wiskobas bulletin

rubriekdeel

jaargang 5 nr 4
april 1976

(met afzonderlijk leerplandeel)

WISKOBAS-BULLETIN (rubrieken)
– bulletin ter begeleiding van het wiskunde-onderwijs
– verschijnt gedurende de vijfde jaargang 6 keer.

Jaargang 5 nr. 4 – april 1976
Met afzonderlijk leerplandeel

Redaktieadres
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht
t.a.v. Sylvia Pieters (adm.) of Rob de Jong (kopij)

Abonnementenadministratie
STICHTING IVIO,
Postbus 37, Lelystad.
Voor aanmeldingen, adreswijzigingen, betalingen, enz.

Abonnementsprijs
Per jaargang *f* 40,–.
Reduktietarief voor studenten P.A. en wiskobas-kursisten *f* 30,–.
Gelieve uitsluitend te betalen met aksept-girokaarten. Deze worden u toegezonden.

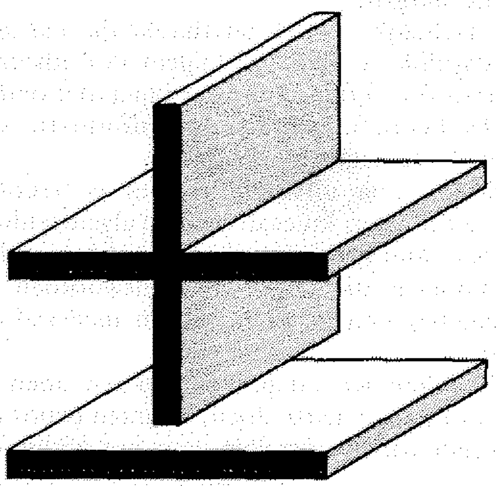
INHOUD

Aan de vraag naar volledige oude jaargangen van het Wiskobas-Bulletin kunnen we helaas niet meer voldoen. Verschillende nummers zijn uitverkocht.
Van de volgende afleveringen is nog een beperkt aantal eksemplaren verkrijgbaar:

jaargang 2, nr. 6	– *f* 7,50
jaargang 3, nr. 2	– *f* 7,50
jaargang 3, nr. 3	– *f* 7,50
jaargang 3, nr. 4/5	– *f* 7,50
jaargang 4, nr. 2	– *f* 7,50
jaargang 4, nr. 5	– *f* 7,50
jaargang 5, nr. 1	– *f* 10,—
jaargang 5, nr. 2	– *f* 25,—

Alleen na ontvangst van uw storting op postgirorekeningnummer 3105662 t.n.v. R.U.-IOWO te utrecht, zal u de gewenste aflevering worden toegezonden.

redaktioneel



GENERALISEREN

Vanuit de verte lijken alle onderwijzers op elkaar. Bij chinezen of amsterdammers of friezen of badgasten is het precies zo.
Op een afstandje kun je dan ook — zonder wetensbezwaren — zeggen: de *onderwijzer is ...,* het *onderwijs wil ...,* iedere *onderwijzer kan ... Net zoals je uitspraken kunt doen over* de *chinees,* de *amsterdammer,* de *fries,* de *badgast.*
Voorwaarde is wel, dat je niet te dicht in de buurt komt, want dan ontstaan problemen. Je merkt dat niet iedere onderwijzer achterlijk (of begaafd) en niet iedere student lui (of vlijtig) is. Nochtans, ook 'halverwege' wordt nog stevig geoordeeld: voor wat betreft het wiskundeonderwijs blijven ze stom; ze snappen er niets van; apen wiskobas na ... met uitzondering van marie (een goede bekende), want die onderwijst de wiskunde met verstand.
Nog dichterbij — en nu eindelijk in de school — blijken de verschillen binnen de groep onderwijzers zo groot, dat je 't lef niet meer hebt om 'typerende' oordelen te vellen. Alle variëteiten van de soort zijn in de beroepsgroep vertegenwoordigd. 'De frik' is wel een heel ekstreem en maar zelden aan te treffen 'typetje'.

ROB DE JONG

Op een afstand lijkt het nationale onderwijsbemoeikorps (schoolbegeleiders, inspekteurs, onderwijsopleiders, onderwijsonderzoekers,...) één pot nat. Ook hier kun je, vanuit de verte, met het grootste gemak zeggen: het korps is weinig praktisch, kent 't échte onderwijs niet (meer), is praterig, zorgelijk.
Halverwege blijkt niet iedere begeleider twee linkerhanden te hebben en niet iedere inspekteur een idealist. Nochtans, opnieuw zijn de oordelen niet van de lucht: voor wat betreft het wiskundeonderwijs blijven ze vreemdelingen; ze kennen de problemen niet; reiken geen oplossingen aan en praten maar wat ... behalve mijnheer de bruin (een oud-kollega) die je vaak een flink stuk in de goede richting helpt. Nog dichterbij ... enfin, u kent het verhaal nu wel. 'Prikkebenen' blijken zelden voor te komen in het korps.

Twee werelden! En in die werelden doet ieder zijn best. *Binnen* deze werelden vindt onderlinge waardering plaats, veelal op terechte gronden. Maar ... de relaties *tussen* die werelden zijn nogal eens stroef. Hier en daar is vooringenomenheid ten aanzien van personen en instituten duidelijk te konstateren. Het werk in de andere wereld is alleen van buitenaf (dus: opper-vlakkig) bekend, de arbeidsverhoudingen zijn niet direkt doorzichtig, de werktijden ...
Vooroordelen liggen dan voor de hand. De meest bizarre generalisaties en vertekeningen worden tijdens lunchpauzes als wijsheden verkocht. Op grond van één enkele ontmoeting in één specifieke situatie wordt gegeneraliseerd naar het gedrag van *de* soort in *alle* situaties. En door deze generalisaties worden heel wat oplossingswegen geblokkeerd. Zo ook in onderwijsland! Zo ook bij wiskobas, al doen we ons best om zoveel mogelijk te nuanceren.

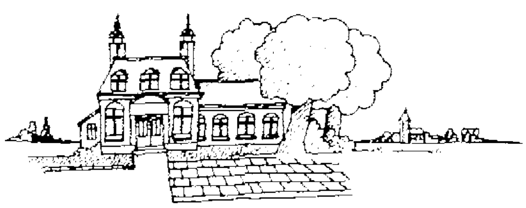
een voorbeeld

Vrijwel dagelijks wordt gevraagd: welke metode adviseert wiskobas? De vragensteller is uitsluitend tevreden met een kort ondubbelzinnig antwoord: neem de metode 'wiskunde ter land, ter zee en in de lucht'; da's de beste!
Een dergelijk advies is echter onverantwoord. Immers, 'een beste metode' voor *de* nederlandse school is even onbestaanbaar als 'een beste automobiel' voor *de* nederlandse autorijder.
De vraag behoeft toelichting, een wedervraag is nodig.
'Vertelt u eens het een en ander over uw school, uw team, uw leerlingen.'
Of — aan de automobilist: 'Waar stelt u prijs op: veiligheid, komfort, snelheid, uiterlijk?

Waartoe gebruikt u de auto: zakenreizen, winkelen in de stad, vakantietochten?'
De sterke en zwakke punten van de verschillende produkten (in deze prijsklasse) kunnen vervolgens beschreven worden; eventueel wordt hieraan een koopadvies gekoppeld: gezien uw voorkeur voor snelheid en mede gelet op het gebruik dat u van de auto denkt te maken, ligt type ... van merk ... voor de hand. De beslissing blijft echter — hoe dan ook — bij de koper liggen. Wellicht slaat hij — na een proefrit — het gegeven advies in de wind en is hij later bizonder gelukkig met de (objektief gezien) 'verkeerde' keus.

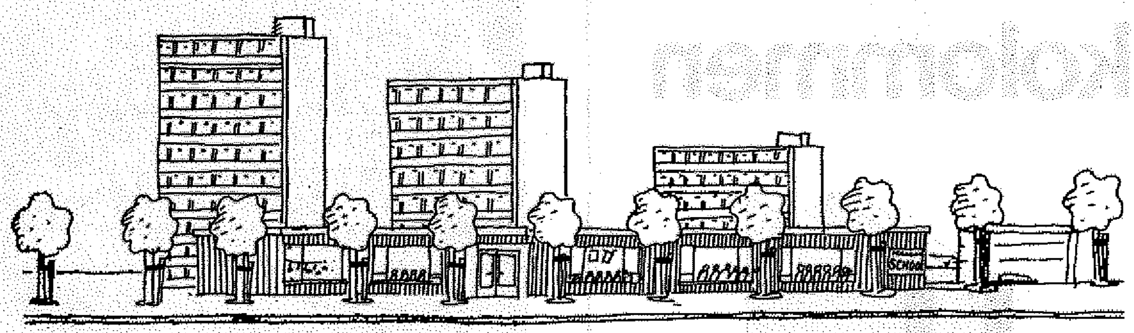
Bij metoden ligt het nog ingewikkelder dan bij auto's. Bij auto's weet je tenminste waarop je moet letten. Dit is bij metoden veel minder doorzichtig. Generaliserende oordelen kunnen hier dan ook ongelooflijk veel kwaad doen. Hoe 'ondoorzichtiger' het onderwerp, hoe sneller de ontvanger van voorlichting geneigd is om zijn beslissing helemaal te laten bepalen door het verstrekte advies. En dat is levensgevaarlijk!

plannen voor wiskundeonderwijs
Gezien de geringe kennis omtrent de punten waarop reken/wiskundemetoden dienen te worden bekeken, lijkt het een hachelijke zaak om er toch aandacht aan te besteden in de komende jaargang.
Hoe hachelijk ook, als onafhankelijk instituut dat dagelijks vragen om (algemene) adviezen te verwerken krijgt, kun je er bijna niet onderuit. De behoefte aan dit soort informatie is te groot om te negeren.
Nochtans ... na uitvoerig overleg is besloten om hierbij geen knieval voor de algemeenheid te doen! Met generalisaties, die onherroepelijk voortvloeien uit (algemene) antwoorden op (algemene) vragen, is in wezen niemand gediend.
Toch zullen we uitspraken moeten doen en ook van ganser harte doen, waaraan teams die een plan willen opstellen voor het wiskunde-



Wij hebben geen heroriëntering gehad. Daarvoor zitten we te ver van een aktieve p.a. Verder hebben we ook geen mogelijkheden om begeleid te worden door een dienst. Niemand in het team is opgeleid à la wiskobas.
De afgelopen jaren zijn we erg druk bezig geweest met wereldoriëntatie en met een andere opzet voor de musische vakken. Een en ander is voorlopig afgerond en zal de komende tijd niet al onze ernergie vragen.
Het rekenonderwijs staat nu op het programma. Als team zijn we bereid om zo'n twee à drie jaar lang onze wekelijkse besprekingen aan dit vak te wijden. Deze besprekingen lopen nogal eens uit en zijn vaak echte werkavonden waarop we met elkaar materialen maken. We maken nu gebruik van de metode ...
Eigenlijk willen we het rekenen wat meer 'fleur' geven, zodat de leerlingen (en ook wijzelf) er gemotiveerder mee aan de gang gaan.
Geen van de teamleden is een kei in het vak.
Wat dacht u: **moeten we een andere metode nemen of kunnen we beter maar wat gaan rommelen op vrijdagmiddagen met losse spullen?**
Te uwer informatie dient nog: na zo'n drie jaar willen we echt klaar zijn met het rekenen, want dan komen de leesvormen aan de beurt.

Wij hebben indertijd met veel plezier een heroriënteringskursus van wiskobas gevolgd. Enkele onderwerpen hebben we met het team uitgebreid besproken en op school ingevoerd: stadsplan, spijkerbord, meten. Zo langzamerhand zijn deze onderwerpen gemeengoed geworden, zowel voor ons als voor de leerlingen. In het algemeen stellen we er prijs op om zèlf stukjes onderwijs te bedenken, leerstoflijnen uit te zetten, enzovoort. Zo nodig vragen we steun aan de begeleidingsdienst ter plaatse. Toch moet er nu iets gaan gebeuren en wel om twee redenen. Allereerst: genoemde onderwerpen staan te los van het overige rekenprogramma; èchte inpassing is ons eigenlijk niet gelukt. Ten tweede: onze metode ... moet vervangen worden; alle plakbandjes van de hele wereld kunnen de bladzijden niet nog een jaar bij elkaar houden.
Vraag: **welke metode — en er mag best flink wat 'moderne wiskunde' in zitten — raadt u ons aan?**
Wij stellen als voorwaarde dat we een metode helemaal naar onze eigen hand moeten kunnen zetten; we willen daarvoor ook tijd uittrekken. Het 'slaafs volgen' van een metode is voor geen der teamleden interessant.



Misschien komen we wat negatief bij u over. We zijn als school al enige jaren bezig om 'goede' oplossingen te zoeken voor het differentiatieprobleem. We hebben bepaalde programmaonderdelen in nivokursussen ondergebracht. Er zijn leesmoeders en rekenvaders. We hebben kerntaken, verrijkingstaken en herhalingstaken. Kortom, er wordt heel wat georganiseerd op school.
Voor de inhoud van een vak als rekenen heeft geen der teamleden veel belangstelling: of je de breuken nu met een breukenrad of met een breukenstaaf aanleert, het is o.i. allemaal lood om oud ijzer. Het probleem is nu dat de ouderkommissie met oud papier-akties geld heeft verzameld en dit graag wil besteden voor een nieuwe rekenmetode. Wij staan daar ook wel achter. De metode die we nu hebben is sterk verouderd (sinaasappelen kosten in deze metode nog 1 cent) en nogal eksklusief 'sommenmakerig'.
Wat voor metode acht u voor onze school geschikt?
Tijd om uitgebreid en kontinu in het team over rekenen te delibereren, is er niet.

onderwijs op hun school, steun hebben. We menen dat het broodnodig is. Enig tegenspel met betrekking tot de soms wonderlijke argumentaties van kommerciële zijde is geboden. Het zal de lezer inmiddels wel duister aan 't worden zijn: geen knieval ... toch uitspraken ...?? Nogmaals: we zullen niet voor de verleiding zwichten – en die verleiding is groot, want in één slag zouden we *het* nederlandse onderwijs duidelijkheid kunnen geven en aldus aan ons verplichten – om te zeggen dat '*deze* metode voor *de* nederlandse basisscholen de beste is'.

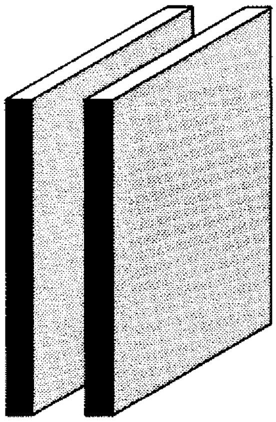
Wel zullen we, binnen het kader van het maken van een plan voor wiskundeonderwijs, zoals die aangevat is en wordt door teams, adviezen geven. Hun ervaringen en wensen hieromtrent zullen de uitgangspunten van besprekingen vormen. Bijvoorbeeld over de wijze waarop heel rustig aan met het algoritmeprogramma – zie leerplanpublikatie 2 – in de middenbouw kan worden gewerkt: hoe begin je? wat laat je weg? welke konsekwenties voor andere onderdelen? gevolgen in latere leerjaren? welke metode 'past' het best? enz. Of over een ander kernprobleem, waarmee vrijwel iedereen zit: hoe kun je 'het oefenen' anders aanpakken?

Leergangen en metoden komen dus niet abstrakt, los van een onderwijswerkelijkheid aan de orde. Een speciaal (uitneembaar) katern over planning van wiskundeonderwijs in de basisschool, zal daartoe in de groene delen (rubriekdelen) worden opgenomen. Dat we in deze katerns ook voor een belangrijk deel afhankelijk zijn van uw respons, hoeft geen nader betoog.

zesde jaargang
In de zesde jaargang zullen verschijnen:
- drie rubriekdelen, verschijnend in september 1976, januari 1977 en mei 1977;
- drie leerplandelen, verschijnend in november 1976, maart 1977 en augustus 1977.

Dubbelnummers willen we niet bij voorbaat uitsluiten. In de zesde jaargang zult u in totaal zo'n 500 pagina's tegemoet kunnen zien. De rubriekdelen zullen naast de bekende artikelen, enige nieuwe rubrieken bevatten. Tevens zullen in deze delen speciale 'plankaterns' worden opgenomen (zie boven).
In de leerplandelen zullen – we schreven het reeds in het voorgaande bulletin – zowel werkbladenseries als beschrijvingen van omvangrijker onderwijsgehelen gepubliceerd worden.

kolommen



DE TOREN VAN BABEL

De spijkerschrifttekst in figuur 1 (regel 3-5) luidt, ietwat vrij vertaald:

'Een vierkant van 1 maal 1 is 1, tot 10 maal 10 is 100.
Tel op.
Vermenigvuldig 1 met $\frac{1}{3}$, is $\frac{1}{3}$, 10 met $\frac{2}{3}$ is $\frac{20}{3}$, samen $\frac{21}{3}$, is 7. Vermenigvuldig de 7 met 55, is 385. De som is 385.'

H. FREUDENTHAL

fig. 1

Het is minder kryptisch dan het lijkt. De babylonische schrijver vertelt hoe de som van de eerste tien kwadraten te berekenen:

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100$$
$$= (1 \cdot \tfrac{1}{3} + 10 \cdot \tfrac{2}{3}) \cdot 55.$$

De herkomst van de 1 en de 10 in deze formule zijn duidelijk: de eerste en laatste term van de rij, waarvan de kwadraten opgeteld moeten worden. Maar waar komt de 55 vandaan?
Wel:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$
$$= \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$$

Het is duidelijk dat de schrijver een algemene formule bedoelde:

$$1 + 2^2 + \ldots + n^2 = (\tfrac{1}{3} \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot n)(1 + 2 + \ldots + n)$$
$$= (\tfrac{1}{3} \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot n) \cdot \frac{(n+1)n}{2}.$$

Die formule klopt voor alle natuurlijke getallen n. Dat wist de auteur natuurlijk, maar hoe bewees hij het? Het staat er niet bij, maar je kunt er van alles over gissen.

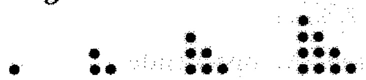
Hetzelfde vraagstuk, met de oplossing ietwat anders geschreven, te weten:

$\frac{1}{3}\{n^2(n+1) + (1+2+\dots+n)\}$,

komt bij de grote griekse wiskundige Archimedes voor, uiteraard mèt bewijs. De formule is op velerlei manieren te bewijzen, maar eer ik verder ga, wil ik de lezer de tijd geven om er zelf over na te denken.

* * *

Een merkwaardig onderwerp uit de wiskunde van de leerlingen van Pythagoras waren de 'figuurgetallen', waaronder allereerst de *driehoeksgetallen:*


, enzovoort.

1 3 6 10

Het n-de driehoeksgetal Δ_n is als som van de eerste n getallen gedefinieerd:

$$\Delta_n = 1 + 2 + \dots + n.$$

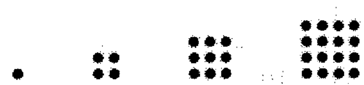
Hoe werk je dat uit?

$$\begin{array}{rcl} \Delta_n &=& 1 \quad + \quad 2 \quad + \dots\dots + \quad n \\ \Delta_n &=& n \quad + (n-1) + \dots\dots + \quad 1 \\ \hline 2\Delta_n &=& (n+1) + (n+1) + \dots\dots + (n+1) = n(n+1). \end{array}$$

Dus:

$$\Delta_n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Natuurlijk zijn er ook de *vierkantsgetallen:*


, enzovoort.

1 4 9 16

Het n-de vierkant $\square_n$ is:

$$\square_n = n^2.$$

Men ziet, zonder berekening, uit de figuur:

$$\square_n = \Delta_n + \Delta_{n-1}.$$

We stappen met de figuren nu de ruimte in. De *kubusgetallen:*

$$\boxdot_n = n^3,$$

zijn nu natuurlijk een koud kunstje.

Aardiger zijn de *pyramidaalgetallen.* Het n-de pyramidaalgetal $\blacktriangle_n$ ontstaat door de eerste n getallendriehoeken op elkaar te stapelen:

$$\blacktriangle_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n.$$

Dus achtereenvolgens:

1, 4, 10, 20, ...

Dit waren dan pyramides met een driehoek als grondvlak. De echte egyptische staan op een vierkant en vierkante pyramidaalgetallen zijn natuurlijk ook te definiëren. We stapelen de eerste n vierkanten op elkaar om het n-de vierkante pyramidaalgetal $\triangle_n$ te verkrijgen, dus:

$$\triangle_n = \square_1 + \square_2 + \dots + \square_n.$$

Wel, dat is (voor $n = 10$) precies het getal van de kleitafel. Vandaar de titel van dit artikel: *'de toren van babel'*, hoewel ik best weet dat de babylonische tempeltorens geen pyramides waren.

We kunnen de vierkante pyramidaalgetallen met de driehoekige in verband brengen. Uit de formule:

$$\square_n = \Delta_n + \Delta_{n-1},$$

volgt immers direkt:

$$\triangle_n = \blacktriangle_n + \blacktriangle_{n-1}.$$

Maar hoe komen we aan een formule voor de driehoekige pyramidaalgetallen?

* * *

Laten we eerst nog eens naar de driehoeksgetallen kijken. Voor het n-de hadden we:

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dus:

$$2\Delta_n = n(n+1),$$

is een rechthoeksgetal van n bij $n+1$, genaamd $\boxed{}_n$.

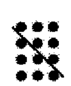


fig. 2

De figuur toont het verband aanschouwelijk.

Voor de ruimte gaan we nu *balkgetallen* definiëren:

$$1{\cdot}2{\cdot}3, \quad 2{\cdot}3{\cdot}4, \quad 3{\cdot}4{\cdot}5, \quad \dots .$$

Algemeen, het n-de balkgetal:

$$\boxminus_n = n(n+1)(n+2).$$

Ik wil nu laten zien dat de n-de balk uit zes n-de driehoekige pyramides bestaat:

$$\boxminus_n = 6\blacktriangle_n.$$

Dit gaat zo: ik kan die balken stapsgewijs laten groeien door er telkens een huid op te plakken. De n-de huid h_n is het verschil:

$$h_n = \boxminus_n - \boxminus_{n-1}.$$

Ietwat schematisch uitgetekend voor $n = 2$ en $n = 3$:

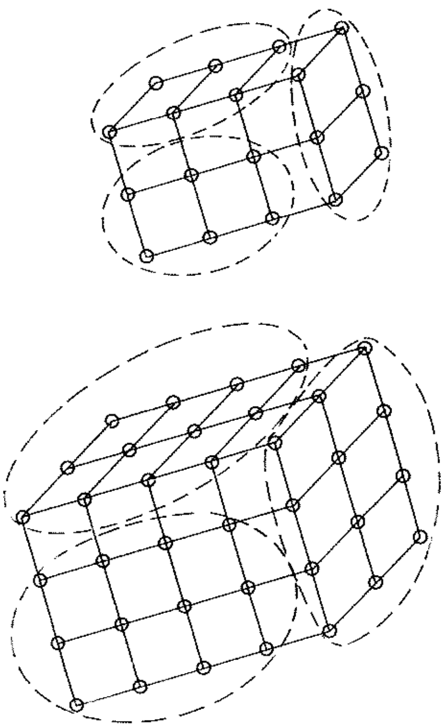


fig. 3

In figuur 3 ziet u meteen de huid in drie n-de rechthoeken (2·3, respektievelijk 3·4) opgesplitst en elk ervan kun je weer in twee n-de driehoeken opgesplitst denken, zodat uiteindelijk de n-de huid is:

$$h_n = 6\Delta_n.$$

Als je dit na elkaar voor alle huiden doet en bij elkaar voegt, krijg je inderdaad:

$$\square_n = 6\blacktriangle_n.$$

Dus het n-de driehoekige pyramidaalgetal is:

$$\blacktriangle_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

We zagen vroeger dat:

$$\Diamond_n = \blacktriangle_n + \blacktriangle_{n-1}.$$

Dus:

$$\Diamond_n = \frac{n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+2)+(n-1)}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1+2n}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

de babylonische formule.
Je kunt dit nog iets anders verkrijgen door te laten zien, dat:

$$\Diamond_n = \frac{1}{4}\blacktriangle_{2n}.$$

Maar dit laat ik aan de lezer over.

Er is nog een andere metode – en misschien deed de babyloniër het op deze manier.
Neem van de n-de vierkante pyramide een opstaand zijvlak. Dat is een n-de driehoek Δ_n. Beschouw de laag naast en parallel met het zijvlak. Dit is een Δ_n waar een Δ_1 aan ontbreekt. De volgende laag is een Δ_n waar een Δ_2 aan ontbreekt, enzovoort. Vul je die lagen aan tot volle Δ_n, dan voeg je een hele $\blacktriangle_{n-1}$ toe en je krijgt:

$$n \cdot \Delta_n = \Diamond_n + \blacktriangle_{n-1}$$

En door de eerste summand op te splitsen:

$$n \cdot \Delta_n = \blacktriangle_n + 2\blacktriangle_{n-1}.$$

Aan beide kanten $2\Delta_n$ optellende:

$$(n+2)\Delta_n = 3\blacktriangle_n,$$

dus:

$$\blacktriangle_{n-1} = \frac{n+1}{3}\Delta_{n-1} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6},$$

waaruit weer als tevoren de uitdrukking voor $\Diamond_n$ volgt.

* * *

Ik wil nog een ander verband leggen. Misschien bent u wel eens de driehoek van Pascal tegengekomen:

```
                  1
               1     1
            1     2     1
         1     3     3     1
      1     4     6     4     1
   1     5    10    10     5     1
1     6    15    20    15     6     1
```

U onderkent dit breipatroon: elk getal is de som van zijn linker- en rechterbovenbuur. Maar tel nu eens langs een schuine lijn op; de meest linkse:

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4;$$

de evenwijdig volgende:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10;$$

nog een verder:

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20.$$

U ziet: de som is gelijk aan het getal rechtsonder de laatste summand. Ik deed het hier voor vier summanden, maar de regel geldt voor willekeurig veel. Hij is gemakkelijk te bewijzen, en wel door zogenaamde volledige induktie.

Stel, je weet dat een schuine rij van k summanden het getal rechtsonder tot som heeft, bijvoorbeeld:

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Voeg er een summand aan toe:

$1 + 2 + 3 + 4 = 6 + 4.$

Dit geeft volgens het breipatroon juist het getal rechtsonder de laatste summand van de nieuwe som.

* * *

Kijk nog eens naar de derde schuine rij van links:

$1, 3, 6, 10, \ldots$.

Dit zijn de driehoeksgetallen. Natuurlijk, we toonden net aan dat bijvoorbeeld:

$10 = 1 + 2 + 3 + 4,$

en dat is de definitie van het vierde driehoeksgetal.
En de vierde schuine rij van links? Natuurlijk de driehoekige pyramidaalgetallen!

* * *

Er is nu een veel eenvoudiger manier om de formule voor het n-de driehoekige pyramidaalgetal te verkrijgen. Het is weer doorbreien, ook induktie genaamd. Voor $m = 1$ is de formule:

$$\triangle_m = \frac{m(m+1)(m+2)}{6},$$

zeker goed. Stel nu, dat hij geldig is met n in plaats van m. Ik moet haar bewijzen voor $n + 1$ in plaats van m. Welnu:

$$\triangle_{n+1} = \triangle_n + \Delta_{n+1},$$

volgens konstruktie van de pyramides. Substitueer voor $\triangle_n$ de aangenomen en voor Δ_{n+1} de bekende waarde:

$$\triangle_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

Dus is de formule inderdaad ook met $n + 1$ voor m juist. Zodoende volgt de formule algemeen.

* * *

Net zo kunt u het met de vierkante pyramides doen:

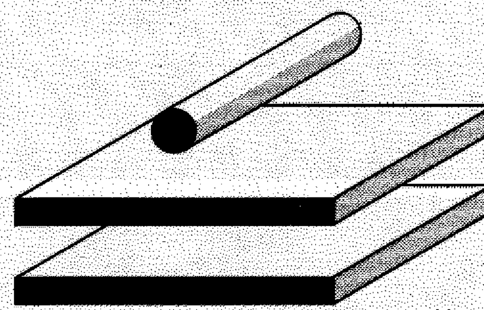
$$\lozenge_{n+1} = \lozenge_n + \square_{n+1},$$

om:

$$\lozenge_m = \frac{1+2m}{3} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$$

te bewijzen.
Maar gaat u dit zelf proberen!

wiskunst



ZWEVINGEN EN ZIJDEN KOUSEN

Deze keer vragen we uw aandacht voor een in de mode en ook in de schilderkunst veel gebruikt effekt: moiré. *Misschien heeft u het al eens gezien, wanneer u twee zijden kousen over elkaar heeft gehouden, of wellicht twee tulen gordijnen.*
Men ziet wel eens stoffen waarop moiréachtige figuren zijn voorgedrukt. Een treurige ontaarding, want het échte van moiré is dat de figuren bij iedere beweging, telkens wanneer zij over elkaar schuiven, snel en sterk veranderen.

F.VAN DER BLIJ

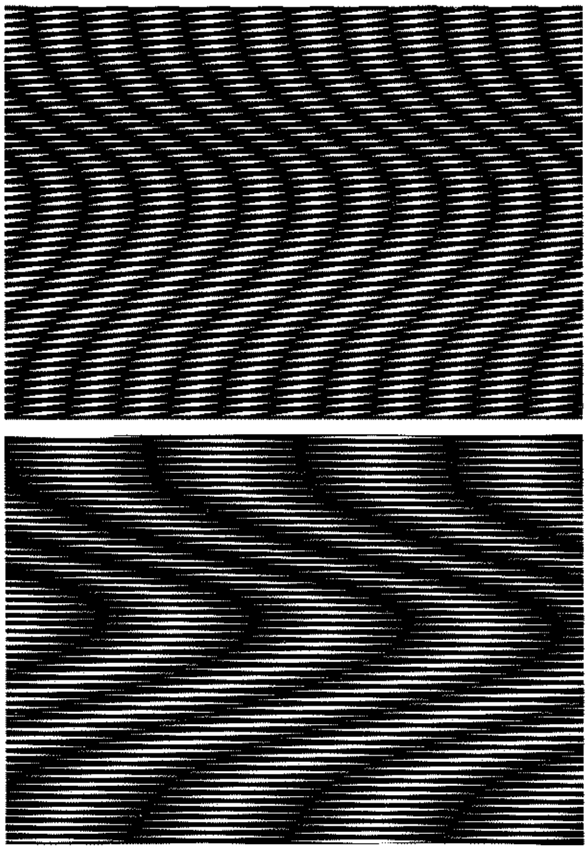


fig. 1

Wanneer u zelf met dit effekt wilt eksperimenteren, kunt u twee stukjes horregaas (met *vierkante* mazen) over elkaar bewegen. Daarna kunt u het proberen met twee stukjes vitrage (eveneens met vierkante mazen). Als dit niet meer boeit, kunt u overstappen op zeshoekige of ruitvormige mazen, of u kunt u verlustigen aan vele mooie affiches waarin ditzelfde effekt gebruikt is.
Erg mooie voorbeelden van een ander (hoger?) type krijgt u door twee paar koncentrische cirkels, op doorzichtig materiaal getekend, over elkaar te bewegen (fig. 2).

We proberen enkele teoretische opmerkingen over moiré te maken. Wiskundig is er waarschijnlijk veel meer over te zeggen en misschien is er wel iemand die er een studie van heeft gemaakt. Maar wat is nu eenvoudiger: dit op te zoeken of zelf aan de slag te gaan? De keus is eenvoudig: geen van beide, maar wel behouden we het voornemen om later nog eens...

In de titel worden naast *zijden kousen* ook *zwevingen* genoemd. Wellicht kent u het verschijnsel. U kunt het waarnemen wanneer bijvoorbeeld uw piano gestemd wordt: twee tonen met bijna dezelfde frekwentie, die gelijk

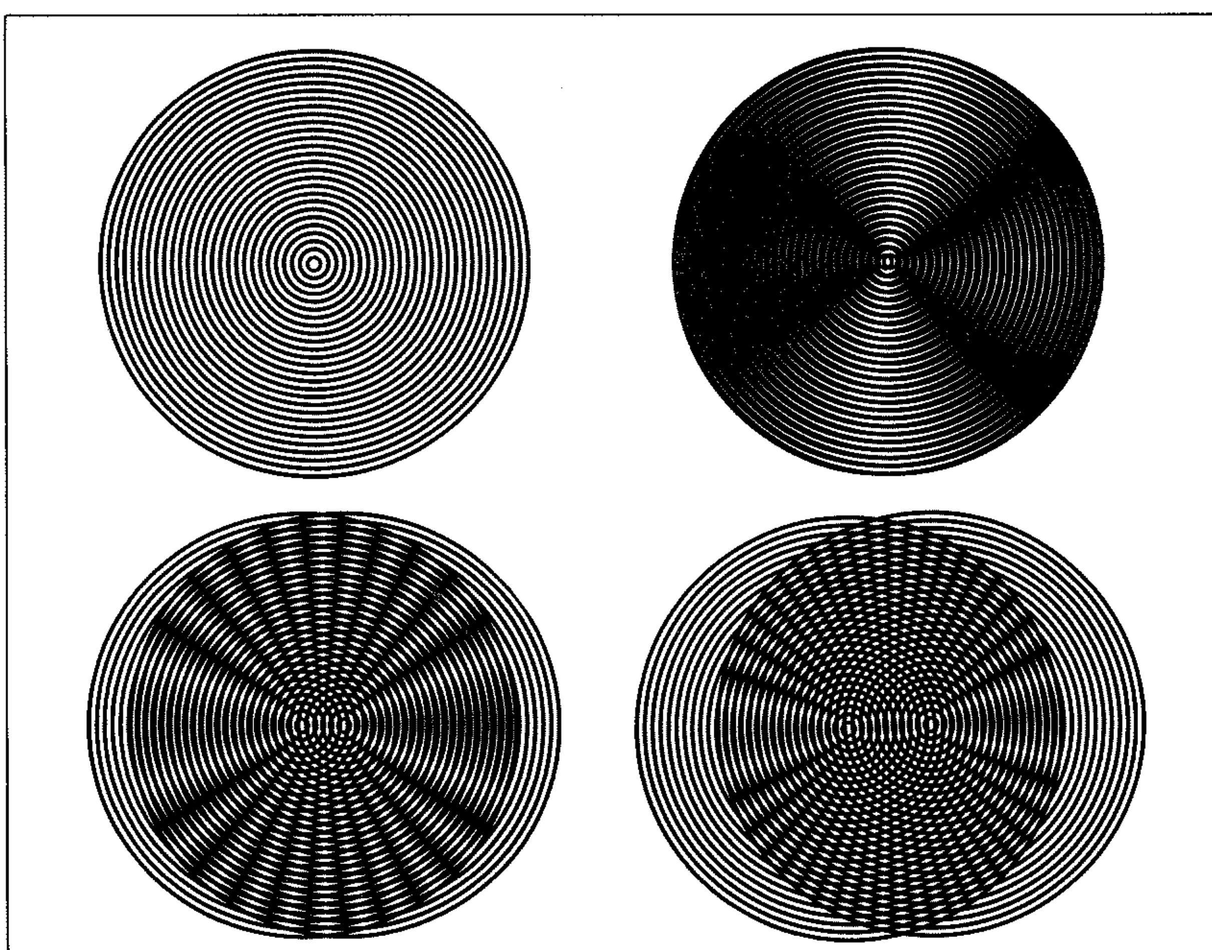
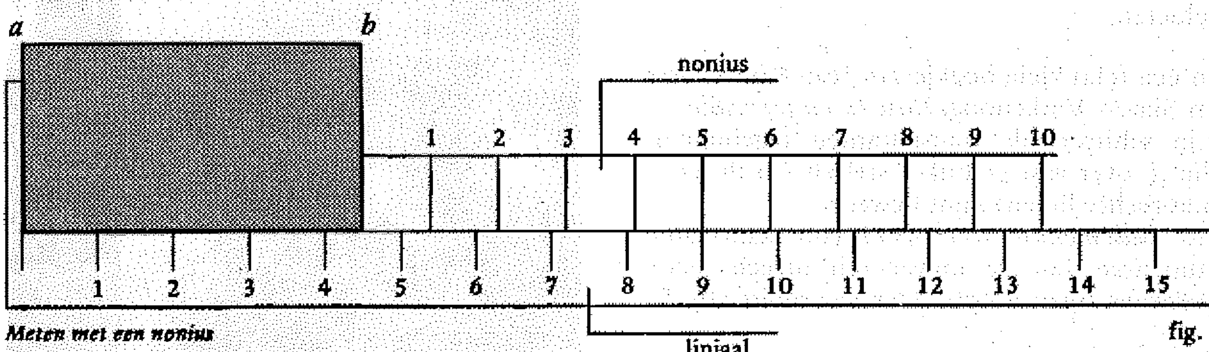


fig. 2

tot klinken worden gebracht, vertonen zwevingen; dat wil zeggen: ze hebben een afwisselend sterke en zwakke intensiteit. Deze zweving heeft dezelfde wiskundige achtergrond als het moiré.

Om het principe nog even uit te leggen, grijpen we terug naar een technisch apparaat dat misschien niet iedereen bekend is, de *nonius*. Met dit apparaat kunnen we nauwkeurig meten. We maken het aan de hand van een plaatje duidelijk. We willen de lengte *ab* meten. We zien dat het een getal tussen de 4 en 5 (cm) is. Nu kunnen we het restje schatten, maar een nonius geeft de maat precies aan. Op de schaal van de nonius staan de streepjes niet om de centimeter, maar om de negen millimeter. Leg je de nonius op de centimeterschaal, dan valt één streepje op beide schalen samen. Was de nonius langer, dan zouden er steeds weer, op afstanden van tien noniusstreepjes en dus negen centimeterstreepjes, twee samenvallen. We kunnen het aantal millimeters dat *ab* langer is dan vier cm, bepalen door te kijken wanneer een noniusstreep voor het eerst met een streep van de centimeterverdeling samenvalt.



Meten met een nonius fig. 3

Maakten we een centimeterschaal en een lange noniusschaal op doorzichtig papier, dan zouden we een patroon van verdichtingen en verdunningen op vaste afstanden zien. Dit verschijnsel noemen we eveneens een zweving. In *'Natuurkunde van het Vrije Veld'*[1]) van prof.dr. M. Minnaert vinden we verschillende voorbeelden van zwevingen: achter elkaar gelegen hekken, verwarmingsroosters, en dergelijke.
Wanneer u een toon opvat als een trilling met opeenvolgende maksima en minima (sinusoïde), dan kunt u door een figuur te maken van

$$f(x) \cong \sin \alpha x + \sin (\alpha-\varepsilon)x,$$

met kleine ε (ten opzichte van x),
zien dat de toppen van $\sin \alpha x$ en van $\sin (\alpha-\varepsilon)x$ net zo'n gedrag hebben als de streepjes van de centimeterschaal en de noniusschaal. Samenvallende toppen geven versterking, tegengestelde ekstremen geven een verzwakking.

Voor de rekenaars nog even:

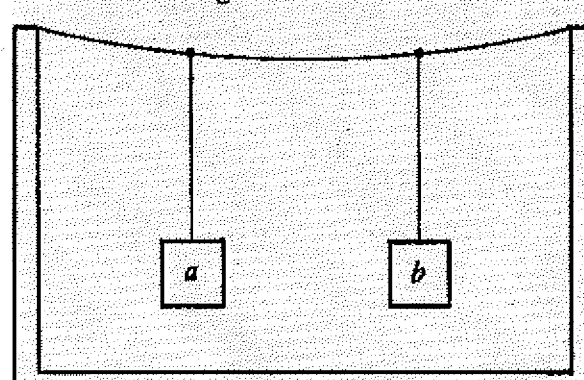
$$\sin \alpha x + \sin (\alpha-\varepsilon)x = 2 \sin (\alpha-\tfrac{1}{2}\varepsilon)x \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon x.$$

Maksimale amplitudes in punten waar

$$\sin (\alpha-\tfrac{1}{2}\varepsilon)x = 1$$

– deze punten liggen vrij dicht bij elkaar – maar waar *bovendien* $\cos \frac{1}{2} \varepsilon x = 1$. Deze punten liggen op 'grote' afstanden, namelijk $\frac{4\pi}{\varepsilon}$ tegenover $\frac{2\pi}{\alpha}$ (ongeveer) voor de dicht bij elkaar liggende punten. Aldus zien we de toppen en vlakke stukken in de som van $\sin \alpha x$ en $\sin(\alpha-\varepsilon)x$ ontstaan.

Voor liefhebbers van mechanika of van mechanische speeltjes: de gekoppelde slinger (als speelgoed in allerlei soorten te koop) vertoont eveneens zwevingen.



Schets van een gekoppelde slinger fig. 4

Als we *a* (fig. 4) een slinger naar voren geven, gaat deze van voren naar achteren slingeren. Na enige tijd staat *a* stil en slingert *b*, enzovoort. Als u de differentiaalvergelijking opstelt en oplost, ziet u dat de beweging van *a* gegeven wordt door de som van sinussen, de stilstand is een dal omdat de twee termen ongeveer tegengesteld zijn.

* * *

We hebben het tot nu toe over ééndimensionale verschijnselen gehad. We willen nu wat

---
[1]) Deel 1, pagina 84.

over vlakke verschijnselen zeggen. Nemen we bijvoorbeeld een stel evenwijdige lijnen, $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$, en een tweede stel dat een kleine hoek met het eerste stel maakt, bijvoorbeeld $\epsilon y = x - m$, $m \in \mathbb{Z}$, dan zien we de snijpunten een soort zweverige figuren vormen. We berekenen namelijk dat voor deze snijpunten geldt:

$$y = \frac{n-m}{\epsilon}.$$

Deze liggen op lijnen evenwijdig met de x-as op onderlinge afstanden van $\frac{1}{\epsilon}$. Door twee stelsels langs elkaar te bewegen (met draaien), zie je deze vertikale lijnen omhoog en omlaag schieten.

In een fraai klein boekje van Jean-Paul Vroom en Simon Vinkenoog *'How to enjoy reality'*[1]) zijn schitterende transparanten ingebonden, die je over vast gedrukte stelsels (in dit geval niet-rechte lijnen) kunt bewegen.
Het *vademekum 1970-1971* voor aanstaande studenten aan de universiteit utrecht heeft eveneens fraaie voorbeelden van moiré (fig. 5).

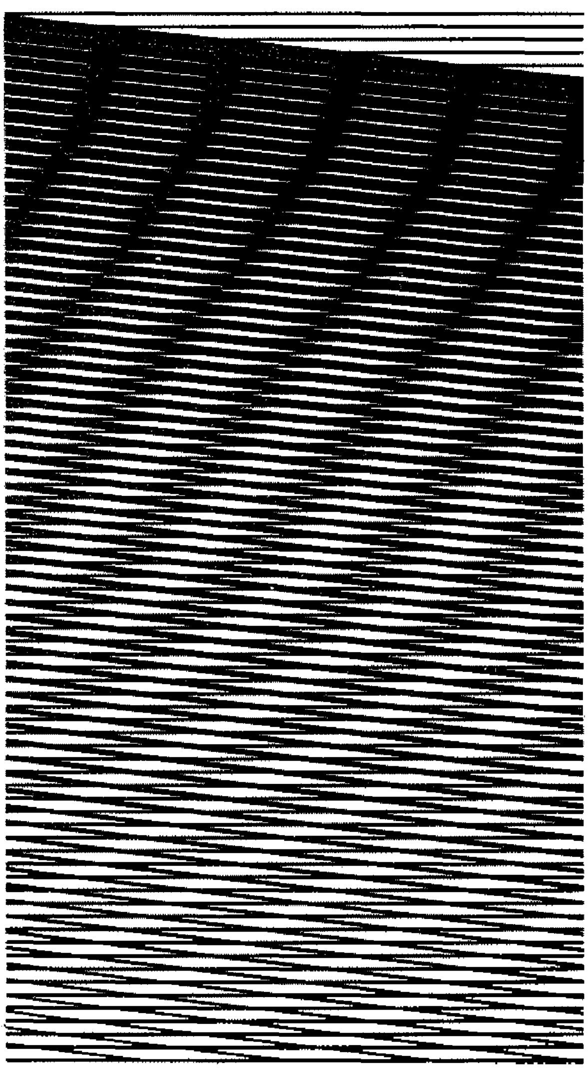
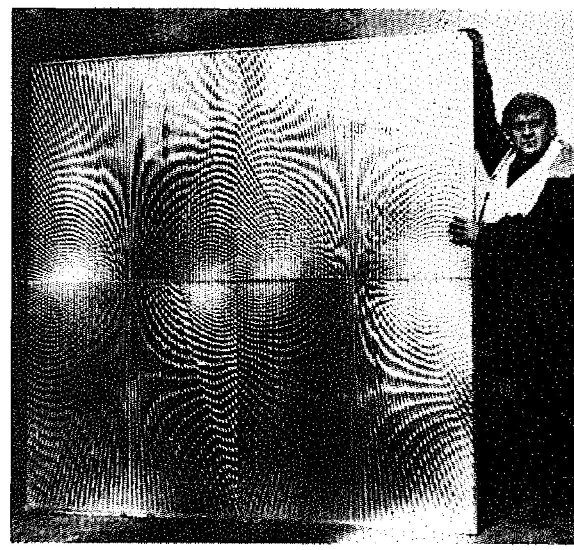
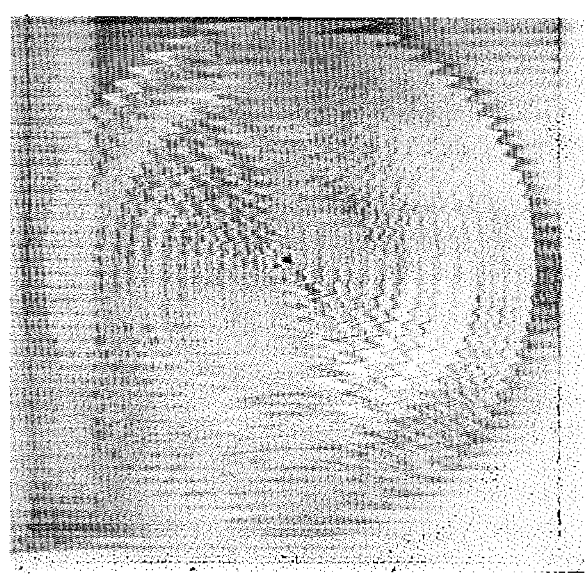


fig. 5

En zo zijn we toch bij de beeldende kunst terecht gekomen. In de groep *'Zero'* – hoogtepunt rond 1960 – vinden we ook nogal wat toepassingen van het moiré-principe. Omdat het hierbij allemaal om het bewegen en het levende gaat, zijn illustraties niet zo overtuigend. Veel werk van Heinz Mack en van Raphaël Jesus Soto berust eveneens op zwevingen en moiré (fig. 6 tot en met 9).



Lichtreliëf 'sapienti sat', Heinz Mack 1967 fig. 6



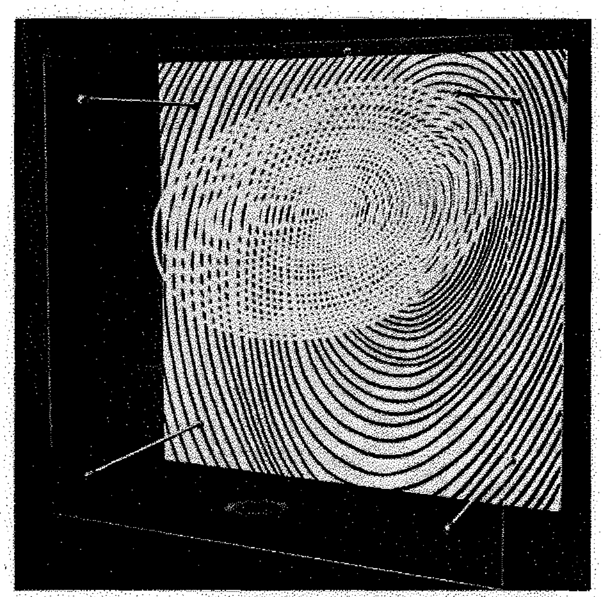
Witte lichtdynamo, Heinz Mack 1964 fig. 7

In de bundel *'Zero'*[2]) vinden we zowel van Heinz Mack als van Soto voorbeelden van moiré. Van Mack zijn het vaak 'metalen schilderijen' waarin via motortjes bewegingen opgewekt worden; van Soto veelal draadroosters die zwevingen oproepen.

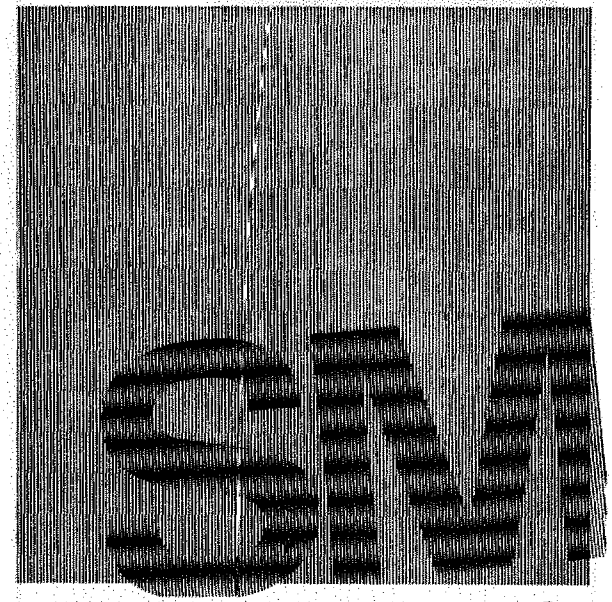
---

[1]) Thomas Rap, amsterdam.

[2]) Volume 3, arnhem 1961.



Vibration, Raphaël Jesus Soto fig. 8



Omslag katalogus, Raphaël Jesus Soto fig. 9

Een heel mooi voorbeeld van Soto is de omslag van de katalogus van zijn tentoonstelling in het stedelijk museum van amsterdam[1]) — zie fig. 9 —. Over een stel evenwijdige lijnen ligt vrij beweegbaar een wit draadje. Via een effekt van gezichtsbedrog zien we zwarte streepjes op het draadje. De dichtheid hangt samen met de hoek die de draad ter plaatse met het stelsel evenwijdige lijnen maakt.
Voor het werk van Heinz Mack verwijzen we nog naar de zeer uitvoerige tentoonstellingskatalogus *'Akademie der Künste Berlin'*.[2])

We geven nog wat teorie. We vervangen ons stelsel evenwijdige lijnen door een rooster van vierkantjes (een velletje transparant millimeterpapier kan als voorbeeld dienen). We leggen er een tweede, precies eender velletje overheen en draaien dit een klein beetje ten opzichte van elkaar. Wanneer ze een hoek maken, waarvan de tangens ϵ is, zien we versterkingen (zwevingen) een patroon vormen van vierkanten op onderling veel grotere afstanden, in feite ongeveer $\frac{1}{\epsilon}$. Door langzaam te draaien, ziet u de verdichtingen steeds verder uit elkaar gaan.
Als ϵ héél erg klein wordt, gaan foutjes in het lijnenstelsel van het millimeterpapier domineren, onregelmatige vlammen vliegen over het papier. Wanneer u dit met stukjes vitrage of met zijden kousen doet, treden de onregelmatigheden al veel eerder op en ziet u de 'vlammen' meestal in de vorm van een stel koncentrische ovalen ontstaan.
Er zijn veel varianten te vinden. De Bijenkorf had enige tijd geleden pakpapier met twee roosters van zeshoekjes in verschillende kleuren, iets over elkaar verschoven. Prachtige zwevingen. We laten hieronder een verkleinde zwart-wit afbeelding zien (fig. 10).

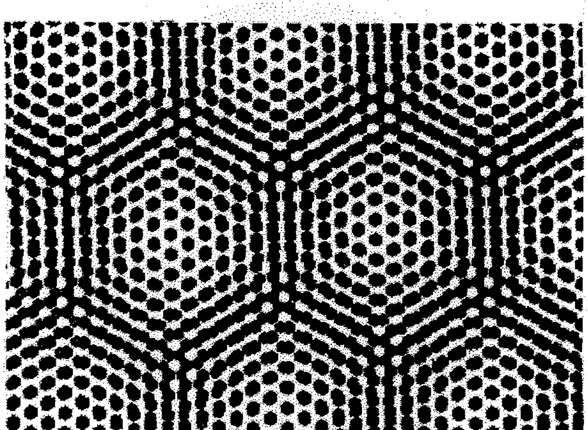
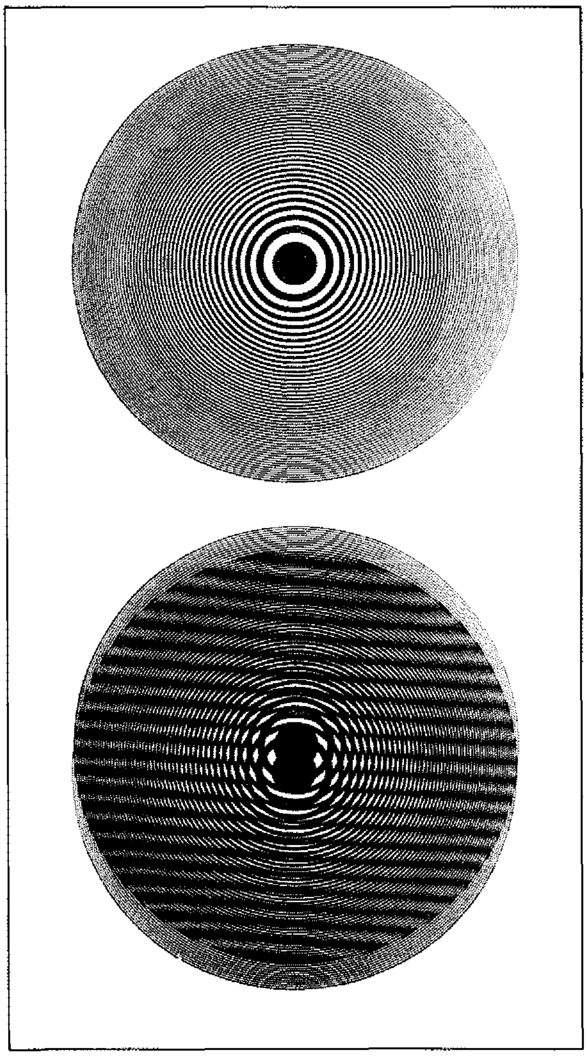


fig. 10

Heeft u kleurentelevisie, dan ziet u zeer regelmatig moiré/zwevingsverschijnselen bij personen met streepjes- of stippeltjesoverhemden, -pakken, -bloesjes of -jurken. Strakke lijnfiguren met lijnen bijna evenwijdig met de beeldlijnen, laten zowel op een zwart-wit- als op een kleurentelevisie de leukste vlammen zien. Bent u zo rijk dat u op school video, kamera en monitor heeft, dan kunt u onbeperkt aan het spelen gaan. Maar dan ook wat teorie maken naast de kreativiteit!
In *'Scientific American'*[3]) staat een 'coverstory' van Gerald Oster en Yasunori Nishijima over moiré. Een paar plaatjes (in het origineel in kleur) nemen we in zwart-wit over (fig. 11). Er is een boek van Gerald Oster over dit

[1]) Januari/februari 1969.
[2]) Mei/juli 1972; Stedelijk van Abbemuseum, eindhoven, mei/juni 1973.
[3]) Mei 1963.

onderwerp op de markt, helaas waren we niet in de gelegenheid dit te raadplegen.
Als voorbeelden laten we nog twee koncentrische cirkels zien met middelpunten op een afstand δ. Snijpunten van de stelsels zijn dan de punten waarvoor het verschil van de afstanden tot de twee centra konstant is. Dit geeft een stelsel van hyperbolen, een vaak (onder andere in affiches) gebruikt zwevingenpatroon.

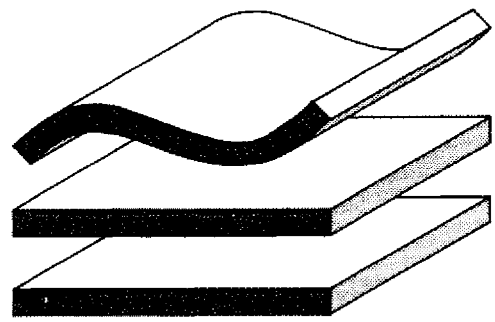


Fresnel ring moirés fig. 11

Een reeks fraaie afbeeldingen is te vinden in het boek *'Symmetry in science and art'* van A.V. Shubnikov en V.A. Koptsik.[1]) Terloops merken we op dat via radiozenders dit systeem van hyperbolen gebruikt wordt in het deccasysteem voor plaatsbepaling op zee.
Maar dat is *techniek en wiskunde* en dat behoort tot een andere rubriek.

[1]) Engelse vertaling G.D. Archard, uitgave Plenum Press 1974, pagina 158-168.

problematika



PROCENTEN

Op de pedagogische akademie te gorinchem is het iowo *gestart met het ontwikkelen van een voorbeeldleerplan 'wiskundedidaktiek' voor de onderwijzersopleidingen.*
In meer serieuze rubrieken van dit bulletin zult u daar in de toekomst nog wel het een en ander over horen.

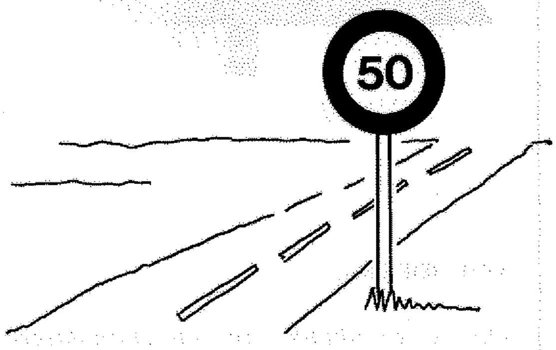
In deze 'problematika' kunt u uw 'brein breken' op enkele procentprobleempjes. Omdat vele (trouwe) lezers regelmatig te kennen hebben gegeven dat ze nieuwsgierig zijn naar de oplossingen van hun 'puzzelredakteur', sluiten we daar deze keer mee af.

HUUB JANSEN

1

SNELHEIDSKONTROLE

Het gaat om een probleem, ingezonden door Danie Karman uit zevenaar, die werd geïnspireerd door het eerste leerstofblok van de nieuwe opleiding: *'Het land van acht'*. Een denkbeeldig land, waarvan de inwoners achttallig tellen en rekenen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, ..., 20, ..., 30, ..., 40, ..., 50, ..., 60, ..., 70, ..., 100, ...
In het land van acht geldt ook een maksimumsnelheid binnen de bebouwde kom. Met borden langs de kant van de weg is het aangegeven:



Een vakantieganger, uit het 'normale' tientallige nederland, passeert zo'n bord terwijl de snelheidsmeter van zijn wagen-met-het-pientere-pookje precies 50 aanwijst.
Prompt wordt hij aangehouden door een achtlandse agent, gewapend met snelheidsmeter, die snel uitrekent met hoeveel procent onze landgenoot de maksimumsnelheid overschrijdt. Deze herinnert zich plotseling dat de aanduiding op het bord achttallig geschreven is en rekent zelf ook uit hoeveel procent hij fout zat.

▶ *Achterhaal deze beide berekeningen.*
▶ *Welke berekening is voor de overtreder het gunstigst, indien de boete evenredig is met het percentage van de overschrijding?*

2

LEERLINGEN

Procentberekening is in. Professor Freudenthal kwam enige tijd geleden met dit simpelogend probleempje aandragen.
In een klas met jongens en meisjes doen 57% van de jongens en 41% van de meisjes aan sport.

▶ *Hoeveel procent van alle kinderen in die klas doet aan sport?*

Het aardige van dit probleem is, dat professor Freudenthal niet alleen erbij vermeldde dat er verschillende oplossingen mogelijk zijn, maar dat hij tevens aangaf op welk nivo uw oplossing thuishoort. Enfin, ziet u zelf maar.

3

PREMIE

Wanneer Danie Karman en professor Freudenthal vreugde scheppen in procenten en percentages, dan blijven anderen niet achter. Zo stapte het hele wiskobasteam weer terug in de *toetsnaald*-nostalgie en dat schept denk- en rekenplezier. Zeker als de problemen een nieuw jasje krijgen.
Zoals het probleem van de ambtenaar die een aanbod krijgt van zijn autoverzekering. Hij kan kiezen uit twee mogelijkheden. Allereerst een premieberekening, waarbij van het basisbedrag 30% in mindering wordt gebracht wegens schadevrij rijden. Vervolgens wordt op het resterend bedrag een ambtenarenkorting gegeven van 10% en van de rest wordt nog een korting afgetrokken van 3% als men kontant betaalt.
Andersom is ook mogelijk. Eerst 3% wegens kontante betaling, van de rest 10% ambtenarenkorting en tenslotte 30% korting voor schadevrij rijden.

▶ *Wat kiest deze schadevrije ambtenaar die gewend is kontant te betalen?*

4

BELASTING

U ziet het: voor geld doet men alles. Zelfs procentsommetjes uitrekenen. Daarom tot slot nog een belastingprobleem.
Drie mensen hebben een karweitje verricht dat *f* 10.000,– heeft opgeleverd. Ieder heeft even hard gewerkt en ze spreken af dat ieder een gelijk nettobedrag in handen moet krijgen.
Het probleem is nu, dat meneer *a* 36% belasting over overwerkgeld moet betalen, meneer *b* 48% en meneer *c* wordt aangeslagen voor 52%.
Hiermee is het probleem duidelijk.

▶ *Hoe moet de opbrengst verdeeld worden?*

OPLOSSINGEN

snelheidskontrole (1)

De agent: u rijdt 62_8 (= 50_{10}). U mag maar 50_8 rijden. Dus 12_8 teveel. Dit is $\left(\frac{12}{50}\right)_8 = \left(\frac{10}{40}\right)_{10} = 25\%$.
De automobilist: ik mocht slechts 40_{10} (= 50_8) rijden. Ik reed 50_{10}. Dus 10_{10} teveel. Dat is $\left(\frac{10}{40}\right)_{10} =$ 25%.

leerlingen (2)

De 'antwoordnivo's' van Freudenthal:
antwoord: 98% – nulde nivo;
antwoord: je kunt er niets van zeggen – eerste nivo;
antwoord: tussen de 41% en 57% – tweede nivo.
U bevindt zich op het allerhoogste nivo met een berekening als: 57%, dat wil zeggen het percentage 'sportjongens' bevindt zich tussen 56,5% en 57,5%. Hiervoor komt allereerst in aanmerking 8 van de 14 (= 57,1%).
Het percentage 'sportmeisjes' bevindt zich tussen 40,5% en 41,5%. Op z'n minst: 7 van de 17 (= 41,2%).
Totaal aantal leerlingen: 14 + 17 = 31. Aan sport doen: 8 + 7 = 15 leerlingen. Dit is $\frac{15}{31}$ = 48,4%.
Andere uitkomsten zijn mogelijk, maar dan overschrijdt u wel de toegestane klassegrootte!

premie (3)

Stel de premie gemakshalve op *f* 1000,–.
Twee mogelijkheden:

	f 1000,–		*f* 1000,–
30%	*f* 300,–	3%	*f* 30,–
	f 700,–		*f* 970,–
10%	*f* 70,–	10%	*f* 97,–
	f 630,–		*f* 873,–
3%	*f* 18,90	30%	*f* 261,90
	f 611,10		*f* 611,10

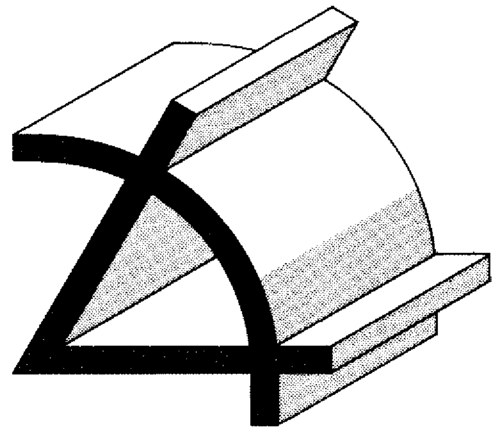
Konklusie: het maakt niets uit.

belasting (4)

Onze konsulent berekende:

a krijgt: *f* 2805,76
b krijgt: *f* 3453,29
c krijgt: *f* 3740,95.

doeidee



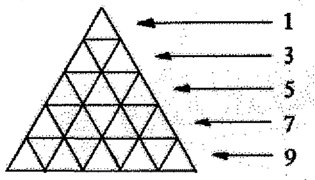
DOE- IDEE M_{14}

Op de toonbank van een chokolaterie staan twee soorten 'toblerones', *driekantige chokoladerepen: kleine van 50 gram en grote van 100 gram in een idem-verpakking (driezijdige prisma's). Ze zijn vernuftig opgestapeld in grote driehoekige, halfopen etalagehulzen.*
Doe idee M_{14} *kan door vragen, die we zelf op het blad dienen te schrijven, geschikt gemaakt worden voor alle leerjaren. Uit onderstaande suggesties kunt u zelf zowel soort als moeilijkheidsgraad bepalen. Het blad kan een meetkundig, maar ook een rekenkundig karakter hebben en aldus meerdere malen gebruikt worden.*
Het is aan te bevelen te trachten bij een banketbakker enkele verpakkingen en etalagehulzen te pakken te krijgen. Verder is het goed om de beschikking te hebben over legdriehoekjes en isometrisch papier (papier, dat uit gelijkzijdige driehoekjes is opgebouwd).

ED DE MOOR

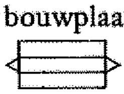
AKTIVITEITEN VOOR DE ONDERBOUW

- Tel het aantal kleine repen dat in de huls kan. (1 + 3 + 5 + 7 = 16)
- Idem voor de grote repen. (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36) Hierbij driehoekjes ter beschikking stellen om het vooraanzicht te leggen.
- Hoeveel komen er in de volgende laag steeds bij?
  Wat voor getallen zijn het? (oneven)



- Hoeveel weegt de volle huls? (800 gram)
- Verkenning van het doosje: 5 zijvlakken (3 rechthoeken, 2 driehoeken), 9 ribben, 6 hoekpunten.

UITBREIDINGEN VOOR DE MIDDENBOUW

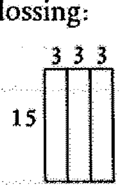
- Teken de vooraanzichten. (Δ)
- Hoeveel weegt het totale pak kleintjes, respektievelijk grote?
- Hoeveel kost het totale pak kleintjes, respektievelijk grote?
- Ontwerp een bouwplaatje voor zo'n doosje.
  (voorbeeld: )
- Hoeveel plakrandjes heb je nodig om dit doosje in elkaar te zetten? Waar moeten ze zitten? Uitvoeren!

UITBREIDINGEN VOOR DE BOVENBOUW

- Ontdek de regelmaat:

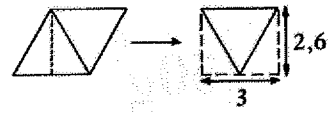
1 laag	1	=	1 reep
2 lagen	1 + 3	=	4 repen
3 lagen	1 + 3 + 5	=	9 repen
9 lagen	1 + 3 + ... 15 + 17	=	81 repen
10 lagen	....	=	100 repen.

- Formuleer! (het totaal aantal is het kwadraat van het aantal lagen)
- Welke reep is het voordeligst?
- Hoeveel procent voordeliger? (ongeveer 3%)
- Er zijn ook nog 'reuzerepen' van 400 gram. Deze blijken *f* 6,75 te kosten.
  Wat vind je hiervan, als je deze reep vergelijkt met de 50-grams en de 100-grams reep?
- Hoeveel karton heb je minimaal nodig om het kleine doosje te kunnen maken? (lengte 15 cm, zijde driehoek 3 cm)
  Oplossing:



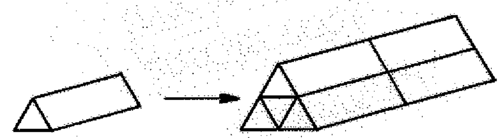
opp: 9 x 15

twee driehoeken:



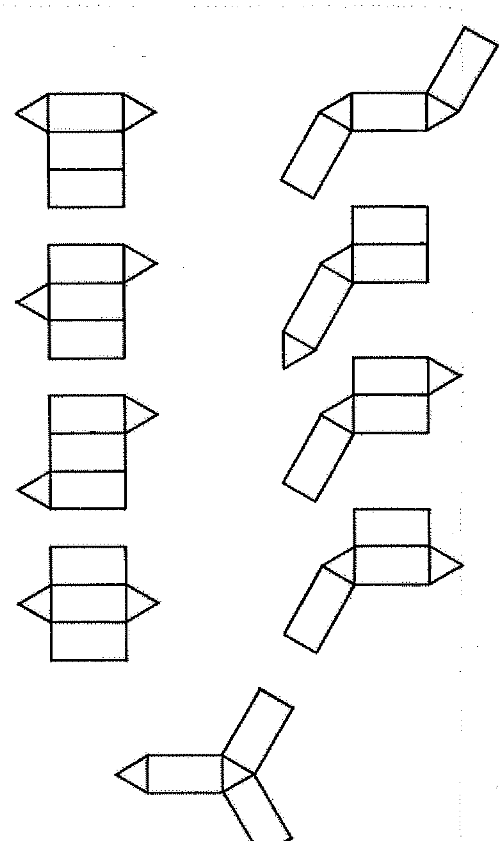
opp: 3 x 2,6 (benadering)

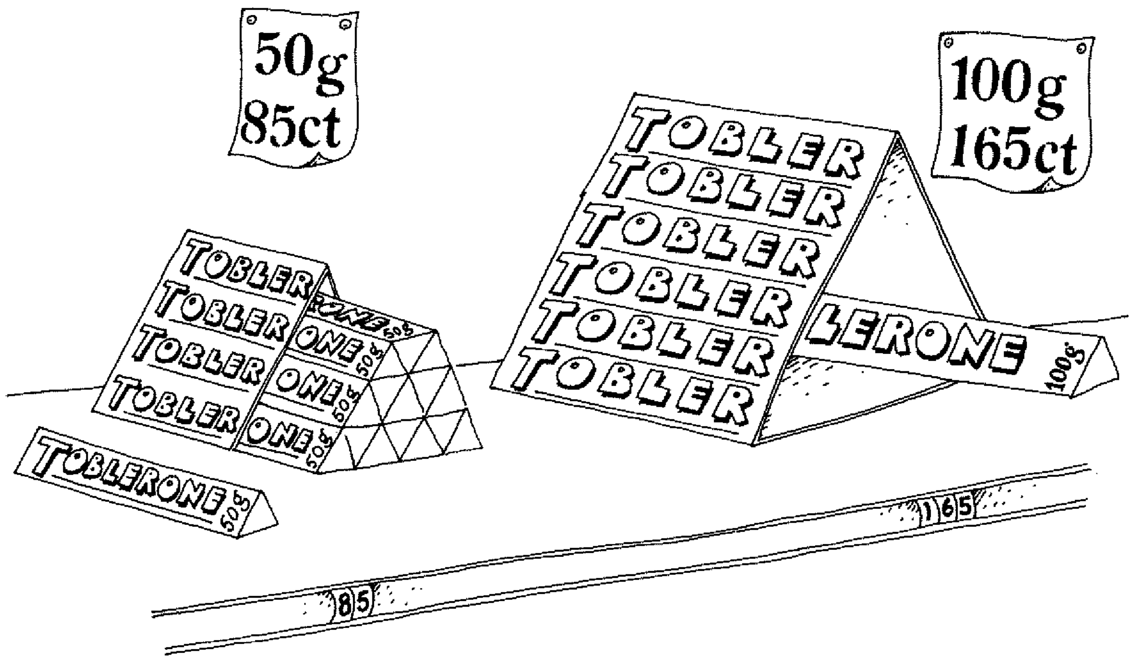
- De grote reep weegt twee keer zoveel. Is er ook twee keer zoveel verpakkingsmateriaal nodig? (neen!)
- Maak de reep naar alle kanten twee keer zo groot (stapelen).



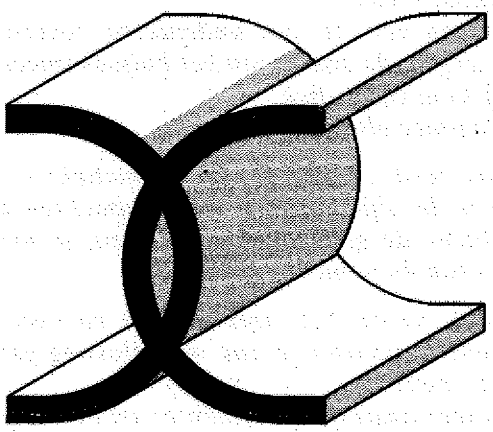
Er is vier keer zoveel verpakkingsmateriaal nodig (2^2).
De reep weegt acht keer zo zwaar (2^3).

- Tracht zoveel mogelijk verschillende bouwplaatjes van de doosjes te vinden.
  Er zijn negen essentiëel verschillende doosjes en er zijn steeds vijf plakrandjes nodig:




50g
85ct
100g
165ct
TOBLER
TOBLER
TOBLER
TOBLER
TOBLER
TOBLER
LERONE
100g
TOBLER
TOBLER
TOBLER
TOBLER
ONE
ONE
ONE
RONE
50g
TOBLERONE
50g
85
165

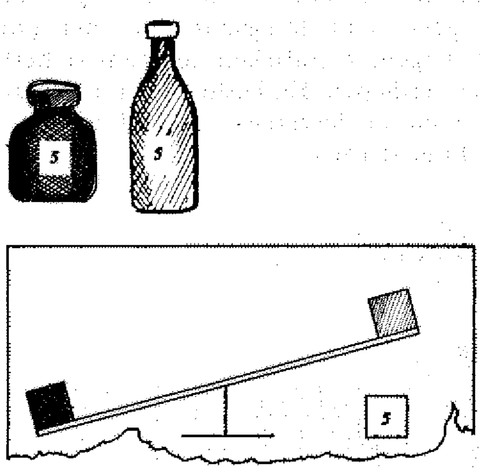
opleiding



De wiskundedidaktische aktiviteiten van de eerstejaarsstudenten aan de pedagogische akademie te gorinchem zijn gedurende een zestal weken gericht geweest op meten. *De aktiviteiten in de laatste week zijn bedoeld als evaluatie.*
Deze evaluatie bestaat uit een drietal onderdelen:
- een wiskundig deel: *een ouderwets proefwerk waarmee de studenten hun verworven kennis en inzichten op het terrein van het meten kunnen tonen;*
- een praktijkdeel, *bestaande uit eigen logboekaantekeningen van de student: logboekaantekeningen van zijn (of haar) ervaringen met kinderen of op grond van eigen leerervaringen gedurende de afgelopen periode;*
- een didaktisch deel; *hiervoor kan iedere student kiezen uit een drietal probleemsituaties, respektievelijk uit onder-, midden-, of bovenbouw van de basisschool.*

FRED GOFFREE
HUUB JANSEN

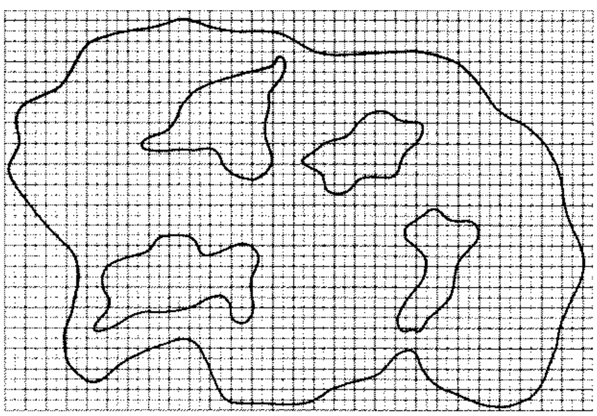
▶ **PROBLEEMSITUATIES DIDAKTISCH DEEL**
onderbouw: waterlanders wegen
Op tafel staan 20 potjes, flesjes en doosjes van allerlei vorm en gewicht. Juf zet ze twee aan twee en vraagt de kinderen om de beurt een tweetal te wegen: welke is de zwaarste? Het gebeurt eerst op de hand, en als juf het na weging op haar handen niet met het resultaat eens is, mogen de andere kinderen van de groep het proberen. Ze zijn niet zeker, en 'de meeste stemmen' gelden nu niet.
.... 'Daarom doen we het beter', zegt juf. ....
De klerenhanger-balans laat zien dat juf toch niet gelijk had.
De andere tweetallen worden op dezelfde manier behandeld: eerst op de hand wegen, dan een uitspraak doen, kijken of de anderen het ermee eens zijn en tenslotte de balans laten beslissen. Juf laat na elke beslissing de foute schatters nog eens de weging op de hand uitvoeren:
.... 'Voel je nu dat die kant zwaarder is dan de andere? ....
Dan krijgt het groepje de opdracht om alle paren te ordenen. Juf heeft ervoor gezorgd, dat elk paar een nummer heeft en dat van een tweetal het zwaarste donker en de lichtere licht gekleurd is. Het resultaat van de gezamenlijke wegingen wordt op een blad genoteerd. Juf heeft het eerste paar al voorgezegd:



middenbouw: de vissers van het buljoekameer
De onderwijzer van de vierde klas wil het bepalen van de oppervlakte van kromlijnige figuren aan de orde stellen.
In de voorgaande periode heeft de klas zich bezig gehouden met oppervlakteproblemen rond *kavelland*.
De instap voor de nieuwe meetaktiviteiten gebeurt aan de hand van een kort verhaal:

'In het buljoekameer liggen vier eilanden. Op deze eilanden wonen vissers. De vissers betwisten elkaar het watergebied in verband met de visvangst en de boringen naar aardolie en aardgas. Ze besluiten rond de tafel te gaan zitten om hun geschil op te lossen. Maar dat blijkt niet zo eenvoudig te gaan. Er worden verschillende voorstellen gedaan en uitgewerkt, maar zelfs na vele dagen vergaderen is men het nog niet eens geworden. Voor ik jullie vertel wat ze allemaal overwogen hebben, zullen we eerst zelf eens moeten bekijken wat een eerlijke oplossing zou zijn.'

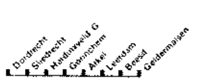
het buljoekameer



bovenbouw: afstand-tijdgrafiek

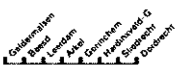
Na de televisie-uitzendingen van de wereldkampioenschappen schaatsen, is de afstand-tijdgrafiek in de zesde klas aan de orde geweest.

Voor de onderwijzer biedt het spoorboekje een goed aangrijpingspunt om het omgaan met dergelijke grafieken nog eens te herhalen en te verdiepen. Hij besluit om uit te gaan van een voor de leerlingen bekend trajekt: dordrecht-geldermalsen.



22 a

km	treinnummer		7117	7119	7121	7123	7123	7125	7127	7129	7131	7133
0	Dordrecht	V	5 42	6 13	6 48	7 17	7 22	7 47	8 22	8 52	9 22	9 52
10	Sliedrecht		5 51	6 24	6 59	7 26	7 31	7 56	8 31	9 01	9 31	10 01
14	Hardinxveld-G'dam		5 55	6 28	7 03	7 30	7 35	8 05	8 35	9 05	9 35	10 05
23	Gorinchem	A	6 03	6 36	7 11	7 38	7 43	8 13	8 43	9 13	9 43	10 13
23	Gorinchem	V	6 04	6 40	7 12	7 45	7 46	8 17	8 47		9 45	
28	Arkel		6 09	6 47	7 17	7 50	7 50	8 22	8 52		9 50	
35	Leerdam		6 15	6 55	7 26	7 59	7 59	8 32	9 02		9 57	
42	Beesd		6 23	7 02	7 32	8 05	8 05	8 38	9 08		10 04	
49	Geldermalsen	A	6 29	7 09	7 39	8 12	8 12	8 40	9 15		10 11	



22 b

km	treinnummer		7112	7114	7116	7118	7118	17118	7120	7122	7124	7126
0	Geldermalsen	V	5 39	6 16	6 43	7 14			7 47	8 19	8 49	9 19
7	Beesd		5 45	6 23	6 49	7 20			7 53	8 26	8 55	9 25
14	Leerdam		5 52	6 30	6 57	7 27			8 02	8 32	9 02	9 32
21	Arkel		5 59	6 37	7 04	7 34			8 09	8 39	9 09	9 39
26	Gorinchem	A	6 04	6 42	7 09	7 39			8 14	8 44	9 14	9 44
26	Gorinchem	V	6 08	6 43	7 12	7 42	7 47		8 17	8 47	9 17	9 47
35	Hardinxveld-G'dam		6 16	6 51	7 20	7 50	7 55	8 04	8 25	8 55	9 25	9 55
39	Sliedrecht		6 22	6 57	7 26	7 56	8 01	8 09	8 31	9 01	9 31	10 01
49	Dordrecht	A	6 31	7 06	7 36	8 05	8 10	8 18	8 40	9 10	9 40	10 10

In de komende les(-sen) wil hij vooral de betekenis van de afstand-tijdgrafiek voor het vergelijken van snelheden en het oplossen van inhaal- en ontmoetingsproblemen benadrukken.

Nadat hij eerst zelf een aantal van deze problemen heeft opgelost, gaat hij voor zijn onderwijs een paar opdrachtkaarten ontwerpen.

▶ OPDRACHT DIDAKTISCH DEEL

Voor de studenten luidt de opdracht voor het didaktisch deel:

'Kies één van de drie onderdelen: waterlanders wegen, de vissers van het buljoekameer of de afstand-tijdgrafiek.
Ga daarmee als volgt te werk:

- *Los eerst de gegeven problematiek op en voer de bijbehorende meetopdrachten uit. Noteer de gevonden oplossingen, je meetaanpak én je meetresultaten.*
- *Denk na over je eigen aanpak en over de manier, waarop je tot de oplossing gekomen bent.*
  Noteer daarbij de momenten en overwegingen die je van belang acht.
- *Bedenk nieuwe vragen die een uitbreiding aan het probleem geven.*
  Beantwoord ze ook.
- *Zoek rond het probleemgebied waarin je je verdiept hebt naar didaktische mogelijkheden.*
  Het gaat daarbij om problemen en aktiviteiten aan de hand waarvan je kinderen iets kunt leren.
  Bedenk gespreksstof, leerstof en leeraktiviteiten voor kinderen rond de gekozen problematiek.
- *Probeer de gevonden didaktische mogelijkheden uit in de oefenschool. Ga met kinderen aan de slag om de problematiek te overmeesteren (groepje, groepjes, hele klas, ... kies die situatie die je zelf het meest gewenst vindt).*
  Noteer je bevindingen. Vooral ook de reakties van de kinderen. Vermeld ook welke uitbreiding van didaktische mogelijkheden je daardoor gevonden hebt.

NB: Het didaktisch deel kan samen met een klasgenoot gemaakt worden.
Dit geldt in het bizonder voor de praktische uitvoering. Ook nu weer kun je alle elementen inschakelen — mentoren, medestudenten, literatuur — die je bij het werken aan dit onderdeel van de toets verder kunnen helpen.'

Teneinde u enig idee te geven van de wijze waarop de gorkumse eerstejaarsstudenten dit didaktisch onderdeel van de evaluatie hebben aangepakt, volgt hieronder een van hun resul-

taten als voorbeeld. Niet het slechtste, naar ons idee, maar daarvoor is het dan ook een voorbeeld.
Oordeelt u echter zelf.

▶DIDAKTISCH DEEL VAN 'METEN' (AUTEUR: BRAM DE JONG)

Als ik naar het plaatje kijk, dan schijnt het me toe, dat de eilanden niet allemaal even groot zijn. Als ik veronderstel of afspreek, dat de bevolkingsdichtheid overal even groot is, dan is het billijk dat het grootste eiland, dus met de grootste bevolking, ook het grootste deel krijgt van het buljoekameer. Bij het verdelen moet ik werken met verhoudingen. Hiervoor pas ik de volgende werkwijze toe:

- eerst de oppervlakte van de eilanden bepalen;
- zet de eilanden kwa oppervlakte – dus bevolkingsaantal – in verhouding naast elkaar;
- bepaal de oppervlakte van het meer;
- bepaal door middel van verhoudingen het stuk meer waar elk eiland recht op heeft.

Mààr: hoe moet het bezit ingedeeld worden? Moet het grootste eiland ook de plaatsen met de meeste vis hebben of met de meeste olie? Moet ieder eiland een aaneengesloten deel van het meer krijgen? Of moet het gebied verdeeld worden in kleine stukjes op verschillende plaatsen? (Op zo'n manier kan ieder eiland een stuk rijk viswater en een stuk rijk oliegebied krijgen en ook wat armer gebied, zodat elk eiland evenveel kans heeft om te profiteren. Want, stel dat rechtsonder de meeste olie zit, of de meeste vis, dan zou ook het eiland rechtsonder beter af zijn.)
Ik spreek af dat overal evenveel vis zit en dat overal in de grond evenveel olie of gas aanwezig is. Ook spreek ik af, dat het te verdelen gebied om het eiland moet liggen en aan elkaar moet grenzen.

oppervlakten eilanden

Eerst een afspraak: het eiland linksboven noem ik a, het eiland rechtsboven b, het eiland linksonder c en het eiland rechtsonder d. Ik maak een schatting: $d < b < c < a$. Maar dit bevredigt me niet. Voor hetzelfde geld is a kleiner dan c. Hoe nu?
Nauwkeuriger werken, dat wil zeggen: de oppervlakte bepalen van ieder eiland apart door gebruik te maken van de hokjes en de oppervlakte uit te drukken in die hokjes. Hoe doe ik dat nu weer? Je kunt het nooit precies weten. Maar dat geeft niet, want natuurlijk spreken de eilandbewoners met elkaar af dat ze niet 'op een klein stukje kijken'. (Een banale oplossing: eiland a krijgt de visserij, eiland b de aardolie, eiland c het gas en eiland d het toerisme. Kijk, dan hoef je niet meer te rekenen. Maar dan krijg je weer: wat levert het meeste op? Zo zie je maar!)
Hoe reken je nu de oppervlakten uit?
Op verschillende manieren!

eerste aanpak

Ik tel eerst de hele hokjes in ieder eiland.
Uitkomst:
a : 53 b : 36 c : 63 d : 29.
Pff... dom werk. Hier stop ik mee. Ik ga hetzelfde nog eens doen, maar dan tel ik in eenheden van vier hokjes en vermenigvuldig mijn einduitkomst met vier. Dit is volgens mij niet onnauwkeuriger, daar met die kleine hokjes steeds onzekerheden bestaan, zoals: loopt die lijn door dit hokje of door dat hokje?
Herhaling:
We tellen eerst de grote hokjes (4 x 1).
Uitkomst:
a : 8 b : 5 c : 10 d : 3.
Ik tel nu de hokjes die voor meer dan de helft stukjes eiland bevatten:
a : 12 b : 7 c : 12 d : 8.
Ik tel dan de hokjes die voor minder dan de helft stukjes eiland bevatten:
a : 13 b : 10 c : 14 d : 10.
In het algemeen komt tot uiting:
hokje kleiner dan $\frac{1}{2}$ + hokje groter dan $\frac{1}{2}$ = 1.
a : 12 b : 7 c : 12 d : 8.
We hebben nu twee tabellen met 'hele eenheden'.
Optellen:
a:12+8=20 b:7+5=12 c:12+10=22 d:8+3=11.
Om eenheden te krijgen, nu de grote hokjes vermenigvuldigen met vier:
a : 80 b : 48 c : 88 d : 44.

tweede aanpak

Ik kan ook tussen het aantal 'volle' hokjes (gevuld met eiland) en het eerstvolgende kringetje (om het eiland) met 'lege' hokjes (geheel), het aantal hokjes bepalen, nadat ik het aantal 'volle' hokjes geteld heb. Ik tel de hokjes die daartussen liggen op en deel door twee. Ik heb dan een aantal dat ik op moet tellen bij het aantal hokjes 'totaal gevuld met eiland'. Ik krijg dan een uitkomst die ik tenslotte met vier vermenigvuldig (want we hebben gewerkt met grote hokjes). Even proberen!

Aantal totaal gevulde hokjes:
a : 8 b : 5 c : 10 d : 3.
Het aantal tussenliggende hokjes:
a : 25 b : 17 c : 26 d : 18.
Dit aantal delen door twee:
a : 12 b : 8 c : 13 d : 9.
Dit optellen bij de hele hokjes:
a : 20 b : 13 c : 23 d : 12.
Vermenigvuldigen met vier:
a : 80 b : 52 c : 92 d : 48.

Dit antwoord wijkt enigszins af van het eerste, maar de volgorde blijft dezelfde: $c > a > b > d$. Ik zie dat mijn schatting verkeerd was en mijn twijfels terecht waren.

verhoudingen

De verhouding bepaal ik door naar de uitkomst van de eerste aanpak te kijken, daar ik deze meer betrouwbaar vind:

$c : a : b : d = 88 : 80 : 48 : 44$.

Na uitvoerig beraad zijn de partijen bereid de verhoudingen makkelijker te maken, daar niet ieder eiland de beschikking heeft over geleerden als Fred Goffree en Huub Jansen.

Het wordt: $c : a : b : d = 80 : 80 : 40 : 40$.

Dit wordt: $c : a : b : d = 2 : 2 : 1 : 1$.

De vergadering spreekt af: behoudens alle andere bepalingen verdelen we het meer in zes gedeelten, waarvan eiland a $\frac{1}{3}$, eiland b $\frac{1}{6}$, eiland c $\frac{1}{3}$ en eiland d $\frac{1}{6}$ toebedeeld krijgt.

oppervlakte meer

Nu de oppervlakte van het meer. Dit kan op dezelfde manieren als het berekenen van de eilandoppervlakten. Alleen moet ik niet vergeten de oppervlakte van de eilanden (totaal : $88 + 80 + 48 + 44 = 260$) van de oppervlakte van het meer af te trekken.

Omdat ik beide manieren al heb laten zien, bereken ik deze oppervlakte op de voor mij betrouwbaarste manier, namelijk de eerste.

Ik bereken eerst het aantal 'grote' (vier kleine) hokjes, dat geheel met 'water' gevuld is. Manier: eerst de grote hokjes in de tekening aanbrengen, dan de linker hokjes in vertikale stand optellen en het aantal eronder schrijven. Op zo'n manier kun je gauw de opvolgende vertikale rijen naar rechts aflezen, steeds uit het vorige aantal te bepalen, zonder dat je almaar hoeft te tellen.

Ik tel de uitkomsten van de vertikale rijen op en krijg 346.

Ik bepaal verder het aantal hokjes dat voor meer dan de helft met 'water' is gevuld: 48. (Meegeteld is één hokje dat precies voor de helft gevuld is).

Nu het aantal hokjes dat voor minder dan de helft gevuld is : 48.

Het aantal 'gehele' hokjes dat we af kunnen leiden uit de vorige twee (aannemen:

$>\frac{1}{2} + <\frac{1}{2} \approx 1 \wedge 0 \leqslant x \leqslant 1$): $\frac{48+48}{2} = 48$.

Het totaal aantal 'gehele' hokjes: $346 + 48 = 394$.

Om de 'echte' hokjes te krijgen, vermenigvuldigen met vier : 1576.

Om ongeveer de juiste oppervlakte te bepalen, trek ik hiervan de oppervlakte van de eilanden af: $1576 - 260 = 1316$.

verdelen

Ik moet de oppervlakte van het meer delen door zes. Dit gaat makkelijker als ik de oppervlakte stel op 1314. Ik krijg $1314 : 6 = 219$.

Nu verdelen:

eiland a: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ $2 \times 219 = 438$ hokjes van het meer;

eiland b: $\frac{1}{6}$ $1 \times 219 = 219$ hokjes van het meer;

eiland c: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ $2 \times 219 = 438$ hokjes van het meer;

eiland d: $\frac{1}{6}$ $1 \times 219 = 219$ hokjes van het meer.

Nu is iedereen tevreden en de vergadering wordt voorlopig gesloten.

vervolg 1

De staat waarin het meer ligt, heeft vastgesteld dat door de olieboringen het water dermate verontreinigd is, dat de vis in het meer niet meer zonder gevaar gegeten kan worden. Het ministerie van volkgezondheid heeft verboden om daar nog te gaan vissen. De eilandbewoners zijn hevig ontzet en protesteren. De staat treft daarom een kompensatieregeling, waarbij twee eilanden in een ander meer mogen vissen. Dit zijn de eilanden b en c. De eilanden a en d zijn vreselijk kwaad, omdat zij dit voorrecht niet krijgen. Ze spreken af, dat zij uit haat een oorlog gaan beginnen. Samen hebben zij drie vliegtuigen, die elk twee bommen tegelijk mee kunnen nemen.

Hun roete: bij d opstijgen, de bommen meenemen, laten vallen op b en c, landen op a, daar weer laden, etc.

Zij willen de eilanden b en c de grond in boren. Een bom boort steeds drie aaneengesloten grote hokjes de grond in.

Hoeveel bommen zijn minstens nodig om de eilanden weg te vagen?

Hoeveel vluchten worden per vliegtuig gemaakt?

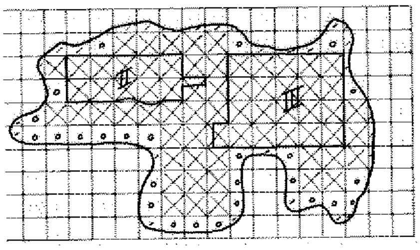
Antwoord:

- tel eerst het aantal hokjes dat geheel of gedeeltelijk met stukjes eiland gevuld is (van b en c): $23 + 36 = 59$;
- $59 : 3 = 19$ rest 2, dus zijn er minstens 20 bommen nodig (dit wordt meer als er eerst in het midden gebombardeerd wordt, want dan blijven er aan de rand misschien slechts twee hokjes aan elkaar; hierdoor wordt moeilijker gemikt en wordt de kracht van de bom niet volledig benut; een andere oorzaak is het mis schieten);
- voor 20 bommen zijn $20 : 2 = 10$ vliegtuigen nodig; er zijn drie vliegtuigen; elk vliegtuig maakt (als er geen wordt neergehaald, verongelukt, pech krijgt, etc.) minstens drie vluchten en komt op eiland a terecht; dan zijn er totaal negen vluchten gemaakt; dus één van die vliegtuigen maakt een vlucht ekstra (minstens) en komt met een totaal van vier weer op eiland d terecht.

vervolg 2

De eilanden b en c zijn vernietigd. Gelukkig is dat niet zo erg, want de inwoners waren al op weg naar het nieuwe meer, terwijl de eilanden a en d gestraft zijn en de eilandbewoners van b en c nieuwe eilanden mogen maken. Alleen wel weer in dezelfde verhouding: namelijk $1 : 2$.

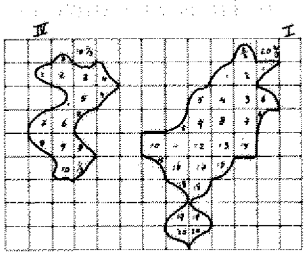
Ze komen bij het meer:



Ze mogen $\frac{1}{3}$ van het meer gebruiken om eilanden te maken. Hoe reken je dat uit?
Eerst de oppervlakte van het meer bepalen:

$$\left.\begin{array}{l} \times \text{ hele hokjes: } 67 \\ \left.\begin{array}{l} \circ \text{ hokjes} > \frac{1}{2} \\ / \text{ hokjes} < \frac{1}{2}\end{array}\right\} \text{nieuwe hele hokjes} \approx 26 \end{array}\right\} \text{totaal: } 93.$$

Een derde van het meer te gebruiken voor 'eiland': 31 hokjes.
In verhouding: $1 : 2 \rightarrow 10\frac{1}{3} : 20\frac{2}{3}$.
De eilanden werden 'gebouwd'. De bewoners kwamen nog wel eens een paar mensen tegen van *a* en *d*. Ze hadden zò'n spijt. De staat zag dit aan:
.... 'Goed, jullie krijgen ook een meer en dan mag je óók eilanden maken. Maar die moeten heel mooi worden zodat het land een mooi aanzien krijgt. Geen vierkante eilanden, maar ronde vormen en even groot.' ....



didaktische mogelijkheden
Na m'n stage-ervaring zet ik het meeste bij het volgende onderdeel. Ik noteer hier alleen (zodat ik er niet meer aan kan tornen en goed kan kontroleren hoe het is gelopen en hoever ik fout zat) mijn plannen en hoe en wat ik ga behandelen. De punten werk ik in het volgende onderdeel uit.
De kinderen hebben ervaring met het berekenen van oppervlaktes met behulp van hokjes, maar nog niet met willekeurige figuurtjes. Daar dit de eerste keer is, zal ik dan ook niet te veel figuren maken en het probleem niet te uitgebreid laten worden, dat wil zeggen: ik 'verlang' dat niet van de kinderen, maar 'als het komt' is 't natuurlijk meegenomen. Voornaamste is, dat ze ontdekken hoe ze zo'n oppervlakte kunnen bepalen en ontdekken dat je dat niet precies kunt. Eventueel: hoe het 'preciezer' kan, namelijk met kleinere hokjes met behulp van transparant ruitjespapier.
Ik heb een soortgelijk probleem behandeld in de zesde klas met een groepje kinderen, maar daar kwam weinig uit. De kinderen durfden niet te onderzoeken en te praten. Toevallig dat dit tentamenvraagstuk soortgelijk is en ik het nu, met mijn ervaring van de vorige keer, met een groepje van drie kinderen uit de vierde klas nog eens kan proberen.
Ik begin met hen drie werkbladen voor te schotelen waarop een meer staat afgebeeld. Even inhakend op het uitrekenen van de oppervlakte met hokjes, laat ik de kinderen eens uitzoeken wat nu de oppervlakte is van het meer. Als dit gebeurd is, ga ik een voor de kinderen gekozen probleem voorleggen:
.... 'Weer een werkblad met twee eilandjes. Hierop zie je twee willekeurige eilandjes die weg moeten uit hun meer. Ze moeten alleen overgeplaatst worden in het andere meer van jullie werkblad. Maar: ze moeten even groot blijven en zo moeten in een 'rechte' vorm worden opgebouwd. Kunnen jullie dat?' ...
(Oppervlakte van de eilandjes bepalen; aantal hokjes; intekenen in het meer).
.... 'Als de eilandjes weg zijn uit hun meer, wil het land het hele meer volleggen met boten: een showruimte voor de nationale botenfabriek. Het hele meer wordt dus volgelegd. Ze willen precies weten hoeveel boten erin kunnen. Kunken jullie een manier bedenken om dat zo precies mogelijk te berekenen?' ....

. . . .

Bram de Jong beschrijft nu zijn verdere voorbereidingen. Vervolgens noteert hij zijn ervaringen met drie leerlingen: jan, diana en anneloes. Hij analyseert daarbij het door hen gemaakte werk en probeert van hieruit de gevolgde aanpakken te achterhalen.

▶TENSLOTTE
Wij hopen dat u tot zover dit didaktisch werkstuk in grote trekken hebt weten te volgen.
Wellicht zijn alle stappen die deze eerstejaarsstudent gemaakt heeft, u niet geheel duidelijk geworden. Als kritisch lezer heeft u hem misschien zelfs op fouten weten te betrappen.
De waarde van zijn werk ligt – volgens ons – in de wijze waarop de gegeven didaktische problematiek is aangepakt. Een aanpak, waarbij deze student steeds heeft geprobeerd zijn eigen denkwerk te beschrijven. Van deze reflektie heeft hij vervolgens geprofiteerd bij de vertaling van de probleemstelling naar een didaktische situatie met kinderen van zijn oefenschool.
Kortom, een kreatieve, matematisch-didaktische werkwijze die van studenten tijd en inspanning vergt, maar waardoor belangrijke momenten worden gemarkeerd in hun ontwikkeling van student tot onderwijzer. Een onderwijzer, die in staat is fundamentele wiskundige leersituaties te kreëren in zijn eigen onderwijs.

veel-vlakken

OVER DE KONSTRUKTIE VAN VEELVLAKKEN OPGEBOUWD UIT DRIEHOEKEN[1])

Het regelmatig viervlak, achtvlak en twintigvlak zijn voorbeelden van veelvlakken opgebouwd uit driehoeken; ook wel driehoekslichamen[2]) *genaamd.*
Als alle driehoeken gelijkzijdig zijn, spreken we over een regelmatig driehoekslichaam.

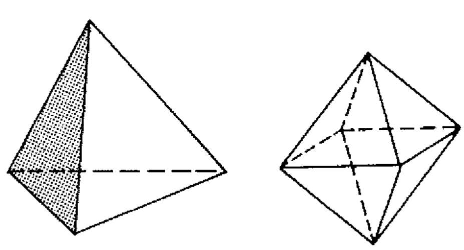


fig. 1

MARION WALTER

Nu kan men zich de vraag stellen hoeveel verschillende regelmatige driehoekslichamen er wel zijn. We vragen ons dan eerst af hoeveel zijvlakken een regelmatig driehoekslichaam kan hebben.[3])
Wel, het minimum aantal zijvlakken (driehoeken dus) moet vier zijn, zoals bij het regelmatig viervlak. Minder dan vier driehoeken immers, zouden geen gesloten lichaam opleveren.[4])

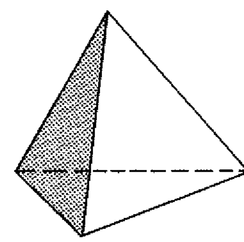


fig. 2

Evenzeer moet het maksimum aantal twintig zijn. Immers, in het regelmatig twintigvlak komen in één hoekpunt al vijf gelijkzijdige driehoeken bij elkaar; zou men er nog een zesde aan toevoegen, dan zouden deze zes gelijkzijdige driehoeken 'vlak' komen te liggen, omdat ze precies een volledige (vlakke) hoek opvullen: $6 \times 60° = 360°$. En dat is nièt onze bedoeling!

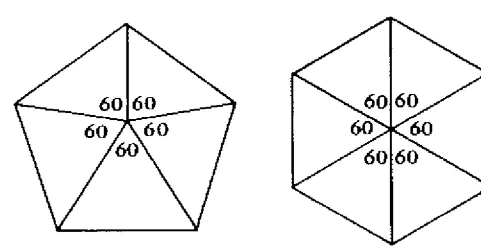


fig. 3

Met andere woorden: het aantal zijvlakken (driehoeken) van een regelmatig driehoekslichaam voldoet aan: $4 \leqslant n \leqslant 20$. **(1)**
Voorts kunnen we ons nog realiseren dat een regelmatig driehoekslichaam, een even aantal zijvlakken moet hebben. **(2)**
Immers, stel maar dat we het driehoekslichaam

---

[1]) Dit artikel is door de redaktie van het WB uit het engels vertaald en – waar dit voor de duidelijkheid nodig was – hier en daar bewerkt. De auteur behoeft geen nadere introduktie. Ed de Moor heeft immers meerdere keren boekjes van haar besproken in 'Nieuw op de markt'.

[2]) Engels: 'deltahedron'.

[3]) Beide vragen zijn weliswaar niet ekwivalent, maar in dit geval beantwoordt de laatste vraag ook de eerste!

[4]) In onze vraagstelling gaan we uit van 'konvekse' lichamen; zeg voor 't gemak: lichamen als 't viervlak, de kubus enz.; kortom: lichamen die geen 'inkepingen' vertonen.

gaan opbouwen uit n driehoeken. Losliggend hebben die n driehoeken, $3n$ zijden. Plakken we die n driehoeken nu tot driehoekslichaam samen, dan zal elk tweetal van die 'losse' zijden, tot één ribbe verenigd worden (zie fig. 4).

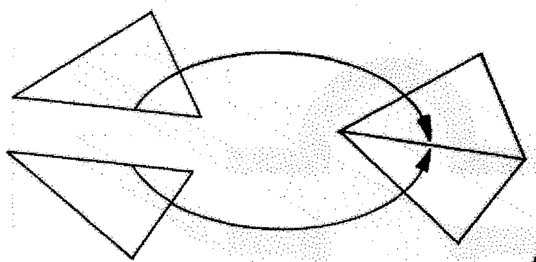


fig. 4

Met andere woorden: de $3n$ zijden van de 'losse' driehoeken vormen $\frac{3n}{2}$ ribben van het driehoekslichaam. En dat is slechts mogelijk als n even is! En dus wordt het driehoekslichaam gevormd uit een even aantal driehoeken.
Uit (1) en (2) volgt nu dat er slechts driehoekslichamen kunnen bestaan met 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 of 20 zijvlakken.
Nu is elders bewezen dat het 18-vlakkig driehoekslichaam niet bestaat.[1])
Nu zouden we kunnen proberen deze driehoekslichamen uit karton te konstrueren. Wat het regelmatig 4-, 8- en 20-vlak betreft, is dit in principe geen probleem; het is al erg vaak gedaan. Ook de 10- en 16-zijdige zijn niet zo moeilijk te konstrueren. Maar de andere des te meer! En zelfs nadat ik ze gemaakt had, vergat ik nadien al gauw weer hòe ik ze gekonstrueerd had. Ik had geen echt totaalbeeld van die lichamen; ze waren me niet 'vertrouwd' geraakt.
Ook studenten die met moeite deze veelvlakken konstrueerden, hadden deze zelfde ervaring. Nu echter, meen ik een remedie tegen deze situatie gevonden te hebben.

Op een dag konstrueerde ik uit lijm en hechtstaafjes een kubus en daarbij dacht ik aan de 'what if not'-procedure.[2])
Dit houdt in dat men zich steeds afvraagt wat er gebeurt als men een fundamentele eigenschap van – in dit geval – een konstruktie, achterwege laat.
Wat zou er gebeuren als de hoekpunten van het bovenvlak van de kubus niet loodrecht boven die van het grondvlak staan?, vroeg ik me af (fig 5a). Met de hechtstaafjes was het een eenvoudige zaak het bovenvlak over 45° te draaien (fig. 5b). In de figuur die toen ontstond, 'zag' ik een antiprisma zitten, dat ik met een paar ekstra staafjes daadwerkelijk maakte (fig 5c).

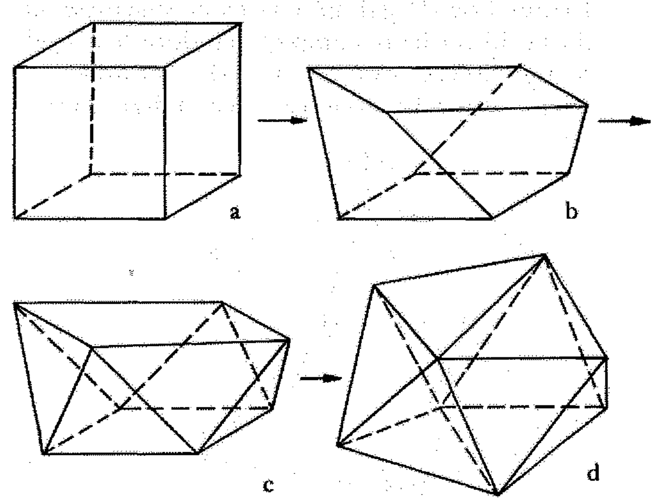


fig. 5

Nu was dit antiprisma nog beweegbaar.[3]) Om het onbeweeglijk ('star') te maken, voegde ik staafjes aan het antiprisma toe. Omdat alle staafjes van gelijke lengte waren, kneep ik het lichaam als het ware samen tot een diamant, om een diagonaal in het bovenvlak te kunnen plaatsen (fig. 5d). Hetzelfde deed ik met de tegengestelde diagonaal van het benedenvlak, en het lichaam was star geworden; het bestond nu uit 12 gelijkzijdige driehoeken!

Had ik het antiprisma nog op een andere manier star kunnen maken? Haastig verwijderde ik weer de diagonaal in het bovenvlak om vier nieuwe staafjes toe te voegen in de vorm van een vierzijdige piramide (fig. 6a). En daar was het 14-zijdige driehoekslichaam!

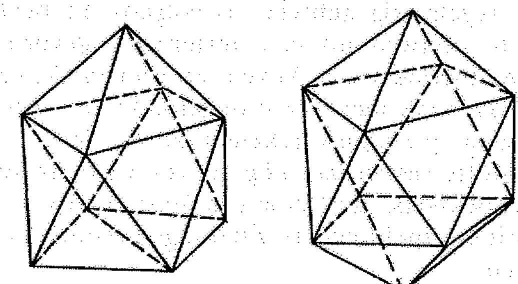


fig. 6a fig. 6b

Even vlot had ik toen het 16-zijdige driehoekslichaam te pakken, door met de diagonaal in het grondvlak dezelfde procedure uit te voeren (fig 6b).

Sindsdien 'zie' ik driehoekslichamen als volgt voor me: neem staafjes van lengte '1', kon-

[1]) Zie: Freudenthal en Van der Waerden: 'Over een bewering van Euclides', in 'Simon Stevin' 25, 1947.

[2]) Zie: 'Mathematics Teaching', resp. nummer 40 (1969) en nummer 51 (1970).

[3]) Engels: not-rigid.

strueer een kubus, draai hem zo dat er een antiprisma ontstaat en maak dit star volgens de drie aangegeven manieren. (En wat eens de drie 'rakkers' onder de driehoekslichamen waren, zijn met dit beeld opeens mijn 'vriendjes' geworden. En ik hoop voor u ook!)
Arthur Loeb[1]) gaf mij daarna de suggestie om dit beeld verder te kompleteren door het regelmatige 20-vlak ook als vijfzijdig antiprisma te 'zien', afgedekt door twee vijfzijdige piramides.

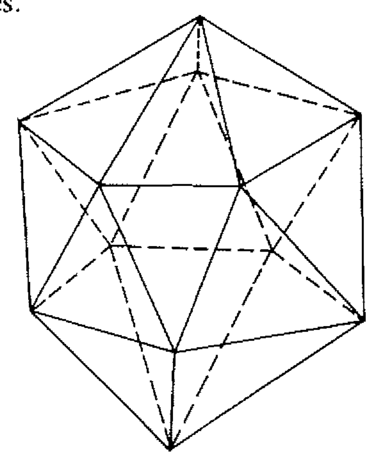


fig. 7

Ook het viervlak is eigenlijk een antiprisma, aldus Arthur Loeb, waarbij onder- en bovenvlak echter verschrompeld zijn tot lijnen (fig. 8a). En deze onder- en bovenlijnen nu kun je als het ware door driehoeken 'verbinden'.

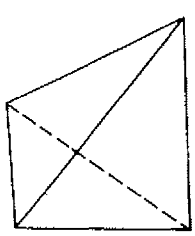


fig. 8a

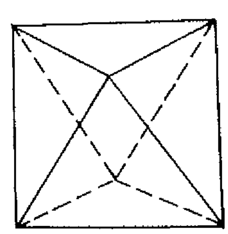


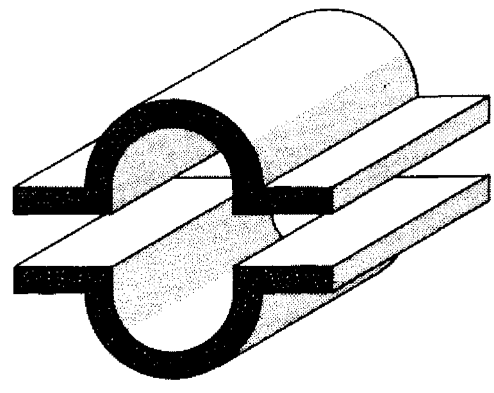
fig. 8b

Het regelmatig achtvlak is volgens dit beeld op te bouwen uit een antiprisma, gevormd door driehoeken in boven- en ondervlak, een feit dat vaak niet wordt opgemerkt als we het lichaam op z'n punt tekenen (zie fig. 8b).
Tenslotte resten dan nog het zes- en tienzijdig driehoeksvlak, die beide zijn op te bouwen uit 2 drie-, respektievelijk vijfzijdige piramides op elkaar.

[1]) Arthur Loeb onderzoekt in zijn komende boek, 'The Language of Structure', het bestaan van lichamen wier zijvlakken zijn opgebouwd uit *n*-hoeken, die niet noodzakelijk regelmatig zijn.

[2]) Bouman-akademie; 11-5-1976; docent Wil Oonk.
[3]) Utrecht 1975.

ander werk



'MEETKUNDE IN DE BUURT', EEN OPMERKELIJKE SKRIPTIE

> *'Dit werkstuk is een poging een stuk praktische leerstof te scheppen met meetkunde als kapstok voor allerlei aktiviteiten',*

schrijft Gerard Wegman in de skriptie die hij voor zijn onderwijzerseksamen opstelde.[2])
Men kan het nauwelijks een poging meer noemen: aansluitend op de leef- en belangstellingswereld van de kinderen, is een funktionele integratie tot stand gekomen van vele meetkundige aktiviteiten, onder meer gebaseerd op het 'Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool'.[3])

'Meetkunde in de buurt' is ontworpen voor zesdeklassers van een school in 'de pijp' in amsterdam. Op deze school is tot dan toe geen specifieke aandacht aan meetkunde besteed. De skriptie tracht mede vanuit deze beginsituatie materiaal aan te dragen voor de gedachte dat

> *'het ruimtelijk denken en handelen zich zonder de bewuste begeleiding (op school of thuis), toch naar een gemiddeld leeftijdsnivo ontwikkelt'.*

En omdat de kinderen uit 'de pijp' wellicht meer buiten spelen dan gemiddeld, minder specifieke speelruimte en speelmaterialen hebben en daardoor meer op zichzelf zijn aangewezen,

> *'zou hun psychisch, ruimtelijke bewegingsvrijheid best gelijk kunnen zijn of misschien zelfs groter, dan van kinderen uit de hogere sociale klasse'.*

EDU WIJDEVELD

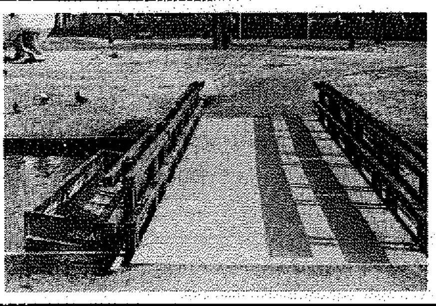
Inderdaad konstateert Gerard Wegman bij de kinderen spontaan aanwezige meetkundige ervaringen en inzichten. En omdat nivoverhoging van dit potentieel mogelijk en wenselijk lijkt, houdt de auteur een pleidooi voor invoering van meetkunde in de basisschool, vooral omdat hij verwacht dat dit meer dan in het traditionele rekenen, gepaard zal gaan met aktieve denk- en inzichtsontwikkeling.
Ook in dit opzicht onderscheidt de skriptie zich van vele andere. Het teoretische deel vertoont namelijk geen uitvoerige boekenwijsheid, maar laat een beknopt en kritisch eigen geluid horen.
Het praktische deel van het werkstuk bestaat uit een vijftal lessen, waarvan de eerste drie rechtstreeks met de buurt te maken hebben. De laatste twee lessen staan meer op zichzelf en geven een uitdieping van de voorgaande.

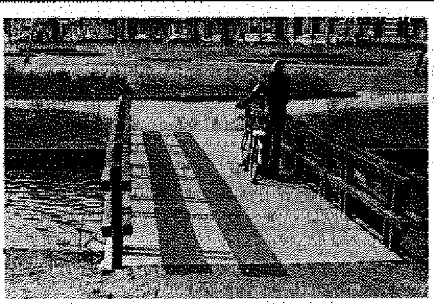
kartografie – fotograferen

Les 1: op een werkblad zijn de straten om de buitenrand van 'de pijp' getekend; aan de hand van een roetebeschrijving en op basis van eigen beleving moeten de leerlingen de kaart verder afmaken.
Les 2: na een werkblad met voorbereidende oefeningen over vergroten van meetkundige figuren met behulp van een rooster, wordt het stratenplan van de buurt, gezamenlijk zes maal vergroot.
Naast problemen betreffende tekenen, taal, voorstellingsvermogen en ruimtelijke oriëntatie, komen kwesties aan de orde over meetkundige figuren, konstrukties, koördinaten, tijd, schaal, verhouding, omtrek-oppervlakte, meten, nauwkeurigheid, enz.

fotografie

Les 3: bladen met foto's uit de buurt geven aanleiding tot velerlei opdrachten; de verwerking vindt plaats op een werkblad (bijvoorbeeld: standpunt van de fotograaf), of op de kaart (bijvoorbeeld: roetes); de opdrachten betreffen verder taal, ruimtelijke oriëntatie, stadsplan, (kortste) afstanden, doorloopbaarheid.



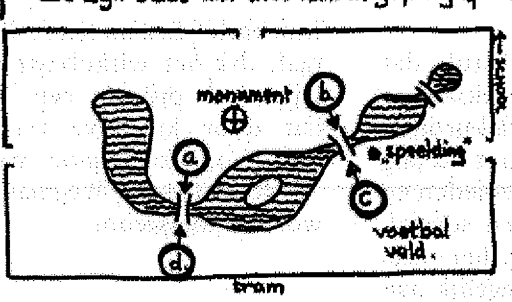


D

11.	12.
13.	14.

Dit zijn de twee lage houten bruggetjes in het park.
Ze zijn beide aan twee kanten gefotografeerd.

kaartje van het park



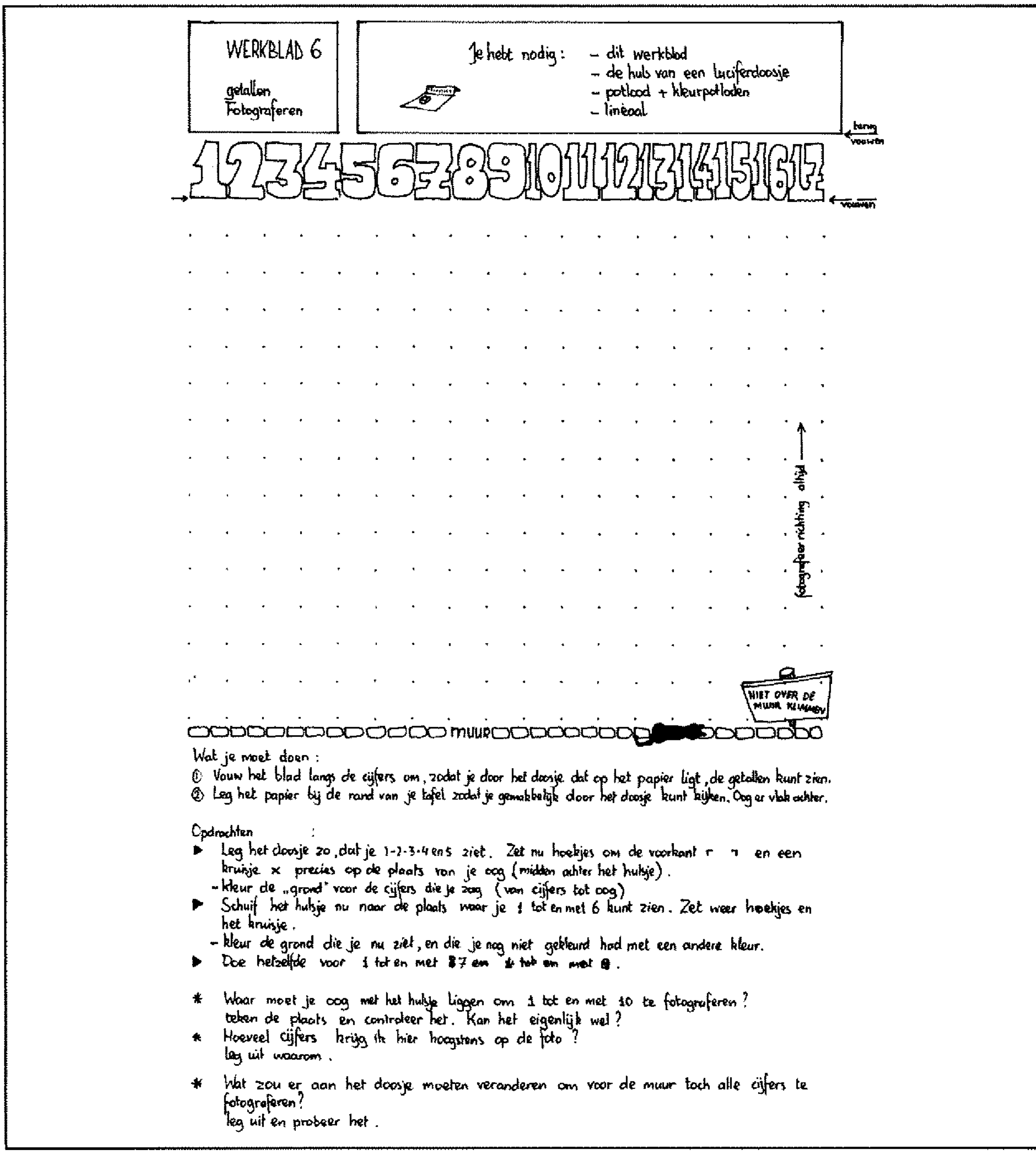
a is fotonummer

b is fotonummer

c is fotonummer

d is fotonummer

lucifersdoosjesfotografie
Les 5: in deze laatste les wordt de ruimtelijke oriëntatie met potlood en liniaal voortgezet tot vlak-meetkundige konstrukties, waarbij de leerlingen onbewust gebruikmaken van bekende eigenschappen van punten, (evenwijdige) lijnen, hoeken, driehoeken en parallellogrammen.
Les 4: 'palen', geeft op dit laatste in zekere zin al een voorbereiding.


WERKBLAD 6

getallen
Fotograferen

Je hebt nodig:
- dit werkblad
- de huls van een luciferdoosje
- potlood + kleurpotloden
- lineaal

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

terug vouwen

vouwen

fotografeer richting altijd

NIET OVER DE MUUR KLIMMEN

MUUR

Wat je moet doen:
① Vouw het blad langs de cijfers om, zodat je door het doosje dat op het papier ligt, de getallen kunt zien.
② Leg het papier bij de rand van je tafel zodat je gemakkelijk door het doosje kunt kijken. Oog er vlak achter.

Opdrachten:
▶ Leg het doosje zo, dat je 1-2-3-4 en 5 ziet. Zet nu hoekjes om de voorkant ⌜ ⌝ en een kruisje x precies op de plaats van je oog (midden achter het hulsje).
- kleur de „grond" voor de cijfers die je zag (van cijfers tot oog)
▶ Schuif het hulsje nu naar de plaats waar je 1 tot en met 6 kunt zien. Zet weer hoekjes en het kruisje.
- kleur de grond die je nu ziet, en die je nog niet gekleurd had met een andere kleur.
▶ Doe hetzelfde voor 1 tot en met 7 en 1 tot en met 8.

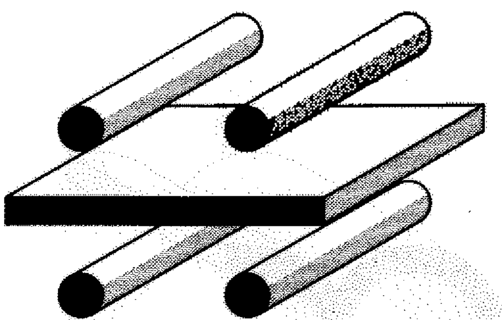
* Waar moet je oog met het hulsje liggen om 1 tot en met 10 te fotograferen? teken de plaats en controleer het. Kan het eigenlijk wel?
* Hoeveel cijfers krijg ik hier hoogstens op de foto? leg uit waarom.

* Wat zou er aan het doosje moeten veranderen om voor de muur toch alle cijfers te fotograferen? leg uit en probeer het.

moraal
Samengevat: een voortreffelijk werkstuk, dat eenmaal onttrokken aan de relatieve eksamenhaast, kan uitgroeien tot een model-projekt voor 'buurtonderwijs'. (Een zwak punt nu nog is, dat elke relatie met andere vakgebieden en de inbedding van het geheel in een sociaal-emotionele kontekst, ontbreekt. Op het eksamen bleek overigens, dat dit wel degelijk aan de orde kwam in de klas.)

Innovatief bezien heeft dit verhaal nog de moraal, dat het wiskobasstandpunt – de onderwijzer(es) primair een vòòr-beeld aanreiken dat door kreatieve vertaling tot een stuk 'eigen' onderwijs moet worden (om-)gevormd – door Gerard Wegmans werkstuk krachtig wordt ondersteund.

kleuters en wiskunde



JORIS MEETGRAAG

Marielle en jesper spelen in de poppenhoek.

.... 'Wat zullen we gaan doen?'
'Het spelletje van de reus met de kabouter.'
'Ja', roept jesper, 'dan was ik de reus.'
'Nee, ik wil hem zijn', zegt marielle.
'Dat kan niet, want ik ben 'groterder' en sterker.'
'Nou, maar jij bent ook geen echte reus, want die is net zo groot als deze kamer', antwoordt marielle.
'Nee hoor, een reus kan over ons huis heen stappen.' ....

Eigenlijk weet niemand hoe groot een reus is, want hij bestaat niet echt. Het is immers een sprookjesfiguur!

JEANNE DE GOOIJER-QUINT

meten aan het eigen lichaam[1])

Jesper en marielle mogen in de kring komen staan.
In de poppenhoek heeft jesper gezegd dat hij groter is dan marielle.
Is dat wel zo ...?
De kinderen gaan met de ruggen tegen elkaar staan en voelen met de handen wie er groter is. De kinderen in de kring reageren eveneens.
Nu komt er een kind bij!
.... 'Waar zal hij/zij moeten staan?' ....
Ze schuiven wat heen en weer totdat de juiste plaats gevonden is.

Marielle is kleiner dan jesper.
Jesper is kleiner dan ans.
⇓
Marielle is kleiner dan ans.

Nu komt er nòg een kind bij.
.... 'Waar komt hij/zij te staan?'....
Het is weer een stapje moeilijker, wanneer je van tevòren je plaats moet bepalen.
We kunnen het probleem ook op een andere wijze aanpakken door gebruik te maken van een kindermeetlat. In plaats van getallen op de meetlat kunnen we bijvoorbeeld dierenplaatjes plakken. De kleuter kan nu gemakkelijk zijn plaats op de meetlat onthouden.
Na een aantal maanden gaan we de kinderen nog eens meten, om te kijken hoeveel ze zijn gegroeid. Het kan natuurlijk voorkomen dat marjan meer gegroeid is dan john.
.... 'Een paar maanden geleden was marjan even groot, of zelfs kleiner dan john, maar nu is marjan groter dan john.' ....

We kunnen ook de omvang van ons lichaam gaan meten. De begrippen 'dik-dun' komen dan aan de orde. Elk kind krijgt een strook papier die op de maat van de omvang wordt afgeknipt.
De kleuters kunnen hun stroken versieren, zodat ieder gemakkelijk zijn eigen strook kan herkennen en hem als ceintuur kan gebruiken.
.... 'Wie is nu dik ... dikker dan ... dun ... dunner dan?' ....
De stroken worden op volgorde gelegd, waardoor er een tabel ontstaat. We kunnen deze opdracht ook na enkele maanden herhalen.
.... 'Ben je dikker ... dunner geworden ... of ben je hetzelfde gebleven?' ....

een zelfportret

De kleuters werken in groepjes van twee. Een groot vel (behang-)papier wordt op de grond gelegd en één kind gaat erop liggen. Het

[1]) Zie: wiskobas-bulletin (jaargang 3 nr. 2, pag. 200-201).

andere kind gaat haar/hem met een potlood omtrekken, waarna het zelfportret wordt uitgeknipt. Vervolgens gaat het andere kind op de grond liggen en dezelfde procedure wordt gevolgd.
De portretten worden gekleurd of geverfd, waarbij de opdracht kan luiden:
.... 'Geef het portret de kleren aan die je zelf erg mooi vindt.'
'Geef het portret de kleren aan die je vandaag aan hebt.' ....
De portretten kunnen op het raam of op de muur geplakt worden, in een tabelvorm van groot naar klein.

een speelliedje

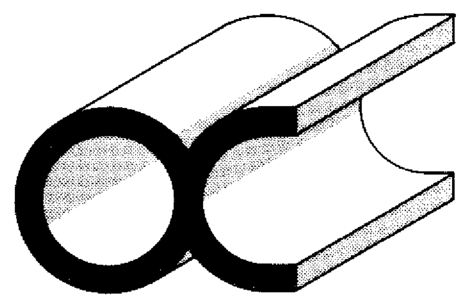
Eén, twee, drie, vier,
hoedje van papier.

Op de tafel liggen een aantal hoeden, groot en klein, om te passen.
.... 'Wie heeft er een groot/klein hoofd?'
'Bij wie past deze hoed? Is de hoed te klein?'
'Die hoed is voor een baby.'
'Is die hoed te groot ... die hoed is voor pappa of voor de juf.' ....
De kinderen beleven erg veel pret bij een verkleedpartij.
Begrippen die hierbij aan bod kunnen komen: groot-klein; lang-kort; dik-dun; breed-smal.

wie kleedt mij aan?
De juf laat een grote en een kleine pop zien. In de klerenkast liggen alle kleren van deze poppen door elkaar. Dat is erg vervelend, want de grote pop heeft nu een trui aan die veel te klein is en de kleine pop heeft een broek aan die te groot is.
.... 'Zullen we samen de klerenkast van de poppen gaan opruimen, zodat de kleren niet meer in de war komen?' ....
Hoe zal de kleuter deze opdracht uitvoeren?

tot slot
Bij het lengtemeten kunnen de volgende faseringen worden aangegeven:
– fase van het vergelijken;
– fase van het ordenen van een aantal dingen;
– fase van het samenstellen;
– fase waarin de natuurlijke maat wordt geïntroduceerd;
– introduktie van de standaardmaat; de noodzaak daartoe kunnen we bespreken met de leerlingen.
Het kind komt slechts tot echte operaties als vanaf het begin een instelling tot aktief-praktisch handelen geëist wordt.

kijk ook eens zo!



PRIEMGETALLEN ZEVEN

In dit artikel gaan we het hebben over natuurlijke getallen (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...). Omdat 10 = 2 x 5, noemen we 10 deelbaar door 2 en tevens deelbaar door 5. Elk getal is deelbaar door 1 en door zichzelf.
De delers van 10 zijn dus 1, 2, 5 en 10. Een getal met meer dan twee delers is een deelbaar getal *(bijvoorbeeld 0, 6, 9, 10).*
Een getal met precies twee delers noemen we een priemgetal.

DIK OORT

indeling getallen
De natuurlijke getallen zijn op de volgende wijze naar de deelbaarheid in drie groepen verdeeld:
- de deelbare getallen;
- de priemgetallen;
- het getal 1; dit getal heeft een uitzonderingspositie, want 1 heeft slechts één deler.

Men kan bewijzen dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Anders gezegd: na elk priemgetal is er nog een groter priemgetal, dus zijn er nog oneindig veel grotere priemgetallen. Als men de natuurlijke getallen van klein naar groot doorloopt, komt men steeds weer een priemgetal tegen. Omdat voor een groot getal de kans groter is dat het deelbaar is door een kleiner getal, dan voor een klein getal, komen de priemgetallen steeds verder uit elkaar te liggen. Het gebied van de priemgetallen wordt, naarmate de natuurlijke getallen groter worden, dus steeds ijler.

vele geheimen
De studie van priemgetallen is erg interessant, omdat deze getallen vele geheimen nog niet prijs hebben gegeven. Zo kent men nog steeds geen metode om na het grootst bekende priemgetal het volgende te bepalen, behalve door van elk getal de delers te zoeken.

zeef van Eratosthenes
Een veel gebruikte manier om de priemgetallen niet groter dan 50 te bepalen, is de 'schrap'-manier die bekend staat onder de naam: *'zeef van Eratosthenes'*.
We beginnen met het opschrijven van de getallen 2 tot en met 50 (0 en 1 zijn geen priemgetallen), waarbij we de even getallen groter dan 2 weglaten, omdat deze getallen minstens drie delers hebben, namelijk zichzelf, 1 en 2:

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49.

Nu gaan we de getallen schrappen die door 3 deelbaar zijn (drievouden). 1×3 moet echter blijven staan. 2×3 is al weg omdat het een even getal is. Het eerste getal dat geschrapt wordt is 3^2 (= 9). De volgende drievouden die geschrapt worden, staan steeds 3 plaatsen verder:

2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, 25, ~~27~~, 29, 31, ~~33~~, 35, 37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47, 49.

We zouden nu de viervouden moeten schrappen, maar dat is niet meer nodig; die zijn immers al weg omdat viervouden even getallen zijn.
Nu schrappen we de vijfvouden die niet 'priem' zijn. 1×5 moet blijven staan. U begrijpt natuurlijk dat 2×5, 3×5 en 4×5 er al uit zijn. De eerste die geschrapt kan worden is 5^2 (=25). De volgende vijfvouden staan weer 5 plaatsen verder. Het kan natuurlijk voorkomen dat we er een schrappen die al eerder doorgehaald is (bijvoorbeeld 45):

2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~25~~, ~~27~~, 29, 31, ~~33~~, ~~35~~, 37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47, 49.

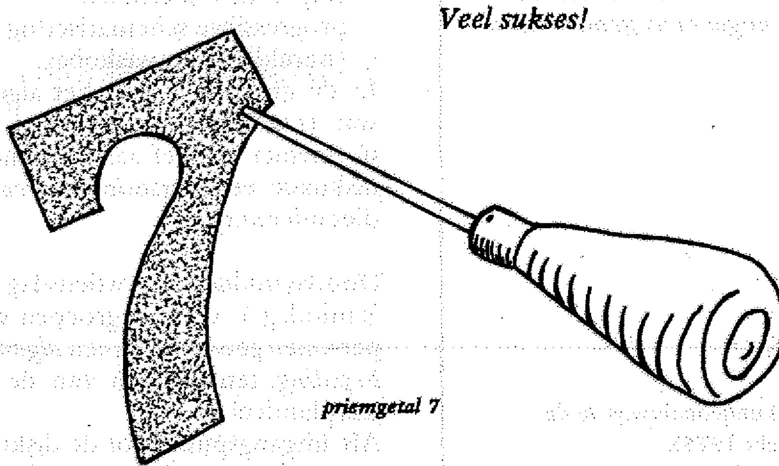
De zesvouden hoeven niet meer geschrapt te worden omdat ze als even getallen (ook als drievouden) al weg zijn.
Nu gaan we de zevenvouden schrappen en moeten dus beginnen met 7^2 (= 49).
Daarmee zijn we ons gebied uit en dus klaar:

2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~25~~, ~~27~~, 29, 31, ~~33~~, ~~35~~, 37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47, ~~49~~.

Alles wat niet geschrapt is, is dus 'priem'.
Het voordeel van deze metode is, dat we niet van elk getal hoeven na te gaan hoeveel delers het heeft.

opdracht
Gaat u nu eens met deze metode alle priemgetallen te voorschijn halen die niet groter zijn dan 120.

Veel sukses!


priemgetal 7

in antwoord...

WISKOBASKONFERENTIE 1976, NOORDWIJKERHOUT

De wiskobaskonferentie voor onderwijsgevenden aan basisscholen, kleuterscholen, pedagogische akademies, opleidingsscholen voor kleuterleidsters, scholen voor voortgezet onderwijs en voor medewerkers van schoolbegeleidingsdiensten, die gehouden werd van 29 maart tot en met 1 april 1976 te noordwijkerhout, had een andere opzet dan in voorgaande jaren.
Lag in voorgaande jaren de nadruk op informatie, ditmaal werd alle aandacht gevestigd op respons. Vandaar de konferentienaam: in antwoord ....
Centraal stond de respons op het 'Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool' (leerplandeel 2).
De samenstelling van de groep konferentiedeelnemers was ongeveer dezelfde als in 1975. Alleen waren er nu wat meer vertegenwoordigers van het basisonderwijs. Dat hadden er best nog meer mogen zijn, want hun inbreng vanuit de praktijk gaf aan de diskussies een dimensie die in voorgaande jaren nogal eens gemist werd.

LOUIS GILISSEN

[1]) Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool (utrecht 1975).

huiswerk
De deelnemers hadden van tevoren huiswerk opgekregen. Hen was gevraagd *leerplandeel 2* [1]) te bestuderen en hun algemene reakties in te sturen. Ieder was tevens gevraagd twee studieonderwerpen te kiezen uit tien in het programmaboekje opgenomen alternatieven. Deze studieonderwerpen betroffen deelleergangen, tema's en andere essentiële punten, en waren bedoeld om naast algemene reakties ook een bespreking van en een respons op meer konkrete punten op te roepen.
Verheugend was het grote aantal inzendingen van algemene reakties vóór de konferentie en het nivo daarvan. Een samenvatting van deze reakties diende als uitgangspunt voor de diskussies op dinsdag en woensdag.
De maandag, dinsdag, en woensdag kenden drie soorten aktiviteiten: *lezingen, groepsdiskussies* en een *keuzeprogramma*, dat weer bestond uit lezingen, videovertoningen en workshops.

diskussies
De diskussies op maandag werden gehouden over de tien *studieonderwerpen*. Voor elk onderwerp was er een diskussiegroep. Een ieder was ingedeeld in de groep waarin één van de door haar of hem gekozen onderwerpen aan de orde was, en wel zó dat er een min of meer evenwichtige verdeling van de konferentiedeelnemers over de groepen bestond.

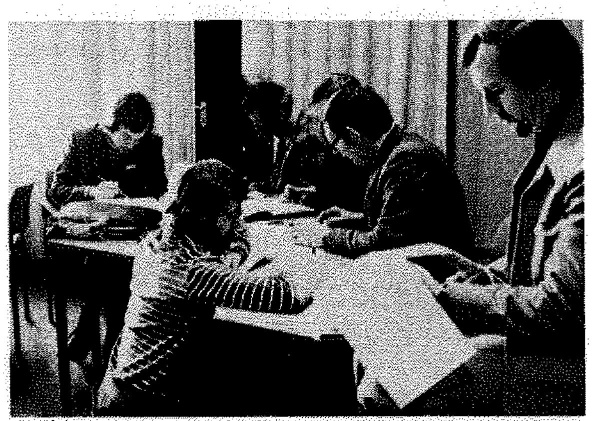
In de groepen kwamen respektievelijk aan de orde:
- bouwen met blokjes;
- de abakus als leermiddel in klas twee tot en met zes;
- analyse van het tema 'gulliver';
- kleuterschoolaanlagereschoolendan;
- analyse van de deelleergang 'oppervlakte';
- werken met grote hoeveelheden;
- getallenlijn als denk- en werkmodel;
- lengte, afstand, lengtemeting, afstandmeting in de onderbouw;
- progressieve schematisering bij het cijferen;
- 'wereldjes' van wiskobas.

In de groepen is over het algemeen – na een wat trage start – entoesiast gewerkt. Iedere deelnemer schreef aan het eind van de groepsdiskussie een persoonlijke reaktie op het studieonderwerp.

Dinsdagmiddag en woensdag ('s morgens en 's middags) werd in groepen van ongeveer 20 personen gewerkt aan een *algemene standpuntbepaling* ten aanzien van de voorstellen uit leerplandeel 2.
Als uitgangspunt voor de diskussie fungeerden de algemene reakties van de deelnemers, die

waren gebundeld in een paper. In dit stuk waren een tiental stellingen (samenvattingen van standpunten) geformuleerd, zoals:

'In leerplandeel 2 is een aantal matematisch-didaktische keuzen vrij duidelijk zichtbaar, soms ook gemotiveerd! Veel respondenten hebben vele keuzen gesignaleerd en hun instemming of afwijzing betuigd. De belangrijkste keuzen worden hier samengevat. Bepaalt u een standpunt! (in uw groep of individueel):



10.1 – geen aandacht voor formele verzamelingentaal;
alleen intuïtief gebruik van bepaalde termen in relatie met logische problemen in de hogere leerjaren;
10.2 – vorming van het begrip 'natuurlijk getal' vanuit het vergelijken en meten van grootheden (meetgetal);'

In de groepen werd verschillend gewerkt. Een enkele groep hield zich met geen van deze vraagpunten bezig, maar begaf zich op het terrein van de innovatie. Men besprak bijvoorbeeld de vraag: hoe kunnen we de schoolteams in de regio zodanig tegemoet treden dat ze aan een verandering van hun rekenonderwijs willen gaan werken? welke middelen staan hierbij ter beschikking?
Aan het eind van de diskussies ging weer iedere konferentiedeelnemer aan de slag om zijn persoonlijke reaktie, nu gevoed door de diskussies met anderen, op schrift te stellen. Evenals de reakties na de maandagbesprekingen zullen deze notities geanalyseerd worden en mede de basis vormen voor het responsboek. Dit responsboek wordt naar alle waarschijnlijkheid in de zomer van 1977 gepubliceerd en zal een overzicht bevatten van de reakties op de, dit jaar verschijnende, leerplanpublikaties.

Op de woensdagavond werd in een *plenaire verslaggeving* o.m. de aanzet tot regionale verspreiding van de wiskobasideeën aan de orde gesteld en bediskussiëerd. Bovendien werd een inventarisatie gegeven van de meningen omtrent de matematisch-didaktische keuzen die in de samenvatting van de reakties geformuleerd waren.

lezingen
Door het andere karakter van de konferentie, was ook het aantal lezingen kleiner dan bij vorige gelegenheden.
Na de *openingsrede* van Henk Meijer, waarin hij de konferentie plaatste in het geheel van de leerplanontwikkeling en -afwikkeling met betrekking tot het wiskundeonderwijs op de basisschool, volgde de eerste lezing pas op dinsdagmorgen.
Adri Treffers gaf toen aan de hand van een klein probleem-georiënteerd stuk onderwijs, een uiteenzetting van enkele *achterliggende visies* ten aanzien van wiskundeonderwijs, zoals die in reakties van een aantal mensen op een beschrijving van dit stukje onderwijs naar voren kwamen. Hij knoopte daar tevens een schets van de doelstellingen en uitgangspunten van wiskundeonderwijs aan vast.

Aan het begin van de dinsdagmiddag gaf Johan van Bruggen een *samenvatting* van de vooraf ingestuurde *reakties* van konferentiedeelnemers op *leerplandeel 2*. Deze samenvattting en analyse, waarbij ook opmerkingen uit responsschriftjes die tijdens de konferentie van maart 1975 waren verzameld, betrokken werden, mondde uit in aanzetten tot de algemene diskussies van dinsdag en woensdag.

Aan het eind van de dinsdagmiddag gaf Jos Baay, hoofd van de Jozefschool te bussum zijn *persoonlijke visie* op het ontwikkelen van een *schoolwerkplan*. Hij ging daarbij uit van de situatie waarin zijn school door heroriëntering en begeleiding verkeert. De Jozefschool is een school die participeerde in de eksperimentele opzet voor het tweede model heroriënteringskursus te hilversum.
Jos Baay schetste een aantal problemen en in samenhang daarmee een aantal voorwaarden, waaraan zijn inziens voldaan moet worden, wil je als schoolteam kans van slagen hebben een eigen schoolwerkplan te ontwikkelen.

Prof. Freudenthal hield op dinsdagavond een lezing waarin hij enkele fundamentele gedachten ontvouwde met betrekking tot de ontwikkeling van een *matematische attitude* aan de hand van konkrete voorbeelden van kinderen in leersituaties.

Op woensdag was er slechts één lezing te beluisteren. Henk Meijer gaf een duidelijke uiteenzetting van de *plannen van het iowo*. Dat hierbij een aantal vragen onbeantwoord bleven is niet te verwonderen, gezien de situatie van de leerplanontwikkeling en de struktuur van het onderwijs in nederland op dit moment.

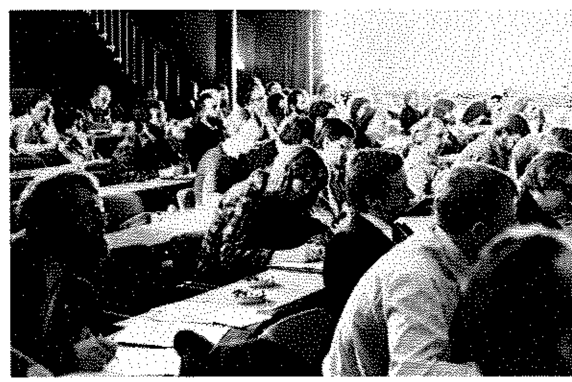
keuzeprogramma's
Op dinsdagmorgen waren een aantal lezingen en aktiviteiten gelijktijdig gepland. De konferentiedeelnemers konden een keuze doen uit een gevariëerd pakket van mogelijkheden: aktief meewerken aan de ontwikkeling van een serie lessen met als onderwerp 'topologie', het kijken naar en diskussiëren over video-opnamen van lessen, werken aan het ontwerp van een serie aktiviteiten voor kleuters rondom het onderwerp 'bouwen met blokjes', een lezing over het gedifferentieerd bekijken van de differentiatie met betrekking tot het wiskundeonderwijs op de basisschool, en een lezing over het gebruik en misbruik van leerpsychologische teorieën en eksperimenten bij de leerplanontwikkeling van wiskundeonderwijs op de basisschool.

Na 16.00 uur was er op woensdag eveneens een keuzeprogramma. Men kon kiezen uit: een rekreatieve strandwandeling, rondkijken op de tentoonstelling van publikaties en onderwijsleerpakketten voorzien van foto's en leerlingenmateriaal, en het bekijken van video-opnamen van lessen.

donderdag
De donderdag week in zoverre af van de overige konferentiedagen dat nu de verschillende kategorieën van konferentiedeelnemers in homogene groepen bij elkaar kwamen om te praten over de implikaties van *leerplandeel 2* voor de eigen situatie. Na een lezing van Johan van Bruggen over 'wat kan een schoolwerkplan zijn?', waarin hij aangaf wat er zoal in een schoolwerkplan thuishoort, ging men uiteen in groepen van:
– docenten aan pedagogische akademies;
– docenten aan opleidingen voor kleuterleidsters;

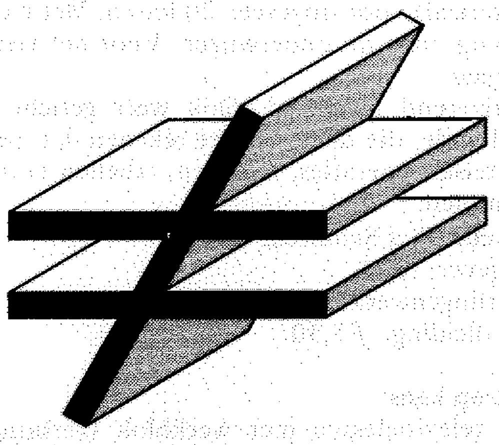
– onderwijsgevenden uit het basisonderwijs en medewerkers van schoolbegeleidingsdiensten (onderwerp: schoolwerkplanontwikkeling);
– medewerkers van schoolbegeleidingsdiensten (onderwerp: beleid in verband met innovatie, studieplan voor begeleiders).

Enige punten uit de *verslaggeving:*
- In de diskussie van docenten aan pedagogische akademies kwam naar voren dat een goed stageplan noodzakelijk is, niet alleen voor de wiskunde-didaktiek maar als totaalplan voor de opleiding.



- Docenten van de opleidingsscholen voor kleuterleidsters spraken de wens uit dat er een konferentie zou worden georganiseerd voor henzelf, voor begeleiders van het kleuteronderwijs en voor kleuterleidsters. In zo'n konferentie zou het aksent moeten liggen op het produktief bezig zijn, en zouden er korte lezingen kunnen worden gehouden met achtergrondinformatie.
- Onderwijsgevenden uit het basisonderwijs en medewerkers van schoolbegeleidingsdiensten (over innovatie). Innovatie zal plaats moeten vinden langs veel wegen, zoals televisie en regionale werkgroepen. Sterk werd beklemtoond, dat er een zorgvúldig innovatiebeleid gevoerd moet worden in verband met het gevaar van een mogelijke innovatiemoeheid.
- De groep medewerkers van schoolbegeleidingsdiensten (over beleid met betrekking tot innovatiezaken) stelde zich achter een studieplan voor begeleiders, waarin de volgende aspekten aan de orde komen:
  – verdiepingen op matematisch gebied;
  – verdiepingen op matematisch-didaktisch gebied;
  – ervaring in de praktijk met wiskundeonderwijs;
  – studie van de implikaties voor de andere aspekten van de begeleiding.

nieuw op de markt



EEN OVERZICHT

De vorige maal bespraken we de eerste twee deeltjes van 'Kien'. *We dachten toen aan een vervolgbespreking van de deeltjes 3 tot en met 8, waarbij we ook wat dieper wilden ingaan op de mogelijke inpassing van deze werkbladen binnen een traditionele metode. Er zijn echter enkele redenen om hier voorlopig nog even aan voorbij te gaan.*
Allereerst beschikken we nog niet over de officiële uitgaven van de vervolgdeeltjes. Wel hebben we de manuskripten van de deeltjes 3 tot en met 6 gezien, die kwa inhoud wederom voortreffelijk lijken.
Ten tweede zijn we van plan om in de komende jaargangen van het wiskobas-bulletin ruimere aandacht te schenken aan het samenstellen van plannen voor wiskundeonderwijs.

ED DE MOOR

We stellen ons voor om bij deze besprekingen met voorbeelden te werken, zodat we vanzelf nog terug zullen komen op de additionele spullen, die op dàt moment op de markt zijn. Op den duur zal het ook noodzakelijk zijn enkele metoden (traditionele, traditioneel-moderne en moderne) vergelijkenderwijs te beschrijven. Tenslotte blijkt telkens weer, dat lang niet iedereen op de hoogte is van de verschillende besprekingen die we in de eerste vijf jaargangen gepubliceerd hebben.
De vraag om adviezen welke materialen geschikt zijn, keert steeds weer terug. Dit heeft ons doen besluiten aan het einde van deze jaargang nog eens een overzicht te geven van de additionele spullen die – voorzover ons bekend – thans voorhanden zijn.
'Nieuw op de markt' is daarom dit keer een misleidende titel. We hopen dat die schoolteams, die voorlopig nog met een goede traditionele metode willen blijven werken (iets wat wij nog steeds adviseren), maar toch wat aan de 'verlevendiging' van dit rekenen willen doen, met dit overzicht gebaat zijn.

▶ **WERKKAARTEN EN WERKSCHRIFTEN**

kien
Acht werkbloks met werkbladen voor de klassen drie tot en met zes. Met handleidingen voor de onderwijzer.
Veel gevariëerde rekenopdrachten met een sterk motiverend karakter. Verder ruime aandacht voor roosters, tabellen, koördinaten, meten, grafieken, handig tellen, meetkundige figuren, eenvoudige kansrekening, taal- en strategiespelletjes.
Auteurs: Ger Janssen e.a.
Uitgever: Malmberg (i.o.v. centrum onderwijs service – nijmegen).

Werkbloks 1 en 2: *f* 3,90 per stuk.
Handleiding (bij 1 en 2): *f* 19,50.
Besproken in wiskobas-bulletin, jaargang 5 nr. 4, pag. 20 e.v.

klaar? ga maar spelen!
Set van 112 werkkaarten voor de klassen één tot en met zes. Met handleiding voor de onderwijzer. Door de duidelijke doe-taal van de kaarten geschikt voor individuele of groepsgewijze verwerking.
Ruime aandacht voor inzichtelijk werken met getallen, handig tellen, omtrek en oppervlakte, meten, redeneren, ontdekken van patronen en strategiespelletjes.
Bruikbaar voor een (wiskunde-)werkhoek.
Auteurs: Jan Nieland e.a.
Uitgever: Malmberg.

Set kaarten : *f* 62,25.
Handleiding: *f* 27,50.
Besproken in wiskobas- bulletin, jaargang 2 nr. 3, pag. 741 e.v.

wees wijs met wiskunde
Twee deeltjes voor de klassen vier, vijf en zes.
Deel 1 is hoofdzakelijk gericht op roosters en koördinaten.
Deel 2 bevat onderwerpen als grafieken, spiegelen, omtrek en oppervlakte en redeneren. Wat knipogend naar de huidige wiskunde van het voortgezet onderwijs.
Auteurs: Jaap Boerema e.a.
Uitgever: Kok, kampen.
Deel 1: *f* 5,20.
Deel 2: *f* 39,50.

Besproken in wiskobas-bulletin, jaargang 1 nr. 5, pag. 389 en jaargang 5 nr 2/3, pag. 22.

wiskunde doen
Set van 82 werkkaarten en 6 antwoordkaarten voor de klassen vijf en zes. De nadruk ligt bij deze kaarten op het *doen*, in de letterlijke zin. Veel zagen, knippen en plakken, naar aanleiding van vaak lastige matematische problemen.
Auteurs: Pearcy e.a. (bewerking: U. Zeemering).
Uitgever: Malmberg.
Set kaarten en handleiding samen: *f* 89,–.
Besproken in wiskobas-bulletin, jaargang 3 nr. 3, pag. 223 e.v.

zodoende
Drie werkschriften voor de zesde klas. Mogelijkheden om het rekenen praktisch toe te passen binnen projektmatig onderwijs, dat vooral in de eerste twee delen sterk aan de realiteit is gebonden.
Auteur: Ger Janssen.
Uitgever: Malmberg (i.o.v. centrum onderwijs service – nijmegen).
Werkschriften: *f* 2,40 per stuk.
Handleiding: *f* 9,90.
Informatieboekje: *f* 3,–.
Opmerking: ook heel geschikt voor het lager beroepsonderwijs.
Besproken in wiskobas-bulletin, jaargang 5 nr. 1, pag. 22 e.v.

▶TELEVISIESERIES

tel voor twee
Vier televisielessen met werkblok van 40 werkbladen (verbruiksmateriaal) voor de tweede klas. Met handleiding voor de onderwijzer.
Goed verlevendigingsmateriaal. Veel aandacht voor het vaardigheidsaspekt, alsook voor het positiestelsel (gebruik van de abakus), ordenen, getallenlijn, tabellen en het tijdsbegrip.
Auteur: Piet Scholten.
Uitgever: NOT.
Leerlingenboek: *f* 2,15.
Handleiding plus vier posters: *f* 7,50.
Abakus (rekengleuf): *f* 1,50.

vier kan 't
Drie televisielessen met werkblok (verbruiksmateriaal) voor ongeveer 20 lessen. Met handleiding voor de onderwijzer. Voor het vierde leerjaar.
Aktiverend materiaal. Ook weer gericht op wiskunde, die dicht bij het rekenen ligt: positiestelsel, operaties, schatten, tabellen en diagrammen.
Auteur: Piet Scholten.
Uitgever: NOT.
Leerlingenwerkboek en rekenschijf: *f* 2,65.
Handleiding: *f* 5,50.

kijk op kans
Zes televisielessen met werkblok (verbruiksmateriaal) voor ongeveer 20 lessen. Met handleiding voor de onderwijzer. Voor de hoogste leerjaren van de basisschool. Het projekt is gericht op aktief wiskunde bedrijven. Hoofddoel is eenvoudige statistiek en kansrekening. De oefenvaardigheid blijft binnen de aandacht.
Auteurs: Piet Scholten e.a.
Uitgever: NOT.
Werkschrift en kanstol: *f* 2,65.
Onderwijzersboek: *f* 7,50.
Literatuur: wiskobas-bulletin, jaargang 2 nr. 4/5, pag. 878 e.v. en jaargang 2 nr. 6, pag. 1000 e.v.

zie zo
(in voorbereiding)
Een maandelijks programma voor de kleuterschool. Met spelbladen. Start in september 1976.

een beetje veel
(in voorbereiding)
Zes televisielessen voor de derde klas. Met bijbehorend werkboek. Start in het voorjaar van 1977.

▶ONDERWIJZERSBOEKEN

rekenactiveringsprogramma
Twee delen met suggesties voor de onderwijzer om het rekenonderwijs in de eerste twee klassen te verlevendigen. Veel onderdelen zijn ook bruikbaar op de kleuterschool.
Helaas nogal wat nadruk op de verzamelingenleer.

Geschikt voor aktieve leerkrachten.
Auteurs: Ger Janssen e.a.
Uitgever: Malmberg (i.o.v. centrum onderwijs service — nijmegen).
Werkmappen: *f* 82,–.
Werkbladen : *f* 4,50 per blok.
Besproken in wiskobas-bulletin, jaargang 2 nr. 2, pag. 639 e.v.

suggesties voor verlevendiging van het wiskundeonderwijs op de basisschool
Veel praktische ideeën en verdieping voor de geïnteresseerde onderwijzer.
Oorspronkelijke titel *'Notes on mathematics in primary schools'*.
Bewerking: P. Woestenenk.
Uitgever: Malmberg.
Prijs: *f* 25,–.
Besproken in wiskobas-bulletin, jaargang 2 nr. 4/5, pag. 859.

wiskunde in wording
Een serie van twaalf deeltjes over uiteenlopende wiskundige onderwerpen. Dient door de onderwijzer bewerkt te worden. Bevat veel meetkunde.
Auteur: Stuart Bell.
Bewerking: W. den Hartog.
Uitgever: Malmberg.
Prijs: *f* 3,80 (per deeltje).
Handleiding: *f* 41,25.
Besproken in wiskobas-bulletin, jaargang 1 nr. 5, pag. 338 en jaargang 2 nr. 1, pag. 525.

▶ **MEETKUNDE**

annette
make a bigger puddle make a smaller worm
another, another, another and more

Drie speelse boekjes over spiegelingsmeetkunde voor kleuterschool tot en met klas zes.
Auteur: Marion Walter.
Uitgever: André Deutsch, londen.
(Ook in het duits: uitgeverij Anette Verlag, wesel, westduitsland).
Prijs: £ 1,95 per deel.
Besproken in wiskobas-bulletin, jaargang 4 nr. 2, pag. 124 en in jaargang 5 nr. 2/3, pag. 22.

matema vormenspel
Werkkaarten met legstukjes en handleiding voor kleuterschool tot en met klas zes.
Uitstekend voorbereidend vlakmeetkundig materiaal.
Auteurs: Bauersfeld e.a.
Bewerking: P. Woestenenk.
Uitgever: Malmberg.
Werkkaarten: *f* 75,–.
Legstukjes : *f* 15,75.
Handleiding : *f* 25,–.
Besproken in wiskobas-bulletin, jaargang 4 nr. 1, pag. 21.

matema körperspiel
Werkkaarten met blokken en handleiding voor kleuterschool tot en met klas zes.
Uitstekend voorbereidend ruimtelijk meetkundig materiaal.
Auteurs: Bauersfeld e.a.
Uitgeverij: Schroedel Verlag, hannover.
Prijs: DM 37,–.
Handleiding: DM 13,40.
Besproken in wiskobas-bulletin, jaargang 4 nr. 3/4, pag. 254.

▶ **WISKOBAS-BULLETIN**
De nummers van de eerste vier jaargangen bevatten vele suggesties, zowel in beschrijvende vorm als in te kopiëren werkbladen.

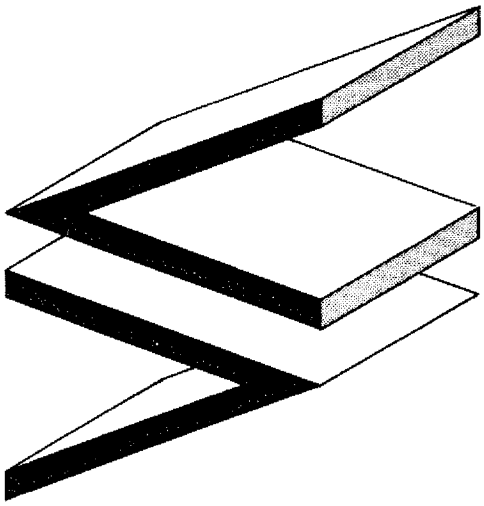
jaargang 5
leerplandeel 1: 'De kiekkas van wiskobas' (Adrie Treffers); teoretische verantwoording van het wiskobasprojekt;
leerplandeel 2: 'Model voor een schoolwerkplan'; een overzicht van het wiskobasprojekt;
leerplandeel 3: aktiviteitskaarten 'bussen en blokken';
leerplandeel 4: aktiviteitskaarten 'stadsplan', kollagekrant 'de wiskobasbode', alsmede een temabeschrijving 'telefoneren'.

Deze serie zal vervolgd worden.[1])

---

[1]) Zie voor prijzen en bestelwijze de binnenzijde van de vooromslag.

berichten



REISERVARINGEN

Eind maart, begin april brachten wij een achtdaags bezoek aan de ussr *in het kader van een ekskursie van het instituut voor onderwijskunde te groningen. Daarbij werden bezoeken gebracht aan instituten te leningrad en moskou. Gezien de toenemende belangstelling voor de russische psychologie binnen het wiskobas-leerplanontwikkelingswerk (vergelijk Goffree en Van Bruggen) volgen enkele reisindrukken.*

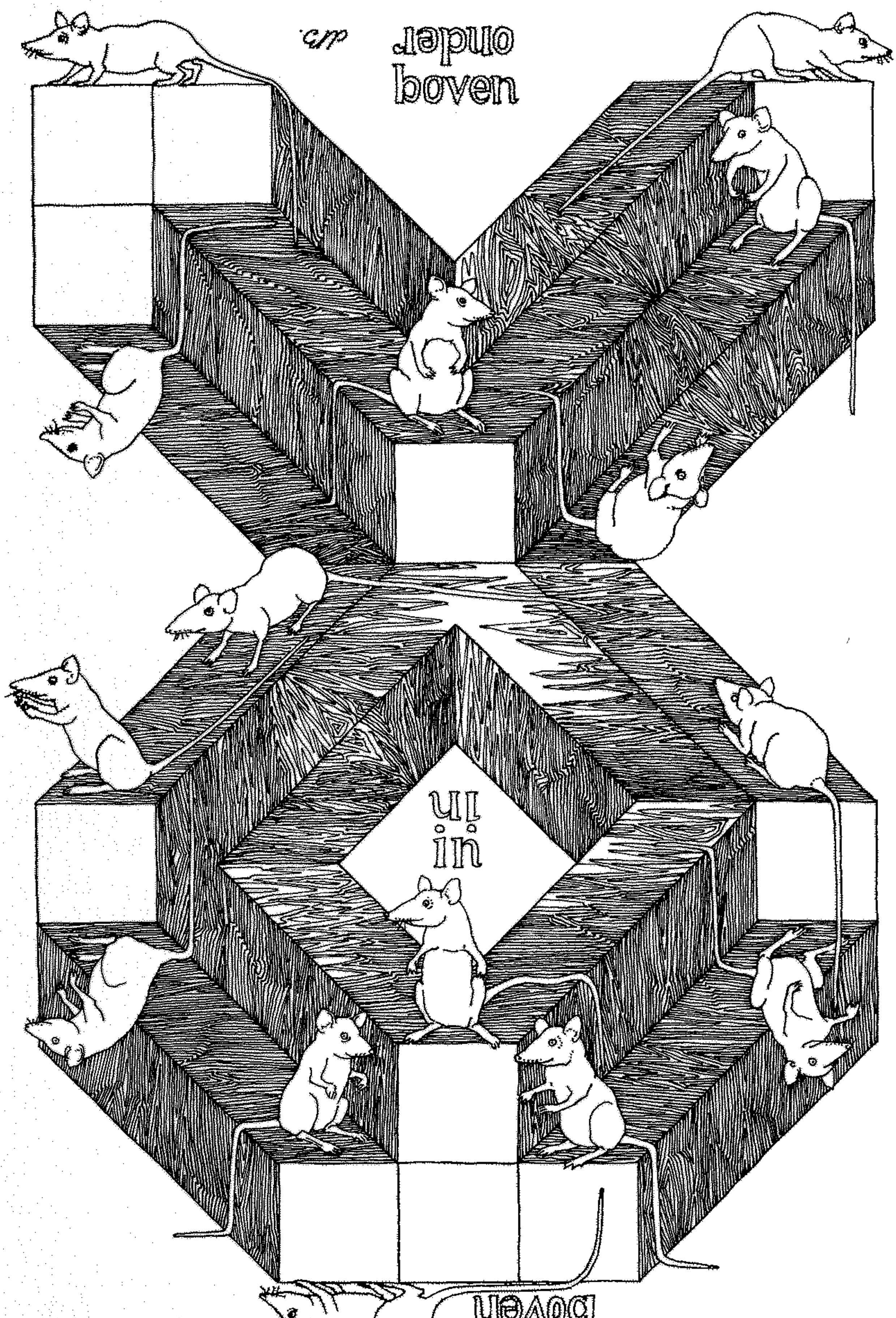
KLAAS KOSTER

Ten eerste is het goed er nog eens aan herinnerd te worden, dat de in nederland gepubliceerde programma's van Gal'perin en Davydov 'eksperimentele' programma's zijn. Weliswaar worden deze programma's in de vorm van 'schooleksperimenten' beproefd en is er als zodanig wel een verband met de onderwijspraktijk, in het merendeel van de russische scholen wordt echter nog gewerkt met een programma, waarin het traditionele rekenonderwijs de hoofdrol speelt. Dat geldt niet alleen voor de programma's van Davydov en Gal'perin, ook de vernieuwingsvoorstellen van Zankov zijn niet op landelijke schaal ingevoerd.
Net zo min als men het nederlandse rekenonderwijs moet beoordelen op grond van de aktiviteiten op de ontwerpschool van wiskobas in arnhem, moet men ook de russische onderwijssituatie niet beoordelen op basis van eksperimentele programma's die weliswaar op ruime schaal worden beproefd.

De moeilijkheid van een verkenning van het russische onderwijssysteem is, dat men telkens wordt gekonfronteerd met de officiële verhalen over het sukses van de vernieuwingen, zonder dat men de gelegenheid heeft de suksesverhalen te kontroleren. Een aardig voorval in dit verband was dat degene die de lezing van Zankov vertaalde, duidelijk moeite had klakkeloos aan te nemen dat de leerlingen in de scholen waar Zankov werkte, zò gemotiveerd waren dat ze soms zelfs het speelkwartier wilden overslaan en na schooltijd door wilden werken aan de opgaven.
Het is moeilijk om in dit soort verhalen te bepalen, waar de situatieschildering van een vernieuwingspoging overgaat in propaganda bedrijven. Hoewel dit laatste stellig geen typisch russisch verschijnsel is, krijgt het door een vermenging met de ideologische achtergrond van waaruit men in de ussr werkt, toch enigszins een propaganda-effekt.

Over de ontwikkeling van de ideologie in de russische onderwijswetenschap schreef J.F. Vos een boek, waarop hij in mei j.l. in groningen is gepromoveerd. Het boek heeft de titel *'Onderwijswetenschap en Marxisme'*[1]) en handelt over de metodenstrijd in de sovjetonderwijswetenschap. Voor iedereen, die geïnteresseerd is in de filosofische achtergronden van het russische onderwijs, is dit een zeer nuttig overzicht.

[1]) Verkrijgbaar bij Tjeenk Willink, groningen (prijs *f* 45,–).


boven
in
onder
dB.