wiskobas bulletin

rubriekdeel

Jaargang 7 nr. 4
april 1978

WISKOBAS-BULLETIN (rubrieken)
- bulletin ter begeleiding van het wiskunde-onderwijs
- verschijnt gedurende de zevende jaargang zes keer.

Jaargang 7 nr. 4 – april 1978

Redaktie
Drs. F. Goffree, Drs. R.A. de Jong (eindredakteur), G.H. Meijer, Drs. A. Treffers, Drs. E.J. Wijdeveld

Medewerkers
Prof.Dr. F. van der Blij, J. van den Brink, K. Frenay, Prof.Dr. H. Freudenthal, L. Gilissen, J. de Gooijer-Quint, H. Jansen, H. ter Heege, Drs. J.H.F.M. Klep, Dr. K.B. Koster, E. de Moor, D.W. Oort, P. Scholten, W. Sweers, L. Streefland

Vormgeving
Ton Voortman

Illustraties
Theo van Leeuwen

Cartoon
Hans de Boer

Redaktieadres
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht
t.a.v. Sylvia Pieters of Rob de Jong

Abonnementenadministratie
STICHTING IVIO,
Postbus 37, Lelystad.
Voor aanmeldingen, adreswijzigingen, betalingen, enz.

Abonnementsprijs
Per jaargang *f* 35,–.
De jaargangen lopen van september tot september

Annuleringen moeten minstens 14 dagen voor het einde van de jaargang worden opgegeven bij de abonnementenadministratie.

Gelieve uitsluitend te betalen met aksept-girokaarten. Deze worden u toegezonden.

INHOUD

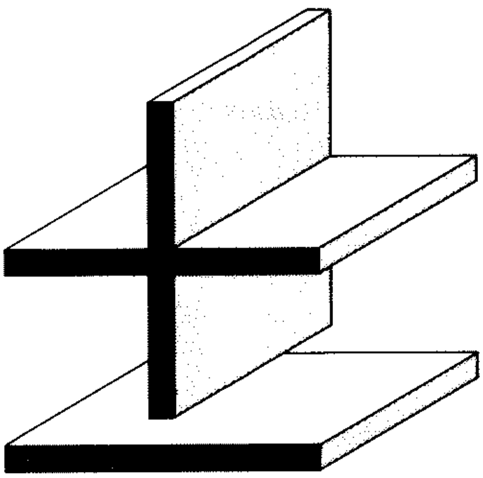
Redaktioneel: Rob de Jong 1
Kolommen: H. Freudenthal 2
Wiskunst: F. van der Blij 4
Problematika: Huub Jansen 9
Kleuters en wiskunde: Jeanne de Gooijer-Quint . 11
Wiskunde in de brugperiode: Martin Kindt 14
Wiskundige wereldoriëntatie: Jan van den Brink . 18
Ander werk: Edu Wijdeveld 21
Gesprekken met kinderen: Louis Gilissen en Joost Klep 23
Spullenkatern 25
Opleiding: Fred Goffree en Huub Jansen 45
Oefenstoffering: Leen Streefland 49
Berichten: Rob de Jong 68

Aan de vraag naar volledige oude jaargangen van het wiskosbas-bulletin kunnen we helaas niet meer voldoen. Verschillende nummers zijn uitverkocht.
Van de volgende afleveringen is nog een beperkt aantal eksemplaren verkrijgbaar:

jaargang 2, nr. 6	f 7,50	
jaargang 3, nr. 2	f 7,50	
jaargang 3, nr. 3	f 7,50	
jaargang 3, nr. 6	f 7,50	
jaargang 4	f 37,50	(kompleet)
jaargang 5, nr. 2	f 25,00	(leerplanpublikatie 2)
jaargang 5, nr. 3	f 8,75	(leerplanpublikatie 3)
jaargang 5, nr. 4	f 10,00	(leerplanpublikatie 4)
jaargang 6, nr. 2	f 10,00	(leerplanpublikatie 5)
jaargang 6, nr. 3	f 3,00	
jaargang 6, nr. 4	f 10,00	(leerplanpublikatie 6)
jaargang 7, nr. 1/2	f 20,00	(leerplanpublikatie 7)
jaargang 7, nr. 3	f 7,00	(leerplanpublikatie 8)

Alleen na ontvangst van uw storting op postgirorekeningnummer 3105662 t.n.v. R.U.-IOWO te utrecht, zal u de gewenste aflevering worden toegezonden.

redaktio-neel



verleden

We hebben deze jaargang al enkele belangrijke (rode) publikaties gehad.
We denken aan de kamping, *aan de verzendingspaniek er omheen toen bleek dat de vraag de oplage sterk overtrof, aan de verwachte en onverwachte reakties. Terecht werd kritiek geuit op het gebruik van de woorden 'pond' en 'ons' (pag. 36 en 37). Velen redden zich uit de problemen door te verwijzen naar opa's leeftijd.*

We denken aan het oppervlaktedeel *(handleiding en werkblok), waarvan we tijdens een tweetal konferenties konstateerden dat er in de praktijk uitstekend mee te werken is. Zo hebben basisschoolteams gedurende lange dagen hard werken voorlopige keuzen gemaakt uit het werkblok ten behoeve van een eigen schoolwerkplan, nadat ze eerst hadden vastgesteld hoe het met de behandeling van het onderwerp oppervlakte in de eigen metode zat. De keuzen konden slechts voorlopig zijn omdat in de praktijk van de eigen school zou moeten blijken hoe kinderen zouden reageren, welke organisatorische en technische moeilijkheden zouden kunnen optreden, welk aanvullend materiaal het team er zelf bij zou bedenken, enz.*

ROB DE JONG

heden

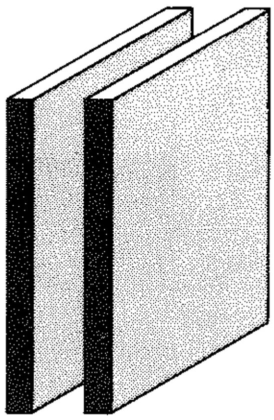
Naast de leerplanpublikaties krijgen de groene delen van het wiskobas-bulletin meer en meer een eigen gezicht. Een gezicht dat zowel bepaald wordt door de bekende rubrieken als door de spullenkaternen en oefenstofferingen.
Bij het samenstellen van het spullenkatern werden we gekonfronteerd met een hoopvolle ontwikkeling op de nederlandse markt van reken/wiskundemetoden voor de basisschool. Eén der te bespreken metoden bleek – voor ons: plotseling – door de uitgever uit het fonds te zijn genomen. Of de uitgever al dan niet wist van de voorgenomen bespreking, doet er niet zoveel toe. We karakteriseren de maatregel als hoopgevend, omdat het in dit geval ging om het 'wegsnoeien van dor hout' – een aan Warries ontleende uitdrukking –.
We realiseren ons dat het samenstellen van een reken/wiskundemetode razend moeilijk is. We kennen de gigantische problemen waarvoor uitgevers en auteurs staan. We weten echter ook dat enkele uitgevers op een zeer verantwoorde wijze met nieuwe produkties gestart zijn. Opnieuw dus: hoopgevend!

De oefenstoffering in dit nummer geeft aanleiding om na te denken over de vraag: wat *is* oefenen en wat *beoogt* het? Met elkaar hebben we het vermoeden dat roetinetraining om de een of andere reden nuttig is. Maar het kan (nog!) nuttiger plaatsvinden dan nu veelal geschiedt. Uit de respons op de voorgaande stoffering blijkt dat veel vragen uit de dagelijkse oefenpraktijk zich richten op het stereotype van de oefenvormen.

toekomst

Er wordt veel afgepraat over de toekomst van het *iowo* en daarmee over de (autonome) bestaansmogelijkheden van het wiskobasprojekt. Uit de inhoud van dit rubriekdeel blijkt dat wiskobas niet aan de toekomst van eigen werk twijfelt. Op het publikatielijstje der leerplandelen staan bijvoorbeeld nog de volgende titels: vermenigvuldigen en delen, grafieken, spelletjes, eksponentiële funkties, projekten, meetkunde, van tellen naar steekproef, kleuterleidstersopleidingen, aansluiting basisonderwijs–voortgezet onderwijs, breuken, zakrekenmachines, ...
Ook op het gebied van de opleiding, kadervorming en heroriëntering ligt nog heel wat werk te wachten.
En we hebben er best zin in!

kolommen



HET MIDDEN VAN ...

Vraag van een zesjarige:
.... 'Waar is het midden van utrecht?' ....
Wat moet je met zo'n vraag doen?
Ik stelde een tegenvraag:
.... 'Waar is jouw midden?' ....
Hij wees op zijn kruin.
Op zo iets reageer ik meestal verkeerd. Ik had voorzichtig moeten nagaan wat hij met het antwoord wél bedoelde. Misschien vatte hij 'midden' op in de zin van 'as', en dan was het een heel verstandig antwoord. Ik korrigeerde hem. Ik zei:
.... 'Neen, ik zou zeggen, ergens in je buik', en hij aksepteerde het ....

H. FREUDENTHAL

Ik keek toen op de grond – we liepen over een betegelde stoep (fig. 1) – wees naar een van de tegels en vroeg hem:
.... 'Waar is het midden van die tegel?' ....

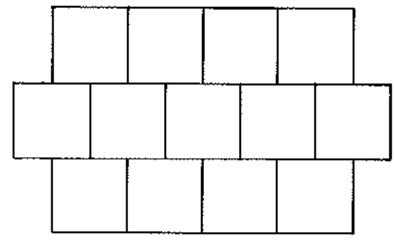


fig. 1

Hij wees het zo ongeveer aan.
.... 'Kun je het niet nauwkeuriger doen?' ....
Hij trok met een vinger de lijn door, die in fig. 2 gestippeld is, en wees op 't oog het midden van die lijn aan.

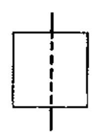


fig. 2

.... 'Kan het niet nog nauwkeuriger?' ....
Toen trok hij met zijn vinger de diagonalen en wees het snijpunt aan. Ik had hem nog kunnen vragen 'hoe weet je dat?', maar hij zou vermoedelijk niets anders hebben gezegd dan 'ik zie het zo'. Zou u er een beter antwoord op weten?
Hoe kun je zeggen, wat het midden van een figuur *is*, als je niet tevoren hebt *gedefinieerd* wat het midden van een figuur is?
Wel, het midden van een lijnstuk, dat is nogal duidelijk: ik deel het lijnstuk middendoor; dat wil zeggen: midden tussen de twee uiteinden. Maar een vlakke figuur of een ruimtelijk lichaam; heeft zoiets altijd een midden en wat is dat?

Een *cirkel* heeft natuurlijk een middelpunt. Iedereen ziet het en kan het op 't oog aanwijzen. Maar precies vinden; hoe moet dit? We hebben een film gemaakt van een derde klas basisschool die ermee zit te modderen. Zonder een hint heb ik het kinderen nog niet klaar zien spelen. Maar zodra je hun zegt 'je mag de cirkel ook uitknippen', lukt het. Ze vouwen de cirkel langs een middellijn en dan nog eens, en klaar is kees. Maar waarom is dit het midden? Net zo'n vraag als bij de tegel. Hoe moet je zoiets beredeneren?

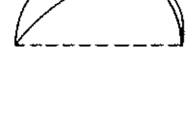


fig. 3

Ik heb nog een andere metode. Ik geef hun wat guldens en laat hen de tafel met die munten plaveien. De raakpunten op zo'n guldenrand vormen een regelmatige zeshoek. Overstaande hoekpunten verbinden, en je krijgt de middellijnen en die gaan door het middelpunt. Waarom?
Er is heel wat redeneerwerk vereist om het te bewijzen.

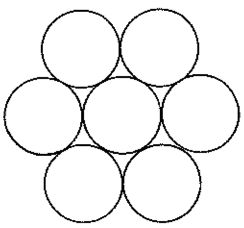


fig. 4

Van een cirkel is het middelpunt gekenmerkt door de eigenschap dat het even ver afstaat van alle randpunten – jonge kinderen komen erachter en weten het ook te formuleren. Het is een heel andere kwestie dit punt te vinden.

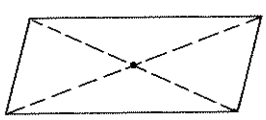


fig. 5

Maar hoe is het met een vierkant, of algemener met een *parallellogram* gesteld? Het snijpunt van de diagonalen – gemakkelijk te vinden, maar waarom denk je dat dit het middelpunt is? De diagonalen delen elkaar middendoor, dus is hun snijpunt even ver van overstaande hoekpunten. Je kunt het zien, maar hoe rechtvaardig je het? Een puntspiegeling in dat 'middelpunt' reproduceert de figuur. Noem ik het daarom middelpunt?

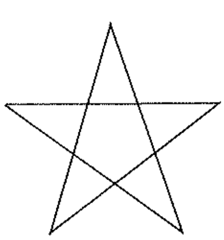


fig. 6

Kijk even naar het *pentagramma*, de vijfhoekige ster van fig. 6. Heeft het een middelpunt? Ik denk dat iedereen het zal beamen en dat ook iedereen hetzelfde punt als middelpunt zal aanwijzen. Maar waarom beschouw je het als middelpunt? Met een puntspiegeling valt dit niet te rechtvaardigen. Een spiegeling in dit punt laat de ster niet ongewijzigd, maar zet hem als het ware op zijn kop. Toch heb je het gevoel dat dat punt terecht middelpunt genoemd wordt. Waarom? Een draaiing – over 72° of een veelvoud ervan – voert de figuur in zichzelf over, en ik dacht, dat dit de reden is waarom je van een middelpunt wilt spreken.
Middelpunt van een figuur zou dus een punt zijn, waar je de figuur om kunt draaien zodat er achteraf niets veranderd is. Dit past bij de cirkel, die je zelf op oneindig veel manieren in zichzelf kunt draaien; de as bij het parallellogram, die een draaiing over 180° toelaat, bij de vijfhoekige ster, maar ook – nog eenvoudiger – bij de gelijkzijdige driehoek (fig. 7).

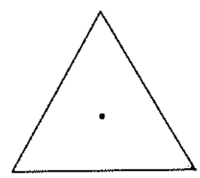


fig. 7

Maar hoe is het met een *willekeurige driehoek* gesteld? Er bestaat een punt even ver van alle drie hoekpunten, het snijpunt van de middelloodlijnen, het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Zou je zoiets wel middelpunt van de driehoek noemen? Als het een stomphoekige driehoek is, valt dit punt *buiten* de driehoek. Zoiets kun je toch echt niet het midden van de driehoek noemen.
Er is binnen een driehoek ook een punt even ver van alle drie de zijden, het snijpunt van de bissektrices, het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

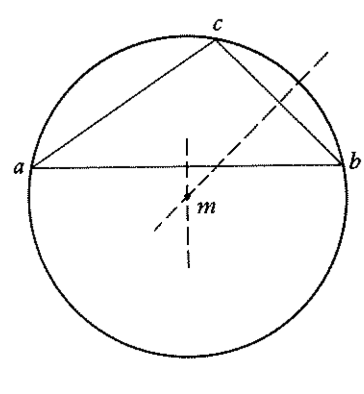


fig. 8

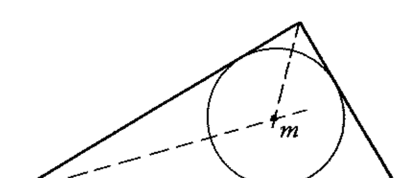


fig. 9

Als u naar fig. 9 kijkt, komt zeker niet het gevoel in u op dat dàt nu het midden van de driehoek is.
En hoe is het met een willekeurige vierhoek gesteld, of een willekeurige figuur, zoals de plaats utrecht, waar het verhaal mee begon?

We hebben zonet bij de driehoek twee van de zogenaamde merkwaardige punten als kandidaten voor het middelpuntschap overwogen en verworpen, maar er is een derde punt dat meer terecht aanspraak op die titel kan maken: het zogenaamde *zwaartepunt*.
Stel je een driehoek uit karton of blik voor en vraag naar zijn zwaartepunt. Zwaartepunt van een figuur is het punt waar je de hele massa van de figuur verenigd mag denken, derhalve ook massamiddelpunt genaamd. Als ik de figuur daar ondersteun of ophang, moet hij in evenwicht blijven. Hoe kom ik aan het zwaartepunt van een figuur? Als ik de figuur hoe dan ook ophang, kiest het zwaartepunt zijn plaats vertikaal onder het punt van ophanging. Door de figuur twee keer van verschillende punten uit op te hangen, krijg ik *twee* rechte lijnen, waar het zwaartepunt op moet liggen; ik vind het zwaartepunt als snijpunt van die lijnen.

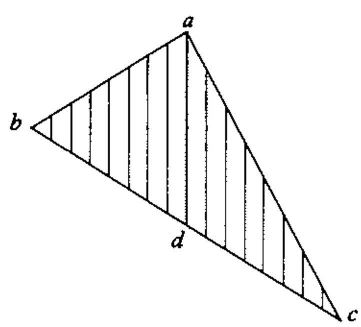
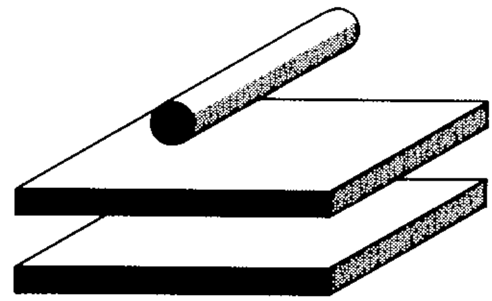


fig. 10

Laat ik nu de driehoek *abc* in het punt *a* ophangen. Hoé gaat de driehoek hangen? U bent misschien eens de zogenaamde zwaartelijnen van een driehoek tegengekomen, de lijnen die een hoekpunt met het midden van de overstaande zijde verbinden. Bij een in *a* opgehangen driehoek wijst de zwaartelijn uit *a* vertikaal. Dit is als volgt in te zien: u kunt zich de driehoek opgesplitst denken in vertikale lijnen, evenwijdig met *ad*, die telkens aan weerszijden van *ab* op dezelfde afstand even lang, dus even zwaar zijn — zó hangt de driehoek dan in evenwicht.
U mag de driehoek *abc* ook nog in *b* en in *c* ophangen en weer moeten de korresponderende zwaartelijnen zich vertikaal instellen. Het zwaartepunt van een driehoek is dus het snijpunt van de drie zwaartelijnen. Als massamiddelpunt mag het wel aanspraak maken op de titel van het midden te zijn.

Het midden van utrecht? Knip er een plaatje van uit, hang het in twee punten op, trek de lijnen, die zich als vertikalen voordoen en markeer hun snijpunt — *het midden van utrecht*.

wiskunst



HANDELSMERK EN HUISSTIJL

Deze keer gaan we het hebben over wiskunde en toegepaste kunst. Dit zegt natuurlijk nog niets, want er zijn vele mogelijkheden.
Allereerst uiteraard in de architektuur, maar ook in dessins voor gordijn-, laken- en japonstof vinden we vele vormen van toegepaste kunst. Dan is er nog het aardewerk — denkt u maar eens aan de uitvinding van de draaischijf van de pottebakker en de rotatiesymmetrie —.
Is het komponeren van een melodie voor een marslied wellicht ook toegepaste kunst?

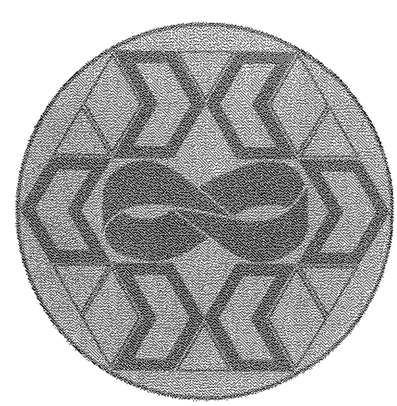
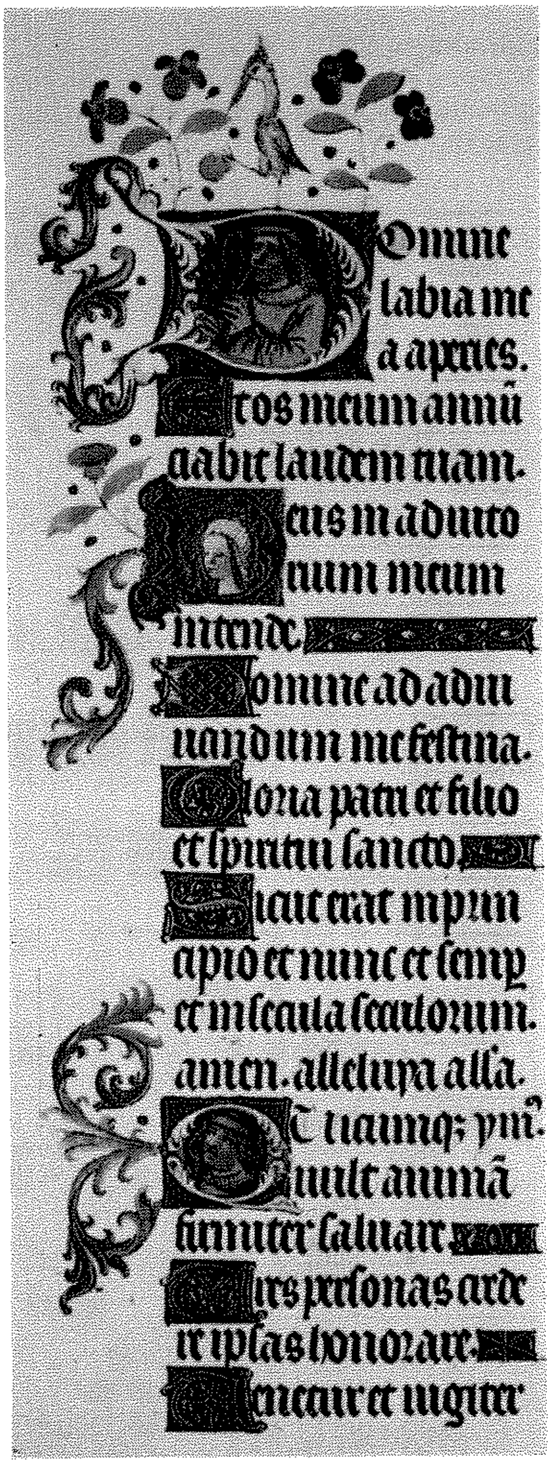


fig. 1

F. VAN DER BLIJ

Uit de talloze mogelijkheden kiezen we *het vignet*. In oudere boeken (dat wil zeggen: uit de vorige eeuw) werden hoofdstukken vaak afgesloten met sierlijke arabesken.
In de middeleeuwen maakte men van de eerste letters van een pagina uit een boek of handschrift hele miniaturen.



uit: Les Très Riches Heures du Duc de Berry fig. 2

Tegenwoordig heeft ieder bedrijf, dat zich graag duidelijk wil presenteren, een handelsmerk, dat vaak geometrisch van vorm is.

In de eerste aflevering van deze rubriek hebben we het gehad over de möbiusband, die vignet werd van het *iowo*.[1]) We nemen aan dat u in ieder geval de schelp van de *shell* of het *ns*-embleem kent. We zien dan twee uitersten: bij de shell, de schelp – de naam als aanleiding –, een klassiek figuratief plaatje. De *ns* heeft, sinds de nieuwe huisstijl, een symbool waarin we evenwijdige rails herkennen en waarin de pijlpunten snelheid suggereren.

meetkundige vignetten
Wat voor soort vignetten zijn er nu zoal?
We zullen ons tot de meer *meetkundige* beperken.
Bij het ontwerpen van een vignet kunnen we van verschillende zaken uitgaan. Uitgangspunt kan bijvoorbeeld zijn, één of meer letters van een naam, of een beeld dat de werkzaamheden karakteriseert. Een vignet kan eveneens een eenvoudige kombinatie van vierkanten (rechthoeken) of cirkelsektoren zijn.
Het is opvallend hoeveel variaties mogelijk zijn. U weet ongetwijfeld hoeveel variaties er zijn, als we bijvoorbeeld vier gelijke vierkanten toelaten (de platlandversie van de vierkubushuizen). Meestal echter stellen we meer eisen omtrent aansluiting. En als we verschillende maten toelaten, zijn er weer veel meer mogelijkheden.

Uit de dagblad- en weekbladpers hebben we een hele kollektie vignetten verkregen, weliswaar een enigszins eenzijdig beeld. Vignetten van stichtingen uit de verzorgende sektor te over! Daarbij nog groot-industriële bedrijven en overheidslichamen.
We hebben dagbladen gekozen uit verschillende streken van het land. Echter lang niet voldoende om een adekwaat beeld te krijgen. Vooral makelaars hebben een rijk arsenaal aan vignetten.
Uiteraard zijn wij blij met ekstra voorbeelden. Bij voorbaat dank!

cijfers
We zullen wat moeite hebben er voldoende wiskunde bij te betrekken. Maar de cijfertjes, die in onze zakrekenmachientjes en op sommige horloges en klokken oplichten, kunnen een hulpmiddel zijn. Deze bestaan uit een aantal, al dan niet lichtende streepjes:

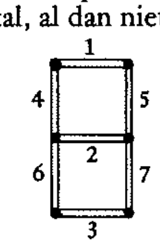


fig. 3

1) Jaargang 1 nr 1.

Met zeven buislampjes zijn alle cijfers te schrijven. Natuurlijk zijn er veel meer mogelijkheden. Ieder lampje kan aan of uit zijn. Het aantal mogelijkheden is dan $2^7 - 1$, als we willen dat tenminste één lampje brandt. Er zijn echter minder mogelijkheden, als we bepaalde randvoorwaarden gaan stellen. Samenhang, bijvoorbeeld; hoeveel van de 127 mogelijkheden blijven er dan nog over?
Ook leuk is het systematisch te tellen.
Allereerst alle zeven van één staafje (dit zijn in het donker eigenlijk maar twee signalen: een vertikale of een horizontale). Met twee streepjes zijn er 21 mogelijkheden. Hiervan zijn er tien samenhangend en elf niet-samenhangend.
De tien samenhangende zijn door translaties uit vijf standaardvormen te maken. Deze standaardvormen zijn: , , , en .

letterontwerpen
U moet het verder maar zelf doen, want we dwalen te ver af van onze vignetten. Ter illustratie laten we een blaadje letterontwerpen zien van Wim Crouwel, een kwadraatbladuitgave van drukkerij de Jong, waarin hetzelfde principe is toegepast (fig. 4).

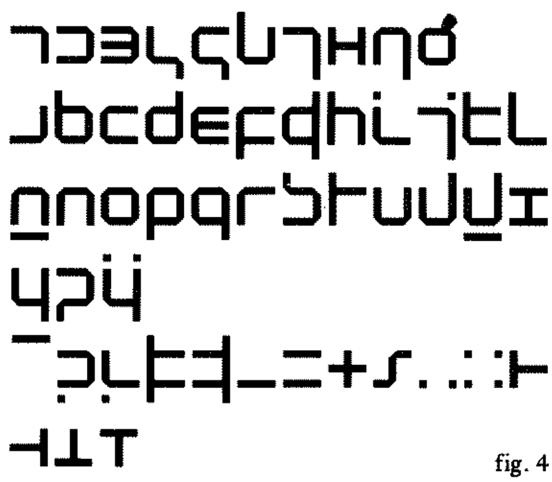


fig. 4

vignetten
Nu onze vignetten. Uit een vierkant kunnen twee verschillende vignetten gemaakt worden. Als handelsmerk zullen □ en ◇ wel als verschillend beschouwd worden.
Van een gelijkzijdige driehoek kunnen er eveneens twee ontworpen worden:
△ en ▽.
Uit een rechthoekige, gelijkbenige driehoek zes, namelijk:
◸, ◹, ▽, ◺, ◿, △.
Echter, op pakpapier, servetjes, e.d., waar we een onder- en een bovenkant hebben, zijn niet alle verschillen échte verschillen. Met een regelmatige vijfhoek is ook wel wat te doen. De regelmatige zeshoek is u ongetwijfeld bekend.
Komen al deze vignetten nu ook echt voor? Zijn er geen twee bedrijven met hetzelfde vignet – misschien verschillend van kleur, maar dat zie je meestal niet in de krant –?

driehoekjes, ...
We laten een aantal vignetten zien, die zijn opgebouwd uit driehoekjes, vierkanten, ruiten, enz. (fig. 5).

fig. 5

cirkel
Halen we de cirkel erbij, dan zijn direkt veel meer variaties mogelijk. Allereerst de (regelmatige) veelhoek met cirkel erom of erin. Diagonalen van de veelhoek in de cirkel (met of zonder veelhoek) geven ekstra mogelijkheden. Met één of meer vierkantjes en één of meer cirkelsektoren is het aantal kombinatiemogelijkheden zo groot, dat nu andere elementen een rol gaan spelen. Uit die elementen kan een letter (of letterpaar) gevormd worden, die betrekking heeft op de naam van de houder van het vignet.
De hierboven genoemde vignetten zijn, net als de lijncijfers op de rekenmachine, met de teorie van de grafen aan te pakken. Als we volle vierkantjes en opgevulde cirkelsektoren aksepteren, moeten we andere wiskundige hulpmiddelen toelaten.

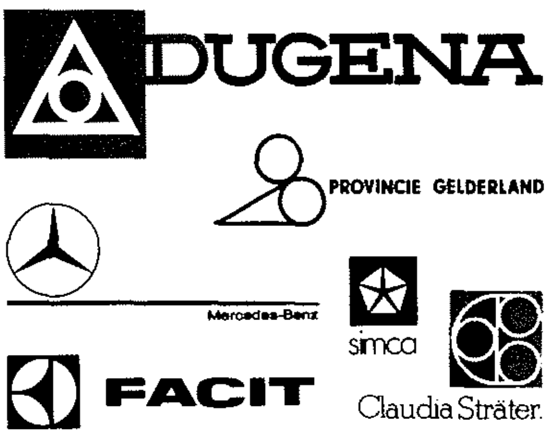


fig. 6

pijlen
Bij het klassificeren kunnen we ook van de voorstelling uitgaan. Een pijl bijvoorbeeld, het oude wapen voor de jacht, door natuurkundigen benut om richting, snelheid en kracht aan te geven, blijkt een geliefd symbool. Op allerlei manieren is de pijl in vignetten toegepast. In fig. 7 laten we er een aantal van zien.

letters
Ook zijn er veel vignetten die door abstraktie uit letters afgeleid zijn. Duidelijk is dat de letters T en L direkt meetkundige figuren kunnen voortbrengen. Ook de S is nogal geliefd. In fig. 8 vindt u er een aantal bijeengebracht.

fig. 8

transformaties
Om u wiskundig aan het werk te zetten nu een kollektie, waarbij we vragen de groep van transformaties in zichzelf van het vignet te bepalen: spiegelingen, rotaties, translaties, enz. Zoals u weet, is de teorie van ornamenten een klassiek stuk wiskunde (fig. 9).

fig. 7

fig. 9

aardige plaatjes

Tenslotte nog een paar aardige plaatjes, soms gewoon abstrakt-figuratief, soms erg fraai geometrisch (fig. 10).

fig. 10

dochters

Eén vignet krijgt een speciale vermelding. In figuur 5 zag u *shv* met een enkel driehoekje, de simpelste van onze vignetten. Maar *gti*, een dochteronderneming, had vier van zulke driehoekjes in haar vignet. De *vmf* (stork) heeft ook een dergelijk principe. Van twee dochters vonden we de vignetten (fig. 11).

Vraag:

- ▶ Hoeveel dochters kan deze maatschappij hebben, als iedere dochter een ander vignet — zij het van dezelfde struktuur — heeft?

We vragen tevens uw aandacht voor de andere vignetten uit de eregalerij!

eregalerij

fig. 11

non-voorbeelden

Ons wiskundeonderwijs heeft geleden onder onze gewoonte alleen voorbeelden en geen non-voorbeelden te geven. We hebben erover gedacht zulke non-voorbeelden te geven, maar we waren bang dat men er verkeerde konklusies uit zou trekken.

De laatste twee vignetten zijn als intern probleem bedoeld.

fig. 12

problematika

1

1978

De eerste problematika in 1978!
Zo'n jaartal inspireert mensen tot het bedenken van problemen.
Zoals:

▶ *Hoe moet je 1978 splitsen in getallen, zodat het produkt van die getallen maksimaal is?*

Een voorbeeld ter verduidelijking!
Het getal 11 is bijvoorbeeld te splitsen in:

	produkt
(5, 6)	→ *30*
(4, 7)	→ *28*
(3, 4, 4)	→ *48*
(1, 3, 7)	→ *21*
(2, 3, 3, 3)	→ *54.*

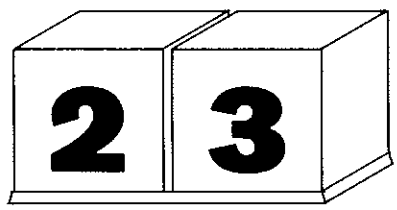
▶ *Bij welke splitsing van 11 krijgt u het grootste produkt?*
En hoe zit dat met andere getallen?
Bijvoorbeeld ... 1978?

HUUB JANSEN

2

KUBUSSEN

Als we aan een nieuw jaar beginnen, denken we aan oliebollen, agenda's en kalenders. Of aan handige apparaatjes waarmee alle dagen van het jaar kunnen worden aangegeven. U kent waarschijnlijk de burostandaard, bestaande uit twee kubusvormige blokjes in een houder, waarmee elke dag van de maand kan worden voorgesteld:



De cijfers 0 tot en met 9 zijn zó over de kubusvlakken verdeeld, dat elk getal van 00 tot en met 31 kan worden samengesteld.
De wijze waarop dit moet gebeuren is een oud, reeds opgelost probleem, waarvan het resultaat in de winkel te koop is. Heeft u niet zo'n winkel in de buurt, dan ligt hier een mooi probleem voor u en uw leerlingen, waarin rekenen, redeneren en handvaardigheid te kombineren zijn.
Het voert echter ook tot een nieuw – en lastig! – probleem.

▶ Nummer de vlakken van twee kubussen of dobbelstenen zodanig, dat elk getal van 1 tot en met 36 kan ontstaan, wanneer u met beide dobbelstenen gooit en de getallen op beide zichtbare vlakken optelt.

Eerlijkheidshalve moet erbij vermeld worden, dat ook negatieve getallen gebruikt mogen worden.

3

TABELLEN

In één van de vorige nummers van het wiskobas-bulletin heeft een artikel over tabellen gestaan.
Het invullen van tabellen vanuit gegeven randgetallen leidt als vanzelf tot de vraag, of deze randgetallen teruggevonden kunnen worden als een beperkt aantal getallen in de tabel zelf gegeven is.
Wij vonden een fraai voorbeeld:

x	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
f	18				
g				20	
h					
i					24
j			10		

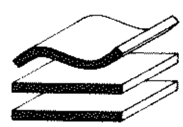
Gegeven is nog dat de tien letters van a tot en met j verschillende getallen voorstellen uit de rij 1, 2, 3, ..., 10. En ook nog dat geldt:

$$a + b + c + d + e = f + g + h + i.$$

De vraag luidt natuurlijk:
▶ Hoe ziet de ingevulde tabel eruit?

Nog aardiger is 't, zelf zo'n probleem te bedenken. Wie?

4



MASTER-MIND

We nemen aan dat u het spel *master-mind* kent. Wat u wellicht niet weet, is dat in december j.l. in londen is gestreden om het internationaal *master-mind*-kampioenschap. Met als prijs een beker én 500 pond! Om tot deze finale door te dringen moesten de liefhebbers vooraf een aantal problemen oplossen.
We leggen u drie van deze problemen voor. Vooraf de betekenis van de afkortingen:

b : blauw;	*r* : rood;
g : geel;	*w* : wit;
gr : groen;	*z* : zwart.

Het teken 'X' betekent: één pion van de goede kleur en in de juiste positie. '0' betekent: één pion van de goede kleur, maar in de verkeerde positie.

probleem 1

b	*gr*	*z*	*g*	X
r	*g*	*w*	*b*	00
z	*z*	*gr*	*gr*	00
r	*w*	*z*	*z*	00
				XXXX

Het zal duidelijk zijn: in de laatste regel moet de goede oplossing – de geheimkode – vanuit de voorgaande gegevens beredeneerd worden (open plaatsen komen niet voor).

probleem 2

b	*z*	*w*	*gr*	XX
w	*z*	*gr*	*b*	00
r	*b*	*gr*	*z*	X0
w	*w*	*g*	*b*	X0
r	*b*	*gr*	*b*	X0
				XXXX

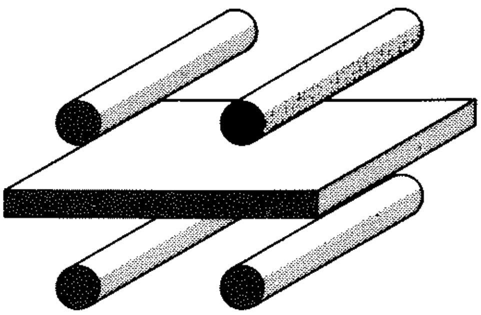
We beweren niet dat het simpele problemen zijn. Maar wereldkampioen *master-mind* worden is niet niks!

Trouwens, met het kunnen oplossen van deze problemen had u nog niet het recht tot deelname verworven. Het organiserend komitee had namelijk een laatste opgave als addertje-onder-het-gras in petto.
Een probleem waarvoor geen eenduidige oplossing te geven is, maar wél een redenering die duidelijk kan maken op welk nivo uw mind ge-master-d is.

probleem 3
▶ Wat kiest u voor de onderste lijn? Open plaatsen zijn toegestaan.

w	*w*	*g*	*r*	X0
r	*z*	*w*	*gr*	XX
w	*z*	*gr*	*r*	00
b	*r*	*gr*	*z*	X0
b	*r*	*gr*	*r*	X0

kleuters en wiskunde



KINDERPRAAT

Wanneer we naar een kleuter luisteren, bemerken we dat hij zijn werelden zelf bedenkt. Dat wil zeggen: hij kent betekenis toe aan zijn omgeving en realiseert zich wat er gebeurt. Het konfronteren van zijn eigen wereld met die van anderen en met de omringende fysische wereld, is hierbij noodzakelijk.
Aan de hand van opmerkingen en gesprekjes van kleuters, geven we wat matematische aktiviteiten aan, aangevuld met enige suggesties. Het gaat hierbij niet in de eerste plaats om het verwerven van kennis of het aanleren van vaardigheden, maar om het bewustmaken van matematische aktiviteiten, die in het dagelijks leven voorkomen.

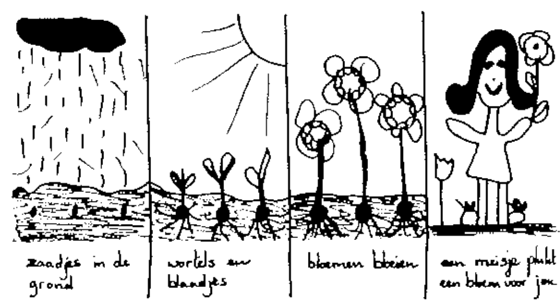
JEANNE DE GOOIJER-QUINT

een voorstelling maken

Op de vensterbank staan bakjes met aarde. Rolf vertelt wat ze gedaan hebben:

.... 'Je doet een beetje aarde in het potje, een beetje water en een beetje zaadjes. Als je dan even wacht, komen er bloemen uit.'
Arnold meent: 'Er komen aardbeien uit. Kijk maar op het bakje. En hier komen appeltjes uit en daar kersen.' ....

De bakjes zijn namelijk aan de buitenkant bedrukt met afbeeldingen van vruchten. Het zijn yoghurtbekers.
Op jonge leeftijd is het moeilijk je een voorstelling te maken van iets dat over een tijdje in werkelijkheid te zien zal zijn.
Suggestie: het groeiproces per week of per dag bijhouden aan de hand van een beeldstrip, die door de kinderen getekend wordt; vergelijk ook het groeiproces van verschillende zaadjes.

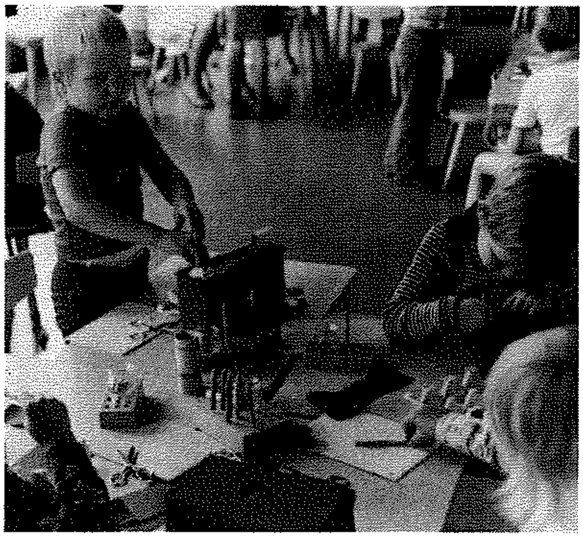


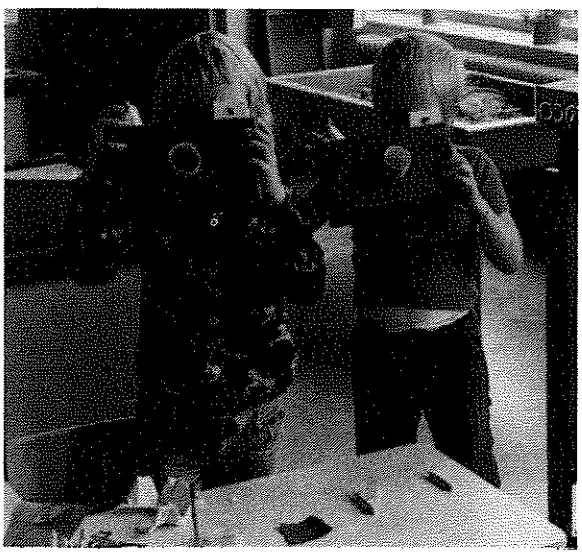
zich realiseren

Juf gaat een foto maken van alle kinderen. Na enkele minuten wachten is de foto klaar en elk kind mag de foto bekijken.

.... Alfred vraagt: 'Juf, waar sta jij?'
'Waar stond de juf eigenlijk, toen de foto gemaakt werd?'
Alfred kijkt weer naar de foto en zegt nog eens: 'Ik kan je niet zien.'
'Stond de juf tussen de kinderen?'
'Oh nee', roept Alfred nu, 'jij was de fotomaker.'
Even later: 'De juffrouw uit de andere klas moet een foto maken, dan sta jij er ook op.' ....

Een groep kleuters gaat nu zelf een fototoestel fabriceren. De kleuters kunnen dan de mogelijkheden met een beperkt blikveld ontdekken.
Suggestie: wie komt er op de foto als we weten waar de fotograaf staat? maak een foto van kinderen die op een rij staan; waar moet je staan: dichtbij of veraf? maak een foto van je gezicht of een foto, waar je van top tot teen op staat.





een oplossing zoeken

Naar aanleiding van een gesprekje over 'torens' vertelt Jolanda:

.... 'Er is een toren omgevallen. Dat heb ik op de televisie gezien en toen was de weg helemaal kapot. Je kon er niet meer door.'
Edwin meent echter: 'Jawel hoor, met een vliegtuig kun je doorrijden.' ....

Kinderen hebben vaak een eigen oplossing voor een probleem. We moeten hen stimuleren hun gedachten onder woorden te brengen en hen laten ervaren dat er vaak meerdere mogelijkheden zijn en goede en foute redeneringen.

Suggestie: maak een verhaal waarin goede en foute redeneringen voorkomen; laat de kinderen tijdens het verhaal meedóen en vooral meedénken; een voorbeeld: we staan bij de bushalte te wachten, als de bus komt stappen we uit.

onzichtbare zaken

Juf vertelt dat de kinderen, die de kleur 'rood' in hun kleren hebben, in de kring mogen zitten. Twee kinderen krijgen onenigheid.

.... 'Jij hebt geen rood', meent John. 'Dit is rood', en hij laat zijn trui zien.
'Ik heb wél rood', beweert Marga. 'Kijk maar', en ze tilt haar trui op, waardoor haar hemd met rode noppen te zien is.
'Oh, maar dat kon ik niet zien', zegt John.
'Marga kon haar hemd toch ook niet zien, want haar trui zat er overheen', meent juf.
'Ja', antwoordt Marga, 'maar ik weet toch dat ik dit hemd heb aangetrokken.' ....

Wanneer we een voorwerp niet zien, kunnen we er naar raden. We moeten echter onze beperkingen kennen; juf kan bijvoorbeeld wel een kraal in haar hand hebben, maar niet een boek.

Suggestie: zet een doos op tafel en laat de kinderen opnoemen wat er in kan zitten of wat er *precies* in kan; door voorwerpen uit de klas te kiezen, kunnen de kinderen kontroleren wat mogelijk is; neem eens een doos die kleiner is en herhaal het spel.

vergelijken van hoeveelheden

Tussen de middag gaat juf met een kleuter mee naar huis. Tim (4;6) krijgt voor het eten enkele tabletjes: vier fluortabletjes en één vitamine *c* tabletje.

Hij legt ze op een rij, kijkt er even naar en zegt dan:

.... 'Zoveel vingers heb ik ook', en hij steekt één hand omhoog. ....

De tabletjes worden met de vingers van één hand vergeleken, zonder tellen. Tim maakt gebruik van de één-éénverbinding.

Een soortgelijk voorbeeld vinden we bij het winkeltje spelen.

Linda (4;11) is winkeljuffrouw en vraagt:

.... 'Wilt u dit ... of dat ...', ze wijst steeds artikelen aan, totdat Bianca (4;7) 'ja' roept.
'Dat is zoveel ...', en Linda steekt één hand op. Bianca legt een aantal muntjes op de toonbank.
'Nee, dat is teveel', meent Linda. 'Kijk maar', en ze legt bij elke vinger een muntje. De rest geeft ze weer terug. ....

Raymond heeft eenzelfde manier van aanduiden wanneer een artikel betaald moet worden. Hij pakt een aantal flesdoppen en zegt:

.... 'Zoveel moet je betalen.' ....

Op elke dop wordt dan een muntje gelegd om vast te stellen of het juiste bedrag betaald wordt.

Suggestie: alle kinderen krijgen een bakje met een gelijk aantal doppen o.i.d. als betalingsmiddel; om de beurt mag een kind iets kopen uit de klas; hoeveel zal het kosten? hoe kun je de waarde van een voorwerp bepalen? wat kun je voor je doppen kopen? een voorwerp, dat 'veel' kost of meerdere voorwerpen die 'weinig' kosten?

handig tellen
In de klas staat een vissenkom, die van tijd tot tijd schoongemaakt moet worden. De kleuters zijn benieuwd hoe dat in z'n werk gaat. De vissen moeten met een schepnetje worden gevangen en in een andere kom worden overgebracht.

.... 'Nu kunnen we de vissen gemakkelijk tellen', meent Ankie. Ze heeft namelijk al eens geprobeerd de vissen te tellen, maar het was haar niet gelukt. Ze merkte toen op: 'Ze zwemmen zo kris-kras door elkaar.' ....

Eén voor één schept juf de vissen van de ene kom in de andere. Er zijn al drie vissen geteld. Dan worden drie vissen tegelijk gevangen.

.... 'Juf', roept Ankie benauwd, 'nu kan ik ze wéér niet tellen.'
'Misschien kun je de vissen tekenen', suggereert juf, 'en als ze getekend zijn, kun je ze op papier tellen.' ....

Ankie tekent eerst de drie vissen die al in de kom zitten en dan de drie vissen die erbij komen. Zo wordt de stand makkelijk bijgehouden. Als de ene kom leeg is, gaat ze tellen.

.... 'Er zijn vijftien vissen', roept ze trots. ....

Na enkele dagen zijn er twee vissen dood gegaan.

.... 'Oh, nu klopt het niet meer', roept Ankie verbaasd.
'Hoeveel levende vissen zijn er nu nog?' ....

Het blaadje met de getekende vissen wordt opgezocht en ze krast twee vissen door. Daarna telt ze de vissen op papier opnieuw.

Als een kleuter eenmaal tellen kan, worden allerlei zaken in zijn direkte omgeving geteld. Zijn de voorwerpen echter ongeordend, dan is het moeilijk. Vooral als ze ook nog bewegen.
Suggestie: vertel een verhaal waarbij een bepaald woord meerdere malen voorkomt; spreek tevoren af op welk woord gelet moet worden en laat de kinderen op hun eigen manier bijhouden hoeveel maal het betreffende woord gezegd is;
enkele mogelijkheden om de stand bij te houden:
— met behulp van de vingers;
— tekenen op papier;
— blokjes (of andere voorwerpen) neerleggen.

schatten van hoogte
Op de speelplaats zit juf naast de boom op een kleuterstoel.

.... Walter komt naast haar staan en zegt: 'Er hangt een springtouw in de boom, kun jij erbij?'
'Wat denk je?', vraagt juf.
'Ja hoor, jij bent groot. Je past niet eens op die stoel.'
Terwijl juf gaat staan, roept hij gauw: 'Oh nee, je kunt er vast niet bij.'
'En als ik spring', suggereert juf.
'Nee, je moet mij optillen', meent Walter.
Ook dit helpt niet. Wat jammer!
Walter kijkt bedenkelijk: 'Dan moet je een trap pakken.'
Zo gezegd, zo gedaan. Walter klimt om-

hoog, in de overtuiging dat het nu wel zal lukken.

Verbaasd roept hij: 'Ik ben nog te klein, maar jij kan er echt bij.' ....

En inderdaad, het probleem is opgelost.

Het schatten van hoogte en lengte geeft ons een beeld hoe groot of klein een bepaalde afstand is. Wanneer we gaan meten, kunnen we nagaan of we goed geschat hebben. Het kind moet zich een voorstelling maken, hoe groot de afstand is. Daarbij is tevens van belang op welke wijze de afstand overbrugd kan worden. *Suggestie*: kun je met alle buitenspel-materialen de overkant van het tegelplein bereiken? en als je alleen gebruik maakt van planken (banden, paalkoppen)?

vergelijken van lengte

Naar aanleiding van een verjaardag worden er dropveters uitgedeeld.

De kleuters (4 jaar) reageren meteen:

.... 'Wat een lange drop ... hij komt helemaal tot de grond ... als ik sta, dan komt hij tot m'n mond ... als ik m'n handen zo doe (de armen gestrekt), dan kan ik de dropveter nog vasthouden.' ....

De kinderen zijn druk bezig met passen en meten aan het eigen lichaam. Dan wordt er van de drop gegeten en gaan de kleuters de veters met elkaar vergelijken:

.... 'Die van mij is langer ... van jou is 'ie korter ... ik heb twee stukken, die zijn even lang ... ik ga hem korter eten.'

Eén van de kleuters roept opeens: 'Wie heeft m'n drop gepakt?', waarop een ander zegt: 'die heb je toch in je hand.'

'Nee, ik had twee stukken', zegt Emile.

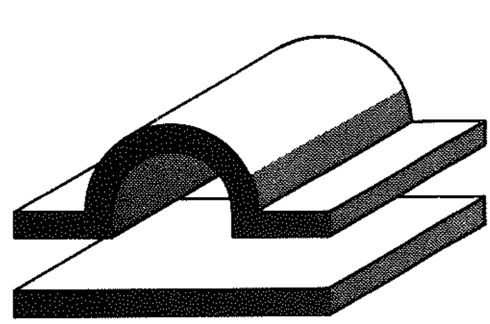
Juf vraagt of hij wel goed onder z'n stoel gekeken heeft.

'Die veter is niet van mij', meent Emile, 'ik had een veel langere.' ....

De dropveter op de grond is opgerold, waardoor hij korter lijkt.

Suggestie: koop een zak dropveters; dit stimuleert de kleuters om tijdens het eten van de drop steeds te meten; bij elke hap verandert de lengte.

wiskunde in de brug-periode



AUTOWEGEN

In de vorige jaargang heeft u kunnen lezen dat wiskivon een eindje op weg is met de leerplanontwikkeling voor de leeftijdsgroep van twaalf- tot veertienjarigen. In een drietal artikelen hebben we een deel van de meetkundelijn uit ons zogenaamde raampjesplan geschetst.

We deden dit aan de hand van de leerstofpakketjes verpakkingen, belvia *en* regelmatige figuren.

Het tema autowegen *past, hoewel er ook meetkundige aspekten aan te ontdekken zijn, meer in de rekenen/algebralijn. In die lijn liggen ook pakketjes die voor een groot deel een remedial karakter hebben, zoals* breuken *en* 100%.

We zullen u in deze jaargang een indruk proberen te geven van het onderdeel rekenen, zoals dat in ons raampjesplan voor de brugklas aan bod komt.

MARTIN KINDT

AUTOWEGEN

Het projekt *autowegen* levert eens te meer het bewijs dat wiskunde op straat te vinden is. ANWB-borden, hektometerpaaltjes en praatpalen blijken aanleiding te geven tot wiskundige problemen.
Van de leerlingen wordt hierbij niet verwacht dat ze passief naast de 'chauffeur' blijven zitten. Integendeel! Zij worden aangespoord tot een grote verscheidenheid van wiskundige aktiviteiten, zoals: meten en schatten, rekenen en afronden, tekenen en interpreteren.

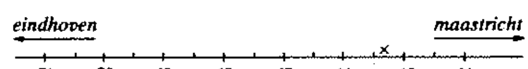
doelen
Dit leerstofpakket heeft als eerste doel, een aantal rekenvaardigheden dat op de basisschool is ontwikkeld, te aktualiseren en meer inzichtelijk te maken.
De hier bedoelde vaardigheden zijn: het optellen en aftrekken van kommagetallen, het opereren met verschillende lengte-eenheden, het afronden van getallen en het werken met kaartschalen.
Ook wordt een aantal min of meer nieuwe wiskundige vaardigheden aangezet, zoals het gebruik van de afstandstabel, het gebruik van een getallenlijn, het maken en lezen van tijdplaatsgrafieken.
Daarnaast worden niet-matematische doelen nagestreefd: zelfwerkzaamheid, leren formuleren, leren luisteren, samen werk verdelen.

eksploraties met autokaart en afstandstabel
In een eerste inleidende opdracht wordt van de leerlingen gevraagd, verschillende roetes aan te geven op een autokaart en die roetes vervolgens te beschrijven en te meten.
Problemen als: is de kortste weg ook de snelste weg?, komen ter sprake. En dan stuiten de leerlingen ook op het schaalbegrip. De moeilijkheden die ze hierbij steevast ondervinden – en die bijvoorbeeld bij het onderwijstelevisieprojekt *wiskunde voor de brugklas* duidelijk aan het licht komen – vinden vaak hun oorsprong in het aanleren van onbegrepen truuks, zoals het goochelen met nullen. Een van de doelen van dit hoofdstukje is, een beter begrip voor het werken met kaartschalen te ontwikkelen.

- De problematiek van het afronden komt voor het eerst in beeld naar aanleiding van dit afstandsbord:

Nadat de leerlingen de plaats van dit bord hebben moeten aangeven op een autokaart, volgt dan deze opdracht:

Een stukje van de weg van eindhoven naar maastricht (E9) is hier als rechte lijn getekend.



De getallen geven de afstand tot maastricht aan.

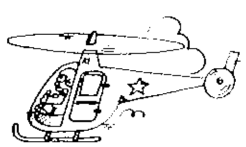
▶ Kun je op deze lijn *precies* aangeven waar het afstandsbord staat?
Waarom?

▶ Op de plaats van het kruisje wordt ook een afstandsbord neergezet.
Welke getallen worden er op het bord geschilderd, denk je?

De leraar kan van het nivo en de belangstelling van de klas laten afhangen, hoe diep hij in dit stadium op deze problematiek in wil gaan .

– Zo is de som van de getalletjes op een roetekaart langs de weg weert–maastricht gelijk aan 62. Ogenschijnlijk klopt dit niet met het afstandsbord en dat kan weer leiden tot de ontdekking dat de 'som van de afrondingen' niet de 'afronding van de som' hoeft te zijn.
– En bij de laatste opdracht is het antwoord 'maastricht 65, weert 5' niet de enige mogelijkheid. Tot de mogelijkheden behoren ook '*m* 65, *w* 4' en '*m* 65, *w* 6'.
  Deze problematiek is, afgezien van de afrondingsprocedure, analoog aan het probleem van Max en Wim die eerst vier jaar in leeftijd verschillen, maar op Wim's verjaardag plotseling nog maar drie jaar ...

• Aan het slot van dit eerste deel wordt ook nog met 'helikopterafstanden' (afstanden hemelsbreed) gewerkt en maken de leerlingen zelf een 'helikopterafstandentabel':

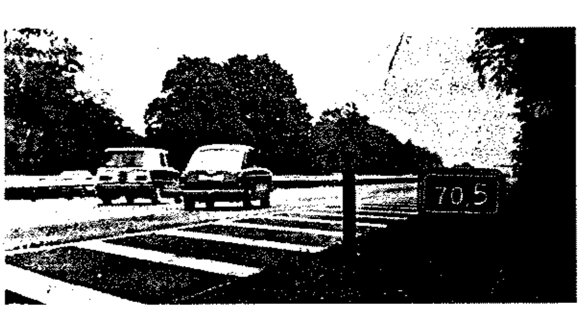


	Maastricht	Eindhoven	Arnhem	Rotterdam
Maastricht	—	68	128	150
Eindhoven	68	—	68	90
Arnhem	128	68	—	105
Rotterdam	150	90	105	—

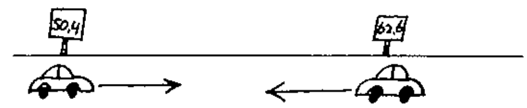
Bij het konstrueren van zo'n tabel zal de leerling een afrondingsprocedure kiezen en zal hij aktief gebruikmaken van de symmetrie van de tabel.

kommagetallen

Hektometerbordjes en praatpalen zijn onderwerp van studie in het tweede deel van het pakketje *autowegen*. De getallen op de *hm*-bordjes fungeren als koördinaten op een lijn.



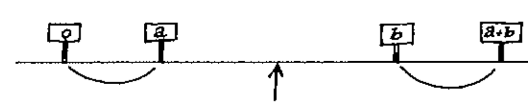
Er volgt nu een aantal eenvoudige probleempjes die tot rekenaktiviteiten leiden en waarbij de getallenlijn als model wordt gebruikt. De kontekst van de autowegen blijkt het hierbij goed te doen.
Een voorbeeld van zo'n probleempje:



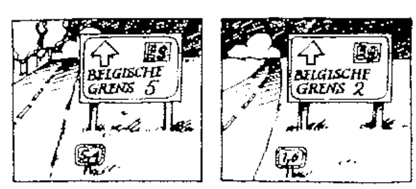
▶ Een auto passeert bordje 50,4.
Een tegenligger passeert op dat moment bordje 62,6.
Beide auto's rijden even snel.
Bij welk bordje passeren zij elkaar?
Schrijf op hoe je aan je antwoord gekomen bent.

Bij de oplossing komen drie strategieën van verschillend abstraktienivo uit de klas:
– de stap-voor-stap-metode (aan beide kanten aftellen tot het midden bereikt is);
– het verschil van de getallen op de bordjes berekenen, daar de helft van nemen en dat optellen bij het getal op het eerste bord (eventueel aftrekken van het getal op het tweede bord);
– het gemiddelde nemen van de getallen op de bordjes.

De laatste strategie is technisch gezien misschien het simpelst, begripsmatig is zij dat zeker niet. Navraag bij de leerlingen heeft geleerd dat deze metode binnen het kader van dit probleem niet kan worden verklaard. En als we het probleem wiskundig analyseren, wekt dit ook geen verbazing.



• Op de afrondingsproblematiek, die in het eerste deel is aangezet, wordt nu nader ingegaan.

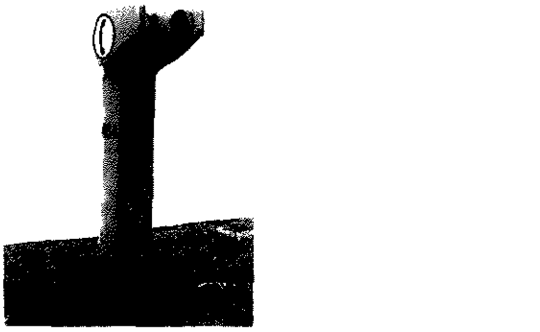


▶ Hoe ver staan de grote borden van elkaar?
Hoe ver staan de hektometerbordjes van elkaar?
Hoe kan dat?

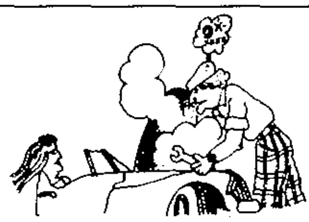
▶ Stel je voor dat beide afstandsborden 300 meter dichter bij de belgische grens worden geplaatst.
Kunnen de getallen op die borden blijven staan?

Ook hierbij kan de getallenlijn natuurlijk weer goede diensten bewijzen.

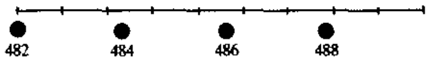
- En dan zijn er nog de bekende gele praatpalen.



Ze zijn aan weerszijden van de autoweg geplaatst op onderling vrijwel gelijke afstand. En nadat is vastgesteld dat er op een zeker weggedeelte om de 2,3 km een praatpaal staat, worden de leerlingen met pech onderweg verrast.



Ergens op het weggedeelte tussen de praatpalen 484 en 486 krijgt meneer Zeur met autopech te kampen.
Hij loopt naar de *dichtstbijzijnde praatpaal* die hij ziet om de wegenwacht te bellen.



Hij vindt dat hij wel lang moet lopen om een praatpaal te bereiken. Als hij thuis komt, schrijft hij daarom een brief aan de *anwb*.

O. Zeur,
klachtweg 23,
mopperdam.

mopperdam, 15 april 1977.

Aan de anwb, afd. klachten,
postbus 11111,
den haag.

Geachte dames en heren,

Vandaag had ik autopech in de buurt van weert. Om de wegenwacht te kunnen waarschuwen moest ik wel een half uur lopen voor ik bij een praatpaal was. Dat vind ik te gek. Naar mijn mening moet het aantal praatpalen verdubbeld worden, en het is uw taak daarvoor te zorgen.
Met vriendelijke groeten, hoogachtend,

De opdracht is nu, een antwoordbrief namens de *anwb* aan de heer Zeur te schrijven. Deze uitnodiging wordt door de leerlingen gretig aanvaard, al doorziet niet elke a.s. *anwb*-medewerker het probleem!

anwb
klachtendienst
den haag

den haag *1977*

Geachte meneer Zeur

Wij stellen u wel op prijs dat u het erg vervelend vindt. Het is namelijk erg moeilijk om op iedere weg een aantal praatpalen te zetten. Per uur bellen er tientallen mensen op. Ja wij hebben autopech wilt u alstublieft even komen wij moeten namelijk naar een trouwparty. Dus wij sturen er gauw een auto op af en zo gaat het de hele dag door. We hebben niet erg veel van die monteurs dus wij kunnen er niet veel aan doen tot onze spijt

met vriendelijke groeten
anwb klachtendienst.
wij hopen u de volgende keer wel aanwezig te zijn.

anwb
klachtendienst
den haag

den haag *24 maart 1977*

Geachte Heer Zeur SSLL
nadat wij u brief gelezen hadden hebben we hartelijk gelachen
Wij dachten bij ons eigen wat een stommerd want u liep niet naar de dichstbijzynde praatpaal u kon als u wilde 1 km en 150 m minder lopen maar ja dat heb je met stommelingen zoals u u keek gewoon niet uit u doppen
Geachte Heer Zeur wij gaan nu de brief sluiten

Klaglendienst ANWB

tijd-plaatsgrafieken

In het derde deel van *autowegen* wordt een aanzet gegeven tot het tekenen en interpreteren van lijngrafieken. Momentopnamen van een autorit worden vastgelegd via stippen in een tijd-plaatsrooster. Via interpolatie ontstaat tenslotte een lijngrafiek. Na een paar oefeningen in het aflezen van zo'n grafiek, waarbij ook de betekenis van het snijpunt van twee tijd-plaatsgrafieken aan bod komt, wordt het boekje afgesloten met een wegenwachtprobleem:

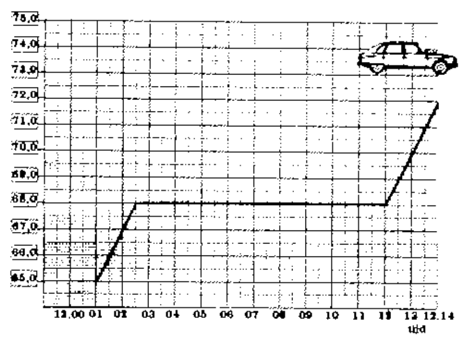
▶ Wat kun je vertellen over de rit van de renault die om 12.01 hektometerbordje 65,0 passeerde?

▶ De bestuurder van de renault had de wegenwacht opgeroepen omdat zijn motor weigerde.
Om 12.04 vertrekt een wegenwacht van paal 74,0 in de richting van de stilstaande renault.
Hij rijdt met een snelheid van 90 km/uur.

▶ Teken in de figuur de grafiek van de rit van de wegenwacht.

▶ Hoe laat bereikt de wegenwacht de stilstaande renault.

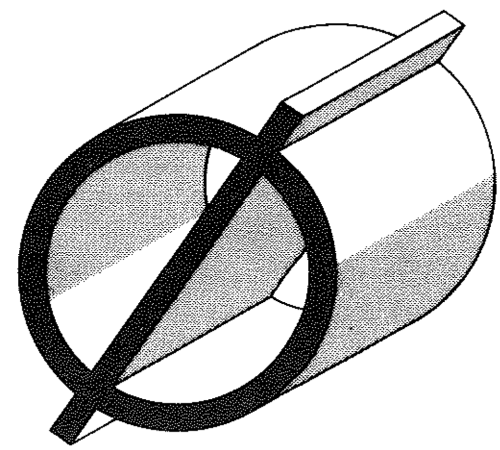
▶ Dadelijk nadat het euvel verholpen was, vervolgde de renault zijn weg.
Hoe lang duurde de reparatie?



Deze opdracht blijkt erg geschikt te zijn voor groepswerk. Gezamenlijk komen de leerlingen soms tot verrassend goede formuleringen, zoals – naar aanleiding van de eerste opdracht –: de auto staat stil, maar de tijd loopt door.
En een andere groep blijkt doordrongen te zijn van het verschralingsaspekt van de wiskunde: in die $9\frac{1}{2}$ minuut kan hij van alles gedaan hebben, maar hij stond stil.

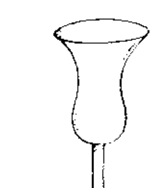
De grafiek van de wegenwacht wordt moeilijk gevonden. Er zijn leerlingen die een vertikale lijn door het punt (12,04; 74,0) willen tekenen. Anderen maken toch weer een stippengrafiek. Het dalend karakter van de lijn geeft eveneens problemen. Maar in de klas is gelukkig ook een wegenwacht die meehelpt de fouten te repareren.

wiskundige wereld-oriëntatie



INHOUD

In duitsland hebben ze zeer slanke jeneverglaasjes. Als je niet zorgt dat er een 'kop' op je glas geschonken wordt, krijg je snel minder dan de helft van wat er in het glas zou kúnnen. 't Glas is ook verdacht snel vol. En leeg!



Inhoud is blijkbaar niet alleen afhankelijk van de drie bekende richtingen: lengte, breedte en hoogte. Ze is ook afhankelijk van bijvoorbeeld de vorm van het glas waarvan we de inhoud bekijken. In de klas kunnen we in dat kader verrassende proeven uitvoeren – met water, natuurlijk! –.

JAN VAN DEN BRINK

bloemenvaas

.... 'Vul deze bloemenvaas eens voor de helft', vraagt de onderwijzeres aan enkele kinderen, die voor het bord staan. ....

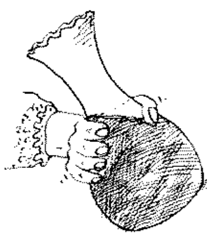
De kinderen meten direkt de helft van de *hoogte*. Dat is overigens niet de helft van de *inhoud*. Maar kinderen storen zich niet aan die wijsheid.

Er is nog een probleem. Je kunt de helft niet goed bepalen als het water heen en weer schommelt. En ook niet, als deze vaas scheef staat. Of houdt juf de vaas soms opzettelijk scheef?

Tenslotte is iedereen tevreden. Maar dan zegt de onderwijzeres geheimzinnig:

.... 'En toch is de vaas *niet* voor de helft gevuld.'

'Nou moe!' ....



jampot

Ze pakt een jampot.

.... 'Vul dit jampotje voor de helft. Schuif eerst het elastiekje om de jampot tot op de plaats waar het water moet komen.'

'Is het wel goed geschat, denk je?'

'Zit het elastiekje wel horizontaal?' ....

Ze vullen de pot voor de helft met water. Het elastiekje wordt naar aanleiding van de waterrand in een horizontale stand verplaatst. Als een echte goochelaar houdt de onderwijzeres de pot omhoog. Ja, ieder is akkoord: de pot is voor de helft gevuld en het elastiekje geeft dat aan.

.... 'Goed, dan de deksel erop.' ....

'Ik stop er meer water in, zonder de pot te openen.' ....

Doek over de pot!

.... 'Sim sala bim.' ....

Juf haalt de jampot *omgedraaid* tevoorschijn: het water reikt nu tot óver het elastiekje.

.... 'Toverwater', roept een kind door de klas. ....

De anderen zitten verbaasd naar het verschijnsel te kijken. Ze zijn er echt van onder de indruk.

ketchupflesje

Nadat deze proef ook met een ketchupflesje is herhaald, komen verklaringen los:

.... 'Boven het water zit een grote luchtbel en die blijft steeds boven. Het water blijft onder.'

'Is de luchtbel net zo groot als het water?' ....

'Ik snap het niet.'

Maar dan kan Renate het uitleggen: 'Dit is groter', en ze wijst op de buik van het ketchupflesje, 'boven is hij dunner.' ....

Moet er nu water bij of moet er water uit, om de fles voor de helft gevuld te krijgen?

verklaringen

't Is duidelijk! We zijn niet tevreden met het opmerken van konstanties à la Piaget. We willen naar *verklaringen* zoeken, naar uitbreidingen van het begrip inhoud, zoals dat bij kinderen aanwezig wordt verondersteld. Hoe?

Door te ontdekken waarvan inhoud afhankelijk is. Op die manier proberen we tot een verscherping van de kinderlijke noties te komen – een typisch kenmerk overigens voor de wiskundige wereldoriëntatie –.[1])

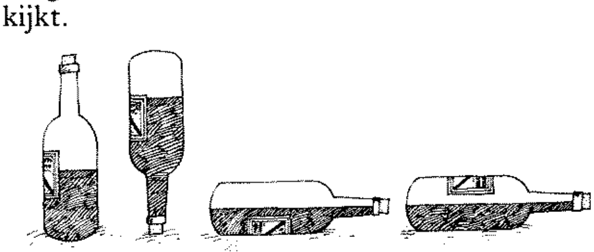
De verklaringen die kinderen geven, en dat is juist hoopgevend, verwijzen naar verschijnselen die van invloed zouden zijn op de inhoud: *vorm, verdelingen* en *dimensies*.

vorm

In het onderwijs pakken we deze zaken aan met bijvoorbeeld symmetrische vazen.

.... 'Hoe ziet de vaas eruit, die tot de halve hoogte gevuld en omgedraaid weer tot de halve hoogte gevuld is?' ....

Laat meer van deze vazen en flessen zoeken. Soms lijkt het of zo'n fles niet geschikt is. Het hangt er maar vanaf van welke kant je het bekijkt.



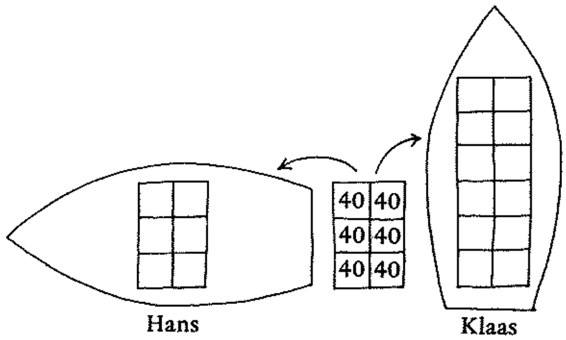
---

[1]) Zie ook de artikelen in de voorgaande afleveringen van het wiskobas-bulletin.

verdelingen en konstrukties

De bedoeling van de volgende voorbeelden is, met blokjes te laden of te lossen, met blokjes te bouwen. We houden hierbij als vanzelf rekening met:

- evenwichtige verdelingen;
- bij het laden van schepen zoeken de kinderen een symmetrische verdeling, zodat het schip tijdens het laden niet omslaat:



- funktionele verdelingen: een gedeelte van een te bouwen kasteel krijgt een vorm die afhankelijk is van de funktie die het heeft.

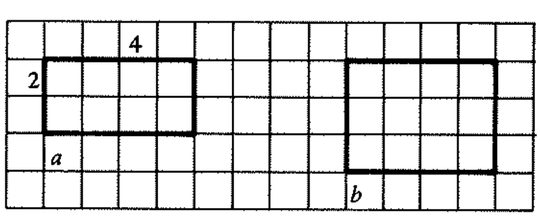
Het gaat hier om diskrete zaken (losse blokjes), in tegenstelling tot de voorgaande proeven met water.

Voorts zijn de kinderen hándelend met blokjes bezig. De zogenoemde 'gebrek-aan-materiaal-faktor' speelt een grote rol: een *tekort* aan blokjes is een uiterst belangrijke situatie, omdat de leerlingen zich dan blokjes en handelingen moeten voorstellen.

de drie richtingen: lengte, breedte en hoogte

Een ekspliciet gebruikmaken van de richtingen treffen we bijvoorbeeld aan in de volgende opdracht:

▶ Bouw flatgebouwen met 24 blokjes.
Schat eens hoe hoog elk flatgebouw wordt!
Hier zijn de plattegronden:

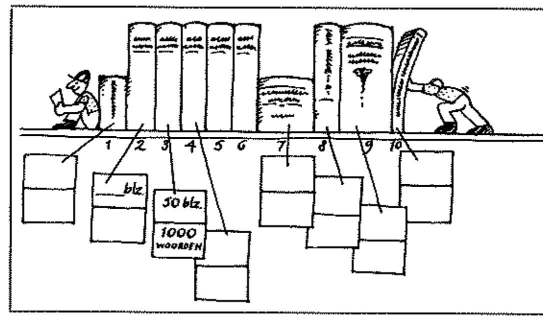


Ook meer impliciet wordt met die richtingen gedacht. Zie bijvoorbeeld het werkblad 'bibliotheek'.

Opdrachten hierbij:

▶ In welke boeken zitten de meeste bladzijden? Hoeveel zijn dat er?

Je kunt dan alleen op de dikte van het boek letten, en op de bladdikte. Stel, dat de bladdikte van elk boek even groot is. En stel, dat



in boek 3 bijvoorbeeld 50 bladzijden zitten. Dan zijn de opgaven op te lossen.

▶ In welk boek valt het meest te lezen? Waarvan is dit afhankelijk? (kleine of grote letters, veel plaatjes, ...)

Dikte en hoogte van het boek spelen hierbij een rol en eigenlijk ook de breedte. Stel, elk boek heeft geen plaatjes en is gezet in dezelfde lettergrootte (beperk de faktoren!). Dan hoef je alleen nog maar de hoogte, breedte en dikte in beschouwing te nemen om de vraag te kunnen beantwoorden.

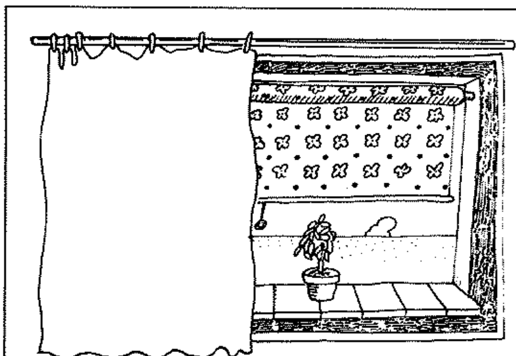
lineaire funkties

Als één van die richtingen van een boek vijf keer zo groot is als die van een ander boek, dan is de inhoud ook vijf keer zo groot.

De inhoud hangt dus lineair af van elk van de drie richtingen. Inhoud wordt daarom wel een 'trilineaire funktie' genoemd en oppervlakte een 'bilineaire funktie'. Het is van belang te letten op onderwijssituaties die de drie richtingen benadrukken, waarvan inhoud medeafhankelijk is.

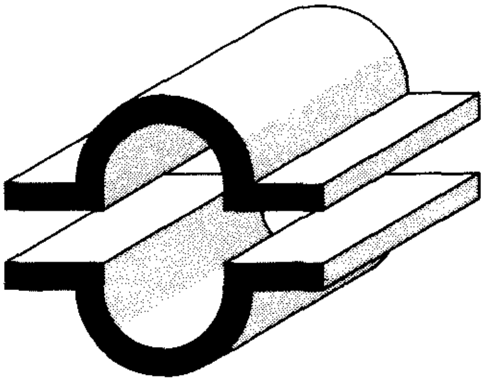
oppervlakte

Ook bij het werken met het begrip oppervlakte speelt deze benaderingswijze een rol. Om u enig idee te geven, volgt tot slot een opdracht rond oppervlaktebepaling uit het tweede leerjaar.



▶ **Hoeveel bloemen staan er op het hele gordijn?**

ander werk



CIJFFERINGE OF REKEN-KONST?

Voor mij ligt 'De vernieuwde cijfferinge' *van Mr. Willem Bartjens, 'Handelende van verscheydene Regulen der Reken-Konst, Alle Koopluyden nodig te weeten'. In 1680 heeft Jan de Groot, 'Schoolmeester en voorzanger tot Velzen', het werkje 'Hersteld, vermeerderd en verbeterd'.*
Het in vele opzichten kostbare boekje, levert genoeg inspiratie om een heel bulletin vol te schrijven, maar dat is helaas niet aan de orde.

EDU WIJDEVELD

de opgave
Onderaan bladzijde 175 trof ik onder het hoofdstuk 'Regel van valsche Positien, of geveynsde Getallen', de volgende opgave aan:

12. Een Boer brengt zeker getal Kievitten ter Markt/ die hy aan hoopen leyd/ en op yder hoop even veel stuks/ voor de eerste hoop leyd hy 1 Kievit/ en $\frac{1}{7}$ van de Rest/ voor de tweede hoop 2 Kievitten/ en $\frac{1}{7}$ van 't overige/ en zo voorts/ elke-maal een meer/ en van $\frac{1}{7}$ van de Rest/ zegt myn eens hoe veel Kievitten hy in 't geheel hadde/ en hoe veel hoopen hy maakten? Antw. 36 Kievitten/ en 6 hoopen.

Kennelijk heeft dit vraagstuk de tand des tijds ruimschoots doorstaan. Huub Jansen bijvoorbeeld, heeft in de tweede jaargang van het wiskobas-bulletin, een vergelijkbare opdracht in zijn rubriek 'problematika' opgenomen.

Hoe dan ook, ik ging het sommetje proberen:

Stel het oorspronkelijk aantal kieviten op x.
Dan ligt op de eerste 'hoop' het aantal $1 + \frac{1}{7}(x-1)$ en is de rest:
$x - 1 - \frac{1}{7}(x-1) = \frac{6}{7}(x-1)$.
Op de tweede 'hoop' liggen dan:
$2 + \frac{1}{7}[\frac{6}{7}(x-1) - 2]$ kieviten.
Omdat op alle 'hoopen' hetzelfde aantal kieviten ligt, is dus:
$1 + \frac{1}{7}(x-1) = 2 + \frac{1}{7}[\frac{6}{7}(x-1) - 2]$,
waaruit na enig herleiden volgt:
$x = 36$.
Dat er dan zes 'hoopen' van zes kieviten moeten zijn, is eenvoudig na te gaan.

oplossing uit het boek
Hoewel tevreden over het goede antwoord – zie de opgave – voelde ik me toch wat onrustig over de lange tijd die ik aan het sommetje besteed had. Want zo recht-toe-recht-aan als de oplossing hierboven vermeld staat, is hij bepaald niet ontstaan.
Integendeel – ik durf het nauwelijks te bekennen – ik heb zeker een vel volgeschreven, voor de goede vergelijking op papier stond; de manier waarop deze wonderbaarlijke koopman zijn kieviten verdeelt, is zó ingewikkeld dat je je wel heel goed moet realiseren wat er gebeurt om dat op de juiste manier met x-en te beschrijven.

Reden des te meer om nieuwsgierig te zijn naar de manier waarop Bartjens' leerlingen deze opgave moesten verwerken.
Ik had geluk: op de volgende bladzij stond de oplossing vermeld.
Een oplossing, waarin de bovenstaande met enige moeite is te herkennen:

176 · Regel van valsche Positien,

Stel x Kievitten
af 1 d°.

$x \div 1$

$\frac{1}{7}/$

$\frac{1}{7}x \div \frac{1}{7}$
✠ 1 by

$\frac{1}{7}x$ ✠ $\frac{6}{7}$ de 1ste Hoop.
x

$\frac{6}{7}x \div \frac{6}{7}$
$\div$ 2 af

$\frac{6}{7}x \div 2\frac{6}{7}$

$\frac{1}{7}/$

$\frac{6}{49}x \div \frac{20}{49}$
✠ 2 by

$\frac{6}{49}x$ ✠ $1\frac{29}{49}$

dus is $\frac{6}{49}x$ ✠ $1\frac{29}{49} = \frac{1}{7}x$ ✠ $\frac{6}{7}$
$\div \frac{1}{7}x \div \frac{6}{7}$

$\frac{1}{49}x = \frac{36}{49}$
(49
ergo $x = 36$ Kieviten
1 af
en $x \div 1 = 35$
$\frac{1}{7}/$
$\frac{1}{7}x \div = 5$
by 1
$\frac{1}{7}x$ ✠ $\frac{6}{7} = 6$ Hoopen.
verder
6 — 1 — 36
6 Hoopen.

AANMERKING.

Zoort-gelijke Voorstellen als dit, en 't naast-volgende, kan men zeer gemakkelijk ontbinden door dezen Arithmetischen Regel, welke uyt een generaale Stel-kunstige oplossing word afgeleyd.
„ Substraheer alteyd 1 van den Noemer die 't gedeel-
„ te uyt drukt, dat telkens word genomen, dit met
„ zig zelven Gemultipliceert, men vind het begeerde.

By Voorbeeld:

In N°. 12. is dat gedeelte $\frac{1}{7}$ Quadrateer derhalven 7 min 1 of 6. Komt 36 voor alle de Kieviten. 't Overige is als boven; in N°. 13. is 't gedeelte $\frac{1}{11}$ Quadrateer dienvolgens 11 min 1 of 10 komt 100, voor 't Capitaal. 't Overige is van zelve klaar.

Intrigerender echter dan de vraag hoe rekenkonstenaars uit die dagen een dergelijke oplossing doorgrondden, was de 'Aanmerking', die onze 'School-meester tot Velzen' aan Bartjens' oplossing toevoegde.
Hoewel zijn 'generaale Stel-kunstige oplossing' mij ontging, was het duidelijk dat het recept 'Substraheer alteyd 1 van den Noemer ...', heel wat eenvoudiger tot resultaat leidde. Achteraf bezien had het kievitenverhaal kennelijk een heel wat simpeler oplossing, dan mijn algebraïsche aanpak deed vermoeden ...!
Maar welke? Dát vertelde Jan de Groot er niet bij.

'echt' denkwerk

Nu begon het denkwerk eigenlijk pas goed. Als gewoonlijk, mag ik eerlijkheidshalve wel weer vermelden.
Urenlang ben ik met de kieviten bezig geweest; vellen heb ik vol gerekend en getekend om die 'simpele' oplossing stapje voor stapje dichterbij te brengen.
De volgende oplossing bijvoorbeeld, vond ik heel aardig:

Het totaal aantal kieviten is een zevenvoud + 1; zeg $7n + 1$.
Je kunt dan op twee manieren redeneren:

- de eerste 'hoop' bestaat uit '1' én nog $\frac{1}{7}$ deel van $7n$, ofwel uit $1 + n$; de eerste rést is dus $6n$; (a)
- na afname van de eerste 'hoop' is de rest kennelijk een zevenvoud + 2; gezien de verdeelprocedure nu, is het aantal keren '7' dat in deze rest bevat is, kennelijk één minder dan in het totaal; dus eerste rest: $7(n-1) + 2$. (b)

Uit (a) en (b) volgt dan $6n = 7(n-1) + 2$, ofwel: $n = 5$.
Oorspronkelijk waren er dus $7 \cdot 5 + 1 = 36$ kieviten, verdeeld in hopen van $1 + 5 = 6$ (zie (a)).

Mijn doel werd uiteindelijk bereikt met de volgende oplossing waarin ik overigens nog wel wat te vragen openlaat voor de liefhebber:

$$\left.\begin{array}{l}\text{totaal aantal kieviten : zevenvoud} + 1\\ \text{rest na eerste opdeling : zevenvoud} + 2\end{array}\right\}\text{verschil '6'.}$$

Dezelfde procedure voor zevenvoud + 3, zevenvoud + 4, zevenvoud + 5, zevenvoud + 6, leidt tot zes 'hoopen' van zes kieviten.

Simpel, nietwaar ...?
Néé: *niet* waar! Natuurlijk is dit niet simpel. Voor mij is het misschien simpel, nu ik een dag met de kieviten in touw ben geweest en het allemaal doorzie. Maar u krijgt, zonder die 'worsteling' doorgemaakt te hebben, het eindprodukt voorgeschoteld. Het kán u onmiddellijk op het goede spoor zetten, dat scheelt, maar of u de open vragen die in bovenstaande oplossing nog verscholen zitten, ook zo 'simpel' doorziet?
Wie weet: de een 'worstelt' sneller en handiger dan de ander.

moraal

- Achter elke fraai geformuleerde oplossing van een (wiskundig) probleem, gaat een wereld van zoeken, denken en missen schuil. Wist u dat, toen u vroeger rekenen of wiskunde leerde op school? Weten uw leerlingen dat? Of schamen we ons allemaal wel eens dat we 'zo iets simpels' toch niet direkt doorzien?
- Doordenkt u altijd eerst de kern van een probleem, voor u eraan gaat rekenen? Of heeft u net als ik, ook eerst dat 'domme' cijferwerk nodig, voor u aan een 'intelligente' oplossing kunt beginnen? Ook bij uw leerlingen komt dat laatste veelvuldig voor.
- Heeft u écht getracht die korte oplossing van het kievitenprobleem te doorzien, of gelóófde u het wel, net als uw leerlingen af en toe?

Rest mij nog om meester Bartjens en De Groot te bedanken voor hun inspirerende 'Cijfferinge'. Of was 't toch 'Reken-Konst'?

gesprekken met kinderen

BEWUSTMAKINGSMOMENTEN (1)

Een reiziger op een interkontinentale klm-*vlucht mag voortaan vrij meenemen: twee stuks ruimbagage van elk maksimaal 158 cm; één stuks kabinebagage van maksimaal 115 cm.*
De gegeven maten zijn te lezen als de som van lengte, breedte en hoogte in centimeters.

Dit gegeven was onderwerp van een gesprekje met drie kinderen: Mirjam (vierde klas basisschool), Sandra (zesde klas basisschool) en Thera (tweede klas mavo*). Een waagstuk, zou je kunnen zeggen, met dergelijke verschillen in leeftijd. Dit bleek ook, maar niet vanwege de leeftijdsverschillen. Voor elk van de drie kinderen was het nodig een goede vulling te geven aan het begrip inhoud.*

Wil je op een interkontinentale vlucht binnen de bepalingen van de klm *zoveel mogelijk bagage meenemen, dan zul je moeten zorgen dat lengte, breedte en hoogte van je koffer even groot zijn.*[1]
In dit artikel willen we aandacht besteden aan de akties die de gespreksleider (Joost) moest ondernemen om dit door de kinderen te laten ontdekken.

LOUIS GILISSEN
JOOST KLEP

instap

Voor de instap van het gesprek kiest Joost een folder van de *klm*, waarin vermeld staat welke afmetingen de koffers die je meeneemt op een interkontinentale vliegreis, maksimaal mogen hebben.

.... 'Wat voor een koffer kun je nu meenemen?' (Joost)
'Iets van 52,5 cm, je krijgt dan wel een vierkante koffer.' (Thera)
'Een koffer van 50 cm lang, 50 cm breed en 58 cm hoog.' (Sandra)
'Goed, maar wat is de grootste koffer die jullie thuis hebben?' (Joost)
'Ik weet wel welke de grootste is, maar ik weet niet hoe groot die is.' (Mirjam) ....

Met hun handen geven de kinderen aan hoe groot die koffer is.
Er wordt geschat welke afmetingen die koffer zal hebben: ongeveer één meter lang, 40 cm hoog en 20 cm breed.

inhoud

De bepaling van de inhoud is moeilijk.

.... 'Dat hebben we nog niet gehad.' (Mirjam) ....

Het gaat erom hoeveel je erin kunt stoppen. Hoe kun je dat uitrekenen? Je kijkt bijvoorbeeld hoeveel legoblokjes er in de koffer kunnen. Hoeveel blokjes liggen er op de bodem? 100 rijen van 40 blokjes: 4000 blokjes.
Hoeveel lagen van 4000 blokjes zijn er?
20 lagen, dus er kunnen 20 × 4000 blokjes = 80.000 blokjes in deze koffer.

.... 'Mag je die koffer meenemen?' (Joost)
'Net niet.'
'Neem eens een andere koffer, eentje van 158 cm.' (Joost)
'50 cm lang, 50 cm breed en 58 cm lang.' (Sandra) ....

Joost geeft met zijn handen aan hoe groot die koffer ongeveer is.

welke koffer is groter?

.... 'Welke koffer is groter: deze of de vorige?'
'Ongeveer even groot.' (Sandra) ....

Dit wordt uitgerekend. In deze koffer blijken 145.000 blokjes van één cm^3 te passen.

.... 'Hier kan bijna twee keer zoveel in.' (Joost)
'Nou snap ik er niets meer van, dat zijn toverkoffers!' (Mirjam)
'Bedenk eens een koffer, waar maar heel weinig in kan.' (Joost)

---

[1]) Zie ook: Leerplanpublikatie 7, pag. 201 (*iowo*, utrecht 1977).

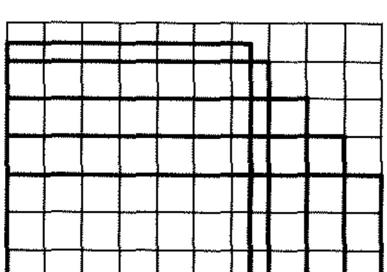
'Een koffer van één cm breed, één cm hoog en 156 cm lang; daar kunnen alleen tandenborstels in.' (Thera)
'Daar kunnen 156 blokjes in.' (Mirjam)
'Weten jullie een koffer waar nóg minder in kan?'
'157 cm lang, $\frac{1}{2}$ cm breed en $\frac{1}{2}$ cm hoog.' (Sandra)
'Een vishengel, die niet uit elkaar gehaald kan worden, mag die mee?' (Joost)
'Nee, die zal wel te lang zijn.' (Thera)
'Als je allemaal van dit soort verschillende formaten in moet laden, zal dat dan gemakkelijk zijn? Nee, hè? Wat zou nu de grootste koffer zijn die je mee mag nemen? Die koffer van Sandra (145.000 cm^3) is bijna 1000 keer zo groot als die lange smalle van Thera (156 cm^3). Laten we eens een paar koffers verzinnen. We nemen koffers die allemaal even hoog zijn, maar niet even lang en breed.' (Joost) ....

tabel
Het volgende tabelletje komt op papier:

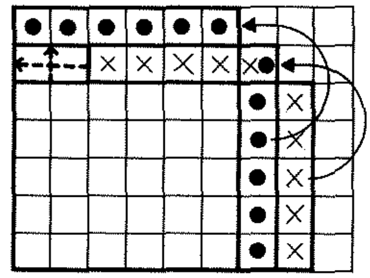
lang (cm)	breed (cm)	hoog (cm)	inhoud (cm^3)
70	60	28	117.600
65	65	28	118.300
80	50	28	112.000
90	40	28	100.800
100	30	28	84.000

Het verschil tussen deze koffers is, dat er bij elke koffer een ander aantal blokjes op de bodem kan liggen. De omtrek van die bodem blijft hetzelfde (158 cm − 28 cm = 130 cm).
.... 'Als je nu de omtrek weet van zo'n onderkant, wat is dan het grootste oppervlak dat je kunt krijgen?' (Joost)
Sandra, kijkend naar de tabel: 'Alles wat het dichtste bij elkaar zit.'
'Zou die koffer met een onderkant van 65 cm bij 65 cm dan de grootste koffer van 28 cm hoog zijn?' (Joost) ....

bodems
Op ruitjespapier worden de bodems van de betreffende koffers getekend (één ruitje is tien cm breed).



Sandra probeert uit te leggen, dat hetgeen je er aan de ene kant afhaalt, er aan de andere kant weer bij komt.
Dan tekent Joost:

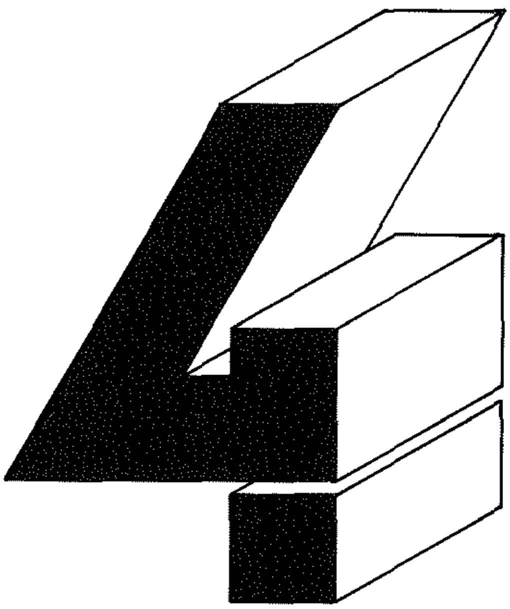


.... 'Als ik van die figuur van 50 cm bij 80 cm de rij hokjes waar een kruisje instaat, afhaal en dat erboven bij zou doen en als ik dan van de ontstane figuur een rechthoek maak?' (Joost)
'Dan hebben we twee hokjes over.' (Mirjam)
'Als we dat nog een keer doen met de figuur van 70 cm bij 60 cm: de reep met rondjes er bovenop leggen?' (Joost)
'Dan maakt het niks uit.' (Mirjam)
'En als we er een smaller stukje afknippen?' (Joost)
'Dan maakt het wel wat uit.' (Sandra)
'Dan komt er een $\frac{1}{4}$ hokje bij.' (Thera)
'Ja, nu is hij vierkant.' (Joost)
'Groter kun je hem niet maken. Als je doorgaat, kom je weer bij de figuur van 60 cm × 70 cm terecht. Dus als je doorgaat, wordt 'ie weer kleiner.' (Sandra)
'Ik denk dat het bij de koffers net zo is. Welke koffer is nu de grootste, denken jullie?' (Joost) ....

Unaniem besluiten de kinderen dat de koffer van 53 × 53 × 52 het dichtste in de buurt van de kubus komt en dus ongeveer de grootste zal zijn. De inhoud van deze koffer is 146.068 cm^3. De koffer met een lengte, breedte en hoogte van $52\frac{2}{3}$ cm heeft een inhoud van 146.085,6 cm^3.

bewustmakingsmomenten
In de aanhef van dit artikel kondigden we reeds aan dat we het gingen hebben over bewustmakingsmomenten. De aanvankelijk voor de hand liggende oplossing die de kinderen kozen, werd onderworpen aan een nadere doordenking.
Inhoudsmeting, maksimalisering van een oppervlakte bij gegeven omtrek en inhouden van gewone koffers kwamen aan de orde. De kinderen werden zich bewust van de problematiek. Wellicht kunt u het verslag van het gesprek nog eens doorlezen en de bewustmakingsmomenten aangeven.

spullenkatern



In dit vierde katern[1]) *zouden twee metoden uit de aritmetische richting besproken worden:*
– ontdek het zelf;
– elementair wiskundig rekenen.
Beide metoden, die in het begin van de jaren zeventig op de nederlandse markt werden gebracht, zijn vertalingen/bewerkingen van amerikaanse metoden.

INLEIDING (1)

We kunnen niet spreken van 'de' wiskunde op de basisschool. Daarvoor zijn de verschillende praktische uitwerkingen te divers. Er zijn duidelijke richtingen te onderscheiden in de vele realiseringen die in boeken, materialen en allerhande spullen gestalte gekregen hebben. Eén van die richtingen hebben we de *aritmetische* stroming genoemd – ook wel als 'New-Math' aangeduid –. Deze richting heeft vanaf het einde van de vijftiger jaren het reken/wiskundeonderwijs in de verenigde staten bepaald.
De New-Math-aanpak wordt gekarakteriseerd door o.m.:

- vroegtijdige invoering van de verzamelingentaal;
- grote aandacht voor eigenschappen van bewerkingen;
- rekenen in andere talstelsels;
- introduktie van meetkundige onderwerpen waaronder bijvoorbeeld de hoekmeting.

Met name de invoering van de *verzamelingentaal* heeft grote weerstanden gewekt. Aanvankelijk waren het prominente wiskundedidaktici die zich tegen de invoering van de verzamelingen richtten. Later – in de zeventiger jaren – sloten vele onderwijsgevenden zich bij deze kritiek aan. Vooral in het aanvankelijk reken/wiskundeonderwijs bleek de verzamelingentaal tot een zeer povere en onnatuurlijke benadering van het onderwijs te leiden.
De kritiek richtte zich echter niet alleen op de verzamelingen. Ook de *rekenvaardigheid* werd een bron van toenemende zorg genoemd.
Beter gezegd: het afnemen van de rekenvaardigheid dat de leerlingen demonstreerden die volgens de New-Math-traditie onderwezen waren, baarde zorgen.
Het ontbreken van wiskundige onderwerpen, die zich leenden voor ruime *toepassingen*, werd

[1]) De eerste drie katernen, die in de zesde jaargang van het wiskobas-bulletin verschenen, bevatten besprekingen van de 'traditionele' rekenmetoden.

in de zeventiger jaren eveneens als een handikap van de aritmetische richting aangemerkt. Om dan nog maar te zwijgen over de ontluisterende New-Math-programma's van geïndividualiseerd onderwijs zoals gerealiseerd in projekten als *ipi, plan* en *ige*![1])

Heeft een dergelijke ontwikkeling schadelijke gevolgen (gehad) voor het onderwijs? Deze vraag is moeilijk in algemene zin te beantwoorden. Zeker is wel, dat de praktijk van het reken/wiskundeonderwijs in de verenigde staten veel minder is veranderd dan men op grond van de gebruikte leerboeken zou aannemen. Uit een uitgebreid onderzoek is gebleken dat de doorsnee-onderwijsgevende nieuwe onderwerpen overslaat, meer nadruk op het rekenen legt dan het leerboek doet en zich ook niet altijd aanpast bij een andere metodiek.

> 'Almost none of the concepts, methods, or big ideas of modern mathematics programs have appeared in this median classroom.'[2])

Moeten we niet dankbaar zijn dat er in feite zo weinig veranderd is? Niet onverdeeld, want ook het traditionele rekenonderwijs kent feilen. En bepaalde New-Math-metoden moeten zonder twijfel hoger geschat worden, wat de didaktische kwaliteit betreft, dan vele rekenmetoden. Hoewel er direkt aan toegevoegd dient te worden dat die wiskundemetoden voor sterke verbetering vatbaar zijn. Recente ontwikkelingen in de verenigde staten tenderen dan ook naar belangrijke aanpassingen: de verzamelingentaal wordt minder overheersend, de meetkunde minder schraal, grafieken worden geïntroduceerd, 'machientjes' verschijnen, waarschijnlijkheid en statistiek krijgen wat meer aandacht, evenals het meten.

Met het bovenstaande heeft zich tevens de moeilijkheid aangeduid, waarvoor we komen te staan bij de beoordeling van een aritmetische wiskundemetode van de eerste generatie.[3])

[1]) *Ipi*: *i*ndividually *p*rescribed *i*nstruction; *plan*: program for *l*earning in *a*ccordance with *n*eeds; *ige*: *i*ndividually *g*uided *e*ducation.

[2]) Conference Board of Mathematical Sciences: *Overview and analysis of School Mathematics*, washington 1975, pag. 77.

[3]) Onder 'metoden van de eerste generatie' verstaan we: metoden die in het begin van de zeventiger jaren op de nederlandse markt verschenen en waarvan inmiddels het materiaal tot en met het zesde leerjaar gereed is. Veelal betreft het vertalingen/bewerkingen van buitenlandse metoden (vs, duitsland, zweden).

Moeten we haar afmeten aan het bestaande rekenonderwijs, of dienen we de kwaliteit af te wegen tegen nieuwere werken uit dezelfde richting? Dienen we ons af te vragen, hoe ze zich – naar ons oordeel – verhoudt tot leerboeken uit andere richtingen of moet ze op zichzelf bekeken worden?
Ziehier enkele principiële kwesties voor een metodenbeoordeling. Voorlopig volstaan we in dit katern met het beschouwen van twee metoden, die van dezelfde generatie zijn en uit dezelfde hoek komen. De metoden zijn los van elkaar geanalyseerd. Uit de algemene konklusie in de slotparagraaf van de bespreking van *elementair wiskundig rekenen* blijkt zonder meer, aan welk van de twee metoden we de voorkeur geven. Duidelijk is dat we in latere katernen een meer absolute maatstaf moeten publiceren: de metoden van de eerste generatie tegen de achtergrond van de traditionele metoden en ten opzichte van de latere generaties (de metoden: *boj! rekenen, wiskunde voor de basisschool, getal in beeld, taltaal, rekenwijzer*).

ONTDEK HET ZELF (2)

Ontdek het zelf verscheen omstreeks 1970 als vertaling c.q. bewerking van *discovering mathematics* op de nederlandse markt.
Enkele maanden geleden stelden wij een uitgebreide analyse van *ontdek het zelf* samen. Inmiddels blijkt dat de uitgever (Wolters Noordhoff) deze metode uit het fonds heeft genomen. Dit betekent dat *ontdek het zelf* niet meer herdrukt wordt.
Een maatregel die wij op zichzelf genomen van harte toejuichen, want ons oordeel over *ontdek het zelf* is beslist niet gunstig.
Op grond van het voorgaande achten wij het thans niet meer opportuun de metodebeschrijving van *ontdek het zelf* in dit katern te publiceren.

ELEMENTAIR WISKUNDIG REKENEN (3)

HENK MEIJER
LEEN STREEFLAND

Nadat we in de eerste paragraaf (**1**) *een opsomming geven van de materialen waaruit de metode is samengesteld, volgt in paragraaf* (**2**) *een algemene schets van de metode.*
Daarna volgen in paragraaf (**3**) *per bouw enkele algemene opmerkingen over de inhoud, ter-*

wijl de didaktische principes in paragraaf **(4)** *aan bod komen.*
Vervolgens bekijken we beknopt de onderwerpen verzamelingen **(5)**, *cijferen* **(6)**, *breuken* **(7)** *en meetkunde* **(8)**. *We eindigen met enkele samenvattende punten* **(9)**, *gegevens uit praktijkinterviews* **(10)** *en een algemene konklusie* **(11)**.

▶INLEIDING (1)

De metode[1]) is samengesteld uit het volgende materiaal:
- voor het eerste tot en met het zesde leerjaar: twee leerlingenboeken en twee handleidingen;
- werkboekjes bij de delen 3 en 4;
- hulpmateriaal: speelleerset met handleiding;
- een boekje: wat zit er achter?

De oorspronkelijke titel luidt: *elementary school mathematics.*[2]) Auteurs: Eicholz, Brumfiel en Shanks.
Bij de nederlandse bewerking staan voor de verschillende deeltjes (in veranderende samenstelling) als auteurs: J.W. van 't Hof, P. Wagenaar, Robert E. Eicholz, Phares G.O'Daffer, J. van de Pavert (eindredakteur) en Charles R. Fleenor.
We begroten de eerste algemene aanschafkosten voor een zesklassige school met 30 leerlingen per klas op ca *f* 5.000,– (inklusief leerlingenmateriaal).
Jaarlijks terugkerende kosten aan verbruiksmateriaal: ca *f* 280,– (voor 180 leerlingen).

▶ALGEMENE SCHETS VAN DE METODE (2)

De naam van deze metode, *elementair wiskundig rekenen* (voortaan: *ewr*), duidt enerzijds op haar belangrijkste kenmerk, namelijk de rekenonderwerpen in een vertikale opbouw en anderzijds op de titel, waaronder het amerikaanse origineel van deze metode werd uitgegeven: *elementary school mathematics.*
De vraag is, hoe we dat 'wiskundige' moeten begrijpen. In het geval van *ewr* betreffen de wiskundige pretenties hooguit de keuze van 'volwassen' wiskundige begrippen als uitgangspunt voor het op gang brengen en realiseren van begripsvormingsprocessen bij het lagere schoolkind.

Het bedrijven van wiskunde als menselijke aktiviteit, het binnen de wiskunde trekken van probleemsituaties uit de omringende wereld en het daarbij aktief onderzoekend bezig zijn – evenzovele kenmerken van een tot ontwikkelen uitnodigend handelen en sleutel voor een wezenlijk vernieuwd *wiskundeonderwijs* – zal men in *ewr* tevergeefs zoeken. Zelfs na kennisneming van het feit, dat enkele nieuwere onderwerpen zich in deze metode aandienen. Vanuit voorgaande visie op (wiskunde-)onderwijs, kan de metode daarom beter ingedeeld worden bij de traditionele rekenmetoden, dan aangemerkt worden als een wiskundemetode van een latere generatie.

Opvallend is de fraaie vierkleurenuitvoering in leerlingen- en docentenmateriaal. In het algemeen vervullen de kleuren en afbeeldingen een funktionele rol in de didaktische opzet. Overigens is het wél zo, dat die didaktische benadering zich kenmerkt door een abrupte introduktie van een meestal wiskundig begrip door middel van een definítie van dat begrip (neem bijvoorbeeld 'dichtheid'), gevolgd door een verkláring en enkele (dikwijls) niet zo funktionele toépassingen.
Voor de inleiding in de meetkunde heeft de euclidisch-deduktieve opbouw heel duidelijk model gestaan. Allerlei elementaire begrippen worden star definiërend ingevoerd: 'wat is een lijn?'[3]), gevolgd door hoeken, die twee evenwijdige lijnen maken met een derde lijn (sic!).[4]) Veel aantrekkelijker aktiviteiten (beredeneerd knippen en vouwen) ondergaan hierdoor uitstel tot de hogere leerjaren.
Gelet op de vroegtijdige introduktie van verzamelingentaal, de wijze van behandeling van enkele nieuwe onderwerpen en de manier waarop nieuwe begrippen geïntroduceerd worden, kan *ewr* aangemerkt worden als een eksponent van de 'aritmetische' richting in de metoden van rond de jaren zeventig. Vanuit die opvatting maakt de metode zich verdienstelijk door de weloverwogen en konsekwente opbouw van die rekenonderwerpen die het karakter van een deelleergang hebben (bijvoorbeeld cijferen, breuken). Door deze benadering zijn overigens koncessies gedaan aan de realiteitswaarde.

▶INHOUD (3)

onderbouw (3.1)

Ewr voert de leerlingen, zoals iedere rekenmetode, binnen in de wereld van het getalbegrip en de bewerkingen met getallen. Dit gebeurt door benadrukking van het aantalaspekt van het getalbegrip. Terminologieën uit de verzamelingenleer worden hierbij op een onjuiste

[1]) De eerste nederlandse uitgave dateert uit 1970 en is verschenen bij van Gorcum & Comp. N.V. te assen.
[2]) Uitgever: Addison-Wesley Publishing Company Inc. (reading, massachusetts, *usa* 1970).
[3]) Deel 5, pag. 148.
[4]) Deel 5, pag. 156.

wijze toegepast, maar spelen overigens een niet-funktionele rol. Ze kunnen dus rustig achterwege blijven. De verzamelingentaal druist tegen het natuurlijke taalgebruik van het kind in.
De eerste twee delen van de metode beperken zich vrijwel uitsluitend tot rekenen: optellen en aftrekken, het ordenen van getallen – met als voorbereidingen daarop een inleiding op het idee van plaatswaarde, de getallenlijn als visualiseringsmiddel –. Tien elementen in een verzameling worden gebundeld tot een bosje van tien, enz.
Het optellen over de tien wordt voorbereid door aandacht te besteden aan de associatieve eigenschap van het optellen: $3 + 2 + 4 = (3 + 2) + 4 = 5 + 4 = 9$.
Verder wordt een begin gemaakt met geldrekenen, lengtemeten (de standaardmaten zijn er gewoon), de tafels van vermenigvuldiging (sprongen van twee op de getallenlijn, de tafel van vijf met stuivers).
Het derde deel bevat uitsluitend een herhaling van hetgeen in de voorgaande delen aan bod is geweest. Het klokkijken krijgt wat ruimer aandacht.
In het vierde deeltje wordt de telrij verder verkend (tot in de duizenden) en wordt het verwerven van de algoritmen voor optellen en aftrekken voorbereid. Een systematischer aanpak van de tafels van vermenigvuldiging vindt plaats, waarbij de verzamelingenterminologie welig 'toegepast' wordt. Ook kombinatorische telproblemen komen hierbij aan de orde, evenals verdelingen in verband met het breukbegrip, de breuken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, en wat lengtemeten.

Het onderbouwprogramma is een puur rekenprogramma. Het kenmerkt zich door eenzijdigheid en starheid in de aanpak. Alle opgaven zijn doel in zichzelf. Vrijwel geen enkele aktiviteit wordt door een probleempje gemotiveerd. Het gaat uitsluitend om eksercities binnen het gesloten systeem van het rekenen. Daarbij treden steeds – op een enkele uitzondering na – statische situaties op, die vrijwel geen relatie met de wereld van het kind vertonen. Soms wordt de sleur doorbroken, doordat de opdrachten een voor de leerlingen wat motiverender vormgeving gekregen hebben, zoals bijvoorbeeld tabellen, kruisgetalraadsels, e.d.
Er is sprake van rekenen in de allertraditioneelste zin, omdat het gaat om afzonderlijke gevallen:
- afzonderlijke gevallen bij de bewerkingen zijn belangrijk, niet het principe van de bewerking zelf;
- afzonderlijke gevallen bij het klokkijken krijgen de nadruk, niet het principe van het klokkijken.

middenbouw (3.2)
In de middenbouwdelen worden de lijnen vanuit de onderbouw doorgetrokken. Het aksent ligt daarbij voorlopig sterk op de uitbreiding van het getalbegrip en in verband daarmee op het plaatswaarde-idee. Het gebruik van een grote diversiteit aan materialen wordt hierbij gesuggereerd, o.m. in de illustraties: blokkenmateriaal, staven in lossen en bossen van tien, zakken van tien, honderd, abakus, knikkerpotten, enz. Gekoppeld aan die verdere verkenning van de telrij staat de ontwikkeling van het cijferend optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, waaraan we in paragraaf **(6)** uitgebreid aandacht besteden.
De inleiding in een onderwerp als meetkunde verdient nauwelijks een goed woord. Bij het rekenen zijn heel wat situaties ontleend aan de realiteit, bijvoorbeeld: vergelijken van snelheden, rekenen met geld, bewerken van resultaten van spelsituaties (bijvoorbeeld bepaalde puntentellingen), meten van gewicht, lengte, oppervlakte en inhoud, kamperen, afstanden, enz. Alle genoemde onderwerpen worden echter vrijwel uitsluitend op hun (kale) rekenaspekten bekeken. Nochtans liggen hier mogelijkheden het rekenen in een ruimer kader te plaatsen, bijvoorbeeld binnen wereldoriënterend onderwijs; het rekenen wordt dan dienstbaar gemaakt aan een dergelijke verkenning.
In vergelijking met de delen voor de onderbouw zijn de delen voor de middenbouw aantrekkelijker. Door de vaststelling, dat de middenbouwboeken een levendiger indruk maken dan die van de onderbouw, wordt het elders geuite bezwaar tegen het uit de lucht vallen van begrippen uiteraard niet opgeheven. Van de leerlingen wordt bijvoorbeeld verwacht dat zij zonder voorafgaande voorbereiding weten wat het wil zeggen: 'Deze auto loopt 1 op 12.'[1]) Dat registratie van een voldoend aantal verbruikservaringen en bepaling van het gemiddelde, achteraf tot een dergelijk verbruiksmodel kan leiden, wordt bij onze derdeklassers kennelijk bekend verondersteld, getuige de begeleidende onderwijzerstekst. Zonder nadere aanwijzingen mogen de leerlingen proberen de opgaven uit te werken.
Om een indruk te geven van het taalgebruik, geven we nog een bloemlezing uit de tekst voor de leerlingen: plaatswaarde, ongelijkheden, funktie, funktiemachine, abakussen, de distributieve eigenschap, produkten, kwo-

[1]) Deel 6, pag. 83.

tiënt, getalteorie, priemgetallen, Fahrenheit (amerikaans!), termometer, netwerk, gelijkwaardige breuken, lagere en hogere termen, etc.

bovenbouw (3.3)

Uiteraard gaat de belangstelling uit naar de matematische onderwerpen, zoals die in de deeltjes 11 en 12 voorkomen. Deze zijn namelijk: machten, talstelsels, logisch denken over verzamelingen, reeksen, meetkunde, negatieve getallen en kansberekening. Genoemde onderwerpen komen in afzonderlijke delen in de gegeven volgorde als aparte leerstofeenheden aan de orde. Kenmerkend voor de didaktische benadering is de 'kaalheid' van waaruit de presentatie en toepassing van zo'n onderwerp plaatsvindt (zoals bij machten), de geïsoleerdheid (zoals bij logisch denken met verzamelingen) en het abstrakte nivo van de didaktische presentatie (zoals bij reeksen).
De meetkunde wordt in een ruime kontekst aan de orde gesteld. Zowel definitieachtige onzin als vaardigheid in konstruktie, passeren de revue, gevolgd door zeer aanvaardbare 'transformatieopdrachten'.
Hoewel de amerikaanse uitgave soms een didaktisch meer uitgebalanceerde aanpak stimuleert dan *ewr*, gaat dit voor het onderwerp negatieve getallen niet op. Winst en verlies, bezit en schuld verwarren de ook gegeven mogelijkheden met de getallenlijnen. De snelle overgang naar bewérkingen met negatieve getallen komt ons dubieus voor.
Ook de kansrekening munt niet uit door zorgvuldigheid. De veelheid van niet-onderscheiden benaderingen, de onmiddellijke getalsmatige aanpak van het zo moeilijke kansbegrip, wekken de indruk van: en nu nog even een kansje.

Een somber beeld van de mootjes bovenbouwwiskunde, met dien verstande, dat de aangedragen elementen, het niet per se onmogelijk behoeven te maken voor de goed op de hoogte zijnde leerkracht, sommige onderdelen in aanvaardbaar onderwijs te 'vertalen'. Het is daarom jammer, dat de onderwijzershandleiding hiertoe weinig aanwijzingen bevat; aanwijzingen van organisatorische aard en didaktisch veelal van bedenkelijk allooi. De wiskundige heroriëntering vindt plaats in een apart deeltje voor de leerkracht, *wat zit er achter?*, waarvan alleen al vanwege de fouten mag worden gewenst, dat zulks nu en in de toekomst verborgen blijft.

[1]) Deel 1, pag. 6.

▶ DIDAKTIEK (4)

principes (4.1)

In het beknopte overzicht van *ewr* wordt (terecht) gewezen op het belang van het zelf ontdekken van strukturen, het bewust handelen door de leerling, de specifieke werkhouding en -instelling, de grote mate van logisch denkvermogen die het moderne wiskundeonderwijs vraagt.
Eerlijk gezegd komt het 'zelf ontdekken' en het 'bewust handelen' in *ewr* niet zo erg duidelijk aan het licht. In redelijkheid mag dus niet verwacht worden, dat de gebruiker in zijn/haar onderwijspraktijk dergelijke mogelijkheden zal kunnen realiseren.
Het grondidee achter het amerikaanse origineel legt de gehuldigde opvatting over begripsvorming bloot:

> 'The very essence of the *Elementary School Mathematics* series is reflected in the beliefs to which we are dedicated: that there are fundamental mathematical concepts which can be isolated and set forth with sharpness and clarity; that these concepts, when truly understood, provide powerful tools for extending knowledge; that children at every level should be encouraged to think, to question, and to seek understanding; that to each generation must be passed on a certain body of knowledge shifted out from the thousands of years of civilization behind us; that the creativity each new generation brings into the universe must not be dulled by forcing upon our pupils patterns of thought which have served us well in the past but which may be inadequate for the future.'[1])

Inderdaad worden matematische begrippen na een korte inleiding *duidelijk gedefinieerd*, waarna de leerling gekonfronteerd wordt met een aantal toepassingen of vaardigheidsoefeningen. In populair jargon: *snap je 't? nadoen! oefenen!*

didaktische aanwijzingen (4.2)

Echte didaktische aanwijzingen komen in de – zeer verzorgde – onderwijzersboeken niet voor. Deze boeken beperken zich tot de éne aanbevolen lesindeling: voorbereiding, kennismaking, groepsdiskussie, verwerking. Overigens is deze indeling duidelijk in overeenstemming met de in **(4.1)** opgenomen basisopvatting.
In het docentenboek staan (voor nederlandse begrippen) uitgebreide aanwijzingen. Deze zijn voornamelijk van technisch-organisatorische aard. Op zichzelf is dat niet zo gek, als de matematisch-didaktische aanwijzingen – waar nodig – in voldoende mate zouden voorkomen. Dit is nauwelijks het geval. Puur wiskundig gezien komen fouten voor, terwijl de essentie en

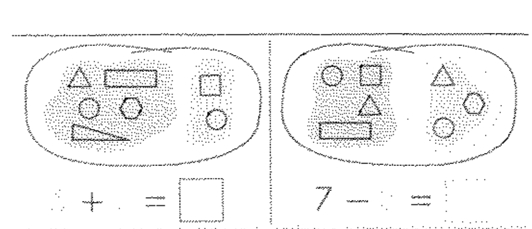
de bedoeling van leerlingaktiviteiten meestentijds niet uit de verf komen.
In de oorspronkelijke uitgave is dat beter verzorgd. Een meer beknopte vertaling geeft dikwijls het gevoel, dat er net iets ontbreekt, hetgeen op den duur als storend wordt ervaren. Belangrijke aktiviteiten als 'meten' worden puur voorschrijvend ingeleid. In de klas zal dus best 'iets' gebeuren. Het 'waarom' en 'waarom zó' wordt niet toegelicht. Het adagio 'aktief handelen' smoort in 'volgzaam afpassen'.

differentiatie (4.3)
De differentiatieprincipes in *ewr*, zoals ze door de auteurs gesuggereerd en zeker niet bindend voorgeschreven worden, beperken zich tot *aanbiedingsdifferentiatie*. Dat wil zeggen: het betreft vrijwel uitsluitend die differentiatie, waarbij de leerkracht door een verschillend aanbod van opdrachten tegemoet tracht te komen aan de onderlinge verschillen tussen de leerlingen.
Kwa systeem betekent dit, dat een keuze wordt gemaakt voor dubbele paginanummering voor onderscheiden groepen leerlingen, voor steropgaven ten behoeve van nivodifferentiatie en voor het onderscheid in basisstof, uitgebreide basisstof en verrijkingsstof binnen een blokkensysteem op de manier van *ncr.*[1])
Een dergelijke benaderingsvorm vanuit een organisatorische invalshoek komt echter niet tegemoet aan het noodzakelijke principe van didaktische differentiatie (dat wil zeggen: leerlingen van verschillend nivo treden op eigenaardige wijze, passend bij dat nivo, opgaven tegemoet).

▶ VERZAMELINGEN (5)
De handleiding vermeldt:

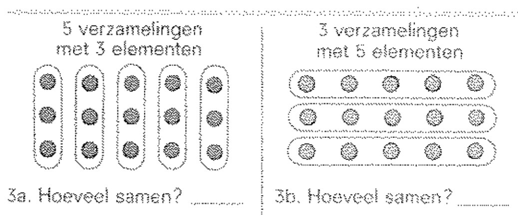
> 'De reeds lang bij wiskundigen bekende leer van de verzamelingen kreeg door zijn grote gebruikswaarde meer bekendheid en werd zowel in het reken- als in het wiskundeonderwijs ingevoerd.'[2])

Daartoe werden de aanwijzingen in de onderwijzersboeken, zo wordt gesteld, met ekstra zorg samengesteld.
De eerste pagina met aanwijzingen en suggesties voor de onderwijzer, vraagt dan ook een grondige voorbereiding van de begrippen verzameling en lid of element. Dit gebeurt door enkele opmerkingen over een verzameling suikerzakjes, gevolgd door een verhaal over het indelen van kollekties en het lidmaatschap van klubs.
Verderop stelt men dan, dat drie verzamelingen gelijk zijn, als ze hetzelfde aantal elementen bevatten, kennelijk opdat op verantwoorde wijze gekonkludeerd kan worden dat één het aantal elementen voorstelt van een verzameling met één element. Zoiets roept huiveringen op betreffende de matematische zuiverheid en didaktische inbedding van de 'verzamelingenleer' in het aanvankelijk rekenen. Maar wat betekent dat in de klassepraktijk? Bezien we het betreffende leerlingendeeltje[3]), dan beperkt de kwalijke verzamelingeninvloed zich door het zetten van kringen om plaatjes met voorstellingen van scharen en vingerhoedjes. Zou de leerkracht zich onthouden van de naar ons gevoel dikwijls pro forma gegeven – parmantige – verzamelingstechnische opmerkingen, dan lijkt er weinig kwalijks aan de hand.
Immers, opmerkingen als zou een kollektie voorwerpen tot een verzameling verheven worden door er een (nota bene: wollen) draad omheen te leggen, kunnen nauwelijks serieus genoemd worden. Nogmaals, worden de gegeven plaatjes beschouwd als afbeeldingen van kollekties, dan wordt er in het eerste deel zinvol gesproken over het vergelijken daarvan: meer, minder, deelkollekties, etc. Dat het getal ingevoerd wordt als kardinaalgetal, dus representant van een hoeveelheid, te beginnen met '1' en daarna konsekwent opklimmend, '2', '3', '4', enz., mag wat star genoemd worden, maar *is* een keuze.
Gesuggereerd wordt, dat vanuit die benadering (drie is één meer dan twee) de eerste inbedding van een getalidee plaatsvindt. Als dan op pag. 103 de getallenladder omvalt naar een getallenlijn en het ordinale getalaspekt zodoende een kans geeft, kunnen we tevreden van een meerzijdige benadering spreken. Dan krijgt de '0' ook meer inhoud dan als indikator van een lege verzameling.
Maar terug naar de verzamelingen. In het eerste deeltje worden de bewerkingen ingevoerd als verenigingen van verzamelingen, c.q. het komplement van een verzameling bij een deelverzameling:



¹) Zie: wiskobas-bulletin, jaargang 6 nr 3, spullenkatern 2.
²) Beknopt overzicht, pag. 1.
³) Deel 1.

Het operationele karakter, toevoegen, wegnemen, omvallen, alsmede een manipulatief karakter, vervalt daarmee volkomen. Het hier vermelde bezwaar geldt dus minder de 'verzamelingsteoretische' benadering dan wel een op voordoen en naäpen gebaseerde didaktiek.
In de onderbouw beperkt de aandacht voor verzamelingen zich overigens tot een matig gebruik van Venndiagrammen. En dan ook nog als de 'drager' van de voorstellingen, die de operatie vermenigvuldigen inleiden:

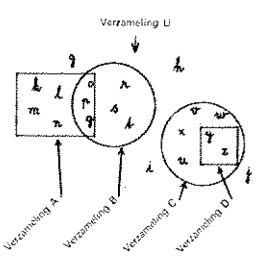


Moeilijk kunnen argumenten voor de gebruikswaarde en wetenschappelijke standing worden stand gehouden, als we de eerste vier deeltjes in gedachten nemen. Weet de leerkracht echter te zwijgen, dan behoeft de gevolgde didaktiek geen afbreuk te doen aan reputatie en bruikbaarheid. Systematische aandacht voor begrippen, symbolen en opgaven rond verzamelingen, treffen we aan in duidelijk gesepareerde paragrafen in de deeltjes 7, 8 en 10 en als samenvatting in slotdeeltje 12.
Deel 7 geeft sommetjes als bijvoorbeeld:

Optellen en aftrekken.

Verzamelingen.

De letters binnen de rode rechthoek zijn de verzameling A
De letters in de zwarte cirkel zijn de verzameling B. De letters in de rode cirkel zijn de verzameling C. De letters in de zwarte rechthoek zijn de verzameling D.
Alle letters zijn de verzameling U.



Opgaven:

1. Hoeveel letters hebben de volgende verzamelingen?
[A] Verzameling A [B] Verzameling B [C] Verzameling C [D] Verzameling D [E] Verzameling U.
2. In welke twee verzamelingen zijn evenveel letters?
3. Hoeveel letters zijn er:
[A] Buiten verzameling A
[B] Niet in verzameling B
[C] Niet in de verzamelingen A, B, C en D.
4. Teken een kring op je papier en zet er bij: verzameling E
Schrijf de letters van verzameling A en C in de kring. We noemen nu verzameling E de vereniging van verzameling A en verzameling C.
Hoeveel letters heeft:
[A] Verzameling A [B] Verzameling C [C] De vereeniging van verzameling A en C.

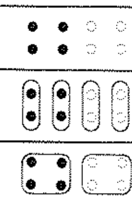
Verzameling E

[1])

Het achtste deel brengt de verzameling in relatie tot breuken:

Breuken en verzamelingen.

Breuken worden vaak gebruikt om een deel van een verzameling te vergelijken met de hele verzameling. Je zult ontdekken dat we voor een bepaald deel verschillende breuken mogen opschrijven. In deze voorbeelden gaat het steeds om 4 rode stippen die vergeleken worden met de 8 stippen waaruit de verzameling bestaat. Bestudeer de voorbeelden maar eens goed.



4 van de 8 stippen zijn rood.
$\frac{4}{8}$ van de stippen is rood.

2 van de 4 verzamelingen bevatten rode stippen.
$\frac{2}{4}$ van de stippen is rood.

1 van de 2 verzamelingen bevat rode stippen.
$\frac{1}{2}$ van de stippen is rood.

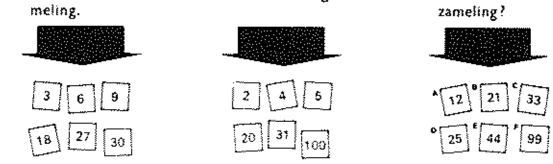
[2])

Hoewel deze voorbeelden weinig bijdragen tot verheldering van de in die delen bedoelde problematiek, kan men met de omvang en inhoud van de gepresenteerde verzamelingenteorie vrede hebben.
Zo niet met enkele pagina's uit het negende deel, handelend over 'logisch leren denken in verzamelingen', waarvan de volledige onzin door één voorbeeld geïllustreerd kan worden:

3. Deze getallen behoren wel tot de verzameling.

Deze getallen behoren niet tot de verzameling.

Welke van deze getallen behoren tot de verzameling?



[3])

Een obligate introduktie van de termen en symbolen voor vereniging en doorsnede komt zo summier aan de orde, dat het lijkt alsof de auteurs zich ervan ontheven achten er nog meer aandacht aan te schenken.

Samenvattend kan worden gesteld, dat het een verdienste is dat een van origine amerikaanse metode van rond 1970 weinig aandacht aan verzamelingenteorie besteedt en dat door veronachtzaming daarvan de verstandige gebruiker een hinderlijk effekt goeddeels kan vermijden.

▶ CIJFEREN (6)

Het cijferen wordt in *ewr* met de nodige zorg aangepakt. Het gaat bij het cijferen per traditie om het aanleren van zuinige rekenwijzen voor het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Die rekenwijzen of algoritmen kunnen (in een metodisch-didaktische opbouw) uiteengelegd worden in een aantal achtereenvolgens te nemen stappen. Aan iedere stap op weg naar het uiteindelijke algoritme voor welke van de vier hoofdbewerkingen (met natuurlijke getallen) dan ook, wordt aan-

[1]) Pag. 46.
[2]) Pag. 84.
[3]) Pag. 5.

dacht besteed. Wel is het de vraag of met het uiteenleggen van een algoritme in een aantal deelhandelingen, ook het waarom van de sámenvatting van die stappen in dat algoritme op begripsnivo gerechtvaardigd wordt voor de leerlingen.
Bij de beschrijving van de aanpak van het cijferen in *ewr* willen we aansluiten bij de stappen, die gemaakt worden. We doen dit in voorbeelden uit de leerlingenboeken. Ook voor de leerlingen worden de verschillende stappen op papier uiteengezet, waarbij op een funktionele manier van kleuren gebruik gemaakt is. Deze aanpak bergt wel het gevaar in zich, dat de gebruikers van de metode de uitleg van bepaalde stappen teveel aan het papier overlaten. Dit zal zeker niet voldoende zijn om alle leerlingen de betrokken algoritmen te leren.

optellen en aftrekken (6.1)
We vatten de opbouw van de deelleergang cijferen op in het vierde deel. In de inleiding op dit deel wordt al aangekondigd, dat de leerlingen op een gegeven moment getallen van twee cijfers kunnen optellen, waarbij ingewisseld wordt. Dit gebeurt dan als volgt:

28 + 64		of vertikaal geschreven:
(20 + 8) + (60 + 4)		28
(20 + 60) + (8 + 4)		64
80 + 12		12
80 + (10 + 2)		80
(80 + 10) + 2		92 .
90 + 2 = 92		

Een soortgelijke aanpak is er ook voor het aftrekken:

34 − 6 = 30 + 4 − 6
(20 + 14) − 6
20 + (14 − 6)
20 + 8.

We willen nu stapsgewijs de weg naar de hierboven omschreven rekenwijzen voor optellen en aftrekken in het vierde deel wat gedetailleerder weergeven:

- uitvoerige aandacht voor de associatieve eigenschap van de optelling:

  2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4 = ;

- optellingen tot 20;
- opgaven van het type:

31 + 4 = 30 + (1 + 4) = 35

31	30 + 1
+4	+ 4
35	30 + 5 ;

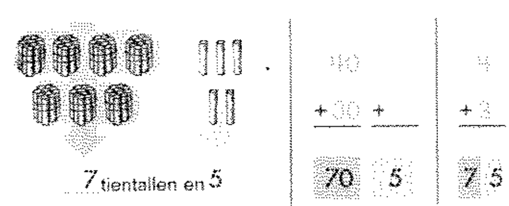
- optellingen zonder inwisselen, waarbij het tweede getal < 10 is:

  36
  +2
  38 .

Na enige aandacht voor het optellen van tientallen komen we toe aan opgaven, waarbij het opsplitsen van getallen in tientallen en eenheden centraal staat; een opgave als 24 + 32 = (20 + 30) + (4 + 2) = ..., wordt voorafgegaan door de volgende stappen:

20 + 30	=
(20 + 30) + 4	=
(20 + 30) + (4 + 2)	=
(20 + 4) + (30 + 2)	=
24 + 32	=

Het onder elkaar noteren van dergelijke opgaven wordt vergezeld van illustraties:



[1])

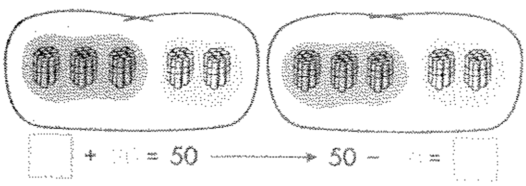
Ook is er in de 'ekstra's' (in de onderwijzerstekst) en steropgaven (helaas alleen bedoeld voor de 'vlotte rekenaars') aandacht voor opgavenreeksen met een patroon in de antwoorden:

★	74 +4	74 +5	74 +6	74 +7	74 +8	74 +9
★	57 +20	57 +21	57 +22	57 +23	57 +24	57 +25

Het belang van deze opgaven schuilt vooral in het feit, dat zich bij de leerlingen al een vermoeden over het eigenlijke algoritme kan ontwikkelen (bijvoorbeeld: hoe zit het precies met het inwisselen?) voordat dit in de les aan de orde geweest is. De leerlingen kunnen zo zélf ontdekkingen doen. Ook het honderdveld

[1]) Helaas komt het didaktisch uitstekende gebruik van lay-out en kleur onvoldoende tot uitdrukking in onze reprodukties.

leent zich uitstekend voor dergelijke opgaven met patronen in de antwoorden.
Voor de relatie 'optellen-aftrekken' als elkaars omgekeerde bewerkingen, heeft men de nodige aandacht:



Ook anderszins worden opgaven gekoppeld om bedoelde relatie te benadrukken:

7 + 6 = 13	24	37
13 − 6 = ☐	+ 13	− 13

Het principe van het uitsplitsen van de getallen, blijft bij het ontwikkelen van het optellen en aftrekken onder elkaar, voorlopig nog gehandhaafd:

60	5	65	70	8	78
− 20	− 3	− 23	− 20	− 6	− 26
40	2	42			

Hoewel benadrukking van de plaatswaarde van de cijfers binnen het geheel op zichzelf belangrijk is, moet hier toch op het gevaar van een niet gewenst bijeffekt gewezen worden. Bij de leerlingen kan zich een verkeerde houding ontwikkelen, veroorzaakt door het 'van links naar rechts' werken. Zodra er sprake is van optellingen of aftrekkingen, waarbij ingewisseld moet worden, faalt deze gang van zaken.
Vervolgens wordt ruime aandacht besteed aan:
- verdere verkenning van de telrij: tientallen, honderdtallen, duizendtallen;
- ordenen van getallen;
- getallenlijnen met verschillende schalen.

Op het gevaar van het te sterk benadrukken van het van links naar rechts werken, werd eerder gewezen. Het wordt opnieuw versterkt door opgaven als:

300	50	4	354
+ 200	+ 30	+ 5	+ 235

Ook bij het aftrekken wekt men deze suggestie:

500	60	9	569
− 200	− 10	− 3	− 213

[1]) Pag. 71*a*.

De problematiek van het inwisselen bij optellen en aftrekken wordt via de volgende stappen aangepakt:

overschrijven en het goede antwoord kiezen

60 + 14 = 64 / 74 ?

zoek de vergelijking

(30 + 20) + (7 + 5)

50 + 12 = 62

los op

27 + 35

(20 + 7) + (30 + 5)

(20 + 30) + (7 + 5)

... + ... = ☐

maak de vergelijkingen af

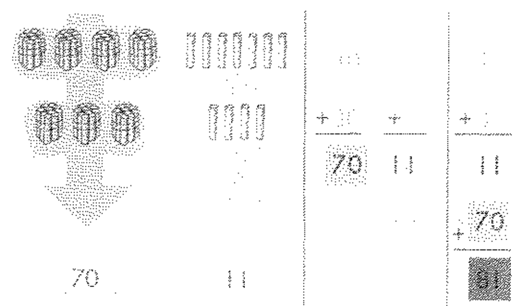
8 + 3 = ☐

8 + 3 + 10 = ☐

8 + 13 = ☐

8 + 23 = ☐

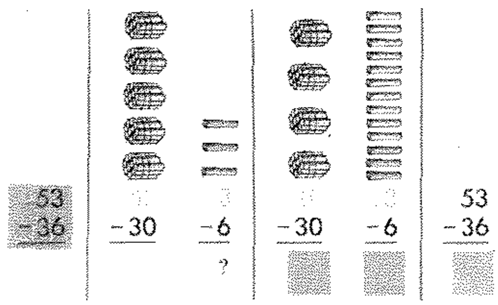
Later[1]) vindt dan de afronding van de voorbereidende aktiviteiten plaats:



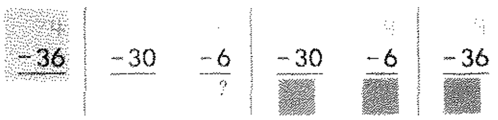
Twee bladzijden verder wordt voor de rechter berekening uit voorgaande illustratie een kortere weg gesuggereerd:

47		47
+ 34	korte weg:	+ 34
11		81
+ 70		
81		

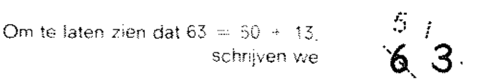
Hiermee staat in principe de weg tot de cijfermatige optelling van elk tweetal (of meer) natuurlijke getallen open. Het principe van het inwisselen is nu uiteengezet. Nieuwe moeilijkheden, die de leerlingen nog kunnen ondervinden, berusten vrijwel alle op het ontbreken van de nodige vaardigheid.
Op soortgelijke wijze wordt de weg naar het aftrekalgoritme met inwisselen voorbereid:



Het loslaten van het materiaal (op papier) gebeurt in nog twee stappen. Eerst wordt de noodzaak van het inwisselen gemotiveerd:



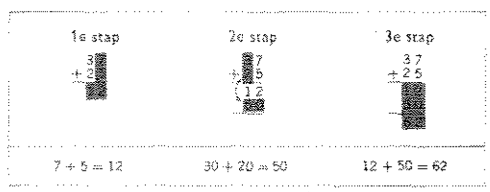
Ekstra inwisseloefeningen, inklusief het 'één onthouden' treffen we vervolgens aan:

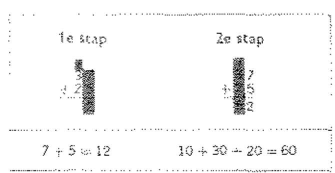


Ook hier zal nog de nodige vaardigheid ontwikkeld moeten worden. De leerlingen hebben nu echter eveneens het principe achter het cijfermatige aftrekken ervaren. Aan de hele opbouw tot nu toe is duidelijk merkbaar, dat stap voor stap is toegewerkt naar de uiteindelijke algoritmen. Deze waren dus richting bepalend voor de didaktische opbouw.
De illustraties bij het optellen en aftrekken met inwisselen (bossen van tien en lossen) lijken ons niet gelukkig gekozen. In de eerste plaats staat het materiaal te dicht bij de ontwikkeling van het getalbegrip zelf. Het 'bossen-van-tien'-idee werkt het plaatswaarde-idee in feite tegen, doordat er de suggestie van hechte eenheden van uitgaat, die met de 'lossen' weinig van doen hebben. Het feitelijk uitvoeren van de in de tekeningen gesuggereerde handelingen is ondoenlijk. Het zal daarom wel bij een papieren hergroeperen blijven. De auteurs spreken van hergroeperen voor inwisselen, daarmee bevestigend dat het materiaal strijdig is met het zien van een getal van meer cijfers als een eenheid.
De volgende delen van *ewr* kunnen in principe geen nieuwe moeilijkheden meer bevatten, anders dan betrekking hebbend op de vaardigheid. We zullen daarom in de beschrijving van het cijferend optellen en aftrekken geen aandacht meer besteden aan het optellen en aftrekken van getallen van drie of meer cijfers, al dan niet met één of meerdere inwisselingen. We beperken ons tot enkele opmerkingen.
Behalve van de eerder gekritiseerde illustraties wordt ook gebruik gemaakt van getekende abakussen om:

- het plaatswaardebeginsel te benadrukken: 5 erbij, 200 erbij, 30 erbij; er wordt overigens ook gebruik gemaakt van illustraties waarin blokken, dozen, bussen, zakken, etc. voorkomen;
- de bewerkingen optellen en aftrekken met en zonder inwisselen te illustreren.[1])

Jammer is, dat de auteurs de mogelijkheden van de abakus niet veel méér gezien en benut hebben. Door zijn hele struktuur staat de abakus veel dichter bij de bewerkingen (optellen en aftrekken) met natuurlijke (of komma-)getallen, dan al het eerder genoemde 'materiaal'. Elke stap die de auteurs met zoveel zorg op papier laten zien, bijvoorbeeld:

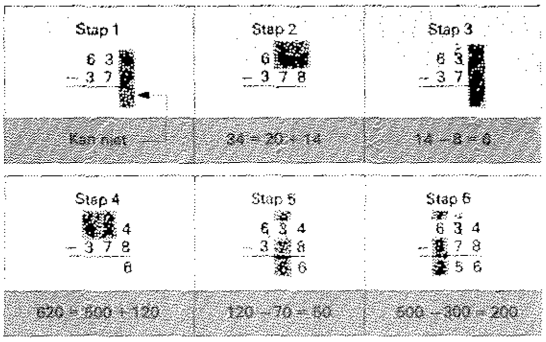




kan op de abakus al handelend worden uitgevoerd door de leerlingen – met alle voordelen vandien –.[2])
Wanneer het principe van het inwisselen duidelijk is voor de leerlingen, kunnen ze bij toegestaan abakusgebruik iedere optelling en aftrekking aan, waardoor de mogelijkheden voor het kiezen van toepassingsgebieden geweldig verruimd kunnen worden. De leerlingen kunnen nu ook grotere optellingen en aftrekkingen aan; het bezwaar van het gebrek aan vaardigheid bij de leerlingen valt weg.

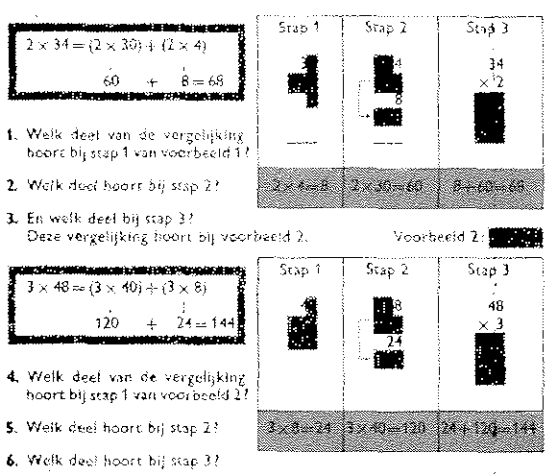
Een belangrijk principe binnen de metode is de aandacht voor herhaling.
Zijn de leerlingen aan het optellen en aftrekken van getallen van drie cijfers toe, dan worden daarbij ook de eerder verworven inzichten weer zichtbaar gemaakt:

[1]) Zie bijvoorbeeld het zevende deel (pag. 185) waar het aftrekken met inwisselen op getekende abakussen in tweekleurendruk wordt geïllustreerd.
[2]) Zie: Leerplanpublikatie 6 (*iowo*, utrecht 1977).



Aan het eind van het zevende deel worden de leerlingen verondersteld de bewerkingen optellen en aftrekken te kunnen uitvoeren met getallen van vier cijfers, waarbij drie inwisselingen kunnen voorkomen.

vermenigvuldigen (6.2)
Aan het vermenigvuldigen onder elkaar gaat nogal wat vooraf. We pakken de draad echter pas op in het vijfde deel. Hierin wordt de distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging over de optelling uiteengezet.
Dergelijke woorden worden ook de kinderen niet onthouden. In het zesde deel blijkt, waarom die aandacht aan genoemde eigenschap besteed wordt:

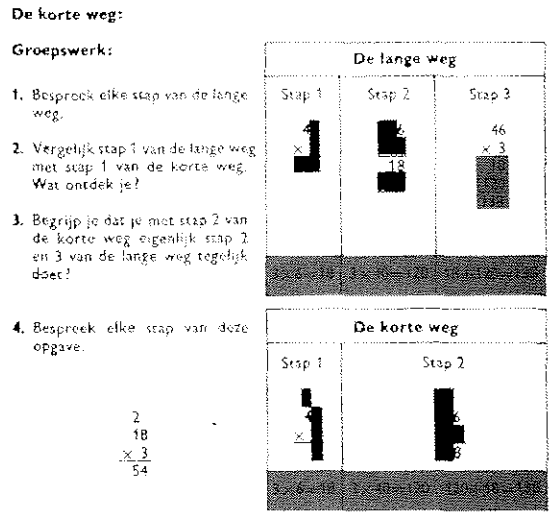


Daaraan zijn nog voorafgegaan:
- de rol van '0' en '1' bij het vermenigvuldigen;
- vermenigvuldigen met tienvouden: de faktoren 10-20-30-...;
- patronen als 3 x 4; 3 x 40; 3 x 400;
- het splitsen van faktoren: 3 x 12 = 3 x 10 + 3 x 2.

Verderop[1]) vinden we dan de 'toepassingen' in korte verhaaltjes:

- Vier 'duizendpoten'. Elk 36 poten. Hoeveel poten in totaal? Waarom staat 'duizendpoten' tussen aanhalingstekens?
- 13 inktvissen. Elk acht armen. Hoeveel armen in totaal?

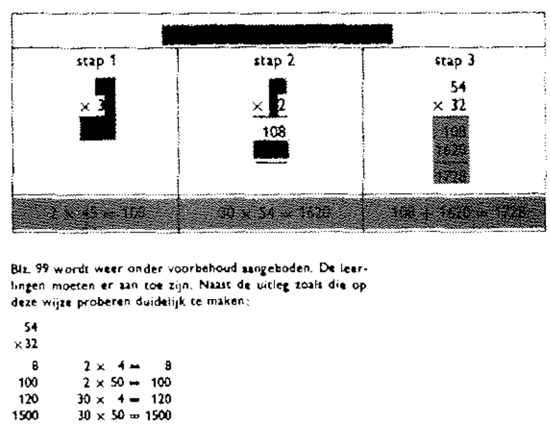
De aanpak blijkt volgens hetzelfde stramien te verlopen als bij het optellen en aftrekken. Op pagina 82 wordt de hierboven geïllustreerde weg verkort:



Het 'van-geval-naar-geval'-principe doet ook hier opgeld. Tien pagina's verder treffen we vermenigvuldigingen aan van het volgende type:

$$\begin{array}{r} 237 \\ \underline{\times\ 4} \end{array} .$$

Opnieuw wordt daarbij een lange en korte weg gedemonstreerd. Hetzelfde gebeurt met produkten, waarbij de grote faktor een getal van vier cijfers is.
Op pagina 99 treffen we dan voor het eerst vermenigvuldigingen onder elkaar aan, waarbij beide faktoren uit twee cijfers bestaan:



[1]) Deel 6, pag. 81.

In het volgende deel wordt het voorafgaande herhaald, via de stappen:

- opgaven van het type:

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times\ 50 \\ \hline \end{array} ;$$

- produkten van faktoren met twee cijfers;
- $\begin{array}{r} 357 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 357 \\ \times 30 \\ \hline \end{array}$ en $\begin{array}{r} 654 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 654 \\ \times 30 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 654 \\ \times 32 \\ \hline \end{array}$

Aldus wordt toegewerkt naar produkten, waarbij beide faktoren uit drie cijfers bestaan:

Twee faktoren met elk 3 cijfers.

$263 \times 514 = (200 \times 514) + (60 \times 514) + (3 \times 514)$			
Stap 1	Stap 2	Stap 3	Stap 4
514 × 263 1542	514 × 263 1,542 30,840	514 × 263 1,542 30,840 102,800	514 × 263 1,542 30,840 102,800 135,182

Dergelijke stappen worden begeleid met een serie vragen, waarop de auteurs telkens het stempel 'groepswerk' plakken, daarmee kennelijk doelend op het feit dat de hele klas hieraan meedoet:

Groepswerk:

1. Begrijp je de eerste stap?
2. Welk deel van de vergelijking is met de eerste stap opgelost?
3. Begrijp je stap 2?
4. Welk deel van de vergelijking is hiermee opgelost?
5. Begrijp je nu ook stap 3?
6. Welk deel van de vergelijking is hiermee opgelost?
7. Heb je gemerkt dat de volgorde van de stappen anders is dan in de vergelijking?
8. Controleer de derde stap.
9. Welk deel van de vergelijking wordt hiermee opgelost?

delen (6.3)

Aktiviteiten in de aanloopfase:

- het verdelen van kleine hoeveelheden, in relatie met het vermenigvuldigen van dezelfde kleine hoeveelheden;
- het maken van groepjes;
- stapjes (terug) op de getallenlijn;
- het zien van het verdelen als herhaald aftrekken.

In het zesde deel komen opgaven met mooie uitkomsten:

$$\begin{array}{rcl} 7 \times 4 = 28 & \longrightarrow & 28 : 4 = 7 \\ 70 \times 4 = 280 & \longrightarrow & 280 : 4 = 70 \\ 700 \times 4 = 2800 & \longrightarrow & 2800 : 4 = 700. \end{array}$$

Het herhaald aftrekken ter bepaling van een kwotiënt wordt ook stap voor stap becijferd:

24 : 4 hoeveel viertallen in 24?

$$\begin{array}{rrrrrr} 24 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ \hline 20 & 16 & 12 & 8 & 4 & 0. \end{array}$$

Dergelijke herhaald-aftrekprocedures worden ook onder elkaar gezet, waarbij men zeer geleidelijk naar verkortingen gaat toewerken:

$$48 : 8 = n\ (6) \qquad \begin{array}{rl} 48 & \\ -16 & \longleftarrow \text{2 achttallen} \\ \hline 32 & \\ -16 & \longleftarrow \text{2 achttallen} \\ \hline 16 & \\ -16 & \longleftarrow \text{2 achttallen.} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Steeds zijn dergelijke sommen vrij sterk voorgestruktureerd, bijvoorbeeld:

$$36 : 3 = n \qquad \begin{array}{rl} 36 & \\ -30 & \longleftarrow \text{10 drietallen} \\ \hline 6 & \\ -6 & \longleftarrow \text{2 drietallen.} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Bij deze vorm mogen de leerlingen nog slechts het antwoord vermelden. Een volgende stap is, dat de informatie naast de 'staart' over het aantal malen dat de deler wordt afgetrokken, ontbreekt:

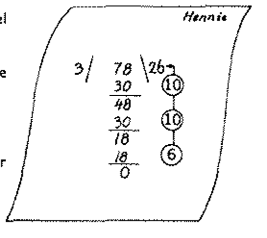
$$78 : 2 \qquad \begin{array}{r} 78 \\ -60 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 0. \end{array}$$

Bij herhaling worden de leerlingen erop gewezen, dat het nog korter kan. Ook hier is er in een vroeg stadium aandacht voor 'toepassingen', bijvoorbeeld:

> '300 ansichtkaarten, 5 op elke bladzijde.
> Hoeveel bladzijden?'

Op pagina 123 verschijnt voor het eerst de 'staartdeling', waarbij het herhaald-aftrekprincipe nog open kan worden toegepast:

1. Hennie heeft hier uitgerekend hoeveel drietallen er in ▒ gaan. 78
2. [A] Hoeveel drietallen trok Hennie de eerste keer af? 10
   [B] Hoeveel de tweede keer? 10
   [C] En hoeveel de derde keer? 6
3. Welke getallen telde Hennie bij elkaar op om het quotiënt te vinden? 10, 10, 6.
4. Hoeveel is het quotiënt? 26



Opgaven:

1. Zoek de quotiënten.

```
[A] 2/46\       [B] 5/85\       [C] 4/144\      [D] 3/114\
     20   (10)       50   (10)       80   (20)       90   (30)
     26              35              64              24
     20   (10)       35   (7)        40   (10)       24   (8)
      6               0              24               0
      6   (3)                        24   (6)
      0                               0
```

Het essentiële verschil met de uiteindelijke staartdeling is de mogelijkheid voor bijsturen en korrekties tijdens het oplossen. De leerlingen behoeven niet onmiddellijk te zeggen: 'drie op de zeven gaat twee keer, rest één', etc. Pas achteraf wordt het antwoord bepaald, als som van de getallen die bij de 'tussenstappen' verkregen zijn. De auteurs pleiten in dit stadium terecht voor aksent op begrip en niet op techniek.
Het verkortingsprincipe blijft de nodige aandacht vragen, getuige:

```
[A] 4/140\          [B] 4/140\          [C] 4/140\
      40   (10)           80   (20)          120   (30)
     100                  60                  20
      40   (10)           40   (10)           20   (5)
      60                  20                   0
      40   (10)           20   (5)
      20                   0
      20   (5)
       0
```

Ook het 'delen met rest' komt nu snel in de aandacht:

```
deler 4/51\12 quotiënt
        40  (10)
        11
         8  (2)
         3 ← rest
```

Na een herhaling van het voorafgaande in het volgende boekje, wordt vervolgens aangestuurd op de meest efficiënte verkorting bij het staartdelen (de kortste staart):

```
Denk:                                                      Schrijf:
                     Omdat → 300 × 6 < 1944
                           ↘ 400 × 6 > 1944.
6 / 1944 \  324      We kunnen 300 zestallen          6 / 1944 \ 324
    1800 ← 300 × 6   van 1944 aftrekken.                  1800   (300)
     144             Nu kunnen we nog 20 zes-              144
     120 ←  20 × 6   tallen aftrekken.                     120   (20)
      24             Tenslotte kunnen er nog 4              24
      24 ←   4 × 6   zestallen af.                          24   (4)
       0             Het quotiënt is 324.                    0
```

```
Denk:                                                      Schrijf:
                     Omdat → 500 × 4 < 2014
                           ↘ 600 × 4 > 2014.
4 / 2014 \  503      We kunnen eerst 500 vier-        4 / 2014 \ 503
    2000 ← 500 × 4   tallen van 2014 aftrekken.           2000   500
      14             Nu kunnen we nog 3 vier-               14
      12 ←   3 × 4   tallen aftrekken.                      12     3
       2             Het quotiënt is 503.                    2
                     De rest is 2.
```

Als laatste stap laten we tenslotte een voorbeeld zien, waarbij de deler een getal van twee cijfers is:

Delers en quotiënten met 2 cijfers.
Hieronder zie je drie manieren om het quotiënt te vinden van 37 / 1184 \
Alle drie de manieren geven dezelfde uitkomst.

```
37 / 1184 \            37 / 1184 \            37 / 1184 \
      370 ←   × 37           740 ←   × 37          1110 ←   × 37
      814                    444                     74
      370 ←   × 37           370 ←   × 37            74 ←   × 37
      444                     74                      0
      370 ←   × 37            74 ←   × 37
       74                      0
       74 ←   × 37
        0
```

Groepswerk:

1. Bespreek samen elk voorbeeld. Welke manier vind je de beste?
2. Wat is het grootste veelvoud van 10 dat je voor n kunt invullen? Welke twee andere veelvouden van 10 maken de bewering ook waar?
3. Als je het quotiënt wilt vinden van 37 / 1184 \ dan ben je het vlugst klaar als je eerst het grootste veelvoud van 10 dat je van 1184 kunt aftrekken zoekt. Waarom?

In opgaven, waarbij de getallen meer cijfers hebben, kan in principe niets nieuws meer aan de orde komen.

algemene opmerkingen (6.4)

- Voor elk van de vier hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen is de weg naar het uiteindelijke algoritme stap voor stap en met zorg gepland.
- Bij de opbouw van de bewerkingen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen, is nauwelijks sprake van iets nieuws, in vergelijking met wat de gangbare traditionele rekenmetoden te bieden hebben. De ontwikkeling van de staartdeling is echter afwijkend en lijkt didaktisch veel beter dan in de traditionele didaktiek. Het herhaald-aftrekprincipe blijft veel langer zichtbaar. Door het niet direkt aansturen op de meest efficiënte verkorting, is het voor de leerlingen gemakkelijker dergelijke problemen aan te pakken. Wanneer het sterk voorgestruktureerde, waardoor de hele opbouw gekenmerkt wordt, weggenomen zou worden, kunnen de leerlingen zélf gaan bepalen hoe kort de staarten van hun deelsommen worden.
Door het onvoorwaardelijk handhaven van de principes van herhaald aftrekken en verkorten (niet dwingend voorgeschreven!), kan de klas zich bij verwerking van de delingen spontaan differentiëren. De lengte van de staarten bepaalt dan het nivo, waarop een leerling zich op een bepaald moment bevindt. Het eindnivo van de traditionele gesloten staartdeling behoeft dan ook niet meer dwingend voorgeschreven te worden. De leerling, die niet het meest efficiënte verkortingsnivo bereikt, maar ergens 'onderweg blijft hangen', kan toch op zíjn nivo de gestelde problematiek tot een oplossing

brengen. Wij bepleiten dat bij een dergelijke didaktisch sympatieke benadering het in de metode voorgestruktureerde ontwikkelingstempo fleksibel wordt toegepast.

- Het wiskundige van dit meest elementaire deel van alle rekenen, komt tot uitdrukking in het gebruik van wiskundige termen. Bijvoorbeeld: associatieve eigenschap, vergelijking, distributieve eigenschap, enz. Dergelijke terminologieën leiden gemakkelijk tot verbalisme en sluiten niet aan bij het natuurlijke taalgebruik van de leerlingen. Letten we op de kijk van de metode op bewerkingen met getallen, dan is van wiskunde geen sprake. Het gaat immers niet zozeer om principes die achter de bewerkingen schuil gaan, doch veeleer om het ontwikkelen van recepten.
  De stap-voor-stap-strategie laat zien, dat het aksent in eerste instantie ligt op de getallen en niet op de bewerkingen. Het gevaar van de vele tussenstapjes is, dat het inzicht geblokkeerd wordt.
- In de onderwijzerstekst zijn regelmatig zinvolle suggesties voor ekstra aktiviteiten opgenomen, die het rekenen voor de leerlingen een stuk levendiger kunnen maken. We denken aan de toepassing van tabellen, honderdveld, spelletjes, opgaven met patronen in de antwoorden, opdrachten waarbij de leerlingen zelf opgaven mogen bedenken, enz.
- Ronduit irritant is de willekeur van de auteurs, waarmee ze naar believen slimme of domme kinderen laten opdraven om bepaalde moeilijkheden of nieuwe problemen ter sprake te brengen.
- Een onderwijzer(es) die zich van de tekortkomingen en gemiste kansen (denk bijvoorbeeld aan de abakus) in deze metode bewust is en hiervoor maatregelen treft, zal zijn (haar) leerlingen zeker op een verantwoorde wijze het cijferen kunnen bijbrengen. Men realisere zich daarbij dan wel, dat het níet aksepteren van de onderwijsfilosofie van de samenstellers tot veel ingrijpender wijzigingen leidt, dan wanneer men de uitgangspunten waarop de metode gebaseerd is wél overneemt.
- De hoeveelheid oefenstof in deze metode is zeker niet overdadig te noemen. De 'ekstra's' bevatten genoeg suggesties voor verlevendiging en uitbreiding van het in de leerlingenboeken gebodene. Bovendien kan iedere gebruiker naar behoefte oefenstof toevoegen.

▶BREUKEN (7)

inleiding (7.1)

Wie de aanpak van de breuken in *ewr* vergelijkt met die in een willekeurige traditionele rekenmetode, ontdekt veel overeenkomsten, doch op z'n minst één wezenlijk verschil.

De *overeenkomsten* kunnen we duiden door:

- introduktie van de breuken vanuit het rechtvaardig verdelen;
- de delen gaan vrijwel steeds in het geheel op;
- breuken groter dan '1' komen als natuurlijke eenheid niet voor;
- het aksent ligt sterk op verdeelresultaten en niet op het proces van het verdelen zelf;
- bij de breuken als abstrakte objekten worden konkretiseringen gezocht (de auteurs spreken van het 'uitbeelden van breuken'[1]);
- de breuken gaan in symbolische vorm snel een eigen leven leiden; het worden dan objekten, waarmee de leerlingen leren manipuleren volgens een samenstel van regels;
- de gelijkwaardigheid van breuken wordt te veel als een gelijkheid van breuken behandeld; dit druist tegen het relatieve in het breukbegrip in; de breuk krijgt hierdoor een absolute betekenis, net als bijvoorbeeld de '4' in '4 appels';
- gelijkwaardigheid wordt in eerste instantie opgevat als een gelijkwaardigheid van tweetallen breuken in afzonderlijke situaties.

Het wezenlijke *verschil* met welke traditionele deelleergang voor breuken dan ook, blijkt als de systematische opbouw van de breuken vanaf het achtste deel ter hand genomen wordt. Kennelijk geïnspireerd door de algebra, krijgt de interpretatie van de breuk als klasse van gelijkwaardige breuken onmiskenbaar de nadruk.
In deze opvatting vertegenwoordigt de breuk $\frac{1}{2}$ in feite een hele klasse van breuken, namelijk: $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots\}$.
We besteden hieraan wat ruimer aandacht, vanwege de ingrijpende verschillen met meer gebruikelijke benaderingen.

de gelijkwaardigheid van breuken (7.2)

In het zesde deel zijn de gelijkwaardige breuken er voor het eerst onverhuld:

Gelijkwaardige breuken:

Soms betekenen twee verschillende breuken precies hetzelfde. Ze hebben dezelfde waarde. Zulke breuken noemen we gelijkwaardige breuken.
Kijk maar eens.

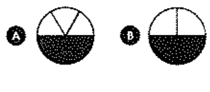
$\frac{1}{3}$ is evenveel als $\frac{2}{6}$

[1]) Deel 6, pag. 58/59.

Opgaven:

1. $\frac{2}{4}$ is evenveel als $\frac{3}{6}$

Welke tekening doet je denken aan $\frac{2}{4}$? B
Welke tekening doet je denken aan $\frac{3}{6}$? A

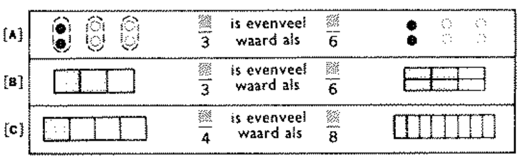


Uit de voorbeelden blijkt, dat gelijkwaardigheid als gelijkheid, als gelijke hoeveelheid wordt opgevat, overigens in navolging van het amerikaanse origineel, zoals blijkt uit:

> '*The quantitative sameness* of these fractions is shown by shading $\frac{1}{3}$ of an object and $\frac{2}{6}$ of a like object.'[1])

Ook in het achtste deel gaat deze interpretatie van gelijkwaardigheid nog vooraf aan de klasse-opvatting van de breuk.
Bijvoorbeeld:

1. Schrijf van elke opgave de bewering over en vul de ontbrekende getallen in.



De illustraties zijn niet verhelderend voor de vast te stellen gelijkwaardigheid. Hierdoor wordt gelijkwaardigheid in feite een aangelegenheid die zich in de manipulatie met breuksymbolen afspeelt: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$; $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.

de breuk als ekwivalentieklasse (7.3)
In het achtste deel is het breukbegrip ineens volwassen. Het zijn dan symbolen voor rationale getallen; getallen die een ratio, een verhouding, een bepaalde grootterelatie uitdrukken. Binnen die opvatting krijgt de breuk als klasse van gelijkwaardigheid een hoofdaksent. Stapsgewijs volgen we de weg van de breuk, opgevat als klasse:

- Klassen van gelijkwaardige breuken, zoals $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\}$; eerst geïllustreerd, maar al snel 'kaal'.
- De leerlingen leren het 'mechanisme' hanteren, zelf zo'n ekwivalentieklasse samen te stellen:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{2}{4} & \frac{3}{6} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \text{enz.} \\ \frac{1 \times 1}{1 \times 2} & \frac{2 \times 1}{2 \times 2} & \frac{3 \times 1}{3 \times 2} & \end{array}$$

  Nu wordt voor het eerst gesproken over teller en noemer van een breuk.
- Vervolgens wordt nagegaan, waardoor gelijkwaardigheid kontroleerbaar is, namelijk door middel van bepaling van de 'kruisprodukten': $\frac{3}{9} = \frac{18}{54}$, want $3 \times 54 = 9 \times 18$.
- Een ander aspekt van die gelijkwaardigheid is het 'vertalen' van breuken in 'lagere en hogere termen':

Lagere en hogere termen.

Kijk eens naar deze verzameling breuken.
De waarde van al die breuken is $\frac{1}{2}$.

$\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6},}$ ▮ $\underbrace{\frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \ldots}$

Bij deze breuken gebruiken we **lagere termen** dan bij $\frac{4}{8}$	Bij deze breuken gebruiken we **hogere termen** dan bij $\frac{4}{8}$

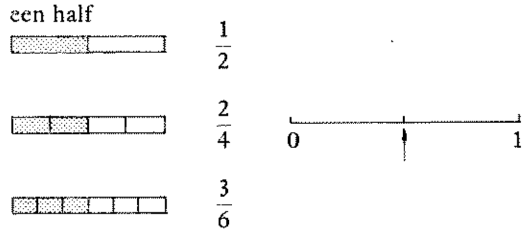
$\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10},}$ ▮ $\underbrace{\frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \ldots}$

Bij deze breuken gebruiken we **lagere termen** dan bij $\frac{6}{12}$	Bij deze breuken gebruiken we **hogere termen** dan bij $\frac{6}{12}$

Uit de voorbeelden blijkt, dat het gaat om breuken, die met een gegeven breuk gelijkwaardig zijn, doch waarvan de tellers en noemers kleinere, resp. grotere getallen zijn dan die van de gegeven breuk:

$$\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}}_{\text{lagere termen}} \quad \frac{4}{8} \quad \underbrace{\frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}}_{\text{hogere termen}}, \ldots$$

- Ook is er ruime aandacht voor breuken op de getallenlijn. Bijvoorbeeld:



$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ en $\frac{3}{6}$ blijken dan verschillende 'namen' voor hetzelfde punt op de getallenlijn te zijn.

de rol van de breuk als ekwivalentieklasse bij het optellen en aftrekken van breuken (7.4)
In het tiende deel worden de bewerkingen met breuken in een meer systematische sekwentie aan de orde gesteld.
Nu blijkt ook, waarom de interpretatie van de breuk als ekwivalentieklasse zo sterk de nadruk heeft gekregen:

- [A] Om $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$, uit te rekenen, denk je $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \cdot\cdot \frac{7}{12}$

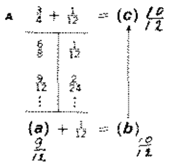
  $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \ldots\}$ $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots\}$

  [B] Om $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$, uit te rekenen, denk je $\frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \cdot\cdot \frac{3}{10}$

  $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots\}$ $\{\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{25}, \ldots\}$

[1]) Deel 3, pag. 292.

- De leerlingen worden vervolgens gericht op het snel een juiste keuze maken uit verzamelingen gelijkwaardige breuken, zodat het sommeren en het verschil bepalen van breuken tot hun mogelijkheden gaan behoren:



- De weg om de gemeenschappelijke noemer van beide breuken te vinden is méér toegankelijk geworden voor de leerlingen dan in de traditionele didaktiek; ze kunnen nu immers zonder al te veel problemen eerst de ekwivalentieklassen van beide breuken bepalen voordat ze 'zich zorgen behoeven te maken' om een gemeenschappelijke noemer; bovendien laat deze aanpak ruimte voor een element van strategie en voor verkortingen:

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\frac{3}{8}+\frac{1}{12}=} \\ \hline \frac{3}{8} & \frac{1}{12} \\ \frac{6}{16} & \frac{2}{24} \\ \frac{9}{24} & \frac{3}{36} \\ \frac{12}{32} & \frac{4}{48} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{9}{24}+\frac{2}{24}=\frac{11}{24}} \end{array} \qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\frac{3}{8}+\frac{1}{12}=} \\ \hline \frac{3}{8} & \frac{1}{12} \\ \frac{6}{16} & \frac{2}{24} \\ \frac{9}{24} & \\ & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{9}{24}+\frac{2}{24}=\frac{11}{24}.} \end{array}$$

  - De op roetine ingestelde leerling schrijft de klassen van $\frac{3}{8}$ en $\frac{1}{12}$ gedeeltelijk op en zoekt daarbinnen vertegenwoordigers met dezelfde noemer **(a)**.
  - De op efficiency ingestelde leerling gaat eerst na of de grootste noemer in de klasse van de breuk met de kleinste noemer voorkomt; is dit niet het geval, dan worden de klassen van $\frac{3}{8}$ en $\frac{1}{12}$ afwisselend voortgebracht, totdat de eerste gemeenschappelijke noemer zich voordoet **(b)**.
- Deze meer 'open weg' naar het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken wordt later weer ingeruild voor de meer gesloten weg van de *kgv*-bepaling van de noemers. In het tiende deel lezen we in dit verband:

> 'De eerste stap bij optellen en aftrekken zal altijd moeten zijn: zoeken naar de gemeenschappelijke noemer.'

samenvatting breukenaanpak (7.5)

- Het algemene kenmerk van de metode met betrekking tot het aanleren van wiskundige terminologieën geldt eveneens voor de opbouw van de deelleergang breuken.
- Het begrip breuk wordt, hoewel nog vrij eenzijdig, toch iets breder ingebed dan in de traditionele rekenmetoden. De eenzijdigheid spreekt vooral ook uit het onvoldoende leggen van relaties met verwante onderwerpen als verhoudingen, kommabreuken, percentages en schaal.
- De opbouw van de breuken wordt geënt op een wiskundige interpretatie van wat een breuk is. Dit betekent, dat de breuk er van meet af aan als objekt is en uitgebeeld wordt omwille van de konkretisering.
- De uitgebreide aandacht voor de gelijkwaardigheid van breuken is helaas te sterk gekoppeld aan een symbolische opbouw, waarbinnen die gelijkwaardigheid algoritmisch vastgesteld kan worden. Van de toegepaste konkretiseringen en de beschrijvingen daarbij gaat echter steeds de suggestie uit, dat het zou gaan om 'gelijkheid' van breuken, waarmee de relativiteit ervan teveel op de achtergrond raakt.
- Door de nadruk op de breuk als klasse van gelijkwaardige breuken, worden de bewerkingen optellen en aftrekken meer toegankelijk voor de leerlingen. Jammer is, dat die openheid later weer wordt opgeofferd aan de dwingende eis van het zoeken van het *kgv* van verschillende noemers, wanneer breuken opgeteld of afgetrokken moeten worden.
- Aan de behandeling van met breuken verwante gebieden schort nogal het een en ander. Het procentbegrip is er bijvoorbeeld op afroep: 'in plaats van het honderdste deel kunnen we ook schrijven $\frac{1}{100}$, 0,01 of 1%.'
- In het algemeen kunnen we stellen, dat de opbouw van de deelleergang breuken zorgvuldig is en met betrekking tot de bewerkingen terughoudend. De systematische aanpak van de bewerkingen wordt uitgesteld tot het tiende deel (tweede helft vijfde leerjaar). Van het vermenigvuldigen van breuken wordt binnen de opmerkingen over differentiatie gesteld, dat dit eventueel achterwege kan blijven voor de minder vlotte leerlingen. Het delen van een breuk door een breuk komt alleen aan de orde in eenvoudige gevallen, die met behulp van materiaal en zonder toepassing van de bekende 'omkeertruuk', gemaakt kunnen worden.

Bij de bewerkingen heeft de traditionele aanpak zeker wat het optellen en aftrekken betreft, teveel het eindstadium van de opbouw bepaald. Hierdoor werd de wat opener benadering (via de gelijkwaardigheidsklassen) al snel weer prijsgegeven.

- De zorgvuldigheid van opbouw van de deelleergang breuken heeft echter geleid tot breedvoerigheid. Hierdoor krijgt dit onderwerp toch een hoofdaksent in de hogere leerjaren, daarmee beslag leggend op veel tijd, die aan nuttiger zaken besteed zou kunnen worden.

▶MEETKUNDE (8)

De meetkunde in *ewr* start (begin middenbouw) met de introduktie van grondbegrippen, zoals: punt, lijn, halflijn, lijnstuk, hoek, driehoek, binnen- en buitengebied van een gesloten figuur, de som van de hoeken van driehoek, vierhoek, veelhoeken, diagonalen in een veelhoek, enz.

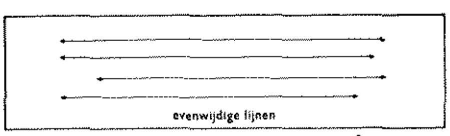
ontbrekende motivering (8.1)

Een voorbeeld uit het vijfde deel:

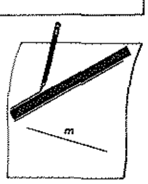
> 'In deze les beginnen we met een intuïtieve introductie van het begrip: evenwijdige lijnen. De leerlingen ontdekken verschillende manieren waarop ze evenwijdige lijnen kunnen tekenen.'

Meetkunde II

Evenwijdige lijnen:

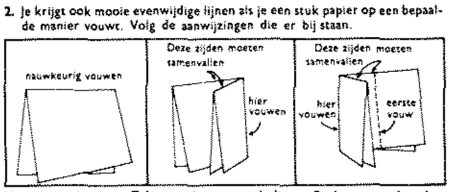


We gaan nu een paar manieren leren om evenwijdige lijnen te trekken.



1. Leg je liniaal op je papier. Trek aan beide zijden een lijn.
   a. Doe het nog eens.
   b. Loopt in de tekening lijn m evenwijdig met de lijnen die langs de liniaal lopen? nee

2. Je krijgt ook mooie evenwijdige lijnen als je een stuk papier op een bepaalde manier vouwt. Volg de aanwijzingen die er bij staan.



Vouw je papier open. Teken op de vouwen de lijnen. Probeer eens door het papier anders te vouwen ook evenwijdige lijnen te krijgen.

Uit dit voorbeeld wordt duidelijk, dat de leerlingen vooraf dienen te weten, wat evenwijdigheid is. De verkenning van evenwijdigheid voert tot: 'twee evenwijdige lijnen, gesneden door een derde.'

Verwarrende termen als verwisselende binnenhoeken, e.d. blijven achterwege. Het starten met grondbegrippen als het onderscheid tussen rechte, halfrechte, e.d. — kenmerkend voor een aksiomatische opbouw van de meetkunde — zal de leerlingen weinig zeggen.

Deduktie blijft in *ewr* achterwege; daardoor ontbreekt iedere motivering voor de gekozen aanpak.

Toch is er wel een motivering. Het gaat erom dat de leerlingen interessante zaken van de meetkunde informeel onderzoeken (pag. 150), dat ze plezier hebben in het werken met meetkunde (pag. 154), dat ze interessante ervaringen opdoen aan de hand van begrippen uit de meetkunde (pag. 156).

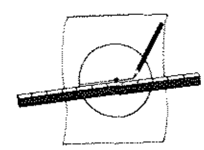
onverklaarbare verschijnselen (8.2)

Een ander belangrijk kenmerk van de meetkunde in *ewr* is, dat aktiviteiten resulteren in voor de leerlingen onverklaarbare verschijnselen:

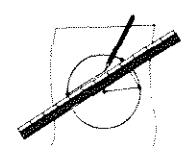
4. Vouw de cirkel nu precies dubbel. Doe dit nog eens, maar nu met een andere vouw, zodat je twee vouwlijnen krijgt.
   Vouw de cirkel open en plak hem op een stuk papier. Zet een punt op de plaats waar de twee vouwlijnen elkaar snijden. Hoe heet dit punt?
   middelpunt

5. [A] Trek met je potlood over één van de vouwlijnen.

   [B] Zet nu een punt op de cirkel. Het geeft niet waar.
   Verbind met je liniaal de beide einden van het lijnstuk dat je zopas tekende met het punt op de cirkel. Kijk maar goed naar de tekening.



   [C] Zie je ook ergens een rechte hoek?
   Gebruik je boek maar weer om dit te controleren.



   [D] Probeer dit nog eens met een ander punt dat je op de cirkel tekent. Krijg je altijd een rechte hoek?

In het zesde deel blijkt een driehoek, waarbij het middelpunt van de omgeschreven cirkel op een zijde ligt, rechthoekig te zijn.

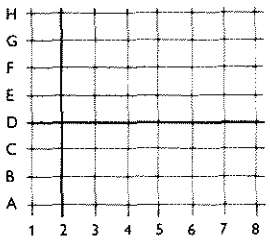
Op zichzelf is het niet bezwaarlijk, dat leerlingen bepaalde ontdekkingen nog niet kunnen verklaren. Jammer is, dat dit bij veel meer opgaven het geval is.

nog enkele punten (8.3)

Zonder naar volledigheid te willen streven, duiden we de meetkunde in *ewr* verder opsommenderwijs:

- In het zesde deel is nog aandacht voor: rechte hoeken en rechthoeken, rechthoekige driehoeken, gelijkbenige rechthoekige driehoeken en koördinaten.

Plaatsbepaling in een plat vak:



Dit zijn allemaal straten in een héél moderne stadswijk, gezien vanuit een vliegtuig. Deze stadswijk is zo modern dat de straten niet eens meer namen hebben. De straten hebben een nummer (cijfer) of een letter. Dit doet men ook vaak in grote Amerikaanse steden.
Er zijn hier acht straten getekend, die nummer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 heten en nog acht straten die A, B, C, D, E, F, G en H heten.

Je ziet dat al die straten kaarsrecht lopen en „loodrecht" op elkaar staan.
Geen enkele straat loopt krom.
De genummerde straten lopen allemaal **evenwijdig**.

Ook de straten die met een letter worden genoemd lopen allemaal ..evenwijdig..
Straat nummer 2 en straat D staan ..loodrecht.. op elkaar.

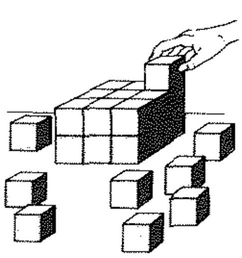
Globaal gesproken betreffen de aktiviteiten van de leerlingen:
- het beschrijven van punten door middel van een cijfer-letterpaar;
- idem met getallenparen;
- het bepalen van roosterafstanden.

- In het zevende deel wordt de 'gewone' meetkunde weer voortgezet (vanaf pag. 154).
  Aan de orde komen:
  - open en gesloten krommen;
  - binnen- en buitengebied van gesloten figuren;
  - de ingeschreven cirkel van een driehoek;
  - cirkels en punten (tien pagina's);
  - omgeschreven cirkels van driehoeken; het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek wordt bepaald door de middelloodlijnen van de zijden te vouwen (opnieuw een voorbeeld van zo'n onverklaarbaar verschijnsel voor de leerlingen).
- In het achtste deel worden enkele meetkundige lichamen verkend, zoals: kubus, piramide, kegel en cilinder.
  Voor de kubus betekent dit:
  - kubus, ribben, zijvlakken, hoekpunten;
  - netwerken, kubus maken.

  Hoewel de verkenning van genoemde meetkundige ruimtefiguren sterk gestuurd en voorschrijvend plaatsvindt, is er hier en daar ruimte voor een mentale aktiviteit door de leerlingen, waarbij het ruimtelijk voorstellingsvermogen wordt aangesproken, bijvoorbeeld:

4. (A) Stel je eens voor dat je 27 kubussen opstapelt zoals je hiernaast ziet (3 lagen, 9 in elke laag). Als je deze stapel niet op mag tillen, van hoeveel kubussen kun je dan niets zien?

   (B) Als je de stapel wel mag optillen en je bekijkt hem aan alle kanten, van hoeveel kubussen kan je dan niets zien?

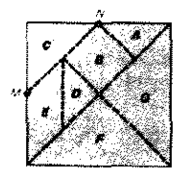


Ook andere ruimtelijke figuren worden gebouwd door de leerlingen.

- De verkenning van het rooster wordt in het vervolg dienstbaar gemaakt aan de verkenning van symmetrische figuren, het vermenigvuldigen van figuren en het samenstellen van grafieken van funkties. We laten dit onderwerp nu verder buiten beschouwing.
- In het tiende deel wordt eerst toegewerkt naar het meten van hoeken met een gradenboog. Daarna volgt een aantrekkelijk stukje waarin het tangram centraal staat. Allerlei figuren dienen met de zeven stukjes gelegd te worden. Daarna zijn omtrekken van veelhoeken aan bod en de oppervlakten van allerlei vlakke figuren als driehoek, parallellogram, rechthoek en 'gewone' driehoeken.
  Achterin dit deel zitten enkele eksperimentjes die de moeite waard zijn:

Experiment 7.

Teken op roosterpapier een vierkant van 12 bij 12 cm.
Verdeel het vierkant in 7 stukken zoals de tekening laat zien.
(M en N liggen op het midden van de zijden).
Zulke stukjes heten Tangram-stukjes.



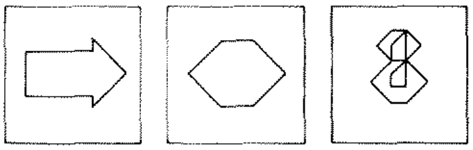
Probeer nu of je met alle 7 stukjes een driehoek, een rechthoek, een parallellogram en een trapezium kunt leggen. Kun je zelf nog enkele andere leuke figuren ontdekken?

Teken op roosterpapier hoe je elke figuur maakte

Experiment 8.

Maak tien puzzelkaarten met figuren, die zijn samengesteld uit de 7 „Tangram"-stukjes uit de vorige opdracht.

Hieronder staan er al drie. Voor alle figuren die gemaakt worden moet je alle 7 stukjes gebruiken.

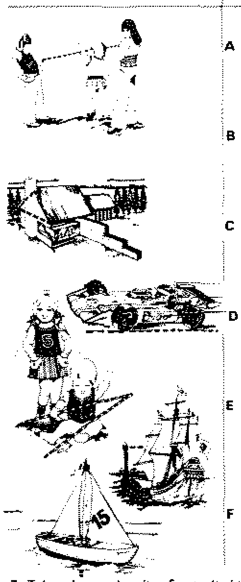


- Tenslotte vermelden we, dat ook het twaalfde deel nog wat gevarieerde meetkundige aktiviteiten bevat.
  We noemen:
  - ruimtelijke figuren;
  - lijnen in de ruimte;
  - werken met de passer;
  - meten van hoeken.

  Ter nadere detaillering nemen we nog één voorbeeld op, waaruit blijkt dat de bij dit onderwerp gevolgde weg zich kenmerkt door het zoeken van toepassingen in de realiteit, nadat eerst het formele begrip geïntroduceerd is. Naar onze mening is dit de omgekeerde weg.

Opgaven:

Zoek bij elke tekening uit elke kolom wat er bij hoort.
Schrijf het zo op: Figuur 1: C,H,Q.



Je ziet	Je denkt aan een:	Je tekent het zo:	Je schrijft het zo:
	A lijn	G A B	M A
	B hoek	H A B	N $\overline{AB}$
	C lijnstuk	I A B	O $\overrightarrow{AB}$
	D punt	J C A B	P $\angle ABC$
	E straal of halflijn	K $\cdot A$	Q $\overleftrightarrow{AB}$
	F driehoek	L A B C	R $\triangle ABC$

7. Teken de meetkundige figuur die bij elk symbool hoort.
Zet het symbool er bij.

samenvatting (8.4)

We kunnen stellen dat:

- de meetkunde als nieuwe topic in *ewr* vrij geïsoleerd staat van de rest van de inhoud van de metode;
- de manier waarop de leerlingen in dit gebied ingeleid worden, zich kenmerkt door formalisme;
- het voortschrijden in de metode met betrekking tot meetkunde, regelmatig zinvolle aktiviteiten te zien geeft;
- het geheel een sterk voorschrijvend karakter heeft en zich daardoor niet onderscheidt van de sporadische meetkundige aktiviteiten, die ook wel in traditionele rekenmetoden zijn terug te vinden.

▶SAMENVATTENDE KONKLUSIES (9)

- *Ewr* is in feite een traditionele (amerikaanse) rekenmetode, waaraan enkele onderwerpen uit de 'New-Math'-stroming zijn toegevoegd. Deze onderwerpen – verzamelingen, meetkunde en kansrekening – zijn in hoofdzaak ontleend aan de formele wiskunde.
- Het getalbegrip wordt (zogenaamd) gedragen door de verzamelingenleer. Uit didaktisch oogpunt is het beter alle dikdoenerij hierover achterwege te laten. Overigens treffen we ook redelijke aandacht voor het telaspekt van het getal (ordinaalgetal) aan, terwijl de vorming van het getalbegrip eveneens op bevredigende wijze door de operaties met getallen wordt gesteund.
- Het formalistische taalgebruik van de metode, ontleend aan de wiskunde, zal het inzicht voor de leerlingen niet verhogen en kan derhalve beter vermeden worden.
- In didaktisch opzicht heeft de metode voor het instruktiemodel van de kennisoverdracht (voordoen, gesnapt, nadoen) gekozen.
- De problematiek van de differentiatie wordt niet gemeden; er bestaat echter ernstige twijfel of de voorgestelde organisatiestrukturen haalbaar zijn in de praktijk.
- Het cijferen is didaktisch goed opgezet. Ruime aandacht bestaat er voor het inzichtelijk optellen en aftrekken, hoewel het aantal tussenstappen wel eens het totaalbeeld van de uiteindelijke bewerkingen in de weg zou kunnen staan. Vooral het delingsalgoritme is zorgvuldig opgebouwd.
- Naast de gewone cijfersommen geeft de aandacht voor getallenlijn, tabellen, honderdveld, rekenspelletjes, etc., een wat ruimer kader aan het cijferen dan dit tot het eind van de zestiger jaren in het algemeen het geval was in de nederlandse rekendidaktiek.
- De metode biedt wellicht te weinig oefenstof voor het cijferen. Daar de onderwijzer dit euvel zelf kan opvangen, hetzij door zelf oefenstof te ontwerpen, hetzij door gebruik te maken van goede additionele materialen, kan deze konstatering nauwelijks als negatief worden gewaardeerd.
- Aan de ontwikkeling van het breukbegrip is veel aandacht besteed. Toch speelt ook hier de formele wiskunde weer een rol. De oefeningen zijn beperkt gehouden, hetgeen een voordeel mag heten. Verband met het verhoudingsbegrip wordt gemist, terwijl een analoge ontwikkeling van het belangrijke (realiteitsgebonden) procentbegrip ook ontbreekt.
- Veel in de metode voorkomende rekenproblematieken worden vanuit een (niet oninteressante) schijnrealiteit gepresenteerd; slechts weinig situaties geven aanleiding tot een relevante wiskundige benadering of onderzoekshouding.
- De meetkunde is grotendeels ontleend aan de traditionele (euclidische) meetkunde en heeft in het algemeen weinig te maken met hetgeen meetkunde tot een interessant onderwerp voor het basisonderwijs zou kunnen maken.
- Het meten krijgt aandacht, zij het dat het weinig mogelijkheden laat voor een onderzoekje, waarbij begripsvorming zou kunnen ontstaan.
- De lay-out van de leerlingenteksten is goed. Het docentenboek is overzichtelijk van opzet.

AANVULLING VANUIT PRAKTIJK-INTERVIEWS (10)

- Hoewel de didaktische opbouw per onderdeel van het cijferen, zoals bijvoorbeeld het optellen, wordt gewaardeerd, bestaat er terughoudendheid ten aanzien van het grote aantal tussenstappen. De mogelijkheid van een syntese van deze tussenstappen door de leerlingen zélf, wordt betwijfeld.[1])
- In de praktijk leidt dit tot moeilijkheden bij het delen. Er bestaat daar duidelijk een diskrepantie tussen het model van instruktie en de didaktische opbouw van het delingsalgoritme.
- Door de gefragmenteerde aanbieding van enkele stukken leerstof, zoals bij de breuken, gaat het zicht op de kontinuïteit verloren.
- De metode biedt te weinig oefenstof. Er worden te weinig mogelijkheden geboden tot automatiseren en memoriseren. De tafels van vermenigvuldiging worden te kompakt gepresenteerd, terwijl ook het hoofdrekenen te weinig aandacht krijgt. Modellen als honderdveld en getallenlijn worden in de bovenbouw niet meer uitgebuit. Hierdoor ontstaan soms zorgen over de rekenvaardigheid waarover de vertegenwoordiger van de uitgever voorspelde dat dit vanzelf in orde zou komen.
- Lang niet iedere onderwijsgevende heeft bezwaar tegen het gebruik van de verzamelingen, hoewel in de praktijk over het algemeen aangesloten wordt bij het taalgebruik van het kind. Het formalistische taalgebruik (associativiteit, etc.) wordt als hinderlijk ervaren.
- Het differentiatieprobleem wordt, zelfs bij toepassing van de in de docententekst gedane suggesties, niet opgelost in de praktijk. De oorzaak hiervan wordt gezocht in het feit dat bij elke pagina eerst instruktie moet worden gegeven.
- Als de onderwijsgevende zelf de moeite neemt enige aktiviteiten te organiseren, bestaan er bij het onderdeel meten wel degelijk mogelijkheden kleine onderzoekjes te doen.
- Sommige meetkundige onderwerpen, zoals de verkenning van de kubus, worden positief gewaardeerd.
- Tot slot merken we op, dat één (van de ondervraagde) schoolteam(s) indertijd heeft gekozen voor de metode, omdat zij de amerikaanse originelen in hun totaliteit hadden kunnen bestuderen. Daarbij konstateerden zij, dat *ewr* dicht bij het traditionele rekenen ligt. Dit was doorslaggevend voor hun beslissing.

[1]) In dit verband wijzen we (L.S. & H.M.) nog eens op het gebruik van de abakus, waarbij het totale algoritme eigenlijk direkt wordt aangeboden.

ALGEMENE KONKLUSIE (11)

Onze algemene konklusie luidt, dat *ewr* vooral met betrekking tot de sleutelonderwerpen uit het traditionele rekenen, zoals cijferen en breuken, een betrouwbare indruk maakt, en kan bogen op degelijkheid in aanpak en opbouw.

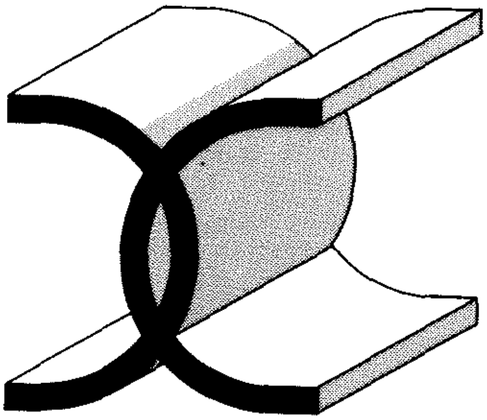
REAKTIES AUTEURS (4)

Een aanpak waar we in de voorgaande jaargang mee zijn begonnen, namelijk de betreffende uitgever (auteurs) gelegenheid geven te reageren op de beschrijving, wilden we ook in dit katern voortzetten.
Bij navraag bleek de uitgever van *ewr* 'zich redelijk te kunnen vinden' in de gepresenteerde beschrijving en er daarom geen behoefte aan te hebben verder te reageren.

VERVOLG (5)

In katern 5 zullen we de besprekingen van de wiskundemetode der eerste generatie voortzetten.
Aan de orde komen de metoden:
wiskunde voor de basisschool;
boj! rekenen.

opleiding



WAAROM HARRY EEN TIEN VERDIENT

Als wiskunde- en didaktiekdocent moet je regelmatig een beoordeling geven van de aktiviteiten van je studenten binnen je eigen vakgebied.
Vooral wanneer het gaat om didaktische aktiviteiten heb je daarvoor weinig 'harde' kriteria beschikbaar. Toch heb je, vanuit vele ervaringen, geleerd om goed didaktisch werk te herkennen. Soms ben je zelfs in staat je studenten een stapje verder op het didaktische pad te helpen door hen te konfronteren met voorbééldig didaktisch werk.
Hiernaast een illustratie daarvan.
Het uitgangspunt is een beschrijving van een didaktische aktiviteit door Harry, een gorkumse eerstejaarsstudent.
Het kommentaar erbij is te beschouwen als een — subjektieve en onvolledige — analyse. Bedoeld als hulp in bovengenoemde zin voor Harry's medestudenten. De lezer mag het ook beschouwen als een poging van een docent om voor zichzelf te verduidelijken waarop zijn waardering voor dit didaktisch werk berust.

Eerlijk gezegd zou het beter zijn als de geïnteresseerde lezer het werkstukje van Harry zou oppakken om tot een eigen analyse en waardering te komen.

FRED GOFFREE
HUUB JANSEN

inleiding
Vanavond met veel plezier twee didaktische werkstukken van Harry Schaay (1*b*) gelezen. Het ene werkstuk betrof Harry's uitwerking van het didaktische deel van de toets *meten*, het andere was een ekstraatje, namelijk een beschrijving van een didaktische aktiviteit rond een probleem uit het derde hoofdstuk van het blok *meten*.

rechts: Harry Schaay

Als een student méér werk inlevert dan is opgedragen, word je als docent gemakkelijk verleid tot het geven van een hogere waardering dan de kwaliteit van het werk rechtvaardigt. De beste aanpak voor een docent, die niet in deze valkuil terecht wil komen, bestaat uit het nog nauwkeuriger analyseren van het werk dan gewoonlijk, om zo voor zichzelf en anderen duidelijk aan te geven waarop zijn waardering berust.
Laten we beginnen met onze analyse van Harry's ekstra werk. Hieronder het eerste deel, waarin Harry zijn vóórdenkwerk beschrijft:

vóórdenkwerk

'al dan niet gevuld
De opgave zoals deze in het blok *meten* staat, op pag. 60 bovenaan:

Je hebt drie vaten, resp. van acht, vijf en drie liter. Het vat van acht liter is gevuld met wijn. Hoe kun je met behulp van deze drie vaten twee porties van vier liter krijgen?

Dit is nogal abstrakt en om onverwachte situaties het hoofd te kunnen bieden, heb ik deze opgave eerst voor mezelf opgelost en getekend, en wel stap voor stap.
Naar aanleiding van de bovenstaande gegevens heb ik de volgende beginsituatie getekend:

8	5	3
8	0	0

De getallen die boven de vaten neergezet zijn, betekenen het aantal liters dat een vat *kan* bevatten

en de volgorde, waarin ik ze nu neergezet heb, blijf ik in de rest van dit verhaal handhaven.
De getallen, die binnenin de vaten geschreven zijn, geven de hoeveelheid wijn weer die zich op dat moment in de vaten bevindt. Deze zal uiteraard steeds weer veranderen.
Toen ben ik gaan denken. Wat is eigenlijk de moeilijkheid voor mezelf in deze opgave? Je mag alleen de drie vaten, je handen en je hersens gebruiken bij het oplossen van deze opgave. Verder: als je naar de inhoud van deze vaten kijkt, dan zie je dat er één vat is met een even inhoud en twee vaten met een inhoud van resp. vijf en drie liter, dus oneven getallen. En je moet een verdeling krijgen van twee vaten, ieder met een inhoud van vier liter.
Toen ben ik gaan zoeken, maar ik wist eigenlijk niet wat; de zogenaamde 'missing link' dus. Opeens zag ik het: namelijk dat vijf liter en drie liter samen acht liter vormen en dat als ik één liter bij het vat van drie kon doen, ik precies vier liter had en als ik één liter van het vat van vijf liter kon aftrekken, ik ook precies vier liter kreeg. Het probleem was nu weer: kon ik één liter krijgen?
Dit bleek niet zo'n groot probleem voor mij, omdat ik nogal abstrakt kan denken en via dit abstrakte denken, heb ik de volgende stappen genomen om tot het optekenen van mijn denken te komen:

⓪	8	0	0	dit is de beginsituatie;
①	5	0	3	ik heb drie liter in het vat van drie liter gegooid;
②	5	3	0	deze drie liter heb ik weer in het vat van vijf liter gegooid;
③	2	3	3	nu heb ik het vat van drie liter weer gevuld met wijn uit het vat van acht liter;
④	2	5	1	nu kreeg ik één liter door de wijn, die in het vat van drie liter zit, over te gieten voor zover mogelijk in het vat van vijf liter, zodat je nu dus één liter overhoudt; nu is het niet meer zo moeilijk; één liter hebben we al in het drie liter-vat; in het vijf liter-vat zit nu nog vijf liter; deze vijf liter gieten we weer terug in het acht liter-vat;
⑤	7	0	1	dan gooien we de ene liter, die in het drie liter-vat zit, in het vijf liter-vat dat leeg is, dan krijgen we de volgende situatie;
⑥	7	1	0	nu gieten we vanuit het acht liter-vat het drie liter-vat vol, wat dan de volgende situatie weergeeft;
⑦	4	1	3	nu hoeven we alleen nog maar de inhoud van het drie liter-vat in die van het vijf liter-vat te gooien, dan hebben we dus 1 + 3 liter is vier liter in het vijf liter-vat;
⑧	4	4	0	dan hebben we de opgave opgelost.

De moeilijkheden voor de kinderen zullen volgens mij zitten in:
- de opgave zelf; hij is namelijk veel te abstrakt samengesteld met een paar moeilijke woorden erin, die de kinderen niet begrijpen;
- het kunnen konkretiseren van deze opgave; doen ze het al tekenend of alleen met getallen?
- de kinderen zullen wat moeilijkheden hebben met het idee, dat je behalve je handen en je hersens alleen maar de drie vaten mag gebruiken en verder niets;
- het vinden van het ene litertje, waaruit dan de rest voortvloeit.

Op school hebben we deze opgave ook behandeld en de oplossing was hetzelfde. Alleen de manier van opschrijven was veel abstrakter. Ik zal deze oplossing (manier van opschrijven) hieronder noteren:

	inhoud	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
vat 8	8	5	5	2	2	7	7	4	4
vat 5	0	0	3	3	5	0	1	1	4
vat 3	0	3	0	3	1	1	0	3	0

aspekten
Het beschrijven van de eigen probleemaanpak is geen eenvoudige zaak. Harry blijkt in staat een beschrijving te geven, waarin de gevonden oplossing van het probleem duidelijk valt af te lezen.
Welke belangrijke aspekten zijn er nu te signaleren?

konkretiseren en schematiseren
In de eerste plaats weet Harry de essentie van het probleem op een konkrete wijze, met getallen en getekende vaten, voor te stellen. Hij schematiseert het probleem op een manier, die hem in staat stelt aan de oplossing te gaan werken.

bewustmaking
Vervolgens heeft Harry zich afgevraagd — beter: zich bewust gemaakt — waaruit de kern

van het probleem bestaat. Vanuit deze bewustmaking wordt een gerichte wijze van werken mogelijk.

redeneren vanuit de oplossing
Een belangrijke stap in het denkproces van Harry is het gaan zoeken naar de 'missing link'. Harry pakt derhalve het probleem aan door aan de andere kant te beginnen en zich af te vragen welke ontbrekende kennis nodig is om tot de oplossing te kunnen komen. Hij denkt als het ware van achter naar voren: als ik één liter kan krijgen, dan ...
Het redeneren vanuit de beginsituatie naar de tussenstap toe blijkt dan niet zo moeilijk meer.

denkstappen
Harry beschrijft vervolgens de hele oplossing in de 'taal', die hij tevoren ontwikkeld heeft. Ik heb het gevoel, dat hij hierin niet geheel volledig is. De eerste stap bijvoorbeeld: 8 0 0 → 5 0 3 had ook anders kunnen zijn: 8 0 0 → 3 5 0. Deze laatste stap leidt niet direkt tot de oplossing. Of Harry dit ook doordacht heeft, vermeldt hij niet. Nu lijkt het alsof zijn eerste stap een gelukkige greep is geweest. Ik heb mij ook afgevraagd of Harry nog andere wegen naar de oplossing heeft overwogen. Jammer genoeg vermeldt hij dat niet.

beschrijving
Zoals eerder gezegd, beschrijft Harry de essentiële stappen, waaruit zijn gevonden oplossing bestaat. In deze beschrijving weet hij de oplossing voor zichzelf én voor de lezer volledig duidelijk te maken. Ik heb het idee, dat het niet duidelijker, niet overzichtelijker beschreven kán worden.

warming-up
In het algemeen kun je zeggen, dat de totale probleemaanpak van Harry een warming-up betekent, die nodig is om aan het didaktiserende vóórdenkwerk te kunnen beginnen. Niet alleen heeft hij het probleem, met inbegrip van de oplossing, tot zijn geestelijk eigendom gemaakt, maar ik vermoed, dat hij zichzelf daarbij sterk gemotiveerd heeft tot de verdere didaktiserende aktiviteiten over te gaan.

moeilijkheden vóórdenken
Zijn eigen doordenking van de problematiek stelt Harry in staat om tevoren de moeilijkheden, die de kinderen zullen ondervinden, te signaleren: het begrijpen van de probleemstelling, het konkretiseren en schematiseren, de essentiële momenten tijdens het oplossingsproces. Jammer genoeg vermeldt Harry niet alle overwegingen, die tijdens het didaktiseren van het probleem een rol hebben gespeeld. Je kunt daar slechts achterkomen via een analyse van zijn lesverslag:

lesverslag

'al dan niet gevuld
De oplossing door de leerlingen van de vijfde klas van de oranje nassauschool te gorinchem.

Instapprobleem: Ik begon met de kinderen te vertellen, dat ik moeilijkheden had met mijn wijnboer. Ik vertelde ze dat ik morgen een feestje gaf en dat er veel vrienden zouden komen, ook vrienden uit frankrijk.
....'Jongens, wat drinken mensen uit frankrijk veel?'
'Wijn, meneer.'
'Ja, daarom ben ik naar de wijnboer geweest. Ik kwam in zijn winkel en bestelde vier liter wijn, want ik dacht: ze komen met vier man en één liter per man kan wel, dan zijn ze net niet dronken. De wijnboer had gelukkig een vol vat van acht liter, maar hij kon zijn schenkkan, waarin precies één liter kon, niet vinden.'
'Wat doen we nu, meneer?', vroeg de boer.
'Ik heb wel twee lege vaten van vijf en drie liter, maar als ik het overgooi, dan is het natuurlijk niet precies vier liter. Het kan iets meer zijn, dan kost het mij geld, maar is het minder dan betaalt u teveel.'
Ik wist het niet zo gauw, maar zei tegen hem: 'Ik zal het eens aan mijn klas vragen.'
Nu ben ik dus hier en heb jullie hulp nodig. Wat gaan we doen?' ....

Ik heb de opgave anders op bord geschreven dan in het blok *meten* vermeld staat. Hieronder volgt de opgave zoals ik hem op bord geschreven heb. En na mijn instapprobleem heb ik dit aan de klas laten zien.
Je hebt drie vaten, vat *a*, vat *b* en vat *c*. Vat *a* heeft een inhoud van acht liter en zit helemaal vol. Vat *b* heeft een inhoud van vijf liter, maar is leeg en vat *c* heeft een inhoud van drie liter en is ook leeg.
Getekend ziet het er zo uit:

a	*b*	*c*
8	0	0

....'Hoe kunnen we nu in twee van deze vaten precies vier liter krijgen met behulp van alleen jullie handen, hersens en deze drie vaten? Verder niets.' ....

Ik heb tevoren blaadjes aan de kinderen uitgedeeld en toen mijn instapprobleem verteld was en ik de opgave op het bord heb laten zien (deze heb ik

daarvoor op bord geschreven) heb ik hen eerst tien minuten zelf laten proberen.
Toen ik langs liep waren veel kinderen aan het tekenen, sommige schreven het ook.
Toen zei ik dat we nu met z'n allen aan de oplossing zouden gaan werken.
Cora zei, dat je eerst de vaten op het bord moest tekenen, wat ik dus deed:

a	*b*	*c*
$\boxed{8}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

....Tanja zei: 'Je doet het vat waar vijf liter in kan vol en je giet van die vijf liter drie liter in dat vat van drie liter. Dan hou je twee liter over. Dit doe je tweemaal. In het vat van vijf liter zit nu vier liter en in het vat van acht liter ook.'
'Dit kan niet', zei Bert, 'want je weet niet wat twee liter is en je kan dit geen twee keer doen, want de vaten zitten dan al vol. Het kan makkelijker. Je gooit gewoon de helft van het acht liter-vat in het lege vijf liter-vat.'
Inie zei: 'Dat kan niet, want je weet niet of het de helft is.'
Edwin zei: 'Je neemt gewoon één literfles en gooit het dan vier keer in het vat van vijf liter.'
'Mag niet', zei Cora, 'want je mag alleen je handen, je hersens en de vaten gebruiken.'
Bert: 'Dan weeg je het gewoon.' ....

Hierop werd de klas een beetje kwaad op Bert en zei dat hij beter op moest letten, want je had geen andere hulpmiddelen en volgens Cora kon je geen lege vaten wegen.
Ik hielp hen een beetje door te wijzen op de getallen zelf. Wat voor getallen zijn het? Velen begrepen niet wat ik bedoelde, maar Wim zei:
.... 'Acht is even en drie en vijf zijn oneven.'
'Hoeveel liter moet er bij het vat van drie liter om vier liter te krijgen?'
Klas: 'Eén liter.'
'En bij het vat van vijf liter?'
'Daar moet je één liter af doen', zei Jacqueline.
'Ja', zei Edwin, 'natuurlijk, want $3 + 1 = 4$.'
Toos zei: 'Ja, maar dan moet je eerst één liter zien te vinden.'
Karin zei: 'Dan neem je toch $\frac{1}{5}$ deel van vijf liter.'
Bert zei: 'Dat kan niet, want je hebt alleen deze drie vaten.'
Toos zei: 'Dan moet je het vat van drie liter vullen en dit gooi je dan in het vat van vijf liter. Doe hetzelfde nog een keer en dan hou je één liter over in het vat van drie liter.'
Dit begrepen sommigen niet en toen zei ik: 'Toos, teken het maar stap voor stap op het bord.' ....
Kreeg je dus dit:

a	*b*	*c*
$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$
$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$
$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$
$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$

Toen begrepen ze het wel, omdat het veel konkreter is.

.... 'Nu, hoe gaan we verder?' ....
Daar zaten ze even vast.
.... Toen vroeg ik: 'Waar zouden we de vier liter ook weer in doen?'
'In het vijf liter-vat.'
'Nou, dan doen we dit ook.'
Bert zag het opeens en zei: 'Dan gooi je het vijf liter-vat leeg in het acht liter-vat en de ene liter doen we in het vijf liter-vat. Nu vullen we het drie liter-vat weer en gooien het daarna weer in het vijf liter-vat, waar dus nu vier liter in zit. In het vat van acht liter zit nu ook vier liter.' ....
Velen begrepen dit weer niet en toen liet ik het Bert op het bord tekenen. Toen kreeg je dus deze volgorde:

a	*b*	*c*
$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$
$\boxed{7}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
$\boxed{7}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$
$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$
$\boxed{4}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$

Dit was gelijk het einde van mijn les. Nog een paar opmerkingen.

- De kinderen waren vanaf het begin geboeid en naarmate de oplossing naderbij kwam raakten ze steeds meer geboeid.
- Wiskobas zegt erg modern te zijn op het gebied van deze metode, maar dezelfde opgave heb ik in het geschiedenisboek zien staan van mijn klas en wel precies hetzelfde. Het boek heet: *in onderwerp en opdracht* 2. Auteurs: C.J. Buitendijk, W. Kuperus, C.J. Seip (Meulenhoff Educatief, amsterdam).
  Verschil is echter de spelling (middelnederlands) en de gebruikte maten.'

analyse

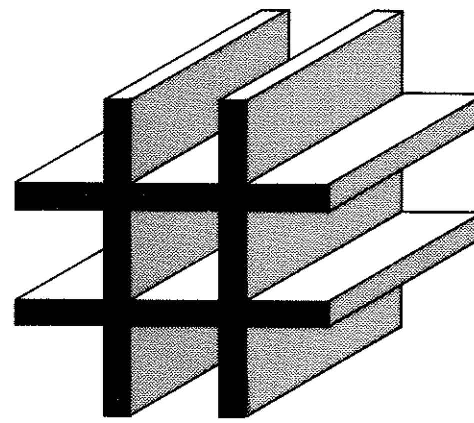
Zoals we zien, heeft Harry het probleem verpakt in een verhaaltje over wijnboer en feestje. Deze inbedding in een *algemene kontekst* is een didaktische prestatie. Weliswaar lijkt het oorspronkelijke probleem voor ons erg konkreet met z'n vaten en liters, maar zeker voor kinderen biedt het probleem weinig aangrij-

pingspunten. Ondanks deze moeilijkheid schetst Harry een kontekst, waarbij het *instapprobleem* ligt besloten in de vraag van de wijnboer. Een *kernvraag*, die door de verwijzing naar teveel of te weinig betalen, voor iedere vijfdeklasser begrijpelijk is.
Harry heeft er goed rekening mee gehouden, dat de *wiskundige kontekst* – het probleem zelf – niet onmiddellijk door zijn leerlingen gegrepen kan worden. Hiervoor dienen allereerst de essentiële gegevens naar voren te worden gehaald en moeten de kinderen de beschikking krijgen over een *wiskundetaaltje*, waarmee het probleem aangepakt en de oplossing beschreven kan worden. Harry gebruikt het bord om de kinderen *op het probleem te oriënteren*. Deze didaktische aktiviteit hoeft er nog niet toe te leiden, dat alle kinderen zich *in de problematiek in*leven. Harry biedt daarom de kinderen mogelijkheden zich het probleem *bewust te maken* door hen, gedurende korte tijd, gelegenheid te bieden zich individueel op het probleem *te oriënteren*.
Het doordringen in het probleem, de stapsgewijze toenadering tot de oplossing ervan, organiseert Harrry als een *groepsproces*, waarin iedere leerling zowel kan bijdragen als verder geholpen kan worden. Uit het verslag blijkt dat dit proces, als gevolg van Harry's wijze van introduceren, zich bijna vanzelf ontwikkelt. Bijna, want vanuit zijn eigen doordenking weet Harry wanneer en welke *hints* gegeven moeten worden om dit gemeenschappelijke *oplossingsproces* verder te *sturen*.
Uit de beschrijving blijkt bovendien, dat Harry grote *aandacht* bezit *voor individuele kinderen*. Een noodzakelijke onderwijzerskwaliteit om wiskundige leerprocessen te kunnen aanzetten, begeleiden en sturen.
Op het eind van het verslag komt Harry tot een, nog beperkte, *reflektie* op het gebeuren. Hij signaleert een toenemende, emotionele betrokkenheid van de kinderen. Dit is een bekend en signifikant verschijnsel bij goed verlopende wiskundige leerprocessen. In zijn tweede, meer algemene opmerking, toont Harry een nuchtere, gereserveerde kijk op het probleem en hij betrekt ook wiskobas daarin. Als weerwoord merken we op, dat het niet in de eerste plaats gaat om het probleem zelf – inderdaad een mooi, oud probleem, waarvan het wiskundige leerdoel overigens ter diskussie kan staan – maar om hetgeen je er als onderwijzer mee doet. En daarin heeft Harry zich, naar onze mening, een *aankomend meester* getoond!

---

[1]) Jaargang 6 nr 5/6.

oefen-stoffering



HET HONDERDVELD

Bij de inleiding op de eerste 'oefenstoffering'[1]*) formuleerden we waarom het ons gaat in deze rubriek. Naast 'het rijtje' als de oefenvorm die het meest in de nederlandse rekenboekjes voorkomt, willen we andere vormen, inkledingen, stofferingen van het oefenen onder de aandacht brengen. En dit niet via teoretische verhalen, maar door werkmateriaal te presenteren.*
In de eerste 'oefenstoffering' kwam aldus de tabel aan bod. Nu richten we ons op een verwante vorm: het honderdveld.
Het honderdveld is een oefenvorm bij uitstek voor de onderbouw van de basisschool. Ook voor de andere 'bouwen' heeft het honderdveld vele mogelijkheden.
In onderstaande kolommen zal de nadruk liggen op de verkenning *van de telrij tot 100 en van de vier hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen en op het* oefenen *van de bewerkingen.*

LEEN STREEFLAND

Bij de verkénning speelt het honderdveld een wezenlijke rol, is het een funktioneel onderdeel van de aktiviteit.
Bij het oéfenen is het honderdveld écht stoffering, vormgeving, o.m. om de motivatie van de leerlingen te bevorderen. Zo kunnen we bijvoorbeeld een aantal oefenopgaven zodanig kiezen, dat de uitkomsten — ingekleurd op het honderdveld — een woord of figuur opleveren.
Beide aspekten komen aan de orde.

De suggesties — voor een belangrijk deel geïnspireerd op het integratieplan van wiskobas[1]) — zijn per 'bouw' geordend. Aan het eind van het artikel treft u die werkbladen op gebruiksgrootte aan, die niet zo eenvoudig zélf met behulp van het honderdveldstempel zijn te maken. Aldus komen we tegemoet aan respons op de eerste stoffering.

ONDERBOUW (1)

▶ **OVERZICHT (1)**

Evenals tabellen, is ook het honderdveld een oefenstoffering die individueel en incidenteel bruikbaar is.
We richten ons nu echter op de rol, die het honderdveld meer geregeld binnen het onderwijs kan vervullen, o.m. bij:
- verkenning van de telrij tot 100;
- ordening van getallen binnen die rij;
- onderscheid van tientallen en eenheden;
- patronen in het honderdveld en tafels van vermenigvuldiging;
- optellen en aftrekken;
- optellen en aftrekken door het tiental heen;
- patronen bij het optellen en aftrekken door het tiental heen;
- pijlen op het honderdveld.

▶ **VERKENNING VAN DE TELRIJ TOT 100 (2)**

de plaats van de $\boxed{1}$

De verdeling van de getallen over het honderdveld hoeft niet steeds dezelfde te zijn. $\boxed{1}$ op een ander veldje, sleept de meeste andere getallen mee naar andere veldjes.
Als voorbereiding op *werkblad 3* zouden we bij een ingevuld honderdveld (fig. 1) vragen kunnen stellen als:
- ▶ Waar komt $\boxed{5}$, als we met $\boxed{1}$ rechtsbovenaan beginnen?
- ▶ Waar komt $\boxed{15}$, als we met $\boxed{1}$ linksonderaan beginnen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

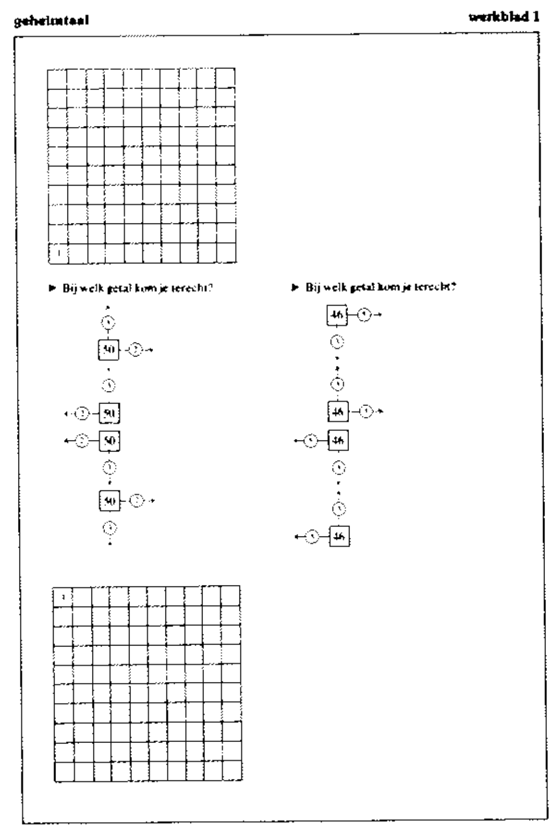
fig. 1

geheimtaal (werkblad 1)

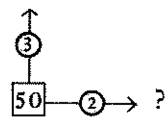
Bij de voorgaande aktiviteit kunnen de getallen zó gekozen worden, dat het verschil tussen eenheden en tientallen benadrukt wordt.
We bedenken met de leerlingen een geheimtaal:

↑ 3 betekent: drie rijen omhoog;

—2→ betekent: twee getallen naar rechts.



1) Zie: Leerplanpublikatie 2 (*iowo*, utrecht 1975).

▶ Wie weet nu wat dit betekent:  ?

▶ Bij welk getal komen we terecht?

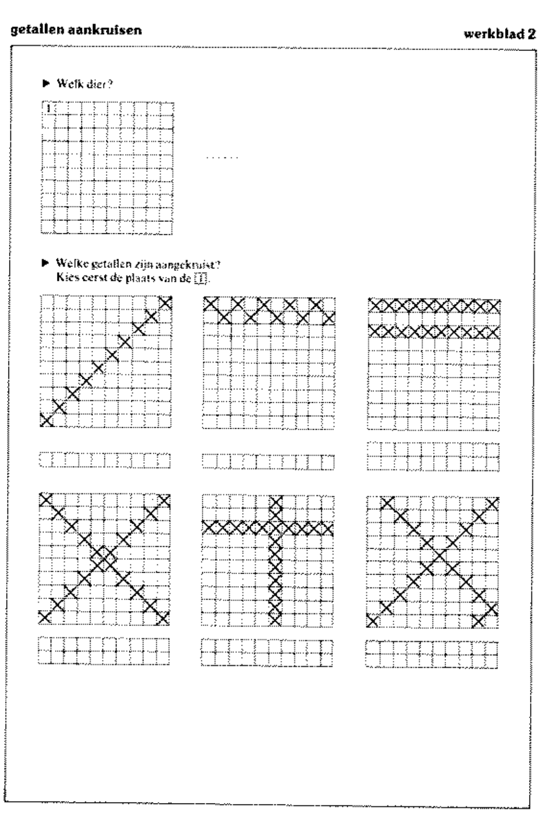
▶ Wie kan er een 'som' bij bedenken? (bijvoorbeeld: 50 + 30 + 2 = 82)

Het hangt helemaal van het honderdveld af (keuze van de plaats van de $\boxed{1}$) en van het verdere trajekt, welke opgave erbij hoort.
Het had ook best 50 – 30 + 2 = 22 kunnen zijn.
De vraag is of de afspraak, dat —○→ ... getallen naar rechts betekent, voldoende is. Immers, wat te doen als we het honderdveld moeten verlaten?
Laat de leerlingen dan een nieuwe afspraak bedenken. Bijvoorbeeld: —○→ of ←○— betekent: ... getallen verder of terug.

getallen aankruisen (werkblad 2)

Van een honderdveld wordt de plaats van de $\boxed{1}$ gegeven. We vragen nu, veldjes voor gegeven getallen aan te kruisen.
Kies de getallen zó, dat een dierfiguur, een mooi patroon of een woord ontstaat.
De leerlingen zijn benieuwd wat eruit zal komen en kunnen zichzelf kontroleren en korrigeren.
Bijvoorbeeld:

▶ Kies $\boxed{1}$ linksboven. Kleur de hokjes voor: 33, 36, 43, 53, 54, 55, 56, 62, 63, 66, 73 en 75. Welk dier heb jij?



variatie

- Kies $\boxed{1}$ in een andere hoek. Een verschillende keuze leidt tot gespiegelde dieren. Wie legt dat uit?
- In plaats van getallen geven we opgaven, welke die getallen tot uitkomst hebben. De antwoorden vormen dan een patroon, figuur of woord in het honderdveld. Zelfkontrole, fouten opsporen en verbeteren, behoren weer tot de mogelijkheden voor de leerlingen.

▶**OPTELLEN EN AFTREKKEN (3)**

inleiding

Bij het verkennen van de telrij tot honderd kwamen al verplaatsingen binnen het honderdveld voor. We kunnen daarbij onderscheiden:

- Sprongen over het honderdveld met een vaste 'waarde'; bijvoorbeeld: telkens vijf verder; het 'door de tien heen gaan' bij de optelling krijgt hierdoor een meer algeméén karakter en verdient de voorkeur boven het bekijken van afzonderlijke gevallen: eerst 6 + 5 en pas veel later 16 + 5 (omdat dit boven de 20 is), enz.
  Bijvoorbeeld:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

fig. 2

  ▶ Telkens vijf erbij vanaf de getallen met een kring. Zet een rondje om de gevonden getallen.

  NB: Let op, hoe voor het laatste getal ($\boxed{96}$) de grenzen van het honderdveld overschreden worden.
- Sprongen, die vastgelegd worden door een pijl.
- Het verplaatsen van gedeelten van het honderdveld.
- Het verplaatsen van het hele honderdveld.

sprongen en pijlen (werkblad 3)[1])
Een voorbeeld:

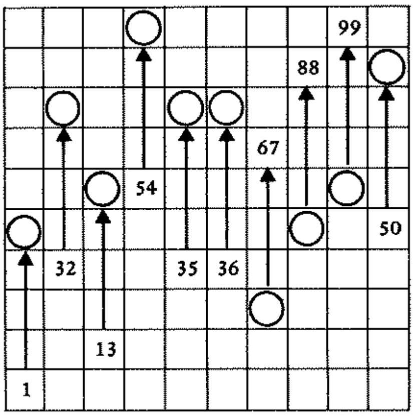
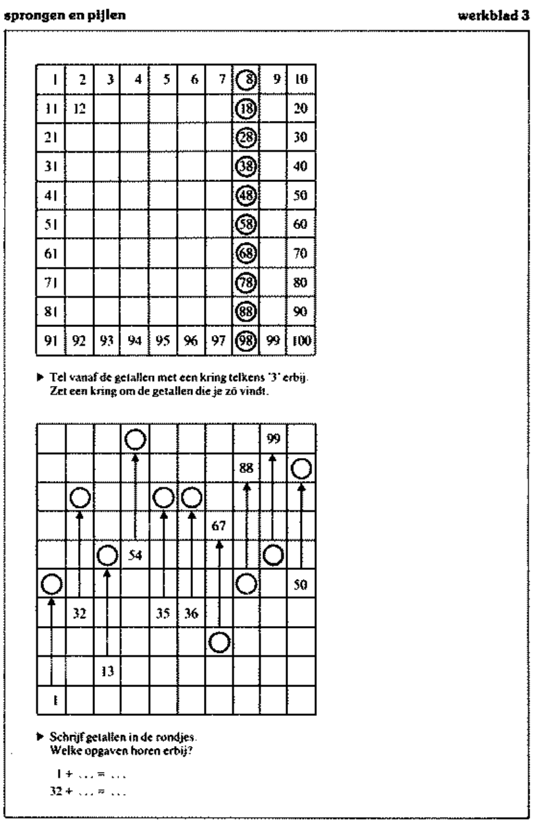


fig. 3

▶ Noteer de getallen in de rondjes en de bijbehorende sommen. 1 gaat over in 41. Hierbij past het sommetje: $1 + 40 = 41$.



Na enkele voorbeelden ontdekken de leerlingen het algemene karakter van de pijl: '40 erbij'. De relatie met de omgekeerde bewerking (aftrekken) ligt voor de hand. Zie fig. 4.
Geef het getal aan het eind van de pijl en laat het getal aan het begin van de pijl bepalen.
De leerlingen kunnen bij dergelijke situaties twee 'sommen' opschrijven, waarin die omgekeerde relatie tot uitdrukking komt, namelijk: $\square + 40 = 41$ en $41 - 40 = \square$.

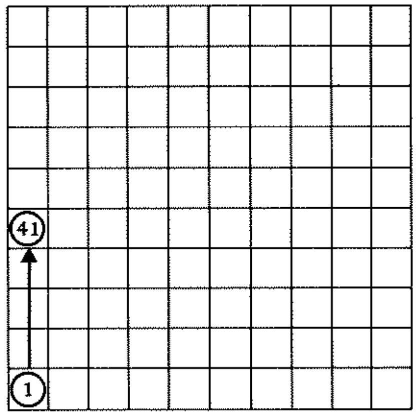


fig. 4

gedeelten van het honderdveld verschuiven (werkblad 4)

▶ Vul het stukje honderdveld in. Bedenk de sommen erbij.

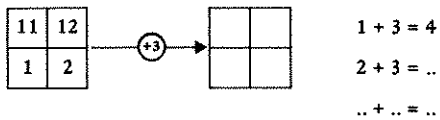
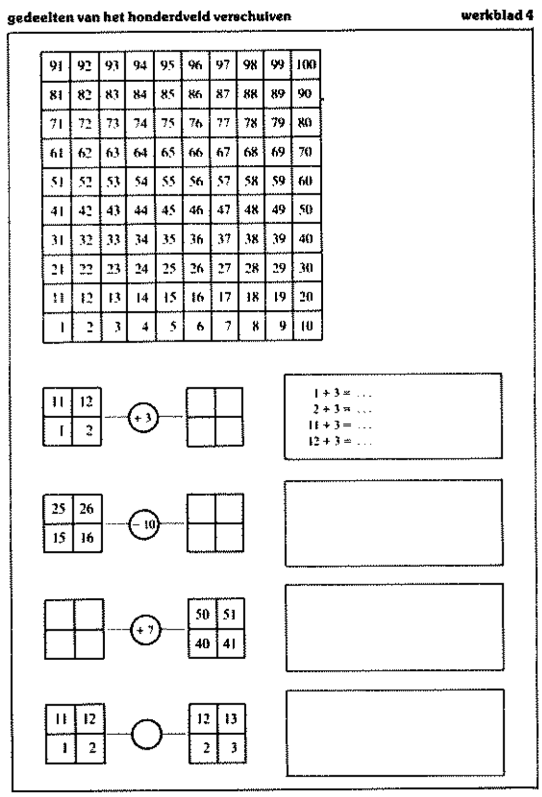


fig. 5

In plaats van het invúllen van de stukjes honderdveld, kunnen we de antwoordstukjes op het honderdveld laten inkléuren. Kiezen we de stukjes handig, dan is één afdruk van het honderdveld meerdere malen te gebruiken.[2])



[1]) In een volgende 'oefenstoffering' komen we uitvoerig terug op pijlensommen en machientjes.
[2]) Een honderdveldstempel is in de leermiddelenhandel verkrijgbaar.

variaties
Op *werkblad 4* zijn enkele variaties aangegeven. Ook de bewerking aftrekken komt hierbij weer aan de orde, en wel op twee manieren:

- gebaseerd op het wegneemidee:

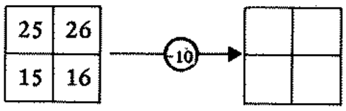


fig. 6

- gebaseerd op vergelijkingen:

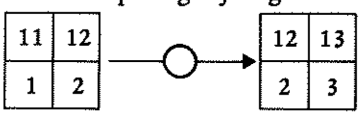
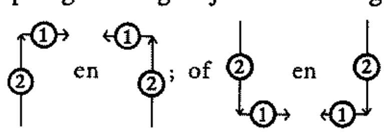


fig. 7

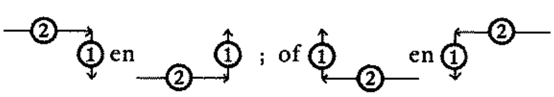
In de laatste opgave is weer sprake van een konfliktsituatie.

spring de paardesprong (werkbladen 5 en 6)

▶ Hoe zit het met de paardesprong? Het (schaak)paard springt bijvoorbeeld twee hokjes vooruit en één dwars.
▶ Welke sprongen zijn mogelijk?
De springrichting blijkt van belang.



Maar ook nog:



▶ Stel, ons paard staat in het honderdveld op [27].
Bedenk alle mogelijke sprongen vanaf [27] (zie fig. 8).

						27			

fig. 8

Juf schrijft de sprongen op het bord:

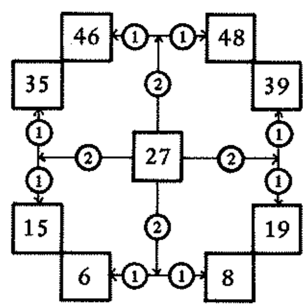


fig. 9

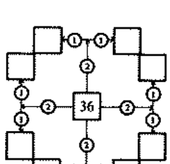
Wat horen hier veel sommen bij!
▶ Wie bedenkt de meeste sommen?

27 + 20 – 1 = 46
27 + 20 + 1 = 48
46 + 2 = 48
48 – 2 = 46
enz.

spring de paardesprong **werkblad 5**

1	2	3							10
									100

▶ Vul de ontbrekende getallen in.

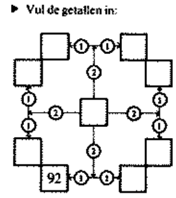


▶ Welke opgaven horen erbij? Maak het rijtje af:

36 + 20 – 1 = ...
36 + 20 + 1 = ...

spring de paardesprong **werkblad 6**

▶ Vul de getallen in:



▶ Schrijf ook hier de opgaven bij. Maak het rijtje af:
92 + ... – ... = ...
... + 20 – 1 = 92.

100	99	98	97	96	
90	89	88	87	86	
80	79	78			
70	69				
60					

▶ Een paardesprong komt uit op [78]. Waar begon die sprong?

▶ Zijn er meer sprongen mogelijk?

▶ Zoek zoveel mogelijk goede sprongen en bedenk de sommen erbij.

▶ Wie wijst het pijlenweggetje in de figuur aan, dat bij een bepaalde som hoort?
We schrijven een springopdracht voor het paard op het bord. Bijvoorbeeld: $\boxed{24} \rightarrow \boxed{43}$.
Dit betekent: van $\boxed{24}$ naar $\boxed{43}$ springen.
Hoe doen we dat?

		43		
21	22	23	24	
11				
1				

fig. 10

We noteren vervolgens de opgave die erbij hoort: 24 + 20 − 1 = 43.

zomaar wat springen en sommen zoeken (werkblad 7)
Opgaven als 153 + 236 = ... komen binnen het bereik van de leerlingen.
Bijvoorbeeld aldus:
- de honderden uit het hoofd: 100 + 200 = 300;
- 53 + 36 op het honderdveld.

▶TAFELS VAN VERMENIGVULDIGING (4)

start

1	2		4		6		8		10
									100

fig. 11

▶ We beginnen bij *start* en maken telkens een sprong van twee.
Kleur de vakjes waar je terechtkomt en schrijf de getallen erin.
▶ Hoeveel sprongen heb je nodig om bij $\boxed{4}$ te komen? En bij $\boxed{8}$?
▶ Waarom kun je niet bij $\boxed{11}$ komen?
▶ Kun je bij $\boxed{19}$ komen? En bij $\boxed{20}$?
▶ Waar kom je na zes sprongen? En na vier sprongen?
▶ Hoe zit het hier met de zevensprong?

variaties
- Soortgelijke sprongaktiviteiten kunnen ook heel goed op de getallenlijn gedaan worden:

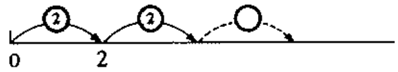
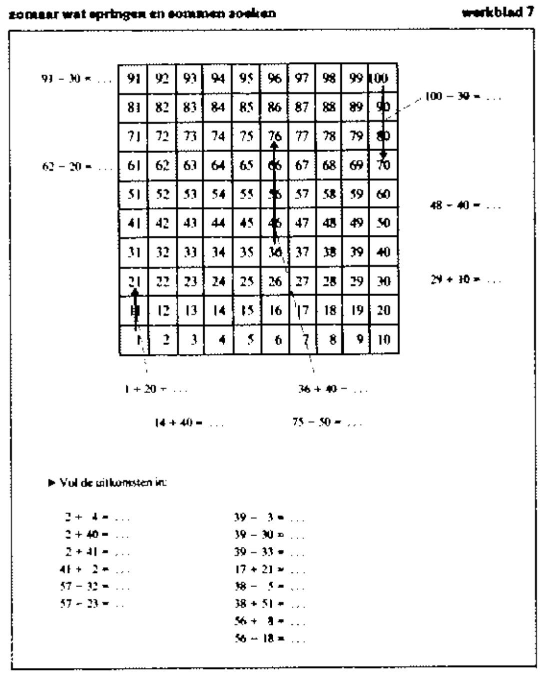


fig. 12

- Door te vragen naar het aantal sprongen bij een gegeven getal, wordt de relatie met het delen gelegd. Bijvoorbeeld:
  ▶ Hoeveel sprongen van twee moet ik doen, om op $\boxed{10}$ te komen?


zomaar wat springen en sommen zoeken — werkblad 7

91 − 30 = ...
62 − 20 = ...
100 − 30 = ...
48 − 40 = ...
29 + 10 = ...

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1 + 20 = ...
36 + 40 = ...
14 + 40 = ...
75 − 50 = ...

▶ Vul de uitkomsten in:

2 + 4 = ...
2 + 40 = ...
2 + 41 = ...
41 + 2 = ...
57 − 32 = ...
57 − 23 = ...

39 − 3 = ...
39 − 30 = ...
39 − 33 = ...
17 + 21 = ...
38 − 5 = ...
38 + 51 = ...
56 + 8 = ...
56 − 18 = ...

MIDDENBOUW (2)

▶DE TELRIJ TOT 100 (1)
Ook aan het begin van de middenbouw plannen we nog enkele aktiviteiten in de sfeer van de verkenning van de telrij.

langs de rand
Laat het honderdveld eens invullen, zoals in het voorbeeld is aangegeven:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									20
									30
									40
									50
									60
61									70
71									80
81									90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

fig. 13

Op deze manier dient de leerling zich bewust te zijn van het moment, waarop hij op een andere roetine overstapt en deze ook even vasthoudt:

- de telrij aflopen tot tien;
- dan met tien tegelijk verder tellen;
- dan met één tegelijk terugtellen;
- dan met tien tegelijk terugtellen.

vanuit het midden

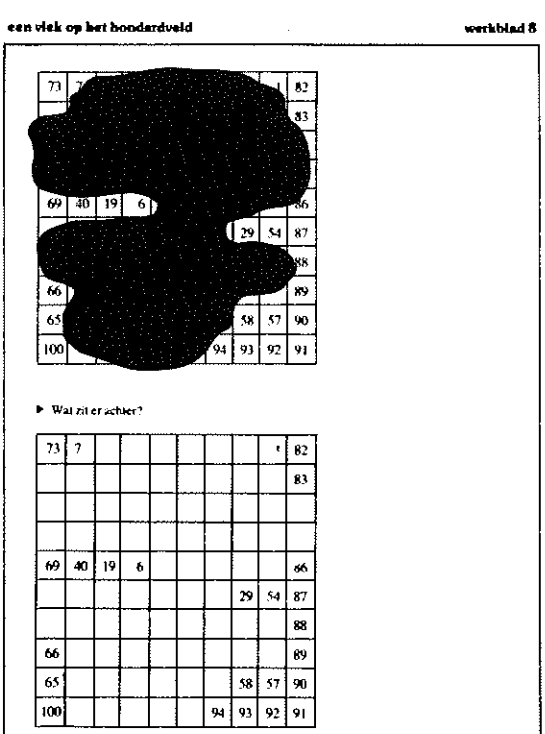
	43	44	45	46	47	48	49	50	
	42	21	22	23	24	25	26		
	41	20	7	8	9	10	27		
	40	19	6	1	2	11	28		
	39	18	5	4	3	12	29		
	38	17	16	15	14	13	30		
	37	36	35	34	33	32	31		

fig. 14

We beginnen in het midden en draaien steeds in een kringetje rond. Bij $\boxed{50}$ stoppen we even.

▶ We zijn nu op de helft. Wat hebben we al veel ruimte benut! Zou de rest van de getallen tot $\boxed{100}$ er nog wel bij kunnen?

Gelukkig blijkt het toch precies uit te komen. De laatste aktiviteit zouden we ook kunnen inleiden met of vervangen door *werkblad 8*.



een vlek op het honderdveld (werkblad 8)

Een inktvlek bedekt de meeste getallen in het honderdveld.

▶ Hoe staan de getallen erin?

De rand lijkt vrij eenvoudig te rekonstrueren. Het systeem, volgens welke het veld is ingevuld, kan vanuit de rand achterhaald worden. Als het eenmaal zo ver is, kijken we nog eens wat nauwkeuriger.

				77					
				46					
				23					
				8					
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
				4					
				15					
				34					
				61					
				96					

fig. 15

We beginnen bij $\boxed{1}$ en volgen de getallen naar een rand.

Bijvoorbeeld:

$$\boxed{69} \underset{29}{-} \boxed{40} \underset{21}{-} \boxed{19} \underset{13}{-} \boxed{6} \underset{5}{-} \boxed{1}$$

fig. 16

Het verschil blijkt telkens met acht toe te nemen.

▶ Zou dat bij een ander weggetje naar de rand ook zo zijn?

Wie kan het uitleggen? Let nog eens op de manier, waarop het honderdveld hier is ingevuld.

▶ Wie ziet nog andere patronen?

▶OPTELLEN EN AFTREKKEN (2)

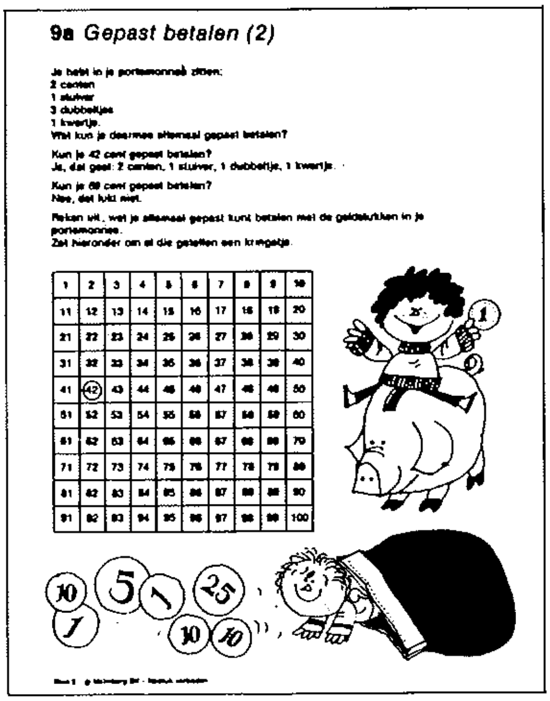
Hiervoor stelden we vast, dat het honderdveld steun zou kunnen verlenen bij het optellen van getallen van drie cijfers. Voor een meer planmatige opbouw lijkt de abakus o.i. meer geschikt.

Nog enkele oefeningen!

We beginnen op pag. 56 met een werkblad uit *kien: gepast betalen.*[1])

Is een bedrag eenmaal betaald, dan mogen de geldstukken weer terug in de portemonnee om vervolgens naar een andere mogelijkheid te kunnen zoeken.

[1]) Deel 2 (uitg. Malmberg, den bosch).



9a *Gepast betalen (2)*

Je hebt in je portemonnee zitten:
2 centen
1 stuiver
3 dubbeltjes
1 kwartje.
Wat kun je daarmee allemaal gepast betalen?

Kun je 42 cent gepast betalen?
Ja, dat gaat: 2 centen, 1 stuiver, 1 dubbeltje, 1 kwartje.

Kun je 69 cent gepast betalen?
Nee, dat lukt niet.

Reken uit, wat je allemaal gepast kunt betalen met de geldstukken in je portemonnee.
Zet hieronder om al die getallen een kringetje.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

▶ Wie vindt de meeste bedragen?
▶ Wie bedenkt een handig systeem?
▶ Hebben we nu alle bedragen?
Bespreek achteraf het aanpakgedrag van de leerlingen.
Bij een systematische aanpak is de kans groter alle oplossingen te vinden. De onderwijzer(es) kan bij dergelijke aktiviteiten zorgdragen voor efficiënte korrektie, door de antwoorden aan te geven op een transparant honderdveld.

samen zoveel/verschil zoveel! (werkblad 9)
Dit werkblad berust in feite op het omgekeerde principe van *gepast betalen.* De uitkomsten en een bewerking zijn nu gegeven. Gevraagd wordt, getallen te zoeken, die na uitvoering van de gegeven bewerking, resulteren in de gegeven uitkomst. Het is van belang met de leerlingen af te spreken, dat elk getal in het honderdveld slechts éénmaal gebruikt mag worden.
Ook hier zijn weer verschillende aanpakken mogelijk, die zich globaal gesproken onderscheiden door:

- het zoeken van willekeurige twee- resp. drietallen getallen, die voldoen aan de gestelde eisen;
- het systematisch kiezen van twee- resp. drietallen getallen, die de gevraagde kenmerken hebben.
  Bijvoorbeeld bij de eerste opgave:

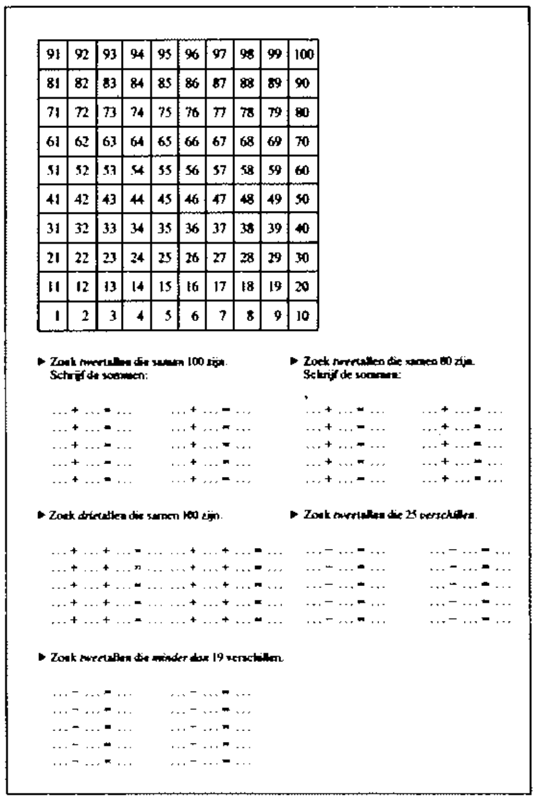
  1 + 99
  2 + 98
  3 + 97
  4 + 96
  etc.

Achteraf kunnen we dan de vraag stellen:
▶ Welke getallen krijgen zo géén beurt?
Ook voor de een na laatste opgave zijn verschillen in aanpak te verwachten, bijvoorbeeld:

- het zoeken van willekeurige tweetallen die voldoen aan de gestelde eisen;
- het beginnen met twee uitersten, bijvoorbeeld 100 – 75, en vervolgens beide getallen steeds met één verminderen;
- een aftrekking met 19 als uitkomst zou uitgangspunt kunnen zijn bij de laatste opgave, bijvoorbeeld 20 – 1 = 19; door nu systematisch het eerste getal te verkleinen of het tweede te vergroten, ontstaan aftrekkingen die aan de vraag voldoen:

19 – 1	20 – 2
18 – 1	20 – 3
17 – 1	20 – 4
etc.	etc.

samen zoveel / verschil zoveel **werkblad 9**



91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

▶ Zoek *tweetallen* die samen 100 zijn.
Schrijf de sommen:

... + ... = ... + ... = ...
... + ... = ... + ... = ...
... + ... = ... + ... = ...
... + ... = ... + ... = ...
... + ... = ... + ... = ...

▶ Zoek *tweetallen* die samen 80 zijn.
Schrijf de sommen:

... + ... = ... + ... = ...
... + ... = ... + ... = ...
... + ... = ... + ... = ...
... + ... = ... + ... = ...
... + ... = ... + ... = ...

▶ Zoek *drietallen* die samen 100 zijn.

... + ... + ... = ... + ... + ... = ...
... + ... + ... = ... + ... + ... = ...
... + ... + ... = ... + ... + ... = ...
... + ... + ... = ... + ... + ... = ...
... + ... + ... = ... + ... + ... = ...

▶ Zoek *tweetallen* die 25 *verschillen.*

... – ... = ... – ... = ...
... – ... = ... – ... = ...
... – ... = ... – ... = ...
... – ... = ... – ... = ...
... – ... = ... – ... = ...

▶ Zoek *tweetallen* die *minder dan* 19 verschillen.

... – ... = ... – ... = ...
... – ... = ... – ... = ...
... – ... = ... – ... = ...
... – ... = ... – ... = ...
... – ... = ... – ... = ...

variaties
▶ Zoek een getal in het honderdveld, dat samen met één of meer gegeven getallen een bepaalde uitkomst heeft. Zorg eventueel voor een patroon in de te kiezen getallen en laat inkleuren.

Het honderdveld kan opgevat worden als een doolhof, waarbinnen van vakje naar vakje in drie richtingen 'gereisd' mag worden, namelijk: ↕, ↔ of ↗!
Hierbij worden de getallen opgeteld. Zie fig. 17.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

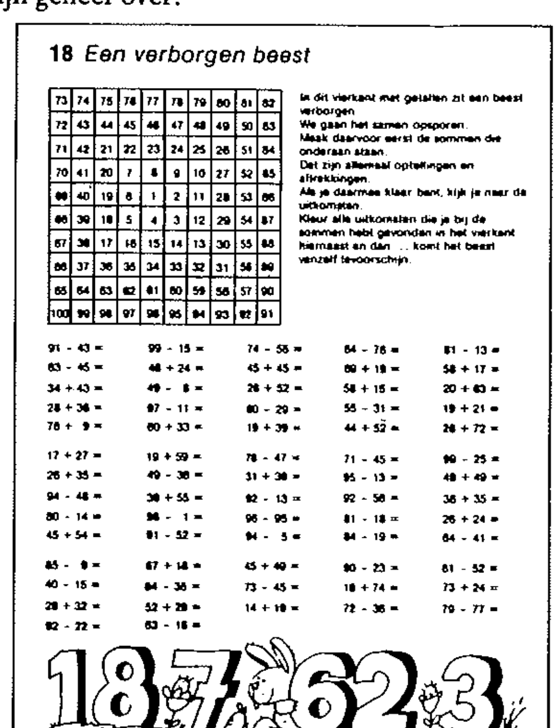
fig. 17

▶ Iemand zit in 45. Een reis naar de rand gaat langs een weg, die meer dan 90 waard is, maar minder dan 240.
Wie vindt zo'n veilige weg?
Wie vindt er meer?

Er dienen wel duidelijke afspraken gemaakt te worden. Bijvoorbeeld: je telt een getal alleen mee, als je een vakje *passeert* en niet als je er aankomt of vertrekt.

▶ Er is een weg van 45 naar 27, die 73 waard is.
Welke weg is dat?

Tenslotte nog een voorbeeld uit *kien*[1]), waarbij de antwoorden ingekleurd in het honderdveld, 'een verborgen beest' opleveren. Ook de onderwijzerstekst bij dit blad nemen we in zijn geheel over.



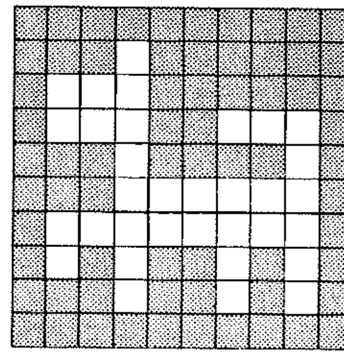
18 *Een verborgen beest*

73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

In dit vierkant met getallen zit een beest verborgen.
We gaan het samen opsporen.
Maak daarvoor eerst de sommen die onderaan staan.
Dat zijn allemaal optellingen en aftrekkingen.
Als je daarmee klaar bent, kijk je naar de uitkomsten.
Kleur alle uitkomsten die je bij de sommen hebt gevonden in het vierkant hiernaast en dan ... komt het beest vanzelf tevoorschijn.

91 - 43 =	99 - 15 =	74 - 56 =	84 - 76 =	81 - 13 =
63 - 45 =	48 + 24 =	45 + 45 =	69 + 19 =	58 + 17 =
34 + 43 =	49 - 8 =	26 + 52 =	58 + 15 =	20 + 63 =
28 + 36 =	87 - 11 =	80 - 29 =	55 - 31 =	19 + 21 =
76 + 9 =	60 + 33 =	19 + 39 =	44 + 52 =	28 + 72 =
17 + 27 =	19 + 59 =	78 - 47 =	71 - 45 =	99 - 25 =
26 + 35 =	49 - 38 =	31 + 38 =	95 - 13 =	48 + 49 =
94 - 46 =	30 + 55 =	92 - 13 =	92 - 58 =	36 + 35 =
80 - 14 =	98 - 1 =	96 - 95 =	81 - 18 =	26 + 24 =
45 + 54 =	81 - 52 =	94 - 5 =	84 - 19 =	64 - 41 =
85 - 9 =	67 + 18 =	45 + 40 =	90 - 23 =	61 - 52 =
40 - 15 =	84 - 38 =	73 - 45 =	18 + 74 =	73 + 24 =
20 + 32 =	52 + 20 =	14 + 18 =	72 - 36 =	79 - 77 =
82 - 22 =	63 - 16 =			

Een verborgen beest
Oplossing
Het verborgen beest komt tevoorschijn bij het juist inkleuren van de uitkomsten.



Opmerkingen
- De getallen in dit honderdveld staan anders dan op de traditionele manier. Laat de kinderen eens manieren verzinnen om de getallen binnen het honderdveld te ordenen.
- De oefening is zelf-corrigerend. De kinderen ontdekken zelf waar een fout gemaakt is.
- Kinderen kunnen zelf ook zo'n puzzel verzinnen. Er doen zich daarbij uiteraard andere problemen voor dan bij het uitrekenen en inkleuren van uitkomsten: het tekenen van een figuur in een honderdveld, het verzinnen van sommen en het opstellen van de opgaven in een willekeurige volgorde.

We zouden vooral willen attenderen op de suggestie de kinderen zelf eens zo'n puzzel te laten verzinnen. Een aktiviteit waarop *werkblad 9* heel goed kan inleiden.

▶VERMENIGVULDIGEN EN DELEN (3)

Allereerst vermelden we kort een aantal suggesties voor klassikale aktiviteiten:

- het inkleuren van tafelprodukten in het honderdveld;
- de tafel van twee en de tafel van drie; wat is het eerste getal, dat in beide tafels zit? zit 18 ook in beide? en 24? en 32? is het weer een tafel die in alletwee zit? welke dan?
- wie weet welke tafel door de tafels van twee en van vijf samen verborgen gehouden wordt?
- bij een getal onder de tien worden telkens getallen uit het honderdveld aangewezen met als vraag: zit het in zijn tafel? bijvoorbeeld: zit 72 in de tafel van twee? en 27? wie kan in één keer alle getallen noemen?
- we onderscheiden even en oneven getallen;
- het zoeken van tweetallen getallen waar-

[1]) Deel 1 (uitg. Malmberg, den bosch).

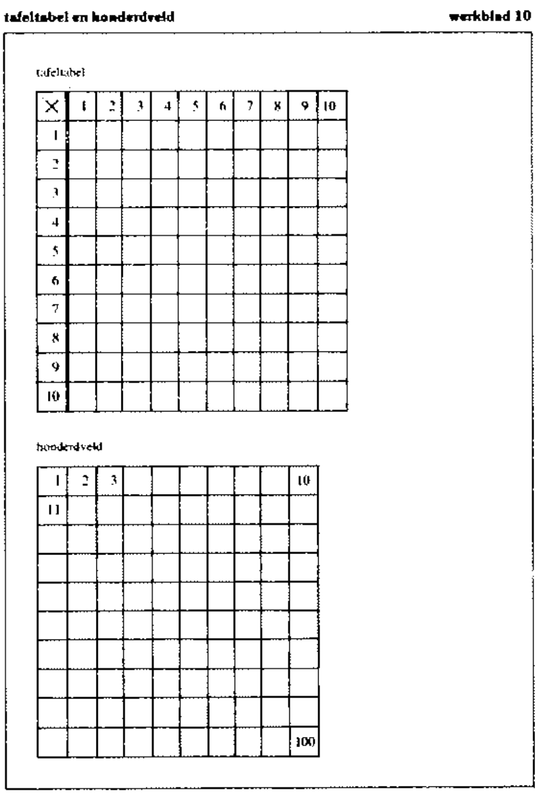
van het produkt gegeven is, bijvoorbeeld: ... x $\boxed{19}$ = 76.

tafeltabel en honderdveld (werkblad 10)
Het blad wordt ingeleid met enkele vragen:

- ▶ Hoeveel antwoorden komen er in de tafeltabel?
- ▶ Hé, het honderdveld bevat ook 100 getallen. Komen die ook allemaal in de tafeltabel voor?
- ▶ Wie kan voorspellen (zonder de tabellen in te vullen) welke getallen wél in het honderdveld staan, die niét in de tafeltabel zullen voorkomen?

Het gaat bij de laatste vraag om ondeelbare getallen groter dan tien en om tafelprodukten met een faktor groter dan tien, bijvoorbeeld 19 x 4 of 17 x 5. Laat de leerlingen een kring om die getallen zetten in het honderdveld. Sta hun (achteraf) vergelijking van honderdveld en ingevulde tafeltabel toe.

- ▶ Wie legt nog eens uit, waarom juist díe getallen 'door de mand vielen'?



BOVENBOUW (3)

▶OPTELLEN EN AFTREKKEN (1)
Werkblad 9 nodigde de leerlingen uit tot het zoeken van getallen binnen het honderdveld met een konstante som. Hierin school een belangrijke voorbereiding op *werkblad 11: handig optellen.*[1])

Immers, bij een systematische aanpak van bijvoorbeeld het zoeken van tweetallen getallen met een konstante som – zeg tien – komen we tot: 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, enz.
Leerlingen die op de gedachte komen dit principe bij het werkblad toe te passen, zijn snel klaar.

De getallentabellen zijn zodanig ingericht, dat dit idee zich kan opdringen:

$r1$	1	2	3	4	5
$r2$	10	9	8	7	6
$r3$					

fig. 18

De eerste opdracht is het sommeren van de getallen van één tot en met tien. De tabel is 'heen-en-terug' ingevuld. Boven elkaar staan telkens twee getalletjes, die samen **11** zijn. Degenen die dat zien, kunnen direkt besluiten tot 5 x 11.
Het zien van genoemde mogelijkheid ligt op zichzelf niet voor de hand. Het blijft een lastig probleem.
Overigens zijn er nog andere aanpakken denkbaar, die berusten op het toepassen van eigenschappen bij het rekenen. Bijvoorbeeld:

$r1$	1	2	3	4	5
$r2$	10	9	8	7	6

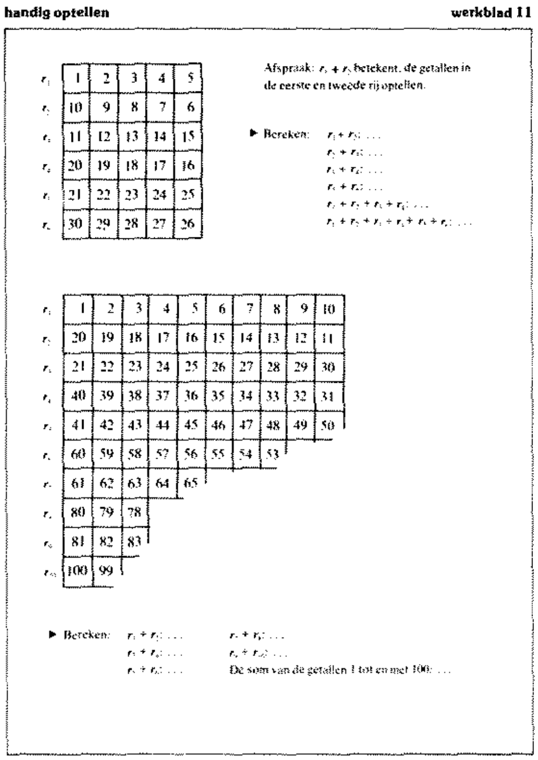
fig. 19

De tweede rij getallen ($r2$) kun je laten ontstaan, door bij elk van de getalletjes in $r1$ vijf op te tellen; $r2$ is dus gewoon 5 x 5 méér dan het eerste rijtje.
Wanneer uw leerlingen allemaal de weg kiezen van het 'domweg' optellen, zou u hen nog eens aan *werkblad 9* kunnen herinneren of de tip kunnen geven:

- ▶ Maak gebruik van tweetallen getallen die samen telkens evenveel zijn.

Om de bewerking aftrekken ook in deze aktiviteiten te betrekken, zou u dit blad kunnen beginnen met de vraag om bij de eerste opdracht te beginnen met het bepalen van het verschil tussen $r1$ en $r2$. Eventueel ook tussen $r2$ en $r3$, enz.
U vestigt dan echter wel sterk de aandacht op de zojuist beschreven aanpak, waarbij elke volgende rij getallen in het getallenblok beschouwd wordt als ontstaan uit de voorafgaande rij door daarin elk getal met een vast 'bedrag' te vermeerderen.

---
[1]) Naar een *idea* uit 'The arithmetic teacher'.



▶ VERMENIGVULDIGEN EN DELEN (2)

In *werkblad 12* komen we nog eens terug op de patronen van tafelprodukten in het honderdveld. We zoeken met de leerlingen naar een verklaring voor bepaalde verschijnselen.

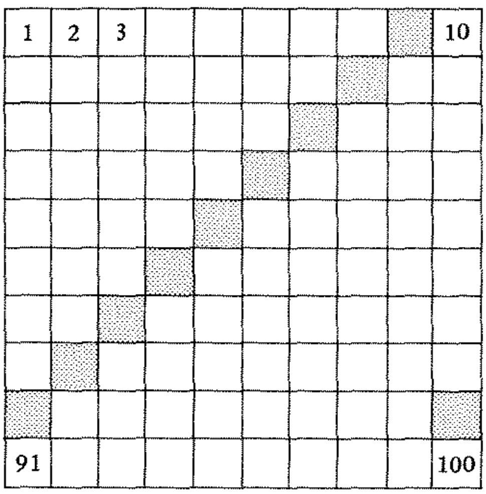


fig. 20

▶ Hoe komt het, dat de antwoorden van de tafel van negen zo mooi op één (schuine) lijn staan?

Het idee '9' op te vatten als '10 − 1' brengt hen een heel eind verder.

▶ Hoe zou het patroon nog verder gaan, als we een tweehonderdveld genomen hadden?

Werkblad 12 kan het startpunt vormen van een onderzoek naar het antwoord op de vraag:

▶ Zou je op de een of andere manier aan een getal kunnen zien, wanneer het in de tafel van negen zit?

In de opdrachten van het werkblad wordt naar zoiets bizonders gevraagd.

▶ Zet het waargenomen verschijnsel zich voort bij getallen boven de 90?

Van de eerste ontdekking, dat de cijfers in een negenvoud samen weer deelbaar door negen zijn, tot aan het volledig doorgronden van het deelbaarheidskenmerk voor negen, is nog een hele stap. Enkele tussenstappen daarbij:

- het splitsen van het getal naar de plaatswaarde van de cijfers, waaruit het is opgebouwd:

$$\begin{aligned} 12321 = 10000 &+ \\ 2000 &+ \\ 300 &+ \\ 20 &+ \\ 1 &\ ; \end{aligned}$$

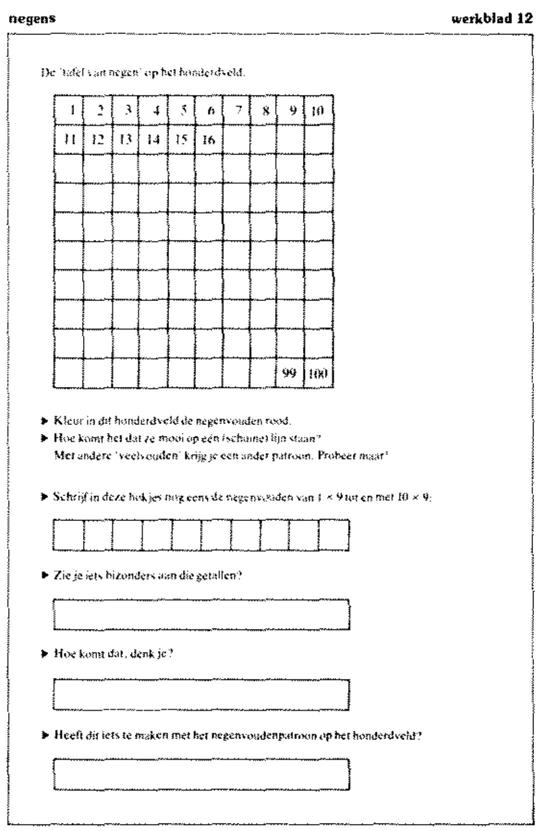
- het delen van elk van de verkregen getallen door negen en het vaststellen van de rest:

$$\begin{aligned} 10000 : 9 &= 1111 \text{ rest } 1 \\ 2000 : 9 &= 222 \text{ rest } 2 \\ 300 : 9 &= 33 \text{ rest } 3 \\ 20 : 9 &= 2 \text{ rest } 2 \\ 1 : 9 &= 0 \text{ rest } 1; \end{aligned}$$

- het vaststellen, dat dus in dit geval:

$$12321 = (1111 + 222 + 33 + 2 + 0) \times 9 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1.$$

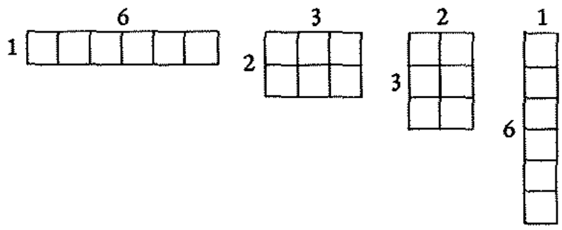
Als dus die resten ook samen deelbaar zijn door negen, dan ...



schrappen in het tweehonderdveld (werkblad 13)

Als instap tot dit werkblad kan *werkblad 10* dienen.

Na een inleiding kan dit blad ook rechtstreeks worden aangeboden. Die inleiding zou bijvoorbeeld kunnen bestaan uit het bedenken van zoveel mogelijk (verschillende) tegelvloertjes van een bepaald aantal tegels ('6'):



Zijn eenmaal alle tegelvloertjes van zes tegels gevonden, dan weten de leerlingen meteen door welke getalletjes zes gedeeld kan worden, namelijk {1, 2, 3, 6}. Hierbij vallen één en zes door de mand als twijfelachtige delers. Immers, je kunt élk getal door één en door dat getal zelf delen.

We onderzoeken vervolgens de mogelijke tegelvloertjes voor de getallen 11 en 12 en voor bijvoorbeeld 23 en 24. Al gauw blijkt, dat voor 11 en 23 alleen maar vloertjes met een breedte van één tegel mogelijk zijn. Dit komt omdat 11 en 23 uitsluitend 'twijfelachtige' (d.i.: onechte) delers hebben. Zulke getallen heten *priemgetallen*. Bij 12 en 24 blijken meer mogelijkheden te bestaan.

Inventarisatie achteraf resulteert in:

- bij priemgetallen kun je alleen maar tegelvloertjes met een breedte van één tegel maken (priemgetallen hebben uitsluitend onechte delers);
- als je bij de tegelvloertjes aan de oppervlakte van rechthoeken denkt, kun je het ook als volgt (systematisch) opschrijven:

12
1 x 12 ↑
↓ 2 x 6
3 x 4

het lezen van de getallen in de richting van de pijl geeft dan precies alle delers van het getal

Na een dergelijke aanloop verwerken de leerlingen *werkblad 13*.

Hierbij zijn verschillende oplossingswegen denkbaar.

Bijvoorbeeld:

- voor elk getal opnieuw uitzoeken hoe het zit met de tegelvloertjes;
- systematisch schrappen van alle veelvouden van twee, drie, enz.

Een interessante, maar moeilijke vraag is hierbij: hoe ver moet je gaan, om zeker te weten dat ...?

Wel, het schrappen van alle veelvouden van priemgetallen tot 15 blijkt voldoende. Stel namelijk, dat er nog een getal met een deler groter dan 15 in het tweehonderdveld zou staan, dat nog niet geschrapt was. Dit getal zou dan ook een deler kleiner dan 15 bevatten (het produkt van beide delers mag immers de 200 niet overtreffen!). Die kleinere deler is inmiddels echter al aan de beurt geweest. Het is dus onnodig de schrapprocedure verder dan tot veelvouden van 13 vol te houden. 14 en 15 of veelvouden daarvan zijn bij resp. twee of zeven (2 x 7 = 14) en drie of vijf (3 x 5 = 15) reeds aan de beurt geweest.

schrappen in het tweehonderdveld — **werkblad 13**

▶ Streep alle deelbare getallen door.

▶ Geef de vakjes met een priemgetal een licht kleurtje.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	127	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

▶EEN ALLEGAARTJE (3)

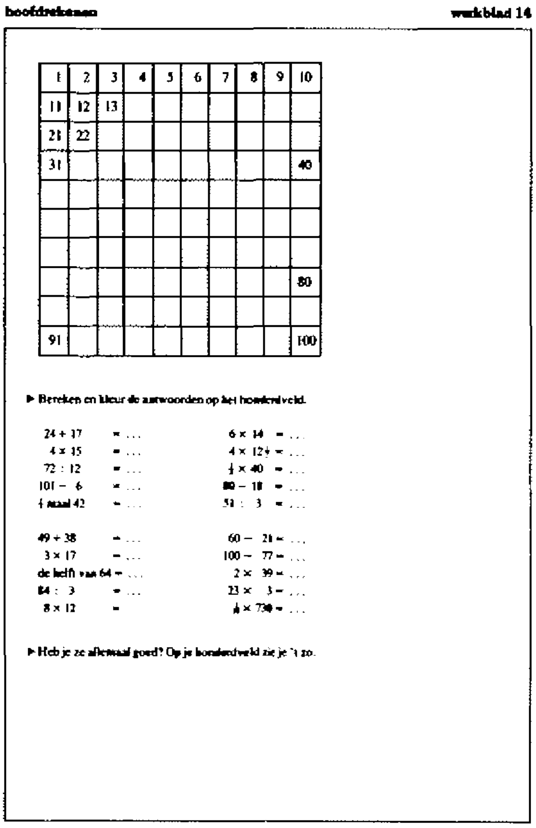
In de inleiding werd al gesteld, dat het honderdveld benut kan worden als vormgever van bepaalde oefeningen.

Daarvan geven we in de *werkbladen 14, 15* en *16* nog drie voorbeelden, die we zonder verder kommentaar vermelden.[1])

Vooral *werkblad 14* maakt duidelijk, dat alle gebieden van het rekenen in principe aan bod kunnen komen, als we het honderdveld op deze wijze als oefenstoffering benutten. Een waarschuwing voor overdaad is hier overigens op haar plaats.

---

1) Werkblad 16 ontlenen we aan 'Taltaal' (uitg. Dijkstra, zeist).

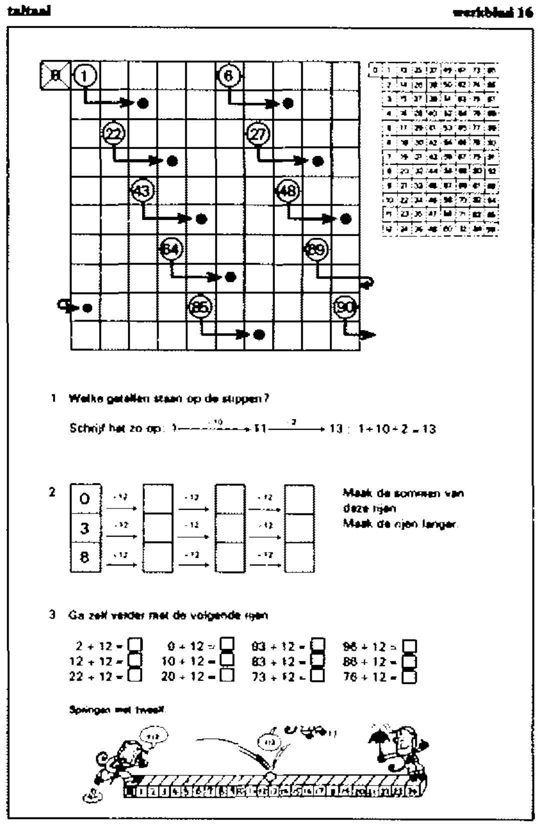

hoofdrekenen — werkblad 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13							
21	22								
31									40
									80
91									100

▶ Bereken en kleur de antwoorden op het honderdveld.

24 + 17 = ...	6 × 14 = ...
4 × 15 = ...	4 × 12½ = ...
72 : 12 = ...	½ × 40 = ...
101 − 6 = ...	80 − 18 = ...
½ maal 42 = ...	51 : 3 = ...
49 + 38 = ...	60 − 21 = ...
3 × 17 = ...	100 − 77 = ...
de helft van 64 = ...	2 × 39 = ...
84 : 3 = ...	23 × 3 = ...
8 × 12 = ...	¼ × 730 = ...

▶ Heb je ze allemaal goed? Op je honderdveld zie je 't zo.


taltaal — werkblad 16

1 Welke getallen staan op de stippen?

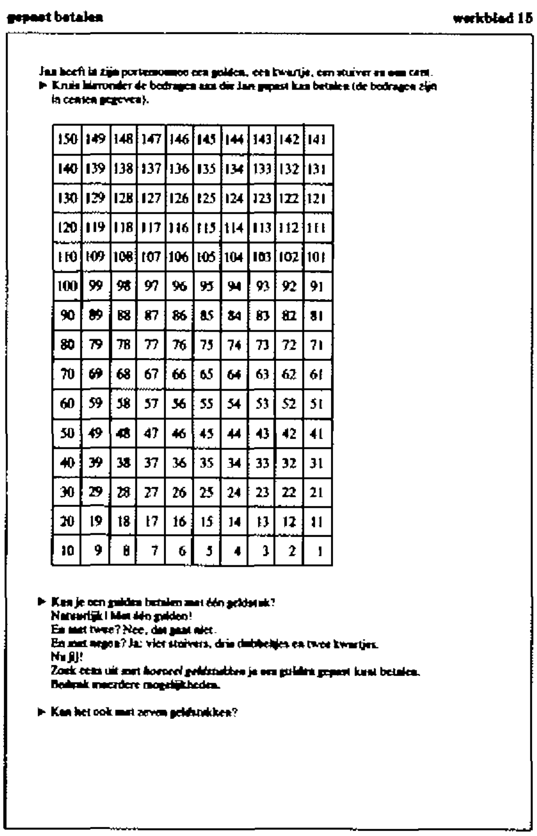
Schrijf het zo op: 1 ——10——▸ 11 ——2——▸ 13 ; 1 + 10 + 2 = 13

2 Maak de sommen van deze rijen. Maak de rijen langer.

3 Ga zelf verder met de volgende rijen

2 + 12 = ☐	0 + 12 = ☐	93 + 12 = ☐	96 + 12 = ☐
12 + 12 = ☐	10 + 12 = ☐	83 + 12 = ☐	86 + 12 = ☐
22 + 12 = ☐	20 + 12 = ☐	73 + 12 = ☐	76 + 12 = ☐

Springen met twaalf


gepast betalen — werkblad 15

Jan heeft in zijn portemonnee een gulden, een kwartje, een stuiver en een cent.
▶ Kruis hieronder de bedragen aan die Jan gepast kan betalen (de bedragen zijn in centen gegeven).

150	149	148	147	146	145	144	143	142	141
140	139	138	137	136	135	134	133	132	131
130	129	128	127	126	125	124	123	122	121
120	119	118	117	116	115	114	113	112	111
110	109	108	107	106	105	104	103	102	101
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

▶ Kan je een gulden betalen met één geldstuk?
Natuurlijk! Met één gulden!
En met twee? Nee, dat gaat niet.
En met negen? Ja: vier stuivers, drie dubbeltjes en twee kwartjes.
Nu jij!
Zoek eens uit met hoeveel geldstukken je een gulden gepast kunt betalen.
Bedenk meerdere mogelijkheden.

▶ Kan het ook met zeven geldstukken?

TOT SLOT (4)

U zult bij het lezen misschien wel eens verzucht hebben: ja, maar dit heeft toch niets meer met oefenen te maken!
De vraag is dan, wat oefenen eigenlijk is.
Natuurlijk valt daaronder het doen van een hoeveelheid roetinetraining, volgens een vast stramien — bijvoorbeeld: rijtjes maken —. Als dit oefenen de overhand krijgt, blijft er dan nog wel voldoende gelegenheid over voor het werken aan de houding van de leerlingen? Een houding, die van belang is bij:

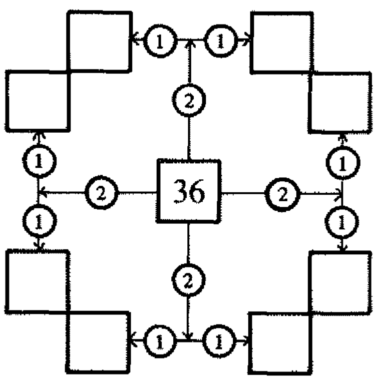
- het aanpakken van opgaven?
- het nagaan van mogelijkheden;
- het meedenken met oplossingen van anderen;
- het kritisch kontroleren van gegevens en uitkomsten;
- ...

Laten we niet veel van deze mogelijkheden onbenut als we het trainingsaspekt eenzijdig benadrukken?

We menen met het bovenstaande zowel voor degenen, die groot belang hechten aan het pure oefenen als voor hen, die vinden dat het rekenen ook bij het oefenen een mentaal kreatief element en zo mogelijk sociale en/of emotionele aspekten dienen te bevatten, enige bouwstenen te hebben aangedragen.

1	2	3							10
									100

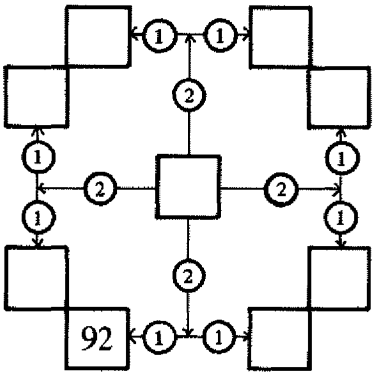
▶ Vul de ontbrekende getallen in.



▶ Welke opgaven horen erbij? Maak het rijtje af:

36 + 20 − 1 = . . .
36 + 20 + 1 = . . .

▶ Vul de getallen in:



▶ Schrijf ook hier de opgaven bij. Maak het rijtje af:

92 + . . . − . . . = . . .

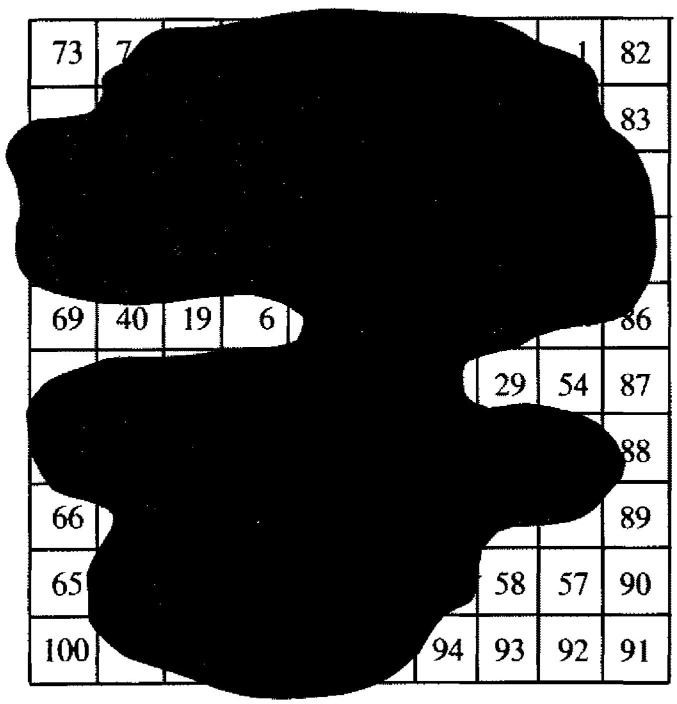
. . . + 20 − 1 = 92.

100	99	98	97	96	
90	89	88	87	86	
80	79	78			
70	69				
60					

▶ Een paardesprong komt uit op $\boxed{78}$. Waar begon die sprong?

▶ Zijn er meer sprongen mogelijk?

▶ Zoek zoveel mogelijk goede sprongen en bedenk de sommen erbij.



► Wat zit er achter?

73	7							1	82
									83
69	40	19	6						86
							29	54	87
									88
66									89
65							58	57	90
100						94	93	92	91

handig optellen **werkblad 11**

r_1	1	2	3	4	5
r_2	10	9	8	7	6
r_3	11	12	13	14	15
r_4	20	19	18	17	16
r_5	21	22	23	24	25
r_6	30	29	28	27	26

Afspraak: $r_1 + r_2$ betekent, de getallen in de eerste en tweede rij optellen.

▶ Bereken: $r_1 + r_2$: . . .
$r_2 + r_3$: . . .
$r_3 + r_4$: . . .
$r_5 + r_6$: . . .
$r_1 + r_2 + r_3 + r_4$: . . .
$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6$: . . .

r_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_2	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
r_3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
r_4	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
r_5	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
r_6	60	59	58	57	56	55	54	53		
r_7	61	62	63	64	65					
r_8	80	79	78							
r_9	81	82	83							
r_{10}	100	99								

▶ Bereken: $r_1 + r_2$: . . .
$r_3 + r_4$: . . .
$r_5 + r_6$: . . .
$r_7 + r_8$: . . .
$r_9 + r_{10}$: . . .
De som van de getallen 1 tot en met 100: . . .

▶ Streep alle deelbare getallen door.

▶ Geef de vakjes met een priemgetal een licht kleurtje.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	127	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Jan heeft in zijn portemonnee een gulden, een kwartje, een stuiver en een cent.

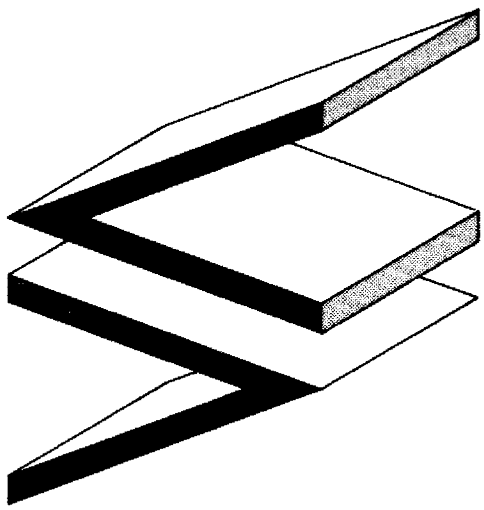
▶ Kruis hieronder de bedragen aan die Jan gepast kan betalen (de bedragen zijn in centen gegeven).

150	149	148	147	146	145	144	143	142	141
140	139	138	137	136	135	134	133	132	131
130	129	128	127	126	125	124	123	122	121
120	119	118	117	116	115	114	113	112	111
110	109	108	107	106	105	104	103	102	101
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

▶ Kun je een gulden betalen met één geldstuk?
Natuurlijk! Met één gulden!
En met twee? Nee, dat gaat niet.
En met negen? Ja: vier stuivers, drie dubbeltjes en twee kwartjes.
Nu jij!
Zoek eens uit met *hoeveel geldstukken* je een gulden gepast kunt betalen.
Bedenk meerdere mogelijkheden.

▶ Kan het ook met zeven geldstukken?

berichten



pakketjes voor het kleuteronderwijs

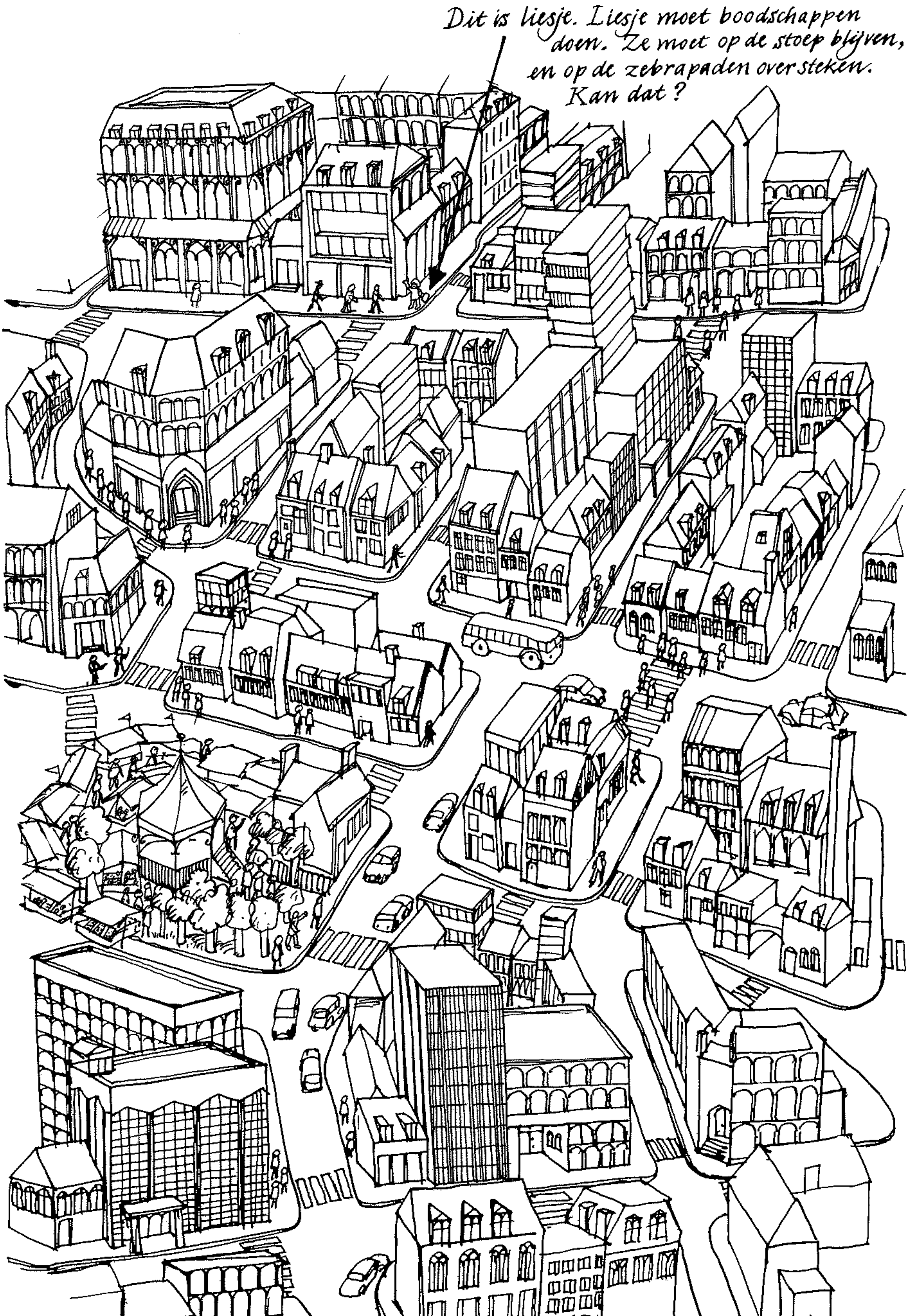
In de kleuterschool zijn tijdens de oriëntatieperiode van de afgelopen twee jaar vele beschrijvingen tot stand gekomen aan de hand van observaties van allerlei spelaktiviteiten. Deze observaties zijn geïnterpreteerd en geanalyseerd in matematische en non-matematische aktiviteiten.
Vanuit deze gegevens is getracht momenten aan te geven, waarin het matematische aspekt samen met de overige ontwikkelingsaspekten – een scheiding is zeer zeker niet gewenst in het kleuteronderwijs – aan bod kan komen.
Deze didaktische situaties dienen om op zinvolle wijze de kleutererváring aan te pakken en in haar ontwikkeling te stimuleren.
Er is een bundel van vijf pakketjes samengesteld:
– prikkeltjes voor wiskunde;
– bouwaktiviteiten;
– patronen;
– kinderpraat;
– spelen is beleven.
De pakketjes kunnen besteld worden bij het iowo, *tiberdreef 4, utrecht.*
De prijs van deze bundel bedraagt f 10,–.

ROB DE JONG

de kamping
Het schoolradioprojekt *de kamping* dat in samenwerking door *iowo* en *ncrv* gerealiseerd is, is geweldig aangeslagen.
Meer dan 16.000 leerlingen van ca 450 scholen hebben deelgenomen. Het projekt wordt in februari/maart 1979 herhaald. Een onderzoek naar de waardering en effekten is in uitvoering.

rekenkalender
Klachten over 'de' rekenvaardigheid van onze leerlingen in de brugklassen van het voortgezet onderwijs (van *lbo* tot *vwo*) zijn niet van vandaag of gisteren. Een van de redenen van deze klachten schuilt in de aansluitingsproblematiek van 'het' rekenonderwijs naar 'het' wiskundeonderwijs. Wie de wiskunde-, natuurkunde- en handelsrekenboeken van de brugklassen doorbladert, kan konstateren dat – op z'n vroegst – anderhalf jaar na afname van de *cito-* (of andere) toets weer echt een beroep op het rekenen wordt gedaan.
Het *iowo* heeft gemeend iets aan deze diskontinuïteit te moeten doen en heeft daartoe een weekkalender samengesteld. In deze kalender staat voor elke week een probleem – of idee – dat aanleiding kan geven tot 'gewoon rekenen'.
Hoewel de kalender, lopend van augustus 1978 tot augustus 1979, gericht is op het onderwijs in de brugklassen, menen wij dat hij ook goede diensten kan bewijzen voor de zesde klassen van het basisonderwijs.
De kalender is te bestellen bij het *iowo*. De prijs is *f* 12,50.

leerplanontwikkeling onderweg
De afdeling wiskivon (*wisk*unde *i*n het *v*oortgezet *on*derwijs) van het *iowo* is al enige jaren bezig met de ontwikkeling van een schoolwerkplan wiskunde voor leerlingen van twaalf tot zestien jaar.
Van de stand van zaken betreffende dit leerplanontwikkelingswerk (tot nu toe in de eerste twee leerjaren van het voortgezet onderwijs) wordt verslag uitgebracht in een nieuwe brochure *leerplanontwikkeling onderweg*. Dit boek verschijnt met tussenpozen van een half jaar in vier afleveringen. Het eerste deel is in oktober 1977 gereed gekomen. In dit deel wordt mede aan de hand van een tweetal lesprotokollen iets verduidelijkt van de visie van het *iowo* op wiskundeonderwijs.
De hoofdmoot wordt gevormd door het zogenaamde *vierbaansboek autowegen*, een beschrijving van onderwijs vanuit vier invalshoeken en een hoofdstuk waarin de rol van enkele werkvormen beschreven wordt.


Dit is Liesje. Liesje moet boodschappen doen. Ze moet op de stoep blijven, en op de zebrapaden oversteken. Kan dat?