wiskobas bulletin

rubriekdeel

juargang 5 nr 4
april 1976

(met afzonderlijk leerplandeel)

WISKOBAS-BULLETIN (rubrieken)
– bulletin ter begeleiding van het wiskunde-onderwijs
– verschijnt gedurende de vijfde jaargang 6 keer.

Jaargang 5 nr. 4 – april 1976
Met afzonderlijk leerplandeel

INHOUD

Redaktieadres
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht
t.a.v. Sylvia Pieters (adm.) of Rob de Jong (kopij)

Abonnementenadministratie
STICHTING IVIO,
Postbus 37, Lelystad.
Voor aanmeldingen, adreswijzigingen, betalingen, enz.

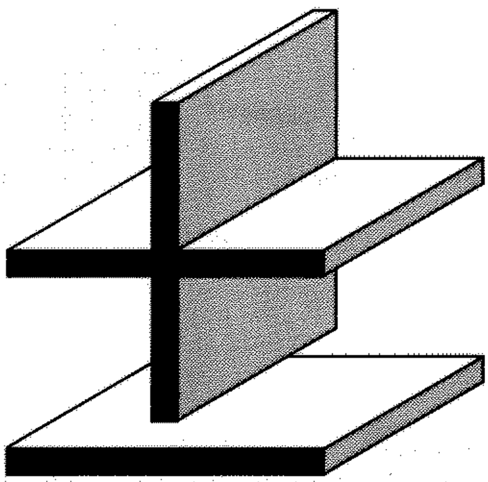
Abonnementsprijs
Per jaargang *f* 40,–.
Reduktietarief voor studenten P.A. en wiskobas-kursisten *f* 30,–.
Gelieve uitsluitend te betalen met aksept-girokaarten. Deze worden u toegezonden.

Aan de vraag naar volledige oude jaargangen van het Wiskobas-Bulletin kunnen we helaas niet meer voldoen. Verschillende nummers zijn uitverkocht.
Van de volgende afleveringen is nog een beperkt aantal eksemplaren verkrijgbaar:

jaargang 2, nr. 6	– *f* 7,50
jaargang 3, nr. 2	– *f* 7,50
jaargang 3, nr. 3	– *f* 7,50
jaargang 3, nr. 4/5	– *f* 7,50
jaargang 4, nr. 2	– *f* 7,50
jaargang 4, nr. 5	– *f* 7,50
jaargang 5, nr. 1	– *f* 10,–
jaargang 5, nr. 2	– *f* 25,–

Alleen na ontvangst van uw storting op postgirorekeningnummer 3105662 t.n.v. R.U.-IOWO te utrecht, zal u de gewenste aflevering worden toegezonden.

redaktioneel



Intussen zult u — net als wij — wat zijn bekomen van de schrik. 'Het overzicht' (leerplandeel 2) is erg dik geworden en vraagt dus een aanzienlijke hoeveelheid kijk-, blader- en studietijd. Lang niet iedere lezer zal de gelegenheid hebben gehad om het al grondig door te nemen. Is 'het overzicht' uit de hand gelopen en 'per ongeluk' zo dik geworden? Is het zo, dat een schrijver zich niet kon beheersen bij het aanschouwen van al dat schoons en toen teveel pagina's produceerde?

Het overzicht is dik geworden door de vele voorbeelden. Denk aan de foto's, tekeningen, verkleinde werkbladen, fragmenten uit klassegesprekken,... De redaktie heeft de voorbeelden niet *opgenomen om de lay-out levendiger, minder droog te maken. De voorbeelden zijn geen ekstraatjes, die net zo goed gemist kunnen worden.*
Een overzicht zonder voorbeelden was ongetwijfeld veel dunner geworden. En de zeggingskracht navenant minder.

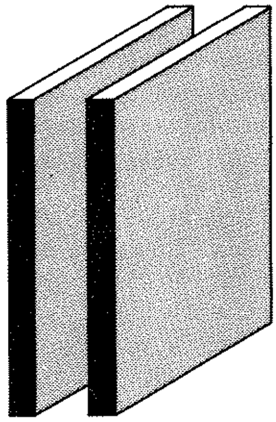
De voorbeelden in het overzicht bedoelen de totaliteit betekenis te geven voor de lezer. Een simpele foto 'zegt' soms meer dan pagina's fraai proza, een gespreksfragment geeft het klassegebeuren duidelijker weer dan een 'afstandelijke' beschrijving. Door de voorbeelden kan, al lezend, onderwijs 'gedacht' worden bij het overzicht.
Vervolgpublikaties (de rode delen 3, 4 en ....) zullen nog meer illustraties, zij het van andere aard, bevatten. Illustraties namelijk, waarmee de lezer in de klas aan het werk kan.
Het overzicht krijgt dan niet alleen een (imaginaire) betekenis vanuit het lezen, maar door de vervolgdelen tevens een (realistische) betekenis vanuit de ervaring. Eerstgegeven waarderingen, die al lezend opborrelden ('leuk'; 'te hoog gegrepen'), worden bevestigd, ontkend, gekorrigeerd ('ik vond het leuk, maar de leerlingen vinden er niets aan').

* * *

In de lopende jaargang zullen nog twee (overzicht-illustrerende) rode delen verschijnen: de leerplanpublikaties 3 en 4. In het bijgevoegde nummer 3 staan 36 werkbladen met praktijkaanwijzingen afgedrukt.
Nummer 4 verschijnt in de zomermaanden en zal naast werkbladen tevens een beschrijving van een tema bevatten.
In de nieuwe (vijfde) jaargang zullen de leerplandelen van het wiskobas-bulletin — zo mogelijk — steeds opgebouwd worden volgens het principe: zowel direkt (makkelijk) hanteerbaar materiaal (losse tips, werkbladenseries), als beschrijvingen van 'rijke' problemen, tema's en projekten.
De leerplandelen tezamen (vanaf nummer 3) vormen een eenheid en moeten als zodanig gelezen worden. Kennisname van een 'deel' kan een verkeerde beeldvorming omtrent het 'geheel' bewerkstelligen: wiskobas werkt alleen met ... (vul maar in: werkbladen, problemen, tema's). Te weten dat het overzicht (waarin én werkbladen én tema's én problemen staan) als nummer 2 hieraan vooraf is gegaan, geeft enig vertrouwen dat het met de 'vertekeningen' wel mee zal vallen. Het 'rode deel', dat gewijd zou worden aan de 'respons uit het onderwijsveld', stellen we nog even uit, om iedereen de gelegenheid te geven, zowel vanuit het lezen als vanuit de ervaring te reageren.
In de komende afleveringen van de 'groene delen' zullen enkele artikelen staan over het samenstellen van schoolwerkplannen. Wellicht kunnen de overzicht-illustrerende nummers van hieruit nog een andere funktie krijgen.

ROB DE JONG

kolommen



EEN KLEURLOOS KLEUREN-PROBLEEM

Hoeveel kleuren heb je nodig om een landkaart — een kaart van landen — zò te kleuren dat elk land een kleur krijgt en dat de landen die een grens gemeen hebben, een verschillende kleur krijgen?
De kaart van figuur 1 vereist vier kleuren.

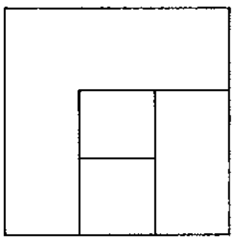


fig. 1

Het is een vermaard onopgelost probleem, of je er werkelijk altijd met vier kleuren komt — het vierkleurenprobleem.

H. FREUDENTHAL

Er zijn in elk geval kaarten, waar met *minder* dan vier kleuren kan worden volstaan. Bij een bepaald soort kom je er steeds met twee, namelijk zwart en wit — als je die tenminste kleuren wilt noemen —.
De figuren 2 tot en met 6 stellen voor, wat men *gesloten krommen* noemt, in een bepaalde zin volgens de pijlen doorlopen.

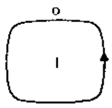


fig. 2

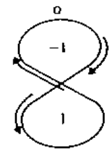


fig. 3

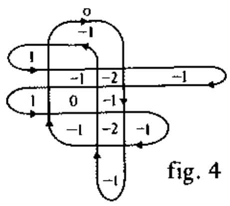


fig. 4

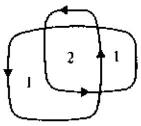


fig. 5

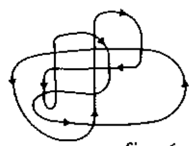


fig. 6

De krommen mogen zichzelf een eindig aantal keren overkruisen. We laten dus geen krommen toe als figuur 7, waarvan hele stukken dubbel of meervoudig doorlopen worden.

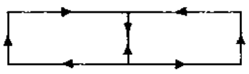


fig. 7

Gesloten krommen met eindig veel zelfoverkruisingen delen het vlak in een aantal delen. We beweren: *deze kaarten laten steeds kleuring met twee kleuren toe.*

* * *

In de plaatjes 2 tot en met 5 ziet u getallen. Ik zal deze toelichten.
Als C de gesloten kromme is en p een punt, niet op C, dan kan ik vragen hoe vaak de kromme C het punt p omloopt: ik trek een straal van p naar het punt x dat die kromme doorloopt en tel hoeveel volle draaiingen (van 360°) de straal px uitgevoerd heeft wanneer x bij zijn startpunt terug is. Hierbij tel ik, zoals in de wiskunde gebruikelijk, een draaiing tegen de klokwijzer in positief, met de klokwijzer mee negatief. Het kan best dat de rechte px af en toe terugloopt, als x op C loopt; het komt echter op de draaiing per saldo aan.
In figuur 8 wordt p door C vier keer omlopen; draai ik de pijl van C om, dan wordt het -4 keer. Het punt q daarentegen wordt maar twee keer omlopen: als x in a begint te lopen, dan is bij b een éérste omloping van q voltooid, bij c begint de straal qx terug te lopen, van d tot e loopt hij weer vooruit, van

e tot f terug, van f tot a weer vooruit, om de tweede omloping te voltooien. (Kijk ook naar de figuren 2 tot en met 5 en de vermelde getallen).

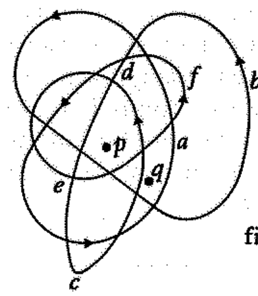


fig. 8

Het omlooptal is iets gemakkelijker vast te stellen. Trek vanuit p een vaste straal S. Die zal door C een aantal keren worden doorboord, soms in de positieve zin, soms in de negatieve. Tel dit bij elkaar met het juiste teken. Wat er uit komt, is het omlooptal. Bijvoorbeeld: trek in figuur 8 uit p de horizontale straal naar rechts; het is net vier keer. Trek uit q de horizontale straal naar links; het is drie keer positief en één keer negatief, dus twee keer.
Het zodoende berekende aantal hangt niet af van welke straal S ik heb gekozen. Verander ik de straal, dan kan ik wel doorboringen van C kwijt raken of erbij krijgen, maar dat geschiedt dan altijd in paren, een positieve en een negatieve samen; zie in figuur 9 de zes verschillende posities van S. (Kijk ook weer naar de figuren 2 tot en met 5).

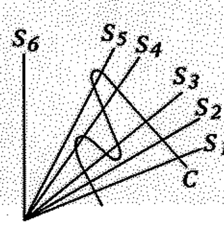


fig. 9

* * *

Wat gebeurt er nu als ik het punt p verplaats? Ik neem twee punten p_1 en p_2 en kijk hoe vaak p_1 door C wordt omlopen en hoe vaak p_2. Ik verbind p_1 en p_2 door een lijnstuk L. Stel dat L door C niet wordt geraakt (figuur 10).

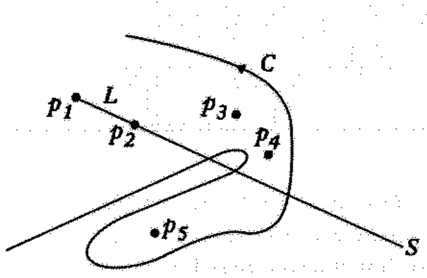


fig. 10

Ik verleng L tot een straal S. Die snijdt C even vaak of hij vanuit p_1 of p_2 is gezien. Dus worden p_1 en p_2 even vaak door C omlopen. Hetzelfde geldt bijvoorbeeld voor p_2 en p_3; ook die kan ik door een lijnstuk verbinden dat C niet treft, dus worden ze even vaak omlopen. Idem voor p_3 en p_4, voor p_4 en p_5. Ze worden dus allemaal even vaak door C omlopen.
Dus: *punten uit hetzelfde door C bepaalde vlakdeel, worden door C even vaak omlopen.*

* * *

Hoe is het nu met punten uit aangrenzende vlakdelen gesteld?

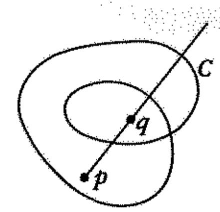


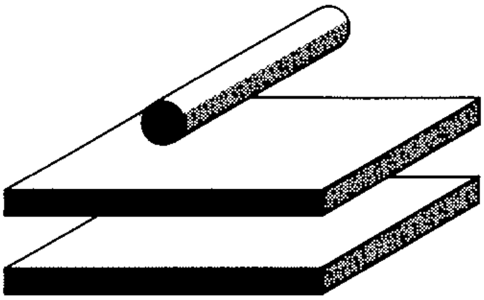
fig. 11

Laat p en q twee dergelijke punten zijn. Trek de straal uit p die q bevat. Het aantal doorboringen van de straal, bekeken vanuit p en vanuit q, scheelt net 1 – positief of negatief –.
Dus: *de omlooptallen van punten uit naburige vlakdelen schelen ± 1.* (Kijk ook naar de figuren 2 tot en met 5).

* * *

Nu de bewering dat voor het kleuren van kaarten, door een kromme bepaald, twee kleuren toereikend zijn. Kleur de vlakdelen met punten die door C een even aantal keren omlopen worden, wit, die door C een oneven aantal keren omlopen worden, zwart. Elk gebied heeft dan één kleur. Grenzen twee gebieden aan elkaar, dan schelen de omlooptallen ± 1. Heeft het ene gebied dus punten met een even omlooptal, dan heeft het andere punten met een oneven omlooptal, en omgekeerd. Aangrenzende gebieden zijn dus verschillend gekleurd.
Het is bewezen: *vlakverdelingen voortgebracht door gesloten krommen met een eindig aantal zelfoverkruisingen, kunnen met twee kleuren worden gekleurd.*

wiskunst



DE DOOLHOF

In het wiskobas-bulletin van juni '75 schreven we over gezichtspunten en lieten we u enkele klassieke anamorfosen zien. We wisten toen nog niet dat deze anamorfosen enkele maanden later het tema van een tentoonstelling in het rijksmuseum zouden zijn. Wanneer u dit nummer in handen krijgt, is de tentoonstelling al naar parijs verhuisd. Naast de 'langs-kijk'-anamorfosen waren er op de tentoonstelling tevens vele cylinder- en kegel-anamorfosen. Misschien bent u zelf ook naar de tentoonstelling geweest, of heeft u erover gelezen in kranten en tijdschriften.[1])
De moderne anamorfose, de driedimensionale kamer van Jan Beutener, zou een eigen verhaal vragen. Er is heel wat rekenwerk aan te pas gekomen. Een amsterdams wiskundige, Jan Steenbruggen, heeft assistentie verleend bij het ontwerpen van deze gezichtspuntkamer.

F. VAN DER BLIJ

Deze keer kiezen we een onderwerp dat behoort tot het maniërisme, en wel het *doolhof,* oftewel: het *labyrint.* De oorsprong van het woord is oudgrieks. Het is het verhaal van de minotauros en het paleis te knossos op kreta. We laten een plaatje zien (fig. 1a), dat gevonden is op de achterkant van een tablet uit pylos[2]) en een plaatje van een labyrint (fig. 1b), gevonden in pompeï. Daaronder een plaatje (fig. 1c) van het doolhof in waterland.[3]) Nu mijn vraag: ziet u een wiskundig verschil tussen de doolhoven?

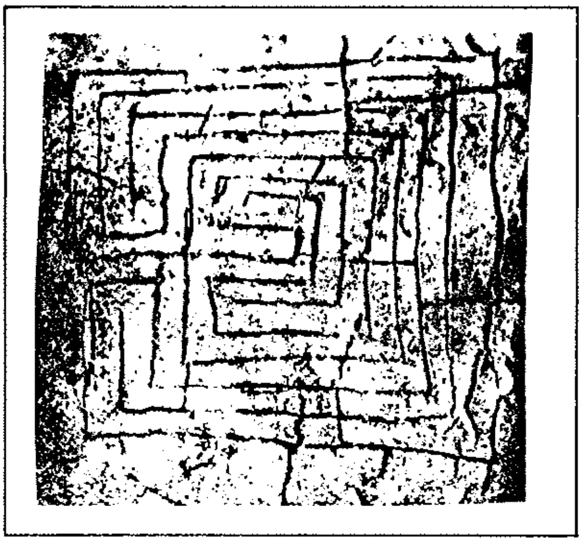


fig. 1a

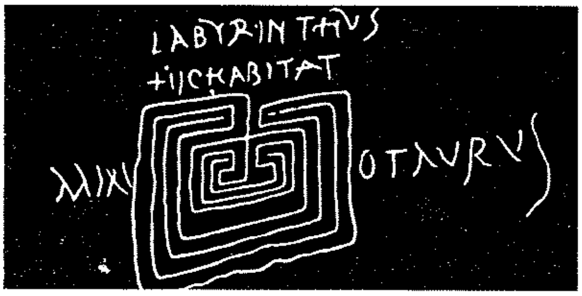


fig. 1b

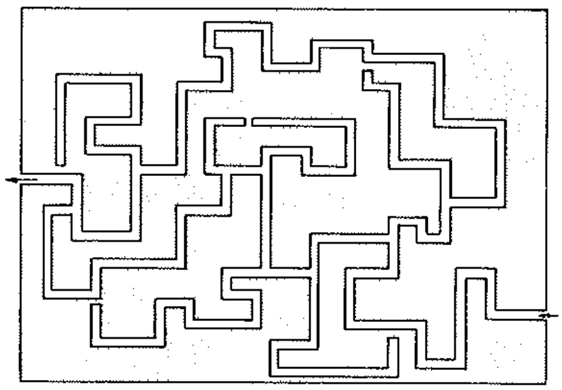


fig. 1c

[1]) Avenue (november 1975, pag. 10-18).
[2]) 13^e-12^e eeuw voor Christus.
[3]) Wiskobas-bulletin (jaargang 4 nr. 6, pag. 515).

De labyrinten vinden we, als we op kunstreis gaan, op twee heel verschillende plaatsen. Allereerst op de vloeren van verschillende katedralen. Een hele mooie is in chartres te vinden.

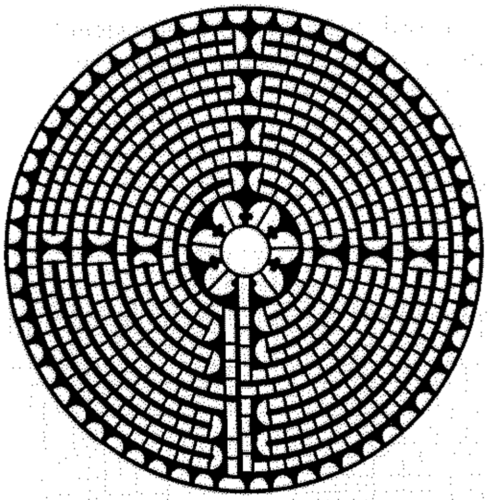


fig. 2

Een tweede soort is te vinden in de tuinen rond franse paleizen en engelse buitenplaatsen. Mooie heggetjes begrenzen paden, waarop je dreigt te verdwalen. In het boek *'Wiskunde'* door D. Bergamini[1]) staat een duidelijk schema van een doolhof, dat is aangelegd in hampton court.

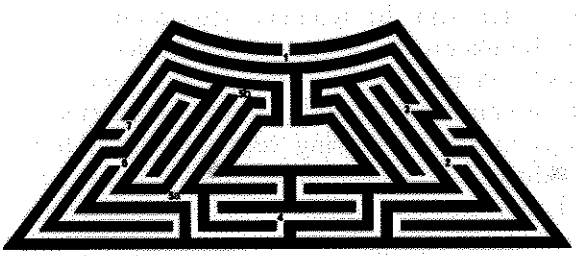


fig. 3

Ook elders in westeuropa zijn deze doolhoven te vinden.
Eén van de oudste teorieboeken over tuinaanleg bevat niet minder dan negen verschillende vormen van labyrinten, sommige voorzien van fraaie namen, als 'ionica' en 'corinthia'. Het boek draagt de titel *'Hortorum Viridariorumque Formae'*[2]) en is geschreven door Jan Vredeman de Vries.

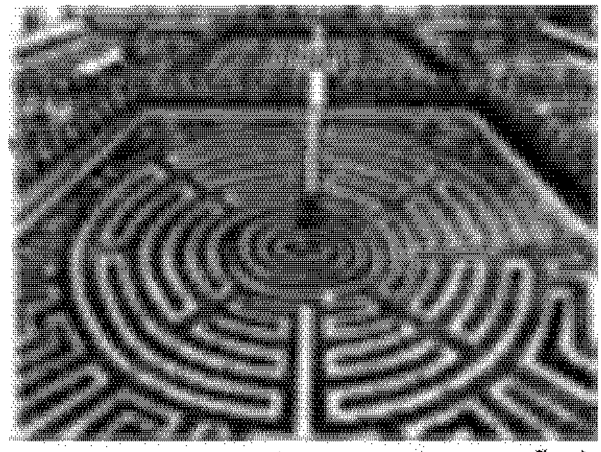


fig. 4

We kunnen de doolhoven inpassen in de stroming, die in de kunst maniërisme wordt genoemd. Het fraaie boek van G.R. Hocke *'Die Welt als Labyrinth, Manier und Manie in der europäische Kunst'*, geeft in een hoofdstuk over labyrinten vele historische gegevens en literatuurverwijzingen. Speciaal gericht op doolhoven is het boek van W.H. Matthews *'Mazes and Labyrinths'*[3]), met zeer vele illustraties en bronverwijzingen.
Ook een meer abstrakt gebruik van het woord 'doolhof' vinden we in de literatuur. We noemen in dit verband het werk van de pedagoog-teoloog Johannes Amos Comenius: *'Das Labyrinth der Welt und des Herzens Paradies'*.[4]) Precies lezen en gebruikmaken van de illustratie in sommige edities, laat ons toch ook een stad (wereld) zien, gebouwd als een doolhof.

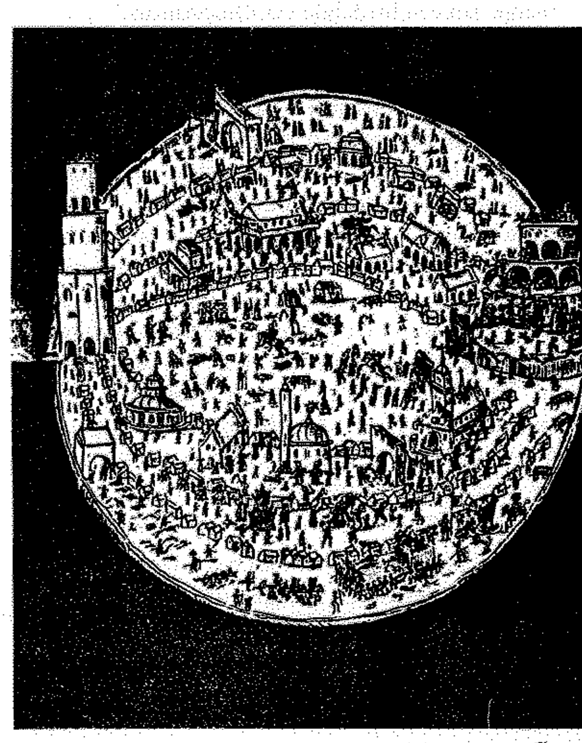


fig. 5

[1]) Parool/life (amsterdam 1965).
[2]) Antwerpen 1583.
[3]) Londen 1922.
[4]) 13 december 1623.

In de moderne literatuur over doolhoven vinden we onder andere Henri Michaux *'Labyrinths'*, Colin Wilson *'The God of the Labyrinth'*, Alain Robbe-Grillet *'Dans le Labyrinthe'*.

Colin Wilson's *'The God of the Labyrinth'* is een detektiveroman, waarin niet naar een moordenaar maar naar een stuk literatuur gezocht wordt. De auteur van het zoekgeraakte werk is Esmond Donelly, gestorven in december 1832. We citeren uit de eerste pagina's van Wilson's roman:

> 'Tegen het eind van zijn leven raakte hij gefascineerd door getallen en onderhield hij een briefwisseling met de grote wiskundige Gauss, die hem citeert in het voorwoord van de vijfde uitgave van zijn 'Disquisitiones Arithmetical'.[1]) In één van zijn brieven aan Gauss heeft Esmond het over de 'magische' eigenschappen van het getal 137 – wat vanzelfsprekend een priemgetal is.'

Niet alleen Colin Wilson – wiskunde speelt een grote rol in het begin van zijn literaire karrière, zie bijvoorbeeld de stukjes levensbeschrijving in zijn tweede boek *'Religion and the Rebel'* – maar ook Jorge Louis Borges, wiens verhalen in de engelse editie[2]) gebundeld werden onder de titel *'Labyrinths'*, weet wel iets van wiskunde.

Als uitgangspunt nemen we een in nederlandse vertaling verschenen bundel verhalen onder de titel *'De Zahir'*.[3]) We lezen eerst het verhaal 'Abenjacan el Bojari, gestorven in zijn labyrinth'. Een los citaat:

> 'Unwin had een studie gepubliceerd over de grondstelling die Fermat niet geschreven heeft in de marge van een bladzijde van Diophantus.'

Dus Borges weet wel wat van de geschiedenis van de getalteorie. Verderop in dit verhaal – we laten de citaten van Nicolaus von Cues over de opvatting van de rechte lijn als boog van een oneindige cirkel terzijde – lezen we over Unwin, lopende in een labyrint:

> 'Unwin ging voorop. In zijn vaart geremd door scherpe kanten en hoeken stroomde de onzichtbare muur onophoudelijk tegen zijn hand aan.'

In deze zin nu verraadt zich de wiskundige. In een doolhof kan men (soms) de weg vinden door steeds de muur vast te houden. Iedere doodlopende gang doorloopt men op deze manier een keer, maar men kan geen rondjes gaan lopen. Het labyrint van hampton court is een prachtig voorbeeld. Maar Borges weet meer! In het verhaal 'De tuin van de paden die zich splitsen', lees ik:

> 'De raad om altijd linksaf te slaan deed me eraan denken dat dat de gebruikelijke manier is om de middelste binnenplaats van bepaalde labyrinthen te ontdekken.'

Juist het woord 'bepaalde' is veelzeggend; uit *'Wiskunde'* haal ik een voorbeeld van een door W.W. Rouse Ball ontworpen doolhof met een 'eiland', waarin de (hand aan de muur-)methode *niet* tot het binnenste voert, maar de wandelaar weer bij de uitgang terugvoert (fig. 6).

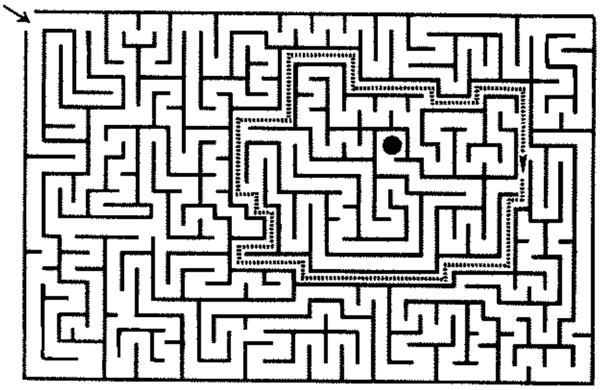


fig. 6

* * *

We beginnen nu wat meer wiskundig zicht op de doolhoven te krijgen. Als we beginnen met de klassieke afbeeldingen van kreta en pompeï, dan zijn dit helemaal geen doolhoven in de betekenis die Borges in zijn verhaal er aan geeft: de tuin van de paden die zich vertakken. Er is één doorlopende weg, wel met veel kronkels, maar de beslissing 'rechts' of 'links' hoeft nooit te worden genomen. Dit is ook het geval bij het labyrint op de vloer van de katedraal van chartres (fig. 2) en eveneens bij het plaatje in het tijdschrift *'Forum'* (fig. 7)[4]), dat geheel is gewijd aan de opera *'Labyrinth'* van Peter Schat, die is uitgevoerd op het holland festival van 1964. Tevens is dit het geval bij de omslag van de oratie van professor J. van Riemsdijk aan de rijksakademie van beeldende kunst (fig. 8).[5])

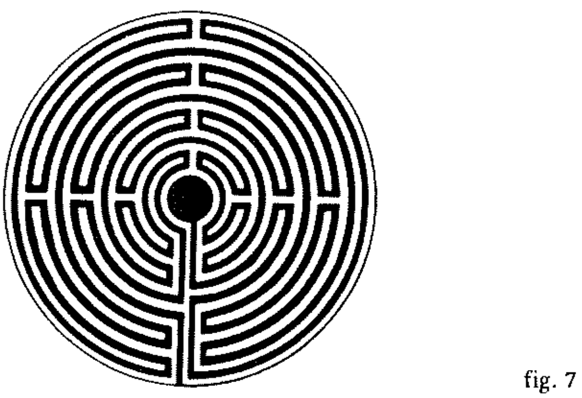


fig. 7

[1]) Ik heb nog geen symbolische interpretatie van deze, naar ik vermoed, wel gefalsificeerde verwijzing kunnen vinden (F. v.d. B.).

[2]) Penguin modern classics.

[3]) Amsterdam 1973.

[4]) Zomer 1964.

[5]) Amsterdam 1975.

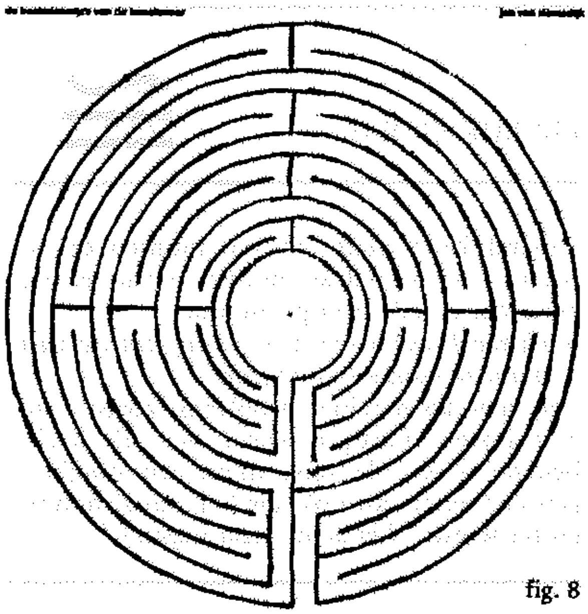


fig. 8

Allen zijn het voorlopers van de wiskundige probleemstelling van een 'spacefilling curve', een kromme die door ieder punt van een vierkant of een cirkel gaat. Het is een boeiende opgave om verfijningen van deze modellen te ontwerpen.

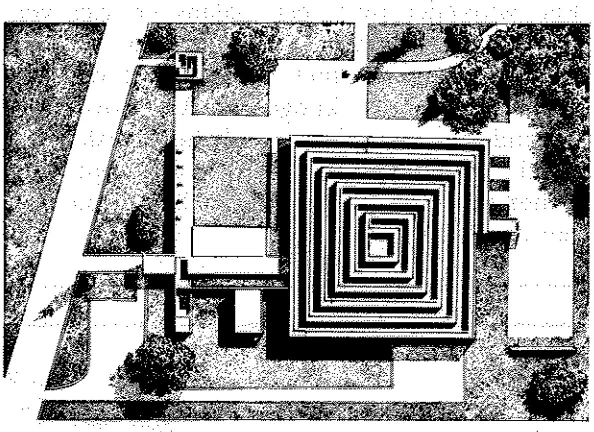


fig. 9

Een zeer simpele variant is het ontwerp van een *'Musée à croissance illimitée'* (fig. 9) van Le Corbusier. Het doel, er steeds bij te kunnen bouwen, is duidelijk mogelijk. U moet bedenken dat u via een onderdoorgang het museum in het middelpunt binnen komt. Er is aan de buitenste rand dus steeds de mogelijkheid nieuwe gangen te bouwen.

In de echte labyrinten, tuinen met paden die zich vertakken, kunnen we een soort stroomdiagrammen ontdekken. Bij hampton court zijn er punten waar de keuze 'links-rechts' zich voordoet. Meestal loopt een mogelijkheid dood. Het wordt pas echt spannend als beide wegen doorlopen en, waar ze elkaar weer ontmoeten, aanleiding geven tot mogelijke rondwandelingen.

Zo'n schema voor hampton court is vrij eenvoudig (fig. 10), voor het eilandlabyrint echter is het al heel wat moeilijker, voor het labyrint uit het wiskobas-bulletin is het weer eenvoudig.

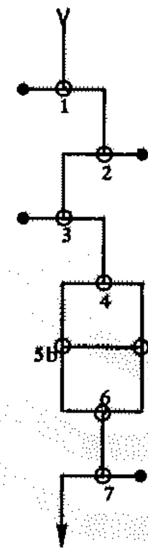


fig. 10

Liefhebbers wijzen we op een zeer fraaie verzameling doolhoven in *'Mazes'* van Vladimir Koziakin.[1])

Tot slot (fig. 11) nog een modern labyrint, namelijk van de hedendaagse kunstenaar Constant. Het stond in 1974 in het haags gemeentemuseum opgesteld en deed wat griezelig aan, met al die heen en weer gaande deuren. Kunt u er een stroomdiagram van maken?

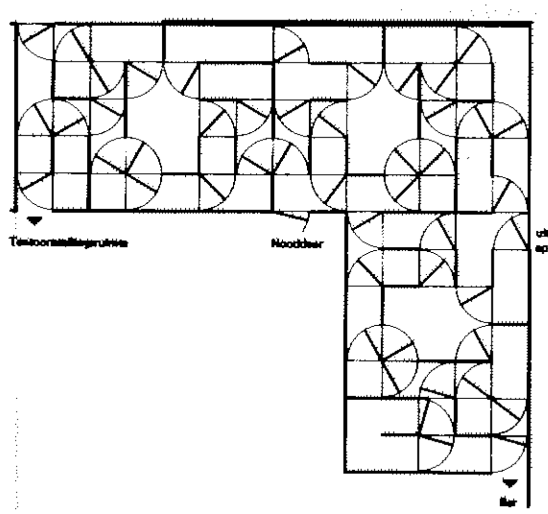


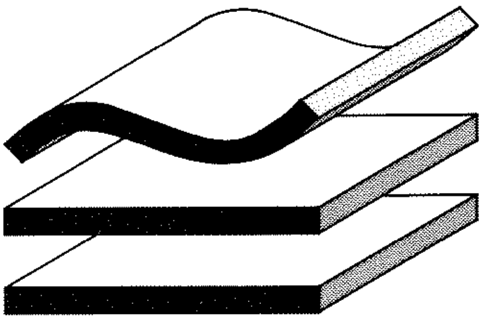
fig. 11

Wist u overigens dat 'maze' en 'amazing' etymologisch samenhangen?

---

[1]) Pan Books (london 1971).

problematika



Ditmaal een aantal meet- en weegproblemen. Problemen dus uit een gebied, waarin wiskunde en levenspraktijk elkaar een handje helpen. Of dit in de volgende problemen ook het geval is, moet u zelf maar uitzoeken. Dat geldt overigens ook voor de originaliteit. Sommige problemen zullen een aantal lezers niet helemaal onbekend voorkomen.

HUUB JANSEN

1

EERLIJK EN VALS

Iemand bezit acht zilveren munten en een balans. Een van deze munten is vals en wat zwaarder dan de overige munten.

▸ *Hoeveel wegingen zijn nodig om de valse munt te kunnen aanwijzen?*

Een niet zo moeilijk probleem, zoals u snel zult inzien. Lastiger wordt het, als slechts bekend is dat de valse munt een afwijkend gewicht heeft. En ook, als het aantal munten groter wordt. Niet acht, maar negen of ...

2

GEWICHTEN

Een winkelier bezit een balans en vier verschillende gewichten. Hiermee kan hij alle artikelen afwegen met een gewicht van vier tot en met 40 kilogram. Als bovendien bekend is, dat deze winkelier uitsluitend gehele aantallen kilogrammen verkoopt, dan is het mogelijk uit te zoeken hoe zwaar elk van deze vier gewichten is.

3

LIJNENSPEL

Twee mensen tekenen, ieder ongezien voor de ander, een recht lijnstuk op een vel papier. Daarna wordt gemeten hoeveel keer het kleinste van deze twee lijnstukken op het andere kan worden afgepast. De uitkomst is een geheel getal: 1, 2, 3, 4 ... Nu blijkt dat dit getal meestal 1, 2 of 3 is, waarbij indien het getal uit twee cijfers bestaat, slechts gekeken wordt naar het voorste cijfer.

▸ *Kunt u dit verklaren?*

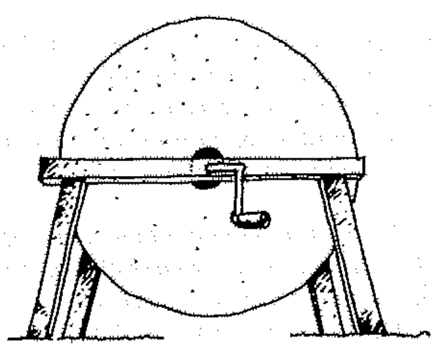
4

SLIJPSTEEN

Twee zoons erven van hun vader een mooie, ronde slijpsteen. Omdat zo'n steen niet te verdelen is in twee kleinere slijpstenen, maken ze een afspraak. De oudste van de twee mag de steen gebruiken tot de helft versleten is. Daarna krijgt de andere broer de steen in zijn bezit. Hun probleem is:

► *Wat is precies de helft van de steen en hoe is dit te berekenen of te konstrueren?*

Wij vertellen u nog dat de broers, toen zij dit probleem opgelost hadden, bemerkten dat geen rekening was gehouden met het gat in het midden. De straal van dit gat was $\frac{1}{7}$ deel van de straal van de hele steen. Misschien bent u ook nu nog in staat het midden van de steen te bepalen.



Wanneer u niet dagelijks met slijpstenen omgaat, dan kunt u dit probleem 'vertalen' naar een moderner kontekst van film-, video- of geluidsband.

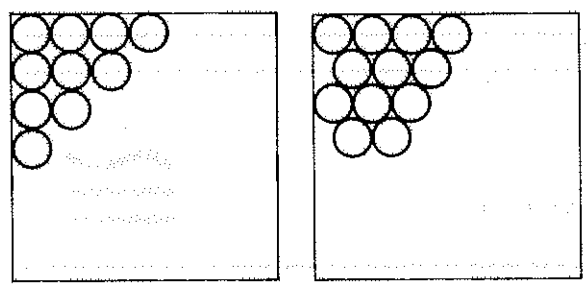
► *Op welke plek van de spoel dient een streep gezet te worden, die aangeeft dat de helft van de band is afgedraaid?*

5

CIRKELS

In de volkskrant van 23 december van vorig jaar stond een bericht van een olieboordeskundige. Deze beweerde dat slechts de helft van de olie uit de noordzee gehaald kan worden. Dit zou veroorzaakt worden door het bereik van elk booreiland: een cirkel met diameter van 6,4 km. Ekonomisch is het niet haalbaar dat de cirkels elkaar overlappen. We mogen dus aannemen dat deze boorcirkels elkaar raken. Of hier inderdaad uit volgt, dat slechts de helft van de olie gewonnen kan worden, vermeldt het bericht niet, maar is niet moeilijk te verifiëren.

Dit probleem lijkt veel op het volgende probleem dat wij ontvingen van kollega Henri Lisker, docent tekenen aan de rijkspedagogische akademie te arnhem.
Cirkelvormige munten of fiches met diameter '1' kunnen we op de volgende manieren in vierkante doosjes leggen:



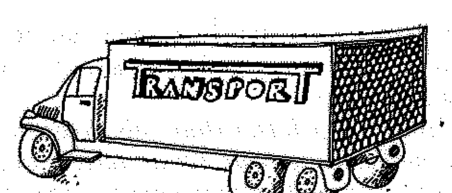
Hierboven twee vierkanten van '7 x 7', op verschillende manieren gedeeltelijk volgelegd. Gedeeltelijk, omdat u zelf mag berekenen welke wijze van volleggen het gunstigst is.
Hieruit volgt een algemener probleem.
Gegeven: vierkanten van $n \times n$ ($n = 1,2,3,4,\ldots$) en cirkels met diameter '1'.

► *Hoeveel cirkels kunnen, voor de verschillende waarden van n, maksimaal in de doosjes gelegd worden?*

En ook:

► *Welk deel van de oppervlakte blijft onbedekt als n heel erg groot wordt?*

Hiermee zijn we weer terug bij het olieboorprobleem. Het lijkt wat ingewikkeld, maar met enige meetkundige kennis kunt u er wel uitkomen. Mocht u daarna achter een vrachtauto rijden, die volgeladen is met buizen van gelijke diameter, dan ziet u direkt een andere toepassing van dit probleem.



Voor liefhebbers rijst tenslotte de vraag, hoe dit alles 'vertaald' kan worden naar de driedimensionale ruimte, dat wil zeggen:

► *Op welke wijze kunnen bollen het best in een grote doos worden opgestapeld?*

6

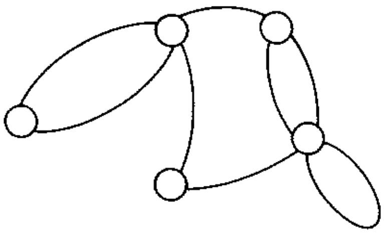
VATEN

Een wijnhandelaar bezit drie vaten, respektievelijk van acht, vijf en drie liter. Het vat van acht liter is gevuld met wijn, de andere zijn leeg.

▸ *Op welke wijze kan de handelaar, slechts met behulp van deze drie vaten, de wijn in twee gelijke porties verdelen?*

7

APPELFLAP



Hierboven het netwerk van een aantal interlokale autobusverbindingen. De rondjes stellen steden of dorpen voor, de lijnen zijn busroetes. Op elke weg rijdt de bus maar in één richting.

▸ *Is het mogelijk een tocht langs alle plaatsen te maken, waarbij elke weg precies één keer bereden wordt?*

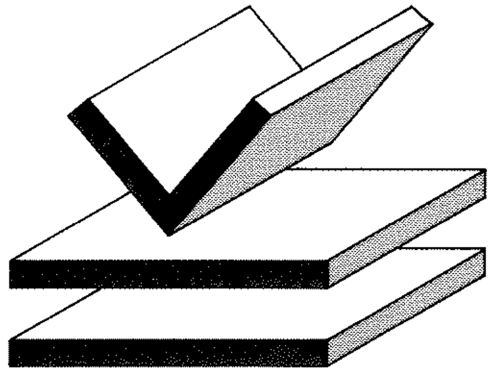
▸ *Op hoeveel verschillende manieren is dat eigenlijk mogelijk?*

▸ *Krijgt u het voor elkaar om in dezelfde plaats de tocht te beëindigen als waar u begonnen bent?*

We vertellen u nog dat de namen van de vijf plaatsen beginnen met de letters *a, e, f, l* en *p*. En de vraag luidt:

▸ *Waar hoort elke letter thuis, als de bustocht zó te maken is, dat de eerste letters van de plaatsen die achtereenvolgens gepasseerd worden, het woord* appelflap *vormen?*

prikbord problemen



TANDRADEREN

Wie wel eens een wekker van binnen heeft bekeken, weet hoe interessant het radersysteem in elkaar zit. Draaiende raderen vinden we in bijna alle machines. Maar .... raderen draaien in elkaar!

Als we een tekening hebben, zoals op het prikbordblad, is de draairichting van de raderen met pijlen aan te geven.
We kunnen dit ook symboliseren met tweekleurige fiches:
de gele kant boven betekent: 'draait rechtsom';
de rode kant boven betekent: 'draait linksom'.
We krijgen dan voor het prikbordprobleem:

$$g - r - g < \begin{matrix} r - g - r & (a) \\ r - g - r - g & (b) \end{matrix}$$

of:

$$1 - 0 - 1 < \begin{matrix} 0 - 1 - 0 \\ 0 - 1 - 0 - 1. \end{matrix}$$

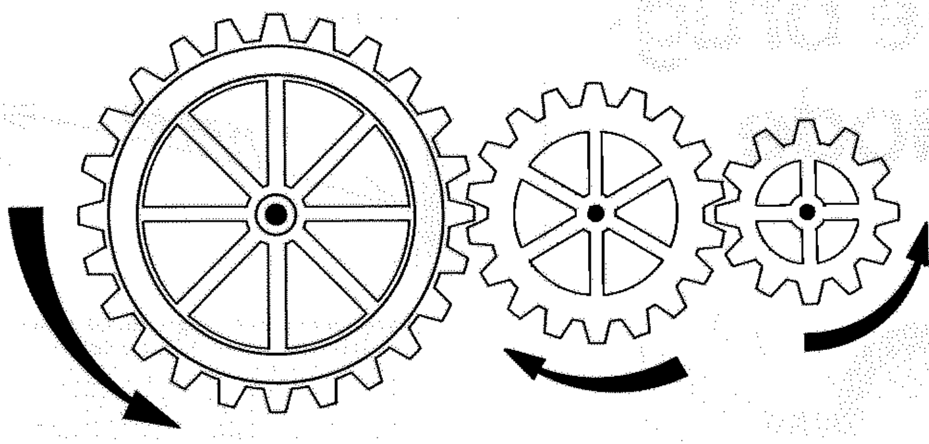
Dat wil zeggen: het gegeven rad en rad b draaien dezelfde kant op; rad a draait in tegengestelde richting.

HANS TER HEEGE

TANDRADEREN

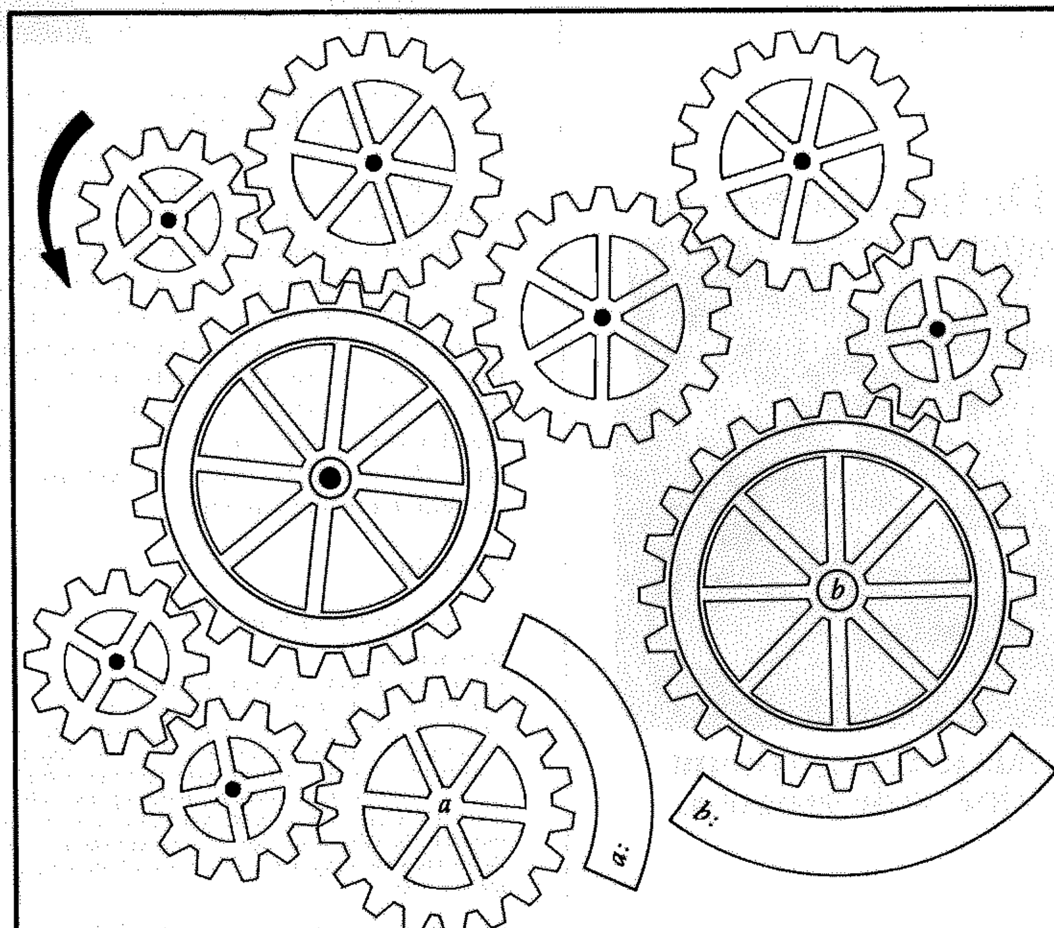
PP7

Hier zie je drie tandraderen uit de wekker:



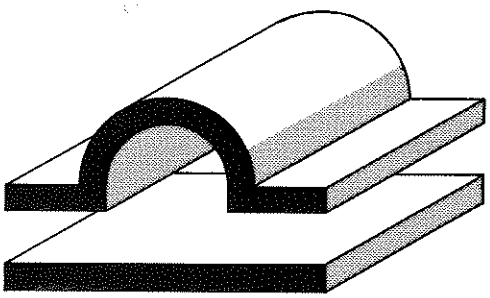
De pijlen wijzen hoe de tandraderen draaien.
Bekijk dat goed!

En nu naar een machine.
Het tandrad linksboven draait in de richting van de pijl.



▸ *Geef met een pijl aan, hoe de tandraderen a en b draaien.*

wiskunde in de brug-periode



EEN ADVERTENTIE

De familie Spoor.

Als je ze tegenkomt doe ze de groeten.

WIM SWEERS

een advertentie

Zo langzamerhand kent iedereen, treinreiziger of niet, de familie Spoor. Op affiches en in advertenties wordt regelmatig getoond, hoe voordelig deze familie per trein reist. Onderstaande advertentie heeft u wellicht ook in de krant zien staan:

Ko Spoor reist ieder lang weekend op en neer. Daarom neemt-ie 'n Vastrechtkaart.

Vijftienhonderd kilometer lijkt heel wat. Maar 't zit erop voor je 't weet. Reken maar mee met Ko Spoor: hij reist ieder lang weekend van Utrecht naar Groningen v.v. Dat is een afstand van pakweg 193 km. Een maand heeft vier weekends. Hij reist dus 4 keer 2 keer 193 km = 1544 km. Ko reist altijd op vrijdagavond heen en zondagavond of maandagochtend terug. Hij moet dus enkele reisjes kopen. Een enkele reis voor 193 km kost 'm f 19,50. Acht normale enkele reisjes kosten 'm f 156,-.

Met 'n Vastrechtkaart hoeft Ko Spoor maar de helft van de prijs te betalen: f 78,-. De Vastrechtkaart kost f 38,50. Samen dus f 116,50. Dat scheelt Ko per maand f 39,50.

Nog twee voorbeelden voor lang weekenders: Amsterdam - Sittard 196 km (voordeel f 39,50), Den Haag - Almelo 178 km (voordeel f 34,50).

'n Vastrechtkaart is één maand geldig. En ook voordelig voor zakenmensen die 'n aantal keren per maand vrij lange afstanden moeten afleggen. Met 'n Vastrechtkaart op zak betalen zij voor 'n reis heen en terug slechts de prijs van 'n enkele reis.

Als u weet hoeveel kilometers u per maand gemiddeld aflegt, kunt u gemakkelijk even uitrekenen hoeveel u uitspaart met 'n Vastrechtkaart van f 38,50, die zowel in de 1e als 2e klas geldig is.

Nadere bijzonderheden staan in de folder 'Wat kost die reis?', gratis aan 't loket. U kunt dit boekje ook aanvragen via antwoordtelefoon 030-944355.

Als leerkracht heeft u vast en zeker ook een neus voor dergelijke verhalen. Er staan getallen in – nogal veel zelfs – en al lezende denkt u: dit is misschien wel iets om in de reken- of wiskundeles aan de orde te stellen.
We hebben getracht om vanachter het buro een aantal suggesties omtrent de vastrecht-problemen op papier te zetten. In de eerste plaats opdat u uw eigen ideeën daaraan kunt toetsen, in de tweede plaats om te bereiken dat er een diskussie op gang komt over de 'haalbaarheid', de zin van zo'n stukje onderwijs, de motivatie van de leerlingen voor dergelijke problemen, enz.

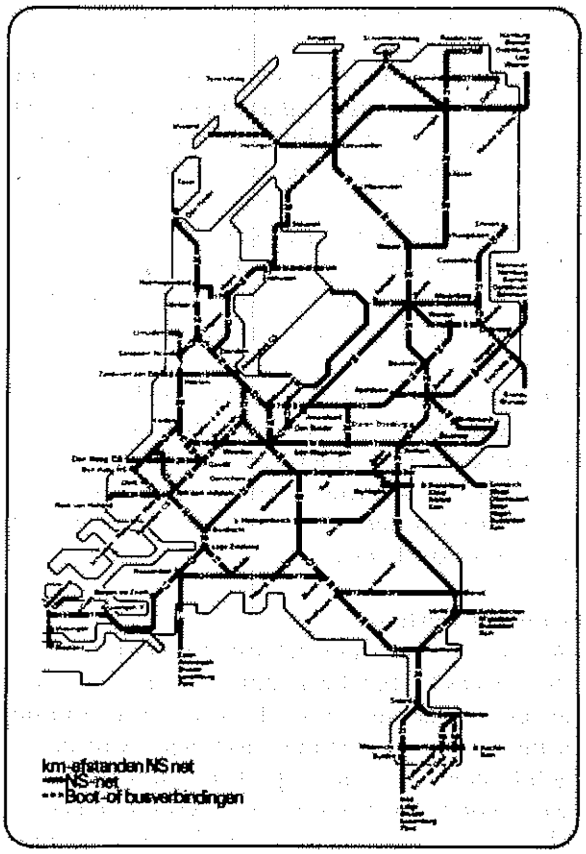
vastrecht

Voor wie nogal eens treint

Vastrechtkaart
Het vastrecht kost *f* 38,50 per maand. Een enkele reiskaartje kost u hiermee maar de helft (eventueel afgerond). Ook voor de 1e klas. Dus retour voor de prijs van een enkeltje en u mag dan — wat ons betreft — één of meer nachtjes overblijven. Zo'n vastrechtkaart is vaak al voordelig als u elke week een paar reizen maakt. Voordelig voor zakenmensen. Dikwijls ook voor trouwe weekendgangers. Zeker als ze vrijdag heen en zondag of maandag terug reizen.

Wat doet Ko Spoor eigenlijk? Hij woont in utrecht, maar hij studeert in groningen. Dat is te ver om iedere avond naar huis te gaan. Dus woont hij in groningen op kamers en gaat alleen in het weekend naar utrecht.

lezen en meerekenen
Het beste is, de leerlingen de advertentie eerst een paar keer goed te laten lezen. De berekeningen kunnen ze aan de hand van een afstandenkaartje en een tarievenlijst kontroleren.



Tarieven

Prijzen van enkele reizen en dagretours 2e en 1e klas

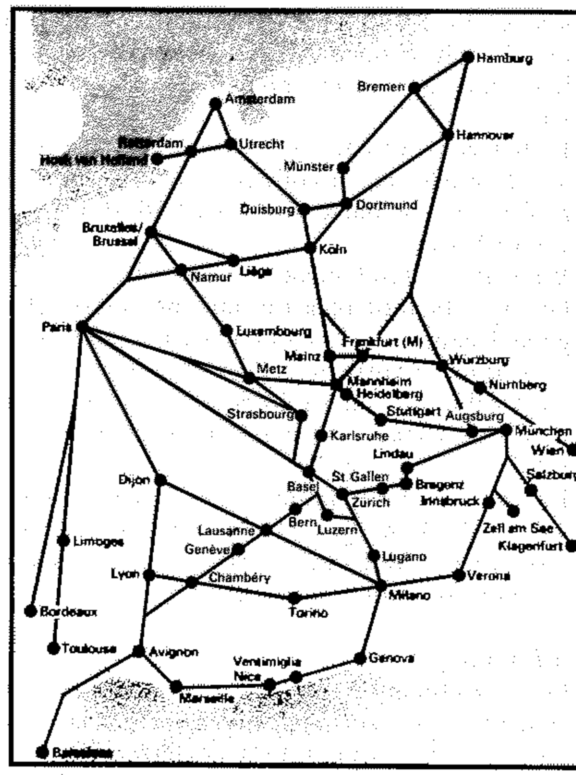
km	enkele reis 2.kl.	enkele reis 1.kl.	dagretour 2.kl.	dagretour 1.kl.
1- 4	1.00	1.40	1.30	1.90
5- 7	1.10	1.40	1.50	2.20
8- 10	1.40	1.90	2.10	3.00
11- 13	1.80	2.60	2.80	4.00
14- 16	2.10	3.50	3.30	4.90
17- 19	2.50	3.70	3.90	5.80
20- 22	2.90	4.10	4.50	6.70
23- 25	3.20	4.80	5.00	7.60
26- 28	3.60	5.00	5.50	8.50
29- 31	4.00	5.75	6.25	8.50
32- 34	4.25	6.25	7.00	10.25
35- 37	4.60	6.75	7.50	11.25
38- 40	5.00	7.25	8.00	11.75
41- 43	5.50	8.00	8.50	12.25
44- 46	6.00	8.50	9.00	12.75
47- 49	6.50	9.25	9.50	13.60
50- 52	7.00	9.75	10.00	14.60
53- 55	7.25	10.50	10.75	15.25
56- 58	7.50	11.00	11.50	16.25
59- 61	7.75	11.50	12.00	17.00
62- 64	8.25	12.00	12.50	18.00
65- 70	8.75	12.50	13.25	18.75
71- 76	9.25	13.50	13.75	19.75
77- 82	10.00	14.50	14.50	20.75
83- 88	10.75	15.75	15.25	21.50
89- 94	11.25	16.50	15.75	22.50
95-100	11.75	17.25	16.50	23.75
101-106	12.50	18.50	17.25	24.75
107-112	13.25	19.25	18.00	26.00
113-118	13.75	20.00	18.75	27.00
119-124	14.00	20.75	19.50	28.25

km	enkele reis 2.kl.	enkele reis 1.kl.	dagretour 2.kl.	dagretour 1.kl.
125-130	14.50	21.25	20.25	29.25
131-136	15.00	21.75	21.00	30.50
137-142	15.75	22.75	21.75	31.50
143-148	16.25	23.75	22.75	32.75
149-154	16.75	24.25	23.25	33.75
155-160	17.25	25.25	23.75	35.00
161-170	17.75	25.75	25.25	36.00
171-180	18.25	26.50	26.75	37.25
181-190	18.75	27.25	boven 190 km 27.00	39.50
191-200	19.50	28.00		boven 190 km 40.50
201-210	20.00	28.75		
211-220	20.50	29.75		
221-230	20.75	30.50		
231-240	21.25	31.25		
241-250	22.25	32.25		
251-260	22.75	33.00		
261-270	23.25	33.50		
271-280	23.75	34.25		
281-290	24.50	35.00		
291-300	24.75	36.00		
301-320	25.50	37.50		
321-340	26.50	39.00		
	boven 340 km 27.00	boven 340 km 40.50		

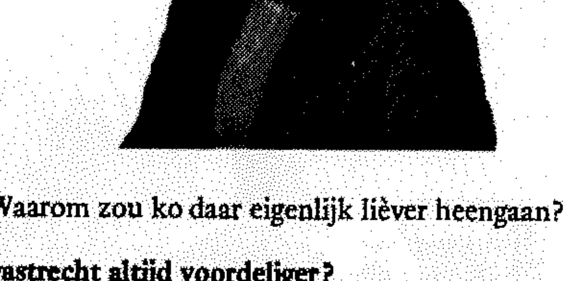
*) Kinderen tot en met 3 jaar reizen gratis. Kinderen van 4 tot en met 9 jaar reizen tegen de — eventueel afgeronde — halve prijs.

Voor wie nog moeilijkheden heeft om 'met Ko Spoor mee te rekenen', zijn er twee (oefen-)voorbeelden, die echter niet uitgewerkt zijn.

het tee-net
Ko gaat liever een keer per maand naar de Riviëra, want dat is net zo ver.



Misschien gaat hij dan wel met de *tee*. Met behulp van een folder, die aan elk stationsloket te krijgen is (evenals het boekje 'wat kost die reis?', waarin de afstandenkaart en de tarievenlijst zijn opgenomen), kunnen misschien nog meer plaatsen bedacht worden, waar ko liever heen zou gaan, 'omdat het net zo ver is'.



Waarom zou ko daar eigenlijk lièver heengaan?

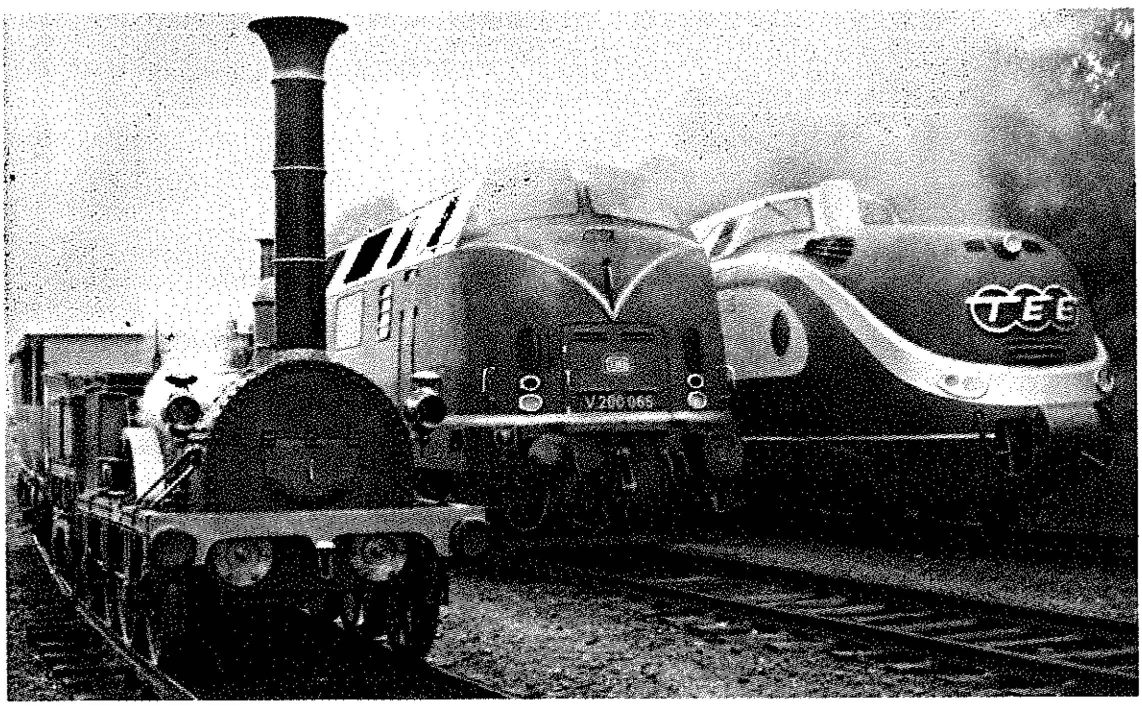
vastrecht altijd voordeliger?
Het is natuurlijk de vraag of een vastrechtkaart op alle afstanden voordeliger is.
Een groepje leerlingen gaat dit eens onderzoeken. Ze nemen hun eigen woonplaats als startpunt en gaan een aantal 'weekendreizen' maken, net als Ko Spoor. De ene gaat naar een plaats dichtbij, anderen naar plaatsen die steeds verder weg liggen. De kosten 'met vastrecht' en 'zonder vastrecht' worden vergele-

ken en men komt tot de konklusie, dat losse enkele reizen op de korte afstanden voordeliger zijn, op langere afstanden de vastrechtkaart.
In het geval van Ko is er dus de keus tussen: 4 x 2 enkele reizen volle prijs, of 4 x 2 enkele reizen voor de halve prijs plus *f* 38,50 voor de vastrechtkaart.
Bij welke afstand maakt het niets uit?
Op het afstandenkaartje kan met cirkels het gebied aangegeven worden, waarbinnen losse 'enkeltjes' voordeliger zijn en waarbinnen 'vastrecht' het aantrekkelijkste is. Ook kan men zich afvragen: hoe is dat bij een reis eerste klas?
In een grafiek kunnen de ongelijkheden $4p + f\,38{,}50 \leqslant 8p$ en $4p + f\,38{,}50 \geqslant 8p$ gevisualiseerd worden (waarbij p een enkele reis voor de volle prijs voorstelt).

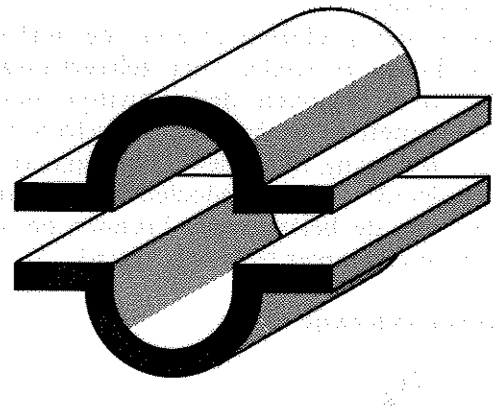
uitbreiding
Op verschillende manieren kunnen we dit temaatje voortzetten. Bijvoorbeeld naar aanleiding van de zin uit de advertentie 'als u weet hoeveel kilometer u gemiddeld per maand aflegt, kunt u gemakkelijk even uitrekenen hoeveel u uitspaart met een vastrechtkaart', kunnen we de leerlingen een week uit het leven van een handelsreiziger laten verzinnen. We kunnen daaraan eveneens het probleem koppelen: auto of openbaar vervoer?

Een ander aspekt is de prijs per km bij de *ns*-tarieven. Is deze konstant?
Zet in een grafiek op de horizontale as de aantallen kilometers en op de vertikale as de prijzen (bijvoorbeeld van tweede klas, enkele reis).
Hoe staat het met de verhouding: enkele reis – retoerprijs?
Hoe is de prijsverhouding tussen een eerste en een tweede klas kaartje?
Bij deze problemen kan een rekenmachientje uitstekende diensten bewijzen.
Behalve met het vastrecht, zijn er ook met de andere kortingsmogelijkheden interessante problemen te bedenken. Hiervan een opsomming te geven, valt echter buiten het bestek van dit verhaal. Hoe dan ook, het geheel eindigt beslist niet bij de laatste rekensom.
We zijn gestart in de realiteit van de advertentie; de aangesneden problemen wortelen in die realiteit en daar moeten we ook weer naar terug.
Vragen zoals 'vind je het een goede advertentie? waarom? heb je een idee, waarom de spoorwegen deze advertenties plaatsen? waarom zou de *ns* binnen een zekere afstand geen vastrechtvoordeel bieden?', zijn daarom mijns inziens onontbeerlijk.

voor wie bestemd?
We zijn van mening dat dit onderwerp, zowel in een zesde klas basisschool als in het voortgezet onderwijs, aan de orde zou kunnen komen. Het in formule vastleggen van de ongelijkheden en deze grafisch weergeven, is werk voor bovenbouw lbo of voor een tweede klas mavo. De meeste problemen kunnen echter ook zonder formalisering 'rekenend' opgelost worden en komen daardoor binnen het bereik van de basisschoolleerling.



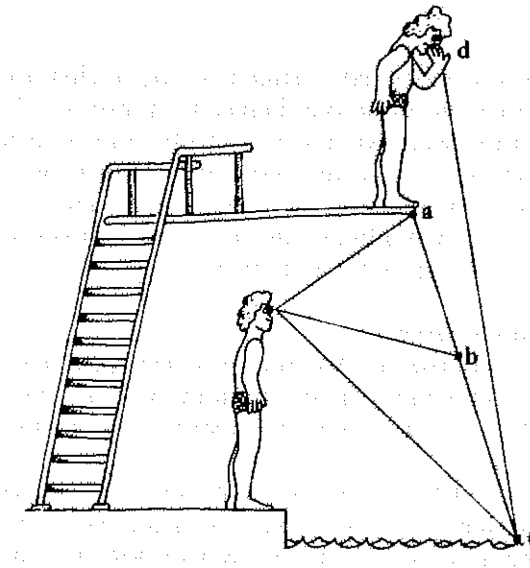
ander werk



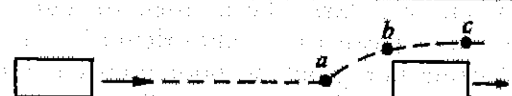
OVER WATER EN LAND

We kennen de ervaring allemaal! In het zwembad bijvoorbeeld. Je staat op de kant en kijkt naar de duikplank; het ziet er niet afschrikwekkend uit en je beklimt het trappetje; eenmaal boven echter, schrik je toch wel even terug van de onverwachte hoogte van de plank boven het water. (En was het niet de duikplank, dan was het wel die boom, waar je ooit in klom of die ladder waar je op stond,...).
Mijn herinnering aan dergelijke ervaringen, gaat zeer ver terug. En toch kwam het pas dezer dagen in me op, om naar een verklaring te zoeken. En hoe simpel is die: òp de duikplank 'meet' je de afstand cd, *ongeveer 4 m 25; ònder de plank is dat* ac, *ongeveer 2 m 50. En als je dicht bij de plank staat, ervaar je die laatste afstand nog niet eens als geheel: je telt als het ware een tweetal blikafstanden* ab *en* bc *op, wat een vertekend – gunstiger – beeld geeft.*

EDU WIJDEVELD



dóórdenken over
Opvallend eigenlijk, hoe weinig we geneigd zijn om alledaagse probleemervarinkjes even door te denken.
Kent u deze bijvoorbeeld:



Op de rijksweg nader je langzaam een voorliggende auto die iets minder snel rijdt dan jij. Eindelijk ben je achter hem (*a*), je wijkt uit en passeert (*b-c*). En tot je verrassing gaat dat voorbijrijden onverwacht snel ('versneld' lijkt het zelfs).
Heel vaak was het me al overkomen, voor ik er eens over na ging denken ....

'zijn' probleem
Ik ben ervan overtuigd dat deze neiging om problemen (probleempjes) te ervaren en te laten zijn voor wat ze zijn, van alles te maken heeft met opvoeding en onderwijs. Op vele manieren trachten we in de onderwijsvernieuwing de leerlingen te konfronteren met motiverende, 'realistische', open problemen, die hun inventief en kreatief denken stimuleren. En, laten we er vooral aan toevoegen: in vele gevallen met sukses!

Desondanks heb ik het gevoel dat we een belangrijke bron van originele kreativiteit te veel buiten beschouwing laten en – daardoor – zelfs uitschakelen op den duur.
Immers, hoe motiverend, hoe realistisch, hoe open het gestelde probleem ook is, wij onderwijzers brengen het in. Slechts door de 'verpakking' ervan, proberen we het ook tot probleem voor de leerlingen te maken! Al gauw raken de kinderen gewend aan deze vorm van probleempresentatie. Vragen stellen – onder

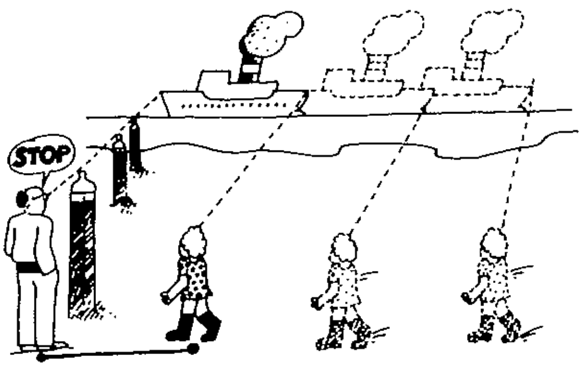
meer aan zichzelf — zullen ze nog slechts doen binnen de door ons bepaalde kontekst. (Natuurlijk gaan we in een 'terzijde', in een kringgesprek, of hoe dan ook, wel eens in op die 'leuke' vraag van piet, maar hoe vaak krijgt piet nu wèzenlijk de indruk dat zìjn probleem even belangwekkend is als het onze ...?)

aan het strand

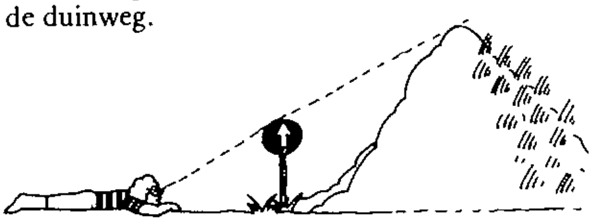
Een voorbeeld. We waren al een paar dagen op het strand bij de monding van de oosterschelde. Vlak langs de kustlijn voeren boten af en aan.

Jeske (12) had zich al enkele keren afgevraagd hoe lang zo'n boot wel kon zijn. Haar schatting van 'wel 7 meter', werd door mij 'autoritair' gekorrigeerd met 'nee hoor, misschien wel 30 meter', en daar bleef het bij. Eerlijk gezegd had ik ook geen idee! Maar het kwam evenmin in me op, om met haar eens te zoeken naar een mogelijkheid om erachter te komen.

Tot ik op een goed moment net over de palen van een 'krib' keek, toen de punt van een boot passeerde ... 'aha-erlebnis' ... en een schatting hoe groot de boot minstens moest zijn, kon worden gemaakt. (Perspektiefoverwegingen hebben we buiten beschouwing gelaten).



Aan datzelfde strand vroeg bart (9) zich af, hoe hoog die duinen wel waren. Wéér had ik weinig idee, maar nu wist ik wel een metode, met behulp van een aanwezig verkeersbord op de duinweg.



Afgezien van het feit dat die metode tot falen gedoemd was, snapte bart er ook weinig van.

.... 'En als je nu eens gewoon het aantal treden van de trap naar boven telt en één tree meet', zei jeske ....

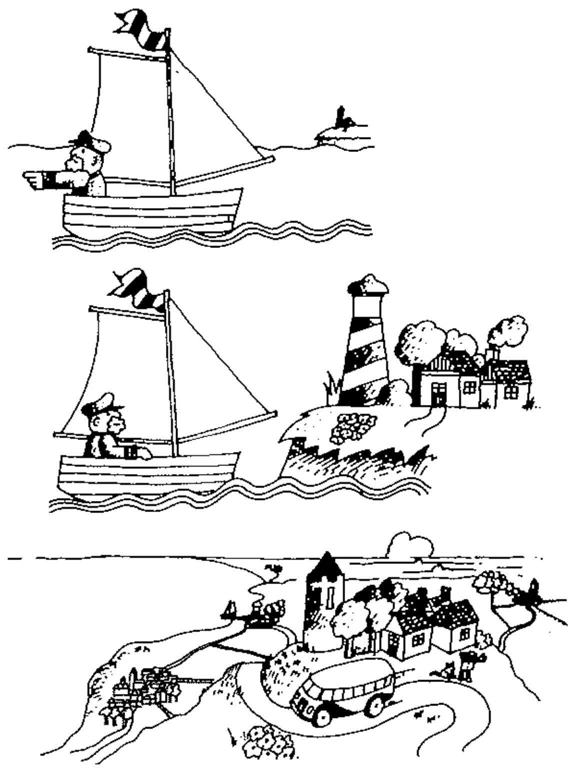
Gered door de gong!

belangrijke bron

Wat ik geloof, is dat we — zeker op een leeftijd dat kinderen daar gevoelig voor zijn — veel meer zouden moeten ingaan op de problemen die zij zèlf signaleren en aandragen, op wat voor gebied dan ook! We zouden ze moeten stimuleren om die probleempjes te verwoorden, om dan gezamenlijk met de andere kinderen te trachten er een oplossing voor te vinden.

De kunst een probleem te zìen, de durf om het probleem te stèllen, het zelfvertrouwen om er aan te beginnen, de kreativiteit om een oplossingsmetode te zoeken, de zelfervaring om die oplossing te vinden..., het zijn vaker geformuleerde onderwijsdoelen. Maar laten we een van de belangrijkste bronnen om dat doel te bereiken niet (te) vaak liggen?

wiskundeonderwijs

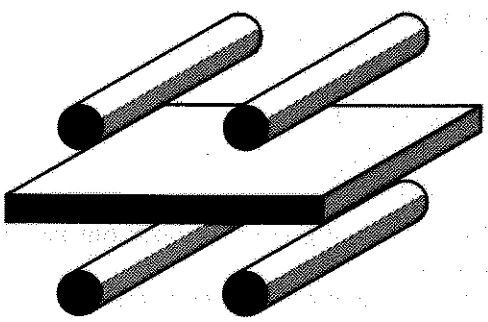


En wat de bijdrage van het wiskundeonderwijs betreft: hierboven staat een (toepasselijk) plaatje afgebeeld, dat enige tijd geleden gebruikt werd voor een verslag van een groepsdiskussie over wiskundeonderwijsdoelen.

Waar naar toe zijn we onderweg? In het wiskundewater, de blik gericht op de horizon? Kijken we vanuit dat water naar het (maatschappelijk) land van alledag? Of staan we in het landschap, waarin zich natuurlijk ook water bevindt?

Dit verhaal ging letterlijk èn figuurlijk, vooral over het laatste beeld!

kleuters en wiskunde



AKTIVITEITEN ROND DE BOERDERIJ

Genoemd onderwerp biedt vele mogelijkheden voor alle kleuters. Ieder jaargetijde geeft een andere kijk op het leven rond de boerderij. In de winter bijvoorbeeld gaan de dieren op stal, ze krijgen dan ook ander voedsel. In de lente worden er nieuwe kalfjes en lammetjes geboren en in de zomer grazen de dieren in de wei.
De kleuters zijn zeer ekspressief betrokken bij dit onderwerp. Ze kunnen de opdrachten ruimtelijk uitvoeren met een set dierenfiguren of zelfgemaakte dieren.

JEANNE DE GOOIJER-QUINT

dierenoptocht
Vijf dieren van de boerderij lopen in een rijtje achter elkaar.
.... 'De namen van de dieren vertel ik jullie niet, maar als je goed luistert, dan kun je horen welke dieren ik bedoel:
boeoe ..... iaaiaa ..... knorknor ..... beèeh, beeèh ..... kukeleku .....'....

De kleuters zullen met gemak kunnen vertellen welke dieren er bedoeld worden. In het midden van de kring bootsen we de optocht na met speelgoeddieren. We kunnen ook elk kind een bepaald dier laten voorstellen.
We stellen vragen:
.... 'Welk dier loopt vooraan?'
'Welk dier loopt in het midden?'
'Welk dier loopt achteraan?'
'Hoeveel dieren staan er vóór de koe?'
(De koe heeft er nul (geen) voor zich staan, hij staat dus vooraan; het paard heeft er één voor zich staan).
'Hoeveel dieren staan er achter de koe?'
(De koe heeft vier dieren achter zich staan)....

Een kombinatie van de begrippen 'vóór' en 'achter' leidt tot de volgende uitspraak: 'het varken heeft twee dieren vóór en twee dieren achter zich staan'.
Het kind zal, afhankelijk van de ontwikkelingsfase waarin het zich bevindt, de vragen op verschillende manieren beantwoorden:
– wijzen;
– wijzen en gesproken taal;
– gesproken taal.

richting bepalen
We hebben van elk dier twee eksemplaren nodig.
Twee kinderen zitten aan een tafel tegenover elkaar. Eén kind maakt met zijn dieren een optocht. Nu moet het andere kind deze optocht nadoen, maar natuurlijk in tegengestelde richting:

varken, koe, schaap, haan, paard $\longleftarrow$

paard, haan, schaap, koe, varken $\longrightarrow$

We kunnen dit spelletje ook op een andere wijze doen. In het midden van de tafel wordt een schot geplaatst, zodat de kinderen elkaars dieren niet kunnen zien. Het ene kind maakt een optocht en moet door middel van taal beschrijven hoe deze er uitziet, zodat het andere kind de optocht na kan maken.
Een voorbeeld: de haan staat voorop, achter de haan staat de koe, naast de koe aan de voorkant staat het paard, daar achter het var-

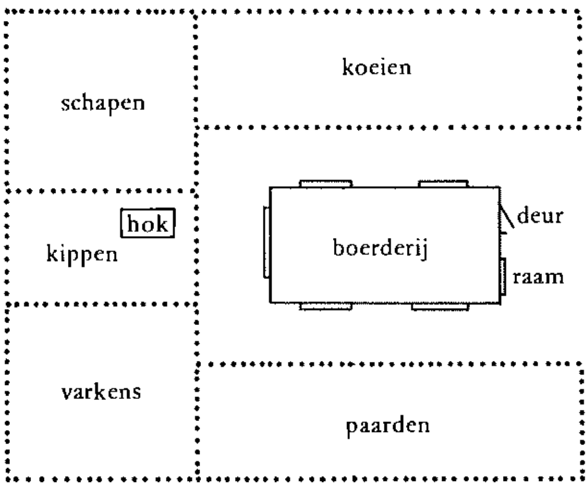
ken en daar weer achter het schaap.
De optocht ziet er dus als volgt uit:

koe haan ⟶
schaap varken paard

Het schot wordt weggehaald en de kinderen kunnen kontroleren of ze het goed gedaan hebben.

in de wei
Bij het bepalen van de plaats van het dier in de wei komen de begrippen 'voor' en 'achter' aan de orde en tevens de begrippen 'links' en 'rechts'.
De kinderen gaan naast elkaar staan en redeneren vanuit dezelfde positie, waar de dieren zich bevinden. Het wordt moeilijker wanneer de kinderen tegenover elkaar staan en moeten redeneren vanuit de positie van de opdrachtgever.
Het paard staat vòoraan in de wei, gezien vanuit de positie van de opdrachtgever.
De opdrachtuitvoerder moet het paard, vanuit zijn plaats gezien, àchteraan in de wei zetten. Deze opdracht is alleen geschikt voor kinderen die geen moeite hebben met de plaatsbepaling, gezien vanaf hun eigen plaats.

voorstellingsvermogen
De kleuters maken van een grote doos een boerderij en plaatsen deze op een tafel en leggen er weilanden omheen, afgezet met hekken.

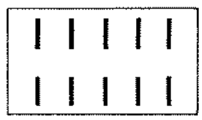


Deze plattegrond is niet voor de kleuters bedoeld, maar voor de leidster om een voorbeeld te schetsen ter verduidelijking van de tekst. De kinderen kunnen de opdrachten in konkreto uitvoeren.

.... 'De boer is thuis en kijkt uit het raam. Het raam is naast de deur. Wat zal de boer kunnen zien als hij naar buiten kijkt?'
'De boer ziet de wei met de koeien. Voor welk raam staat de boer?'
'De boer moet de beesten eten geven. Wat is de kortste weg langs alle dieren?
Hoe kan de boer het voer voor alle beesten meenemen?'
'De dieren hebben in de winter een stal nodig. Waarom eigenlijk?' ....

We gaan met de kinderen een stal maken. We moeten hierbij wel denken aan de verhouding ten opzichte van de boerderij en de dieren. We moeten de grootte van de stal aanpassen aan het aantal dieren dat er in moet. Ook moeten we er op letten, dat de dieren genoeg ruimte hebben om zich te kunnen bewegen en te gaan liggen.
.... 'Hoe zetten we de dieren nu neer?'

'Zó is het lastig voor de boer om ze allemaal eten te geven.'
'Hij kan er gemakkelijk een vergeten.'
'Kan het ook anders?'
'Op deze wijze is het overzichtelijk:



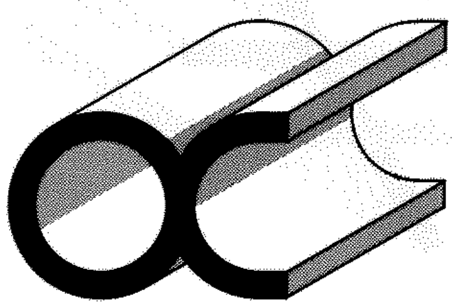
....

het verwerken van begrippen omtrent hoeveelheden
.... 'Zet eens een heleboel koeien bij elkaar. Nu de schapen, maar dat moeten er minder zijn dan de koeien. Zet daarna de paarden bij elkaar, dat moeten er nòg minder zijn.'
'Maak groepjes met dieren van verschillende aantallen; welk groepje is het grootste? welk het kleinste? zijn er ook groepjes met evenveel dieren?'
'Maak eens groepjes van drie, vijf, acht.' ....

woordenschat
De uitbreiding van de woordenschat speelt eveneens een belangrijke rol.
We kunnen de kinderen laten horen dat we van twee woorden één woord maken, bijvoorbeeld 'paarden' en 'stal': paardenstal.
Evenzo bij koeienstal, varkensstal, schaapskooi, kippenhok.
.... 'Kun je nog meer van deze woorden maken?'
Denk eens aan hond : hondehok
poes : poezenmand
konijn: konijnenhok.' ....

Op deze wijze krijgen de kinderen meer inzicht in de samenstelling van woorden. Ze worden er zich van bewust dat veel woorden op die manier zijn samengesteld.

kijk ook eens zo!



KONKRETE VOORWERPEN

Laten we eens aannemen dat we een doosje met vijf knikkers en een doosje met zeven knikkers hebben. We kunnen nu de inhoud van het ene doosje voegen bij de inhoud van het andere doosje.
We kunnen het ook meer symmetrisch aanpakken en de knikkers van beide doosjes in een derde doosje doen.
In beide gevallen hebben we de hoeveelheden knikkers samengevoegd. Dit samenvoegen gebeurt in een konkrete situatie; we werken met konkrete voorwerpen, in dit geval met knikkers.

DIK OORT

optellen
Het samenvoegen van twee of meer hoeveelheden, komen we bijna op elk moment en op elke plaats tegen:

De leerlingen van de verschillende klassen komen in de aula bij elkaar.

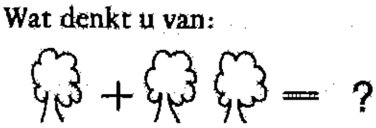
Het verkeer van de zijweg voegt zich bij dat van de hoofdweg.

De mensen op het perron stappen in de trein en voegen zich bij degenen die zich al in de trein bevinden.

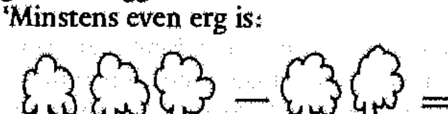
Indien ons in eerstgenoemd voorbeeld interesseert *hoeveel* knikkers er in elk der doosjes zitten en *hoeveel* knikkers we hebben als we ze bij elkaar doen, richten we onze aandacht op de aantallen, de getallen. Getallen zijn matematische, abstrakte grootheden.
We moeten dus twee dingen goed uit elkaar houden.
We kunnen twee hoeveelheden van *konkrete objekten* samenvoegen. Het resultaat van het samenvoegen van vijf objekten en zeven objekten is, dat de nieuwe hoeveelheid twaalf objekten bevat. Dit kunnen we aangeven door '5 + 7 = 12'. Hierbij staat het teken '+' voor de bewerking die we 'optellen' noemen. Aan weerskanten van het '+'-teken staan *wiskundige grootheden,* in dit geval getallen.
Getallen kunnen we optellen, hoeveelheden niet.
Dit betekent dat

3 potloden + 2 potloden = 5 potloden,

een verwerpelijke notatie is.
De meeste rekenboekjes zondigen tegen deze notatie, maar sommige maken het wel erg bont.
Wat denkt u van:



De bedoeling is, dat de kinderen hier drie bomen achter tekenen, of misschien het cijfer '3' achter het gelijkteken plaatsen.
Konsekwent zou zijn als de kinderen, die deze 'opgave' krijgen, zouden zeggen dat ze een tekening zien met drie bomen en vier losse takken, waarvan er twee naast elkaar en twee gekruist liggen.
'Minstens even erg is:



U ziet het: een plantsoen en nog wat los sprokkelhout. En daar komt dan één boom uit!

aftrekken
Inmiddels zijn we aangeland bij de aftrekking, een rekenkundige bewerking, toegepast op twee matematische grootheden, bijvoorbeeld getallen.
De aftrekking kan ontleend zijn aan een konkrete situatie, zoals het verdwijnen van een deel van een hoeveelheid:

Er zitten vijf vogels op een tak.
Drie vogels vliegen weg.
Hoeveel blijven er over?

Jan heeft tien knikkers.
Hij geeft drie knikkers aan piet.
Hoeveel knikkers houdt jan over?

Soms is de situatie echter niet zo konkreet, en dat geeft op school gauw moeilijkheden:

Vanmorgen had ik tien centen.
Nu heb ik er nog drie.
Hoeveel centen heb ik uitgegeven?

De situatie is nog minder konkreet, als we de aftrekking ontlenen aan een vergelijking van twee hoeveelheden:

In het ene bloemperk staan twintig tulpen, in het andere twaalf tulpen.
Hoeveel tulpen staan er in het ene park méér dan in het andere?

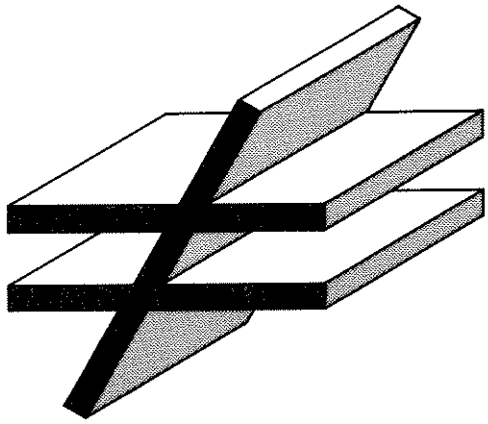
Veel – jonge – kinderen zien in dit probleem de aftrekking niet zitten (er verdwijnt niets). Vandaar, dat in dit geval het getal 32 nogal eens als antwoord voorkomt.

getallen als namen
Niet alle soorten getallen lenen zich voor bewerkingen.
Wie in amsterdam met tramlijn 24 van het centraal station naar het olympisch stadion gaat en terugkeert met lijn 16, kan moeilijk beweren dat hij heen en weer gegaan is met lijn 40!
De getallen 16 en 24 zijn hier slechts namen voor tramroetes.
Ook met telefoonnummers en autonummers worden meestal geen bewerkingen gemaakt.
Evenmin met huisnummers, hoewel: wie in een straat bij nummer 112 moet zijn, kan door aftrekking iets te weten komen over het stuk dat hij nog moet lopen als hij zich nu bij nummer 16 bevindt.

ranggetallen
Soms ontlenen we een aftrekking aan een situatie, waarbij twee ranggetallen optreden:

In een winkel moeten de klanten een nummer trekken.
Ik ben de tweeënzeventigste klant. De zesenvijftigste klant wordt op dit moment geholpen.
Hoeveel klanten zijn er nog vóór mij?

nieuw op de markt



KIEN

Het lijdt geen twijfel dat Ger Janssen één van de weinige auteurs is, die het begrip 'verlevendiging van het rekenonderwijs', zoals wiskobas dat vanaf '71 heeft gepropageerd, heeft weten te effektueren in 'kant en klare' spullen.
Met medewerking van Anton van der Geest en J. Raeven brengt hij een 'reeks gevarieerde rekenopdrachten' op de markt onder de naam 'Kien', *waarvan ik de eerste twee deeltjes, bestemd voor de derde klas (maar ook bruikbaar voor hogere leerjaren) met het grootste plezier heb bekeken.*

Deze boekjes bieden de mogelijkheid om langzaamaan ons rekenonderwijs te vernieuwen op weg naar een verdergaande modernisering. We zouden ons kunnen voorstellen, dat een voorzichtige vernieuwer 'Kien' *voor de komende vier à vijf jaar, naast een traditionele metode zou gebruiken. Er zijn natuurlijk ook andere mogelijkheden. Wel zou het fijn zijn als men tenminste het introduktiejaar van de wiskobas-heroriënteringskursus heeft gevolgd. Immers, er komt nogal eens nieuwe leerstof aan de orde, die op de niet ingewijde onderwijzer over zou kunnen komen als té moeilijk (fig. 1).*

ED DE MOOR

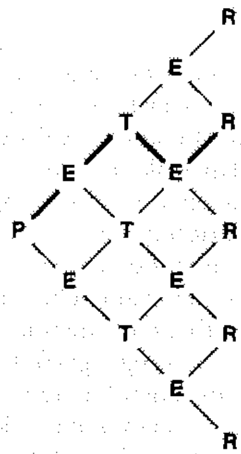
19a *Lees je naam maar . . .*

Het woordje 'Peter' staat hieronder meerdere malen te lezen.
Je kunt gewoon schuin naar boven of schuin naar beneden lezen.
Maar je kunt ook zijwegen inslaan.
Kijk maar eens naar de dikke lijn.

Probeer uit te vinden, op hoeveel verschillende manieren je het woord 'Peter' kunt lezen.

Schrijf ook je eigen naam in de figuren hieronder en die van je vriendjes, van je broertje of je zusje.

Op hoeveel manieren kun je die lezen?



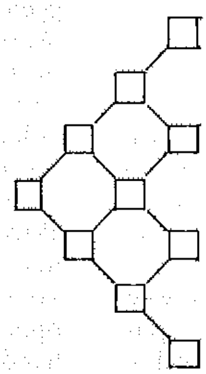


fig. 1

oud en nieuw
We weten zo langzamerhand echter wel, dat juist deze nieuwe elementen de kinderen veel gemakkelijker af gaan dan we zouden verwachten en dat de moeilijkheden vaak blijven bestaan in de 'gewone' rekenvaardigheid. Daarom doet het deugd, dat de auteurs ook ruime aandacht aan het traditionele rekenen besteden. Zij doen dit echter op zo'n motiverende manier, dat je je kunt voorstellen dat de kinderen er nauwelijks genoeg van kunnen krijgen (fig. 2).

16 *Een rekendoolhof*

Je weet natuurlijk wat een doolhof is.
Hiernaast staat ook zo'n doolhof. Maar geen gewone, nee, een rekendoolhof.

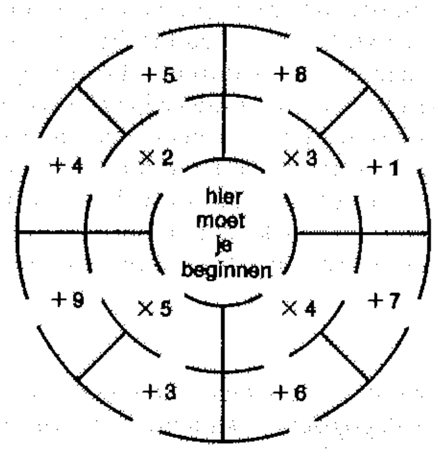
We gaan eens kijken hoe deze werkt.
In het midden stoppen we er het getal 7 in.
Dan gaan we door een poortje en komen bij

× 4

Dan gaan we weer door een poortje en komen bij

+ 6

Wat is er van het getal 7 geworden als we buiten staan?
7 × 4 = 28 en 28 + 6 = 34.
We hebben van 7 het getal 34 gemaakt!
De volgende sommen moet je zelf maken.
Stop het eerste getal maar steeds in het midden van onze doolhof en zoek welke poortjes je moet gebruiken. Proberen maar!



7 × 4 + 6 = 34	6 × . + . = 33	1 × . + . = 6
9 × 3 + . = 28	5 × . + . = 14	3 × . + . = 11
2 × 4 + . = 15	7 × . + . = 22	6 × . + . = 26
8 × 2 + . = 21	9 × . + . = 48	5 × . + . = 28

fig. 2

Wat dit laatste betreft: men zal zelfs enigszins op zijn hoede moeten zijn. Immers, een zekere gemakzucht binnen het onderwijs kan ontstaan. En dat is iets wat Ger Janssen c.s. zeker niet willen. Er wordt juist gevraagd het materiaal met overleg te gebruiken. Zo zullen we proberen om na het maken van de opgaven enige verdieping te geven in de nabespreking. We laten de kinderen iets uitleggen aan elkaar en we geven hen de gelegenheid zèlf eens een opgave te ontwerpen. Zo wordt naar een andere attitude gewerkt, zowel van de onderwijzer als van de leerling.

fleksibel hanteren

'De verjaardag van ingrid' [1]) luidt, kort samengevat, als volgt:

> Ingrid krijgt op 1 oktober (een woensdag) 1 cent, op 3 oktober 2 cent, op 5 oktober 4 cent, zo steeds verdubbelend op alle 'oneven' data, behalve zaterdags. Ze is op 31 oktober jarig en wil graag een fiets hebben. Zou ze hem ook krijgen?

Rekent u het zelf maar uit. Het is altijd weer een verrassing hoe snel dat verdubbelen gaat. Wat biedt dat vraagstuk niet een mogelijkheden om verbanden te leggen met een aktuele kwestie als 'bevolkingsgroei' of met de anekdote over de uitvinding van het schaakspel ('graankorrelprobleem'), met grote getallen en hun schrijfwijzen of met het vraagstuk uit figuur 1 ('isomorfie').

Een dergelijk fleksibel hanteren van de werkbladen is niet voor iedereen weggelegd en is niet iets dat via een handleiding kan worden overgebracht. Dit betekent dus dat we er met voortreffelijke boekjes alléén niet zijn. Het is echter te hopen dat men, uitgaande van motiverende leerstof, meer aandacht zal gaan schenken aan een voortdurende bezinning op ons boeiende vak van onderwijzer. Juist het steeds voortschrijdende proces van ons eigen leven is interessant in verband met ons onderwijzen. Dit houdt ons vak, onszelf en de kinderen levend, en maakt het onderwijs tot één van de boeiendste aspekten van onze maatschappij.

tafels

Onlangs werd ik opgebeld door een student van de pedagogische akademie die op een school hospiteerde, waar ze de tafels van 1 tot en met 30 uit het hoofd moesten leren. Afgezien van het feit, dat ik vind dat zijn wiskundeleraar hem hierbij had moeten helpen, vraag ik me af welk weldenkend mens iets dergelijks verzint. Dit lijkt me de beste manier om kinderen, wat de wiskunde betreft, voor hun verdere leven te frustreren. Natuurlijk, we moeten de tafels van 1 tot en met 10 kennen om de elementaire berekeningen te kunnen uitvoeren, maar de manier van oefenen kan net zo leuk of saai aangeboden worden als jezelf maar wilt. In *'Kien'* nu vinden we puzzels, tabellen, oefeningen in het honderdveld, sommen die na de berekeningen een leuke tekening opleveren, waarbij de rékenvaardigheid ruimschoots aan bod komt.

geen metode

'Kien' is geen metode, maar kan met enige organisatie goed naast een metode gebruikt worden. De werkbladen, weliswaar in tweetallen, staan dan ook los van elkaar, dat wil zeggen: er is geen lijn in de opgaven aan te wijzen. Deze variëteit van op zichzelf staande aktiviteiten is juist het aantrekkelijke. Naast het rekenen is er aandacht voor roosters, koördinaten, tabellen, meten, omtrek en oppervlakte, eenvoudige grafieken, schatten, handig tellen, ordenend tellen, vlakke meetkundige figuren, eenvoudige kansrekening, taal, rekenen en strategiespelletjes.

Er is (nog) weinig aandacht besteed aan de ideeën over meetkunde en taal en logika (redeneren), zoals die zich de laatste tijd op het iowo ontwikkeld hebben.

Overigens teken ik protest aan tegen het feit dat in werkblad 15 van het eerste deel een kunstschilder de naam 'Jan Kladder' krijgt. Dit is diskriminerend ten opzichte van onze nederlandse schilders en doet geen recht aan de grote traditie die nederland op het gebied van de schilderkunst heeft opgebouwd.

De boekjes zijn leuk geïllustreerd door Jan Venema en een handleiding is tevens voorhanden. In deze handleiding worden de deeltjes 3 tot en met 8 voor de leerjaren 4, 5 en 6 aangekondigd, waarnaar ik reikhalzend uitzie. Het is daarom niet ondenkbaar dat binnenkort een vervolgbespreking van *'Kien'* komt. We zullen dan wat dieper ingaan op de inpassing van deze werkbladen in het huidige rekenonderwijs.

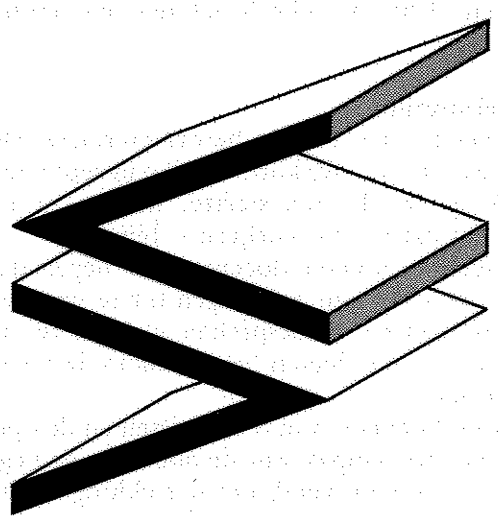
'Kien': Ger Janssen, met medewerking van Anton van der Geest en J. Raeven, uitgegeven door Malmberg, in opdracht van het centrum onderwijs service te nijmegen.

werkblok 1: f 3,90
werkblok 2: f 3,90
handleiding (bij werkblok 1): f 19,50
handleiding (bij werkblok 2): f 19,50.

---

[1]) Deel 2, nummer 27.

berichten



In het wiskobas-bulletin van oktober 1974[1]) stond een verslagje van een onderzoek van Clark naar het hanteren van de woorden 'op', 'onder' en 'in' door jonge kinderen.
Op dit onderzoek hebben Wilcox en Palermo intussen een vervolgonderzoek uitgevoerd, waarover zij rapporteren in het tijdschrift Cognition.[2])

LOUIS GILISSEN
KLAAS KOSTER

Belangrijk verschil met het eerder beschreven onderzoek is, dat andere voorwerpen worden gebruikt om de begrippen 'op', 'onder' en 'in' te testen. Opnieuw bleek dat jonge kinderen begrippen als 'op', 'onder' en 'in' door elkaar gebruiken, afhankelijk van de sòort voorwerpen.
Dezelfde aflevering van het tijdschrift 'Cognition' bevat tevens een artikel van de bekende amerikaanse (nu in oxford werkzame) psycholoog Bruner onder de titel: *'From communication to language – a psychological perspective'.* Voor iedereen, die in de taalontwikkeling van jonge kinderen is geïnteresseerd, lijken ons deze artikelen de moeite van het (engels) lezen zeker waard.

De hiervoor genoemde artikelen zullen in nederland vermoedelijk minder aandacht krijgen dan de brochure *'Denken met kinderen'*[3]), uitgegeven ter introduktie van het kioskwerkplan voor het kleuteronderwijs.
Behalve een beschrijving van het werkplan – waaronder een gedeelte over ruimtelijke oriëntatie, ruimtelijke relaties en hoeveelheden – bevat de brochure een aantal kritische opmerkingen aan het adres van de 'leading ladies' van het kleuteronderwijs. Als voorbeeld van een mogelijk werkplan voor het onderwijs aan 4-6-jarigen kan het kioskmateriaal een nuttige funktie vervullen in de diskussie over het samengaan van kleuter- en lagere school.

Voor leerplanontwikkelaars op alle nivo's lijkt kennisname nuttig van een belgische poging tot kurrikulumontwikkeling op het gebied van de 'menswetenschappen' in het sekundair onderwijs.
In een verslag van H. Jaspaert en H. de Neve wordt hierover informatie verstrekt. De titel luidt: *'Een strategie voor curriculum development in het secundair onderwijs'.*[4]) Jaspaert en de Neve bespreken ook het ledoprojekt in groningen.

inspekteurskonferentie
Een door het iowo georganiseerde konferentie voor rijksinspekteurs bij het kleuter- en lager onderwijs, vond onlangs (januari 1976) in lochem plaats. Gedurende drie dagen werkten de 24 deelnemers intensief uit 'het overzicht' (leerplanpublikatie 2). Tevens werden beleidsmatige aspekten van allerlei aard aan de orde

---

[1]) Pag. 18-20.
[2]) 1974/1975, 3, 3, 245-254.
[3]) Uitgeverij Van Gorcum (assen).
[4]) Uitgeverij Acco (leuven).

gesteld. Tijdens de slotzitting spraken de deelnemers hun waardering uit voor de intentie van het gevolgde beleid, terwijl ten behoeve van de afwikkeling een aantal adviezen werden geformuleerd. Een verslag van deze – ons inziens geslaagde – konferentie is intussen rondgestuurd.

wiskrant

De afdeling wiskivon (afkorting voor: *wisk*unde *i*n het *v*oortgezet *on*derwijs) van het iowo produceert sinds kort ten behoeve van (a.s.) wiskundedocenten, een aantrekkelijk verzorgd tijdschrift: de wiskrant. Deze, vier keer per jaar verschijnende krant, bevat artikelen over een diversiteit van onderwerpen. In de twee inmiddels verschenen afleveringen is geschreven over – we nemen lukraak wat titels uit de inhoudsopgaven:

- Doe samen eens wat met de krant;
- Anamorfosen;
- Differentiatie experiment Wageningen;
- Didactische begeleiding Wiskunde;
- Vormende waarde computerkunde;
- Inductie vertikaal;
- Waardeloos materiaal, start van meetkunde-onderwijs;
- Statistiek v.w.o.-bovenbouw

De abonnementsprijs is *f* 10,–. Kennismakingseksemplaren kunnen worden aangevraagd bij: iowo, redaktie wiskrant, antwoordnummer 1566, utrecht.

karlsruhe

Dit jaar (van 16 tot en met 21 augustus) vindt in karlsruhe een derde internationaal kongres over wiskundeonderwijs plaats. Zoals bij de mammoetkongressen in lyon (1970) en exeter (1972), heeft ook nu weer de 'international commission on mathematical instruction' (icmi) de organisatie op zich genomen.

Naast een zestal plenaire voordrachten, ligt het zwaartepunt toch vooral in de sekties. Hierin wordt door de konferentiedeelnemers gewerkt aan dertien tema's – door internationale werkgroepen grondig voorbereid –: Vorschule und Primarstufe (4-12 jährigen); Sekundarstufe (I); Sekundarstufe (II); Tertiärer Bereich; Fortbildung, Erwachsenenbildung; Der Mathematiklehrer in der Ausbildung und im Beruf; Kritische Analyse zur Entwicklung mathematischer Curricula; Evaluation – Methoden und Ergebnisse; Allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts; Lernprozesse im Mathematikunterricht; Unterrichtstechnologie im Mathematikunterricht – eine kritische Analyse; Mathematik und andere Unterrichtsfächer, integrierte Kurse; Algorithmen und Computer im Mathematikunterricht.

Aanmelding voor het kongres bij: international kongress über mathematikunterricht 1976, D 75, karlsruhe (bundesrepublik deutschland), kaiserstrasse 12, universität.
Kosten: 120 DM (eksklusief reis- en verblijfkosten).

heroriëntering

Het eerste jaar van de heroriënteringskursus 'nieuwe stijl' van wiskobas, welke in september 1975 op 16 plaatsen startte, zit er – op het moment dat we dit schrijven – bijna op.
Maandelijks komen docenten en begeleiders naar het iowo om ervaringen uit te wisselen, kursusopzetten te bespreken en zich te verdiepen in problemen van wiskundig-didaktische aard.
De betrokkenheid van de kursisten en de open en kreatieve aanpak van de docenten en begeleiders, is hoopgevend met betrekking tot het vervolg.

internationale dag voor het wiskundeonderwijs

Ter gelegenheid van het emeritaat van prof.dr. H. Freudenthal als hoogleraar-direkteur van het iowo, per 1 augustus a.s., organiseert het instituut op zaterdag 14 augustus 1976 in het transitorium van de rijksuniversiteit te utrecht, een 'internationale dag voor het wiskundeonderwijs'.
Naast een presentatie van het iowo en een voordracht van een buitenlandse gastspreker, zal prof. Freudenthal een rede houden, getiteld: *wiskundeonderwijs anno 2000.*

Naar het zich laat aanzien – de officiële uitnodigingen zullen binnenkort verzonden worden – biedt de zaal nog ruimte voor een klein aantal (overige) belangstellenden.
Zij die van deze gelegenheid gebruik zouden willen maken, worden verzocht dit zo spoedig mogelijk kenbaar te maken aan het iowo, tiberdreef 4, utrecht, ter attentie van de heer J.N. Bosman.

metoden

De onderwijsuitgevers zullen, nu en in de nabije toekomst, nieuwe reken/wiskundemetoden presenteren.
Omdat de fraaie formuleringen van voorwoorden en verantwoordingen veelal weinig inzicht bieden en kandidaat-gebruikers nergens een overzicht van alle metoden en additionele materialen kunnen vinden, zal het wiskobasbulletin in de komende jaargang aandacht besteden aan de *metodenproblematiek.*