geleden [1]) hebben we een berichtje geplaatst over de resultaten bij de afname van oppervlakte/omtrek-proeven van de engelse psycholoog Lunzer. Deze keer — aansluitend bij de leerplanpublikaties 7 en 9 — iets over soortgelijke proefjes met de oppervlakte, inhoud en volume van voorwerpen. De proefjes zijn afgenomen door de canadezen Pinard en Chassé bij leerlingen van de lagere school en high school en bij studenten voorkandidaats psychologie.

KLAAS KOSTER
ROB DE JONG

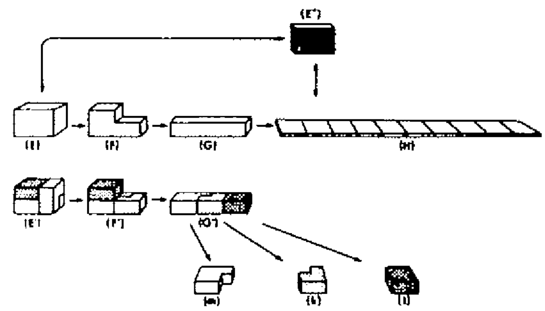
Het principe van de proefjes is tamelijk simpel. Zonder al te veel moeite zijn ze tijdens hospiteerperioden op scholen af te nemen. Ook voor studenten op pedagogische akademies en kollega's op school kunnen de proefjes interessant zijn.
De proefjes bestaan uit vier opgaven met het volgende materiaal:

taak 1 en 2



materiaal voor taak 1 en 2; (A), (B) en (C) zijn de gebruikte blokken; (a), (b) en (c) zijn identieke raamwerken waarbinnen verplaatsbare stukken vinylboard worden gelegd, ter grootte van de gezamenlijke oppervlakte van de zijden van de blokken (zichtbare gedeelten = oneven getallen, onzichtbare gedeelten = even getallen); (D),(d) geeft het uiterste grensgeval weer

taak 3 en 4



het materiaal voor taak 3 en 4 bestaat uit blokken (E), (F) en (G); (k), (l) en (m) zijn deelstukken voor de samenstelling van overeenkomstige blokken (E'), (F') en (G'); het uiterste grensgeval bestaat uit (H); (E'') bestaat uit de stapeling van de onderdelen van (H); (E'') is kwa volume gelijk aan (E)

In *taak 1 en 2* is de gezamenlijke oppervlakte van de zijden van de blokken gelijk, maar wisselt de inhoud of het volume.
Aan de proefpersonen werd in *taak 1* gevraagd met de stukjes vinylboard uit het raamwerk, de voorbeelddoosjes na te maken en deze te vullen met 'cement'. Vervolgens werd eerst gevraagd of de drie doosjes ieder met dezelfde

[1]) Jaargang 2 nr 2, pag. 623-624.

hoeveelheid verf een andere kleur zou kunnen worden gegeven en daarna of in ieder doosje evenveel cement ging.
In *taak 2* werd gevraagd of het water in een doorzichtige plastic bak evenveel zou stijgen als de doosjes werden ondergedompeld.
Voorbeeld (*D*) werd gebruikt om eventueel duidelijk te maken aan de proefpersonen, dat de oppervlakte van (*D*) gelijk is aan dat van de doosjes, maar de inhoud of het volume niet.

Soortgelijke vragen werden gesteld bij de *taken 3 en 4*, alleen blijven nu de inhoud of het volume van een voorwerp invariant en verandert de oppervlakte. De drie blokjes (*E*), (*F*) en (*G*) hebben dezelfde inhoud (187,5 cm^3), maar verschillen in oppervlakte: 200 cm^2 (*E*), 225 cm^2 (*F*) en 250 cm^2 (*G*).
Bij *taak 3* werd gevraagd of de dozen (*E*), (*F*) en (*G*) elk evenveel cement kunnen bevatten. De proefleider had tevoren laten zien hoe de overeenkomstige blokken (E'), (F') en (G') opgebouwd konden worden uit (*k*), (*l*) en (*m*).
Bij *taak 4* werd gevraagd: zullen (*E*), (*F*) en (*G*) evenveel water verplaatsen bij onderdompeling?
In beide gevallen werd vervolgens naar de oppervlakte gevraagd: net zoveel verf nodig?

De antwoorden van de proefpersonen werden in vier nivo's ingedeeld:
1: gebrek aan konservatie van de dimensie die gelijk blijft;
2: pseudokonservatie van de dimensie die verandert;
3: goede oplossing na demonstratie, zonder logische verklaring;
4: goede oplossing met een logische verklaring.

Zelfs studenten in de psychologie bleken problemen te hebben bij het geven van goede oplossingen op nivo 3. Goede oplossingen met een logische verklaring bij de taken 3 en 4 kwamen pas omstreeks de leeftijd van 15 jaar voor, en dan nog maar in 50 procent van de gevallen.
De proefjes van Pinard en Chassé laten opnieuw zien dat het verwerven van begrippen als inhoud, volume en oppervlakte veel meer veronderstelt dan het kunnen hanteren van regels als lengte maal breedte maal hoogte.[1])

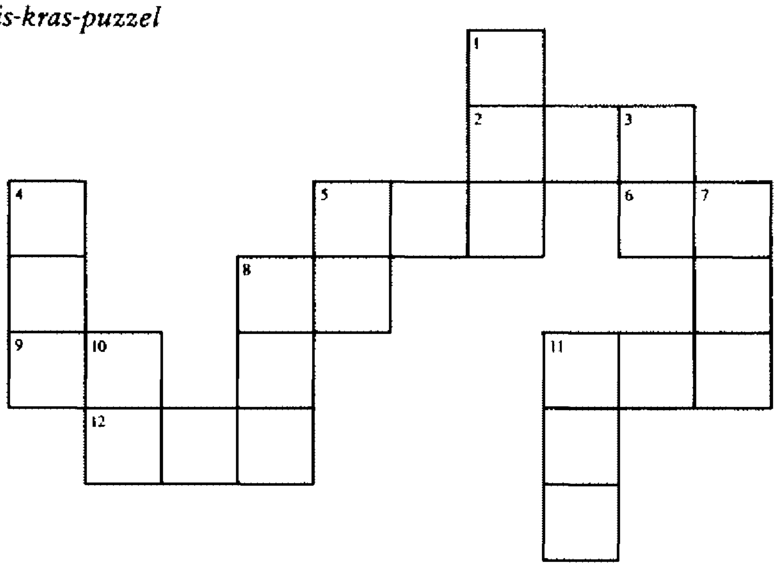
kursus oppervlakte
Onlangs is het wiskobas kursuspakket 'oppervlakte' gereed gekomen. Het gaat om een kursus, waarbij o.m. gebruik gemaakt wordt van de leerplanpublikaties 7 en 9. Gedurende zes bijeenkomsten wordt door volledige schoolteams gewerkt aan de samenstelling van een eigen deelleergang oppervlakte. In een (nu) nog niet helemaal bekend aantal plaatsen zal de kursus van start gaan.
Voor nadere informatie kunnen schoolteams terecht bij een pedagogische akademie in hun omgeving.

uitbreiding innovatieproces basisschool
Met ingang van het schooljaar 1978/1979 is het aantal scholen, dat betrokken is bij het innovatieproces basisschool, aanzienlijk uitgebreid. Na advisering door de innovatiekommissie basisschool, heeft minister Pais besloten een aantal ontwikkelingsprojekten basisschool te starten in montessori-, jenaplan- en vrije scholen. Het gaat hierbij om 14 kombinaties van kleuter- en lager onderwijs. Daarnaast zijn ongeveer 450 kombinaties van kleuter- en lager onderwijs opgenomen in een aktiveringsplan.
Voor het schooljaar 1979/1980 staan nog eens 25 ontwikkelingsprojekten basisschool op stapel. In de planning wordt er naar gewerkt dat in ieder verzorgingsgebied van een onderwijsbegeleidingsdienst minstens één ontwikkelingsprojekt basisschool is gesitueerd.
In de loop van het schooljaar 1978/1979 zal een aanmeldingsprocedure worden geopend voor de eerste serie projekten.
Minister Pais heeft meegedeeld er naar te streven, dat met ingang van 1 augustus 1983 een nieuwe wettelijke regeling voor het basisonderonderwijs van kracht wordt.

register
In deze aflevering van het bulletin is een register van zeven jaargangen wiskobas-bulletin gevouwen. Het kan zijn dat u bij doorbladering titels aantreft die u nader wilt bestuderen. Van enkele afleveringen is nog een beperkt aantal exemplaren in voorraad. Op de binnenzijde van de omslag staan de nummers die bestelbaar zijn.
Verder wijzen we erop dat de dokumentatiecentra van vrijwel alle pedagogische akademies en begeleidingsdiensten het volledige wiskobasmateriaal – althans, voor zover gepubliceerd – in bezit hebben.

[1]) Pinard, A. en G. Chassé: *'Pseudoconservation of the volume and surface area of a solid object'*, in 'Child Development', 1977, 48, 1559-1566.

kris-kras-puzzel



▶ Vul maar in:

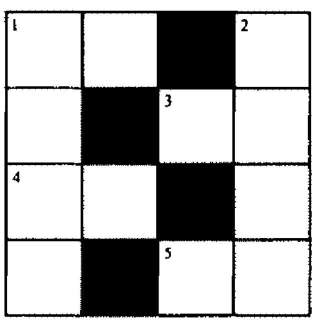
→

2 1212 : 3
5 201 − 97
6 48 + 48
8 18 + 18
9 7 x 7
11 1050 : 10
12 56 + 78

↓

1 12 x 12
3 75 − 26
4 416 : 4
5 2 x 9 − 2
7 25 x 25
8 400 − 76
10 109 − 18
11 99 + 2

puzzel



▶ Vul maar in:

→

1 42 − 15
3 5 x 19
4 9 x 3
5 5 x 7 + 5 x 9

↓

1 2 x 1010
2 10000 : 4

[1]	[2]		■
[3]		■	[4]
	■	[5]	
■	[6]		

▶ Vul in:

→	↓
1 12 dozijn	**1** 5 kwartjes = ... cent
2 3 x 3 + 4 x 4	**2** 60 – 15
5 110 : 2	**4** 300 : 2
6 6 x 6 + 8 x 8	**5** de helft van de helft van 200

■	[1] 1	[2] 5	[3] 4
[4] 5	■	[5] 8	0
[6] 1	[7] 7	■	0
[8] 4	2	5	■

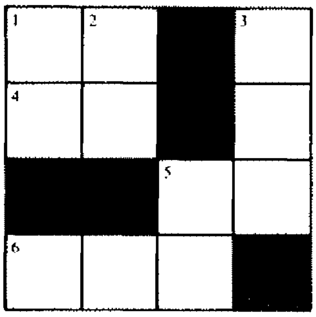
→	↓
1 12 x 12	**2** de helft van 96
5 24 + 56	**3** 2000 : 5
6 de helft van 6 x 9	**4** 600 – 76
8 17 kwartjes = ... cent	**7** 9 x 8

Bij het *invullen* van deze puzzel zijn fouten gemaakt.
▶ Spoor ze op en verbeter ze!

[1] 1	2	[2] 3	■
2	■	[3] 3	[4] 4
■	[5] 4	5	6
[6] 6	7	■	8

→	↓
1 41 + 41 + 42	**1** 96 : 8
3 2 x 17	**2** 1015 : 3
5 34 x 19	**4** 22 x 22 – 6
6 91 – 24	**5** 19 + 18

De puzzel is *goed* ingevuld, maar ... in de opgaven zitten *vijf* fouten.
▶ Spoor deze opgaven op en verbeter ze!



▶ Vul in:

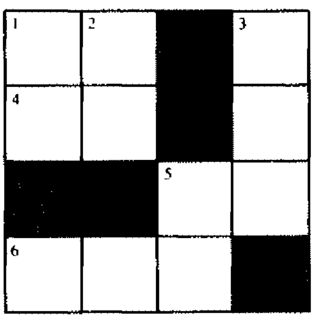
→

1 een getal onder 20, dat in de tafel van 2 én van 3 zit
4 9 x 9
5 90 : 5
6 59 + 59

↓

1 101 − 83
2 47 + 34
3 590 : 5
5 201 − 183

▶ Neem de antwoorden van de eerste puzzel in deze puzzel over.
Bedenk er zelf andere sommen bij.



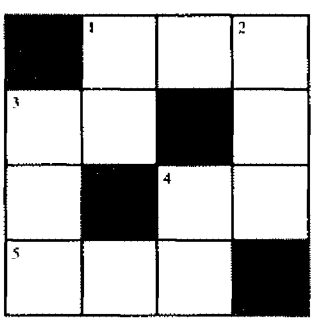
→

1
4
5
6

↓

1
2
3
5

▶ Bedenk nu zelf een puzzel!

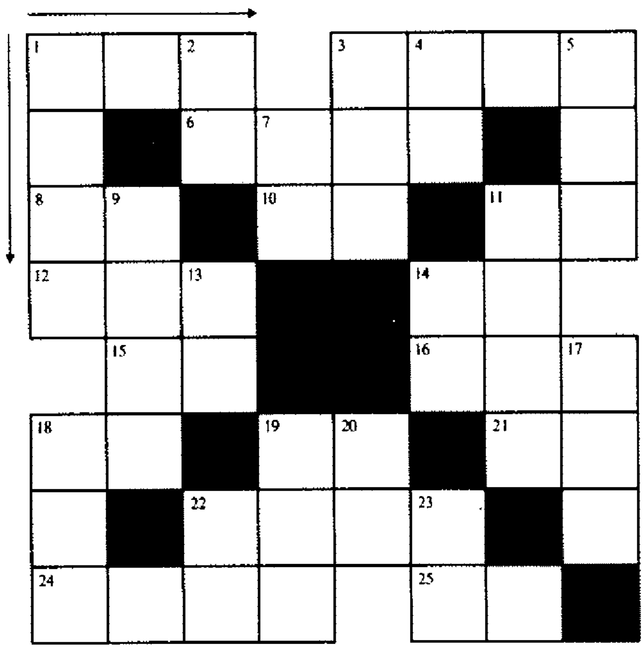


→

1
3
4
5

↓

1
2
3
4

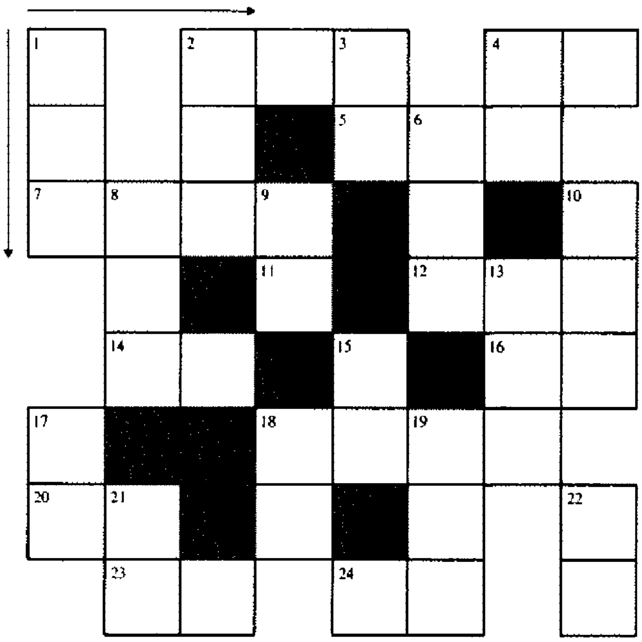


→

1 28 + 25 + 49
3 getallen waarvan de *som* 16 is
6 getallen waarvan de *som* 24 is
8 19 + 23 + 21
10 de *som* van 10, 14 en 12
11 23 meer dan 16
12 54 + 267 + 446
14 3 + 33 + 47
15 18 vermeerderd met 19
16 getallen waarvan de *som* 13 is
18 2 + 9 + 4 + 6
19 59 vermeerderd met 27
21 11 is de *som* van deze twee getallen
22 getallen waarvan de *som* 20 is
24 578 + 692 + 361 + 860
25 getallen waarvan de *som* 12 is

↓

1 458 plus 212 plus 797
2 17 + 6
3 82 + 108 + 84 + 82
4 49 meer dan 48
5 273 vermeerderd met 116
7 25 meer dan 68
9 534 + 3097
11 getallen waarvan de *som* 15 is
13 49 + 28
14 de som van 19, 7, 21 en 23
17 163 + 430 – 15 + 207
18 getallen waarvan de *som* 8 is
19 84 + 97 + 78 + 257 + 365
20 26 vermeerderd met 38
22 getallen waarvan de *som* 11 is
23 de som van de eerste acht oneven getallen

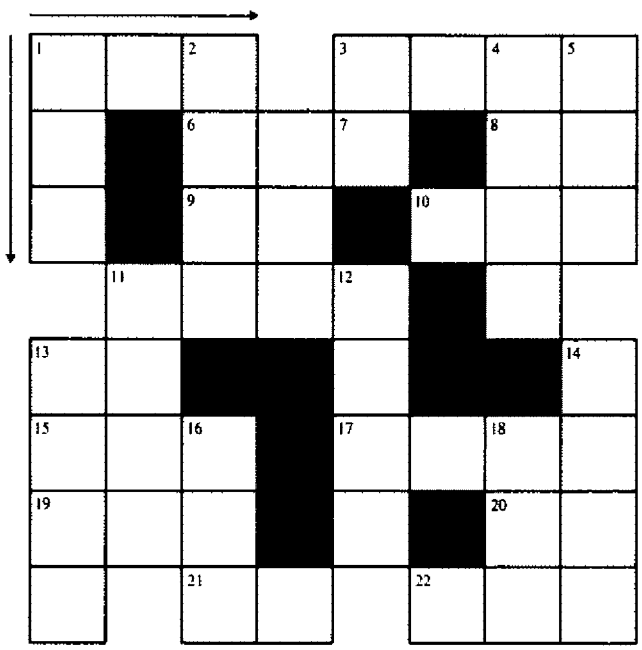


→

1 het verschil tussen 69 en 77
2 236 min 125
4 92 − 37
5 1341 − 547
7 884 minder dan 6040
11 102 min 98
12 950 − 125
14 13 − 7
16 hoeveel is 49 minder dan 61
18 5000 min 2484
20 trek van welk getal 23 af en houd 19 over
23 verschil tussen 91 en 34
24 187 minder dan 205

↓

1 1003 − 108
2 verschil tussen 319 en 514
3 66 minder dan 83
4 73 is hoeveel minder dan 127
6 108 minder dan 1036
8 364 − 184
9 82 min 18
10 1000 eraf 48
13 138 minder dan 354
15 verschil tussen 17 en 82
17 73 − 49
18 64 min 38
19 63 minder dan 201
21 41 min welk getal is 16
22 hoeveel is 84 meer dan 36



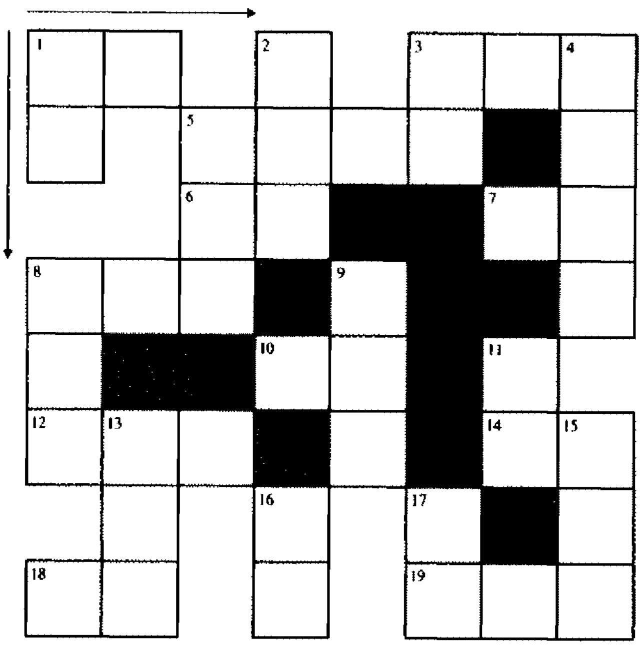
→

1 vier keer één-en-dertig
3 7 x 7 x 11 x 10
6 het produkt van 4 en 97
8 8 = ... x ....
9 40 = ... x ....
10 2 x 16 x 16
11 24 x 82 – 30
13 2 x 7 x 7
15 4 x 67
17 16 x 11 x 31
19 11 x 31
20 het produkt van twee getallen is 45; als je die twee getallen optelt komt er 14 uit
21 12 maal welk getal is gelijk aan 336
22 5 x 17 x 10

↓

1 16 x 9 + 3 x 4
2 11 x 3 x 7 x 19
3 het dubbele van 29
4 10 x (31 x 31 + 20)
5 drie getalletjes opgeteld geeft 3; als je ze vermenigvuldigt komt er 0 uit
7 29 x 28 plus 41
11 8 x 233
12 welk getal kun je schrijven als 44 maal 199
13 311 x 31 min 5 x 9 x 9
14 3 x 3 x 5 x 10 x 17
16 4 x 203
18 35 x 17

delen **werkblad 10**



→

1 dit getal gedeeld door 8 is gelijk aan 12
3 234 : 13 = ... x 2 x ...
5 19845 : 7
6 625 : 25 + 2
7 wat is de rest van 1450 : 35
8 3555 : 15
10 wat is het kwotiënt van 256 en 16
12 27/8991
14 989 : 23
18 de rest als 975 gedeeld wordt door 37
19 13/5317

↓

1 het kwotiënt van 384 en 4
2 8/1496
3 als je dit getal op 1225 deelt komt er 35 uit
4 19/65664
5 5448 : 24
8 576 : 16 = ... x 6 ...
9 dit getal gedeeld door 4 is gelijk aan 167
11 dit getal gedeeld door 4 is 16
13 8991 : ... = 27
15 21/6489
16 343 : 7 + 8
17 1156 : 34

Dit is Liesje. Liesje moet boodschappen doen. Ze moet op de stoep blijven, en op de zebrapaden oversteken. Kan dat?