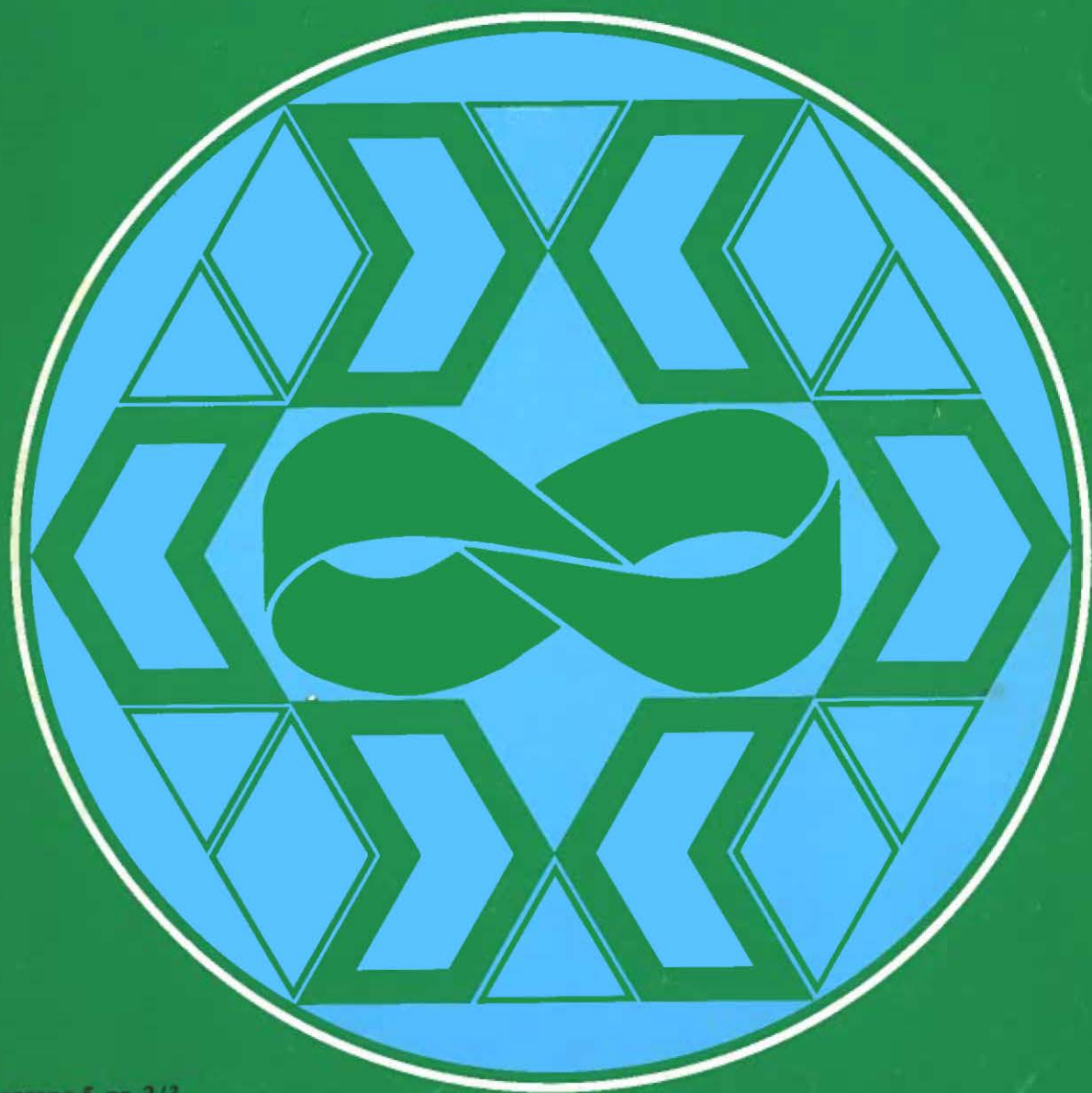


wiskobbas

bulletin

Publiek deel



jaargang 5 nr. 2/3
december 1975

(met afzonderlijk leerplandeel)

WISKOBAS-BULLETIN (rubrieken)

- bulletin ter begeleiding van het wiskunde-
onderwijs
- verschijnt gedurende de vijfde jaargang 6 keer.

Jaargang 5 nr. 2/3 – december 1975

Met afzonderlijk leerplandeel

Redactie

Drs. F. Goffree, Drs. R.A. de Jong (eindredak-
teur), G.H. Meijer, Drs. A. Treffers, Drs. E.J.
Wijdeveld.

Medewerkers

Prof.Dr. F. van der Blij, J. van den Brink, J. van
Bruggen, K. Frenay, Prof.Dr. H. Freudenthal,
L. Gilissen, J. de Gooijer-Quint, H. Jansen,
H. ter Heege, D. Karman, Dr. K.B. Koster, C.P.
Leenders, E. de Moor, D.W. Oort, P. Scholten,
W. Sweers, L. Streefland.

Vormgeving

Ton Voortman.

Illustraties

Theo van Leeuwen

Cartoon

Hans de Boer.

Redactieadres

INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE
ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht.
t.a.v. R.A. de Jong.

Abonnementenadministratie

STICHTING IVIO,
Postbus 37, Lelystad.
Voor aanmeldingen, adreswijzigingen, betalings,
enz.

Abonnementsprijs

Per jaargang f 40,—.
Reduktietarief voor studenten P.A. en wisko-
bas-kursisten f 30,—.
Gelieve uitsluitend te betalen met aksept-giro-
kaarten. Deze worden u toegezonden.

INHOUD

Redactioneel: Rob de Jong	1
Kolommen: H. Freudenthal	2
Wiskunst: F. van der Blij	4
Problematika: Huub Jansen	8
Doe-idee: Ed de Moor	10
Opleiding: Fred Goffree en Huub Jansen	12
Ander werk: Edu Wijdeveld	16
Kleuters en wiskunde: Jeanne de Gooyer-Quint ...	18
Kijk ook eens zo!: Dik Oort	20
Nieuw op de markt: Ed de Moor	22
Berichten: Louis Gilissen en Klaas Koster	23

Aan de vraag naar volledige oude jaargangen van
het Wiskobas-Bulletin kunnen we helaas niet
meer voldoen. Verschillende nummers zijn uit-
verkocht.

Van de volgende afleveringen is nog een beperkt
aantal exemplaren verkrijgbaar:

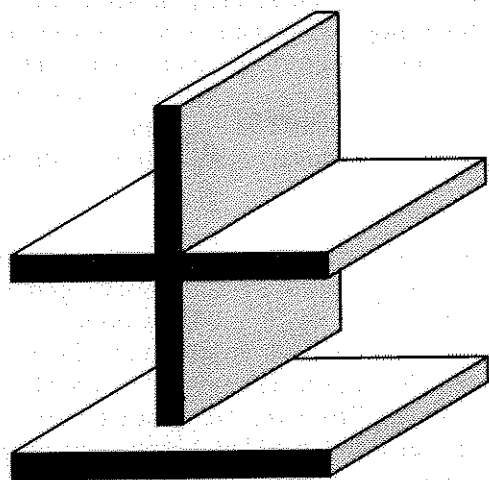
jaargang 2, nr. 6	– f 7,50
jaargang 3, nr. 2	– f 7,50
jaargang 3, nr. 3	– f 7,50
jaargang 3, nr. 4/5	– f 7,50
jaargang 4, nr. 2	– f 7,50
jaargang 4, nr. 3/4	– f 7,50
jaargang 4, nr. 5	– f 7,50

Alleen na ontvangst van uw storting op post-
girorekeningnummer 3105662 t.n.v. R.U.-IOWO
te utrecht, zal u de gewenste aflevering worden
toegezonden.

©1975 Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde
Onderwijs

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of open-
baar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of
op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke
toestemming van de houder van het kopijrecht.

redaktio- neel



Wanneer een wereldberoemd deskundige op het gebied van het wiskundeonderwijs (Marion Walter) over het wiskobas-bulletin schrijft '... it really is first rate' en vervolgens met klem vraagt of er niet een engelse editie kan komen, wanneer een duitse uitgever – en waarachtig niet de eerste de beste – interesse toont voor een mogelijke uitgave in het Duits, wanneer de oplage aan het begin van deze jaargang in één keer stijgt naar 12.500, dan lijkt het of we met het wiskobas-bulletin op de goede weg zijn.

Maar... mag uit oplagecijfers afgeleid worden dat het goed gaat? Drukt een internationale interesse uit, dat de zaken er (nationaal) florissant bijstaan?

Internationale erkenning zegt nog niet zoveel. Het bulletin wordt niet geschreven voor buitenlandse kopstukken. Natuurlijk, als ze zich willen abonneren, worden ze niet geweigerd. Het gaat ons echter vooral om schoolteams, om studenten aan onderwijsopleidingen, om degenen die het (straks) moeten gaan 'maken' in de klas, om hen die dag in dag uit leerlingen moeten inspireren, instrueren, ruimte geven, begeleiden.

't Beste tijdschrift kan best tegelijkertijd 't slechtste tijdschrift zijn.

ROB DE JONG

Het bulletin wordt evenmin samengesteld vanuit de idee dat de oplage zo nodig omhoog moet. De redactionele vrijheid en het aantal beschikbare pagina's is niet afhankelijk van oplagecijfers. De redactie hoeft zich niet in allerlei bochten te wringen om er een 'lekker' opvallend blad van te maken dat in alle wachtkamers van artsen, in leesportefeuilles en in kapsalons is te vinden. Tegenover een aanpak waarin lezers 'verleid' worden tot wiskundeonderwijs via een uitklapfoto van de miss-wiskobas-van-de-maand, staat het streven om zo helder en nuchter mogelijk over wiskundeonderwijs te schrijven. Dat we hierin bij voortduring falen, zult u reeds gekonstateerd hebben.

* * *

Indien serieuze bestudering van het bulletin ca 4 uur per aflevering vraagt, dan betekent dat voor een hele jaargang 24 uur, hetgeen voor een oplage van 12.500 in totaal zo'n 300.000 studie-uren inhoudt.

Er van uitgaande dat een werknemer jaarlijks een vijftigtal weken van 40 uur (d.i. 2000 uur) in het arbeidsproces is betrokken, kan worden vastgesteld dat een klein legertje van 150 (300.000 : 2000) man gedurende een heel jaar wordt beziggehouden door het bulletin.

Hadden ze niet beter wat anders kunnen doen? Nu studeert lang niet iedereen (en misschien zelfs niemand) 24 uur per jaar uit het bulletin. Maar, alleen al het invullen en ter post bezorgen van een akseptgirokaart, het openen van de enveloppen en het netjes in de boekenkast plaatsen, vraagt reeds 12 fulltime lezers.

Natuurlijk kloppen de omrekeningen niet. Tijdschriften worden in verloren ogenblikken (tussen pipo en het nieuws) gelezen en alle verloren ogenblikken bij elkaar maken nog geen arbeidsdag.

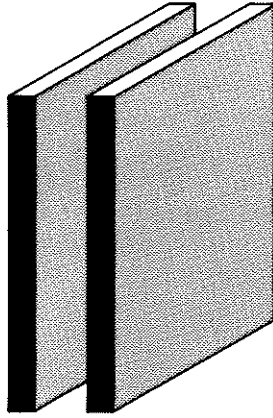
Nochtans: hoe groter een oplaag, hoe meer tijd geclaimd wordt, hoe zorgvuldiger een redactie te werk moet gaan. Een onderwijstijdschrift maken, betekent ingrijpen in het patroon van (vrije) tijdsbesteding van mensen die over niet al te veel vrije tijd beschikken.

* * *

Een vreemd verhaal! Misschien kent u het. Een groep mensen besluit om zich te onttrekken aan de heerschappij van zakagenda en horloge. Op de dag dat ze hiermee zullen starten (keurig in de agenda genoteerd) worden de horloges tot op de seconde gelijk gezet. Over precies 2 minuten zullen ze het horloge afzweren.

Even absurd: na som 5 van paragraaf 18 (op vrijdag 3 oktober) wordt het 'traditionele' rekenen afgeschaft en begint de school in h. aan 'moderne' wiskunde.

kolommen



G.G.D.

Als ik het over breuken zou willen hebben, zou g.g.d. 'gemeentelijke geneeskundige dienst' kunnen betekenen, al waren het dan geen rekenkundige breuken. Het gaat hier echter om gehele getallen en dan wil g.g.d. zeggen: grootste gemene deler.

H. FREUDENTHAL

Het begrip 'deler' is zinvol, zodra delingen in 't algemeen niet opgaan. Laat ik breuken toe, dan gaan delingen altijd op. Beperk ik me tot de gehele getallen, dan kan ik me afvragen, of van twee getallen het ene deler van het andere is. 6 is deler van 18, want $18 = 3 \cdot 6$, maar 8 is geen deler van 18, want er is geen gehele x te vinden, zodat $18 = x \cdot 8$. Er is een ander verschil tussen 8 en 7 ten aanzien van 18, want 8 en 18 hebben nog een gemene deler, te weten 2, terwijl 7 en 18 geen gemene deler hebben. Wel, ze hebben de gemene deler 1, maar dat is flauw, want 1 is deler van elk getal.

144 en 84 hebben een heleboel gemene delers:

1, 2, 3, 4, 6, 12.

Ik heb ze volgens grootte opgeschreven. De grootste onder hen is 12, de grootste gemene deler van 144 en 84. Maar 12 is onder de gemene delers van 144 en 84 niet alleen de grootste; alle andere delers van 144 en 84 zijn *delers* van de grootste. De grootste gemene deler van een stel getallen heerst over de gemene delers niet alleen volgens de grootte, maar ze zitten er ook allemaal in. Als ik de *grootste* gemene deler ken, ken ik ze allemaal. Ik beweer dit zomaar, maar ik zal het straks ook bewijzen.

Ondertussen een andere vraag: hoe kom ik aan de grootste gemene deler van, zeg, *twee* getallen? Ik bedoel niet gissenderwijs, maar volgens een systematische procedure. Dit gaat door herhaalde toepassing van het volgende beginsel:

stel a, b zijn twee getallen zodat $a > b$. Vorm $c = a - b$;

dan hebben a en b dezelfde gemene delers als b en c ;

immers, stel t is een deler van a en b , dus $a = t \cdot a'$, $b = t \cdot b'$;

dan $c = ta' - tb' = t(a' - b')$, dus t ook deler van c ;
omgekeerd: is t deler van b en c , dus $b = t \cdot b'$, $c = t \cdot c'$; dan $a = b + c = tb' + tc' = t(b' + c')$; dus t deler van a .

Laten we dit beginsel nu op het voorbeeld 144 en 84 toepassen.

Dan hebben achtereenvolgens de paren:

144 en 84

84 en 60

60 en 24

36 en 24

24 en 12

12 en 12,

aldoor maar hetzelfde stel gemene delers. De gemene delers van 144 en 84 komen dus overeen met de delers van 12. Inderdaad is 12 nu

de grootste gemene deler van 144 en 84, niet alleen volgens grootte, maar ook zo, dat de andere gemene delers erin zitten.

Wat we hier met 144 en 84 deden, gaat algemeen op. Ga uit van twee getallen a en b . Pas de procedure van zonet toe. De paren worden steeds maar kleiner. De procedure stopt als het paar uit gelijke getallen bestaat, zeg:

d en d .

Bij elke stap blijft het stel gemene delers onveranderd. Dus a en b hebben hetzelfde stel gemene delers als d en d . Dus d is de grootste gemene deler van a en b en is deelbaar door alle gemene delers van a en b .

* * *

Ik kan de berekening van daarstraks iets beknopter opschrijven, als ik bijvoorbeeld 24 meteen zo vaak mogelijk van 60 aftrek, dus 60 deel door 24 met rest 12. Ik krijg dan:

$$\begin{aligned} 144 &= 1 \cdot 84 + 60 \\ 84 &= 1 \cdot 60 + 24 \\ 60 &= 2 \cdot 24 + 12 \\ 24 &= 2 \cdot 12. \end{aligned}$$

Reken ik nu van 12 terug naar boven, dan krijg ik:

$$\begin{aligned} 12 &= 60 - 2 \cdot 24 \\ &= 60 - 2 \cdot (84 - 60) \\ &= 3 \cdot 60 - 2 \cdot 84 \\ &= 3 \cdot (144 - 1 \cdot 84) - 2 \cdot 84 \\ &= 3 \cdot 144 - 5 \cdot 84. \end{aligned}$$

Een merkwaardige uitkomst:

als d de grootste gemene deler van a en b is, dan kan men d schrijven in de vorm

$$d = x \cdot a + y \cdot b,$$

waarbij x en y weer gehele (eventueel negatieve) getallen zijn.

Laten we dit eens met 37 en 13 oefenen. De grootste gemene deler is 1. Dus moet ik de vergelijking:

$$1 = x \cdot 37 + y \cdot 13,$$

met gehele x, y kunnen oplossen. Hoe vind ik die?

$$\begin{aligned} 37 &= 2 \cdot 13 + 11 \\ 13 &= 1 \cdot 11 + 2 \\ 11 &= 5 \cdot 2 + 1. \end{aligned}$$

En nu:

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 5 \cdot 2 \\ &= 11 - 5 \cdot (13 - 1 \cdot 11) \\ &= 6 \cdot 11 - 5 \cdot 13 \\ &= 6 \cdot (37 - 2 \cdot 13) - 5 \cdot 13 \\ &= 6 \cdot 37 - 17 \cdot 13. \end{aligned}$$

Dus:

$$x = 6 \text{ en } y = -17$$

voldoen.

Zijn er nog andere oplossingen?

Natuurlijk:

$$x = 19, y = -54$$

voldoen ook.

Hoe ben ik aan deze oplossingen gekomen en ziet u kans ze allemaal op te schrijven?

Een denkpaauze!

* * *

Neem twee oplossingen van:

$$1 = x \cdot 37 + y \cdot 13,$$

met gehele x_0, y_0 respectievelijk x_1, y_1 , dan:

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 \cdot 37 + y_0 \cdot 13 \\ &= x_1 \cdot 37 + y_1 \cdot 13. \end{aligned}$$

Trek de rechterleden van elkaar af:

$$(x_1 - x_0) \cdot 37 + (y_1 - y_0) \cdot 13 = 0,$$

oftewel:

$$(x_1 - x_0) \cdot 37 = (y_0 - y_1) \cdot 13.$$

Stel nu:

$$x_1 - x_0 = 13 \cdot u,$$

dan:

$$y_0 - y_1 = 37 \cdot u,$$

dus:

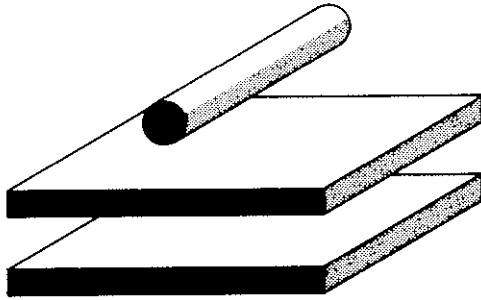
$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 13 \cdot u \\ y_1 &= y_0 - 37 \cdot u. \end{aligned}$$

Welnu, ik heb daarstraks van $u = 1$ gebruik gemaakt. Ik had evenwel voor u ieder ander geheel getal kunnen nemen.

Krijg ik op die manier werkelijk *alle* oplossingen? Ja! Maar in het gras van die redenering schuilt een addertje!

Tot een volgende keer.

Wiskunst



DE KNOOP

De knoop is altijd al een symbool van onontwarbaarheid geweest en tevens een symbool van bevestiging. Bekend zijn de gordiaanse knoop — die we eventueel door kunnen bakken —, de knoop van de zeilschool en de knoop van het perzische tapijt.

Het woord 'knoop' kennen we als eufemisme voor vloek en een 'mens in de knoop' hebben we allemaal wel eens ontmoet.

In de etalages van handwerk winkels zien we makramé, kunstig geknoopt touw-werk. En zouden breien en baken ook niet iets met knopen te maken hebben?

F. VAN DER BLIJ

Wanneer u in utrecht van het centraal station, bekend knooppunt van spoorlijnen, via hoog catharijne naar de binnenstad loopt, komt u halverwege bij een metalen knoop, door Shin-kichi Tajiri in een metalen cylinder aange-bracht (fig. 1); dat is nog eens iets anders dan lepel-tjes buigen!

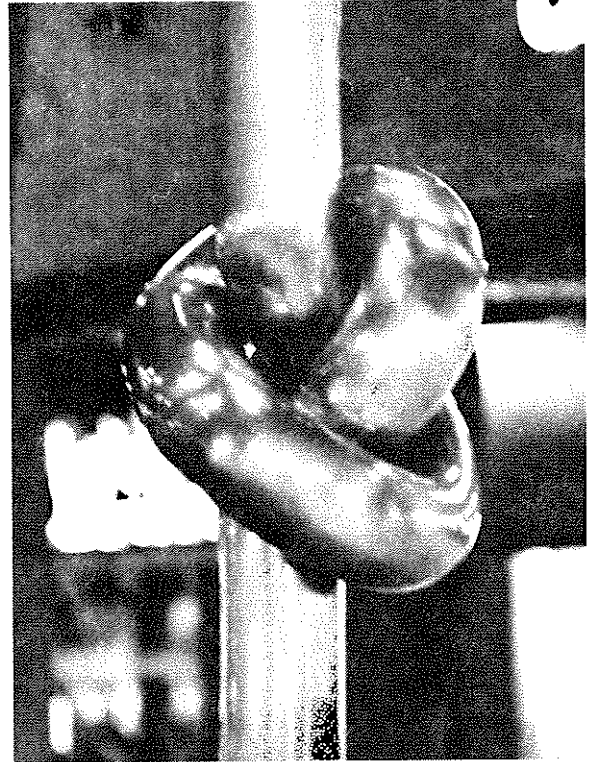


fig. 1

Ook in de wiskundeliteratuur komen we knopen tegen. Mijn eerste kennismaking verliep via een zeer charmant boekje van H. Tietze: 'Ein Kapitel Topologie. Zur Einführung in die Lehre von den verknöteten Linien'.¹⁾ Na een introductie via schoenveters en elektriciteits-snoeren met stekkers en contrastekkers, ontmoette ik de klaverbladknoop, liever gezegd: de klaverbladknopen.

Laten we eens van een vlakke tekening uitgaan, en wel van een gesloten kromme met drie dubbelpunten (fig. 2).

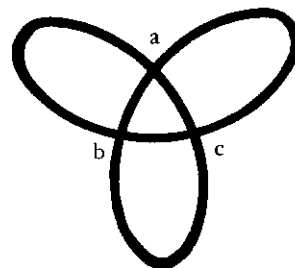


fig. 2

¹⁾ Hamburger Mathematischen Einzelschriften (1942).

We willen er een autoracebaan van maken en leggen de kruisingen ongelijkvloers. Er zijn drie kruispunten: a , b en c . Dus zijn er acht verschillende circuits te maken. Als we een lint op de autoweg leggen, dan blijkt in een aantal van de mogelijkheden dit lint, wanneer we het in onze hand nemen (het was een circuit voor speelgoedauto's!), eenvoudig een cirkelomtrek te zijn.

In twee gevallen echter, zit er in het lint een knoop die we er niet uit kunnen halen zonder de zaak kapot te maken. Een cirkel en een klaverbladknoop zijn topologisch niet ekwivalent. Ze zijn niet door een continue transformatie in elkaar over te voeren.

In de cirkelomtrek kunnen we een zeepvlies spannen. Als we in de knooplijn een oppervlak willen spannen, krijgen we dit (tenzij we zelfdoorsnijdingen toelaten) niet gedaan. Een boeiende vraag is, of de linker- en rechterknoop (fig. 3), die elkaars spiegelbeeld zijn, in elkaar (binnen onze driedimensionale wereld) over te voeren zijn.

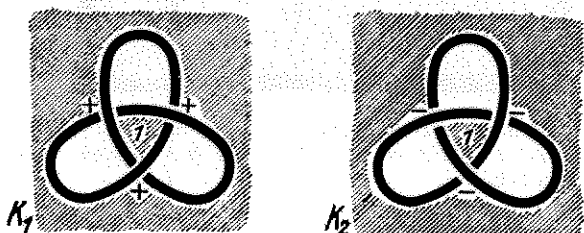


fig. 3

Om u wat onzeker te maken, laat ik nog twee knopen zien, die elkaars spiegelbeeld zijn en die in ieder geval in elkaar over te voeren zijn (fig. 4).

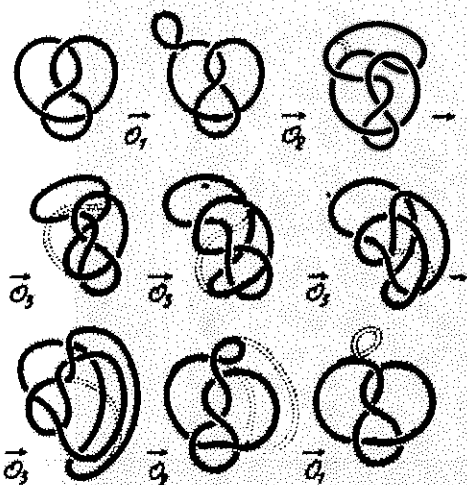


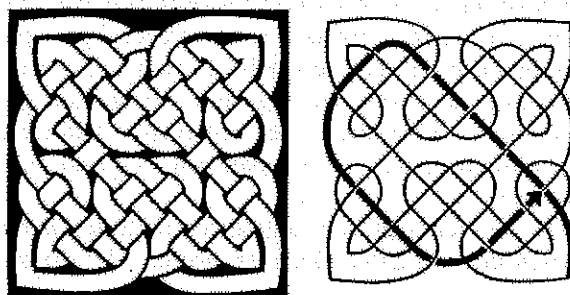
fig. 4

Er is een topologische theorie gemaakt over knopen en hun klassifikatie en over de voor de hand liggende vraag: hoe kun je twee of meer gesloten krommen met elkaar verknopen? U kent de goochelaarstruuk om drie in elkaar hangende cirkelvormige metalen ringen los te maken tot drie losse ringen.

Nu komen we terecht bij een heel ander deel van de beeldende kunst als waar we bij Tajiri van uit gingen. Laten we een bron noemen. In 'Science News 33'¹⁾ stond een artikel van H.A. Thurston met als titel: 'Celtic Interlacing Patterns and Topology'. De vraag die in dit artikel gesteld wordt, gaat uit van één gesloten kromme met een aantal dubbelpunten.

We beginnen ergens te wandelen en kiezen bij ieder dubbelpunt (meer gekompliceerde singuliere punten mogen niet voorkomen in dit verhaal) of b of o , geïnterpreteerd als *hovenover* of *onderdoor*. Zoals bij de kromme met drie dubbelpunten bleek, kan dit natuurlijk op vele manieren plaatsvinden en kan 't geheel verschillende topologische knopen opleveren. Nu brengen we als ekstra eis te berde:

we lopen langs de kromme en kiezen de eerste keer b , de volgende keer o , dan weer b , dan weer o ; we maken dus een vlechtwerk (fig. 5).



Schematische voorstelling van een knoop uit 'The Book of Kells'

fig. 5

Als we zo helemaal rondgegaan zijn, vinden we bij ieder dubbelpunt precies één b en één o . Zouden we $b-b$ punten of $o-o$ punten vinden, dan was het vlechten wel lelijk mislukt. In het artikel van Thurston wordt dit vlechten geïllustreerd met keltische ornamenten, die zo'n vlechtstructuur bezitten. Tevens wordt een bewijs gegeven.

In de selectie van Edmund V. Gillon Jr., 'Russian Geometric Design and Ornament'²⁾, en in een keuze uit Y. Chernikhov, 'Ornament'³⁾, vinden we ook zulke vlechtwerken (fig. 6).

We laten aan de lezer over, na te gaan welke van deze ornamenten uit één lijn bestaan en welke ornamenten verschillende gesloten krommen vormen, al dan niet in elkaar geschakeld. We hebben naast keltische ornamenten nu ook russische gevonden. Ornamenten vormen

1) Penguin Books (londen 1954).

2) Dover (new york 1969).

3) Leningrad 1930.

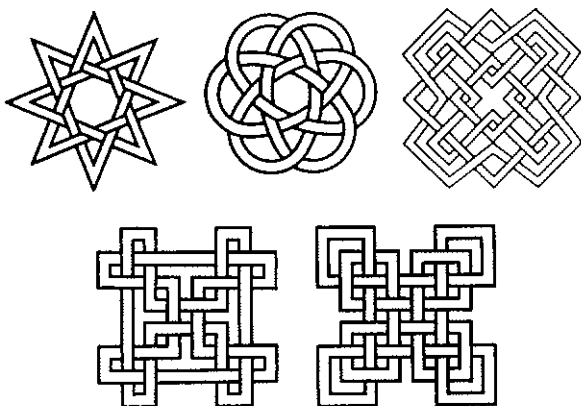


fig. 6

een bestanddeel in de beeldende kunst van zeer vele culturen en deze vlechtornamenten vinden we op nog veel meer plaatsen.

Het lijkt bij dit onderwerp duidelijk, dat de kunstenaar geen gebruik maakte van een abstracte wiskundige theorie over knopen en geknoopte lijnen. Toch mogen we niet konkluderen dat de artiest geen wiskunde toepaste. Homologie en homotopieklassen zijn voor de keltische ontwerper vreemde woorden geweest. In hoeverre de *begrippen* hem toch nog enigszins vertrouwd waren, durven we niet te beoordelen. De relatie van vlakke ornamenten met de bewegingsgroep van het vlak, ligt meer voor de hand dan de algebraïsering van het op en neer vlechten, bij een aantal in elkaar geschakelde krommen. Het ontwerpen van deze patronen echter, is hoe dan ook een stuk wiskunde.

We zouden wel een onderscheid tussen *meer* en *minder wiskunde* kunnen maken. Het runen-



fig. 7

Runensteen ten noorden van stockholm. Ongeveer in het jaar 1000 opgericht door Gaidas en Jarund ter gedachtenis aan de zonen van hun zusters Einmund en Ingemund

gedenkteken (fig. 7) vertoont geen gesloten krommen, maar linten met het begin en het eind vrij simpel ineen gevlochten.

Hetzelfde geldt voor de miniatuur op de voorpagina van het Wolbodo psalterium (fig. 8).

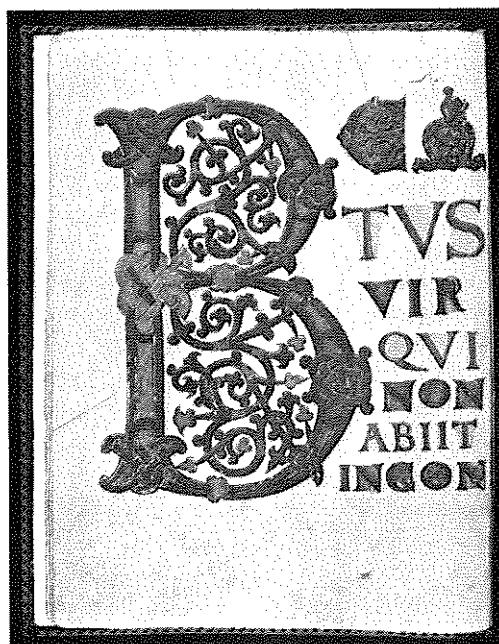


fig. 8

Folio 10 van het handschrift Psalterium van de H. Wolbodo. Trier of utrecht, ca 1000. Bezit van de koninklijke bibliotheek België

Een, onder wiskundigen bekend moors raam, is wiskundig zeer fraai en zowel mathematisch als artistiek gezien, een geweldige prestatie (fig. 9).

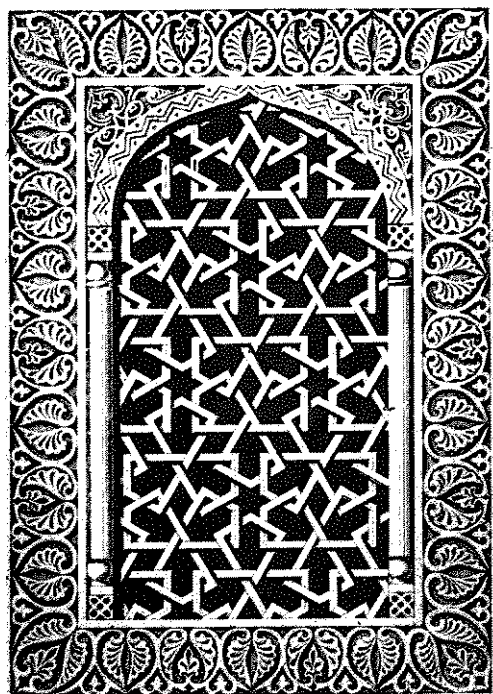
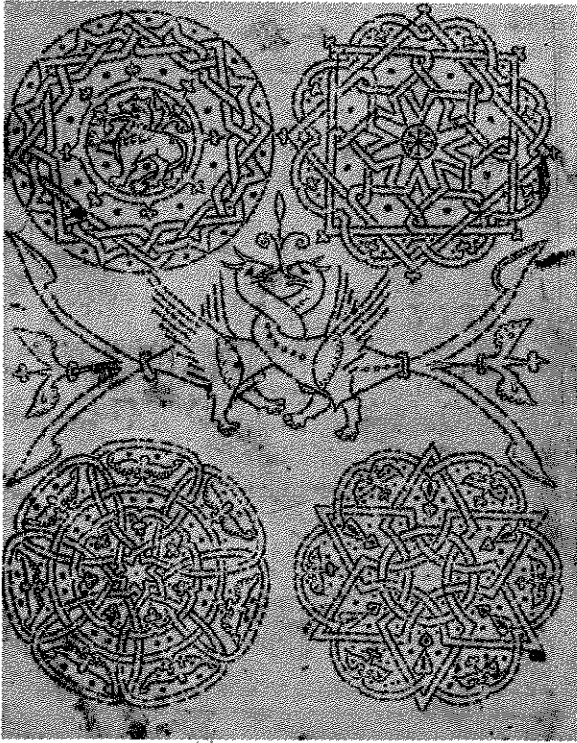


fig. 9

Ook in de joodse traditie vinden we zeer vernuftige knoopillustraties (fig. 10).



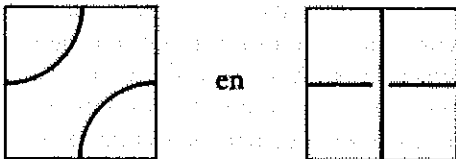
Bijbel met Massora magna et parva. Duits type. Eind 13^e eeuw

fig. 10

Het verbod om mens of dier af te beelden, maar daarentegen de nadruk op het woord te leggen, voert tot schriftbeelden. Met een modern woord zouden we dit visuele of concrete poëzie¹⁾ kunnen noemen.

Daarnaast zijn ook in steen gehouwen voorbeelden te vinden in Arabische bouwwerken in Centraal Azië (fig. 11).

U kunt zelf ook allerlei knoop-gezelschapsspelletjes ontwerpen door legpuzzels te maken met twee soorten kaartjes, namelijk:



Eventueel kunt u ook ruitjespapier gebruiken en om beurten hokjes opvullen. Het is dan een variant op een bekender spel.

In het boekje van Tietze wordt getaltheorie te hulp geroepen om een klassifikatie te verkrijgen; zelfs niet-triviale feiten over ekwivalentie

¹⁾ Zie: katalogus stedelijk museum (amsterdam 1970).



Uzkend, detail van een portaal, terracotta octagon met rosetta en palmetten

fig. 11

van kwadratische vormen, kunnen gebruikt worden om bijvoorbeeld te bewijzen dat de twee klaverbladknopen niet in elkaar over te voeren zijn. Ook kan een begin van een grammatika van vereenvoudigeregels gegeven worden, waarmee knopen tot een standaardvorm kunnen worden herleid.

De laatste knoop waar ik uw aandacht voor wil vragen, is de knoop die prof.dr. N.G. de Bruijn uit steen hakte en het iowo aanbood. De knoop hangt nu in een van de vergaderkamers (fig. 12). U komt maar eens kijken om hem te analyseren!

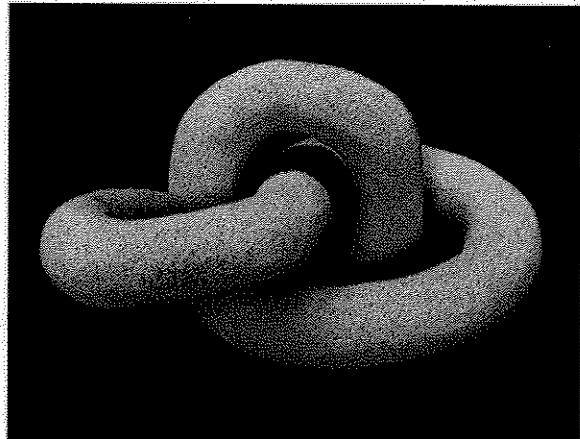
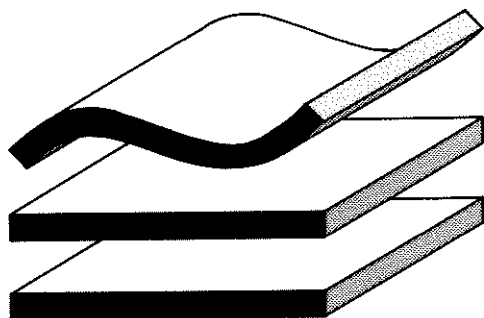


fig. 12

problema- tika

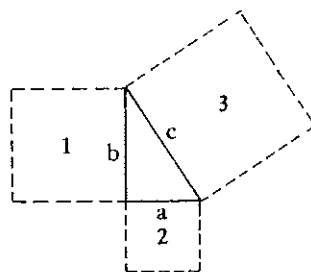


Hiernaast ziet u het plaatje dat behoort bij de bekendste stelling in de wiskunde: de stelling van Pythagoras.

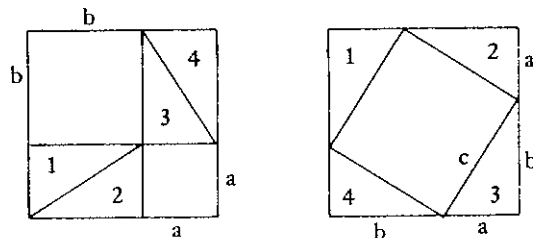
Van de schoolbanken berinnert u zich nog wel dat deze stelling zegt, dat in een rechtboekige driehoek met schuine zijde c en rechtboekzijden a en b geldt: $c^2 = a^2 + b^2$. Aangezien a^2 , b^2 en c^2 de oppervlakten voorstellen van respectievelijk de vierkanten 1, 2 en 3, betekent dit: oppervlakte 3 = oppervlakte 1 + oppervlakte 2.

HUUB JANSEN

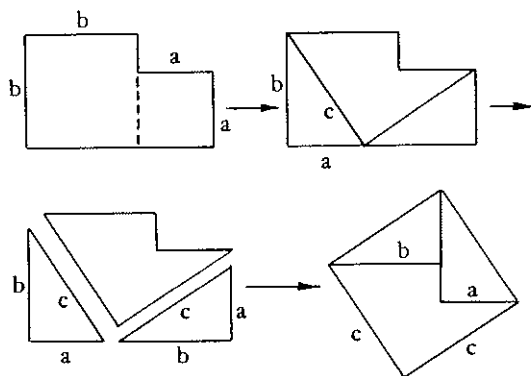
1 PYTHAGORAS



Van de stelling van Pythagoras zijn tientallen bewijzen bekend. Als u de volgende tekeningen met elkaar vergelijkt, dan 'ontdekt' u één van deze bewijzen.



Een ander bewijs is te vinden in deze tekeningen:



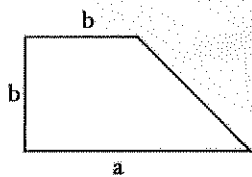
Het aardige van dit laatste bewijs is, dat het geleverd wordt door de oorspronkelijke figuur met een schaar in stukken te knippen en deze stukken weer tot een nieuwe figuur samen te voegen. Het probleem daarbij is natuurlijk wel, dat tevoren bedacht moet worden waar en hoe geknipt moet worden. Dat dit niet zo'n eenvoudige zaak is, blijkt wel uit het feit dat dit 'knip'-bewijs van de stelling van Pythagoras pas honderd jaar oud is, terwijl de stelling zelf al zo'n slordige 40 eeuwen geleden werd toegepast.

Onze vraag is:

► Wie kent nog een ander knipbewijs van de stelling van Pythagoras?

Het zoeken naar dergelijke bewijzen heeft wellicht bijgedragen tot het ontstaan van allerlei 'meetkundige' puzzels, waarbij figuren in stukken geknipt moeten worden om nieuwe figuren te maken. Wij geven er hier een paar, waarbij steeds de eis gesteld wordt dat *recht* geknipt moet worden. Geen bochtwerk dus!

2
TRAPEZIUM



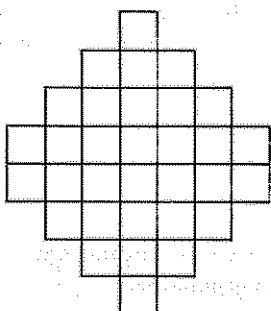
Wiskundigen én leerlingen noemen deze figuur een rechthoekig trapezium. Wij vertellen erbij dat dit een bijzonder rechthoekig trapezium is, want zijde *a* is twee keer zo lang als de zijden die met de letter *b* zijn aangegeven. Het is een vrij eenvoudig begin, want wij vragen slechts:

► *Knip dit trapezium in vier gelijke stukken.*

3
RUITJES



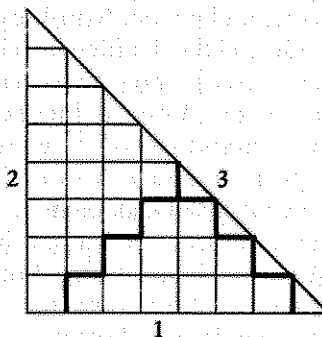
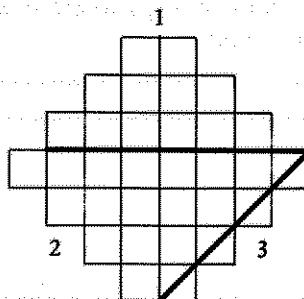
Veel knippuzzels kunnen handig opgelost worden door op ruitjespapier te tekenen. De structuur van het papier maakt het eenvoudig om gelijke oppervlakten en gelijke lengten te herkennen en daarvan gebruik te maken. Wij geven hier een probleem met de ruitjes erbij.



Gevraagd wordt:

► *Knip deze figuur in drie stukken, die samengevoegd kunnen worden tot een rechthoekige, gelijkbenige driehoek.*

Om u op weg te helpen en bovendien voor misstappen te behoeden, geven we hier een oplossing die niet goedgekeurd kan worden, omdat bij het knippen geen drie maar zes stukken ontstaan.

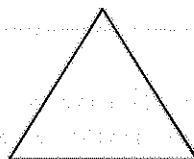


Probeert u maar!

4
DRIEHOEKEN



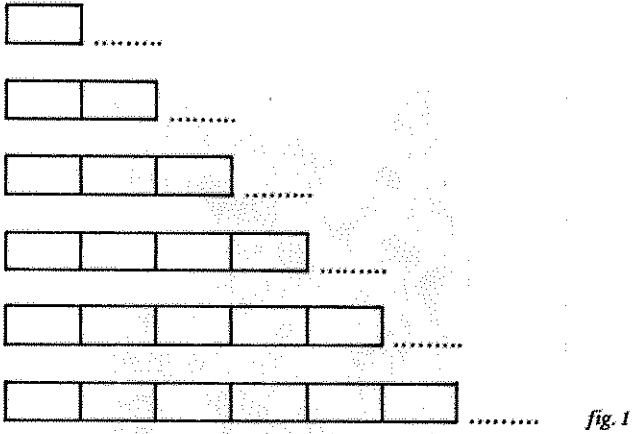
De bekendste meetkundige figuur is de driehoek. De mooiste driehoek is natuurlijk die waarvan de drie zijden gelijk zijn: de gelijkzijdige driehoek.



Gevraagd wordt:

► *Knip deze gelijkzijdige driehoek in vijf stukken, die samengevoegd een vierkant vormen.*

① *Tel in elke rij steeds het aantal rechthoeken.*



► *Vul nu de volgende tabel in:*

aantal kleine rechthoeken	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
totaal aantal rechthoeken		3								

② *Hoeveel driehoeken van de soorten a, b, c, d, e, f en g kun je in fig. 2 vinden?*

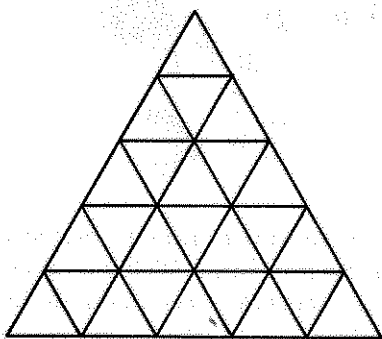


fig. 2



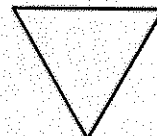
a.....



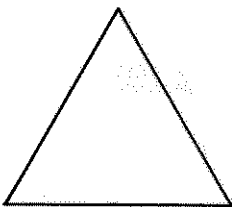
b.....



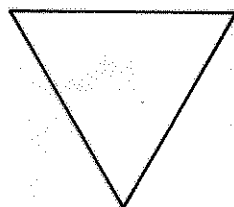
c.....



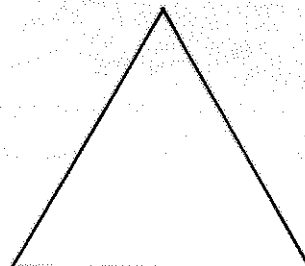
d.....



e.....



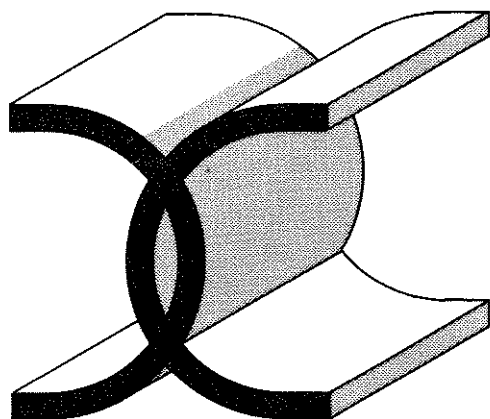
f.....



g.....

► *Hoeveel driehoeken zijn er totaal in fig. 2?*

opleiding



Op de christelijke pedagogische akademie 'juliana van stolberg' in gorinchem is een begin gemaakt met het ontwikkelen van een voorbeeld schoolwerkplan 'wiskunde en didaktiek' voor de onderwijzersopleiding.

In deze rubriek willen we belangstellenden – docenten, studenten, maar ook onderwijzers die hun opleiding al achter de rug hebben – regelmatig impressies geven van dit gorkums gebeuren.



FRED GOFFREE
HUUB JANSEN

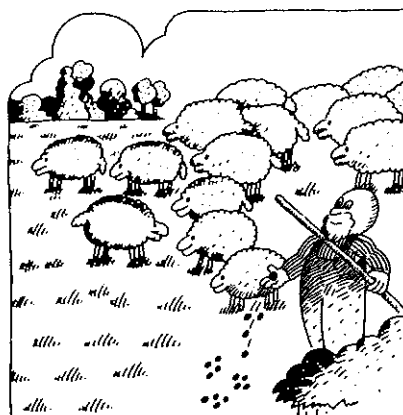
► HET VERHAAL VAN HET LAND-VAN-ACHT

inleidend kollege

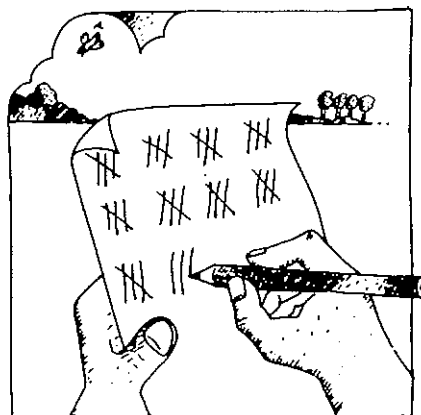
Het land-van-acht wordt geïntroduceerd. Een denkbeeldig land, waarvan de inwoners kunnen tellen en rekenen, maar.....



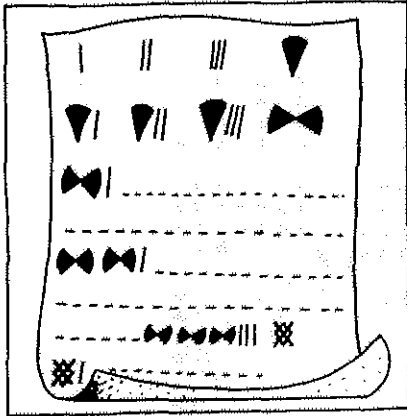
Lang geleden leefde er een schaapherder, die met steentjes het aantal schapen in zijn kudde controleerde.



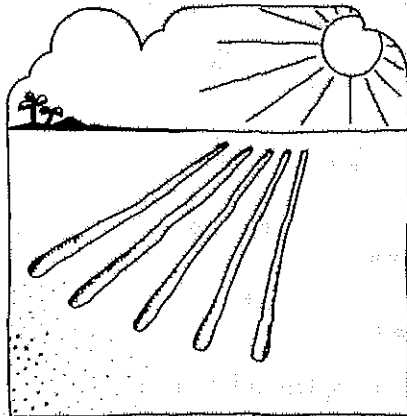
Later gaan de bewoners turven: met streepjes in klei of kerven in hout. Wellicht staat daarbij het aantal vingers van één hand model voor de overzichtelijke groepering die al turvend ontstaat.



Dan ontstaat een ander systeem: de turf-streepjes worden vervangen door symbolen.

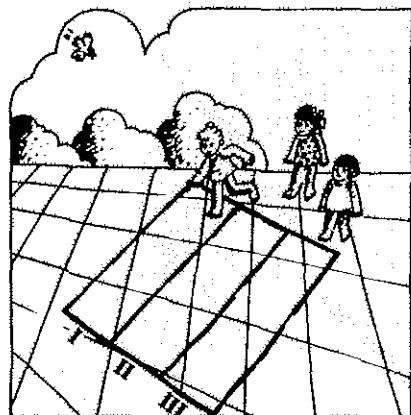


Hiermee kunnen de telresultaten nog handiger genoteerd worden. Voor het moeilijke rekenen wordt bovendien een praktisch 'apparaat' uitgedacht: het telraam of de abakus. Simpel gekonstrueerd, met gleuven in zand of klei.



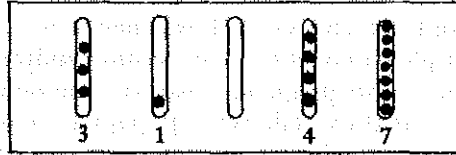
Het weergeven van getallen op zo'n gleufabakus gaat met steentjes of schelpen. Of – zoals in de klas van de pedagogische academie anno 1975 – met dubbeltjes op de overheadprojektor.

Behalve volwassenen, die tellen en rekenen, zijn er in het *land-van-acht* ook kinderen. Op straat spelen ze dans- en hinkelspelletjes.



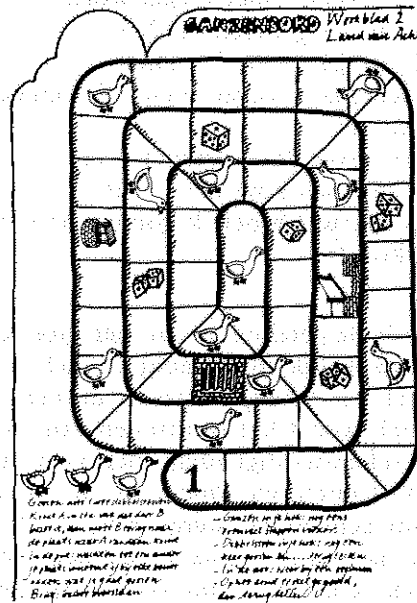
Al zingend, dansen de kinderen stuk voor stuk het eerste vak in. Als dat vak zeven kinderen bevat en er komt er nog eentje bij, dan – zo luidt de regel – wordt vak I té vol. Alle kinderen vormen dan een kring, die naar vak II verhuist. Een spannend moment ontstaat als in het eerste vak zeven kinderen én in het tweede vak zeven kringen staan...

Dit inwisselospelletje van de kinderen brengt de volwassenen in het *land-van-acht* op een idee: met zeven verschillende symbolen zien ze kans elke abakus-stand te beschrijven:



Per slot van rekening komen in de gleufabakus ook hoogstens zeven steentjes in een rij.

Wanneer, veel later, ook in het *land-van-acht* papier en potlood worden uitgevonden, blijkt er nóg een symbool nodig te zijn om alle getallen te kunnen noteren. Toch is na verloop van tijd iedereen in staat om de getallen te schrijven en ... ermee te rekenen. Zoals tijdens de lange wintermaanden, wanneer het *land-van-achtse* ganzenbord op tafel komt.



essentiële punten

In dit kollege is de overstap gemaakt naar een ander talstelsel, waarin – voorlopig – door de studenten geteld, gerekend en ... gedacht gaat worden.

De essentiële punten uit het kollege:

- het registreren van een aantal door een één-éénafbeelding op (bijvoorbeeld) een verzameling steentjes;

- de iets meer gestructureerde aanpak van het turven, die leidt tot een additieve notatie;
- de merkwaardige toestand van het naast elkaar bestaan van een additieve schrijfwijze en een positionele abakus;
- de vertaling van de abakus-aanpak naar het schrijven op papier, de uitvinding van de nul (0) en het nu ontwikkelde positionele systeem;
- de mogelijkheden die het positionele stelsel ons biedt om veel en vlug (= efficiënt) te rekenen;
- het feit dat 'snel en veel' rekenen in de loop der tijden ondersteund werd door hulpmiddelen, verlengstukken van de menselijke geest: abakus, cijferen op papier, pennemachine, tafelrekenmachine, elektronische rekenmachine,.....

De volgende activiteiten voeren tot een eerste doordinking van de systematiek, die aan zo'n talstelsel ten grondslag ligt, en van de rol die deze systematiek speelt bij het uitvoeren van rekenkundige bewerkingen. De moeilijkheden, die de studenten hierbij zelf ondervinden, zijn bovendien illustratief voor de rekenproblemen van hun toekomstige leerlingen in de tientalige basisschool.

De studenten ervaren die moeilijkheden als het ganzenbordspel gespeeld gaat worden:

- invullen van de getallen: 1, 2, 3 ... 7, 10, 11, ... 16, 17, 20, 21, ... 76, 77, 100;
- namen bedenken, zeven, één-nul, één-één, ..., één-nul-nul;
- ik gooi met twee dobbelstenen 4 en 5;
ik sta op 16; waar kom ik terecht?
- ik sta op 13; wat moet ik gooien om voorbij 25 te komen?
-

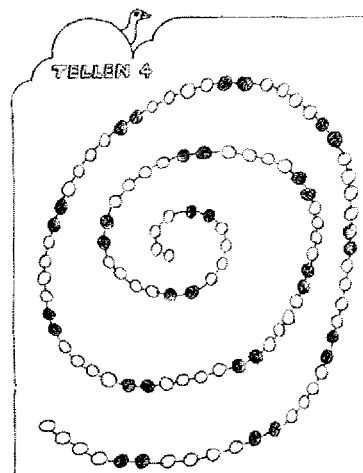
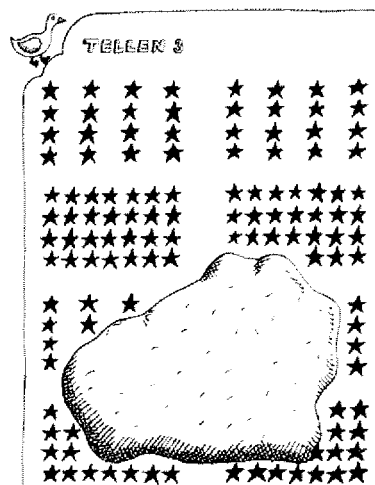
Al snel wordt de getallenlijn van het speelveld als een noodzakelijk instrument ontdekt om de eerste tel- en rekenproblemen de baas te kunnen. Toch wordt het ontbreken van *land-van-achtse* rekenvaardigheden merkbaar aan de gemaakte fouten, en vooral aan de tijd die nodig is om eenvoudige berekeningen uit te voeren. In het *land-van-acht* worden deze vaardigheden aangeleerd op de basisschool. Terug naar die basis ervaren de studenten nu als een zinvolle stap.

werkbladen

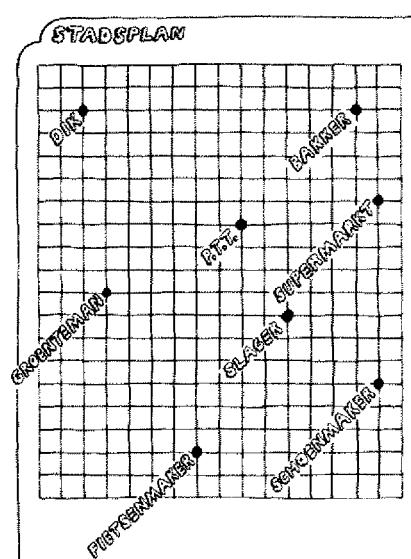
In de school van het *land-van-acht* maken de kinderen zich de nodige tel- en rekenvaardigheid eigen, terwijl ze omgaan met problemen die de onderwijzeres vaak aan de hand van werkbladen introduceert.

Werkbladen bijvoorbeeld met telproblemen,

die uitnodigen tot het gebruik van patronen of regelmaat:

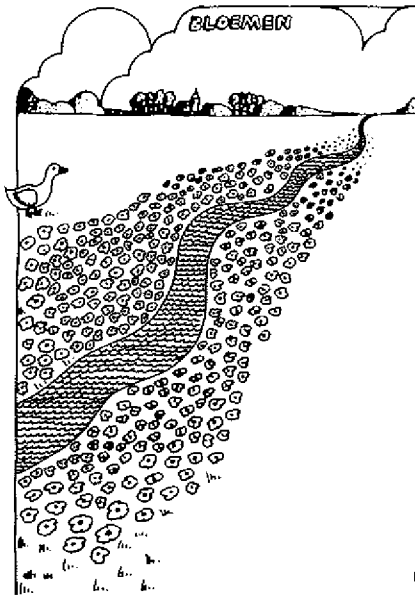


En op het stadsplan leidt de vraag naar de kortste roete van de postbode, die bij alle huizen een brief moet bezorgen, tot zulke lastige tel- en rekenproblemen, dat de zwoegende studenten bijna vergeten in welk land nu eigenlijk gewerkt wordt.



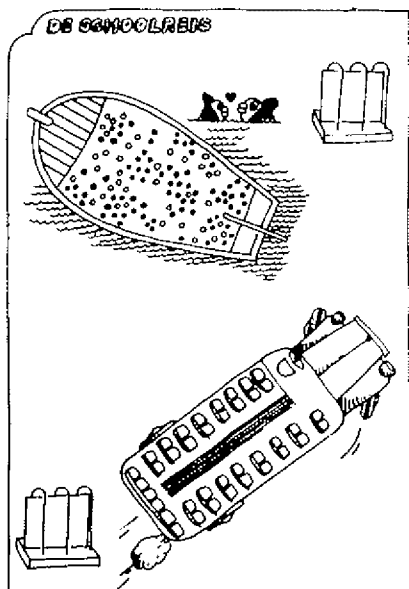
Een werkblad met veel bloemen aan weerszijden van het water, leidt tot het zoeken naar handige telstrategieën als gevraagd wordt: waar staan er meer?

Bundelen in groepjes van 'één-nul' is een mogelijkheid.



Wanneer de studenten de daarop volgende week een gesprekje observeren van hun docent met enkele 'normale' kinderen, dan merken ze dat kinderen niet vanzelf tot een overeenkomstige bundeling in tientallen komen.

Een werkblad bij een verhaal over een schoolreisje met bus en boot biedt, behalve telproblemen, ook *land-van-achtse* rekenproblemen.



Zijn er meer jongens of meer meisjes op de boot? Hoeveel keer moet de bus heen en weer rijden om alle kinderen te vervoeren?

tenslotte

Hier vertellen wij de lezer nog slechts dat in de vier weken onderwijs op de pedagogische academie (4 x 2 uur), die deze introductie vergde, een groot aantal bekende rekenaspecten uit het wiskobas-integratieplan, vertaald naar het *land-van-acht*, de revue zijn gepasseerd.

Een summier overzicht:

- optellen en aftrekken op de abakus;
- maken van een opteltabel;
- handig tellen van blokjes in muurtjes en bouwsels;
- vermenigvuldigtabel;
- entoesiast opdreunen van de *land-van-achtse* tafels van vermenigvuldiging;
- tafelbingo;
- staartdelen.

* * *

► LOGBOEK

Bij dit alles werd nog een stap gezet. In het wiskundendidactiek-onderwijs moet het omgaan met en oplossen van probleemsituaties, gevolgd worden door een eigen reflectie op het bijbehorende 'leren'.

Aanleidingen tot zo'n reflectie kunnen zijn:

- gesignaleerde verschillen in probleem aanpak tussen studenten onderling;
- ervaringen dat toepassen van kennis nog iets anders is dan het kennen-zonder-meer;
- effect van het gebruikte materiaal (ruitjespapier, abakus, ...) op het vinden van oplossingen.

Iedere student is hiertoe gestart met het aanleggen van een logboek, waarin subjectieve ervaringen en belevingen worden opgenomen. Afstand nemen van eigen leren en het beschrijven daarvan is een moeilijke zaak, die geleerd moet worden.

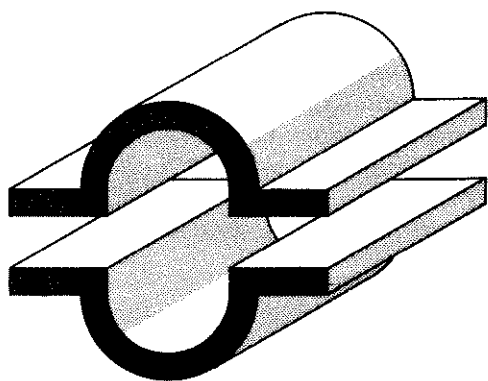
We sluiten deze 'opleidingen' af met een logboeknotitie:

'Donderdag 18 september

Geleerd:

- Belangrijk is het kunnen denken in een systeem dat gemakkelijk de oplossing geeft en wat je ook eenvoudig aan een ander kunt overbrengen.
- Je uitleg zo mogelijk met een beeldfiguur verduidelijken.
- De moeilijkheid van het eenvoudige vermenigvuldigen als je de tafels niet kent.
- Het overbrengen van een zelfgevonden oplossing aan een ander. Je moet je indenken dat de ander de opzet van je denkwijze niet kent, dus moet je van de grond af aan uitleg geven ook al lijkt dit zo eenvoudig voor je.'

ander werk



'EKSTERNE' OUDERPARTICIPATIE

Bij 't raam hadden we een nieuwe buitentermometer opgehangen, die onze bart (negen jaar) erg boeide.

Na er wat tegenaan geblazen te hebben, ging hij ijverig een tabelletje maken, om iedere dag de temperatuur op te schrijven: 'smorgens, tussen de middag en 's avonds voor het naar bed gaan.

Toen het niet beleemaal wilde vlotten, riep hij mijn hulp in. Van het een kwam het ander en we besloten in 't weekend ieder uur de temperatuur op te nemen.

Eerst wilden we een nieuwe tabel maken, maar hij stelde voor om gewoon de kwikstaafjes naast elkaar te tekenen.

Entoesiast deed hij zaterdagmorgen de eerste meting; 's middags was hij slechts met moeite bereid om mee te gaan naar oma (zie het 'gat' in de waarneming tussen 15 en 19 uur).

Nauwelijks minder entoesiast heb ik zelf de grafiek tot 's avonds laat doorgezet.

Bij nader inzien leek het ons beter de zondaggrafiek vlak naast die van zaterdag te tekenen met een ander kleurtje.

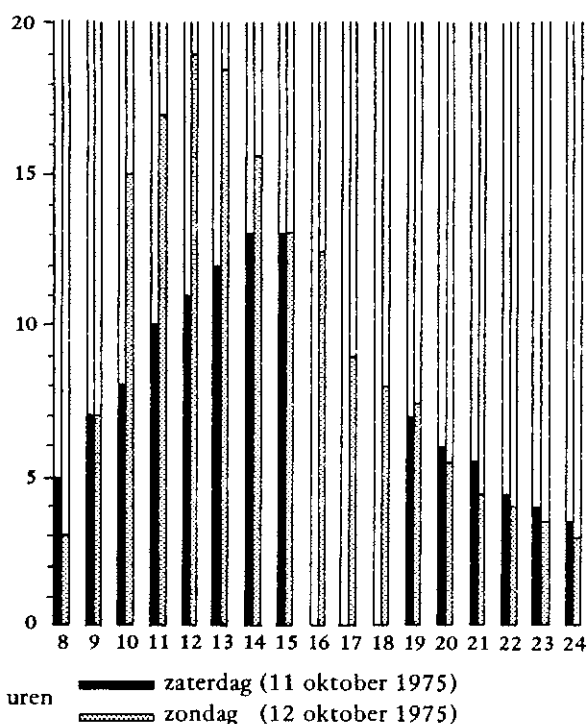
'Dan kun je goed zien, wanneer het warmer was, vond bart.

EDU WIJDEVELD

Zaterdagavond waren we zeer gelukkig met het fraaie plaatje en voor 't naar bed gaan hebben we 'm uitvoerig bekeken.

'Eigenlijk is het niet eerlijk', zei bart, 'want vandaag scheen de zon op de termometer en gister niet en zoveel warmer is het echt niet geweest vandaag.'

Gelijk had 'ie, want ik had inmiddels ook al geleerd dat de termometer verkeerd hing.



Toen ik zondagavond de grafiek afmaakte, vond ik het jammer hem zo te laten liggen omdat er nog veel meer uit af te lezen was. Ik maakte er een vragenlijstje bij en legde die 'achteloos' naast de grafiek op tafel. En ja hoor, toen ik maandagmorgen beneden kwam, had bart de vragen al beantwoord.

'Een paar vragen snapte ik niet goed', zei hij. Toch trof me het inzicht waarmee hij in de 'nabespreking' over de grafiek praatte. (En over z'n antwoord op vraag 9 was ik helemaal verrukt: wat voor winters hebben we inderdaad de laatste jaren gehad...!)

Ik ben met bart wel eens meer bezig geweest met 'doe-ideeën' of werkkaarten, maar dit probleem opende voor ons een nieuw soort communicatie waar ik erg gelukkig mee was. Ik ging namelijk dingen zoeken die nu eens niet in de boekjes stonden, maar die in zijn – en mijn – dagelijkse omgeving gebeuren. En achteraf bezien liggen ze voor het oprapen. Nog een voorbeeld!

Op een keer 's avonds bij het naar bed gaan, drupte de kraan in de wastafel: tik-tik-tik-...

1 Wat waren op zaterdag en zondag de hoogste en de laagste temperatuur die we gemeten hebben?

	de hoogste temperatuur	de laagste temperatuur
zaterdag	13 °C	6 °C
zondag	19 °C	3 °C

2 Op welk uur van de dag was het verschil tussen de temperatuur van zondag en zaterdag het grootst. Hoeveel graden?

het verschil was om ...12... uur het grootst.
 Zaterdag 13 en zondag 19
 het scheelde toen ...8... graden

3 Hoe kwam het dat de temperatuur op zondag zoveel hoger werd dan op zaterdag?

omdat de zon erop scheen.

4 Hoe laat begon op zondag de zon op de thermometer te schijnen?
Waarom denk je dat?

om 1/2 10 ongeveer

5 Hoeveel graden was het ongeveer om 9 uur 30 op zondag, denk je?
En op zaterdag, om 9 uur 30?

zondag 12
zaterdag 7 1/2

6 Als je nu de temperatuur op zaterdag om 4 uur, 5 uur en 6 uur moest raden, wat vulde je dan in?

	hoeveel graden?
zaterdag: 4 uur	11 °C
5 uur	10 °C
6 uur	9 °C

7 Hoeveel graden was het zaterdagnacht om 12 uur? Hoeveel graden zondag om 8 uur? Raad nu eens hoeveel graden het in de nacht van zaterdag op zondag was om 1 uur, om 3 uur en om 6 uur.

zaterdagnacht 12 uur: 3 1/2 °C
 zondagmorgen 8 uur: 3 °C
 in de nacht van zaterdag naar zondag
 1 uur: 2 1/2 °C 3 uur: 1 °C 6 uur: 2 °C

8 Op welk uur van de dag was de temperatuur op zaterdag en zondag precies gelijk?

dat was om 9 uur precies en om 1/2 8

9 Schat eens wat de hoogste temperatuur is die in een mooie zomer in Nederland voorkomt. En de laagste temperatuur in een strenge winter?

hoogste temperatuur in de zomer: 33 à 34
 laagste temperatuur in de winter: 3 à 4 onder 0
 maar bij oma was 4 laagst 35 °C.

Bart vroeg zich af hoeveel druppels er wel in zijn kamer konden.

'En als er nu eens één druppel per seconde valt, hoe lang zou het dan duren voordat je kamer helemaal vol is?', vulde ik aan.

Eerst hebben we de hele familie laten schatten; 't resultaat liep uiteen van drie maanden tot zes jaar. Toen zijn we aan het werk gegaan: we hebben druppels geteld in een glaasje, het aantal glaasjes in een kopje, het aantal kopjes in een fles, enzovoorts. We hebben z'n kamer gemeten met de centimeterband, plattegronden getekend, inhouden bepaald en gerekend...! Bart wilde niet ophouden voor het antwoord er lag: ca 150.000.000 druppels, gedurende ca 5 jaar.

Van alles hebben we nog gedaan, grote en kleine dingen, wát zich maar voordeed; als we het maar leuk vonden tenminste. We hebben kleurencombinaties van 'hoedje-wip' geteld, de snelheid van een batterij-autootje bepaald, onze paslengte vergeleken tijdens een wandeling, kraaltjes 'uitgelegd' om een beeld te krijgen van 25 miljoen jaar (we kwamen tot acht km),...

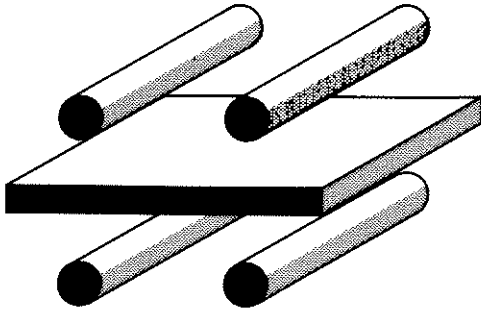
Nu is het voorgaande misschien niet zo belangrijk, maar het bracht me wel op een gedachte. Op de meeste scholen is wel enige vorm van ouderparticipatie: nuttige werkzaamheden verrichten voor de school en soms een kind apart wat ekstra hulp bieden met schrijven, lezen, rekenen. Heel zinvol, maar toch...

Wat ik me namelijk afvraag is of deze ouderparticipatie niet uit te breiden zou zijn met een vorm van eksterne betrokkenheid: thuis! De school, tezamen met de ouderkommissie, zou een bijeenkomst moeten beleggen om belangstellende ouders meer wegwijs te maken in de onderwijsgang van die school. Niet te veel praten, maar doen: de ouders al werkend ideeën laten opdoen – 't liefst uit de praktijk van alledag – die ze thuis zó met hun kinderen kunnen toepassen.

Op een volgende bijeenkomst zouden de ouders elkaar iets kunnen leren, door ervaringen en nieuwe ideeën uit te wisselen. Op die manier zouden de ouders, net als ik, het dagelijks leven leren ontdekken als een rijke inspiratiebron voor leuke en zinvolle activiteiten met hun kinderen, die een aanvulling op het schoolonderwijs kunnen betekenen. En ik ben er van overtuigd dat de ouders op hun beurt weer aktualiteiten weten aan te dragen waar de school op in kan spelen.

Als dit proces een keer op gang komt (en blijft), zou het me niet verbazen als ouders zich heel wat direkter bij het onderwijs betrokken gaan voelen, dan nu veelal maar mogelijk is...

kleuters en wiskunde



HET GEZIN

De kleuterperiode is een tijd vol activiteiten, waarin de kleuter er op uitgaat om de wereld te ontdekken.

Het kind benadert de wereld door middel van zijn lichaam, zijn eigen 'zijn'.

In het onderwijs krijgt de kleuter volop gelegenheid de reële wereld te ontdekken en te beleven. Het onderwijs dient zó gegeven te worden, dat er een uitnodiging, een uitdaging van uitgaat. Beginnen we met het vertellen van een verhaal, dan zullen de kinderen meteen geboeid zijn. Een verhaal kan vele aanknopingspunten bieden voor wiskundige activiteiten.

In het nu volgende verhaal gaat het vooral om tegenstellingen.

JEANNE DE GOOYER-QUINT

het verhaal

Aan de rand van het bos staat een huis. In dat huis wonen drie mensen: een grote vader, een kleinere moeder en hun kleine zoon mark.

In het huis staan drie stoelen: een grote, een kleinere en een heel klein stoeltje. Op de tafel staan drie borden: een groot, een kleiner en een heel klein bord.

Elke morgen kookt de moeder pap. Vandaag is de pap nog te heet. Ze gaan daarom maar eerst een eindje wandelen in het bos.

Liesje, een klein meisje, is ook aan het wandelen. Ze komt bij het huis en ze gaat eens kijken. De deur staat open en ze stapt naar binnen. Liesje ziet de drie borden staan. Ze heeft een beetje honger. Ze proeft van de pap uit het grote bord, maar die is te heet. De pap van het kleinere bord is te koud, maar de pap uit het kleinste bord is precies goed. Ze eet de pap helemaal op.

Dan ziet ze de stoelen staan. Ze gaat op de grote stoel zitten, maar die vindt ze te hard. De kleinere stoel vindt ze te zacht, maar het kleinste stoeltje is precies goed.

Liesje krijgt al gauw slaap en gaat naar boven. Daar ziet ze drie bedden staan. Het grote bed is te hard, het kleinere bed is te zacht, maar het kleinste bed is precies goed.

Na een tijdje komen de drie mensen thuis.

'Wie heeft er van mijn bord gegeten?', vraagt vader met zijn zware stem en mark zegt met een hoge stem: 'wie heeft al mijn pap opgegeten?'.

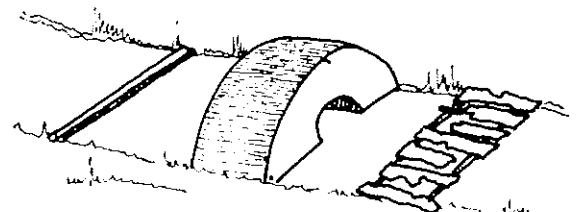
Ze gaan naar boven.

'Wie heeft er in mijn bed gelegen?', vraagt vader.

'Kijk, er ligt iemand in mijn bed', zegt mark.

Liesje wordt wakker van het lawaai. Ze ziet de drie mensen en schrikt zo erg, dat ze het huis uitrent en in het bos verdwijnt.

Het verhaal heeft een open einde. De kinderen kunnen zelf bedenken wat er verder met het meisje gebeurt. De leidster kan een probleemsituatie voorleggen.



Liesje moet een rivier oversteken. Er zijn drie mogelijkheden:

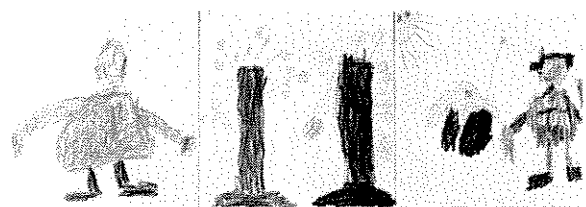
- een smalle plank, waarop je niet met twee voeten naast elkaar kunt staan;
- een hoge steile brug;
- een brede brug, waarvan de planken los liggen en waarin zelfs gaten zitten.

► *Welke brug zal liesje kiezen en wat zijn dan de moeilijkheden?*

Het gaat hier om de argumentatie van de kinderen. Misschien is er nog een vierde mogelijkheid: een andere weg zoeken.

De herhaling van het verhaal door de kinderen, bijvoorbeeld dramatiserend, is van belang om de opeenvolging van activiteiten in het verhaal korrekt te laten verlopen. Het kind moet zich herinneren wat er gebeurde: hoe was het ook weer?

We kunnen de kinderen een filmstrook laten tekenen met een aantal opeenvolgende momentopnamen uit het verhaal.



filmstrook van martin

In het verhaal komen steeds de begrippen 'groot' en 'klein' naar voren. Op grond van deze kenmerken kunnen de jongste kleuters allerlei materialen rangschikken.

Gebruik kan worden gemaakt van potloden, flessen, potten, auto's, poppen, etc.

De oudere kleuters zullen verder nuanceren: klein-kleiner-kleinst, groot-groter-grootst.

We moeten er echter rekening mee houden, dat 'iets' bekeken moet worden ten opzichte van een ander 'iets'. Dit zal duidelijk worden in het volgende voorbeeld.

Een kind zegt: 'deze vrachtwagen in de bouwhoek is groot'; hij heeft gelijk als hij er een dinkytoy naast denkt, maar ongelijk ten opzichte van een echte auto op straat.

We zullen de kinderen moeten leren zich duidelijker uit te drukken:

..... is kleiner dan

..... is groter dan

etc.

De begrippen 'zwaar' en 'hoog' (bij de stem) kunnen we laten ervaren aan de hand van klanken: eigen stem, muziekkokers en klankstaven. Evenzo met 'hard' en 'zacht' aan de hand van geluiden en materialen. Door middel van voelen kan de tegenstelling 'heet-koud' ervaren en bepaald worden.

* * *

in de klas

juf: In het verhaal stonden drie verschillende borden op tafel voor de pap. Wie kan hier in de klas drie verschillende bekertjes vinden?

ll₁: In de knutselbak.

Hij zoekt er drie uit en zet ze naast elkaar.



ll₂: Nee, het moet zo!

Hij zet de bekertjes in een andere volgorde:



juf: Vertel eens waarom je ze anders neerzet.

ll₂: Dat zie je toch, die (de eerste) is groot.

Hij bedoelt te zeggen: die is breed, de volgende is kleiner (smaller) en deze is de kleinste (smalste).

juf: Daniël heeft het goed, maar jeroen had de bekertjes anders gezet en dat vond ik ook goed.

ll₁: De beker is hoog en die is niet zo hoog en de achterste is heel laag.

Hij gebruikt een ontkenning in de zin, omdat hij waarschijnlijk het woord 'lager' niet tot zijn beschikking heeft. We hebben nu een moment geschapen om met de inhoud van de bekertjes te gaan experimenteren.

juf: We gaan eens kijken hoe het met de verschillende maten van de stoelen staat. Vader zat op een

kinderen, tegelijk: Uw stoel, juf.

ll₃: Mijn stoel is voor moeder.

Ze zet hem naast de grote stoel.

ll₄: Ja dat is goed, want die stoel is kleiner.

juf: En nu de kleinste stoel! Kijk eens naar de stoel naast je.

kinderen: Allemaal even groot.

ll₅: De kruk

Ze gaat hem meteen halen.

ll₅: Nee, toch niet.

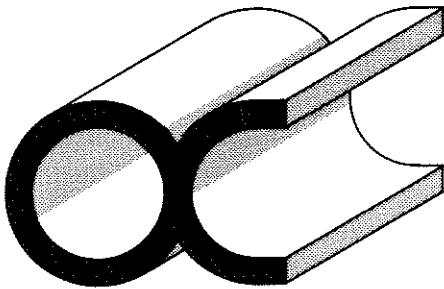
Een meisje dat tot nu toe erg stil was, roept entoesiast uit dat ze het ziet en weet. Ze rent naar de poppenhoek en komt met een poppenstoeltje terug.

Alle kinderen zijn blij dat astrid de oplossing gevonden heeft.

ll₆: En nu de bedden.

.....
Na de bedden worden de (eigen) gezinsleden getekend en in volgorde van grootte geplaatst. Naar aanleiding van de tekeningen vertellen de kinderen honderduit. Het is van belang hen hierin niet te beperken.

kijk
ook eens
zo!



**VAN CYCLOSTYLEPAPIER NAAR
KONVERGENTIE VAN RIJEN**

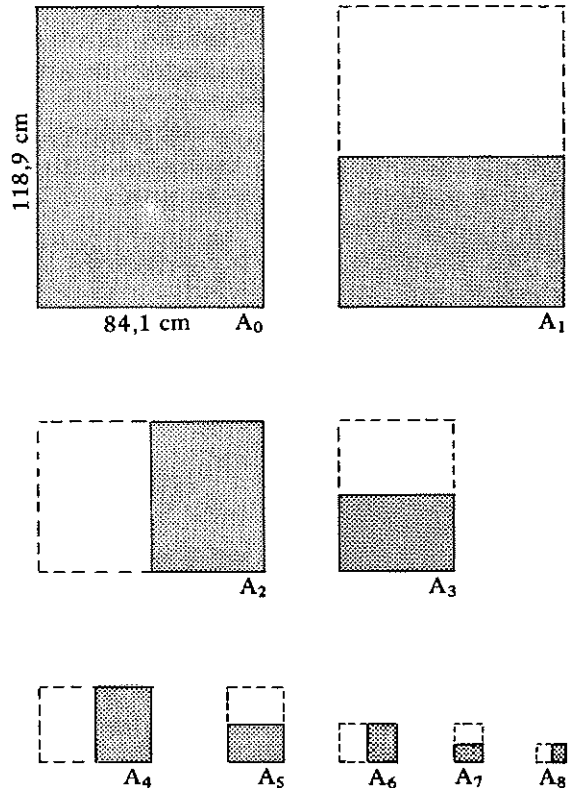
Een veel gebruikt papierformaat is tegenwoordig het formaat A₄ (21 cm x 29,7 cm). Het bijzondere van dit formaat is, dat de lengte $\sqrt{2}$ (ongeveer 1,41) maal de breedte is.

Het gevolg hiervan is, dat als we een vel A₄ doormidden snijden (in het midden van de twee lange zijden), er twee rechthoekige velletjes ontstaan waarvan opnieuw de lengte $\sqrt{2}$ keer de breedte is. Deze velletjes hebben elk het formaat A₅. Zo worden, zonder papierverlies, twee vellen A₄ gesneden uit één vel A₃, twee vellen A₃ uit één vel A₂.

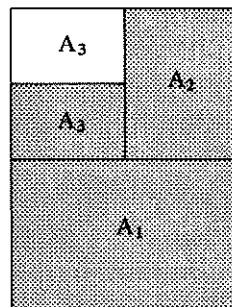
Het grootste formaat is A₀ (breed 84,1 cm; lang 118,9 cm). Het kleinste handelsformaat is A₈ (5,25 cm x 7,4 cm).

DIK OORT

konvergente rijen



We spreken af dat we de oppervlakte van A₁ 1 noemen. De oppervlakte van A₀ is dan 2. We pakken nu een vel A₁, een vel A₂ en een vel A₃ en proberen daar een rechthoek van formaat A₀ van te maken. We zien dat ons in dit geval precies één velletje A₃ ontbreekt.



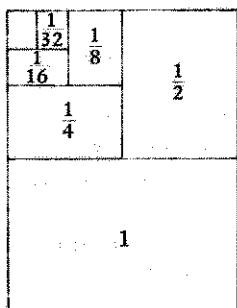
Als we elk vel vervangen door het getal dat de oppervlakte aangeeft, krijgen we:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$

Zo is:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 2 - \frac{1}{32}$$

We kunnen dit met onze velletjes als volgt illustreren:



Als we de rij steeds verder doorzetten (elk getal, elke term van de rij is de helft van z'n voorganger), dan is de som steeds 2, vermindert met de laatste term.

We kunnen dus het verschil tussen de som en het getal 2 kleiner maken dan elk (positief) getal. Als u wilt dat dit verschil kleiner is dan $\frac{1}{1000}$, moet u de rij minstens voortzetten tot en met een term die kleiner is dan $\frac{1}{1000}$, bijvoorbeeld tot en met $\frac{1}{1024}$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} = 2 - \frac{1}{1024};$$

dat is 1,9990234375.

Neemt u nog meer termen, dan wordt het verschil tussen 2 en de som van de rij steeds kleiner. Het wordt echter nooit 0.

De som van de termen van bovenstaande rij wordt — al zetten we de rij voort tot er geen eind aan komt — nooit 2, maar we kunnen, als we maar ver genoeg doorgaan, het verschil tussen 2 en de som van de rij blijvend kleiner maken dan elk (positief, klein) getal.

We drukken dit kortweg uit door te zeggen:

de limiet van de som van de (oneindig voortlopende) rij is 2.

Een rij die een limiet heeft, noemen we *convergent*.

divergente rijen

Niet elke rij, waarvan de termen steeds kleiner worden, heeft een limiet, bijvoorbeeld:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots$$

De som van deze rij stijgt boven elk getal uit. Neem bij elkaar $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$; dit is meer dan $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, dus meer dan $\frac{1}{2}$.

Neem daarna de termen tot en met $\frac{1}{8}$:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \text{ is meer dan } \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8},$$

dus meer dan $\frac{1}{2}$.

Daarna neemt u de volgende termen tot en met $\frac{1}{16}$, dan gaat u verder tot en met $\frac{1}{32}$, dan tot en met $\frac{1}{64}$, enz. Steeds heeft u een aantal termen die samen meer dan $\frac{1}{2}$ zijn.

Het is dus duidelijk dat de som groter kan worden (als u de rij maar ver genoeg voortzet) dan 1.000.000. We nemen eenvoudig 2.000.000 van bovengenoemde stukjes (er zijn er genoeg, we zetten de rij 'eindeloos' voort). Elk stukje is meer dan $\frac{1}{2}$, dus samen meer dan 1.000.000. Voor elk nog groter getal kunnen we dezelfde redenering opstellen.

De som van deze rij stijgt boven elk getal uit. Deze rij heeft geen limiet. Hij is niet convergent. We noemen deze rij *divergent*.

groepjes in de rij

Een interessante rij is ook:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \dots$$

We verdelen de rij in groepjes van twee termen:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \dots$$

De eerste groep is $\frac{1}{2}$ waard.

Bij de tweede groep moet er $\frac{1}{3}$ bij en daarna $\frac{1}{4}$ eraf, dus moet er $\frac{1}{12}$ bij.

Bij de derde groep moet er $\frac{1}{5}$ bij en $\frac{1}{6}$ (dat is minder dan $\frac{1}{5}$) eraf, er moet dus $\frac{1}{30}$ bij.

Het blijkt dat er bij elke groep een getal (letje) bij moet en een kleiner getal eraf. Elke groep betekent dat er iets bij komt.

De eerste groep heeft de waarde $\frac{1}{2}$. Als we dus de tweetallen termen die volgen, bekijken, dan blijkt dat we daarna steeds iets bij de som moeten doen willen we de rij voortzetten. De som begint met $\frac{1}{2}$ (som van de eerste twee termen) en stijgt daarna voortdurend (als we steeds twee termen verder gaan). De limiet van de term is dus *groter dan* $\frac{1}{2}$.

We kunnen de rij ook anders in groepjes verdelen, namelijk als volgt:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

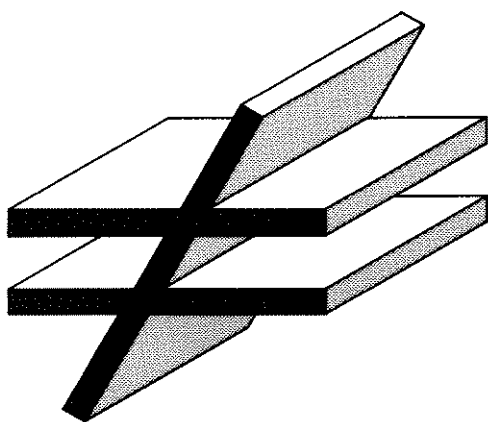
We beginnen met het getal 1 en nu zegt elke groep dat er een getal af moet en een kleiner getal erbij. Dat wil zeggen: elk groepje van twee termen betekent, dat er iets van de som afgaat. Dit houdt in dat de limiet van de som *kleiner dan 1* is.

We weten nu dat de limiet van de som groter dan $\frac{1}{2}$ en kleiner dan 1 is. Dat wil nog niet zeggen dat de limiet precies $\frac{3}{4}$ is.

Om enig idee van deze limiet te krijgen, nodig ik u uit om maar eens de eerste twintig, dertig of veertig termen van de rij op te schrijven en uit te rekenen (mooie gelegenheid om het optellen en aftrekken van breuken te oefenen) hoe groot de som is van de rij die u opgeschreven heeft.

Sterkte!

nieuw op de markt



De deeltjes 1 en 2 van de 'Introductie-cursus wiskunde op de basisschool'¹⁾ (auteurs De Cocq en Van de Poel) dragen de titels 'verzamelingen en relaties' en 'talstelsels'. Op het binnenblad van deze boekjes lezen wij:

'Achtergrondinformatie voor leerkrachten van het basis- en beroepsonderwijs en studenten aan pedagogische academies.

Werkwijze

Steeds wordt eerst een stuk studietekst bestudeerd en meteen daarna worden de opgaven gemaakt die na de betreffende studietekst komen.

Voor schoolteams is het aan te raden de opgaven gezamenlijk te maken.

Als de opgaven in het boekje worden verwerkt, ontstaat een handzame leidraad voor het werken met wiskunde op de basisschool.'

Degenen, die menen dat het wiskunde-onderwijs vanuit deze formule vernieuwd kan worden, kunnen deze raad rustig opvolgen.

Ik kan me echter nauwelijks voorstellen dat de auteurs zich serieus achter dit citaat kunnen stellen.

ED DE MOOR

wees wijs met wiskunde

Aan de serie 'Wees wijs met wiskunde'²⁾ van de auteurs Karman en Boerema is een tweede deel toegevoegd. Vijftien viervoudige werkbladen handelen over de onderwerpen grafieken, spiegelen, gemiddelde, omtrek en oppervlakte, en beweringen.

De meeste aandacht is besteed aan omtrek en oppervlakte. Ik vind dat ook het beste deel. Naast een 'traditionele' methode zijn deze kaarten goed bruikbaar. Jammer is het, dat af en toe geknipoogd wordt naar de formele wiskunde uit het huidige voortgezet onderwijs.

another, another

Aan het werk van Marion Walter hebben we al eens uitvoerig aandacht besteed.³⁾ Aan haar reeks boekjes met spiegels, heeft zij een derde eksemplaar toegevoegd onder de titel: 'Use the 2 mirrors in this book to see another, another, another and more'.⁴⁾

In feite gaat het om kaleidoskoopmeetkunde, waarmee op alle nivo's, van kleuters tot en met studenten, gewerkt kan worden.

De kleuter kan mooie patronen maken, de wat oudere leerling kan wat meer gerichte opdrachten uitvoeren, en op het hoogste nivo kan het principe van het herhaald spiegelen onderzocht worden. Zeer goed! Welke nederlandse uitgever vertaalt deze boekjes eens?

heuristisch en wiskunde

De boeken van Polya behoren tot mijn lijstje van tien favoriete boeken die je mee naar een onbewoond eiland zou willen nemen. Eén van deze boeken 'How to solve it?' is thans vertaald onder de titel 'Heuristisch en wiskunde'.⁵⁾

Uit de tekst op de omslag zou men kunnen opmaken dat het boek ook geschikt is voor onderwijzers van het basisonderwijs. Het boek is echter geschreven voor wiskundeleraren en wiskundestudenten.

¹⁾ De Cocq en Van de Poel: Introductie cursus wiskunde op de basisschool (Malmberg den bosch, prijs: f 7,60).

²⁾ Boerema, Karman: Wees wijs met wiskunde (Kok kampen, prijs deel 2: f 39,50).

³⁾ Wiskobas-bulletin (jaargang 4 nr. 2, pag. 123).

⁴⁾ Walter, Marion: Another, another, another and more (André Deutsch london, prijs: £ 1,95).

⁵⁾ Polya, G.: Heuristisch en wiskunde (Malmberg den bosch, prijs: f 16,50).

Polya is één van de eerste hooggeleerde wiskundigen geweest, die op eenvoudige wijze zijn eigen en andermans wiskunde-leren heeft trachten te analyseren. In zijn boeken *Induction and Analogy in Mathematics* en *Patterns in plausible Inference* gaat hij hierin nog verder, maar dan op een hoog mathematisch nivo. Het is dan ook een goede gedachte van Malmberg geweest om dit boek te laten vertalen. Toch moeten mij enkele dingen van het hart, namelijk dat:

- deel 1 ('in de klas') eindigt met een voorbeeld uit de differentiaalrekening;
- de tekening niet klopt met de tekst;
- de kraan wel heel erg hard stroomt ($2 \text{ m}^3/\text{min}$);
- 'diepte' hoogte moet zijn;
- breuken slordig zijn afgedrukt;
- de vertaler het woord 'rate' soms verkeerd interpreteert:

'The derivative as the *rate* of change of a function.'

als

'De afgeleide naar de tijd is de snelheid, waarmee de funktiewaarde verandert.'

- de tekst scheef op het papier staat;
- in een ander deel van het boek 'reductio ad absurdum' wordt vertaald met 'bewijs uit het omgerijmde';
- er 67 onderwerpen (oorspronkelijke tekst) in deel 4 worden aangekondigd, terwijl er maar 62 zijn...

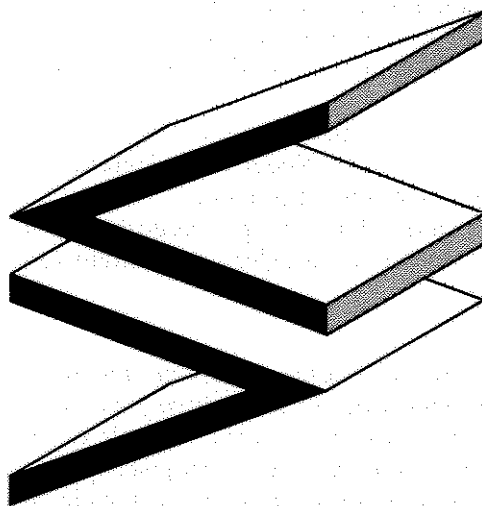
Alla... niet zo kinderachtig; het blijft een goed boek en het is verder goed vertaald.

Maar dat op de voorkant staat '*een andere kijk op de werkwijze van de wiskunde*', terwijl Polya dit 30 jaar geleden al bij de eerste druk kleintjes onder de titel vermeldde, vind ik valse voorlichting aan de koper.

Het doet me denken aan het verhaal van een Amerikaanse konsumentenbond, die bezwaar maakte tegen het woordje 'nieuw' op een reeds 40 jaar oud produkt.

De firma in kwestie verdedigde zich toen met de uitspraak: 'maar je spreekt toch ook van het Nieuwe Testament'.

berichten



LOUIS GILISSEN
KLAAS KOSTER

prof. Freudenthal 70 jaar

Prof. Freudenthal is op 17 september j.l. 70 jaar geworden. Ter gelegenheid van dit feit werd door het mathematisch instituut van de rijksuniversiteit te utrecht een symposium georganiseerd. Verschillende onderwerpen uit de wiskunde, de geschiedenis van de wiskunde en de didaktiek, kwamen hierbij aan de orde. Aan het eind van de middag, tijdens de receptie, ontving prof. Freudenthal een gedenkboek.

Tevens kreeg prof. Freudenthal het erelidmaatschap van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars aangeboden.

Prof. Freudenthal zal op 1 augustus 1976 afscheid nemen als hoogleraar-directeur van het iowo.

nota's

In de discussienota *'Naar een structuur van de ontwikkeling en vernieuwing van het primair en secundair onderwijs'* heeft de minister van onderwijs en wetenschappen een aantal nota's op meer specifiek terrein in het vooruitzicht gesteld. In april 1975 is bij de staatsuitgeverij een discussienota *'Schoolbegeleiding'* verschenen. In deze nota zijn uitspraken gedaan over de plaats van de schoolbegeleiding in de nederlandse onderwijsstructuur. Daarmee is het onderwijs een belangrijke stap verder gekomen in de richting van een duidelijke structuur voor ontwikkeling en vernieuwing van het onderwijs.

Een nota die meer stof heeft doen opwaaien, is de in juni 1975 verschenen discussienota *'Contouren van een toekomstig onderwijsbestel'*, waarin een schets wordt gegeven van een samenhangend onderwijssysteem voor het jaar 2000.

Het verschijnen van deze nota is niet alleen toe te juichen wegens de ideeën ten aanzien van het onderwijs, maar ook wegens het feit dat ruim de tijd wordt genomen om de voorgestelde veranderingen te konkretiseren en te onderzoeken op werkbaarheid en consequenties.

Beide nota's zijn op het instituut uitgebreid aan de orde geweest en reacties zullen aan de minister worden toegezonden.

verouderde methodiek

Vernieuwingen in het onderwijs vergen veel tijd. Een duidelijk voorbeeld daarvan geeft het tijdschrift *'Curriculum Theory Network'*¹⁾, dat laat zien hoe onderwijskundigen in amerika 50 jaar geleden dachten over leerplankonstruktie en leerplanvernieuwing.

In een kritische beschouwing over het werk van Bobbitt en Charters in de jaren twintig, trekt Kliebard lijnen naar de huidige stand van zaken in leerplankonstruktie en lerarenopleiding. Zijn konklusies zijn niet bepaald vrolijk. In het algemeen werken de amerikaanse leerplankonstruktors volgens Kliebard nog op dezelfde basis als Bobbitt en Charters destijds deden.

Kenmerkend in deze benadering is, dat het onderwijs wordt opgevat als een plaats waar je iets leert voor 'later'. Volgens de verhandeling is het ook mogelijk nauwkeurig te bepalen wat iemand op school precies moet leren om zich maatschappelijk staande te houden. Door de doelen van het onderwijs in afzonderlijke deeldoelen te specificeren, kan de school daarop gerichte activiteitenprogramma's uitvoeren. Voor iedere vaardigheid worden de te bereiken leerresultaten van de studenten aangegeven, zonder dat de samenhang in de vaardigheden veel aksent krijgt.

Het rendement van de voorgaande benadering is volgens Kliebard niet erg groot geweest. Niettemin volhardt men in de konstruktie-methode van destijds. Onder nieuwe namen als *'competency-based teacher education'* of *'performance-based teacher education'* treft men in principe dezelfde werkwijzen aan als van Charters in de jaren twintig. Toen leidde deze 'scientific' methode van kurrikulumkonstruktie tot een programma van de teacher colleges, waarin bijvoorbeeld de volgende 'teacher activity' als één van de doelstellingen voorkwam:

'Maintaining cordial relations with superintendent. This involves being loyal to and respecting the superintendent. Becoming acquainted with superintendent and working in harmony with him. Performing friendly acts for superintendent; remembering superintendent at Christmas; making designs and drawings for superintendent; making lamp shades for superintendent's wife.'

Kliebard noemt het een raadsel waarom een bepaalde konstruktie-methode zo lang stand houdt, terwijl de resultaten ervan niet meer serieus worden genomen. Een oplossing voor de kurrikulumkonstruktors heeft hij ook niet, maar het lijkt hem in ieder geval niet verstandig klakkeloos de tot dusver gehanteerde methode te handhaven.

Voor doorgewinterde wiskobassers is het voorgaande vermoedelijk geen nieuws (men denke aan de leerplanologie-serie van Adri Treffers en Edu Wijdeveld).²⁾ Het is aan de andere kant wel eens nuttig om te zien, dat de wiskobas-werkwijze van leerplankonstruktie niet in de valkuilen loopt van de meeste amerikaanse kurrikulumprojecten.

1) 1975, volume 5/1.

2) Wiskobas-bulletin, jaargang 2 en 3.



dlb.