wiskobas bulletin

leerplandeel

leerplanpublikatie 1

oktober 1975

de kiekkas van wiskobas

deze uitgave verschijnt als nummer 1
van de serie **leerplanpublikaties wiskobas,**
onder redaktie van
het wiskobasteam van het iowo
(eindredaktie rob de jong),
in het wiskobas-bulletin van oktober 1975

vormgeving: ton voortman

druk: princo bv

de kiekkas van wiskobas

beschouwingen over uitgangspunten en doelstellingen van het aanvangs- en vervolgonderwijs in de wiskunde

adri treffers

instituut ontwikkeling wiskunde onderwijs

inhoud

inleiding

Aan het eind van de vijftiger en het begin van de zestiger jaren rezen in vele landen van de westerse wereld de leerplanprojekten voor wiskunde in ijltempo uit het gemeenschappelijk grondgebied van universiteit en voortgezet onderwijs; in sommige gevallen werd ook het basisonderwijs erbij betrokken.[1])
De initiators waren zowel vakwetenschappers van de universiteit als vertegenwoordigers van de onderwijspraktijk. Samen vormden ze een stuurgroep die algemene richtlijnen verschafte voor ontwikkelteams en schrijversgroepen. In luttele jaren werden onderwijspakketten ontworpen, uitgeprobeerd, gereviseerd en verspreid; een ontwikkeling die haar weerga niet kende in het onderwijs. De basisteksten werden veelal in enkele weken ontworpen, soms had men er een lange hete zomer voor nodig. Binnen enkele jaren werden de teksten schoolrijp bevonden. Nadat het totale pakket op de markt was gekomen, gingen de stuurgroep, de schrijversgroep en het ontwikkelteam naar huis. De uitgevers namen het totale pakket aan leerlingenteksten, werkkaarten, handboeken over en de revisie was verder aan hen.
Dit beeld van de leerplaneksplosie zagen we in vele landen optreden. Soms waren het lerarenorganisaties, die zich achter het karwei spanden, soms scholen die het werk aanpakten. En..... ze hadden sukses.[2])
Omstreeks 1970 echter kwam de terugslag. De innovatie van het wiskundeonderwijs — daarover waren vrijwel alle leiders van de grote projekten uit de vs, waaronder Davis, Beberman, Rosenbloom, Page en Scott het eens — bleek verschraald tot een leerstofvernieuwing. En Morris Kline maakte zich op om het ontluisterende beeld van de gang van zaken te schetsen: inkompetentie, zucht naar prestige, propaganda; kortom, hij gebruikte heel het menselijk tekort om te verklaren 'Why Johnny can't add' en waarom de moderne wiskunde faalde.[3])
Het boek van Kline (1973) werd een bestseller in de vs en de vertalingen ervan zullen waarschijnlijk ook vlot over de toonbank gaan. En terecht! Want al is zijn beschrijving in bepaalde opzichten overdreven — in tegenstelling tot de tekorten komen de deugden die achter de vernieuwing steken te weinig uit de verf —, op een aantal punten zijn z'n vaststellingen treffend juist en leerzaam.
We noemen er enkele:
— de basisopvattingen over het wiskundeonderwijs zijn slecht doordacht;
— de evaluatiegegevens over het wiskundeonderwijs zijn oppervlakkig en aanvechtbaar;

[1]) De noten staan aan het eind van ieder hoofdstuk vermeld.

- de vernieuwing heeft zich voor een belangrijk deel voltrokken buiten de werkers van het praktische onderwijsveld om, terwijl de onderwijzers onvoldoende zijn toegerust om de vernieuwing aan te pakken;
- men heeft zich bij de vernieuwing laten imponeren door grote woorden, grote namen en grote teorieën;
- er zijn mogelijkheden om het wiskundeonderwijs op de basisschool in de juiste richting te vernieuwen, namelijk door het meer realiteitswaarde te geven.

In één opzicht is Kline's beschrijving – ook wat de vs betreft – onvolledig: het wiskundeonderwijs vertoont, wat de inhoud, betreft geen uniform beeld.[4])
Globaal bezien bestaan er drie richtingen:
- een aritmetische richting
- een strukturele richting
- een empirische richting.

De aritmetische richting – waar Kline's filippika, voor zover het 't basisonderwijs betreft, voornamelijk op doelt – wordt gekenmerkt door een vroegtijdige introduktie van de verzamelingentaal, door de behandeling van een aantal nieuwe onderwerpen en door een benadering van het rekenonderwijs, die zich nog meer dan voorheen, afwendt van de realiteit.
De strukturele richting legt de nadruk op allerlei matematische strukturen, waardoor traditionele gebieden in een ander licht verschijnen, of in de schaduw gesteld worden door nieuwe onderwerpen als logika, transformaties, talstelsels, waarschijnlijkheidsrekening, struktuurspelen en relaties.
De empirische richting injekteert het rekenonderwijs met aktiviteiten op het gebied van meten, meetkunde, funkties en statistiek. De vernieuwing vindt zijn eenheid niet zozeer in de strakke opbouw of de matematische inspiratiebron, als wel in de didaktische aanpak.
Kortom, internationaal bezien is het beeld van het wiskundeonderwijs veel breder dan Kline schetst. En ook minder geschonden! Men doet het werk van bijvoorbeeld Zoltan Dienes (strukturele richting) en Edith Biggs (empirische richting) tekort – ook al deelt men hun basisopvattingen over wiskundeonderwijs niet – indien men daarin de verklaring wil zoeken van het feit dat jantje niet kan rekenen.

In nederland kunnen jantjes rekenfeilen (nog) niet op rekening van het moderne wiskundeonderwijs gezet worden, om de eenvoudige reden dat het rekenonderwijs hier – in tegenstelling tot een aantal westeuropese landen – niet ingrijpend veranderd is. De verklaring van dit opmerkelijke feit moet vooral gezocht worden in de omstandigheden waarin het nederlandse rekenonderwijs omstreeks 1970 verkeerde. Traditionele rekenprogramma's, vernieuwde rekenmetoden, vertaalde boeken uit de aritmetische richting, bijdragen van meer strukturele zijde, werkkaarten uit de empirische hoek, dit alles kon men op de boekenmarkt aantreffen. Het was in die tijd dat wiskobas zich aandiende als een groep, een beweging, die zich tot taak stelde de vernieuwing van het wiskundeonderwijs op de basisschool nationaal aan te pakken en mede de dreigende chaos in het rekenonderwijs te bezweren. Vernieuwers en bezweerders!
Van de vernieuwing kwam in eerste instantie weinig terecht: er was

weinig armslag om de vernieuwing van het wiskundeonderwijs op de pedagogische akademie en de heroriëntering voor onderwijzers op gang te brengen; het karwei om een leerplan voor de basisschool te ontwikkelen bleek helemaal ondoenlijk. Dus resteerde in eerste instantie alleen de bezwering: wiskobas trachtte alle betrokkenen ervan te overtuigen, dat het onverantwoord zou zijn om – op grote schaal – moderne wiskundemetoden te introduceren. Daarmee deed zich het wonderlijke feit voor dat wiskobas, die wiskunde op de basisschool in haar vaandel draagt, tegen de ínvoering ervan stemde. Die stem bleek weerklank te vinden in het onderwijs. Ook de oproep tot vernieuwing bleek gehoor te krijgen: vanaf medio 1971 kon het wiskobasprojekt binnen het zojuist opgerichte instituut voor ontwikkeling van het wiskundeonderwijs (iowo) gerealiseerd worden.[5])

De wijze waarop wiskobas de leerplanontwikkeling gestalte gaf, behoeft enige toelichting. Enkele jaren geleden dacht men in brede kring bij vernieuwing van het onderwijs aan een ontwikkeling binnen een gesloten eksperiment: eerst onderzoeken, vervolgens ontwikkelen en tenslotte verspreiden.
In het wiskobasprojekt vond men van een dergelijke opzet vrijwel niets terug: geen vooropgestelde leerdoelen, geen gesloten eksperiment, geen scheiding tussen onderzoek, ontwikkeling en uitvoering. Wel kon men een chaotisch aandoende aktiviteit op het gebied van kadervorming, opleiding, heroriëntering en basisonderwijs aantreffen, die in niets deed denken aan het geruisloze produktieproces van 'kant-en-klaar' pakketten voor de onderwijskonsument, zoals men die in de gangbare leerplanontwikkelingsprojekten waarnam.
Was de scheiding tussen leerplanontwikkeling en innovatie, die in het gesloten eksperiment aanwezig is, dan niet te handhaven – gesteld dat men het zou willen – in de nederlandse situatie, waarin de innovatie de ontwikkeling vooruitsnelde? Nee, want dat zou betekenen, dat men de kloof tussen de werkelijke vernieuwing en de wenselijke vernieuwing voor tenminste tien, vijftien jaar zou laten bestaan. En jantje dan?

Hoe pakte wiskobas de leerplanontwikkeling dan wel aan?
Het onderwijsveld werd gevraagd om het rekenonderwijs niet ingrijpend te veranderen, maar te verlevendigen met nieuwe aktiviteiten, de beslissing over de aanschaf van wiskundemetoden voorlopig op te schorten en te participeren in de ontwikkeling van een zogenaamd integratieplan. De heroriëntering kwam mede in dienst te staan van de leerplanontwikkeling voor wiskunde op de basisschool, de kadervorming was erop gericht en de opleiding werd ermee gekonfronteerd. Eerst kwam er een eksploratiefase (1971-1973) waarin belangrijke nieuwe gebieden van het wiskundeonderwijs onderzocht werden, vervolgens trad de integratiefase (1973-1975) in, waarin de werkzaamheden zich koncentreerden rond de ontwikkeling van een eksperimenteel schoolwerkplan voor de basisschool en thans is de afwikkelingsfase (1975-1977) begonnen, waarin het integratieplan gepubliceerd en het kommentaar erop beschreven zal worden. Door de respons op het integratieplan zal globaal de richting bepaald worden waarin de integrale vernieuwing van het wiskundeonderwijs in de tachtiger jaren zal dienen te gaan.

Wat houdt het integratieplan in?[6])
De body ervan wordt gevormd door een eksperimenteel schoolwerkplan, ontwikkeld in samenwerking met het team van de Dr. W. Dreesschool te arnhem; de geest die er achter steekt wordt in een aantal bijgevoegde publikaties beschreven. Het totaal van publikaties noemen we het integratieplan.
Laten we ons eerst wenden tot de kern ervan: het eksperimentele schoolwerkplan. Het belangrijkste doel van dit werkplan is, richting te geven aan de vernieuwing van het wiskundeonderwijs in nederland. De heterogeniteit van het moderne wiskundeonderwijs en de diversiteit aan uitwerkingen riepen – we hoorden het straks al – de noodzaak van een richtpunt op. Welnu, het eksperimentele schoolwerkplan is zo'n oriëntatiepunt. Het kan – we herhalen het – de vernieuwingsruimte afperken, het kan een bindmiddel zijn tussen de verschillende metoden en het is bruikbaar als fundament voor de opleiding, de begeleiding en de kadervorming. Het kan echter niet zonder meer dienen om het onderwijs van alle-dag te sturen: het is een diskussieplan, een inspiratiebron, een basis voor de (a.s.) onderwijzer, maar geen supermetode. Het wil het niet zijn, en het kan er ook geen aanspraak op maken: de tijd van ontwikkelen was te kort om het plan schoolrijp te maken voor 'de' school in nederland.
Maar er is nog een andere reden waarom het plan niet 'zonder meer' algemeen bruikbaar is. Volgens de overtuiging van wiskobas dient wiskunde opgevat te worden als een aktiviteit, die geworteld is in de betekenisvolle realiteit van het kind. En deze vaststelling bindt het schoolwerkplan – zij het ten dele – aan de tijd en de omgeving van het kind. Dit betekent een band met de omgeving van de school, met het verkeersplein in de buurt, met de flats, met de oliekrisis, met de voetbalklub, en ..... met de onderwijzer(es). Dit houdt in dat zo'n schoolwerkplan, naar de letter genomen, niet volledig navolgbaar is. Maar de geest die erachter steekt kan volledig gegrepen worden, of omgekeerd: men kan zich volledig door de grondideeën van het plan laten inspireren. En in dat opzicht is het plan wél algemeen bruikbaar.
Bij de samenstelling ervan hebben we ons op onze beurt laten inspireren door de vele reakties uit het nederlandse onderwijsveld en door de beste matematisch-didaktische produkten, die we hebben kunnen ontdekken. We hebben overleg gepleegd met veel deskundigen op het gebied van de wiskundeonderwijs-ontwikkeling, overal in de wereld. En het lijkt erop dat we sukses hebben: een aantal konkrete uitwerkingen blijkt, zowel nationaal als internationaal, aan te slaan.[7]) Maar wat sukses kan betekenen zagen we aan de afloop van de story van de 'new math'.....

De uitkomst van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs kan, op langere termijn gezien, slechts positief zijn, indien ze gefundeerd is in hechte basisopvattingen over het onderwijs. Deze grondideeën kunnen we elkaar echter niet aanpraten; we kunnen wel onderling gedachten uitwisselen; we kunnen wel proberen onze ideeën zo duidelijk mogelijk onder woorden te brengen. En dat trachten we in deze publikatie over de uitgangspunten en doelstellingen van het aanvangs- en vervolgonderwijs in de wiskunde dan ook te doen.
Onze beschouwingen zijn niet volledig uitgediept, maar bieden mogelijkheden tot diepgaande diskussie. Als referentiekader maken we gebruik van een kiekkas.

Kiekkas kan betekenen kijkhuis, maar ook kijkdoos. *'De kiekkas van wiskobas'* kan in beide betekenissen verstaan worden.
Onlangs vertelde een buitenlands bezoeker van het iowo, dat hem in nederland twee zaken vooral opgevallen waren. In de eerste plaats, dat men hier de gordijnen altijd open heeft, en ten tweede – het betrof het wiskobasprojekt – dat dit in het huis van de leerplanontwikkeling blijkbaar ook het geval is. De kiekkas in de zin van een huis met grote ramen, kan dus op de open ontwikkelingsstrategie van het projekt in z'n totaliteit slaan. In die zin gebruiken we kiekkas hier niet, al moet de intentie van dit boek wel uit deze open-huis-gedachte begrepen worden.
Wij gebruiken kiekkas hier allereerst in de betekenis van kijkdoos. De hoekpunten van de kijkkast worden gevormd door 8 matematisch-didaktische uitgangspunten, de randen door 12 algemene doelstellingen, de zijvlakken door 6 leerstofgebieden; de inhoud kan gevuld worden met konkrete onderwijstaferelen. Kortom, kiekkas staat voor driedimensionale doelstellingsruimte. We spreken dan ook over dimensies van doelstellingen.
Het eerste deel van deze publikatie handelt over uitgangspunten en het tweede deel bevat beschouwingen over één-, twee- en driedimensionale doelen. Deel drie nodigt uit tot doelstellingname en deel vier tot wiskundewerk. Dit laatste deel bevat onder meer de wiskundige opgaven, die door de tekst van de eerste drie delen gestrooid zijn.

Voor een aantal lezers zullen deze matematische problemen de krenten van de koek zijn, anderen zullen ze echter ervaren als hinderlijke steentjes in het brood.
Deze verschillende instelling tot de tekst brengt ons tot de volgende slotopmerkingen.
We hopen, dat de lezer die gewend is zich door voetnoten te laten begeleiden, op de uitdaging van de matematische problemen zal ingaan. Want ook aan de matematische ervaringen kan men de gedachten over uitgangspunten en doelstellingen scherpen.
We hopen, dat de lezer die gewoon is gezwind van het ene wiskundige probleem naar het andere te gaan, zich hier eens rustig in het tussenliggende didaktische probleemveld zal oriënteren. Want ook in de didaktische bezinning kan men de gedachten over uitgangspunten en doelstellingen scherpen.
We hopen, dat de lezer die zich bij het nadenken over matematisch-didaktische problemen vooral laat inspireren door z'n ervaringen in de onderwijspraktijk, met de aktiviteiten die in deel vier beschreven staan, aan het werk zal gaan in de klas. Want ook aan de praktische ervaringen kan men de gedachten over uitgangspunten en doelstellingen scherpen.
We kunnen dan trouwens meteen ook zien of jantje nog meer kan dan rekenen alleen.....

noten

[1] De begintekst van deze inleiding is ontleend aan een artikel in het Wiskobas-Bulletin (jaargang 2 nr. 4/5, pag. 845). Ook een aantal andere delen van de 'kiekkas' is reeds eerder gepubliceerd in het Wiskobas-Bulletin of in konferentieverslagen. De totale opzet van deze studie echter is nieuw. Bij het samenstellen van de eindversie in de zomer van 1975, ben ik enorm gesteund door het wiskobasteam, waarvan ik met name Rob de Jong en Edu Wijdeveld wil noemen. De verantwoordelijkheid voor de tekst berust bij de schrijver.

[2] Zie in dit verband:
Huhse, K.: Theorie und Praxis der Curriculum-Entwicklung. Ein Bericht über Wege der Curriculum-Reform in den USA mit Ausblicken auf Sweden und England (berlin 1968).
Zie voor een uitgebreide literatuuropgave:
Wiskobas-Bulletin (jaargang 2 nr. 4/5, pag. 852).

[3] Kline, Morris: Why Johnny can't add: the failure of the New Math (new york 1974/2).

[4] Zie voor een meer uitgebreide beschrijving van deze richtingen:
het eerste hoofdstuk van 'Matematika' (iowo-publikatie, utrecht 1973).
Zie voor een ander onderscheid:
Williams, J.D. (ed.): Mathematics reform in the primary school (hamburg 1967).

[5] Een uitgebreid verslag over de pre-instituutsfase van wiskobas en over de planning, kan men in de eerste jaargang van het Wiskobas-Bulletin aantreffen.

[6] Zie voor de meer gedetailleerde inhoud van de gebruikte termen:
Bruggen, J. van: Een leerplan: wat is dat eigenlijk? (in Wiskobas-Bulletin jaargang 2 nr. 6, pag. 1031-1038).
In een lezing op de wiskobas-konferentie te noordwijkerhout (1974) licht Van Bruggen toe waarom termen als 'curriculum' en 'onderwijsleerplan' niet gebruikt worden. Samenvattend: we spreken van schoolwerkplan als we het oog hebben op het geheel van aanwijzingen voor de handelingen van de onderwijzer, die gericht zijn op het doen ontstaan van leeraktiviteiten bij de leerlingen. Als we spreken over het integratieplan kunnen we op het eksperimentele schoolwerkplan van wiskobas doelen, maar meestal duiden we op mantelpublikaties rond het schoolwerkplan, d.w.z. publikaties die het werkplan funderen of omkleden. Deze 'kiekkas'-publikatie is dus zo'n integratieplanpublikatie. De term 'integratie' vindt z'n oorsprong in de opzet om rekenen en wiskunde met elkaar te verbinden.

[7] Zie bijvoorbeeld:
Morley, A.: A new development in Primary School Mathematics, The Dutch Wiskobas Project (in 'Mathematics Teaching' 69, pag. 15-18).
Belangrijker gegevens treffen we aan in de reakties van de onderwijzers van de heroriënteringskursussen, in individuele respons van vele onderwijsmensen en in besprekingsverslagen van schoolteams. Men kan een konkreter beeld krijgen van de reakties in het zogenaamde responsblok van de verschillende jaargangen van het Wiskobas-Bulletin. Nog een illustratie: vrijwel alle wiskundeproblemen en tema's die in deze 'kiekkas' getoond worden, zijn door de konstruktieve respons uit het onderwijsveld – voornamelijk via de wiskobaswerkgroepen en de heroriënteringskursussen – ontwikkeld tot het huidige produkt.

deel 1

uitgangspunten van wiskundeonderwijs

In hoofdstuk 1 worden een aantal essentiële trekken van wiskundige aktiviteiten opgespoord. Dit gebeurt via een tiental telproblemen. Het begrip matematiseren staat daarbij centraal.
In hoofdstuk 2 wordt de verkenning uitgebreid. Het voorgaande wordt nog eens vanaf 8 matematisch-didaktische uitgangspunten beschouwd. En daarmee krijgen de basisopvattingen van wiskundeonderwijs, die ook het fundament vormen van de doelen, duidelijker gestalte.

1 verkenning van het gebied

inleiding

In dit hoofdstuk gaan we aan het werk om enkele specifieke trekken van wiskundige aktiviteiten op te sporen. Dit betekent, dat we de hierna volgende probleemsituaties binnenstappen.
Wat staat er te wachten?
Wel, er zijn tien telproblemen gerangschikt naar toenemende kompleksiteit. In de begeleidende tekst wordt ieder probleem voorzien van kommentaar en al doende ontstaat een eerste indruk van de uitgelokte aktiviteit. Aan het eind bekijken we dit beeld nog eens op een afstand.
We starten met problemen op basisschoolnivo en eindigen in het gebied van het voortgezet onderwijs.[1]) Het geheel heeft een vertikale opbouw, maar is geen afspiegeling van een reëel stuk onderwijs. Daarvoor is de stof te kaal en de totaliteit te verknipt. Aspekten van het *matematiseren* kunnen er echter zeer wel in herkend worden.

▶ **TELPROBLEMEN (1)**

bloemen en hartjes (1.1)

Er zijn drie soorten verschillend gekleurde bloembladeren en twee soorten verschillend gekleurde hartjes. Hoeveel verschillend gekleurde bloemsoorten kunnen er gemaakt worden?

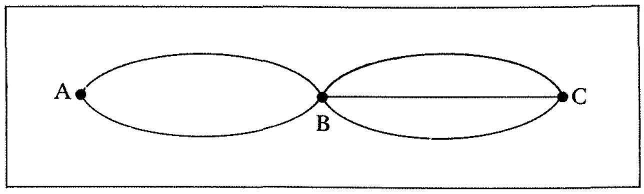
Als de ruikers konkreet aangeboden worden, is de opdracht uitvoerbaar voor kleuters.

De resultaten:

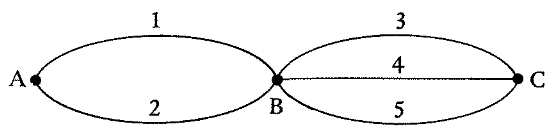
'Een kind begreep de opdracht niet. Een ander werkte systematisch: steeds twee gelijkkleurige bloemen met verschillend hartje. De overige kinderen keken bij elke bloem, die ze maakten, of die er al was.'[2])

Het probleem kan op een hoger nivo opgelost worden: zonder bloemblaadjes en hartjes er toch in slagen zes verschillende bloemen te bedenken. Merk op, dat er op alle nivo's belangrijke prestaties geleverd worden:
- er wordt begrepen wat het betekent, dat bloemen verschillend zijn en er wordt opgemerkt, dat ze verschillen;
- er wordt systematisch gewerkt met konkreet of schematisch materiaal;
- er wordt systematisch gewerkt met voorgesteld materiaal.

over wegen (1.2) *Hoeveel verschillende roetes lopen er rechtstreeks van A via B naar C? Beschrijf deze roetes!*



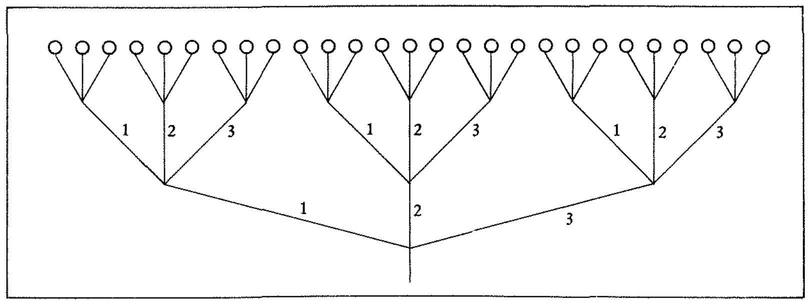
Hier kan eenzelfde systematische aanpak gevolgd worden. Een mogelijkheid om de wegen te beschrijven: plaats getallen (of letters) bij de verschillende wegen en duid de roete aan met een getallenpaar:



De roetes zijn: (1,3); (1,4); (1,5);
(2,3); (2,4); (2,5).

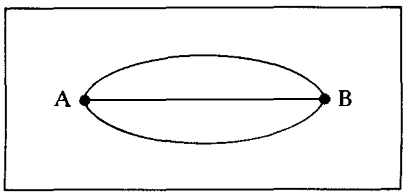
Door symbolisering kan het systematisch werken zich richten op de symbolen in plaats van op de wegen. Daarmee is de weg geopend naar een meer abstrakte benadering.
Mogelijk worden de getallenparen geassocieerd met koördinaten: het wegenprobleem is dan via het symboliseren getransformeerd tot een snijpuntenprobleem.
Leerlingen van de middenklassen van de basisschool zijn veelal in staat de oplossing van dit soort problemen te generaliseren en soms zelfs algemeen te formuleren. Dit is dan weer een hoger nivo:
– konkreet handelen;
– systematisch konkreet handelen;
– systematisch werken en symboliseren;
– systematische aanpak, symboliseren, generaliseren en formuleren.

appeltjes (1.3) *Er is een boom met drie takken; aan ieder van de drie takken drie takjes; aan ieder van deze takjes drie steeltjes en aan ieder steeltje een appel. Hoeveel appels zitten er aan deze boom en hoe duiden we de plaats van een appel aan?*

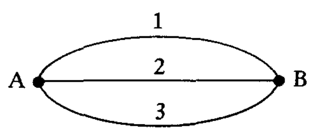


In rekentaal: het aantal appels is $3 \times (3 \times 3) = 27$.
In gewone taal: er zijn drie groepen van drie groepjes van drie. Of anders gezegd: drie dozen, waarin drie doosjes, waarin drie appels.
De plaatsaanduiding van een appel kan geschieden met een geordend getallentriple. Dat wil zeggen: appel (3, 1, 2) kan gevonden worden aan tak 3, takje 1 en steeltje 2. De symbolisering kan uiteraard op verschillende wijzen geschieden, maar de bovenstaande is efficiënt en beknopt. Het zoeken naar zo'n plaatsaanduiding, de diskussie over de bruikbaarheid en beknoptheid ervan, kan op zichzelf het doel van een les voor de middenklassen van de basisschool zijn.

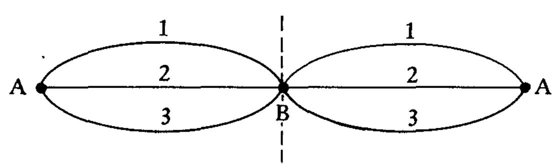
heen en weer (1.4) *Hoeveel verschillende roetes zijn er van A via B naar A?*



Dit probleem heeft dezelfde struktuur als de voorgaanden. De systematische aanpak, het symboliseren en het generaliseren zijn hier dus ook van toepassing. Toch zijn er enkele nieuwe gezichtspunten.
Ten eerste kan er nu een moeilijkheid rijzen bij de interpretatie van het begrip 'verschillende roetes'. Is roete (1,3) verschillend van (3,1)? Hier komt de noodzaak naar voren van een eksakte begripsbepaling.
Vervolgens blijkt, dat enkele van de voorgaande oplossingen met dit probleem geassocieerd kunnen worden:



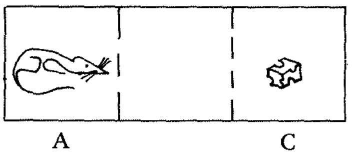
De roete ABA wordt dan:



De terugweg wordt als het ware gespiegeld of omgeklapt.
Ook het rooster kan met het probleem verbonden worden: roetes zijn dan afgebeeld op snijpunten.
De boom kan eveneens als kapstok dienen: roetes worden vertakkingen. Met andere woorden: roetes, roosters en bomen kunnen geassocieerd worden met andere problemen. Hiermee is de eerste stap gezet op de lange weg van de modelvorming. Wat zich eerst als probleem aandient, kan later als werktuig gebruikt worden om andere problemen op te lossen. Niet omdat het voorgeschreven wordt of omdat het zo moet, maar omdat het zich — al dan niet spontaan — als steun aanbiedt.

We kunnen dit – voor onszelf – bij de volgende problemen nagaan:

– een muis loopt van A naar de kaas in C; bepaal het aantal verschillende roetes, dat hij kan gaan:

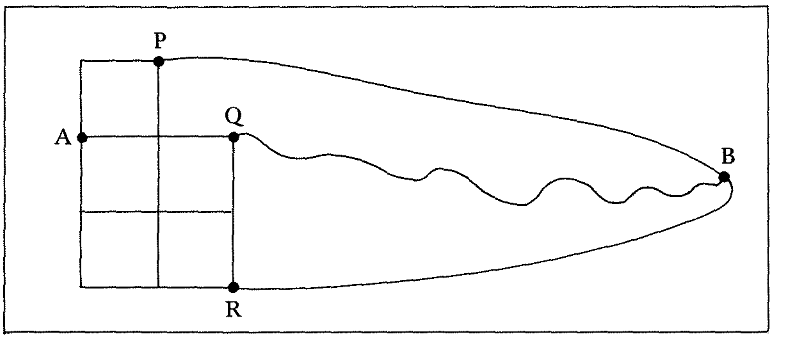


;

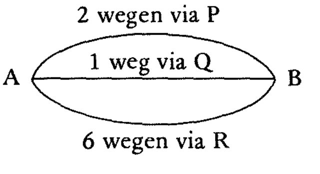
– er zijn vijf mensen in een bestuur; twee ervan moeten tot voorzitter en sekretaris benoemd worden; hoeveel mogelijke tweetallen zijn er?
– de bestuursleden schudden elkaar de hand; hoeveel handdrukken worden er gegeven?
– hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om een voetbal-totoformulier in te vullen?

nogmaals heen en weer (1.5)

Iemand woont in A en werkt in B. Op de heenreis kan hij gebruikmaken van de drie uitvalswegen PB, QB en RB, waar hij rechtstreeks – dat wil zeggen: zonder omweg – heenrijdt. Voor de terugreis geldt uiteraard hetzelfde in omgekeerde richting.
Hoeveel verschillende roetes ABA kan de pendelaar kiezen?



Er worden in dit probleem geen essentieel nieuwe elementen aangedragen, maar er moet eerst wel wat geteld worden voor het teruggebracht is tot bekende proporties. Er blijken 9 mogelijkheden te zijn om een heenweg te kiezen. Er zijn dus 9x9 roetes. Dit 'dus' vindt z'n oorsprong in (**1.4**), en wel als generalisatie van die probleemoplossing. Maar ook het rooster, het wegenprobleem van (**1.2**) en de boom van (**1.3**) kunnen model staan voor de oplossing, al ligt dat hier niet zo voor de hand vanwege het signaal dat er uitgaat van 'roetes' en 'heen en weer'.
Het is echter ook mogelijk, dat er minder handig te werk gegaan wordt. Bijvoorbeeld door de systematische telstrategieën, die we in de eerste gevallen beschreven, ook op dit probleem toe te passen, waarbij dan de volgende oplossing te voorschijn komt:

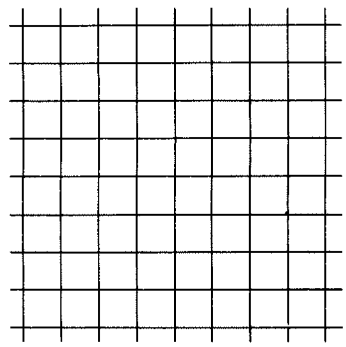


$$\begin{array}{r} 6\times 6 + 6\times 1 + 6\times 2 = 54 \\ 1\times 6 + 1\times 1 + 1\times 2 = \ \ 9 \\ 2\times 6 + 2\times 1 + 2\times 2 = \underline{18} \\ 81. \end{array}$$

Op zichzelf genomen is dit een interessante strategie: de bundeling van de uitvalswegen vertoont een duidelijke binding aan het oorspronkelijke plaatje en de systematische aanpak wordt nu op de bundels toegepast in plaats van op de individuele wegen.
Krijgen we het probleem voorgeschoteld zonder dat de voorgaanden behandeld zijn, dan worden alle moeilijkheden van systematiseren, symboliseren, simplificeren, generaliseren en eksakte begripsbepaling hier opgehoopt. Kortom: het organiseren van het probleemveld zou dan veel lastiger geweest zijn en ..... wellicht aantrekkelijker.

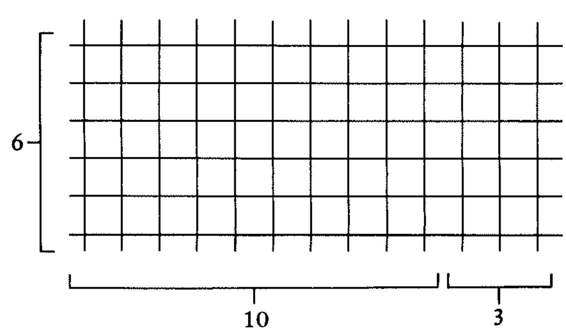
didaktisch zijstapje (1.6)

We hebben zojuist gezien, dat het roostermodel kan dienen om een vermenigvuldigingssituatie in beeld te brengen.
Bijvoorbeeld 9 x 9:



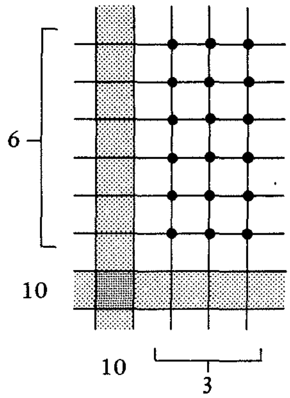
Wij vragen ons nu af of een dergelijk rooster zo geschematiseerd kan worden, dat bijvoorbeeld een vermenigvuldiging als 67 x 78 zichtbaar en inzichtelijk wordt, en vervolgens of deze schematisering het resultaat kan zijn van een matematisering via de ontdekkende metode.[3]

We geven vijf mogelijke fasen in dit schematiseringsproces aan, waarbij we de indeling van Van Bruggen volgen:
– tel de snijpunten in een rooster, zoals we bij 9 x 9 deden;
– tel de snijpunten handig door te splitsen; bijvoorbeeld 13 x 6:



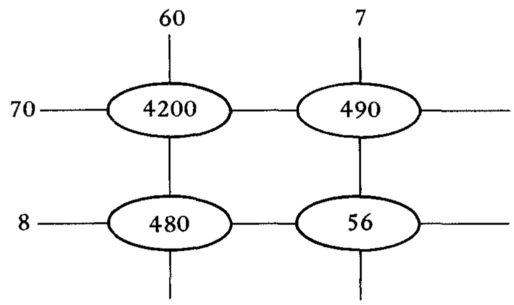
10 x 6 = 60
3 x 6 = 18
78

– ga het rooster schematiseren; werk met dikke lijnen voor de tientallen; bijvoorbeeld 13 x 16:



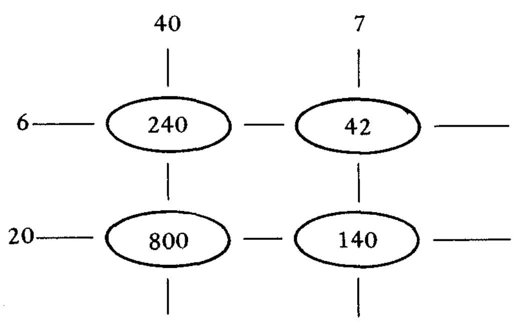
10 x 10 = 100
3 x 10 = 30
10 x 6 = 60
3 x 6 = 18 +

— symboliseer het rooster; plaats getallen bij één lijn; bijvoorbeeld 67 x 78:



4690
536 +
5226

— werk het schema om tot de bekende algoritme; bijvoorbeeld 47 x 26:



47
26 x
282

940 +
1222

We kunnen ons afvragen of deze toenemende schematisering een doeltreffend middel is om via een vertikale planning de algoritme aan te leren van de vermenigvuldiging. Dat wil zeggen: een vaste procedure te volgen om het 'antwoord' te vinden. Zo ja, dan is hier wel een belangrijke didaktische fasering geschetst, maar daarmee is dit didaktisch zijstapje in een verhandeling over matematiseren nog niet gerechtvaardigd.
We willen echter verder gaan en stellen dat de leerling zèlf de fasen van de toenemende schematisering kan doorlopen in een gestuurd leerproces, waarin het matematiseren genoeg kansen krijgt, zonder dat hij de vijf schema's kant-en-klaar aangeboden krijgt. Wij menen, dat wanneer de leerling achtereenvolgens de aangegeven roosterproblemen 'op tijd' toegediend krijgt, hij zèlf het proces van schematisering kan doorlopen, via de ontdekkende werkwijze, als hij daartoe aangespoord wordt.
Kortom, we zijn van mening, dat het aanleren van een algoritme kán (lees niet: moet) gebeuren via een matematiseringsproces. Waarmee we tevens willen betogen, dat enerzijds het beheersen van een algoritme een

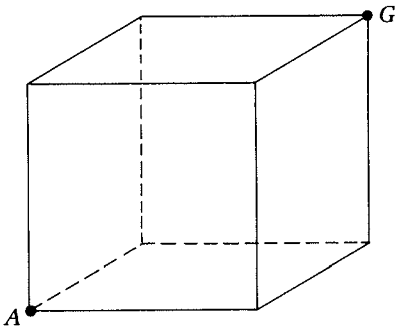
belangrijk hulpmiddel kan zijn om te matematiseren (zoals de optellingsalgoritme bij het voorgaande een noodzakelijk middel is), en dat anderzijds een matematiseringsproces kan leiden tot het ontdekken van een algoritme (in casu de vermenigvuldigingsalgoritme). Het is dan ook niet juist om het matematiseren en het algoritmiseren (het aanleren van een algoritme), als zijnde strijdige elementen in het wiskundeonderwijs, tegenover elkaar te stellen. Er is immers sprake van een wederzijdse zingeving.

Het wiskundeonderwijs zal zowel het inventieve als het receptmatige element dienen te bevatten en niet als strijdige elementen, maar als elkaar ondersteunende noodzakelijkheden. Wat eerst het resultaat is van een vondst, kan later als een versteend roetine-middel worden gebruikt om het oplossen van problemen op een hoger nivo te vergemakkelijken.
Het is gepast om deze evidentie expliciet te formuleren in een betoog over het begrip matematiseren. Vandaar dit didaktisch zijstapje.

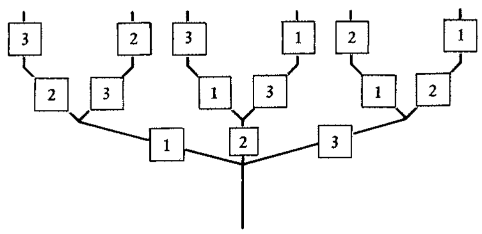
kaartjes voor de kubuskruiper (1.7)

Er zijn drie cijferkaartjes $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$. *Ga na hoeveel verschillende getallen van drie cijfers er met deze kaartjes gelegd kunnen worden en onderzoek enkele visualiseringsmogelijkheden.*

Een kubuskruiper gaat rechtstreeks — zonder omweg — van A naar G langs de ribben van de kubus. Hoeveel verschillende roetes kan hij kiezen en hoe kunnen die roetes beschreven worden?



Een aanpakmogelijkheid.
Neem $\boxed{1}$ op de eerste plaats met de bijbehorende oplossingen.
Neem $\boxed{2}$ op de eerste plaats met de bijbehorende oplossingen.
Neem $\boxed{3}$ op de eerste plaats met de bijbehorende oplossingen.
Deze werkwijze kan zichtbaar gemaakt worden met een boomdiagram:



Wordt het probleem als volgt geformuleerd: 'eerst heb ik drie mogelijkheden, dan nog twee en vervolgens één', dan kan ook de sprong naar het wegenmodel gemaakt worden. Het lijdt echter geen twijfel, dat het boomdiagram het eenvoudigste visualiseringsmiddel is; de verschillende keuzemogelijkheden zijn in dit model goed uit elkaar gehaald. Het wegenmodel reduceert de konkrete kaarten tot mogelijke keuzen en tekent een meer abstrakte aanpak. Het roosterdiagram biedt geen mogelijkheden.

Breiden we het kaartjesprobleem uit tot vier of meer, dan levert de systematische aanpak, gekombineerd met een redenering op grond van symmetrie-overwegingen, een elegante oplossing. Een vijfdeklasser van de basisschool ging bij het vierkaartjesprobleem als volgt te werk:

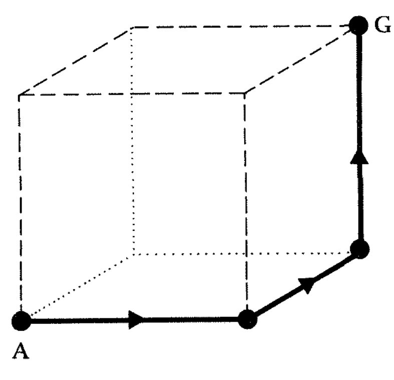
$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$
$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{3}$
$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{4}$
$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{2}$
$\boxed{1}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{3}$
$\boxed{1}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}$

'Er zijn dus zes mogelijkheden met kaartje $\boxed{1}$ vooraan. Met $\boxed{2}$ vooraan dus ook zes mogelijkheden en ook met $\boxed{3}$ en $\boxed{4}$. Er zijn dus 24 mogelijkheden.'

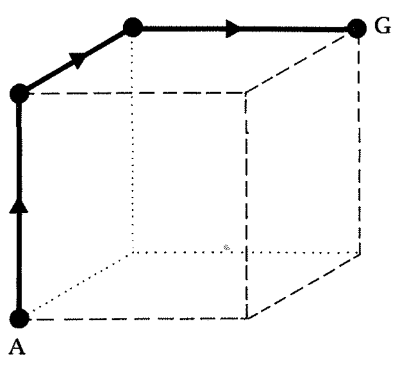
De symmetrie van deze redenering kan met het boomdiagram uitgebeeld worden: één van de basistakken wordt met alle vertakkingen gevolgd, daarna wordt gesteld, dat er vier soortgelijke basistakken zijn, dus.....

Bij de kubuskruiper zijn soortgelijke opmerkingen te plaatsen.
Het is de moeite waard om de beide problemen eens met elkaar te vergelijken. Duiden we een trek naar rechts aan met $\boxed{1}$, een trek naar achteren met $\boxed{2}$ en naar boven met $\boxed{3}$, dan kan iedere roete met de eerder gevonden kaartjesgetallen van drie cijfers beschreven worden.
Bijvoorbeeld:

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ is de roete:



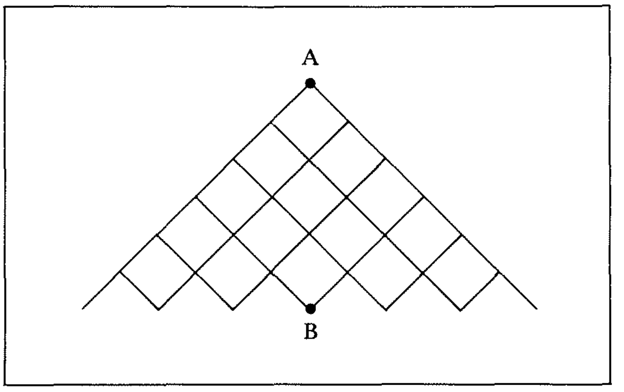
$\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}$ is de roete:



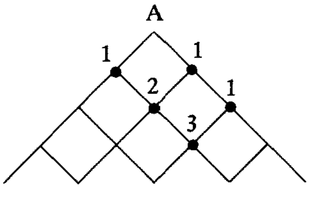
Aan het ene probleem kan dus een interpretatie gegeven worden, die het andere probleem volledig dekt. Dit is een voorbeeld van *isomorfie.*

roetes op een wegennet (1.8)

Hoeveel verschillende roetes lopen er over het rooster van A naar B die geen omweg volgen?



Als het niet gelukt is om het probleem op te lossen – wat niet zo verwonderlijk is, omdat de roetes moeilijk uit elkaar te rafelen zijn – dan kunnen we het eerst wat vereenvoudigen door B dicht in de buurt van A te kiezen en het daarna geleidelijk wat verder weg te schuiven:

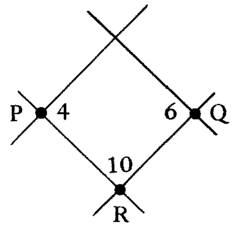


Er blijkt dan een patroon achter de opeenvolgende mogelijkheden te zitten, en wel het volgende:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Het aantal roetes van A naar B blijkt dus 20 te zijn. We behoeven niet veel te tellen, want als we het probleem op een gegeven moment los van de tekening voortzetten, zijn we vlug klaar. We veronderstellen bij deze werkwijze dan wel, dat het patroon op de oorspronkelijke wijze blijft doorlopen en dat er niet ergens een steekje is losgeraakt.
Is dat een gewaagde veronderstelling?
Wel, het lijkt van niet, maar toch zal de bewering 'en zo gaat het alsmaar verder' waar gemaakt moeten worden.
Kunnen we verklaren waarom zo'n getallenpatroon op het wegennet ontstaat?

Neem een willekeurig geval: is het plausibel dat de 10 uit het patroon ontstaat uit de optelling van 6 en 4?



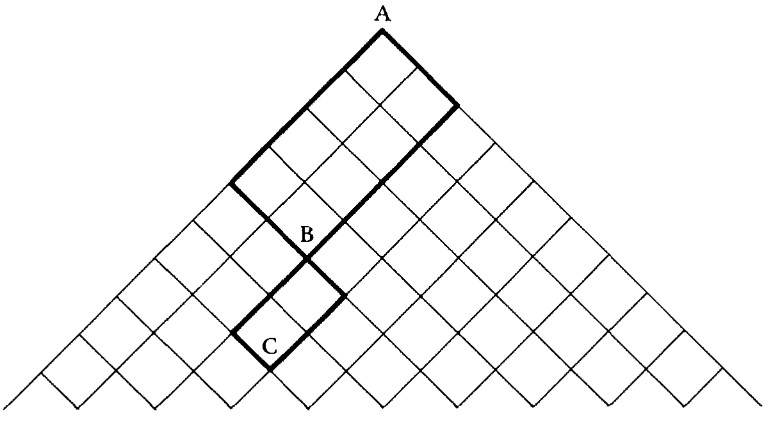
Als dit ingezien wordt, is ineens het hele patroon verklaard, al zal de oplossing op hoger nivo dan nog in het wiskundige jasje van de volledige induktie gestoken moeten worden, om 'het gaat zo door' in te blikken.
De verklaring luidt als volgt: we komen uitsluitend bij R via P en Q. Via P leiden vier roetes naar R, via Q zes, dus lopen er totaal tien roetes naar R.

De specifiek wiskundige aanpak komt in dit voorbeeld goed tot uitdrukking: eerst wordt het probleem vereenvoudigd, dan geleidelijk uitgebreid en vervolgens verschijnt er een bepaald patroon, waarvan de onderliggende struktuur verklaard moet worden om de oplossing voldoende bewijskracht te verlenen. Daartoe wordt een 'willekeurig' stuk (P, Q, R) uit het patroon geknipt, waaraan het algemene principe verklaard wordt: het eksempel wordt model gezet voor de andere relaties. En daarmee is in één klap het patroon verklaard.
Sawyer omschrijft wiskunde als het ontdekken van regelmatigheden, patronen of strukturen. Uit het voorgaande volgt, dat het verklaren van de regelmaat of de onderliggende struktuur van een patroon het belangrijke sluitstuk is. De opsporing van het patroon en de generalisering geschiedt volgens het induktieve redeneren, de verklaring of het bewijs door deduktie. Voor de goede orde merken we op, dat het principe van de volledige of matematische induktie veeleer aansluit bij de deduktieve dan bij de induktieve redenering. De gewaagde sprong in het duister, die karakteristiek is voor de induktie en die weergeeft dat de generalisatie op een wankele basis geschiedt, wordt bij de matematische induktie een zekere sprong bij klaarlichte dag, omdat de generalisatie reeds in het principe van de volledige induktie opgesloten ligt.

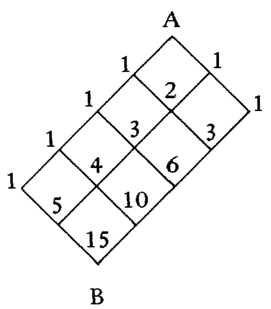
skoreverloop (1.9)

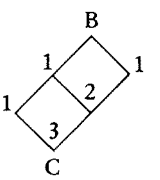
pec-heerenveen 6-3 (ruststand 4-2).
Het skoreverloop is de keten van de achtereenvolgens door de beide partijen gemaakte doelpunten. In ons geval bevat de keten in totaal negen schakels. Een mogelijk skoreverloop: pec-pec-hee-pec-pec-hee-hee-pec-pec.
De vraag is nu hoeveel verschillende ketens gevormd kunnen worden?

In dit probleem zitten alle aspekten van het voorgaande samengebald. Het ingewikkelde probleem is op vele manieren te ontwarren, maar in de meeste gevallen is het een langdurige zoekprocedure. Wordt het verband met het voorgaande gezien en het skoreverloop uitgebeeld als een roete op het wegennet, dan is het vraagstuk snel opgelost:



Bij punt A hoort de beginstand (0,0).
Bij punt B hoort de ruststand (4,2).
Bij punt C hoort de eindstand (6,3).
Een doelpunt voor pec levert een trek naar links op. Een doelpunt voor heerenveen een trek naar rechts. Het skoreverloop vertoont zich als een trajekt van A via B naar C.
Merk op, dat de roete niet buiten de perken van de verbonden rechthoeken kan lopen. Het aantal mogelijke roetes van A naar B en van B naar C bepalen we met de somregel, die we in het vorige probleem opgespoord hebben.



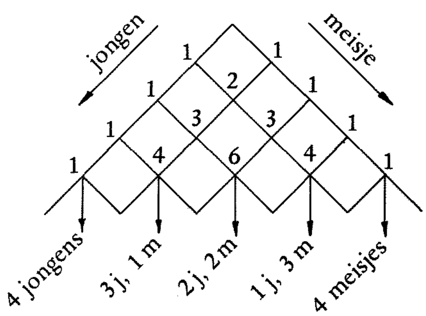


Het aantal trajekten van A naar B bedraagt vijftien, van B naar C drie. Het totale aantal roetes van A naar C is $15 \times 3 = 45$. De moeilijkheid bij dit probleem bestaat uit de modelvorming i.c. de opvatting van doelpunten als 'trekken'. Het probleem is dan vervangen door een isomorf probleem, waarvan de oplossing ten dele bekend is, namelijk voorzover het de aparte berekening van de doelpunten in de beide speelhelften betreft. Daarna moet de produktregel uit **(1.2)** met het wegennet gevangen worden. Al met al een heel karwei.
De wiskundigen onder de lezers hebben een ander model ter beschikking, namelijk het vaasmodel uit de kansrekening, om als volgt te redeneren: 'Voor de rust werden er zes doelpunten gemaakt, waarvan twee door heerenveen; de mogelijkheden voor het skoreverloop bedragen $\binom{6}{2} = 15$; na de rust $\binom{3}{1} = 3$; het totale aantal: $\binom{6}{2} \cdot \binom{3}{1} = 45$.'
Maar ook deze redenering wordt meestal niet zomaar uit de mouw geschud, zo heeft de ervaring geleerd. We zitten met dit soort problemen dan ook al ruimschoots in het gebied van het voortgezet onderwijs.

gezinssamenstelling (1.10)

We gaan uit van de veronderstelling, dat – per gezin – de kans op de geboorte van een jongen even groot is als de kans op een meisje. Geef aan welke jongens-meisjesverdeling men ongeveer mag verwachten bij een steekproef van in totaal 160.000 gezinnen met vier kinderen; bijvoorbeeld: 20.000 gezinnen met vier jongens, 30.000 gezinnen met drie jongens en één meisje, enz. Licht het antwoord toe!

Ook in dit geval is het wegennetwerk bruikbaar. De jongens-meisjesverdeling kan opgevat worden als het eindpunt van een roete op het wegennet:



Ieder van de 160.000 gezinnen krijgt een bepaalde roete door het wegennet toegewezen, maar uit het eindpunt is het gevolgde trajekt niet af te lezen – uitgezonderd de buitensten.
Er zijn bijvoorbeeld vier roetes mogelijk voor een gezin met drie jongens en één meisje (het eerste, tweede, derde of vierde kind kan een meisje zijn, dus vier mogelijkheden).
De totale verdeling is als volgt:
1 mogelijke roete voor 4 jongens
4 mogelijke roetes voor 3 jongens en 1 meisje
6 mogelijke roetes voor 2 jongens en 2 meisjes
4 mogelijke roetes voor 1 jongen en 3 meisjes
1 mogelijke roete voor 4 meisjes.
Totaal: 16 mogelijke roetes.

Hieruit volgt:
er is een kans van $\frac{1}{16}$ op 4 jongens
er is een kans van $\frac{4}{16}$ op 3 jongens en 1 meisje
er is een kans van $\frac{6}{16}$ op 2 jongens en 2 meisjes
er is een kans van $\frac{4}{16}$ op 1 jongen en 3 meisjes
er is een kans van $\frac{1}{16}$ op 4 meisjes.

We hebben bij deze berekening gebruik gemaakt van de wet van de grote aantallen, die zegt, dat de relatieve afwijking bij dit grote aantal, hoogst waarschijnlijk gering zal zijn. In de term 'ongeveer' hebben we het toeval verdiskonteerd.

Toch zijn we met de voorgaande uiteenzetting te abstrakt begonnen. Eerst hadden we ons dienen af te vragen of de kans op vier jongens even

groot of kleiner zou zijn dan de kans op twee jongens en twee meisjes. In het algemeen is de eerste reaktie: 'de kans op vier jongens is kleiner, maar ik weet niet waarom; ik heb het gevoel dat het zo is.'
Dit 'gevoel' is een goed aangrijpingspunt om de kansen te gaan kwantificeren. Om de kwestie wat te vereenvoudigen kunnen we beginnen met munten en vragen of de kans op kruis-kruis kleiner is dan de kans op kruis-munt. Analoog: of de kans op jongen-jongen kleiner is dan de kans op jongen-meisje bij een gezin van twee kinderen. Daarna, ... u begrijpt, we gaan zo op pad om een leergang uit te stippelen. Het fundament ervan dient gelegd te worden in een reeks van geschakeerde ervaringen, waardoor we vertrouwd raken met de begrippen toeval en kans.[4])

▶ SAMENVATTING (2)

matematiseren

Matematiseren is een organiserende aktiviteit met specifieke middelen. Het duidt op de kern van de wiskundige aktiviteit, waar het niet in de eerste plaats gaat om het verwerven van kennis of het aanleren van vaardigheden, als wel om diepergaande matematische werkzaamheden als ordenen, klassificeren, analogiseren, generaliseren, konkretiseren en formaliseren.[5])
In de tien telproblemen van dit hoofdstuk gebeurde de organisatie dan ook met dit soort middelen:
- het opmerken van overeenkomsten en verschillen (zie **1.1**);
- de systematische aanpak (zie **1.1** e.v.);
- het symboliseren (zie **1.2** e.v.);
- het generaliseren van een bepaalde oplossing (zie **1.2** e.v.);
- het algemeen formuleren van deze generalisatie (zie **1.2** e.v.);
- het op verschillende manieren formuleren en visualiseren van één probleem (zie **1.3**);
- de eksakte begripsbepaling (zie **1.4**);
- het gebruik van verschillende modellen (zie **1.4**);
- het toepassen van een gevonden regel in niet-evidente gevallen (zie **1.5**);
- de toenemende schematisering van een oplossingsmodel (i.c. het rooster) leidend tot een algoritme (zie **1.6**);
- het herkennen van de isomorfie van twee problemen (zie **1.7**);
- het redeneren op grond van symmetrie-overwegingen (zie **1.7**);
- het ontdekken van regelmatigheden door induktie (zie **1.8**);
- het doorzien en verklaren van de onderliggende struktuur van een patroon; het bewijs (zie **1.8**);
- het bewijzen van de gevonden oplossing volgens het principe van de matematische induktie (zie **1.8**);
- het verklaren van een relatieschakel, die paradigmatisch is voor alle schakels, zodat daarmee het hele patroon verklaard is (zie **1.8**);
- de omvorming en inpassing van een probleem in een bekend model (zie **1.9**);
- het kombineren van een aantal oplossingsstrategieën en regels (zie **1.9**);
- de specifiek matematiserende werkwijze om een begrip – toeval – met wiskundige middelen te kunnen aanpakken (zie **1.10**).

De moeilijkheden bij het matematiseren kunnen – mede afhankelijk van het nivo waarop de bedrijvigheid plaatsvindt – totaal verschillend liggen.

Soms is het lastig om het probleem binnen de wiskunde te halen, zoals bij het gezinssamenstellingsprobleem, waarbij de inpassing in het wegennetmodel een essentiële stap is. Een andere keer komt het vooral aan op het generaliseren van een bepaald geval en het toepassen van de gevonden regels op een ander probleem, zoals zich dat bij het komplekse 'heen-en-weer' probleem voordeed. Ook is het mogelijk, dat het gaat om het ontdekken van essentiële overeenkomsten tussen een reeks van problemen of van wezenlijke elementen binnen één probleem, waarbij dieperliggende strukturen ontdekt worden. Er vindt dan binnen de wiskunde als het ware een nivoverhoging plaats, waardoor het oorspronkelijke probleem anders bekeken wordt.
Welnu, dit steeds voortgaande proces van verbreding en verhoging is essentieel voor de wiskundige aktiviteit: nieuwe probleemvelden worden verkend en oude gebieden van een ander standpunt bekeken. Daarbij kan het gebeuren, dat het lager liggende benut wordt als algoritmische basis voor het hogere, zoals bijvoorbeeld bij het kruispuntenrooster. Ook is het mogelijk, dat aanvankelijke problemen model komen te staan om nieuwe op te lossen.

In het voorgaande zijn er etiketten geplakt op een aantal matematiseringsprocessen. Hierna proberen we het algemene beeld van het matematiseren, zoals dat in dit hoofdstuk geschetst is, nog wat te verscherpen door het vanuit acht matematisch-didaktische uitgangspunten te bekijken.[6])

noten

1) Veel van de problemen hebben we ontleend aan:
Moor, E. de: KOboek 'Tel-op-tal' (iowo publikatie, utrecht 1972).

2) Zie Wiskobas-Bulletin (jaargang 2 nr.2, pag.648).

3) We sluiten hier aan bij de beschouwingen van:
Bruggen, J. van: BASboek 'Tel-op-tal' (iowo publikatie, utrecht 1972); Automatiseren van operaties (in Wiskobas-Bulletin jaargang 2 nr. 3, pag. 779-784).

4) Een dergelijke leergang is ontwikkeld als televisiepakket 'Kijk op Kans' onder leiding van F. Goffree, E.J. Wijdeveld en P.C. Scholten.

5) Zie in dit verband:
Winter, H.: Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule (in 'Beiträge zum Lernzielproblem', ratingen 1972).

6) Zie voor andere telproblemen:
Kirsch, A.: Ein-eindeutige Zuordnungen im 5. Schuljahr: Begründung des Zahlbegriffs oder Forderung der Kombinationsfähigkeit? (in 'Die Schulwarte' jaargang 8 nr. 9, pag. 29-36).
Jacobs, H.: Mathematics: a human endeavor (new york 1970).

2 blik vanaf de uitgangspunten

inleiding

De vraag die we ons stellen, luidt: *welke essentiële trekken heeft het wiskundeonderwijs?*
We vonden er acht, zonder ons overigens af te vragen of deze vormkenmerken wellicht een meer algeméén onderwijskundige geldigheid zouden kunnen bezitten.
We noemen:
– *de aktiviteit:* wiskunde leren door wiskunde te doen (**1.1**);
– *de differentiatie:* wiskunde leren op een eigen-aardige wijze (**1.2**);
– *de vertikale planning:* wiskunde leren in een bepaalde opbouw (**1.3**);
– *het struktuurkarakter:* de inhoud van de wiskunde (**1.4**);
– *het taalaspekt:* de taal van de wiskunde (**1.5**);
– *de toepasbaarheid:* het nut van de wiskunde (**1.6**);
– *de dynamiek:* de ontwikkelingsgang van de wiskunde (**1.7**);
– *de specifieke benaderingswijze:* de metode van de wiskunde (**1.8**).
Anders gezegd: de essentie van het wiskundeonderwijs bestaat erin, dat de leerlingen aktief en gedifferentieerd werken binnen een vertikaal gepland onderwijs, waarin het struktuurkarakter, het taalaspekt, de toepasbaarheid, de dynamiek en de specifieke benaderingswijze van de wiskunde tot uitdrukking komen.
De acht genoemde kenmerken zijn formeel, dus zowel matematisch als didaktisch leeg. Maar met deze aspekten is de mogelijkheid gekreëerd om de basisopvattingen over het wiskundeonderwijs nauwkeuriger te plaatsen, namelijk door eksemplarisch te tonen op welke wijze de vormaspekten een konkrete gestalte gekregen hebben.
We beschouwen daartoe de problemen uit het vorige hoofdstuk nog eens vanaf acht verschillende gezichtspunten.

▶ **UITGANGSPUNTEN (1)**

aktiviteit (1.1)

Wiskunde is een open systeem, dat steeds in ontwikkeling is. Dit geldt zowel objektief voor de wetenschap, als subjektief voor de persoonlijke uitgroei. Tegenover de openheid staat het geprefabriceerde systeem, het voltooide bouwwerk. Benadert men wiskunde uitsluitend als een gesloten systeem, dan vormen de kennisverwerving van het gebied en de imitatie van het reeds gevestigde verband, de hoofdbestanddelen van het onderwijs.
Het is begrijpelijk, dat bij de beschouwing van een dergelijk ingeblikt produkt vragen rijzen als: moeten we uitgaan van het kind, van de samenleving, of van het vak? Immers, bij een gesloten benadering van de wiskunde moeten deze drie elementen wel tegenover elkaar gesteld worden. Bij de open benadering verschijnt de wiskunde meer als een proces, als een doe-

vak, als een praktische konst, die bedreven wordt in het gebied tussen de geïnspireerde kunst en de vertechniseerde kunde. Wiskunde is dan iets dat van binnenuit opgebouwd wordt: het is een aktiviteit.
Wiskundeonderwijs, dat het uitgangspunt voornamelijk bij de aktiviteit zet, wordt in onderscheid met 'child-centered' en 'discipline-centered' onderwijs wel aangeduid met de term 'activity-centered'. Deze 'centered'-aanduiding is in z'n algemeenheid niet gelukkig, omdat ze principieel uitgaat van de strijdigheid van de elementen kind, vak en samenleving; voor de aktiviteitsopvatting voldoet ze echter in het bizonder niet, want het gaat niet om de aktiviteit op zich, maar om datgene wat erin vervat ligt. Of beter: het gaat om onderwijs, waarin de drie elementen ongescheiden voorkomen.
De centrum-terminologie stoelt op een didaktisch antitese-model, terwijl de aktiviteitsopvatting de syntese tot opgave stelt via onderwijs, dat èn pedagogisch belangwekkend èn maatschappelijk relevant dient te zijn. Vandaar, dat we liever spreken over wiskunde als een aktiviteit dan over aktiviteitsgericht wiskundeonderwijs. Kortom, de aktiviteit is een belangrijk uitgangspunt voor het wiskundeonderwijs, maar geen richtpunt of doel in zichzelf.

Gezien het voorgaande kan het geen toeval zijn, dat de beschouwingen over het wiskundeonderwijs gebaseerd worden op een aantal gezamenlijke *probleemervaringen.* Nu hoeft 'een' probleem nog niet 'mijn' probleem te zijn: het kan immers best, dat er weinig aantrekkingskracht van uitgaat. Daarentegen is het ook mogelijk dat een probleem wél uitnodigend is en dat de oplossing ervan een sterk heuristisch element bevat, welke de aanleiding is tot een belangrijke zelfervaring. Maar wat te denken van degene, die volhardend zoekt, maar niet vindt en achterblijft met een vol hoofd, een gevuld gemoed en lege handen. Zou zo'n negatieve zelfervaring niet tot gevolg kunnen hebben, dat er bij een volgende probleemstelling geen sprake meer zal zijn van een aktiviteit?
Hiermee zijn in kort bestek zowel de grote mogelijkheden als de niet geringe moeilijkheden aangegeven van een wiskundeonderwijs, waarin de organiserende aktiviteit voorop staat.

differentiatie (1.2)

Analyse van probleemsituaties kan reeds enkele van deze mogelijkheden en grenzen aangeven. Zo zijn er bijvoorbeeld problemen, waar de beperkingen vooral liggen in de weinig gedifferentieerde oplossingsmogelijkheden. We zullen er onder **(1.7)** nog één ontmoeten, maar we kennen ze ook allemaal al uit vroegere ervaringen. Het komt er op neer, dat er feitelijk maar één pad is, waarlangs de probleemoplossing bereikt kan worden en dit ligt dan nog zo verscholen, dat de vondst ervan een toevalstreffer lijkt. Dergelijke problemen, met een hoog heuristisch karakter en een laag differentiatiegehalte, mogen subjektief gezien een grote aantrekkingskracht hebben, voor een algemeen onderwijsgebruik zijn ze minder geschikt. Ze worden dan ook vaak – terecht – als vrije verrijkingspuzzels aangeboden.

In het voorgaande hebben we echter een aantal problemen onder ogen gehad, die wèl gedifferentieerd opgelost konden worden, zoals bijvoorbeeld *het kaartjesprobleem.* Gedifferentieerd betekent hier 'verschillend naar nivo': systematisch werkend, of systematisch werkend en redene-

rend op grond van symmetrie-overwegingen, of redenerend volgens de metode van de matematische induktie, wordt het probleem opgelost. Het verschil in oplossing is dus niet zozeer kwantitatief in de zin van 'vlugger en handiger', als wel kwalitatief anders. De voordelen van dergelijke problemen spreken voor zichzelf: ieder kan op zijn nivo een passende oplossing vinden.
Bij het totaaloverzicht van de verschillende metoden kan dan een ieder zijn eigen oplossingsmetode afwegen tegen die van een ander. Als we binnen het onderwijs over differentiatie spreken, dan moeten we de nivodifferentiatie goed in het oog houden; dat wil zeggen: de differentiatie, die niet zozeer in de aanbiedingsvorm ligt als wel in de verwerkingsmogelijkheid. Misschien is dit soort differentiatie te eksklusief aan een probleemgerichte aanpak gebonden om op een meer algemene geldigheid aanspraak te kunnen maken. Een feit is in ieder geval, dat het binnen het wiskundeonderwijs minstens zo belangrijk geacht moet worden als de differentiatie naar tempo en (verrijkings-)leerstof.

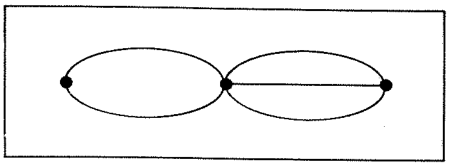
vertikale planning (1.3)

De vertikale planning kreeg in de serie telproblemen een konkrete gestalte: de kombinatorische problemen waren op elkaar afgestemd en vertoonden een steeds hogere vorm van organisatie. Het principe van de vertikale planning bestaat uit de opvatting, dat de 'lagere' aktiviteiten een noodzakelijke ervaringsbasis verschaffen voor de 'hogere' werkzaamheden. Deze gedachte is niet nieuw. Zo gaf in de vorige eeuw de vormleer een voorbereiding op het systematische meetkundeonderwijs. Tevens werd er herhaaldelijk gepleit voor een voorbereidend meetkundeonderwijs, dat een ruime ervaringsbasis moest leggen voordat een meer systematische behandeling zou plaatsvinden.
Vooral in de waarschijnlijkheidsrekening en algebra heeft het principe van de vertikale planning tot een nieuwe doordenking van de rekenleerstof geleid.
Het idee werd van leerpsychologische zijde internationaal verbreid door de opvattingen van *Bruner,* wiens vermaarde uitspraak 'any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development', voer voor leerplanontwikkelaars werd.[1]) Van matematische zijde was het vooral *Dienes,* die deze opvattingen ondersteunde en er een vulling aan gaf.[2])
Het risiko van een oneigenlijk gebruik van het principe bleek niet denkbeeldig te zijn: de zin van het 'lagere' werd in sommige stromingen te eksklusief aan het 'hogere' ontleend. Het gevolg was een soort afdalende vernieuwingsbeweging, waarbij zich een kwasi-verwetenschappelijking en formalisering van het wiskundeonderwijs op de basisschool voordeed.[3])
Aan de andere kant groeide het besef, dat er volwaardige wiskundige werkwijzen vanaf het konkreet-handelende nivo kunnen plaatsvinden.
We zullen ons nu wat meer op deze specifiek matematische aktiviteiten gaan richten.

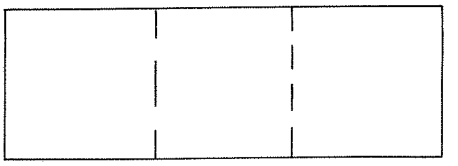
struktuurkarakter (1.4)

Het resultaat van het matematiseringsproces is een georganiseerd geheel van kennis. Er zijn regelmatigheden, patronen, verbanden en samenhangen opgespoord. Bij het oplossen van de voorgaande problemen is de

opmerking 'hé, dat is hetzelfde' manifest voor het zien van dergelijke betrekkingen, die het struktuurkarakter van de wiskunde aangeven.
De totale keten van de tien telproblemen is opgebouwd uit schakels, die duidelijke struktuurovereenkomsten vertonen.
We lichten er enkele uit:

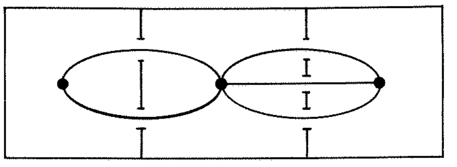


wegenprobleem

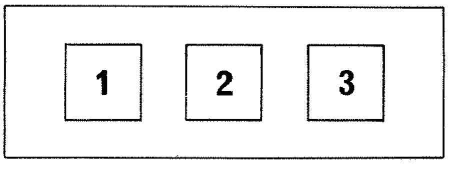


muizenprobleem

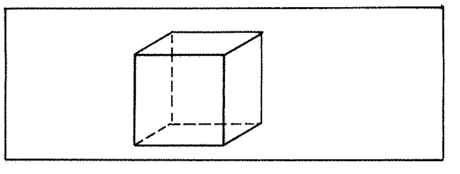
We kunnen de twee plaatjes als het ware in elkaar schuiven:



muizen – wegen

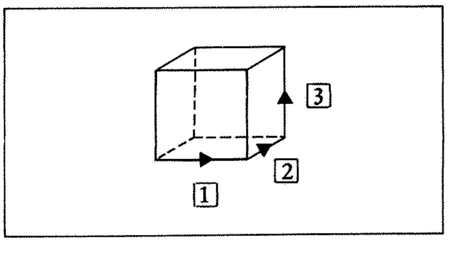


kaartjesprobleem



kubuskruiper

We kunnen de kaartjes bij de roete plakken:



'Hé, dat is hetzelfde', betekent in deze gevallen, dat het ene probleem in het andere getransformeerd kan worden: gaten worden wegen en kaartjes richtingaanwijzers.
In het eerste voorbeeld (muizen en wegen) wordt de isomorfie eenvoudiger gekonstateerd dan in het tweede geval (kaartjes en kubuskruiper). De uitdrukking 'hetzelfde', betekent nièt dat de problemen zonder meer gelijk liggen, maar het geeft een gelijkheid aan op een hoger nivo. 'Hé' drukt de verrassing uit van het opeens ontdekken van de struktuurgelijkheid, niet te verwarren met het 'hè, hè', dat de teleurstelling uit omtrent het over het hoofd zien van een – achteraf bezien – eenvoudige overeenkomst.

Naast de isomorfie *tussen* de problemen, komt het struktuuraspekt ook *binnen* de verschillende problemen op zich, aan het licht. Er is reeds uitvoerig op de getalstruktuur van het *rooster-wegenprobleem* ingegaan. Het ging daarbij niet alleen om het ontdekken van de samenhang tussen de getallen, maar ook om het verklaren van het verband.

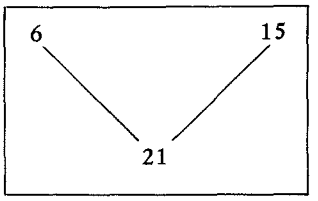
taalaspekt (1.5)

Deze ontdekkingen en verklaringen zullen echter ook onder woorden gebracht dienen te worden. Welke eisen moeten er aan de formuleringen gesteld worden?
In de eerste plaats: *verstaanbaarheid.*
Als er bij het wegenprobleem een bepaalde weg aangegeven wordt door aanwijzing, dan spreekt men verstaanbare gebarentaal. Kunnen of mogen we de roete niet aanwijzen, dan maken we ons verstaanbaar door te zeggen: 'eerst volgen we de bovenste weg van A naar B en vervolgens de middelste weg van B naar C'. Hebben de wegen een naam, dan wordt de roetebeschrijving nog eenvoudiger: 'eerst de bovenweg en dan de middenweg'.
Op een vanzelfsprekende wijze ontstaat via een reduktieproces de aanduiding van het wegenpaar (bovenweg, middenweg), het letterpaar (b,m) of het getallenpaar (1,4). De eis van de verstaanbaarheid wordt zodoende op een volkomen natuurlijke wijze verbonden met het komfort van de *beknoptheid.* Een dergelijk taaltje voor roete-aanduidingen maakt het tevens eenvoudiger om isomorfe problemen te onderkennen: de wandelaar over de weg en de muis in het voorhuis hebben dezelfde roetekode. En dat geeft te denken!

Laten we nog eens terugkeren naar de driehoek van Pascal en ons afvragen hoe hierin de betrekkingen geformuleerd kunnen worden, die aan de eisen voldoen van verstaanbaarheid, beknoptheid en houvast.
We volgen daarbij gedeeltelijk een beschouwing van Freudenthal.[4])

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

We kunnen met één bepaald voorbeeld aanwijzend te werk gaan en er aan toevoegen: 'en dit geldt voor alle getallen in deze tabel.'
De verstaanbaarheid wordt dan beperkt door de vingerwijzing:



'21 = 6 + 15'

Dit bezwaar kan ondervangen worden door één voorbeeld uit het patroon te knippen, de karakteristieke betrekking '21 = 6 + 15' te noemen, en er aan toe te voegen: 'zo ontstaat ieder getal door optelling van de twee bovenstaanden.'
Aan de eis van verstaanbaarheid is nu voldaan, de beknoptheid laat echter nog te wensen over.
De volgende formulering voldoet in dit opzicht beter:

k^e getal in n^e rij = $(k-1)^e$getal in $(n-1)^e$rij + k^egetal in $(n-1)^e$rij.

Echter, met het gebruik van letters als variabelen kan zowel het ene voorbeeld (vingerwijzing of knipsel) als de generalisering ervan ('ieder getal.....') *eksakt* in één formule gevat worden:

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, waarbij

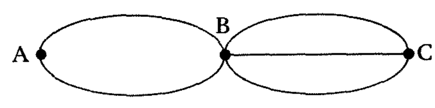
$\binom{n}{k}$ het k^e getal in de n^e rij aanduidt $(k,n \in \mathbb{N})$.

Aan de genoemde eisen dienen we dan nog de noodzaak van een *geleidelijke* en *natuurlijke ingroei* in het gebruik van het wiskundetaaltje toe te voegen om te komen tot de vijf kenmerken van verstaanbaarheid, beknoptheid, eksaktheid, houvast en natuurlijkheid, waaraan de bovenstaande formulering voldoet en die het betrekkelijk eenvoudig maakt om er de rijkdom aan andere relaties mee te beschrijven die nog in de tabel verborgen liggen. Hiermee wordt de *toepasbaarheid* van het ontwikkelde taaltje geraakt. Laten we deze kwestie van de toepasbaarheid eens wat meer in z'n algemeenheid beschouwen.

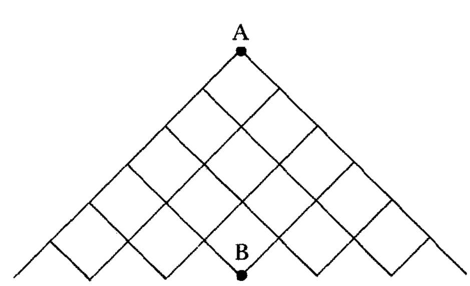
toepasbaarheid (1.6)

Als basisgegevens nemen we *het wegenprobleem* en *het roosterwegenprobleem:*

Hoeveel verschillende roetes lopen er van A via B naar C?

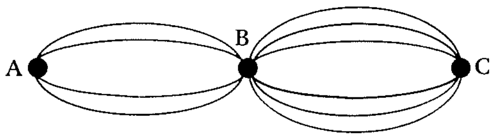


Hoeveel verschillende roetes lopen er – zonder omweg – van A naar B?



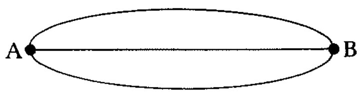
We gaan nu na voor welke problemen de kennis van de vermenigvuldigingsregel uit het wegenprobleem, of de optelregel uit het roosterwegenprobleem benut kan worden:

Hoeveel verschillende roetes lopen er van A via B naar C?



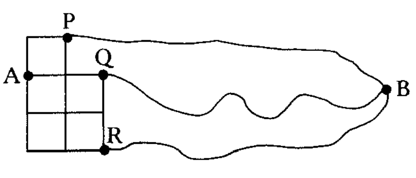
De vermenigvuldigingsregel kan hier simpel toegepast worden op een identiek geval. De toepassing is van een lager nivo dan het vinden van de generalisatie. Vandaar ook, dat men de term 'toepassing van een gevonden regel' liever niet gebruikt bij dit soort identieke gevallen.

Hoeveel verschillende roetes zijn er van A via B naar A?



Bij dit probleem ligt de zaak wat anders. Was er zojuist sprake van de toepassing op eenzelfde geval, hier heeft de vermenigvuldigingsregel betrekking op een *verwante situatie.* Waarmee niet gezegd wil worden, dat dit ook direkt wordt toegepast. Integendeel, in het algemeen wordt deze regel los van het voorgaande probleem snel opnieuw ontdekt aan het 'heen en weer probleem' zelf, waarna pas de relatie met het voorgaande geval gezien wordt.

Hoeveel verschillende roetes ABA zijn er via de uitvalswegen bij P, Q en R, zonder dat er een omweg gevolgd wordt?



Opnieuw is er sprake van een verwante situatie, zij het dat de toepassing wat *komplekser* is, doordat beide regels binnen één probleemsituatie gebruikt moeten (of kunnen) worden.

pec-heerenveen = 6-3 (ruststand 4-2).
Op hoeveel manieren kan de skore verlopen zijn?

Waren de voorgaande problemen binnen dezelfde wiskundige situatie gesteld als de basisproblemen, deze opgave ligt aanvankelijk buiten de uitgangsproblematiek: we bevinden ons in een *nieuwe situatie.*
De kwestie van de toepasbaarheid krijgt er dan ook een nieuw element bij: het skoreverloop kan als een roete op het wegennet uitgebeeld worden. Met deze 'vertaling' wordt het skoreprobleem binnen de bekende matematische kontekst geplaatst en daarmee wordt tevens de toepassing van de twee basisregels mogelijk. Deze toepassing ligt dan ook op het nivo van de komplekse verwante situatie.

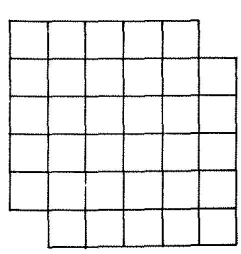
Geef de jongens-meisjesverdeling bij het totaal van 160.000 gezinnen met vier kinderen.

Dit is een *komplekse nieuwe situatie:* de vertaling naar het wegennet toe en het gebruik van het kansbegrip maken dit probleem bijna onoplosbaar voor de niet-wiskundige. We zullen de moeilijkheid van deze opgave direkt nader toelichten.

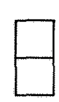
We resumeren.
De toepasbaarheid van regels werd aan de hand van twee uitgangsproblemen betrokken op drie wezenlijk verschillende vormen:
– een identieke situatie: zelfde kontekst, zelfde geval;
– een verwante situatie: zelfde kontekst, ander geval;
– een nieuwe situatie: andere kontekst, al dan niet hetzelfde geval.
'Andere kontekst' wil hier zeggen: er is in eerste aanzet geen sprake van roeteproblemen, hoewel er wel een transformatie naar het roostermodel mogelijk is.
'Hetzelfde geval' duidt aan, dat de toepassing volgens het prototype kan geschieden.
In de eerste twee situaties (identiek en verwant) hebben we te doen met een direkte toepassing binnen de wiskunde, in het derde geval moet het probleem eerst in een wiskundige kontekst geplaatst worden, alvorens de toepassing kan geschieden. Maar juist ook dit binnenhalen (i.c. modelvorming) is een specifiek wiskundige aktiviteit.

dynamiek (1.7) De lezer zou nog eens bij zichzelf kunnen proberen te achterhalen, welke beweging het denkproces bij het oplossen van de voorgelegde problemen gevolgd heeft. Om voor een dergelijke retrospektie een nieuwe basis te verschaffen, nemen we thans een nieuw probleem. Straks zullen we van onze kant één voorbeeld van een oplossingsweg aangeven, om daarmee de dynamiek van de wiskunde (in subjektieve zin) te schetsen. Ieder kan er dan zijn eigen ervaring naast stellen. Een waarschuwing is hier zeker wel op z'n plaats: de puzzel is erg lastig.

Ga na of een rooster van n *bij* n *(eenheidsvierkantjes), waarvan twee tegenover elkaar liggende 'puntvierkantjes' afgehaald zijn, bedekt kan worden met dominostenen van 2 bij 1 (eenheidsvierkantjes).*



afgepunt rooster



dominosteen

Hier volgt het verslag:

'In eerste instantie ontdekte ik, dat de bedekking onmogelijk was voor het geval n oneven is. Immers, het aantal vierkantjes van het afgepunte rooster is dan ook oneven, dus kan het niet bedekt worden. Tot zover verliep het bewijs vlot.

Voor het geval *n* even is, lukte het niet zo simpel. Ik probeerde eens wat met symmetrie, maar daarmee kwam ik niet verder. Vervolgens ging ik het probleem vereenvoudigen en vulde voor *n* achtereenvolgens 2, 4 en 6 in. Voor géén van deze gevallen bleek de bedekking te lukken, dus kreeg ik het idee (induktie!) dat het voor geen enkele even *n* zou lukken. Maar ik ben voorzichtig: lukte de bedekking niet voor 2, 4 en 6, dan wil dat immers nog niet zeggen, dat het voor geen enkele even *n* zal slagen. Voorlopig moest ik me behelpen met een induktief gevonden vermoeden, al is dat al heel wat! Ik wist nu in welke richting ik moest zoeken. Het bleek echter niet mogelijk te zijn om het probleem met matematische middelen te pakken. Wat deed ik dus? Ik legde het probleem terzijde.
Enkele dagen later – ik was het probleem 'vergeten' – herinnerde mij een gekleurd vierkantjeskussen aan de onopgeloste domino-roosterpuzzel. Vooral de diagonaalvierkantjes sprongen in het oog: de puntvierkantjes waren beide geel! En ineens kreeg ik het idee, dat ik de oplossing van de puzzel had (al dien ik nadrukkelijk te vermelden, dat ik dat idee ook al eerder kreeg bij de gedachte aan symmetrie). Maar goed, ik tekende de schaakbordstruktuur op het rooster. Van dat patroon moeten twee bruine (of witte) vierkantjes afgehaald worden. Iedere dominosteen, die op het bord gelegd wordt – horizontaal of vertikaal, dat doet er niet toe – bedekt een bruin en een wit vierkantje. En toen had ik 'em! Aangezien er op het afgepunte schaakbord niet evenveel bruine als witte vierkantjes liggen, kan het niet bedekt worden met dominostenen! Dit bewijs past uiteraard voor iedere even *n*.
Tenslotte nog een opmerking over mijn ervaringen. Na het vastlopen voelde ik me nogal gefrustreerd. De puzzel bleef alsmaar in mijn achterhoofd en ik had de grootste moeite om hem uit mijn gedachten te bannen. Toch wilde ik er niets meer mee te maken hebben.
Toen dook hij ineens weer op in de gedaante van een kussen. Op het moment, dat ik meende de oplossing te zien, raakte ik opgewonden. Toen ik het bewijs voltooide, was ik onder de indruk van de schoonheid van *mijn* oplossing: het was een belangrijke zelfervaring.
Tenslotte vermeld ik nog, dat het me de grootste moeite gekost heeft om te achterhalen dat het geblokte kussen de aanleiding tot de oplossing geweest is.'

Laten we de dynamiek van het denken nog eens globaal volgen:
– eerst worden er twee gevallen – even en oneven – onderscheiden;
– dan wordt de onmogelijkheid van de bedekking voor het geval *n* oneven is, bewezen;
– vervolgens wordt – na vele omwegen – induktief ontdekt, dat voor het geval *n* even is, de bedekking waarschijnlijk niet zal lukken;
– er wordt naar een overtuigend bewijs gezocht;
– wat echter aanvankelijk niet lukt, totdat.....
– het schaakbordpatroon onder het rooster gelegd wordt.

De omschrijving van wiskunde als het ontdekken van patronen kreeg in dit probleem wel een heel konkrete gestalte. Maar vooral ook de dynamiek in het matematiseringsproces komt er voorbeeldig in naar voren: in het begin verliep het denken helder, ekspliciet en bewust, later kon deze klare redeneertrant niet meer gevolgd worden.
De dinamiek van *het analytische denken* wordt gekenmerkt door klaarheid, bewustheid en samenhang: je kunt er achteraf rekening en verantwoording van afleggen. Dit was het geval bij het oneven rooster. *Het intuïtieve denken* daarentegen typeert zich onder meer door het plotselinge, onverwachte en onsamenhangende sprongkarakter van het vermoeden: je kunt er achteraf weinig van navertellen. Dit was het geval bij het even rooster. Het is zelfs mogelijk, dat de oplossing zich daarbij opdringt nadat de ekspliciete gerichtheid op het probleem reeds lang verdwenen is. Al mag het dan lijken alsof de oplossing zomaar van buiten af ingegeven wordt, toch is het intuïtieve denken in hoge mate gebaseerd op voor-

gaande kennis en ervaring. Het is dan ook niet juist om het gelijk te schakelen met gokken, gissen of goochelen.
Analytisch en intuïtief denken vullen elkaar aan. Via het intuïtieve denken vindt men vaak oplossingen, die langs analytische weg nauwelijks gevonden kunnen worden; aan de andere kant stelt het analytische denken ons in staat om het intuïtieve vermoeden in een helder licht te stellen. De beschreven oplossing van het domino-roosterprobleem toonde deze komplementaire delen: het analytische element verzorgde een deel van de oplossing, bereidde een ander deel voor en rondde het geheel af. Intuïtieve momenten waren er bij de symmetrie en de schaakbordstruktuur. Bij de eerste poging bleek het vermoeden niet tot een oplossing te leiden, in het tweede geval wel.

Van oudsher wordt in het wiskundeonderwijs vooral de nadruk gelegd op het klare, ekspliciete, analytische denken, terwijl de ruwe, globale, intuïtieve aanpak weinig waardering kan opwekken. Dat is op zichzelf niet verwonderlijk, want in het gebied van de intuïtie liggen de vrijblijvende gok en de geïnspireerde inval vlak naast elkaar.
Toch kan de dynamiek van het matematiseren pas volledig tot haar recht komen als er ook ruimte gegeven wordt aan het waagstuk van de sprong. En dat betekent ruimte om te schatten en te anticiperen op de oplossing via 'overwegingen', die niet erg bewust doordacht zijn en nog niet eksakt geformuleerd kunnen worden.[5])

specifieke benaderingswijze (1.8)

Laten we aan de hand van het *gezinssamenstellingsprobleem* eens een indruk trachten te geven van het onderwijsleerproces, waarin vooral de specifieke benaderingswijze van de wiskunde tot uitdrukking komt.
Vooraf eerst dit: de probleemstelling kan realistischer gemaakt worden door haar te verbinden aan de planning en de indeling van huizen.[6])
Als nu blijkt, dat er (nog) geen matematische metoden ter beschikking zijn om achter de gevraagde verdeling te komen, worden de mogelijkheden van een empirische benadering onderzocht. Achtereenvolgens blijken munt, dobbelsteen, tolletje en telefoonboek, bruikbare hulpmiddelen te zijn om een aantal verdelingen te produceren. Bepaalde patronen en symmetrieën worden zichtbaar: we krijgen in de gaten, dat er 'iets meer' achter het grote verschil zit tussen het aantal gezinnen met vier jongens (of vier meisjes) en het aantal gezinnen met twee jongens en twee meisjes. Nu komt het roosterwegenmodel in het gezichtsveld: we kunnen de gesimuleerde verdeling als een trajekt op een rooster afbeelden en we weten, dat er meer kans is om in het midden terecht te komen, dan aan de rand. De kansen kunnen zelfs nauwkeurig tegen elkaar afgewogen worden met behulp van het reeds eerder ontdekte patroon van de driehoek van Pascal.
Kortom, via een empirische benadering – waarneming, eksperiment, induktieve redeneertrant – wordt het probleem zo getransformeerd, dat het met strikt matematische middelen aangepakt kan worden. De inspanning om het probleem te schematiseren tot een matematische probleemstelling duiden we aan met de term *'horizontale matematisering'*. In ons voorbeeld bestond de horizontale komponent uit de fysische modelvorming, oftewel de simulatie van de jongens-meisjesverdeling met behulp van munt en tol en vervolgens uit de matematische modelvorming via de

inpassing van de simulatieresultaten in een roostermodel. In het algemeen kan men zeggen, dat de horizontale matematisering bestaat uit het zodanig schematiseren van het gebied, dat het probleemveld met matematische middelen aangepakt kan worden. De vervolgaktiviteiten, die betrekking hebben op de matematische verwerking, de probleemoplossing, de generalisatie van de oplossing en de verdergaande formalisering, wordt met de term *'vertikale matematisering'* aangeduid. In dit geval kan de vertikale komponent bestaan uit het berekenen van de verschillende kansen met behulp van de getallen uit de driehoek van Pascal, alsmede uit de generalisatie van de oplossing en de uitbreiding ervan over een ruimer toepassingsgebied.

In het vorige hoofdstuk werd het matematiseren omschreven als het organiseren van een veld van ervaringen, met specifieke middelen.
Hier worden de organisatiewerkzaamheden vervolgens uiteengelegd in twee komponenten: de horizontale geeft aan hoe via een proces van schematisering en modelvorming, de weg naar de wiskunde gebaand wordt, de vertikale duidt op de matematische verwerking en de nivoverhoging van de strukturering.
Nu is het uiteenleggen van de wiskundige aktiviteit in deze twee elementen een kunstmatige operatie. In werkelijkheid is het onderscheid moeilijk te hanteren, juist omdat de schematisering en matematische verwerking op elkaar betrokken zijn. Maar toch is de tweedeling zinvol, al was het alleen maar om duidelijk te maken dat aktiviteiten als konstrueren, eksperimenteren en klassificeren, evenzeer binnen het matematiseringsproces passen als symboliseren, generaliseren en formaliseren. Het is niet overbodig om dit hier nog eens nadrukkelijk te stellen, omdat het konstruktieve, eksperimentele en konkreet-handelende element er in de tien telproblemen nogal bekaaid afgekomen is.
Het probleem over de gezinssamenstelling gaf nog het meest komplete beeld van de specifiek wiskundige benaderingswijze.[7])

▶ **OVERZICHT (2)**

* Wiskunde is het ontdekken van regelmatigheden, patronen en strukturen. Het is het organiseren van een veld van ervaringen, met specifieke middelen. Er zijn daarbij verschillende ordeningsnivo's mogelijk, waarvan het aksiomatische het hoogste is.
* Wiskunde is een middel om aspekten uit de ons omringende wereld te beschrijven. De taal van de wiskunde verschilt voor een groot deel van de alledaagse taal: de eksaktheid is evenals de abstraktheid groter.
* Door en met de beschrijving krijgen we vat op de realiteit, kunnen we een aantal zaken voorspellen en een reeks mogelijkheden realiseren. De rol van de wiskunde bij allerlei veranderingen is belangrijk en de toepasbaarheid van de wiskunde in fysische, biochemische en sociale wetenschappen verbreedt zich nog steeds.
* Wiskunde is een open systeem, dat steeds in ontwikkeling is. Daartegenover staat het geprefabriceerde systeem, het voltooide bouwwerk, het kant-en-klare eindprodukt.

  Benadert men wiskunde als een gesloten systeem, dan zijn kennisverwerving van het gebied en imitatie van een reeds gevestigd verband de hoofdbestanddelen van het onderwijs. Wiskunde, open benaderd, legt de nadruk op de her-ontdekking en de mentale betrokkenheid.

* Wiskunde is een praktische konst. Je kunt het alleen leren door het specifieke manier om orde op zaken te stellen. Het panklare eindprodukt bezit de deduktieve vorm en is het resultaat van een voltooid matematiseringsproces.
  Aanvankelijk moet een probleem van een matematisch paspoort voorzien worden, zodat de grensoverschrijding naar het vakgebied van de wiskunde gemaakt kan worden. De inspanningen om dit paspoort te verkrijgen, noemen we (horizontaal) matematiseren. Er wordt nog geen wiskunde beoefend in de strikte zin, maar de weg naar de wiskunde wordt gebaand.
  Vervolgens wordt het gelegitimeerde probleem met specifieke middelen bewerkt en vindt er een hogere strukturering plaats.
* Wiskunde is een praktische konst. Je kunt het alleen leren door het te doen: door strukturen te ontdekken, wiskundetaal te gebruiken, een bewijs te leveren, eksperimenten uit te voeren.
* We moeten de leerlingen dan ook ruimschoots gelegenheid geven om op eigen nivo ontdekkingen te doen en – binnen zekere grenzen – in eigen tempo voort te schrijden.
* Het geheel van de leerervaringen dient zo gestruktureerd te worden, dat er van een opbouw sprake is, waarbij de ervaringen steeds komplekser georganiseerd kunnen worden.

Uit voorgaande overwegingen spruit het ideaal voort van een aktief, gedifferentieerd, vertikaal gepland onderwijsgebeuren, waarin het struktuurkarakter, het taalaspekt, de toepasbaarheid, de dynamiek en de specifieke benaderingswijze van de wiskunde centraal staan.[8])
In hoofdstuk 3 beschrijven we op welke wijze de doelstellingen binnen dit ideaal gesteld kunnen worden.

noten

[1]) Bruner, J.S.: The process of education (new york 1963).
[2]) Dienes, Z.P.: De zes stadia in een wiskundig leerproces ('s hertogenbosch 1973).
[3]) Zie Wiskobas-Bulletin (jaargang 2 nr.4/5, pag. 845-853).
[4]) H. Freudenthal in een lezing over het taalaspekt van de wiskunde op een wiskobas-konferentie in april 1973 te lochem.
Zie ook:
Hoffman, N.: Pascal's triangle (in 'The Arithmetic Teacher' jaargang 21 nr. 3, pag. 190-199).
[5]) Bruner, J.S.: The process of education (new york 1963, pag. 55-69).
Fishbein, E.: Intuition, structure and heuristic methods in the teaching of mathematics (in 'Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education' – Howson, A.G. ed. – cambridge 1973, pag. 222-233).
[6]) Zie Startpunt leerplanontwikkeling lbo (iowo-brochure, utrecht 1973, pag. 10 e.v.).
[7]) Zie in dit verband:
Baron, M.E.: The Nature of Mathematics. Another view (in 'The Process of Learning Mathematics' – Chapman, L.R. ed. – oxford 1972, pag. 21-42).
[8]) Zie vooral ook:
Polya, G.:
– Mathematics and Plausible Reasoning
  vol I: Induction and Analogy in Mathematics (princeton 1973/8).
  vol II: Patterns of Plausible Inference (princeton 1968/2).
– Mathematical Discovery vol I (new york 1962).
– Mathematical Discovery vol II (new york 1965).
– How to solve it? (new york 1957/2).
Wertheimer, M.: Productive Thinking (london 1966).

deel 2

dimensies van doelstellingen

In hoofdstuk 3 worden ééndimensionale doelstellingen beschouwd, die geformuleerd zijn in algemene termen van te ontwikkelen bekwaamheden van de leerling.
In hoofdstuk 4 gaat het om tweedimensionale doelen, die met de komponent van het leerlinggedrag, ook aspekten van leerstofinhouden bevatten. Tweedimensionale doelen kunnen echter tevens duiden op aktiviteiten en onderwijsopgaven.
Hoofdstuk 5 handelt over driedimensionale doelen. De doelbeschrijving wordt nu uitgebreid door de didaktische kontekst erbij te betrekken.

3 ééndimensionale doelbeschrijvingen

inleiding

Vragen naar de doelstellingen van het wiskundeonderwijs is vragen naar de bekende weg, zo meent de argeloze vragensteller. Immers, de onderwijzer, de leraar en de leerplanontwikkelaar werken planmatig en doelgericht, de weg is bekend, dan is het toch niet teveel gevraagd om de doelstellingen te formuleren.
Ook in sportprogramma's kan men herhaaldelijk vragen naar die bekend veronderstelde weg beluisteren. Men vraagt bijvoorbeeld een voetballer wat hij dacht toen hij met de bal aan de voet op de keeper afging met het oogmerk doeltreffend te handelen. Het antwoord luidt dan: 'tja' of 'ik moest toch toevallig die kant op'. Gaat de voetballer echter nog dieper op de kwestie in, dan merkt men dat hij denken en handelen uit elkaar moet rukken. Zijn woorden beschrijven dan een situatie die niet overeenkomt met de realiteit, tenminste..... Het is ook mogelijk dat hij in de doelrijpe situatie alle tijd had om na te denken, maar juist dan gaat het handelen vaak mis. Hij wilde het te mooi doen en had teveel tijd om denken en handelen uit elkaar te halen.

didaktikus in verlegenheid

Ook in vele doeltreffende handelingen van de onderwijspraktijk vervaagt de scheiding tussen denken en doelgericht handelen. Het is dan ook begrijpelijk, dat de vraag naar de doelstellingen de didaktikus evenzeer in verlegenheid kan brengen als de voetballer. Spreekt hij zich uit, dan heeft men het gevoel dat hij het onderwijs onder een glazen kubus zet en het afsluit van het alledaagse gebeuren: er klinken geen kinderstemmen en men hoort er geen klapperende deuren. Men bevindt zich in een wereld apart: de wereld van de doelstellingen, waar de bouwstenen van het doelgerichte handelen geen duidelijke taal spreken. Het is alsof er bij het formuleren iets wezenlijks verloren is gegaan. Om nu toch de dynamiek van het onderwijs te vangen, wordt er een grote hoeveelheid bijvoeglijke naamwoorden voor het doel geplaatst. Zo hoort men bijvoorbeeld spreken over indirekte, voorlopige, integrale, transcendente, specifieke, operationele, instrumentele, algemene, ekspressieve, intermediaire en konkrete doelen. De doelstellingen kunnen betrekking hebben op een bepaald leergedrag of een leerstofkategorie aanduiden, ze kunnen verwijzen naar fakulteiten van kennis, vaardigheden en attituden, duiden op een aspekt van de tijd, een bepaalde mate van konkreetheid aangeven en zich naar verschillende plaatsen in het onderwijsveld richten. Kortom, de kwestie van de doelstellingen schijnt zo rijk geschakeerd te zijn, dat men bijna niet weet, hoe de vraag ernaar te moeten aanvatten.

drie dimensies

Toch wagen ook wij een poging: we delen de doelstellingen in naar dimensie. We spreken over één-, twee- en driedimensionale doelstellingen (1^D, 2^D en 3^D doelstellingen).

De formulering van 1^D doelen geschiedt in termen van te ontwikkelen bekwaamheden, waarbij de leerstof buiten beschouwing gelaten wordt, het nivo van de gedragspatronen niet ekspliciet ter sprake komt en de verwijzing naar de onderwijspraktijk ontbreekt.
De meerdimensionale doelstellingen zijn daarenboven gebonden aan leerstofkategorieën (2^D doelstellingen) en geplaatst in een matematisch-didaktische kontekst (3^D doelstellingen).
Binnen deze indeling naar dimensie kunnen de doelstellingen nog onder een aantal wisselende opzichten beschouwd worden, zoals naar samenhang, gedetailleerdheid, kompleksiteit, uitgebreidheid, en dergelijke. We zullen dit echter niet systematisch doen, maar slechts dan op andere ordeningskategorieën ingaan, als het de beschrijving over de funktie van doelstellingen in leerplanontwikkeling en onderwijspraktijk kan verhelderen.

1^D doelen

De 1^D doelen rusten niet op de vruchtbare grond van de praktijk, maar zweven in de ijle lucht van de filosofie omtrent het wiskundeonderwijs en zijn als zodanig nauw verbonden met de hiervoor beschreven matematisch-didaktische uitgangspunten. Ze kunnen onderscheiden worden in doelstellingen, die zich op het totale schooldoel richten en in doelen die speciaal op het vak wiskunde betrekking hebben. In het eerste geval spreken we van algemene integrale, in het tweede geval van algemeen matematische doelen.
De algemeen integrale doelen (**1**) richten zich op:
– de zingeving voor de persoonlijke ontwikkeling (**1.1**);
– de sociale betekenis (**1.2**);
– de voorbereidende waarde (**1.3**);
– de maatschappelijke relevantie (**1.4**).
De algemeen matematische doelen (**2**) hebben betrekking op:
– het rekenaspekt (**2.1**);
– het taalaspekt (**2.2**);
– de toepasbaarheid (**2.3**);
– het praktisch nut (**2.4**);
– het struktuuraspekt (**2.5**);
– het metodisch aspekt (**2.6**);
– het dynamisch aspekt (**2.7**);
– het attitude aspekt (**2.8**).

Beide soorten 1^D doelen zullen we nu kort gaan bespreken, dat wil zeggen: we schrijven er in algemene zin over en geven geen nieuwe voorbeelden. Dit hoeft de lezer er echter niet van te weerhouden ze in verband te brengen met de tien telproblemen en de domino-roosterpuzzel.

▶ ALGEMEEN INTEGRALE DOELEN (1)

zingeving voor de persoonlijke ontwikkeling (1.1)

In de 19e eeuw ging men wiskunde als onderwijsvak vooral aanprijzen om de vormende waarde die ervan kon uitgaan. Door wiskunde te beoefenen zou – zo werd gesteld – het verstand gescherpt en de hele persoonlijkheid veelzijdig gevormd worden. Deze denkbeelden kwamen voort uit het neo-humanisme en werden gesterkt door psychologische overtuigingen (ontwikkeling van vermogens als geestelijke spierballen) en pedagogische uitwerkingen (Pestalozzi).

Ook in de eerste helft van de 20e eeuw krijgt de vormende waarde alle aandacht, en hier en daar ging men zelfs zover om de wiskunde aan te prijzen als een wapen tegen:
- de onrust en koncentratie-vermindering van de dertiger jaren;[1])
- het nationaal-socialisme ('Als wetenschap verheven boven dwaalweg en misleiding, kan ze het individu waarschuwen tegen het speculeren op zijn romantisch gevoel door de duistere machten van het kwade.');[2])
- de achterstelling van de vrouw ('Dit is één van de grote voordelen van het wiskundeonderwijs voor meisjes: het leert haar redeneren! Wij hebben in onze tijd behoefte aan mensen – ook vrouwen – die zuiver redeneren; eigen fouten inzien; bedaard te werk gaan; zich beheersen kunnen; werk van anderen weten te waarderen en doorzettingsvermogen hebben.').[3])

'klassieke' motiveringen

Vanwaar nu dit optimisme ten aanzien van de vormende waarde van het wiskundeonderwijs, en wel speciaal de intellektuele betekenis?
We noemen enkele 'klassieke' motiveringen:
- Het feit, dat je door goed wiskundeonderwijs logisch leert denken is af te leiden uit de struktuur van het vak. Heb je het vormingsgoed tot je genomen, dan is het resultaat van het onderwijs, dat de manier van denken bij de leerling gelijkvormig is met de denkwijze, die noodzakelijk is om het deduktieve systeem op te bouwen.
  Kortom, de struktuur van het vak is 'indrukwekkend', dat wil zeggen: laat afdrukken achter in de denkstruktuur van de leerling.
  De metode van onderwijs is bepalend voor de helderheid en nauwkeurigheid van de afdrukken.
- Het tweede argument spreekt zich niet uit over de isomorfie tussen vakstruktuur en denkstruktuur, maar beperkt zich tot de vaststelling dat de intellektuele betekenis door de psychologie als 'transfer of training' onderkend is. Zo zou gekonstateerd zijn, dat oefening van de kritische zin en het eksakt formuleren binnen het vak wiskunde, een gunstige invloed heeft op deze kritische zin en eksakte formulering in allerlei andere vakgebieden.
- De derde motivering is gestoeld op ervaringen uit de eigen schoolpraktijk. Misschien, zo luidt de redenering, heeft de wetenschap de 'transfer' niet aangetoond, maar op grond van m'n eigen schoolervaring neem ik het bestaan van de vormende waarde aan.
- Tenslotte is de 'eenvoud' van de wiskunde aanleiding geweest om het abstraherend en kritische vermogen binnen dit vak te beoefenen, om het van daaruit te laten uitstralen op andere kennisgebieden, waar deze denkgewoonten ook van groot nut zouden zijn. Een voorwaarde voor deze transfer is, dat de onderwijsaanpak gericht zou moeten zijn op het proces van het matematiseren, waarbij men konkrete niet-wiskundige problemen omvormt tot wiskundige.[4])
  Waren de voorgaande argumenten veel gehoord in de 19e eeuw en in de eerste helft van de 20e eeuw, het laatste argument wordt vooral vanaf de vijftiger jaren gebruikt.
  Met name de uitbreiding van het leerstofgebied van de schoolwiskunde en de daarmee gepaard gaande verruiming van de mogelijkheden tot matematiseren en modelvorming verlenen dit argument, volgens de voorstanders, meer gewicht.[5])

kontra-argumenten

Tegen dit voorwaardelijk optimisme zijn een aantal argumenten ingebracht, waarvan met name de opvattingen over de negatieve transfer zwaar wogen. De eenvoud van de wiskunde zou juist een belemmering voor de overdracht kunnen zijn.[6]) Door het bedrijven van wiskunde zou men een verkeerde instelling ten aanzien van anders gestruktureerde kennisgebieden kunnen krijgen. Dit zou zich bijvoorbeeld uiten in een diskussie over maatschappelijke problemen, waarbij de wiskundige niet anders doet dan navragen wat men precies met de gebruikte begrippen bedoelt. Kortom, men eist in zo'n geval eksaktheid op gebieden waar geen hoge graad van eksaktheid haalbaar is en belemmert zodoende de voortgang in het denken: er is sprake van negatieve transfer. Hier kan men dan weer tegen inbrengen, dat de leerling juist door het matematiseren en de modelvorming de kracht en de beperking van de wiskunde leert kennen.

Enfin, het wordt een diskussie zonder einde, juist ook omdat de didaktiek in het geding is en harde feiten ontbreken.

In de vijftiger jaren is het motief van de vormende waarde uit de leerplans voor wiskunde verdwenen. De hoeveelheid argumenten pro en kontra hadden een gevoel van machteloosheid opgeroepen. In de zestiger jaren zijn er dan ook vrijwel geen diskussies over doelstellingen meer gevoerd. Alles wat er gezegd kon worden, was blijkbaar gezegd! Pas met de introduktie van komputerkunde bij het algemeen voortgezet onderwijs wordt het kriterium van de vormende waarde weer benadrukt en ook bij de ontwikkeling van een leerplan voor wiskunde op de basisschool is de kwestie aktueel.[7])

beschouwingen los van onderwijs

Schrijven en spreken over de vormende waarde van wiskundeonderwijs is een hachelijke zaak. De beschouwingen komen immers al gauw los te staan van de kwaliteit van het onderwijs, terwijl de vormende waarde juist van die kwaliteit afhankelijk is. Ook is er het gevaar van het wazig naar de verste verten van het opvoedingsdoel blikken en dan in een soort padvinderstaal beschrijven wat we zoal zien.

Wij willen deze laatste punten in het oog houden en volstaan met een enkele opmerking. De vormende waarde heeft zowel betrekking op het kognitief-konstaterende als op het affektief-waarderende aspekt van het handelen. In het wiskundeonderwijs kunnen we er naar streven om zaken als praktisch nut, orde, regelmaat, samenhang, waarheid en schoonheid, te leren kennen en waarderen.

Spreken we over het streven naar vormende waarde, dan zullen we dit moeten toelichten met een voorbeeld uit een schoolwerkplan, waaruit blijkt hoe het onderwijs gegeven wordt. Kan men uit een dergelijk voorbeeld destilleren, dat praktische, intellektuele, estetische en kreatieve elementen een goede kans hebben gekregen, dan kan op dit stukje onderwijs het etiket 'vormende waarde' geplakt worden. Op deze wijze is de doelstelling van de vormende waarde bespreekbaar gemaakt.

sociale betekenis (1.2)

Van de doelstelling van de persoonlijkheidsontwikkeling belichten we het sociale aspekt nog eens apart. De sociale betekenis van het wiskundeonderwijs werd vroeger ontleend aan het doelmatig denken en spreken dat men in de wiskundelessen nastreefde, waardoor wanbegrip uitgebannen en een redelijke verstandhouding bevorderd zou worden. Op deze

wijze was de sociale zin recht evenredig met de rationele betekenis van het wiskundeonderwijs.[8])
Na de tweede wereldoorlog wordt de sociale bijdrage geleidelijk minder op rekening gezet van het rationele matematische aspekt dan wel op de relationele didaktische komponent van het wiskundeonderwijs. Vooral de laatste jaren heeft deze verandering duidelijk gestalte gekregen in de vorm van het didaktisch praktikum.[9])

didaktisch praktikum

Zo'n praktikum is een soort probleembatterij, die een serie leeraktiviteiten oproept. Het leertrajekt is slechts met de globale markeerpunten van de verschillende problemen aangegeven, zodat er zowel voor de leerling als de leraar voldoende didaktische ruimte is voor een gedifferentieerd onderwijsleerproces.
Door het uitwisselen van ervaringen, het samen bespreken van de oplossingsstrategie, het verdelen van de onderzoekstaken, het naar elkaar luisteren en het elkaar uitleggen, kunnen – onder meer via het praktikumwerk – zowel bijdragen geleverd worden aan het integrale schooldoel van de socialiteit, als aan het specifieke leerdoel van de wiskunde.
Nu is het natuurlijk niet zo, dat deze bijdrage afhankelijk is van moderne – al dan niet in praktikumvorm gestelde – wiskundeleerstof. Maar wel dient opgemerkt te worden, dat het moderne wiskundeonderwijs, juist door de aksentuering van empirische aktiviteiten, het onderzoekskarakter en de rijke probleemstellingen, mogelijkheden biedt om de sociale betekenis van het wiskundeonderwijs te vergroten. Een demokratische attitude, teamgeest, solidariteit en zin voor samenwerking, krijgen meer ontwikkelingskansen dan ooit. Hoewel, ... 't zijn grote woorden!
Evenals bij de voorgaande doelstelling, staat ook hier weer de didaktiek centraal bij de beantwoording van de vraag in hoeverre het wiskundeonderwijs sociaal vormend kan zijn: de onderwijsman treedt in dit verband meer op de voorgrond dan het leerplan.

voorbereidende waarde (1.3)

Naast de persoonlijkheidsvormende opgaven van het basisonderwijs – waartoe we gemakshalve ook het kleuteronderwijs rekenen – is er ook de taak om een grondslag te leggen voor het vervolgonderwijs.
In de 'Proeve' lezen we hierover:

> '..... hij voldoende is voorbereid op de reken- en wiskundevakken bij de verschillende vormen van voortgezet onderwijs, voorzover het de toepassing van rekenkundige bewerkingen betreft, zoals:
> eenvoudige vraagstukken welke een beroep doen op
> het inzicht in de getalstructuur en het getallensysteem,
> het leren van goede oplossingsmethoden,
> het verkrijgen van vaardigheid in het kiezen van efficiënte berekeningsmethoden.'[10])

Dit citaat geeft de essentie van de voorbereidende taak, zoals die tot nu inhoud kreeg, duidelijk weer. Het leerstofgebied van het rekenen was duidelijk afgebakend: géén negatieve getallen, géén meetkundige propedeuse en géén letterrekenen, hoewel deze onderwerpen – didaktisch gezien – zeer wel behandeld konden worden.
Er was een historisch gegroeide konsensus over de inhoud van de voorbereidende taak. Maar met de invoering van de moderne schoolwiskunde bij het voortgezet onderwijs, werden in één beweging allerlei nieuwe gedachten omtrent het reken/wiskundeonderwijs gelanceerd. Onder-

werpen, die tot nu toe gepropageerd werden, kwamen ter diskussie en gebieden, die tot nu toe verboden terrein waren, werden thans opengesteld. Het bouwen van diagrammen met lucifersdoosjes, het werken met frames, de ontwikkeling van het kwalitatieve kansbegrip, het maken van trekken op het stadsplan en het spelen met gestruktureerd materiaal, werden ineens niet meer als uitzonderlijke bezigheden beschouwd.

sche
rond

Het ligt voor de hand om deze veranderingen toe te schrijven aan de ontwikkelingen bij het voortgezet onderwijs, die op haar beurt weer op rekening gezet moeten worden van het hoger onderwijs. Nu doet zich het wonderlijke feit voor dat de verklaring van het verschijnsel van de modernisering bij het voortgezet onderwijs inderdaad grotendeels vanuit de wiskundewetenschap gezocht wordt, maar dat het fenomeen van de wiskunde op de basisschool vooral een didàktische verklaringsgrond krijgt toegewezen.
Hoe is het mogelijk – kan men zich afvragen – dat wiskunde en didaktiek elkaar nu ineens in het basisonderwijs zo goed schijnen te kunnen vinden, terwijl ze toch tot voor kort in het voortgezet onderwijs steeds met elkaar overhoop lagen?
Kortom, enig wantrouwen ten aanzien van een mogelijk misbruik van de voorbereidende taak van het basisonderwijs lijkt hier op z'n plaats. Misbruik ja, omdat de matematische intenties van de top inbreuk kunnen maken op de pedagogische bedoelingen aan de basis. We hebben er al eerder op gewezen, dat dit wantrouwen niet geheel misplaatst is. Toch is met deze vaststelling geen voldoende recht gedaan aan de bedoelingen van het wiskundeonderwijs op de basisschool. Er zit namelijk wel degelijk een diepere betekenis achter de gehele beweging rondom het wiskundeonderwijs.

tieve
illen

Om dit duidelijk te maken, treden we weer wat terug in de historie en beschouwen daartoe het meetkundeonderwijs. Welnu, het meetkundeonderwijs vertoonde in de eerste helft van deze eeuw vrijwel overal hetzelfde algemene beeld. Er waren tussen de leerboeken van de verschillende schooltypen slechts kwantitatieve verschillen.
De mulo-boekjes bevatten ten opzichte van de vhmo-boekjes minder stellingen, minder vraagstukken en de bewijsvoering was minder streng. Ook in vertikaal opzicht was er sprake van een 'minder': in de eerste klas zette men minder de puntjes op de i en bewijssommen kwamen dan ook minder aan bod dan bereken- en konstruktieopgaven. Kortom, er was in het verloop van het leerproces op de verschillende schooltypen sprake van een kwantitatief verschil. Er was sprake van 'meer dan' of 'minder dan', maar niet zozeer van 'anders dan'.
En nu juist op dat laatste punt, het kwalitatieve verschil, legden enkele didaktici de nadruk. Volgens hen was het 'lagere' niet geheel op te bouwen tot het 'hogere' en het 'hogere' niet ten volle vanuit het 'lagere' te begrijpen. In hun opvatting over meetkundedidaktiek kwam dat tot uitdrukking in een gefaseerd onderwijs, waarbij het eerste stadium van de empirische voorbereiding andersoortige leerstof bevatte en aanleiding gaf tot andere metoden van verwerking dan in de volgende fasen. In het algemeen vond deze gefaseerde, sprongsgewijze didaktiek weinig weerklank in de wiskundeonderwijs-praktijk.

kwalitatieve fasering

Ook na de tweede wereldoorlog bleken verwante ideeën zich moeilijk in het onderwijsveld vast te zetten. Op het moment echter dat het wiskundeonderwijs voor de basisschool in het gezichtsveld kwam en er van ontwikkelings- en leerpsychologische zijde gewezen werd op het principe van de vertikale opbouw in het leerproces, toen opeens werd het idee van de kwalitatieve fasering in het leerproces gemeengoed.

De oorzaak van deze snelle doorbraak moet mede gezocht worden in de aard van de moderne schoolwiskunde, die immers geënt is op een abstraktere wiskunde dan de oude schoolwiskunde. Juist vanwege de grotere mate van abstraktie zijn er vele (abstraktie-)nivo's waarop de matematische begrippen toegepast kunnen worden.

voorbeeld

Laten we eens een voorbeeld geven. Het oplossen van lineaire vergelijkingen kan op de basisschool voorbereid worden door proefjes met behulp van een balans. Proefjes, die tot het inzicht kunnen leiden dat het aan beide kanten afhalen of bijleggen van knikkers of knikkerdoosjes geen toestandsverandering op de balans teweeg brengt. Op een gegeven ogenblik wordt het doosje geschematiseerd tot een frame en de balanstoestand weergegeven door een wip-wapplaatje. Het manipuleren met knikkers en doosjes is nu vervangen door het hanteren van getallen en frames. Vervolgens wordt het frame gesymboliseerd door een letter, de wip vervangen door een relatieteken en de operatie verloopt verder op de bekende wijze.

Ziehier een schets van enkele zinvolle voorbereidende aktiviteiten in het kader van de lineaire vergelijkingen. In veel gevallen echter – zo blijkt uit een analyse van een aantal leerboeken moderne wiskunde voor de basisschool – wordt de balansfase overgeslagen en gaat men al snel met frames opereren alsof het letters waren. Bij deze aanpak wordt het belang van het manipuleren op konkreet nivo miskend en daarmee wordt zowel een voordeel van het lettergebruik (opereren met een variabele als een 'het-doet-er-niet-toe-getal') als een pré van het frame (als een dia-venster, dat steeds een andere vulling krijgt) teniet gedaan. Kortom, het kwalitatieve verschil wordt op deze wijze gereduceerd tot een kwantitatief onderscheid en zo komt de metodische blunder naast de didaktische vondst te liggen.

wensen van 'bovenaf'

De voorbereidende taak kan dus van de leerstofinhoudelijke kant gezien, nogal wat problemen opleveren. Dit leidt er in enkele gevallen toe, dat er van 'bovenaf' aangedrongen wordt om de voorbereidende taak van het wiskundeonderwijs te beperken tot het aanbrengen van de benodigde vaardigheden, opdat men de leerlingen eerst niet van alles en nog wat behoeft af te leren vooraleer aan het 'echte' wiskundeonderwijs te kunnen beginnen. Een aanvechtbaar standpunt, omdat het een miskenning inhoudt van het feit, dat er volwaardige wiskundige prestaties op allerlei nivo's geleverd kunnen worden, maar begrijpelijk gezien de leerstofinhoudelijke misstanden die soms optreden.

Naast de stofinhoudelijke voorbereiding dient echter ook de proceskant van de propedeuse beschouwd te worden: leerlingen, die slechts algoritmisch hebben leren werken, missen de juiste onderzoeksinstelling en houding ten opzichte van problemen. En dit zijn kwaliteiten voor het vervolgonderwijs in de wiskunde, die vanaf de basis ontwikkeld moeten worden.

maatschappelijke relevantie (1.4)

Met de maatschappelijke zin wordt gedoeld op de betekenis van de wiskunde voor het leven van alledag (de leefwereld) en het werken in de beroepswereld als onderdeel daarvan. We laten het vervolgonderwijs — hoewel evenzeer een onderdeel van de maatschappij — buiten beschouwing, omdat dit punt reeds in het voorgaande ter sprake gekomen is.
Welnu, we kunnen ons afvragen welke bijdrage het wiskundeonderwijs tot dit integrale schooldoel kan leveren. Anders geformuleerd: als we de leerlingen geen wiskunde/rekenonderwijs zouden geven, blijft de maatschappelijke betekenis van de betreffende onderwijsvorm dan onaangetast?
Voor het basisonderwijs is deze vraag niet moeilijk te beantwoorden: rekenvaardigheid heeft een belangrijke maatschappelijke betekenis. Voor het wiskundeonderwijs op de basisschool, dat juist een verbreding en verdieping van het traditionele rekenonderwijs is, blijft de vraag echter staan: is er een maatschappelijke noodzaak voor de verbreding van rekenonderwijs tot wiskundeonderwijs?
Denken we in dit verband bij wiskundeonderwijs speciaal aan een nieuw leerstofgebied, dan moeten de zojuist gestelde vragen ontkennend beantwoord worden: er is geen maatschappelijke noodzaak om tot een dergelijke uitbreiding over te gaan. Natuurlijk is het waar, dat de betekenis van de wiskunde in de samenleving steeds toeneemt, dat de rekenvaardigheid minder maatschappelijke implikaties heeft en daardoor minder aksent kan krijgen. Ook is het evident, dat het rekenonderwijs vanuit maatschappelijk standpunt herziening behoeft. Maar dat alles houdt niet in, dat er dergelijke ingrijpende veranderingen moeten plaatsvinden als nu veelal voorgesteld worden.

didaktisch formalisme

Denkt men bij wiskundeonderwijs speciaal aan een bepaalde benaderingswijze van het onderwijs, waarbij het niet alleen gaat om kennis, vaardigheden en inzichten, maar ook om een specifieke benaderingswijze van problemen, om een houding, om het uitbuiten van mogelijkheden, om het samenwerken aan een onderzoek, dan menen we de vraag bevestigend te moeten beantwoorden. Toch is hier enige aarzeling gepast, want al beseffen we dat verandering en verwetenschappelijking twee relevante kenmerken zijn van de maatschappelijke ontwikkelingen en menen we dat een fleksibel, inhoudrijk en op socialiteit gericht onderwijs kan bijdragen om de maatschappelijke relevantie te verhogen, we dienen ook te bedenken, dat niet alles zonder meer op rekening van de formele waarde geschreven kan worden. Dit zou een terugval betekenen naar het begin van deze eeuw, toen ook allerlei intellektuele, etische, kulturele en sociale waarden breed werden uitgemeten en het nuttigheidskarakter onvermeld gelaten werd: het rekenonderwijs wemelde van de onpraktische denksommen, het mechanikaonderwijs stond in z'n kwasi-deduktieve opzet ver van de fysische realiteit en het meetkundeonderwijs evenzeer.

didaktisch materialisme

Anderzijds is het mogelijk dat men uitsluitend uit utiliteitsoverwegingen dicht bij het praktische nut blijft staan en de zaak materieel oplost: er is dan sprake van 'toegepaste' wiskunde in de vorm van het toepassen van stukjes formules, zonder dat dit resulteert in toepasbare kennis.
Er worden in het matematische kamp thans serieuze pogingen ondernomen om de maatschappelijke relevantie van het wiskundeonderwijs

te verhogen, zonder in deze uitersten van didaktisch formalisme en materialisme te vervallen. De grote moeilijkheid bij deze kwestie blijkt dan vooral in het middenonderwijs te schuilen: het aanvankelijk rekenonderwijs en het gevorderd wiskundeonderwijs hadden van oudsher een rijk matematiseer- en toepassingsgebied, maar daartussen ligt een nog onontgonnen gebied. En juist in deze kontreien heeft de vernieuwing van het wiskundeonderwijs een belangrijk werkterrein.

ALGEMEEN MATEMATISCHE DOELEN (2)

inleiding De algemeen matematische doelen kunnen alle getypeerd worden met het imperatief: het wiskundeonderwijs dient matematisch waardevol te zijn. Alle kwesties die in het voorgaande ter sprake kwamen, keren in deze doelstellingen terug, maar ze worden nu vanuit matematisch gezichtspunt geformuleerd.
De acht uitgangspunten betreffen het totale onderwijsproces en raken dus óók de algemene doelen.
Met name de vijf matematische uitgangspunten (struktuur, toepasbaarheid, taal, dynamiek, specifieke benaderingswijze) geven aanleiding tot doelformuleringen van algemene aard. Om zowel de horizontale als de vertikale komponent van het matematiseren in de doelduiding uit te drukken, verschijnt het struktuuraspekt in de algemeen matematische doelen als reken- en als struktuuraspekt, terwijl aan de toepasbaarheid het praktisch nut toegevoegd is. Nemen we hier het attitude aspekt, dat de verbinding met de algemeen integrale doelen aangeeft, nog bij, dan krijgen we het totaal van de acht doelen die we nu gaan beschrijven.[11])

rekenaspekt (2.1) *Het wiskundeonderwijs moet zich er op richten de leerling mèt de verwerving van het rekensysteem in staat te stellen om op een aangepast nivo rekenkundige problemen uit zijn ervaringswereld en uit het alledaagse leven op te lossen.*

Dit kan voor de leerling onder meer inhouden:
- kennis van allerlei kwantitatieve aspekten van de werkelijkheid, zoals die tot uitdrukking komen in het tellen, meten en rekenen;
- vaardigheid bij het gebruiken van rekenkundige begrippen en bewerkingen in reële rekensituaties;
- inzicht in relevante getalsystemen en operaties binnen die systemen;
- bekwaamheid in het oplossen van algebraïsche problemen.

taalaspekt (2.2) *Wiskunde is een middel om aspekten van de ons omringende wereld te beschrijven en in kaart te brengen. Het wiskundeonderwijs moet zich er op richten, dat de leerling zich op een adekwate wijze van deze taal als kommunikatiemiddel leert bedienen.*

Dit kan voor de leerling onder meer inhouden:
- de beschikking hebben over een voldoende vokabulaire van matematische termen en symbolen;
- het inzicht hebben in een wiskundig systeem als een syntaktisch systeem, met z'n specifieke betekenissen, globale strukturen, zinsstrukturen en taaltjes;

– het juiste aktieve gebruik van deze vokabulaire en syntaktische strukturen bij het diskussiëren, het formuleren van de oplossing van een probleem, het omschrijven van bepaalde begrippen en het verwoorden van een onderzoek;
– het kunnen lezen van matematische literatuur op adekwaat nivo en het luisteren naar een uiteenzetting of diskussie, waarin matematische taal gehanteerd wordt;
– het zich bewust zijn van de kenmerken van de wiskundige taal ten opzichte van de alledaagse taal, wat betreft:
  • gekomprimeerdheid
  • mate van eksaktheid
  • specifiek gebruik van alledaagse woorden
  • veelvuldig gebruik van symbolen
  • bizondere status van wiskundige of in wiskundige teksten gebruikte termen, die ook alledaags voorkomen
  • wiskundige termen die niet in de alledaagse taal voorkomen;
– het kunnen interpreteren van matematische beschrijvingen in verbale, schematische en symbolische vorm.

toepasbaarheid (2.3)

Het wiskundeonderwijs zal zich er op moeten richten, dat er verbindingen gelegd worden tussen probleemsituaties enerzijds en matematische strukturen en begrippen anderzijds.

Dit kan voor de leerling onder meer inhouden:
– het leren omvormen, ordenen en struktureren van een probleemgebied, dat juist even buiten de wiskunde ligt tot een matematisch probleemveld;
– het leren werken met matematische modellen en daarmee de kracht en de beperking van de wiskunde leren kennen;
– het leren adekwaat te reageren in allerlei situaties, waarin een wiskundig aanpakgedrag van toepassing is.

praktisch nut (2.4)

Het wiskundeonderwijs moet zich er op richten, dat de leerlingen inzicht krijgen in allerlei praktische toepassingen van de wiskunde.

Dit kan voor de leerling onder meer inhouden:
– het leren van toepassingen van de wiskunde in fysische, biologische, sociale, medische, technologische, alsook in alledaagse probleemgebieden;
– het onderkennen van de bemoeienissen van de wiskunde in het leven van de leerling als konsument van goederen, als gebruiker van diensten en eventueel als producent;
– het leren doorzien en begrijpen van de betekenis van de wiskunde voor de hedendaagse samenleving;
– het leren doorzien en gebruiken van wiskundig georiënteerde apparatuur.

struktuur-aspekt (2.5)

Het wiskundeonderwijs moet zich er op richten, dat de leerling een juist begrip kan verwerven van relevante onderwerpen en het belang leert onderkennen van de rol van strukturen als unificerende elementen binnen de wiskunde.

Dit kan voor de leerling onder meer inhouden:
- het ontdekken van regelmaat in matematische patronen met betrekking tot getallen, figuren, en dergelijke;
- het ontdekken van gemeenschappelijke eigenschappen van objekten, bewerkingen, relaties en strukturen binnen relevante onderwerpen;
- het formuleren van konkrete voorbeelden bij een gegeven regel.

metodisch aspekt (2.6)

Het wiskundeonderwijs moet zich er op richten, dat de leerling intuïtieve, analoge, induktieve en deduktieve elementen in de benadering van matematische aktiviteiten onderkent en leert hanteren.

Dit kan voor de leerling onder meer inhouden, dat:
- hij de induktieve metode kan toepassen, die gekarakteriseerd wordt door
  - eksperimenteren
  - observeren
  - hypotesevorming
  - toetsing, als overgang naar het deduktieve redeneren;
- hij het gebruik van het begrip induktie in het alledaagse leven kent, waarbij iets soms op grond van 'gezag' of 'gezien' tot algemene wet verheven wordt, waaruit vervolgens weer iets afgeleid wordt wat de schijn van onaantastbaarheid heeft;
- hij het gebruik van het induktieve redeneren in de empirische wetenschappen leert kennen met het daaraan verbonden risiko van de sprong in het duister, de mogelijkheden om de induktieve generalisatie te versterken door middel van een teorie en tenslotte de kracht van het éne tegenvoorbeeld;
- hij het misbruik van het induktieve redeneren onderkent, in geval het in de kwasi-deduktieve vorm ingekleed is;
- hij het gebruik van het bewijs leert kennen als een geheel van beweringen leidend tot een 'ware' konklusie, waarbij de waarheid te herleiden is tot iets wat men eerder als juist zijnde heeft aangenomen;
- hij het gebruik en misbruik van de term 'bewijs' onderkent;
- hij zich bewust leert worden van het belang van de analogieredenering, de metode van interpolatie en ekstrapolatie, het gewicht van het vermoeden, de intuïtie, de induktie en deduktie;
- hij doeltreffende oplossingsmetoden selekteert, evenals toepasbare formules en verschillende bewijsstrategieën leert kennen.

dynamisch aspekt (2.7)

De wiskunde is konstant in beweging en ontwikkelt zich nog steeds. Het wiskundeonderwijs moet zich er op richten, dat de leerling zich bewust wordt van deze openheid en dynamiek van de wiskunde, zowel in objektieve als in subjektieve zin.

Dit kan voor de leerling bijvoorbeeld inhouden:

- enige kennis van de ontwikkeling van notatiesystemen van getallen;
- enige kennis van de historische ontwikkeling met betrekking tot de rekenvaardigheid: staafjes van Napier, rekenliniaal, handrekenmachines, komputers;
- enige kennis van het ontstaan van het begrip toeval;
- bezinning op het eigen denkproces; retrospektie op korte en lange termijn, leidend tot een steeds hogere organisatie van een matematisch veld.

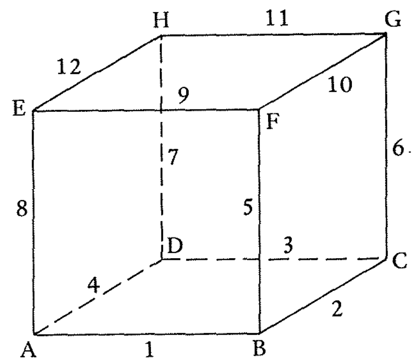
attitude aspekt (2.8)

Het wiskundeonderwijs moet zich er op richten, dat de leerling kennis, vaardigheden, inzichten (bekwaamheden) en attituden verwerft, waardoor en waarin de voorgaande doelstellingen met betrekking tot het rekenaspekt (2.1), het taalaspekt (2.2), de toepasbaarheid (2.3), het praktisch nut (2.4), het struktuurkarakter (2.5), het metodisch aspekt (2.6) en de dynamiek (2.7) gerealiseerd kunnen worden.

Dit betekent voor de leerling, dat hij een rijk gestruktureerd wiskundig leermilieu moet aantreffen, waarin ruimte is voor initiatief, durf en inventiviteit, zodat zelfvertrouwen en zelfervaring kunnen opbloeien.

▶ OVERZICHT (3)

De uitgangspunten en de algemene richtlijnen kunnen gevisualiseerd worden met een draadkubus:



De totaliteit is te vangen met de volgende volzin:
'Het uitgangspunt is een aktief (A), gedifferentieerd (B), vertikaal gepland (C) onderwijsgebeuren, waarin het struktuurkarakter (D), het taalaspekt (E), de toepasbaarheid (F), de dynamiek (G) en de specifieke benaderingswijze (H) van de wiskunde tot hun recht komen en waarbij de algemeen integrale doelen, die vormende (1), sociale (2), voorbereidende (3) en maatschappelijke (4) elementen bevatten, evenzeer nagestreefd worden als de algemeen matematische doelen (5 t/m 12), die de voornoemde matematische aspekten in zich hebben.'

filosofie van wiskundeonderwijs

De draadkubus verleent het geheel van de algemene doelstellingen een visuele struktuur, die het in werkelijkheid krijgt door een filosofie omtrent het wiskundeonderwijs. Het relatieve gewicht en de onderlinge relaties van de doelstellingen worden tegen deze achtergrond zichtbaar.
Freudenthal heeft in zijn boek 'Mathematics as an educational task' een

aanzet tot een dergelijke filosofie gegeven, uitmondend in de opdracht om onderwijs te ontwikkelen, uitgaande van de opvatting van wiskunde als een aktiviteit, die het kind raakt en verankerd is in de realiteit. Met deze opgave wordt een syntese nagestreefd van het realiteits-gebonden onderwijs van de matematisch-empirische stroming – met de nadruk op de horizontale komponent van het matematiseren – en de vertikale opbouw van de matematisch-strukturele stroming – met het aksent op de vertikale organisatie –, maar met vermijding van de ongeorganiseerdheid en het formalisme, waartoe de uitersten van deze twee richtingen achtereenvolgens neigen.[12])
In de volgende delen, waarin de méérdimensionale doelbeschrijvingen behandeld worden, zal getracht worden om de hier geschetste algemene doelen en de daaruit volgende taakstelling voor het wiskundeonderwijs een meer konkrete basis te verschaffen, door onze beschouwingen nog met andere voorbeelden te omkleden dan de in hoofdstuk 1 en 2 centraal gestelde telproblematiek.

noten

1) Turkstra, H.: Psychologisch-didaktische problemen bij het onderwijs in de wiskunde aan de middelbare school (groningen den haag 1926, pag. 19).
2) Cuypers, K.: Het aankweken van het wiskundig denken (antwerpen 1940, pag. 29).
3) F. (verdere aanduiding ontbreekt): De wiskunde op de M.M.S. (in 'Euclides', jaargang 14, pag. 31).
4) Zie de opvattingen van Ehrenfest-Afanassjewa in:
Kan het wiskunde-onderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen? (purmerend 1951).
5) De opvattingen van Van Hiele, Van Hiele-Geldof en Freudenthal.
6) De opvattingen van Kohnstamm (over het hanteren van oplossingsmetoden) en Langeveld (de teorie van de kenniskringen).
7) Sluis, A. van der: Computerkunde bij het Algemeen Voortgezet Onderwijs (in 'Euclides', jaargang 46).
8) Deze opvatting vindt men terug in de bekende publikatie:
Beth, E.W.: Doel en zin van het meetkunde-onderwijs (in 'Euclides', jaargang 14).
9) Goffree, F. en Wijdeveld, E.J.: Een praktikum wiskunde (in 'Euclides', jaargang 44, pag. 193-219).
10) Proeve van een leerplan voor het basisonderwijs – B Rekenen – (groningen 1968/2, pag. 7).
11) Relevante literatuur betreffende algemeen matematische doelstellingen:
- Christiansen, B.: Induction and Deduction in the Learning of Mathematics and in Mathematical Instruction (in 'Educational Studies in Mathematics', jaargang 2 nr. 2, pag. 139-160).
- Freudenthal, H.: Mathematics as an educational task (dordrecht 1973).
- Watson, F.R.: Aims in Mathematical Education and their Implications for the training of Mathematics Teachers (in 'International Journal of Mathematical Education in Science and Technology', jaargang 2 nr. 2, pag. 105-119).
- Johnson, D.A. en Rising, G.R.: Guidelines for Teaching Mathematics (belmont 1969/2, pag. 10-16).
- Braunfeld, P. en Kaufman, B.: Mathematical Education – A Viewpoint (in 'International Journal of Mathematical Education in Science and Technology', jaargang 3 nr. 3, pag. 287-291).
- Winter, H.: Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule (in 'Beiträge zum Lernzielproblem', ratingen 1972).
- Wittman, E.: Grundfragen des Mathematik-unterrichts (braunschweig 1974).
- Dormolen, J. van: Didactiek van de wiskunde (utrecht 1974).
12) Zie MaTEMAtika (iowo, utrecht 1973, hoofdstuk 1).

4 tweedimensionale doelbeschrijvingen

inleiding Tweedimensionale doelen bevatten, met de komponent van het beoogde leren (het leergedrag), een leerstofkomponent die duidt op datgene wat en waaraan geleerd wordt. Als zodanig zijn deze doelen verbonden met zes leerstofvlakken: rekensysteem, meten, meetkunde, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, relaties en funkties, taal en logika.
Allereerst beschrijven we in dit hoofdstuk globaal een aantal aktiviteiten uit deze *leerstofvlakken.* De onderliggende matematisch-didaktische analyse wordt buiten beschouwing gelaten. Met de beschrijving van de vlakken zijn de bouwelementen voor de meerdimensionale doelen gegeven. De gebieden die in het onderwijs gematematiseerd worden, zijn echter niet volgens deze zes kategorieën te klassificeren, want juist de geïntegreerde aktiviteiten aan een bepaald onderwerp leveren een samenhangend en zinvol stuk onderwijs op.

Voor we nader op de problematiek van de doelbeschrijving ingaan, beschrijven we dan ook eerst de *grondvormen* van deze geïntegreerde *onderwijsleeraktiviteiten:* het rijke probleem, de deelleergang, het tema en het projekt. Met de beschrijving van deze basisvormen zijn de bouwelementen voor een gestrukturéérd geheel van meerdimensionale doelen geplaatst.
Dan zijn we toe aan de kwestie van de *doelbeschrijving.* We onderscheiden onderwijsleerdoelen, geformuleerd in gedragstermen of geduid in aktiviteiten, onderwijsopgaven en leerstoftermen. Tevens gaan we kort in op de diepgaande meningsverschillen die er ten aanzien van de beschrijving van de doelstellingen bestaan en die hun weerslag vinden in de uitvoering van het konkrete onderwijs.
Eerst plaatsen we ons nu echter op grote afstand van het levende onderwijs en beschouwen globaal de leerstofgebieden.

▶ LEERSTOFVLAKKEN (1)

rekensysteem (1.1) Het rekensysteem is het vlak dat voornamelijk het klassieke leerstofprogramma bevat, zoals tellen, groeperen en verdelen, het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen in het gebied van de natuurlijke getallen, de breuken en kommagetallen; het leren kennen van de eigenschappen van die operaties en de toepassingen ervan.
Het rekenen heeft binnen het wiskundeonderwijs enkele nieuwe impulsen gekregen, die vooral het toepassingsgebied betreffen en leiden naar aanzetten tot een meer geïntegreerd en realiteitsgebonden onderwijs. In meer technische zin, waar het vooral gaat om het aanleren van reken-

vaardigheden, zijn er ook karakteristieke trekken in de ontwikkeling te onderkennen.
We denken hierbij aan:
- de oefenspelen voor de basisoperaties;
- het ordenend tellen;
- het gebruik van de abakus en de positiekaart;
- het rekenen met grootheden, kansen, machientjes;
- de open beweringen met relatie-voorschriften als $\neq$ > <;
- de verschillende getalaspekten – telgetal, meetgetal, aantal, rekengetal en naamgetal – hun funkties en hun 'bewerkbaarheid';
- het gebruik van de getallenlijn, het rooster en het blokschema;
- de verbinding met leerstofgebieden als meten, meetkunde, funkties en waarschijnlijkheid;
- de strategieën voor het aanleren van algoritmen;
- de introduktie van negatieve getallen;
- het generaliseren, het opsporen van formules en het gebruik van letters;
- het rekenen in andere talstelsels – in de hoogste klas van de basisschool – waardoor een overzicht van en een terugblik op de aangeleerde algoritmen in het tientallig stelsel geboden wordt;
- de eigenschappen van bewerkingen in verband met het struktuurrekenen;
- de gevarieerdheid aan toepassingen van de basisoperaties.

Zoals gezegd: er wordt getracht meer aansluiting te vinden bij het leven van alledag. De krant, het spoorboekje, de sport en de reklame maken hun opwachting. Zodoende krijgt het rekensysteem een grotere opening naar een zinvolle werkelijkheid.

meten (1.2)

In het vlak van het meten hebben we te doen met grootheden als lengte, gewicht en tijd. Grootheden zijn numeriek te vatten: we kunnen ze optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Zo ontstaat de oppervlakte van een rechthoek, door de lengte en de breedte te vermenigvuldigen, en de gemiddelde snelheid van een voertuig berekenen we door de afgelegde weg te delen door de tijd.
De bijbehorende maateenheden zijn de samengestelde grootheden 'm x m' (m^2) en 'km: uur' (km/uur). Uit de oorspronkelijke grootheden worden door deze bewerkingen nieuwe grootheden gevormd, die op hun beurt weer numeriek zijn.
Werken met grootheden leidt dus tot het opereren met getallen. In het traditionele programma werd dan ook veelvuldig met de getallen van tijd, geld, lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht gerekend, en wel vooral op de algoritmische wijze, zoals binnen het metrieke stelsel gewoonlijk gebeurde.

aktiviteiten

Toch is deze vlakvulling van het meten onbevredigend, en wel om verschillende redenen. Ten eerste, omdat het werken met grootheden in beginsel onafhankelijk is van de numerieke opvatting. We kunnen grootheden vergelijken, ordenen en samenstellen, zonder dat er een maateenheid ingevoerd is. Ten tweede, omdat er in het gebied van het meten een groot aantal belangrijke wiskundige aktiviteiten mogelijk is, die buiten de sfeer van de roetinematige rekenvaardigheden liggen, zoals:

– het bepalen van een meetstrategie, bijvoorbeeld het indirekte meten;
– de ontwikkeling van een maateenheid voor bijvoorbeeld bevolkingsdichtheid, verkeersintensiteit, helderheid;
– de betekenis van nauwkeurigheden en fouten: schatfout, meetfout, rekenfout, afrondingsfout;
– het uitvoeren van metingen binnen onderzoekjes en proeven, het tabelleren en de grafische verwerking van de gegevens;
– het ontdekken van relaties tussen grootheden;
– het opsporen van regelmatigheden, zoals bijvoorbeeld de oppervlakte van een cirkel;
– de integratie van wiskunde en 'science' in tema's en projekten, zoals bijvoorbeeld de betekenis van een vergroting van een objekt voor de omtrek, oppervlakte en inhoud (gewicht) en de biologische konsekwenties hiervan;
– de verbinding met telproblematieken, meetkunde, funkties, waarschijnlijkheid en statistiek.

Ook via het meten kan een sterke band tussen wiskunde en werkelijkheid gelegd worden.

meetkunde (1.3) Meetkunde behoorde tot voor kort uitsluitend tot het domein van het voortgezet onderwijs. 't Werd vooral geassocieerd met Euclides en gezien als hét voorbeeld van een deduktief systeem. Op basisschoolnivo lagen hier en daar enkele restjes van de vormleer, zoals het berekenen van de omtrek, oppervlakte en inhoud van meetkundige objekten.
Vanaf de vijftiger jaren steeg echter de belangstelling voor meetkunde op de basisschool bijna even snel als het entoesiasme voor de euclidische meetkunde bij het voortgezet onderwijs daalde. Zo bevatte 'The Arithmetic Teacher' in de periode van 1954 tot 1959 geen enkel meetkunde-artikel, in de vijf volgende jaren gemiddeld vijf verhandelingen per jaargang, vervolgens tien en in de periode 1968-1973 zelfs vijftien stuks per jaar. Er bestaat internationaal gezien echter opvallend weinig overeenstemming over een meetkundeprogramma voor het basisonderwijs.

aktiviteiten Wellicht is dit toe te schrijven aan de rijkdom van het gebied: de meetkunde bevat tal van aspekten, die moeilijk in een vertikaal gepland leerstofprogramma gevat kunnen worden.
We noemen:
– het vormaspekt, waarbij het gaat om het benoemen, herkennen en klassificeren van meetkundige objekten, het ontwerpen van patronen, het maken van vlakvullingen, doorsneden en projekties;
– het konstruktie aspekt: het maken van netwerken, het werken met konstruktierietjes, het tekenen van patronen en plattegronden en het konstrueren met behulp van passer en liniaal;
– het relatie aspekt: kongruentie, gelijkvormigheid, evenwijdigheid, ruimtelijke oriëntatie;
– het topologie aspekt: doolhofproblemen, doorloopbaarheid, vervorming van figuren;
– het rekenaspekt: telproblemen, rekenen met trekken en vektoren, rekenen met afbeeldingen, verbindingen met meten;
– het transformatie aspekt: symmetrische figuren, randversieringen,

stempels, papier vouwen en knippen, eigenschappen van verschuivingen, draaiingen en spiegelingen, het samenstellen van afbeeldingen, parketvloeren leggen;
- het taalaspekt: meetkundige begrippen, het beschrijven en benoemen van figuren;
- het logisch aspekt: redeneren op basis van aanschouwelijke evidenties binnen een lokaal geordend systeem.

Meetkundige aktiviteiten worden vooral aangeprezen vanwege hun uitnodigend karakter, de aanschouwelijke basis die ze verschaffen voor de matematische aktiviteiten en de mogelijkheden die ze hebben voor een steeds verdergaande wiskundige organisatie van het gebied.

waarschijnlijkheidsrekening en statistiek (1.4)

De brede belangstelling voor dit leerstofvlak is nog van recentere datum dan de hernieuwde aandacht voor meetkunde. In een bekend engels handboek 'Primary Mathematics today', waarvan de eerste druk dateert uit 1970, zal men tevergeefs zoeken naar begrippen, die bij het verzamelen, ordenen en interpreteren van numerieke gegevens een centrale betekenis hebben, zoals gemiddelde, modus, mediaan, spreiding en korrelatie.[1]) Evenmin treft men er iets aan over het nemen van steekproeven en het berekenen van kansen. Kortom, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek ontbraken tot voor kort in het leerstofgebied van de moderne wiskunde voor de basisschool.

aktiviteiten

De nu plotseling optredende interesse, die te verklaren is uit het streven naar een meer toepasbare wiskunde, als reaktie op de talrijke schrale moderniseringspogingen uit de zestiger jaren, richt zich op de volgende aktiviteiten:
- het verrichten van onderzoekjes en het verwerken van numerieke gegevens in een piktogram, staafdiagram, lijndiagram, sektordiagram of histogram; hierbij kunnen centrummaten als gemiddelde, mediaan en modus, ter sprake komen;
- het kwalificeren van gebeurtenissen als zeker/mogelijk/onmogelijk, het ordenen van gebeurtenissen naar de waarschijnlijkheid van hun optreden en het kwantificeren van kansen;
- het simuleren van gebeurtenissen met behulp van munt, dobbelsteen, tol, telefoonboek en aselekte getallen;
- het rekenen met kansen (som-, produkt- en komplementregel) met visuele ondersteuning van boomdiagram, wegendiagram en rooster;
- waarschijnlijkheid in verband met rekenen: tafelbingo, breuken, frakties, telproblemen, procenten en verhoudingen;
- het nemen van steekproeven om enerzijds te zien hoe een gegeven verdeling 'op den duur' benaderd wordt, anderzijds om een reële verdeling te voorspellen;
- de wet van de grote aantallen in verband met de 'weetkans' (a priori) en de 'zweetkans' (a posteriori).

Het leerstofvlak van de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek lijkt een grote rijkdom aan didaktische mogelijkheden te bevatten om een stuk werkelijkheid met wiskundige middelen doorzichtig te maken.

relaties en funkties (1.5)

De titel 'relaties en funkties' etiketteert het leerstofvlak, waarin het gaat om ordescheppende en ordebeschrijvende aktiviteiten. In het aanvankelijk rekenonderwijs hebben deze organiserende werkzaamheden altijd al plaatsgevonden, aangeduid met termen als alfabetiseren, leksikografisch ordenen, in volgorde zetten, schakelen, katalogiseren, groeperen, struktureren, klassificeren en rubriceren.
Het wiskundeonderwijs heeft aan deze aktiviteiten op de basisschool echter een uitbreiding gegeven, die ver uitreikt boven hetgeen in het traditionele rekenen gebeurde. De aandacht richt zich daarbij vooral op opdrachten, regels, wetten en voorschriften, in de vorm van formules, blokschema's en pijlen, die een strukturering van een matematische en empirische realiteit beschrijven of tot stand brengen.

aktiviteiten

We noemen in dit verband:
- het ordenen van objekten volgens een bepaald voorschrift, zoals voorwerpen naar gewicht, gebeurtenissen naar tijd en kansen naar grootte;
- het vormen van ketens onder een bepaald opzicht, zoals logiblokken naar 'verschilt één kenmerk van', getallen volgens 'is drie meer dan', dominostenen via 'is groter dan';
- het sorteren van objekten – al dan niet met overlappingen – naar kenmerken als kleur, vorm, grootte, aantal of volgens twee of meer van dergelijke kriteria, waarbij gebruik gemaakt kan worden van ponskaarten; het zelf bepalen van een kriterium om te klassificeren, te ordenen of te sorteren; het voortzetten van patronen bij getallen, muzieknoten, randversieringen, en dergelijke;
- het samenstellen van pijldiagrammen voor bepaalde relatievoorschriften, het aanvullen van pijldiagrammen en het uitvoeren van operaties ermee;
- het rekenen met machientjes, die volgens een bepaald voorschrift aan iedere input één bepaalde output toevoegen en die bewerkingen als optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, of samenstellingen ervan, verrichten;
- het ontdekken en beschrijven van verbanden tussen een tweetal of drietal grootheden binnen één situatie, zoals telefoon- of taksikosten als funktie van de tijd, slingertijd als funktie van de koordlengte, stuithoogte als funktie van valhoogte, daglengte als funktie van kalenderdatum, verzendkosten als funktie van gewicht en afstand, enzovoort.

Voor het onderwijs is zowel het verkennen van verbanden van belang als het zelf aanbrengen van een bepaalde orde.

taal en logika (1.6)

Er zijn in het verleden stemmen opgegaan, die een propedeuse in de formele logika propageerden als ondersteuning van het wiskundeonderwijs. Zij bleken echter roependen in de woestijn. Immers, de patronen van de formele logika mogen dan geschikt zijn om na te gaan of konklusies uit bepaalde premissen korrekt zijn en passend om allerlei redeneerpatronen te analyseren, ze verschaffen geen aanwijzing om deze premissen op te sporen en bieden evenmin steun aan de konstruktieve elementen van denkstrategieën. Kortom, het pleidooi vóór formele logika in het voortgezet onderwijs ontsproot niet aan de opvatting van wiskunde als een aktiviteit.

Vatten we logika echter op als een denken over het denken, dan ligt de zaak anders. We kunnen bij zo'n eksploratie uitgaan van meer komplekse denksituaties en de effektiviteit van de denkstrategie en de gebruikte taal analyseren. Ligt daarbij de nadruk op de taal als uitdrukkingsvorm van het denken, dan spreekt men wel van formaliseren, is het objekt van het denken de konstruktie van denkpatronen, dan wordt dit aangeduid als schematiseren.

aktiviteiten

We noemen in dit verband aktiviteiten, waarbij het gaat om:
- het symboliseren;
- de ontwikkeling van een eigen taaltje;
- het opsporen van relaties tussen vokabulaire en syntaksis van de gewone taal, de wiskundetaal en de meer geformaliseerde taal, zoals bijvoorbeeld bij het gebruik van variabelen;
- het omzetten van situaties in wiskundetaal en omgekeerd: het interpreteren van een stukje wiskundetaal in alledaagse termen;
- het gebruik van 'en', 'of', 'of of', 'niet', 'sommige', 'enkele', 'altijd', 'minstens', 'hoogstens', etc.; het visualiseren van uitspraken, waarin deze termen voorkomen en omgekeerd: het plaatsen van uitspraken bij plaatjes;
- het analyseren van allerlei redeneervormen en denkstrategieën aan de hand van geschikte problemen.

Het gebied van de 'taal en logika' buiten de dorre vlakte van de formele logika is nog vrijwel onontgonnen.

▶ LEERSTOFORGANISATIE (2)

inleiding

De gebieden, die in het onderwijs gematematiseerd moeten worden, zijn niet netjes volgens de zes genoemde kategorieën te klassificeren. Voor we nader op de ontwikkelde doelen kunnen ingaan, dienen eerst de vormen onderzocht te worden waarin de leerstofelementen als een gestruktureerd geheel verschijnen. Want in deze geïntegreerde totaliteit liggen de ontwikkelde doelen besloten en niet in de afzonderlijke leerstofelementen van de zes vlakken.
De kwestie van de leerstoforganisatie wordt nu – in tegenstelling tot de voorgaande algemene beschrijvingen – toegelicht aan de hand van één konkreet probleem.

basisvormen

Zo verschijnen achtereenvolgens
- het probleem
- de deelleergang
- het tema
- het projekt
- en samenstellingen ervan.

Na de behandeling van deze basisvormen van leerstoforganisatie, die toegelicht worden aan de hand van een probleem met een voetbaltabel, gaan we over tot het onderwerp van dit hoofdstuk, namelijk de beschrijvingsvormen van tweedimensionale doelstellingen. En ook daarbij zal een en ander geïllustreerd worden aan een voetbaltabel.

probleem (2.1)

Zoek de ontbrekende getallen in onderstaande tabel, waarvan de kolommen respektievelijk bevatten: het aantal gespeelde wedstrijden, overwinningen, gelijke spelen, nederlagen, wedstrijdpunten, doelpunten vóór en doelpunten tegen.[2]*)*

STAND EREDIVISIE

feyenoord	10	9	1	0	19	21-2
ajax	10	7	3	0	17	18-3
fc den haag	10	7	1	2	15	18-9
fc twente	10	5	4	1	14	10-4
sparta	10	4	5	1	13	26-12
fc utrecht	10	5	2	3	12	16-10
mvv	10	5	1	4	11	11-10
dws	10	4	3	3	11	8-10
nec	10	5	0	5	10	10-13
nac	10	2	5	3	9	11-16
telstar	10	3	3	4	9	7-14
psv	10	3	2	5	8	15-9
go ahead e.	10	3	2	5	8	16-16
fc groningen	10	1	5	4	7	12-16
excelsior	10	1	4	5	[illegible]	4-10
volendam	10	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]16
fc den bosch	10	[illegible]	3	7	3	4-19
vitesse	[illegible]	1	1	8	3	4-26

eksemplarisch karakter

Een dergelijk probleem kan op zichzelf beschouwd worden. De oplossing ervan vergt niet zozeer technische vaardigheid als wel begrip. Als zodanig heeft het een eksemplarisch karakter: iets van de essentie van de wiskundige aktiviteit kan eraan ervaren worden.
Het gaat hier om het ontdekken van regelmatigheden, zoals:
– het totale aantal doelpunten vóór is gelijk aan het totale aantal tegendoelpunten;
– het totale aantal overwinningen is gelijk aan het nederlagentotaal;
– het aantal gelijke spelen is even.

Deze wetmatigheden worden opgespoord door systematisch tellen en redeneren op grond van symmetrie-overwegingen. Al met al belangrijke matematische aktiviteiten, die opgeroepen worden door één komplekse probleemstelling, in plaats van door een kluster detailvragen.
In het algemeen staat een probleem niet op zichzelf, maar is het ingepast in een groter geheel.

deelleergang (2.2)

Zo kan de tabel als startpunt dienen voor een deelleergang over relaties. Voorschriften als 'staat hoger dan' (▷) en 'heeft evenveel punten als' (~) worden nader beschouwd.

Een uitspraak over drietallen klubs van de soort
.... ▷ ....,
heeft de eigenschap: als a ▷ b en b ▷ c, dan is a ▷ c (transitiviteit).

De transitieve eigenschap geldt zowel voor drietallen van de geordende verzameling voetbalklubs bij het voorschrift 'staat hoger dan', alsook bij het voorschrift 'heeft evenveel punten als'.

Een uitspraak over tweetallen van de soort

.... ~ ....,

heeft de eigenschap: als a ~ b, dan b ~ a (symmetrie).

De symmetrische eigenschap geldt voor alle tweetallen van de verzameling eredivisieklubs bij het voorschrift 'heeft evenveel punten', maar voor geen enkel tweetal bij het voorschrift 'staat hoger dan'.

Een uitspraak over ééntallen van de soort

.... ~ ....,

heeft de eigenschap: a ~ a (refleksiviteit).

De refleksieve eigenschap geldt voor alle ééntallen van de verzameling bij het voorschrift 'heeft evenveel punten als', maar in geen geval bij het voorschrift 'staat hoger dan'.

Met behulp van de voetbaltabel kunnen begrippen als refleksiviteit, symmetrie en transitiviteit ingevoerd worden ter inleiding van een deelleergang voor klassificeren en ordenen (ekwivalentie- en orderelaties). Het voordeel van een dergelijke introduktie zit 'em in de tabel als getallenblok; het nadeel schuilt in de abruptheid waarmee de begrippen opgeroepen worden, zonder dat de noodzaak tot het ekspliciteren van de evidenties gevoeld wordt.

twee uitersten

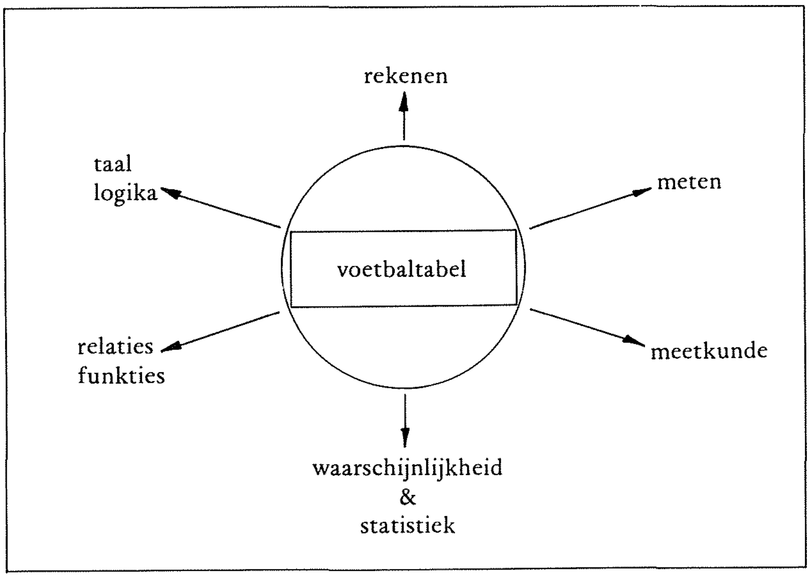
En hiermee zitten we bij de kernproblematiek van de deelleergang. Immers, de verzameling leeraktiviteiten zou enerzijds zo geordend kunnen zijn dat de belangrijke matematische begrippen langs een natuurlijke – zij het verkorte – weg herontdekt worden, anderzijds kan de leergang meer de vaksystematische ordening hebben die zojuist aangeduid is. Bij de laatste metode benaderen we de wiskunde meer als een gesloten systeem waarin de benodigde begrippen niet ontwikkeld, maar geserveerd worden: de wiskunde bestaat dan op zichzelf, in plaats van dat ze ontstaat dòòr mijzelf. De open opvatting daarentegen is gericht op onderwijs, waarin de leerling gelegenheid krijgt om zelf de belangrijke matematische verworvenheden – zij het geleid – te ontdekken. De uitersten zijn dan: de vaksystematische ordening en de probleemgeoriënteerde genetische leergang.[3]) In het ene geval ligt de nadruk meer op het produkt, in het andere geval op het proces.

Nu is het niet altijd mogelijk en gewenst om de genetische metode te kiezen. Als voorbeeld daartoe kan de deelleergang voor ekwivalentie- en orderelaties dienen: de betreffende begrippen liggen zo vanzelfsprekend in het denken verankerd, dat het moeilijk is probleemsituaties te bedenken waaruit de kernbegrippen op een natuurlijke en betekenisvolle wijze ontstaan. Hieruit zou men de konsekwentie kunnen trekken om dergelijke begrippen te weren. Doet men dit niet, dan zal de meer gesloten vaksystematische leergang gevolgd moeten worden. In andere gevallen is het zeer wel mogelijk om het trajekt van de leergang met rijke problemen te markeren. Zo is bijvoorbeeld de voetbaltabel een goed baken om het korrelatiebegrip te ontwikkelen via een probleemgeoriënteerde leergang. Uiteraard kunnen er ook mengvormen van deze twee uitersten toegepast worden bij de opbouw van een deelleergang.

Evenals het mogelijk is om de voetbalklubs op een eerlijke manier volgens verschillende kriteria te ordenen, zo kan dus ook de geordende verzameling leerervaringen van een deelleergang voor begrippen, operaties, strukturen en technieken, volgens verschillende legitieme voorschriften gekonstrueerd worden.

Uit het voorgaande is duidelijk geworden dat naar onze opvattingen het genetische principe van de geleide herontdekking, bizondere aandacht verdient. Spreken we over wiskunde als een aktiviteit, dan doelen we op het maksimaal benutten van dit genetische principe onder erkenning van de 'beperkte' mogelijkheden ervan.

tema (2.3)



In het bovenstaande plaatje is de voetbaltabel niet in een deelleergang geplaatst, maar treedt ze op als zelfstandige tematische kern, waaromheen zich verschillende matematische kernen stellen.
Een tema is een gestruktureerd fenomeen uit onze ervarings- of belevingswereld (tabel, spoorboekje, verhaal, winkel), dat zich goed leent voor een geïntegreerde behandeling van verschillende wiskundige onderwerpen. In het algemeen leent een tema zich vooral voor een herhaling van aangeleerde vaardigheden, al kan het daarnaast ook uitstekend dienen om nieuwe onderwerpen te introduceren. Bij de herhaling van de bekende leerstof toont het tema 't oude onderwerp in een nieuwe samenhang, waardoor het geleerde een verdere verdieping kan krijgen.

voetbaltabel en leerstofvlakken

De voetbaltabel draagt de volgende onderwerpen uit de leerstofvlakken op een min of meer natuurlijke wijze in zich:
— rekensysteem
  - negatieve getallen (doelsaldi) en rationale getallen (doelgemiddelde)
  - telproblemen (totale aantal kompetitiewedstrijden);
— meten
  - de gebruikte maat (twee punten voor een overwinning, één punt voor gelijk spel en bij gelijke stand is het doelsaldo doorslaggevend)
  - ontwikkeling van een nieuwe maat (doelsaldo als maat; toekenning van een ekstra punt bij een hoge skore) en het afwegen van de voor- en nadelen ervan;

– meetkunde
  · uitslag weergeven als een trek op een rooster (denk aan het pec-heerenveen probleem)
  · doelcijfers als koördinaten;
– waarschijnlijkheidsrekening en statistiek
  · korrelatie berekenen tussen rangorden volgens verschillende systemen (het gebruikelijke systeem en het doelsaldo-systeem)
  · kans berekenen om het uitslagentotaal goed te voorspellen (voetbaltoto);
– relaties en funkties
  · aantal punten als funktie van het aantal overwinningen en gelijke spelen
  · onderzoek naar eigenschappen van symmetrie en transitiviteit ('staat hoger dan', 'is sterker dan', 'wint van');
– taal en logika
  · lezen en samenstellen van uitslagen, standen, tabellen
  · redeneerproblemen (totale aantal doelpunten vóór en tegen).

voorbeeld

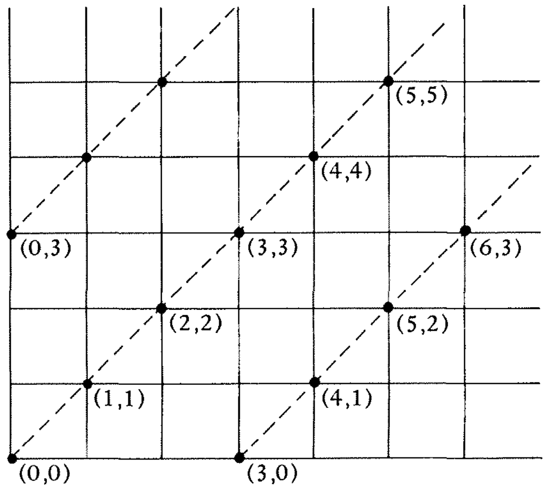
Kortom, de voetbaltabel als gestruktureerd fenomeen uit de ervaringswereld van velen onder ons, leent zich voor een behandeling van verschillende elementen uit de leerstofvlakken.
Laten we eerstgenoemd voorbeeld over doelsaldi eens wat nader bekijken met het oog op de zojuist genoemde deelleergang over ordenen en klassificeren.

rekenen met getallenparen

Beschouw het doelsaldo: het getallenpaar (aantal doelpunten vóór, aantal doelpunten tegen) kan opgevat worden als een trek op een rooster. We kunnen met deze getallenparen gaan rekenen.
Opgaven als
(5,7) – (1,4) =
zijn op verschillende wijzen te interpreteren en op te lossen:
– het doelsaldo van een klub is '5-7',
  de laatste uitslag '1-4',
  het vorige doelsaldo was dus '4-3';
– we bevinden ons in een rooster op het punt (5,7), de laatste trek was (1,4), dus het laatste rustpunt was bij (4,3);
– het is in dit verband ook mogelijk er de volgende gelijkheid in te lezen:
  (–2) – (–3) = + 1.

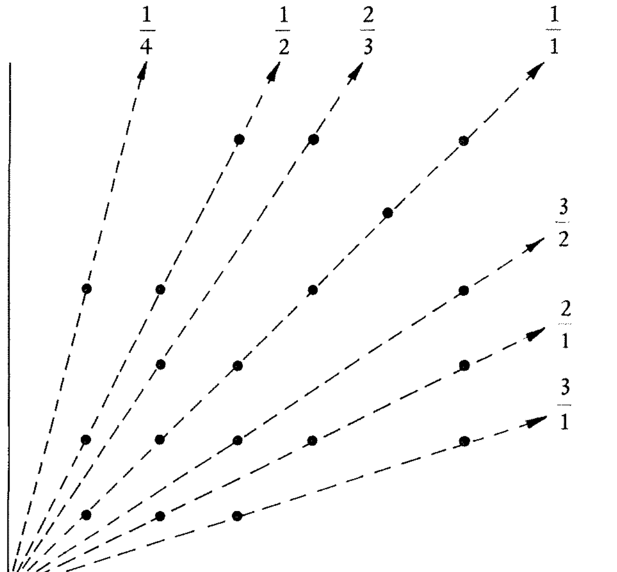
doelsaldo

Bij het zoeken naar patronen ontdekken we klassen van gelijke doelsaldi, die in het rooster gevisualiseerd kunnen worden met punten op evenwijdige lijnen. We zijn weer terug bij het ordenen en klassificeren: de ordening blijkt die van de gehele getallen te zijn, terwijl de klassifikatie op de gelijkheid van doelsaldi berust. De begrippen refleksiviteit, symmetrie en transitiviteit kunnen nu op deze getallenparen toegepast worden bij bepaalde relatievoorschriften.



doelsaldo

doelgemiddelde Het is ook mogelijk om een getallenpaar van de tabel als doelgemiddelde te beschouwen. De geordende getallen moeten nu niet afgetrokken worden, maar gedeeld. Bij een dergelijke interpretatie verschijnt de ordening en de klassifikatie in de vorm van een stralenbundel op een breukenveld:



doelgemiddelde

Uitgaande van de veronderstelling, dat ze reeds op een andere wijze ingevoerd zijn, komen gehele getallen en breuken hier in een nieuwe samenhang naar voren.

projekt (2.4) Laten we na deze korte afdwaling in de zuidwestelijke richting van het hiervoor getekende schema met de leerstofvlakken, terugkeren naar het oorspronkelijke tema. Het is mogelijk om de basisstrukturen van het patroon uit te breiden door het tema van de voetbaltabel te verbinden met naburige kernen, zoals de voetbal als meetkundig objekt en het totoformulier als voorwerp van de kansrekening, waaromheen zich vervolgens nieuwe matematische kernen groeperen tot een meer samengesteld tema. Het is zelfs mogelijk, dat de uitbreiding zich tot buiten het gebied van de wiskunde uitstrekt. In dit laatste geval spreken we niet meer van een tema, maar van een projekt. Het gaat dan over het verschijnsel voetbal in meer algemene zin.

leerstoforganisatie (2.5)

In het voorgaande hebben we enkele organisatievormen van de leerstof beschreven.
Het rijke probleem en de deelleergang kunnen daarbij als basisvormen aangemerkt worden. Een wiskundig probleem roept aktie op, om een bepaald doel, dat in eerste instantie geblokkeerd is, met specifiek matematische middelen te bereiken; het gaat om het vinden van een manier om voorbij een obstakel te komen. De aanpak geschiedt daarbij volgens een schema van operaties, een organisatievorm van mentale handelingen, of hoe men het plan van aktie ook wil kwalificeren. Zowel in de roosterwegenproblemen als bij de voetbaltabel hebben we gezien, dat het bij de zoekprocedure kan gaan om het opsporen van regelmatigheden en om het bewijzen van de juistheid van de gevonden patronen.[4])
De tweede basisvorm – de deelleergang – kan op bijna dezelfde wijze beschreven worden. Er is ook sprake van het afleggen van een trajekt en er zit eveneens een lijn in de reeks van aktiviteiten. Toch is er een belangrijk verschil met de probleemvorm: de doelgerichtheid van de handelingen hoeft niet perse afgestemd te zijn op het opruimen van obstakels en het doelbewustzijn kan zelfs vrijwel geheel ontbreken. Kortom, de ordening van de leerervaringen kan (lees niet: moet) voornamelijk ekstern – dus buiten de leerling om – geschieden en het leertrajekt kan 'probleemloos' naar doelen met betrekking tot vaardigheden, begrippen en strukturen leiden.
Een kombinatie van de basisvormen levert een deelleergang op, die duidelijk gemarkeerd is door de aangestipte problemen.
Het is ook mogelijk, dat de problemen in tematische vorm bij elkaar staan: de stippen zijn dan – evenals bij het projekt – in stervorm rond een tematische kern gegroepeerd.

beoogde leerstruktuur

Van lokaal standpunt bekeken kan de leerstoforganisatie dus bestaan uit stippen van problemen, lijnen van deelleergangen of sterren van tema's. Vanaf een meer globaal standpunt vertoont zich het georganiseerde geheel van deze lokale ordeningsvorm. Soms kan men bij een leerstoforganisatie duidelijk lijnen in de globale struktuur waarnemen en krijgt men een goed overzicht van het totaal, in een ander geval zal men slechts sterretjes zien en vertoont de totaliteit van de leerstof een onduidelijker beeld.
Hoe het ook zij, in beide gevallen is het wenselijk om de beoogde leerstruktuur achter – of zo men wil: vóór – de leerstoforganisatie op te sporen en de vraag naar de onderwijsleerdoelen te stellen.

▶ **ONDERWIJSLEERDOELEN (3)**

inleiding

Na de formulering van de uitgangspunten en algemene doelstellingen in de voorgaande hoofdstukken, en de uitgebreide beschrijving van de leerstofvlakken en -vormen in dit hoofdstuk, zijn we voldoende toegerust om de kwestie van de tweedimensionale doelstellingen onder ogen te zien.

De uitgangspunten en algemene doelstellingen leggen de basis (het fundament), de leerstofinhouden verschaffen het materiaal (de bouwstenen) en de leerstofvormen leveren de verbindingselementen (het cement) voor de beschrijving van een struktuur van onderwijsleerdoelen.
We zullen achtereenvolgens bespreken de beschrijving of duiding van
– onderwijsleerdoelen in gedragstermen (**3.1**);
– onderwijsleerdoelen in termen van aktiviteiten (**3.2**);
– onderwijsleerdoelen in termen van onderwijsopgaven (**3.3**);
– onderwijsleerdoelen in leerstoftermen (**3.4**).

onderwijsleerdoelen in gedragstermen (3.1)

We beschrijven een stukje onderwijs in het grensgebied van basis- en voortgezet onderwijs, dat betrekking heeft op de zojuist besproken voetbaltabel. Op zichzelf genomen is zo'n onderwerp niet bijster interessant, maar zien we achter de specifieke kenmerken van de tabel de meer algemeen wiskundige trekken, dan blijkt het voorbeeld van belang te zijn.
Immers, de omschrijving van wiskunde als het ontdekken van patronen, het beschrijven van regelmatigheden en het verklaren van verbanden, past volledig in de aktiviteiten rond de voetbaltabel als fenomeen van een gestruktureerde werkelijkheid die met matematische middelen aangepakt kan worden. Daarom krijgt hetgeen aan de hand van de tabel beschreven wordt een wijdere strekking.
Tot zover de verantwoording van het voorbeeld, nu de beschrijving ervan:

'De tabel wordt getoond en de betekenis van de verschillende rijen en kolommen verklaard. Het verband tussen uitslagenrooster en tabel wordt vervolgens als opgave gesteld en de oplossingen besproken. Dan komt de kwestie van de gelijkheid van het totale aantal overwinningen en nederlagen aan de orde: de leerlingen tellen de totalen en de overeenkomst dient verklaard te worden. In het klassegesprek worden de motiveringen op hun houdbaarheid onderzocht en wordt vooral gewezen op de symmetrie in de redenering, die de bewijskracht levert.'

konkrete doelstellingen

Ziehier een model van een lessencyklus: de gestruktureerde realiteit wordt getoond, ontleed en samengesteld; samenhangen worden opgespoord, verklaard en beschreven. Het onderwijs – zo mag verwacht worden – resulteert in een bepaalde kennis van die realiteit, vaardigheid in de beschrijving ervan en begrip omtrent verbanden die in de onderzochte werkelijkheid verborgen liggen.
Scherper en dwingender geformuleerd in konkrete doelstelllingen: de leerling moet op grond van het gegeven onderwijs het volgende kunnen presteren:
– hij moet de betekenis van de getallen in de rijen en kolommen van de tabel kunnen noemen;
– hij moet in staat zijn om met behulp van de gegevens uit een uitslagenrooster, een tabel samen te stellen;

– hij moet in staat zijn om allerlei regelmatigheden in het getalpatroon te verklaren.

mogelijk misverstand

Deze drie doelstellingen geven, indien ze vooraf geformuleerd worden, richting aan het onderwijsleerproces.
Toch kunnen er op basis van deze formuleringen nog tal van ongewenste uitwerkingen plaatsvinden. De derde doelstelling bijvoorbeeld zou aanleiding kunnen geven tot een strak stuk onderwijs, waarin uitgebreide kennisoverdracht plaatsvindt, terwijl het juist de bedoeling is dat de leerlingen zelfstandig nieuwe patronen opsporen en verklaren.

nivo-indikatie

Dit misverstand kan grotendeels uit de weg geruimd worden door aan de konkrete doelstelling een nivo-indikatie toe te voegen. Een bekende en dicht bij het onderwijs staande indeling is van *Wood*[5]), die geordende klassen van kennis, vaardigheid, begrip, inzicht en inventiviteit, onderscheidt. Welnu, een nivo-aanduiding '3' (begrip) bij de derde doelstelling, geeft een indikatie voor de planning, uitvoering en evaluatie van het onderwijsleerproces. Het betekent in dit geval dat niet alle verbanden onderzocht hoeven te worden en dat de evaluatie-opdracht het doel volledig dekt, indien in deze opdracht de gelijkheid van het totale aantal doelpunten vóór en tégen, zelfstandig opgespoord en verklaard moet worden, terwijl in het onderwijs slechts de kwestie met overwinningen en nederlagen onderzocht is.

volgorde der doelen

De konkreetheid van de verzameling doelen met betrekking tot het gewenste gedrag van de leerling wordt echter niet alleen bepaald door de specifieke formulering en de aanduiding van het beheersingsnivo. Ook de volgorde waarin de doelen geplaatst zijn, geeft konkrete aanwijzingen voor de inrichting van het onderwijs: de deeldoelen stippelen als het ware de leergang uit. Deze tracerende werking wordt duidelijker naarmate de doelen 'korter' zijn, dat wil zeggen: op kortere onderwijsperioden betrekking hebben. In het meest ekstreme geval programmeren ze de instruktie volledig. Bij een gematigde 'lengte' van de doelen blijft er een afgeperkte ruimte over voor een meer persoonlijke aanpak van het onderwijsleerproces, zoals die ook bij de geschetste lessencyklus over de voetbaltabel gerealiseerd kan worden.
Al met al blijken er voldoende mogelijkheden te zijn om de doelstellingen te ordenen en te klassificeren in een soort onderwijskundige voetbaltabel, taksonomie genoemd, waarvan de kolommen de gedragsnivo's en de rijen de geordende leerstofkategorieën bevatten.

adekwate toepassing

Nemen we in plaats van de tabel, de deelleergang over relaties, dan wordt deze overtuiging bevestigd. Analoog met de straks genoemde doelen krijgen we nu:
– de leerling moet in staat zijn een relatiepatroon van pijlen te lezen (kennisnivo);
– de leerling moet in staat zijn een relatiepatroon samen te stellen op grond van een gegeven voorschrift (vaardigheidsnivo);
– de leerling moet in staat zijn de eigenschappen van symmetrie en transitiviteit te identificeren bij verschillende relatievoorschriften (begripsnivo).

We kunnen zelfs nog verder gaan en doelstellingen op het nivo van in-

zicht en inventiviteit formuleren, zoals we ook bij de tabel het zelfstandig oplossen van het vlekkenprobleem (inzicht) of zelfs het ontwerpen van zo'n kompleks probleem (inventiviteit) tot doel hadden kunnen stellen. Kortom, ook in het geval van de deelleergang over relaties, funktioneren de konkreet geformuleerde, geklassificeerde en geordende doelen.
Op grond van het voorgaande konkluderen we dan ook, dat wanneer er sprake is van duidelijk gestruktureerde leergangen, de formulering, klassifikatie en ordening van min of meer konkrete doelen in termen van gewenst eindgedrag, adekwaat toegepast kunnen worden.

onderwijsleerdoelen in termen van aktiviteiten (3.2)

Hiermee is echter niet alles gezegd. Wat te doen als de roete tussen startpunt en doel minder zichtbaar is of wanneer zelfs het doel, wat het eindgedrag betreft, niet éénduidig bepaald is?
Laten we ons voor deze problematiek van de meer open benadering van het onderwijs, nogmaals op de tabel richten.
De zojuist geschetste 'leergang' was uitgestippeld volgens het gestroomlijnde procédé van Gagné. Het is echter ook mogelijk om à la Bruner een kompleks probleem voorop te stellen: een aanpak die bij het wiskundeonderwijs evenmin ongebruikelijk is.[6])
Als startpunt van de 'leergang' rond de voetbaltabel kan dan het vlekkenprobleem dienen of de opdracht om zelf een vlekkenprobleem samen te stellen. In deze beide gevallen laat zich het verdere verloop van de leergang niet precies voorspellen. Beperken we ons tot het vlekkenprobleem: een enkele zesdeklasser zal het probleem geheel zelfstandig oplossen, de minderheid heeft een klein duwtje nodig, maar het merendeel van de leerlingen zal de hiervoor geschetste leergang moeten volgen om aan het eind ervan, of in sommige gevallen ergens in het midden, het vlekkenprobleem te kunnen aanpakken.

formuleringsproblemen

Een dergelijke aktieve probleem-gerichte en gedifferentieerde aanpak, die ook voor de deelleergang over relaties kan gelden, brengt bizondere problemen in verband met de doelstellingsformulering met zich mee. Hoe moeten we het gewenste leereffekt van deze 'leergang' onder woorden brengen in termen van gedrag?
Als we stellen: 'de leerling moet in staat zijn om aan het eind van de deelleergang de hiervoor genoemde opdrachten over het lezen van de tabel, het samenstellen ervan of het verklaren van bepaalde patronen erin, te kunnen maken', dan raken we niet de kern van wat we eigenlijk willen. Dat doen we evenmin door te eisen: 'de leerling moet op grond van het gegeven onderwijs in staat zijn om een vlekkenprobleem van een bepaalde kompleksiteit op te lossen.'
Maar wat willen we dan wel?

duiding van aktiviteiten

Algemeen gesteld komt het erop neer, dat we de leerlingen belangrijke matematische leerervaringen willen laten opdoen. We kunnen dit doel nader specificeren door het vanuit de verschillende aspekten van het wiskundeonderwijs te beschouwen, zoals die neergelegd zijn in de algemene doelstellingen. In dit geval zouden we het vlekkenprobleem kunnen analyseren vanuit het taalaspekt, het struktuuraspekt en het attitude aspekt. Het gaat ons hier echter niet om het analyseren, maar om het formuleren.

Wel, men zou een 'oppervlakkige' duiding van het doel kunnen geven door slechts globaal weer te geven welke onderwijsleeraktiviteiten plaatsvinden en eventueel de relatie met de algemene doelen kort te vermelden. Met de formulering 'het doel ligt in de aktiviteiten om het vlekkenprobleem op te lossen (i.c. de algemene doelen van taal, struktuur, metode, dynamiek, attitude)', maken we de diepere bedoelingen vrijwel niet ekspliciet, maar ze blijven wel herkenbaar in de opgesomde aktiviteit.
De rechtvaardiging van de duiding van onderwijsleerdoelen in termen van aktiviteiten kan haar grond hebben in de onmacht om tot een leerdoelformulering te komen in termen van gedrag, gedragspotentie, gedragsdispositie, of hoe men de dieptestruktuur van het menselijk leren ook wil aanduiden. Maar er kunnen ook andere motieven zijn, zoals het ontbreken van voldoende zicht op de mogelijke leereffekten van een relatief nieuwe aktiviteit, of het slechts kort willen aanstippen van een keten van tussendoelen leidend naar een bepaald einddoel, of het willen benadrukken van de samenhang van de doelen, of de openheid van het doel willen aksentueren.

onderwijsleerdoelen in termen van onderwijsopgaven (3.3)

Lag de nadruk bij de zojuist besproken doelen op de prestatie van de leerling, dus op het matematiseren, nu wordt het onderwijsleerdoel indirekt benaderd via de leraar en wordt het aksent op het didaktiseren gelegd.
Didaktiseren omschrijven we — naar analogie van matematiseren — als het organiseren van een onderwijsveld met specifieke middelen, zich daarbij richtend op een aktief, gedifferentieerd, vertikaal gepland onderwijsleerproces, dat in overeenstemming is met de vijf matematische uitgangspunten.
Het didaktiseren kan op het gebied van het ontwerpen liggen, zich speciaal richten op het ontwikkelen van een bruikbaar eksemplaar voor de onderwijspraktijk, of betrekking hebben op het onderwijzen c.q. het didaktisch handelen. Beperken we ons hier voorlopig tot het laatste, dan rijst onmiddellijk de vraag welke redenen er kunnen zijn om de onderwijsleerdoelen die betrekking hebben op het matematiseren indirekt, via het didaktiseren, te beschrijven.
Het antwoord op deze vraag luidt hetzelfde als de motivering die voor de duiding van doelen in aktiviteitstermen gegeven kan worden: als het niet zozeer gaat om het eindprodukt, maar om het leerproces, als het gaat om het stimuleren van het durven, om het aanpakgedrag, om de beleving, om het opwekken van een positieve attitude, om meer algemene (ééndimensionale) doelen op langere termijn; kortom, als het handelt om moeilijk beschrijfbare algemene doelen die de totale persoon betreffen, dan is een indirekte beschrijving bruikbaar.

gelegenheid geven tot

In het geval van de les over de voetbaltabel zou de aanduiding van het onderwijsleerdoel als volgt kunnen luiden: 'de leerling optimaal gelegenheid geven om zo zelfstandig mogelijk het vlekkenprobleem op te lossen; dit houdt in, dat via een gedifferentieerde didaktische hulpverlening de leerlingen in staat gesteld worden om het probleem op verschillende wijzen (nivo's) op te lossen; bijvoorbeeld.....'
Dan kan er een min of meer uitgebreide beschrijving volgen van de ver-

schillende vormen van leergedrag, die bepaalde leerlingen kunnen vertonen en in verband daarmee de verschillende wijzen van onderwijsgedrag, die de leraar zich als opgave kan stellen om tot waardevol wiskundeonderwijs te komen.
Op deze wijze kan de doelformulering sterk vervlochten worden met de beschrijving van de didaktiserende aktiviteit of met meer algemeen matematisch-didaktische verhandelingen. En daardoor kan deze meerdimensionale doeldeskriptie vervagen tot een matematisch-didaktische beschouwing van het totale onderwijsleerproces, die we aanduiden met de term driedimensionale doelbeschrijving. Hierop gaan we in het volgende hoofdstuk in.

onvolledige doelbeschrijvingen in leerstoftermen (3.4)

Kon er bij de beschrijvingen in aktiviteiten en onderwijsopgaven gesproken worden van een zekere mate van terughoudendheid met betrekking tot de gewenste gedragspotenties van de leerling, bij de formulering van doelen in leerstoftermen moet zelfs gesproken worden van een verzwijging. Er wordt volstaan met min of meer konkrete aanduidingen van feiten, begrippen, algoritmen, principes, regels, formules, relaties, metoden en strukturen, die als leerstofkomponenten de inhoud van de doelen medebepalen. In plaats van termen als 'het kunnen konstrueren' of 'het opsporen', of 'het optimaal gelegenheid geven tot', komen nu slagwoorden als 'de voetbaltabel', 'ekwivalentie- en orderelaties', 'het symmetriebegrip', 'verhoudingen', en dergelijke, in de omschrijving voor. Dit betekent, dat er van de twee dimensies – leerstof èn het gedrag met betrekking tot die leerstof – één weggelaten is. Opgesomd wordt waaràan geleerd moet worden of wàt geleerd moet worden, zonder te noemen waaruit het bedoelde leren dient te bestaan.
De traditionele leerplannen bestonden hoofdzakelijk uit opsommingen van dergelijke min of meer konkrete leerstofdoelen. Kritiek op het didaktisch materialisme ('kennis van de stof') leidde tot opvattingen over doelformuleringen, waarin gestreefd werd naar vollediger – dat wil zeggen méérdimensionale – beschrijvingen van wat er met het onderwijs bedoeld wordt. Bij de realisering komen echter grote verschillen naar voren.

▶ STANDPUNTBEPALING (4)

verschillende standpunten

In nederland kwamen de verschillen ten aanzien van de doelformulering reeds in de vijftiger jaren aan het licht in de wiskundewerkgroep van de wvo.[7]) Aan de ene zijde stonden de voorstanders van een open benaderingswijze. Zij stellen dat in een onderwijsleersituatie wel gespecificeerde aktiviteiten te beschrijven zijn, maar dat geen gedetailleerde doelen vooropgesteld kunnen worden: de avontuurlijke ontmoeting van leerling en onderwijzer laat een dergelijke vooropstelling niet toe. Deze groep legt vooral de nadruk op het kwalitatieve karakter van het leerproces in een kreatief onderwijsgebeuren en is voorstander van een doelformulering in termen van aktiviteiten en onderwijsopgaven.
Aan de andere kant staan de voorstanders van konkrete doelen en objektieve evaluatie. Hun devies luidt: als we erin slagen doelstellingen te formuleren in termen van gewenste gedragsveranderingen bij de leerling en als we dan ook nog in staat zijn betrouwbare instrumenten te konstru-

eren, die zulke gedragsveranderingen kunnen meten, dan bewijzen we daarmee het onderwijs een grote dienst. Deze groep legt het aksent op doelformuleringen in gedragstermen, waarbij de waarneembare prestaties die de leerling na afloop van het onderwijs moet kunnen leveren, worden beschreven en niet de aktiviteiten, de leerstof en de onderwijsopgaven. Daarbij dienen de voorwaarden en de kriteria van de prestaties min of meer duidelijk gespecificeerd te worden.
Wat in de vijftiger jaren een klein twistpunt was in de wiskundewerkgroep, groeide in de jaren zestig uit tot een uitgebreid diskussieonderwerp binnen de onderwijswereld. Niet alleen de onderwijsevaluatie, maar ook de leerplanontwikkeling werd hierin betrokken. Het verschil van inzicht koncentreert zich rond begrippen als: eindgedrag, output, produkt en prestatie, tegenover: aktiviteit, input, proces en participatie, en uit zich vaak in ongekend felle bewoordingen.[8])

lijst konkrete leerdoelstellingen

Wij zullen onze stellingname in deze diskussie, die in het voorgaande reeds globaal duidelijk geworden is, nog eens toelichten aan de opvattingen omtrent de kwestie van de einddoelstellingen van het reken/wiskundeonderwijs op de basisschool. We refereren daartoe aan de doelstellingen over het onderwerp 'de kubus', zoals die door een werkgroep onder leiding van *De Corte* geïnventariseerd en onderzocht zijn op aktuele geldigheid, haalbaarheid en wenselijkheid. Deze doelen maken deel uit van een lijst van 1100 min of meer konkrete leerdoelstellingen van het rekenonderwijs op de basisschool (in belgië), nivo eind zesde leerjaar. Ze zijn als volgt geformuleerd:

'a) **De kubus herkennen**
1. De kubus herkennen in voorwerpen. (Dit sluit in dat de leerlingen kleine afwijkingen van de voorwerpen mentaal kunnen aanpassen.)

b) **De elementen van de kubus**
1. De bovengenoemde elementen van de kubus aanduiden of benoemen: ribben, hoekpunten, zijvlakken, overstaande zijvlakken, totaal oppervlak, zijdelings oppervlak (mantel), volume.

c) **Eigenschappen van de kubus**
1. De eigenschappen geven van de zijvlakken t.o.v. elkaar:
   – de zes zijvlakken zijn gelijke vierkanten;
   – de aan elkaar grenzende zijvlakken staan loodrecht op elkaar;
   – de overstaande zijvlakken zijn evenwijdig.
2. De eigenschap geven van de ribben t.o.v. elkaar:
   – de twaalf ribben zijn gelijk.

d) **De ontvouwing van de kubus herkennen**
1. Alle mogelijke wijzen van ontvouwen herkennen.

e) **Een kubus identificeren na verificatie met gepast materieel**
De leerling moet zijn identificatie kunnen verantwoorden.
1. Materieel: meetlat en tekendriehoek.
2. Materieel: meetlat en graadboog.

f) **De ontvouwing van een kubus identificeren na verificatie met gepast materieel** (alle mogelijke wijzen van ontvouwen).
De leerling moet zijn identificatie kunnen verantwoorden.
1. Materieel: meetlat en tekendriehoek.
2. Materieel: meetlat en graadboog.

g) Met gepast materieel en volgens bepaalde instructies de ontvouwing van een kubus tekenen

1) Een ribbe is in grootte en in stand gegeven.
   1. Materieel: meetlat en tekendriehoek.
   2. Materieel: meetlat en graadboog.
2) De lengte van de ribbe is als maatgetal gegeven.
   1. Materieel: meetlat en tekendriehoek.
   2. Materieel: meetlat en graadboog.

h) Met gepast materieel en volgens bepaalde instructies een kubus construeren

1. Een kubus met een gegeven ribbe construeren na tekenen en uitknippen van de ontvouwing.
2. Een kubus modeleren in plasticine.
3. Door stapelen van kleinere kubussen een grote kubus construeren.'[9])

De doelen zijn in het algemeen gesproken aktueel geldend, voor ongeveer driekwart van de leerlingen haalbaar en worden op een enkele uitzondering na – **h)** 2 – door de ongeveer honderd beoordelaars (inspekteurs, leraren didaktiek, schoolhoofden, onderwijzers) als zeer wenselijk gekwalificeerd.

andere werkwijze

Aan deze gegevens, voortkomend uit een bepaalde vraagstelling, valt niets af te dingen. We willen er echter wel een andere werkwijze naast zetten. Hoe zouden wij de vragen over de kubus stellen? De opgesomde gedragsleerdoelen hebben betrekking op geïsoleerde kennis- en vaardigheidselementen die bij dit onderwerp niet relevant zijn. Het geheel van losse doelen heeft geen relatie tot de verzameling meer algemene doelen die in het voorgaande geformuleerd zijn, en houdt geen verband met het levende onderwijs.
Men zou aan deze bezwaren tegemoet kunnen komen door een aantal waardevolle aktiviteiten op te sommen die met de kubus gedaan kunnen worden. Neem bijvoorbeeld de bouwplaten: het kennen en herkennen van alle mogelijke bouwplaten van een kubus is op zich genomen een zinloos kennisprodukt. De aktiviteit echter om àlle mogelijke bouwplaten van een kubus op te sporen is waardevol, omdat het tot de vraag voert of de verzameling bouwplaten kompleet is. En dit is de vraag naar het bewijs, dat vervolgens via een systematische aanpak geleverd kan worden. Bovendien heeft deze aktiviteit het voordeel dat de probleemstelling door de leerlingen zelf naar voren gehaald kan worden.
Wat vinden we van zo'n aktiviteit? Zouden de leerlingen van de basisschool dit gedaan moeten hebben?
Het antwoord op deze vraag zal ook moeilijk te geven zijn. Op zich genomen past de aktiviteit binnen de geformuleerde uitgangspunten en algemene doelstellingen en heeft inderdaad als pré dat de leerlingen zichzelf de vraag naar het bewijs kunnen stellen. Dit neemt echter niet weg, dat een dergelijke geïsoleerde aktiviteit ook met totaal andere probleemstellingen opgewekt kan worden. Met andere woorden: de waardevolheid van zo'n aktiviteit dient in een nog grotere samenhang beschouwd te worden.
Welnu, er zijn nog andere probleemstellingen met de bouwplaten te noemen.
Hoeveel plakstrookjes hebben we bij iedere bouwplaat nodig? Waarom zijn het er steeds zeven? Kunnen we met een willekeurig bouwplaatmodel steeds een vloer bedekken? Kunnen we er ook een parketvloer met een bepaald grondpatroon mee leggen? Hoe beschrijven we zo'n patroon?

Welke van de netwerken zijn in één trek te tekenen zonder een ribbe dubbel te lijnen? Waarom lukt het bij bepaalde netwerken niet?
Bij al deze aktiviteiten kan de leerling de algemene probleemstelling formuleren, die als het ware vanzelf uit het instapprobleem voortkomt. En dat is nog niet alles: in ruimer verband kunnen dergelijke kubusaktiviteiten onder meer voorkomen bij het maken van een dobbelsteen in de deelleergang over kansrekening, bij een tema over huizenbouw en bij een projekt over biologische kwesties omtrent voeding, spierkracht en gewicht.[10])
Ziehier een korte aanduiding van de samenhang waarin de aktiviteit over de bouwplaten past.
Wat vinden we nú van de bouwplatenaktiviteit?
Hoe het antwoord ook mag uitvallen, één ding is zeker: deze benaderingswijze van de doelstellingsproblematiek is anders dan bij de genoemde werkgroep. Het primaat ligt nu niet bij de vooropgestelde losse doelstellingen in gedragstermen, maar bij de geïntegreerde onderwijsleeraktiviteiten, die in overeenstemming zijn met de geformuleerde uitgangspunten en algemene doelstellingen. Deze aktiviteiten passen in een grotere samenhang van deelleergangen, tema's en projekten en hebben een bepaalde mate van openheid in zich. Het antwoord op de vraag naar de wenselijkheid van bepaalde aktiviteiten zal nu beter gedokumenteerd kunnen worden.

veelzijdige doelbeschrijving

Uit het voorgaande spreekt onze opvatting dat de kwestie van de (eind-)doelstellingen niet alleen vanuit gedragsleerdoelen, maar ook vanuit geïntegreerde onderwijsleeraktiviteiten beschouwd dient te worden. In sommige gevallen, vooral daar waar het kennis en vaardigheden betreft, is een formulering in gedragstermen gepast; in andere gevallen, waar het gaat om een vraagstellende attitude, een onderzoekshouding, een algemeen doel op langere termijn, blijkt een doelduiding in de vorm van een beschrijving van aktiviteiten en onderwijsopgaven in een brede samenhang, meer op z'n plaats. Het zou aanbeveling verdienen om in een onderzoek over (eind-)doelen ook de aktuele geldigheid, haalbaarheid en wenselijkheid van dergelijke aktiviteiten in beschouwing te nemen.

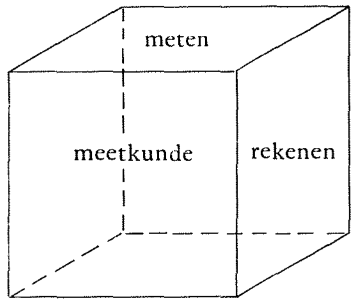
veelzijdige evaluatie

Het aksepteren van de noodzaak van een veelzijdige doelbeschrijving houdt tevens een bepaalde stellingname ten opzichte van de evaluatie in. De kwantificerende metoden die nauw verbonden zijn met de vooropgestelde doelformuleringen in gedragstermen, zullen met meer kwalificerende werkwijzen aangevuld dienen te worden, om de onderwijsleerprocessen van de meer open aktiviteiten te verhelderen. Hierbij valt vooral te denken aan een min of meer gestruktureerde observatie van het onderwijsleerproces, een matematisch-didaktische interpretatie van de aktiviteiten en observatiegegevens, een registratie van de opvattingen van de leerling en de leraar omtrent het gegeven onderwijs, en een fenomenologische beschrijving van 'case-histories of solutions' (Polya).[11])
De metodologie van deze procesevaluatie is echter nog onvoldoende ontwikkeld en zal wellicht meer verwant zijn aan werkwijzen uit de antropologie, de psychiatrie, de sociologie en de geschiedeniswetenschap, dan aan die van de klassieke psychologische effektmeting. Het is dan ook de vraag in hoeverre er in de wereld van de evaluatoren gevolg gegeven zal worden aan de oproep van Cronbach, Stake, Parlett, e.a. tot een meer

antropologische evaluatie, die vooral ook de proceskant van het onderwijs beschouwt en ook open onderwijsleersituaties zonder vooropgestelde doelen beoordeelt.[12])
Zeker is wel, dat er van de kant van de leerplanontwikkeling behoefte is aan een meer formele 'illuminatieve evaluatie' (Parlett), ter ondersteuning van de informele en subjektieve procesevaluatie, die de leerplanontwikkelaar en de onderwijspraktikus plegen. De driedimensionale doelbeschrijving, waarover we direkt komen te spreken, geeft een aantal aanknopingspunten voor zo'n evaluatie.

▶ **OVERZICHT (5)**

Tweedimensionale onderwijsleerdoelen zijn, voor wat het wiskundeonderwijs in het basis- en middenonderwijs betreft, geformuleerd voor de leraar, met het oog op de leerling. Ze zijn geplaatst tegen de achtergrond van de ééndimensionale doelstellingen en gesteld in min of meer konkrete termen van gewenst eindgedrag, beoogde leerervaringen, wenselijke onderwijsopgaven of bedoelde leerstof.
De leerstof is te plaatsen binnen de kubusvlakken:
— rekensysteem
— meten
— meetkunde
— waarschijnlijkheid en statistiek
— relaties en funkties
— taal en logika.



De basisvormen waarin de aktiviteiten uit deze leerstofgebieden geïntegreerd voorkomen, zijn:
— het rijke probleem
— de deelleergang
— het tema
— het projekt.

gedragsleerdoelen
aktiviteiten
onderwijsopgaven

De formulering in gedragstermen kan gebruikt worden indien vaststaat wat het leereffekt is. Dus: wat de leerling op basis van het gegeven onderwijs moet kunnen c.q. weten, begrijpen, inzien.
De doelduiding kan in termen van aktiviteiten geschieden, indien de opbrengst van het gegeven onderwijs — dus waartoe de leerling in staat moet zijn — zich voornamelijk tijdens het onderwijsleerproces vertoont en niet adekwaat als eindvaardigheid omschreven kan worden. Maar ook wanneer er ten aanzien van de uitkomst van het onderwijs openheid of onzekerheid bestaat.

Voor de beschrijving in termen van onderwijsopgaven geldt hetzelfde als voor de aktiviteitenformulering. Alleen wordt de openheid ten aanzien van de geëiste leerprestatie nu gevuld met een didaktiserende taakstelling die min of meer konkreet omschreven is. Een onvolledige duiding van tweedimensionale doelen in leerstoftermen – ook wel aangeduid als leerstofdoelen – kan de funktie hebben van een etiket voor een verzameling doelen, die daarmee voor de ingewijden globaal aangeduid worden. Een zodanige duiding is vooral bruikbaar om de samenhang van doelen en aktiviteiten kort aan te geven.
Bij de gedragsformulering wordt de 'in-staat-zijn-tot'-terminologie gebruikt (en als er werkwoorden gebruikt worden, verwijzen ze naar waarneembare handelingen die de leerling kan uitvoeren wanneer hij de doelstelling bereikt heeft). Bij de aktiviteitenbeschrijving worden werkwoorden gebruikt als: verklaren, ontwerpen, opsporen, onderzoeken, oplossen, en dergelijke. De onderwijsopgaventerminologie vangt aan met 'het optimaal gelegenheid geven tot.....'; de leerstofomschrijving duidt op feiten, begrippen, algoritmen, formules, en dergelijke. In de ene formulering ligt de nadruk meer op het produkt, de prestatie en het objektief meetbare resultaat, in het andere geval meer op het proces, de participatie en het subjektief waarneembare effekt.

realiseerbaarheid

Dié leerplanontwikkelingsprojekten die sterk geïnspireerd zijn door de onderwijsevaluatie, besteden vooral aandacht aan kwesties als konkretiseren, klassificeren en evalueren, terwijl bij de meer vakdidaktisch georiënteerde leerplanontwikkeling het vraagstuk van de konstruktie van geïntegreerde en zinvolle onderwijsaktiviteiten op basis van uitgangspunten, algemene doelstellingen en fundamentele leerstofanalyses voorop staat.
In het eerste geval komt men via een proces van toenemende konkretisering tot de formulering van min of meer konkrete gedragsleerdoelen, in het tweede geval – we komen nog op deze kwestie terug – werkt men vaak direkt vanuit globale basisideeën en richtlijnen over het wiskundeonderwijs aan de konstruktie van onderwijsleerpakketten, waarna soms achteraf de doelen vastgesteld worden. Het onderwijs wordt op de laatstgenoemde manier vooral van binnenuit benaderd. Men let niet alleen op wenselijkheid en haalbaarheid. Ook en vooral de mogelijkheden van een 'passende' realisering worden in de beschouwingen betrokken. Dat wil zeggen: onmiddellijk rijst de vraag of het doel – zo dit vooropgesteld is – vertaald kan worden in een zinvolle onderwijsleersituatie. En zo kan het kriterium van de zinvolheid doorslaggevend zijn om een in eerste instantie wenselijke en haalbare doelstelling terzijde te schuiven. Een voorbeeld: de vraag of leerlingen aan het eind van de basisschool op de hoogte dienen te zijn van ekwivalentie- en orderelaties wordt dan zowel onderzocht op wenselijkheid en haalbaarheid, als op de mogelijkheden tot een betekenisvolle gestaltevorming van het onderwijs.
Anders gezegd: de wenselijkheid en haalbaarheid worden niet alleen gekoppeld aan het leereffekt – dus aan dat wat de leerling moet kunnen presteren –, maar het hele onderwijsleerproces en de uitgangspunten daaromtrent, worden eraan verbonden. In het geval van de relaties zou dat kunnen betekenen, dat ze terzijde geschoven worden – we wezen er reeds op – omdat het onderwijs te gesloten moet plaatsvinden binnen een vaksystematische aanpak, of omdat het onderwerp matematisch

niet relevant genoeg is. Meer algemeen gesteld: de wederzijdse afhankelijkheid van doelstelling en realisering houdt in, dat er niet zonder meer over einddoelstellingen van het wiskundeonderwijs gesproken kan worden. Dit 'meer' verwijst zowel naar de grotere samenhang alsook naar de nieuwe dimensie van de konkrete didaktische kontekst, die we nu in onze beschouwingen gaan betrekken.[13])

noten

[1]) Williams, E. en Shuard, H: Primary Mathematics Today (london 1970).

[2]) Streefland, L.: De voetbaltabel (in 'Matematika' – iowo, utrecht 1973, pag. 321-342).

[3]) Zie over de genetische metode:
Freudenthal, H.: Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben? (in 'Mathematikunterricht' 4, pag. 5-29).
Krygowska, A.Z.: Processus de la mathématisation dans l'enseignement (in 'Educational Studies in Mathematics' 1, pag. 9-16).
Wagenschein, M.: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken (stuttgart 1970, pag. 68 e.v.).
Bruner, J.S.: Towards a Theory of Instruction (cambridge 1967, pag. 72).
Becker, G.: Formen und Prinzipien der Stofforganisation im mathematischen Unterricht (in 'Didaktik der Mathematik' 3, pag. 233-240).

[4]) Polya, G.: Mathematical Discovery I (new york 1962, pag. 118).
Weber, H.: Problemlösen und Kreativität im Mathematikunterricht: Der Stand der mathematikdidaktischen Reflexion (in 'Beiträge zum Mathematikunterricht 1973' – dortmund 1974, pag. 274-283).

[5]) Wood, R.: Objectives in the Teaching of Mathematics (in 'Current Research in Elementary School Mathematics' – Ashlock, R. en Herman, W.L. (ed.) – new york 1970, pag. 22-45).

[6]) Zie voor een goed overzicht:
Shulman, L.S.: Psychological Controversies in the Teaching of Science and Mathematics (in 'Teaching Mathematics: Psychological Foundations' – Crosswhite F.J. (ed.) – worthington 1973, pag. 3-19).

[7]) De Groot wilde een meetkunde-vorderingentest konstrueren om het inzicht na één jaar meetkundeonderwijs te meten. Van Hiele e.a. waren van mening, dat niet de resultaten van het leerproces het bereikte inzicht bepalen.
Zie:
Jacobs, H.J.: De didaktische periode in het werk van de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O. (in 'Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs' 19, pag. 189).

[8]) Van matematische zijde heeft men de operationalisten sterk aangevallen.
Zie voor een kort overzicht:
Eisenberg, T.A.: Behaviourism: the bane of school mathematics (in 'International Journal of Mathematical Education in Science and Technology' 6, pag. 163-171).
We volstaan verder met het noemen van enkele bekende wiskundigen en wiskunde-didaktici die zich fel tegen de 'Magerianen' gekeerd hebben: Hilton, Kline, Adler, Rising, Kaufman, Whitney, Van Hiele, Freudenthal, Martin, Braunfeld en Davis.
De prominente groep wiskundigen, die meewerkte aan de Cambridge Conference on School Mathematics ('Goals for School Mathematics', boston 1963) komt tot de volgende uitspraak:
'We are shocked by the callow-empirism which confers honorary validity on whatever measurement techniques it has managed to devise, and confers honorary nonexistence on all aspects of the human psyche that have not yet been explained to an IBM punching machine.'
We schrijven over het geschil tussen een grote groep wiskundigen en een grote groep evaluatoren om te wijzen op de enorme kloof die al jaar en dag bestaat tussen de opvattingen van deze groepen. Wellicht is een duidelijk inzicht in het verschil de eerste voorwaarde om te proberen de kloof te overbruggen.

[9]) Corte, E. de (e.a.): Leerdoelstellingen van het rekenonderwijs op de basisschool. Niveau einde zesde leerjaar (leuven 1974, pag. 120-125).

[10]) Zie over het onderwerp 'De kubus':
- Bauersfeld, H. (e.a.): Das Körperspiel (hannover 1973).
Moor, E. de: De kubus in de brugklas (in 'Euclides' 50, pag. 219-226).
Binnen het iowo zijn nu (anno 1975) twee interessante tema's aan de orde die iets met de kubus van doen hebben:
Kremers, W. over 'Belvia-Bungalows' en Streefland, L. over 'Gulliver'.
Ook in het Wiskobas-Bulletin jaargang 3 en 4 is het een en ander over het klassieke tema van de kubus gepubliceerd.
Zie voor een interessante beschrijving het klassieke werk:
Hiele-Geldof, D. van: De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O. (amsterdam 1957).

[11]) Zie het voorwoord van:
Polya, G.: Mathematical Discovery I (new york 1962).

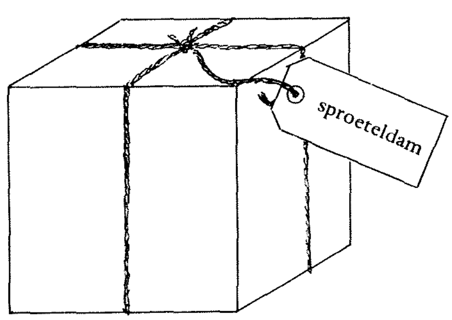
[12]) Zie voor een overzicht en een uitgebreide literatuuropgave twee konferentiebeschouwingen:
Rasche, H.: De funktie van doelstellingen in een leerplan (in 'Pedagogische Studiën' 50, pag. 521-532).
Bosch, L.J. van den: Evalueren van Onderwijsinnovaties (in 'Pedagogische Studiën' 52, pag. 128-140).
Zie ook Wiskobas-Bulletin (jaargang 2, pag. 847).

[13]) Een keuze uit relevante literatuur bij dit hoofdstuk:
Groot, A.D. de: Hoe stelt men eindtermen op? (in 'Universiteit en Hogeschool' 20, pag. 213-233).
Groot, A.D. de: Over fundamentele ervaringen: prolegomena tot een analyse van gesprekken met schakers (in 'Pedagogische Studiën' 51, pag. 329-349).
Oudkerk Pool, T.: Leerdoelen — Wat doe ik ermee? (in 'Opvoeding en Onderwijs' 26, pag. 223-229).
Huber, F. en Pilot, A.: Specificeren van onderwijsdoelstellingen (rijksuniversiteit utrecht 1974).
Vooral in het laatste werk (van de afdeling onderzoek en ontwikkeling van onderwijs aan de rijksuniversiteit) vindt men een uitgebreide literatuuropgave over de doelstellingenproblematiek.

5 driedimensionale doelbeschrijvingen

inleiding In dit hoofdstuk worden een aantal kwesties beschreven vanuit een onderwijsleerpakket van tematische aard, *sproeteldam* genaamd.
We noemen:
- het konkretiseren van doelen en de leerplanontwikkeling;
- de driedimensionale beschrijving van doelen (3^D);
- de beschrijving van de interne en eksterne samenhang van de sproeteldam-aktiviteiten met de zes leerstofgebieden (2^D);
- de beschrijving van de algemene doelstellingen, die in het pakket verscholen liggen (1^D).

In de beschrijvingen keren bijna alle basisideeën en kernbegrippen uit de voorgaande hoofdstukken terug en krijgt de doelstellingenkubus met z'n acht uitgangspunten, twaalf algemene doelen en zes leerstofvlakken, de gedaante van een konkreet onderwijsleerpakket.



▶ DOELSTELLINGEN EN LEERPLANONTWIKKELING (1)

verschillende standpunten In het vorige hoofdstuk hebben we gezien, dat er verschillende standpunten ten aanzien van de mogelijkheid en wenselijkheid van het formuleren van doelen in gedragstermen bestaan en dat deze verschillen te herleiden zijn tot uiteenlopende basisopvattingen omtrent het onderwijs. Van de kant van de leerplanontwikkeling zien we de verschillen terug bij de taksatie van het belang van de konkretisering van doelen voor het proces van de leerplanontwikkeling. Volgens de ene opvatting moet deze ontwikkeling gezien worden als een proces van progressieve konkretisering van doelen. Daarnaast staat de konceptie van ontwikkelen, uitmondend in een produkt van regressief geformuleerde doelen, waarbij 'regressief' opgevat moet worden als 'terugwerkend in de tijd', als 'achteraf'. We zullen de konsekwenties van beide opvattingen kort nagaan met het oog op de doelbeschrijving, om daarna het een en ander nog eens te beschouwen aan de hand van een voorbeeld.

'regressieve' konkretisering

In de literatuur over leerplanontwikkeling treft men wel de opvatting aan, dat ontwikkelen in eerste instantie een proces van progressieve konkretisering van doelen is.[1]) Dat wil zeggen, dat de konstruktie van onderwijsleerpakketten via konkreet geformuleerde gedragsdoelen dient te verlopen. Eerst moet men nauwkeurig weten wat men wil en pas dan kan men aan het eigenlijke ontwerpen beginnen, aldus deze opvatting.
Deze analytische werkwijze ten aanzien van doelstellingen treft men bij de pleiters voor 'regressieve' konkretisering niet aan, althans niet in deze gebiedende wijs. Het gevolg is, dat de overgang naar de ontwerpwerkzaamheden van konkrete onderwijsleerpakketten bij de 'regressieven' in een veel vroeger stadium plaatsvindt dan bij de 'progressieven'.
Waarom gaat de regressieve doelduider soms opzettelijk niet tot verdere konkretisering van doelen over, alvorens hij aan het ontwerpen begint? Wel, hij volstaat met de globale aanduiding van de aktiviteit of het leerstofdoel, omdat hij een bepaalde ruimte voor de kreatieve konstruktie wil behouden. Hij weet uit ervaring dat er bij het zoeken naar een geschikte instap-problematiek iets uit de bus kan komen, dat anders uitpakt dan hij aanvankelijk bedoelde en hij wil zich die ontwerpruimte niet laten inperken of blokkeren door een premature konkretisering van doelen. Aan de andere kant weet hij zich door de aangeduide aktiviteit of het globale leerstofdoel voldoende doelgericht om niet te zeer van de oorspronkelijke lijn af te dwalen. Er wordt dus bewust een kloof gelaten tussen het globale en min of meer impliciete onderwijsleerdoel en de konstruktie van het onderwijsleerpakket. En dat alles in de hoop, dat men stapje voor stapje of met één sprong de kloof kan overbruggen.
In het laatste geval 'wacht' men op de vondst, het goede idee, de inval. En als men geslaagd is en men heeft het eerste ontwerp uitgeprobeerd, dan kan, op grond van ervaringen met leerlingen en onderwijzers, getracht worden om de doelen te formuleren. Zo'n poging heeft, wat de doelen betreft, meer te maken met een bewustmaking àchteraf, dan met een richtinggeving aan het ontwerp vòoraf en is er vooral op gericht om *een samenhangend geheel van aktiviteiten te konstrueren.* Deze werkwijze leidt naar een toenemende georganiseerdheid van de doelen, die aan het begin van het ontwikkelingsproces nog geïsoleerd stonden of zelfs in het geheel niet binnen het gezichtsveld lagen.

Deze twee werkwijzen illustreren we kort aan de ontwikkeling van een onderwijsleerpakket voor de middenklassen van de basisschool, waarbij onder meer de volgende onderwerpen uit een wiskobas-raamplan voor de derde klas, als startpunt voor het ontwerp dienden:
- het redeneren vanuit pijldiagrammen, waarbij in het bizonder de eigenschappen van transitiviteit en (anti-)symmetrie gebruikt worden;
- tijdsindelingen, ordeningen op de tijdlijn;
- meten: lengte- en gewichtsmaten;
- telproblemen.[2])

progressieve werkwijze

De progressieve werkwijze zou als volgt kunnen zijn.
Maak een doelformulering in geoperationaliseerde vorm in de gedaante van een gewogen toets, die de leerlingen aan het eind van de leergang zouden moeten kunnen maken. Vraagstukken omtrent het redeneren, het aanvullen van een pijldiagram, het samenstellen van zo'n diagram,

en dergelijke, zullen in alle mogelijke variaties in zo'n toets voorkomen. Vervolgens zou men de doelstellingen korrekt kunnen gaan formuleren en wel zodanig, dat de toetsvragen goede operationalisaties van de doelen zijn.
Deze werkwijze is echter niet strikt progressief. Eerst zouden de doelen geformuleerd moeten worden in een zodanige vorm, dat ze eenvoudig omgezet kunnen worden in opgaven die men de leerling kan aanbieden om na te gaan of het doel bereikt is. Dit betekent, dat aan de doelstellingen bepaalde eisen gesteld worden: de verwachte gedragingen van de leerling moeten scherp en helder omschreven worden. Met name de gebruikte werkwoorden zijn daarbij van belang. Ze moeten voor weinig interpretaties vatbaar zijn. Termen als inzien, weten, begrijpen, en dergelijke, zijn daarom minder aan te bevelen, volgens deze opvatting. De inhoud waarop de leerling de gedraging moet kunnen toepassen, moet zo konkreet mogelijk geformuleerd worden, maar ook moeten in de formulering de voorwaarden genoemd worden waaronder de gedragingen plaatsvinden, alsmede de minimumprestatie die nog als suksesvol betiteld kan worden.[3])
Zo komen de progressieven, alvorens over te gaan tot het konstrueren van een onderwijsleerpakket, tot een formulering van doelen in de vorm van: 'gegeven een reeks opgaven van die en die vorm, in minstens zoveel ervan die en die prestatie kunnen leveren'.
Bij een dergelijke rij formuleringen dient een dekkende toets gemaakt te worden. Ook vloeit de konstruktie van het onderwijsleerpakket uit de vooropgestelde, konkrete doelen voort.
Het resultaat van deze werkwijze is een reeks losse doelen, die op de vier onderwerpen betrekking hebben en die soms geklassificeerd zijn naar gedragsnivo. Het onderwijsleerpakket dat op basis van deze doelen gekonstrueerd is, weerspiegelt meestal de verbrokkeldheid van de doelverzameling.
We zullen hier geen katalogus van mogelijke doelen binnen de vier genoemde onderwerpen geven. In de literatuur treft men dergelijke doelen in ruime mate aan, zoals bijvoorbeeld in het 'plan-projekt', waaraan de gezaghebbende Mager meegewerkt heeft.
Er is echter nog een belangrijker reden om zo'n opsomming weg te laten: dergelijke lange lijsten van losse leerdoelen hebben betrekking op een uiterst schrale vorm van wiskundeonderwijs. De omstandigheid dat in de onderwijskundige en evaluatieve hoek juist ruime aandacht aan dergelijke magere produkten besteed wordt, doet aan dit feit niets af. Naar onze mening wordt de waarde van de doelen medebepaald door hun onderlinge samenhang. En een struktuur van doelen krijgt men vaak niet via de metode van de progressieve konkretisering en is evenmin met de terminologie van de gedragsleerdoelen te beschrijven. Zeker niet in die gevallen waar het hogere en lange termijndoelen (1[D]) betreft; daarvoor moet men anders te werk gaan.

verslag ontwerpgroep

We geven nu een kort verslag van de metode, zoals die door een ontwerpgroep toegepast is op de vier genoemde onderwerpen. In de vakdidaktisch geïnspireerde leerplanontwikkeling is deze werkwijze gebruikelijk, al vindt men daarover in de onderwijskundige literatuur juist weinig aanwijzingen.[4])
Er werd vanaf het begin naar een komplekse probleemsituatie gezocht,

die zoveel mogelijk elementen van de vier genoemde globale leerstofverwijzingen zou bevatten. Het ontwerpteam kwam in de eerste ronde met een aantal instapproblemen, waaronder een verhaal met verscholen tijdsordeningen, een reeks wip-wapvraagstukken waarin de zwaarste persoon gezocht moest worden, en een vaag idee over een probleem binnen een tweezijdige ordeningssituatie. De laatste gedachte werd door één van de leden aangepakt voor een verdere uitwerking.
De belangrijkste aangrijpingspunten waren: het rooster, het pijldiagram en de komplekse probleemstelling, die met deze twee hulpmiddelen gekonstrueerd moest worden. De preparatiefase van praten, studeren en proberen, was nu ten einde en de inkubatiefase deed haar entree met de vage gerichtheid op de konstruktie van het komplekse probleem dat in pijlentaal gesteld moest worden.
Nadat een aantal ordeningsproblemen in verband met lengte- en gewichtskategorieën, hoogte en dikte, leeftijd en gewicht, en dergelijke, terzijde geschoven waren, kwam na lang tobben ineens de gedachte op om een onwerkelijk wereldje te kreëren, waarin de personen geprogrammeerd groeten. Na dit moment van illuminatie kon het verhaal van sproeteldam stukje bij beetje in elkaar gezet worden. Gesprekken met kinderen en kollega's leidden tot een eerste ontwerp van 'sproeteldam', dat na een intensieve ontwikkelingsfase in en met het onderwijsveld tot het pakket 'sproeteldam' samengesteld werd, zoals hierna beschreven is.[5])

weinig beschreven

We stelden zojuist vast, dat over een dergelijk ontwikkelingsproces weinig geschreven is. De reden daarvan ligt voor de hand: het proces verloopt tamelijk chaotisch, al geeft de fasering in preparatie-, inkubatie-, illuminatie- en konstruktiewerkzaamheden wel wat houvast. Ook is de wijze van ontwerpen sterk persoonsgebonden, terwijl de werkwijze voor de ontwikkeling van een groter geheel — de meso-ontwikkeling van leergangen en de makro-ontwikkeling van een schoolwerkplan — evenmin doorzichtig is.[6])
Al met al een weinig dankbaar onderwerp voor een heldere beschrijving, laat staan voor modelvorming. Voor ons een reden om de voorgeschiedenis van sproeteldam hier slechts kort aan te stippen. Het pakket zèlf zullen we echter in al z'n uitgebreidheid (3^D !) aan de orde stellen, al dient er bij vermeld te worden, dat het verhaal van sproeteldam dat steeds aan de probleemstellingen voorafgaat, summier en schetsmatig weergegeven wordt.

▶ SPROETELDAM DRIEDIMENSIONAAL (2)

inleiding

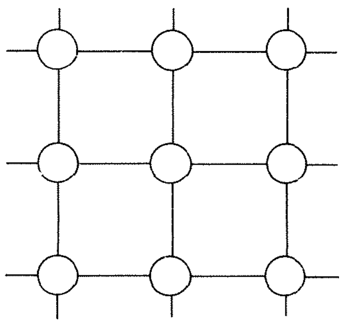
In 'sproeteldam driedimensionaal' worden de doelen binnen een konkrete didaktische kontekst beschreven. De samenhang tussen de verschillende lesdoelen en de inbedding van sproeteldam in een groter geheel, komen in de tweedimensionale beschouwing naar voren. Er wordt dan afgezien van de konkrete didaktische kontekst. Op grote afstand bezien we de relatie met de algemene of ééndimensionale doelen.
Vanuit deze drie gezichtspunten proberen we een inzichtelijk overzicht van het onderwijstafereel te krijgen.

doelbeschrijving (2.1) *In een dorp vlakbij een grote stad wonen wonderlijke wezens. De burgemeester heeft 3 sproeten en 3 haren, de postbode 1 sproet en 1 haar. Alle bewoners verschillen van elkaar en hebben minstens 1 sproet en 1 haar en hoogstens 3 sproeten en 3 haren.*

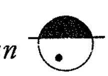
▶ *Teken alle bewoners en kontroleer of we ze allemaal hebben.*

Er is hier sprake van een kombinatorisch probleem, dat grote verwantschap vertoont met de telproblematiek, die in het eerste hoofdstuk behandeld is. Het didaktische hoogtepunt wordt bereikt via de vraag: 'hebben we ze nu allemaal?' Een leerling uit de middenklassen van de basisschool is niet in staat om het antwoord op deze vraag te formuleren, maar hij kan wel demonstreren, dat er (niet meer dan) negen inwoners zijn, door fiches of rondjes geordend bij elkaar te plaatsen. Van hoger standpunt bezien, komt het erop neer dat de boomdiagramstruktuur gevolgd wordt: één variabele wordt vastgehouden (bijvoorbeeld een haar), terwijl de tweede onafhankelijke variabele (in dit geval het aantal sproeten) systematisch verandert. Een dergelijke werkwijze overtuigt en heeft dus bewijskracht. De leerlingen maken van dit overtuigingsmiddel gebruik om zichzelf en hun medeleerlingen te laten zien, dat sproeteldam (hoogstens) negen inwoners heeft.
Samenvatting van het doel: de leerlingen gelegenheid geven om een systematische werkwijze, een symmetrieredenering en een bewijsargumentatie toe te passen op het voorgelegde kombinatorische probleem, waarmee ze de – al dan niet geleide – vondst kunnen benutten voor het probleem van de ordening in een roosterstruktuur.

doelbeschrijving (2.2) *Aanvankelijk woonden ze allemaal door elkaar, maar de burgemeester wilde – op advies van de postbode – orde op zaken stellen.*



▶ *Breng een ordening aan op het rooster.*

▶ *Waar kan*  *wonen?*[1])

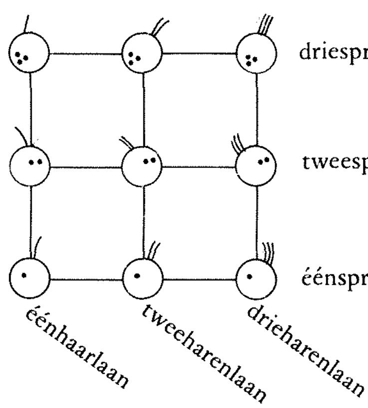
▶ *Waar kan*  *wonen?*

▶ *Bepaal de namen van lanen en straten.*

---

1) De zwarte gedeelten geven een hoed en een doek weer en bedekken dus respektievelijk haren en sproeten.

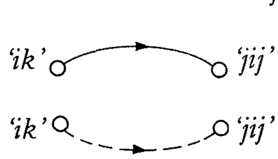
Het tweezijdig ordenen, dat wil zeggen: het klassificeren en ordenen volgens twee kriteria waar hier op gedoeld wordt, vindt plaats onder dwang van materiaalfaktoren, i.c. fiches voor poppetjes.
Aanvankelijk wordt er funktioneel geordend: de burgemeester of de postbode krijgen een plaats toegewezen in het midden van het rooster, omdat dit centrale punt om diverse redenen gepast lijkt. Maar dan komt de leerling in konflikt met de 1-2-3-ordening die hij op de haren en sproeten wil toepassen. In sommige gevallen leidt dit tot verhuizing van burgemeester of postbode naar het punt, dat hen krachtens de haren-sproetkoördinaat toekomt. In andere gevallen wordt een kompromis gesloten of blijft het funktionele principe gehandhaafd. Maar als tenslotte door de hele klas beslist moet worden, blijkt de tweezijdige ordening – zoals ook door de postbode geadviseerd – verkozen te worden boven de 'rommelige' funktionele struktuur. Voor de naamgeving van de lanen (vertikaal) en de straten (horizontaal) geldt hetzelfde: gewone straatnamen leggen het af tegen namen als 'éénsproetstraat' en 'drieharenlaan'.
Het resultaat van de ordenende en naamgevende aktiviteiten is een rooster met haar- en sproetkoördinaten op de plattegrond van sproeteldam:



Samenvatting van het doel: gelegenheid bieden tot tweezijdig ordenen en benoemen, dat leiden kan tot een koördinatenrooster.

doelbeschrijving (2.3)

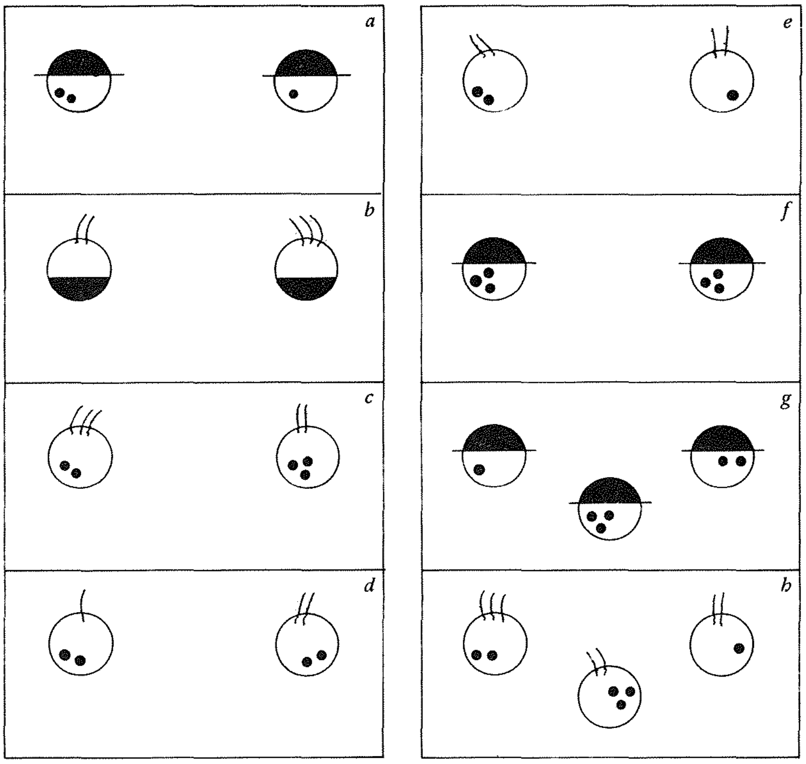
Toen ze ordentelijk woonden en de postbode z'n werk goed kon doen, wilde de burgemeester ook nog dat er wat beleefder gegroet zou worden. Daarom vaardigde hij een gebod uit. Iedere bewoner van sproeteldam werd verplicht om de ander te groeten, indien hij meer haren of sproeten had, en te zeggen:
'ik heb meer ..... dan jij.'



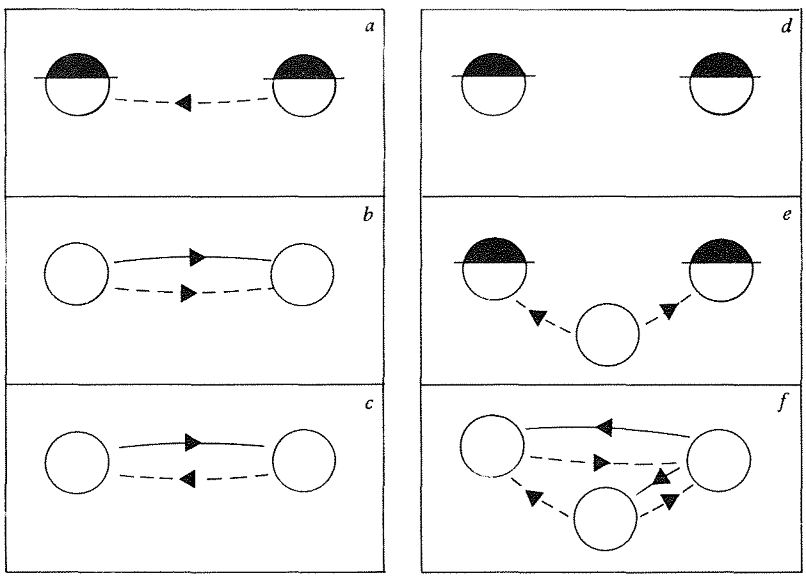
betekent: 'ik heb meer haren dan jij'.
betekent: 'ik heb meer sproeten dan jij'.

De bewoners van het dorp gaan dit oefenen en wij doen met hen mee.

▶ *Teken bij de gegeven poppetjes de pijlen!*



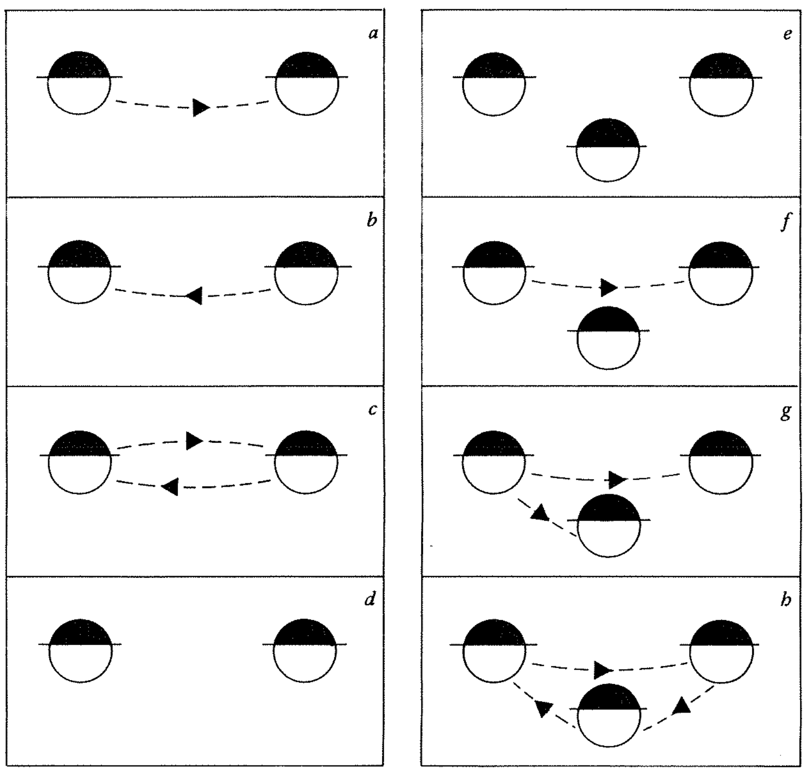
▶ *Teken bij de gegeven patronen haren en/of sproeten!*



Bij deze problemen staat de invoering en beoefening van de pijlentaal centraal. Vooral de wijze waarop de pijlentaal geïntroduceerd wordt, is van essentieel belang. De pijlen kunnen of pasklaar aangeboden worden, of de symbolisering kan door de leerlingen zelf ontwikkeld worden als een variant op het wolkje uit de stripverhalen.

Bij de laatste serie is het van belang dat de leerlingen ontdekken en verwoorden, dat de afwezigheid van een pijl tussen twee poppetjes betekent, dat die sproeteldammers evenveel haren (of sproeten) hebben. Met andere woorden: géén pijl betekent ook iets!
Samenvatting van het doel: gelegenheid bieden om ten aanzien van relaties een pijlentaal te ontwikkelen en daarin vaardigheid op te doen; omgekeerd: bij gegeven pijlen de betreffende sproeteldammers tekenen.
Nu moet iedere leerling in staat zijn de sproeteldammers op het rooster te plaatsen, bij een gegeven plaatje de groeten als pijlen te tekenen en te konkluderen, dat bij het ontbreken van een pijl de personen tot dezelfde klasse behoren en dus in dezelfde laan of straat wonen.

doelbeschrijving (2.4) ▶ *Ga na bij welke groetpatronen verwarring (ruzie) ontstaat. Verander – zonodig – de pijlen (met rood).*

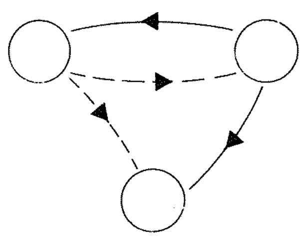


Het is de bedoeling om op een zo hoog mogelijk nivo de mogelijkheden en grenzen van een groetpatroon te laten ontdekken. Sommige leerlingen blijken te redeneren vanuit de pijlen, anderen gebruiken de plattegrond van sproeteldam om tegenstrijdigheden op te sporen, maar de meeste leerlingen werken met probeersels. Er zijn er echter ook, die zich op verschillende nivo's bewegen, al naar gelang ze met harmonie- of konfliktpatronen te doen hebben.
We vinden de genoemde nivo's van pijl, plattegrond en probeersel achtereenvolgens in de volgende toelichtingen op *e* terug:
'ze hebben allemaal één sproet, of allemaal twee sproeten, of allemaal drie'; 'ze wonen allemaal in dezelfde straat'; 'ze hebben allemaal evenveel sproeten'.

Van hoger standpunt bezien hebben we te maken met het toepassen van de eigenschappen van (anti-)symmetrie en transitiviteit bij ekwivalentie- en orderelaties. Voor de leerlingen, die de konfliktsituaties niet kunnen oplossen, blijkt de lineaire ordening uitkomst te bieden: 'ik heb meer dan' wordt omgezet in 'woont rechts van'. Op deze wijze worden de principes van anti-symmetrie en transitiviteit in de lineaire ordening opgesloten. De sproetstraat dient daarbij als model.
Samenvatting van het doel: gelegenheid bieden om op verschillende nivo's de mogelijkheden van bepaalde groetsituaties te onderzoeken, te symboliseren en te formuleren door toepassing van de relatie-eigenschappen van (anti-)symmetrie en transitiviteit, al dan niet met behulp van een lineaire ordening.

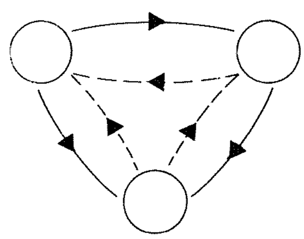
doelbeschrijving (2.5)

Na een poosje groette iedere sproeteldammer korrekt. Toch waren niet alle inwoners tevreden. Op een kwade dag kwam een politieagent uit de grote stad nabij sproeteldam naar de burgemeester. Hij vertelde dat drie inwoners uit zijn dorp geprobeerd hadden bij een kapper in te breken. Ze wilden zeker meer haren en sproeten!
Hij had die drie niet kunnen pakken. Hij wist ook niet hoe ze er uit zagen, maar hij had wel gehoord hoe ze elkaar groetten.
Dat was als volgt:



▶ *Welk daderstrio kan dit geweest zijn?*

De politieagent bleek zich echter vergist te hebben. Na zijn kollega geraadpleegd te hebben, kwam hij tot het juiste groetpatroon.
Het bleek nu eenvoudiger om de daders aan te wijzen.



▶ *Wie zijn de dieven?*

Het is niet de bedoeling, dat de leerlingen alle mogelijkheden van het eerste probleem opsporen. Voor de haren zijn er drie mogelijkheden, dus voor de sproeten ook. Aangezien de groetpatronen voor haren en sproeten onafhankelijk zijn, kunnen we ze kombineren tot negen drietallen

daders. Voor de leerlingen is het voldoende als ze ontdekken dat er nogal wat mogelijkheden zijn. Voor de hoogste klassen van de basisschool is het een goede toepassing van het systematisch werken en kombineren, om alle mogelijkheden op te sporen.
Het tweede probleem – didaktisch gezien het hoogtepunt van sproeteldam – kan op verschillende manieren opgelost worden.
Het hoogste nivo: er zijn er geen twee die evenveel haren of sproeten hebben, daaruit volgt dat degene die twee maal 'ik heb meer..... dan' zegt, drie haren of sproeten heeft en die éénmaal met 'ik heb meer..... dan' groet, heeft twee haren of sproeten, dus..... Merk op, dat hier louter en alleen vanuit de pijlen geredeneerd wordt.
Het is echter ook mogelijk – het andere uiterste – dat de metode van het konkrete gissen en missen toegepast wordt. In het algemeen substitueren de middenklassers verschillende haar- en sproetwaarden en gaan dan na of ze op een tegenspraak in het groetpatroon stuiten. De substitutie geschiedt in vele gevallen niet 'blind'; er wordt wel degelijk op één pijl gelet. Er is dus sprake van een plan op korte termijn, waarbij de haren- en sproetenproblematiek apart bekeken wordt, maar de leerlingen slagen er in het algemeen niet in om de abstrakte redenering vanuit het pijlpatroon te voltooien.
Samenvatting van het doel: gelegenheid geven om hetgeen in de twee voorgaande delen geleerd is over pijlpatronen toe te passen op twee komplekse problemen, waarbij het gaat om het identificeren van drie sproeteldammers bij een gegeven groetpatroon.

doelbeschrijving (2.6)

Blijkbaar waren de bewoners niet meer zo gelukkig als vroeger. De burgemeester had dit ook gemerkt (denk maar aan de diefstal!). Hij besloot daarom alle inwoners bij elkaar te roepen op een grote vergadering om te beslissen wat er zou moeten veranderen.

▸ *Er werden op die vergadering heel wat 'ik heb meer dan.....' groeten uitgebracht.*
Hoeveel in totaal?

Eerst enkele opmerkingen over oplossingsstrategieën. Een onsystematische aanpak zonder gebruik van de plattegrond leidt misschien na lang ploeteren tot de goede uitkomst, maar is op zichzelf genomen van weinig waarde. De betekenis van het probleem ligt primair in de wijze van aanpak. We zullen de leerlingen daarbij enigszins op het goede spoor moeten zetten.
In de eerste plaats dient het rooster erbij gehaald te worden. Vervolgens letten we alleen op de sproeten (we zetten die sproeteldammers in het rooster, die een hoedje op hebben) en ontdekken, dat ieder degene groet, die 'lager' in het rooster woont. Voor de bovenste drie geldt dus, dat ze ieder zes keer sproetgroeten; de middelste drie doen dit drie maal. Totaal 27 sproetgroeten. Op grond van symmetrie-overwegingen geldt voor de haren hetzelfde. In totaal wordt er dus 54 keer gegroet.
Nu is het niet de bedoeling, dat deze strategie volledig door de onderwijzer uitgestippeld wordt. Wel is het noodzakelijk, dat het rooster er nadrukkelijk bijgehaald wordt en dat de leerlingen steeds vanaf het rooster tellen. In de meeste gevallen zal de symmetrie-redenering niet toege-

past worden, maar worden haar- en sproetgroeten tegelijkertijd aan de orde gesteld.
Samenvatting van het doel: systematisch tellen van het aantal groeten met gebruikmaking van de roosterstruktuur, waarbij er mogelijkheden zijn voor het redeneren op grond van symmetrie-overwegingen en het ontdekken van allerlei getalpatronen in het rooster.

doelbeschrijving (2.7)

Toen de vergadering geopend werd, bleek al gauw dat het groeten op de manier van 'ik heb meer.....' niet prettig gevonden werd.
Het staat zo opschepperig en de postbode moest altijd z'n mond houden. Ook niet leuk! Hij zei dan ook dat iedereen mogelijkheden tot groeten moest hebben en hij stelde voor om te groeten met 'ik heb evenveel..... als jij!'
De nadruk komt zodoende te liggen op de overeenkomsten en niet op de verschillen. Nou, dat leek iedereen heel leuk.
Men ging oefenen. Wij ook!

- ▶ *Wat denk je: zou iedereen met deze groetgewoonte tevreden zijn?*
- ▶ *Bespreek dit met elkaar.*
- ▶ *Hoeveel groeten worden er nu in de vergadering uitgebracht?*
- ▶ *Hoeveel keer groet ieder?*

In deze laatste problemen hebben we met een telproblematiek te doen, die kwa werkwijze sterke overeenkomsten vertoont met het vorige telprobleem. Ook nu biedt een systematische aanpak op basis van het rooster mogelijkheden voor een elegante oplossing. Iedere sproeteldammer blijkt vier keer te groeten: 'ik heb evenveel ..... als jij'. In totaal wordt er dus 9 x 4 = 36 keer gegroet.
Op het rooster ziet het er als volgt uit: iedere sproeteldammer groet degene die in z'n laan of straat woont en dat zijn er voor alle gevallen vier.
Samenvatting van het doel: gelegenheid geven om hetgeen in het voorgaande geleerd is over het systematisch tellen op een rooster, toe te passen op een analoog geval.

doelbeschrijving (2.8)

Vanaf die vergaderdag werd er een 'evenveeldag' ingesteld: een soort nationale feestdag. En er werd ook een volkslied gemaakt, dat op deze gebeurtenis betrekking had. Het staat gebeiteld in de muur van het gemeentehuis en ziet er als volgt uit:

[11|12] [21|200|120|12|202|12|110|11|1|112|201]
[100|102] [22|12|2] [12|211|12|112|211|12|12|110] [22|1|200|12|112] [1|110|201] [101|221]
[100|102] [22|12|2] [12|211|12|112|211|12|12|110] [201|121|200|120|12|112] [1|110|201] [101|221]
[12|112] [101|221] [1|110|201] [100|102]
[212|1|202] [222|221|112] [212|221] [2|110|221]
[100|102] [22|12|2] [12|211|12|112|211|12|12|110] [1|110|201] [101|221]

In sproeteldam gebruiken ze maar drie cijfers 0, 1, 2 en daarmee rekenen en schrijven ze. 't Is Wonderbaarlijk!
Op school leren ze daar: 1 + 1 = 2 en 2 + 1 = 10. Hoe bestaat het!

De tekst van het volkslied, dat precies uit 100 'letters' bestaat (in sproeteldam zegt men dat het er 10201 zijn!) kan ik helaas niet ontraadselen. Misschien komt er ooit iemand achter. Zo niet, dan blijft het een raadsel. Wat we echter wel weten is, dat de sproeteldammers vanaf 'evenveeldag' nog lang en gelukkig leefden. Zo zie je maar weer dat 'ik heb meer dan..... ' niet altijd gelukkig maakt.

▶ *Proberen jullie eens het volkslied van sproeteldam te ontcijferen.*

De tekst van het volkslied luidt als volgt:

'de groeteldans
ik heb evenveel haren als jij
ik heb evenveel sproeten als jij
en jij als ik
wat zijn wij blij
ik heb evenveel als jij.'

De letters zijn afgebeeld op het rangnummer van het alfabet. De getallen zijn genoteerd in het drietallig stelsel. Indien de leerlingen het drietallig stelsel niet kennen, kunnen ze de tekst ontcijferen volgens de gedachtengang: a = 1; b = 2; c = 3, maar de 'drie' hebben ze niet, dus zal c wel 10 zijn; d = 11; e = 12; f = 13, maar de 'dertien' hebben ze niet, dus zal f wel 20 zijn, enz.
Het is echter geen enkel bezwaar om het probleem voorlopig onopgelost te laten liggen. Als de leerlingen omstreeks het begin van het vijfde leerjaar talstelsels krijgen, in het kader van een terugblik op het positiestelsel, kan het probleem van het schrijven en rekenen in het drietallig stelsel, zoals dat in sproeteldam gebeurde, weer opgevat worden. Wellicht is er al eerder een gelegenheid – medio klas vier – om het probleem nogmaals ter sprake te brengen, namelijk in het kader van het geheimschrift en het daarmee samenhangende letterfrekwentie-onderzoek. In ons geval wordt dan ontdekt dat 12 waarschijnlijk een 'e' zal zijn, de 'd' is dan ook snel gevonden, 'evenveel' ligt voor het grijpen, enz.
Kortom, er is een diversiteit van strategieën om de tekst te ontcijferen. Het ligt in de lijn van 'sproeteldam' om het einde van het verhaal volledig af te stemmen op hetgeen de leerlingen voorstellen en ontdekken. Het is in ieder geval niet de bedoeling om nu het drietallig stelsel te behandelen. Zoals gezegd, zouden we een dergelijke studie pas in de bovenbouw van de basisschool willen plaatsen (dus ongeveer een jaar na sproeteldam).
Samenvatting van het doel: de leerlingen gelegenheid geven om een ordeningsprobleem in de vorm van een geheimschrift te ontcijferen.[7])

kenmerken van de 3^D doelbeschrijvingen (2.9)

De terminologie van de 3^D doelbeschrijvingen vertoont uiteraard verwantschap met de 2^D formulering; zowel leergedrag, aktiviteiten als onderwijsopgaven komen in de beschrijving voor. Kenmerkend voor 3^D doelen is de vermenging van doel en didaktiserende werkzaamheid, waardoor werkvormen, interakties, onderzoeksgegevens en evaluatiepunten, in één doelbeschrijving verwerkt worden. Het geheel is daardoor niet adekwaat van een passend beschrijvingsrecept te voorzien.
In sproeteldam zijn de samenvattende formuleringen in het algemeen in termen van 'gelegenheid geven tot' gesteld. De gedragsformulering in

termen van 'de leerling moet in staat zijn tot', wordt slechts één keer gebruikt en wel aan het eind van (**2.3**):

'iedere leerling moet in staat zijn de sproeteldammers op het rooster te plaatsen, bij een gegeven plaatje de groeten als pijlen te tekenen en te konkluderen, dat bij het ontbreken van een pijl de personen tot dezelfde klasse behoren.'

veelzijdige beschrijving

De wijze van beschrijven hangt ten nauwste samen met de aard van het stuk potentieel onderwijs. In de gevallen waar het om vastgestelde kennis en vaardigheden gaat, zal een meer gesloten formulering kunnen geschieden, maar daar waar het een stuk aktief en gedifferentieerd onderwijs betreft en waar gemikt wordt op het optimaal haalbare nivo en de eigen inbreng van de individuele leerling, zal vaak een terughoudender formulering op z'n plaats zijn. De formulering 'gelegenheid geven tot' geeft naast die terughoudendheid ook uitdrukking aan een zekere openheid en fleksibiliteit met betrekking tot de doelstelling.
In het geval van sproeteldam kan die ruimte aan mogelijkheden verschillend gevuld worden: aan de ene kant met een sterk geprogrammeerd onderwijs, waarin nauwkeurig bepaald is wat de leerling moet doen, kunnen en kennen, en aan de andere kant een tamelijk open aanpak, waarin de leerling voor een deel het leertrajekt bepaalt. Mogelijkheden daartoe zijn er bij de plaatsbepaling van de inwoners, de naamgeving van lanen en straten, het ontwerpen van opsporingsproblemen, het instellen van nieuwe groetafspraken en het bedenken van een geheimschrift. De onderwijsgevende zal zelf de beste aanpak moeten kiezen. Deze keuze is echter niet vrijblijvend. Integendeel, het is een hele opgave om het onderwijskundig handelen in overeenstemming te brengen met de grondideeën die in de 3^D doelbeschrijving doorklinken.
Het belang van 3^D beschrijvingen, die door hun uitvoerigheid slechts eksemplarisch toegepast kunnen worden, schuilt vooral in het feit dat de basisopvattingen van het onderwijs erin vervat liggen. Het beschrijven van doelen kan dan ook niet alleen opgevat worden als een technische kwestie, die zich koncentreert op zaken als konkretiseren, formuleren en inventariseren en die apart gesteld wordt van het levende onderwijs, omdat dit als het verwarren van doel en middel aangemerkt zou worden.
In het voorgaande hebben we reeds beschreven dat een dergelijke scheiding van doel en middel, leidend tot een vooropstelling van het doel, noch in de leerplanontwikkeling, noch in de onderwijspraktijk aanspraak kan maken op algemene geldigheid en dat binnen een bepaalde filosofie een dergelijke vooropstelling van vastgestelde onderwijsleerdoelen soms zelfs ongewenst is.

veelzijdige evaluatie

In sproeteldam is de onderwijsleersituatie niet open, maar er is wel een behoorlijke speelruimte. Dit maakt het evalueren van het onderwijs er niet eenvoudiger op. De gesloten doelformulering – zoals bijvoorbeeld in de samenvatting aan het eind van (**2.3**) – geeft duidelijke indikaties voor de evaluatie.
Bij de meer open formuleringen is dat niet het geval, al zijn ook hierin tal van aanwijzingen te vinden voor het gedrag, dat de leerlingen kunnen demonstreren en voor het gedrag, dat de leraar zichzelf tot opgave kan stellen om het onderwijsleerproces enigermate naar waarde te schatten. We doelen hierbij op aanwijzingen over verschillende nivo's van verwerking, over kernvragen die op een gegeven moment gesteld kunnen wor-

den, over te verwachten uitkomsten van het onderwijs, de houding van de leerlingen in de verschillende probleemsituaties, de emotionele betrokkenheid en de ambitie waarmee gewerkt wordt.
Zo'n evaluatie, waarin het onderwijsleerproces in z'n totale kompleksiteit beoordeeld wordt, komt vooral goed tot z'n recht in een konfrontatie van verschillende evaluatie-impressies, waaronder die van leraar en leerling. Wij hebben al eerder gesteld dat een dergelijke procesevaluatie niet alleen met de klassieke metoden van de psychologische effektmeting zal kunnen geschieden.

▶ SPROETELDAM TWEEDIMENSIONAAL (3)

beter overzicht

In het voorgaande werden de doelstellingen beschreven vanuit een standpunt dat dicht bij het onderwijs gelegen is. Bij de tweedimensionale beschouwing van sproeteldam gaan we op grotere afstand van de konkrete onderwijsleersituatie staan, waardoor we een beter overzicht kunnen krijgen van de interne struktuur van sproeteldam, de direkte omgeving van die plaats en de bredere inbedding ervan in het totale gebied van een schoolwerkplan. De terminologie die gebruikt wordt, zal vanwege het overzichtskarakter gesteld zijn in globale aanduidingen van leerstofonderwerpen, aktiviteiten en onderwijsopgaven.

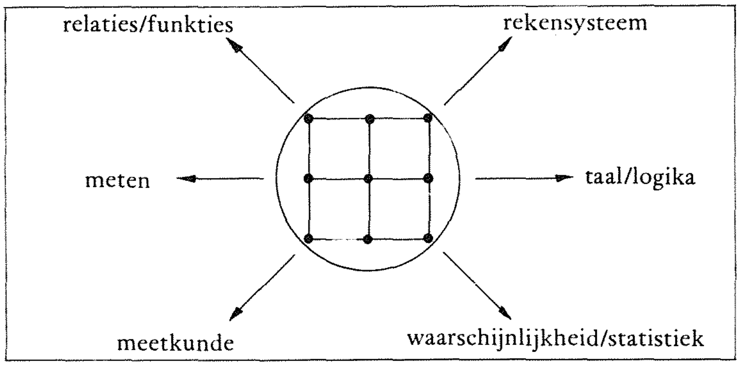
interne samenhang

We analyseren allereerst de interne samenhang. Het eerste deel van sproeteldam bevat een kombinatorisch probleem, waarvan de oplossingsstrategie steun verleent aan de opgave van het tweezijdig ordenen in (**2.2**): één sproet wordt gekombineerd met de drie mogelijkheden van de haren in één straat of laan. Worden de doelstellingen van kombinatoriek en tweezijdig ordenen los van elkaar beschouwd – wat mogelijk is – dan krijgt hun inhoud een andere waarde dan wanneer ze in samenhang met elkaar bekeken worden. De systematische aanpak van (**2.1**), vindt in (**2.2**) en in het vervolg zijn voltooiing. Dit geldt ook voor andere doelen, zoals bijvoorbeeld voor de koördinatenaanduiding van de adressen van de sproeteldammers en de ontwikkelde pijlentaal. Steeds wordt het voorgaande doel in het volgende opgenomen en ontstaan er allerlei subtiele verbanden.
Vergelijken we het totaal van de doelen van sproeteldam met de vier onderwerpen – globale leerstofaanduidingen – die als startpunt voor het ontwerp dienden, dan valt allereerst op dat er nieuwe leerstofdoelen aan de oorspronkelijke opzet toegevoegd zijn (koördinaten, kombinatoriek, talstelsels) en dat oude onderwerpen verdwenen zijn (tijdsindelingen, gewichtsmaten).
Van de nieuwe onderwerpen kan gezegd worden, dat ze zeker binnen een wijdere gezichtskring lagen en over de onderwerpen, die nu buiten het ontwerp bleven, kan opgemerkt worden dat ze in een ander verband aan de orde gesteld kunnen worden. Vervolgens is het opmerkelijk dat redeneer- en telproblemen geïntegreerd in het pakket voorkomen, wat in het geheel niet voorzien kon worden. Maar het meest in het oog springend zijn de hogere leerdoelen, die blijkbaar in de genoemde onderwerpen zitten, zoals het bewijzen, de ontwikkeling van een wiskundetaal, de symmetrie-redeneringen, de ordeningsstrategieën, het gebruikmaken van het rooster als denkmodel. Was er in de aanvangsfase dus sprake van een verzameling losse leerstofdoelen, in sproeteldam is dit ontwikkeld tot

een gestruktureerd geheel van doelen, waarin de waarde van ieder doel op zich, medebepaald wordt door het geheel. Met andere woorden: vanuit lokaal standpunt bezien, is er een interne samenhang ontwikkeld.

op grotere afstand

Gaan we op wat grotere afstand van sproeteldam staan, dan zien we een tematisch verband met onze alledaagse realiteit en allerlei matematische samenhangen met andere onderwerpen, die in een schoolwerkplan kunnen voorkomen.
Het tematische verband kan gelegd worden door een aantal probleemstellingen van sproeteldam naar onze eigen omgeving te transporteren. In plaats van de vraag over het aantal inwoners van sproeteldam, komt nu de vraag naar het aantal inwoners van onze eigen stad of dorp. Waar kunnen we de gewenste informatie vandaan halen? Is het mogelijk om een ruwe schatting te maken met behulp van het telefoonboek? Zijn er andere manieren om het inwoneraantal te bepalen?
Ook de vraagstelling uit (**2.2**) over het adres van de sproeteldammers kan op onszelf betrokken worden. Hoe is onze adresaanduiding? Wanneer is zo'n adres onvolledig en moeilijk te achterhalen? Als we onbekend zijn in een stad, kunnen we dan toch een bepaald adres vinden? Wat betekenen de koördinaten op een stadskaart? Wat is het verschil met de sproeteldamse koördinatenaanduiding?
De kwestie van het groeten uit (**2.3**) laat zich analoog stellen. Op welke wijze groeten wij? Welke spelregels hanteren wij? Waarom doen wij dat op deze wijze? Groeten ze in andere landen anders?[8]) Wordt ons groeten vooral gemotiveerd door 'ik heb meer dan' of is 'ik heb evenveel als' het meest wezenlijk? Stel je eens voor, dat wij in onze klas de groetregel van 'ik heb meer haren dan jij' zouden instellen, voor welke moeilijkheden zouden we dan komen te staan? Is er een oplossing voor dit groetprobleem te vinden?
Uit het voorgaande blijkt dus, dat de sproeteldamse problematiek als aanzet kan dienen tot een bezinning op onze eigen realiteit. De meest opvallende trekken van het nieuwe tema zijn de openheid van de probleemstellingen, de mogelijkheden tot uitbouw naar een projekt en de relatieve onbepaaldheid van het leertrajekt. Meer nog dan in sproeteldam kan men zich door de reakties en produkties van de leerlingen laten leiden.



Al met al blijken er in sproeteldam en omgeving nogal wat aktiviteiten te kunnen plaatsvinden, die tot de eerder genoemde leerstofgebieden behoren.

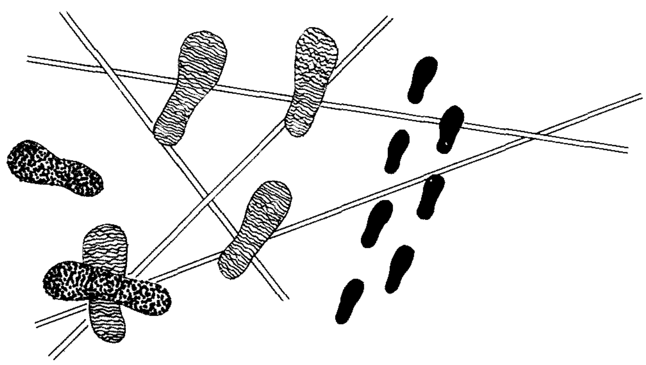
het redeneeraspekt

Van de wezenlijke onderdelen van sproeteldam hebben we de kombinatorische telproblematiek in het eerste hoofdstuk reeds longitudinaal beschouwd.
We beperken ons hier tot het volgen van de vertikale lijn van een tweede wezenlijk onderdeel van het pakket, namelijk het redeneeraspekt. We doen dit aan de hand van twee probleembatterijen.
De ene heeft betrekking op de *'meer dan'* problematiek; men kan ook zeggen: op het ordenen of op orderelaties.
De andere probleemrij is gefundeerd in de *'evenveel als'* betrekkingen, c.q. het klassificeren en de ekwivalentie-relaties. En dat zijn, wat het logische deel betreft, juist de essentiële onderdelen van sproeteldam.[9])

'meer dan' probleembatterij

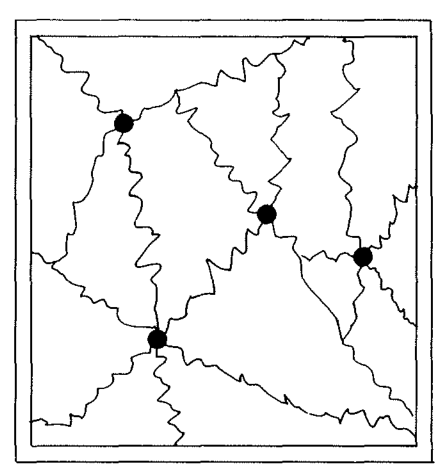
Het eerste kwartet!

▸ *Een hoogleraar en z'n kleinzoon maken een wandeling door de sneeuw. Bij een kruispunt zien ze vier fietssporen. Eerst wandelen ze er overheen, maar later keren ze terug om uit te zoeken in welke volgorde de fietsers passeerden.*

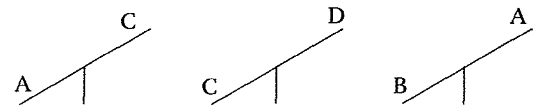


Bepaal het oorspronkelijke patroon.

▸ *In de volgende tekening zien we een ruit, waarin vier kogelgaten zitten.*
Bepaal de volgorde van de inslagen.



▶ *Rangschik vier personen A, B, C en D naar zwaarte, op grond van de volgende wip-wapstanden:*



▶ *In groot sproeteldam (bijvoorbeeld in een 10- bij 10-rooster) heeft A meer haren dan C, B meer dan A en C meer dan D.*
Rangschik A, B, C en D naar het aantal haren.

vertikale lijn

Enkele opmerkingen over deze vier isomorfe ordeningsproblemen. Om te beginnen met het eerste probleem: we kunnen de sporen een naam geven, bijvoorbeeld a, b, c en d, en de relatie 'a ligt voor b' als $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ noteren. De sporen zijn als volgt gerelateerd: $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$. Ze kunnen daarna in één schema geplaatst worden: $\begin{pmatrix}b\\a\\c\\d\end{pmatrix}$.
Door op deze wijze de betrekkingen te symboliseren en te visualiseren wordt de transiviteit van de orderelatie in de lineaire ordening opgesloten.
Bekijken we de vier problemen in hun samenhang tot elkaar nog eens in omgekeerde volgorde, dan zien we dat dezelfde matematische problematiek steeds abstrakter ingekleed wordt: in het laatste probleem kunnen we kwantitief ordenen, zoals in sproeteldam. Het voorlaatste geval is te schematiseren door bijvoorbeeld de personen door knikkers van verschillende grootte voor te stellen, waardoor de oplossing zich zonder redeneren aanbiedt. In het tweede geval 'zien' we de oplossing, maar het is een beredeneerd zien. In het eerste geval moeten we symboliseren en redeneren, waarbij we al dan niet van de lineaire ordening gebruik kunnen maken. Ziehier een vertikale lijn, die vanuit één sproeteldams grondprobleem naar het voortgezet wiskundeonderwijs getrokken kan worden. We hadden ook nog verder terug kunnen gaan. 'Primitiever' dan het sproeteldamse probleem is bijvoorbeeld het ordenen van lineaire objekten (stokjes, en dergelijke) op grond van handelen en waarnemen. In de leer- en ontwikkelingspsychologie is aan dit laatste probleem veel aandacht besteed in verband met de transiviteitseigenschap. De onderzoeksresultaten zijn vaak strijdig.[10)]

'evenveel als' probleembatterij

Nu een voorbeeld van een 'evenveel als' probleembatterij!

▶ *A, B, C en D zijn vier eilanden. Tussen die eilanden zijn een aantal vliegroetes (vice-versa). Een roete hoeft niet rechtstreeks te zijn. Gegevens: A is bereikbaar vanuit C; D is niet bereikbaar vanuit B; B is bereikbaar vanuit A.*
De vraag is of D bereikbaar is vanuit C.[11)]

- *Van vier personen A, B, C en D is gegeven: A kan kommuniceren met C; D kan niet kommuniceren met B; B kan kommuniceren met A.*
  Dit kommuniceren hoeft niet rechtstreeks te gaan, maar kan indirekt via een persoon die als tolk optreedt.
  De vraag is of D met C kan kommuniceren.

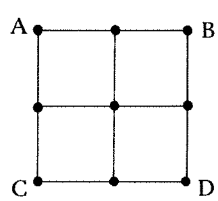
- *Van een groepje van vier jongens is het volgende gegeven: A is broer van C; D is géén broer van B; B is broer van A.*
  De vraag is of D een broer van C is.

- *In groot-sproeteldam wordt gegroet volgens de regel 'ik heb evenveel haren als jij'. Van vier sproeteldammers is gegeven: A groet C; D groet B niet; B groet A.*
  De vraag is nu of D een groet naar C brengt.[12])

bereikbaarheid

Ook deze vier problemen zijn isomorf: in alle gevallen behoren A, B en C tot één (ekwivalentie-)klasse.
D valt er buiten en staat dus niet in relatie met C. Immers, zou dat wel het geval zijn, dan zou D (via 'overstappen') ook in relatie met B moeten staan en dat is in tegenspraak met het gegeven. In de meeste 'evenveel' gevallen kan dit onmiddellijk ingezien worden, maar in de eerste twee problemen niet.
Met name het eilandenprobleem levert voor vrijwel iedereen onoverkomelijke moeilijkheden op. En dat is niet direkt te verklaren uit de onderzoeksgegevens over het logisch denken bij volwassenen.[13])
Zeker is van invloed dat dergelijke onderzoekingen betrekking hebben op het trekken van konklusies uit gegeven premissen, terwijl in het eilandenprobleem de premissen zelf 'gezocht' moeten worden. Belangrijker lijkt echter de omstandigheid, dat het probleem niet op verschillende nivo's opgelost kan worden. Anders gezegd: niet iedere zoeker kan aktief en gedifferentieerd aan dit probleem werken.
Dit is wel het geval als we A, B, C en D op de vier hoekpunten van sproeteldam stellen en de kwestie van de bereikbaarheid (vice-versa; al dan niet rechtstreeks) op het wegennet uitvoeren. Bereikbaarheid betekent dan via een roete op het rooster in busverbinding met elkaar staan. Nu kan er wèl wat geprobeerd en gekontroleerd worden op verschillend nivo.

- *A is per bus bereikbaar vanuit C.*
  D is niet vanuit B per bus bereikbaar.
  B is per bus bereikbaar vanuit A.



Is D per bus bereikbaar vanuit C?

De roetes lopen over het wegennet en bij ieder roosterpunt dat gepasseerd wordt, is een bushalte!

Ruimer gesteld: redeneerproblemen van een hoog heuristisch gehalte zijn in het algemeen niet geschikt om in ruime mate gesteld te worden. Meer open problemen die op verschillend nivo opgelost kunnen worden, verdienen de voorkeur. We zullen er dan ook voor moeten waken om met het vervolg van sproeteldam in het dorre gebied van de logika te belanden.
In het voorgaande is er van de vele vertikale lijnen, die vanaf sproeteldam te tekenen zijn — denk aan koördinaten, pijlentaal, talstelsels — slechts één doorgetrokken. Aan de hand van enkele voorbeelden hebben we laten zien dat sproeteldam in een wijder gebied van redeneerproblemen geplaatst kan worden. Deze problemen zullen echter op hun beurt weer in een pakket van geïntegreerde aktiviteiten gepast moeten worden. En zo rijgt zich de ene onderwijsopgave aan de andere.

▶ SPROETELDAM ÉÉNDIMENSIONAAL (4)

algemene doelstellingen

In de doelbeschrijvingen van de lessenreeks over sproeteldam, is de relatie met de algemene doelstellingen van het wiskundeonderwijs duidelijk zichtbaar geworden. We hebben er in het voorgaande herhaaldelijk op gewezen en volstaan nu met een overzicht:
– het rekenaspekt verschijnt in de vorm van het ordenend tellen bij het kombinatorisch probleem van (**2.1**), in de systematische telproblemen op het rooster en in het geheimschrift;
– het taalaspekt wordt vooral verzorgd bij de naamgeving van de lanen en straten, en bij de ontwikkeling van de pijlentaal in (**2.3**);
– het praktische nut en de toepasbaarheid vertonen zich op langere termijn in het gebruik van de koördinaten en de pijlentaal, die zowel binnen als buiten de wiskunde een toepassingsgebied hebben;
– het struktuuraspekt is in de tel- en groetproblemen aanwezig, waarbij het gaat om het ontdekken van regelmatigheden in de roosterstruktuur en de pijlpatronen;
– het metodisch aspekt komt in de systematische werkwijze, de symmetrie-overwegingen, en de deduktieve en induktieve redeneringen tot uitdrukking;
– de dynamiek van het denken krijgt in verschillende delen van het sproeteldampakket de ruimte en geeft mogelijkheden voor heuristische ervaringen; we denken hierbij aan: het bewijs van het bestaan van negen sproeteldammers, de roosterordening, de (on-)mogelijkheden van bepaalde groetpatronen, het transitiviteitsbeginsel, de symmetrieredeneringen en het geheimschrift;
– het attitude aspekt kan in de gestruktureerde wereld van sproeteldam geraakt worden: er zijn mogelijkheden voor initiatief, inventiviteit en emotionele betrokkenheid.

Er is echter geen waarborg dat deze aspekten optimaal verzorgd worden en dit geldt eveneens voor de algemeen integrale doelen, i.c. de persoonlijke, sociale, voorbereidende en praktische waarden.
De praktisch-didaktische inrichting is bepalend voor de realisering van integraal waardevol wiskundeonderwijs. In z'n algemeenheid kan echter wel gesteld worden, dat sproeteldam binnen de algemene doelstellingen past en in overeenstemming met de uitgangspunten van het wiskundeonderwijs te brengen is: de leerlingen werken aktief en gedifferentieerd

in een leerstofgebied, dat vertikaal gepland is en waarin fundamentele matematische aspekten verborgen liggen.
De uitgangspunten van aktiviteit en gedifferentieerdheid kwamen vooral tot uitdrukking in de 3^D doelbeschrijving, het principe van de vertikale planning in de 2^D beschouwing en de vijf matematische grondregels in het 1^D overzicht.

BESLUIT (5)

toenemende organisatie

De funktie van het konkretiseren van doelen, ten aanzien van het ontwikkelen van onderwijsleerpakketten, kan verschillen.
De wijze waarop wiskobas een leerplan ontwikkelt, wordt zowel op mikro-, meso-, als makronivo, niet zozeer gekenmerkt door de progressieve konkretisering van doelen, als wel door de toenemende organisatie ervan. Wat zich op mikronivo bij sproeteldam voordeed, ziet men ook op meso- en makronivo optreden: de losse doelen worden eerst lokaal georganiseerd en daarna meer globaal geïntegreerd in een groter geheel.[14])
Deze progressieve integratie van doelen wordt bereikt door in een vroeg stadium onderwijsleersituaties te ontwikkelen, waarna achteraf (regressief) de doelen konkreet geduid kunnen worden.
De beschrijving van de doelen vond in dit hoofdstuk plaats vanaf een standpunt, dat heel dicht bij het onderwijs gelegen is en werd aangeduid als 3^D doelbeschrijving. Het onderwijsleergedrag in relatie tot leerstof werd hierin uitgebreid, in een didaktische kontekst, beschreven. Soms kwamen daarbij duidelijke doelen naar voren, in andere gevallen bleven ze impliciet, maar wel herkenbaar.
De 3^D beschrijving werd vervolgens omkleed met een 2^D beschouwing, waarin het onderwijsleerpakket in groter verband en met afzien van de didaktische kontekst bekeken werd.
De hogere, meer algemene doelen die in de sproeteldamse aktiviteiten besloten liggen, werden tenslotte nog eens beschouwd vanaf een 1^D zicht. En dat maakte het overzicht van de doelstellingenproblematiek aan de hand van één eksemplarisch geval *voorlopig kompleet.*

richtingen

Aan de hand van de 3^D beschrijving van sproeteldam kan de kwestie van de basisopvattingen nog verdergaand verhelderd worden. We moeten ons hier tot enkele opmerkingen beperken.
Vergelijken we de in (2) beschreven aanpak van relaties (redeneren) met de wijze waarop dit onderwerp uitgewerkt is in de drie richtingen, die in de inleiding genoemd zijn – de aritmetische, de strukturele en de empirische richting –, dan zijn enkele verschillen nogal opvallend:
- het gaat hier niet in de eerste plaats om het aanleren van een aantal vaardigheden, maar het leerproces staat centraal; in zoverre verschilt de aanpak met de aritmetische benadering;[15])
- de sproeteldamse benadering past niet binnen een strakke vertikale opbouw, die start met het vrije spel, vervolgt met het opsporen van gemeenschappelijke strukturen en eigenschappen, en eindigt in de konstruktie van een formeel systeem, waarin de deduktieve werkwijze gehanteerd wordt om allerlei stellingen uit grondstellingen af te leiden; in zoverre verschilt de aanpak met de strukturele benadering;[16])
- de redeneerproblemen beperken zich niet tot het ordenen en klassi-

ficeren van objekten naar lengte, gewicht, en dergelijke; wat dit betreft verschilt de aanpak met de werkwijze die in de empirische richting gebruikelijk is.[17])

'wereldje' Op zichzelf beschouwd is onze werkwijze goed gekarakteriseerd door het 'wereldje'. Zulke wereldjes kunnen in het leven van alledag gesitueerd zijn – in het spel, de sport, de krant, de winkel –. Ze kunnen ook in een gedeeltelijk voorgestruktureerde realiteit van een verhaal liggen, zoals bij sproeteldam het geval is en waaraan wij een driedimensionale doelbeschrijving gewijd hebben.[18])

noten

1) Zie:
Corte, E. de: Onderwijsdoelstellingen (leuven 1973).
We citeren:
'Zoals zo dadelijk zal blijken, zijn de formulering van leerdoelen en het ontwikkelen van onderwijsleersituaties in werkelijkheid niet scherp van elkaar te scheiden en komt men geleidelijk van de ene in de andere fase terecht.' (pag.47)
Hoewel De Corte de progressieve konkretisering niet strikt lineair opvat, benadrukt hij naar onze mening te weinig het belang van basisopvattingen en algemene doelen. Hij legt te zeer het aksent op geleidelijkheid in de doelontwikkeling en te weinig op de samenhang van de doelen. De voorbeelden (op pag. 70) in zijn boek zijn losse doelen, en wel in twee betekenissen: onderling houden ze geen verband met konkrete onderwijsleersituaties en tevens ontbreekt de relatie met algemene doelen. Men kan de 'progressieven' en 'regressieven' niet zozeer herkennen aan hun uitspraken, als wel aan de konkrete voorbeelden die ze geven. De voorbeelden van doelstellingen van de progressieven kenmerken zich vrijwel altijd door de genoemde 'losheid'. Doelstellingen die vanuit onderwijsleersituaties geformuleerd zijn, kenmerken zich door samenhang. Zie het voorbeeld sproeteldam en vergelijk deze wijze van formuleren met wat De Corte en Janssens doen in hun 'Praktische leidraad voor het formuleren van leerdoelen' (leuven 1974). We zien dan totaal verschillende visies op het onderwijs achter de verschillende formuleringen. Of meer vanaf onze kant gezien: we treffen geen visie op taalonderwijs aan bij De Corte. Vergelijk, wat de taal betreft, de uitwerking van De Corte en Janssens met die van Braakhekke c.s. in: 'Taaldidaktiek aan de basis' (groningen 1974).

2) Deze opsomming komt uit een raamplan voor leerjaar 3, dat als startpunt diende voor de ontwikkeling van het integratieplan.

3) Zie in verband met deze eisen het klassieke werk:
Mager, R.R.: Het bepalen van doelstellingen voor geprogrammeerde instructie (vertaling van D. Zeldenrust, alphen aan de rijn 1966).

4) De ontwerpgroep bestond uit enkele medewerkers van het iowo en de begeleider van de ontwerpschoolaktiviteiten A. Dekker.

5) Aan de ontwikkeling werkten mee: een groep leerlingen van de Dr. W. Drees-school te arnhem, enkele medewerkers van de ontwerpschool, een aantal PA-studenten en leden van de zogenaamde responsgroep van de PA.

6) De indeling in deze fasen is van Wallis, en is vooral bekend geworden door:
Hadamard, J.: The psychology of invention in the mathematical field (new york 1954).

7) Zie bijvoorbeeld het kinderboek:
Waechter, F.K. en Eilert, B.: De kroondieven (amsterdam 1974, pag. 62).

8) Zie over groeten de kultuurfilosoof:
Ortega Y Gasset, J.: De mens en de mensen (den haag 1958, pag. 195 e.v.).

9) Een meer uitgebreide bespreking vinden we in het heroriënteringsblok 5 'Sproeteldam' (iowo-publikatie, utrecht 1975).

10) Zie bijvoorbeeld:
Bryant, P.: Perception and Understanding in Young Children. An experimental approach (london 1974, pag. 18 e.v.).

Johnson, M.L.: The effects of instruction on length relations, on the classification, variation and transitivity performances of first- en second-grade children (in 'Journal for Research in Mathematics Education' 5, pag. 115-126).
Naar onze mening binden Bryant en Johnson lineair ordenen en transiviteit te veel aan elkaar.
Zie verder:
Inhelder, B. en Piaget, J.: The early growth of logic in the child. Classification and Seriation (london 1964).
Bruner, J. (e.a.): Studies in Cognitive Growth (new york 1966).
Een uitgebreide literatuurlijst kan men aantreffen in:
Beilin, H.: The training and acquisition of logical operations (in 'Piagetian Cognitive-Development Research and Mathematical Education' – Rosskopf, M.e.a. (ed.) – washington 1971, pag. 81-125).
Steiner, G.: Mathematik als Denkerziehung (stuttgart 1973).
Koster, K.B.: Piaget's bijdrage voor de ontwikkeling van leerplannen voor de basisschool (groningen 1974).

11) Over dit uit een amerikaans tijdschrift afkomstige probleem kan men meer vinden bij:
Schagen, C. van: Experiment met het eilandenprobleem (in 'Euclides' 48, pag. 334-338).

12) Een analyse van de probleembatterijen leert, dat we moeten oppassen om de lineaire ordening met behulp van het transitiviteitsbeginsel te verklaren. We zouden de kwestie ook kunnen omkeren: de transitiviteit zit als het ware in de lineaire ordening gebakken. De gegevens van Johnson en Bryant (zie noot 10) spreken o.i. voor de stelling dat lineair ordenen 'primitiever' is dan het toepassen van het transitiviteitsbeginsel.
Piaget konstateert met recht dat de transitiviteit hier in een 'pre-inference' vorm (zie noot 10) verkeert.
Hoe dan ook, het blijkt dat het begrip 'transitiviteit' niet toereikend is om de inhoudelijke verschillen tussen de verschillende aktiviteiten te beschrijven. Zou men bij de ordeningsbatterij zeggen: er is sprake van het toepassen van het transitiviteitsbeginsel bij ekwivalentie-relaties, dan geeft dat slechts een formele beschrijving van de overeenkomst. De wezenlijke psychologische verschillen kunnen pas duidelijk gemaakt worden, indien er omschrijvingen bij gehaald worden als handelen, schematiseren en symboliseren, waarmee we de verschillende representatievormen van het basisprobleem weergeven.
De zojuist beschreven problematiek in het kader van ekwivalentie-relaties heeft een veel bredere basis en geldt voor de begripsvorming in het algemeen. Formeel gezien kan begripsvorming omschreven worden in termen van ekwivalentie-relaties. Maar in een dergelijke beschrijving ontbreekt de psychologisch-didaktische kant. Ook hier komt de noodzaak naar voren om begrippen als handelen, verbaliseren, en dergelijke, in de beschrijving van het begripsvormingsproces te gebruiken. Kortom, de psychologisch-didaktische analyse van de problemenbatterij kan zich uitstrekken naar fundamenteel matematisch-didaktische beschouwingen over begripsvorming. Vooral Bruner heeft in dit opzicht belangrijke onderzoekingen gedaan (zie noot 10).
Zie in verband met begripsvorming:
Skemp, R.R.: Wiskundig denken (utrecht 1973).
Dormolen, J. van: Didactiek van de wiskunde (utrecht 1974).

13) O'Brien, T.C. (e.a.): Logical Thinking, Language and Context (in 'Educational Studies in Mathematics' 4 pag. 201-220).
O'Brien, T.C.: Logical Thinking in Adolescents (in 'Educational Studies in Mathematics' 4, pag. 401-429).
Op grond van de gegevens uit het laatste artikel zou men verwachten dat – globaal geschat – zo'n 40% van de volwassenen het eilandenprobleem kunnen oplossen. In werkelijkheid bedraagt het percentage waarschijnlijk – we hebben geen eksakte gegevens maar Van Schagen's cijfers spreken voor zichzelf – beneden de 10 en misschien zelfs beneden de 5.

14) Op mesonivo bij de breuken: eerst hadden de ideeën nog geen verbinding met andere onderwerpen (toepassingen), de tweede fase resulteerde in een plaatselijk geordend geheel van het stadje 'breukelerdam' (zie Wiskobas-Bulletin jaargang 3,

pag. 391-417) en nu wordt er naar gestreefd om de breukelerdamse aktiviteiten meer te spreiden en met andere onderwerpen te verbinden. Dus: los, lokaal, totaal gestruktureerd.

Op makronivo geldt hetzelfde. Eerst (anno 1970) hadden we een katalogus van enkele honderden losse doelen (intern gepubliceerd onder de naam 'Oriëntatiepunt' I en II), toen (anno 1973) een lokaal georganiseerde verzameling doelen met betrekking tot relatief nieuwe onderwerpen (gepubliceerd als 'Basboeken' voor de heroriënteringskursussen en in 'Matematika' – beide iowo-publikaties) en tenslotte (anno 1976) een min of meer totaal georganiseerd integratieplan. En ook hier weer: los, lokaal georganiseerd, totaal gestruktureerd.

We zouden dus beter over progressieve strukturering dan over progressieve konkretisering kunnen spreken.

[15]) Zie:
Scandura, J.H.: Mathematics; concrete behavioral foundations (new york 1971, pag. 67 e.v.).

[16]) Zie:
Dienes, Z.P.: De zes stadia in een wiskundig leerproces ('s hertogenbosch 1973, pag. 48-59).

[17]) Zie:
Biggs, E.E. en MacLean, J.R.: Freedom to learn. An Active Learning Approach to Mathematics (ontario 1969, pag. 160).

[18]) Bij doelformulering komt de nadruk te liggen op de verschijningsvormen van de wiskunde in de realiteit. Pas na een fundamentele analyse van een bepaald onderwerp – zoals bijvoorbeeld relaties – gaat men over tot de konstruktie van onderwijsleerpakketten. Op deze kwestie van de fundamentele analyse zijn we in het eerste deel van deze publikatie ingegaan.
Zie voor een verdergaande beschouwing:
Freudenthal, H.: Lernzielfindung im Mathematikunterricht (in 'Zeitschrift für Pädagogik' jaargang 20, pag. 719-739).

deel 3

overzicht en doel-stellingname

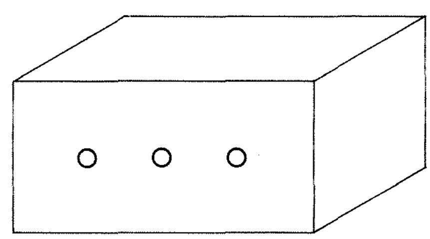
Dit deel, dat slechts uit hoofdstuk 6 bestaat, is in feite onvoltooid. Allereerst wordt een globaal overzicht gegeven van de voorgaande delen en wordt nader ingegaan op de relatie tussen basisopvattingen en doelstellingen.
Vervolgens wordt de lezer uitgenodigd tot doel-stellingname.

6 overzicht en doel-stellingname

▶ OVERZICHT (1)

Antoine de Saint-Exupéry vertelt in zijn boek 'De kleine prins' het volgende:

'Ik woon erg klein. Ik heb 'n schaap nodig. Teken nou een schaap voor me'. Toen tekende ik het dan maar. Hij bekeek het aandachtig en zei: 'Nee, dat schaap is nu al zo ziek. Maak er nog maar één.'
Ik tekende.
Mijn vriendje lachte vriendelijk en toegefelijk. 'Je ziet toch wel dat dat geen schaap is: 't is een ram, hij heeft horens.'
Nog eens maakte ik mijn tekening over. Maar die werd ook al geweigerd, net als de vorigen. 'Die is te oud. Ik wil een schaap, dat lang blijft leven.'
Toen werd ik ongeduldig, want ik wilde gauw beginnen mijn motor uit elkaar te halen. Ik maakte dit krabbeltje en zei:



'Dit is de kist. Je schaap zit erin.'
Tot mijn verbazing zag ik het gezicht van mijn kleine kunstkritikus stralen.
'Ja, zo wilde ik 't precies hebben.'[1])

kubus De wijze, waarop wij in het voorgaande de doelstellingen van het aanvangs- en vervolgonderwijs getekend hebben, sluit goed aan bij dit verhaal: ook wij waren niet in staat een komplete schets te geven en maakten toen een kubus. De hoekpunten van deze kubus werden gevormd door de matematisch-didaktische basisopvattingen, de ribben door de algemene doelstellingen, de vlakken door de leerstofgebieden, terwijl de inhoud gevuld werd met onderwijsleerpakketten. Daarbij moest de voorstelling vooral niet als matematisch model opgevat worden, omdat de relaties tussen de uitgangspunten, de algemene doelstellingen en de leerstofvlakken, zoals die in de kubus gevisualiseerd zijn, geen reële waarde hebben. Met name het beeld als zouden de basisopvattingen en de algemene doelstellingen de leerstofgebieden onwrikbaar vastleggen, is oppervlakkig en misleidend. Immers, de twaalf algemene doelstellingen van het wiskundeonderwijs liggen ingebed in de basisopvattingen over het onderwijs, waarvan wij acht uitgangspunten van matematisch-didaktsiche aard noemden.
Deze basisopvattingen, die zowel wenselijke als mogelijke aspekten van

het wiskundeonderwijs bevatten, zijn op hun beurt weer te ontleden in ideeën van filosofische, psychologische, didaktische en maatschappelijke aard. Willen we nu de keuze van een leerstofgebied en zijn didaktische vormgeving motiveren, dan kunnen argumenten uit deze sektoren aangedragen worden. De struktuur van het kinderlijk denken, de mogelijkheden voor didaktische verwerking, het praktisch nut, de matematische relevantie, de verbinding met andere vakgebieden, het maatschappelijk belang, de haalbaarheid in de alledaagse schoolpraktijk, en dergelijke, kunnen wat van deze argumenten opleveren. Sommige zijn van normatieve aard – het 'zo en zo behoren te zijn' is essentieel – en ontspruiten aan een bepaalde kijk op de mens, de samenleving en het vak; andere beweegredenen steunen meer op feiten – het 'zo en zo zijn' is wezenlijk – en worden ontleend aan gegevens uit de onderwijspraktijk, de didaktiek, de wiskunde en de psychologie. Juist deze normatieve aspekten kunnen de motivering niet in alle gevallen een objektief – in de zin van 'voor allen geldend' – kriterium voor de keuze van een bepaald stuk onderwijs leveren. Kortom, de betrekkingen tussen de basisopvattingen en de daarop berustende keuzen zijn minder sluitend dan het kubusbeeld, als matematisch model gezien, suggereert.

kiekkas Nee, het kubusbeeld dat óns voor ogen staat, is dat van 'De kleine prins': een open kist, een didaktische kijkdoos.
Onze doelstellingenkubus is een kiekkas, waarmee onderwijstaferelen op hun intentie bekeken kunnen worden: via het speuroog in de (3^D) kast, de openingen in de (2^D) zijvlakken en de kieren in de (1^D) zijkanten.[2])

3^D Het belang van de 3^D beschouwing ligt in de konkreetheid van de doelbeschrijving. De noodzakelijkheid van een zo dicht bij het onderwijs liggende doelbeschrijving kan alleen maar begrepen worden uit de basisideeën over het wiskundeonderwijs, die gestoeld zijn op de opvatting van wiskunde als aktiviteit.
Willen we de 'eis' van de konkreetheid van de doelformulering in overeenstemming met deze aktiviteitsopvatting brengen, dan zal in de beschrijving ook de proceskant van de wiskundige aktiviteit geduid moeten kunnen worden of – zwakker – herkenbaar moeten zijn. En dit leidt naar een doelbeschrijving in een didaktische kontekst, waarin alle komponenten van het onderwijsleerproces betrokken kunnen worden: een 3^D beschrijving.

2^D Het belang van de 2^D beschouwing kan slechts ten dele aan de wens tot konkrete doelbeschrijving ontleend worden. Immers, een doelbeschrijving die losstaat van de didaktische kontekst, kan slechts konkreet zijn voor zover het de opbrengst van het onderwijs, het effekt van het geleerde betreft en niet ten aanzien van de proceskant die tot dat produkt gevoerd heeft en waaraan dat produkt z'n waarde ontleent.
Het belang van de 2^D doelen wordt dan ook medebepaald door de mogelijkheid om doelen globaal te beschrijven en met elkaar in verband te brengen.

1^D De 1^D doelen formuleren – in algemene termen van gedragspatronen en kwaliteiten – belangrijke doelaspekten die steeds in min of meer konkrete gedaante in de méérdimensionale doelen aanwezig zijn; ze zijn samenvattend en abstrakt van aard.
Gemeenschappelijk in alle doelen is, dat zij doordrongen zijn van de basisopvattingen over wiskundeonderwijs, die op hun beurt zijn samen te vatten in de opdracht om wiskunde als aktiviteit te onderwijzen.
Deze opvatting van wiskundeonderwijs heeft uiteraard ook konsekwenties voor de zienswijze op evaluatie. Het pleidooi voor een – eksemplarisch toe te passen – 3^D doelbeschrijving impliceert een dicht bij het onderwijs staande 3^D evaluatie in een didaktische kontekst. Het aksent op de algemene aspekten sluit voorts een 1^D evaluatie-opvatting in, die de waarde van het onderwijs op langere termijn benadrukt.[3])
Konsekwent doorgaande: de nadruk op het belang van de '0^D' basisopvattingen voor het wiskundeonderwijs pleit voor een '0^D' evaluatie van die uitgangspunten.

▶ DOEL-STELLINGNAME (2)

En daarmee zijn we bij de kernvraag van deze publikatie beland:
Wat vindt u ervan?
Bent u het eens met de geschetste basisopvattingen en doelstellingen?
Zegt u net als de kleine prins: ja, zo wilde ik 't precies hebben!?

Wel, wiskobas gelooft niet in zo'n sprookjesachtig einde van haar ontwikkelingsverhaal. Daarom roept ze u bij iedere leerplanpublikatie steeds weer op tot doel-stellingname. Zo ook hier!
Uit deze oproep moet onze keuze voor de 3^D beschrijving van 'sproeteldam' (zie deel 4: wiskundewerk) begrepen worden. Natuurlijk, dit kleine tema leent zich uitstekend voor een overzichtsbeschrijving van de uitgangspunten en doelstellingen. Maar dan hadden we even goed of beter gebruik kunnen maken van wat dichter bij de deur liggende wereldjes als 'waterland', 'over het lange water' en 'aarde'.[4]) De belangrijkste reden echter voor de keuze van sproeteldam is het feit, dat het – met kleine wijzigingen – bruikbaar is voor het hele basis- en voortgezet onderwijs en tevens, dat het diskutabel is. De mogelijkheid is dus gekreëerd om de doelstellingname op een brede gemeenschappelijke ervaringsbasis te plaatsen.
De diskussie over het wiskundeonderwijs kan – al dan niet via sproeteldam – diverse kanten uitgaan: naar de basisopvattingen, de didaktische aanpak, de inhoud van de doelen, de wijze van doelen formuleren en evalueren, de funktie van de doelen in leerplanontwikkeling en onderwijspraktijk; naar de psychologische onderzoekspunten over tweezijdig ordenen en transitiviteit,.....

Het zal de moeite waard zijn om de uiteenlopende reakties op deze publikatie – samen met de respons op de andere leerplanpublikaties over meer konkrete uitwerkingen van wiskundeonderwijs voor de basisschool – te bundelen tot een geheel. Met een dergelijk overzicht van het responsveld zal globaal de richting gewezen worden, waarin een integrale vernieuwing van het wiskundeonderwijs in nederland zal dienen te gaan.
Het is dan ook om die reden dat we deze publikatie besluiten met:
dit was de kiekkas van wiskobas..... (wordt vervolgd)

noten

1) Saint-Exupéry, A. de: De kleine prins (rotterdam 1951).

2) Voor de goede orde vermelden we, dat het kubusbeeld pas gevonden werd nadat de 8 uitgangspunten en 12 algemene doelstellingen geformuleerd en – intern – gepubliceerd waren. De 6 leerstofgebieden, die men – vrij algemeen – onderscheidt, kompleteerden het beeld.
Het verhaal van 'De kleine prins' werd aan het begin van een konferentie verteld, zonder dat het kiekkas- of kubusbeeld er reeds was. Maar tijdens de konferentie (noordwijkerhout 1972) vond de visuele organisatie spontaan plaats. Deze visuele organisatie vertoont een zekere analogie met het matematiseringsproces. Het sprongkarakter, het 'ineens' zien, het struktureren, kenmerkte ook deze vondst en de zelfervaring toonde een grote overeenkomst met de ervaring toen de dominoroosterpuzzel gevonden werd (zie hoofdstuk 2).

3) Een voorbeeld van zo'n 1^D evaluatie vinden we in de tekst bij:
Duckworth, E.: The having of wonderful ideas (in 'Harvard Educational Review' 42, 217-232).
Aanzetten tot een systematische 3^D evaluatie zijn ons niet bekend, al gaat men in het usmes-projekt (unified science and mathematics for elementary schools) wel wat in die richting. Zie:
Shapiro, B.J.: The Notebook problem. Report on Observation of Problem Solving Activity in USMES and Control Classrooms (een usmes-publikatie 1972).
Shapiro, B.J.: USMES evaluation report on Classroom structure and interaction patterns (1972-1973 USMES evaluation program) (usmes-publikatie 1974).
Steun voor een 3^D analyse kan men vinden in:
Goffree, F.: Doorkijkspiegelingen (in Wiskobas-Bulletin jaargang 3, pag.474-497).
In deze publikatie van Goffree vindt men ook een voorbeeld van de manier waarop de basisopvattingen over wiskundeonderwijs – ten aanzien van kleine aktiviteitsgebieden – geoperationaliseerd zijn.

4) We doelen hier op de bekende tema's:
Brink, J. van den: Waterland (in Wiskobas-Bulletin jaargang 4, pag. 48-54).
Heege, H. ter: Over het Lange Water (in Wiskobas-Bulletin jaargang 4, pag. 54-63).
Streefland, L.: Afstand, tijd, aarde (in Wiskobas-Bulletin jaargang 4, pag. 63-67, 178-186, 309-315, 432-438).
Een bekend tema voor het voortgezet onderwijs:
Sweers, W. en Leenders C.: Spionnen in de stad (in Wiskobas-Bulletin jaargang 4, pag. 35-40, 138-148, 276-286, 401-406).

deel 4

wiskundewerk

Dit deel heeft het karakter van een bijvoegsel.
Alle matematische problemen uit het voorgaande zijn hier verzameld en uitgebreid tot kleine, afgeronde probleemreeksen
Hoofdstuk 7 bevat de telproblemen uit deel 1.
Hoofdstuk 8 bestaat uit een reeks problemen rond de voetbaltabel uit deel 2 (pag. 62 e.v.).
Hoofdstuk 9 bevat open kubusproblemen uit deel 2 (pag. 58 en pag. 74).
Hoofdstuk 10 bestaat uit het basispakket sproeteldam uit deel 2 (pag. 84 e.v.). Dit pakket en de uitwerkingen ervan voor onderbouw basisschool, bovenbouw basisschool en onderbouw voortgezet onderwijs, sluit ook aan op de uitnodiging tot doel-stellingname in deel 3.

7 telproblemen

▶ OPGAVEN (1)

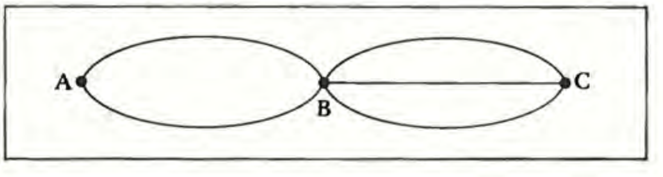
De opgaven met een sterretje staan ook in de basistekst van de hoofdstukken 1 en 2. De tussen [ ] vermelde cijfers verwijzen naar de betreffende pagina.

*1

Er zijn drie soorten verschillend gekleurde bloembladeren en twee soorten verschillend gekleurde hartjes.
Hoeveel verschillend gekleurde bloemsoorten kunnen er gemaakt worden? [15]

*2

Hoeveel verschillende roetes lopen er rechtstreeks van A via B naar C? Beschrijf deze roetes. [16]

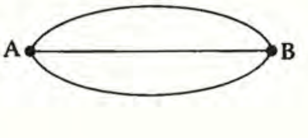


*3

Er is een boom met drie takken; aan ieder van de drie takken drie takjes, aan ieder van deze takjes drie steeltjes en aan ieder steeltje een appel.
Hoeveel appels zitten er aan deze boom en hoe duiden we de plaats van een appel aan? [16]

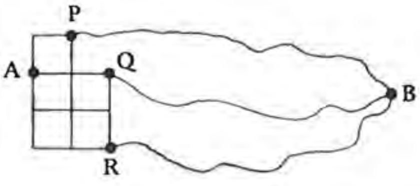
*4

Hoeveel verschillende roetes zijn er van A via B naar A? [17]



*5

Iemand woont in A en werkt in B. Op de heenweg kan hij gebruikmaken van de uitvalswegen PB, QB en RB, waar hij rechtstreeks – dat wil zeggen: zonder omweg – heenrijdt.



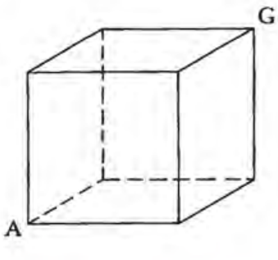
Voor de terugreis geldt uiteraard hetzelfde in omgekeerde richting. Hoeveel verschillende roetes ABA kan de pendelaar kiezen? [18]

*6

Er zijn drie cijferkaartjes $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$. Ga na hoeveel verschillende getallen van drie cijfers met deze kaartjes gelegd kunnen worden. [21]

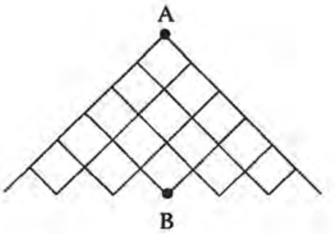
*7

Een kubuskruiper gaat rechtstreeks van A naar G langs de ribben van de kubus.
Hoeveel verschillende roetes kan hij kiezen en hoe kunnen die roetes beschreven worden? [21]



*8

Hoeveel verschillende roetes lopen er over het rooster van A naar B, die geen omweg volgen? [23]



*9

pec-heerenveen = 6-3 (ruststand 4-2).
Het skoreverloop is de keten van de achtereenvolgens door beide partijen gemaakte doelpunten. In ons geval bevat de keten in totaal 9 schakels. Een mogelijk skoreverloop is p-p-h-p-p-h-h-p-p.
De vraag is nu hoeveel verschillende ketens er gevormd kunnen worden? Anders gezegd: op hoeveel verschillende manieren kan de skore verlopen zijn? [24]

*10

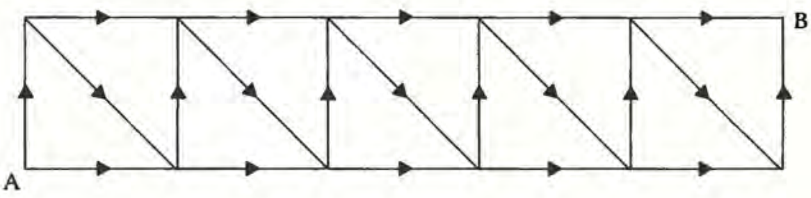
We gaan uit van de veronderstelling, dat – per gezin – de kans op de geboorte van een jongen even groot is als de kans op een meisje. Geef aan welke jongens-meisjesverdeling men ongeveer mag verwachten bij een steekproef van in totaal 160.000 gezinnen met 4 kinderen, bijvoorbeeld: 20.000 gezinnen met 4 jongens, 30.000 gezinnen met 3 jongens en 1 meisje, enz.
Licht het antwoord toe! [26]

11

Bepaal het aantal delers van 360.

12

Bepaal in onderstaand stadsplan met éénrichtingsverkeer het aantal verschillende roetes van A naar B.

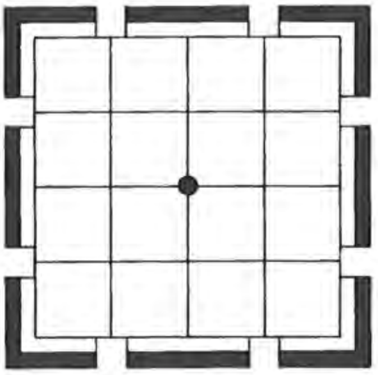


13

Als we een kettingbrief ontvangen met vijf namen erop, zenden we één gulden naar degene die bovenaan de lijst staat, strepen z'n naam door en voegen onderaan de lijst onze eigen naam toe. Daarna sturen we de lijst toe aan vijf vrienden met het verzoek om dezelfde procedure te volgen.
Stel dat iedereen de instrukties volgt en niemand de ketting verbreekt, hoeveel geld kunnen we dan tegemoetzien?

14

Bepaal het aantal vluchtroetes – zonder omweg – vanuit het middelpunt van het stadsplan in de tekening.

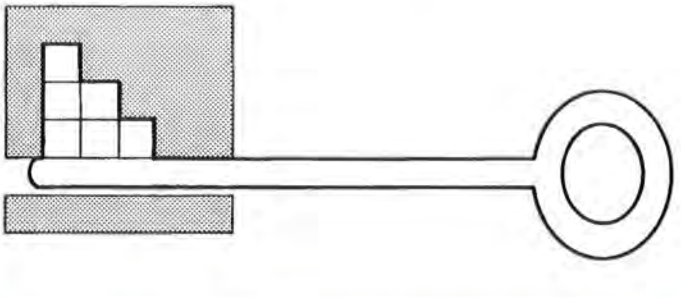


15

Een dar (mannetjesbij) heeft slechts één ouder (een moeder); een werkbij (een vrouwtjesbij) heeft twee ouders (vader en moeder). Hoeveel voorouders heeft een dar, gerekend vanaf 6 generaties terug in de tijd?

16

Hoeveel sleutels van het getekende type kunnen in onderstaande opening draaien?

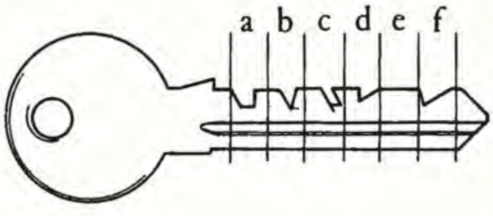


17

Een dominosteen is een rechthoek, bestaande uit twee vierkanten. Deze zijn gemarkeerd met stippen, en wel: minimaal 0 en maksimaal 6 stippen per vierkant. Alle dominostenen in een komplete set verschillen.
Hoeveel verschillende dominostenen bevat een kompleet spel?

18

Een autosleutel bevat 6 delen. Voor ieder deel zijn drie verschillende patronen beschikbaar.
Hoeveel verschillende sleutelsoorten kunnen er ontworpen worden?



19

In het éénrichtingsstadsplan van opgave **12** spelen we het volgende spel met twee personen.
Leg een munt in A en verschuif die munt om beurten over het stadsplan in een toegestane richting naar een volgend kruispunt. De speler die het eerst B bereikt, is winnaar.
Bepaal zo mogelijk een winnende strategie.

*20

Ga na of een rooster van *n* bij *n* (eenheidsvierkantjes), waarvan twee tegenover elkaar liggende 'puntvierkantjes' afgehaald zijn, bedekt kan worden met dominostenen van 2 bij 1 (eenheidsvierkantjes). [36]

ANTWOORDEN EN KOMMENTAAR (2)

1 $3 \times 2 = 6$.

2 $2 \times 3 = 6$.

3 $3 \times 3 \times 3 = 27$.

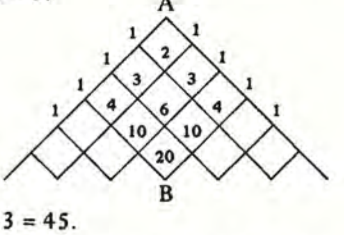
4 $3 \times 3 = 9$.

5 APB bevat 2 roetes; AQB bevat 1 roete; ARB bevat 6 roetes. Er zijn dus 9 roetes op de heenweg.
Het totaal aantal verschillende roetes ABA is dus $9 \times 9 = 81$.

6 $3 \times 2 = 6$.

7 $3 \times 2 = 6$.

8

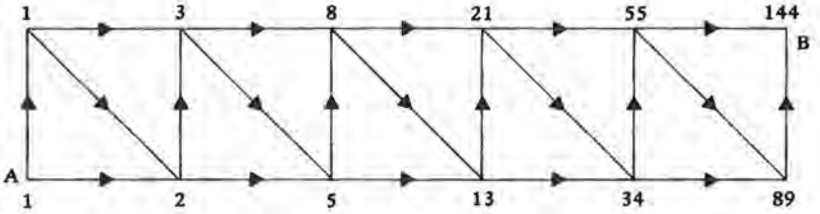


9 $15 \times 3 = 45$.

10 ca 10.000 gezinnen met 4 jongens
ca 40.000 gezinnen met 3 jongens en 1 meisje
ca 60.000 gezinnen met 2 jongens en 2 meisjes
ca 40.000 gezinnen met 1 jongen en 3 meisjes
ca 10.000 gezinnen met 4 meisjes.

11 $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Het aantal delers is dan $4 \times 3 \times 2 = 24$.
Immers, als eksponent van 2 kunnen we kiezen 0, 1, 2 of 3 (4 mogelijkheden), als eksponent van 3 hebben we als mogelijkheid 0, 1, 2 (3 mogelijkheden) en als eksponent van 5 kunnen we nemen 0 of 1 (2 mogelijkheden).

12

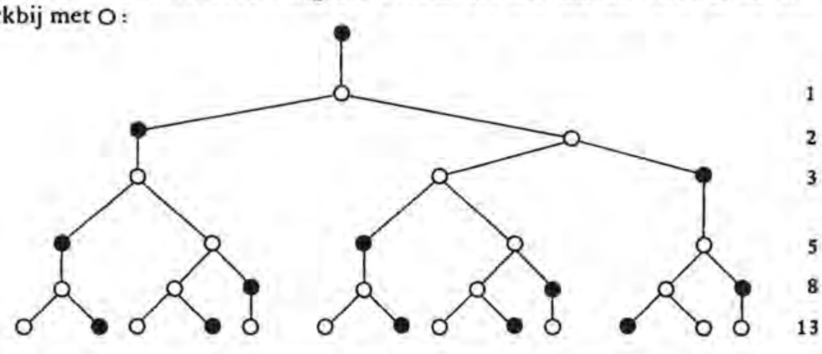


Het aantal roetes van A naar B bedraagt 144.
De rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... is de rij van Fibonacci: ieder getal bestaat uit de som van de twee voorafgaande getallen.

13 $5^5 = 3125$.

14 $4 \times 3 \times 2 = 24$.

15 In onderstaand (stam-)boomdiagram duiden we een dar aan met ● en een werkbij met ○:



Uit het patroon van het aantal voorouders lezen we de rij van Fibonacci af (zie **12**).
De verklaring is als volgt: het aantal 'stippen' in de k^e rij komt voort uit het aantal stippen van de $(k-1)^e$ rij vermeerdert met het aantal witte stippen uit de $(k-1)^e$ rij (die zich als het ware verdubbelen). Het aantal witte stippen uit de $(k-1)^e$ rij is echter gelijk aan het totale aantal stippen uit de $(k-2)^e$ rij, zodat het aantal stippen uit de k^e rij gelijk is aan de som van de stippen uit de $(k-1)^e$ en $(k-2)^e$ rij.

16 $4 \times 3 \times 2 = 24$.

17 $\dfrac{49-7}{2} + 7 = 28$.

18 $3^6 = 729$.

19

Degene die zijn fiche op positie P_1 kan plaatsen, staat op winst. Om P_1 te kunnen bereiken moet P_2 bezet worden. P_2 kan bezet worden als P_3 bezet kan worden.

20 Leg onder het rooster de schaakbordstruktuur. Het afgepunte rooster bevat, in geval n even is, minder zwarte dan witte vierkantjes. Aangezien een dominosteen altijd een wit en een zwart vierkantje bezet, is algehele bedekking onmogelijk. Voor het geval n oneven is, bevat het afgepunte rooster een oneven aantal vierkantjes en kan om díe reden niet bedekt worden door dominostenen.

8 voetbaltabel

OPGAVEN (1)

Dit hoofdstuk sluit aan bij pag. 62 e.v. van de basistekst.

1

EINDHOVEN OP RAND PROMOTIE

ZWOLLE/GRONINGEN – Eindhoven is vrijwel zeker van promotie naar de eredivisie. De aanvalszuchtige Brabanders gaven PEC/Zwolle op eigen veld geen schijn van kans en zijn door de 0-4 zege op grond van hun puntentotaal en doelsaldo nauwelijks nog te achterhalen. FC Groningen, dat Vitesse er met 5-2 onder hield, zou zondag in het afsluitende duel van de nacompetitie in de lichtstad met een verschil van meer dan vijf doelpunten moeten winnen om het Eindhovense voetbalfeest in de war te kunnen schoppen.

De stand:

Eindhoven	5	4	0	1	8	12-4
FC Groningen	5	3	0	2	6	9-5
PEC Zwolle	5	2	0	3	4	3-8
Vitesse	5	1	0	4	2	6-13

De kolommen van bovenstaande tabel bevatten respektievelijk: het aantal gespeelde wedstrijden, overwinningen, gelijke spelen, nederlagen, wedstrijdpunten (2 bij winst, 1 bij gelijk spel), doelpunten vòòr (zelf geskoord), doelpunten tegen.
Heeft de – doorgaans zeer kritische – sportredaktie van De Volkskrant gelijk?

2

feyenoord	10	9	1	0	19	21-2
ajax	10	7	3	0	17	18-3
fc den haag	10	7	1	2	15	18-9
fc twente	10	5	4	1	14	10-4
sparta	10	4	5	1	13	26-12
fc utrecht	10	5	2	3	12	16-10
mvv	10	5	1	4	11	11-10
dws	10	4	3	3	11	8-10
nec	10	5	0	5	10	10-13
nac	10	2	5	3	9	11-16
telstar	10	3	3	4	9	7-14
psv	10	3	2	5	8	15-9
go ahead e.	10	3	2	5	8	16-16
fc groningen	10	1	5	4	7	12-16
excelsior	10	1	4	5	[illegible]	4-10
volendam	10	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]16
fc den bosch	10	[illegible]	3	7	3	4-19
vitesse	[illegible]	1	1	8	3	4-26

Zoek de ontbrekende getallen in bovenstaande tabel, waarvan de kolommen respektievelijk bevatten: het aantal gespeelde wedstrijden, overwinningen, gelijke spelen, nederlagen, wedstrijdpunten, doelpunten vòòr en doelpunten tègen.

3

Bepaal het totale aantal gespeelde wedstrijden aan het eind van de kompetitie. (Ieder tweetal klubs speelt twee keer tegen elkaar.)

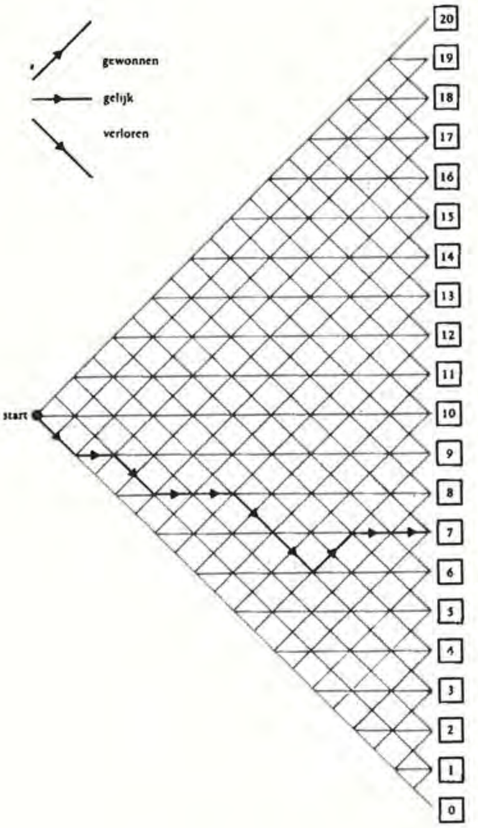
4

heerenveen	13	7	5	1	19	16-6
haarlem	12	7	4	1	18	18-9
wageningen	13	8	2	3	18	20-10
eindhoven	13	7	4	2	18	15-7
roda jc	13	6	3	4	15	13-15
fc vvv	12	5	4	3	14	18-10
az '67	12	4	6	2	14	12-7
blauw wit	12	6	2	4	14	13-11
fortuna sc	13	5	4	4	14	19-13
heracles	12	5	3	4	13	16-14
veendam	12	4	5	3	13	17-16
svv	13	5	3	5	13	17-20
cambuur	12	5	1	6	11	18-15
volewijckers	12	3	5	4	11	8-13
hvc	12	3	4	5	10	13-16
willem II	12	3	3	6	9	12-16
de graafschap	12	3	3	6	9	10-16
fortuna vl.	13	2	4	7	8	9-14
pec zwolle	12	1	5	6	7	12-21
dfc	12	1	4	7	6	7-18
helmond sport	13	1	4	8	6	8-24

In de eerste divisie hebben niet alle klubs evenveel wedstrijden gespeeld. De oorzaak daarvan ligt niet aan toevallige omstandigheden. Verklaar de verschillen.

5

In het onderstaande netwerk kunnen we van iedere klub de weg door de kompetitie tekenen.



stand eredivisie

feyenoord	10	9	1	0	19	21-2
ajax	10	7	3	0	17	18-3
fc den haag	10	7	1	2	15	18-9
fc twente	10	5	4	1	14	10-4
sparta	10	4	5	1	13	26-12
fc utrecht	10	5	2	3	12	16-10
mvv	10	5	1	4	11	11-10
dws	10	4	3	3	11	8-10
nec	10	5	0	5	10	10-13
nac	10	2	5	3	9	11-16
telstar	10	3	3	4	9	7-14
psv	10	3	2	5	8	15-9
go ahead e.	10	3	2	5	8	16-16
fc groningen	10	1	5	4	7	12-16
excelsior	10	1	4	5	[illegible]	4-10
volendam	10	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]16
fc den bosch	10	[illegible]	3	7	3	4-19
vitesse	[illegible]	1	1	8	3	4-26

We kunnen op grond van de gegevens uit de tabel niet precies het trajekt van fc groningen bepalen. Wel kunnen we kontroleren of bovenstaand trajekt goed zou kunnen zijn. Doe dit!

6 In de vorige opdracht hebben we een mogelijk trajekt van de fc groningen verzonnen.
Verzin een ander trajekt, dat mogelijk door fc groningen afgelegd zou kunnen zijn (raadpleeg de tabel) en teken het in het netwerk van opdracht **5**.

7 Geef in het netwerk van opdracht **5** nauwkeurig het gebied aan, waarbinnen het werkelijk door fc groningen doorlopen trajekt moet liggen; neem de grenzen zo nauw mogelijk. (Als u de oplossing niet direkt ziet, probeert u dan eens een aantal mogelijkheden.)

8 Geef in het netwerk van opdracht **5** nauwkeurig het gebied aan, waarbinnen het trajekt moet liggen van een klub, die in een of andere kompetitie 15 punten gehaald heeft; neem de grenzen zo nauw mogelijk. (Ook hier kunt u eerst een aantal pogingen doen.)

9 Ga na op hoeveel verschillende manieren – langs hoeveel verschillende trajekten – een klub (na 10 wedstrijden) kan belanden in de klasse (het bakje) van:

20 punten	0 punten
19 punten	18 punten
1 punt	2 punten.

10 Voor de toto-invullers is het interessant te konstateren, dat het netwerk van opdracht **5** ook gebruikt kan worden om het invullen van een totokolom zichtbaar te maken (alleen moeten we het dan nog uitbreiden tot 13 wedstrijden).

	1	2	3
telstar-utrecht		×	
volend.-f'oord		×	
den bosch-mvv		×	
den haag-nec	×		
sparta-psv			×
excelsior-nac			×
vitesse-groning.		×	
bl.wit-de volew.	×		
hvc-roda jc		×	
haarlem-wagen.			×

Hierboven staat een deel van een ingevuld totoformulier.
Maak deze invulling zichtbaar op het netwerk door een trajekt te tekenen:

1 betekent (gewonnen)
2 betekent (verloren)
3 betekent (gelijk).

11

De vraag hoeveel mogelijke trajekten we kunnen tekenen op het netwerk van opdracht **5**, komt overeen met de vraag op hoeveel verschillende manieren we een totoformulier met 10 wedstrijden in kunnen vullen. Om dit uit te zoeken, gaan we na op hoeveel manieren we de eerste wedstrijd kunnen invullen, daarna de eerste twee wedstrijden, enz.
Bepaal het totale aantal mogelijkheden.

12

De bekerkompetitie wordt in nederland door 18 eredivisie-, 19 eerste divisie- en 2 amateurklubs gespeeld, volgens een afvalsysteem. Dat wil zeggen: bij iedere wedstrijd valt de verliezer af en een gelijk spel wordt (via strafschoppen) uitgesloten.
Hoeveel wedstrijden moeten er dan in totaal gespeeld worden?
Generaliseer de oplossing.

13

Ontwerp een nieuwe ranglijst – uitgaande van de eredivisietabel – op grond van het voorschrift 'heeft een groter doelsaldo dan'.
Bedenk voor klubs met hetzelfde doelsaldo een ander kriterium om ze te ordenen.

14

Maak de samenhang tussen de oorspronkelijke ordening en de nieuwe ordening van de vorige opdracht, zichtbaar op een rooster. Zet de oude rangorde uit op de horizontale as en de nieuwe rangorde op de vertikale as.

15

Hoe komt op een roosterdiagram tot uitdrukking dat twee ordeningen dezelfde zijn?
Hoe komt op een roosterdiagram tot uitdrukking dat twee ordeningen precies tegengesteld zijn?

16

Bedenk een manier om de samenhang tussen twee ordeningen van een verzameling in een getal uit te drukken en bereken de samenhang voor het geval de ordeningen volmaakt overeenkomen, volmaakt tegengesteld zijn, en voor het geval van opgave **14**.

17

Lees onderstaand stukje van Nico Scheepmaker uit 'Vrij Nederland' en ken een puntenwaardering toe aan zijn prognose.

'De traditie getrouw heb ik vorig jaar, op 21 augustus, vóór het begin van het nieuwe seizoen en nà een wetenschappelijke analyse te hebben gemaakt van de 34 wedstrijden die de achttien eredivisieclubs te spelen zouden krijgen, de eindstand van het seizoen '71-'72 bekend gemaakt nog voordat de eerste hongerige bal aan het rollen was gebracht. IJdelheid en overmoed, gevoed door enkele eerdere succesjes op dit gebied, speelden hierbij een belangrijke rol. Omdat veel lezers verzuimd zullen hebben VN van 21-8-1971 te bewaren, herhaal ik eerst in de linkerkolom even mijn prognose-eindstand, met daarnaast de werkelijke eindstand, die via allerlei machinaties en chicanes tot stand is gekomen en als de *werkelijke* eindstand wordt beschouwd:

1. Feyenoord	1. Ajax
2. Ajax	2. Feyenoord
3. FC Den Haag	3. FC Twente
4. Sparta	4. Sparta
5. PSV	5. FC Den Haag
6. FC Twente	6. FC Utrecht
7. FC Utrecht	7. NEC
8. Telstar	8. PSV
9. NAC	9. Go Ahead Eagles
10. Go Ahead Eagles	10. MVV
11. NEC	11. Telstar
12. FC Groningen	12. FC Groningen
13. Excelsior	13. NAC
14. MVV	14. DWS
15. DWS	15. Excelsior
16. Volendam	16. FC Den Bosch
17. FC Den Bosch	17. Volendam
18. Vitesse	18. Vitesse'

18

Nu een zeer lastig probleem, ontleend aan een idee van J. Seidel, hoogleraar te eindhoven. De eindstand van een halve kompetitie (ieder speelt slechts éénmaal tegen de ander) met 9 klubs ziet er als volgt uit:

1	15 punten
2	13 punten
3	12 punten
4	11 punten
5	10 punten
6	5 punten
7	3 punten
8	2 punten
9	1 punt.

Er moet een fout in schuilen: het is een onmogelijke stand. Beredeneer dit!

▶ ANTWOORDEN EN KOMMENTAAR (2)

1 Nee, 't is een kwestie van dubbel boekhouden: ieder doelpunt telt als het ware voor twee. Bij een 2-0 overwinning van groningen bijvoorbeeld, eindigen de klubs met een gelijk aantal wedstrijdpunten. De doelsaldi van eindhoven en groningen worden dan respektievelijk '12-6' en '11-5' en de klubs eindigen gelijk.
Wint groningen met 3-0, dan promoveren ze.

2 De ontbrekende getallen kunnen gevonden worden als we bedenken, dat het totale aantal doelpunten vòòr gelijk is aan het totale aantal doelpunten tègen, het totale aantal overwinningen gelijk is aan het totale aantal nederlagen, het totale aantal wedstrijdpunten gelijk aan het totale aantal gespeelde wedstrijden.

excelsior	10	1	4	5	6	4-10
volendam	10	1	3	6	5	4-16
fc den bosch	10	0	3	7	3	4-19
vitesse	10	1	1	8	3	4-26.

3 18 x 17 = 306 wedstrijden. Iedere klub speelt tegen elke andere klub één thuiswedstrijd.

4 Het aantal klubs is oneven, dus is er iedere kompetitiedag één klub vrij. Er zijn 13 speeldagen geweest. 13 klubs hebben dus een wedstrijd minder gespeeld.

5 Het aantal punten klopt. Er is 1 trek naar boven (1 overwinning), er zijn 5 trekken horizontaal (5 gelijke spelen) en 4 trekken naar beneden (nederlagen).

6 Zorg ervoor dat het aantal trekken van verschillende soort klopt.

7 Neem bij de bovengrens eerst de overwinning, dan de gelijke spelen en tenslotte de nederlagen. Doe bij de benedengrens het omgekeerde.

8 Zie vorige opgave.

9 Voor 20 punten 1 trajekt.
Voor 19 punten 10 trajekten (namelijk: het gelijke spel op de eerste, tweede, ... tiende speeldag).
Voor 1 punt ook 10 trajekten
Voor 0 punten 1 trajekt
Voor 18 punten zijn er 10 trajekten met 1 nederlaag en $\frac{10 \times 9}{2} = 45$ trajekten met 2 gelijke spelen. In totaal dus 55 trajekten.
Voor 2 punten zijn er dan ook 55 trajekten.

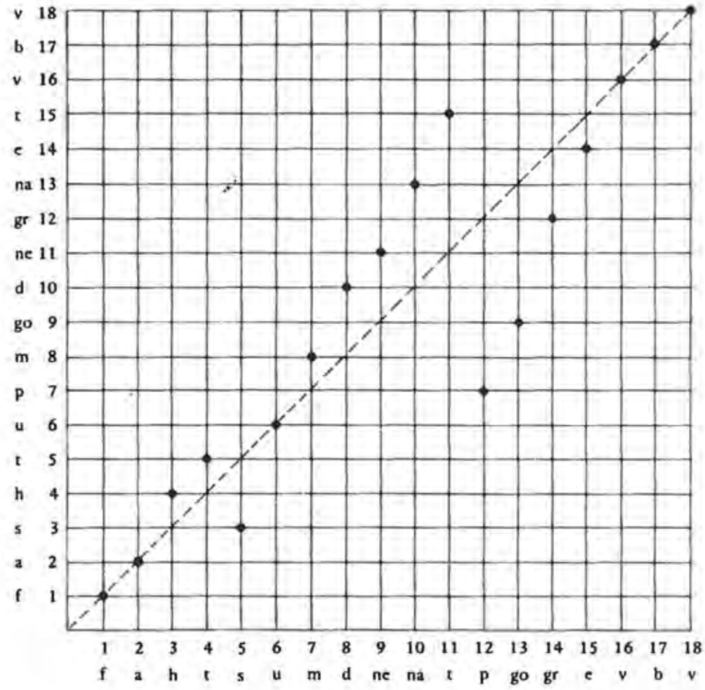
11 3^{10} mogelijkheden. In een gewone totokolom zijn er 3^{13} mogelijkheden.

12 Er zijn 39 klubs. Bij iedere wedstrijd valt er één klub af, dus moeten in totaal 38 wedstrijden gespeeld worden voordat we de laatst overgeblevene kunnen aanwijzen.

13 Op die ranglijst vallen de plaatsen van vooral psv en go ahead op. Bij gelijk doelsaldo nemen we het aantal wedstrijdpunten als tweede kriterium. De ranglijst ziet er als volgt uit:

1 feyenoord	10 dws
2 ajax	11 nec
3 sparta	12 groningen
4 den haag	13 nac
5 twente	14 excelsior
6 utrecht	15 telstar
7 psv	16 volendam
8 mvv	17 den bosch
9 go ahead	18 vitesse

14



15 Als de ordeningen gelijk zijn, liggen de punten langs de diagonaal die loopt van (0,0) naar (18,18). Zijn ze tegengesteld dan liggen ze op de diagonaal (0,18) naar (18,0).

16 We kunnen kiezen voor het gemiddelde van de afwijking in vertikale richting van de hoofddiagonaal.
We krijgen dan:

- bij volmaakte overeenkomst: $\frac{0}{18} = 0$;
- bij volmaakte tegenstelling: $\frac{162}{18} = 9$;
- bij de samenhang van opgave **14**: $\frac{28}{18} \approx 1{,}6$.

We kunnen voor het bovenstaande ook de korrelatiekoëfficient van Spearman gebruiken:

$$r_s = 1 - \frac{6\,\Sigma d^2}{n(n^2-1)},$$

waarin *d* het verschil is in rangnummer voor elk paar (x, y), terwijl *n* het totaal aantal paren (x, y) is.
In het geval van opgave **14** is *d* achtereenvolgens 0,0,1,1,2,0,1,2,2,3,4,5,4,2, 1,0,0,0.

$\Sigma d^2 = 86$.

$$r = 1 - \frac{6 \times 86}{18 \times 323} = 0{,}91.$$

17 De verschillen in plaats zijn achtereenvolgens: 1,1,2,0,3,3,1,3,4,1,4,0,2,4,1, 1,1,0.

De samenhang $\frac{32}{18} \approx 1{,}8$.

Volgens de korrelatiekoëfficient van Spearman krijgen we:

$$r = 1 - \frac{6 \times 90}{18 \times 323} = 0{,}91.$$

18 De laatste 4 klubs hebben samen 11 punten. Ze hebben echter $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ wedstrijden onderling gespeeld. Daarbij zijn 12 punten verdeeld.
Er is dus één punt te kort; de stand kan derhalve niet kloppen.

9 kubus in natura

In aansluiting op hoofdstuk 4 (pag. 58 en 74) treft u hieronder enkele – voor zich sprekende – kranteknipsels aan.

1

In De Haagse Post schrijft B.:

Natura

Linnaeus heeft eens gezegd dat wanneer een olifant net zo sterk zou zijn als een kever, hij rotsen zou kunnen verplaatsen. En Linnaeus was een wijs man. Want al die berichten over mieren die een steentje van 52 maal hun eigen gewicht optillen of slakken die 200 maal hun eigen gewicht trekken, moeten we toch een beetje onderkoeld lezen.
Dergelijke prestaties berusten namelijk op niets anders dan de verhouding tussen lengte, oppervlak en inhoud. Hoe groter het dier, des te geringer wordt de kracht van zijn spieren ten opzichte van zijn gewicht. Daarom kan mijn zoontje van tien twee vriendjes op zijn schouders dragen, maar ik geen twee collega's. Trouwens als slakken 200 maal hun eigen gewicht trekken, begrijp ik niet waarom we nog steeds geen wagentje geconstrueerd hebben waarmee we ons door 25 slakken laten voorttrekken. Al was het maar voor de rust. *B.*

Een klein vogeltje als een mees heeft per dag 30% van zijn lichaamsgewicht aan voedsel nodig, de grotere lijster 10% en een kip 4%. Een veldmuis eet per dag zijn eigen gewicht aan voedsel, maar de nog veel kleinere dwergmuis zowat het dubbele van wat hij weegt. Want hoe kleiner het dier, hoe groter het warmteverlies, hoe sneller de stofwisseling en hoe groter de behoefte aan voedsel. Kleine dieren hebben dus nooit eens vrij. Ze zijn altijd maar bezig met voedsel zoeken, wat op zich weer extra energie kost en dus extra voedsel vraagt. Een krokodil daarentegen heeft aan een paar ons vlees of vis per week genoeg.
Bovendien kan hij nog lang vasten. En ook de mens is een groot genoeg dier om zuinig met zijn voedsel te kunnen omgaan, zodat hij tijd overhoudt voor wat anders. Als we zo groot waren als een muis, zou er ondanks onze hersenen geen cultuur bestaan. Dan waren we de hele dag bezig met eten, slapen en kinderen verzorgen. *B.*

2

H.S. (een lezer) vraagt in een daaropvolgend nummer van de HP:

'Natura Artis Magistra

Omdat ik uw stukjes buitengewoon waardeer veroorloof ik mij een vraagje n.a.v. uw notitie: hoe kleiner het dier, hoe groter het warmteverlies...

Ik heb geprobeerd, al nadenkend dat te begrijpen, maar ik kom er niet achter, hoe eenvoudig het ook klinkt. Ik vind het zo onwaarschijnlijk die wet van het kleiner/groter temeer daar u die afmetingen illustreert met voorbeelden: de kip is al zo groot dat zij nog maar 4% van haar gewicht opsoepeert. En de mens – een flinke eter zal toch ook wel zo'n 4% van zijn gewicht dagelijks opnemen! – is toch alweer een echt groter soort kip, terwijl het verschil in afmetingen tussen een kleine krokodil en een grote mens niet zodanig is dat daardoor alleen het verschil in opname (krokodil: een paar ons per week!) verklaard wordt.

Het meest intrigeert me dat vogeltje dat 30% vreet. Heeft het zich daaraan gewend, omdat het niets te doen had en is daardoor het opname-proces en het afwerkingsproces versneld? Is het wel waar dat het geen tijd voor cultuur over heeft: is dat uitgetimed? Is het niet merkwaardig dat het bekje zo'n grote brokken kan nemen zodat die 30% vrij snel worden ingehaald? Of neemt het zodanige stoffen op dat ze het grootste deel weer afscheidt en slechts van heel weinig profiteert? zodat het wel door moet eten? Of gaat misschien het verteringsproces zo snel omdat het geen opbergruimte heeft waar de zaken rustig kunnen worden aangepakt? Als het inderdaad heel de dag moet vreten om o.k. te blijven – om voldoende leefwarmte te behouden – dan zou het 's nachts dood moeten gaan? of vreet het 's nachts ook?

3

Het antwoord van B luidt:

'Naschrift van B.

Stelt u zich een dier eens voor als een kubus met zijden van 2 cm. De oppervlakte van die kubus is dan $6 \times 2 \times 2 = 24$ cm^2 en de inhoud $2 \times 2 \times 2 = 8$ cm^3 – een verhouding dus van 3 : 1. Als we de kubus tweemaal zo groot maken, dus zijden van 4 cm, dan is het oppervlak $6 \times 4 \times 4 = 96$ cm^2 en de inhoud $4 \times 4 \times 4 = 64$ cm^3 – een verhouding van 1½ : 1. Vandaar: hoe groter een dier, hoe kleiner zijn oppervlak, en het oppervlak van zijn spieren, ten opzichte van inhoud en gewicht. Hoe groter het dier dus wordt, hoe geringer zijn spierkracht ten opzichte van het eigen gewicht. Voorbeeld: de bij kan 24 maal zijn eigen gewicht dragen, maar de mens, door de bank genomen, hooguit 1 keer zijn eigen gewicht.

Ook de stofwisseling varieert met het oppervlak. Daarom kunnen we zeggen hoe kleiner het dier, hoe groter het warmteverlies per kg lichaamsgewicht en hoe meer moet het eten om de lichaamstemperatuur op peil te houden. Er zijn nog wel een paar andere factoren die een rol kunnen spelen, aard van de stofwisseling en klimaat bijvoorbeeld, maar in het algemeen geldt het voorbeeld van de kubus.

Om in leven te blijven moet dat vogeltje wel 30% van zijn gewicht aan voedsel eten. Dat is genoeg om het de nacht door te helpen, want tijdens de slaap verbruikt het weinig voedsel. Tijdens een strenge winter zijn er veel vogeltjes die overdag onvoldoende voedsel vinden en daardoor de volgende ochtend niet halen.

Het essentiële verschil tussen mens en krokodil is dat de een een zoogdier is en de ander een reptiel. En reptielen hebben een veel lagere stofwisseling dan vogels en zoogdieren. Daarom kunnen ze beter vasten.'

4

Een bericht in Het Parool:

Tekort aan spleten voor ventilatie in jumbo jets

SCHIPHOL, maandag (ANP). – Al drie jaar geleden is op een bijeenkomst van de Internationale Organisatie voor de Burger Luchtvaart in Montreal gewaarschuwd voor het explosieve effect dat jumbo-vliegtuigen lopen bij plotselinge verlaging van de luchtdruk in de cabine.

De waarschuwing kwam destijds van de Nederlandse gedelegeerde ir. N. Schipper, die voor zijn pensionering hoofd van het bureau luchtwaardigheid van de Rijksluchtvaartdienst was. Zijn waarschuwingen in 1971 zijn weer actueel geworden nu het zeer aannemelijk is geworden dat de op 3 maart bij Parijs neergestorte Turkse DC 10 verongelukte door een explosie na het openslaan van de vrachtdeur.

Ir. Schippers waarschuwing richtte zich tegen de te geringe capaciteit van de ventilatiespleten in de vloeren van jumbo's. Voor het vliegen op grote hoogte, in ijle lucht, is het noodzakelijk dat de atmosfeer binnen het vliegtuig zoveel mogelijk gelijk blijft aan de luchtdruk op de grond. Alle straalvliegtuigen zijn dan ook luchtdicht afgesloten en voorzien van extra luchtdruk. Wanneer tijdens de vlucht een deur open vliegt dan ontsnapt de lucht met grote kracht.

In de cilindrisch gebouwde vliegtuigrompen zit een platte vloer, die de boven gelegen passagierscabine van het vrachtruim scheidt. Om de luchtdruk boven en onder die vloer gelijk te houden worden ventilatiespleten in de vloer aangebracht. Door die spleten kan de lucht in de ene ruimte zich snel een uitweg banen naar de andere als zich daar een plotselinge opening in de romp voordoet. Zijn die spleten echter te gering in aantal of te klein dan bestaat het gevaar dat de vloer onder de plotselinge explosieve druk bezwijkt en instort. In de DC 10 heeft dit onder meer tot gevolg dat de besturingskabels, die in de vloer zijn aangebracht, het kunnen begeven.

Te weinig

Ir. Schipper heeft destijds betoogd dat in de zogenaamde wide-body vliegtuigen te weinig ventilatiespleten waren aangebracht. 'Vroeger was de situatie anders omdat de toestellen kleiner waren. De wide-body-machines zijn 2 maal zo lang, 2 maal zo breed en 2 maal zo hoog, met andere woorden de inhoud is 8 keer zo groot. De ventilatiespleten zitten aan beide zijden van de vloer, tegen de romp aan. Er is dus tweemaal zoveel lengte beschikbaar. Als men dan dezelfde spleten aanhoudt, en dat heeft men bij de Jumbo's gedaan, dan krijgt men slechts tweemaal zo'n grote ventilatiecapaciteit in een ruimte die acht maal groter is geworden,' aldus Schipper. Volgens hem is de beste oplossing het aantal ventilatiespleten op te voeren of ze te vergroten of een combinatie van beide mogelijkheden toe te passen.

10 sproeteldam

▶ **BASISPAKKET MIDDENBOUW BASISONDERWIJS (1)**

Het hieronder weergegeven basispakket van sproeteldam (zie ook hoofdstuk 5), dat bestemd is voor de middenklassen van de basisschool, wordt gevolgd door aanpassingen voor de onderbouw en bovenbouw van het basisonderwijs en voor de lagere klassen van het voortgezet onderwijs.

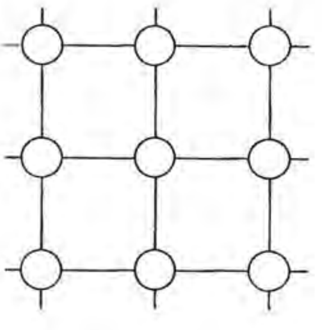
1

In een dorp vlakbij een grote stad wonen wonderlijke wezens. De burgemeester heeft 3 sproeten en 3 haren, de postbode 1 sproet en 1 haar. Alle bewoners verschillen van elkaar en hebben minstens 1 sproet en 1 haar, en hoogstens 3 sproeten en 3 haren.

▶ Teken alle bewoners en kontroleer of we ze allemaal hebben.

2

Aanvankelijk woonden ze allemaal door elkaar, maar de burgemeester wilde – op advies van de postbode – orde op zaken stellen.



▶ Breng een ordening aan op het rooster.

▶ Waar kan  wonen?[1])

▶ Waar kan  wonen?

▶ Bepaal de namen van lanen en straten.

1) De zwarte gedeelten geven een hoed en een doek weer en bedekken dus respektievelijk haren en sproeten.

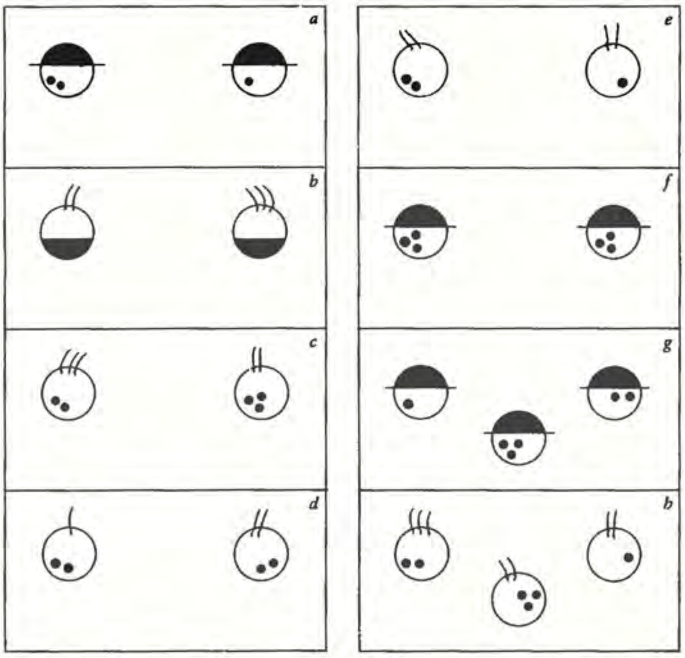
3

Toen ze ordentelijk woonden en de postbode z'n werk goed kon doen, wilde de burgemeester ook nog dat er wat beleefder gegroet zou worden. Daarom vaardigde hij een gebod uit. Iedere bewoner van sproeteldam werd verplicht om de ander te groeten, indien hij meer haren of sproeten had, en te zeggen:
'ik heb meer ..... dan jij.'

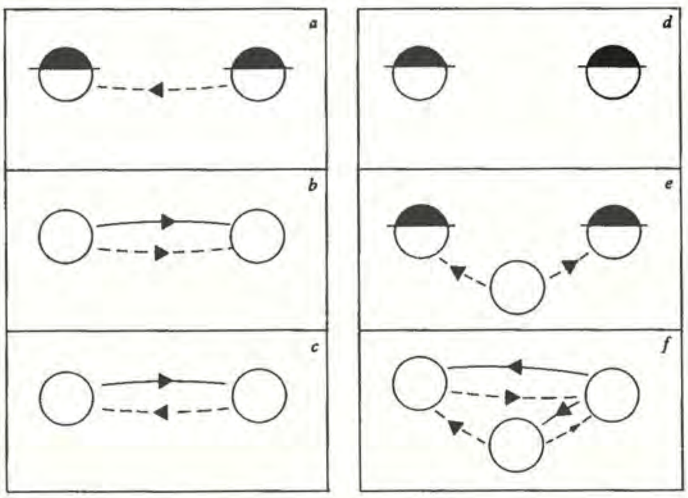
betekent: 'ik heb meer haren dan jij'.

betekent: 'ik heb meer sproeten dan jij'.

▸ De bewoners van het dorp gaan dit oefenen en wij doen met hen mee.
Teken bij de gegeven poppetjes de pijlen!

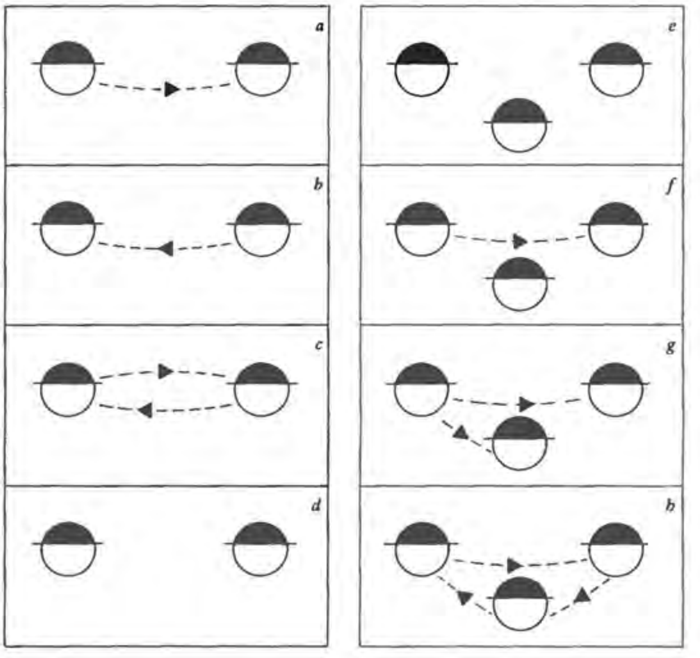


▸ Teken bij de gegeven patronen haren en/of sproeten!



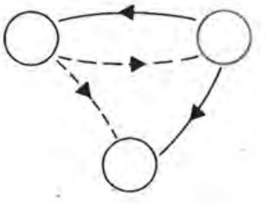
4

▸ Ga na bij welke groetpatronen verwarring (ruzie) ontstaat. Verander – zonodig – de pijlen (met rood).



5

Na een poosje groette iedere sproeteldammer korrekt. Toch waren niet alle inwoners tevreden. Op een kwade dag kwam een politieagent uit de grote stad nabij sproeteldam naar de burgemeester. Hij vertelde dat drie inwoners uit zijn dorp geprobeerd hadden bij een kapper in te breken. Ze wilden zeker meer haren en sproeten!
Hij had die drie niet kunnen pakken. Hij wist ook niet hoe ze er uit zagen, maar hij had wel gehoord hoe ze elkaar gegroet hadden.
Dat was als volgt:

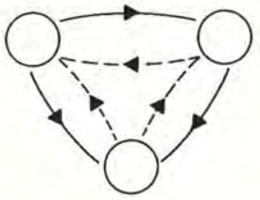


▸ Welk daderstrio kan dit geweest zijn?

vervolg

5

De politieagent bleek zich echter vergist te hebben. Na zijn kollega geraadpleegd te hebben, kwam hij tot het juiste groetpatroon.
Het bleek nu eenvoudiger om de daders aan te wijzen.



- Wie zijn de dieven?

6

Blijkbaar waren de bewoners niet meer zo gelukkig als vroeger. De burgemeester had dit ook gemerkt (denk maar aan de diefstal). Hij besloot daarom alle inwoners bij elkaar te roepen op een grote vergadering om te beslissen wat er zou moeten veranderen.

- Er werden op die vergadering heel wat 'ik heb meer dan.....' groeten uitgebracht.
  Hoeveel in totaal?

7

Toen de vergadering geopend werd, bleek al gauw, dat het groeten op de manier van 'ik heb meer.....' niet prettig gevonden werd.
Het staat zo opschepperig en de postbode moest altijd z'n mond houden. Ook niet leuk! Hij zei dan ook dat iedereen mogelijkheden tot groeten moest hebben en hij stelde voor om te groeten met 'ik heb evenveel.....als jij!'
De nadruk kwam zodoende te liggen op de overeenkomsten en niet op de verschillen. Nou, dat leek iedereen heel leuk.
Men ging oefenen. Wij ook!

- Wat denk je hiervan: zou iedereen met deze groetgewoonte tevreden zijn?
- Bespreek dit met elkaar.
- Hoeveel groeten worden er nu in de vergadering uitgebracht?
- Hoeveel keer groet ieder?

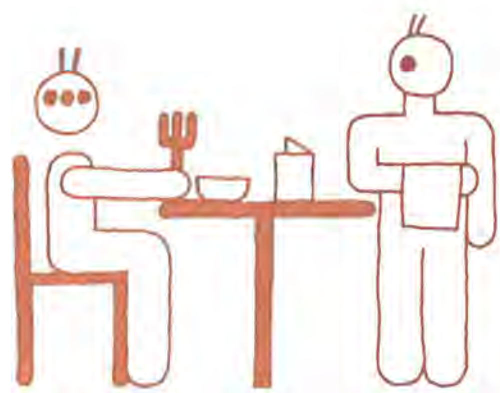
8

Vanaf die vergaderdag werd er een 'evenveeldag' ingesteld: een soort nationale feestdag. En er werd ook een volkslied gemaakt, dat op deze gebeurtenis betrekking had. Het staat gebeiteld in de muur van het gemeentehuis en ziet er als volgt uit:

[11|12] [21|200|120|12|202|12|110|11|1|112|201]
[100|102] [22|12|2] [12|211|12|112|211|12|12|110] [22|1|200|12|112] [1|110|201] [101|221]
[100|102] [22|12|2] [12|211|12|112|211|12|12|110] [201|121|200|120|12|112] [1|110|201] [101|221]
[12|112] [101|221] [1|110|201] [100|102]
[212|1|202] [222|221|112] [212|221] [2|110|221]
[100|102] [22|12|2] [12|211|12|112|211|12|12|110] [1|110|201] [101|221]

In sproeteldam gebruiken ze maar drie cijfers 0, 1, 2 en daarmee rekenen en schrijven ze. 't Is wonderbaarlijk!
Op school leren ze daar: $1 + 1 = 2$ en $2 + 1 = 10$. Hoe bestaat het!
De tekst van het volkslied, dat precies uit 100 'letters' bestaat (in sproeteldam zegt men dat het er 10201 zijn!) kan ik helaas niet ontraadselen. Misschien komt er ooit iemand achter. Zo niet, dan blijft het een raadsel.
Wat we echter wel weten is, dat de sproeteldammers vanaf 'evenveeldag' nog lang en gelukkig leefden. Zo zie je maar weer dat 'ik heb meer dan.....' niet altijd gelukkig maakt.

▸ Proberen jullie eens het volkslied van sproeteldam te ontcijferen.



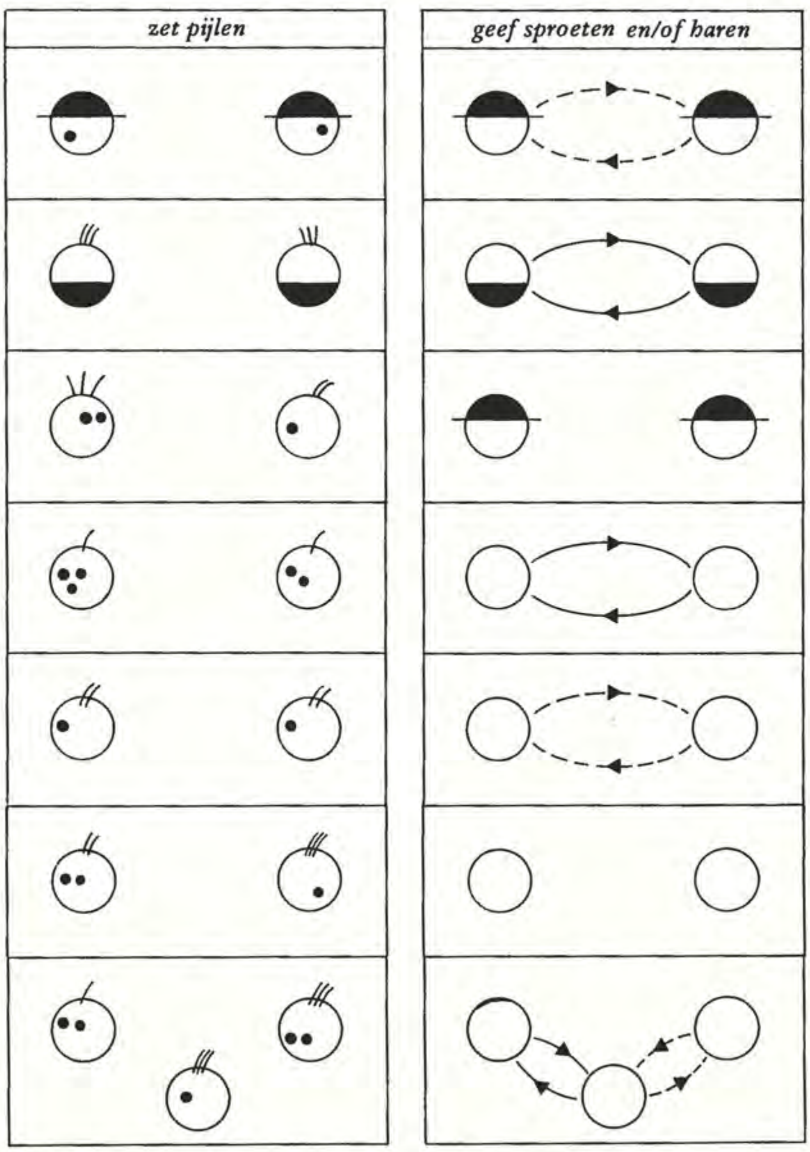
Het basispakket kan aangepast worden voor de aanvangsklassen, door de groetregel 'ik heb meer dan' te vervangen door 'ik heb evenveel als'.

Deel **1** kan, kwa probleemstelling, onveranderd gelaten worden. Het verhaal dient uiteraard wat aangepast: 'minstens' wordt 'niet minder dan' en 'hoogstens' wordt 'niet meer dan'. De leerlingen moeten vrij veel worden geholpen.

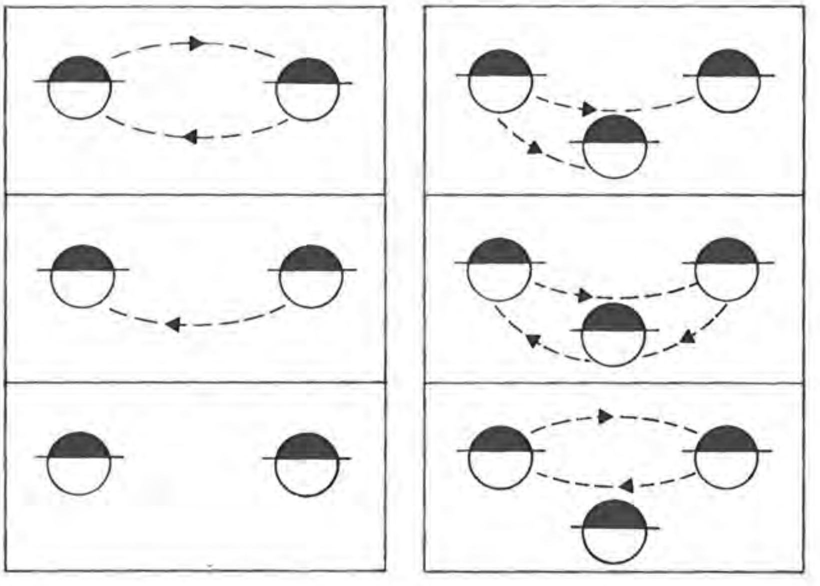
Deel **2** kan eveneens zo gelaten worden. Het gebruik van konkreet materiaal – fiches, rondjes – is essentieel: er moet verschoven kunnen worden. Ook hier moeten de leerlingen – sterker dan in de middenklassen – geleid worden.

Deel **3** moet in de zojuist genoemde zin aangepast worden: 'meer dan' dient vervangen te worden door 'evenveel als' en de oefenopgaven navenant.

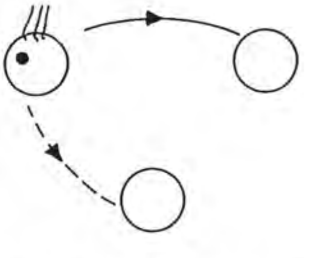
Dit kan bijvoorbeeld als volgt:



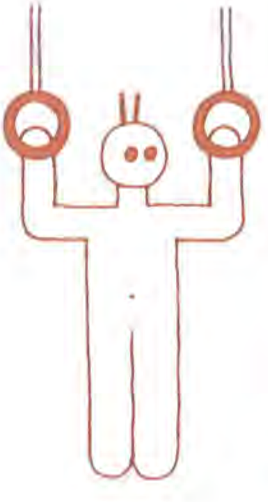
Deel **4** zou er als volgt uit kunnen zien: laat nagaan bij welke groetpatronen verwarring (ruzie) ontstaat en laat – zo nodig – de pijlen met een rood potlood veranderen.
Voorbeelden:



In deel **5** kan het dievenverhaal als volgt gesitueerd worden: één van de dieven is bekend (3,1). Hij groet volgens onderstaand patroon:



De rest van het patroon is onbekend. De burgemeester en de postbode zijn van verdenking uitgesloten.
Deel **6** dient aangepast te worden. De probleemstelling kan bestaan uit het tellen van het totale aantal 'evenveel' groeten.
Het verhaal moet hier eindigen.



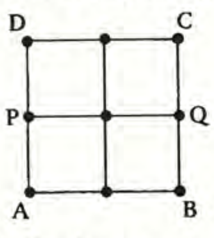
▶ **BOVENBOUW BASISONDERWIJS (3)**

De basistekst kan in grote lijnen gevolgd worden, en wel met de volgende wijzigingen en aanvullingen:
- de inkleding – het verhaal – kan beter in de sfeer van de science-fiction (andere planeet) gesteld worden;
- het tempo kan hoger liggen: vaak twee delen per les;
- volstaan kan worden met minder aanwijzingen bij:
  - deel **1** (alle mogelijkheden)
  - deel **2** (rooster)
  - deel **6** (telproblemen)
  - deel **7** (telproblemen)
  - deel **8** (geheimschrift);
- gemikt kan worden op een hoger redeneernivo;
- bij het opsporingsprobleem van deel **5** (eerste stuk) kunnen alle daderstrio's bepaald worden;
- het 'waarom' van het groeten en het vervolgtema (zie pag. 94), kunnen uitgebreid tot onderwerp van bespreking gemaakt worden.

▶ **ONDERBOUW VOORTGEZET ONDERWIJS (4)**

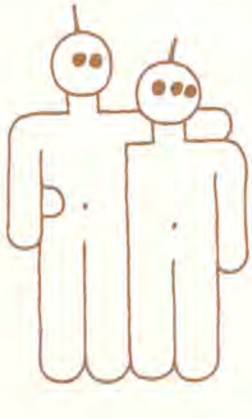
Men kan de aangepaste basistekst (zie bovenbouw basisonderwijs) gebruiken en er de volgende redeneerproblemen invoegen:

1 In sproeteldam is een busonderneming.
Over de verbindingen (die altijd heen en terug zijn, maar niet noodzakelijk rechtstreeks) is bekend:
A is verbonden met D
D is verbonden met C
C is *niet* verbonden met B.



Verder is gegeven, dat de bussen de roosterlijnen volgen en bij ieder roosterpunt dat ze passeren is een halte.

▶ Is B met P verbonden?
▶ Is B met Q verbonden?



2 We kunnen in de voorgaande probleemstelling 'busverbinding' vervangen door 'bootverbinding'.
We hebben geen kaart van de waterwegen, maar weten:
A is verbonden met D
D is verbonden met C
C is *niet* verbonden met B.
De verbinding is vice-versa, maar niet noodzakelijk rechtstreeks.

▶ Is B verbonden met A?

3 Alle sproeteldammers verschillen in gewicht. We kiezen uit iedere laan de zwaarste bewoner en van deze drie zwaargewichten nemen we de lichtste. Dit blijkt de postbode te zijn.
Uit iedere straat kiezen we de lichtste bewoner en van deze drie lichtgewichten nemen we vervolgens de zwaarste. Dit blijkt de burgemeester te zijn.

▸ Wie is nu het zwaarste: de burgemeester of de postbode?

▶ TENSLOTTE (5)

Tenslotte nog dit. De matematische benadering van het groeten kan (zie pag. 94), haar voltooiing vinden in een tematische behandeling van de groet als sociaal verschijnsel.
Het volgende citaat van de kultuurfilosoof *José Ortega y Gasset*, waarmee wij hier eindigen, zou als startpunt van zo'n veelzijdige benadering kunnen dienen.

'Wat ons nu zo'n eenvoudige en simpele zaak lijkt – de nadering van de ene mens tot de andere – is tot voor kort een gevaarlijke en moeilijke handeling geweest. Daarom moest men een techniek voor die benadering uitvinden, die zich ontwikkelt gedurende heel de geschiedenis van de mensheid. Deze techniek, dit mechanisme van de benadering, is de groet.'